



HAL
open science

Un cadre algébrique pour le raisonnement qualitatif en présence d'informations hétérogènes : application aux raisonnements multi-échelle et spatio-temporel

Quentin Cohen-Solal

► **To cite this version:**

Quentin Cohen-Solal. Un cadre algébrique pour le raisonnement qualitatif en présence d'informations hétérogènes : application aux raisonnements multi-échelle et spatio-temporel. Recherche d'information [cs.IR]. Normandie Université, 2017. Français. NNT : 2017NORMC245 . tel-01717553

HAL Id: tel-01717553

<https://theses.hal.science/tel-01717553v1>

Submitted on 26 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Informatique

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Un cadre algébrique pour le raisonnement qualitatif
en présence d'informations hétérogènes :
application aux raisonnements multi-échelle et spatio-temporel

Présentée et soutenue par
Quentin COHEN-SOLAL

Thèse soutenue publiquement le 11/12/2017
devant le jury composé de

Monsieur Philippe BALBIANI	Directeur de recherche, CNRS, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse	Rapporteur
Monsieur Jean-François CONDOTTA	Professeur des universités, Université d'Artois	Rapporteur
Monsieur Jérôme EUZENAT	Directeur de recherche, INRIA, Université Grenoble Alpes	Rapporteur
Madame Odile PAPINI	Professeur des universités, Aix-Marseille Université	Examinatrice
Monsieur Alexandre NIVEAU	Maître de conférences, Université de Caen Normandie	Examinateur
Madame Maroua BOUZID	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Directrice de thèse

Thèse dirigée par Maroua BOUZID et coencadrée par Alexandre NIVEAU, laboratoire GREYC

Invité : Monsieur Gérard LIGOZAT, Professeur des universités (retraité), Université Paris-Sud 11



Résumé étendu

Parmi les différentes formes de raisonnement étudiées dans le contexte de l'intelligence artificielle, le *raisonnement qualitatif* permet d'inférer de nouvelles connaissances dans le contexte d'informations imprécises, incomplètes et dépourvues de valeurs numériques. Il permet par exemple de déduire de nouvelles informations à partir d'un ensemble d'informations spatiales telles que « la France *est frontalière* de l'Allemagne », « la Suisse *est à l'est* de la France », « l'Italie *est en* Europe » et « le Luxembourg *est proche* de la France ». Il peut également être utilisé pour résoudre des abstractions de problèmes quantitatifs difficiles à résoudre, afin par exemple d'accélérer la résolution de ces problèmes.

De nombreux formalismes de raisonnement qualitatif ont été proposés dans la littérature. Ils ne se focalisent cependant que sur un seul aspect du monde, alors que la majorité des applications requièrent la prise en compte d'informations hétérogènes. Afin de répondre à ces besoins, plusieurs combinaisons et extensions de formalismes qualitatifs, comme le *raisonnement spatio-temporel* et le *raisonnement multi-échelle*, ont récemment été proposées dans la littérature. Le raisonnement spatio-temporel permet de raisonner dans le contexte d'informations spatiales et temporelles interdépendantes. Le raisonnement multi-échelle permet de raisonner avec des informations de précisions différentes, et en particulier de lever des incohérences apparentes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au raisonnement multi-échelle, au raisonnement spatio-temporel et aux combinaisons de formalismes qualitatifs. Nous proposons d'étendre le raisonnement qualitatif temporel multi-échelle pour prendre en compte le fait que les intervalles de temps peuvent être perçus comme des instants à certaines échelles de précision, de formaliser intégralement ce raisonnement et d'étudier la *décision de la cohérence* dans ce contexte ainsi que sa complexité. Nous montrons en particulier que ce formalisme permet de décider la cohérence et que le problème de décision de la cohérence est NP-complet, même dans le cas le plus simple.

En outre, nous proposons un cadre général permettant de raisonner sur les *séquences temporelles d'informations qualitatives*, une forme de description spatio-temporelle. Ce cadre permet notamment de raisonner dans le contexte d'évolutions complexes. Par exemple, les entités considérées peuvent avoir des caractéristiques préservées au cours du temps, évoluer de manière dépendante les unes par rapport aux autres, tout en ayant un comportement potentiellement irréversible et différent selon leur nature. De plus, dans ce cadre, le raisonnement est plus performant computationnellement que les approches de l'état de l'art. Nous étudions en particulier la décision de la cohérence dans le contexte spécifique de régions mobiles de taille constante, et montrons que ce cadre permet effectivement de décider la cohérence.

De surcroît, nous proposons un cadre formel unifiant plusieurs formes d'extensions et de combinaisons de formalismes qualitatifs, incluant le raisonnement multi-échelle et les séquences temporelles. Ce cadre permet de raisonner dans le contexte de chacune de ces combinaisons et extensions, mais également d'étudier de manière unifiée la décision de la cohérence et sa complexité. Nous établissons en particulier deux théorèmes complémentaires garantissant que la décision de la cohérence est polynomiale, et nous les utilisons pour prouver que plusieurs fragments de séquences temporelles sont *traitables*.

Nous généralisons également la définition principale de formalisme qualitatif afin d'inclure des formalismes qualitatifs exclus des définitions de la littérature, importants dans le cadre des combinaisons.

Table des matières

Table des matières	5
1 Introduction	9
1.1 Contexte	9
1.2 Problématiques	10
1.3 Contributions	10
1.4 Plan	11
I État de l’art	13
2 Formalismes qualitatifs et réseaux de contraintes qualitatives	15
2.1 Introduction	15
2.2 Cadre formel des formalismes qualitatifs	16
2.2.1 Relations et schémas de partition	16
2.2.2 Raisonnement à base de relations	17
2.2.3 Structure des relations et raisonnement effectif : calcul algébrique des relations	20
2.2.4 Définitions de formalisme qualitatif	24
2.3 Formalismes qualitatifs élémentaires	27
2.3.1 Calcul et algèbre des intervalles d’Allen	27
2.3.2 Calcul des points cardinaux	29
2.3.3 RCC_8 : un calcul sur la connexion des régions	30
2.3.4 RCC_5	30
2.4 Réseaux de contraintes qualitatives	32
2.4.1 Définition d’un réseau de contraintes qualitatives	32
2.4.2 Cohérence	33
2.4.3 Clôture algébrique et décision de la cohérence	34
2.4.4 Quelques classes traitables	36
2.4.5 Minimalité et redondance	39
2.5 Conclusion	40
3 Extensions des formalismes qualitatifs	43
3.1 Introduction	43
3.2 Intégrations de formalismes qualitatifs	44
3.2.1 Les intégrations lâches	44
3.2.2 Les intégrations étroites	46
3.2.3 Abstraction et affinement	48
3.3 Raisonnements spatio-temporels	48
3.3.1 Interdépendances temporelles	49
3.3.2 Graphes de voisinage	49
3.3.3 Graphes de dominance	51
3.3.4 Formalismes spatio-temporels	53
3.3.5 Différence entre le raisonnement spatio-temporel et le raisonnement sur le mouvement	56
3.4 Raisonnement multi-échelle	56

3.4.1	Échelles temporelles	57
3.4.2	Formalismes qualitatifs temporels multi-échelles	58
3.4.3	Formalisme quantitatif temporel multi-échelle	60
3.4.4	Formalismes qualitatifs spatiaux multi-échelles	60
3.4.5	Travaux connexes au raisonnement multi-échelle	61
3.5	Autres combinaisons et extensions	62
3.5.1	Entités hétérogènes	62
3.5.2	Informations quantitatives et qualitatives	63
3.5.3	Clôture propositionnelle	64
3.6	Conclusion	65
3.6.1	Bilan	65
3.6.2	Limites des approches de la littérature	65
3.6.3	Questions ouvertes	66
II Contribution		67
4	Multi-algèbre : structure des réseaux intégrés, séquentiels et multi-échelles	69
4.1	Introduction	69
4.2	Le cadre des multi-algèbres : représentation, raisonnement et cohérence	70
4.2.1	Formalismes qualitatifs symétriques	70
4.2.2	Projections et multi-algèbres	73
4.2.3	Raisonnement à propos des relations d'une multi-algèbre	75
4.2.4	Sémantique des relations	76
4.2.5	Cohérence des relations des multi-algèbres	80
4.2.6	Réseaux sur des multi-algèbres et clôture algébrique	81
4.3	Traitabilité de la décision de la cohérence	85
4.3.1	Sous-classes algébriquement traitables	85
4.3.2	Cohérence des relations \uparrow -cohérentes	87
4.3.3	Héritage de la traitabilité par découpage	90
4.3.4	Héritage de la traitabilité par affinement vers un sous-ensemble	92
4.3.5	Conditions plus fortes pour la cohérence et propriétés remarquables	92
4.3.6	Problème de la clôture par projection et affaiblissement de formalismes	100
4.3.7	Synthèse des résultats obtenus	103
4.3.8	Limites du cadre formel proposé et des résultats de traitabilité obtenus	105
4.3.9	Illustration : combinaison taille-topologie	105
4.4	Conclusion	106
4.4.1	Bilan	106
4.4.2	Perspectives	107
5	Formalisation du raisonnement qualitatif temporel multi-échelle	109
5.1	Introduction	109
5.2	Calcul échelonné : calcul à une échelle	110
5.2.1	Représentation des entités temporelles à une échelle	110
5.2.2	Calcul des points et intervalles	112
5.2.3	Relation échelonnée et calcul échelonné	113
5.3	Calcul multi-échelle	115
5.3.1	Conversion ascendante et descendante	115
5.3.2	Systèmes de discrétisation	118
5.3.3	Multi-algèbre échelonnée et calcul multi-échelle	119
5.3.4	Raisonnement avec des échelles qualitatives	121
5.3.5	Propriétés et avantages du raisonnement multi-échelle	126
5.4	Conclusion	126
5.4.1	Bilan	126
5.4.2	Perspectives	127

6	Formalisation et étude du raisonnement sur les séquences temporelles	129
6.1	Introduction	129
6.2	Interdépendances spatio-temporelles	130
6.2.1	Définitions de la continuité et de la taille	130
6.2.2	Caractéristiques et changement de sémantique	133
6.2.3	Dynamiques des entités	134
6.2.4	Formalismes qualitatifs topologiques et mesurés	135
6.2.5	Définition générale des graphes de voisinage et des graphes de dominance	137
6.2.6	Projections des graphes de transition	139
6.3	Séquences temporelles simples	140
6.3.1	Multi-algèbres des séquences temporelles simples	140
6.3.2	Sémantique des séquences temporelles simples	143
6.4	Étude du calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire et sur intervalles	152
6.4.1	Résultats de complétude	152
6.4.2	Cohérence des relations $\overset{r}{\rightarrow}$ -cohérentes	154
6.4.3	Discussion à propos de la complexité de la décision de la cohérence	154
6.5	Séquences temporelles avec relations de caractéristique	155
6.5.1	Le problème de la taille et l'intégration lâche caractéristique-formalisme	155
6.5.2	Multi-algèbres des séquences temporelles avec relations de caractéristique	156
6.5.3	Sémantique et propriétés des relations de caractéristique spatio-temporelles	159
6.5.4	Sémantique des séquences temporelles avec relations de caractéristique	160
6.6	Étude de la topologie temporalisée avec préservation de la taille	163
6.6.1	Complétude du raisonnement pour TRCC_{8t}	163
6.6.2	Cohérence des relations $\overset{r}{\rightarrow}$ -cohérentes et affaiblissement arborescent	165
6.6.3	Complexité et sous-algèbres algébriquement traitables de TRCC_{8t}	166
6.7	Avantages et applications du cadre des multi-algèbres spatio-temporelles	168
6.7.1	Avantages computationnels des multi-algèbres	168
6.7.2	Simulation qualitative	169
6.7.3	Interpolation de réseaux de contraintes	170
6.8	Conclusion	172
6.8.1	Bilan	172
6.8.2	Perspectives	173
7	Conclusion	175
7.1	Bilan	175
7.2	Perspectives	177
III	Annexes	181
A	Preuves complémentaires de la cohérence des scénarios algébriquement clos de TRCC_{8t}	183
A.1	Évolution continue et préservation de la taille	183
A.2	Satisfaction des relations	184
	Table des figures	191
	Liste des tableaux	193
	Liste des symboles	195
	Index	201
	Bibliographie	205

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

La capacité de raisonner, c'est-à-dire d'inférer de nouvelles connaissances, est un problème central en intelligence artificielle. Parmi les différentes formes de raisonnement, le *raisonnement qualitatif* (Marquis *et al.*, 2014) vise à raisonner de manière analogue à la cognition humaine. Ainsi, le raisonnement qualitatif permet de raisonner en présence d'informations incertaines et incomplètes, et en l'absence de valeurs numériques. Il permet plus précisément de résoudre les problèmes de nature qualitative de manière efficace et également d'accélérer, dans certains cas, la résolution des problèmes quantitatifs. Il se substitue au raisonnement quantitatif lorsque celui-ci n'est pas applicable. Le raisonnement qualitatif concerne généralement les aspects continus du monde, tels que le temps, l'espace ou encore les quantités. Il permet de raisonner, par exemple, sur des informations telles que « *avant de rentrer chez moi, j'étais à la boulangerie* », « Alice est *plus jeune* que Bob » et « L'Italie est *au sud-est* de la France ». A partir des informations « la séance de cinéma *démarre* à l'ouverture du restaurant » et « le restaurant ouvre *après* le spectacle », le raisonnement qualitatif est capable de déduire automatiquement que « la séance de cinéma est *après* le spectacle ». Le raisonnement qualitatif trouve ses applications dans la résolution de problèmes, la planification et le traitement du langage naturel (Ligozat, 2011).

Comme tout raisonnement, le raisonnement qualitatif se fonde sur un *formalisme* consistant en un langage de représentation de l'information considéré et en un ensemble de règles de raisonnement permettant de déduire de nouvelles informations à partir d'informations préexistantes. Un formalisme permet donc de raisonner dans un contexte particulier sur certains types d'informations. Par exemple, le formalisme *region connection calculus* (RCC) permet de raisonner sur la connexion et l'inclusion des régions. Il formalise des raisonnements tels que « puisque Paris est en France et la France est en Europe, Paris est en Europe ».

Une des principales tâches du raisonnement qualitatif est la *décision de la cohérence*. Celle-ci consiste à déterminer si des informations sont non contradictoires. Par exemple, les informations qualitatives « Bob est dans la voiture », « Alice serre la main de Bob » et « Alice est loin de la voiture » sont contradictoires. Ce problème étant souvent complexe, la littérature s'est en particulier focalisée sur l'identification de fragments du langage, appelés *sous-classes*, sur lesquels la décision de la cohérence est traitable.

La majorité des formalismes qualitatifs de la littérature ne se focalisent que sur un seul aspect du monde : la position, la proximité, l'orientation, le contact ... De plus, ces formalismes ne portent que sur des informations de même nature, c'est-à-dire des informations de nature temporelle ou spatiale, ayant le même niveau de précision. Pourtant, la majorité des applications requièrent la prise en compte d'informations hétérogènes. Par exemple, la prise en compte simultanée des informations temporelles et des informations spatiales est essentielle à la résolution de tâches complexes dans un environnement physique et dynamique. Afin de répondre à ces besoins, plusieurs extensions de formalismes qualitatifs ont été proposées dans la littérature. Les *séquences temporelles d'informations qualitatives* constituent une de ces extensions, qui se situent dans le contexte du *raisonnement spatio-temporel*.

Plusieurs extensions de formalismes permettant de raisonner sur des informations de précisions

différentes ont également été proposées. La prise en compte de la précision des informations est fondamentale. Par exemple, dans le langage naturel, les informations ont des précisions diverses : leur sens dépend du contexte, c'est-à-dire d'une échelle de référence. Dans les deux affirmations suivantes « la France est à côté de l'Allemagne » et « mon bureau est à côté de la machine à café », le sens de *à côté* est à des échelles de précision différentes. Cette nuance est importante. En effet, étant donné que mon bureau se situe en France, il serait incorrect de déduire que la machine à café est à côté de l'Allemagne, à moins de préciser l'échelle de référence. Le *raisonnement multi-échelle*, c'est-à-dire la capacité à raisonner avec plusieurs échelles de précision, est donc essentielle à la compréhension du langage naturel. Il permet aussi de lever des incohérences apparentes. Par exemple, les deux affirmations suivantes : « Alice et Bob sont arrivés *au même moment* » et « Bob est arrivé *quelques secondes plus tôt* qu'Alice » sont contradictoires à moins d'être considérés à des échelles différentes. « Alice et Bob sont arrivés au même moment » signifie peut-être « Alice et Bob sont arrivés au cours de la même minute ». Pour résumer, le raisonnement multi-échelle permet de raisonner à chacune des échelles de précision considérées tout en prenant en compte les informations des autres échelles.

1.2 Problématiques

Ainsi, plusieurs extensions de formalismes qualitatifs ont été proposées afin d'augmenter le champ applicatif du raisonnement qualitatif. Cependant, ces extensions et les techniques associées posent un certain nombre de problèmes.

Dans le cadre du raisonnement qualitatif multi-échelle, la *sémantique*, c'est-à-dire le sens précis, des descriptions multi-échelles n'a pas été formellement définie. De plus, la décision de la cohérence n'a pas été étudiée. Plus précisément, nous savons déduire des informations à partir d'informations qualitatives de précisions différentes, mais nous ne savons pas comment déterminer si des informations qualitatives de précisions différentes sont cohérentes. En outre, dans le cadre d'informations temporelles, aucun formalisme qualitatif multi-échelle ne prend en compte le fait qu'un intervalle de temps puisse être perçu comme un instant à certaines échelles. Par exemple, la prise de la Bastille apparaît comme un événement ponctuel à l'échelle des siècles. Cela est d'autant plus problématique que l'on ne connaît que très rarement la nature des entités à chacune des échelles considérées. Ainsi, soit cela empêche d'utiliser les outils du raisonnement multi-échelle, soit les informations déduites risquent d'être erronées.

Concernant le raisonnement spatio-temporel, plusieurs techniques ont été proposées pour raisonner dans ce contexte. Néanmoins, on ne sait pas si elles permettent de décider la cohérence. La plupart de ces techniques sont d'ailleurs insuffisantes lorsque l'on raisonne sur des entités ayant des caractéristiques qui ne changent pas au cours du temps. Elles ne permettent pas, par exemple, d'effectuer un raisonnement précis sur les objets physiques dont la taille ne change pas au cours du temps. En outre, bien que plusieurs formalismes qualitatifs ont été étendus au cadre spatio-temporel, aucun cadre formel, explicite et général n'a été développé pour *temporaliser* les formalismes qualitatifs.

1.3 Contributions

Nous proposons dans cette thèse d'étendre le raisonnement temporel qualitatif multi-échelle pour prendre en compte le fait que les intervalles de temps et les instants peuvent changer de nature. En outre, nous proposons une formalisation du raisonnement multi-échelle temporel et nous étudions la décision de la cohérence dans ce contexte ainsi que sa complexité. En particulier, à partir de cette formalisation, nous montrons que les opérateurs du raisonnement temporel multi-échelle proposés dans la littérature sont corrects et qu'ils peuvent être utilisés pour décider la cohérence. Nous prouvons également que le problème de décision de la cohérence est NP-complet, même dans le cadre du formalisme temporel multi-échelle le plus simple.

En outre, nous proposons un cadre général, dont la sémantique est formelle, permettant de raisonner sur les séquences temporelles d'informations qualitatives. Plus précisément, ce cadre permet de raisonner dans le contexte d'entités et d'évolutions complexes, notamment parce qu'il se base sur la définition générale de la continuité des espaces topologiques. Le raisonnement de ce

cadre est plus performant computationnellement que les approches de l'état de l'art. Il permet, de plus, de raisonner dans le contexte de la préservation de caractéristiques. Nous étudions ensuite la décision de la cohérence pour certains formalismes temporalisés fondamentaux, comme la capacité de raisonner à propos de régions de taille constante, et montrons que ce cadre permet effectivement de décider la cohérence dans ces contextes. Nous montrons également comment l'appliquer pour réaliser d'autres tâches spatio-temporelles.

De surcroît, nous proposons un cadre formel unifiant plusieurs formes d'extensions et de combinaisons de formalismes qualitatifs, incluant les formalismes multi-échelles et les séquences temporelles. Celui-ci apparaît comme une généralisation naturelle du cadre des formalismes qualitatifs classiques. Les concepts de ce cadre sont généralisés et permettent de raisonner dans le contexte de chacune de ces combinaisons et extensions. Ce cadre permet également d'étudier de manière unifiée la décision de la cohérence et sa complexité pour chacune de ces combinaisons et extensions. Nous identifions en particulier plusieurs conditions de nature algébrique assurant la traitabilité de la décision de la cohérence et nous les appliquons pour prouver la traitabilité de plusieurs sous-classes, en particulier dans le cadre des séquences temporelles. Le cœur de ces résultats de traitabilité consiste en deux théorèmes. Le premier identifie des conditions assurant qu'une combinaison de sous-classes traitables est traitable. Le second identifie des conditions garantissant qu'une sous-classe est traitable lorsqu'elle se *réduit* à une autre sous-classe, plus petite et traitable.

Nous généralisons également la définition principale de formalisme qualitatif classique afin d'inclure des formalismes qualitatifs exclus des définitions de la littérature, qui sont importants dans le cadre des combinaisons. Cette définition nous permet également de délimiter précisément la portée des contributions de cette thèse. Nous basons, en effet, notre cadre unifié sur cette définition.

1.4 Plan

Le reste du document est organisé comme suit. La première partie présente l'état de l'art des formalismes qualitatifs. Dans le chapitre 2, nous exposons le cadre classique des formalismes qualitatifs. Puis, nous présentons dans le chapitre 3 différentes extensions de formalismes qualitatifs et notamment les différents types de combinaisons de formalismes.

Nous exposons ensuite, dans une seconde partie, les contributions de cette thèse. Dans le chapitre 4, nous introduisons et étudions le cadre des *multi-algèbres*, le cadre général que nous proposons pour unifier, en particulier, les séquences temporelles et les formalismes multi-échelles.

Dans le chapitre 5, nous nous focalisons sur le raisonnement multi-échelle. Nous formalisons rigoureusement la représentation et le raisonnement multi-échelles. Nous développons en particulier un nouveau formalisme, généralisant les formalismes multi-échelles qualitatifs temporels de la littérature, pour prendre en compte le changement de nature des points et des intervalles. Nous étudions ensuite la complexité des formalismes qualitatifs temporels multi-échelles.

Dans le chapitre 6, nous nous intéressons au raisonnement spatio-temporel. Nous formalisons le cadre général pour raisonner dans ce contexte et nous identifions plusieurs sous-classes traitables grâce aux résultats généraux du cadre des *multi-algèbres*.

Enfin, le chapitre 7 conclut et étudie les perspectives de recherche ouvertes par ces travaux.

Première partie

État de l'art

Chapitre 2

Formalismes qualitatifs et réseaux de contraintes qualitatives

2.1 Introduction

Dans le cadre de l'intelligence artificielle, on s'intéresse à représenter le monde et à raisonner sur celui-ci. Les représentations du monde sont généralement partielles et constituées d'informations incertaines à propos *d'entités* caractérisant notre vision du monde. Ces informations décrivent les propriétés des entités et de leurs liens. De nombreux formalismes ont été développés afin d'étudier et d'automatiser le raisonnement. Ces formalismes sont constitués d'un langage pour décrire les entités considérées et de règles de raisonnement pour inférer de nouvelles propriétés et de nouveaux liens, à partir de ceux déjà connus. Les entités de ces formalismes sont de toutes sortes. Dans le cadre du raisonnement sur le temps, il peut s'agir d'intervalles. Dans le cadre du raisonnement sur l'espace, il peut s'agir de régions. Une relation entre deux régions peut décrire, par exemple, leur position relative.

Parmi les formalismes proposés dans la littérature, les formalismes *qualitatifs* permettent, d'une part, d'exprimer des relations particulières, dites qualitatives, pour décrire les liens entre les entités considérées et, d'autre part, de raisonner sur les descriptions associées. Les relations de ces formalismes sont qualifiées de qualitatives au sens où elles n'expriment aucune donnée numérique. Les relations qualitatives sont omniprésentes dans le langage naturel. Par exemple, dans le langage courant, on ne dira jamais que l'on se trouve au niveau du sol à une latitude de 48.858° nord et à une longitude de 2.2944° est ; on dira à la place que l'on se trouve sous la tour Eiffel. L'information « se trouver sous la tour Eiffel » est moins précise, mais le surplus d'information n'est pas toujours utile. Les relations qualitatives permettent ainsi de se focaliser sur les aspects importants de l'information et d'abstraire le reste. Cette abstraction offre de nombreux avantages, en particulier concernant les aspects computationnels des tâches de raisonnement telles que la *décision de la cohérence* ou la *déduction maximale d'information* d'une description. Concernant la représentation, les formalismes qualitatifs permettent de spécifier de façon naturelle des informations partielles à propos d'une configuration d'entités.

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base des formalismes qualitatifs tels que les *schémas de partition*, les *algèbres de relations*, les *réseaux de contraintes qualitatives* ainsi que le problème de la *décision de la cohérence* et celui du *calcul du réseau minimal*. Nous nous intéressons en particulier à quelques formalismes qualitatifs fondamentaux, comme l'algèbre des intervalles pour raisonner sur le temps et RCC_8 pour raisonner à propos des relations topologiques entre des régions.

2.2 Cadre formel des formalismes qualitatifs

Nous commençons par présenter les relations et les schémas de partition, qui sont des ensembles de relations élémentaires sur lesquelles se basent les descriptions du monde, constituant ainsi le vocabulaire des formalismes qualitatifs. Nous exposons ensuite les opérateurs et les propriétés sur lesquels se fonde le raisonnement et qui permettent de mettre en œuvre les tâches du raisonnement. Nous détaillons par la suite la structure algébrique associée aux relations qui induit un *calcul* sur les relations et ainsi un raisonnement. Enfin, nous présentons les différentes définitions de la notion de formalisme qualitatif qui consiste en un cadre formel permettant de représenter et de raisonner sur un ensemble de relations.

2.2.1 Relations et schémas de partition

Nous nous intéressons tout d'abord aux objets des formalismes qualitatifs, à savoir des relations particulières entre des entités spécifiques. Les entités peuvent être de toute sorte. Dans le cadre du raisonnement sur le temps, les entités considérées peuvent être des points ou des intervalles temporels. Dans le cadre du raisonnement sur l'espace, les entités sont des régions du plan ou de l'espace, des droites ou des courbes, etc. L'ensemble des entités que l'on considère est appelé *domaine* ou encore *univers* et est noté \mathcal{U} . Par exemple, dans le cadre temporel, le domaine peut être l'ensemble des intervalles de la droite réelle. Il peut être la droite réelle elle-même lorsque l'on raisonne à propos d'instant. Dans le cadre spatial, il peut être l'ensemble des régions du plan ou encore l'ensemble des régions connexes du plan.

Une *relation* r sur \mathcal{U} est un sous-ensemble de $\underbrace{\mathcal{U} \times \dots \times \mathcal{U}}_{k \text{ fois}}$ ($r \subseteq \mathcal{U}^k$), où k est l'arité de la relation.

Dans cette thèse nous nous intéressons exclusivement aux formalismes basés sur des relations binaires ($k = 2$), qui constituent la majorité des formalismes qualitatifs de la littérature. Pour des informations concernant les formalismes qualitatifs d'arité supérieure à deux, nous invitons le lecteur à consulter (Ligozat, 2011), où une présentation est proposée. Ainsi, les relations que nous considérons, sauf mention contraire, sont des relations binaires. De plus, on dira qu'un couple d'entités (x, y) *satisfait* une relation r lorsque $(x, y) \in r$, ce qui sera noté plus simplement $x r y$.

Dans le cadre des formalismes qualitatifs, on se fixe un ensemble $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_l\}$ de relations dites *basiques* comme vocabulaire afin de décrire les liens élémentaires entre les entités. Le choix de ces relations définit le niveau d'abstraction, c'est-à-dire de précision, des représentations basées sur celles-ci. Plus précisément, suivant ce choix, certaines configurations d'entités auront la même représentation ou, au contraire, une représentation différente. Ainsi, le choix de \mathfrak{B} a une influence sur la capacité à effectuer des déductions précises et a un impact sur la complexité du raisonnement. De manière plus concrète, considérons deux points de la droite. Pour décrire les positions relatives entre ces deux points, on peut utiliser les relations $<$, $=$ et $>$ sur \mathbb{R} . Le couple $(2, 5)$ satisfait la même relation que le couple $(0, 1)$, à savoir la relation $<$. En effet, nous avons $2 < 5$ et $0 < 1$. Ainsi, $(2, 5)$ et $(0, 1)$ ont la même représentation, qui est $x < y$ avec $x, y \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$. Les relations basiques contiennent généralement une relation particulière : la relation $\{(x, x) \mid x \in \mathcal{U}\}$, appelée *égalité* (ou *identité*) sur \mathcal{U} . Celle-ci est notée Id , e , EQ ou encore $=$ en fonction du contexte.

Dans la littérature, les relations basiques forment en général une partition de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Elles sont dites *exhaustives* et *disjointes deux à deux* (Ligozat et Renz, 2004).

Définition 2.2.1. Un ensemble \mathfrak{B} de relations *exhaustives* est un ensemble de relations satisfaisant :

$$\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}.$$

De plus, un ensemble \mathfrak{B} de relations *disjointes deux à deux* est un ensemble de relations satisfaisant :

$$\forall \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' \in \mathfrak{B} \quad \mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}' \implies \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \emptyset.$$

Ainsi pour tout couple d'entités $(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, il existe une et une seule relation basique \mathfrak{b} telle que $x \mathfrak{b} y$ soit vérifiée.

Exemple 2.2.2. Les relations $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R} sont exhaustives et disjointes deux à deux.

À chaque relation r correspond une relation particulière $\{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$, qualifiée *d'inverse* de r et notée \bar{r} . Par exemple, la relation $>$ est la relation inverse de $<$ et la relation $=$ est sa propre relation inverse. Dans la quasi-totalité des formalismes qualitatifs de la littérature, l'inverse d'une relation basique est une relation basique.

Exemple 2.2.3. L'ensemble $\mathfrak{B} = \{<, \geq\}$ est un ensemble de relations exhaustives et disjointes deux à deux, mais \mathfrak{B} ne contient pas l'inverse de chacune de ses relations ($> \notin \mathfrak{B}$ et $\leq \notin \mathfrak{B}$).

Pour résumer, la majorité des relations basiques des formalismes qualitatifs de la littérature sont exhaustives et disjointes deux à deux, contiennent l'égalité et leurs inverses. De tels ensembles de relations sont qualifiés de *schémas de partition*.

Définition 2.2.4 (Ligozat et Renz, 2004). Soit \mathcal{U} un ensemble non vide. Un *schéma de partition* de \mathcal{U} est un ensemble \mathfrak{B} de relations sur \mathcal{U}

- exhaustives et disjointes deux à deux ;
- contenant l'égalité : $\{(x, x) \mid x \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{B}$;
- *clos par inversion* : $\forall \mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \quad \bar{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{B}$;
- tel que $\forall \mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \quad \mathfrak{b} \neq \emptyset$.

Après avoir fixé un ensemble de relations basiques pour décrire les liens élémentaires entre les entités, nous souhaitons avoir la capacité d'exprimer l'incertitude à propos de la relation basique satisfaite par un couple d'entités. Par exemple, si x et y sont des points temporels, nous voulons pouvoir exprimer que « x a lieu en même temps que y ou x est avant y », c'est-à-dire, en d'autres termes, que « $x < y$ ou $x = y$ ». La relation entre x et y consiste alors en l'union de la relation $<$ et de la relation $=$, c'est-à-dire la relation $< \cup =$. Celle-ci correspond plus précisément à l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid x < y \vee x = y\}$, généralement noté \leq . L'exemple précédent est alors décrit par « $x \leq y$ ». Exprimer l'incertitude revient ainsi à considérer des relations qui sont des unions de relations basiques. Nous notons \mathfrak{A} l'ensemble des unions des relations basiques de \mathfrak{B} . Plus formellement, \mathfrak{A} est défini par

$$\mathfrak{A} = \left\{ \bigcup_{\mathfrak{b} \in E} \mathfrak{b} \mid E \subseteq \mathfrak{B} \right\}$$

L'ensemble \mathfrak{A} est la *clôture* par union des relations de \mathfrak{B} . \mathfrak{A} est donc lui-même *clos* par union, c'est-à-dire

$$\forall r, r' \in \mathfrak{A} \quad r \cup r' \in \mathfrak{A}.$$

Ayant fixé \mathfrak{B} comme vocabulaire, on peut donc décrire les liens entre les entités en présence d'incertitude avec les relations de \mathfrak{A} . Lorsque nous n'avons aucune information concernant le lien entre deux entités, celui-ci est alors exprimé par la relation $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, dite *relation universelle*.

2.2.2 Raisonnement à base de relations

Une fois défini le vocabulaire pour décrire le monde en présence d'incertitude, l'étape suivante consiste à raisonner sur les descriptions basées sur ce vocabulaire. À partir de connaissances, nous voulons inférer de nouvelles connaissances, c'est-à-dire de nouvelles relations. En particulier, l'objectif est de réduire l'incertitude concernant les relations basiques pouvant être satisfaites par les couples d'entités considérées. Par exemple, sachant que $x \leq y$, nous voudrions préciser le lien entre x et y , c'est-à-dire déterminer si $x < y$ ou si $x = y$. Pour ce faire, il faut raisonner conjointement sur les relations des entités considérées, mais ce n'est pas toujours suffisant. En effet, si nous savons uniquement que $x \leq y$, nous ne pouvons pas décider si $x < y$ ou si $x = y$. Par contre, si nous savons également que $x \geq y$, alors nous pouvons conclure que $x = y$. De manière générale, étant données deux entités x et y indéterminées, si nous savons qu'elles satisfont les relations r et r' , nous pouvons en déduire qu'elles satisfont la relation plus précise $r \cap r'$. Pour effectuer ce raisonnement, nous utilisons l'opérateur *d'intersection* \cap . Plus formellement, nous avons la propriété suivante :

$$x r y \wedge x r' y \iff x (r \cap r') y.$$

Remarquons que \mathfrak{A} est clos par intersection, lorsque \mathfrak{B} est disjoint deux à deux :

$$\forall r, r' \in \mathfrak{A} \quad r \cap r' \in \mathfrak{A}.$$

Cette propriété est importante, puisqu'elle assure que la relation déduite par cette propriété appartient bien à \mathfrak{A} . Autrement dit, toute relation obtenue en utilisant l'intersection est une union de relations basiques, ce qui assure de rester dans le cadre du formalisme.

Un autre aspect à traiter est celui du changement de point de vue. Par exemple, si on sait que $y \leq x$, on peut en déduire que $x \geq y$. Plus généralement, si on sait que x et y satisfont la relation r , on en déduit que y et x satisfont \bar{r} la relation inverse de r (par définition de l'inverse). Cette opération intuitive et transparente doit cependant être soulignée. En effet, pour appliquer l'opérateur d'intersection, il peut être nécessaire d'appliquer au préalable l'*inversion*. Par exemple, ayant déduit que $x \geq y$ à partir du fait que $y \leq x$ et sachant que $x \leq y$, nous pouvons déduire par intersection que $x = y$. Ainsi, en plus de l'opérateur d'intersection, nous avons un opérateur d'*inversion* $\bar{\cdot}$ qui à une relation associe sa relation inverse. Nous avons donc la propriété suivante :

$$x r y \iff y \bar{r} x.$$

Le fait qu'un ensemble \mathfrak{B} de relations basiques soit clos par inversion induit que sa clôture par union, l'ensemble \mathfrak{A} , est également close par inversion (car $\overline{r \cup r'} = \bar{r} \cup \bar{r}'$) :

$$\forall r \in \mathfrak{A} \quad \bar{r} \in \mathfrak{A}.$$

Ainsi, comme pour l'intersection, raisonner avec l'inversion assure de rester dans le cadre du formalisme.

À l'intersection et l'inversion s'ajoute un dernier opérateur qui permet de raisonner sur les éléments de \mathcal{U} en propageant les informations. Il s'agit de la *composition* des relations. Cette opération permet de déterminer la relation entre deux entités x et z sachant celle entre x et une autre entité y et celle entre y et z .

Définition 2.2.5. Soient r et r' deux relations sur \mathcal{U} . La *composition* de r et r' , notée $r \circ r'$, est la relation définie par

$$r \circ r' = \{(x, z) \mid \exists y \quad (x, y) \in r \wedge (y, z) \in r'\}.$$

Exemple 2.2.6. La composition de la relation \leq avec la relation $<$ est la relation $<$. De ce fait, si $x \leq y$ et $y < z$, alors nous pouvons en déduire que $x < z$.

La composition des relations basiques $\{<, =, >\}$ est indiquée dans la table 2.1.

Contrairement aux autres opérateurs, la composition a souvent besoin d'être approximée dans le cadre des formalismes qualitatifs. Par exemple, la composition de deux relations, même basiques, n'est pas nécessairement une union de relations basiques. L'ensemble des relations \mathfrak{A} peut donc ne pas être clos par composition. Pour résoudre ce problème, il faut alors considérer un autre ensemble de relations basiques, plus grand, dont la clôture par union, notée \mathfrak{A}' , vérifie les deux propriétés suivantes :

- L'ensemble \mathfrak{A}' doit contenir les anciennes relations basiques : $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}'$.
- L'ensemble \mathfrak{A}' doit être clos par composition.

Cela pose cependant d'autres problèmes. D'une part, il faut pouvoir déterminer cet ensemble. D'autre part, celui-ci doit être fini. En fait, il faut se demander si on a réellement besoin de la composition pour raisonner. En effet, pour certains formalismes une approximation adéquate de la composition suffit et permet un raisonnement exact. La *composition faible* a ainsi été introduite. Elle correspond à l'union des relations basiques qui s'intersectent avec le résultat de la composition.

Définition 2.2.7 (Düntsch *et al.*, 2001; Renz et Ligozat, 2005). Soit \mathfrak{B} un ensemble de relations sur \mathcal{U} . La *composition faible* de deux relations r et r' sur \mathcal{U} (par rapport à \mathfrak{B}), notée $r \diamond r'$, est la relation définie par :

$$r \diamond r' = \bigcup \{b \in \mathfrak{B} \mid b \cap (r \circ r') \neq \emptyset\}.$$

Afin de différencier les deux compositions, la composition est souvent qualifiée de *forte*, par opposition.

	<	=	>
<	<	<	$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$
=	<	=	>
>	$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$	>	>

TABLE 2.1 – Table de composition forte (resp. faible) des relations basiques $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{Z})

Exemple 2.2.8. Soit \mathcal{U} l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Considérons l'ensemble de relations $\mathfrak{B} = \{<_{\mathcal{U}}, =_{\mathcal{U}}, >_{\mathcal{U}}\}$ avec $<_{\mathcal{U}} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$, $=_{\mathcal{U}} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ et $>_{\mathcal{U}} = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$. La composition forte de la relation d'infériorité $<_{\mathcal{U}}$ avec elle-même est $<_{\mathcal{U}} \circ <_{\mathcal{U}} = \{(0, 2)\}$. La composition faible de cette relation avec elle-même (par rapport à \mathfrak{B}) est $<_{\mathcal{U}} \diamond <_{\mathcal{U}} = <_{\mathcal{U}}$. Remarquons que nous avons $<_{\mathcal{U}} \circ <_{\mathcal{U}} \subsetneq <_{\mathcal{U}} \diamond <_{\mathcal{U}}$.

Lorsque \mathfrak{B} est un ensemble de relations exhaustives et disjointes deux à deux, la composition faible de deux relations r et r' sur \mathcal{U} constitue une approximation supérieure de leur composition forte. Plus précisément, nous avons

$$r \circ r' \subseteq r \diamond r'.$$

De plus, l'ensemble \mathfrak{A} , la clôture par union de \mathfrak{B} , est toujours clos par composition faible (par rapport à \mathfrak{B}) :

$$\forall r, r' \in \mathfrak{A} \quad r \diamond r' \in \mathfrak{A},$$

alors qu'il ne l'est pas nécessairement par composition forte.

Exemple 2.2.9. La clôture par union \mathfrak{A} des relations basiques $\{<, =, >\}$ définies sur \mathbb{Z} n'est pas close par composition forte. En effet, la composition de la relation $<$ avec elle-même n'est pas une relation de \mathfrak{A} . Nous avons $(<) \circ (<) = \{(x, z) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + 1 < z\} \subsetneq (<)$.

La composition faible de ces relations est décrite dans la table 2.1.

Évidemment, la composition forte et la composition faible se confondent lorsque la composition forte de deux relations est exprimable comme union de relations basiques. C'est le cas, par exemple, des relations de la clôture par union des relations basiques $\{<, =, >\}$ définies sur \mathbb{R} .

Afin de mieux cerner la différence entre composition forte et composition faible, considérons les deux propriétés suivantes. Soient $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' \in \mathfrak{B}$.

Avec la composition faible, si $\mathfrak{b}'' \subseteq \mathfrak{b} \diamond \mathfrak{b}'$, nous avons :

$$\exists x, z \in \mathcal{U} \quad x \mathfrak{b}'' z \implies \exists y \in \mathcal{U} \quad x \mathfrak{b} y \wedge y \mathfrak{b}' z.$$

Avec la composition forte, si $\mathfrak{b}'' \subseteq \mathfrak{b} \circ \mathfrak{b}'$, nous avons la propriété :

$$\forall x, z \in \mathcal{U} \quad x \mathfrak{b}'' z \implies \exists y \in \mathcal{U} \quad x \mathfrak{b} y \wedge y \mathfrak{b}' z.$$

Cette dernière propriété est bien invalidée lorsque l'on considère les relations basiques $\{<, =, >\}$ définies sur \mathbb{Z} . En effet, on ne peut trouver de $y \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $x < y < z$, avec $x = 0$ et $z = 1$. Nous avons donc les deux propriétés suivantes pour la composition forte et la composition faible respectivement :

$$\begin{aligned} x r y \wedge y r' z &\iff x (r \circ r') z \\ x r y \wedge y r' z &\implies x (r \diamond r') z \end{aligned}$$

lorsque \mathfrak{B} est un ensemble de relations exhaustives.

Pour résumer, nous avons des propriétés qui nous permettent de déduire de nouvelles relations entre les entités à partir de celles déjà connues. Chacune de ces propriétés est basée sur un opérateur agissant uniquement sur les relations. Comme nous allons le voir, c'est sur ces propriétés que se base le raisonnement.

2.2.3 Structure des relations et raisonnement effectif : calcul algébrique des relations

Dans la section précédente, nous avons présenté les relations, les schémas de partition, les bases du raisonnement et les opérateurs associés. Dans cette section, nous allons nous intéresser à la mise en œuvre de ces opérateurs, qui ne peuvent être calculés naïvement. En effet, étant donné que les relations des formalismes qualitatifs sont généralement des ensembles infinis de couples d'entités, l'union, l'intersection, l'inversion et la composition ne peuvent être déterminées *extensivement*. Cependant, comme nous allons le voir, ces opérateurs peuvent être calculés de manière formelle en se basant sur le fait que l'ensemble des relations possède une structure algébrique et donc une représentation particulière. Nous supposons pour cela que \mathfrak{B} est un schéma de partition.

2.2.3.1 Relations abstraites

Afin de représenter les relations sur \mathcal{U} , des *relations abstraites* sont utilisées (Ligozat, 2011). Chaque relation abstraite consiste en un ensemble de symboles de relations basiques. Par exemple, la relation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ est associée à la relation abstraite $\{<\}$ où $<$ est le symbole de la relation d'ordre de \mathbb{R} . Plus généralement, à chaque relation basique \mathbf{b} est associée la relation abstraite $\{\mathbf{b}\}$ où \mathbf{b} est le symbole de la relation basique \mathbf{b} . Nous distinguons en effet à partir de maintenant les relations sur \mathcal{U} (c'est-à-dire l'ensemble des couples de \mathcal{U}) et les symboles qui les représentent. Cette distinction entre syntaxe et sémantique est importante. Elle nous permet d'utiliser les mêmes symboles pour des relations basiques différentes mais ayant le même comportement. Par exemple, jusqu'à présent, nous avons utilisé la même notation, $<$, pour l'ordre sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Z} . La composition faible, indépendamment de l'interprétation choisie, donne les mêmes relations abstraites. Nous allons détailler et illustrer précisément cette remarque par la suite.

L'ensemble des symboles des relations basiques de \mathfrak{B} est noté \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l\}.$$

Rappelons d'abord qu'une relation quelconque r de \mathfrak{A} est une union de relations basiques $\mathbf{b}_i \cup \dots \cup \mathbf{b}_j$. De ce fait, r est associée à l'ensemble des symboles de ses relations basiques constituantes, c'est-à-dire $\{\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_j\}$. Autrement dit, la relation abstraite $\{\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_j\}$ est interprétée comme la relation $\mathbf{b}_i \cup \dots \cup \mathbf{b}_j$ sur \mathcal{U} .

Exemple 2.2.10. La relation abstraite basique $\{<\}$ est interprétée par la relation basique $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et $\{<, =\}$ est interprétée comme la relation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, c'est-à-dire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y \vee x = y\}$.

On désigne par φ la fonction d'interprétation qui associe à une relation abstraite la relation sur \mathcal{U} correspondante. Ainsi, $\varphi(\{<, =\}) = \{(x, y) \mid x < y \vee x = y\}$. On exprime donc une relation comme l'ensemble des ses relations basiques.

L'ensemble des relations abstraites est noté \mathbf{A} et correspond à l'ensemble $2^{\mathbf{B}}$.

Exemple 2.2.11. Considérons l'ensemble de symboles $\mathbf{B} = \{<, =, >\}$. L'ensemble $\mathbf{A} = 2^{\mathbf{B}}$ est $\{\emptyset, \{<\}, \{=\}, \{>\}, \{<, =\}, \{=, >\}, \{<, >\}, \{<, =, >\}\}$.

Nous appelons cette représentation algébrique \mathbf{A} , la *représentation canonique* de \mathfrak{A} . L'ensemble des relations abstraites basiques (les relations abstraites correspondant aux relations basiques) est noté \mathbf{B} . Nous avons donc :

$$\mathbf{B} = \{\{\mathbf{b}\} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}.$$

Notons qu'il ne faut pas confondre l'ensemble \mathbf{B} des relations abstraites basiques avec l'ensemble \mathbf{B} des symboles de relations basiques, dont l'interprétation est la relation $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Dans la suite, on dira que deux entités x et y *satisfont* une relation abstraite r , ce qui est noté $x r y$, si $(x, y) \in \varphi(r)$.

Une relation est ainsi représentée par une structure finie. Comme nous allons le voir, cela offre de nombreux avantages, comme le fait que le calcul des relations se ramène au calcul des relations basiques. Plus précisément, il suffit de déterminer le résultat des opérateurs sur les relations basiques pour pouvoir le déterminer sur n'importe quelles relations de \mathbf{A} .

Dans les sous-sections suivantes, nous présentons le calcul des relations grâce à la représentation canonique.

2.2.3.2 Algèbre booléenne

Nous nous intéressons maintenant aux calculs de l'union et de l'intersection. Pour calculer l'union de deux relations, il suffit de les représenter algébriquement, avec des relations abstraites ; de faire l'union associée à cette représentation ; et d'interpréter la relation abstraite obtenue. Plus formellement, la fonction d'interprétation φ vérifie la propriété suivante :

$$\varphi(r \cup r') = \varphi(r) \cup \varphi(r').$$

Ainsi, par cette représentation, l'union est calculée en temps fini. Nous avons la même propriété pour l'intersection. Ainsi, calculer l'intersection de relations abstraites revient à calculer l'intersection des relations sur \mathcal{U} correspondantes.

Exemple 2.2.12. La relation \leq sur \mathbb{R} est représentée par $\{<, =\}$ et \geq est représentée par $\{=, >\}$. La description « $x \leq y$ et $x \geq y$ » est ainsi représentée par « $x \{<, =\} y$ et $x \{=, >\} y$ ». On en déduit, par intersection de relations abstraites que $x \{=\} y$, c'est-à-dire $x = y$.

Bien que $b \in \mathbf{B}$ soit formellement un singleton, nous utilisons dorénavant la notation $b \in r$ pour signifier que $b \in \mathbf{B}$ et $b \subseteq r$ (nous surchargeons le symbole « \in ») afin de simplifier les formules. Cela permet notamment de « parcourir » simplement l'ensemble des relations basiques abstraites contenues dans une relation abstraite r . Par exemple, la formule suivante indique que l'interprétation d'une relation abstraite r se ramène à l'interprétation de ses relations basiques :

$$\varphi(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b).$$

En conséquence, pour définir une fonction d'interprétation, il est suffisant de la définir sur les relations basiques abstraites.

En outre, cette représentation et ces calculs sont possibles car \mathfrak{A} forme une algèbre booléenne finie par rapport à l'union et l'intersection (Hirsch et Hodkinson, 2002). Une algèbre booléenne est un ensemble d'éléments \mathcal{A} doté de deux opérations \vee et \neg , appelées respectivement *union* et *complémentaire*, et contenant deux éléments particuliers \perp et \top .

Définition 2.2.13. Une *algèbre booléenne* est une structure algébrique de signature $(\mathcal{A}, \vee, \neg, \perp, \top)$ vérifiant les axiomes suivants, pour $x, y, z \in \mathcal{A}$.

- L'opération binaire \vee est associative, commutative, et idempotente :

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \vee x = x$$

- L'opérateur unaire \neg satisfait :

$$\neg \neg x = x$$

$$x \vee \neg x = \top$$

$$\neg \top = \perp$$

- L'opérateur binaire $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$, appelé *intersection*, est distributif par rapport à \vee :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

- \perp est un élément neutre de \vee :

$$\perp \vee x = x$$

Une algèbre booléenne est dite *finie* si \mathcal{A} est fini.

Les *homomorphismes* permettent de comparer les structures algébriques, telles que les algèbres booléennes (Hirsch et Hodkinson, 2002). Intuitivement, nous avons un homomorphisme d'une algèbre vers une autre, si la première a la même structure qu'une « partie » de la seconde, c'est-à-dire qu'elle se comporte de la même façon par rapport à ses opérateurs.

b	$\{<\}$	$\{=\}$	$\{>\}$
\bar{b}	$\{>\}$	$\{=\}$	$\{<\}$

TABLE 2.2 – Table d'inversion des relations abstraites basiques pour $\mathbf{B} = \{<, =, >\}$

Définition 2.2.14. Un *homomorphisme* d'une algèbre booléenne \mathcal{A} vers une autre algèbre booléenne \mathcal{A}' est une fonction φ de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' vérifiant pour tous $r, r' \in \mathcal{A}$:

- $\varphi(\perp_{\mathcal{A}}) = \perp_{\mathcal{A}'}$,
- $\varphi(\top_{\mathcal{A}}) = \top_{\mathcal{A}'}$,
- $\varphi(r \vee_{\mathcal{A}} r') = \varphi(r) \vee_{\mathcal{A}'} \varphi(r')$ et
- $\varphi(r \wedge_{\mathcal{A}} r') = \varphi(r) \wedge_{\mathcal{A}'} \varphi(r')$.

Deux algèbres ont alors la même structure – elles sont dites *isomorphes* – s'il existe un homomorphisme bijectif de la première vers la seconde et que sa réciproque constitue un homomorphisme de la seconde vers la première. Par exemple, \mathbf{A} a la même structure algébrique que \mathfrak{A} par rapport à l'union, à l'intersection, à l'ensemble vide et à la relation universelle. En effet, la fonction d'interprétation φ constitue un homomorphisme de \mathbf{A} vers \mathfrak{A} ; elle vérifie les propriétés suivantes (pour tout $r \in \mathbf{A}$) :

$$\varphi(\emptyset) = \emptyset \quad \varphi(\mathbf{B}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U} \quad \varphi(r \cup r') = \varphi(r) \cup \varphi(r') \quad \varphi(r \cap r') = \varphi(r) \cap \varphi(r').$$

Ainsi \mathbf{A} , comme \mathfrak{A} , est clos par union et par intersection. Raisonner sur les relations abstraites avec l'union et l'intersection est équivalent à raisonner sur les relations de \mathcal{U} avec les mêmes opérateurs. Ce résultat n'est pas anodin. Le théorème de Stone nous assure que toute algèbre booléenne possède une *représentation*, c'est-à-dire un ensemble ayant la même structure par rapport aux opérateurs ensemblistes (Stone, 1936). \mathbf{A} constitue en fait la représentation de \mathfrak{A} construite par la preuve de ce théorème¹, ce pourquoi nous disons que \mathbf{A} est la représentation canonique de \mathfrak{A} .

2.2.3.3 Algèbre non associative

Nous nous intéressons maintenant aux deux autres opérations. L'opérateur d'inversion $\bar{\cdot}$ est également calculable algébriquement. Pour cela, il faut de définir l'inverse des relations abstraites basiques, ce qui se déduit directement de \mathfrak{B} . L'inverse $\{\mathbf{b}_i\}$ d'une relation abstraite basique $\{\mathbf{b}_j\}$ est la relation $\{\mathbf{b}_j\}$ si $\{\mathbf{b}_j\}$ est la représentation de l'inverse de l'interprétation de $\{\mathbf{b}_i\}$. Plus formellement, la propriété suivante doit être satisfaite :

$$\forall b \in \mathbf{B} \quad \varphi(\bar{b}) = \overline{\varphi(b)}.$$

Par exemple, l'inverse de la relation abstraite $\{<\}$ est $\{>\}$ car l'inverse de la relation $<$ sur \mathbb{R} est $>$. L'inverse des relations abstraites basiques est généralement décrit dans une table, dite *table d'inversion*. Par exemple, la table 2.2 est la table d'inversion des relations abstraites basiques $\{<, =, >\}$. L'inverse d'une relation abstraite non basique r se définit à partir de l'inverse des relations basiques par la formule suivante :

$$\bar{r} = \bigcup_{b \in r} \bar{b}$$

Exemple 2.2.15. L'inverse de $\{<, =\}$ est $\overline{\{<, =\}} = \overline{\{<\}} \cup \overline{\{=\}} = \{>\} \cup \{=\} = \{>, =\}$ d'après la table 2.2 et la propriété précédente. Ce calcul correspond bien au fait que l'inverse de \leq est \geq .

1. Cette assertion est à nuancer. La représentation fournie par le théorème de Stone est en fait différente, mais elle est équivalente (isomorphe). Avec la représentation du théorème de Stone, la relation associée à $\mathbf{b}_i \cup \dots \cup \mathbf{b}_j$ est $\{\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_j\}$ et non $\{\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_j\}$. Au lieu d'être des ensembles de symboles, les relations algébriques sont des ensembles de relations basiques. Le choix de la représentation n'a aucune incidence concernant le calcul, mais l'utilisation de symboles correspond à une formalisation logique des formalismes qualitatifs.

\diamond	$\{<\}$	$\{=\}$	$\{>\}$
$\{<\}$	$\{<\}$	$\{<\}$	B
$\{=\}$	$\{<\}$	$\{=\}$	$\{>\}$
$\{>\}$	B	$\{>\}$	$\{>\}$

TABLE 2.3 – Table de composition des relations abstraites basiques représentant les relations $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R}

L'inverse de la représentation canonique nous permet effectivement de calculer l'inverse des relations sur \mathcal{U} , puisque nous avons la propriété fondamentale suivante :

$$\varphi(\bar{r}) = \overline{\varphi(r)}$$

pour toutes les relations abstraites.

Nous nous intéressons maintenant à la composition faible de la représentation canonique. La composition faible des relations abstraites se définit à partir de la composition faible des relations abstraites basiques par la formule suivante :

$$r \diamond r' = \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} b \diamond b'.$$

La composition faible des relations abstraites basiques est déterminée par la formule

$$b \diamond b' = \{\mathbf{b} \in \mathbf{B} \mid \varphi(\{\mathbf{b}\}) \cap \varphi(b) \circ \varphi(b') \neq \emptyset\},$$

qui découle directement de la définition 2.2.7. La composition faible des relations abstraites basiques est généralement décrite dans une table dite *de composition*. Par exemple, la table 2.3 est la table de composition faible des relations abstraites basiques $\{<\}$, $\{=\}$ et $\{>\}$ interprétées sur \mathbb{R} .

Exemple 2.2.16. Sachant que $x \leq y$ et que $y < z$, nous pouvons en déduire que $x < z$. En effet, on a $x \{<, =\} y$ et $y \{<\} z$. On en déduit que $x (\{<, =\} \diamond \{<\}) z$, c'est-à-dire $x ((\{<\} \diamond \{<\}) \cup (\{=\} \diamond \{<\})) z$, soit $x (\{<\} \cup \{<\}) z$ par la table de composition, d'où $x \{<\} z$.

Remarquons que la propriété

$$\varphi(r \diamond r') = \varphi(r) \diamond \varphi(r')$$

est satisfaite, mais qu'en général, nous avons seulement

$$\varphi(r \diamond r') \supseteq \varphi(r) \diamond \varphi(r').$$

L'inégalité n'est pas le résultat de l'utilisation de la représentation mais de l'utilisation de la composition faible à la place de la composition (voir la section 2.2.2). Notons toutefois que la composition forte n'est pas calculable avec la représentation si elle ne se confond pas avec la composition faible.

Le raisonnement sur \mathcal{U} fondé sur les opérateurs algébriques de la représentation canonique est possible car l'ensemble des relations \mathfrak{A} doté de l'union, l'intersection, l'inversion et la composition faible forme une algèbre de relations non associative finie². Une algèbre de relations non associative est un ensemble d'éléments \mathcal{A} , doté de quatre opérations \vee , \neg , \odot et \cdot appelées respectivement *union*, *complémentaire*, *composition* et *inversion*, contenant des éléments particuliers appelés *relation vide* \perp , *relation universelle* \top et *identité* \mathbf{I} , et vérifiant les axiomes d'une algèbre de relations binaires (Tarski, 1941) à l'exception éventuelle de l'associativité de la composition. Plus formellement :

2. En fait, plus précisément, c'est parce que \mathfrak{A} forme une « algèbre booléenne avec des opérateurs », complètement additive et finie (Hirsch et Hodkinson, 2002). Remarquons au passage que « non associative » signifie « non nécessairement associative ».

Définition 2.2.17 (Maddux, 1982; Hirsch et Hodkinson, 2002). Une *algèbre (de relations) non associative* est un octuplet $(\mathcal{A}, \vee, \neg, \perp, \top, \odot, \smile, \mathbb{I})$ tel que $(\mathcal{A}, \vee, \neg, \perp, \top)$ est une algèbre booléenne et tel que les propriétés suivantes sont vérifiées³ pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$, avec $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$:

$$\begin{array}{ll} x^{\smile\smile} = x & \mathbb{I} \odot x = x \odot \mathbb{I} = x \\ (x \vee y)^{\smile} = x^{\smile} \vee y^{\smile} & x \odot (y \vee z) = x \odot y \vee x \odot z \\ (x \odot y)^{\smile} = y^{\smile} \odot x^{\smile} & (x \odot y) \wedge z^{\smile} = \perp \iff (y \odot z) \wedge x^{\smile} = \perp \end{array}$$

Une algèbre non associative est *finie* si \mathcal{A} est fini.

La structure algébrique associée aux relations générées par un schéma de partition, dotée de l'union, du complémentaire, de l'ensemble vide, de la relation universelle, de la composition faible, de l'inversion et de l'égalité, est une algèbre de relations non associative (Ligozat, 2011). La représentation canonique \mathbf{A} , dotée de ses opérateurs, possède ainsi la même structure algébrique que \mathfrak{A} doté de la composition faible et des autres opérateurs, lorsque \mathfrak{A} est générée par un schéma de partition.

Exemple 2.2.18. L'*algèbre des points*⁴ est un exemple classique d'algèbre de relations (van Beek et Cohen, 1990). L'algèbre des points, notée PA (*point algebra*), est définie comme suit :

- l'ensemble des symboles \mathbf{B} est $\{<, =, >\}$;
- l'ensemble des relations abstraites est $2^{\{<, =, >\}} = \{\emptyset, \{<\}, \{=\}, \{>\}, \{<, =\}, \{=, >\}, \{<, >\}, \{<, =, >\}\}$;
- les opérateurs union et complémentaire sont les opérateurs classiques ensemblistes ;
- l'inversion et la composition faible sont calculables à partir des tables 2.2 et 2.3 et des formules précédentes.

Dans la suite, nous identifions une algèbre et son ensemble \mathcal{A} : nous notons par \mathcal{A} l'ensemble des relations abstraites doté des opérateurs. Par exemple, nous notons $r \in \text{PA}$ pour dire que r est une relation de l'algèbre des points PA.

Lorsque la composition et la composition faible coïncident, la composition faible est nécessairement associative et \mathfrak{A} forme donc une algèbre de relations binaires au sens de Tarski (Tarski, 1941). De plus, dans le cas où ces deux opérateurs coïncident, raisonner sur les relations abstraites revient à raisonner sur les relations de \mathcal{U} . Dans la littérature, une grande partie des algèbres générées par un schéma de partition sont des algèbres de relations binaires (Ligozat, 2011). Considérons l'ensemble des relations générées par les relations basiques $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{Z} . La composition et la composition faible ne coïncident pas. Cependant, \mathbf{A} forme quand même une algèbre de relations binaires, car la composition faible \diamond est associative.

Nous avons désormais tous les éléments pour pouvoir raisonner : le vocabulaire, les propriétés, les opérateurs sur lesquels se base le raisonnement et le moyen de les mettre en œuvre grâce au calcul algébrique des relations. Nous pouvons donc nous intéresser à la définition de formalisme qualitatif, qui formalise le raisonnement à propos des représentations qualitatives du monde.

2.2.4 Définitions de formalisme qualitatif

Un formalisme qualitatif doit nous permettre de représenter un ensemble d'objets et de raisonner sur ces objets. Un formalisme qualitatif est donc constitué d'une partie syntaxique, composée d'un langage et d'opérateurs de raisonnement, et d'une partie sémantique, composée d'un univers et d'une fonction d'interprétation. Dans notre contexte, le langage considéré est une algèbre non associative \mathcal{A} . Les opérateurs permettant de raisonner sont l'union, l'intersection, l'inversion et la composition de \mathcal{A} . Concernant la partie sémantique, l'univers \mathcal{U} est un ensemble non vide, généralement de taille infinie. La fonction d'interprétation φ associe aux éléments du langage \mathcal{A} les objets que l'on considère, à savoir les relations sur l'univers \mathcal{U} . φ doit en particulier vérifier certaines propriétés pour avoir du sens. Cela nous amène à la définition de Ligozat et Renz.

3. Notons que l'axiome $(x \wedge \neg y)^{\smile} = x^{\smile} \wedge \neg y^{\smile}$ ($\overline{(x \setminus y)} = \bar{x} \setminus \bar{y}$), présent dans l'article de Ligozat et Renz (Ligozat et Renz, 2004; Ligozat, 2011), est en fait redondant.

4. Il s'agit en fait de la représentation canonique des relations générées à partir des relations basiques $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R} .

Définition 2.2.19 (Ligozat et Renz, 2004). Un *formalisme qualitatif* (au sens de Ligozat et Renz) est un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$, où \mathcal{A} est une algèbre non associative et (\mathcal{U}, φ) est une *représentation faible* de \mathcal{A} , c'est-à-dire que \mathcal{U} est un domaine d'entités non vide et que $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ est une fonction d'interprétation définissant un homomorphisme d'algèbres booléennes de \mathcal{A} dans $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \varphi(\perp) &= \emptyset & \varphi(r \wedge r') &= \varphi(r) \cap \varphi(r') \\ \varphi(\top) &= \mathcal{U} \times \mathcal{U} & \varphi(r \vee r') &= \varphi(r) \cup \varphi(r') \end{aligned}$$

et vérifiant, pour tous $r, r' \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(r^\sim) = \overline{\varphi(r)} \qquad \varphi(r \circledast r') \supseteq \varphi(r) \circ \varphi(r') \qquad \varphi(\mathbf{I}) = \text{Id.}$$

Exemple 2.2.20. Le *calcul des points*, noté PC, est le formalisme basé sur l'algèbre des points dont les relations abstraites basiques sont interprétées comme les relations $<, =, >$ sur \mathbb{R} . Plus formellement, PC est le formalisme qualitatif $(\text{PA}, \mathbb{R}, \varphi_{\text{PC}})$ avec φ_{PC} telle que $\varphi_{\text{PC}}(\{<\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et $\varphi_{\text{PC}}(\{=\}) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Notons que $\varphi_{\text{PC}}(\{>\})$ est déterminée par la formule de l'inverse ($\varphi(\bar{r}) = \varphi(r)$), et que $\varphi_{\text{PC}}(r)$ ($r \in \text{PA}$) s'obtient par la formule de l'union.

Remarque 2.2.21. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif. L'ensemble des relations sur \mathcal{U} qu'il représente est $\{\varphi(r) \mid r \in \mathcal{A}\}$.

Inversement, soit \mathfrak{B} un schéma de partition de \mathcal{U} et soit \mathfrak{A} sa clôture par union. Considérons \mathbf{A} la représentation canonique de \mathfrak{A} et φ l'interprétation correspondante (voir la section 2.2.3). Le triplet $(\mathbf{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme qualitatif et nous avons $\{\varphi(r) \mid r \in \mathbf{A}\} = \mathfrak{A}$.

Cette définition de formalisme qualitatif synthétise et généralise ce que nous avons vu dans les sections précédentes. En particulier, si l'interprétation de chaque relation basique est non vide, les relations basiques d'un formalisme qualitatif constituent un schéma de partition. En outre, les différentes propriétés fondamentales pour le calcul des relations sont satisfaites. Notons que cette définition est plus générale puisqu'elle n'impose ni l'utilisation de la représentation canonique comme partie syntaxique (\mathcal{A} n'est pas forcément \mathbf{A}), ni l'utilisation de la composition faible.

Les propriétés de φ de cette définition assurent que les opérateurs algébriques sont *corrects* par rapport à \mathcal{U} , c'est-à-dire qu'ils ne retirent pas de couples d'entités valides. Les opérateurs algébriques sont, au pire cas, des approximations supérieures des opérateurs sur les relations de \mathcal{U} , et au meilleur cas, ils se comportent exactement comme les opérateurs sur les relations de \mathcal{U} (lorsque la composition coïncide avec la composition faible). Remarquons qu'avec cette définition, la composition \circledast de \mathcal{A} peut être plus faible que la composition faible.

La distinction entre la partie syntaxique et la partie sémantique a plusieurs avantages. D'une part, c'est la partie syntaxique qui permet le calcul des relations, d'une manière purement algébrique. En particulier, c'est la représentation canonique \mathbf{A} définie dans la section précédente qui permet d'automatiser le raisonnement sur les relations de \mathfrak{A} . D'autre part, la partie syntaxique étant abstraite, elle peut avoir plusieurs interprétations possibles. Autrement dit, plusieurs ensembles de relations \mathfrak{A} basés sur des schémas de partition différents possèdent la même structure algébrique et ont ainsi la même représentation (au renommage des symboles de \mathbf{B} près). Par ailleurs, il est possible de partir d'une algèbre non associative \mathcal{A} et de concevoir un nouveau formalisme qualitatif en définissant une fonction d'interprétation φ correcte, c'est-à-dire satisfaisant les propriétés de la définition de formalisme qualitatif.

Exemple 2.2.22. Plaçons nous dans le cadre spatial et considérons les relations qualitatives sur les tailles des régions (Gerevini et Renz, 2002). Soit \mathcal{U} l'ensemble des régions mesurables, de \mathbb{R}^2 par exemple, défini pour une mesure \mathfrak{t} (telle que la mesure de Lebesgue (Apostol, 1974)). Les relations basiques de ce formalisme sont :

- *taille plus petite* $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathfrak{t}(x) < \mathfrak{t}(y)\}$;
- *même taille* $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathfrak{t}(x) = \mathfrak{t}(y)\}$;
- *taille plus grande* $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathfrak{t}(x) > \mathfrak{t}(y)\}$.

Les relations générées par ces relations basiques forment une algèbre de relations. Il s'agit en fait précisément de l'algèbre des points. Ainsi, nous pouvons utiliser l'algèbre des points pour raisonner à propos de ces relations. La relation $\{<\}$ est alors interprétée comme $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathfrak{t}(x) < \mathfrak{t}(y)\}$,

la relation $\{=\}$ par $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) = \mathbf{t}(y)\}$ et la relation $\{>\}$ par $\{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) > \mathbf{t}(y)\}$. Les relations sur les tailles qualitatives des régions ont donc la même structure algébrique que les relations d'ordres sur \mathbb{R} . Ainsi, le *calcul des tailles qualitatives*, noté QS, se définit comme le triplet $(\text{PA}, \mathcal{U}, \varphi_{\text{QS}})$ avec φ_{QS} générée à partir de $\varphi_{\text{QS}}(\{<\}) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) < \mathbf{t}(y)\}$ et $\varphi_{\text{QS}}(\{=\}) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) = \mathbf{t}(y)\}$. Notons que QS ne constitue pas un formalisme qualitatif au sens de Ligozat et Renz, car aucune relation abstraite n'est interprétée comme la relation d'égalité sur \mathcal{U} .

Le calcul des relations pour des ensembles de relations ayant la même algèbre est donc le même. Il n'est par conséquent pas utile d'étudier indépendamment ces ensembles de relations. Il est suffisant d'étudier leur structure algébrique commune.

La définition de formalisme qualitatif au sens de Ligozat et Renz a été récemment critiquée (Dylla *et al.*, 2013) du fait qu'elle n'englobe pas tous les formalismes qualitatifs de la littérature. Cette définition est également jugée à la fois trop lâche et trop restrictive (Bodirsky et Jonsson, 2017). Par exemple, certains formalismes ne satisfont pas les propriétés de l'inverse. En particulier, l'axiome $r^{\sim} = r$ est invalidé et φ ne vérifie plus la propriété $\varphi(r^{\sim}) = \overline{\varphi(r)}$ mais vérifie seulement sa relaxation

$$\varphi(r^{\sim}) \supseteq \overline{\varphi(r)}.$$

De tels ensembles de relations ne forment donc pas une algèbre de relations. Autrement dit, l'inversion algébrique associée à ces formalismes n'est qu'une approximation supérieure de l'inversion des relations sur \mathcal{U} . D'autres formalismes, comme celui des relations de tailles qualitatives des régions (exemple 2.2.22), n'ont pas de relation d'égalité sur \mathcal{U} . Notons cependant que le formalisme de l'exemple 2.2.22 possède un élément neutre pour la composition de \mathcal{A} et que les relations forment par conséquent une algèbre de relations. Remarquons que cet élément neutre constitue une *égalité faible*, c'est-à-dire une égalité qui porte sur un attribut des entités et non sur les entités elles-mêmes.

Afin d'inclure ces formalismes, Dylla et al. ont proposé une définition plus générale de formalisme qualitatif.

Définition 2.2.23 (Dylla *et al.*, 2013). Un *formalisme qualitatif* (*qualitative calculus*) au sens de Dylla et al. est un quintuplet $(\mathbf{B}, \cdot^{\sim}, \odot, \mathcal{U}, \varphi,)$ avec les propriétés suivantes⁵ :

- \mathbf{B} est un ensemble fini non vide de *relations basiques*. Les sous-ensembles de \mathbf{B} sont appelés *relations*.
- \mathcal{U} est un univers non vide et φ est une fonction de \mathbf{B} dans $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ telle que $(\mathcal{U}, \{\varphi(b) \mid b \in \mathbf{B}\})$ soit un *schéma de partition faible*, c'est-à-dire un ensemble de relations exhaustives et disjointes deux à deux. La fonction φ est étendue aux relations arbitraires en posant $\varphi(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b)$ pour chaque $r \subseteq \mathbf{B}$.
- L'opérateur d'inversion \cdot^{\sim} est une fonction de $\mathbf{B} \rightarrow 2^{\mathbf{B}}$ qui satisfait

$$\varphi(b^{\sim}) \supseteq \overline{\varphi(b)}$$

pour chaque $b \in \mathbf{B}$. L'opération \cdot^{\sim} est étendue aux relations arbitraires en posant $r^{\sim} = \bigcup_{b \in r} b^{\sim}$ pour chaque $r \subseteq \mathbf{B}$.

- L'opération de composition \odot est une fonction de $\mathbf{B} \times \mathbf{B} \rightarrow 2^{\mathbf{B}}$ qui satisfait

$$\varphi(b \odot b') \supseteq \varphi(b) \circ \varphi(b')$$

pour tous $b, b' \in \mathbf{B}$. L'opération \odot est étendue aux relations arbitraires en posant $r \odot r' = \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} b \odot b'$ pour tous $r, r' \subseteq \mathbf{B}$.

Pour conclure cette section, remarquons que pour définir un formalisme qualitatif, il est suffisant d'explicitier les relations basiques sur \mathcal{U} qu'il représente ainsi que le résultat de la composition faible⁶ et de l'inversion sur ces relations, exprimé comme une union de relations basiques, en utilisant implicitement la représentation canonique comme partie syntaxique. Plus précisément, le

5. La définition a été adaptée pour unifier les notations et mettre en avant les différences fondamentales par rapport à la définition de Ligozat et Renz.

6. Ou d'une autre approximation supérieure de la composition forte s'exprimant comme une union de relations basiques.

formalisme associé à un ensemble de relations basiques \mathfrak{B} sur un univers \mathcal{U} est alors le triplet $(\mathbf{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ avec \mathbf{A} la représentation canonique de la clôture par union de \mathfrak{B} et φ la fonction d'interprétation définie à partir de la formule $\varphi(\{b\}) = b$, pour tout $b \in \mathfrak{B}$, avec b le symbole de la relation b .

2.3 Formalismes qualitatifs élémentaires

Nous avons abordé, au fil de la section précédente, le calcul des points PC, le formalisme qualitatif basé sur l'algèbre des points interprétée sur la droite réelle. Dans cette section, nous présentons d'autres formalismes qualitatifs fondamentaux. Cette présentation n'est pas exhaustive, le lecteur est invité à consulter (Chittaro et Montanari, 2000; Ligozat, 2011; Dylla *et al.*, 2013; Chen *et al.*, 2015) pour plus de détails. Notons que pour chacun des formalismes que nous présentons au cours de cette section, les relations basiques forment un schéma de partition.

2.3.1 Calcul et algèbre des intervalles d'Allen

Le premier formalisme qualitatif introduit dans la littérature est la *calcul des intervalles* d'Allen noté IC (*interval calculus*). Il se base sur l'*algèbre des intervalles* notée IA (*interval algebra*) (Allen, 1983). Il a été proposé pour représenter et raisonner sur des informations temporelles dans le cadre de la planification (Allen, 1991), du traitement du langage naturel (Song et Cohen, 1988), des bases de données temporelles et multimédias (Snodgrass, 1987; Little et Ghafoor, 1993) et de la biologie moléculaire (Golombic et Shamir, 1993). Suivant le contexte, les intervalles représentent une tâche, la durée d'une action, un événement duratif, etc. Les relations du calcul des intervalles sont des relations entre intervalles. L'univers d'IC, \mathcal{U} , est donc l'ensemble des intervalles de la droite réelle \mathbb{R} (ou rationnelle \mathbb{Q}),

$$\mathcal{U} = \{[a, b] \mid a < b \wedge a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si I est l'intervalle $[a, b]$, nous notons I^- sa borne inférieure ($I^- = a$) et I^+ sa borne supérieure ($I^+ = b$). Les relations basiques, définies dans la table 2.4, sont *avant* notée b (*before*), *touchant* notée m (*meets*), *chevauchant* notée o (*overlaps*), *démarrant* notée s (*starts*), *durant* notée d (*during*), *finissant* notée f (*finishes*), leur relation inverse respective ($\bar{b}, \bar{m}, \bar{o}, \bar{s}, \bar{d}, \bar{f}$) et la relation *égale* notée e . Remarquons que les relations du calcul des intervalles IC se définissent à partir des relations du calcul des points PC entre les bornes des intervalles. IC est alors le triplet $(\mathbf{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ avec $\mathbf{A} = \text{IA}$, la représentation canonique de la clôture par union de $\mathfrak{B} = \{b, m, o, s, d, f, e, \bar{b}, \bar{m}, \bar{o}, \bar{s}, \bar{d}, \bar{f}\}$, et φ la fonction d'interprétation définie à partir de la formule $\varphi(\{b\}) = b$, pour tout $b \in \mathfrak{B}$.

Chaque relation basique est associée à une dimension (voir la table 2.4) correspondant à la dimension de l'interprétation géométrique de la relation comme une région du plan (pour plus de détails, voir (Ligozat, 2011)). Conformément à cette interprétation géométrique, la dimension d'une relation non basique est la dimension maximum de ses relations basiques :

$$\dim(r) = \max_{b \in r} \dim(b)$$

avec pour convention $\dim(\emptyset) = -\infty$.

Ces relations basiques vérifient des propriétés importantes. La composition faible coïncide avec la composition forte et par conséquent l'ensemble des relations forme une algèbre de relations binaires (associative). De plus, la composition des relations basiques s'exprime sous forme d'*intervalles de relations basiques* d'IA. Certaines relations peuvent en effet être représentées par un intervalle, du fait que les relations basiques possèdent un ordre partiel naturel induit par l'ordre total de \mathbb{R} (Ligozat, 2011) (voir la figure 2.1). Plus précisément, un *intervalle* $[b, b']$ défini pour un ordre partiel \leq est l'ensemble

$$\{b'' \mid b \leq b'' \leq b'\}.$$

Les intervalles définis pour l'ordre naturel de \mathfrak{B} constituent effectivement des relations d'IA. Par exemple, l'intervalle $[b, o]$ correspond à la relation $\{b, m, o\}$ et l'intervalle $[o, \bar{s}]$ correspond à la relation $\{o, s, \bar{f}, e, \bar{d}, \bar{s}\}$. La table de composition des relations basiques du calcul des intervalles est décrite dans la table 2.5, à l'aide de ces intervalles de relations.

Relations basiques		Définition	Dimension
$x b y$	$y \bar{b} x$	$x^- < x^+ < y^- < y^+$	2
$x m y$	$y \bar{m} x$	$x^- < x^+ = y^- < y^+$	1
$x o y$	$y \bar{o} x$	$x^- < y^- < x^+ < y^+$	2
$x s y$	$y \bar{s} x$	$x^- = y^- < x^+ < y^+$	1
$x d y$	$y \bar{d} x$	$y^- < x^- < x^+ < y^+$	2
$x f y$	$y \bar{f} x$	$y^- < x^- < x^+ = y^+$	1
$x e y$		$x^- = y^- < x^+ = y^+$	0

TABLE 2.4 – Définition et dimension des relations basiques du calcul des intervalles, avec x et y des intervalles

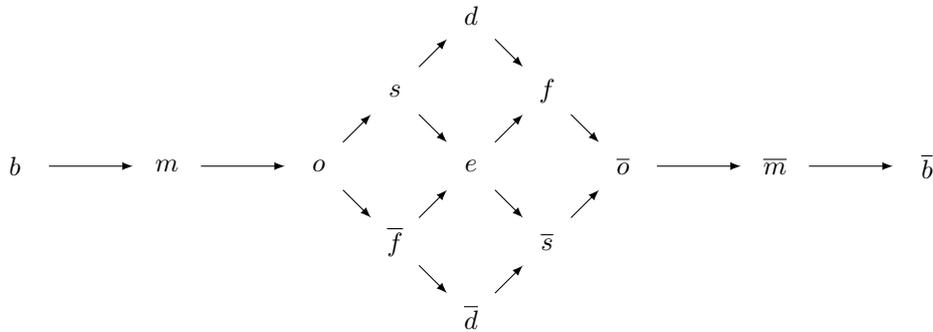


FIGURE 2.1 – Ordre partiel (treillis) des relations basiques d'Allen

o	b	m	o	s	d	\bar{f}	e	f	\bar{d}	\bar{s}	\bar{o}	\bar{m}	\bar{b}
b	b				$[b, d]$	b		$[b, d]$	b			$[b, d]$	$[b, \bar{b}]$
m	b			m	$[o, d]$	b	m	$[o, d]$	b	m	$[o, d]$	$[f, f]$	$[\bar{d}, \bar{b}]$
o	b		$[b, o]$	o	$[o, d]$	$[b, o]$	o	$[o, d]$	$[b, \bar{d}]$	$[o, \bar{d}]$	$[o, \bar{o}]$	$[\bar{d}, \bar{o}]$	$[\bar{d}, \bar{b}]$
s	b		$[b, o]$	s	d	$[b, o]$	s	d	$[b, \bar{d}]$	$[s, \bar{s}]$	$[d, \bar{o}]$	\bar{m}	\bar{b}
d	b		$[b, d]$	d		$[b, d]$	d		$[b, \bar{b}]$	$[d, \bar{b}]$		\bar{b}	
\bar{f}	b	m	o		$[o, d]$	\bar{f}	\bar{f}	$[f, f]$	\bar{d}	\bar{d}	$[\bar{d}, \bar{o}]$		$[\bar{d}, \bar{b}]$
e	b	m	o	s	d	\bar{f}	e	f	\bar{d}	\bar{s}	\bar{o}	\bar{m}	\bar{b}
f	b	m	$[o, d]$	d	d	$[\bar{f}, f]$	f		$[\bar{d}, \bar{b}]$	$[\bar{o}, \bar{b}]$		\bar{b}	\bar{b}
\bar{d}	$[b, \bar{d}]$	$[o, \bar{d}]$			$[o, \bar{o}]$	\bar{d}		$[d, \bar{o}]$	\bar{d}		$[d, \bar{o}]$	$[\bar{d}, \bar{o}]$	$[\bar{d}, \bar{b}]$
\bar{s}	$[b, \bar{d}]$	$[o, \bar{d}]$		$[s, \bar{s}]$	$[d, \bar{o}]$	\bar{d}	\bar{s}	\bar{o}	\bar{d}	\bar{s}	\bar{o}	\bar{m}	\bar{b}
\bar{o}	$[b, \bar{d}]$	$[o, \bar{d}]$	$[o, \bar{o}]$	$[d, \bar{o}]$		$[\bar{d}, \bar{o}]$	\bar{o}		$[\bar{d}, \bar{b}]$	$[\bar{o}, \bar{b}]$		\bar{b}	
\bar{m}	$[b, \bar{d}]$	$[s, \bar{s}]$	$[d, \bar{o}]$		\bar{m}			\bar{b}					
\bar{b}	$[b, \bar{b}]$	$[d, \bar{b}]$			\bar{b}								

TABLE 2.5 – Table de composition des relations basiques d'IC

Notation	Définition	Représentation avec PA	Dimension
N	$x_1 = x'_1 \wedge x_2 > x'_2$	$(\{=\}, \{>\})$	1
S	$x_1 = x'_1 \wedge x_2 < x'_2$	$(\{=\}, \{<\})$	1
E	$x_1 > x'_1 \wedge x_2 = x'_2$	$(\{>\}, \{=\})$	1
W	$x_1 < x'_1 \wedge x_2 = x'_2$	$(\{<\}, \{=\})$	1
NE	$x_1 > x'_1 \wedge x_2 > x'_2$	$(\{>\}, \{>\})$	2
NW	$x_1 < x'_1 \wedge x_2 > x'_2$	$(\{<\}, \{>\})$	2
SE	$x_1 > x'_1 \wedge x_2 < x'_2$	$(\{>\}, \{<\})$	2
SW	$x_1 < x'_1 \wedge x_2 < x'_2$	$(\{<\}, \{<\})$	2
EQ	$x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2$	$(\{=\}, \{=\})$	0

TABLE 2.6 – Définition, représentation et dimension des relations cardinales basiques entre deux points $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$ de \mathbb{R}^2

L'algèbre des intervalles peut aussi être interprétée sur les intervalles de \mathbb{Z} mais la composition d'IA, dans ce contexte, ne coïncide plus avec la composition forte. Elle coïncide cependant toujours avec la composition faible.

Les formalismes temporels, tels que le calcul des points ou le calcul des intervalles, peuvent servir à raisonner sur l'espace, lorsque celui-ci est représenté par une droite ou une courbe isomorphe à \mathbb{R} , comme une route sans intersection par exemple. Les entités sont alors des segments, des arcs, des portions de route ou même des voitures.

2.3.2 Calcul des points cardinaux

Le *calcul des points cardinaux*, noté CPC⁷, est un formalisme spatial où les relations expriment les positions relatives de points du plan \mathbb{R}^2 par rapport au nord, à l'est, à l'ouest et au sud ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$) (Ligozat, 1998). Les relations basiques sont les relations *nord* notée N, *sud* notée S, *ouest* notée W, *est* notée E, *nord-ouest* notée NW, *nord-est* notée NE, *sud-ouest* notée SW, *sud-est* notée SE et *égal* notée EQ. Par exemple, x N y signifie que x est au nord de y . À l'instar du calcul des intervalles IC, les relations basiques de CPC ont une dimension correspondant à leur interprétation géométrique (voir la table 2.6, dernière colonne).

Les relations basiques peuvent être définies à partir des relations du calcul des points (voir la table 2.6, 2^{ème} colonne). Plus précisément, chaque relation basique peut être vue comme un couple de relations basiques du calcul des points, où la première composante décrit la relation entre les coordonnées du premier axe et la seconde décrit la relation entre les coordonnées du second axe (voir la table 2.6, 3^{ème} colonne).

Exemple 2.3.1. La relation $(1, 2) \{W\} (3, 2)$ exprimée en termes d'algèbre des points correspond à $(1, 2) (\{<\}, \{=\}) (3, 2)$.

À partir de cette décomposition en relations de PC, les tables de composition et d'inversion sont déductibles de celles du calcul des points. Les relations inverses des relations basiques sont décrites dans la table 2.7. Pour calculer la table de composition à partir de celle de l'algèbre des points, il faut exprimer les relations basiques sous la forme de couples de relations de points, composer indépendamment chaque composante et exprimer le couple obtenu sous la forme de l'ensemble de relations cardinales basiques correspondant. En effet, tout couple de relations de PC correspond à une relation cardinale.

Exemple 2.3.2. Nous calculons le résultat de la composition de NW avec S. NW et S correspondent respectivement à $(\{<\}, \{>\})$ et $(\{=\}, \{<\})$. Par composition de l'algèbre des points, nous obtenons $(\{<\}, \{<,\ =,\ >\})$. Ce couple correspond à la disjonction des relations basiques $(\{<\}, \{<\})$, $(\{<\}, \{=\})$ et $(\{<\}, \{>\})$, c'est-à-dire à la relation $\{SW, W, NW\}$. Ainsi, nous avons $\{NW\} \diamond \{S\} = \{SW, W, NW\}$.

7. CPC est plus communément appelé *calcul des relations cardinales* ou encore *calcul des directions cardinales* et est alors noté CDC ou CRC.

b	\bar{b}
N	S
W	E
NW	SE
NE	SW
EQ	EQ
S	N
E	W
SW	NE
SE	NW

TABLE 2.7 – Table d’inversion des relations cardinales basiques

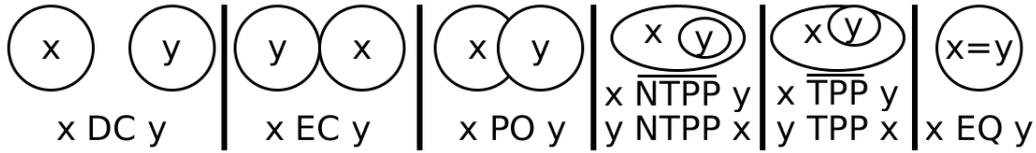


FIGURE 2.2 – Les 8 relations de RCC_8 dans le plan

Notons que la composition faible coïncide avec la composition forte. L’algèbre associée à CPC est notée CPA (*cardinal point algebra*).

2.3.3 RCC_8 : un calcul sur la connexion des régions

Nous nous intéressons maintenant à RCC_8 (*region connection calculus*), un des formalismes qualitatifs les plus importants (Randell *et al.*, 1992). Il permet de représenter et de raisonner sur le temps et sur l’espace à propos d’informations topologiques telles que l’inclusion et le contact entre des régions. \mathcal{U} est l’ensemble des régions considérées.

Les relations basiques, illustrées sur la figure 2.2 dans le cas des régions du plan, sont *déconnexion*, notée DC ; *connexion extérieure*, notée EC ; *chevauchement partiel*, notée PO ; *égalité*, notée EQ ; *partie propre tangentielle*, notée TPP ; *partie propre non tangentielle*, notée NTPP ; et les relations inverses des deux dernières, \overline{TPP} et \overline{NTPP} . L’algèbre associée à RCC_8 est notée RCA₈ (*region connection algebra*).

En fait, RCC_8 a un sens dans n’importe quel espace topologique \mathfrak{T} . Les régions d’un espace topologique sont les sous-ensembles de \mathfrak{T} , non vides, *fermés* et *réguliers* (Renz, 1998). Notons que ces régions ne sont pas forcément connexes. Les relations topologiques se définissent à partir d’une seule relation primitive C : la connexion entre deux régions (Clarke, 1981) (voir la table 2.8). Deux régions sont connectées, noté $x C y$, si et seulement si leurs *clôtures topologiques* s’intersectent (Renz, 1998).

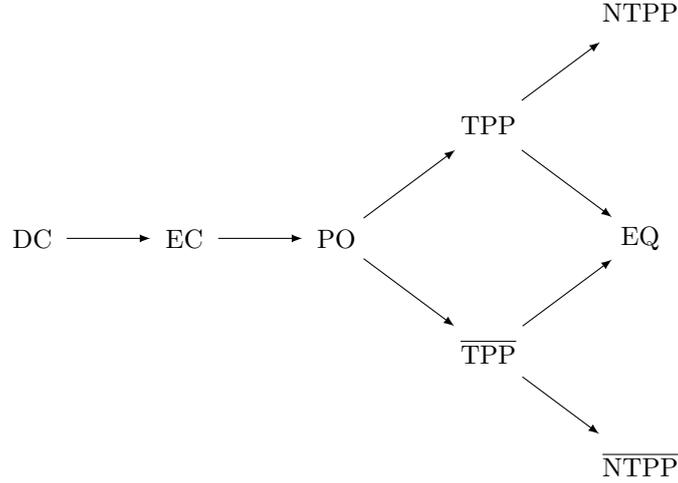
De manière analogue aux formalismes précédents, l’ensemble des relations basiques forme une structure partiellement ordonnée, qui est décrite dans la figure 2.3. Cette structure s’obtient des relations basiques d’Allen en « oubliant » le sens du temps. En effet, les intervalles sont des régions particulières de \mathbb{R} . Notons que la composition faible ne coïncide pas avec la composition (Düntsch *et al.*, 2001; Renz et Ligozat, 2005). La table de composition faible est décrite dans la table 2.9.

2.3.4 RCC_5

RCC_5 est un formalisme similaire à RCC_8 exprimant les liens ensemblistes entre des régions (Jonsson et Drakengren, 1997). Les relations basiques de RCC_5 sont *disjoint* notée DR, *chevauchement partiel* notée PO, *égal* notée EQ, *partie propre* notée PP et sa relation inverse \overline{PP} . Leur définition en termes de connexion est décrite dans la table 2.8.

RCC_5 est un formalisme plus abstrait que RCC_8 . Ses relations basiques sont des unions de relations basiques de RCC_8 . Plus précisément, nous avons $DR = DC \cup EC$ et $PP = TPP \cup NTPP$.

Symbole	Nom anglais	Définition à partir de C
DC	disconnected	$\neg(x C y)$
P	part	$\forall z \ z C x \implies z C y$
PP	proper part	$x P y \wedge \neg(y P x)$
EQ	equals	$x P y \wedge y P x$
O	overlaps	$\exists z \ z P x \wedge z P y$
PO	partially overlaps	$x O y \wedge \neg(x P y) \wedge \neg(y P x)$
DR	discrete	$\neg(x O y)$
EC	externally connected	$x C y \wedge \neg(x O y)$
TPP	tangential proper part	$x PP y \wedge \exists z \ z EC x \wedge z EC y$
NTPP	non-tangential proper part	$x PP y \wedge \neg \exists z \ z EC x \wedge z EC y$

 TABLE 2.8 – Définition des relations basiques de RCC_8 et d'autres relations topologiques entre deux régions x et y , avec z une autre région

 FIGURE 2.3 – Ordre partiel des relations basiques de RCC_8 induit par l'ordre des relations d'Allen

\diamond	DC	EC	PO	TPP	NTTPP	\overline{TPP}	\overline{NTTPP}
DC	[DC,]	[DC, NTTPP]				DC	
EC	[DC, \overline{NTTPP}]	[DC, EQ]	[DC, NTTPP]	[EC, NTTPP]	[PO, NTTPP]	[DC, EC]	DC
PO	[DC, \overline{NTTPP}]		[DC,]	[PO, NTTPP]		[DC, \overline{NTTPP}]	
TPP	DC	[DC, EC]	[DC, NTTPP]	[TPP, NTTPP]	NTTPP	[DC, EQ]	[DC, \overline{NTTPP}]
NTTPP	DC		[DC, NTTPP]	NTTPP		[DC, NTTPP]	[DC,]
\overline{TPP}	[DC, \overline{NTTPP}]	[EC, \overline{NTTPP}]	[PO, \overline{NTTPP}]	[PO, EQ]	[PO, NTTPP]	[\overline{TPP} , \overline{NTTPP}]	\overline{NTTPP}
\overline{NTTPP}	[DC, \overline{NTTPP}]	[PO, \overline{NTTPP}]			[PO,]	\overline{NTTPP}	
EQ	DC	EC	PO	TPP	NTTPP	\overline{TPP}	\overline{NTTPP}

 TABLE 2.9 – Table de composition de RCC_8 (nous notons $[b,]$ l'ensemble $\{b' \mid b \leq b'\}$; la colonne d'EQ est omise)

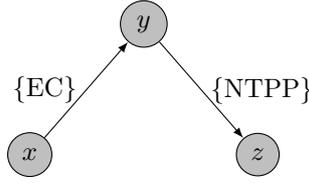


FIGURE 2.4 – Un réseau de contraintes sur RCC_8

La table de composition se déduit donc de celle de RCC_8 .

2.4 Réseaux de contraintes qualitatives

Nous avons présenté le cadre formel des formalismes qualitatifs et exposé les formalismes fondamentaux de la littérature dans les sections précédentes. Nous nous intéressons maintenant aux descriptions du monde basées sur les formalismes qualitatifs : les *réseaux de contraintes qualitatives*.

Nous commençons par définir le concept de réseau de contraintes et sa notion de cohérence. Puis, nous exposons le problème de décision associé et la *clôture algébrique*, l'opérateur de raisonnement sur les réseaux. Celle-ci permet de décider la cohérence des réseaux dans de nombreux cas. Nous présentons par la suite la notion de sous-classe, ensemble particulier de relations, la notion de sous-classe traitable pour la décision de la cohérence et celle plus forte de sous-classe algébriquement traitable. Nous exposons en particulier des exemples importants de sous-classes algébriquement traitables. Pour finir, nous présentons le problème de la minimalité et le problème de la redondance.

Dans cette section, pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre d'un ensemble de relations \mathfrak{A} générées par un schéma de partition et dans le cadre de descriptions basées sur la représentation canonique de \mathfrak{A} , notée \mathbf{A} .

2.4.1 Définition d'un réseau de contraintes qualitatives

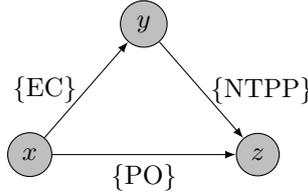
Une description qualitative, par exemple temporelle ou spatiale, consiste en un ensemble de relations de \mathbf{A} entre des *variables* représentant des entités de \mathcal{U} . Cette description est généralement modélisée par un *réseau de contraintes qualitatives* (Allen, 1983; Ligozat, 2011), un ensemble de formules représentable par un graphe orienté simple dont les nœuds sont les variables et dont chaque arc est étiqueté par une relation de \mathbf{A} .

Définition 2.4.1. Un *réseau de contraintes qualitatives (normalisé)* N sur un ensemble de relations $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$ est un couple (\mathbf{E}, \mathbf{C}) où \mathbf{E} est un ensemble fini de variables et \mathbf{C} est un ensemble de *contraintes sur \mathcal{S}* , c'est-à-dire des formules « $x r y$ » avec $x, y \in \mathbf{E}$, $x \neq y$ et $r \in \mathcal{S}$, tel qu'il y ait au plus une contrainte par paire d'entités. Si \mathbf{C} contient la contrainte $x r y$, alors \mathbf{C} contient implicitement la contrainte $y \bar{r} x$. S'il n'y a pas de contrainte entre deux variables x et y , \mathbf{C} contient implicitement la contrainte $x B y$.

La *représentation graphique* de N est le graphe dont l'ensemble des nœuds est \mathbf{E} tel que pour chaque contrainte $x r y$ de \mathbf{C} , il y a un arc de x vers y étiqueté par r .

Un exemple de réseau sur RCC_8 est $N = (\{x, y, z\}, \{x EC y, y NTPP z\})$. Sa représentation graphique est illustrée dans la figure 2.4. On note N^{xy} la relation r de la contrainte (explicite ou implicite) $x r z$ de N entre x et y . Ainsi dans l'exemple précédent $N^{xy} = \{EC\}$. Enfin, on dit qu'un réseau N *affine* un autre réseau N' , ce que l'on note $N \subseteq N'$, si la propriété $\forall x, y \in \mathbf{E} \quad N^{xy} \subseteq (N')^{xy}$ est satisfaite.

Exemple 2.4.2. Le réseau $(\{x, y, z\}, \{x EC y, y NTPP z, x PO z\})$, illustré dans la figure 2.5, affine le réseau de l'exemple précédent.

FIGURE 2.5 – Un réseau de contraintes sur RCC_8

2.4.2 Cohérence

Nous avons formalisé ce qu'est une description dans notre contexte : un réseau de contraintes qualitatives. Nous nous intéressons maintenant à la cohérence de ces descriptions. Plus précisément, nous voulons savoir si une description a du sens ou si au contraire elle est contradictoire. Autrement dit, nous voulons savoir si une description correspond bien à (au moins) un état du monde, c'est-à-dire à un ensemble d'entités de \mathcal{U} . Ce problème de décision de la cohérence est également appelé *CSP* (*constraint satisfaction problem*). Ainsi, un réseau de contraintes N est qualifié de *cohérent*, *satisfiable* ou encore *réalisable* s'il existe un ensemble d'entités de \mathcal{U} qui vérifient les contraintes de N . Plus formellement :

Définition 2.4.3 (Ligozat et Renz, 2004). Soient \mathbf{A} la représentation canonique d'un schéma de partition de \mathcal{U} , et φ la fonction d'interprétation associée. Un réseau N sur $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$ est dit *cohérent* s'il existe un ensemble $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ tel que la propriété $\forall x, y \in \mathbf{E} \quad (u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$ soit satisfaite.

La famille⁸ $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}}$ est qualifié de *solution* de N .

Exemple 2.4.4. On se place dans le cadre du calcul des points PC. Le réseau $N = (\{x, y, z\}, \{x = y, y > z\})$ est cohérent. Une solution de N est par exemple $u_x = u_y = 1$ et $u_z = 0$.

Remarquons qu'un réseau de contraintes est un objet purement syntaxique et qu'il peut décrire des mondes complètement différents si l'on remplace la fonction d'interprétation par celle d'un autre formalisme qualitatif ayant la même représentation.

Dans ce contexte, un monde possible consiste en un ensemble d'entités. De ce fait, une solution d'un réseau de contraintes est un monde possible. Un réseau de contraintes représente ainsi un ensemble de mondes possibles. Si on s'intéresse au problème inverse, c'est-à-dire à décrire un monde M à l'aide des relations de \mathbf{A} , il existe plusieurs réseaux dont M est la solution. Soient N et N' deux réseaux sur \mathbf{A} . Si $N \subseteq N'$ et M est une solution de N alors M est nécessairement une solution de N' (puisque $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy}) \subseteq \varphi((N')^{xy})$ étant donné que $N^{xy} \subseteq (N')^{xy}$ et que φ est une fonction croissante).

Exemple 2.4.5. L'ensemble des points $u_x = u_y = 1$ et $u_z = 0$ est solution de $N = (\{x, y, z\}, \{x = y, y > z\})$, mais aussi de $N' = (\{x, y, z\}, \{x \{<, =, >\} y, y \{<, >\} z\})$.

Cependant, à chaque monde M correspond un réseau unique dont les relations sont basiques (puisque les relations basiques sont exhaustives et disjointes deux à deux). Un tel réseau S est appelé un *scénario*.

Définition 2.4.6. Un *scénario* S est un réseau (\mathbf{E}, \mathbf{C}) sur $\mathbf{A} = 2^{\mathbf{B}}$ qui vérifie $\forall x, y \in \mathbf{E} \quad S^{xy} \in \mathbf{B}$.

Exemple 2.4.7. Le réseau N de l'exemple 2.4.5 n'est pas un scénario (car N^{xz} n'est pas basique). L'unique scénario correspondant à $u_x = u_y = 1$ et $u_z = 0$ est $(\{x, y, z\}, \{x = y, y > z, x > z\})$.

Si M est une solution d'un réseau N , alors il existe toujours un scénario S affinant N ($S \subseteq N$) tel que M est solution de S . On dira que S est un scénario de N .

Après avoir défini la cohérence, nous nous intéressons au problème de décision de la cohérence d'un réseau. Chercher une solution d'un réseau N revient à chercher un scénario cohérent S de N ,

8. Une famille de \mathcal{U} indexée par un ensemble \mathbf{E} est une application définie sur \mathbf{E} à valeurs dans \mathcal{U} .

puisque toute solution de S est une solution de N . Cependant, décider la cohérence d'un réseau est un problème NP-complet pour un grand nombre de formalismes (Ligozat, 2011). Supposant que $P \neq NP$, décider la cohérence n'est donc pas polynomial. De ce fait, de nombreux travaux se focalisent sur l'identification de sous-ensembles *traitables* et en particulier de *sous-classes* traitables (Ligozat, 2011).

Définition 2.4.8. Une *sous-classe* \mathcal{S} de \mathbf{A} est un sous-ensemble de \mathbf{A} ($\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$) qui est clos par composition faible, intersection et inversion :

$$\forall r, r' \in \mathcal{S} \quad \bar{r} \in \mathcal{S} \wedge r \cap r' \in \mathcal{S} \wedge r \diamond r' \in \mathcal{S}$$

Définition 2.4.9. Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$ est dit *traitable* lorsqu'il est polynomial de décider la cohérence de tout réseau sur \mathcal{S} .

Plusieurs travaux de la littérature se sont plus précisément intéressés à la limite entre la traitabilité et l'intraitabilité des sous-ensembles, en cherchant des sous-ensembles dits *maximaux pour la traitabilité*. Un sous-ensemble \mathcal{S} est *maximal pour la traitabilité* lorsqu'il n'existe aucun sous-ensemble \mathcal{S}' traitable tel que $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$. L'étude des sous-ensembles traitables se ramène en fait à l'étude des sous-classes traitables, sous certaines hypothèses. Plus précisément, pour un certain nombre de formalismes, un sous-ensemble de relations contenant l'égalité et la relation universelle est traitable si et seulement si la plus petite sous-classe le contenant (sa clôture par composition faible, intersection et inversion) est traitable⁹ (Renz et Ligozat, 2005; Ligozat, 2011). Devant l'importance de la présence de l'égalité et de la relation universelle, la traitabilité de certains formalismes a été étudiée en identifiant toutes leurs sous-classes maximales pour la traitabilité. Cette étude a été effectuée pour l'algèbre des intervalles (Krokhin *et al.*, 2003) et pour RCC_5 (Jonsson et Drakengren, 1997) mais reste ouverte pour les autres formalismes qualitatifs.

Parmi les sous-classes, certaines sont plus importantes que d'autres. La possibilité d'exprimer toutes les relations basiques et donc d'exprimer tous les scénarios est par exemple primordiale. Une sous-classe \mathcal{S} qui contient toutes les relations basiques ($\mathbf{B} \subseteq \mathcal{S}$) est qualifiée de *sous-algèbre*¹⁰. Notons que les sous-classes les plus étudiées sont des sous-algèbres (Nebel et Bürkert, 1995; Ligozat, 1996; Renz, 1999; Ligozat, 2013; Long et Li, 2015). En particulier, une étude complète de toutes les sous-algèbres maximales pour la traitabilité a été menée pour RCC_8 (Renz, 1999).

2.4.3 Clôture algébrique et décision de la cohérence

Dans cette section, nous nous intéressons à la décision de la cohérence et son lien avec les opérateurs du raisonnement que sont l'inversion, l'intersection et la composition faible (Ligozat, 2011).

Tout d'abord, comme nous sommes dans le cadre de réseaux de contraintes normalisés, il n'y a pas besoin de raisonner avec l'inversion. Toute information déductible à partir de l'inversion est déjà déterminée. En effet, pour normaliser un réseau N (un ensemble de contraintes quelconques), il suffit d'une part d'intersecter les relations de chaque contrainte sur les mêmes entités : si on a $x r y$ et $x r' y$ alors on retire ces deux contraintes et on ajoute la contrainte équivalente $x (r \cap r') y$; et d'autre part de substituer toute relation N^{xy} par $N^{xy} \cap \overline{N^{yx}}$ dans N et de retirer la contrainte entre y et x , qui est alors implicite ($N^{yx} = \overline{N^{xy}}$). Cette opération revient à appliquer une déduction par intersection puis par inversion et intersection.

Le raisonnement sur les réseaux de contraintes normalisés se base alors sur la composition, jointe à l'intersection. Si nous avons $N^{xy} = r$ et $N^{yz} = r'$, c'est-à-dire $x r y$ et $y r' z$, nous pouvons en déduire que $x (r \diamond r') z$ (propriété de la composition faible). Si nous avons également $N^{xz} = r''$, c'est-à-dire $x r'' z$, nous pouvons en déduire que $x (r'' \cap (r \diamond r')) z$ (propriété de l'intersection). Substituer la relation N^{xz} par $r'' \cap r \diamond r'$ est donc une opération correcte. Ainsi, raisonner avec un

9. Les formalismes satisfaisant la propriété « tous les scénarios *algébriquement clos* sont cohérents » vérifient cette équivalence. Les formalismes présentés dans ce chapitre satisfont cette propriété et vérifient ainsi l'équivalence. Cette propriété sera introduite dans la section suivante.

10. À ne pas confondre avec le concept classique utilisé en Algèbre. Une sous-algèbre d'une algèbre non associative est une sous-classe qui contient l'égalité et la relation universelle et qui est close par union. Elle ne contient donc pas nécessairement toutes les relations basiques.

réseau de contraintes normalisé revient à appliquer récursivement l'opération de substitution, dite *d'affinement*, suivante¹¹ :

$$N^{xz} \leftarrow N^{xz} \cap (N^{xy} \diamond N^{yz})$$

jusqu'à atteindre un point fixe. On dit que l'on *clôt algébriquement* N , que l'on applique la *clôture algébrique* sur N ou encore qu'on le *clôt par composition (faible)*. Le point fixe de cette opération est appelé la *clôture algébrique* de N .

Appliquer les opérateurs sur un réseau, et donc le clore algébriquement, conserve naturellement les solutions de ce réseau. Autrement dit, la clôture algébrique d'un réseau est un réseau qui a les mêmes solutions. La clôture algébrique se termine nécessairement car le nombre de relations basiques et le nombre de variables sont finis. La clôture algébrique est en fait une opération polynomiale, cubique au pire cas. Le réseau obtenu après clôture algébrique est qualifié d'*algébriquement clos* (Renz et Ligozat, 2005).

Définition 2.4.10. Un réseau *algébriquement clos* est un réseau qui vérifie, pour tous $x, y, z \in \mathbf{E}$, la propriété :

$$N^{xz} \subseteq N^{xy} \diamond N^{yz}.$$

La clôture algébrique peut permettre dans certains cas de décider la cohérence. Remarquons d'abord qu'un réseau N dont une des relations est la relation vide est nécessairement incohérent. Nous ne pouvons effectivement pas trouver de couple d'entités satisfaisant cette contrainte.

Définition 2.4.11. Un réseau est qualifié de *trivialement incohérent* lorsqu'il vérifie $\exists x, y \in \mathbf{E} \ N^{xy} = \emptyset$.

Afin d'alléger les énoncés, nous introduisons le concept suivant.

Définition 2.4.12. Un réseau est *algébriquement cohérent* lorsqu'il est algébriquement clos et non trivialement incohérent.

Notons qu'un scénario est nécessairement non trivialement incohérent par définition. Un scénario algébriquement clos est donc toujours algébriquement cohérent.

Afin de détecter l'incohérence d'un réseau, une méthode consiste à vérifier si on peut inférer la relation vide à l'aide des opérateurs. Cela revient à vérifier si la clôture algébrique d'un réseau est trivialement incohérente. Dans un tel cas, le réseau initial est nécessairement incohérent.

Cependant, lorsque la clôture algébrique est non trivialement incohérente, en général, nous ne pouvons pas conclure à la cohérence. Un réseau algébriquement cohérent n'est pas nécessairement cohérent. En fait, un scénario algébriquement cohérent n'est même pas nécessairement cohérent. En effet, pour certains formalismes qualitatifs, il existe des scénarios algébriquement clos incohérents (Renz et Ligozat, 2005). La cohérence des scénarios algébriquement clos est fondamentale et cette propriété est satisfaite par les principaux formalismes qualitatifs.

Proposition 2.4.13 (van Beek et Cohen, 1990; Nebel et Bürckert, 1995; Ligozat, 1998; Renz, 1998; Renz et Ligozat, 2005). *Les scénarios algébriquement clos des formalismes qualitatifs suivants :*

- le calcul des points PC avec $\mathcal{U} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$;
- le calcul des intervalles IC avec $\mathcal{U} = \{[a, b] \mid a < b \wedge a, b \in D\}$ et $D \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$;
- le calcul des points cardinaux CPC avec $\mathcal{U} \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{Q}^2, \mathbb{Z}^2\}$;
- les calculs des régions connectées RCC₅ et RCC₈ avec
 - $\mathfrak{T} = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{U} l'ensemble des régions de \mathfrak{T}
 - $\mathfrak{T} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ et \mathcal{U} l'ensemble des régions connexes de \mathfrak{T}

sont cohérents.

Lorsque cette propriété est vérifiée, nous pouvons décider la cohérence d'une manière purement algébrique. Il suffit pour cela de trouver un scénario algébriquement clos de N pour prouver la cohérence de celui-ci. Inversement, il suffit de montrer qu'il n'existe aucun scénario algébriquement clos de N pour prouver son incohérence. Une approche naïve consiste à énumérer tous les scénarios.

11. On n'affine pas N^{xz} s'il y a une contrainte explicite $z r x$ dans \mathbf{C} , pour que le réseau reste normalisé.

Des approches plus efficaces de séparation et évaluation ont été développées, utilisant la clôture algébrique pour élarger *a priori* et progressivement des scénarios de N (Ladkin et Reinefeld, 1992).

Pour certaines sous-classes, la clôture algébrique s'avère une procédure complète pour la décision de la cohérence. Il suffit en effet d'appliquer la clôture algébrique sur les réseaux de ces sous-classes pour décider leur cohérence. La clôture algébrique étant une opération polynomiale, ces sous-classes sont ainsi traitables.

Afin de simplifier les énoncés, nous introduisons le terme suivant.

Définition 2.4.14. Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$ est dit *algébriquement traitable* lorsque tout réseau sur \mathcal{S} est cohérent si et seulement si sa clôture algébrique est non trivialement incohérente.

Ainsi, avec les sous-classes *algébriquement traitables*, la cohérence algébrique assure la cohérence.

2.4.4 Quelques classes traitables

Dans cette section, nous présentons quelques sous-classes traitables classiques des formalismes qualitatifs introduits dans la section 2.3. Ces sous-classes sont en particulier algébriquement traitables.

Notons tout d'abord que le calcul des points est algébriquement traitable (Vilain et Kautz, 1986; Vilain *et al.*, 1986, 1989). Ce résultat est spécifique au calcul des points PC et à tout formalisme qualitatif basé sur l'algèbre des points PA dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents, tel que QS (exemple 2.2.22). Cependant, des travaux récents ont montré qu'il était possible d'identifier des résultats de traitabilité non spécifiques à un formalisme qualitatif en particulier. Long *et al.* ont montré qu'un critère purement algébrique, et donc non dépendant d'un formalisme qualitatif, à savoir la *distributivité* de la composition faible sur l'intersection, assure la traitabilité (Long et Li, 2015).

Définition 2.4.15 (Long et Li, 2015). Une sous-classe \mathcal{S} d'une algèbre non associative est *distributive* si pour toutes relations $r, r', r'' \in \mathcal{S}$ telles que $r' \cap r'' \neq \emptyset$, la propriété $r \diamond (r' \cap r'') = (r \diamond r') \cap (r \diamond r'')$ est satisfaite¹².

Proposition 2.4.16 (Long et Li, 2015). *Toute sous-algèbre distributive, d'un formalisme qualitatif généré par un schéma de partition, dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents, est traitable*¹³.

Une sous-classe \mathcal{S} est dite *distributive maximale* si elle est distributive et s'il n'existe pas de sous-classe \mathcal{S}' telle que \mathcal{S}' soit distributive et $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$.

Ce résultat général a été appliqué aux formalismes qualitatifs classiques (Long et Li, 2015). En particulier, deux sous-algèbres distributives maximales ont été identifiées pour PC, à savoir $\mathcal{C}_{\text{PA}} = \{\emptyset, \{<\}, \{=\}, \{>\}, \{<, =, >\}, \{<, =\}, \{=, >\}\}$ et $\mathcal{S}_{\text{PA}} = \{\emptyset, \{<\}, \{=\}, \{>\}, \{<, =, >\}, \{<, >\}\}$, et pour IC, notées \mathcal{C}_{IA} et \mathcal{S}_{IA} . Les sous-classes \mathcal{C}_{PA} et \mathcal{C}_{IA} correspondent exactement aux relations dont l'interprétation géométrique est un *ensemble convexe* (Ligozat, 2011). De plus, les relations de \mathcal{C}_{IA} , c'est-à-dire les relations convexes d'IA, correspondent aux relations exprimables sous la forme d'intervalles de relations :

$$\mathcal{C}_{\text{IA}} = \{[b, b'] \mid b, b' \in \mathbf{B}_{\text{IA}}\}$$

(voir la section 2.3.1). La même remarque s'applique pour \mathcal{C}_{PA} avec l'ordre décrit dans la figure 2.6.

Concernant CPC, quatre sous-algèbres distributives maximales ont été identifiées. Il s'agit des ensembles de relations cardinales correspondant aux produits cartésiens des sous-algèbres distributives maximales de PA : $\mathcal{C}_{\text{PA}}^2$, $\mathcal{C}_{\text{PA}} \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$, $\mathcal{S}_{\text{PA}} \times \mathcal{C}_{\text{PA}}$ et $\mathcal{S}_{\text{PA}}^2$ ¹⁴. Deux sous-algèbres distributives maximales ont également été identifiées pour RCC₈, notées D_{41}^8 et D_{64}^8 dans la littérature (Li *et al.*,

12. Notons qu'une sous-classe d'une algèbre non associative distributive vérifie nécessairement la propriété duale : pour toutes relations $r, r', r'' \in \mathcal{S}$ telles que $r' \cap r'' \neq \emptyset$, la propriété $(r' \cap r'') \diamond r = (r' \diamond r) \cap (r'' \diamond r)$ est satisfaite.

13. Les auteurs ont en fait montré un résultat plus fort, voir le théorème 2.4.26.

14. Un couple de relations de PC correspond à une relation cardinale (voir la section 2.3.2).

FIGURE 2.6 – Ordre total des relations basiques de PC induit par \mathbb{R}

2015, Appendix A), et que nous notons \mathcal{C}_{RCA_8} et \mathcal{S}_{RCA_8} respectivement. \mathcal{S}_{RCA_8} est décrite dans la table 2.10. Les relations de \mathcal{C}_{RCA_8} sont aussi exprimables sous forme d'intervalles de relations basiques (Chandra et Pujari, 2005). Notons qu'il n'y a pas d'autre sous-algèbre distributive maximale pour les formalismes PC, IC, RCC_8 et CPC.

$r \in \mathcal{S}_{RCA_8}$	$r \in \mathcal{S}_{RCA_8}$ (suite)
NTPP PO EC TPP	\overline{TPP} TPP EQ DC EC PO
\overline{TPP} \overline{NTPP}	PO EC
NTPP TPP	PO \overline{TPP} DC \overline{NTPP} EC
PO TPP	\overline{TPP} \overline{NTPP} TPP NTPP EQ PO EC
DC	\overline{TPP} \overline{NTPP} TPP NTPP EQ PO
\overline{TPP} \overline{NTPP} TPP EQ DC EC PO	PO EQ
\overline{TPP} DC EC PO	PO TPP EQ
DC EC	PO \overline{TPP} EQ
EQ	PO TPP \overline{TPP}
PO DC EC TPP	PO TPP NTPP EQ
\overline{TPP} PO \overline{NTPP}	PO \overline{TPP} \overline{NTPP} EQ
\overline{TPP} \overline{NTPP} TPP EQ PO EC	PO TPP \overline{TPP} \overline{NTPP}
TPP	PO TPP NTPP \overline{TPP}
\overline{TPP} PO EC	PO TPP NTPP \overline{TPP} \overline{NTPP}
\overline{TPP}	EC PO EQ
\overline{TPP} TPP NTPP EQ DC EC PO	EC PO TPP EQ
\overline{TPP} EQ PO EC TPP	EC PO \overline{TPP} EQ
PO NTPP DC EC TPP	EC PO \overline{TPP} \overline{NTPP} EQ
\overline{TPP} PO	EC PO TPP NTPP EQ
NTPP PO TPP	EC PO TPP \overline{TPP}
DC EC PO	EC PO TPP \overline{TPP} \overline{NTPP}
\overline{TPP} EQ PO \overline{NTPP} TPP	EC PO TPP NTPP \overline{TPP}
\overline{TPP} NTPP EQ PO TPP	EC PO TPP NTPP \overline{TPP} \overline{NTPP}
PO EC TPP	DC EC PO EQ
\overline{TPP} TPP NTPP EQ PO EC	DC EC PO TPP EQ
NTPP	DC EC PO \overline{TPP} EQ
\overline{NTPP}	DC EC PO TPP \overline{TPP}
\overline{TPP} EQ PO TPP	DC EC PO \overline{TPP} \overline{NTPP} EQ
EC	DC EC PO TPP NTPP EQ
\overline{TPP} PO \overline{NTPP} EC	DC EC PO TPP NTPP \overline{TPP}
\overline{NTPP} NTPP DC EC \overline{TPP} TPP EQ PO	DC EC PO TPP \overline{TPP} \overline{NTPP}
PO	DC EC PO TPP NTPP TPP NTPP

TABLE 2.10 – Relations de la sous-classe \mathcal{S}_{RCA_8} de RCC_8

Les sous-classes \mathcal{C}_{PA} , \mathcal{S}_{PA} , \mathcal{C}_{IA} , \mathcal{S}_{IA} , \mathcal{C}_{RCA_8} , \mathcal{S}_{RCA_8} , \mathcal{C}_{PA}^2 , $\mathcal{C}_{PA} \times \mathcal{S}_{PA}$, $\mathcal{S}_{PA} \times \mathcal{C}_{PA}$ et \mathcal{S}_{PA}^2 ne sont cependant pas maximales pour la traitabilité. Par exemple, PA est algébriquement traitable. Pour IC, la sous-classe maximale pour la traitabilité qui est la plus grande en nombre de relations est la classe des relations *préconvexes* (Krokhin *et al.*, 2003). Les relations préconvexes se construisent

	Définition
\mathcal{N}	$\{r \mid \text{PO} \notin r \wedge (\{\text{TPP}, \overline{\text{TPP}}\} \subseteq r \vee \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \subseteq r \vee \{\text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}\} \subseteq r \vee \{\text{NTPP}, \overline{\text{NTPP}}\} \subseteq r)\}$
\mathcal{NP}_8	$\mathcal{N} \cup \{\{\text{EC}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}, \{\text{EC}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\}, \{\text{DC}, \text{EC}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}, \{\text{DC}, \text{EC}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\}\}$
\mathcal{P}_8	$\mathcal{P}_8 = \text{RCA}_8 \setminus \mathcal{NP}_8$
$\hat{\mathcal{H}}_8$	$\mathcal{P}_8 \setminus \{r \mid (\{\text{EQ}, \text{NTPP}\} \subseteq r \wedge \{\text{TPP}\} \not\subseteq r) \vee (\{\text{EQ}, \overline{\text{NTPP}}\} \subseteq r \wedge \overline{\text{TPP}} \not\subseteq r)\}$
\mathcal{Q}_8	$\mathcal{P}_8 \setminus \{r \mid \{\text{EQ}\} \subseteq r \wedge \{\text{PO}\} \not\subseteq r \wedge r \cap \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \neq \emptyset\}$
\mathcal{C}_8	$\mathcal{P}_8 \setminus \{r \mid \{\text{EC}\} \subseteq r \wedge \{\text{PO}\} \not\subseteq r \wedge r \cap \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\} \neq \emptyset\}$

TABLE 2.11 – Définitions des sous-classes $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 et \mathcal{Q}_8

à partir des relations convexes en leur retirant des relations basiques de dimension inférieure (les relations préconvexes ont aussi une interprétation géométrique (Ligozat, 2011, Chapitre 2 et 4)). Si on note par \mathcal{P}_A l'ensemble des relations préconvexes de l'algèbre A , nous avons alors

$$\mathcal{P}_A = \{r \setminus r' \mid r \in \mathcal{C}_A \wedge r' \subseteq r \wedge \dim(r') < \dim(r)\}.$$

Un mécanisme de réduction a été proposé pour identifier des sous-classes traitables, dit *réduction par affinement*.

Définition 2.4.17 (Renz, 1999; Renz et Ligozat, 2005). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq 2^A$. \mathcal{S} peut être *réduite par affinement* à \mathcal{S}' , si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- il existe une fonction h de \mathcal{S} dans \mathcal{S}' vérifiant $h(r) \subseteq r$ et $r \neq \emptyset \implies h(r) \neq \emptyset$, qualifiée d'*affinement*;
- pour tout réseau N sur \mathcal{S} algébriquement cohérent, la clôture algébrique du réseau N' , défini par $(N')^{xy} = h(N^{xy})$ pour tous $x, y \in E$, est algébriquement cohérente.

Nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 2.4.18 (Renz, 1999; Renz et Ligozat, 2005). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq 2^A$ des sous-classes. Si \mathcal{S}' est algébriquement traitable et si \mathcal{S} peut être réduite par affinement à \mathcal{S}' alors \mathcal{S} est algébriquement traitable.

Renz a proposé un algorithme pour prouver une réduction par affinement (Renz, 1999) . Il a en particulier montré que les relations préconvexes \mathcal{P}_{IA} peuvent être réduites par affinement à \mathcal{S}_{IA} , par la fonction h_{\max} suivante :

$$h_{\max}(r) = \{b \in r \mid \dim(b) = \dim(r)\}.$$

Concernant RCC_8 , il n'y a que trois sous-algèbres maximales pour la traitabilité, notées $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 et \mathcal{Q}_8 (voir la table 2.11 pour leur définition) (Ligozat, 2011). On peut prouver leur traitabilité par le fait qu'elles se réduisent toutes à l'ensemble des relations basiques par leur affinement respectif décrit dans la définition suivante, que nous notons $h_{\hat{\mathcal{H}}_8}$, $h_{\mathcal{Q}_8}$ et $h_{\mathcal{C}_8}$ respectivement.

Définition 2.4.19 (Renz, 1999). Soit \mathcal{S} la sous-classe $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{Q}_8 et \mathcal{C}_8 respectivement et soit $r \in \mathcal{S}$. L'affinement de \mathcal{S} , noté $h_{\mathcal{S}}$, est défini par

$$h_{\mathcal{S}}(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \in B \\ \{\text{DC}\} & \text{sinon et si } \text{DC} \in r \\ \{\text{EC}\} & \text{sinon et si } \text{EC} \in r \text{ et } \mathcal{S} \neq \mathcal{C}_8 \\ \{\text{PO}\} & \text{sinon et si } \text{PO} \in r \\ \{\text{NTPP}\} & \text{sinon et si } \text{NTPP} \in r \text{ et } \mathcal{S} = \mathcal{C}_8 \\ \{\overline{\text{NTPP}}\} & \text{sinon et si } \overline{\text{NTPP}} \in r \text{ et } \mathcal{S} = \mathcal{C}_8 \\ \{\text{TPP}\} & \text{sinon et si } \text{TPP} \in r \\ \{\overline{\text{TPP}}\} & \text{sinon et si } \overline{\text{TPP}} \in r \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

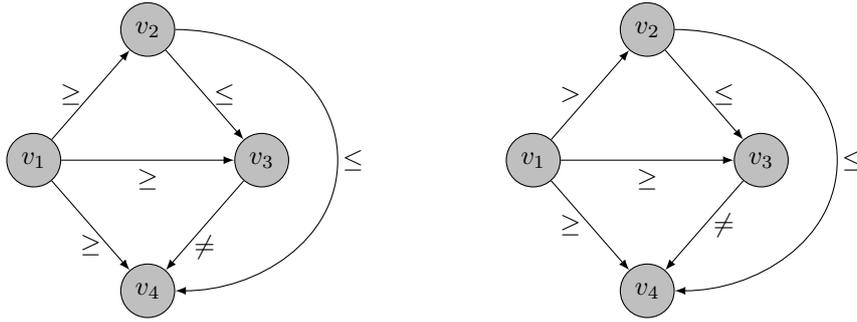


FIGURE 2.7 – Un réseau non minimal sur PC à gauche, et son réseau minimal à droite ; la contrainte $v_1 = v_2$ n'appartient à aucun scénario cohérent

Remarque 2.4.20. Nous avons $h_{\hat{H}_s} = h_{Q_s}$.

Notons, pour finir, que les relations préconvexes vérifient une propriété plus forte que la traitabilité algébrique. En effet, nous pouvons déterminer un scénario cohérent d'un réseau N algébriquement cohérent sur \mathcal{P}_{IA} (resp. \mathcal{P}_{CPA} , resp. PA) en appliquant itérativement la procédure suivante jusqu'à atteindre un point fixe (Ligozat, 2011) :

- choisir une paire de variables $\{x, y\}$ telle que N^{xy} n'est pas basique,
- remplacer N^{xy} par une relation basique de $h_{\max}(N^{xy})$ dans N ,
- clore N algébriquement.

2.4.5 Minimalité et redondance

Dans les sections précédentes, le problème de la cohérence, une des différentes tâches du raisonnement, a été abordé. En particulier, certaines sous-classes traitables pour ce problème ont été présentées. Dans cette section, nous nous intéressons à une autre tâche du raisonnement, le problème de la *minimalité*, nommé également *problème de l'étiquetage minimal*, *problème de la clôture déductive* et *problème de la déduction maximale d'information* (van Beek et Cohen, 1990; Gerevini et Saetti, 2011; Liu et Li, 2012; Chandra et Pujari, 2005; Amaneddine et Condotta, 2013; Bessiere *et al.*, 1996; Gerevini et Schubert, 1995; Amaneddine et Condotta, 2012; Long et Li, 2015). Calculer le réseau minimal d'un réseau N consiste à déterminer le plus petit réseau $M \subseteq N$ ayant les mêmes solutions que N . Le réseau M contient le maximum d'information que l'on peut déduire de N . L'incertitude sur la relation basique réelle entre chaque couple d'entités est ainsi minimale.

Définition 2.4.21. Un réseau N est *minimal* lorsque pour tout couple (x, y) et pour toute relation basique $b \in N^{xy}$, il existe un scénario cohérent $S \subseteq N$ tel que $S^{xy} = b$.

Définition 2.4.22. Le *réseau minimal* d'un réseau N , est le réseau $M \subseteq N$ tel que M est minimal et tel que toute solution $\{u_x\}_{x \in E}$ de N est solution de M .

Exemple 2.4.23. Un réseau non minimal N et un réseau minimal M sur le calcul des points sont illustrés dans la figure 2.7. En fait, M est le réseau minimal de N . Déterminer le réseau minimal consiste à retirer toutes les relations basiques irréalisables. Cette opération affine ainsi le plus possible toutes les relations, sans changer l'ensemble des solutions. La clôture algébrique est ainsi un candidat de choix pour résoudre ce problème. Malheureusement, la clôture algébrique ne calcule pas en général le réseau minimal, mais uniquement un réseau N' tel que

$$M \subseteq N' \subseteq N.$$

Calculer le réseau minimal permet de décider la cohérence, puisqu'un réseau est cohérent si et seulement si son réseau minimal est non trivialement incohérent. Ainsi, (à moins que $P = NP$) la clôture algébrique ne peut pas calculer le réseau minimal lorsque le problème de décision de la cohérence est NP-complet, ce qui est généralement le cas sauf pour certaines sous-classes.

Nous nous intéressons donc maintenant aux sous-classes dont la clôture algébrique permet de calculer le réseau minimal.

Définition 2.4.24. Une sous-classe \mathcal{S} est *minimale* si la clôture algébrique de tout réseau N sur \mathcal{S} est le réseau minimal de N .

Une sous-classe minimale est ainsi algébriquement traitable. Cependant, l'inverse n'est pas vrai en général. En effet, la sous-classe des relations préconvexes \mathcal{P}_{IA} est algébriquement traitable mais elle n'est pas minimale. En fait, même le calcul des points n'est pas minimal.

Exemple 2.4.25. Considérons le premier réseau de la figure 2.7. Celui-ci est algébriquement clos, non minimal et sur PA.

Néanmoins une grande famille de sous-classes minimales a été identifiée, car les sous-algèbres distributives sont minimales.

Théorème 2.4.26 (Long et Li, 2015). *Soit \mathcal{S} une sous-algèbre distributive d'un formalisme qualitatif généré par un schéma de partition. Si tous les scénarios algébriquement clos sont cohérents, les réseaux algébriquement clos sur \mathcal{S} sont minimaux.*

On a ainsi le résultat suivant.

Proposition 2.4.27. *Les sous-classes de relations \mathcal{C}_{PA} , \mathcal{C}_{IA} , $\mathcal{C}_{\text{RCA}_8}$ et \mathcal{S}_{PA} , \mathcal{S}_{IA} , $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ sont minimales.*

Démonstration. Ces sous-algèbres sont distributives (voir la section 2.4.4) et vérifient en particulier les conditions du théorème 2.4.26 (voir Long et Li (2015)). Elles sont donc minimales. \square

Nous nous intéressons maintenant aux sous-classes non minimales. Plus particulièrement, nous nous focalisons sur les techniques permettant de calculer les réseaux minimaux. Pour déterminer le réseau minimal d'un réseau N , il suffit de retirer, pour chaque couple (x, y) , toute relation basique b de N^{xy} qui n'appartient à aucun scénario cohérent de N . Pour le savoir, il suffit de décider la cohérence de N après avoir affiné N^{xy} par b . De ce fait, le problème de la minimalité est polynomialement équivalent au problème de la cohérence. Ainsi, on peut calculer le réseau minimal d'un réseau en $\mathcal{O}(n^5)$ dans le cadre d'une sous-classe algébriquement traitable. Plus précisément, pour chaque relation basique de chaque paire d'entités (ce qui est de l'ordre de n^2), on applique la clôture algébrique (qui est en $\mathcal{O}(n^3)$).

Notons, pour finir, que le problème dit *de la redondance* constitue le troisième problème fondamental, avec la décision de la cohérence et la minimalité, associé aux réseaux de contraintes qualitatives (Duckham *et al.*, 2014; Li *et al.*, 2015). Ce problème, introduit récemment, consiste à calculer un réseau *premier* d'un réseau de contraintes. Il s'agit d'un réseau ayant les mêmes solutions et n'ayant aucune contrainte *redondante*. Une contrainte est redondante si lorsqu'on la retire, on n'augmente pas le nombre de solutions. Nous pouvons voir ce problème comme le problème inverse de la minimalité (au lieu d'ajouter des relations, on les retire). Intuitivement, on cherche à compresser « logiquement » un réseau.

Exemple 2.4.28. Considérons la description « $x < y$, $y < z$ et $x < z$ ». Le réseau premier de cette description est « $x < y$ et $y < z$ ». Ces deux contraintes suffisent en effet à inférer la contrainte retirée « $x < z$ ».

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formalismes qualitatifs. Ils visent à représenter le monde en exprimant les relations entre des entités et à inférer de nouvelles relations, grâce à une approche qualitative permettant d'abstraire les informations inutiles et d'exprimer l'incertitude de la connaissance, de manière analogue au langage naturel.

Les formalismes qualitatifs se fondent généralement sur un schéma de partition qui est un ensemble de relations basiques exhaustives et disjointes deux à deux, contenant l'égalité et l'inverse de chaque relation basique. Les relations d'un formalisme qualitatif sont alors des unions de relations basiques, ce qui permet de représenter l'incertitude à propos de la relation basique satisfaite par un couple d'entités.

Pour raisonner sur ces relations, trois opérateurs sont utilisés : l'inversion, l'intersection et la composition. L'inversion permet de changer de point de vue. L'intersection permet d'ajouter de nouvelles connaissances, et la composition permet de propager les informations entre les entités.

Les résultats des opérateurs ne peuvent être déterminés extensivement étant donné que les relations constituent des ensembles infinis de couples d'entités. Cependant, la structure des relations induit pour chaque relation une représentation sous forme d'ensemble de relations abstraites basiques, qui permet le calcul effectif des relations.

Le calcul des points, le calcul des intervalles, le calcul des points cardinaux, RCC_5 et RCC_8 constituent des exemples fondamentaux de formalismes qualitatifs. La définition de formalisme qualitatif a elle-même fait l'objet de nombreuses études. En effet, plusieurs définitions de formalisme qualitatif ont été proposées telles que celle de Ligozat et Renz (Ligozat et Renz, 2004) et celle plus générale de Dylla et al. (Dylla *et al.*, 2013) permettant d'inclure les formalismes qualitatifs ne vérifiant pas les propriétés de l'inverse et n'ayant pas de relation d'égalité.

Une description dans le cadre des formalismes qualitatifs est représentée par un réseau de contraintes qualitatives, c'est-à-dire un ensemble de relations de ce formalisme entre des variables d'entité. Les principales tâches du raisonnement portant sur les réseaux de contraintes sont la décision de la cohérence et le calcul du réseau minimal, permettant respectivement de déterminer s'il existe des entités satisfaisant les contraintes du réseau considéré et de déterminer l'ensemble des informations déductibles à partir de cette description. Ces deux problèmes sont le plus souvent NP-complets. De ce fait, les travaux de la littérature se sont focalisés sur l'identification de sous-classes traitables.

La clôture algébrique permet de résoudre ces problèmes dans certains cas. Celle-ci applique les opérateurs du formalisme jusqu'à atteindre un point fixe, ce qui diminue l'incertitude concernant la relation basique entre chaque couple d'entités. Pour certains formalismes, les scénarios algébriquement clos sont cohérents. La décision de la cohérence et le calcul du réseau minimal peuvent ainsi s'effectuer en cherchant de tels scénarios par *backtracking*. En outre, pour certaines sous-classes, tous les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents. La clôture algébrique étant polynomiale, ces sous-classes sont ainsi traitables et qualifiées plus précisément d'algébriquement traitables. Les sous-algèbres distributives et les sous-classes préconvexes constituent des exemples de sous-classes algébriquement traitables.

Nous avons ainsi exposé dans ce chapitre le cadre formel des formalismes qualitatifs classiques. Dans le chapitre suivant, nous discuterons des limites de ce cadre, et nous présenterons ses extensions, proposées pour pallier ses limitations, permettant en particulier de raisonner sur des descriptions dont les relations appartiennent à des formalismes qualitatifs différents.

Chapitre 3

Extensions des formalismes qualitatifs

3.1 Introduction

La recherche actuelle dans le domaine des formalismes qualitatifs porte, en particulier, sur l'augmentation de l'expressivité des formalismes de la littérature (Chen *et al.*, 2015; Ligozat, 2011, Chapitre 15). De nombreuses combinaisons et extensions de formalismes qualitatifs ont ainsi été proposées et étudiées. L'intérêt de ces extensions provient du fait que les formalismes de la littérature sont basés sur un ou seulement quelques aspects du temps ou de l'espace (la topologie, les directions, les distances, les formes...), alors que les applications nécessitent de prendre en compte plusieurs aspects, de raisonner simultanément sur le temps et sur l'espace et également de raisonner avec des informations exprimées à des précisions différentes. Par exemple, la capacité à raisonner sur des informations spatiales et temporelles est essentielle à la résolution de tâches complexes dans un environnement physique et dynamique (Westphal *et al.*, 2011; Mansouri et Pecora, 2016).

Les formalismes d'une combinaison ont généralement des interdépendances qui affectent le raisonnement. Celles-ci proviennent, d'une part, de la façon dont les formalismes ont été combinés. Par exemple, une relation basique du calcul des points cardinaux se décompose en un couple de relations d'ordre sur \mathbb{R} , chacune correspondant à un axe. On peut ainsi voir le calcul des points cardinaux comme une combinaison du calcul des points avec lui-même. Le raisonnement peut donc être effectué indépendamment sur chaque axe. Cependant, une relation cardinale non basique ne s'exprime pas toujours comme un couple de relations d'ordre sur \mathbb{R} . Nous ne pouvons donc pas décomposer le raisonnement sur les deux axes dans ce cas de figure. En fait, une relation quelconque du calcul des points cardinaux peut être vue comme une disjonction de couples de relations basiques du calcul des points. Cette expressivité logique engendre des interdépendances qui affectent le raisonnement. Nous pouvons ainsi classer les différentes combinaisons de la littérature selon leur niveau d'expressivité logique.

D'autre part, des interdépendances sémantiques s'ajoutent à l'interdépendance logique. Par exemple, si on sait que la taille d'une région est plus petite qu'une autre, alors on en conclut que la première région ne peut pas contenir la seconde. Le formalisme QS (exemple 2.2.22) et le formalisme RCC_8 sont ainsi interdépendants. Les interdépendances sémantiques empêchent également de décider la cohérence en considérant indépendamment chaque formalisme composite. En effet, dans le cas des formalismes spatio-temporels, la cohérence temporelle et la cohérence spatiale n'impliquent pas toujours la cohérence de la description spatio-temporelle.

Différents types de combinaisons et d'extensions ont été proposés dans la littérature. L'objectif de ce chapitre est de les détailler. Premièrement, les *intégrations*, présentées dans la section 3.2, permettent d'exprimer et de raisonner à propos de relations provenant de formalismes différents caractérisant les mêmes entités. Les *intégrations lâches* constituent une forme particulière d'intégration (Wölfl et Westphal, 2009). Elles permettent de raisonner simultanément sur plusieurs réseaux de contraintes basés sur des formalismes qualitatifs différents décrivant les mêmes entités. Les *intégrations étroites* (Wölfl et Westphal, 2009) constituent un autre type d'intégration. Avec ce type de combinaison, un nouveau formalisme qualitatif, au sens classique, est construit. Son schéma de partition correspond à l'*intersection* des schémas de partition des formalismes qualitatifs combinés.

Deuxièmement, les combinaisons spatio-temporelles, présentées dans la section 3.3, permettent

de raisonner avec des informations à la fois temporelles et spatiales. Contrairement aux intégrations, où la sémantique est unique, la combinaison d'un formalisme temporel et d'un formalisme spatial dépend d'une *dynamique*. Il faut, en effet, spécifier comment les entités évoluent au cours du temps. Par exemple, si on s'intéresse à des objets rigides, on peut avoir besoin de caractériser le fait que leurs tailles restent constantes. La dynamique des entités considérées a un véritable impact sur le raisonnement, car elle engendre, en général, des interdépendances sémantiques. Les différents types de combinaison spatio-temporelle incluent les *séquences temporelles d'informations qualitatives* et les *logiques spatio-temporelles*.

Troisièmement, les formalismes multi-échelles, présentés dans la section 3.4, permettent de représenter et de raisonner sur des informations ayant des précisions différentes. Pour ce faire, les informations sont représentées, hiérarchiquement, à différents niveaux de détail. Dans le cadre du raisonnement sur le temps, les échelles de précision des informations peuvent être de l'ordre des minutes, des heures, des jours ou des semaines, par exemple. Dans le contexte spatial, les échelles de précision peuvent être de l'ordre du centimètre, du mètre, d'un bâtiment, ou même d'une région.

Exemple 3.1.1. Vue de loin, on observe qu'une voiture est en contact avec un camion. En se rapprochant, notre vision gagne en détail. On remarque alors que la voiture et le camion sont légèrement espacés. Ils ne sont donc pas en contact. Au départ, on avait une vision *grossière*, imprécise de la scène, mais en se rapprochant, notre point de vue est devenu plus *fin*, détaillé.

Ne pas tenir compte de la différence de précision associée aux informations peut conduire à des conclusions erronées telles que celle de l'exemple précédent. Les formalismes multi-échelles permettent ainsi de raisonner avec des informations de précisions différentes et donc de résoudre ce problème.

Il existe d'autres extensions et combinaisons de formalismes. Les combinaisons permettant de raisonner sur des entités de natures différentes (Meiri, 1996; Inants, 2016) et les combinaisons hybrides portant à la fois sur des informations quantitatives et sur des informations qualitatives (Kautz et Ladkin, 1991; Meiri, 1996) sont présentées dans la section 3.5.

3.2 Intégrations de formalismes qualitatifs

Dans cette section, nous présentons les deux types *d'intégrations* de formalismes, à savoir l'intégration lâche et l'intégration étroite. Les intégrations sont des combinaisons de formalismes qualitatifs ayant le même univers \mathcal{U} . Ce type de combinaison permet d'exprimer des descriptions avec des relations provenant de formalismes différents entre les mêmes entités. Nous abordons également dans cette section le lien entre combinaison et *affinement* de formalismes.

3.2.1 Les intégrations lâches

Les intégrations lâches permettent de raisonner à propos de deux réseaux de contraintes portant sur les mêmes entités et dont les relations proviennent de formalismes qualitatifs différents (Gerevini et Renz, 2002; Westphal et Woelfl, 2008; Wölfl et Westphal, 2009). Par exemple, cette forme de combinaison permet de raisonner à la fois sur un réseau décrivant les tailles relatives des entités et sur un second réseau décrivant leurs liens topologiques. Ces paires de réseaux liés sont appelées des bi-réseaux de contraintes et sont formalisées dans la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soient $(\mathbf{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ et $(\mathbf{A}', \mathcal{U}, \varphi')$ deux formalismes qualitatifs ayant le même univers et soient $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}$ et $\mathcal{S}' \subseteq \mathbf{A}'$ des sous-classes. Un *bi-réseau de contraintes* N sur $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ est un couple (N_1, N_2) de réseaux de contraintes, avec N_1 sur \mathcal{S} et N_2 sur \mathcal{S}' , portant sur les mêmes variables ($N_1 = (\mathbf{E}, \mathbf{C}_1)$ et $N_2 = (\mathbf{E}, \mathbf{C}_2)$).

Le problème de la cohérence dans ce contexte consiste alors à déterminer si on peut trouver une solution satisfaisant les deux réseaux de contraintes :

Définition 3.2.2. Un bi-réseau de contraintes $N = (N_1, N_2)$ est dit *cohérent* lorsqu'il existe des entités $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, on a $(u_x, u_y) \in \varphi(N_1^{xy})$ et $(u_x, u_y) \in \varphi(N_2^{xy})$.

b	$\{<\}$	$\{=\}$	$\{>\}$
$I(b)$	$\{\text{DC, EC, PO, TPP, NTPP}\}$	$\{\text{DC, EC, PO, EQ}\}$	$\{\text{DC, EC, PO, } \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$

TABLE 3.1 – Opérateur d’interdépendance de QS vers RCC_8

b	$\{\text{DC}\}$	$\{\text{EC}\}$	$\{\text{PO}\}$	$\{\text{EQ}\}$	$\{\text{TPP}\}$	$\{\text{NTPP}\}$	$\{\overline{\text{TPP}}\}$	$\{\overline{\text{NTPP}}\}$
$I(b)$	BPA	BPA	BPA	$\{=\}$	$\{<\}$	$\{<\}$	$\{>\}$	$\{>\}$

TABLE 3.2 – Opérateur d’interdépendance de RCC_8 vers QS

Étant donné que les deux formalismes ont le même univers, les relations de \mathbf{A} et les relations de \mathbf{A}' sont généralement interdépendantes. Par exemple, soient $r \in \mathbf{A}$ et $r' \in \mathbf{A}'$, il est possible que $x r y$ et $x r' y$ ne puissent être satisfaites simultanément. De plus, si $x r y$ est vérifiée, avec $r \in \mathbf{A}$, alors il existe une plus petite¹ relation $r' \in \mathbf{A}'$ telle que $x r' y$ est satisfaite. Autrement dit, $x r y$ implique $x r' y$. La relation r' associée à r est calculée par un opérateur d’interdépendance I défini comme suit :

Définition 3.2.3. Soient $(\mathbf{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ et $(\mathbf{A}', \mathcal{U}, \varphi')$ deux formalismes qualitatifs ayant le même univers.

L’opérateur d’interdépendance I de \mathbf{A} dans \mathbf{A}' est défini par :

$$I(r) = \{b' \in \mathbf{B}' \mid \varphi'(b') \cap \varphi(r) \neq \emptyset\}.$$

Exemple 3.2.4. La première intégration lâche introduite dans la littérature est la *combinaison taille-topologie* (Gerevini et Renz, 2002), notée STC (*size and topology combination*). STC est l’intégration lâche des relations qualitatives de taille (QS) et des relations topologiques de RCC_8 . Cette combinaison permet de décrire la relation entre deux régions à la fois en termes de topologie (le premier réseau est sur RCC_8) et en termes de taille relative (le second réseau est sur l’algèbre des points). Elle permet ainsi d’exprimer des descriptions telles que « x et y sont déconnectées et la taille de x est plus petite que celle de y ». L’opérateur d’interdépendance de QS vers RCC_8 est décrit dans la table 3.1 et l’opérateur de RCC_8 vers QS dans la table 3.2.

Pour raisonner à propos des bi-réseaux de contraintes, Gerevini et Renz généralisent la cohérence algébrique en *bi-cohérence algébrique*² (Gerevini et Renz, 2002). Celle-ci s’obtient en appliquant la *bi-clôture* qui clôturé algébriquement les deux réseaux tout en propageant leurs interdépendances. Cela revient à appliquer les opérations de substitution suivantes, pour tous x, y, z , jusqu’à atteindre un point fixe, où I est l’opérateur d’interdépendance de \mathbf{A} vers \mathbf{A}' et I' est l’opérateur d’interdépendance de \mathbf{A}' vers \mathbf{A} :

$$\begin{cases} N_1^{xz} \leftarrow N_1^{xz} \cap I'(N_2^{xz}) \cap (N_1^{xy} \diamond N_1^{yz}) \\ N_2^{xz} \leftarrow N_2^{xz} \cap I(N_1^{xz}) \cap (N_2^{xy} \diamond N_2^{yz}) \end{cases}$$

Tandis que la clôture algébrique est une clôture par composition, la bi-clôture algébrique est une double clôture par composition combinée simultanément à une clôture par les opérateurs d’interdépendance.

Des couples de sous-classes pour lesquelles la bi-cohérence algébrique implique la cohérence ont été trouvées pour plusieurs intégrations lâches (Gerevini et Renz, 2002; Li et Cohn, 2012; Cohn *et al.*, 2014). Pour la combinaison taille-topologie, les sous-classes traitables sont $(\hat{\mathcal{H}}_8, \text{PA})$, $(\mathcal{Q}_8, \text{PA})$ et $(\mathcal{C}_8, \text{PA})$. En fait, ces couples de sous-classes sont maximaux pour la traitabilité puisque $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 , \mathcal{Q}_8 et PA sont maximales. En dépit de ces résultats positifs, décider la cohérence des *bi-scénarios* (bi-réseaux ne contenant que des relations basiques) est NP-complet pour l’intégration lâche de

1. Au sens de l’inclusion.

2. Le terme introduit dans la littérature est « *bipath-consistency* », car il généralise la propriété « *path-consistency* » (*chemin-cohérence*) qui est un terme importé de la littérature des réseaux de contraintes quantitatifs (Mohr et Henderson, 1986). La *path-consistency* est équivalente à la cohérence algébrique lorsque la composition coïncide avec la composition faible. La *path-consistency* et la cohérence algébrique sont de ce fait souvent confondues, par abus de langage. Dans cette thèse, nous distinguons les deux concepts.

RCC₈ et du *calcul des régions cardinales* CRC³ (Liu *et al.*, 2009). Dans un tel cas de figure, il n'y a aucune sous-algèbre traitable.

En fait, certaines intégrations possèdent des sous-classes traitables dont la bi-clôture algébrique seule ne permet pas de décider la cohérence des bi-réseaux. C'est le cas, par exemple, de l'intégration lâche de RCC₈ et de l'algèbre des rectangles (Balbiani *et al.*, 1999) interprétée sur les régions⁴, que nous notons MBRC (*minimum bounding rectangle calculus*) (Cohn *et al.*, 2014). L'algorithme proposé pour décider la cohérence, appelé *BC-clôture*, est en $\mathcal{O}(n^4)$ (avec n le nombre de variables), ce qui contraste avec la bi-clôture algébrique calculable en temps cubique, à l'instar de la clôture algébrique (Gerevini et Renz, 2002).

Une modification de cette intégration a été proposée et étudiée dans la littérature, qui se base sur une variante de RCC₈ (Cohn *et al.*, 2014). Avec RCC₈, deux régions du plan sont en contact extérieur (relation EC), si leur intersection est de dimension 0 ou 1 (c'est-à-dire constitue un ensemble de points et/ou de courbes). Avec la variante, notée RCC'₈, deux régions du plan sont en contact extérieur seulement si leur intersection est de dimension 1 (c'est-à-dire constitue un ensemble de courbes auquel s'ajoutent potentiellement des points). Ce léger changement de sémantique a des conséquences importantes. Les sous-classes traitables identifiées de l'intégration lâche de RCC'₈ et de MBRC sont les mêmes que celles de l'intégration de RCC₈ et de MBRC. Cependant, avec cette variante, la bi-clôture algébrique permet de décider la cohérence (les bi-réseaux bi-algébriquement cohérents sont cohérents). La complexité de la décision de la cohérence pour cette variante est donc plus faible (en $\mathcal{O}(n^3)$). En fait, la différence fondamentale entre ces deux variantes est qu'avec l'intégration de RCC₈ et de MBRC, il y a des bi-scénarios bi-algébriquement clos qui sont incohérents, alors qu'avec l'intégration de RCC'₈ et de MBRC, tous les bi-scénarios bi-algébriquement clos sont cohérents. C'est la présence de bi-scénarios bi-algébriquement clos et incohérents qui fait que la bi-clôture algébrique ne permet pas de décider la cohérence pour les sous-classes traitables identifiées de l'intégration de RCC₈ et de MBRC.

3.2.2 Les intégrations étroites

Dans cette section, nous nous intéressons aux intégrations étroites (Wöfl et Westphal, 2009; Juan *et al.*, 2010), qui combinent des formalismes sur le même univers, à l'instar des intégrations lâches, mais qui possèdent une expressivité supérieure. L'ensemble des relations basiques d'une intégration étroite correspond à la *combinaison* des schémas de partition des formalismes combinés.

Définition 3.2.5. Soient \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' deux schémas de partition sur le même univers \mathcal{U} . La *combinaison* de \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' est le schéma de partition $\{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \mid \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \neq \emptyset \wedge \mathfrak{b} \in \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{b}' \in \mathfrak{B}'\}$.

Les relations d'une intégration étroite sont ainsi des unions de relations de la combinaison de schémas de partition associée. Autrement dit, une relation est une union d'intersections de relations basiques hétérogènes. Cela diffère de la combinaison lâche où l'on considère une paire de relations hétérogènes, non basiques en général, que l'on interprète comme l'intersection de ces deux relations.

Exemple 3.2.6. Avec l'intégration lâche STC, nous pouvons exprimer les contraintes $x \{<, =\} y$ et $x \{\text{PO}, \text{EC}\} y$, ce qui revient à la relation $(\{<, =\}) \cap (\{\text{PO}, \text{EC}\})$. Avec l'intégration étroite correspondante, nous pouvons exprimer la contrainte $(x \{<\} y \text{ et } x \{\text{PO}\} y)$ ou $(x \{=\} y \text{ et } x \{\text{EC}\} y)$, ce qui revient à la relation « $(< \cap \text{PO}) \cup (= \cap \text{EC})$ » (φ_{QS} et φ_{RCC_8} sont omises pour plus de clarté). Cette dernière relation est incluse dans la précédente et n'est pas exprimable avec l'intégration lâche.

Ainsi, avec l'intégration lâche, on caractérise un couple d'entités avec deux relations hétérogènes : $r \cap r'$ avec $r \in \mathfrak{A}$ et $r' \in \mathfrak{A}'$. Nous pouvons donc exprimer $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{A}'|$ relations, c'est-à-dire $2^{|\mathfrak{B}|} \cdot 2^{|\mathfrak{B}'|} = 2^{|\mathfrak{B}|+|\mathfrak{B}'|}$ relations. Avec l'intégration étroite, une relation basique est $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ avec $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$

3. Le calcul des régions cardinales CRC est appelé plus communément dans la littérature *calcul des directions cardinales (des régions)*. Il est noté CDC à l'instar du calcul des points cardinaux, que nous notons CPC dans cette thèse.

4. L'algèbre des rectangles permet de raisonner à propos de rectangles du plan. Deux régions satisfont une relation de l'algèbre des rectangles si le *rectangle à limite minimum* (l'approximation rectangulaire) de ces régions satisfait cette relation.

et $\mathfrak{b}' \in \mathfrak{B}'$. Il y a donc au plus $|\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{B}'|$ relations basiques, ce qui donne un nombre de relations de l'ordre de $2^{|\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{B}'|}$ au total. L'intégration étroite permet en fait d'exprimer toutes les relations de l'intégration lâche.

Pour raisonner avec cette intégration, nous pouvons utiliser les opérateurs classiques associés : l'intersection, l'union, l'inversion et la composition faible. Cependant, dans le cadre des intégrations étroites, il peut y avoir un intérêt à utiliser une composition différente. Une idée naturelle est d'utiliser la composition des formalismes combinés pour raisonner, en construisant une nouvelle composition basée sur leurs compositions respectives. En faisant de la sorte, il n'y a donc pas besoin de déterminer la composition faible. Raisonner à partir des compositions des formalismes combinés est en outre plus intéressant d'un point de vue computationnel. Les tables de composition sont en effet moins grandes.

La composition de l'intégration étroite, basée sur les compositions des formalismes combinés, notée $*$, est définie par la formule :

$$\mathfrak{b}_1'' * \mathfrak{b}_2'' = (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_1') * (\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{b}_2') = (\mathfrak{b}_1 \diamond \mathfrak{b}_2) \cap (\mathfrak{b}_1' \diamond \mathfrak{b}_2')$$

avec $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2' \in \mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{b}_1'', \mathfrak{b}_2''$ appartenant donc à la combinaison de \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' . Ainsi, en général, à moins que cette composition coïncide avec la composition faible, c'est-à-dire que la propriété

$$(\mathfrak{b}_1 \diamond \mathfrak{b}_2) \cap (\mathfrak{b}_1' \diamond \mathfrak{b}_2') = (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) \diamond (\mathfrak{b}_1' \cap \mathfrak{b}_2')$$

soit satisfaite, cette composition est une approximation supérieure de la composition faible. Pour calculer de manière effective avec cette composition dans le cadre d'une intégration étroite, une représentation particulière est utilisée (Wölfl et Westphal, 2009), que nous appelons *représentation produit*.

Définition 3.2.7. Soient \mathbf{A} et \mathbf{A}' les représentations canoniques de deux formalismes qualitatifs générées chacun par un schéma de partition sur le même univers. La *représentation produit* de l'intégration étroite de ces deux formalismes qualitatifs est la représentation \mathbf{A}'' dont les relations, l'interprétation et les opérateurs sont définis par :

- (relations) $\mathbf{A}'' = 2^{\mathbf{B}''}$ pour $\mathbf{B}'' = \{(b, b') \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}' \mid \varphi(b) \cap \varphi'(b') \neq \emptyset\}$;
- (interprétation) $\varphi''(\{(b, b')\}) = \varphi(b) \cap \varphi'(b')$ pour $(b, b') \in \mathbf{B}''$;
- (inversion) $(b, b') = (\overline{b}, \overline{b'})$ pour $(b, b') \in \mathbf{B}''$;
- (composition) $(b_1, b_1') * (b_2, b_2') = \{(b_3, b_3') \in \mathbf{B}'' \mid b_3 \in b_1 \diamond b_2 \wedge b_3' \in b_1' \diamond b_2'\}$
 $= ((b_1 \diamond b_2) \times (b_1' \diamond b_2')) \cap \mathbf{B}''$ pour $(b_1, b_1'), (b_2, b_2') \in \mathbf{B}''$;
- l'union et l'intersection sont les opérateurs ensemblistes.

Exemple 3.2.8. La relation sur $\mathcal{U}_{\text{RCC}_8}$ « $(< \cap \text{PO}) \cup (= \cap \text{EC})$ » est représentée par la relation abstraite $\{(<, \text{PO}), (=, \text{EC})\}$. Elle signifie littéralement que soit la relation basique $(<, \text{PO})$ est satisfaite (on a $x \{<\} y$ et $x \{\text{PO}\} y$), soit c'est la relation basique $(=, \text{EC})$ qui est satisfaite (on a $x \{=\} y$ et $x \{\text{EC}\} y$).

La représentation produit permet ainsi de ramener les opérateurs de l'intégration aux opérateurs des formalismes combinés. Elle est d'autant plus importante que sa composition coïncide avec la composition faible pour certaines combinaisons, telles que le formalisme INDU (Pujari *et al.*, 1999; Balbiani *et al.*, 2006). Il n'y a donc pas d'approximation supérieure et on bénéficie quand même des avantages computationnels. Ce n'est cependant pas une généralité. Il existe en effet des formalismes dont la composition de la représentation produit est *plus faible que faible* (Ragni et Wölfl, 2008), c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\varphi''((b_1, b_1')) \diamond \varphi''((b_2, b_2')) \subsetneq \varphi''((b_1, b_1') * (b_2, b_2')).$$

Remarquons que, contrairement à l'intégration lâche et quelle que soit la composition choisie (composition faible ou composition de la représentation produit), l'intégration étroite constitue un nouveau formalisme qualitatif (au sens des définitions de la section 2.2.4). Il n'y a donc pas besoin de définir ni de bi-réseaux de contraintes, ni d'opérateurs d'interdépendances. Les interdépendances sémantiques sont en effet imposées dans la construction du nouveau formalisme où les relations

basiques sont les couples cohérents. Cela diffère des intégrations lâches, dont les couples de relations ne sont pas nécessairement cohérents et nécessitent donc des opérateurs d’interdépendance. Par contre, la composition et l’inversion doivent être redéfinies dans le cadre des intégrations étroites (à partir des opérateurs des formalismes combinés) alors que la composition et l’inversion des intégrations lâches sont directement celles des formalismes combinés.

Exemple 3.2.9. L’exemple classique d’intégration étroite de la littérature est le formalisme INDU (Pujari *et al.*, 1999; Balbiani *et al.*, 2006), qui combine l’algèbre des intervalles avec l’algèbres des points. Les entités de cette combinaison sont des intervalles de \mathbb{R} . L’algèbre des intervalles IA est interprétée classiquement comme le calcul des intervalles IC. Cependant, l’algèbre des points PA est interprétée comme la taille des intervalles. Plus précisément, PA est interprétée comme QS où \mathcal{U} est l’ensemble des régions convexes de \mathbb{R} (c’est-à-dire les intervalles de \mathbb{R} ; voir l’exemple 2.2.22). Ainsi, la relation $x \{(b, <), (o, =)\} y$ signifie que l’intervalle x est avant l’intervalle y et a une taille plus petite ou alors que x chevauche y et qu’ils ont la même longueur. Notons qu’il existe des scénarios sur INDU algébriquement clos et incohérents. Pourtant, des sous-classes algébriquement traitables ont été identifiées (Balbiani *et al.*, 2006) (ce ne sont donc pas des sous-algèbres). Notons également que la composition d’INDU, qui est celle de la représentation produit, coïncide avec la composition faible, bien qu’elle ne coïncide pas avec la composition forte.

Remarquons que l’on peut voir le calcul des points cardinaux CPC comme une sorte d’intégration étroite du calcul des points avec lui-même. Cependant, CPC n’est pas exactement l’intégration étroite du calcul des points avec lui-même. Il s’agit de l’intégration étroite d’une variante du calcul des points, décrivant les relations des points de \mathbb{R}^2 selon la première coordonnée, avec une autre variante du calcul des points, décrivant les relations des points selon la seconde coordonnée. Notons au passage trois propriétés. D’abord, la représentation de CPC par des couples de relations de PA correspond à la représentation produit de cette intégration. Ensuite la composition de la représentation produit coïncide avec la composition faible mais également avec la composition forte. Enfin, cette combinaison est sans interdépendance (tous les couples de relations basiques sont cohérents).

En guise de conclusion, remarquons que l’univers du calcul des points est \mathbb{R} alors que l’univers du calcul des relations cardinales est \mathbb{R}^2 . Les intégrations lâche et étroite ne combinent que des formalismes ayant la même sémantique, et cette sémantique est préservée par combinaison.

3.2.3 Abstraction et affinement

Pour terminer cette section concernant les intégrations, il est important de remarquer que les schémas de partition sur un univers \mathcal{U} ont une structure de treillis (Condotta *et al.*, 2009; Ligozat, 2011). En effet, d’une part, pour toute paire de schémas de partition, il existe un plus petit schéma de partition (en nombre de relations basiques) qui affine ces deux schémas de partition, c’est-à-dire qui permet d’exprimer leurs relations basiques. Il s’agit de leur combinaison au sens de la section précédente. D’autre part, pour toute paire de schémas de partition, il existe un plus grand schéma de partition affiné par ces deux schémas de partition.

Ainsi, en plus de pouvoir combiner deux formalismes qualitatifs par *affinement*, ce qui revient à considérer leur intégration étroite, nous pouvons les combiner par *abstraction*, c’est-à-dire considérer le formalisme constitué uniquement des relations exprimables à partir des deux formalismes. Dans cette structure de treillis, RCC_5 *abstrait* RCC_8 et RCC_8 *affine* RCC_5 . Ces deux opérations de combinaison par affinement et généralisation sont utilisées dans le cadre de la fusion de réseaux de contraintes avec des relations hétérogènes (Condotta *et al.*, 2009).

3.3 Raisonnements spatio-temporels

Dans cette section, nous présentons les principaux formalismes qualitatifs spatio-temporels de la littérature ainsi que les interdépendances liées à ces combinaisons. Nous abordons également la différence entre formalismes raisonnant sur le mouvement et formalismes spatio-temporels.

3.3.1 Interdépendances temporelles

Lorsque des entités évoluent au cours du temps, les relations entre ces entités évoluent aussi. En fait, les évolutions possibles de la relation entre deux entités dépendent fortement de la *dynamique* de ces entités, c'est-à-dire de la façon dont elles peuvent évoluer. Les interdépendances temporelles entre les relations dépendent donc à la fois de la nature des entités et de la façon dont elles évoluent. Plus précisément, lorsqu'une relation est satisfaite à un instant, elle induit généralement la satisfaction d'une autre relation à un instant spécifique. Un exemple classique de dynamique est la continuité du mouvement, fondamentale dans le cadre du raisonnement à propos d'environnements physiques (Galton, 2000; Hazarika et Cohn, 2001; Muller, 2002). La continuité du mouvement induit donc des interdépendances. Par exemple, si la relation DC entre deux régions change, la relation satisfaite par ces deux régions ne peut être que EC. En effet, deux régions disjointes doivent d'abord être en contact avant de se chevaucher, d'être incluses l'une dans l'autre ou d'être égales.

Pour un même ensemble d'entités, c'est-à-dire un même univers \mathcal{U} , il existe un grand nombre de dynamiques possibles. En effet, dans le cas du raisonnement sur des régions, nous pouvons considérer une dynamique quelconque : les régions peuvent évoluer de n'importe quelle façon. Nous pouvons aussi nous restreindre aux mouvements continus. On peut également considérer que la taille ou la forme des régions est préservée au cours du temps ; c'est le cas pour un grand nombre d'objets physiques. Par exemple, un objet rigide aura toujours la même taille et la même forme. Un corps articulé ou un liquide aura la même taille, mais sa forme pourra changer. Il peut donc y avoir des contraintes temporelles sur la position, l'orientation, la vitesse, la taille, la forme ou n'importe quelles autres caractéristiques des entités. Une combinaison de ces contraintes induit ainsi une dynamique particulière, c'est-à-dire des restrictions sur les évolutions possibles, et donc des interdépendances entre les relations satisfaites à des instants différents.

Pour raisonner dans un contexte dynamique avec un formalisme qualitatif, il est nécessaire de le *temporaliser*. Il faut, en particulier, rendre dynamique l'univers statique \mathcal{U} . La temporalisation d'un formalisme qualitatif est donc paramétrée par une dynamique. Ensuite, nous devons déterminer les interdépendances associées à la dynamique (mouvement continu, préservation de la taille, etc.). En résumé, dans le contexte du raisonnement spatio-temporel, il faut choisir une dynamique (c'est-à-dire formaliser l'univers dynamique) et imposer les interdépendances correspondantes afin de raisonner, c'est-à-dire inférer de nouvelles relations par un lien de cause à effet temporel.

3.3.2 Graphes de voisinage

Les *graphes de voisinage* ont été proposés pour raisonner à propos du changement dans le cadre des formalismes qualitatifs (Freksa, 1991; Cohn et Hazarika, 2001). Ils décrivent les évolutions possibles des relations au cours du temps et donc certaines interdépendances des relations. Plus précisément, deux relations basiques sont adjacentes dans un graphe de voisinage si en déformant continûment des entités satisfaisant la première relation, la seconde relation peut être satisfaite sans qu'aucune autre relation ne soit satisfaite au cours de cette déformation. Le graphe de voisinage d'un formalisme qualitatif dépend des transformations autorisées, c'est-à-dire de la dynamique considérée des entités. Pour un même formalisme qualitatif, plusieurs graphes de voisinage sont possibles. La dynamique associée à un graphe de voisinage correspond donc à la continuité du mouvement conjointe éventuellement à la préservation de certaines caractéristiques.

Exemple 3.3.1. Les deux graphes de la figure 3.1 représentent respectivement le voisinage des relations topologiques pour des régions de taille variable et des régions de taille constante au cours du temps (Gerevini et Nebel, 2002). Par exemple, supposons que deux régions satisfont la relation TPP. La figure 3.1.a indique que suite à une évolution continue de ces deux régions, leur relation ne peut devenir que NTPP, PO, ou EQ sans passer par une autre relation. Si les régions ont une taille constante au cours du temps, nous sommes dans le cadre de la figure 3.1.b. Celle-ci indique que la relation entre les deux régions ne peut alors devenir que NTPP ou PO sans passer par une autre relation intermédiaire.

Les graphes de voisinage de nombreux formalismes qualitatifs ont été étudiés (Wu *et al.*, 2014; Santos et Moreira, 2009; Kurata et Egenhofer; Van de Weghe et De Maeyer, 2005; Cohn et Hazarika, 2001; Bruns et Egenhofer, 1996; Zimmermann et Freksa, 1993; Egenhofer et Sharma, 1993; Freksa,

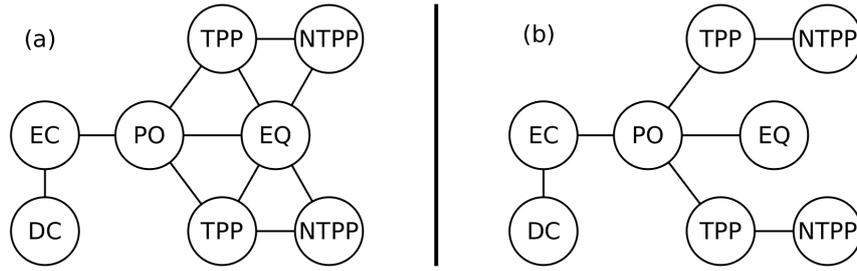


FIGURE 3.1 – Graphes de voisinage de RCC_8 : (a) si la taille des régions change ; (b) si la taille des régions est constante

1992, 1991). Des études plus spécifiques concernant la préservation des caractéristiques ont aussi été menées (Freksa, 1991; Dylla et Wallgrün, 2007; Egenhofer, 2010, 2015).

Les graphes de voisinage sont notamment utilisés dans le contexte des *séquences temporelles* (Westphal *et al.*, 2013). Une séquence temporelle est une suite finie de réseaux de contraintes N_1, \dots, N_m définis sur les mêmes entités, décrites à des instants différents et basées sur le même formalisme qualitatif. Une séquence de réseaux est ainsi associée à une séquence d'instants ordonnées t_1, \dots, t_m . N_i est donc la description des entités à l'instant t_i . Une séquence temporelle est considérée *cohérente* par rapport à une certaine dynamique s'il existe des entités évoluant selon cette dynamique et satisfaisant chaque N_i à l'instant t_i . De telles entités sont une *solution* de la séquence. Par exemple, dans le cadre de la continuité du mouvement, une séquence temporelle sera cohérente si, en plus de satisfaire les N_i , les entités de la solution évoluent continûment. Le choix de la dynamique indique le comportement des entités entre les instants de la séquence, c'est-à-dire entre les réseaux N_i et N_{i+1} .

En plus de respecter la dynamique choisie, les entités doivent souvent satisfaire une propriété supplémentaire, que nous nommons le *changement intégral*⁵ qui requiert qu'une solution soit *sans relation intermédiaire* (Westphal *et al.*, 2013). Cette propriété est notamment requise dans le cadre de la planification qualitative (Ragni et Wöflf, 2005; Westphal *et al.*, 2011). Une séquence temporelle de scénarios est dite *sans relation intermédiaire* si elle possède une solution telle qu'entre deux instants t_i et t_{i+1} de la séquence, chaque couple d'entités x, y satisfait d'abord la relation N_i^{xy} puis satisfait la relation N_{i+1}^{xy} . La propriété d'être sans relation intermédiaire correspond au concept du *changement intégral*, au sens où cette propriété impose que la séquence décrive tous les changements qualitatifs des solutions et uniquement ceux-ci. On parlera de *continuité sans relation intermédiaire* lorsque l'on imposera à la fois la continuité de l'évolution et la contrainte d'être sans relation intermédiaire.

Exemple 3.3.2. La séquence « x PO y puis x DC y » ne satisfait pas la continuité sans relation intermédiaire car elle ne possède pas de solution respectant simultanément la condition de continuité et la condition d'être sans relation intermédiaire. En effet, deux régions évoluant continûment doivent nécessairement passer par la relation EC pour satisfaire PO puis satisfaire DC.

La continuité sans relation intermédiaire est fondamentale dans le cadre de la planification spatiale qualitative : elle assure simultanément que la planification est temporellement réalisable (l'évolution est continue) et spatialement réalisable (les contraintes sont respectées à tout instant). Comme le suggère l'exemple précédent, une séquence temporelle N_1, \dots, N_m de scénarios restreinte à deux entités x et y et basée sur RCC_8 satisfait la continuité sans relation intermédiaire si et seulement si elle *respecte* le graphe de voisinage de RCC_8 de la figure 3.1.a. Plus formellement, une séquence de scénarios respecte un graphe de voisinage si pour $1 \leq i < m$, soit on a $N_{i+1}^{xy} = N_i^{xy}$, soit (N_i^{xy}, N_{i+1}^{xy}) est un arc du graphe de voisinage. Les graphes de voisinage permettent ainsi de raisonner dans le contexte du changement intégral.

5. Dans la littérature, on parle de *continuité qualitative*, de *contrainte de continuité* ou de *changement qualitatif continu*, bien que ces termes soient ambigus puisqu'une solution peut être continue sans être qualitativement continue et qu'une solution qualitativement continue peut être non continue. Pour éviter cette ambiguïté, nous utilisons les termes de *changement intégral* et de *continuité sans relation intermédiaire*. La distinction entre ces deux termes sera plus claire dans la suite de cette section.

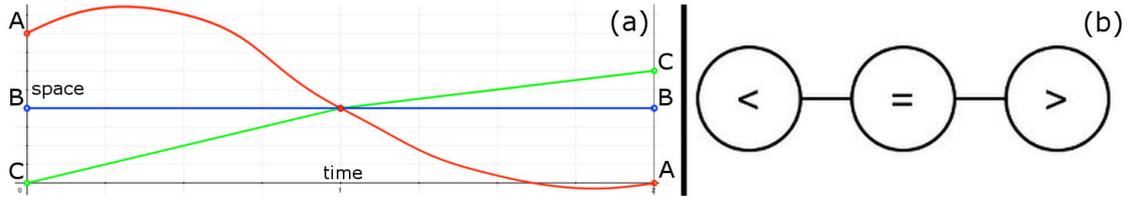


FIGURE 3.2 – (a) Une évolution de points spatiaux sur \mathbb{R} ; (b) Le graphe de voisinage du calcul des points

Exemple 3.3.3. Considérons la séquence temporelle suivante, composée de 3 scénarios, représentant des points spatiaux se déplaçant le long d’une ligne :

- $x < y < z$ au premier instant ;
- $x = y = z$ au deuxième instant ;
- $x > y > z$ au troisième instant.

Cette description est cohérente pour la continuité sans relation intermédiaire. La figure 3.2.a illustre une de ses solutions. Cette séquence respecte bien le graphe de voisinage du calcul des points, décrit dans la figure 3.2.b. Notons cependant qu’en général les graphes de voisinage n’assurent pas la continuité sans relation intermédiaire, en particulier avec préservation de caractéristiques.

Exemple 3.3.4. Dans le cadre de régions de tailles constantes, la séquence « x TPP y , puis x PO y et puis x $\overline{\text{TPP}}$ y » satisfait le graphe de voisinage de la figure 3.1.b, mais ne respecte pas la continuité sans relation intermédiaire (avec préservation de la taille). On ne peut, en effet, trouver des régions de tailles constantes, évoluant continûment au cours du temps et satisfaisant les contraintes de la séquence, sans même chercher à satisfaire le fait d’être sans relation intermédiaire.

Les graphes de voisinage sont utilisés dans le contexte de la planification spatiale (Dylla et Moratz, 2004; Dylla et Wallgrün, 2007; Westphal *et al.*, 2011), des *logiques spatio-temporelles* (Sioutis *et al.*, 2015a) et de la *simulation qualitative* (Cui *et al.*, 1992; Cohn *et al.*, 1998) qui à partir d’un scénario génère toutes les séquences d’évolutions possibles.

3.3.3 Graphes de dominance

Les *graphes de dominance*⁶ et plus généralement les *espaces de modes topologiques* (Galton, 2000, 2001) ont également été proposés pour raisonner à propos du changement. Les graphes de dominance sont des graphes de voisinage orientés et les espaces de modes topologiques les généralisent dans le cadre d’évolutions non réversibles. Ils permettent de représenter le changement des relations lorsque la transition a lieu à la fin ou au début d’un intervalle. Plus précisément, certaines transformations de relations ne peuvent avoir lieu que durant le passage d’un point à un intervalle et réciproquement.

Exemple 3.3.5. Considérons deux points spatiaux de \mathbb{R} satisfaisant la relation $<$ et satisfaisant ensuite une autre relation. La relation $<$ reste satisfaite jusqu’à un instant t où elle devient $=$. Plus précisément, la relation $<$ est vraie sur un intervalle ouvert et ensuite la relation $=$ est vraie sur un intervalle fermé (ou au moins à l’instant de transition, c’est-à-dire à la borne supérieure de l’intervalle ouvert). Cependant, il n’est pas possible d’avoir la relation $<$ sur un intervalle fermé (ou à un instant précis) et ensuite, juste après, d’avoir la relation $=$ sur un intervalle ouvert (sauf si les points n’évoluent pas continûment).

Définition 3.3.6 (Galton, 2000). Un *espace de modes topologiques* est un triplet (Q, \vdash, \dashv) où

- Q est un ensemble d’états qualitatifs d’un système ;
- \vdash est une relation binaire sur Q , nommée *pré-dominance* ;
- \dashv est également une relation binaire sur Q , nommée *post-dominance*.

6. Appelés *dominance spaces* par Galton.

Dans notre contexte, Q est un ensemble de relations basiques \mathcal{B} , bien qu'il puisse aussi s'agir d'un ensemble de scénarios. La relation \vdash décrit l'évolution des relations vers le futur lors de la transition d'un point vers un intervalle, et la relation \dashv décrit l'évolution des relations vers le futur lors de la transition d'un intervalle vers un point.

Galton définit la sémantique des espaces de modes topologiques de la façon suivante.

Définition 3.3.7 (Galton, 2000). Un *modèle* pour un espace de modes topologiques (Q, \vdash, \dashv) est un triplet (P, \mathcal{C}, δ) , où

- P est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$, représentant l'ensemble des états possibles d'un système ;
- \mathcal{C} est un ensemble de fonctions continues de \mathbb{R} dans P , chacune représentant une évolution possible du système au cours du temps : \mathcal{C} est la dynamique du système ;
- δ est une fonction surjective de P dans Q , indiquant la sémantique des états qualitatifs ;

tel que, pour chaque évolution $f \in \mathcal{C}$, les règles suivantes, dites « d'incidence temporelle », sont satisfaites :

- *Non-entremêlement* : Pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ satisfaisant $t < t'$, il existe une séquence finie de nombres réels $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t'$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, si $t_{i-1} < u < v < t_i$ alors $\delta(f(u)) = \delta(f(v))$;
- *Dominance* : si $\delta(f(\tau)) = q$ pour tout $\tau \in]t, t'[$ alors $\delta(f(t)) \vdash q$ et $q \dashv \delta(f(t'))$, pour tous $q \in Q$ et $t, t' \in \mathbb{R}$.

Dans le contexte des formalismes qualitatifs, $P = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. La contrainte de non-entremêlement assure que toute période finie peut être divisée en un nombre fini de sous-périodes sur lesquelles il n'y a pas de changement d'état qualitatif (au cours d'une sous-période, il n'y a qu'un seul état qualitatif satisfait). Galton exclut de cette façon les dynamiques qu'il juge *chaotiques*. Remarquons que cette sémantique est restreinte aux points de \mathbb{R}^d . Le cadre sémantique de Galton ne s'applique pas aux entités plus complexes, comme les régions de \mathbb{R}^d . Il ne peut donc servir à prouver la validité des graphes de transition des relations de RCC_8 .

Remarque 3.3.8. Notons que Galton a appliqué son cadre sur RCC_8 afin de retrouver le graphe de dominance associé. Il a pour cela paramétré les relations de RCC_8 entre deux régions A et B en fonction de valeurs numériques et en particulier en fonction de la proportion de A dans B et de B dans A (Galton, 2001). Cependant, la détermination du graphe de dominance découle de la continuité de l'évolution de ces proportions et non de la continuité de l'évolution des régions A et B . Des couples de régions évoluant non continûment peuvent correspondre à des proportions évoluant continûment. De plus, en fonction de la continuité des régions considérée, des couples de régions peuvent évoluer continûment sans que leurs proportions n'évoluent continûment (Davis, 2001). Cette paramétrisation ne suffit donc pas entièrement pour justifier la validité du graphe de dominance de RCC_8 . Celui-ci doit être déduit d'une formulation précise de la notion de continuité pour une région (nous en reparlerons au cours du chapitre 6).

Galton définit ensuite plusieurs relations fondamentales sur Q .

Définition 3.3.9 (Galton, 2000). Soient $q, q' \in Q$.

- L'état q est *perturbable* en q' , noté $q \rightsquigarrow q'$, si et seulement si $q \vdash q' \vee q \dashv q'$.
- L'état q *domine* q' , noté $q \succ q'$, si et seulement si $q \vdash q' \vee q' \dashv q$.
- L'état q est *dominé par* q' , noté $q \prec q'$, si et seulement si $q' \succ q$.
- L'état q est *voisin* de q' , noté $q \wr q'$, si et seulement si $q \rightsquigarrow q' \vee q' \rightsquigarrow q$.

Ainsi, la relation $q \rightsquigarrow q'$ signifie qu'il y a une transition directe de q vers q' (dans le sens du temps). Le type de transition (point-intervalle ou intervalle-point) est abstrait. Avec la relation $q \succ q'$, c'est le sens du temps qui est abstrait. Cette relation exprime qu'il est possible que q soit satisfait à un instant qui délimite un intervalle ouvert sur lequel q' est satisfait. Remarquons que la relation $q \wr q'$ formalise le concept de graphe de voisinage (lorsque Q est un ensemble de relations basiques). Galton a ainsi précisé la sémantique des graphes de voisinage, bien qu'elle se limite au cadre des points de \mathbb{R}^d .

Enfin, Galton s'est intéressé à la classification des espaces de modes topologiques (Galton, 2000). Il a en particulier défini les espaces de modes topologiques dits *symétriques*, aussi appelés *graphes de dominance*.

$$< \longrightarrow = \longleftarrow >$$

FIGURE 3.3 – Graphe de dominance de PC (les boucles du graphe sont omises)

Définition 3.3.10 (Galton, 2000). Un espace de modes topologiques (Q, \vdash, \dashv) est *symétrique* si $q \vdash q' \iff q' \dashv q$ pour tous $q, q' \in Q$.

Dans ce contexte, les relations \vdash et \succ coïncident. La symétrie dont il est question est celle du temps. Si un espace de modes topologiques est symétrique, les états qualitatifs évoluent de la même façon quelque soit le sens du temps.

Le graphe de dominance (le graphe de la relation \prec) du calcul des points est décrit dans la figure 3.3, avec \mathcal{C} l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Notons qu'une sémantique pour les graphes de voisinage, basée sur les concepts de *structure d'incidence* et de *clôture topologique*, a été proposée par Ligozat (Ligozat, 1994) (voir également (Davis, 2001)). Les structures d'incidence peuvent se voir comme des diagrammes de dominance. Cependant, la sémantique de l'approche de Ligozat et celle de Galton sont incomparables. L'approche de Galton tient compte du sens du temps et celle de Ligozat se place d'un point de vue topologique et se limite à un seul type de graphes de voisinage⁷.

De manière analogue aux graphes de voisinage qui permettent d'assurer (dans certains cas) la continuité sans relation intermédiaire, les graphes de dominance permettent d'assurer (dans certains cas également) la continuité de séquences temporelles dont les réseaux N_i sont associés à des intervalles et à des points formant une partition du temps (Westphal *et al.*, 2011). Plus formellement, dans ce contexte, chaque réseau N_i d'une séquence temporelle est associé à une entité temporelle e_i (intervalle ouvert, intervalle fermé ou point) telle que :

- soit $e_i m e_{i+1}$ avec e_i un intervalle ouvert et e_{i+1} un intervalle fermé,
- soit $e_i m e_{i+1}$ avec e_i un intervalle fermé et e_{i+1} un intervalle ouvert,
- soit $e_i = e_{i+1}$ avec e_i un point et e_{i+1} un intervalle ouvert,
- soit $e_i^+ = e_{i+1}$ avec e_i un intervalle ouvert et e_{i+1} un point.

Une séquence de scénarios respecte alors un graphe de dominance si pour $1 \leq i < m$:

- soit $N_i^{xy} \prec N_{i+1}^{xy}$ et e_i est un intervalle ouvert (et e_{i+1} est un point ou un intervalle fermé),
- soit $N_i^{xy} \succ N_{i+1}^{xy}$ et e_{i+1} est un intervalle ouvert (et e_i est un point ou un intervalle fermé).

Exemple 3.3.11. Considérons la description spatio-temporelle suivante à propos de points se déplaçant sur \mathbb{R} . Nous avons deux intervalles, un ouvert noté I_o et un fermé noté I_f , avec I_o touchant I_f , c'est-à-dire avec $I_o m I_f$. La description $a = b < c$ sur I_o et $a < b = c$ sur I_f ne vérifie pas le graphe de dominance et n'est pas cohérente avec des points se déplaçant continûment sur \mathbb{R} . Pour passer continûment de l'état $a = b < c$ à l'état $a < b = c$, il faut nécessairement soit passer par $a = b = c$ soit passer par $a < b < c$. Autrement dit, les seules séquences temporelles de longueur minimale permettant de passer de $a = b < c$ à $a < b = c$ sont :

- $a = b < c$ sur un intervalle ouvert à droite I_o , $a < b = c$ sur un intervalle ouvert à gauche I'_o tel que $I_o m I'_o$ et $a = b = c$ à t l'instant de transition ;
- $a = b < c$ à un instant t , $a < b = c$ à un instant $t' > t$ et $a < b < c$ durant $]t, t'[,$

Considérons maintenant la description $a = b < c$ sur I_o , $a = b = c$ sur I_f et $a < b = c$ sur I'_o avec I'_o un autre intervalle ouvert tel que $I_f m I'_o$. Cette nouvelle description vérifie le graphe de dominance et est cohérente avec des points se déplaçant continûment. Si on remplace I_f par un point temporel, on obtient la même conclusion.

3.3.4 Formalismes spatio-temporels

Dans cette section, nous présentons les formalismes spatio-temporels, qui permettent de représenter et de raisonner sur des entités évoluant au cours du temps. Nous commençons par les

7. L'évolution de la dimension des relations entre entités est limitée avec l'approche de Ligozat.

formalismes portant sur les séquences temporelles, présentées dans la section précédente, qui constituent les formalismes spatio-temporels dont l'expressivité logique est la plus faible. Nous exposons ensuite les autres principaux formalismes spatio-temporels, d'expressivité supérieure.

Westphal et al. proposent une méthode pour raisonner à propos de séquences temporelles dont les relations sont non basiques, dans le cadre du changement intégral (Westphal *et al.*, 2013). Ils représentent chaque séquence par un réseau de contraintes unique dont les variables correspondent aux variables d'entité de la séquence dupliquées pour chaque instant afin d'ajouter des *contraintes de transition* (non binaires) entre les entités à des instants différents. Le but des contraintes de transition est ainsi d'imposer les interdépendances temporelles. Deux contraintes de transition sont introduites pour raisonner avec le calcul des points. La première, la contrainte T_2 , impose le graphe de voisinage de PC, décrit dans la figure 3.2 (b). Sa définition est :

$$T_2(v, w, v', w') \equiv \neg(v < w \wedge v' > w') \wedge \neg(v > w \wedge v' < w')$$

Cette contrainte est à imposer sur v, w deux points du même instant et sur v', w' les points correspondants à l'instant suivant. Lorsque le réseau unique représente une séquence de scénarios, la satisfaction de ces contraintes est équivalente à celle du graphe de voisinage. Par exemple, la contrainte T_2 implique que si la relation $v < w$ est satisfaite, alors (à l'instant suivant) la relation $v' < w'$ ou la relation $v' = w'$ est satisfaite. Avec les séquences de scénarios, ces contraintes permettent d'assurer la cohérence pour la continuité sans relation intermédiaire.

La deuxième contrainte de transition introduite, nommée contrainte T_4 , est une contrainte plus forte pour assurer la continuité sans *état* intermédiaire. Une solution est dite sans état intermédiaire si pour passer de N_i à N_{i+1} les entités ne satisfont que N_i puis N_{i+1} entre t_i et t_{i+1} . Si les relations changent, elles doivent toutes changer simultanément. Avec cette contrainte, aucun autre réseau n'est satisfait durant la séquence. Par exemple, nous pouvons passer de $a = b < c$ à $a < b = c$ continûment sans relation intermédiaire, mais nous ne pouvons pas le faire continûment sans état intermédiaire. Il faut nécessairement passer soit par $a = b = c$ soit par $a < b < c$. Être sans état intermédiaire est donc un changement intégral plus fort qu'être sans relation intermédiaire.

Cette propriété est également liée à la continuité dans le cadre de séquences associées à une partition du temps. Plus précisément, une séquence temporelle dans le cadre de la continuité sans état intermédiaire s'interprète, de manière équivalente, comme une séquence temporelle associée à une partition du temps généralisée. La partition correspondante est généralisée au sens où elle est constituée d'intervalles dont la nature est inconnue : on ne sait pas s'il s'agit d'intervalles fermés, ouverts, mais également ouvert à gauche et fermé à droite ou fermé à gauche et ouvert à droite. Autrement dit, la différence fondamentale avec les séquences sur partitions présentées dans la section précédente est le fait que l'appartenance de l'instant de transition entre deux intervalles est incertain.

La contrainte de transition T_4 du formalisme de Westphal et al., pour imposer la continuité sans état intermédiaire, est définie comme suit :

$$T_4(v_1, v_2, v_3, v_4, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4) \equiv \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} T_2(v_i, v_j, v'_i, v'_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq i, j, k, l \leq 4} ((v_i \neq v_j \wedge v_k = v_l) \implies \neg(v'_i = v'_j \wedge v'_k \neq v'_l))$$

Elle est à imposer sur v_1, v_2, v_3, v_4 des points d'un même instant et sur v'_1, v'_2, v'_3, v'_4 les points correspondant à l'instant suivant. En fait, la contrainte T_4 empêche d'avoir simultanément une transition de type point-intervalle et une transition intervalle-point (décrites par le graphe de dominance du calcul des points PC). Le fait de ne pas avoir simultanément une transition intervalle-point et une transition point-intervalle est une condition nécessaire à la continuité sans état intermédiaire qui est suffisante dans le cadre de PC. La décision de la cohérence avec des contraintes T_2 (respectivement T_4) s'avère NP-complète pour le calcul des points et pour chacune de ses sous-classes intéressantes (Westphal *et al.*, 2013; Westphal, 2015). Ce résultat de complexité négatif est hérité par les autres formalismes directionnels (IC, CDC, algèbre des rectangles (Balbiani *et al.*, 1999)...).

Les séquences temporelles ont également été étudiées dans le cadre de leur ordonnancement (Sioutis *et al.*, 2015b). Dans ce contexte, étant donné un ensemble de réseaux de contraintes

et un graphe de voisinage, l'objectif est de déterminer s'il existe un ordonnancement donnant une séquence temporelle respectant le graphe de voisinage. Plusieurs travaux se sont également focalisés sur la construction de séquences temporelles interpolatrices dans le cadre de la planification spatiale (Ragni et Wöflf, 2005; Westphal *et al.*, 2011; Wolter et Kreutzmann, 2015). Dans ce contexte, étant donnés deux réseaux de contraintes N et N' , l'objectif est de déterminer une séquence temporelle N_1, \dots, N_m cohérente pour le changement intégral permettant de relier N à N' (c'est-à-dire telle que $N_1 = N$ et $N_m = N'$) et satisfaisant éventuellement des contraintes supplémentaires.

Nous nous intéressons maintenant aux combinaisons spatio-temporelles d'expressivité temporelle supérieure. Le formalisme de Gerevini et Nebel combine les relations de RCC_8 et les relations du calcul des intervalles d'Allen de façon à ce que chaque relation de RCC_8 soit associée à un intervalle temporel (Gerevini et Nebel, 2002). À chaque intervalle est donc associé un réseau de contraintes sur RCC_8 . Plus précisément, une description consiste en un ensemble de relations de RCC_8 satisfaites durant des intervalles temporels, auxquelles s'ajoutent des relations d'Allen entre ces intervalles. Par exemple, un intervalle I est avant ou après un autre intervalle I' ($I \{b, \bar{b}\} I'$), et durant I la relation $\{DC, PO\}$ est satisfaite entre deux régions. RCC_8 est ainsi temporalisé par le calcul des intervalles IC. Remarquons que ce formalisme est similaire à celui de Westphal *et al.* (Westphal *et al.*, 2013), à deux différences près. D'une part, l'ordre des entités temporelles de la description spatio-temporelle est incertain. D'autre part, étant donné que les entités temporelles sont des intervalles, elles peuvent se chevaucher, ce qui induit des interdépendances supplémentaires. En effet, si deux intervalles se chevauchent, les régions doivent satisfaire durant l'intersection de ces intervalles, l'intersection des relations devant être satisfaites durant ces deux intervalles. De ce fait, si nous avons la contrainte $x \{PO\} y$ durant un intervalle I et la contrainte $x \{EC\} y$ durant un intervalle I' alors nécessairement I et I' sont disjoints (sinon la description est incohérente). Il est à noter que cette combinaison ne possède aucun couple de sous-algèbres traitable.

Ragni et Wöflf ont introduit un formalisme similaire à propos des relations directionnelles des points de \mathbb{R}^2 . Il s'agit de CPC temporalisé par le calcul des intervalles (Ragni et Wöflf, 2006). Dans ce contexte, ils ont étudié, en particulier, la contrainte qui impose que deux objets physiques ne peuvent être au même endroit en même temps. Ils ont alors modifié en conséquence le graphe de dominance qu'ils utilisent pour imposer la continuité du mouvement.

Sioutis *et al.* proposent une forme de combinaison spatio-temporelle plus expressive (Sioutis *et al.*, 2014). Au lieu d'associer une relation spatiale (et donc un réseau sur les entités spatiales) à une entité temporelle, c'est un couple de relations (et donc un couple de réseaux) qui est associé à chaque relation basique entre deux entités temporelles. La sémantique de cette association est la suivante : si une relation basique est satisfaite, alors durant la première entité, le premier réseau de la relation basique est satisfait, et durant la deuxième entité, le second réseau est satisfait. Le gain d'expressivité permet de représenter des lois de changement (Sioutis *et al.*, 2014) : les descriptions spatiales dépendent de l'ordonnancement temporel. Cependant, contrairement aux deux précédents formalismes, les relations temporelles sont celles du calcul des points et non celles du calcul des intervalles. Il est à noter que contrairement au cadre de Westphal *et al.* (Westphal *et al.*, 2013), ce formalisme n'est pas dans le contexte du changement intégral.

Le raisonnement spatio-temporel est également étudié dans le contexte des logiques (Muller *et al.*, 1998; Bennett *et al.*, 2002; Burrieza *et al.*, 2011; Sioutis *et al.*, 2015a). Les *logiques spatio-temporelles* ont une expressivité et une complexité bien supérieure aux formalismes qualitatifs. Alors que le problème de décision de la cohérence est généralement NP-complet avec les approches précédentes, il est majoritairement PSPACE-difficile dans le cadre de ces logiques. Un exemple de logique spatio-temporelle est ST_0 qui combine RCC_8 avec la *logique temporelle propositionnelle* PTL (*propositional temporal logic*). PTL permet d'exprimer des formules telles que « ϕ est vrai jusqu'à ce que ψ le soit ». La combinaison ST_0 de PTL et RCC_8 permet d'exprimer des formules logiques de PTL dont les atomes sont des contraintes basiques de RCC_8 ($x b y$ avec $b \in \mathbf{B}_{RCC_8}$ et x et y des régions), telles que « il existe un instant où $x \{EC\} y$ » et « pour tout instant $x \{DC, EC\} y$ ».

À notre connaissance, peu de travaux portent sur le raisonnement dans le contexte de la préservation de caractéristiques et en particulier de la préservation de la taille. Par exemple, seules deux approches permettent de raisonner à propos de relations topologiques entre des régions de tailles

constantes. La première est la logique de Galton (Galton, 1993), basée sur la *logique temporelle d'Allen*. Elle permet de raisonner à propos d'objets rigides avec des relations topologiques mais elle requiert la connaissance de la relation *basique* de taille⁸ satisfaite pour chaque paire de régions. La seconde approche est le formalisme de Gerevini et Nebel (Gerevini et Nebel, 2002), mentionné ci-dessus. Celui-ci impose la préservation de la taille en utilisant la combinaison taille-topologie STC et en dupliquant les variables pour chaque intervalle temporel à l'instar du formalisme de Westphal et al. (Westphal et al., 2013). Le graphe de voisinage de RCC_8 (figure 3.1.b) est utilisé pour imposer le changement intégral. Cependant, il n'est pas clair si ce formalisme assure la continuité du mouvement. De plus aucun algorithme n'a été proposé pour raisonner à propos de descriptions non basiques.

3.3.5 Différence entre le raisonnement spatio-temporel et le raisonnement sur le mouvement

Dans cette section, nous établissons la différence entre le raisonnement spatio-temporel et le raisonnement sur le mouvement. Un formalisme spatio-temporel est un formalisme qui combine des informations temporelles et des informations spatiales définies à des instants différents. Un formalisme sur le mouvement décrit des propriétés statiques à propos d'entités dynamiques. Avec les formalismes spatio-temporels, les relations évoluent au cours du temps. Dans le cadre du raisonnement sur le mouvement, les relations portent sur le mouvement mais restent statiques : la description n'évolue pas, elle est atemporelle. Un formalisme sur le mouvement permet de représenter par exemple le résultat d'une séquence d'actions, mais ne permet pas de décrire l'évolution définie par une séquence d'actions. À partir d'un formalisme sur le mouvement, on peut cependant construire un formalisme spatio-temporel, en le temporalisant (voir section 3.3.1).

Exemple 3.3.12. Les *calculs qualitatifs des trajectoires* (Van de Weghe et al., 2004, 2005, 2006; Bogaert et al., 2006; Ligozat, 2011), notés QTC (*qualitative trajectory calculi*) sont des exemples de formalismes qualitatifs sur le mouvement. Ces calculs portent sur des informations directionnelles et variationnelles à propos des positions et des vitesses de points mobiles se déplaçant dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{R}^2 . Une description consiste en un ensemble de relations concernant leurs positions et leurs vitesses relatives à un même instant. Ces descriptions peuvent en fait inclure des points mobiles à des instants différents. Cependant, ces formalismes ne prennent pas en compte le lien temporel entre les relations des points mobiles définies à des instants différents. On raisonne atemporellement. On décrit les relations entre des points mobiles à des instants différents comme s'ils étaient définis au même instant. En particulier, un point mobile à un instant futur et à un instant passé est représenté comme deux entités différentes. Le fait que l'un est le futur de l'autre n'est pas utilisé dans le raisonnement. Il n'y a donc pas de raisonnement spatio-temporel. Ces formalismes (ces algèbres de relations) ne sont pas des formalismes spatio-temporels. Cependant, les graphes de voisinage de ces formalismes ont été étudiés, notamment pour raisonner dans le cadre où ces relations directionnelles et variationnelles évoluent au cours du temps. Ce cadre temporalisé est bien un formalisme spatio-temporel et correspond aux séquences temporelles présentées dans la section 3.3.1.

Notons qu'il existe d'autres formalismes sur le mouvement (Bennett et al., 2000; Moratz et al., 2000; Renz, 2001; Wang et al., 2005).

3.4 Raisonnement multi-échelle

Dans les sections précédentes, nous avons étudié les intégrations, portant sur des entités de même nature, et les combinaisons spatio-temporelles, qui permettent de raisonner simultanément sur le temps et l'espace. Nous présentons, dans cette section, les formalismes multi-échelles, qui étendent les formalismes classiques en permettant un raisonnement multi-échelle. Plus précisément, ces extensions donnent la capacité de raisonner en présence d'informations ayant des précisions

8. Les relations de taille considérées sont plus fines que celles de QS (décrit dans l'exemple 2.2.22). Galton considère un total de 6 relations de taille. Par exemple « x peut entrer juste à l'intérieur de y » lorsque x TPP y est possible mais que x NTPP y n'est pas possible. Un exemple de régions satisfaisant cette relation est « x est une demi-sphère et y est une sphère de même rayon ».

différentes, des niveaux de détail différents. Chaque niveau de détail correspond à une échelle, c'est-à-dire une discrétisation du temps ou de l'espace, de résolution différente. Le raisonnement a lieu à la fois à chaque échelle et entre les échelles. La conception d'un formalisme multi-échelle consiste alors à déterminer la transformation des informations par changement d'échelle.

Dans cette section, nous présentons ainsi dans un premier temps le cadre formel des échelles temporelles. Nous exposons ensuite les travaux dans le cadre multi-échelle temporel qualitatif et dans le cadre multi-échelle temporel quantitatif. Puis, nous présentons les formalismes spatiaux multi-échelles. Enfin, nous exposons les travaux qui se basent sur le raisonnement multi-échelle, ou plus généralement qui lui sont liés.

3.4.1 Échelles temporelles

Nous présentons dans cette section la formalisation des échelles temporelles, basée sur la théorie des ensembles, développée par Bettini et al. (Bettini *et al.*, 2000; Euzenat et Montanari, 2005). D'autres formalisations des échelles temporelles, fondées sur la logique, ont été proposées (Montanari *et al.*, 1996; Franceschet et Montanari, 2001; Euzenat et Montanari, 2005).

Dans ce contexte, le temps est représenté par un domaine temporel \mathcal{T} , qui est un ensemble totalement ordonné dense ou discret. Ses éléments sont appelés *points temporels* ou *instants*. Les échelles temporelles sont alors des discrétisations du temps de résolutions différentes.

Définition 3.4.1. Une *échelle* (ou une *granularité*) temporelle g sur \mathcal{T} est une fonction d'un ensemble I_g totalement ordonné⁹ vers les parties du domaine temporel, $2^{\mathcal{T}}$, telle que :

$$\begin{aligned} \forall i, j, k \in I_g \quad i < k < j \wedge g(i) \neq \emptyset \wedge g(j) \neq \emptyset &\implies g(k) \neq \emptyset \\ \forall i, j \in I_g \quad i < j &\implies \forall x \in g(i) \forall y \in g(j) \quad x < y \end{aligned}$$

Ainsi, chaque échelle est une famille de sous-ensembles du domaine temporel qui préserve l'ordre naturel des instants. Les ensembles $g(i)$ sont appelés les *granules* de l'échelle g . Ce sont les « instants » de g . Dans la suite, nous identifions \mathcal{T} et l'échelle $i \in \mathcal{T} \mapsto \{i\}$, ce qui permet de considérer que \mathcal{T} est une échelle (avec $I_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}(i) = \{i\}$). Les échelles temporelles sont souvent des partitions de \mathbb{R} mais ce n'est pas toujours le cas.

Exemple 3.4.2. Le calendrier grégorien est un ensemble d'échelles. À l'échelle des jours, le granule est le jour. En conséquence, à cette échelle, tous les événements ayant lieu dans la même journée sont considérés comme ayant lieu au même moment. L'échelle des jours forme une partition de \mathbb{R} . L'échelle des jours de travail correspond à l'échelle des jours privée des samedis et des dimanches. Cette échelle ne forme pas une partition de \mathbb{R} .

Bettini et al. ont défini de nombreuses relations entre les échelles (Bettini *et al.*, 2000). Nous présentons les plus importantes.

Définition 3.4.3. Soient g et h deux échelles sur \mathcal{T} .

- g est *plus fine* que h , noté $g \preceq h$, si et seulement si $\forall i \in I_g \exists j \in I_h \quad g(i) \subseteq h(j)$, c'est-à-dire que chaque granule de g est inclus dans un granule de h .
- g est *plus grossière* que h , noté $g \succeq h$, si et seulement si $h \preceq g$.
- g *décompose* h , noté $g \sqsubseteq h$ ¹⁰ si et seulement si $\forall j \in I_h \exists S \subseteq I_g \quad h(j) = \bigcup_{i \in S} g(i)$, c'est-à-dire chaque granule de h est composé de granules de g .

Les relations \preceq et \sqsubseteq sont des ordres partiels; elles donnent deux caractérisations différentes de la notion intuitive d'être « plus précis », d'avoir une meilleure « résolution ». Notons que ces deux relations imposent que les échelles soient *alignées* : g et h sont alignées si leur granules ne se chevauchent jamais, c'est-à-dire

$$\forall i \in I_g \forall j \in I_h \quad g(i) \subseteq h(j) \vee g(i) \supseteq h(j) \vee g(i) \cap h(j) = \emptyset$$

9. Bettini suppose en plus que I_g est discret. Nous généralisons sa définition afin de simplifier et homogénéiser les opérations effectuées entre une « vraie » échelle (une échelle discrète) et \mathcal{T} .

10. Bettini et al. notent cette relation \preceq .

Exemple 3.4.4. Considérons le calendrier grégorien. L'échelle des mois est plus fine que celle des années. Cependant, l'échelle des semaines n'est *pas* plus fine que celle des mois (et réciproquement), car toute période de temps exprimée en mois ne peut pas s'exprimer comme un ensemble de semaines. Certaines semaines sont en effet à cheval sur deux mois : les semaines et les mois ne sont pas alignés. Afin de distinguer la nuance entre les relations \preceq et \sqsubseteq , remarquons les propriétés suivantes. Nous avons « jours de travail \preceq jours », mais nous n'avons pas « jours de travail \sqsubseteq jours ». Nous avons « heures \sqsubseteq jours de travail » mais nous n'avons pas « heures \preceq jours de travail ».

Bettini et al. ont aussi défini deux opérateurs de conversion entre les échelles afin de convertir une information d'une échelle vers une autre (Bettini *et al.*, 2000). Plus précisément, ces opérateurs associent à un granule d'une certaine échelle le granule correspondant d'une autre échelle. La conversion ascendante, notée \uparrow , convertit un granule vers une échelle « moins précise ».

Définition 3.4.5. Soient g et h des échelles et $i \in I_g$. La conversion ascendante de g vers h est définie par :

$$\uparrow_g^h i = \{j \in I_h \mid g(i) \subseteq h(j)\}$$

La conversion descendante, notée \downarrow , convertit un granule vers une échelle « plus précise ».

Définition 3.4.6. Soient g et h des échelles et $j \in I_h$. La conversion descendante de h vers g est définie par :

$$\downarrow_g^h j = \{S \subseteq I_g \mid h(j) = \bigcup_{i \in S} g(i)\}$$

Nous avons les propriétés suivantes, concernant la conversion ascendante et la conversion descendante.

Proposition 3.4.7. Soient g et h deux échelles sur \mathcal{T} et soient $i \in I_g$ et $j \in I_h$ tels que $g(i) \neq \emptyset$ et $h(j) \neq \emptyset$.

- Si $g \preceq h$ alors, $\uparrow_g^h i$ contient exactement un seul élément.
- Si $g \sqsubseteq h$ alors, $\downarrow_g^h j$ contient exactement un seul élément.

Notons que la conversion des entités temporelles a également fait l'objet d'autres travaux. En particulier, la conversion des intervalles par changement d'échelle a été considérée (Euzenat, 1994). Il faut noter à ce sujet que, vu sous une échelle suffisamment grossière, un intervalle devient un point. Par exemple, l'intervalle correspondant à la période de lundi à samedi, vu à l'échelle des semaines, est représenté par un granule et devient donc un point. De ce fait, inversement, en passant à une échelle plus fine, un point peut devenir un intervalle.

3.4.2 Formalismes qualitatifs temporels multi-échelles

Pour raisonner sur plusieurs échelles, dans le cadre des formalismes qualitatifs, Euzenat propose d'utiliser les opérateurs de conversion, non pas pour convertir une entité temporelle définie à une échelle vers une autre, mais pour convertir une *relation* définie à une échelle vers une autre (Euzenat, 1993, 1994, 2001; Euzenat et Montanari, 2005). Connaissant une relation définie à un certain niveau de précision, on peut connaître la relation correspondante à un niveau de précision plus fin ou plus grossier. De manière analogue au cadre de Bettini et al., un opérateur de conversion ascendante, noté \uparrow , permet de convertir une relation vers une échelle plus grossière et un opérateur de conversion descendante, noté \downarrow , permet de convertir une relation vers une échelle plus fine. En fait, Euzenat propose une liste de 6 axiomes que doit satisfaire un couple d'opérateurs de conversions ascendante et descendante, dans le cadre général des algèbres de relations. Par exemple, la conversion d'une relation basique inverse est donnée par l'un des 6 axiomes, celui de la distributivité de la conversion sur l'inversion :

$$\uparrow \bar{b} = \overline{\uparrow b} \quad \downarrow \bar{b} = \overline{\downarrow b}$$

Les opérateurs de conversion proposés par Euzenat se définissent, de plus, à partir des relations basiques. Les conversions d'une relation se déterminent, en effet, par les formules suivantes :

b	$\{<\}$	$\{=\}$	$\{>\}$
$\uparrow b$	$\{<,=\}$	$\{=\}$	$\{=, >\}$
$\downarrow b$	$\{<\}$	\mathbb{B}_{PA}	$\{>\}$

TABLE 3.3 – Conversions ascendante et descendante *génératrices* pour l’algèbre des points

b	$\{b\}$	$\{m\}$	$\{o\}$	$\{s\}$	$\{d\}$	$\{f\}$	$\{e\}$
$\uparrow b$	$\{b, m\}$	$\{m\}$	$\{m, o, s, \bar{f}, e\}$	$\{s, e\}$	$\{s, d, f, e\}$	$\{f, e\}$	$\{e\}$
$\downarrow b$	$\{b\}$	$\{b, m, o\}$	$\{o\}$	$\{o, s, d\}$	$\{d\}$	$\{d, f, \bar{o}\}$	$\{o, \bar{o}, s, \bar{s}, f, \bar{f}, d, \bar{d}, e\}$

TABLE 3.4 – Conversions ascendante et descendante *génératrices* pour l’algèbre de intervalles

$$\uparrow r = \bigcup_{b \in r} \uparrow b \quad \downarrow r = \bigcup_{b \in r} \downarrow b$$

De ce fait, pour définir un opérateur de conversion au sens d’Euzenat (sur toutes les relations), il suffit de définir les conversions pour un sous-ensemble de relations basiques, dont la clôture par inversion est l’ensemble \mathbb{B} entier. Euzenat a ensuite proposé des opérateurs de conversion pour l’algèbre des points et pour l’algèbre des intervalles. Les opérateurs de conversion des relations basiques de l’algèbre des points sont décrits dans la table 3.3 et les conversions d’un ensemble suffisant de relations basiques pour l’algèbre des intervalles sont décrites dans la table 3.4.

Exemple 3.4.8. Le fait qu’un instant puisse être avant un autre à l’échelle des secondes tout en ayant lieu durant la même minute est conforme avec la conversion ascendante. La conversion ascendante satisfait en effet la propriété $\{=\} \in \uparrow\{<\}$. Plus précisément, si on a $x < y$ définie à une granularité g , alors à une échelle plus grossière, on a la relation $x \uparrow\{<\} y$, c’est-à-dire $x \{<, =\} y$.

Euzenat montre en particulier que les conversions de l’algèbre des points et de l’algèbre des intervalles sont les seuls opérateurs satisfaisant ces 6 axiomes pour ces algèbres.

Il a également montré que les conversions de l’algèbre des points et de l’algèbre des intervalles satisfont des propriétés fondamentales (Euzenat et Montanari, 2005). La conversion ascendante de l’algèbre des points distribue sur la composition :

$$(\uparrow_{\text{PA}} r) \diamond (\uparrow_{\text{PA}} r') = (\uparrow_{\text{PA}} r \diamond r').$$

Par contre, la conversion ascendante de l’algèbre des intervalles n’est que sur-distributive sur la composition :

$$(\uparrow_{\text{IA}} r) \diamond (\uparrow_{\text{IA}} r') \subseteq (\uparrow_{\text{IA}} r \diamond r').$$

De plus, la conversion descendante de l’algèbre des points et celle de l’algèbre des intervalles sont sous-distributives par rapport à la composition :

$$(\downarrow r) \diamond (\downarrow r') \supseteq (\downarrow r \diamond r').$$

Ces propriétés peuvent notamment être utiles dans le cadre du raisonnement (Euzenat et Montanari, 2005).

Becher et al. ont proposé une approche différente pour raisonner dans le cadre qualitatif multi-échelle temporel (Becher *et al.*, 2000). Cette approche se place dans le contexte du langage naturel où les échelles ne sont pas connues. De plus, elle contraste avec celle d’Euzenat par rapport à la nature des entités considérées. Plus précisément, Euzenat considère des relations définies à des échelles différentes entre les mêmes entités temporelles (des points ou des intervalles), alors que Becher et al. considèrent des relations « classiques » entre des granules d’échelles différentes. Les granules servent, dans ce contexte, à représenter les entités temporelles vues à des échelles différentes. Le formalisme de Becher et al. est basé sur 5 relations basiques entre deux granules : *égalité*, *précédence*, *contenance* et les relations inverses de ces deux dernières. Par exemple, « x précède y » avec x et y des granules d’échelles (x et y sont de la forme $g(i)$). Une description est un réseau de contraintes classique dont les relations sont des unions de ces 5 relations. L’intérêt de

cette approche est que les échelles sont implicites, la représentation ne concerne que les granules. En particulier, il n'est pas nécessaire de connaître les relations « être plus fin que » des échelles pour raisonner. Il est en effet difficile, dans le contexte du langage naturel, d'identifier les échelles temporelles sous-jacentes ainsi que leurs relations. Becher et al. considèrent également des relations entre des intervalles de granules et entre un granule et un intervalle de granules. La table de composition est donnée pour ces relations (Becher *et al.*, 2000). Notons qu'avec cette approche, il n'y a pas d'opérateurs de conversion. En effet, c'est l'opérateur de composition qui propage les informations qui sont à la fois de nature directionnelle (précédence) et granulaire (contenance).

3.4.3 Formalisme quantitatif temporel multi-échelle

Le raisonnement multi-échelle temporel a également été étudié dans le cadre des contraintes quantitatives. En particulier, Bettini et al. ont proposé un formalisme pour raisonner et en particulier décider la cohérence de descriptions constituées de *contraintes quantitatives granulaires* (Bettini *et al.*, 2000). Ce formalisme se base sur leur cadre formel des échelles temporelles, présenté dans la section 3.4.1. Les contraintes de ce formalisme sont des intervalles numériques annotés par une échelle, définissant la distance incertaine entre deux instants en termes de granules de l'échelle choisie. Plus précisément, ses contraintes sont de la forme « $x [m, n]_g y$ » avec g une échelle, $m, n \in \mathbb{Z}$ et x et y deux points temporels. Deux points temporels x et y *satisfont* la contrainte $x [m, n]_g y$ si $\uparrow_{\mathcal{T}}^g x$ et $\uparrow_{\mathcal{T}}^g y$ sont définies et si la propriété $m \leq |\uparrow_{\mathcal{T}}^g x - \uparrow_{\mathcal{T}}^g y| \leq n$ est satisfaite (avec $\uparrow_{\mathcal{T}}^g x$ l'indice du granule de g contenant x).

Exemple 3.4.9. La contrainte $[0, 0]_{\text{heure}}$ impose que deux instants aient lieu à la même heure. Remarquons que cette contrainte n'est pas équivalente à $[0, 3600]_{\text{seconde}}$ car, avec cette dernière, les deux instants peuvent avoir lieu à des heures différentes.

Ce formalisme est une version multi-échelle du formalisme appelé STP pour lequel la décision de la cohérence est polynomiale. Cependant, dans ce contexte multi-échelle, le problème de décision de la cohérence s'avère NP-complet. L'ajout des échelles temporelles est la cause de cette complexité. En effet, certaines échelles temporelles font apparaître des contraintes disjonctives (non convexes). Soit g l'échelle des jours de travail. La contrainte $[1, 1]_g$ signifie être à un jour de travail de différence, comme lundi et mardi ou vendredi et lundi. Cette contrainte convertie à l'échelle des heures donne la contrainte disjonctive $[1, 24]_{\text{heure}} \vee [49, 72]_{\text{heure}}$: on a $[1, 24]_{\text{heure}}$ pour des heures d'une même semaine et $[49, 72]_{\text{heure}}$ pour des heures de semaines différentes (séparées par le week-end).

3.4.4 Formalismes qualitatifs spatiaux multi-échelles

Euzenat a également utilisé sa théorie des opérateurs de conversion dans le cadre spatial (Euzenat, 1994, 2001). Il a proposé deux constructeurs, *produit* et *abstraction*¹¹, s'appliquant sur un opérateur de conversion d'un formalisme pour déterminer l'opérateur de conversion correspondant à une certaine transformation de ce formalisme. Par exemple, le calcul des points cardinaux est une sorte de produit cartésien du calcul des points (voir les sections 2.3.2 et 3.2.2). Le constructeur *produit* associe ainsi l'opérateur de conversion correspondant à cette combinaison par produit cartésien. Plus précisément, la conversion ascendante du formalisme produit se détermine à partir de la conversion ascendante du formalisme combiné :

$$\uparrow b = \uparrow(b_1, \dots, b_m) = \times_{i=1}^m \uparrow b_i = \bigcup_{b'_1 \in \uparrow b_1, \dots, b'_m \in \uparrow b_m} \{(b'_1, \dots, b'_m)\}.$$

où b est une relation basique du formalisme produit, qui se décompose donc en un m -uplet (b_1, \dots, b_m) de relations basiques du formalisme combiné. La formule pour la conversion descendante est identique. On peut ainsi, par exemple, déterminer les opérateurs de conversion du calcul des relations cardinales à partir du constructeur produit et des conversions du calcul des points. Ces opérateurs sont décrits dans la table 3.5. Il est à noter que ce constructeur préserve les propriétés de distributivité énoncées dans la section 3.4.2. Il préserve également la satisfaction des axiomes d'un couple d'opérateurs de conversion. De son côté, RCC_8 peut être vu comme une abstraction

11. Euzenat appelle ce constructeur *affaiblissement*.

b	{N}	{NW}	{W}	{SW}	{EQ}
$\uparrow b$	{N, EQ}	{NW, N, W, EQ}	{W, EQ}	{SW, S, W, EQ}	{EQ}
$\downarrow b$	{NW, N, NE}	{NW}	{NW, W, SW}	{SW}	{N, S, W, E, NW, NE, SW, SE}

TABLE 3.5 – Conversions ascendante et descendante génératrices de l’algèbre des relations cardinales

b	{DC}	{EC}	{PO}
$\uparrow b$	{DC, EC}	{EC}	{EC, PO, TPP, $\overline{\text{TPP}}$, EQ}
$\downarrow b$	{DC}	{DC, EC, PO}	{PO}

b	{EQ}	{TPP}	{NTPP}
$\uparrow b$	{EQ}	{TPP, EQ}	{NTPP, TPP, EQ}
$\downarrow b$	{EQ, PO, TPP, NTPP, $\overline{\text{TPP}}$, $\overline{\text{NTPP}}$ }	{PO, TPP, NTPP}	{NTPP}

TABLE 3.6 – Conversions ascendante et descendante génératrices de RCC_8

(voir la section 3.2.3) du calcul des intervalles, en « oubliant » l’orientation (un intervalle est une région de \mathbb{R}). L’opération d’abstraction d’un formalisme qualitatif regroupe des relations basiques pour former une nouvelle relation basique. Le constructeur *abstraction* détermine l’opérateur de conversion correspondant à cette transformation. Plus précisément, la conversion d’une relation basique d’une abstraction est donnée par la formule suivante :

$$\uparrow b = \bigcup_{b_i \in G(b)} \uparrow b_i$$

avec $G(b)$ l’ensemble des relations basiques du formalisme combiné regroupées pour obtenir b . La formule est identique pour la conversion descendante. En utilisant le constructeur *abstraction*, Euzenat propose un couple d’opérateurs de conversion pour RCC_8 , décrit dans la table 3.6. Le constructeur *abstraction* ne préserve pas tous les axiomes d’un couple de conversions. Cependant, le couple de conversions de RCC_8 les satisfait tous.

Li et Nebel proposent une version multi-échelle de RCC_5 (Li et Nebel, 2007). Chaque échelle consiste en une partition de l’espace (le domaine spatial). Les régions sont approximées inférieurement et supérieurement pour chaque échelle spatiale. Plus précisément, l’approximation inférieure à une échelle g d’une région x est la région correspondant à l’ensemble des granules de g inclus dans la région x . L’approximation supérieure à une échelle g d’une région x est la région correspondant à l’ensemble des granules de g s’intersectant avec la région x . Les granules étant des régions atomiques, la région correspondant à un ensemble de granules est l’union de ces granules. Dans ce contexte, une relation définie à une échelle entre deux régions est un quadruplet de relations de RCC_5 :

- la relation de RCC_5 entre leurs approximations inférieures,
- la relation de RCC_5 entre leurs approximations supérieures,
- la relation de RCC_5 entre l’approximation inférieure de la première région et l’approximation supérieure de la seconde région,
- la relation de RCC_5 entre l’approximation supérieure de la première région et l’approximation inférieure de la seconde région.

Les auteurs donnent en particulier l’opérateur de conversion vers le domaine spatial de ces relations définies à une échelle (conversion vers l’échelle la plus fine). Cet opérateur convertit ainsi un quadruplet de relations en une seule relation de RCC_5 , généralement non basique.

3.4.5 Travaux connexes au raisonnement multi-échelle

Un certain nombre de travaux liés au raisonnement multi-échelle ont été menés dans les contextes des systèmes d’informations géographiques (Dettori et Puppo, 1996; Timpf et Frank, 1997; Topaloglou, 1997; Worboys, 1998; Stell et Worboys, 1998; Winter, 1999), des bases de données (Rigaux et Scholl, 1995; Combi *et al.*, 1995; Devogele *et al.*, 1996; Bettini *et al.*, 1998a,b,c,

2003), de la spécification et vérification de programmes (Ciapessoni *et al.*, 1993; Fiadeiro et Maibaum, 1994; Broy, 1997) et du traitement du langage naturel (Hobbs, 1985; Becher *et al.*, 1998; Gayral, 1992).

Notons que la représentation multi-échelle est étroitement liée à l'approximation de relations basée sur les ensembles approximatifs (Bittner et Stell, 2000; Bittner, 2002a; Bittner et Smith, 2001). Le cadre de Bittner et Stell porte sur des régions et sur des approximations de celles-ci définies à partir d'une discrétisation de l'espace. Les auteurs proposent deux définitions d'une relation entre régions approximées : la définition sémantique et la définition syntaxique. La définition syntaxique se détermine à partir des approximations des régions, de manière analogue au cadre de Li et Nebel (Li et Nebel, 2007) présenté dans la section 3.4.4. La définition sémantique est l'ensemble des relations basiques possibles entre les régions ayant ces approximations. On peut ainsi voir la définition sémantique comme la conversion descendante de la relation entre les régions approximées. Notons que ce cadre est limité à une seule discrétisation du domaine spatial. Cette approche a également été développée dans le cadre temporel (Bittner, 2002b).

Le raisonnement multi-échelle que l'on peut voir comme un raisonnement sur l'*indiscernabilité* est très proche du raisonnement sur la négligeabilité et la proximité (Balbiani, 2016).

Le *contexte paramétré par la granularité* est un domaine connexe (Schmidtke, 2005; Schmidtke et Woo, 2007). Dans celui-ci, les entités considérées sont filtrées et seules les entités respectant certaines propriétés paramétrées sont conservées. Par exemple, seules les entités ayant une taille plus grande qu'une taille de référence et/ou seules les entités se trouvant dans une certaine zone sont conservées. Le choix du paramètre amène à une perception différente. Le filtrage selon la taille et la localisation a, en particulier, été axiomatisé (Schmidtke et Woo, 2007). Une étude des différentes propriétés de filtrage et de leurs liens a été effectuée (Schmidtke, 2014).

Remarquons pour finir que le raisonnement temporel multi-échelle a été appliqué dans le cadre de la planification (Badaloni et Berati, 1994). L'approche de Badaloni et Berati combine des contraintes numériques et symboliques. Lors du raisonnement, seules les contraintes numériques sont converties par changement d'échelle. De plus, si des intervalles deviennent des points à une échelle plus grossière, ils sont retirés du réseau associé. En outre, avec cette approche, lorsque l'on considère des échelles trop grossières, les réseaux associés sont incohérents.

3.5 Autres combinaisons et extensions

Nous avons présenté dans les sections précédentes les intégrations de formalismes et les formalismes multi-échelles. Ces combinaisons et extensions portent sur des entités de même nature, elles sont *homogènes*. Nous avons également présenté les combinaisons spatio-temporelles, portant sur des entités temporelles *et* spatiales. Les combinaisons spatio-temporelles ne sont cependant pas les seules combinaisons *hétérogènes*.

Dans cette section, nous nous intéressons à d'autres combinaisons hétérogènes. Nous présentons plusieurs combinaisons permettant de raisonner avec des entités de natures différentes, puis nous exposons des formalismes portant sur les mêmes entités mais permettant de raisonner avec des informations quantitatives et des informations qualitatives. Nous terminons cette section par une discussion à propos de la *clôture propositionnelle* d'un formalisme qualitatif qui augmente son expressivité logique et permet dans certains cas de raisonner dans le contexte de combinaisons de formalismes.

3.5.1 Entités hétérogènes

Les formalismes qualitatifs classiques portent sur des entités de même nature : des points, des intervalles, des régions, des droites etc. Cependant, certaines applications nécessitent de considérer des objets de natures différentes. Il faut alors considérer les liens entre des objets de même nature mais également les liens entre des objets de natures différentes (Kurata, 2009; Kurata et Shi, 2009).

Dans ce contexte, Meiri propose un formalisme pour raisonner à la fois sur des points et des intervalles (Meiri, 1996). Les réseaux portent sur des variables de point et des variables d'intervalle. Les relations de ces réseaux sont soit des relations entre intervalles (calcul des intervalles), soit des relations entre points (calcul des points), soit des relations entre un point et un intervalle ou entre

Relation point-intervalle	Nom	Relation inverse (intervalle-point)	Définition
$\cdot b$	point-before	\bar{b}	$x < y^-$
$\cdot s$	point-start	\bar{s}	$y^- = x < y^+$
$\cdot d$	point-during	\bar{d}	$y^- < x < y^+$
$\cdot f$	point-finish	\bar{f}	$y^- < x = y^+$
$\cdot a$	point-after	\bar{a}	$y^+ < x$

TABLE 3.7 – Définition des relations entre un point x et un intervalle $y = (y^-, y^+)$

un intervalle et un point. Ces dernières relations sont présentées dans la table 3.7. Remarquons que contrairement aux intégrations lâches, dans ce formalisme, chaque couple d’entités n’est décrit que par une seule relation. La complexité de cette combinaison a été étudiée en profondeur : ses sous-classes maximales pour la traitabilité ont été identifiées (Jonsson et Krokhin, 2004).

Inants a introduit un cadre formel pour combiner des formalismes qualitatifs sur des entités de natures différentes (Inants, 2016). Les combinaisons résultantes permettent ainsi de raisonner sur des entités hétérogènes, de manière analogue à l’approche de Meiri (Meiri, 1996). Inants a notamment proposé une combinaison portant sur des entités de natures différentes, appelée A_{16} , pour raisonner dans le cadre de l’alignement d’ontologies. Les entités des réseaux sur A_{16} sont des classes et des individus. A_{16} étend A_5 (Euzenat, 2008), c’est-à-dire RCC_5 interprété sur les classes d’ontologies (des ensembles d’individus non vides). Les relations de A_{16} sont décrites dans la table 3.8 (les cinq premières correspondent à A_5). Notons qu’un des intérêts de A_{16} est que les classes peuvent être des ensembles vides, permettant de discriminer entre insatisfiabilité et incohérence, ce que ne permet pas A_5 . Contrairement à l’approche de Meiri, les variables ne sont pas typées *a priori* : ce sont les relations qui indiquent le typage. Les disjonctions de relations de types différents sont autorisées. Ainsi, l’incertitude sur le type des entités peut être représentée avec cette approche, ce qui généralise celle de Meiri concernant l’expressivité logique.

Exemple 3.5.1. La contrainte $x \{=, \in\} y$ ne donne aucune information à propos du type de x . Ainsi, x peut être aussi bien un individu qu’une classe. Par contre, cette contrainte impose que y soit nécessairement une classe.

En fait, A_{16} constitue un formalisme qualitatif classique, dans lequel \mathcal{U} est l’ensemble des individus et des classes. Cependant, ses relations basiques ne forment pas un schéma de partition (la relation d’égalité sur \mathcal{U} , $\{=, =_i\}$, n’est pas basique).

3.5.2 Informations quantitatives et qualitatives

Dans cette section, nous présentons les quelques formalismes de la littérature combinant informations quantitatives et qualitatives. Combiner les formalismes quantitatifs et qualitatifs, en particulier dans le cadre des informations spatiales, reste un vaste sujet d’étude (Chen *et al.*, 2015).

Meiri a étendu son formalisme, présenté dans la section précédente, en permettant d’exprimer des relations métriques entre des points (Meiri, 1996). Plus précisément, la relation qualitative de PC de chaque paire de points x et y peut être affinée par une relation métrique de la forme $a_1 \leq x - y \leq b_1 \vee \dots \vee a_k \leq x - y \leq b_k$ avec $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ainsi, ce formalisme combine des relations qualitatives à propos de points et d’intervalles et des relations quantitatives à propos de points.

Kautz et Ladkin proposent un formalisme pour raisonner à propos d’un réseau sur le calcul des intervalles d’Allen combiné à un réseau de contraintes métriques sur les bornes de ces intervalles (Kautz et Ladkin, 1991). Ces contraintes métriques sont des inégalités linéaires à propos des durées des intervalles ou des temps écoulés entre les intervalles. Pour raisonner, les trois étapes suivantes sont réitérées jusqu’à atteindre un point fixe. Premièrement, le réseau d’intervalles est traduit en réseau quantitatif sur les bornes de ces intervalles, et ses contraintes sont alors ajoutées au réseau métrique. Deuxièmement, le réseau métrique est traduit en réseau d’intervalles, et ses contraintes sont ajoutées au réseau d’intervalles. Troisièmement, le raisonnement classique est appliqué aux deux réseaux indépendamment. Remarquons que ce raisonnement ressemble à la

Relation entre x et y	Définition	
		Type de x Type de y
$=_n$	$x = y \neq \emptyset$	Ensemble Ensemble
\sqsubset_n	$\emptyset \neq x \subset y$	
\sqsupset_n	$\emptyset \neq y \subset x$	
\parallel_n	$x \neq \emptyset \wedge x \cap y = \emptyset \wedge y \neq \emptyset$	
$\overline{\cap}$	$x \setminus y \neq \emptyset \wedge x \cap y \neq \emptyset \wedge y \setminus x \neq \emptyset$	
∇_{en}	$x = \emptyset \neq y$	
∇_{ne}	$x \neq \emptyset = y$	
$=_e$	$x = \emptyset = y$	
\in	$x \in y$	Individu Ensemble
\notin	$\neg(x \in y)$	
∇_{ie}	$y = \emptyset$	
\ni	$y \in x$	Ensemble Individu
\nexists	$\neg(y \in x)$	
∇_{ei}	$x = \emptyset$	
$=_i$	$x = y$	Individu Individu
\neq_i	$x \neq y$	

TABLE 3.8 – Relations de A_{16} entre des classes (ensembles vides et non vides) et des individus

bi-clôture algébrique, à une différence près : au lieu d'associer à une relation cette même relation exprimée dans l'autre formalisme, les opérateurs d'interdépendance associent à un réseau ce même réseau exprimé dans l'autre formalisme.

Notons que la plupart des formalismes temporels classiques peuvent s'exprimer sous la forme de relations métriques linéaires disjonctives du formalisme DLR (*disjunctive linear relations*) (Jonsson et Bäckström, 1998). Une classe traitable des DLR a été identifiée, nommée hornDLR. Elle inclut un certain nombre de classes traitables telles que les relations préconvexes de l'algèbre des intervalles d'Allen.

3.5.3 Clôture propositionnelle

Nous présentons dans cette section la *clôture propositionnelle* d'un formalisme qualitatif (Wolter et Lee, 2016). La clôture propositionnelle augmente l'expressivité logique du point de vue de la logique propositionnelle. En effet, dans le cadre des formalismes qualitatifs classiques, les descriptions sont des conjonctions de disjonctions de relations basiques. Ces disjonctions, contrairement aux conjonctions, ne peuvent être qu'entre relations sur les mêmes entités. Plus formellement, une description classique est de la forme

$$\bigwedge_{x,y \in E} \bigvee_{b \in N^{xy}} x b y.$$

Dans le cadre de la clôture propositionnelle d'un formalisme qualitatif, les descriptions sont des formules propositionnelles quelconques (les formules atomiques sont de la forme « $x b y$ », avec x, y des variables et b une relation basique du formalisme).

Exemple 3.5.2. Avec la clôture propositionnelle, on peut exprimer des descriptions de la forme $x b y \vee \neg((x b' y \vee z b'' y) \wedge x b''' z)$.

L'expressivité de la clôture propositionnelle d'un certain nombre de formalismes qualitatifs a été étudiée. Cette étude a donné lieu à une hiérarchie des formalismes qualitatifs de la littérature (Wolter et Lee, 2016).

Ce gain d'expressivité peut également permettre de représenter les descriptions de certaines combinaisons de formalismes. Il faut pour cela représenter les interdépendances des relations au sein de la formule, lorsque c'est possible (Wolter et Lee, 2016).

3.6 Conclusion

3.6.1 Bilan

Nous avons présenté un certain nombre de formalismes étendant le cadre des formalismes qualitatifs classiques, proposées pour pallier leurs limitations. Ceux-ci se regroupent en plusieurs familles de combinaisons et d'extensions ayant un objectif commun.

Nous avons abordé les intégrations lâches et étroites, qui permettent de raisonner avec des schémas de partition différents sur le même univers. La combinaison taille-topologie STC, par exemple, permet de raisonner sur un couple de réseaux de contraintes basées sur QS et RCC_8 respectivement. Les intégrations lâches sont moins expressives que les intégrations étroites : le nombre de relations combinées est significativement plus petit. Cela diminue ainsi l'impact de l'augmentation de la complexité, principalement pour des combinaisons avec un très grand nombre de relations (Westphal et Woelfl, 2008). Notons toutefois que la bi-clôture algébrique est moins précise en général que la clôture algébrique de l'intégration étroite. Bien que l'intégration étroite soit plus expressive, l'intégration lâche permet d'exprimer des conjonctions de descriptions hétérogènes, ce qui est suffisant pour de nombreuses applications.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux formalismes spatio-temporels, qui permettent de raisonner dans le cadre d'entités évoluant au cours du temps. Les séquences temporelles forment la base de cette famille de formalismes et constituent donc un sujet fondamental pour l'étude des interdépendances spatio-temporelles. Elles constituent également une piste de recherche intéressante pour l'identification de fragments traitables, étant donnés les résultats négatifs concernant la complexité des approches ayant une expressivité logique supérieure. Pour raisonner avec les interdépendances sémantiques, dues à la dynamique des entités, les graphes de voisinage et leurs généralisations ont été proposés. Il est en effet important pour les applications que les entités évoluent continûment, voire que certaines de leur caractéristiques, telles que la taille, soient préservées au cours du temps. Les graphes de voisinage permettent notamment (pour certains formalismes) d'imposer le changement intégral, qui est indispensable dans le cadre de la planification spatiale.

En outre, nous nous sommes penchés sur les formalismes multi-échelles, qui permettent de raisonner avec des informations de précisions différentes et de lever des incohérences apparentes. Avec cette approche, les informations de même précision sont associées à une échelle. Dans le cadre temporel, il peut s'agir de l'échelle des jours, ou de celle des semaines. Le niveau de précision entre les échelles est décrit par la relation « plus fin que », notée \preceq . Le raisonnement consiste alors à faire le lien entre les échelles grâce à des opérateurs de conversion, propageant les informations d'une échelle à l'autre.

Enfin, nous avons présenté d'autres types de combinaison, comme les formalismes portant sur des entités hétérogènes et les combinaisons de contraintes quantitatives et qualitatives.

3.6.2 Limites des approches de la littérature

Tout au long de notre étude, nous avons remarqué que certaines de ces approches souffrent de limitations significatives.

Les graphes de voisinage et leurs généralisations ne permettent pas d'imposer les interdépendances dans un futur lointain. Par exemple, même si le graphe de voisinage de RCC_8 avec préservation de la taille assure que la taille est préservée d'un instant t_1 à un instant t_2 et qu'elle l'est également de l'instant t_2 et à un autre instant t_3 , la taille n'est pas toujours préservée de t_1 à t_3 . Ainsi, les graphes de voisinage, seuls, ne permettent pas d'assurer la préservation des caractéristiques dans le cadre des séquences.

En outre, bien que le cadre formel des graphes de dominance de Galton (Galton, 2000) donne une sémantique aux graphes de voisinage et aux graphes de dominance, celle-ci est restreinte aux points de \mathbb{R}^d . Ainsi, la sémantique des graphes de voisinage et de dominance dans le cadre d'entités plus complexes reste à définir.

De plus, seuls deux formalismes ont été proposés pour raisonner dans le contexte de la préservation de la taille de régions évoluant continûment au cours du temps. Le premier est celui de Galton (Galton, 1993). Il nécessite de connaître la relation basique de taille précise sur chaque

couple d'entités pour raisonner. De plus, ce formalisme constitue une logique d'une très haute expressivité et a donc une complexité très élevée. Le second est celui de Gerevini et Nebel (Gerevini et Nebel, 2002), pour lequel aucun algorithme n'a été proposé pour raisonner sur les descriptions non basiques. De plus, nous ne savons pas si pour les descriptions basiques, l'approche assure la continuité et la préservation de la taille.

Notons également que le cadre formel des intégrations lâches de Wölf et Westphal est limité aux combinaisons de deux formalismes (Wölf et Westphal, 2009).

Concernant les approches qualitatives multi-échelles, les formalismes proposés ne prennent pas en compte le fait que les entités peuvent changer de nature suite à un changement d'échelle. Par exemple, à une échelle plus grossière, un intervalle peut devenir un point (Euzenat, 1994). Inversement, à une échelle plus fine, un point peut devenir un intervalle. La détermination des opérateurs de conversion dans ce contexte est une perspective de recherche (Euzenat, 2001). Il est en effet important de ne pas négliger le changement de nature des entités au risque d'arriver à des conclusions erronées. Effectivement, exclure une entité du raisonnement effectué à une échelle, parce que le type de cette entité à cette échelle n'est pas connu, induit une perte d'information. De ce fait, le raisonnement peut conclure qu'une description incohérente est cohérente. En outre, si on considère que les entités sont toujours du même type, cela ajoute une information supplémentaire qui peut amener le raisonnement à conclure qu'une description cohérente est incohérente. C'est ce qui arrive, en particulier, avec le formalisme proposé par Badaloni et Berati (Badaloni et Berati, 1994).

3.6.3 Questions ouvertes

Ces combinaisons et extensions posent un certain nombre de questions et ouvrent de nombreuses perspectives de recherche.

Notons, d'une part, les problèmes ouverts à propos des opérateurs du raisonnement. Dans le cadre des séquences temporelles, nous ne savons pas si les graphes de voisinage permettent de garantir l'existence de solutions continues pour les formalismes non directionnels tels que RCC_8 . La détermination d'algorithmes performants décidant la cohérence dans le cadre spatio-temporel est aussi un problème ouvert. Dans le cadre multi-échelle, les axiomes du cadre d'Euzenat permettent d'identifier des opérateurs de conversion. Cependant, leur contexte exact d'application reste inconnu. En particulier, nous ne savons pas pour quel sens d'être *plus précis* ces conversions s'appliquent. De plus, il peut y avoir plusieurs paires de conversions ascendante et descendante possibles pour une même algèbre en général (Euzenat, 2001). Quel opérateur de conversion faut-il alors utiliser dans un contexte donné ?

D'autre part, notons que le problème principal de ces extensions et combinaisons est la décision de la cohérence. Elle n'a cependant pas été étudiée dans le cadre qualitatif multi-échelle, où les approches se limitent à proposer des opérateurs de conversion en particulier pour convertir les relations vers l'échelle la plus fine. D'ailleurs, afin de décider la cohérence, est-il suffisant de convertir les informations vers l'échelle la plus fine et ensuite de décider la cohérence à cette échelle ? Cette méthode ne fonctionne pas dans le cadre des contraintes quantitatives multi-échelles. En effet, l'ajout des échelles rend le problème NP-complet alors que convertir les relations à l'échelle la plus fine est une opération polynomiale. Par ailleurs, le problème de la minimalité n'a pas été étudié dans le contexte de ces combinaisons et extensions et reste donc un problème ouvert dans chacun de ces contextes.

Enfin, remarquons qu'il y a un certain nombre de similitudes entre les différentes combinaisons et extensions. Dans chacune de ces extensions, des opérateurs imposent les interdépendances. Pour un certain nombre de combinaisons et extensions, les descriptions consistent en des réseaux de contraintes classiques liés entre eux par les interdépendances. En fait, nous allons montrer, dans la deuxième partie qui présente nos contributions, qu'il est possible de développer un cadre formel pour analyser d'une manière unifiée une partie de ces formalismes, indépendamment de leur sémantique (raisonnement spatio-temporel, raisonnement multi-échelle et intégrations par exemple). Nous montrerons également que certaines des techniques proposées pour analyser les formalismes qualitatifs classiques s'adaptent à ce cadre généralisé, et nous identifierons des conditions pour qu'une combinaison de sous-classes traitables reste traitable malgré les interdépendances.

Deuxième partie

Contribution

Chapitre 4

Multi-algèbre : structure des réseaux intégrés, séquentiels et multi-échelles

4.1 Introduction

Nous avons vu tout au long du chapitre 3 des combinaisons de formalismes de toutes sortes. Bien qu'ayant des sémantiques différentes, les intégrations lâches, les formalismes qualitatifs multi-échelles et les séquences temporelles d'informations qualitatives semblent similaires. D'une part, leurs descriptions sont des tuples de réseaux de contraintes portant sur les mêmes entités. D'autre part, ils sont tous dotés d'opérateurs de raisonnement représentant les interdépendances entre les relations de réseaux différents portant sur les mêmes entités. Il s'agit des opérateurs de conversion, d'interdépendance et des graphes de voisinage, qui représentent respectivement l'évolution des relations lors d'un changement d'échelle, de langage (de relations basiques) et de période de référence.

Cela suggère qu'un cadre commun à ces trois combinaisons est définissable. Ainsi, on devrait pouvoir formuler une définition de combinaison les incluant et pour laquelle les opérateurs de raisonnement sont les mêmes. Un tel cadre permettrait d'obtenir des résultats généraux, comme des résultats de complexité à propos de la décision de la cohérence ou des techniques efficaces pour inférer de nouvelles connaissances et pour décider la cohérence.

Dans ce chapitre, nous proposons en conséquence un cadre formel permettant de raisonner dans le contexte des intégrations lâches, des séquences temporelles et des formalismes qualitatifs multi-échelles, mais également d'étudier chacune de ces combinaisons, d'une manière unifiée. Nous nous concentrons plus spécifiquement sur la décision de la cohérence dans ce cadre général et sur sa complexité.

Nous commençons par introduire une définition de formalisme qualitatif plus générale que celle de Ligozat et Renz (2004) (définition 2.2.19). Cette définition nous permet d'inclure des formalismes exclus des définitions précédentes, importants dans le cadre des combinaisons. Elle nous permet également de délimiter précisément le contexte d'application du cadre formel de ce chapitre. Nous introduisons ensuite la structure commune des intégrations lâches, des séquences temporelles et des descriptions multi-échelles, les *multi-algèbres*, et les concepts associés. Ce cadre généralise le cadre classique puisque, d'une part, nous retrouvons une clôture algébrique qui permet d'inférer de nouvelles relations et dans certains cas de décider la cohérence. D'autre part, les descriptions consistent toujours en des réseaux de contraintes, à la nuance que leurs relations sont des m -uplets de relations interdépendantes des formalismes combinés. Enfin, la définition de la cohérence des réseaux est la même que celle du cadre classique.

Dans la seconde section, nous nous intéressons à la complexité de la décision de la cohérence et en particulier à des conditions assurant la traitabilité algébrique de la décision de la cohérence. Nous identifions, d'une part, des conditions pour qu'une combinaison de sous-classes traitables classiques soit traitable. D'autre part, nous identifions des conditions permettant d'hériter la traitabilité d'une sous-classe combinée plus petite, grâce à une adaptation de la technique classique de *réduction par affinement* (voir la section 2.4.4). Ces deux résultats sont complémentaires et permettent de prouver la traitabilité de grandes sous-classes. Par la suite, nous identifions des conditions plus fortes mais

plus facilement vérifiables et proposons une technique pour contourner, dans certains cas, la non-satisfaction des conditions. Pour finir, nous abordons les limites d'applicabilité de ce cadre et illustrons ce dernier en l'appliquant pour retrouver les résultats de traitabilité de la combinaison taille-topologie STC (voir l'exemple 3.2.4).

4.2 Le cadre des multi-algèbres : représentation, raisonnement et cohérence

Cette section introduit le cœur du cadre formel des multi-algèbres. Avant d'introduire les multi-algèbres, il nous faut cependant préciser ce que nous appelons *formalisme qualitatif* dans cette partie, afin de délimiter les formalismes concernés par les résultats de ce cadre formel. Nous commençons donc par introduire notre propre définition, celle des formalismes qualitatifs *symétriques*. Nous introduisons également la propriété dite de *scénarisabilité*, satisfaite par un certain nombre de formalismes qualitatifs, qui est liée à la traitabilité et sera utilisée dans le cadre des multi-algèbres. Dans la sous-section suivante, nous définissons les multi-algèbres, objets constituant la structure sous-jacente des intégrations lâches, des séquences spatio-temporelles et des descriptions multi-échelles. Nous montrons ensuite comment raisonner avec des relations de multi-algèbres, et nous leur donnons une sémantique formelle. Enfin, nous définissons les réseaux de contraintes et la clôture algébrique dans le contexte des multi-algèbres.

4.2.1 Formalismes qualitatifs symétriques

4.2.1.1 Définition généralisée

La définition de formalisme qualitatif de Dylla *et al.* (2013), proposée pour inclure en particulier les formalismes qualitatifs invalidant les propriétés classiques de l'inversion, n'inclut cependant pas tous les formalismes qualitatifs de la littérature. Or, il se trouve que nous avons besoin de considérer des formalismes exclus par cette définition dans le cadre de cette thèse. Comme nous le verrons par la suite, les formalismes multi-échelles et certaines combinaisons spatio-temporelles nécessitent une généralisation de la définition de formalisme qualitatif. Cependant, nous ne pouvons pas simplement généraliser la définition de Dylla *et al.*, car le cadre des multi-algèbres que nous proposons ne s'applique pas en l'état aux formalismes qualitatifs ayant un inverse faible (voir la section 2.2.4). Nous proposons alors une définition de formalisme qualitatif, dit symétrique, sur laquelle nous basons notre cadre des multi-algèbres. Nous les qualifions de symétriques puisque l'inverse d'une relation basique est une relation basique et que l'inverse de l'inverse d'une relation est cette même relation.

Notons que le cadre des multi-algèbres devrait se généraliser sans difficulté aux inverses faibles. Cependant, nous ne nous plaçons pas dans ce cadre général pour deux raisons. D'une part, il n'y a que deux formalismes ayant un inverse faible dans la littérature Goyal et Egenhofer (2000); Navarrete *et al.* (2013). Le premier est un fragment de l'algèbre des rectangles et est donc exprimable dans celui-ci. Le second est le calcul des régions cardinales CRC (voir la section 3.2.1). Il ne possède aucune sous-classe traitable identifiée. De plus, sa combinaison avec RCC_8 ne possède aucune sous-algèbre traitable (Liu *et al.*, 2009). Il n'y a donc pas d'intérêt pour le moment à considérer une telle généralisation. D'autre part, considérer un inverse faible conduirait à alourdir très significativement le cadre formel des multi-algèbres.

Nous introduisons ainsi, dans la définition suivante, ce que nous appelons « formalisme qualitatif » dans cette partie. Informellement, un formalisme qualitatif symétrique est un formalisme généralisant la définition de Ligozat et Renz (2004), ayant la même structure algébrique, mais ayant une interprétation moins restrictive.

Définition 4.2.1 (Cohen-Solal *et al.*, 2017b). Un *formalisme qualitatif symétrique* est un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$, où $(\mathcal{A}, \cup, \cdot, \emptyset, \mathcal{B}, \otimes, \bar{\cdot}, e)$ forme une algèbre non associative finie, \mathcal{U} est un domaine d'entités non vide et $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ est une fonction d'interprétation vérifiant, pour tous $r, r' \in \mathcal{A}$, avec

$x \cap y = (x \cup y)^\complement$, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\emptyset) &= \emptyset & \varphi(r \cap r') &= \varphi(r) \cap \varphi(r') \\ \varphi(\bar{r}) &= \overline{\varphi(r)} & \varphi(r \cup r') &= \varphi(r) \cup \varphi(r') \\ & & \varphi(r \otimes r') &\supseteq (\varphi(r) \circ \varphi(r')) \cap \varphi(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Notons que dans cette partie nous utilisons les notations de cette définition. Nous ne faisons, par exemple, plus de différence de notation entre l'inverse sur \mathcal{U} et l'inverse de \mathcal{A} , étant donné que l'inverse de \mathcal{A} se comporte comme l'inverse sur \mathcal{U} . Cela nous permet d'alléger les notations.

Les propriétés que doit vérifier la fonction d'interprétation sont en effet moins restrictives que celles de la définition de Ligozat et Renz (définition 2.2.19).

D'une part, de manière similaire à la définition de Dylla *et al.* (2013), nous n'imposons plus que la relation d'égalité e de l'algèbre soit interprétée comme l'égalité sur \mathcal{U} . Plus formellement, nous n'exigeons plus la satisfaction de $\varphi(e) = \text{Id} = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid x = y\}$. Pour rappel, le formalisme QS sur les tailles qualitatives des régions (exemple 2.2.22) ne possède pas l'égalité sur \mathcal{U} et n'est donc pas un formalisme qualitatif au sens de Ligozat et Renz. Comme nous le verrons par la suite, les formalismes qualitatifs définis à une échelle (dans le cadre du raisonnement multi-échelle) ne sont pas des formalismes qualitatifs au sens de Ligozat et Renz, pour la même raison. Notons que la définition de Dylla *et al.* n'impose pas la présence d'une *égalité syntaxique* (c'est-à-dire d'un élément neutre pour la composition de \mathcal{A}), contrairement à notre définition. Notons également que tous les formalismes qualitatifs de la littérature, à notre connaissance, possèdent une égalité syntaxique.

D'autre part, et contrairement à la définition de Dylla *et al.*, nous incluons avec cette définition les formalismes dont les relations basiques ne sont pas exhaustives sur \mathcal{U} , c'est-à-dire dont les relations basiques ne forment pas une partition de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, mais uniquement une *sous-partition*. Avec de tels formalismes, certains couples d'entités ne correspondent à aucune relation basique. Par conséquent, les relations basiques ne permettent pas de représenter toutes les configurations possibles d'entités de \mathcal{U} .

Un exemple simple est RCC_7 Gerevini et Renz (2002), qui correspond à RCC_8 sans la relation de chevauchement. Cette algèbre ne permet évidemment pas de représenter toutes les configurations possibles de disques dans le plan. En effet, deux disques qui se chevauchent ne vérifient même pas la relation universelle de RCC_7 . L'opérateur de composition est également plus restrictif : si on a $x \{\text{EC}\} y$ et $y \{\text{NTPP}\} z$, le raisonnement dans RCC_7 déduit que $x \{\text{NTPP}, \text{TPP}\} z$, ce qui n'est pas vrai pour des régions x, y, z quelconques. Tout cela ne pose cependant aucun problème si on sait que les régions que l'on considère ne peuvent pas se chevaucher, ce qui est le cas dans le cadre d'applications en géographie (les pays ne se chevauchent pas) ou dans celui du raisonnement sur les objets physiques. Le formalisme $\mathcal{DR}\mathcal{A}_{24}$ est un autre exemple de sous-partition (Moratz *et al.*, 2000). Dans ces cas, l'algèbre permet bien de représenter toutes les configurations possibles, et le raisonnement est correct. Les formalismes basés sur des sous-partitions servent donc à raisonner lorsque certaines relations basiques ne sont jamais satisfaites ou, autrement dit, lorsque l'union des relations basiques considérées n'est pas $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Notons que restreindre \mathcal{U} ne permet pas de formuler un formalisme basé sur une sous-partition en un formalisme basé sur une partition, puisque les relations basiques restreignent les *couples* d'entités considérés. Ainsi, RCC_7 porte bien sur le même domaine que RCC_8 . De plus, bien qu'une sous-partition soit en fait un sous-ensemble d'une partition, elle n'est pas, en général, une sous-classe de cette partition. Plus précisément, les sous-classes d'une sous-partition ne sont pas toutes des sous-classes de la partition correspondante (puisque leurs compositions faibles diffèrent). Il est ainsi nécessaire d'étudier spécifiquement la complexité des sous-classes des sous-partitions.

Pour inclure ces formalismes basés sur des sous-partitions, nous avons relâché deux conditions de la définition de Ligozat et Renz (2004). D'une part, nous n'imposons plus que l'interprétation de la relation universelle \mathcal{B} soit nécessairement $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Notons par \mathfrak{R} son interprétation ($\mathfrak{R} = \varphi(\mathcal{B})$) : \mathfrak{R} est l'ensemble des couples d'entités considérés, les seuls couples d'entités que l'on suppose possibles dans le monde que l'on considère. Autrement dit, dans le cadre d'une sous-partition, on suppose que toutes les paires d'entités satisfont la relation \mathfrak{R} .

D'autre part, nous avons relâché la condition $\varphi(r) \circ \varphi(r') \subseteq \varphi(r \circledast r')$ qui garantit que la composition abstraite de l'algèbre est une approximation correcte de la véritable composition des relations sur \mathcal{U} . Puisque les formalismes basés sur une sous-partition, comme RCC_7 , ne vérifient pas cette condition, nous l'avons remplacée par $(\varphi(r) \circ \varphi(r')) \cap \varphi(\mathcal{B}) \subseteq \varphi(r \circledast r')$. La composition abstraite peut ainsi retirer des couples d'entités, potentiellement valides, de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, tant qu'elle ne retire pas des couples d'entités de $\varphi(\mathcal{B}) = \mathfrak{R}$, c'est-à-dire de la sous-partition. En supposant que la relation universelle \mathfrak{R} est vérifiée par tous les couples d'entités considérés, ce qui est généralement le cas quand on utilise un formalisme basé sur une sous-partition, la composition est bien correcte. Il n'y a pas d'inférence incorrecte par composition. Ainsi, le raisonnement est effectué en supposant que la relation \mathfrak{R} est satisfaite. Notons que la définition de la composition faible est la même dans ce contexte. Cependant, puisque \mathfrak{B} n'est plus (nécessairement) exhaustif, la composition faible n'est plus (nécessairement) une approximation supérieure de la composition sur \mathcal{U} , bien qu'elle soit la meilleure approximation supérieure de $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{R}$ (voir la section 2.2.2).

Pour résumer, les formalismes qualitatifs que nous considérons dans cette partie sont basés sur un ensemble fini de relations basiques sur \mathcal{U} disjointes deux à deux, mais non nécessairement exhaustives et ils sont dotés d'un inverse *fort* ($\bar{\bar{r}} = r$) et d'une égalité syntaxique (qui n'est pas nécessairement interprétée comme l'égalité sur \mathcal{U}).

4.2.1.2 Propriétés des formalismes qualitatifs symétriques

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés des formalismes qualitatifs symétriques, sur lesquelles se basent les preuves du cadre des multi-algèbres.

Nous commençons par définir les relations basiques, c'est-à-dire les *atomes* d'une algèbre non associative, ainsi qu'un certain nombre de notations.

Définition 4.2.2 (Hirsch et Hodkinson, 2002). Soient \mathcal{A} une algèbre non associative et $b \in \mathcal{A}$.

La relation b est dite un *atome* de \mathcal{A} si et seulement si pour tout $r \in \mathcal{A}$, $r \cap b = b \vee r \cap b = \emptyset$.

Définition 4.2.3. Soient \mathcal{A} une algèbre non associative et $b, r, r' \in \mathcal{A}$. Nous utilisons les notations suivantes :

- Nous notons \mathfrak{B} l'ensemble des atomes de \mathcal{A} .
- Nous notons $r \subseteq r'$ si et seulement si $r \cup r' = r'$.
- Nous notons $b \in r$ si et seulement si $b \subseteq r$ et si b est un atome de \mathcal{A} .

Nous avons généralisé la notation « $b \in r$ » du chapitre 2 au cadre des algèbres non associatives. Cette surcharge de la notation d'appartenance n'est pas ambiguë pour les éléments de \mathcal{A} . À l'aide de ces notations, nous formulons simplement les propriétés des algèbres non associatives finies et celles des formalismes qualitatifs symétriques.

Pour commencer, nous présentons les propriétés classiques des algèbres non associatives finies.

Lemme 4.2.4 (Hirsch et Hodkinson, 2002). Soient \mathcal{A} une algèbre non associative finie et $r, r', r'', l, l' \in \mathcal{A}$. Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 r &= \bigcup_{b \in r} b \\
 r \circledast r' &= \bigcup_{b \in r, b' \in r'} b \circledast b' \\
 \bar{\bar{r}} &= \bigcup_{b \in r} \bar{\bar{b}} \\
 r \subseteq r' \wedge r' \subseteq r'' &\implies r \subseteq r'' \\
 r \subseteq r' \wedge l \subseteq l' &\implies r \circledast l \subseteq r' \circledast l' \\
 r \subseteq r' &\implies \bar{\bar{r}} \subseteq \bar{\bar{r'}} \\
 (r \cap r') \cup r &= r
 \end{aligned}$$

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés des formalismes qualitatifs symétriques. Ils satisfont la plupart des propriétés fondamentales des formalismes qualitatifs au sens de la définition de Ligozat et Renz, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.2.5. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif symétrique et $r, r' \in \mathcal{A}$. Nous avons les propriétés suivantes :*

$$\varphi(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b)$$

$$r \subseteq r' \implies \varphi(r) \subseteq \varphi(r')$$

Démonstration. Nous commençons par prouver la première propriété. Nous avons $\varphi(r) = \varphi(\bigcup_{b \in r} b)$, par le lemme 4.2.4. Puisque $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme qualitatif symétrique, nous avons $\varphi(r \cup r') = \varphi(r) \cup \varphi(r')$ pour tous $r, r' \in \mathcal{A}$. Par conséquent, $\varphi(\bigcup_{b \in r} b) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b)$. Ainsi, $\varphi(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b)$.

Nous prouvons la seconde propriété. Supposons que $r \subseteq r'$. Nous avons par définition $r \cup r' = r'$. Par conséquent, $\varphi(r \cup r') = \varphi(r')$, d'où $\varphi(r) \cup \varphi(r') = \varphi(r')$. Ainsi, $\varphi(r) \subseteq \varphi(r')$. \square

4.2.1.3 Scénarisabilité

Avant d'introduire le cadre formel des multi-algèbres, nous nous intéressons à une propriété satisfaite par un certain nombre de sous-classes de formalismes qualitatifs, et qui assure leur traitabilité. Cette propriété, dite de *scénarisabilité*, sera utilisée dans le cadre des multi-algèbres.

Définition 4.2.6. Une sous-algèbre \mathcal{S} est dite *scénarisable par un affinement h* si pour tout réseau algébriquement cohérent N sur \mathcal{S} , pour tout $x, y \in E$ et pour tout $b \in h(N^{xy})$, il existe un scénario algébriquement clos $S \subseteq N$ tel que $S^{xy} = b$.

Une sous-algèbre scénarisable dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents est donc algébriquement traitable, puisque tout réseau algébriquement cohérent contient un scénario algébriquement clos. Cette propriété fournit, en plus, une méthode pour construire un scénario cohérent, qui consiste à appliquer itérativement la procédure suivante jusqu'à atteindre un point fixe :

- choisir une paire de variable $\{x, y\}$ telle que N^{xy} n'est pas basique,
- remplacer N^{xy} par une relation basique de $h(N^{xy})$ dans N ,
- clore N algébriquement.

L'algèbre des points PA et l'algèbre des intervalles d'Allen sont en particulier scénarisables par h_{\max} (voir la section 2.4.4).

4.2.2 Projections et multi-algèbres

Nous avons formulé notre définition de formalisme qualitatif dans la section précédente. Nous introduisons dans cette section les blocs de base du cadre formel des multi-algèbres, en commençant par les *opérateurs de projection*. Le but des opérateurs de projection est de représenter les interdépendances entre des relations provenant de formalismes différents. Un opérateur de projection associe simplement à chaque relation d'un formalisme la relation qui lui correspond dans un autre formalisme. De ce fait, un opérateur de projection doit distribuer sur l'union et sur l'inversion. En conséquence, une projection n'a besoin d'être définie que sur un sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{B} des relations basiques de \mathcal{A} .

Définition 4.2.7. Soient \mathcal{A} et \mathcal{A}' deux algèbres non associatives. Un *opérateur de projection* est une fonction $\mathfrak{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ qui satisfait :

- $\forall b \in \mathcal{B} \quad \mathfrak{P} \bar{b} = \bar{\mathfrak{P} b}$;
- $\forall r, r' \in \mathcal{A} \quad \mathfrak{P}(r \cup r') = \mathfrak{P} r \cup \mathfrak{P} r'$.

Exemple 4.2.8. Les opérateurs d'interdépendance des intégrations lâches (section 3.2.1) et les opérateurs de conversion des formalismes multi-échelles (section 3.4.2) constituent des exemples de projections.

Remarquons qu'un opérateur de projection est une fonction croissante et qu'il se calcule à partir des projections des relations basiques.

Lemme 4.2.9. *Soit $\overset{\circ}{r}$ un opérateur de projection de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' et soient $r, r' \in \mathcal{A}$. Nous avons les propriétés suivantes :*

- Si $r \subseteq r'$ alors $\overset{\circ}{r} \subseteq \overset{\circ}{r}'$,
- $\overset{\circ}{r} = \bigcup_{b \in r} \overset{\circ}{r} b$.

Démonstration. Nous prouvons la première propriété. Nous supposons $r \cup r' = r'$ et nous montrons $\overset{\circ}{r} r \cup \overset{\circ}{r} r' = \overset{\circ}{r} r'$. Par la définition d'un opérateur de projection, nous avons $\overset{\circ}{r} r \cup \overset{\circ}{r} r' = \overset{\circ}{r}(r \cup r')$. Par hypothèse, nous avons ainsi $\overset{\circ}{r}(r \cup r') = \overset{\circ}{r} r'$. Par conséquent, $\overset{\circ}{r} r \cup \overset{\circ}{r} r' = \overset{\circ}{r} r'$.

Nous prouvons la seconde propriété. Par le lemme 4.2.4, $\overset{\circ}{r} r = \overset{\circ}{r} \bigcup_{b \in r} b$. Par la définition d'un opérateur de projection, nous déduisons que $\overset{\circ}{r} \bigcup_{b \in r} b = \bigcup_{b \in r} \overset{\circ}{r} b$. Ainsi, $\overset{\circ}{r} r = \bigcup_{b \in r} \overset{\circ}{r} b$. \square

Nous pouvons maintenant définir les *multi-algèbres*, qui sont des produits cartésiens d'algèbres – chacune d'elles correspondant à un des formalismes combinés, à un des instants de la séquence temporelle ou à une des échelles – dotés d'opérateurs de projection représentant les interdépendances entre leurs relations.

Définition 4.2.10 (Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b). Une *multi-algèbre* \mathcal{A} est le produit cartésien de m algèbres non associatives $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^m$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$), doté de $m(m-1)$ opérateurs de projection $\overset{j}{r}_i^j : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$ (pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts)¹.

Nous identifions \mathcal{A} et $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$. En particulier, $R \in \mathcal{A}$ signifie $R \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$. Nous qualifions de *relations* les éléments R de \mathcal{A} , bien qu'ils soient en fait des m -uplets de relations ; R_i désigne la relation (classique) associée à \mathcal{A}_i dans R . Une relation R est dite *basique* lorsque toutes les relations R_i sont basiques ($R \in \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$). Nous notons par \mathcal{B} l'ensemble des relations basiques de \mathcal{A} : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$. Enfin, nous notons $R \subseteq R'$ lorsque $R_i \subseteq R'_i$ pour chaque i et $B \in R$ lorsque $B \subseteq R$ et $B \in \mathcal{B}$.

Une multi-algèbre \mathcal{A} est dite *finie*, si chaque algèbre non associative \mathcal{A}_i est finie.

Dans la suite, nous notons $\overset{A_j}{r}_{\mathcal{A}_i}^j$ l'opération de projection $\overset{j}{r}_i^j$ quand \mathcal{A}_i et \mathcal{A}_j sont spécifiées, pour faciliter la lecture.

Remarquons qu'une multi-algèbre où $m = 1$ (une « mono-algèbre ») est exactement une algèbre non associative puisqu'elle n'a aucun opérateur de projection.

Exemple 4.2.11. La multi-algèbre correspondant à STC (voir l'exemple 3.2.4) est le produit cartésien $\text{RCA}_8 \times \text{PA}$ de l'algèbre de RCC_8 et de l'algèbre des points PA (décrivant ici les tailles relatives des régions), doté des opérateurs d'interdépendance de STC comme projections (voir les tableaux 3.1 et 3.2). Appelons cette multi-algèbre STA (*size and topology (multi)-algebra*). Une de ses relations est $(\{\text{TPP}\}, \{<, =\})$ et la projection de $\{\text{TPP}\}$ vers PA est $\{<\}$ (ce qui se note $\overset{\text{PA}}{r}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \{\text{TPP}\} = \{<\}$) puisque TPP est la relation *partie propre tangentielle* et qu'une région strictement incluse dans une autre est nécessairement plus petite. Les relations basiques $B \in (\{\text{TPP}\}, \{<, =\})$ sont $(\{\text{TPP}\}, \{<\})$ et $(\{\text{TPP}\}, \{=\})$. Seul $(\{\text{TPP}\}, \{<\})$ correspond à un ensemble non vide de couples de régions.

Exemple 4.2.12. Le produit cartésien PA^m peut être utilisé pour représenter des séquences temporelles de relations entre des points sur une ligne, comme dans l'exemple 3.3.3. En effet, on peut utiliser le $i^{\text{ème}}$ PA du produit cartésien pour le $i^{\text{ème}}$ instant ; R_i est ainsi la relation à l'instant i . Nous dotons alors PA^m des projections imposant le respect du graphe de voisinage V de la figure 3.2. Nous avons ainsi $\overset{j}{r}_i^j \{<\} = \{<, =\}$, $\overset{j}{r}_i^j \{>\} = \{>, =\}$ et $\overset{j}{r}_i^j \{=\} = \mathcal{B}$ si les instants i et j sont voisins (c'est-à-dire si $|i - j| = 1$), et $\forall b \in \mathcal{B} \quad \overset{j}{r}_i^j b = \mathcal{B}$ (c'est-à-dire aucune contrainte) s'ils ne le sont pas. Nous notons TPA_p cette multi-algèbre (*temporalized point (multi)-algebra with*

1. Nous avons publié une définition de multi-algèbre plus restrictive dans (Cohen-Solal *et al.*, 2016). Le cadre formel associé est différent. Les résultats portent sur l'existence de scénarios algébriquement clos, au lieu de l'existence de scénarios cohérents, au sein d'un réseau algébriquement cohérent. De plus, il se base sur les concepts de *filtre* et de *clôture par projection partielle*. Dans le cadre de ce chapitre, nous utilisons des *affaiblissements* de multi-algèbre au lieu de *clôtures par projection partielle*. Les filtres sont des opérateurs généralisant la clôture algébrique.

neighborhood). Le produit cartésien de TPA_p est $\text{PA} \times \text{PA} \times \text{PA}$ dans le contexte de trois instants, c'est-à-dire lorsque $m = 3$. La relation $(\{<, =\}, \{=\}, \{>\})$ de cette multi-algèbre représente une séquence possible de relations pour les trois instants.

Exemple 4.2.13. PA^m peut aussi être utilisé pour représenter des descriptions temporelles multi-échelles. Considérons des échelles totalement ordonnées par la relation de précision \preceq . Dans ce cas, le $i^{\text{ème}}$ PA correspond à la $i^{\text{ème}}$ échelle, ainsi R_i est la relation à l'échelle g_i . Par exemple, la relation $(\{<\}, \{<, =\}, \{<, =\}, \{=\})$ de PA^4 décrit une relation temporelle possible entre deux instants à quatre échelles différentes (secondes, minutes, heures et jours, par exemple). Cette relation signifie que le premier instant est avant le second à l'échelle des secondes, n'est pas après celui-ci à l'échelle des minutes et des heures et qu'ils ont lieu durant le même jour. Les projections de la multi-algèbre associée, notée SPA^m (*scaled point (multi-)algebra*), correspondent aux conversions ascendante \uparrow et descendante \downarrow introduites dans la section 3.4.2. Plus précisément, pour tout $b \in \mathcal{B}$, on a $\uparrow_i^j b = \uparrow b$ et $\downarrow_i^j b = \downarrow b$ si l'échelle i est plus fine que l'échelle j . Les relations basiques $B \in (\{<\}, \{<, =\}, \{<, =\}, \{=\})$ sont $(\{<\}, \{<\}, \{<\}, \{=\})$, $(\{<\}, \{=\}, \{<\}, \{=\})$, $(\{<\}, \{<\}, \{=\}, \{=\})$ et $(\{<\}, \{=\}, \{=\}, \{=\})$. Ce sont les quatre relations basiques que peuvent satisfaire un couple d'entités qui satisfait la relation $(\{<\}, \{<, =\}, \{<, =\}, \{=\})$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous utilisons une notation allégée pour les relations. Par exemple, nous écrivons $(\text{TPP EQ}, <)$ au lieu de $(\{\text{TPP}, \text{EQ}\}, \{<\})$, et $(\leq, =, \neq)$ au lieu de $(\{<, =\}, \{=\}, \{<, >\})$.

4.2.3 Raisonner à propos des relations d'une multi-algèbre

On peut raisonner sur les relations d'une multi-algèbre en appliquant les règles classiques composante par composante. Par exemple, dans STC (voir l'exemple 4.2.11), si x (TPP, \leq) y et y ($\text{DC}, =$) z , alors x (DC, \leq) z (puisque $\text{TPP} \diamond \text{DC}$ est DC et $\leq \diamond =$ est \leq). Il est ainsi naturel d'introduire des opérateurs de composition \odot , d'intersection \cap , d'inversion $\bar{\cdot}$ et d'union \cup sur les relations des multi-algèbres, qui se basent sur les opérateurs correspondants des algèbres combinées et fonctionnent simplement composante par composante.

Définition 4.2.14. Soit \mathcal{A} une multi-algèbre. Nous appelons respectivement *composition*, *inversion*, *intersection* et *union*, les opérateurs \odot , $\bar{\cdot}$, \cap et \cup sur \mathcal{A} définis, pour tous $R, R' \in \mathcal{A}$, par :

- $\forall i \quad (R \odot R')_i = R_i \odot R'_i$;
- $\forall i \quad (\bar{R})_i = \overline{(R_i)}$;
- $\forall i \quad (R \cap R')_i = R_i \cap R'_i$;
- $\forall i \quad (R \cup R')_i = R_i \cup R'_i$.

Les opérateurs combinés sont utiles pour appliquer les concepts classiques à notre cadre généralisé ; il ne suffisent cependant pas pour le raisonnement, qui nécessite également la propagation des interdépendances au sein de chaque relation par l'utilisation des projections. La définition suivante introduit la propriété d'être *close par projection* et la *clôture par projection* d'une relation de multi-algèbre.

Définition 4.2.15. Soient \mathcal{A} une multi-algèbre finie et $R \in \mathcal{A}$.

La relation R est *close par projection* si pour tous i, j distincts, la propriété $R_j \subseteq \uparrow_i^j R_i$ est satisfaite.

La *clôture par projection* de $R \in \mathcal{A}$, notée $\uparrow R$, est obtenue à partir de R en remplaçant itérativement chaque R_j par $R_j \cap (\uparrow_i^j R_i)$ pour tous i, j distincts jusqu'à atteindre un point fixe.

Remarque 4.2.16. Le résultat d'une clôture par projection ne dépend pas de l'ordre des substitutions « $R_j \leftarrow R_j \cap (\uparrow_i^j R_i)$ ». L'opérateur est ainsi bien défini.

Exemple 4.2.17. Reprenons la multi-algèbre de STC introduite dans l'exemple 4.2.11. Puisque nous avons $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \{\text{TPP}\} = \{<\}$ et $\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} \{<\} = \{\text{TPP}\}$, la clôture par projection de (TPP, \leq) , $\uparrow(\text{TPP}, \leq)$, est $(\text{TPP}, <)$. Pour la même raison, celle de $(\text{TPP}, >)$ est $\uparrow(\text{TPP}, >) = (\emptyset, \emptyset)$, ce qui prouve que cette relation n'est pas réalisable. En effet, une région ne peut être à l'intérieur d'une autre alors qu'elle a une plus grande taille.

Pour la multi-algèbre TPA_p (exemple 4.2.12) avec $m = 3$, la clôture par projection de $(<, \neq, >)$ est $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Cela prouve que cette séquence temporelle de relations entre deux points à 3 instants successifs n'est pas réalisable. En effet, deux points sur une droite ne peuvent inverser leur position relative sans qu'il n'existe d'instant où ils soient égaux. Notons cependant que les relations $(<, \neq)$ et $(\neq, >)$ (TPA_p avec $m = 2$) sont chacune indépendamment réalisables. Ainsi, la *cohérence locale* d'une relation n'assure pas sa *cohérence globale*.

4.2.4 Sémantique des relations

Grâce à ces opérateurs, nous pouvons maintenant donner aux relations des multi-algèbres une sémantique propre, en adoptant une approche similaire au cadre classique. Nous qualifions les multi-algèbres dotées de cette sémantique de formalismes « séquentiels » car leurs relations sont des séquences de relations classiques.

Définition 4.2.18. Un *formalisme (qualitatif) séquentiel*² est un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$, où \mathcal{A} est une multi-algèbre finie, \mathcal{U} est un domaine d'entités non vide et φ est une fonction d'interprétation $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ vérifiant, pour $R, R' \in \mathcal{A}$, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\overset{\circ}{R}) &= \varphi(R) & \varphi(R \odot R') &\supseteq (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)) \\ \varphi(\overline{R}) &= \overline{\varphi(R)} & \varphi(R \cap R') &= \varphi(R) \cap \varphi(R') \\ \varphi((\emptyset, \dots, \emptyset)) &= \emptyset & \varphi(R) &= \bigcup_{B \in R} \varphi(B). \end{aligned}$$

Cette définition est une généralisation naturelle de la notion de formalisme qualitatif symétrique que nous avons proposée dans la section 4.2.1, à une exception près. Elle est adaptée aux m -uplets de relations, et la condition sur $\varphi(\overset{\circ}{R})$ a été ajoutée pour garantir que la projection soit correcte (c'est-à-dire qu'elle ne retire pas de couples d'entités valides). Le point délicat est que la propriété $\varphi(R \cup R') = \varphi(R) \cup \varphi(R')$ a été remplacée par $\varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B)$, propriété qui est équivalente dans le cadre des algèbres non associatives, mais qui ne l'est pas dans le cadre des multi-algèbres. En effet, la propriété $\varphi(R \cup R') = \varphi(R) \cup \varphi(R')$ est généralement invalidée (voir l'exemple 4.2.23).

Dans la suite, comme dans le cadre classique, nous notons $x R y$ lorsque $(x, y) \in \varphi(R)$.

Exemple 4.2.19. Nous appelons *calcul des points temporalisé par le voisinage* TPC_p (*temporalized point calculus with neighborhood*) le formalisme séquentiel de l'exemple 3.3.3, permettant de représenter les séquences temporelles sur le calcul des points dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire. La multi-algèbre de TPC_p est celle décrite dans l'exemple 4.2.12, c'est-à-dire TPA_p avec PA^m comme produit cartésien pour des séquences de longueur m . Sa sémantique nécessite de choisir la valeur $\tau_i \in \mathbb{R}$ de chaque instant i de la séquence. Le domaine \mathcal{U} est alors l'ensemble des évolutions continues de points sur la droite réelle durant la séquence, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_m])$ des fonctions continues de $[\tau_0, \tau_m]$ dans \mathbb{R} . L'interprétation d'une relation de TPC_p est l'ensemble des couples de points évoluant continûment sur \mathbb{R} au cours du temps de la séquence, satisfaisant à chaque instant clef (chaque τ_i) la relation correspondante et ne satisfaisant aucune autre relation entre ces instants. Plus formellement, en notant φ_{PA} la fonction d'interprétation classique de l'algèbre des points sur la droite réelle, et $\text{B}(p, p')$ la relation basique de PA vérifiée par deux points p et p' de \mathbb{R} , l'interprétation d'une relation R par φ est l'ensemble des couples (x, y) de fonctions de $\mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_m])$ qui remplissent les conditions suivantes.

— Les relations aux instants clefs sont satisfaites :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (x(\tau_i), y(\tau_i)) \in \varphi_{\text{PA}}(R_i).$$

— Entre deux instants-clefs successifs τ_i, τ_{i+1} , il existe un instant de transition τ tel qu'avant τ la relation est celle de l'instant clef précédent, et après τ celle de l'instant clef suivant :

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} \exists \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \bigwedge \begin{cases} \forall t \in [\tau_i, \tau[& \text{B}(x(t), y(t)) = \text{B}(x(\tau_i), y(\tau_i)) \\ \forall t \in]\tau, \tau_{i+1}] & \text{B}(x(t), y(t)) = \text{B}(x(\tau_{i+1}), y(\tau_{i+1})) \\ \text{B}(x(\tau), y(\tau)) \in & \{\text{B}(x(\tau_i), y(\tau_i)), \text{B}(x(\tau_{i+1}), y(\tau_{i+1}))\}. \end{cases}$$

2. Nous avons utilisé le terme « formalisme lâchement combiné » lorsque nous avons introduit cette définition dans la littérature (Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b).

Notons que TPC_p est basé sur une sous-partition (voir section 4.2.1). En effet, un couple de fonctions continues quelconques n'appartient pas toujours à une relation basique de TPC_p pour un choix des τ_i fixé. Par contre, pour tout couple de fonctions continues, il existe une valeur pour m et un ensemble de τ_i tels que le couple appartient à une relation basique de TPC_p .

L'intégration lâche (généralisée à m formalismes) est un cas particulier de formalisme séquentiel, construit à partir de formalismes existants, dans lequel les projections et la fonction d'interprétation ont une certaine forme.

Définition 4.2.20. L'intégration lâche de m formalismes qualitatifs symétriques sur le même domaine \mathcal{U} , $(\mathcal{A}_1, \mathcal{U}, \varphi_1), \dots, (\mathcal{A}_m, \mathcal{U}, \varphi_m)$, est le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$, où \mathcal{A} est la multi-algèbre dont le produit cartésien est $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$ vérifiant la propriété suivante, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et $b \in \mathcal{B}_i$:

$$\mathfrak{r}_i^j b = \bigcup \{b' \in \mathcal{B}_j \mid \varphi_i(b) \cap \varphi_j(b') \neq \emptyset\}$$

et où φ est définie par $\forall R \in \mathcal{A} \quad \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i)$.

Nous allons montrer qu'une intégration lâche est bien un formalisme séquentiel. Nous introduisons pour cela le lemme suivant que nous utiliserons dans d'autres sections pour prouver que certains formalismes de natures différentes sont aussi des formalismes séquentiels.

Lemme de combinaison. Soit $\{(\mathcal{A}_i, \mathcal{U}, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ un ensemble de formalismes qualitatifs (symétriques) sur le même univers et soit \mathfrak{R}' une relation symétrique ($\mathfrak{R}' = \overline{\mathfrak{R}'}$). Soit, pour chaque $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, \mathfrak{r}_i^j une projection de \mathcal{A}_i vers \mathcal{A}_j vérifiant $\varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' \subseteq \varphi_j(\mathfrak{r}_i^j b)$ pour tout $b \in \mathcal{B}_i$.

Le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ où

- \mathcal{A} est la multi-algèbre de produit cartésien $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$ dotée des projections \mathfrak{r}_i^j avec $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints,
- φ est la fonction de \mathcal{A} dans $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ définie par $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{R}'$,

est un formalisme séquentiel.

Démonstration. Avant de prouver que le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel, nous allons montrer que les projections de \mathcal{A} vérifient $\varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' \subseteq \varphi_j(\mathfrak{r}_i^j r)$ pour tout $r \in \mathcal{A}_i$ et tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts. Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et soit $r \in \mathcal{A}_i$. Étant donné que $(\mathcal{A}_i, \mathcal{U}, \varphi_i)$ est un formalisme qualitatif (définition 4.2.1) et que \mathfrak{r}_i^j est une projection (définition 4.2.7), nous avons en effet l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' &= \varphi_i(\bigcup_{b \in r} b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' && \text{car} && r = \bigcup_{b \in r} b \text{ (lem. 4.2.4)} \\ &= (\bigcup_{b \in r} \varphi_i(b)) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' && \text{car} && \varphi_i(r \cup r') = \varphi_i(r) \cup \varphi_i(r') \\ &= \bigcup_{b \in r} (\varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}') && \text{par} && \text{distributivité} \\ &\subseteq \bigcup_{b \in r} \varphi_j(\mathfrak{r}_i^j b) && \text{car} && \varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' \subseteq \varphi_j(\mathfrak{r}_i^j b) \\ &= \varphi_j(\bigcup_{b \in r} \mathfrak{r}_i^j b) && \text{car} && \varphi_i(r \cup r') = \varphi_i(r) \cup \varphi_i(r') \\ &= \varphi_j(\mathfrak{r}_i^j r) && \text{car} && \mathfrak{r}_i^j(r \cup r') = \mathfrak{r}_i^j r \cup \mathfrak{r}_i^j r'. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ constitue un formalisme séquentiel. \mathcal{A} est bien une multi-algèbre, \mathcal{U} est un domaine d'entités non vide et φ est une fonction d'interprétation $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$. Nous vérifions maintenant les propriétés de φ .

- $\varphi(\mathfrak{r} R) = \varphi(R)$:

Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts. Nous montrons que clore par la projection \mathfrak{r}_i^j ne change pas l'interprétation :

$$\begin{aligned}
\varphi(R) &= \bigcap_{k=1}^m \varphi_k(R_k) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \bigcap_{k=1}^m \varphi_k(R_k) \cap \varphi_j(\overset{j}{r}_i^j R_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi_i(R_i) \cap \varphi_j(R_j) \cap \mathfrak{X}' \\
& && \subseteq \varphi_i(R_i) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{X}' \\
& && \subseteq \varphi_j(\overset{j}{r}_i^j R_i) \\
&= \bigcap_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} \varphi_k(R_k) \cap \varphi_j(R_j) \cap \varphi_j(\overset{j}{r}_i^j R_i) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \bigcap_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} \varphi_k(R_k) \cap \varphi_j(R_j \cap \overset{j}{r}_i^j R_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi_j(r) \cap \varphi_j(r') = \varphi_j(r \cap r') \\
& \quad \varphi((R_1, \dots, R_{j-1}, R_j \cap \overset{j}{r}_i^j R_i, R_{j+1}, \dots, R_m)) && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'.
\end{aligned}$$

Ainsi, répéter cette opération jusqu'à atteindre un point fixe, c'est-à-dire clore par projection (définition 4.2.17) ne change pas l'interprétation. Par conséquent, $\varphi(R) = \varphi(\overset{r}{R})$.

$$\begin{aligned}
- \varphi(\overline{R}) &= \overline{\varphi(R)} : \\
\varphi(\overline{R}) &= \bigcap_i \varphi_i(\overline{(R)_i}) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \bigcap_i \overline{\varphi_i((R)_i)} \cap \mathfrak{X}' && \text{par la définition 4.2.14} \\
&= \bigcap_i \overline{\varphi_i(R_i)} \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi_i(\overline{r}) = \overline{\varphi_i(r)} \\
&= \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \overline{\mathfrak{X}'} && \text{par propriété de } \mathfrak{X}' \\
&= \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car l'inversion distribue sur l'intersection} \\
&= \overline{\varphi(R)} && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'.
\end{aligned}$$

$$- \varphi((\emptyset, \dots, \emptyset)) = \emptyset :$$

$\varphi((\emptyset, \dots, \emptyset)) = \bigcap_i \varphi_i(\emptyset) \cap \mathfrak{X}' = \bigcap_i \emptyset \cap \mathfrak{X}' = \emptyset$ car chaque $(\mathcal{A}_i, \mathcal{U}, \varphi_i)$ est un formalisme qualitatif (définition 4.2.1).

$$- \varphi(R \otimes R') \supseteq (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)) :$$

Nous prouvons cette propriété à partir des propriétés des formalismes qualitatifs symétriques (définition 4.2.1) :

$$\begin{aligned}
& (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)) \\
\subseteq & \left(\left(\bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' \right) \circ \left(\bigcap_j \varphi_j(R'_j) \cap \mathfrak{X}' \right) \right) \cap \bigcap_i \varphi_i(\mathcal{B}_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' \\
\subseteq & \left(\left(\bigcap_i \varphi_i(R_i) \right) \circ \left(\bigcap_j \varphi_j(R'_j) \right) \right) \cap \bigcap_i \varphi_i(\mathcal{B}_i) \cap \mathfrak{X}' \\
\subseteq & \bigcap_i \left(\varphi_i(R_i) \circ \bigcap_j \varphi_j(R'_j) \right) \cap \bigcap_i \varphi_i(\mathcal{B}_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } (r \cap s) \circ t \subseteq (r \circ t) \cap (s \circ t) \\
\subseteq & \bigcap_i \bigcap_j \left(\varphi_i(R_i) \circ \varphi_j(R'_j) \right) \cap \bigcap_i \varphi_i(\mathcal{B}_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } t \circ (r \cap s) \subseteq (t \circ r) \cap (t \circ s) \\
\subseteq & \bigcap_i \left(\varphi_i(R_i) \circ \varphi_i(R'_i) \right) \cap \bigcap_i \varphi_i(\mathcal{B}_i) \cap \mathfrak{X}' \\
\subseteq & \bigcap_i \left((\varphi_i(R_i) \circ \varphi_i(R'_i)) \cap \varphi_i(\mathcal{B}_i) \right) \cap \mathfrak{X}' \\
\subseteq & \bigcap_i \varphi_i(R_i \otimes R'_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } (\varphi_i(r) \circ \varphi_i(r')) \cap \varphi_i(\mathcal{B}_i) \subseteq \varphi_i(r \otimes r') \\
\subseteq & \bigcap_i \varphi_i((R \otimes R')_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{par la définition de } \otimes \text{ (déf. 4.2.14)} \\
\subseteq & \varphi(R \otimes R') && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'.
\end{aligned}$$

$$- \varphi(R \cap R') = \varphi(R) \cap \varphi(R') :$$

$$\begin{aligned}
\varphi(R \cap R') &= \bigcap_i \varphi_i((R \cap R')_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \bigcap_i \varphi_i(R_i \cap R'_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{par la définition de } \cap \text{ (déf. 4.2.14)} \\
&= \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \varphi_i(R'_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi_i(r \cap r') = \varphi_i(r) \cap \varphi_i(r') \\
&= \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' \cap \bigcap_i \varphi_i(R'_i) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \varphi(R) \cap \varphi(R') && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'.
\end{aligned}$$

$$- \varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B) :$$

$$\begin{aligned}
\varphi(R) &= \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{par définition} \\
&= \bigcap_i \bigcup_{b_i \in R_i} \varphi_i(b_i) \cap \mathfrak{X}' && \text{car } \varphi_i(r \cup r') = \varphi_i(r) \cup \varphi_i(r') \\
&= \bigcup \{ \varphi(b_1) \cap \dots \cap \varphi(b_m) \mid b_1 \in R_1, \dots, b_m \in R_m \} \cap \mathfrak{X}' && \text{par distributivité} \\
&= \bigcup \{ \varphi(B_1) \cap \dots \cap \varphi(B_m) \mid B \in R \} \cap \mathfrak{X}' && \text{par la définition de « } B \in R \text{ »} \\
&= \bigcup_{B \in R} \bigcap_i \varphi_i(B_i) \cap \mathfrak{X}' \\
&= \bigcup_{B \in R} \left(\bigcap_i \varphi_i(B_i) \cap \mathfrak{X}' \right) \\
&= \bigcup_{B \in R} \varphi(B) && \text{car } \varphi(R) = \bigcap_i \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'.
\end{aligned}$$

Le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est ainsi un formalisme séquentiel. \square

Nous montrons maintenant que les intégrations lâches sont des formalismes séquentiels, en nous basant sur le lemme suivant, prouvant que leurs projections sont correctes.

Lemme 4.2.21. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ l'intégration lâche de m formalismes qualitatifs symétriques sur le même domaine \mathcal{U} , $(\mathcal{A}_1, \mathcal{U}, \varphi_1), \dots, (\mathcal{A}_m, \mathcal{U}, \varphi_m)$, et soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints et $r \in \mathcal{A}_i$.*

La propriété $\varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j r)$ est satisfaite.

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints et $r \in \mathcal{A}_i$. Soit $(x, y) \in \varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j)$. Il existe $b \in r$ et $b' \in \mathcal{B}_j$ tels que $(x, y) \in \varphi_i(b) \cap \varphi_j(b')$, puisque $\varphi_i(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi_i(b)$ et $\varphi_j(\mathcal{B}_j) = \bigcup_{b' \in \mathcal{B}_j} \varphi_j(b')$ (lemme 4.2.5). Étant donné que $\uparrow_i^j b = \bigcup \{b' \in \mathcal{B}_j \mid \varphi_i(b) \cap \varphi_j(b') \neq \emptyset\}$ (définition 4.2.20), nous avons $b' \in \uparrow_i^j b$. Ainsi $\varphi_j(b') \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j b)$ (lemme 4.2.5). Or $(x, y) \in \varphi_i(b) \cap \varphi_j(b')$, d'où $(x, y) \in \varphi_j(\uparrow_i^j b)$. Puisque $b \in r$, nous avons $\uparrow_i^j b \subseteq \uparrow_i^j r$ (lemme 4.2.9). Par conséquent, $\varphi_j(\uparrow_i^j b) \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j r)$ (lemme 4.2.5). Ainsi $(x, y) \in \varphi_j(\uparrow_i^j r)$, d'où $\varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j r)$. \square

Proposition 4.2.22. *L'intégration lâche $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ de m formalismes qualitatifs symétriques sur le même domaine \mathcal{U} , $(\mathcal{A}_1, \mathcal{U}, \varphi_1), \dots, (\mathcal{A}_m, \mathcal{U}, \varphi_m)$, est un formalisme séquentiel.*

Démonstration. Nous appliquons le lemme de combinaison 4.2.4 avec $\mathfrak{X}' = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, qui vérifie trivialement $\mathfrak{X}' = \overline{\mathfrak{X}'}$. Nous avons bien $\{(\mathcal{A}_i, \mathcal{U}, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ un ensemble de formalismes qualitatifs symétriques sur le même univers. La fonction φ est bien une fonction de \mathcal{A} dans $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ satisfaisant $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'$. Pour conclure, nous avons

$$\varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{X}' = \varphi_i(r) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j r)$$

avec $r \in \mathcal{A}_i$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts (lemme 4.2.21). \square

Exemple 4.2.23. La combinaison taille-topologie STC est l'intégration lâche du formalisme RCC_8 et du formalisme QS (exemple 2.2.22). Nous retrouvons la multi-algèbre de l'exemple 4.2.11 et en particulier ses projections. Prenons les relations (TPP, \emptyset) et $(\emptyset, <)$ de STC, elles ont chacune trivialement une interprétation vide. Cependant, l'interprétation de la relation $(\text{TPP}, \emptyset) \cup (\emptyset, <) = (\text{TPP}, <)$ n'est pas l'ensemble vide. La propriété classique $\varphi(R \cup R') = \varphi(R) \cup \varphi(R')$ est invalidée.

Exemple 4.2.24. Nous appelons *calcul des points multi-échelle*, noté SPC^m (*(multi-)scaled point calculus*), le formalisme séquentiel permettant de représenter les descriptions temporelles multi-échelles basées sur l'algèbre des points. Nous nous plaçons dans le cadre d'un calendrier (pour une formalisation plus précise et générale, voir le chapitre 5) où les échelles sont totalement ordonnées par la relation de précision \preceq . Pour m échelles, la multi-algèbre de SPC^m est simplement SPA^m (exemple 4.2.13) avec PA^m comme produit cartésien. SPC^m est en fait l'intégration lâche de m formalismes basées sur l'algèbre des points, chacun interprétant les relations sur des échelles temporelles différentes. Pour définir intégralement SPC^m , nous avons donc seulement besoin de définir l'interprétation à chaque échelle. La fonction d'interprétation φ_k de l'échelle g_k (voir la section 3.4.1) associe à chaque relation r les couples de points dont les indices associés de I_{g_k} par g_k satisfont r , c'est-à-dire que $\varphi_k(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (i, j) \in \varphi_{\text{PA}}(r) \wedge x \in g_k(i) \wedge y \in g_k(j)\}$. Le chapitre 5 étudiera la question du multi-échelle plus en profondeur.

En revanche, nous pouvons montrer que TPC_p (exemple 4.2.19) n'est pas une intégration lâche. En effet, les fonctions d'interprétation à chaque instant clef ne peuvent être définies indépendamment les unes des autres : il serait alors impossible d'imposer l'unicité de l'instant de transition τ entre deux instants-clefs et de garder l'incertitude concernant la relation satisfaite à cet instant.

Nous retrouvons certaines propriétés du cadre classique.

Lemme 4.2.25. *Soient $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et $R, R' \in \mathcal{A}$.*

Si $R \subseteq R'$ alors $\varphi(R) \subseteq \varphi(R')$.

Démonstration. Nous avons $\varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B)$ et $\varphi(R') = \bigcup_{B \in R'} \varphi(B)$. Soit $B \in R$. Nous avons $B \in R'$, puisque $R \subseteq R'$. Ainsi, $\varphi(B) \subseteq \varphi(R')$. Par conséquent, $\varphi(R) \subseteq \varphi(R')$. \square

Pour conclure cette section, remarquons que le raisonnement introduit dans la section précédente se justifie par la sémantique des formalismes séquentiels. Nous avons en effet les propriétés suivantes :

Proposition 4.2.26. *Soient $(\mathcal{A}, U, \varphi)$ un formalisme séquentiel, $R, R' \in \mathcal{A}$ et $x, y, z \in \mathcal{U}$. Supposant $x (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m) z$, nous avons les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} x R y &\iff y \overline{R} x \\ x R y \wedge x R' y &\iff x (R \cap R') y \\ x R y \wedge y R' z &\implies x (R \odot R') z \\ x R y &\iff x (\ulcorner R) y. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour prouver cette proposition, nous utilisons le fait que $(\mathcal{A}, U, \varphi)$ soit un formalisme séquentiel (définition 4.2.18).

Nous prouvons la première équivalence :

$$\begin{aligned} x R y &\iff (x, y) \in \varphi(R) \\ &\iff (y, x) \in \varphi(\overline{R}) \\ &\iff (y, x) \in \varphi(\overline{R}) \\ &\iff y \overline{R} x. \end{aligned}$$

Nous prouvons la deuxième équivalence :

$$\begin{aligned} x R y \wedge x R' y &\iff (x, y) \in \varphi(R) \wedge (x, y) \in \varphi(R') \\ &\iff (x, y) \in \varphi(R) \cap \varphi(R') \\ &\iff (x, y) \in \varphi(R \cap R') \\ &\iff x (R \cap R') y. \end{aligned}$$

Nous prouvons l'implication (supposant $x (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m) z$) :

$$\begin{aligned} x R y \wedge y R' z &\implies (x, y) \in \varphi(R) \wedge (y, z) \in \varphi(R') \\ &\implies (x, z) \in \varphi(R) \circ \varphi(R') \\ &\implies (x, z) \in (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)) \\ &\implies (x, z) \in \varphi(R \odot R') \\ &\implies x (R \odot R') z. \end{aligned}$$

Nous prouvons la dernière équivalence :

$$\begin{aligned} x R y &\iff (x, y) \in \varphi(R) \\ &\iff (x, y) \in \varphi(\ulcorner R) \\ &\iff x (\ulcorner R) y. \end{aligned}$$

□

4.2.5 Cohérence des relations des multi-algèbres

La sémantique des relations induit une notion de cohérence, que nous formulons dans la définition suivante.

Définition 4.2.27. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel.

Une relation d'une multi-algèbre \mathcal{A} est dite *cohérente (pour \mathcal{F})* si $\varphi(R) \neq \emptyset$.

Contrairement aux formalismes classiques (mono-algèbres), où toute relation non vide est cohérente, les relations – même basiques – des multi-algèbres peuvent être incohérentes, à cause des interdépendances. La définition d'un formalisme séquentiel (définition 4.2.18) permet néanmoins de conserver la propriété élémentaire suivante :

Proposition 4.2.28. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel.*

Une relation R d'une multi-algèbre \mathcal{A} est cohérente si et seulement si elle contient une relation basique cohérente, c'est-à-dire

$$\varphi(R) \neq \emptyset \iff \exists B \in R \quad \varphi(B) \neq \emptyset$$

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{A}$. Supposons que $\varphi(R) \neq \emptyset$. Étant donné que $\varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B)$ (définition d'un formalisme séquentiel; déf. 4.2.18), $\bigcup_{B \in R} \varphi(B) \neq \emptyset$ et donc $\exists B \in R \quad \varphi(B) \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons que $\exists B \in R \quad \varphi(B) \neq \emptyset$. Puisque, $\varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B)$, nous avons ainsi $\varphi(R) \neq \emptyset$. \square

Nous avons illustré dans l'exemple 4.2.17 le fait que certaines relations étaient incohérentes à cause des interdépendances, en exhibant des relations basiques et non basiques dont la clôture par projection est vide. Clore une relation par projection peut ainsi aider à détecter son incohérence. Si $\uparrow R$ est vide, on peut conclure que R est incohérente. Dans le cas contraire, $\uparrow R$ est dite \uparrow -cohérente.

Définition 4.2.29. Une relation R d'une multi-algèbre est \uparrow -cohérente si :

- R est close par projection : $R = \uparrow R$ et
- R est non trivialement incohérente : $\forall i \quad R_i \neq \emptyset$.

Proposition 4.2.30. *Soient $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et $R \in \mathcal{A}$. Nous avons les trois propriétés suivantes :*

- *Si $\uparrow R$ est trivialement incohérente, alors R est incohérente.*
- *Si R est cohérente alors $\uparrow R$ est \uparrow -cohérente.*
- *Toute relation basique cohérente est \uparrow -cohérente.*

Démonstration. Nous prouvons d'abord la première assertion. Soit R telle que $\uparrow R$ est trivialement incohérente. Il existe donc un i tel que $(\uparrow R)_i = \emptyset$. Or $\uparrow R$ est close par projection, par définition. Ainsi, pour tout j , nous avons $(\uparrow R)_j \subseteq \uparrow_i^j (\uparrow R)_i = \uparrow_i^j \emptyset$. Puisque $\uparrow_i^j r = \bigcup_{b \in r} \uparrow_i^j b$ (lemme 4.2.9), $\uparrow_i^j \emptyset = \emptyset$. Ainsi, $(\uparrow R)_j = \emptyset$ pour tout j . Par conséquent, $\varphi(\uparrow R) = \emptyset$ ($(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel; définition 4.2.18). Puisque $\varphi(\uparrow R) = \varphi(R)$ (définition 4.2.18), nous avons $\varphi(R) = \emptyset$. La relation R est ainsi incohérente.

La seconde assertion découle directement de la contraposée de la première assertion.

Nous montrons maintenant la troisième assertion. B est cohérente, c'est-à-dire que $\varphi(B) \neq \emptyset$. Nous avons donc $\varphi(\uparrow B) = \varphi(B) \neq \emptyset$ (définition 4.2.18). Ainsi, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $(\uparrow B)_i \neq \emptyset$ (définition 4.2.18). Puisque $\uparrow B$ est close par projection, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ la propriété $(\uparrow B)_i \neq \emptyset$. Étant donné que $\uparrow B \subseteq B$ (définition 4.2.15), que B est basique et que $\uparrow B$ est non trivialement incohérente, nous avons $B = \uparrow B$. Ainsi, B est \uparrow -cohérente. \square

Cependant, bien que les opérateurs de projection puissent retirer des incohérences *deux à deux*, la cohérence dépend en définitive de la fonction d'interprétation. Par exemple, dans une intégration lâche, on peut avoir $\varphi_i(r_i) \cap \varphi_j(r_j) \neq \emptyset$ pour chaque paire $\{i, j\}$, tout en ayant $\bigcap_i \varphi_i(r_i) = \emptyset$ (puisque en général $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \wedge A \cap C \neq \emptyset \not\Rightarrow A \cap B \cap C \neq \emptyset$). Les projections étant correctes, la relation $\uparrow(r_1, \dots, r_n)$ ne sera pas nécessairement trivialement incohérente, et pourtant $\varphi(r_1, \dots, r_n) = \emptyset$. La \uparrow -cohérence n'implique donc pas en général la cohérence, même pour les relations basiques. Néanmoins, pour certains formalismes, toutes les relations basiques \uparrow -cohérentes sont cohérentes. Avec ces formalismes, le raisonnement peut s'effectuer de manière purement algébrique. Dans la section 4.3.2, nous identifions des conditions suffisantes pour que les projections permettent de décider la cohérence des relations. Les deux cas de figure à propos des relations basiques sont résumés dans la figure 4.1.

4.2.6 Réseaux sur des multi-algèbres et clôture algébrique

Dans le cadre des formalismes séquentiels, les descriptions sont des *réseaux de contraintes qualitatives sur des multi-algèbres*, c'est-à-dire des réseaux de contraintes dont les relations appartiennent à une multi-algèbre et sont donc des m -uplets de relations classiques. Par exemple, le

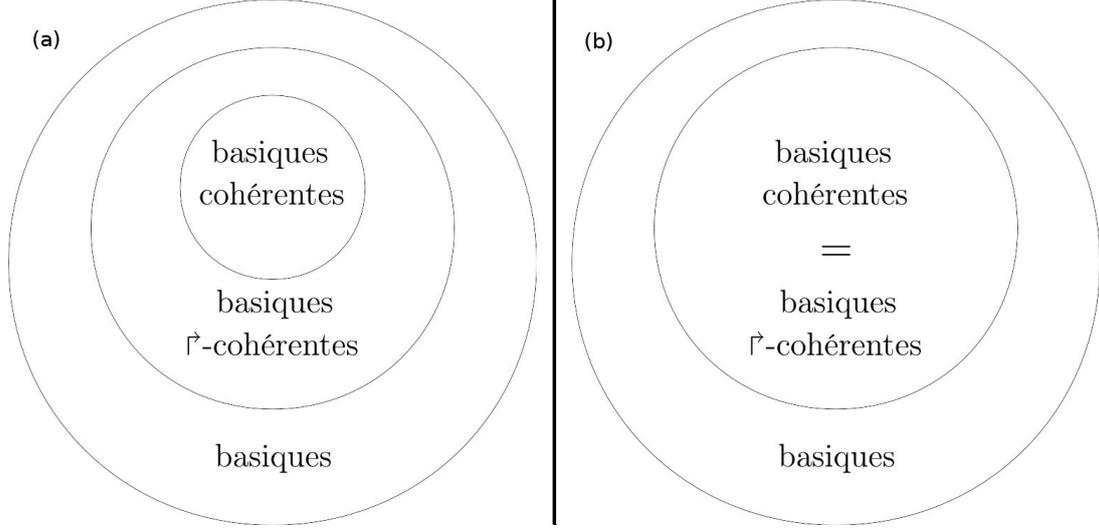


FIGURE 4.1 – (a) Hiérarchie des relations basiques dans le cas général ; (b) hiérarchie des relations basiques lorsque le raisonnement sur les relations peut s’effectuer de manière algébrique

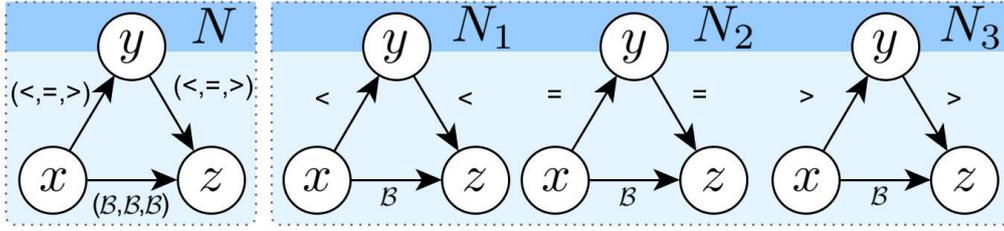


FIGURE 4.2 – Un réseau N sur PA^3 et ses trois tranches

réseau N à gauche de la figure 4.2 correspond à la séquence temporelle de 3 réseaux sur l’algèbre des points décrite dans l’exemple 3.3.3 ; la relation N^{xy} correspond ainsi à la séquence des relations entre x et y .

Les réseaux de contraintes sur des multi-algèbres sont une représentation alternative mais équivalente aux bi-réseaux de contraintes du cadre des intégrations lâches et aux séquences temporelles de réseaux. En effet, un réseau N sur une multi-algèbre \mathcal{A} peut être vu de manière équivalente comme un m -uplet de réseaux classiques N_i sur l’algèbre \mathcal{A}_i , comme l’illustre la figure 4.2, dans laquelle N_i correspond à l’état du réseau à l’instant i . Ceci est formalisé par la définition suivante.

Définition 4.2.31. Soit $N = (\mathbf{E}, \mathbf{C})$ un réseau sur une multi-algèbre \mathcal{A} . La i -ème tranche de N , notée N_i ou encore $N_{\mathcal{A}_i}$, est le réseau $(\mathbf{E}, \mathbf{C}_i)$ sur \mathcal{A}_i , où $\mathbf{C}_i = \{x R_i y \mid x R y \in \mathbf{C}\}$.

Nous adaptons directement aux réseaux sur des multi-algèbres certaines notions classiques (voir la section. 2.4.2), à savoir celle de *scénario* ainsi que celles de *solution* et de *cohérence*.

Définition 4.2.32. Un *scénario* sur une multi-algèbre \mathcal{A} est un réseau sur \mathcal{A} vérifiant $N^{xy} \in \mathcal{B}$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$.

Définition 4.2.33. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et N un réseau sur \mathcal{A} .

- Le réseau N est dit *cohérent* (pour \mathcal{F}) s’il existe une famille $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ satisfaisant $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$, pour tous $x, y \in \mathbf{E}$.
- La famille $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}}$ est qualifiée de *solution* de N (pour \mathcal{F}).
- Le réseau N est dit *incohérent* (pour \mathcal{F}) s’il n’est pas cohérent (pour \mathcal{F}).

Par exemple, une solution du scénario de la figure 4.2 (pour le formalisme TPC_p) est l’évolution représentée dans la figure 3.2a.

Remarquons que la définition 4.2.18 de formalisme séquentiel induit les deux propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 4.2.34. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel. Soient N et N' deux réseaux sur \mathcal{A} . Nous avons les deux propriétés suivantes :*

- *Le réseau N est cohérent si et seulement s'il contient un scénario S cohérent.*
- *Si $N \subseteq N'$, alors toute solution de N est une solution de N' .*
- *Si $N \subseteq N'$, alors la cohérence de N implique la cohérence de N' .*

Démonstration. Soient S un scénario et N un réseau sur la même multi-algèbre, avec $S \subseteq N$. Supposons que S est cohérent. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{E}$, il existe $u_x \in \mathcal{U}$ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, $(u_x, u_y) \in \varphi(S^{xy})$. Or, $\varphi(S^{xy}) \subseteq \varphi(N^{xy})$, car $S^{xy} \subseteq N^{xy}$ (lemme 4.2.25). Par conséquent, N est cohérent. Inversement, supposons N cohérent. Il existe en conséquence $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{E}$ $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$. Or $\varphi(N^{xy}) = \bigcup_{B \in N^{xy}} \varphi(B)$, donc il existe $B(x, y) \in N^{xy}$ telle que $(u_x, u_y) \in \varphi(B(x, y))$. Ainsi, le scénario S défini par $S^{xy} = B(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, qui est un scénario de N ($S \subseteq N$), est bien cohérent.

Nous prouvons maintenant la deuxième assertion de la proposition. Nous supposons que $N \subseteq N'$. Soit $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ une solution de N . Nous avons, pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$. Puisque $N \subseteq N'$, $N^{xy} \subseteq (N')^{xy}$ et donc $\varphi(N^{xy}) \subseteq \varphi(N')^{xy}$ (lemme 4.2.25). Par conséquent, pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, $(u_x, u_y) \in \varphi(N')^{xy}$. Ainsi, $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$ est une solution de N' .

Nous prouvons la troisième assertion. Nous supposons que $N \subseteq N'$ et que N est cohérent. Le réseau N possède donc une solution $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{U}$. Par la deuxième assertion, cette solution est une solution de N' . Par conséquent, N' est cohérent. \square

Nous généralisons maintenant les autres notions du cadre classique des formalismes qualitatifs.

Définition 4.2.35. Soit N un réseau sur une multi-algèbre.

- N est dit *trivialement incohérent* si $\exists i \in \{1, \dots, m\} \exists x, y \in \mathbf{E} \quad N_i^{xy} = \emptyset$.
- N est dit *algébriquement clos* si :
 - N est *clos par composition*, c'est-à-dire que $N^{xz} \subseteq N^{xy} \odot N^{yz}$ pour tous $x, y, z \in \mathbf{E}$;
 - N est *clos par projection*, c'est-à-dire que $N^{xy} = \uparrow N^{xy}$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$.
- N est dit *algébriquement cohérent* s'il est algébriquement clos et non trivialement incohérent.
- N est dit *\odot -cohérent*, si chaque N_i est algébriquement cohérent (clos par composition et non trivialement incohérent).

Définition 4.2.36. Soit N un réseau sur une multi-algèbre finie.

La *clôture algébrique de N* est le réseau (algébriquement clos) obtenu en appliquant les opérations suivantes³ :

$$\begin{aligned} N^{xz} &\leftarrow \uparrow N^{xz} \\ N^{xz} &\leftarrow N^{xz} \cap (N^{xy} \odot N^{yz}) \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in \mathbf{E}$, jusqu'à atteindre un point fixe.

Pour un réseau sur une multi-algèbre, être « algébriquement clos » consiste à être clos à la fois par composition *et* par projection. On peut l'imposer en clôturant alternativement chaque relation N^{xy} par projection et chaque tranche N_i par composition jusqu'à atteindre un point fixe. Cela généralise proprement le cadre classique, puisque toute relation d'une mono-algèbre est close par projection (par vacuité : il n'y a pas de projection). De plus, la notion de clôture algébrique pour une multi-algèbre généralise à m formalismes la bi-clôture algébrique des intégrations lâches de deux formalismes (Gerevini et Renz, 2002). Le fait que la clôture algébrique d'un réseau soit algébriquement cohérente est une condition nécessaire à la cohérence de ce réseau, puisque les opérateurs sont corrects (le raisonnement est correct).

Proposition 4.2.37. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel, N un réseau sur \mathcal{A} et \tilde{N} la clôture algébrique de N . Nous avons les deux propriétés suivantes :*

3. On n'affine pas N^{xz} s'il y a une contrainte explicite $z r x$ dans \mathcal{C} , pour que le réseau reste normalisé.

- $\tilde{N} \subseteq N$.
- Toute solution de N est une solution de sa clôture algébrique \tilde{N} .
- Toute solution de \tilde{N} est une solution de N .
- N est cohérent si et seulement si sa clôture algébrique \tilde{N} est cohérente.
- Si N est trivialement incohérent, alors N est incohérent.

Démonstration. Nous prouvons les trois points de la proposition.

1. Nous avons $\tilde{N} \subseteq N$, puisque $\uparrow R \subseteq R$ et $R \cap (R' \odot R'') \subseteq R$ pour tous $R, R', R'' \in \mathcal{A}$ (définitions 4.2.36 et 4.2.15).
2. Soit $\{u_x\}_{x \in E} \subseteq \mathcal{U}$ une solution de N . Nous avons $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$ pour tous $x, y \in E$. Or $(u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$ pour tous $x, y \in E$ implique que $(u_x, u_y) \in \varphi(\tilde{N}^{xy})$ pour tous $x, y \in E$, avec \tilde{N} la clôture algébrique de N , car $x R y \wedge y R' z \wedge x R'' z \implies x (R \odot R') \cap R'' z$ et $x R y \implies x \uparrow R y$, pour tous $x, y, z \in \mathcal{U}$ et tous $R, R', R'' \in \mathcal{A}$ (proposition 4.2.26). Ainsi, $\{u_x\}_{x \in E}$ une solution de \tilde{N} .
3. Soit $\{u_x\}_{x \in E} \subseteq \mathcal{U}$ une solution de \tilde{N} . Puisque $\tilde{N} \subseteq N$, $\{u_x\}_{x \in E}$ est une solution de N (proposition 4.2.34).
4. La quatrième assertion découle directement des deux précédentes.
5. Soit N' un réseau trivialement incohérent. Il existe donc $i \in \{1, \dots, m\}$ et $x, y \in E$ tels que $(N')_i^{xy} = \emptyset$. Considérons sa clôture algébrique N . Celle-ci vérifie la propriété $N^{xy} = (\emptyset, \dots, \emptyset)$, car

$$N_j^{xy} = (N')_j^{xy} \cap \uparrow_i^j (N')_i^{xy} = (N')_j^{xy} \cap \uparrow_i^j \emptyset = (N')_j^{xy} \cap \emptyset = \emptyset$$

pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ distinct de i (définitions 4.2.15 et 4.2.7). Ainsi, étant donné que \mathcal{F} est un formalisme séquentiel (définition 4.2.18), nous avons $\varphi(N^{xy}) = \emptyset$. N est donc incohérent (définition 4.2.33). Par la première assertion de cette proposition, N' est donc incohérent. □

On peut donc utiliser la clôture algébrique pour filtrer des réseaux incohérents, en plus d'inférer de nouvelles connaissances. Si clore algébriquement un réseau N donne un réseau trivialement incohérent, N est nécessairement incohérent.

Exemple 4.2.38. Le réseau N sur STC de la figure 4.3a est algébriquement cohérent. Cependant, si on retire la relation « = » de N_{PA}^{xy} , le réseau n'est plus algébriquement clos car il n'est plus clos par projection, puisque $\{\overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\} \not\subseteq \uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} \{>\}$ (tableau 3.1). En outre, même si N est algébriquement cohérent et bien que N_{PA} et N_{RCA_8} soient cohérents, N est en fait incohérent. En effet, d'une part « = » de N_{PA}^{xy} n'appartient à aucun scénario cohérent de N_{PA} (voir exemple 2.7). D'autre part, $\overline{\text{NTPP}}$ de N^{xy} n'est pas non plus réalisable, car elle n'appartient à aucun scénario cohérent de N_{RCA_8} . La seule relation basique restante, $x (\text{EQ}, >) y$, est incohérente, puisque sa clôture par projection est la relation vide (\emptyset, \emptyset) .

Cependant, en ajoutant DC à $N_{\text{RCA}_8}^{yz}$, le réseau reste algébriquement cohérent, mais devient cohérent. La figure 4.3b montre un de ses scénarios cohérents.

Notons que puisque le raisonnement est correct, tout scénario cohérent est algébriquement clos.

Proposition 4.2.39. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et S un scénario sur \mathcal{A} .

Si S est cohérent alors S est algébriquement clos.

Démonstration. Soit S un scénario cohérent. Sa clôture algébrique S' est donc cohérente (proposition 4.2.37). Ainsi, $\forall i \forall x, y \ S'_i \neq \emptyset$ (proposition 4.2.37). Étant donné que $S' \subseteq S$ (définition 4.2.35), que S est basique et que S' est non trivialement incohérent, nous avons $S = S'$. Ainsi, S est algébriquement clos. □

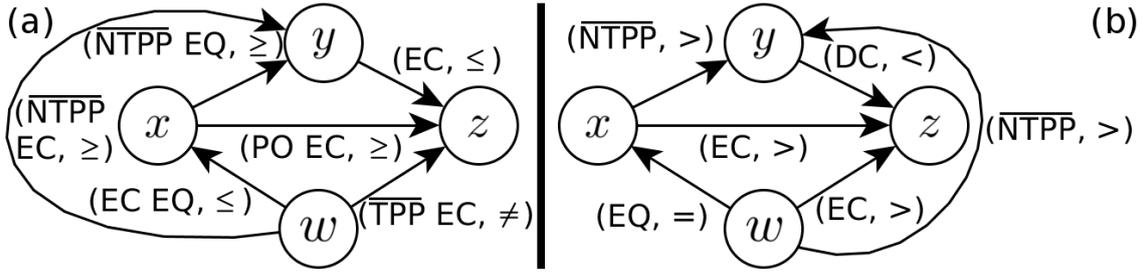


FIGURE 4.3 – (a) un réseau sur STC algébriquement cohérent, mais néanmoins incohérent ; (b) un scénario cohérent sur STC

Si nous avons la réciproque de cette proposition, c'est-à-dire si tout scénario algébriquement clos est cohérent, nous pouvons décider algébriquement la cohérence d'un réseau. Il suffit pour cela de chercher un scénario algébriquement clos parmi ses scénarios (proposition 4.2.34). Tout formalisme séquentiel satisfaisant cette propriété est dit *complet*. Sous cette hypothèse, nous obtenons le résultat de complexité suivant :

Proposition 4.2.40. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents.*

La décision de la cohérence des réseaux sur \mathcal{A} est dans NP.

Démonstration. Par les propositions 4.2.39 et 4.2.34, un réseau N est cohérent si et seulement s'il contient un scénario algébriquement clos S . Ce scénario constitue un *certificat* de la cohérence de ce réseau. En effet, d'une part, vérifier qu'un scénario S de la multi-algèbre est un scénario de N (c'est-à-dire que $S \subseteq N$) et qu'il est algébriquement clos s'effectue en temps polynomial. D'autre part, tout scénario de la multi-algèbre est de taille polynomiale par rapport à N . La décision de la cohérence est donc dans NP. \square

Pour chercher un scénario algébriquement clos au sein d'un réseau, afin de décider s'il est cohérent, des techniques de *séparation et évaluation (branch and bound)* peuvent être utilisées. On peut par exemple adapter les techniques du cadre classique (Ladkin et Reinefeld, 1992; Nebel, 1997)

4.3 Traitabilité de la décision de la cohérence

Dans cette section, nous étudions la traitabilité du problème de décision de la cohérence des réseaux sur des multi-algèbres. Le problème étant NP-complet pour de nombreux formalismes, nous procédons comme dans le cadre classique : nous nous concentrons sur des sous-ensembles de multi-algèbres, et en particulier sur des *sous-classes*. Nous étudions d'abord la cohérence des relations \bar{r} -cohérentes, indispensable pour que la clôture algébrique permette de décider la cohérence. Nous présentons ensuite deux théorèmes fournissant des conditions sur une sous-classe qui suffisent à garantir la cohérence de ses réseaux algébriquement cohérents. Les sous-classes vérifiant ces conditions sont en particulier *traitables*. Par la suite, nous nous intéressons à des conditions plus fortes qui permettent de vérifier aisément les hypothèses des théorèmes. Nous étudions également une technique qui nous permet de contourner, dans certains cas, la non-satisfaction des hypothèses des théorèmes. Pour conclure, nous résumons ces résultats au sein de deux corollaires dont les conditions sont plus aisément vérifiables et nous les illustrons en retrouvant les résultats connus de la combinaison taille-topologie STC.

4.3.1 Sous-classes algébriquement traitables

Nous commençons par introduire deux types de sous-ensembles de multi-algèbres, adaptés du cas classique, à savoir les *sous-classes* et les *sous-algèbres*.

Définition 4.3.1. Une *sous-classe* d'une multi-algèbre \mathcal{A} est un ensemble de relations $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ qui est clos par composition, intersection et inversion.

Si \mathcal{S} contient toutes les relations basiques (c'est-à-dire que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$), elle est qualifiée de *sous-algèbre*.

Par exemple, $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$ – avec $\hat{\mathcal{H}}_8$ une des sous-algèbres maximales traitables de RCC_8 (voir la section 2.4.4) – est une sous-algèbre de la multi-algèbre STA de STC (dont le produit cartésien est $\text{RCA}_8 \times \text{PA}$). Rappelons que les sous-algèbres sont des sous-classes particulièrement intéressantes puisque tous les scénarios d'une multi-algèbre sont des scénarios de ses sous-algèbres.

La notion suivante de *tranche* d'un sous-ensemble d'une multi-algèbre est en quelque sorte un opérateur réciproque du produit cartésien. Elle va nous permettre d'hériter certains résultats de traitabilité du cadre classique vers celui des multi-algèbres.

Définition 4.3.2. La *i-ème tranche* d'un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre \mathcal{A} , notée \mathcal{S}_i ou encore $\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}$, est le sous-ensemble de \mathcal{A}_i défini par $\mathcal{S}_i = \{R_i \mid R \in \mathcal{S}\}$.

Remarquons que \mathcal{S} est toujours un sous-ensemble de $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$, le produit cartésien de ses tranches.

Rappelons également que, comme dans le cadre classique, nous pouvons utiliser la clôture algébrique pour détecter des réseaux incohérents. Elle fournit une procédure de décision de la cohérence qui est polynomiale et correcte (voir la section 4.2.6), mais incomplète. Notre objectif dans cette section est d'identifier des sous-classes pour lesquelles la procédure est complète.

Définition 4.3.3. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre d'un formalisme séquentiel est dit *algébriquement traitable* lorsque, pour tout réseau N sur \mathcal{S} , N est cohérent si et seulement si la clôture algébrique de N n'est pas trivialement incohérente.

Pour qu'un sous-ensemble soit algébriquement traitable, une condition nécessaire fondamentale est que *ses scénarios* algébriquement clos soient cohérents; c'est en quelque sorte le cas de base, qui dépend de la fonction d'interprétation du formalisme séquentiel. Notons que, lorsque tous les scénarios algébriquement clos d'un formalisme sont cohérents, une procédure de recherche de scénarios algébriquement clos, par séparation et évaluation utilisant la clôture algébrique, permet de décider la cohérence de tout réseau (par la proposition 4.2.34; voir la section 2.4.3).

On pourrait penser que si tous les réseaux algébriquement cohérents sur une sous-classe \mathcal{S} sont cohérents, alors \mathcal{S} est algébriquement traitable. Ce n'est cependant pas suffisant car, contrairement au cadre classique, la clôture algébrique d'un réseau N sur une sous-classe \mathcal{S} n'est pas nécessairement sur \mathcal{S} , et la condition n'impose donc rien sur la cohérence de N . Cette condition est en revanche suffisante dans les cas où la clôture par projection de n'importe quelle relation de \mathcal{S} reste dans \mathcal{S} . Plus formellement :

Définition 4.3.4. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre finie est dit *\uparrow -clos* si $\forall R \in \mathcal{S} \quad \uparrow R \in \mathcal{S}$.

Proposition 4.3.5. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel.

Une sous-classe de \mathcal{A} \uparrow -close sur laquelle les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents est algébriquement traitable.

Démonstration. Soit \mathcal{S} une sous-classe \uparrow -close sur laquelle les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents. Soient N un réseau sur \mathcal{S} et N' la clôture algébrique de N . N' est sur \mathcal{S} puisque \mathcal{S} est une sous-classe \uparrow -close. Nous avons deux possibilités :

- Soit N' est trivialement incohérent. Dans ce cas, N' est incohérent (proposition 4.2.37). Par conséquent, N est incohérent (proposition 4.2.37).
- Soit N' est non trivialement incohérent. N' est donc algébriquement cohérent et ainsi cohérent. Par conséquent, N est cohérent, puisque $N' \subseteq N$ (proposition 4.2.34).

Ainsi, pour tout N sur \mathcal{S} , N est cohérent si et seulement si la clôture algébrique de N n'est pas trivialement incohérente. Par conséquent, \mathcal{S} est algébriquement traitable. \square

Le lemme suivant donne des exemples de sous-classes $\bar{\Gamma}$ -closes (voir la section 2.4.4 pour leurs définitions).

Lemme 4.3.6. *Les sous-classes de STC suivantes :*

- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8} \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$,
- $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$,
- $\mathcal{Q}_8 \times \text{PA}$ et
- $\mathcal{C}_8 \times \text{PA}$

sont $\bar{\Gamma}$ -closes.

En particulier, soit $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ une de ces sous-classes, nous avons les propriétés suivantes :

- pour tout $r \in \mathcal{S}$, $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \mathcal{S}'$;
- pour tout $r' \in \mathcal{S}'$, $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r' \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Nous allons montrer que ces sous-classes de la forme $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ sont $\bar{\Gamma}$ -closes, en montrant les deux propriétés suivantes : $\forall r \in \mathcal{S} \quad \bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \mathcal{S}'$ et $\forall r' \in \mathcal{S}' \quad \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r' \in \mathcal{S}$. En effet, par ces propriétés, clore une relation $R \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ par projection donne une relation (r, r') telle que $r \in \mathcal{S}$ et $r' \in \mathcal{S}'$ et ainsi $\bar{\Gamma} R = (r, r') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}'$. Par conséquent, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ est en effet $\bar{\Gamma}$ -close.

Nous commençons par vérifier que pour tout $r \in \text{PA}$, nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ ($\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ est décrite dans la table 2.10) :

- $\bar{\Gamma}\{<\} = \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \text{NTPP}\} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$;
- $\bar{\Gamma}\{=\} = \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{EQ}\} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$;
- $\bar{\Gamma}\{<, =\} = \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \text{NTPP}, \text{EQ}\} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$;
- $\bar{\Gamma}\{<, >\} = \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$;
- $\bar{\Gamma}\mathcal{B}_{\text{PA}} = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$;
- comme les sous-classes sont closes par inversion, par la définition des projections ($\bar{\Gamma} \bar{b} = \overline{\bar{\Gamma} b}$), nous avons le même résultat pour les relations inverses.

Ainsi, nous avons la satisfaction de $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ pour tout $r \in \text{PA}$, et donc en particulier pour tout $r \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$.

Pour montrer que pour tout $r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$, il suffit de montrer que pour toute relation r de $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$, nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \neq \{<, =\}$ et $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \neq \{=, >\}$. Il n'y a que trois relations de RCC_8 satisfaisant $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r = \{<, =\}$. Ce sont $\{\text{TPP}, \text{EQ}\}$, $\{\text{NTPP}, \text{EQ}\}$ et $\{\text{TPP}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}$ (puisque $\{>\} \in \bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r$ si et seulement si $r \cap \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \neq \emptyset$), et elles ne sont pas dans $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$. Par symétrie, il n'y a que trois relations de RCC_8 satisfaisant $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r = \{=, >\}$, à savoir $\{\overline{\text{TPP}}, \text{EQ}\}$, $\{\overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\}$ et $\{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\}$, et elles ne sont pas dans $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$.

Ainsi, pour tout $r \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$, nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ et pour tout $r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$, nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$: $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8} \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ est $\bar{\Gamma}$ -close.

Nous nous intéressons maintenant aux autres sous-classes :

- D'une part, à partir de la table 2.11, pour tout $r \in \text{PA}$, nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \hat{\mathcal{H}}_8$, $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \mathcal{Q}_8$ et $\bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \in \mathcal{C}_8$ (en particulier car $\text{PO} \in \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r$, $\text{NTPP} \in \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \implies \text{TPP} \in \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r$ et $\overline{\text{NTPP}} \in \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r \implies \overline{\text{TPP}} \in \bar{\Gamma}_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r$).
- D'autre part, pour tout $r \in \text{RCA}_8$, et donc, en particulier, pour tout r de $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{Q}_8 et \mathcal{C}_8 , nous avons $\bar{\Gamma}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \text{PA}$.

Ainsi, les sous-classes $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$, $\mathcal{Q}_8 \times \text{PA}$ et $\mathcal{C}_8 \times \text{PA}$ sont $\bar{\Gamma}$ -closes. \square

La question qui se pose à présent est la suivante : étant donnée une sous-classe $\bar{\Gamma}$ -close, sous quelles conditions a-t-on la garantie que les réseaux algébriquement cohérents de cette sous-classe soient cohérents ? Une première condition, évidente, est la cohérence des relations $\bar{\Gamma}$ -cohérentes.

4.3.2 Cohérence des relations $\bar{\Gamma}$ -cohérentes

Nous nous intéressons donc, dans cette section, à des conditions qui assurent que les relations $\bar{\Gamma}$ -cohérentes d'une multi-algèbre soient cohérentes. Il faut pour cela que les relations *basiques* closes par projection soient cohérentes. Cette condition n'est cependant pas suffisante. Intuitivement,

ce qui peut compromettre la cohérence est le fait qu'il y ait trop d'interdépendances entre les formalismes de la combinaison. Inversement, si les interdépendances sont suffisamment faibles, la cohérence peut être garantie. Par exemple, les interdépendances de TPC_p sont faibles, au sens où elles n'imposent de restriction qu'entre instants voisins – le passé ne contraint pas le futur lointain. Pour définir formellement cette idée, nous commençons par introduire l'opérateur réciproque d'une projection, qui décrit les interdépendances de cette projection dans le sens inverse.

Définition 4.3.7. Soit un opérateur de projection ρ_i^j d'une algèbre non associative finie \mathcal{A}_i vers une autre algèbre non associative finie \mathcal{A}_j .

L'opérateur de projection réciproque ι_i^j de l'opérateur ρ_i^j est l'opérateur de projection de \mathcal{A}_j vers \mathcal{A}_i défini par

$$\forall b \in \mathcal{B}_i \ \forall b' \in \mathcal{B}_j \quad b \subseteq \iota_i^j b' \iff b' \subseteq \rho_i^j b.$$

Par exemple, pour SPC^m (exemple 4.2.13), la projection réciproque de ρ_i^j est simplement l'opérateur de projection ρ_j^i . Notons cependant que la propriété $\rho_i^j b = \iota_j^i b$ n'est pas vérifiée par les projections de toutes les multi-algèbres (nous verrons dans la section 4.3.6 l'intérêt de telles multi-algèbres).

Nous allons maintenant pouvoir formaliser le fait que les interdépendances ne soient pas « trop fortes » au sein d'une multi-algèbre, en imposant qu'elles possèdent une structure arborescente.

Définition 4.3.8. Une *anti-arborescence* \mathbf{A} sur un ensemble V est un graphe orienté (V, E) tel qu'il existe un nœud particulier $r \in V$, appelé *racine*, vérifiant que pour tout nœud $v \in V$, distinct de r , il existe un unique chemin de v vers r , c'est-à-dire qu'il existe un unique $K \geq 2$ et une unique famille $\{v_k\}_{k=1}^K \subseteq V$ telle que $v_1 = v$, $v_K = r$, et pour tout $k \in \{1, \dots, K-1\}$, $(v_k, v_{k+1}) \in E$.

Nous notons $v \xrightarrow{\mathbf{A}} v'$ lorsqu'il y a un arc du nœud v vers le nœud v' dans \mathbf{A} , c'est-à-dire lorsque $(v, v') \in E$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous le notons plus simplement $v \rightarrow v'$.

Ainsi, l'idée de la définition suivante est qu'en retirant les interdépendances redondantes, on obtient une structure arborescente, ce qui implique que les interdépendances sont locales et n'entrent pas en conflit. L'intégralité des interdépendances s'exprime alors par les projections de l'arborescence.

Définition 4.3.9. Soit \mathcal{A} une multi-algèbre finie de produit cartésien $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$.

Une anti-arborescence *plénière* de \mathcal{A} est une anti-arborescence \mathbf{A} sur $\{1, \dots, m\}$ telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, avec $i = k_0 \rightarrow \dots \rightarrow k_s \leftarrow \dots \leftarrow k_{s+t+1} = j$ la plus courte chaîne orientée entre i et j dans \mathbf{A} , la propriété suivante soit vérifiée :

$$\forall b \in \mathcal{B}_i \quad \rho_i^j b \supseteq \iota_j^{k_{s+t}} \dots \iota_{k_{s+1}}^{k_s} \rho_{k_{s-1}}^{k_s} \dots \rho_i^{k_1} b$$

La multi-algèbre \mathcal{A} est dite *arborescente* si elle possède une anti-arborescence plénière.

La condition imposée par cette définition décrit qu'entre deux algèbres \mathcal{A}_i et \mathcal{A}_j , la composition des projections de l'arborescence impose des interdépendances au moins aussi fortes que la projection ρ_i^j . On peut donc, en quelque sorte, se passer de ρ_i^j : les projections de l'anti-arborescence plénière résument les interdépendances.

Exemple 4.3.10. La multi-algèbre de TPC_p est bien arborescente, avec pour anti-arborescence plénière l'ordre temporel des instants : $\mathbf{A} = (\{1, \dots, m\}, E)$ avec $E = \{(i, i+1) \mid i \in \{1, \dots, m-1\}\}$. En effet, la projection vers un instant voisin est identique qu'il soit futur ou passé ($\rho_i^{i+1} r = \rho_{i+1}^i r = \iota_i^{i+1} r$ pour tout $r \in \text{PA}$), et les projections vers tous les autres instants donnent \mathcal{B} ($\rho_i^j r = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ pour tout $r \in \text{PA}$ lorsque $|i-j| > 1$), ce qui signifie qu'il n'y a aucune interdépendance directe. Plus précisément, nous avons $\rho_i^{i+1} b \supseteq \rho_i^{i+1} b$, $\rho_{i+1}^i b \supseteq \iota_i^{i+1} b$ puisque $i \rightarrow i+1$ et $\rho_i^j b = \mathcal{B}_{\text{PA}} \supseteq \iota_j^{k_{s+t}} \dots \iota_{k_{s+1}}^{k_s} \rho_{k_{s-1}}^{k_s} \dots \rho_i^{k_1} b$ si $|i-j| > 1$. Ainsi, l'inclusion de cette définition est vérifiée pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts. Pour résumer, dans cet exemple, les interdépendances ne sont pas fortes, car la projection entre des instants éloignés contraint moins que la composition des projections des instants voisins intermédiaires.

Remarquons également que les multi-algèbres des intégrations lâches de *deux* formalismes sont toutes arborescentes, car $\overset{j}{r} b = \downarrow_j^i b$ pour tout $b \in \mathcal{B}$. L'intégration STC (exemple 4.2.23) est ainsi en particulier arborescente.

En fait, puisque les projections de l'arborescence plénière expriment toutes les interdépendances, être clos par projection pour ces projections implique d'être clos par projection pour toute les projections.

Lemme 4.3.11. *Soient \mathcal{A} une multi-algèbre finie arborescente, \mathcal{A} une de ses anti-arborescences plénières et B une de ses relations basiques.*

Si pour tout couple (k, ℓ) , nous avons $k \rightarrow \ell \implies B_\ell \subseteq \overset{\ell}{r}_k B_k$, alors B est close par projection (nous avons $B_j \subseteq \overset{j}{r}_i B_i$ pour chaque paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$).

Démonstration. Nous supposons que si $k \rightarrow \ell$ alors nous avons $B_\ell \subseteq \overset{\ell}{r}_k B_k$ et nous montrons que pour chaque paire $\{i, j\}$, nous avons $B_j \subseteq \overset{j}{r}_i B_i$.

Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et $i = k_0 \rightarrow \dots \rightarrow k_s \leftarrow \dots \leftarrow k_{s+t+1} = j$ la plus courte chaîne entre i et j dans l'anti-arborescence \mathcal{A} . Étant donné que $i = k_0 \rightarrow k_1$, nous avons $B_{k_1} \subseteq \overset{k_1}{r}_{k_0} B_{k_0}$. Plus généralement, puisque $k_p \rightarrow k_{p+1}$, nous avons $B_{k_{p+1}} \subseteq \overset{k_{p+1}}{r}_{k_p} B_{k_p}$ pour $p \in \{0, \dots, s-1\}$. Étant donné que les opérateurs de projection sont croissants pour l'inclusion (lemme 4.2.9), nous avons $\overset{k_2}{r}_{k_1} B_{k_1} \subseteq \overset{k_2}{r}_{k_1} (\overset{k_1}{r}_i B_i)$. Par transitivité, $B_{k_2} \subseteq \overset{k_2}{r}_{k_1} (\overset{k_1}{r}_i B_i)$, puisque $B_{k_2} \subseteq \overset{k_2}{r}_{k_1} B_{k_1}$. De manière analogue, nous avons $\overset{k_3}{r}_{k_2} B_{k_2} \subseteq \overset{k_3}{r}_{k_2} (\overset{k_2}{r}_{k_1} (\overset{k_1}{r}_i B_i))$, et ainsi $B_{k_3} \subseteq \overset{k_3}{r}_{k_2} (\overset{k_2}{r}_{k_1} (\overset{k_1}{r}_i B_i))$ puisque $B_{k_3} \subseteq \overset{k_3}{r}_{k_2} B_{k_2}$. Par récurrence, nous déduisons ainsi $B_{k_s} \subseteq \overset{k_s}{r}_{k_{s-1}} \dots \overset{k_1}{r}_i B_i$.

De plus, comme $k_s \leftarrow k_{s+1}$, nous avons $B_{k_s} \subseteq \overset{k_s}{r}_{k_{s+1}} B_{k_{s+1}}$, et donc $B_{k_{s+1}} \subseteq \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} B_{k_s}$ (car $\downarrow_{k_{s+1}}^{k_s}$ est la projection réciproque de $\overset{k_s}{r}_{k_{s+1}}$; définition 4.3.7). Par croissance (lemme 4.2.9), nous avons $\downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} (B_{k_s}) \subseteq \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} (\overset{k_s}{r}_{k_{s-1}} \dots \overset{k_1}{r}_i B_i)$. Par transitivité, nous déduisons $B_{k_{s+1}} \subseteq \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} (\overset{k_s}{r}_{k_{s-1}} \dots \overset{k_1}{r}_i B_i)$. Par une récurrence analogue, nous prouvons que $B_j \subseteq \downarrow_j^{k_{s+t}} \dots \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} \overset{k_s}{r}_{k_{s-1}} \dots \overset{k_1}{r}_i B_i$, puisque $B_{k_{s+p+1}} \subseteq \downarrow_{k_{s+p+1}}^{k_{s+p}} B_{k_{s+p}}$ pour tout $0 \leq p \leq t$.

Comme \mathcal{A} est une anti-arborescence plénière de \mathcal{A} , nous savons par définition que

$$\downarrow_j^{k_{s+t}} \dots \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} \overset{k_s}{r}_{k_{s-1}} \dots \overset{k_1}{r}_i B_i \subseteq \overset{j}{r}_i B_i.$$

Nous déduisons par transitivité que $B_j \subseteq \overset{j}{r}_i B_i$. Ceci étant vrai pour tous i, j , nous concluons que B est close par projection. \square

De ce fait, ajoutée à la condition nécessaire sur les relations basiques, la condition d'arborescence permet de garantir la cohérence des relations $\overset{\cdot}{r}$ -cohérentes.

Proposition 4.3.12 (Cohen-Solal *et al.*, 2017b). *Soit \mathcal{A} une multi-algèbre arborescente d'un formalisme séquentiel dont les relations basiques closes par projection sont cohérentes; ses relations $\overset{\cdot}{r}$ -cohérentes sont cohérentes.*

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{A}$ une relation $\overset{\cdot}{r}$ -cohérente et soit $\mathcal{A} = (\{1, \dots, m\}, E)$ une de ses anti-arborescences plénières de la multi-algèbre, dont la racine est notée r . Nous allons construire une relation basique $B \subseteq R$ particulière. Soit j tel que $j \rightarrow r$ (c'est-à-dire que $(j, r) \in E$); comme $R_r \subseteq \overset{r}{r}_j R_j$, pour tout $b_r \in R_r$ il existe $b_j \in R_j$ tel que $b_r \subseteq \overset{r}{r}_j b_j$. Si on choisit un des b_r , on peut donc choisir un b_j correspondant, et ce pour tous les j tels que $j \rightarrow r$. Pour un de ces j , considérons maintenant un i tel que $i \rightarrow j$. De la même manière, pour tout $b_j \in R_j$ il existe $b_i \in R_i$ tel que $b_j \subseteq \overset{j}{r}_i b_i$. Ainsi, on peut choisir, pour tous les i tels que $i \rightarrow j$, un b_i correspondant au b_j choisi précédemment – et ce pour tous les j considérés précédemment. On peut répéter ce processus en parcourant toute l'anti-arborescence afin d'obtenir une relation basique $B = (b_1, \dots, b_m)$ vérifiant la propriété suivante : pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$, si $i \rightarrow j$ alors $B_j \subseteq \overset{j}{r}_i B_i$. Ainsi, par le lemme 4.3.11, B est close par projection. Comme B est basique, elle est donc cohérente, par hypothèse. Par conséquent, puisque $B \subseteq R$, nous concluons que R est cohérente (proposition 4.2.28). \square

Ainsi, les relations $\dot{\Gamma}$ -cohérentes de TPC_p et STC sont cohérentes, puisque leurs multi-algèbres sont arborescentes. Pour ces formalismes, clore une relation par projection suffit à décider sa cohérence. Nous avons le même résultat pour SPC^m (voir l'exemple 4.2.24) : une de ses anti-arborescences plénières correspond à l'ordre de finesse des échelles. Cependant, si nous généralisons ce cadre en considérant que les échelles ne sont pas totalement ordonnées par \preceq , nous perdons en général ce résultat. La multi-algèbre de SPC^m généralisé est alors arborescente lorsque les échelles forment un ordre partiel arborescent pour la relation de finesse. Autrement dit, la multi-algèbre est arborescente lorsque pour tout couple d'échelles (g, g') tel que g n'est pas plus fine que g' et g' n'est pas plus fine que g , il n'existe aucune échelle considérée g'' qui soit plus grossière, c'est-à-dire moins fine, que ces deux échelles à la fois. C'est notamment le cas du calendrier grégorien.

Nous avons identifié des conditions pour que les relations $\dot{\Gamma}$ -cohérentes soient cohérentes. Cependant, ces conditions ne sont évidemment pas suffisantes pour assurer la cohérence des réseaux algébriquement cohérents. Dans la suite, nous proposons donc deux théorèmes complémentaires identifiant des conditions assurant la traitabilité algébrique. Le premier théorème nous donne des conditions pour qu'une sous-algèbre hérite la traitabilité de ses tranches, alors que le deuxième théorème nous donne des conditions pour que la traitabilité soit héritée d'un autre sous-ensemble par affinement.

4.3.3 Héritage de la traitabilité par découpage

Dans cette section, nous nous intéressons à des conditions assurant qu'une sous-algèbre \mathcal{S} soit traitable en nous appuyant sur la traitabilité de chacune de ses tranches \mathcal{S}_i . Une de ces conditions est que chaque tranche doit être scénarisable par un affinement (définition 4.2.6). En effet, considérons une sous-algèbre \mathcal{S} dont chaque tranche \mathcal{S}_i est scénarisable par un h_i . Une idée naturelle est d'appliquer la technique de scénarisabilité (section 4.2.1.3) en combinant les h_1, \dots, h_m en un affinement sur la multi-algèbre. Nous appelons « multi-affinement » les affinements ayant cette forme spécifique :

Définition 4.3.13. Un *affinement* d'un sous-ensemble d'une multi-algèbre est une fonction $H : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que, pour tout $R \in \mathcal{S}$:

- $H(R) \subseteq R$;
- $H(R)$ est non trivialement incohérente, si R est non trivialement incohérente.

Un affinement H d'un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre est un *multi-affinement* s'il est de la forme $H : R \mapsto (h_1(R_1), \dots, h_m(R_m))$, où chaque h_i est un affinement de \mathcal{S}_i . On note alors $H = (h_1, \dots, h_m)$.

Nous cherchons donc un multi-affinement H tel que \mathcal{S} soit scénarisable par H au sens de la définition suivante, qui généralise celle du cadre classique et qui requiert que \mathcal{S} soit *quasi-clos*.

Définition 4.3.14. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre finie est *quasi-clos* si la clôture algébrique de tout réseau sur \mathcal{S} clos par projection est sur \mathcal{S} .

Une sous-algèbre \mathcal{S} quasi-close d'une multi-algèbre finie est dite *scénarisable par un affinement* H si pour tout réseau algébriquement cohérent N sur \mathcal{S} et pour tous $x, y \in \mathbf{E}$:

- il existe une relation basique $B \in H(N^{xy})$ $\dot{\Gamma}$ -cohérente ;
- pour toute relation $B \in H(N^{xy})$ $\dot{\Gamma}$ -cohérente, il existe un scénario algébriquement clos $S \subseteq N$ tel que $S^{xy} = B$.

Le problème est que même si chaque \mathcal{S}_i est scénarisable par h_i , il n'y a en fait aucune garantie que \mathcal{S} soit scénarisable par le multi-affinement $H = (h_1, \dots, h_m)$, et donc que H permette de trouver un scénario cohérent en appliquant la méthode de « scénarisabilité par h ». Des conditions supplémentaires sont requises pour assurer que les affinements individuels fonctionnent bien ensemble par rapport aux projections. D'une part, l'affinement par H des relations $\dot{\Gamma}$ -cohérentes (définition 4.2.29) doit être cohérent, ce que l'on peut voir comme une sorte de condition de scénarisabilité par H pour les relations. D'autre part, la compatibilité entre l'hypothèse précédente et la scénarisabilité des tranches \mathcal{S}_i requiert la propriété suivante.

Définition 4.3.15. Un réseau est dit *simple* lorsque le clure par projection puis par composition le rend soit algébriquement cohérent, soit trivialement incohérent.

Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre finie est dit *simple* lorsque tout réseau sur \mathcal{S} est simple.

Nous verrons dans la section 4.3.5 que la simplicité d'une sous-classe est facile à établir, notamment grâce aux propriétés de la composition et de la projection.

Remarquons que toute sous-classe simple est nécessairement quasi-close.

Proposition 4.3.16. *Soit \mathcal{S} une sous-classe d'une multi-algèbre finie.*

Si \mathcal{S} est simple, alors \mathcal{S} est quasi-close.

Démonstration. Soit N un réseau sur \mathcal{S} clos par projection. Soit \tilde{N} sa clôture par composition. Le réseau \tilde{N} est sur \mathcal{S} , puisque \mathcal{S} est une sous-classe. Étant donné que \mathcal{S} est simple, soit \tilde{N} est trivialement incohérent, soit \tilde{N} est algébriquement cohérent. Si \tilde{N} est trivialement incohérent, la clôture algébrique de N vérifie $N_i^{xy} = \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tous $x, y \in \mathbf{E}$. Ainsi, la clôture algébrique de N est sur \mathcal{S} (car $\emptyset \in \mathcal{S}$, \mathcal{S} est une sous-classe). Si \tilde{N} est algébriquement cohérent, \tilde{N} est la clôture algébrique de N . Par conséquent, la clôture algébrique de N est sur \mathcal{S} . \square

En utilisant les propriétés précédentes, nous formulons notre premier théorème :

Théorème de découpage (Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b). *Soit \mathcal{S} une sous-algèbre d'un formalisme séquentiel $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$, et soit $H = (h_1, \dots, h_m)$ un multi-affinement de \mathcal{S} . Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (D1) *chaque tranche \mathcal{S}_i est scénarisable par h_i ;*
- (D2) *\mathcal{S} est simple ;*
- (D3) *pour toute relation \uparrow -cohérente R de \mathcal{S} , la relation $H(R)$ est cohérente*

alors \mathcal{S} est scénarisable par H .

Si, en plus, les scénarios algébriquement clos sur \mathcal{A} sont cohérents alors les réseaux algébriquement cohérents sur \mathcal{S} sont cohérents.

*Si, en outre, \mathcal{S} est \uparrow -close, alors \mathcal{S} est algébriquement traitable.*⁴

Démonstration. Soit N un réseau algébriquement cohérent sur \mathcal{S} , et soient x et y des variables telles que N^{xy} n'est pas basique. On sait que $H(N^{xy})$ est cohérente (D3), elle contient donc au moins une relation basique cohérente $B = (b_1, \dots, b_m)$ (proposition 4.2.28), qui est donc en particulier \uparrow -cohérente (proposition 4.2.30). On affine alors N^{xy} par B . De manière évidente, le réseau N modifié, que l'on note N' , est encore clos par projection, et il est toujours sur \mathcal{S} (puisque \mathcal{S} est une sous-algèbre).

D'autre part, puisque chaque tranche N_i du réseau initial est algébriquement cohérente, il existe un scénario algébriquement clos $S_i \subseteq N'_i$ tel que $S_i^{xy} = b_i$ (D1). Par conséquent, la clôture de N' par composition n'est pas trivialement incohérente ; elle est donc algébriquement cohérente, puisque \mathcal{S} est simple (D2) et que N' était déjà clos par projection.

Le résultat est un réseau algébriquement cohérent sur \mathcal{S} . Nous pouvons donc appliquer à nouveau la procédure depuis le début, rendant ainsi itérativement basiques et cohérentes toutes les relations du réseau initial. La procédure finit donc nécessairement avec un scénario algébriquement clos S . Ainsi, \mathcal{S} est scénarisable par H . En effet, d'une part, nous avons montré que pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, il existe une relation basique \uparrow -cohérente $B \in H(N^{xy})$ et que pour chacune des relations basiques B \uparrow -cohérentes de $H(N^{xy})$, il existe un scénario algébriquement clos S tel que $S^{xy} = B$. D'autre part, \mathcal{S} est quasi-close, puisqu'elle est simple (proposition 4.3.16).

Nous supposons maintenant que les scénarios algébriquement clos sur \mathcal{A} sont cohérents. Le scénario algébriquement clos obtenu précédemment, S , est donc cohérent. Par conséquent, puisque $S \subseteq N$, N est cohérent (proposition 4.2.34). Nous avons ainsi prouvé la deuxième conclusion du théorème.

Pour terminer la preuve, nous supposons en plus que \mathcal{S} est \uparrow -close. Par la proposition 4.3.5, nous prouvons la troisième conclusion du théorème. \square

4. C'est une version étendue du théorème de découpage publié dans (Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b). Cette version implique en plus la scénarisabilité par H .

Ce théorème peut être utilisé pour *prouver* la traitabilité d'une sous-algèbre \uparrow -close \mathcal{S} construite à partir de sous-algèbres traitables connues. Il offre aussi une façon très efficace de *décider* la cohérence d'un réseau sur \mathcal{S} , ne nécessitant qu'une clôture par projection suivie d'une clôture par composition. Enfin, la preuve décrit un algorithme efficace pour mettre en œuvre la technique de scénarisabilité par H dans ce contexte spécifique et ainsi déterminer un scénario cohérent d'un réseau sur \mathcal{S} .

4.3.4 Héritage de la traitabilité par affinement vers un sous-ensemble

Dans cette section, nous présentons un autre ensemble de conditions assurant la traitabilité d'une sous-classe \uparrow -close \mathcal{S} . L'idée, inspirée de la technique classique de réduction par affinement (voir la section 2.4.4), consiste à chercher un sous-ensemble \mathcal{S}' dont les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents, ainsi qu'un affinement de \mathcal{S} vers \mathcal{S}' qui préserve la cohérence algébrique des réseaux. Nous appelons *stabilité algébrique par affinement* cette condition de préservation de la cohérence algébrique suite à un affinement :

Définition 4.3.17. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre est *algébriquement stable par un affinement* H si, pour tout réseau algébriquement cohérent N sur \mathcal{S} , le réseau affiné $H(N)$ (obtenu à partir de N en remplaçant simultanément chaque relation N^{xy} par $H(N^{xy})$) est toujours algébriquement cohérent.

Par exemple, $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}} \times \text{PA}$ est algébriquement stable par $H = (h_{\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}}}, h_{\max})$, avec $h_{\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}}}$ l'affinement de $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{S}}$ (définition 2.4.19). Nous montrerons dans la section 4.3.5 que la stabilité, comme la simplicité (définition 2.4.19), peuvent être décidées facilement par énumération.

Notre second théorème formalise le mécanisme de réduction entre sous-ensembles de multi-algèbres.

Théorème d'affinement (Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b). Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel, \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux sous-ensembles de \mathcal{A} , et H un affinement de \mathcal{S} vers \mathcal{S}' . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (A1) \mathcal{S} est algébriquement stable par H ;
- (A2) les réseaux algébriquement cohérents sur \mathcal{S}' sont cohérents ;

alors les réseaux algébriquement cohérents sur \mathcal{S} sont également cohérents.

Si, en plus, \mathcal{S} est une sous-classe \uparrow -close, alors \mathcal{S} est algébriquement traitable.

Démonstration. Soit N un réseau algébriquement cohérent sur \mathcal{S} . Par la condition (A1), le réseau $H(N)$ est algébriquement cohérent. Il est ainsi cohérent, par la condition (A2), puisqu'il est sur \mathcal{S}' . On en déduit que N est également cohérent, puisque $H(N) \subseteq N$ (proposition 4.2.34).

Le deuxième résultat est un corollaire direct du premier (par la proposition 4.3.5). \square

4.3.5 Conditions plus fortes pour la cohérence et propriétés remarquables

Nous nous intéressons maintenant aux moyens permettant de prouver qu'une sous-classe satisfait les hypothèses des théorèmes et est ainsi traitable. Nous allons voir que ces hypothèses sont en fait aisément vérifiables par énumération, grâce aux propriétés des opérateurs.

4.3.5.1 Propriétés des tranches et des bi-tranches

Nous commençons par introduire les restrictions $\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j$ d'une multi-algèbre \mathcal{A} , ainsi que les restrictions de ses sous-classes et de ses réseaux, que nous appelons *bi-tranches*. Les propriétés des bi-tranches et des tranches vont nous permettre d'obtenir des résultats sur les sous-classes de \mathcal{A} .

Définition 4.3.18. Soient \mathcal{A} une multi-algèbre de produit cartésien $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$, \mathcal{S} un sous-ensemble de \mathcal{A} , $N = (\mathbf{E}, \mathbf{C})$ un réseau sur \mathcal{S} , $R \in \mathcal{A}$ et $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints.

La *bi-tranche* $\mathcal{A}_{i,j}$ de \mathcal{A} est la multi-algèbre de produit cartésien $\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j$ dotée des projections \uparrow_i^j et \uparrow_j^i de \mathcal{A} .

La *bi-tranche* $R_{i,j}$ de R est la relation de $\mathcal{A}_{i,j}$ définie par $R_{i,j} = (R_i, R_j)$.

La *bi-tranche* $\mathcal{S}_{i,j}$ de \mathcal{S} est le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{i,j}$ défini par $\{R_{i,j} \mid R \in \mathcal{S}\}$.

La *bi-tranche* $N_{i,j}$ de N est le réseau sur $\mathcal{S}_{i,j}$ défini par $(\mathbf{E}, \mathbf{C}_{i,j})$ avec $\mathbf{C}_{i,j} = \{x R_{i,j} y \mid x R y \in \mathbf{C}\}$.

Remarquons les propriétés suivantes sur les tranches d'une sous-classe.

Proposition 4.3.19. *Soit \mathcal{S} un sous-ensemble d'une multi-algèbre finie. Nous avons les propriétés suivantes :*

- Si \mathcal{S} est une sous-classe alors chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-classe.
- Si \mathcal{S} est une sous-algèbre et si $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m \neq \emptyset$ alors chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-algèbre.
- Si chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-classe alors $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une sous-classe.
- Si chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-algèbre alors $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une sous-algèbre.

Démonstration. Nous supposons que \mathcal{S} est une sous-classe. Nous montrons que chaque \mathcal{S}_i est une sous-classe. Soient $i \in \{1, \dots, m\}$ et $r, r' \in \mathcal{S}_i$. Nous montrons que $r \cap r' \in \mathcal{S}_i$, $r \odot r' \in \mathcal{S}_i$ et $\bar{r} \in \mathcal{S}_i$. Puisque $r, r' \in \mathcal{S}_i$, il existe $R, R' \in \mathcal{S}$ telles que $R_i = r$ et $R'_i = r'$, par la définition de \mathcal{S}_i (définition 4.3.50). Comme \mathcal{S} est une sous-classe, $R \cap R' \in \mathcal{S}$, $R \odot R' \in \mathcal{S}$ et $\bar{R} \in \mathcal{S}$. Par la définition des opérateurs (définition 4.2.14), $(R \cap R')_i = R_i \cap R'_i = r \cap r'$, $(R \odot R')_i = R_i \odot R'_i = r \odot r'$ et $(\bar{R})_i = \bar{R}_i = \bar{r}$. Ainsi, $r \cap r' \in \mathcal{S}_i$, $r \odot r' \in \mathcal{S}_i$ et $\bar{r} \in \mathcal{S}_i$, par la définition de \mathcal{S}_i .

Nous supposons que \mathcal{S} une sous-algèbre. Nous montrons que chaque \mathcal{S}_i est une sous-algèbre. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Puisque \mathcal{S} est une sous-classe, \mathcal{S}_i est une sous-classe. Il nous reste à montrer que pour tout $b \in \mathcal{B}_i$, $b \in \mathcal{S}_i$. Puisque \mathcal{S} est une sous-algèbre, pour tout $B \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m$, $B \in \mathcal{S}$. Soit $b \in \mathcal{B}_i$, il existe $B \in \mathcal{B}$ telle que $B_i = b$. En effet, puisque $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m \neq \emptyset$, il existe $(b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{B}$ et donc $(b_1, \dots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \dots, b_m) \in \mathcal{B}$. Puisque $B \in \mathcal{S}$, $B_i = b \in \mathcal{S}_i$, par la définition de \mathcal{S}_i . Ainsi, \mathcal{S}_i est une sous-algèbre.

Nous supposons que chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-classe, et nous montrons que $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une sous-classe. Soient $R, R' \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $(R \cap R')_i = R_i \cap R'_i \in \mathcal{S}_i$, $(R \odot R')_i = R_i \odot R'_i \in \mathcal{S}_i$ et $(\bar{R})_i = \bar{R}_i \in \mathcal{S}_i$ (car $R_i \in \mathcal{S}_i$, $R'_i \in \mathcal{S}_i$ et \mathcal{S}_i est une sous-classe). Par conséquent, $(R \cap R') \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$, $(R \odot R') \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ et $\bar{R} \in \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$.

Nous supposons que chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-algèbre, et nous montrons que $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une sous-algèbre. Puisque chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-classe, $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ est une sous-classe. Il nous reste à montrer que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, nous avons $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{S}_i$. Nous avons ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$. \square

Remarquons maintenant les propriétés suivantes sur les relations et sur les bi-tranches d'une sous-classe et d'un réseau.

Lemme 4.3.20. *Soit \mathcal{A} une multi-algèbre finie et $R \in \mathcal{A}$. Nous avons les propriétés suivantes :*

- R est close par projection si et seulement si chaque $R_{i,j}$ est close par projection.
- R est $\bar{\cdot}$ -cohérente si et seulement si chaque $R_{i,j}$ est $\bar{\cdot}$ -cohérente.

Démonstration. Nous prouvons la première assertion. Soit $R \in \mathcal{A}$. Nous supposons que R est une relation close par projection. Nous avons, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints, $R_j \subseteq \bar{\cdot}_i^j R_i$ (définition 4.2.15). Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints, $R_j \subseteq \bar{\cdot}_i^j R_i$ et $R_i \subseteq \bar{\cdot}_j^i R_j$. Nous en déduisons par définition que pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints, $R_{i,j} = (R_i, R_j)$ est close par projection (définition 4.3.18).

Supposons maintenant que chaque $R_{i,j}$ est close par projection. Nous avons ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ disjoints, $R_j \subseteq \bar{\cdot}_i^j R_i$ et $R_i \subseteq \bar{\cdot}_j^i R_j$. Nous déduisons directement que R est close par projection.

La seconde assertion découle directement de la première. \square

Proposition 4.3.21. *Soit N un réseau sur une multi-algèbre finie. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- N est clos par projection si et seulement si chaque $N_{i,j}$ est clos par projection.
- N est algébriquement clos si et seulement si chaque $N_{i,j}$ est algébriquement clos.

— N est algébriquement cohérent si et seulement si chaque $N_{i,j}$ est algébriquement cohérent.

Démonstration. Soit N un réseau sur une multi-algèbre. Nous prouvons la première assertion.

Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts. Supposons que N est clos par projection. Pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, N^{xy} est close par projection, et donc $N_{i,j}^{xy}$ est close par projection (lemme 4.3.20). Par conséquent, $N_{i,j}$ est clos par projection. Inversement, supposons que $N_{i,j}$ est clos par projection. Pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, $N_{i,j}^{xy}$ est close par projection, et ainsi N^{xy} est close par projection (lemme 4.3.20). Par conséquent, N est clos par projection.

Les preuves des deux autres assertions sont analogues, et se basent sur le fait que $R \subseteq R' \odot R''$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $R_i \subseteq R'_i \odot R''_i$ (par la définition 4.2.14) et le fait que R est non trivialement incohérente si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $R_i \neq \emptyset$ (définition 4.2.29). \square

4.3.5.2 Sous-classes \uparrow -closes

Nous commençons par la vérification de la \uparrow -clôture de sous-ensembles particuliers.

Proposition 4.3.22. *Soit \mathcal{S} une sous-classe d'une multi-algèbre finie telle que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$.*

Si pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et pour tout $r \in \mathcal{S}_i$, nous avons $\uparrow_i^j r \in \mathcal{S}_j$, alors \mathcal{S} est \uparrow -close.

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{S}$, nous montrons que $\uparrow R \in \mathcal{S}$.

Clore une relation par projection revient à appliquer l'opération d'affinement suivante : $R_j \leftarrow R_j \cap \uparrow_i^j R_i$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts jusqu'à atteindre un point fixe (la relation $\uparrow R$). Soit K le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre ce point fixe et soit R^k l'état de R à l'étape intermédiaire k , nous avons :

$$R_j^{k+1} = R_j^k \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^m \uparrow_i^j R_i^k$$

pour $j \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{1, \dots, K-1\}$ avec $R^1 = R$ et $R^K = \uparrow R$.

Nous prouvons que $R_j^k \in \mathcal{S}_j$ avec $j \in \{1, \dots, m\}$ par récurrence sur $k \in \{1, \dots, K\}$. La propriété est vraie au rang $k = 1$, $R^1 = R \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$ et donc $R_j^1 \in \mathcal{S}_j$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$. Nous supposons la propriété vraie au rang k , $1 \leq k < K$, et nous montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$. Par hypothèse de récurrence, $R_j^k \in \mathcal{S}_j$ est satisfaite et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ distinct de j , $R_i^k \in \mathcal{S}_i$. Ainsi, nous avons la propriété $\uparrow_i^j R_i^k \in \mathcal{S}_j$, par hypothèse de l'énoncé. Nous en déduisons la propriété $R_j^k \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^m \uparrow_i^j R_i^k \in \mathcal{S}_j$. Nous en concluons que $R_j^{k+1} \in \mathcal{S}_j$, puisque si $r \in \mathcal{S}_j$ et $r' \in \mathcal{S}_j$ alors $r \cap r' \in \mathcal{S}_j$ (proposition 4.3.19, puisque \mathcal{S} est une sous-classe).

Ainsi, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $(\uparrow R)_j = R_j^K \in \mathcal{S}_j$. Par conséquent, $\uparrow R \in \mathcal{S}$, puisque $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$. \square

4.3.5.3 Simplicité et distributivité

Nous nous intéressons maintenant à la vérification de la simplicité (définition 4.3.15), pour pouvoir appliquer le théorème de découpage.

Tout d'abord, il est suffisant d'énumérer tous les réseaux à trois variables sur chaque bi-tranche $\mathcal{S}_{i,j}$ pour vérifier qu'une sous-algèbre \mathcal{S} est simple, puisque être clos est une propriété locale.

Proposition 4.3.23. *Soit \mathcal{S} une sous-classe \uparrow -close d'une multi-algèbre finie.*

Si, pour chaque bi-tranche $\mathcal{S}_{i,j}$, tous les réseaux sur $\mathcal{S}_{i,j}$ avec uniquement trois variables sont simples, alors \mathcal{S} est simple.

Démonstration. La preuve de ce résultat vient directement de la définition de la clôture par projection et de la clôture par composition. Rappelons qu'être totalement clos par projection, c'est être clos par projection pour chaque paire $\{i, j\}$, et qu'être totalement clos par composition, c'est être clos par composition pour chaque triplet de variables.

Supposons que les hypothèses soient vérifiées, et considérons un réseau N sur \mathcal{S} . Nous voulons montrer que clore N par projection puis par composition le rend soit trivialement incohérent, soit algébriquement cohérent. Supposons que la clôture de N par projection puis composition ne soit pas trivialement incohérente, et montrons qu'elle est algébriquement cohérente.

On clôt N par projection (N est donc encore sur \mathcal{S} car \mathcal{S} est \uparrow -close). Si ensuite on clôt N localement par composition pour trois variables, chaque bi-tranche $N_{i,j}$ reste close par projection (et N reste sur \mathcal{S}). En effet, $N_{i,j}$ restreint à trois variables est simple (puisque $N_{i,j}$ est sur $\mathcal{S}_{i,j}$) et $N_{i,j}$ est clos par projection (proposition 4.3.21). Comme il ne peut pas être trivialement incohérent après composition par hypothèse, la clôture par composition d'une bi-tranche $N_{i,j}$ restreinte à trois variables est donc algébriquement cohérente et en particulier close par projection. Ainsi, $N_{i,j}$ est clos par projection après une clôture locale de N par composition pour trois variables. Puisque chaque bi-tranche $N_{i,j}$ reste close par projection, c'est le cas de N tout entier (proposition 4.3.21). Nous pouvons donc effectuer d'autres clôtures par composition locales jusqu'à obtenir un réseau entièrement clos par composition. Il restera clos par projection après chaque étape et le sera donc encore à la fin, car N reste sur \mathcal{S} puisque \mathcal{S} est une sous-classe.

En conclusion, si la clôture de N par projection puis par composition n'est pas trivialement incohérente, elle est algébriquement cohérente. Par définition, N est simple. Puisque ce résultat s'applique à tout réseau de \mathcal{S} , cela prouve que \mathcal{S} est simple. \square

Cependant, dans le cadre de formalismes ayant un grand nombre de relations, cette vérification peut ne pas être faisable en temps raisonnable. Nous proposons alors une propriété plus forte, c'est-à-dire impliquant la simplicité, dont la vérification n'est plus que quadratique en fonction du nombre de relations ($(m-1) \cdot \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} |S_i|^2$ au lieu de $\sum_{i, j \in \{1, \dots, m\}, i < j} |S_i|^3 \cdot |S_j|^3$). Cette propriété

est particulièrement remarquable car il s'agit de la sur-distributivité des opérateurs de projection sur la composition et sur l'intersection. Nous qualifions de « \uparrow -distributives » les sous-classes la vérifiant.

Définition 4.3.24. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre est dit \uparrow -distributif s'il vérifie les conditions suivantes pour tous i, j distincts de $\{1, \dots, m\}$:

- \uparrow_i^j est *sur-distributif* par rapport à \odot sur \mathcal{S}_i , c'est-à-dire que pour toutes relations $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_i$ telles que $r_1 \odot r_2 \neq \emptyset$, nous avons la propriété $(\uparrow_i^j r_1) \odot (\uparrow_i^j r_2) \subseteq \uparrow_i^j(r_1 \odot r_2)$;
- \uparrow_i^j est *sur-distributif* par rapport à \cap sur \mathcal{S}_i , c'est-à-dire que pour toutes relations $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_i$ telles que $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$, nous avons la propriété $(\uparrow_i^j r_1) \cap (\uparrow_i^j r_2) \subseteq \uparrow_i^j(r_1 \cap r_2)$.

Remarquons qu'une propriété similaire, la distributivité de la composition sur l'intersection, a déjà été identifiée comme impliquant la traitabilité de sous-algèbres de formalismes classiques (voir la section 2.4.4). Notons que l'opérateur de conversion ascendante de PC (resp. IC ; resp. CPC) est sur-distributif par rapport à \odot et \cap sur \mathcal{S}_{PA} et sur \mathcal{C}_{PA} (resp. \mathcal{S}_{IA} et \mathcal{C}_{IA} ; resp. $\mathcal{C}_{PA} \times \mathcal{C}_{PA}$, $\mathcal{C}_{PA} \times \mathcal{S}_{PA}$, $\mathcal{S}_{PA} \times \mathcal{C}_{PA}$ et $\mathcal{S}_{PA} \times \mathcal{S}_{PA}$), mais que la conversion descendante ne l'est pas (par rapport à la composition), ce qui empêche ces sous-classes d'être \uparrow -distributives (voir en particulier la section 3.4.2).

Du fait que la sur-distributivité de \uparrow_i^j par rapport à \cap et \odot assure que n'importe quelle propagation de la composition préserve la clôture par projection sur les réseaux cohérents, la simplicité est satisfaite.

Proposition 4.3.25 (Cohen-Solal *et al.*, 2017b). *Toute sous-classe d'une multi-algèbre finie \uparrow -close et \uparrow -distributive est simple.*

Démonstration. Soit \mathcal{S} une sous-classe \uparrow -close et \uparrow -distributive. Par la proposition 4.3.23, il suffit de prouver que chaque sous-classe $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ est simple. Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et soit N' un réseau sur $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$; nous allons montrer que N' est simple grâce à la \uparrow -distributivité. Remarquons d'abord que comme $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ est une sous-classe \uparrow -close, appliquer les opérateurs ne fait pas sortir de la sous-classe, ce qui assure que la propriété de \uparrow -distributivité est toujours satisfaite. Soit N la clôture de N' par projection. Supposons que la clôture par composition de N n'est pas trivialement incohérente (dans le cas contraire, N' serait simple par définition), et montrons qu'effectuer une propagation

de la composition laisse N clos par projection. Par symétrie (par rapport à $\overset{i}{r}$), nous avons juste besoin de prouver qu'après une composition, le réseau est encore clos par l'opérateur de projection $\overset{j}{r}$, c'est-à-dire que

$$\forall x, y, z \in \mathbf{E} \quad N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \otimes N_j^{yz}) \subseteq \overset{j}{r}_i(N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \otimes N_i^{yz})).$$

Soient x, y et z des variables de N . Puisque nous supposons que la clôture par composition de N ne peut être trivialement incohérente, nous avons la propriété $N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \otimes N_i^{yz}) \neq \emptyset$ et en particulier la propriété $N_i^{xy} \otimes N_i^{yz} \neq \emptyset$. Puisque N est clos par projection, $N_j^{XY} \subseteq \overset{j}{r}_i N_i^{XY}$ pour tous $X, Y \in \{x, y, z\}$ distincts. Par monotonie de \otimes (lemme 4.2.4), nous obtenons $N_j^{xy} \otimes N_j^{yz} \subseteq \overset{j}{r}_i N_i^{xy} \otimes \overset{j}{r}_i N_i^{yz}$. Par sur-distributivité de $\overset{j}{r}_i$ par rapport à \otimes , nous déduisons $N_j^{xy} \otimes N_j^{yz} \subseteq \overset{j}{r}_i(N_i^{xy} \otimes N_i^{yz})$. Puisque $N_j^{xz} \subseteq \overset{j}{r}_i N_i^{xz}$, nous avons $N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \otimes N_j^{yz}) \subseteq \overset{j}{r}_i(N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \otimes N_i^{yz}))$. Par sur-distributivité de $\overset{j}{r}_i$ par rapport à \cap , la propriété $N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \otimes N_j^{yz}) \subseteq \overset{j}{r}_i(N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \otimes N_i^{yz}))$ est donc satisfaite. Ainsi, clore N' par projection puis par composition donne un réseau algébriquement cohérent s'il n'est pas trivialement incohérent. Par définition, N' est donc simple.

Puisque pour chaque (i, j) , tous les réseaux sur $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ sont simples, tous les réseaux sur $\mathcal{S}_{i,j}$ à trois variables sont simples. Ainsi, par la proposition 4.3.23, \mathcal{S} est simple. \square

Notons que pour la plupart des formalismes qualitatifs (ceux qui sont *uniformes* au sens de la définition suivante), il est suffisant que la projection soit sur-distributive par rapport à la composition sur les relations basiques pour l'être sur le formalisme entier.

Définition 4.3.26. Une algèbre (non associative) est dite *uniforme* si pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$, la propriété $b \otimes b' \neq \emptyset$ est satisfaite.

La majorité des formalismes qualitatifs de la littérature sont uniformes. Cependant, les formalismes portant sur des entités de natures différentes (voir la section 3.5.1) ne sont pas uniformes.

Exemple 4.3.27. Le calcul des points PC, le calcul des intervalles IC et RCC_8 sont uniformes.

Le calcul des points et intervalles de Meiri (Meiri, 1996) et sa généralisation que nous introduisons dans la section 5.2.2, ne sont pas uniformes.

Proposition 4.3.28. Soient \mathcal{A} une algèbre uniforme finie et $\overset{i}{r}$ une projection de \mathcal{A} vers une autre algèbre.

Si $\overset{i}{r}$ est sur-distributive par rapport à \otimes sur \mathcal{B} alors $\overset{i}{r}$ est sur-distributive par rapport à \otimes sur \mathcal{A} .

Démonstration. Nous prouvons cette proposition à l'aide des propriétés des définitions 4.2.7 et 2.2.17, voir également la section 2.2.3. Soient $r, r' \in \mathcal{A}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \overset{i}{r} r \otimes \overset{i}{r} r' &= (\bigcup_{b \in r} \overset{i}{r} b) \otimes (\bigcup_{b' \in r'} \overset{i}{r} b') && \text{(lemme 4.2.9)} \\ &= \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} \overset{i}{r} b \otimes \overset{i}{r} b' && \text{car } r \otimes (r' \cup r'') = (r \otimes r') \cup (r \otimes r'') \\ &\subseteq \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} \overset{i}{r} (b \otimes b') && \text{par uniformité et sur-distributivité} \\ &= \overset{i}{r} \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} (b \otimes b') && \text{car } \overset{i}{r} r \cup \overset{i}{r} r' = \overset{i}{r} (r \cup r') \\ &= \overset{i}{r} (r \otimes r') && \text{(lemme 4.2.4)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $r, r' \in \mathcal{A}$, la propriété $\overset{i}{r} r \otimes \overset{i}{r} r' \subseteq \overset{i}{r} (r \otimes r')$ est satisfaite. Nous avons ainsi la sur-distributivité. \square

De ce résultat, nous déduisons la sur-distributivité de la projection de RCA_8 vers PA par rapport à la composition, pour la combinaison taille-topologie STC.

Lemme 4.3.29. La projection $\overset{i}{r}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}}$ de RCA_8 vers PA dans STC est sur-distributive par rapport à \otimes sur RCA_8 .

Démonstration. RCA_8 est uniforme (voir la table 2.9). Par la proposition 4.3.28, pour prouver ce lemme, il est suffisant de prouver que $\overset{i}{r}_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}}$ est sur-distributif par rapport à \otimes sur $\mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$.

Considérons les couples (b, b') suivants :

- $b \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $b' \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, nous avons $b \otimes b' \subseteq \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, $\uparrow\{\text{TPP}\} = \uparrow\{\text{NTPP}\} = \uparrow\{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \{<\}$ et $\{<\} \diamond \{<\} = \{<\}$, d'où $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$;
- $b = \{\text{EQ}\}$ et $b' \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, nous avons $\uparrow\{\text{TPP}\} = \uparrow\{\text{NTPP}\} = \{<\}$, $\uparrow\{\text{EQ}\} = \{=\}$, $\{\text{EQ}\} \diamond b' = b'$ et $\{=\} \diamond \{<\} = \{<\}$, d'où $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$;
- $b \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $b' = \{\text{EQ}\}$, nous avons de manière analogue $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$;
- $b = \{\text{EQ}\}$ et $b' = \{\text{EQ}\}$, nous avons $\uparrow\{\text{EQ}\} = \{=\}$, $\{\text{EQ}\} \diamond \{\text{EQ}\} = \{\text{EQ}\}$ et $\{=\} \diamond \{=\} = \{=\}$, d'où $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$.

Par symétrie, $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$ est satisfaite pour $b \in \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$ et $b' \in \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$, $b = \{\text{EQ}\}$ et $b' \in \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$, $b \in \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$ et $b' = \text{EQ}$ respectivement. En effet, nous avons la propriété $\uparrow \overline{b'} \otimes \uparrow \overline{b} \subseteq \uparrow(\overline{b'} \otimes \overline{b})$ si la propriété $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$ est satisfaite, puisque $\overline{b \otimes b'} = \overline{b'} \otimes \overline{b}$, $r \cup r' = \overline{\overline{r} \cup \overline{r'}}$ (définition d'une algèbre non associative : déf. 2.2.17) et $\uparrow \overline{b} = \uparrow b$ (définition d'une projection : déf. 4.2.7).

Pour tous les autres couples (b, b') de relations basiques de RCA_8 , nous avons $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}\} \cap (b \otimes b') \neq \emptyset$. Ainsi, $\uparrow(b \otimes b') = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ ($\uparrow\{\text{DC}\} = \uparrow\{\text{EC}\} = \uparrow\{\text{PO}\} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$), d'où $\uparrow b \otimes \uparrow b' \subseteq \uparrow(b \otimes b')$. \square

En revanche, la sur-distributivité de cette projection sur l'intersection n'est satisfaite que sur des petites sous-classes, telles que $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ (voir la section 2.4.4).

Lemme 4.3.30. *La projection $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}}$ de RCA_8 vers PA dans STC est sur-distributive par rapport à \cap sur $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$.*

Démonstration. Nous montrons que si $r \cap r' \neq \emptyset$, alors $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$. Remarquons d'abord qu'il n'y a que trois relations non basiques de $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ qui ne contiennent pas PO : $\{\text{DC}, \text{EC}\}$, $\{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $\{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$.

Soient $r, r' \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$, avec $r \cap r' \neq \emptyset$. Nous avons cinq cas (non disjoints mais exhaustifs par commutativité de l'intersection) à analyser :

- Le cas où r est basique. Nous avons donc $r \cap r' = r$. Ainsi, $\uparrow(r \cap r') = \uparrow r$, d'où $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$.
- Le cas $\{\text{PO}\} \subseteq r$ et $\{\text{PO}\} \subseteq r'$. Nous avons donc $\uparrow(r \cap r') \supseteq \uparrow\{\text{PO}\} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$, d'où $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$.
- Le cas $r = \{\text{DC}, \text{EC}\}$. Nous avons donc $r \cap r' = \{\text{DC}\}$ ou $r \cap r' = \{\text{EC}\}$ ou $r \cap r' = \{\text{DC}, \text{EC}\}$. Ainsi, $\uparrow(r \cap r') = \uparrow\{\text{DC}\} = \uparrow\{\text{EC}\} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$, d'où $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$.
- Le cas $r = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Nous avons donc $r \cap r' = \{\text{TPP}\}$ ou $r \cap r' = \{\text{NTPP}\}$ ou $r \cap r' = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Or $\uparrow\{\text{TPP}\} = \uparrow\{\text{NTPP}\} = \uparrow\{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \{<\}$. Par conséquent, $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$.
- Le cas $r = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$. Il est symétrique au cas précédent.

Ainsi, si $r \cap r' \neq \emptyset$, alors $\uparrow r \cap \uparrow r' \subseteq \uparrow(r \cap r')$. \square

Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Corollaire 4.3.31. *La projection $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}}$ de STC est sur-distributive par rapport à la composition et à l'intersection sur $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$.*

Démonstration. Par application directe des lemmes 4.3.29 et 4.3.30. \square

Malheureusement, nous n'avons pas la sur-distributivité de la projection $\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8}$ par rapport à la composition sur \mathcal{B}_{PA} . Par conséquent, aucune sous-algèbre de STC ne peut être \uparrow -distributive.

4.3.5.4 Stabilités et invariance

Nous nous intéressons à présent à la vérification de la stabilité algébrique (définition 4.3.17), afin de pouvoir appliquer le théorème d'affinement. Nous remarquons d'abord qu'un sous-ensemble est algébriquement stable s'il est à la fois *stable pour la composition* et *stable pour la projection*.

Définition 4.3.32. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre est dit *stable par un affinement H pour la composition* si pour tout réseau N sur \mathcal{S} , si N est \otimes -cohérent alors $H(N)$ est aussi \otimes -cohérent.

De plus, \mathcal{S} est dit *stable par un affinement H pour la projection* si pour toute relation $R \in \mathcal{S}$, si R est \uparrow -cohérente alors $H(R)$ est aussi \uparrow -cohérente.

La stabilité pour la composition est en fait un cas particulier de la réduction par affinement du cadre classique (voir la section 2.4.4).

Le lemme suivant découle directement des définitions.

Lemme 4.3.33. *Un sous-ensemble d'une multi-algèbre qui est stable par un affinement H pour la projection et pour la composition est algébriquement stable par H .*

On a ainsi simplement besoin de vérifier indépendamment la stabilité pour la composition et pour la projection. À nouveau, on peut vérifier ces propriétés par énumération. Pour la composition, il suffit d'énumérer les réseaux à trois variables de toutes les tranches \mathcal{S}_i . Pour la projection, il suffit d'énumérer les relations de toutes les bi-tranches.

Proposition 4.3.34. *Soient \mathcal{S} un sous-ensemble d'une multi-algèbre finie et $H = (h_1, \dots, h_m)$ un multi-affinement de \mathcal{S} .*

1. *Si, pour toute tranche \mathcal{S}_i et tout réseau N à 3 variables \otimes -cohérent sur \mathcal{S}_i , $h_i(N)$ est encore \otimes -cohérent, alors \mathcal{S} est stable par H pour la composition.*
2. *Si toute bi-tranche $\mathcal{S}_{i,j}$ est stable par (h_i, h_j) pour la projection, alors \mathcal{S} est stable par H pour la projection.*

Démonstration. (1) Soit N un réseau \otimes -cohérent sur \mathcal{S} ; nous montrons que $H(N)$ est \otimes -cohérent. Nous savons par hypothèse que si nous affinons par h_i un réseau à 3 variables \otimes -cohérent sur \mathcal{S}_i , alors il reste \otimes -cohérent. D'une part, nous en déduisons que $H(N)$ n'est pas trivialement incohérent. D'autre part, la clôture par composition étant locale à chaque triplet de variables et à chaque tranche, $H(N)$ est nécessairement clos par composition. Plus précisément, pour toutes variables x, y, z distinctes de N et tout $i \in \{1, \dots, m\}$, nous avons $N_i^{xz} \subseteq N_i^{xy} \otimes N_i^{yz}$. Nous savons ainsi qu'après l'affinement, nous avons $h_i(N_i^{xz}) \subseteq h_i(N_i^{xy}) \otimes h_i(N_i^{yz})$ pour tout i . Par définition, $H(N)$ est donc clos par composition. Ainsi, $H(N)$ est \otimes -cohérent.

(2) Rappelons que le fait que $\mathcal{S}_{i,j}$ soit stable par (h_i, h_j) pour la projection signifie que pour toute relation $(r, r') \in \mathcal{S}_{i,j}$ \uparrow -cohérente, $(h_i(r), h_j(r'))$ est aussi \uparrow -cohérente. Soit R une relation \uparrow -cohérente de \mathcal{S} . Ainsi, pour tout (i, j) , la relation $R_{i,j} = (R_i, R_j) \in \mathcal{S}_{i,j}$ est \uparrow -cohérente (lemme 4.3.20). Par hypothèse, pour tout (i, j) , la relation $(h_i, h_j)(R_{i,j}) = (h_i(R_i), h_j(R_j))$ est donc \uparrow -cohérente. Par conséquent, $H(R) = (h_1(R_1), \dots, h_m(R_m))$ est \uparrow -cohérente (lemme 4.3.20). \square

Notons que la stabilité pour la composition est souvent déjà établie, car les sous-classes traitables réductibles par affinement de la littérature sont en fait plus précisément stables pour la composition.

Proposition 4.3.35 (Renz, 1999, Lemme 24). *L'algèbre des points PA et la sous-classe \mathcal{P}_{IA} des relations préconvexes de l'algèbre des intervalles sont stables par h_{\max} pour la composition.*

Démonstration. La sous-classe \mathcal{P}_{IA} des relations préconvexes de l'algèbre des intervalles est stable par h_{\max} (Renz, 1999). Le fait que PA soit également stable par h_{\max} se déduit du résultat de \mathcal{P}_{IA} . En effet, soit N un réseau sur PA \diamond -cohérent, nous allons montrer que $h_{\max}(N)$ est \diamond -cohérent. Considérons la fonction φ de PA dans $2^{\{s, e, \bar{s}\}}$, un sous-ensemble de \mathcal{P}_{IA} , satisfaisant $\varphi(\{<\}) = \{s\}$, $\varphi(\{=\}) = \{e\}$, $\varphi(\{>\}) = \{\bar{s}\}$ et $\varphi(r) = \bigcup_{b \in r} \varphi(b)$. Soit N un réseau, nous notons $\varphi(N)$ le réseau défini par $\varphi(N)^{xy} = \varphi(N^{xy})$ pour tous x, y . $\varphi(N)$ est donc un réseau sur $2^{\{s, e, \bar{s}\}}$. Il est de plus \diamond -cohérent car φ vérifie la propriété $\varphi(r \diamond r') = \varphi(r) \diamond \varphi(r')$ (φ est en fait un *isomorphisme d'algèbre de relation*). En effet, si $r'' \subseteq r \diamond r'$ avec $r, r', r'' \in \text{PA}$, alors $r'' \cup (r \diamond r') = r \diamond r'$ et donc $\varphi(r'' \cup (r \diamond r')) = \varphi(r \diamond r')$. Puisque $\varphi(r \cup r') = \varphi(r) \cup \varphi(r')$, nous déduisons $\varphi(r'') \cup \varphi(r \diamond r') = \varphi(r \diamond r')$. Ainsi, $\varphi(r'') \subseteq \varphi(r \diamond r') = \varphi(r) \diamond \varphi(r')$ puisque $\varphi(r \diamond r') = \varphi(r) \diamond \varphi(r')$. Nous avons ainsi $\varphi(r'') \subseteq \varphi(r) \diamond \varphi(r')$, $\varphi(N)$ est donc bien \diamond -cohérent ($r \neq \emptyset \iff \varphi(r) \neq \emptyset$).

De plus, puisque $2^{\{s, e, \bar{s}\}} \subseteq \mathcal{P}_{IA}$ et $\varphi(N)$ est sur $2^{\{s, e, \bar{s}\}}$, $\varphi(N)$ est sur \mathcal{P}_{IA} . Puisque \mathcal{P}_{IA} est stable par h_{\max} , $h_{\max}(\varphi(N))$ est donc \diamond -cohérent. Le réseau $\varphi^{-1}(h_{\max}(\varphi(N)))$ l'est également puisque

φ est bijective et φ^{-1} vérifie $\varphi^{-1}(r \cup r') = \varphi^{-1}(r) \cup \varphi^{-1}(r')$ et $\varphi^{-1}(r \diamond r') = \varphi^{-1}(r) \diamond \varphi^{-1}(r')$. Or, $\varphi^{-1}(h_{\max}(\varphi(N))) = \varphi^{-1}(\varphi(h_{\max}(N))) = h_{\max}(N)$, puisque $h_{\max}(\varphi(r)) = \varphi(h_{\max}(r))$ pour tout $r \in \text{PA}$. Par conséquent, $h_{\max}(N)$ est \diamond -cohérent. \square

Les sous-algèbres maximales pour la traitabilité de RCC_8 sont elles aussi stables pour la composition par leurs affinements classiques (voir la section 2.4.4) :

Proposition 4.3.36 (Renz, 1999, Théorème 21). $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{Q}_8 et \mathcal{C}_8 sont stables pour la composition par $h_{\hat{\mathcal{H}}_8}$, $h_{\mathcal{Q}_8}$ et $h_{\mathcal{C}_8}$, respectivement.

Par ailleurs, bien que la stabilité algébrique soit une hypothèse du théorème d'affinement, pour les multi-algèbres arborescentes (définition 4.3.9), la stabilité pour la projection implique la condition (D3) du théorème de découpage (par la proposition 4.3.12, lorsque les relations basiques closes par projection sont cohérentes).

Nous avons les résultats suivants de stabilité pour la projection.

Lemme 4.3.37. $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$, $\mathcal{Q}_8 \times \text{PA}$ et $\mathcal{C}_8 \times \text{PA}$ sont stables pour la projection par $H = (h_{\hat{\mathcal{H}}_8}, h_{\max})$, $H = (h_{\mathcal{Q}_8}, h_{\max})$ et $H = (h_{\mathcal{C}_8}, h_{\max})$, respectivement.

Démonstration. Nous allons prouver que ces sous-classes \mathcal{S} sont stables pour la projection par H , c'est-à-dire que pour toute relation $r \in \mathcal{S}$ \uparrow -cohérente, $H(R)$ est aussi \uparrow -cohérente (voir la table 2.11 pour les définitions de $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{Q}_8 et \mathcal{C}_8 et la définition 2.4.19 pour celle de leur affinement classique, $h_{\hat{\mathcal{H}}_8}$, $h_{\mathcal{Q}_8}$ et $h_{\mathcal{C}_8}$ respectivement). Remarquons d'abord que si $\emptyset \neq r \subseteq \uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} b$ avec $b \in \mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$ et $r \in \text{PA}$ alors (b, r) est \uparrow -cohérente (car $b' \in \uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} b \iff b \in \uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} b'$: voir les tables 3.1 et 3.2), ce que nous notons propriété (1). Remarquons de plus que si $r \neq \emptyset$ alors $h_{\max}(r) \neq \emptyset$, avec $r \in \text{PA}$.

Considérons tout d'abord $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$ et $\mathcal{Q}_8 \times \text{PA}$, qui ont le même affinement ($h_{\hat{\mathcal{H}}_8} = h_{\mathcal{Q}_8}$). Soit (r, r') une relation \uparrow -cohérente d'une des deux sous-classes. Nous avons huit cas à analyser :

- $\text{DC} \in r$: dans ce cas, $H((r, r')) = (\text{DC}, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \uparrow -cohérente, car $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \text{DC} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ et par (1).
- $\text{EC} \in r$ et $\text{DC} \notin r$: dans ce cas, $H((r, r')) = (\text{EC}, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \uparrow -cohérente, car $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \text{EC} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ et par (1).
- $\text{PO} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $H((r, r')) = (\text{PO}, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \uparrow -cohérente, car $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \text{PO} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ et par (1).
- $\text{TPP} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $\overline{\text{TPP}} \notin r$ et $\overline{\text{NTPP}} \notin r$ car $\hat{\mathcal{H}}_8 \cap \mathcal{N} = \emptyset$ et $\mathcal{Q}_8 \cap \mathcal{N} = \emptyset$ avec $\mathcal{N} = \{r \mid \text{PO} \notin r \wedge (\{\text{TPP}, \overline{\text{TPP}}\} \subseteq r \vee \{\text{TPP}, \overline{\text{NTPP}}\} \subseteq r \vee \{\text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}\} \subseteq r) \vee \{\text{NTPP}, \overline{\text{NTPP}}\} \subseteq r\}$ (voir la table 2.11). On a donc forcément $\text{TPP} \in r \subseteq \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}$. Comme (r, r') est \uparrow -cohérente, $r' = \{<\}$ ou $r' = \{<, =\}$. Par conséquent, $H((r, r')) = (\text{TPP}, <)$, qui est \uparrow -cohérente.
- $\overline{\text{TPP}} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}\} \cap r = \emptyset$: nous avons le cas symétrique ($H((r, r')) = (\overline{\text{TPP}}, >)$).
- $\text{EQ} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \overline{\text{TPP}}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $r = \text{EQ}$ car $\text{NTPP} \notin r$ et $\overline{\text{NTPP}} \notin r$ puisque $\hat{\mathcal{H}}_8 \cap \{r \mid (\{\text{EQ}, \text{NTPP}\} \subseteq r \wedge \{\text{TPP}\} \notin r) \vee (\{\text{EQ}, \text{NTPP}\} \subseteq r \wedge \overline{\text{TPP}} \notin r)\} = \emptyset$ et $\mathcal{Q}_8 \cap \{r \mid \{\text{EQ}\} \subseteq r \wedge \{\text{PO}\} \notin r \wedge r \cap \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \neq \emptyset\} = \emptyset$. Ainsi $r' = \{=\}$, et donc $H((r, r')) = (\text{EQ}, =)$, qui est \uparrow -cohérente.
- $\text{NTPP} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \overline{\text{TPP}}, \text{EQ}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $r = \text{NTPP}$ puisque $\overline{\text{NTPP}} \notin r$ (car $\hat{\mathcal{H}}_8 \cap \mathcal{N} = \emptyset$ et $\mathcal{Q}_8 \cap \mathcal{N} = \emptyset$). Ainsi $r' = \{<\}$ et donc $H((r, r')) = (\text{NTPP}, <)$, qui est \uparrow -cohérente.
- Nous avons le cas symétrique pour $\overline{\text{NTPP}} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \overline{\text{TPP}}\} \cap r = \emptyset$.

Ainsi, $\hat{\mathcal{H}}_8 \times \text{PA}$ et $\mathcal{Q}_8 \times \text{PA}$ sont stables par $h_{\hat{\mathcal{H}}_8} = h_{\mathcal{Q}_8}$ pour la projection.

Nous analysons maintenant $\mathcal{C}_8 \times \text{PA}$:

- $\text{DC} \in r$: dans ce cas, $H((r, r')) = (\text{DC}, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \uparrow -cohérente, car $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \text{DC} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ et par (1).
- $\text{PO} \in r$ et $\text{DC} \notin r$: dans ce cas, $H((r, r')) = (\text{PO}, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \uparrow -cohérente, car $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} \text{PO} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$ et par (1).
- $\text{NTPP} \in r$ et $\{\text{DC}, \text{PO}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $\overline{\text{TPP}} \notin r$ et $\overline{\text{NTPP}} \notin r$ car $\mathcal{C}_8 \cap \mathcal{N} = \emptyset$ avec \mathcal{N} comme défini précédemment. De plus, $\text{EC} \notin r$ puisque $\mathcal{C}_8 \cap \{r \mid \{\text{EC}\} \subseteq r \wedge \{\text{PO}\} \notin r \wedge r \cap \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\} \neq \emptyset\} = \emptyset$. Par conséquent, $\text{NTPP} \in r \subseteq$

- $\{TPP, NTPP, EQ\}$, donc comme (r, r') est \bar{r} -cohérente, $r' = \{<\}$ ou $r' = \{<, =\}$. Ainsi, $H((r, r')) = (NTPP, <)$ qui est \bar{r} -cohérente.
- $\overline{NTPP} \in r$ et $\{DC, PO\} \cap r = \emptyset$: nous avons le cas symétrique ($H((r, r')) = (\overline{NTPP}, >)$).
 - $TPP \in r$ et $\{DC, PO, NTPP, \overline{NTPP}\} \cap r = \emptyset$: le cas est similaire à NTPP.
 - $\overline{TPP} \in r$ et $\{DC, PO, NTPP, \overline{NTPP}\} \cap r = \emptyset$: nous avons le cas symétrique à TPP.
 - $EC \in r$ et $\{DC, PO, TPP, NTPP, \overline{TPP}, \overline{NTPP}\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $r = EC$ puisque $EQ \notin r$ (car $\mathcal{C}_8 \cap \{r \mid \{EC\} \subseteq r \wedge \{PO\} \not\subseteq r \wedge r \cap \{TPP, NTPP, \overline{TPP}, \overline{NTPP}, EQ\} \neq \emptyset\} = \emptyset$). Ainsi $H((r, r')) = (EC, h_{\max}(r'))$ qui est nécessairement \bar{r} -cohérente, car $\bar{r}_{RCA_8}^{PA} EC = \mathcal{B}_{PA}$ et par (1).
 - $EQ \in r$ et $\{DC, PO, TPP, NTPP, \overline{TPP}, \overline{NTPP}, EC\} \cap r = \emptyset$: dans ce cas, $r = EQ$. Ainsi, $r' = \{=\}$, et donc $H((r, r')) = (EQ, =)$, qui est \bar{r} -cohérente.
- Ainsi, $\mathcal{C}_8 \times PA$ est stable par $h_{\mathcal{C}_8}$ pour la projection. \square

Pour finir, nous nous intéressons brièvement à un cas particulier de la stabilité pour la projection, que nous appelons *l'invariance des projections par multi-affinement*. Cette propriété peut être décidée en temps $\mathcal{O}(\max_i |\mathcal{S}_i|)$, contrairement à la stabilité pour la projection qui peut être décidée en temps $\mathcal{O}(\max_{i,j} |\mathcal{S}_{i,j}|)$. Cette propriété est naturelle et est vérifiée par des sous-classes particulières d'un certain nombre de combinaisons. Elle mérite donc d'être soulignée.

Définition 4.3.38. Un sous-ensemble \mathcal{S} d'une multi-algèbre est \bar{r} -invariant par un multi-affinement $H = (h_1, \dots, h_m)$ si pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et pour tout $r \in \mathcal{S}_i$, nous avons $\bar{r}_i^j r = \bar{r}_i^j h_i(r)$.

Proposition 4.3.39. Un sous-ensemble \bar{r} -invariant par un multi-affinement $H = (h_1, \dots, h_m)$ est stable par H pour la projection.

Démonstration. Soit R une relation \bar{r} -cohérente : pour tous i, j , on a $R_j \subseteq \bar{r}_i^j R_i$. D'une part, $R_j \supseteq h_j(R_j) = (H(R))_j$, et d'autre part, par \bar{r} -invariance, $\bar{r}_i^j R_i = \bar{r}_i^j h_i(R_i) = \bar{r}_i^j (H(R))_i$. Par conséquent, $(H(R))_j \subseteq \bar{r}_i^j (H(R))_i$ pour tous i, j : $H(R)$ est \bar{r} -cohérente. \square

Par exemple, on peut aisément vérifier par énumération que pour STC, la sous-algèbre $\mathcal{Q}_8 \times PA$ est \bar{r} -invariante par $H = (h_{\mathcal{Q}_8}, \text{id})$, avec $h_{\mathcal{Q}_8}$ l'affinement classique de \mathcal{Q}_8 (voir la section 2.4.4) et id la fonction identité.

4.3.6 Problème de la clôture par projection et affaiblissement de formalismes

Nous avons présenté un certain nombre de conditions assurant la traitabilité dans les sections précédentes. Cependant, que pouvons nous faire lorsque l'une de ces conditions est invalidée ? Que faire en particulier lorsque l'on considère des sous-classes qui ne sont pas \bar{r} -closes et dont la clôture par projection n'est pas une sous-classe traitable ? Cela implique-t-il que la sous-classe en question est intraitable, comme c'est le cas dans le cadre classique pour la clôture par composition, intersection et inversion d'un sous-ensemble (voir la section 2.4.2) ? Ce n'est en fait pas toujours le cas. Nous étudierons dans cette section un contre-exemple. Que faire également lorsque la sous-classe que l'on considère n'est ni simple ni stable ? Nous répondons à ces questions dans cette section en proposant une technique qui permet de contourner, dans certains cas, le fait que certaines des hypothèses des théorèmes de traitabilité soient insatisfaites. Autrement dit, cette technique nous permet d'augmenter la portée des théorèmes de traitabilité.

Pour résoudre le fait qu'une sous-classe ne soit pas \bar{r} -close, une idée naturelle consiste à affaiblir les projections de la multi-algèbre, c'est-à-dire les rendre moins restrictives, de façon à ce que la sous-classe concernée devienne \bar{r} -close. Affaiblir les projections peut également permettre d'obtenir d'autres propriétés comme la \bar{r} -distributivité et donc la simplicité, ou encore la stabilité pour la projection. Une projection affaiblie reste toujours correcte. Autrement dit, elle ne retirera pas de couples d'entités valides. Nous verrons que les résultats de traitabilité obtenus avec les projections affaiblies s'appliquent aussi à la multi-algèbre initiale. Cependant, un affaiblissement excessif des projections peut faire perdre la capacité de la clôture algébrique à décider la cohérence, même pour les scénarios. Il faut donc trouver un équilibre dans l'affaiblissement des projections, qui n'existe

peut-être pas. Pour distinguer les projections d'une multi-algèbre \mathcal{A} et d'un de ses affaiblissements, noté \mathcal{A}' , nous utilisons la notation « $\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} b$ » (resp. « $\mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} b$ ») pour indiquer qu'il s'agit de la projection de \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}').

Définition 4.3.40. Une multi-algèbre \mathcal{A}' est qualifiée d'*affaiblissement* d'une multi-algèbre \mathcal{A} lorsque \mathcal{A}' a le même produit cartésien que \mathcal{A} et lorsque pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, pour tout $b \in \mathcal{B}_l$:

$$\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} b \subseteq \mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} b.$$

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et soit \mathcal{A}' un affaiblissement de \mathcal{A} . Nous qualifions le formalisme $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ d'*affaiblissement* du formalisme $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$.

Remarquons qu'un affaiblissement d'un formalisme séquentiel est bien un formalisme séquentiel selon la définition 4.2.18, puisque les projections affaiblies sont correctes. Nous avons en effet le lemme suivant et la proposition suivante qui en découle.

Lemme 4.3.41. Soient \mathcal{A} une multi-algèbre finie, \mathcal{A}' un affaiblissement de \mathcal{A} et $R \in \mathcal{A}'$. Nous avons la propriété suivante :

$$\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} R \subseteq \mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R \subseteq R$$

Proposition 4.3.42. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel et soient \mathcal{A}' un affaiblissement de \mathcal{A} et $R \in \mathcal{A}'$. Nous avons la propriété suivante :

$$\varphi(\mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R) = \varphi(R)$$

De plus, l'affaiblissement $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel.

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{A}'$. Par le lemme 4.3.41, $\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} R \subseteq \mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R \subseteq R$. Étant donné que φ est monotone (lemme 4.2.25), $\varphi(\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} R) \subseteq \varphi(\mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R) \subseteq \varphi(R)$. Puisque $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel, nous avons $\varphi(\mathcal{A} \overset{j}{\rceil} R) = \varphi(R)$. Par conséquent, $\varphi(\mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R) = \varphi(R)$.

Le triplet $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel puisque $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel et $\varphi(\mathcal{A}' \overset{j}{\rceil} R) = \varphi(R)$ (\mathcal{A}' et \mathcal{A} sont dotés des mêmes opérateurs à l'exception de la projection ; définition 4.2.18). \square

Nous avons vu dans la section précédente que certaines projections ne sont pas sur-distributives par rapport à la composition ou à l'intersection, ce qui empêche certaines sous-classes d'être $\overset{j}{\rceil}$ -distributives. Considérons l'affaiblissement vérifiant que si la projection $\overset{j}{\rceil}$ n'est pas sur-distributive par rapport à la composition ou par rapport à l'intersection, alors cette projection est affaiblie de la manière suivante : $\overset{j}{\rceil} b = \mathcal{B}$ pour tout $b \in \mathcal{B}$ (il n'y a plus d'interdépendance directe de i vers j). La multi-algèbre correspondante est trivialement un affaiblissement et la sous-classe est en effet $\overset{j}{\rceil}$ -distributive pour cette multi-algèbre affaiblie (voir la définition 4.3.24). Bien évidemment, une telle opération ne permet pas toujours de conserver la propriété fondamentale de la cohérence des scénarios algébriquement clos.

Exemple 4.3.43. Plaçons-nous dans le cadre du raisonnement multi-échelle temporel avec le calcul des intervalles d'Allen doté de ses opérateurs de conversion, définis par Euzenat (Euzenat, 2001) et exposés dans la section 3.4.2. Comme nous l'avons vu pour le calcul des points dans l'exemple 4.2.13, être clos par projection, c'est être clos par l'opérateur de conversion ascendante et par l'opérateur de conversion descendante. Considérons la sous-classe des relations préconvexes (voir la section 2.4.4) du calcul des intervalles. Celle-ci est traitable dans le cadre classique, mais l'est-elle également dans le cadre multi-échelle ? Cette question est problématique puisque la sous-classe des relations préconvexes n'est pas $\overset{j}{\rceil}$ -close. Étant donné que cette sous-classe est maximale pour la traitabilité dans le cadre classique, sa $\overset{j}{\rceil}$ -clôture est nécessairement intraitable. Cependant, cette sous-classe est close par rapport à l'opérateur de conversion ascendante (elle n'est donc pas close par rapport à la conversion descendante). Cette propriété est importante car il est en fait possible de se passer de l'opérateur de conversion descendante. Plus précisément, avec la multi-algèbre affaiblie où les projections $\overset{j}{\rceil} b = \downarrow b$ (lorsque l'échelle g_i est plus fine que l'échelle g_j) sont remplacées par les projections $\overset{j}{\rceil} b = \mathcal{B}$, nous pouvons appliquer les théorèmes de traitabilité

et ainsi prouver la traitabilité des relations préconvexes. La sous-classe préconvexe est en effet \uparrow -close pour cet affaiblissement, puisque sa clôture par projection n'applique plus que l'opérateur de conversion ascendante.

Pour distinguer les différentes clôtures algébriques, on dira qu'un réseau est algébriquement clos *pour* un formalisme séquentiel et qu'une sous-classe est algébriquement traitable *pour* un formalisme séquentiel.

La proposition suivante justifie l'intérêt des affaiblissements : ils permettent de prouver qu'une sous-classe est traitable pour le formalisme initial lorsque, par exemple, celle-ci n'est pas \uparrow -close.

Proposition 4.3.44. *Soit $\mathcal{F}' = (\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ un affaiblissement d'un formalisme séquentiel $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ et soit \mathcal{S} un sous-ensemble de \mathcal{A} . Si \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F}' alors \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F} .*

Démonstration. Soit N un réseau sur \mathcal{S} . On suppose que sa clôture algébrique pour \mathcal{F} , notée \tilde{N} , n'est pas trivialement incohérente. Nous allons montrer que N est cohérent, ce qui prouve que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F} (si nous supposons à la place que \tilde{N} est trivialement incohérent, N est alors incohérent, par la proposition 4.2.37). Soit \tilde{N}' la clôture algébrique de N pour \mathcal{F}' . Comme les projections de \mathcal{F}' sont moins restrictives que celles de \mathcal{F} , nous avons $\tilde{N} \subseteq \tilde{N}'$ (puisque ${}_{\mathcal{A}}\uparrow R \subseteq {}_{\mathcal{A}'}\uparrow R$). Comme \tilde{N} n'est pas trivialement incohérent, la clôture algébrique de N pour \mathcal{F}' , \tilde{N}' , ne l'est pas non plus. Ainsi, N est cohérent, puisque \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F}' . \square

Considérer un affaiblissement d'une multi-algèbre ne permet pas en général d'appliquer les théorèmes, puisque les scénarios algébriquement clos associés peuvent ne plus être cohérents. Il faut donc considérer des affaiblissements particuliers. Nous nous intéressons ici aux affaiblissements qui préservent la structure arborescente (voir la section 4.3.2), que nous qualifions d'*affaiblissements arborescents*. Nous avons vu dans la section 4.3.2 que les projections des multi-algèbres arborescentes vérifient des propriétés particulièrement intéressantes. Nous avons vu, entre autres, que les projections de chacune de ses anti-arborescences plénières (c'est-à-dire les \uparrow_i^j telles que $i \xrightarrow{A} j$) résument les interdépendances. Un affaiblissement d'une multi-algèbre arborescente est arborescent si les projections de l'une de ses anti-arborescences plénières restent les mêmes. Cela assure que les deux multi-algèbres possèdent les mêmes interdépendances.

Définition 4.3.45. Soient \mathcal{A} une multi-algèbre arborescente finie et \mathcal{A}' un de ses affaiblissements. La multi-algèbre \mathcal{A}' est qualifiée d'*affaiblissement arborescent* de \mathcal{A} s'il existe une anti-arborescence plénière A de \mathcal{A} telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, pour tout $b \in \mathcal{B}_l$:

$$l \xrightarrow{A} k \quad \Longrightarrow \quad {}_{\mathcal{A}}\uparrow_l^k b = {}_{\mathcal{A}'}\uparrow_l^k b.$$

Soit \mathcal{A}' un affaiblissement arborescent d'une multi-algèbre arborescente \mathcal{A} et soit $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel. Nous qualifions le formalisme $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ d'*affaiblissement arborescent* du formalisme $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$.

Il est facile de voir que la multi-algèbre d'un affaiblissement arborescent est arborescente. On peut donc utiliser la proposition 4.3.12 pour prouver la cohérence des relations \uparrow -cohérentes de ce formalisme affaibli.

Les affaiblissements arborescents permettent en effet de conserver la cohérence des scénarios algébriquement clos. Cette propriété découle du lemme suivant :

Lemme 4.3.46. *Soit \mathcal{A}' un affaiblissement arborescent d'une multi-algèbre arborescente finie \mathcal{A} .*

- *Les relations basiques closes par projection pour \mathcal{A}' sont également closes par projection pour \mathcal{A} .*
- *Les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{A}' sont également algébriquement clos pour \mathcal{A} .*

Démonstration. Nous rappelons que \mathcal{A}' est également arborescente et que \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont arborescentes pour une même anti-arborescence plénière A . Dans cette preuve, les projections sont celles

de \mathcal{A} . Soit B une relation basique close par projection pour \mathcal{A}' . B vérifie alors la propriété suivante : pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$, si $i \xrightarrow{\mathcal{A}} j$ alors $B_j \in \mathcal{P}_i^j B_i$. En effet, les projections de \mathcal{A} et \mathcal{A}' correspondant à un même arc de \mathcal{A} sont identiques (définition 4.3.45). Nous concluons par le lemme 4.3.11 que B est close par projection pour \mathcal{A} .

Le deuxième résultat découle directement du premier. Un scénario clos par composition pour \mathcal{A}' est en effet trivialement clos par composition pour \mathcal{A} (c'est la même composition). Les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{A}' sont donc également algébriquement clos pour \mathcal{A} , puisque être algébriquement clos, c'est être clos par composition et par projection. \square

Proposition 4.3.47. *Soit \mathcal{F}' un affaiblissement arborescent d'un formalisme séquentiel \mathcal{F} . Si les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{F} sont cohérents, alors les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{F}' sont aussi cohérents.*

Démonstration. Soit N un scénario algébriquement clos pour \mathcal{F}' . Par le lemme 4.3.46, il est également algébriquement clos pour \mathcal{F} . Or les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{F} sont cohérents. Par conséquent, N est cohérent. \square

Ainsi, les affaiblissements arborescents conservent la propriété essentielle pour appliquer le théorème de découpage, qui est en général perdue pour un affaiblissement quelconque. On peut donc affaiblir une multi-algèbre arborescente autant que l'on veut tant que l'on ne touche pas aux projections d'une de ses anti-arborescences plénières.

Pour résumer, il peut arriver que l'on ne puisse pas appliquer les théorèmes de traitabilité, notamment parce que l'on s'intéresse à une sous-classe qui n'est pas \mathcal{P} -close, simple ou stable. Une solution pour contourner ce problème est de chercher un affaiblissement arborescent pour lequel cette sous-classe vérifie chacune de ces propriétés.

4.3.7 Synthèse des résultats obtenus

Dans cette section, afin de simplifier l'application des résultats de ce chapitre, nous modifions les deux théorèmes de traitabilité, en nous basant sur la technique d'affaiblissement et sur les propriétés plus fortes des sections précédentes.

Nous commençons par l'application des résultats précédents sur le théorème de découpage (théorème 4.3.3).

Corollaire 4.3.48. *(Théorème de découpage affaibli) Soit \mathcal{S} un sous-ensemble tel que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$ d'un formalisme séquentiel $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ dont la multi-algèbre \mathcal{A} est arborescente et dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents. Soit \mathcal{A}' un affaiblissement arborescent de \mathcal{A} .*

Si les conditions suivantes sont satisfaites pour \mathcal{A}' :

- chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-algèbre ;
- chaque tranche \mathcal{S}_i est minimale ;
- \mathcal{S} est \mathcal{P} -distributive ;
- pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, et pour tout $r \in \mathcal{S}_i$, $\mathcal{P}_i^j r \in \mathcal{S}_j$ est satisfaite

alors \mathcal{S} est algébriquement traitable (pour \mathcal{F} et pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$).

Démonstration. Pour prouver le théorème de découpage affaibli, nous appliquons, évidemment, le théorème de découpage, en utilisant les propriétés des sections précédentes. Par la proposition 4.3.44, nous avons juste à prouver que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ afin de prouver que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F} .

Nous prouvons donc que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ en utilisant le théorème de découpage (théorème 4.3.3) avec la fonction identité comme multi-affinement de \mathcal{S} , c'est-à-dire avec $H = (h_1, \dots, h_m)$ vérifiant $h_i(r) = r$ pour tout $r \in \mathcal{S}_i$ et tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Ses hypothèses sont satisfaites :

- \mathcal{S} est une sous-algèbre car chaque \mathcal{S}_i est une sous-algèbre (proposition 4.3.19).
- $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel (proposition 4.3.42).
- $H = (h_1, \dots, h_m)$ est un multi-affinement de \mathcal{S} .

Ses conditions d'application le sont également :

- (D1) : Chaque tranche \mathcal{S}_i est scénarisable par h_i , car chaque \mathcal{S}_i est minimale (voir la section 2.4.5). En effet, soit N un réseau sur \mathcal{S}_i algébriquement cohérent. Comme \mathcal{S}_i est minimale et N algébriquement clos, nous avons pour tout $(x, y) \in \mathbf{E}$ et pour toute relation basique $b \in N^{xy} = h_i(N^{xy})$, un scénario $S \subseteq N$ cohérent et donc algébriquement clos tel que $S^{xy} = b$.
- (D2) : \mathcal{S} est simple, par la proposition 4.3.25 (car \mathcal{S} est \uparrow -close, \uparrow -distributive et est une sous-classe).
- (D3) : Pour toute relation \uparrow -cohérente R de \mathcal{S} , la relation $H(R) = R$ est cohérente, car les relations \uparrow -cohérentes sont cohérentes (par la proposition 4.3.12, car \mathcal{A}' est arborescente et les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{A}' sont cohérents).
- Les scénarios algébriquement clos pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ sont cohérents, puisque les scénarios algébriquement clos pour \mathcal{F} le sont, par la proposition 4.3.47 (car $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ est un affaiblissement arborescent de \mathcal{F}).
- \mathcal{S} est \uparrow -close (par la proposition 4.3.22 puisque \mathcal{S} est de la forme $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ et est une sous-classe).

□

Nous appliquons maintenant les résultats précédents au théorème d'affinement.

Corollaire 4.3.49. (*Théorème d'affinement affaibli*) Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme séquentiel, \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux sous-ensembles de \mathcal{A} , avec \mathcal{S} tel que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$. Soient $H = (h_1, \dots, h_m)$ un multi-affinement de \mathcal{S} vers \mathcal{S}' et \mathcal{A}' un affaiblissement de \mathcal{A} . Si les conditions suivantes sont vérifiées pour \mathcal{A}' :

- chaque tranche \mathcal{S}_i est une sous-classe ;
- chaque tranche \mathcal{S}_i est stable par h_i pour la composition ;
- pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ est stable par (h_i, h_j) pour la projection ;
- pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, et pour tout $r \in \mathcal{S}_i$, $\uparrow_i^j r \in \mathcal{S}_j$;
- \mathcal{S}' est algébriquement traitable

alors \mathcal{S} est algébriquement traitable (pour \mathcal{F} et pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$).

Démonstration. Pour prouver le théorème d'affinement affaibli, nous appliquons, évidemment, le théorème d'affinement, en utilisant les propriétés des sections précédentes. Par la proposition 4.3.44, nous avons juste à prouver que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ afin de prouver que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour \mathcal{F} .

Nous prouvons donc que \mathcal{S} est algébriquement traitable pour $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ en utilisant le théorème d'affinement (théorème 4.3.4).

Ses hypothèses sont satisfaites :

- $(\mathcal{A}', \mathcal{U}, \varphi)$ est un formalisme séquentiel (proposition 4.3.42).
- $H = (h_1, \dots, h_m)$ est un multi-affinement de \mathcal{S} vers \mathcal{S}' , deux sous-ensembles de \mathcal{A} .

Ses conditions d'application le sont également :

- (A1) : \mathcal{S} est algébriquement stable par H (pour \mathcal{A}'), par la proposition 4.3.33, puisque :
 - \mathcal{S} est stable par H pour la composition, par la proposition 4.3.34, puisque chaque tranche \mathcal{S}_i est stable par h_i pour la composition. En effet, cela entraîne que pour toute tranche \mathcal{S}_i et tout réseau N à 3 variables \odot -cohérent sur \mathcal{S}_i , $h_i(N)$ est encore \odot -cohérent.
 - \mathcal{S} est stable par H pour la projection, par la proposition 4.3.34, car pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ est stable par (h_i, h_j) pour la projection, et donc $\mathcal{S}_{i,j}$ est stable par (h_i, h_j) pour la projection.
- (A2) : Les réseaux sur \mathcal{S}' algébriquement cohérents (pour \mathcal{A}') sont cohérents puisque \mathcal{S}' est algébriquement traitable (pour \mathcal{A}').
- \mathcal{S} est une sous-classe car chaque \mathcal{S}_i est une sous-classe (proposition 4.3.19).
- \mathcal{S} est \uparrow -close (pour \mathcal{A}'), par la proposition 4.3.22 (car \mathcal{S} est de la forme $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ et est une sous-classe et pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, et pour tout $r \in \mathcal{S}_i$, $\uparrow_i^j r \in \mathcal{S}_j$ est satisfaite).

□

4.3.8 Limites du cadre formel proposé et des résultats de traitabilité obtenus

Nous nous intéressons dans cette section aux limites des résultats de traitabilité et plus généralement aux limites du cadre formel que nous proposons.

Remarquons, d'une part, que certaines des hypothèses des théorèmes ne sont pas nécessaires, mais seulement suffisantes, à la traitabilité algébrique. D'autre part, le théorème de découpage ne permet de démontrer que la traitabilité algébrique, or certaines sous-algèbres sont traitables sans être algébriquement traitables. C'est par exemple le cas de l'intégration lâche de RCC_8 et de MBRC le calcul des rectangles à limite minimum des régions (section 3.2.1) du fait que certains de ses scénarios algébriquement clos sont incohérents (voir la section 3.2.1). Pour ces formalismes, il faut soit considérer une analyse d'une plus grande complexité algorithmique que la clôture algébrique pour décider la cohérence, comme la BC -clôture, soit considérer un formalisme d'expressivité similaire dont les scénarios algébriquement clos sont tous cohérents. Par exemple, on peut considérer l'intégration lâche de RCC'_8 et de MBRC ou celle de RCC_8 et DIR49 au lieu de l'intégration lâche de RCC_8 et de MBRC (voir la section 3.2.1).

Pour terminer, nous rappelons que le cadre formel proposé dans ce chapitre ne s'applique qu'aux combinaisons de formalismes symétriques – bien qu'il puisse être adapté au cadre « non symétrique » (voir la section 4.2.1) – de même structure que l'intégration lâche. Ainsi, les intégrations étroites (section 3.2.2), les combinaisons d'informations hétérogènes et/ou quantitatives (section 3.5) et les combinaisons spatio-temporelles d'expressivité temporelle supérieure aux séquences temporelles (section 3.3) sont hors du cadre des multi-algèbres.

4.3.9 Illustration : combinaison taille-topologie

Nous appliquons dans cette section les résultats de ce chapitre pour retrouver les résultats de traitabilité de STC de la littérature (voir l'exemple 4.2.23 et la section 3.2.1). Il s'agit uniquement d'une illustration de ces résultats ; l'intérêt principal du cadre formel est qu'il s'applique aussi aux sous-classes des multi-algèbres de grande taille, comme les séquences spatio-temporelles. Nous commençons par étudier la sous-classe $\mathcal{S}_{RCA_8} \times \mathcal{S}_{PA}$ (voir la section 2.4.4 pour leur définitions).

Corollaire 4.3.50. $\mathcal{S}_{RCA_8} \times \mathcal{S}_{PA}$ est algébriquement traitable pour STC.

Démonstration. Pour prouver ce résultat, nous utilisons un affaiblissement arborescent de STC. Nous affaiblissons la projection de PA vers RCA_8 de la manière suivante : $\uparrow_{PA}^{RCA_8} b = \mathcal{B}_{RCA_8}$ pour tout $b \in PA$.

Nous appliquons directement le théorème de découpage affaibli (corollaire 4.3.48).

Ses hypothèses sont satisfaites :

- $\mathcal{S}_{RCA_8} \times \mathcal{S}_{PA}$ est trivialement de la forme $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$.
- STC est une intégration lâche et donc un formalisme séquentiel (proposition 4.2.22).
- STC est arborescent puisque $m = 2$ (définition 4.3.9 ; une de ses anti-arborescences plénières est $RCA_8 \rightarrow PA$).
- Les scénarios algébriquement clos de STC sont cohérents (Gerevini et Renz, 2002).
- L'affaiblissement de STC est bien un affaiblissement arborescent de STC (pour l'anti-arborescence $RCA_8 \rightarrow PA$ puisque la projection $\uparrow_{RCA_8}^{PA}$ est la même ; voir la définition 4.3.45).

Ses conditions d'application le sont également :

- \mathcal{S}_{RCA_8} et \mathcal{S}_{PA} sont des sous-algèbres.
- \mathcal{S}_{RCA_8} et \mathcal{S}_{PA} sont minimales (proposition 2.4.27).
- $\mathcal{S}_{RCA_8} \times \mathcal{S}_{PA}$ est \uparrow -distributive (par le corollaire 4.3.31 pour $\uparrow_{RCA_8}^{PA}$ et car $\uparrow_{PA}^{RCA_8}$ affaiblie est trivialement sur-distributive par rapport à la composition et l'intersection).
- pour tout $r \in \mathcal{S}_{RCA_8}$, nous avons $\uparrow_{RCA_8}^{PA} r \in \mathcal{S}_{PA}$ (lemme 4.3.6) et pour tout $r' \in \mathcal{S}_{PA}$, nous avons $\uparrow_{PA}^{RCA_8} r' = \mathcal{B}_{RCA_8} \in \mathcal{S}_{RCA_8}$ (car $\uparrow_{PA}^{RCA_8}$ est affaiblie).

□

Considérons maintenant $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 et \mathcal{Q}_8 , les trois sous-algèbres de RCC_8 maximales pour la traitabilité (voir la section 2.4.4). Cette fois, nous ne pouvons pas appliquer le théorème de découpage,

car la simplicité n'est pas satisfaite⁵ (clôre par projection puis par composition ne suffit pas à obtenir la clôture algébrique). Nous pouvons cependant appliquer le théorème d'affinement.

Corollaire 4.3.51. *Si \mathcal{S} est une des sous-algèbres $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 ou \mathcal{Q}_8 , la sous-algèbre $\mathcal{S} \times \text{PA}$ est algébriquement traitable pour STC.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème d'affinement affaibli, avec STC lui-même comme affaiblissement (on n'a pas besoin d'affaiblir les projections), en utilisant pour chaque sous-classe \mathcal{S} son affinement classique vers les relations basiques (définition 2.4.19), noté $h_{\mathcal{S}}$, et pour PA l'affinement h_{\max} .

Ses hypothèses sont satisfaites :

- STC est une intégration lâche et donc un formalisme séquentiel (proposition 4.2.22).
- $\mathcal{S} \times \text{PA}$ est trivialement de la forme $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$.
- $H = (h_{\mathcal{S}}, h_{\max})$ envoie les relations de $\mathcal{S} \times \text{PA}$ vers $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8} \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$.
- STC est trivialement un affaiblissement de STC.

Ses conditions d'application le sont également :

- \mathcal{S} et PA sont des sous-classes.
- \mathcal{S} est stable par $h_{\mathcal{S}}$ pour la composition (proposition 4.3.36) et PA est stable par h_{\max} pour la composition (proposition 4.3.35).
- $\mathcal{S} \times \text{PA}$ est stable par $(h_{\mathcal{S}}, h_{\max})$ pour la projection (lemme 4.3.37).
- pour tout $r \in \mathcal{S}$, nous avons $\uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \text{PA}$ et pour tout $r' \in \text{PA}$, nous avons $\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r' \in \mathcal{S}$ (lemme 4.3.6).
- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8} \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ est algébriquement traitable (corollaire 4.3.50). □

Nous avons ainsi retrouvé les résultats de traitabilité de STC.

4.4 Conclusion

4.4.1 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé un cadre formel permettant de représenter des connaissances, de raisonner et d'identifier des fragments traitables, de manière unifiée, dans le contexte des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles.

Nous avons, en premier lieu, généralisé la définition de formalisme qualitatif de Ligozat et Renz (2004) afin d'inclure les formalismes dont les relations basiques ne sont pas exhaustives ou qui ne possèdent pas d'égalité sur \mathcal{U} , puisqu'ils sont importants dans le cadre des combinaisons. Cette définition est cependant restreinte aux formalismes satisfaisant la propriété $\bar{r} = r$, qualifiés pour cette raison de *symétriques*, étant donné que le cadre que nous proposons requiert cette hypothèse.

Nous avons, en second lieu, introduit les multi-algèbres, la structure commune des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles. Les opérateurs d'une multi-algèbre permettent de raisonner dans le contexte de ces combinaisons. La projection s'ajoute aux opérateurs classiques et permet de propager les interdépendances entre les relations des formalismes combinés. Les concepts du cadre classique s'appliquent ou se généralisent de manière transparente. En particulier, une description est un réseau unique dont les relations sont des m -uplets de relations classiques. De plus, le mécanisme d'inférence de connaissances est toujours la clôture algébrique, qui a été généralisée pour clore à la fois par composition et par projection. Nous avons ensuite explicité la sémantique des relations des multi-algèbres, en définissant les formalismes séquentiels. Cette sémantique permet de conserver la plupart des propriétés fondamentales du cadre classique. D'une part, toute solution d'un réseau est solution d'un unique scénario, inclus dans ce réseau. D'autre part, les relations basiques sont disjointes deux à deux. De plus, tous les scénarios cohérents sont algébriquement clos. Et enfin, si les scénarios algébriquement clos sont cohérents, alors le problème de décision de la cohérence est dans NP, et on peut décider la cohérence par séparation et évaluation, en utilisant la clôture algébrique comme méthode d'élagage et d'évaluation.

⁵. Plus précisément, la simplicité n'est pas satisfaite même en considérant des affaiblissements préservant la cohérence des scénarios algébriquement clos.

En outre, nous avons identifié des conditions pour que les relations \bar{r} -cohérentes soient cohérentes, à savoir l'arborescence des interdépendances et la cohérence des relations basiques closes par projection.

De surcroît, nous avons démontré deux théorèmes identifiant des conditions pour qu'une sous-classe soit algébriquement traitable. Le premier résultat fournit des conditions pour qu'une combinaison de sous-classes traitables soit traitable. Le second résultat est complémentaire : il fournit des conditions pour qu'une sous-classe se réduise à une sous-classe traitable, et soit ainsi traitable.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux conditions des théorèmes. Nous avons, d'une part, déterminé des hypothèses plus fortes, pour les théorèmes de traitabilité, qui ont l'avantage d'être plus faciles à vérifier, comme la distributivité des opérateurs. Nous avons, d'autre part, proposé la technique d'affaiblissement qui permet, dans certains cas, de contourner le fait que certaines des hypothèses des théorèmes ne soient pas satisfaites, comme le fait qu'une sous-classe ne soit pas close par projection ou ne soit pas distributive.

Nous avons également discuté des limites d'applicabilité de ce cadre formel. En particulier, il ne permet pas de prouver la traitabilité de sous-classes traitables non algébriquement traitables, bien que l'on puisse, *a priori*, contourner ce problème en considérant un formalisme d'expressivité similaire ou en considérant d'autres procédures de décision que la clôture algébrique.

Enfin, nous avons illustré l'application de nos théorèmes en retrouvant les résultats de traitabilité de la combinaison taille-topologie STC.

4.4.2 Perspectives

Les perspectives de recherche du cadre des multi-algèbres se placent sur quatre axes.

Il y a, d'une part, l'étude et l'amélioration des techniques de décision de la cohérence. Nous avons fourni une procédure naïve pour calculer la clôture algébrique. Celle-ci doit cependant être calculable plus efficacement pour certaines familles particulières de multi-algèbres mais également dans le cadre général. La clôture algébrique devrait de plus être parallélisable. En outre, la méthode de séparation et évaluation du cadre classique permettant de décider la cohérence dans les cas intraitables doit être adaptées à ce contexte. Il y a cependant plusieurs possibilités de généralisation, et il n'est pas évident de déterminer laquelle a la meilleure performance computationnelle. Enfin, une étude de la complexité paramétrée du problème de décision de la cohérence en fonction du nombre d'entités et du nombre m de formalismes combinés devrait être menée. Cette étude serait particulièrement intéressante pour le cadre des séquences temporelles (où m correspond à la longueur de la séquence) et pour le cadre multi-échelle (où m correspond au nombre d'échelles).

D'autre part, le cadre des multi-algèbres peut être étendu en étudiant le problème de la minimalité, le problème de la redondance et en considérant d'autres techniques de décision de la cohérence. Le problème de la minimalité n'a pas encore été étudié dans le contexte des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles. L'étude de la minimalité dans le cadre des multi-algèbres permettrait ainsi d'obtenir des résultats nécessairement nouveaux dans chacun de ces contextes. Par ailleurs, l'utilisation d'autres techniques de décision de la cohérence, en particulier de complexité supérieure comme la *BC*-clôture, est nécessaire lorsque le raisonnement de la clôture algébrique n'est pas complet. Leur introduction au sein du cadre des multi-algèbres devrait permettre d'identifier des résultats de traitabilité généraux similaires.

En outre, les résultats de ce chapitre peuvent être appliqués à de nombreuses autres combinaisons : d'autres intégrations lâches, formalismes multi-échelles et séquences temporelles. En particulier, nous les appliquerons lorsque nous étudierons plus en détail le raisonnement qualitatif temporel multi-échelle dans le chapitre suivant et lorsque nous étudierons le contexte général des séquences temporelles dans le chapitre 6. Ils vont ainsi nous permettre de formaliser ces raisonnements, d'obtenir une procédure de décision de la cohérence et d'identifier des sous-classes traitables.

Enfin, le cadre des multi-algèbres doit être généralisé pour porter sur davantage de combinaisons. À cette fin, l'expressivité du cadre des multi-algèbres doit être augmentée. En particulier, il doit permettre de raisonner en présence d'entités hétérogènes associées à des schémas de partition différents, à l'instar de la combinaison de *RCC_s* avec *IC* (Gerevini et Nebel, 2002) (voir

la section 3.3.4). De plus, il est peut-être généralisable au cadre des formalismes *quasi-qualitatifs*, c'est-à-dire au cadre des « formalismes qualitatifs » dont le nombre de relations est infini (Inants, 2016).

Chapitre 5

Formalisation du raisonnement qualitatif temporel multi-échelle

5.1 Introduction

Nous avons présenté dans la section 3.4 les travaux les plus notables de l'état de l'art du raisonnement temporel et spatial multi-échelle. Nous avons relevé au cours de cette section et dans la conclusion du chapitre correspondant un certain nombre de questions et de problématiques à propos de l'état de l'art. D'une part, Euzenat (Euzenat, 2001) a proposé une axiomatisation des opérateurs de conversion ascendant et descendant entre échelles temporelles (voir la section 3.4.2). Cependant, nous ne savons pas pour quelle sémantique, c'est-à-dire pour quelles échelles et pour quel sens d'être plus précis, son cadre s'applique. Les relations qualitatives définies à une échelle n'ont en fait pas été formalisées. La cohérence des descriptions multi-échelles n'a donc jamais été étudiée. En particulier, nous ne savons pas s'il est suffisant de convertir les relations à l'échelle la plus fine pour déduire le maximum d'information à cette échelle et pour décider la cohérence. Sous cette hypothèse, la complexité de la décision de la cohérence dans le cadre multi-échelle est la même que celle du cadre classique. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, il est nécessaire de déterminer une procédure permettant de décider effectivement la cohérence et d'analyser sa complexité. D'autre part, du fait que les intervalles peuvent devenir des points par changement d'échelle, il faut être capable de raisonner à la fois avec des points et des intervalles et déterminer les opérateurs de conversion correspondants. Sans la prise en compte du changement de nature des entités, le raisonnement n'est que partiel, ce qui entraîne une perte d'information importante. Cette perte d'information peut mener à la conclusion qu'une description multi-échelle incohérente est cohérente. Cependant, contrairement à ce que l'on pourrait penser, pour résoudre ce problème, il n'est pas suffisant de déterminer les conversions pour le formalisme de Meiri (1996), qui permet de raisonner sur des points et des intervalles (voir la section 3.5.1). En effet, en plus du fait que le type des entités change par changement d'échelle, il peut devenir incertain. Le formalisme de Meiri ne permet pas de représenter cette incertitude et doit donc être généralisé.

Nous définissons en conséquence dans ce chapitre une sémantique pour les relations définies à une échelle. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre des échelles de Bettini *et al.* (Bettini *et al.*, 2000), ce qui nous permet de prouver la validité des conversions d'Euzenat. Nous introduisons également un formalisme qualitatif permettant de raisonner à propos de relations entre points et intervalles même lorsque le type des entités est incertain. Nous formalisons ensuite sa version définie à une échelle, déterminons ses conversions et montrons qu'elles sont également correctes dans le cadre des échelles de Bettini *et al.* Nous définissons par la suite le raisonnement multi-échelle dans le cadre des multi-algèbres. Dans ce cadre, c'est la clôture algébrique qui permet de convertir les relations entre les échelles et donc de déduire de nouvelles informations en présence d'informations de précisions différentes. Nous explicitons ensuite deux sémantiques possibles pour les descriptions multi-échelles, la première correspondant aux calendriers fixés et la seconde aux échelles mises en jeu dans le contexte du langage naturel. Cette seconde sémantique permet en particulier de représenter et de raisonner sur des informations telles que :

- « juste avant sa thèse, il a fait un master d'économie »,

— « juste avant de rentrer à la maison, il est allé acheter du pain ».

Remarquons que dans les deux cas nous avons la relation « juste avant », mais dans chacun de ces cas elle n'a pas la même précision. Les échelles de référence de ces deux assertions sont implicites et d'ordres de grandeur différents. Nous étudions plus spécifiquement ce second cas et analysons sa complétude et sa complexité. Nous concluons par une discussion à propos des propriétés fondamentales et des avantages du raisonnement multi-échelle.

5.2 Calcul échelonné : calcul à une échelle

Dans cette section, nous formalisons précisément les relations définies à une échelle, en nous plaçant dans le cadre de Bettini *et al.* (2000), introduit dans la section 3.4.1. Pour cela, nous définissons le concept de représentation à une échelle d'une entité. Nous introduisons ensuite le calcul des points et des intervalles, généralisant le formalisme de Meiri (1996) (présenté dans la section 3.5.1), afin de gérer l'incertitude concernant le type des entités nécessaire au raisonnement multi-échelle. Pour finir, nous nous focalisons sur la formalisation à une échelle du calcul des points, du calcul des intervalles et du calcul des points et intervalles.

5.2.1 Représentation des entités temporelles à une échelle

Nous nous intéressons tout au long de ce chapitre à trois types d'entités : les instants, les intervalles et les *entités temporelles simples* qui regroupent les points et les intervalles.

Définition 5.2.1. Une *entité temporelle (simple)* d'un ensemble ordonné T est un ensemble de la forme $\{z \in T \mid x \leq z \leq y\}$, noté $[x, y]$, avec $x \leq y$ et $x, y \in T$.

Soit $E = [x, y]$ une entité temporelle. Nous notons par E^- son instant de début x et par E^+ son instant de fin y . L'entité temporelle $[x, y]$ est qualifiée *d'intervalle* lorsque $x < y$ et de *point* lorsque $x = y$.

Les entités temporelles sont donc les intervalles généralisés, c'est-à-dire de la forme $[x, y]$ avec $x \leq y$.

Nous nous intéressons maintenant à la définition de *représentant* d'un point, d'un intervalle et d'une entité temporelle à une échelle. Le représentant d'une entité à une échelle constitue la meilleure approximation de cette entité construite à l'aide des granules de l'échelle considérée. Nous formalisons d'abord le représentant d'un instant à une échelle.

Définition 5.2.2. Le *représentant d'un instant x de \mathcal{T} à l'échelle g* , noté $\mathbf{g}(x)$, est l'indice k , s'il existe, du granule de g le contenant : $\mathbf{g}(x) = k$ si $x \in g(k)$ avec $k \in I_g$, le domaine de g .

Notons que $\mathbf{g}(x)$ n'est pas défini s'il n'existe pas un tel k . Cependant, si k existe, il est unique (définition 3.4.1).

La fonction $\mathbf{g}(x)$ est la représentation de x exprimée à partir des granules de g . Autrement dit, $\mathbf{g}(x)$ est l'approximation de x par g (représenté par l'indice correspondant de I_g). Notons que nous pouvons voir la fonction \mathbf{g} comme une sorte de fonction inverse de g .

De manière analogue, le représentant d'une entité temporelle à une échelle g est l'ensemble des granules de g la contenant ; ce qui correspond à l'entité temporelle $[i, j]$ où i (resp. j) est le représentant de son instant de début (resp. de fin).

Définition 5.2.3. Le *représentant d'une entité temporelle x de \mathcal{T} à l'échelle g* , noté $\mathbf{g}(x)$, est l'entité temporelle de I_g définie par $\mathbf{g}(x) = [\mathbf{g}(x^-), \mathbf{g}(x^+)]$. $\mathbf{g}(x)$ n'est défini que si $\mathbf{g}(x^-)$ et $\mathbf{g}(x^+)$ le sont.

Exemple 5.2.4. Une période commençant mi-mars et finissant début juin correspond à l'ensemble de granules $\{\text{mars, avril, mai, juin}\}$ de l'échelle des mois, c'est-à-dire l'entité temporelle $[\text{mars, juin}]$ ou plus précisément $[i, j]$ avec $g(i) = \text{mars}$ et $g(j) = \text{juin}$. La figure 5.1 montre les représentants de deux intervalles à deux échelles différentes.

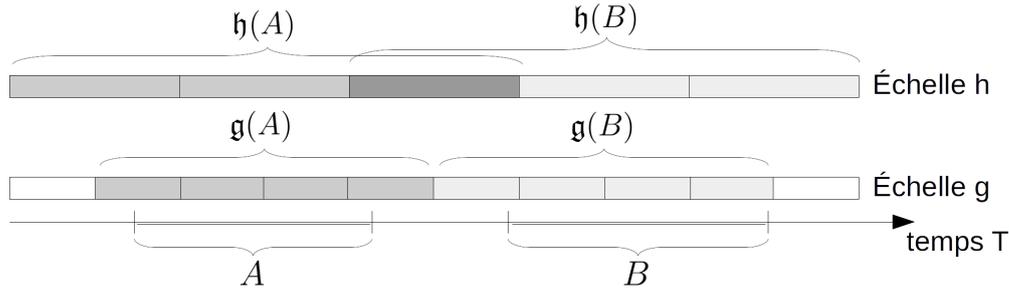


FIGURE 5.1 – Les représentants $\mathbf{g}(A)$, $\mathbf{g}(B)$, $\mathbf{h}(A)$, $\mathbf{h}(B)$ des intervalles A et B aux échelles g et h , avec g plus fine que h

Notons que le représentant d'une entité temporelle est toujours une entité temporelle, mais que si l'entité temporelle est plus précisément un intervalle, son représentant peut être un point. De ce fait, à une échelle le représentant d'une entité temporelle peut être un intervalle et à une autre échelle un point.

Exemple 5.2.5. Le représentant à l'échelle des années de la période commençant mi-mars et finissant début juin est l'ensemble de granules $\{\text{année_actuelle}\}$, c'est-à-dire l'entité temporelle ponctuelle $[\text{année_actuelle}, \text{année_actuelle}]$.

Remarque 5.2.6. Avec la première définition de représentant, celui-ci est un indice. Avec la seconde, le représentant est un ensemble d'indices.

Nous définissons maintenant le concept fondamental de *représentabilité* d'une entité à une échelle.

Définition 5.2.7. Soit $x \in \mathcal{T}$ (resp. x une entité temporelle de \mathcal{T}). x est dit *représentable à l'échelle g* , noté $x \in g$ si $\mathbf{g}(x)$ est défini, c'est-à-dire si $x \in \bigcup_{i \in I_g} g(i)$ (resp. $x^- \in \bigcup_{i \in I_g} g(i)$ et $x^+ \in \bigcup_{i \in I_g} g(i)$).

Pour conclure cette section, notons les deux propriétés fondamentales suivantes. D'une part, les granules d'une échelle sont toujours disjointes (lemme 5.2.8), et d'autre part, la représentation d'un instant à une échelle est toujours incluse dans la représentation de cet instant à une échelle moins précise (lemme 5.2.9).

Lemme 5.2.8. Soit g une échelle temporelle et soient $i, j \in I_g$. Nous avons la propriété suivante :

$$g(i) \cap g(j) \neq \emptyset \implies i = j$$

Démonstration. Par la définition d'échelle temporelle (définition 3.4.1), si $i < j$ (resp. $i > j$), on a $g(i) \cap g(j) = \emptyset$. \square

Lemme 5.2.9. Soient g et h des échelles temporelles telles que $g \preceq h$ ou $g \sqsubseteq h$ et soit $x \in \mathcal{T}$ représentable à g et à h . Nous avons la propriété suivante :

$$g(\mathbf{g}(x)) \subseteq h(\mathbf{h}(x))$$

Démonstration. On suppose que $g \preceq h$. Il existe donc un j tel que $g(\mathbf{g}(x)) \subseteq h(j)$. Puisque $x \in g(\mathbf{g}(x))$, nous avons $x \in h(j)$. Cependant, nous avons également $x \in h(\mathbf{h}(x))$. Ainsi par le lemme 5.2.8, nous obtenons $j = \mathbf{h}(x)$, d'où $g(\mathbf{g}(x)) \subseteq h(\mathbf{h}(x))$.

Supposons que $g \sqsubseteq h$. Par conséquent, il existe un $S \subseteq I_g$ tel que $\bigcup_{i \in S} g(i) = h(\mathbf{h}(x))$. Ainsi, $x \in \bigcup_{i \in S} g(i)$ et il existe alors un $i \in S$ tel que $x \in g(i)$. Or $x \in g(\mathbf{g}(x))$ par définition. Par le lemme 5.2.8, $i = \mathbf{g}(x)$, d'où $g(\mathbf{g}(x)) \subseteq h(\mathbf{h}(x))$. \square

$A r B$	$B r A$	$A^- r A^+$	$B^- r B^+$	$A^- r B^-$	$A^- r B^+$	$A^+ r B^-$	$A^+ r B^+$
$<$	$>$	$=$	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$
$\cdot a$	\bar{a}	$=$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$
$\cdot b$	\bar{b}	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$
b	\bar{b}	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$
o	\bar{o}	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$
m	\bar{m}	$<$	$<$	$<$	$<$	$=$	$<$
d	\bar{d}	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$
$\cdot d$	\bar{d}	$=$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$
s	\bar{s}	$<$	$<$	$=$	$<$	$>$	$<$
$\cdot s$	\bar{s}	$=$	$<$	$=$	$<$	$=$	$<$
f	\bar{f}	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$=$
$\cdot f$	\bar{f}	$=$	$<$	$>$	$=$	$>$	$=$
e		$<$	$<$	$=$	$<$	$>$	$=$
$=$		$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$

TABLE 5.1 – Définitions des relations entre deux entités temporelles simples A et B en fonction des relations entre leurs bornes

5.2.2 Calcul des points et intervalles

Nous avons vu dans la section précédente qu'un intervalle peut devenir un point par changement d'échelle. Nous avons donc besoin de considérer un calcul de relations plus général que le calcul des intervalles d'Allen, pour raisonner dans le cadre multi-échelle. Nous introduisons ainsi dans cette section, le calcul des points et intervalles.

Nous considérons les relations basiques entre points et intervalles, comme définies dans le formalisme de Meiri (1996) (tableaux 2.4 et 3.7), à la différence que nous nous plaçons dans le cadre équivalent mais unifié des entités temporelles. L'univers \mathcal{U} est donc l'ensemble des entités temporelles sur \mathbb{R} . Il y a ainsi trois catégories de relations basiques en fonction du type des entités temporelles. D'une part, il y a les relations entre intervalles d'Allen : b, m, o, s, d, f , leur inverses et e . D'autre part, il y a les relations entre points : $<, =, >$. Et enfin, il y a les relations entre un point et un intervalle : $\cdot b, \cdot s, \cdot d, \cdot f, \cdot a$ et leur inverses, les relations entre un intervalle et un point. Les définitions de ces 26 relations basiques, dans le contexte des entités temporelles, sont données par la table 5.1. Remarquons que ces relations basiques sont exhaustives et disjointes deux à deux. Nous notons \mathcal{B}_{PIC} l'ensemble de ces relations. Nous notons également PIC (point and interval calculus) l'ensemble des relations générées à partir de \mathcal{B}_{PIC} , c'est-à-dire l'ensemble des unions de ces relations basiques, dotées de l'union, de l'intersection, de l'inversion et de la composition faible. Les résultats de ces opérateurs se déterminent à partir des relations basiques (voir la section 2.2.3). La table de composition des relations basiques est la même que celle du formalisme de Meiri (Meiri, 1996)¹.

Dans le formalisme de Meiri, les variables sont typées. Les relations non basiques appartiennent soit à PC, soit à IC, soit elles sont des unions de relations basiques entre un intervalle et un point ou des unions de relations basiques entre un point et un intervalle. Dans le cas du calcul des points et intervalles PIC, le type des entités peut ne pas être connu. Les unions de relations basiques de catégories différentes sont en effet autorisées. Autrement dit, les relations non basiques sont des unions de n'importe quelles relations basiques et forment donc une algèbre de relations (voir la section 3.5.1). En conséquence, PIC possède une représentation canonique, que nous notons PIA (voir la section 2.2.3). Nous pouvons par exemple exprimer avec PIA la relation $x \{ \cdot b, b, m \} y$, qui signifie « y est un intervalle et soit x est un intervalle et touche ou est avant y , soit x est un point et est avant y ». Notons que nous avons en fait identifié $(\text{PIA}, \mathcal{U}, \varphi)$ et $\{\varphi(r) \mid r \in \text{PIA}\}$ avec la notation PIC. Nous effectuons plus généralement l'identification d'un formalisme qualitatif $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ avec les relations sur \mathcal{U} correspondantes $\{\varphi(r) \mid r \in \mathcal{A}\}$ tout au long de ce chapitre, afin d'alléger les notations.

1. Considérer des couples de points (x, x) au lieu de points x ne change pas la table de composition.

5.2.3 Relation échelonnée et calcul échelonné

Nous avons formalisé les représentants des entités considérées et le calcul des points et intervalles dans les sections précédentes. Nous allons maintenant définir les relations échelonnées, c'est-à-dire définies à une échelle. Nous nous plaçons dans le cadre de PC, de IC et de PIC. Cependant, nous généralisons leur interprétation en considérant que le domaine temporel est \mathcal{T} un ensemble infini totalement ordonné au lieu de \mathbb{R} . Cela ne change pas les résultats fondamentaux. En effet, les scénarios algébriquement clos sont cohérents et la structure algébrique est la même.

Exemple 5.2.10. PC est alors le formalisme qualitatif $(PA, \mathcal{T}, \varphi_{\mathcal{T}})$ avec $\varphi_{\mathcal{T}}$ intégralement définie par $\varphi_{\mathcal{T}}(\{=\}) = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{T}\}$ et $\varphi_{\mathcal{T}}(\{<\}) = \{(x, y) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid x < y\}$, où la composition de PA est la composition faible, bien qu'elle ne coïncide pas nécessairement avec la composition sur \mathcal{T} (voir la section 2.2.2).

Sans perte de généralité par rapport au cadre de Bettini *et al.*, nous supposons que $I_g \subseteq \mathcal{T}$ pour toute échelle considérée. Avec cette simplification, la définition des relations échelonnées est assez naturelle. Deux entités x et y satisfont une relation r définie à une échelle g , ce qui est noté $x r_g y$, si leur représentants à cette échelle sont définis et satisfont cette relation, c'est-à-dire si $x, y \in g$ et si $\mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y)$. Dans le cadre du calcul des points, nous avons donc :

Définition 5.2.11 (Cohen-Solal *et al.*, 2015a,b). Soient $x, y \in \mathcal{T}$ et g une échelle temporelle. Nous définissons les trois relations échelonnées suivantes : *avant à l'échelle* g notée $<_g$, *égal à l'échelle* g notée $=_g$, et *après à l'échelle* g notée $>_g$, par :

$$\begin{aligned} x <_g y &\iff x, y \in g \wedge \mathbf{g}(x) < \mathbf{g}(y) \\ x =_g y &\iff x, y \in g \wedge \mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(y) \\ x >_g y &\iff x, y \in g \wedge \mathbf{g}(x) > \mathbf{g}(y) \end{aligned}$$

Plus généralement, nous définissons les relations du calcul des points échelonné, notée SPC (scaled point calculus), comme les relations r_g définies par :

$$x r_g y \iff x, y \in g \wedge \mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y)$$

où $r \in \text{PC}$. SPC est ainsi l'ensemble $\{r_g \mid r \in \text{PC}\}$ doté des opérateurs classiques (intersection, union, inversion et composition faible)².

Notons que ces relations peuvent être vues comme des relations ternaires entre deux points et une échelle temporelle ou comme des relations binaires entre deux points paramétrées par une échelle temporelle. Notons que SPC dépend d'une échelle temporelle : nous avons tout une famille de calculs des points échelonnés. Si on considère une échelle g où toutes les entités sont représentables (ce que nous ferons dans la section 5.3.2) alors les trois relations $<_g, =_g, >_g$ sont exhaustives et disjointes deux à deux (définition 2.2.1). Plus formellement :

Proposition 5.2.12. Soient $x, y \in \mathcal{T}$ représentables à une échelle g . Nous avons la propriété suivante :

$$x (<_g \cup =_g \cup >_g) y$$

Démonstration. x et y sont représentables à g . Par conséquent, $\mathbf{g}(x)$ et $\mathbf{g}(y)$ sont définis et appartiennent à I_g , qui est un ensemble totalement ordonné. On a donc soit $\mathbf{g}(x) < \mathbf{g}(y)$, soit $\mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(y)$, soit $\mathbf{g}(x) > \mathbf{g}(y)$, c'est-à-dire soit $x <_g y$, soit $x =_g y$, soit $x >_g y$. Par union sur les relations, $x <_g y \vee x =_g y \vee x >_g y$ est équivalent à $x (<_g \cup =_g \cup >_g) y$. \square

2. Nous avons introduit la notion de relation échelonnée dans (Cohen-Solal *et al.*, 2015a,b) sous la dénomination de relation granulaire. Cette définition reformule cette notion, d'une manière plus naturelle, en utilisant le concept de représentant à une échelle.

Cependant, ces relations ne constituent pas un schéma de partition (définition 2.2.4). En effet, l'égalité à l'échelle g n'est pas l'égalité sur \mathcal{U} . Par conséquent, le calcul des points échelonné SPC ne constitue pas un formalisme qualitatif au sens de Ligozat et Renz (2004), mais il en constitue un au sens de Dylla *et al.* (2013) et au sens de notre définition de formalisme qualitatif dit symétrique (voir les sections 2.2.4 et 4.2.1). Si à l'échelle considérée certaines entités ne sont pas représentables, alors ces relations basiques ne sont plus exhaustives et SPC pour l'échelle considérée n'est plus un formalisme qualitatif au sens de la définition de Dylla *et al.* (2013). SPC reste cependant un formalisme qualitatif symétrique.

La définition des relations échelonnées dans le cadre de PIC est analogue.

Définition 5.2.13. Soient x et y des entités temporelles de \mathcal{T} , g une échelle et $r \in \text{PIC}$. La relation ternaire $x r_g y$ est satisfaite si et seulement si la relation $\mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y)$ est satisfaite et x et y sont représentables à g .

Le calcul des points et intervalles échelonné, noté SPIC (scaled point and interval calculus), est l'ensemble $\{r_g \mid r \in \text{PIC}\}$ doté des opérateurs classiques (intersection, union, inversion et composition faible).

On peut définir de manière analogue le calcul des intervalles échelonné, noté SIC.

Exemple 5.2.14. Soient g une échelle temporelle, x et y des entités temporelles. La relation $x m_g y$, c'est-à-dire « x touche y à l'échelle g », signifie que le représentant à l'échelle g de x touche le représentant à l'échelle g de y : $\mathbf{g}(x) m \mathbf{g}(y)$. Notons que x ne touche pas nécessairement y .

Nos remarques concernant SPC s'appliquent également à SPIC et à SIC.

Notons que le calcul des relations échelonnées se ramène au calcul des relations classiques à l'exception, en général, de la composition.

Lemme 5.2.15. Soient $r, r' \in \text{PC}$ (resp. $r, r' \in \text{IC}$; resp. $r, r' \in \text{PIC}$) et g une échelle. Nous avons les propriétés suivantes :

- $r_g \cup r'_g = (r \cup r')_g$
- $r_g \cap r'_g = (r \cap r')_g$
- $\bar{r}_g = \bar{r}_g$
- $r_g \diamond r'_g \subseteq (r \diamond r')_g$

Démonstration. Nous prouvons le résultat pour SPC ; la preuve est analogue pour SIC et SPIC. Soient $x, y \in \mathcal{T}$, nous avons :

$$\begin{aligned} x (r_g \cup r'_g) y &\iff x r_g y \vee x r'_g y \\ &\iff (\mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y) \vee \mathbf{g}(x) r' \mathbf{g}(y)) \wedge x, y \in g \\ &\iff \mathbf{g}(x) (r \cup r') \mathbf{g}(y) \wedge x, y \in g \\ &\iff x (r \cup r')_g y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x (r_g \cap r'_g) y &\iff x r_g y \wedge x r'_g y \\ &\iff \mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y) \wedge \mathbf{g}(x) r' \mathbf{g}(y) \wedge x, y \in g \\ &\iff \mathbf{g}(x) r \cap r' \mathbf{g}(y) \wedge x, y \in g \\ &\iff x (r \cap r')_g y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \bar{r}_g y &\iff \mathbf{g}(x) \bar{r} \mathbf{g}(y) \wedge x, y \in g \\ &\iff \mathbf{g}(y) r \mathbf{g}(x) \wedge x, y \in g \\ &\iff y r_g x \\ &\iff x \bar{r}_g y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_g \diamond r'_g &= \cup \{b_g \mid b \in \mathcal{B}_{\text{PC}} \wedge \exists x, y, z \in \mathcal{T} \wedge x r_g y \wedge y r'_g z \wedge x b_g z\} \\ &= \cup \{b_g \mid b \in \mathcal{B}_{\text{PC}} \wedge \exists x, y, z \in \mathcal{T} \wedge \mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y) \wedge \mathbf{g}(y) r' \mathbf{g}(z) \wedge \mathbf{g}(x) b \mathbf{g}(z) \wedge x, y, z \in g\} \\ &\subseteq \cup \{b_g \mid b \in \mathcal{B}_{\text{PC}} \wedge \exists i, j, k \in \mathcal{T} \wedge i r j \wedge j r' k \wedge i b k\} \\ &= (\cup \{b \mid b \in \mathcal{B}_{\text{PC}} \wedge \exists i, j, k \in \mathcal{T} \wedge i r j \wedge j r' k \wedge i b k\})_g \\ &= (r \diamond r')_g \end{aligned}$$

□

Cependant, en supposant que le nombre de granules non vides est infini, SPC (resp. SIC ; resp. SPIC) a la structure de PC (resp. IC ; resp. PIC), c'est-à-dire PA (resp. IA ; resp. PIA).

Définition 5.2.16. g est dite *infinie* si $\{g(i) \mid g(i) \neq \emptyset \wedge i \in I_g\}$ est de cardinal infini.

Proposition 5.2.17. Soient g une échelle infinie et $r, r' \in \text{PC}$ (resp. $r, r' \in \text{IC}$; resp. $r, r' \in \text{PIC}$). Nous avons la propriété suivante :

$$r_g \diamond r'_g = (r \diamond r')_g$$

Démonstration. Nous montrons le cas de SPC ; la preuve est analogue pour SIC et SPIC. Soient $r, r' \in \text{PC}$. Par le lemme 5.2.15, nous avons $(r \diamond r')_g = \bigcup \{b_g \mid b \in r \diamond r'\}$. Soit $b \in r \diamond r'$. Nous montrons premièrement que $b_g \subseteq r_g \diamond r'_g$, ce qui est suffisant pour prouver que $(r \diamond r')_g \subseteq r_g \diamond r'_g$. Puisque g est infinie, $I_g \subseteq \mathcal{T}$ et \mathcal{T} est totalement ordonné, il existe $i, j, k \in I_g$ tels que $g(i) \neq \emptyset$, $g(j) \neq \emptyset$, $g(k) \neq \emptyset$ et que $i r j r' k$ et $i b k$. Par conséquent, il existe $x, y, z \in \mathcal{T}$ tels que $\mathbf{g}(x) = i$, $\mathbf{g}(y) = j$, $\mathbf{g}(z) = k$ et tels que $\mathbf{g}(x) r \mathbf{g}(y) r' \mathbf{g}(z)$ et $\mathbf{g}(x) b \mathbf{g}(z)$, c'est-à-dire $x r_g y r'_g z$ et $x b_g z$.

Ainsi, pour tout $b \in r \diamond r'$, il existe $x, y, z \in \mathcal{T}$ tels que $x r_g y r'_g z$ et $x b_g z$. Or $r_g \diamond r'_g = \bigcup \{b_g \mid b \in \mathcal{B}_{\text{PC}} \wedge \exists x, y, z \in \mathcal{T} \ x r_g y r'_g z \wedge x b_g z\}$. Par conséquent, $b_g \subseteq r_g \diamond r'_g$ et ainsi $(r \diamond r')_g \subseteq r_g \diamond r'_g$. Puisque $r_g \diamond r'_g \subseteq (r \diamond r')_g$ (lemme 5.2.15), nous concluons que $r_g \diamond r'_g = (r \diamond r')_g$. \square

On peut ainsi représenter les relations de SPC avec des relations abstraites de PA, appliquer les opérateurs de PA pour raisonner et interpréter ensuite les relations obtenues comme des relations de SPC (voir la section 2.2.3).

Exemple. Soit g une échelle temporelle infinie. Pour calculer la composition faible de $(m \cup o)_g$ avec $(d \cup f)_g$, nous pouvons utiliser la composition faible de PC, c'est-à-dire la composition de PA. $(m \cup o)_g \diamond (d \cup f)_g = ((m \cup o) \diamond (d \cup f))_g = (o \cup s \cup d)_g$.

5.3 Calcul multi-échelle

Dans cette section, nous nous intéressons d'abord aux conversions des relations échelonnées, éléments essentiels pour raisonner avec plusieurs échelles. Ensuite, afin de ne considérer qu'une seule relation de précision, nous nous restreignons à des échelles particulières, les *systèmes de discrétisation*. Puis, nous présentons les multi-algèbres et les formalismes séquentiels du cadre multi-échelle, ce qui nous permet de formaliser le raisonnement avec plusieurs échelles temporelles. Pour finir, nous nous intéressons au raisonnement multi-échelle dans le cadre des *échelles qualitatives* présentes notamment dans le contexte du langage naturel.

5.3.1 Conversion ascendante et descendante

Dans la section précédente, nous avons défini les relations échelonnées. Nous nous intéressons, dans cette section, à la transformation de ces relations par changement d'échelle. Nous allons, en particulier, prouver la validité des opérateurs de conversion du calcul des points et du calcul des intervalles (voir la section 3.4.2), dans le cadre des échelles de Bettini *et al.*. Plus précisément, nous allons prouver ce résultat en identifiant les conversions des relations entre entités temporelles et en prouvant leur validité.

Nous commençons par étudier les conversions du calcul des points échelonné, et montrons que les opérateurs de conversion ascendante \uparrow et descendante \downarrow identifiés par Euzenat (Euzenat, 2001) (voir la section 3.4.2) correspondent bien aux notions d'échelle temporelle et de relations de précision de Bettini *et al.* (2000). Pour prouver ce résultat (proposition 5.3.2), nous nous basons sur la transformation de la relation d'ordre par changement d'échelle, entre \mathcal{T} et une échelle temporelle.

Lemme 5.3.1. Soit g une échelle temporelle et soient $x, y \in \mathcal{T}$ représentables à g . Nous avons les propriétés suivantes :

1. Si $x < y$ alors $x \leq_g y$.
2. Si $x <_g y$ alors $x < y$.

Démonstration. (1) Soient $x, y \in \mathcal{T}$ et soient $i, j \in I_g$ tels que $x \in g(i)$ et $y \in g(j)$ (x et y sont représentables). Par la définition d'une échelle temporelle (définition 3.4.1), nous avons $i < j \implies x < y$. Par contraposée, $x \geq y \implies i \geq j$ et par symétrie $x \leq y \implies i \leq j$. Ainsi, si $x < y$, nous avons $i \leq j$, c'est-à-dire $\mathbf{g}(x) \leq \mathbf{g}(y)$, soit $x \leq_g y$.

(2) Supposons que $x <_g y$, c'est-à-dire $\mathbf{g}(x) < \mathbf{g}(y)$ et $x, y \in g$. Soient $i, j \in I_g$ telles que $x \in g(i)$ et $y \in g(j)$. Nous avons $\mathbf{g}(x) = i$ et $\mathbf{g}(y) = j$, et donc $i < j$. Ainsi, par la définition d'une échelle temporelle (définition 3.4.1), nous avons $x < y$. \square

Proposition 5.3.2. *Soient g et h des échelles temporelles telles que $g \preceq h$ ou $g \sqsubseteq h$, $r \in \text{PC}$ et $x, y \in \mathcal{T}$ représentables à g et h .*

- Si $x r_g y$ alors $x (\uparrow r)_h y$.
- Si $x r_h y$ alors $x (\downarrow r)_g y$.

Démonstration. Nous commençons par prouver ce résultat pour les relations basiques.

Cas de la relation = :

Supposons que $x =_h y$ et montrons que $x \mathcal{B}_g y$. Puisque x et y sont représentables à g , nous avons $x (<_g \cup =_g \cup >_g) y$ (proposition 5.2.12). Par le lemme 5.2.15, nous obtenons effectivement que $x \mathcal{B}_g y$.

Supposons maintenant, à la place, que $x =_g y$ et montrons que $x =_h y$. Puisque $x =_g y$, nous avons $\mathbf{g}(x) = \mathbf{g}(y)$ (définition 5.2.11). Ainsi, $g(\mathbf{g}(x)) = g(\mathbf{g}(y))$. Or, par le lemme 5.2.9, nous avons $g(\mathbf{g}(x)) \subseteq h(\mathbf{h}(x))$ et $g(\mathbf{g}(y)) \subseteq h(\mathbf{h}(y))$. Ainsi, $h(\mathbf{h}(x)) \cap h(\mathbf{h}(y)) \neq \emptyset$ (puisque $x \in g(\mathbf{g}(x)) \neq \emptyset$). Par le lemme 5.2.8, nous avons donc $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(y)$, soit $x =_h y$.

Cas de la relation < :

Supposons que $x <_g y$ et montrons que $x \leq_h y$. Puisque $x <_g y$, nous déduisons que $x < y$, par le lemme 5.3.1. Par ce même lemme, nous en concluons que $x \leq_h y$.

Supposons maintenant, à la place, que $x <_h y$ et montrons que $x <_g y$. Nous avons prouvé que si $x =_g y$ alors $x =_h y$. D'une part, par contraposée, nous savons que si $x \neq_h y$ alors $x \neq_g y$. En effet, $\neg(x =_g y)$ correspond à la relation $x <_g \cup >_g y$ (par la proposition 5.2.12), ce qui revient à $x \neq_g y$ par le lemme 5.2.15. D'autre part, comme $x <_h y$, par application des deux propriétés du lemme 5.3.1, nous déduisons que $x \leq_g y$. Nous avons donc $x \neq_g y$ et $x \leq_g y$. Nous concluons que $x <_g y$, par intersection (lemme 5.2.15).

Cas de la relation > : Il est symétrique au cas de la relation <.

Cas des relations non basiques :

Nous venons de prouver que si $x b_g y$ alors $x (\uparrow b)_h y$ et que si $x b_h y$ alors $x (\downarrow b)_g y$ pour $b \in \mathcal{B}_{\text{PC}}$. Nous montrons maintenant ces propriétés pour les relations non basiques. Nous prouvons juste le cas « si $x r_g y$ alors $x (\uparrow r)_h y$ » puisque la preuve de l'autre cas est identique à une permutation près des symboles de conversion et des deux échelles.

Nous supposons donc que $x r_g y$. Cette propriété est équivalente à $x (\bigcup_{b \in r} b_g) y$ (par le lemme 5.2.15) et donc à $\bigvee_{b \in r} x b_g y$. Nous en déduisons que $\bigvee_{b \in r} x (\uparrow b)_h y$, ce qui est équivalent à $x (\bigcup_{b \in r} (\uparrow b)_h) y$, et ainsi à $x (\bigcup_{b \in r} \uparrow b)_h y$, par le lemme 5.2.15. Nous en déduisons donc $x (\uparrow r)_h y$, puisque $\uparrow r = \bigcup_{b \in r} \uparrow b$. \square

Remarquons que comme \mathcal{T} est une échelle (par identification, voir la section 3.4.1), ces conversions sont également correctes lorsque l'on convertit vers et depuis le domaine temporel.

Nous nous intéressons maintenant aux conversions des relations entre entités temporelles. Nous définissons, dans la table 5.2, les conversions des relations basiques et nous montrons qu'elles sont correctes dans la proposition suivante :

Proposition 5.3.3 (Cohen-Solal *et al.*, 2015a,b). *Soient g et h des échelles temporelles telles que $g \preceq h$ ou $g \sqsubseteq h$, $r \in \text{PIC}$ et x, y des entités temporelles de \mathcal{T} , représentables à g et h .³*

- Si $x r_g y$ alors $x (\uparrow r)_h y$.

3. Ce résultat est plus fort que celui publié dans (Cohen-Solal *et al.*, 2015a,b) où l'implication de la conversion ascendante n'est établie que dans le cas $g \preceq h$ et l'implication de la conversion descendante que dans le cas $g \sqsubseteq h$.

r	$\uparrow r$	$\downarrow r$
b	$b \cdot b \cdot \bar{a} < \bar{f} \cdot s m =$	b
$\cdot a$	$\cdot a < \cdot f =$	$\cdot a \bar{b}$
$\cdot b$	$\cdot b < \cdot s =$	$\cdot b b$
$<$	$< =$	$< \cdot b \cdot \bar{a} b$
o	$o m \cdot s s \cdot \bar{f} \bar{f} e =$	o
m	$m \cdot s \cdot \bar{f} =$	$m o b$
d	$\cdot s s \cdot d d \cdot f f e =$	d
$\cdot d$	$\cdot s \cdot d \cdot f =$	$\cdot d d$
s	$s \cdot s e =$	$s o d$
$\cdot s$	$\cdot s =$	$m o \cdot s s \cdot d d \cdot b b$
f	$f \cdot f e =$	$f d \bar{o}$
$\cdot f$	$\cdot f =$	$\bar{m} \bar{o} \cdot d d \cdot f f \cdot a \bar{b}$
e	$e =$	$e o \bar{o} s \bar{s} f \bar{f} d \bar{d}$
$=$	$=$	\mathcal{B}

TABLE 5.2 – Conversions des relations basiques entre points et intervalles ; la conversion des relations inverses est donnée par les formules $\uparrow \bar{b} = \overline{\uparrow b}$ et $\downarrow \bar{b} = \overline{\downarrow b}$

— Si $x r_h y$ alors $x (\downarrow r)_g y$.

Démonstration. Pour prouver ces propriétés pour les relations basiques, nous représentons chaque relation basique entre entités temporelles à l'échelle g comme une conjonction de relations de SPC entre leurs bornes à cette échelle, en utilisant la définition 5.2.13, la table 5.1 et la définition 5.2.11. En appliquant la proposition 5.3.2, nous déduisons une conjonction de disjonctions de relations basiques de SPC définies à l'échelle h . En appliquant la distributivité entre la conjonction et la disjonction et en traduisant ces relations entre bornes en relations entre entités temporelles en utilisant la définition 5.2.11, la table 5.1 et la définition 5.2.13, nous trouvons ainsi la table 5.2.

Par exemple, supposons $A s_g B$. On a $\mathfrak{g}(A) s \mathfrak{g}(B)$, soit $\mathfrak{g}(A^-) = \mathfrak{g}(B^-) < \mathfrak{g}(A^+) < \mathfrak{g}(B^+)$ et donc $A^- =_g B^- <_g A^+ <_g B^+$. En conséquence, nous avons $A^- =_h B^- \leq_h A^+ \leq_h B^+$. Ainsi, $\mathfrak{h}(A^-) = \mathfrak{h}(B^-) \leq \mathfrak{h}(A^+) \leq \mathfrak{h}(B^+)$, ce qui correspond à 4 lignes possibles dans la table 5.1 : $\mathfrak{h}(A^-) = \mathfrak{h}(B^-) < \mathfrak{h}(A^+) < \mathfrak{h}(B^+)$, $\mathfrak{h}(A^-) = \mathfrak{h}(B^-) = \mathfrak{h}(A^+) < \mathfrak{h}(B^+)$, $\mathfrak{h}(A^-) = \mathfrak{h}(B^-) < \mathfrak{h}(A^+) = \mathfrak{h}(B^+)$ et $\mathfrak{h}(A^-) = \mathfrak{h}(B^-) = \mathfrak{h}(A^+) = \mathfrak{h}(B^+)$. Nous avons donc $\mathfrak{h}(A) \{s, \cdot s, e, =\} \mathfrak{h}(B)$. Finalement, nous concluons que $A \{s, \cdot s, e, =\}_h B$.

La preuve du cas des relations non basiques est analogue à celle de la proposition 5.3.2. \square

Ainsi, par cette proposition, si on sait que $g \preceq h$ et que $A \{\cdot b, b, m\}_h B$, on en déduit que $A \{\cdot b, b, m, o\}_g B$ par conversion descendante. Notons qu'en supposant qu'à chaque échelle les entités temporelles sont des intervalles, nous retrouvons la table de conversion des relations d'intervalles d'Euzenat. Nous avons en effet les formules suivantes :

$$\uparrow_{\text{IC}} r = (\uparrow_{\text{PIC}} r) \cap \mathcal{B}_{\text{IC}} \quad \downarrow_{\text{IC}} r = (\downarrow_{\text{PIC}} r) \cap \mathcal{B}_{\text{IC}}$$

avec $r \in \text{IC}$, $\uparrow_{\mathcal{F}}$ et $\downarrow_{\mathcal{F}}$ les conversions ascendante et descendante du calcul \mathcal{F} .

Remarquons, pour terminer cette section, le lien entre les conversions et le graphe de voisinage des relations entre entités temporelles. Nous avons « b est voisin de b' si et seulement si $b' \subseteq \uparrow b$ ou $b' \subseteq \downarrow b$ ». La réduction transitive⁴ du graphe de voisinage de PIC orienté par rapport à la conversion ascendante est représentée dans la figure 5.2. Plus précisément, nous avons $b \rightarrow b'$ dans ce graphe si b et b' sont voisins, si $b' \subseteq \uparrow b$ et s'il n'existe pas de chemin (de longueur supérieure à

4. La réduction transitive d'un graphe est le graphe dont les arcs déductibles par transitivité ont été retirés. La réduction transitive est une représentation compacte d'une relation transitive.

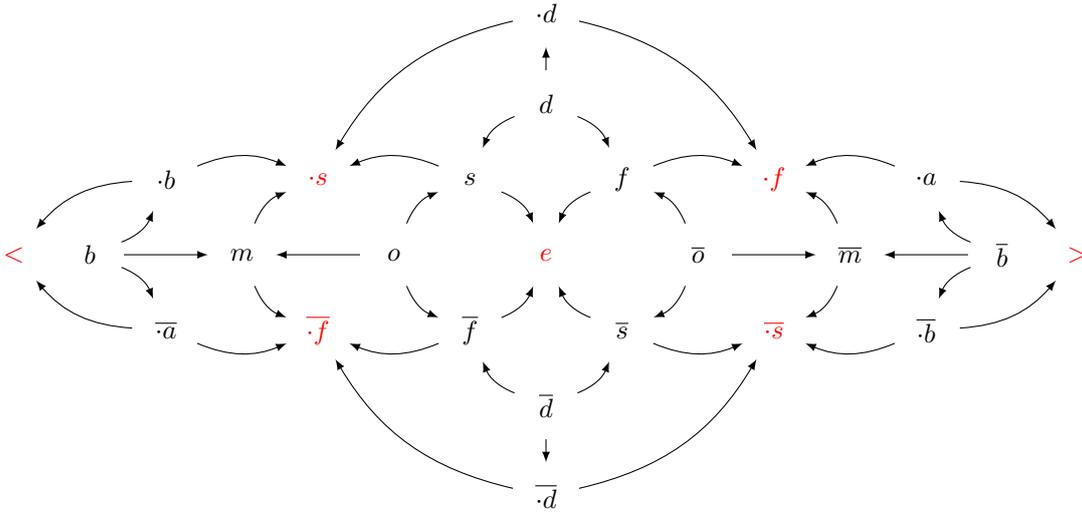


FIGURE 5.2 – Réduction transitive du graphe de voisinage des relations basiques de PIC orienté par la conversion ascendante ; la relation = a été retirée du graphe pour le rendre planaire. Les relations rouges r sont reliées à la relation = : nous avons $r \rightarrow =$

un) de b vers b' . Ainsi, la conversion ascendante d'une relation basique est indiquée par ce graphe. Plus précisément, la conversion ascendante de $b \in \mathcal{B}$ est l'ensemble des relations accessibles à partir de b dans la figure 5.2. Ce graphe orienté encode également la conversion descendante, puisque la conversion ascendante et la conversion descendante des entités considérées vérifient l'axiome suivant d'Euzenat, appelé *principe de compatibilité*⁵ :

$$b' \subseteq \uparrow b \iff b \subseteq \downarrow b'.$$

Ainsi, nous avons $b \subseteq \downarrow b'$ si et seulement si b' est accessible à partir de b dans le graphe de la figure 5.2.

5.3.2 Systèmes de discrétisation

Nous nous intéressons dans les sections suivantes à des descriptions dont les entités sont représentables à chacune des échelles considérées. Sous cette hypothèse, dans le cadre qualitatif, se restreindre aux échelles constituant des partitions de \mathcal{T} n'entraîne que peu de différences. D'une part, nous avons vu que la présence ou l'absence de trous ne change pas les conversions. Celles-ci sont identiques quelle que soit la relation de précision considérée⁶ (sous l'hypothèse de représentabilité). D'autre part, étant donné que toutes les entités sont représentables, transformer les échelles considérées en partition, en « bouchant les trous », c'est-à-dire en complétant les granules non convexes et en ajoutant les granules intermédiaires manquants, ne change pas les relations échelonnées des entités. Par contre, se restreindre aux partitions nous offre un avantage. Comme nous allons le voir, les deux relations de précision coïncident.

Les partitions sont des échelles dont les granules *paivent* intégralement le domaine temporel \mathcal{T} .

Définition 5.3.4. Soit g une échelle de \mathcal{T} .

— g est une *partition* de \mathcal{T} si $\mathcal{T} \preceq g$.

Une partition est donc une échelle qui vérifie la propriété $\bigcup_{i \in I_g} g(i) = \mathcal{T}$. Ainsi, avec les partitions, toutes les entités sont représentables.

5. L'axiome est appelé *inverse compatibility* dans les articles en langue anglaise.

6. La différence entre les deux relations de précision provient de l'absence ou de la présence de trous au sein des échelles (voir la définition 3.4.3).

Proposition 5.3.5. Soient g, h des partitions de \mathcal{T} . Nous avons la propriété suivante :

$$- g \preceq h \iff g \sqsubseteq h.$$

Démonstration. **Cas $\preceq \implies \sqsubseteq$:**

Nous supposons que $g \preceq h$. Soit $j \in I_h$. Nous montrons qu'il existe $S \subseteq I_g$ tel que $h(j) = \bigcup_{i \in S} g(i)$, ce qui prouve que $g \sqsubseteq h$. Soit $S = \{i \in I_g \mid g(i) \cap h(j) \neq \emptyset\}$.

D'une part, nous avons $h(j) \subseteq \bigcup_{i \in S} g(i)$ puisque $h(j) \subseteq \mathcal{T} = \bigcup_{i \in I_g} g(i)$ car g et h sont des partitions de \mathcal{T} et $h(j) \cap (\mathcal{T} \setminus \bigcup_{i \in S} g(i)) = \emptyset$ par la définition de S .

D'autre part, soit $i \in S$. Par la définition de \preceq , il existe j' tel que $g(i) \subseteq h(j')$. Par conséquent, $h(j) \cap h(j') \neq \emptyset$. Par le lemme 5.2.8, on a $j = j'$. Ainsi, pour tout $i \in S$, nous avons $g(i) \subseteq h(j)$ et donc $\bigcup_{i \in S} g(i) \subseteq h(j)$. Par conséquent, nous concluons que $\bigcup_{i \in S} g(i) = h(j)$.

Cas $\sqsubseteq \implies \preceq$:

Nous supposons que $g \sqsubseteq h$. Soit $i \in I_g$. Nous montrons qu'il existe $j \in I_h$ tel que $g(i) \subseteq h(j)$, ce qui prouve que $g \preceq h$. Puisque h est une partition, nous avons $g(i) \subseteq \bigcup_{j' \in I_h} h(j')$. Soit $j \in I_h$ tel que $g(i) \cap h(j) \neq \emptyset$. Par la définition de \sqsubseteq , il existe $S \subseteq I_g$ tel que $h(j) = \bigcup_{i' \in S} g(i')$. Par conséquent, $g(i) \cap \bigcup_{i' \in S} g(i') \neq \emptyset$ et ainsi il existe un $i' \in S$ tel que $g(i) \cap g(i') \neq \emptyset$. Par le lemme 5.2.8, nous avons donc $i = i'$ et ainsi $i \in S$. Par conséquent, nous avons donc $g(i) \subseteq h(j)$, d'où $g \preceq h$. \square

Ainsi, avec les partitions, les deux relations de précision sont équivalentes. Nous allons en fait dans la suite considérer une relation un peu plus restrictive, la relation \prec , afin d'exclure les échelles équivalentes.

Définition 5.3.6. Soient g et h deux échelles.

- g est équivalente à h , noté $g \equiv h$,⁷ si et seulement si $\{g(i) \mid i \in I_g\} = \{h(j) \mid j \in I_h\}$.
- g est strictement plus fine que h , noté $g \prec h$, si et seulement si $g \preceq h$ et $\neg(g \equiv h)$.

Exemple 5.3.7. Soient j l'échelle des jours et j' l'échelle des jours décalée de 5 jours. Nous avons $j(k+5) = j'(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $j \equiv j'$.

Soit m l'échelle des mois. Nous avons $j \prec m$.

Dans la suite, nous nous intéressons exclusivement aux ensembles de partitions infinies incluant \mathcal{T} , que nous appelons systèmes de discrétisation.

Définition 5.3.8. Nous appelons *système de discrétisation* de \mathcal{T} un ensemble de partitions infinies \mathcal{G} sur \mathcal{T} vérifiant $\mathcal{T} \in \mathcal{G}$.

Le calendrier grégorien ($\mathcal{T} = \mathbb{R}$ et les échelles des jours, des semaines, des mois et des années) constitue un exemple de système de discrétisation.

5.3.3 Multi-algèbre échelonnée et calcul multi-échelle

Nous formalisons dans cette section le raisonnement multi-échelle du calcul des points, du calcul des intervalles et du calcul des points et intervalles grâce au cadre des multi-algèbres. Il nous suffit pour cela de définir les multi-algèbres et les formalismes séquentiels associés. En effet, les notions de cohérence, de réseau de contraintes et de clôture algébrique pour inférer de nouvelles connaissances, détaillées dans le chapitre 4, en découlent directement.

Puisque la structure de SPC est l'algèbre des points PA (voir la section 5.2.3), nous pouvons en conséquence utiliser l'algèbre des points PA pour raisonner, en interprétant ses relations comme les relations échelonnées de SPC. Le même constat s'applique aux relations échelonnées entre intervalles et entre entités temporelles par rapport à IA et PIA. Cela justifie que les multi-algèbres des descriptions multi-échelles aient toutes la même forme. Ainsi, \mathcal{A}_i est associée à g_i et les projections sont les conversions correspondant à l'ordre des g_i . Lorsque les g_i constituent un système de discrétisation, l'ordre associé est donc un demi-treillis inférieur (c'est-à-dire un ordre partiel strict où tout couple d'éléments possède une borne inférieure), puisque tout couple d'échelles possède une échelle plus fine, \mathcal{T} .

7. Bettini *et al.* (2000) utilisent une relation similaire, notée \leftrightarrow , appelée *équivalence par décalage*.

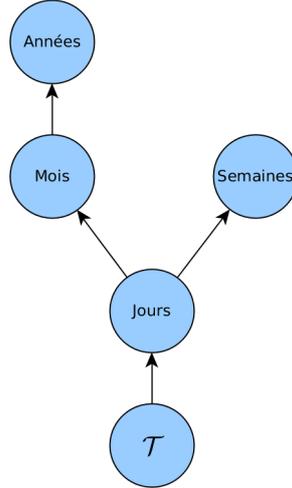


FIGURE 5.3 – Demi-treillis des échelles du domaine temporel \mathcal{T} , des jours, des semaines et des mois

Définition 5.3.9. Soit $G = (\{g_i\}_{i=1}^m, <)$ avec $\{g_i\}_{i=1}^m$ un ensemble fini quelconque et $<$ une relation d'ordre sur $\{g_i\}_{i=1}^m$ formant un demi-treillis inférieur.

Nous notons SPA^G (resp. SIA^G ; resp. SPIA^G) la multi-algèbre de PA (resp. IA; resp. PIA), dite *échelonnée* par G , de produit cartésien PA^m (resp. IA^m ; resp. PIA^m) doté des projections définies, pour tout $b \in \mathcal{B}$, par :

- $\uparrow_i^j b = \uparrow b$ et $\downarrow_j^i b = \downarrow b$ lorsque $g_i < g_j$;
- $\uparrow_i^j b = \mathcal{B}$ lorsque ni $g_i < g_j$ ni $g_j < g_i$ ne sont satisfaites,

où \uparrow et \downarrow sont les conversions ascendante et descendante correspondantes (tables 3.3, 3.4 et 5.2).

Remarque 5.3.10. Le couple G est abstrait afin d'avoir une définition unique de multi-algèbre pour les deux sémantiques de descriptions multi-échelles que nous allons considérer.

Notons que les projections de ces multi-algèbres ne dépendent pas de la nature exacte des échelles mais seulement de leur ordre de précision. Notons également que nous généralisons la multi-algèbre du calcul des points multi-échelle du chapitre 4 (exemple 4.2.13), puisque nous autorisons un ordre non total sur les échelles.

Exemple 5.3.11. Considérons \mathcal{G} le système de discrétisation suivant : le temps $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, l'échelle des jours notée « jour », l'échelle des mois notée « mois » et l'échelle des semaines notée « sem ». L'ensemble \mathcal{G} forme un demi-treillis inférieur pour \prec . Le demi-treillis associé est la clôture transitive de « $\mathbb{R} \prec$ jour », « jour \prec mois » et « jour \prec sem » (nous n'avons ni « sem \prec mois » ni « mois \prec sem »). Celui-ci est illustré dans la figure 5.3. Soit $G = (\mathcal{G}, \prec)$. La multi-algèbre SIA^G correspondante est $\text{IA} \times \text{IA} \times \text{IA} \times \text{IA}$ doté, en particulier, des projections $\uparrow_{\text{jour}}^{\text{mois}} r = \uparrow r$, $\uparrow_{\text{sem}}^{\text{jour}} r = \downarrow r$ et $\uparrow_{\text{mois}}^{\text{sem}} r = \mathcal{B}$. Par exemple, $(\{b, s\}, \{b, o\}, \{m\}, \{m, e\})$ est une de ses relations. Cette relation n'est pas close par projection, en particulier $s \notin \downarrow\{b, o\}$, et sa clôture est (b, b, m, m) (voir la table 3.4).

Nous allons maintenant expliciter les formalismes séquentiels associés aux multi-algèbres SPA^G , SIA^G et SPIA^G .

Définition 5.3.12. Soient $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^m$ un système de discrétisation et $G = (\mathcal{G}, \prec)$. Le calcul des points (resp. des intervalles; resp. des points et intervalles) multi-échelle associé à \mathcal{G} , noté $\text{SPC}^{\mathcal{G}}$ (resp. $\text{SIC}^{\mathcal{G}}$; resp. $\text{SPIC}^{\mathcal{G}}$) est le formalisme séquentiel⁸ $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ où :

- \mathcal{A} est SPA^G (resp. SIA^G ; resp. SPIA^G).
- \mathcal{U} est l'ensemble des instants (resp. intervalles; resp. entités temporelles) de \mathcal{T} .
- $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i)$ avec $\varphi_i(r)$ l'interprétation à l'échelle g_i de $r : \varphi_i(r) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \mid (\mathfrak{g}_i(x), \mathfrak{g}_i(y)) \in \varphi'(r)\}$ où r est une relation et φ' l'interprétation de PC (resp. IC; resp. PIC).

8. La preuve qu'il s'agisse bien d'un formalisme séquentiel est similaire à la preuve de la proposition 4.2.22.

Exemple 5.3.13. Soit le réseau N suivant sur SPIA^G , avec G comme défini dans l'exemple 5.3.11 où $g_1 = \mathcal{T}$, $g_2 = \text{jour}$, $g_3 = \text{sem}$ et $g_4 = \text{mois}$:

- $N_2^{AB} = \{b\}$, $N_3^{AB} = \{=\}$,
- $N_2^{BC} = \{b\}$, $N_3^{BC} = \{<\}$,
- $N_i^{xy} = \mathcal{B}$ sinon (avec $i \in \{1, \dots, 4\}$ et $x, y \in \{A, B, C\}$).

Cette description signifie que l'entité temporelle A est avant l'entité temporelle B , elle même avant l'entité temporelle C à l'échelle des jours ; que les entités temporelles A et B ont lieu durant la même semaine et qu'elles ont lieu au moins une semaine avant la semaine durant laquelle a lieu l'entité temporelle C .

La clôture algébrique de ce réseau n'est pas trivialement incohérente. Ce réseau est en fait cohérent. Notons respectivement L_8 , M_{18} , J_8 , S_{18} , L_8^+ , J_{18}^+ les dates suivantes : lundi 8h de cette semaine, mercredi 18h de cette semaine, jeudi 8h de cette semaine, samedi 18h de cette semaine, lundi 8h de la semaine prochaine et jeudi 18h de la semaine prochaine. Une solution de ce réseau est la famille suivante : $u_A = [L_8, M_{18}]$, $u_B = [J_8, S_{18}]$ et $u_C = [L_8^+, J_{18}^+]$. Si nous notons M_{20} et D_{18}^- les dates mercredi 20h de cette semaine et dimanche 18h de la semaine précédente, la famille $u_A = [D_{18}^-, M_{18}]$, $u_B = [M_{20}, S_{18}]$ et $u_C = [L_8^+, J_{18}^+]$ n'est pas une solution car u_A n'est pas incluse dans une semaine (elle n'est pas un point à l'échelle des semaines) et car nous avons la relation *touche* (m) à l'échelle des jours entre u_A et u_B au lieu de la relation *avant* (b) à l'échelle des jours.

Remarque 5.3.14. Les formalismes SPC^G , SIC^G et SPIC^G ne constituent pas des intégrations lâches au sens de la définition 4.2.20 : pour certaines échelles, on peut trouver des projections plus précises. Ils constituent seulement des affaiblissements d'intégrations lâches de calculs échelonnés à des échelles différentes (voir la définition 4.3.40).

Remarquons pour conclure que pour certains systèmes de discrétisation, il existe des scénarios algébriquement clos incohérents. Par conséquent, le raisonnement n'est pas complet pour un grand nombre de systèmes de discrétisation.

5.3.4 Raisonnement avec des échelles qualitatives

Nous nous intéressons dans cette section à une variante du raisonnement multi-échelle, que nous appelons *raisonnement multi-échelle qualitatif*. Il se distingue du raisonnement qualitatif multi-échelle, puisque dans le cas du raisonnement multi-échelle qualitatif, les échelles sont également *qualitatives*. Avec cette variante, nous nous plaçons dans le cadre où les échelles ne sont pas connues, bien que l'on connaisse leur précision relative, comme c'est le cas dans le contexte du langage naturel (voir la section 3.4.2).

Exemple 5.3.15. On veut pouvoir raisonner en présence d'informations telles que « l'intervalle A est juste avant l'intervalle C » et « B est bien avant C ». Une des représentations multi-échelles possibles est « $A b_g C$, $A =_h C$ » et « $B b_g C$, $B <_h C$ » avec g et h des échelles *inconnues* telles que $g \prec h$. De cette représentation, nous concluons que $A \bar{b}_g B$. Évidemment, pour exprimer une relation « juste avant » ayant un sens moins précis, on peut utiliser des relations non basiques. Par exemple, « juste avant » peut se représenter par $A b_g C$, $A \{m, \cdot s, \cdot \bar{f}, =\}_h C$. « Juste avant » peut également être représentée avec plus de deux échelles qualitatives afin d'avoir une représentation plus précise.

Une description temporelle multi-échelle qualitative peut en fait être représentée par un réseau sur la multi-algèbre SPA^G , SIA^G ou SPIA^G où G est un ensemble de variables d'échelle formant un demi-treillis inférieur, représentant la précision relative des échelles inconnues.

Définition 5.3.16. Une *description d'échelles qualitatives* est un couple $G = (G, <)$ où G est un ensemble fini de variables d'échelle et $<$ est une relation d'ordre sur G formant un demi-treillis inférieur.

Une *description temporelle multi-échelle qualitative* sur PC (resp. IC ; resp. PIC) est un réseau sur SPA^G (resp. SIA^G ; resp. SPIA^G) où G est une description d'échelles temporelles qualitatives.

Exemple 5.3.17. Le couple $G = (\{g_1, g_2\}, \{(g_1, g_2)\})$, qui signifie $g_1 < g_2$ avec g_1 et g_2 des variables d'échelle, est une description d'échelles qualitatives.

La description de l'exemple 5.3.15 est une description temporelle multi-échelle qualitative sur PIC. Elle s'exprime par le réseau sur $\text{SPIA}^{\mathbb{G}}$ suivant :

- $N_1^{AC} = \{b\}$, $N_2^{AC} = \{=\}$,
- $N_1^{BC} = \{b\}$, $N_2^{BC} = \{<\}$.

Nous explicitons maintenant la cohérence des descriptions de ce contexte. Une description temporelle multi-échelle qualitative est cohérente s'il existe un ensemble d'échelles temporelles de \mathbb{R} satisfaisant les relations de précision spécifiées telles que la description temporelle est cohérente pour ces échelles. Plus formellement :

Définition 5.3.18. Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, <)$ une description d'échelles qualitatives. Un réseau N sur $\text{SPA}^{\mathbb{G}}$ (resp. $\text{SIA}^{\mathbb{G}}$; resp. $\text{SPIA}^{\mathbb{G}}$) est dit *cohérent pour des échelles qualitatives* s'il existe un système de discrétisation $\mathcal{G} = \{p_g\}_{g \in \mathbb{G}}$ de \mathbb{R} tel que :

- pour tous $g, h \in \mathbb{G}$, si $g < h$ alors $p_g < p_h$,
- N est cohérent pour $\text{SPC}^{\mathcal{G}}$ (resp. $\text{SIC}^{\mathcal{G}}$; resp. $\text{SPIC}^{\mathcal{G}}$).

La clôture algébrique permet également de raisonner dans ce contexte, puisque les opérateurs sont bien corrects par rapport à cette notion de cohérence.

Exemple 5.3.19. La clôture algébrique du réseau N sur $\text{SPIA}^{\mathbb{G}}$ de l'exemple 5.3.17 est le réseau suivant :

- $N_1^{AC} = \{b\}$, $N_2^{AC} = \{=\}$,
- $N_1^{BC} = \{b\}$, $N_2^{BC} = \{<\}$,
- $N_1^{AB} = \{\bar{b}\}$, $N_2^{AB} = \{>\}$.

Si nous savions en plus que $N_1^{AB} = \{b\}$, la clôture algébrique aurait été trivialement incohérente et nous aurions conclu à l'incohérence de cette description multi-échelle.

Remarquons que nous ne pouvons pas définir de formalismes séquentiels dans ce contexte, puisqu'il y a des variables additionnelles non décrites par le réseau et qui influent sur sa cohérence.

Remarque 5.3.20. Bien que l'on puisse n'avoir ni $g < h$ ni $h < g$ entre deux variables d'échelle, une solution peut satisfaire $p_g < p_h$ ou $p_h < p_g$. L'absence de relations entre des variables d'échelle revient à imposer la *relation universelle entre échelles*.

Nous avons formalisé la représentation et le raisonnement dans ce contexte et nous avons remarqué que le raisonnement est correct. Cependant, une question importante se pose : le raisonnement est-il complet ? Autrement dit, la clôture algébrique peut-elle être utilisée pour décider la cohérence ? La réponse à cette question est positive.

Proposition 5.3.21 (Cohen-Solal *et al.*, 2015a,b). Soit $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, <)$ une description d'échelles qualitatives. Les scénarios algébriquement clos sur $\text{SPA}^{\mathbb{G}}$ (resp. $\text{SIA}^{\mathbb{G}}$; resp. $\text{SPIA}^{\mathbb{G}}$) sont cohérents pour des échelles qualitatives.

Démonstration. Nous prouvons le cas de SPA. Pour SIA et SPIA, n'importe quel scénario algébriquement clos N sur $\text{SIA}^{\mathbb{G}}$ (resp. $\text{SPIA}^{\mathbb{G}}$) est traduisible en un scénario algébriquement clos sur $\text{SPA}^{\mathbb{G}}$ équivalent (par la table 5.1), cohérent par la preuve ci-dessous, ce qui implique la cohérence de N .

Soit N un scénario algébriquement clos sur $\text{SPA}^{\mathbb{G}}$ avec \mathbb{E} l'ensemble des variables d'instant de $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ de N et $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, <)$ une description qualitative d'échelles. Nous notons $x r_g y$ la contrainte entre les variables x et y du réseau N_i correspondant à la variable d'échelle g . Nous assignons à chaque variable x de \mathbb{E} , un instant u_x de \mathcal{T} et à chaque variable g de \mathbb{G} une échelle p_g , de telle façon que l'ordre partiel de \mathbb{G} et que les contraintes du réseau N soient satisfaits : si $g < h$ alors $p_g < p_h$ et si $x r_g y$ alors $u_x r_{p_g} u_y$.

Construction des instants :

Comme N est algébriquement clos, le réseau N_1 de l'échelle $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ est clos par composition et est sur PC. Il est ainsi cohérent. Par conséquent, il existe une famille $\{u_x\}_{x \in \mathbb{E}} \subseteq \mathcal{T}$ des variables $x \in \mathbb{E}$ de N qui satisfait toutes les contraintes de N_1 .

Nous notons $m = \min_{x \in \mathbf{E}} u_x$ le plus petit point et $M = \max_{x \in \mathbf{E}} u_x$ le plus grand point. Soit $x_M \in \mathbf{E}$ tel que $u_x = M$.

Nous retirons de \mathbf{G} la borne inférieure, puisque celle-ci correspond (nécessairement) à \mathcal{T} et est ainsi trivialement instanciée.

Construction des échelles :

Pour chaque $g \in \mathbf{G}$, nous notons $\{C_1^g, \dots, C_{k_g}^g\}$ l'ensemble quotient $\mathbf{E}/=_{\mathcal{G}}$ ordonné par la structure quotient de la relation d'ordre $<_g$ par la relation d'équivalence $=_g$. En d'autres termes, les C_i^g sont les classes d'équivalence pour $=_g$ (les C_i^g forment une partition de \mathbf{E} vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, la propriété $x =_g y \iff \exists i \in \{1, \dots, k_g\} \ x, y \in C_i^g$) ordonnés de façon à ce que pour tous $x \in C_i^g$ et $y \in C_j^g$, $i < j \iff x <_g y$ (ce qui est possible puisque le réseau de l'échelle g est clos par composition). Remarquons que pour tout g , $x_M \in C_{k_g}^g$. En effet, nous avons pour tous $g \in \mathbf{G}$ et $x \in \mathbf{E}$, $x \leq_g x_M$ car $x \leq_{\mathcal{T}} x_M$ et N est clos par conversion ascendante.

Nous construisons maintenant l'échelle p_g pour chaque variable d'échelle $g \in \mathbf{G}$:

- $I_{p_g} = \mathbb{Z}$,
- $p_g(i) = [m + i - 1, m + i[$ pour $i \leq 0$,
- $p_g(i) = [\min_{x \in C_i^g} u_x, \min_{x \in C_{i+1}^g} u_x[$ pour $i \in \{1, \dots, k_g - 1\}$,
- $p_g(k_g) = [\min_{x \in C_{k_g}^g} u_x, M + 1[$,
- $p_g(i) = [M + i - k_g, M + i + 1 - k_g[$ pour $i > k_g$.

Ainsi, p_g est bien une partition infinie. De plus, $\{\mathcal{T}\} \cup \{p_g \mid g \in \mathbf{G}\}$ forme bien un système de discrétisation. Rappelons que nous notons I^- la borne de début de l'intervalle I et I^+ sa borne de fin.

Satisfaction des relations échelonnées :

Soient $x, y \in \mathbf{E}$ et $g \in \mathbf{G}$. Nous montrons que si $x r_g y$ alors $u_x r_{p_g} u_y$.

Nous montrons d'abord que si $z \in C_i^g$ alors $u_z \in p_g(i)$ (avec $i \in \{1, \dots, k_g\}$). Soit $z \in C_i^g$.

- D'une part, nous avons $u_z < p_g(i)^+$, puisque :
 - soit $i < k_g$ et alors pour tout $x \in C_{i+1}^g$, nous avons $z <_g x$. Ainsi, $z <_{\mathcal{T}} x$ pour tout $x \in C_{i+1}^g$ (car N est clos par conversion descendante). Par conséquent, $u_z < u_x$ pour tout $x \in C_{i+1}^g$, d'où $u_z < \min_{x \in C_{i+1}^g} u_x$;
 - soit $i = k_g$ et donc $u_z < M + 1$, par la définition de M .
- D'autre part, comme $z \in C_i^g$, nous avons $\min_{x \in C_i^g} u_x \leq u_z$. Ainsi, $p_g(i)^- \leq u_z$.

Par conséquent, nous avons $u_z \in p_g(i)$.

Nous vérifions maintenant les contraintes échelonnées :

- si $x <_g y$, il existe $i, j \in \{1, \dots, k_g\}$ tels que $x \in C_i^g$, $y \in C_j^g$ avec $i < j$. Par conséquent, $u_x \in p_g(i)$ et $u_y \in p_g(j)$ avec $i < j$. Ainsi, $u_x <_{p_g} u_y$.
- si $x =_g y$, il existe $i \in \{1, \dots, k_g\}$ tel que $x, y \in C_i^g$. Ainsi, $u_x, u_y \in p_g(i)$, d'où $u_x =_{p_g} u_y$.

Satisfaction des relations entre échelles :

Soient $g, h \in \mathbf{G}$ telles que $g < h$. Nous montrons que pour tout $i \in I_{p_g}$, il existe $j \in I_{p_h}$ tel que $p_g(i) \subseteq p_h(j)$, c'est-à-dire $p_g \prec p_h$.

Nous montrons d'abord que si $C_i^g \subseteq C_j^h$ alors $p_g(i) \subseteq p_h(j)$, pour tous $i \in \{1, \dots, k_g\}$ et $j \in \{1, \dots, k_h\}$. Soient $i \in \{1, \dots, k_g\}$, et $j \in \{1, \dots, k_h\}$.

- D'une part, comme $C_i^g \subseteq C_j^h$, nous avons $\min_{x \in C_j^h} u_x \leq \min_{x \in C_i^g} u_x$, soit $p_h(j)^- \leq p_g(i)^-$.
- D'autre part :
 - soit $i < k_g$ et $j < k_h$ et alors pour tout $z \in C_j^h$ et tout $x \in C_{j+1}^h$, nous avons $z <_h x$. Comme N est clos par conversion descendante, nous avons $z <_g x$. Puisque $C_i^g \subseteq C_j^h$, pour tout $z' \in C_i^g$ et tout $x \in C_{j+1}^h$, nous avons $z' <_g x$. Soit ℓ tel que $x \in C_{\ell}^g$, nous avons donc $i < \ell$ et plus précisément $i + 1 \leq \ell$. Par conséquent, pour tout $z'' \in C_{i+1}^g$ et tout $x \in C_{j+1}^h$, $z'' \leq_g x$. Ainsi, nous avons :
 - soit $z'' =_g x$ et donc $x \in C_{i+1}^g$, d'où $\min_{x \in C_{i+1}^g} u_x \leq \min_{x \in C_{j+1}^h} u_x$.
Ainsi, $p_g(i)^+ \leq p_h(j)^+$, d'où $p_g(i) \subseteq p_h(j)$;
 - soit $z'' <_g x$, et donc $z'' <_{\mathcal{T}} x$ (car clos par conversion descendante).
Ainsi, $\min_{x \in C_{i+1}^g} u_x < \min_{x \in C_{j+1}^h} u_x$, soit $p_g(i)^+ < p_h(j)^+$, d'où $p_g(i) \subseteq p_h(j)$.
 - soit $j = k_h$ et alors $p_g(i)^+ \leq M + 1 = p_h(j)^+$, d'où $p_g(i) \subseteq p_h(j)$.

- il n'y a pas d'autres cas car $i = k_g$ implique $j = k_h$, puisque $C_i^g \subseteq C_j^h$, $x_M \in C_{k_g}^g$, pour tout $g' \in \mathbf{G}$ et $C_j^h \cap C_{k_h}^h \neq \emptyset \implies j = k_h$.

Vérifions maintenant que les contraintes entre échelles sont satisfaites.

- Si $i \leq 0$, nous avons $p_g(i) \subseteq p_h(i)$.
- Si $i > k_g$, nous avons $p_g(i) \subseteq p_h(i - k_g + k_h)$.
- Si $i \in \{1, \dots, k_g\}$, nous avons $\forall x, y \in C_i^g \ x =_h y$, puisque N est clos par conversion ascendante ($x =_g y$ implique $x =_h y$). Par conséquent, il existe un j tel que $C_i^g \subseteq C_j^h$ et donc tel que $p_g(i) \subseteq p_h(j)$.

□

Nous avons ainsi démontré la complétude du raisonnement pour les systèmes de discrétisation. Remarquons que nous avons, en fait, prouvé un résultat plus fort. Les échelles construites dans la preuve ont une forme particulièrement raisonnable, celle des calendriers.

De plus, ce résultat implique un fait plus important. Le problème de la décision de la cohérence pour des échelles qualitatives de $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$ (resp. $\text{SIA}^{\mathbf{G}}$; resp. $\text{SPIA}^{\mathbf{G}}$) est dans NP . Ce problème est plus précisément NP -complet pour $\text{SIA}^{\mathbf{G}}$ et $\text{SPIA}^{\mathbf{G}}$ puisqu'il l'est pour IC , qui est un cas particulier. Qu'en est-il de $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$? PC , quant à lui, est intégralement traitable. L'ajout des échelles qualitatives conserve-t-il ce résultat? La réponse à cette question est négative.

Proposition 5.3.22. *Le problème suivant : « étant donné \mathbf{G} une description d'échelles qualitatives et N un réseau sur $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$, N est-il cohérent pour des échelles qualitatives ? » est NP -complet.*

Démonstration. L'idée de cette preuve se base sur le fait que la décision de la cohérence pour les contraintes de la forme $(v < v' < v'') \vee (v'' < v' < v)$ (problème BETWEENNESS (Bodirsky et Kára, 2010; Garey et Johnson, 1979)) est NP -complet, et que cette contrainte est encodable par les deux contraintes multi-échelles $v =_g v' \neq_g v''$ et $v \neq_h v' =_h v''$.

Nous allons montrer qu'il y a une *réduction polynomiale* du problème BETWEENNESS vers le problème de décision de la cohérence de $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$ pour des échelles qualitatives. De par cette réduction, comme le problème BETWEENNESS est NP -complet, la décision de la cohérence de $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$ pour des échelles qualitatives est NP -difficile. Mais il est également dans NP . En effet, par la proposition 5.3.21 et parce que les opérateurs sont corrects, un réseau est cohérent si et seulement s'il contient un scénario algébriquement clos, qui constitue ainsi un *certificat* de sa cohérence (la contenance et le fait d'être algébriquement clos sont vérifiables en temps polynomial). Ce problème étant NP -difficile et dans NP , il est donc NP -complet.

Nous appelons *réseau de contraintes sur BETWEENNESS*, tout ensemble de contraintes de la forme $c(v, v', v'') = (v < v' < v'') \vee (v'' < v' < v)$ portant sur des variables d'instant. Un réseau de contraintes sur BETWEENNESS est donc un couple (\mathbf{E}, \mathbf{C}) où \mathbf{E} est un ensemble de variables et \mathbf{C} un ensemble de contraintes vérifiant $\mathbf{C} \subseteq \{c(v, v', v'') \mid v, v', v'' \in \mathbf{E}\}$. Celui-ci est cohérent s'il existe une famille d'instants $\{u_v\}_{v \in \mathbf{E}} \subseteq \mathcal{T} = \mathbb{R}$ satisfaisant les contraintes de \mathbf{C} , c'est-à-dire telle que $c(v, v', v'') \in \mathbf{C}$ implique $(u_v < u_{v'} < u_{v''}) \vee (u_{v''} < u_{v'} < u_v)$.

Nous montrons donc qu'il y a une réduction polynomiale de BETWEENNESS vers la décision de la cohérence de $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$ pour des échelles qualitatives, c'est-à-dire que tout réseau N_{betw} sur BETWEENNESS correspond à un réseau N sur $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$, calculable en temps polynomial, tel que N_{betw} est cohérent si et seulement si N est cohérent pour des échelles qualitatives.

Soit un réseau de contraintes N_{betw} sur BETWEENNESS avec $|\mathbf{E}_{N_{\text{betw}}}| = n$. Nous lui associons une description d'échelles qualitatives $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, <)$ avec $|\mathbf{G}| \leq n^3$ et un réseau N sur $\text{SPA}^{\mathbf{G}}$ avec $|\mathbf{E}_N| = n$.

- Nous posons $\mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{N_{\text{betw}}}$.
- Pour chaque contrainte $c(v, v', v'') \in \mathbf{C}_{N_{\text{betw}}}$, nous ajoutons deux variables d'échelle dans \mathbf{G} : $g_{v, v', v''}$ et $h_{v, v', v''}$.
- Nous ajoutons à \mathbf{G} une variable d'échelle $g_{\mathcal{T}}$ pour \mathcal{T} .

Nous définissons maintenant les contraintes de N . Pour simplifier les notations, nous notons le fait que $N_i^{xy} = r$ par $x r_g y$ où N_i est le réseau de la variable d'échelle g (par défaut $N_i^{xy} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$). Pour chaque contrainte $c(v, v', v'')$ dans $\mathbf{C}_{N_{\text{betw}}}$, nous ajoutons les contraintes suivantes :

- $v =_{g_{v, v', v''}} v' \neq_{g_{v, v', v''}} v''$ et $v \neq_{h_{v, v', v''}} v' =_{h_{v, v', v''}} v''$ dans N ,

— $g\mathcal{T} < g_{v,v',v''}$ et $g\mathcal{T} < h_{v,v',v''}$ dans la relation d'ordre $<$ de G .

Remarquons qu'aucune variable d'échelle (hormis celle de \mathcal{T}) n'est plus fine qu'une autre.

Le réseau N est bien calculable en temps polynomial.

Nous montrons maintenant que si N est cohérent alors N_{betw} l'est également. Soient $\{u_v\}_{v \in E_N} \subseteq \mathcal{T} = \mathbb{R}$ une famille d'instants et $\{p_g\}_{g \in G}$ un système de discrétisation constituant une solution de N . Soient v, v', v'' telles que $c(v, v', v'') \in \mathcal{C}_{N_{\text{betw}}}$. Nous avons donc :

- $u_v = p_{g_{v,v',v''}}, u_{v'} \neq p_{g_{v,v',v''}}, u_{v''}$,
- $u_v \neq p_{h_{v,v',v''}}, u_{v'} = p_{h_{v,v',v''}}, u_{v''}$.

Nous en déduisons que :

- $\exists i \in I_{g_{v,v',v''}} \quad u_v, u_{v'} \in p_{g_{v,v',v''}}(i) \wedge u_{v''} \notin p_{g_{v,v',v''}}(i)$,
- $\exists j \in I_{h_{v,v',v''}} \quad u_{v'}, u_{v''} \in p_{h_{v,v',v''}}(j) \wedge u_v \notin p_{h_{v,v',v''}}(j)$.

Cela implique que :

- soit $u_{v''} < u_v$ et $u_{v''} < u_{v'}$ (cas A1), soit $u_{v''} > u_v$ et $u_{v''} > u_{v'}$ (cas A2),
- soit $u_v < u_{v'}$ et $u_v < u_{v''}$ (cas B1), soit $u_v > u_{v'}$ et $u_v > u_{v''}$ (cas B2).

Les cas A1 \wedge B1 et A2 \wedge B2 étant impossibles, nous en déduisons que nous sommes soit dans le cas A1 \wedge B2, soit dans le cas de A2 \wedge B1. Ainsi, nous avons $u_v < u_{v'} < u_{v''} \vee u_{v''} < u_{v'} < u_v$. En conséquence, $\{u_v\}_{v \in N_{\text{betw}}}$ constitue une solution de N_{betw} . Ainsi, N_{betw} est cohérent.

Nous montrons maintenant l'autre sens : si N_{betw} est cohérent, alors N l'est également. Soit $\{u_v\}_{v \in N_{\text{betw}}} \subseteq \mathcal{T} = \mathbb{R}$ une solution de N_{betw} . Ainsi, si $c(v, v', v'') \in \mathcal{C}_{N_{\text{betw}}}$ alors $(u_v < u_{v'} < u_{v''}) \vee (u_{v''} < u_{v'} < u_v)$. Nous commençons par construire les échelles de la solution de N . La variable $g\mathcal{T}$ est instanciée à \mathcal{T} ($p_{g\mathcal{T}} = \mathcal{T}$). Nous construisons maintenant $p_{g_{v,v',v''}}$ et $p_{h_{v,v',v''}}$ pour $v, v', v'' \in E_{N_{\text{betw}}}$ telles que $c(v, v', v'') \in \mathcal{C}_{N_{\text{betw}}}$. Nous posons $I_{p_{g_{v,v',v''}}} = \mathbb{Z}$ et $I_{p_{h_{v,v',v''}}} = \mathbb{Z}$. Nous avons deux cas de figure.

- Soit $u_v < u_{v'} < u_{v''}$. Dans ce cas,
 - nous construisons les granules de $p_{g_{v,v',v''}}$ de la façon suivante :
 - $p_{g_{v,v',v''}}(0) = [u_v, u_{v''}[$,
 - $p_{g_{v,v',v''}}(1) = [u_{v''}, u_{v'} + 1[$,
 - $p_{g_{v,v',v''}}(i) = [u_v + i, u_v + i + 1[$ pour $i < 0$ et
 - $p_{g_{v,v',v''}}(i) = [u_{v''} + i - 1, u_{v''} + i[$ pour $i > 1$;
 - nous construisons les granules de $p_{h_{v,v',v''}}$ de la façon suivante :
 - $p_{h_{v,v',v''}}(0) = [u_v, u_{v'}[$,
 - $p_{h_{v,v',v''}}(1) = [u_{v'}, u_{v''} + 1[$,
 - $p_{h_{v,v',v''}}(i) = [u_v + i, u_v + i + 1[$ pour $i < 0$ et
 - $p_{h_{v,v',v''}}(i) = [u_{v''} + i - 1, u_{v''} + i[$ pour $i > 1$.
- Soit $u_{v''} < u_{v'} < u_v$. Dans ce cas,
 - nous construisons les granules de $p_{g_{v,v',v''}}$ de la façon suivante :
 - $p_{g_{v,v',v''}}(0) = [u_{v''}, u_{v'}[$,
 - $p_{g_{v,v',v''}}(1) = [u_{v'}, u_v + 1[$,
 - $p_{g_{v,v',v''}}(i) = [u_{v''} + i, u_{v''} + i + 1[$ pour $i < 0$ et
 - $p_{g_{v,v',v''}}(i) = [u_v + i - 1, u_v + i[$ pour $i > 1$;
 - nous construisons les granules de $p_{h_{v,v',v''}}$ de la façon suivante :
 - $p_{h_{v,v',v''}}(0) = [u_{v''}, u_v[$,
 - $p_{h_{v,v',v''}}(1) = [u_v, u_v + 1[$,
 - $p_{h_{v,v',v''}}(i) = [u_{v''} + i, u_{v''} + i + 1[$ pour $i < 0$ et
 - $p_{h_{v,v',v''}}(i) = [u_v + i - 1, u_v + i[$ pour $i > 1$.

Ces échelles sont bien des partitions infinies (nous avons $p_{g_{v,v',v''}}(i) \neq \emptyset$ et $p_{h_{v,v',v''}}(i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ puisque $(u_v < u_{v'} < u_{v''}) \vee (u_{v''} < u_{v'} < u_v)$). Ainsi, $\{p_g \mid g \in G\}$ forme bien un système de discrétisation.

Nous montrons maintenant que $\{u_v\}_{v \in N_{\text{betw}}}$ et $\{p_g\}_{g \in G}$ constituent une solution de N :

- Les contraintes entre les échelles sont satisfaites : nous avons $\mathcal{T} \prec p_g$ pour toute variable $g \in G$ telle que $g \neq g\mathcal{T}$.
- Les relations échelonnées de N $v =_{g_{v,v',v''}} v' \neq_{g_{v,v',v''}} v''$ et $v \neq_{h_{v,v',v''}} v' =_{g'_{v,v',v''}} v''$ pour toutes variables $v, v', v'' \in E = E_{N_{\text{betw}}}$ telles que $c(v, v', v'') \in \mathcal{C}_{N_{\text{betw}}}$ sont satisfaites par $\{u_v\}_{v \in N_{\text{betw}}}$ et $\{p_g\}_{g \in G}$. En effet, puisque $u_v < u_{v'} < u_{v''} \vee u_{v''} < u_{v'} < u_v$, nous avons :
 - à l'échelle $p_{g_{v,v',v''}}$:

- $u_v, u_{v'} \in p_{g_{v,v',v''}}(i)$ (avec $i = 0$ si $u_v < u_{v'} < u_{v''}$ et $i = 1$ si $u_{v''} < u_{v'} < u_v$),
soit $u_v = p_{g_{v,v',v''}} u_{v'}$.
- $u_{v'} \in p_{g_{v,v',v''}}(i)$, $u_{v''} \in p_{g_{v,v',v''}}(j)$ et $i \neq j$ (avec $i = 0$, $j = 1$ si $u_v < u_{v''}$ et $i = 1$,
 $j = 0$ si $u_{v''} < u_v$),
soit $u_{v'} \neq p_{g_{v,v',v''}} u_{v''}$.
- à l'échelle $p_{h_{v,v',v''}}$:
 - $u_{v'}, u_{v''} \in p_{h_{v,v',v''}}(i)$ (avec $i = 1$ si $u_v < u_{v''}$ et $i = 0$ si $u_{v''} < u_v$),
soit $u_{v'} = p_{h_{v,v',v''}} u_{v''}$.
 - $u_v \in p_{h_{v,v',v''}}(i)$, $u_{v'} \in p_{h_{v,v',v''}}(j)$ et $i \neq j$ (avec $i = 0$, $j = 1$ si $u_v < u_{v''}$ et $i = 1$,
 $j = 0$ si $u_{v''} < u_v$),
soit $u_v \neq p_{h_{v,v',v''}} u_{v'}$.

Ainsi, N_{betw} est cohérent si et seulement si N est cohérent. Nous avons bien une réduction polynomiale. \square

5.3.5 Propriétés et avantages du raisonnement multi-échelle

Avant de conclure ce chapitre, nous présentons quelques propriétés et avantages du cadre multi-échelle, et nous montrons qu'il ne se réduit pas au cadre classique.

Considérons, dans un premier temps, la description suivante avec trois entités A, B, C aux échelles des minutes et des heures : $B \underset{\text{min}}{b} A$, $B =_{\text{heure}} A$, et $B (\{ \cdot b, b \})_{\text{heure}} C$. Il est intéressant de noter qu'en utilisant le raisonnement multi-échelle, on déduit que $A \underset{\text{min}}{b} C$, alors que cette conclusion ne peut être inférée dans le cadre classique puisque nous n'aurions que $B \underset{b}{b} A$ et $B \underset{b}{b} C$.

De plus, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'est pas suffisant de convertir toutes les relations à l'échelle la plus fine et ensuite de composer les relations uniquement à cette échelle pour décider la cohérence. Par exemple, soit g une échelle et $x, y, z \in \mathcal{T}$. Considérons la description suivante : $x < y$, $y > z$ et $x \neq z$; $x =_g y$, $y \neq_g z$ et $x \neq_g z$. Avec la conversion descendante et la composition, nous ne déduisons rien. Cependant, avec la conversion ascendante, nous déduisons $y >_g z$. Par composition, nous avons $x >_g z$. Finalement, par conversion descendante, nous déduisons $x > z$. Prenons maintenant la même description et supposons en plus $x < z$. L'utilisation de la conversion descendante et de la composition ne permet de déduire aucune nouvelle information. Cependant, cette description est incohérente.

Enfin, en raisonnant avec des échelles grossières, nous pouvons prendre en compte le fait que certaines entités ou bornes d'entités temporelles deviennent indistinguables à certaines échelles (c'est-à-dire sont égales à ces échelles) et non pas à d'autres. Cela peut nous permettre d'en déduire l'ordre de ces entités. Par exemple, si à une certaine échelle x et y sont égales mais que z n'est égale ni à x ni à y , alors z ne peut être entre x et y à aucune échelle. En conclusion, raisonner avec toutes les échelles à la fois nous fournit plus d'informations et nous permet ainsi de détecter plus d'incohérences.

5.4 Conclusion

5.4.1 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons formalisé et étendu le raisonnement qualitatif temporel multi-échelle; nous avons en particulier défini la notion de cohérence des descriptions dans ce contexte.

Dans un premier temps, de par la nécessité de raisonner à la fois avec des points et des intervalles, nous avons introduit le calcul des points et intervalles, ses conversions ascendante et descendante, et souligné leur lien avec le graphe de voisinage de ce formalisme.

Dans un second temps, nous avons formalisé les relations temporelles définies à une échelle dans le cadre de Bettini *et al.* et explicité les calculs échelonnés permettant de raisonner sur ces relations portant sur des points, des intervalles et des points ou intervalles. Nous avons en particulier souligné qu'ils constituent des formalismes qualitatifs symétriques.

Nous avons ensuite prouvé que le raisonnement basés respectivement sur les conversions du calcul des points, du calcul des intervalles et du calcul des points et intervalles sont corrects dans le cadre des échelles de Bettini *et al.*

Nous avons également formalisé le calcul multi-échelle, dans le cadre de partitions non totalement ordonnées, pour chacun des formalismes précédents. Pour ce faire, nous avons représenté les descriptions multi-échelles par des réseaux sur des multi-algèbres.

De surcroît, nous avons proposé deux sémantiques différentes pour ces descriptions multi-échelles, chacune correspondant à une notion différente de cohérence des descriptions. La première correspond au cadre où les échelles sont explicites et intégralement connues : les échelles considérées sont par exemple celles du calendrier Grégorien. La sémantique des descriptions multi-échelles est celle d'un formalisme séquentiel (les inférences sont donc correctes). La seconde correspond au cadre du langage naturel où l'on ne connaît que la relation de précision entre les échelles. Les échelles sont donc inconnues et représentées par des variables. Les descriptions multi-échelles avec cette sémantique permettent de représenter des relations telles que « touche presque », « juste avant » ou « bien avant ». Le raisonnement associé à cette sémantique est correct, bien que nous ne soyons pas dans le cadre d'un formalisme séquentiel. Le raisonnement est de plus complet : nous pouvons décider la cohérence algébriquement dans ce contexte. Nous avons également montré que le problème de décision de la cohérence est NP-complet, même dans le cadre du calcul des points multi-échelle.

Enfin, nous avons montré qu'il n'est pas suffisant de convertir toutes les informations à une échelle pour déduire le maximum d'information à cette échelle. Il est nécessaire d'effectuer un raisonnement complet à toutes les échelles et entre toutes les échelles simultanément, c'est-à-dire appliquer la clôture algébrique du cadre des multi-algèbres.

5.4.2 Perspectives

Les résultats de ce chapitre ouvrent plusieurs perspectives de recherche. La suite directe de ces travaux est l'identification d'échelles telles que le raisonnement est complet pour SPC^G , SIC^G et $SPIC^G$, et la recherche de sous-classes traitables pour ces échelles et pour le cadre des échelles qualitatives. Dans le cadre d'échelles totalement ordonnées par la relation de précision, nous pouvons montrer, en particulier, que la sous-classe des relations préconvexes du calcul des intervalles multi-échelle est algébriquement traitable. Pour ce faire, on peut utiliser le cadre des multi-algèbres, à condition d'identifier des échelles permettant d'obtenir la complétude⁹. Pour obtenir des résultats de traitabilité à propos du calcul des points et intervalles multi-échelle, il faut d'abord identifier des sous-classes traitables dans le cadre classique.

De plus, nous devrions pouvoir montrer que les descriptions du calcul des points multi-échelle sont représentables par des descriptions du calcul des points et intervalles (non échelonné), et que les descriptions du calcul des intervalles multi-échelle sont représentables par des descriptions du calcul des intervalles généralisés (Ligozat, 2011, Chapitre 3). Notons toutefois qu'il serait plus intéressant computationnellement de raisonner dans le cadre multi-échelle.

En outre, des travaux similaires peuvent être effectués dans le cadre des informations spatiales. En particulier, la version multi-échelle du calcul des points cardinaux (voir la section 2.3.2) et celle du calcul des rectangles (Balbiani *et al.*, 1999) restent à définir. Cependant, afin de ne pas perdre d'informations lors du raisonnement, il faut définir un calcul des rectangles, lignes et points, puisqu'un rectangle peut devenir une ligne verticale ou horizontale, ou un point, par changement d'échelle. Un autre formalisme qu'il serait intéressant d'étudier dans le cadre multi-échelle est RCC_8 . Il faut cependant noter qu'en fonction des échelles considérées (échelles quelconques, échelles dont les granules sont connexes ou partitions du plan formant un quadrillage), les conversions sont différentes. Il faut donc étudier la complétude et la traitabilité dans chacun de ces cas.

Une perspective de recherche connexe est la définition générale d'un calcul multi-échelle. Cette définition n'est cependant pas évidente, car il y a deux façons de voir le représentant d'une entité. La première, celle de Bettini *et al.* (voir la section 3.4.3) et donc celle de notre cadre, définit le représentant d'une entité comme un élément d'une structure discrète abstraite, les indices des granules appartenant à \mathbb{Z} . L'approche de Li et Nebel (2007) à propos de RCC_5 (voir la section 3.4.4)

9. Notons que l'on ne peut pas appliquer directement le cadre des multi-algèbres aux échelles qualitatives. Leur sémantique ne constitue pas un formalisme séquentiel. Cependant, les sous-classes algébriquement traitables pour des échelles quantitatives sont également algébriquement traitables pour les échelles qualitatives, puisque nous avons montré la cohérence des scénarios algébriquement clos pour les échelles qualitatives.

définit le représentant d'une entité comme l'union des granules la contenant (et non pas comme l'ensemble des indices de ces granules, qui forme un ensemble de points discret). Par exemple, on aurait pu définir le représentant d'un intervalle comme l'union des granules le contenant, mais les conversions auraient été différentes et ne correspondraient donc pas à celles d'Euzenat. Avec une telle définition, la relation de *précédence* b peut devenir la relation de *chevauchement* o à une échelle plus grossière : nous avons $o \in \uparrow b$. Par exemple, la relation à l'échelle h de la figure 5.1 est la relation m pour la définition présentée dans ce chapitre et la relation o pour cette définition alternative. Une définition générale de représentant qui inclurait les deux définitions précédentes formaliserait simplement un représentant comme un ensemble de granules au lieu d'un ensemble d'indices de granules ou de l'union de ces granules. Il reste cependant à définir le *calcul sur les granules* correspondant à un calcul classique pour pouvoir définir une relation échelonnée comme une relation de ce calcul entre les représentants de deux entités.

Le cadre que nous avons proposé possède deux limitations. D'une part, nous supposons que les entités sont représentables à chaque échelle. Pour dépasser cette limite, il faut pouvoir raisonner à propos de la représentabilité, c'est-à-dire être capable d'inférer que certaines entités sont ou ne sont pas représentables à une échelle. Pour ce faire, une possibilité serait d'ajouter 3 relations échelonnées supplémentaires entre deux entités x et y : « x n'est pas représentable, mais y l'est », son inverse, et « x et y ne sont pas représentables ». Il faudrait ensuite déterminer les conversions de ce nouveau calcul qui, cette fois, sont différentes en fonction de la relation de précision satisfaite (\preceq ou \sqsubseteq).

D'autre part, notre cadre ne prend pas en compte l'incertitude sur l'ordre de précision des échelles. Il ne permet pas de raisonner en présence d'informations telles que « l'échelle g est plus fine ou plus grossière que l'échelle h » et « g n'est ni plus fine, ni plus grossière que h ». Ce cadre général qui reste à définir sort du cadre des multi-algèbres, mais ouvre des perspectives de recherche puisque l'on peut montrer qu'il partage une structure algébrique commune avec certaines combinaisons spatio-temporelles, qui généralise les multi-algèbres.

Il est possible que le raisonnement multi-échelle ait des applications en ce qui concerne la fusion d'informations qualitatives (Condotta *et al.*, 2009). La fusion d'informations vise à combiner des informations contradictoires et le raisonnement multi-échelle vise à combiner des informations en apparence contradictoires.

Enfin, l'étude de la minimalité dans le cadre multi-échelle reste à faire (voir la section 2.4.5). Le calcul du réseau minimal permettrait dans ce contexte de calculer les informations les plus précises possibles à chacune des échelles considérées.

Chapitre 6

Formalisation et étude du raisonnement sur les séquences temporelles

6.1 Introduction

Dans la section 3.3, nous avons abordé l'état de l'art du raisonnement spatio-temporel. Nous nous sommes en particulier intéressés aux séquences temporelles. Ces descriptions spatio-temporelles sont fondamentales pour l'étude des interdépendances temporelles et l'identification de fragments traitables. Elles interviennent dans de nombreuses applications telles que l'ordonnancement de réseaux de contraintes, la planification spatiale et la simulation qualitative. En particulier, nous avons présenté différentes notions de cohérence pour les séquences temporelles. Plus précisément, la cohérence d'une séquence dépend d'une *dynamique*, c'est-à-dire de la façon dont les entités évoluent au cours du temps. Elle dépend également de la nature de cette séquence (séquence d'instantanés dans le cadre de la continuité sans relation intermédiaire ou partition du temps sous la forme d'une succession d'instantanés et d'intervalles ouverts). En outre, nous avons vu que le raisonnement sur ces séquences est basé sur des graphes de transition représentant les évolutions des relations au cours du temps. Les graphes de *voisinage* sont utilisés dans le cadre de la continuité sans relation intermédiaire et les graphes de *dominance* sont utilisés dans le cadre des partitions du temps. Les évolutions qu'ils représentent diffèrent en fonction de la dynamique considérée.

Cependant, dans cette même section, nous avons identifié un certain nombre de limites de l'état de l'art. D'une part, les graphes de transition ne permettent pas d'imposer les interdépendances spatio-temporelles dans un futur lointain, ce qui est parfois requis dans le contexte de la préservation de caractéristiques, telles que la taille (voir l'exemple 3.3.4). D'autres approches ont été proposées pour raisonner plus précisément dans le contexte de RCC_8 avec préservation de la taille. Cependant, celles-ci possèdent plusieurs inconvénients, telles qu'une complexité élevée ou la nécessité de connaître la relation basique de taille entre chaque paire de régions. D'autre part, Galton a défini une sémantique pour les graphes de transition, mais celle-ci est restreinte aux points de \mathbb{R}^d (Galton, 2000). La sémantique des graphes de transition n'a donc pas été formulée dans le cadre d'entités plus complexes, comme les régions du plan.

Dans le chapitre 4, nous avons montré que les multi-algèbres permettent de raisonner dans le contexte du calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire (exemples 4.2.12 et 4.2.19). Nous nous intéressons dans ce chapitre au cadre général, c'est-à-dire au raisonnement sur les séquences temporelles dans le contexte d'un formalisme qualitatif doté d'une dynamique quelconque. Pour formaliser ce raisonnement, nous nous basons à nouveau sur le cadre formel des multi-algèbres. Dans le contexte spécifique de la préservation de caractéristiques, nous proposons un cadre plus expressif où le raisonnement est plus précis. Ce nouveau cadre est nécessaire lorsque le cadre précédent n'est pas suffisant pour décider la cohérence. Nous montrons en particulier que cette approche ne possède pas les inconvénients des approches de la littérature.

Nous commençons par définir dans la section suivante les concepts dont nous avons besoin pour formaliser le cadre des séquences temporelles. Plus précisément, nous définissons les formalismes qualitatifs pour lesquels les notions de continuité et de taille ont du sens ainsi que les différentes dynamiques de ces formalismes. Nous introduisons également les notions de *caractéristique* des

entités et de *relation de caractéristique*. En outre, nous généralisons la sémantique du cadre de Galton sur les graphes de transition (Galton, 2000).

Dans la section 6.3, nous formalisons le cadre des séquences temporelles d'un formalisme qualitatif par rapport à une dynamique, pour la continuité sans relation intermédiaire mais également pour les partitions du temps. Nous étudions le cas spécifique du calcul des points dans la section 6.4 et montrons en particulier la complétude du raisonnement associé.

Dans la section 6.5, nous introduisons un cadre plus expressif permettant de raisonner, d'une façon plus précise, sur les séquences temporelles dans le contexte de la préservation de caractéristiques. Celui-ci permet d'exprimer et d'inférer des relations sur les caractéristiques des entités. Nous étudions ensuite (section 6.6) le cas particulier de RCC_8 sans contrainte de transition et avec relations de taille dans le contexte de la préservation de la taille. Nous montrons que le raisonnement est complet, ce qui résout le problème de la préservation de caractéristiques dans ce contexte précis.

Pour finir, nous présentons dans la section 6.7 les avantages computationnels du cadre des multi-algèbres spatio-temporel et l'application de ce cadre dans le contexte de la simulation qualitative et de la planification spatiale.

6.2 Interdépendances spatio-temporelles

Dans cette section, nous commençons par présenter les objets mathématiques fondamentaux nécessaires à la formalisation du concept de continuité et du concept de taille, requis par le raisonnement spatio-temporel. Nous formalisons ensuite ce que nous appelons *dynamique des entités* et explicitons les formalismes qualitatifs pour lesquels les notions de continuité et de taille ont du sens. De plus, nous définissons certaines dynamiques fondamentales associées à un formalisme qualitatif : la *dynamique générale*, les *dynamiques de préservation de caractéristiques* et en particulier la *dynamique de préservation de la taille*.

Dans un second temps, nous généralisons la sémantique de l'approche de Galton concernant les graphes de dominance et de voisinage afin d'avoir une définition de graphe de transition dans le contexte général de la continuité. Nous appliquons ensuite ce cadre généralisé aux formalismes qualitatifs et définissons ainsi le graphe de voisinage et de dominance d'un formalisme qualitatif pour une dynamique donnée. Enfin, nous montrons comment encoder les graphes de voisinage et de dominance au sein de projections, ce qui va nous permettre dans la section suivante de définir les multi-algèbres des séquences temporelles. Nous verrons, plus précisément, que la clôture algébrique basée sur ces projections impose les interdépendances représentées par les graphes de voisinage et de dominance.

6.2.1 Définitions de la continuité et de la taille

Dans cette section, nous présentons certains concepts mathématiques fondamentaux formalisant le concept de continuité et le concept de taille.

La formulation générale de la continuité d'une fonction est définie dans le cadre de la Topologie (Todjihounde, 2004; El Jai, 2007; Queffélec, 2016). Elle requiert que l'ensemble de départ et que l'ensemble d'arrivée de la fonction soient chacun doté d'une *topologie*. Ces ensembles sont alors qualifiés d'*espaces topologiques*.

Définition 6.2.1 (Queffélec, 2016). Soit X un ensemble. On appelle *topologie* sur X un ensemble \mathcal{T} de parties de X , appelées ouverts, telles que :

- toute réunion d'ouverts est un ouvert ;
- toute intersection *finie* d'ouverts est un ouvert ;
- \emptyset et X sont des ouverts.

Le couple (X, \mathcal{T}) est appelé un *espace topologique*. X et (X, \mathcal{T}) sont identifiés dans la suite et sont notés \mathfrak{T} .

L'une des notions principales de la topologie est le *voisinage* d'un point. Celui-ci permet, entre autre, de définir la continuité d'une fonction.

Définition 6.2.2 (Queffélec, 2016). Soit $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Un ensemble $V \subseteq X$ est appelé un *voisinage* de $x \in X$ s'il existe $\omega \in \mathcal{T}$ tel que

$$x \in \omega \wedge \omega \subseteq V.$$

Nous notons $v(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

La continuité d'une fonction se définit par rapport à la préservation des voisinages.

Définition 6.2.3 (Queffélec, 2016). Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' deux espaces topologiques.

Une fonction $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ est *continue* en $x \in \mathfrak{X}$ si pour tout voisinage $V' \in v(f(x))$, il existe un voisinage $V \in v(x)$ tel que $f(V) \subseteq V'$ ¹.

La fonction f est continue si elle est continue en x , pour tout $x \in \mathfrak{X}$.

Cette définition généralise la définition de la continuité pour les fonctions réelles, formulée dans la définition suivante.

Définition 6.2.4. Soient I un intervalle réel, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles et $\tau \in I$.

La fonction f est dite *continue* en τ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in I$, nous avons :

$$|t - \tau| < \delta_\epsilon \implies |f(t) - f(\tau)| < \epsilon.$$

La fonction f est dite *continue* si elle est continue en tout point τ de I .

Remarque 6.2.5. La continuité se définit également dans le cadre des *espaces métriques*, des ensembles particuliers dotés d'une *distance* entre leurs éléments (Todjihounde, 2004; El Jai, 2007; Queffélec, 2016). La définition pour les espaces métriques est cependant moins générale que celle pour les espaces topologiques, bien qu'elle soit plus simple. En fait, les espaces métriques possèdent une topologie naturelle, définie à partir de leur distance. La définition de continuité pour les espaces métriques est similaire à la définition de continuité pour les fonctions réelles, qui est un cas particulier. Ainsi, \mathbb{R} est un espace métrique; sa distance est la valeur absolue. Dans le cas de \mathbb{R}^n , il y a plusieurs distances naturelles. Notons qu'elles sont toutes *équivalentes* (elles engendrent la même topologie).

Remarque 6.2.6. Contrairement aux points de \mathbb{R}^n , les régions de \mathbb{R}^n ne possèdent apparemment pas de topologie naturelle unique. Plusieurs distances ont notamment été proposées pour comparer les régions *bornées* de \mathbb{R}^n (Davis, 2001; Galton, 2000), telles que la *distance de Hausdorff*, la *distance de Hausdorff duale* et la *distance de la différence symétrique* (Galton, 2000; Davis, 2001). D'autres topologies ont également été proposées dans le cadre plus général des parties d'un espace topologique (Michael, 1951; Wattenberg, 1977; Di Maio et Nainpally, 1990; Beer et Lucchetti, 1993; Beer, 1993; CHO, 1998; Aliprantis et Kim, 2006).

Les sous-ensembles des espaces topologiques possèdent une topologie naturelle, appelée *topologie induite*. Les produits cartésiens d'espaces topologiques possèdent également une topologie naturelle, appelée *topologie produit*. Ces topologies se définissent à partir des topologies d'origine. Dans ce chapitre, les sous-ensembles et les produits cartésiens sont implicitement dotés de ces topologies. Notons que l'intérêt de ces topologies est qu'elles préservent la propriété de continuité. Nous avons plus précisément les deux propriétés suivantes.

Proposition 6.2.7 (Queffélec, 2016). Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' des espaces topologiques et $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ une fonction. Soit $\mathfrak{X}'' \subseteq \mathfrak{X}'$ tel que $f(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}''$. Considérons l'application $g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}''$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$.

La fonction g est continue si et seulement si f est continue.

1. C'est-à-dire « tel que pour tout $y \in V$, $f(y) \in V'$ ».

Proposition 6.2.8 (Queffélec, 2016). Soient \mathfrak{T} , \mathfrak{T}_1 et \mathfrak{T}_2 des espaces topologiques. Soient f_1 une fonction de \mathfrak{T} dans \mathfrak{T}_1 et f_2 une fonction de \mathfrak{T} dans \mathfrak{T}_2 . Soit f la fonction de \mathfrak{T} dans $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, avec $x \in \mathfrak{T}$.

La fonction f est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.

En considérant d'autres topologies pour les sous-ensembles et les produits cartésiens, ces propriétés élémentaires ne sont pas toujours satisfaites.

Concernant le concept de taille, le cadre mathématique associé est la théorie de la mesure (Gallouët et Herbin, 2013). Informellement, la notion de taille a du sens pour un ensemble d'entités A , si ces entités sont des sous-ensembles d'un ensemble X et si la taille des entités est déterminée par une *mesure*, c'est-à-dire une fonction à valeurs positives vérifiant une certaine propriété d'additivité. Formellement, la notion de taille prend son sens dans le contexte d'un *espace mesuré*.

Définition 6.2.9 (Gallouët et Herbin, 2013). Un *espace mesuré* est un triplet (X, A, μ) où :

- X est un ensemble ;
- A est une *tribu* sur X , c'est-à-dire un ensemble de parties de X qui vérifie :
 - A n'est pas vide,
 - A est clos par complémentaire
 - A est clos par union dénombrable ;
- μ est une *mesure* sur A , c'est-à-dire une application définie sur A à valeurs dans $[0, +\infty]$ qui vérifie :
 - $\mu(\emptyset) = 0$;
 - la mesure d'un ensemble est la somme des mesures des parties disjointes dénombrables de cet ensemble :

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

avec $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ une famille dénombrable de A vérifiant $E_k \cap E_l = \emptyset$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 6.2.10. \mathbb{R}^n est un espace (implicitement) mesuré. Nous avons $X = \mathbb{R}^n$. La mesure associée μ est la *mesure de Lebesgue* (Gallouët et Herbin, 2013). Elle généralise les concepts de longueur, d'aire et de volume. A , le domaine de μ , est la *tribu de Lebesgue*.

Pour conclure cette section, nous définissons l'ensemble des régions que nous considérons dans ce chapitre et la version de RCC_8 correspondante.

Définition 6.2.11. Nous notons \mathfrak{R}_m l'ensemble des régions mesurables de \mathbb{R}^n (pour la mesure de Lebesgue, notée \mathbf{t}).

Remarque 6.2.12. Nous ne dotons pas \mathfrak{R}_m d'une topologie précise. Les résultats de ce chapitre concernant \mathfrak{R}_m sont vrais pour un très grand nombre de topologies, comme celles générées par la distance de Hausdorff, par la distance de Hausdorff duale ou par la distance de la différence symétrique (Galton, 2000; Davis, 2001). Nous en rediscuterons au cas par cas. Nous ne choisissons pas de topologie parce que la topologie correspondant à la notion intuitive de continuité pour les régions n'a pas encore été déterminée à notre connaissance.

Définition 6.2.13. Nous notons $\text{RCC}_{8,m}$ le triplet $(\text{RCA}_8, \mathfrak{R}_m, \varphi_m)$ avec φ_m la fonction de RCA_8 dans $2^{\mathfrak{R}_m \times \mathfrak{R}_m}$ définie par $\varphi_m(r) = \varphi_{\text{RCC}_8}(r) \cap (\mathfrak{R}_m \times \mathfrak{R}_m)$ avec φ_{RCC_8} la fonction d'interprétation de RCC_8 sur les régions de \mathbb{R}^n .

Lemme 6.2.14. $\text{RCC}_{8,m}$ est un formalisme qualitatif.

Démonstration. Ce lemme découle directement de la définition de formalisme qualitatif et du fait que RCC_8 soit un formalisme qualitatif (la seule différence entre RCC_8 et $\text{RCC}_{8,m}$ est que l'univers est réduit et que la fonction d'interprétation est réduite en conséquence). \square

6.2.2 Caractéristiques et changement de sémantique

Dans cette section, nous nous intéressons aux caractéristiques des entités et plus précisément aux relations entre ces caractéristiques, que nous formalisons.

Soit \mathcal{U} un ensemble d'entités. Nous appelons *caractéristique* de \mathcal{U} une fonction c de \mathcal{U} dans un ensemble \mathcal{C} . La caractéristique c associe à chaque entité de \mathcal{U} un élément de \mathcal{C} , qui est la valeur de sa caractéristique.

Exemple 6.2.15. Soit \mathfrak{R}_m l'ensemble des régions mesurables de \mathbb{R}^d . En considérant la taille comme caractéristique des régions, nous obtenons :

- $\mathcal{C} = [0, +\infty]$ et
- $c = \mathbf{t}$, la mesure de Lebesgue.

Nous allons maintenant construire le formalisme des *relations de caractéristique*. Ses relations lient les entités de \mathcal{U} selon la valeur de leur caractéristique. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \varphi)$ un formalisme qualitatif sur les valeurs de la caractéristique considérée. Nous changeons sa sémantique pour obtenir le formalisme correspondant sur les entités de \mathcal{U} .

Définition 6.2.16. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{C}, \varphi)$ un formalisme qualitatif et c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} .

Le formalisme des relations de \mathcal{F} sur la caractéristique c des entités de \mathcal{U} , que nous notons \mathcal{F}^c , est le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi^c)$ avec, pour $r \in \mathcal{A}$,

$$\varphi^c(r) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid c(x) \varphi(r) c(y)\}.$$

Ainsi, \mathcal{F}^c correspond à \mathcal{F} dont la sémantique a été changée par la fonction c . Ce formalisme permet de décrire la relation entre deux entités de \mathcal{U} par rapport à leurs valeurs de caractéristique, exprimée en termes de relations de \mathcal{F} .

Exemple 6.2.17. Le formalisme QS (exemple 2.2.22) est ainsi le formalisme des relations de PC sur la taille \mathbf{t} des entités de \mathfrak{R}_m , c'est-à-dire $QS = PC^{\mathbf{t}} = (PA, \mathfrak{R}_m, \varphi_{PC}^{\mathbf{t}})$. La fonction $\varphi_{PC}^{\mathbf{t}}$ satisfait ainsi :

- $\varphi_{PC}^{\mathbf{t}}(\{<\}) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) < \mathbf{t}(y)\}$;
- $\varphi_{PC}^{\mathbf{t}}(\{=\}) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid \mathbf{t}(x) = \mathbf{t}(y)\}$.

Remarque 6.2.18. Une caractéristique peut très bien être un k -uplet de caractéristiques élémentaires telles que la taille, la position, etc.

Notons que le changement de sémantique préserve le fait d'être un formalisme qualitatif.

Lemme 6.2.19. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{C}, \varphi)$ un formalisme qualitatif et c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} .

\mathcal{F}^c est un formalisme qualitatif.

Démonstration. Nous vérifions que $\mathcal{F}^c = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi^c)$ satisfait la définition de formalisme qualitatif symétrique (définition 4.2.1). \mathcal{A} est une algèbre non associative, \mathcal{U} est non vide, φ^c est une fonction de \mathcal{A} dans $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$, $\varphi^c(\emptyset) = \emptyset$. Soient $r, r' \in \mathcal{A}$ et $x, y \in \mathcal{U}$. Nous avons également :

$$\begin{aligned} & \text{— } \varphi^c(r \cap r') = \varphi^c(r) \cap \varphi^c(r') : \\ x (\varphi^c(r) \cap \varphi^c(r')) y & \iff x \varphi^c(r) y \wedge x \varphi^c(r') y \\ & \iff c(x) \varphi(r) c(y) \wedge c(x) \varphi(r') c(y) \quad \text{par la définition de } \varphi^c \text{ (déf. 6.2.16)} \\ & \iff c(x) (\varphi(r) \cap \varphi(r')) c(y) \\ & \iff c(x) \varphi(r \cap r') c(y) \quad \text{car } \mathcal{F} \text{ est un formalisme qualitatif} \\ & \iff x \varphi^c(r \cap r') y \quad \text{par la définition de } \varphi^c \\ & \text{— } \varphi^c(r \cup r') = \varphi^c(r) \cup \varphi^c(r') : \\ x (\varphi^c(r) \cup \varphi^c(r')) y & \iff x \varphi^c(r) y \vee x \varphi^c(r') y \\ & \iff c(x) \varphi(r) c(y) \vee c(x) \varphi(r') c(y) \quad \text{par la définition de } \varphi^c \\ & \iff c(x) (\varphi(r) \cup \varphi(r')) c(y) \\ & \iff c(x) \varphi(r \cup r') c(y) \quad \text{car } \mathcal{F} \text{ est un formalisme qualitatif} \\ & \iff x \varphi^c(r \cup r') y \quad \text{par la définition de } \varphi^c \end{aligned}$$

Définition 6.2.25. Soient \mathfrak{T} un espace topologique et c une fonction de \mathfrak{T} dans un ensemble \mathcal{C} .

La dynamique de préservation de la caractéristique c des entités de \mathfrak{T} sur un intervalle I de \mathbb{R} , notée $\mathcal{C}_{\mathfrak{T},c}^I$, est l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{T}}^I \mid \forall t, t' \in I \quad c(f(t)) = c(f(t'))\}$.

Nous appliquons cette définition dans le cadre de la préservation de la taille pour obtenir la dynamique des entités de taille constante.

Définition 6.2.26. Soit \mathfrak{T} un espace topologique et soit (X, A, \mathfrak{t}) un espace mesuré tel que $\mathfrak{T} \subseteq A$.

La *dynamique de préservation de la taille* de \mathfrak{T} (par rapport à la mesure \mathfrak{t}) sur un intervalle I de \mathbb{R} est l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathfrak{T},\mathfrak{t}}^I$.

Pour finir, nous introduisons deux opérateurs sur les dynamiques.

D'une part, l'opérateur \otimes combine deux dynamiques afin d'obtenir la dynamique des couples d'entités correspondante. Nous avons besoin de cet opérateur puisque le produit cartésien de deux dynamiques n'est pas une dynamique.

Définition 6.2.27. Soient \mathfrak{T} et \mathfrak{T}' deux espaces topologiques et soient \mathcal{C} une dynamique de \mathfrak{T} sur I et \mathcal{C}' une dynamique de \mathfrak{T}' sur I . Nous définissons l'opérateur suivant :

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}' = \{f'' \in \mathcal{C}_{\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}'}^I \mid \exists f \in \mathcal{C} \exists f' \in \mathcal{C}' \forall t \in I \quad f''(t) = (f(t), f'(t))\}.$$

Exemple 6.2.28. La dynamique $\mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m, \mathfrak{t}}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des évolutions de couples de régions mesurables telles que le premier élément du couple a une taille constante au cours du temps. Un élément de $\mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m, \mathfrak{t}}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m}^{\mathbb{R}}$ est une fonction et non un couple de fonctions.

D'autre part, l'opérateur \cdot^* transforme une dynamique de couples en un couple de dynamiques. Il nous permet d'accéder à la dynamique d'un seul élément.

Définition 6.2.29. Soient \mathfrak{T} et \mathfrak{T}' deux espaces topologiques et \mathcal{C} une dynamique de $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}'$ sur I . Nous définissons l'opérateur suivant :

$$\mathcal{C}^* = \{(x, y) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{T}}^I \times \mathcal{C}_{\mathfrak{T}'}^I \mid \exists f \in \mathcal{C} \forall t \in I \quad (x(t), y(t)) = f(t)\}.$$

Exemple 6.2.30. Nous avons $\left(\mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m, \mathfrak{t}}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m}^{\mathbb{R}}\right)^* = \mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m, \mathfrak{t}}^{\mathbb{R}} \times \mathcal{C}_{\mathfrak{R}_m}^{\mathbb{R}}$. En fait, nous avons plus généralement,

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')^* = \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$$

avec \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux dynamiques sur un même intervalle I .

Remarque 6.2.31. Si \mathcal{C} est une dynamique de couples de \mathfrak{T} sur un intervalle I , \mathcal{C}^* est une relation sur $\mathcal{C}_{\mathfrak{T}}^I$.

6.2.4 Formalismes qualitatifs topologiques et mesurés

Nous avons défini le concept de dynamique dans un cadre général. Dans cette section, nous nous focalisons sur le cadre des formalismes qualitatifs. Nous explicitons les formalismes qualitatifs pour lesquels les notions de continuité et de taille ont du sens, puis nous nous intéressons à leurs dynamiques.

Nous qualifions de *topologiques* les formalismes qualitatifs dotés d'une notion de continuité.

Définition 6.2.32. Un formalisme qualitatif $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est dit *topologique* si \mathcal{U} est doté d'une topologie.

Exemple 6.2.33. $\text{PC} = (\text{PA}, \mathbb{R}, \varphi_{\text{PC}})$ est un formalisme qualitatif topologique.

$\text{RCC}_{8,m} = (\text{RCA}_8, \mathfrak{R}_m, \varphi_m)$ avec \mathfrak{R}_m doté de la topologie engendrée par la distance de Hausdorff est un formalisme qualitatif topologique.

Ainsi, le concept de dynamique a du sens pour les entités des formalismes qualitatifs topologiques. Nous pouvons maintenant définir ce qu'est une dynamique pour un formalisme qualitatif topologique \mathcal{F} . C'est un ensemble d'évolutions de couple d'entités de \mathcal{F} satisfaisant à chaque instant la relation \mathcal{B} et constituant une relation symétrique². Autrement dit, une dynamique d'un formalisme qualitatif \mathcal{F} consiste en différentes évolutions possibles pour un couple d'entités étant représentables par une séquence temporelle de relations de \mathcal{F} . Ces dynamiques vont nous servir à formaliser la sémantique des séquences temporelles.

Définition 6.2.34. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique.

Une *dynamique* \mathcal{C} de \mathcal{F} sur un intervalle I est une dynamique \mathcal{C} de $\varphi(\mathcal{B})$ sur I qui vérifie $\forall (x, y) \in \mathcal{C}^* \quad (y, x) \in \mathcal{C}^*$, c'est-à-dire $\mathcal{C}^* = \overline{\mathcal{C}^*}$.

La *dynamique générale* de \mathcal{F} sur un intervalle I , notée $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^I$, est la dynamique générale $\mathcal{C}_{\varphi(\mathcal{B})}^I$.

Remarque 6.2.35. L'ensemble $\varphi(\mathcal{B})$ est bien un espace topologique (voir la section 6.2.1).

La dynamique générale de \mathcal{F} sur un intervalle I , $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^I$, respecte bien les conditions d'une dynamique de \mathcal{F} sur I . Elle vérifie en particulier $\mathcal{C}^* = \overline{\mathcal{C}^*}$. Elle contient l'ensemble des évolutions de couples d'entités, c'est-à-dire les fonctions continues de I dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, qui satisfont à chaque instant la relation $\varphi(\mathcal{B})$.

Exemple 6.2.36. La dynamique générale de PC sur \mathbb{R} , $\mathcal{C}_{\text{PC}}^{\mathbb{R}}$, est l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 6.2.37. Lorsque l'on considère un formalisme qualitatif dont les relations basiques sont exhaustives, nous avons $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^I = \mathcal{C}_{\varphi(\mathcal{B})}^I = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^I \otimes \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^I$, pour tout intervalle I de \mathbb{R} (puisque $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$).

Une dynamique \mathcal{C} d'un formalisme est un ensemble de couples d'évolutions d'entités. Cependant, nous aurons besoin de considérer l'ensemble des évolutions d'entités correspondant, que nous notons $\sqrt{\mathcal{C}}$.

Définition 6.2.38. Soit \mathcal{C} une dynamique d'un formalisme qualitatif topologique sur un intervalle I de \mathbb{R} .

L'ensemble des évolutions d'entités de \mathcal{C} , noté $\sqrt{\mathcal{C}}$, est défini par

$$\sqrt{\mathcal{C}} = \{x \mid \exists y (x, y) \in \mathcal{C}^*\}.$$

Nous avons ainsi la propriété $\mathcal{C} \subseteq \sqrt{\mathcal{C}} \otimes \sqrt{\mathcal{C}}$.

Exemple 6.2.39. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique dont les relations basiques sont exhaustives. Nous avons $\sqrt{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^I} = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}^I$. Ainsi, $\sqrt{\mathcal{C}_{\text{PC}}^I} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^I$.

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement aux formalismes qualitatifs topologiques pour lesquels la notion de préservation de la taille a du sens, que nous appelons formalismes qualitatifs topologiques *mesurés*.

Définition 6.2.40. Un formalisme qualitatif $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ doté d'une mesure μ est dit *mesuré* s'il existe (X, A, μ) un espace mesuré tel que $\mathcal{U} \subseteq A$.

Exemple 6.2.41. $\text{RCC}_{8,m}$ est un formalisme qualitatif mesuré.

Un formalisme qualitatif topologique mesuré $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ est donc un formalisme qualitatif dont l'univers \mathcal{U} est doté d'une topologie et d'une mesure μ . Pour ces formalismes qualitatifs, les notions d'évolution continue et de taille constante au cours du temps ont un sens.

Pour finir, nous formalisons la dynamique de préservation de la caractéristique c d'un formalisme qualitatif topologique et en particulier celle de préservation de la taille lorsqu'il est mesuré.

2. Si (x, y) est un couple d'évolutions possible, il est naturel que le couple (y, x) soit un couple d'évolutions possible.

Définition 6.2.42. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et c une fonction de \mathcal{U} dans un ensemble \mathcal{C} .

La *dynamique de préservation de la caractéristique c* de \mathcal{F} sur un intervalle I , notée $\mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^I$, est la dynamique $(\mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I \otimes \mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I) \cap \mathcal{C}_{\varphi(\mathcal{B})}^I$.

Appartenir à $\mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^I$ garantit, d'une part, qu'à chaque instant chaque entité du couple a la même valeur de caractéristique (la caractéristique est préservée) et d'autre part, qu'à chaque instant leur relation est décrite par une relation basique de \mathcal{F} .

Remarque 6.2.43. De manière analogue à la remarque précédente, lorsque l'on considère un formalisme qualitatif $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ dont les relations basiques sont exhaustives, nous avons $(\mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I \otimes \mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I) \cap \mathcal{C}_{\varphi(\mathcal{B})}^I = \mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I \otimes \mathcal{C}_{\mathcal{U},c}^I$, pour tout intervalle I de \mathbb{R} .

La dynamique de préservation de la taille est ainsi un cas particulier.

Exemple 6.2.44. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et mesuré, de mesure t .

La *dynamique de préservation de la taille* de \mathcal{F} sur un intervalle I est l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{F},t}^I$.

Nous avons ainsi formalisé le concept de dynamique dans le cadre général et dans celui des formalismes qualitatifs. Nous utilisons ce concept dans la section suivante afin de formuler une définition de graphe de transition dans le cadre général de la continuité des espaces topologiques.

6.2.5 Définition générale des graphes de voisinage et des graphes de dominance

Dans cette section, nous généralisons la sémantique du cadre formel des graphes de transition de Galton (Galton, 2000), présenté dans la section 3.3.3, et nous appliquons ce cadre généralisé dans le contexte des formalismes qualitatifs topologiques.

La sémantique des espaces de modes topologiques de Galton est limitée aux entités de \mathbb{R}^n (voir la section 3.3.3). Nous l'étendons à tout ensemble d'entités pour lequel la notion de continuité a du sens, c'est-à-dire à tout espace topologique.

Définition 6.2.45. Un *modèle* pour un espace de modes topologiques (Q, \vdash, \dashv) est un triplet $(\mathfrak{T}, \mathcal{C}, \delta)$, où

- (états du système) \mathfrak{T} est un espace topologique ;
 - (évolutions possibles) \mathcal{C} est une dynamique de \mathfrak{T} sur I un intervalle de \mathbb{R} ;
 - (sémantique) δ est une fonction de \mathfrak{T} dans Q ,
- vérifiant les propriétés suivantes, pour $q, q' \in Q$:
- (pré-dominance) $q \vdash q'$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{C}$ et $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$, $\delta(f(\tau)) = q$ et $\delta(f(t)) = q'$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$;
 - (post-dominance) $q \dashv q'$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{C}$ et $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$, $\delta(f(t)) = q$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$ et $\delta(f(\tau')) = q'^3$.

Le cadre formel de Galton définit la relation de dominance \succ et la relation de voisinage γ à partir des relations de pré-dominance \vdash et de post-dominance \dashv (voir la définition 3.3.9). Nous avons donc une définition des graphes de voisinage et de dominance dans le cadre général des espaces topologiques.

Nous allons maintenant transposer cette définition dans le cadre des formalismes qualitatifs. Nous nous intéressons à l'évolution des relations au cours du temps. L'ensemble des couples d'entités possibles dans le cadre d'un formalisme qualitatif est $\varphi(\mathcal{B})$. Nous nous intéressons donc aux différentes évolutions possibles de ces couples d'entités et aux variations de relations basiques satisfaites durant ces évolutions.

3. Notons que contrairement à la définition de Galton (définition 3.3.7), les relations de dominance sont définies par un *si et seulement si*. Avec la sémantique de Galton, nous pouvons avoir $q \vdash q'$ sans qu'il n'existe d'évolutions f satisfaisant $\delta(f(\tau)) = q$ et $\delta(f(t)) = q'$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$. Cette correction permet d'avoir un raisonnement plus précis et d'avoir l'unicité de l'espace de modes topologiques pour un modèle donné. Remarquons que certains des résultats de Galton concernant sa sémantique (Galton, 2000) ne se généralisent pas dans notre cadre à cause du *si et seulement si*.

Définition 6.2.46. L'espace de modes topologiques d'un formalisme qualitatif $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ pour une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur un intervalle I de \mathbb{R} est l'espace de modes topologiques $(\mathcal{B}, \vdash, \dashv)$ dont le modèle est $(\varphi(\mathcal{B}), \mathcal{C}, \delta)$ où δ est définie par $\delta((x, y)) = b$ si et seulement si $(x, y) \in \varphi(b)$ avec $(x, y) \in \varphi(\mathcal{B})$, $b \in \mathcal{B}$.

Nous notons respectivement $\vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$, $\dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$, $\succ_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$, $\zeta_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$, $\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ les relations de pré-dominance \vdash , de post-dominance \dashv , de dominance \succ , de voisinage ζ et de perturbation \rightsquigarrow de l'espace de modes topologiques d'un formalisme qualitatif \mathcal{F} pour une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur \mathbb{R} .

L'espace des modes topologiques d'un formalisme qualitatif (topologique) est ainsi paramétré par une dynamique.

En général, les entités considérées évoluent continûment, sans préservation de caractéristique, et indépendamment les unes des autres. Nous sommes alors dans le cadre de l'espace de modes topologiques général.

Définition 6.2.47. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique.

L'espace de modes topologiques général de \mathcal{F} est l'espace de modes topologiques de \mathcal{F} pour sa dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{R}}$. Nous notons $\vdash_{\mathcal{F}}$, $\dashv_{\mathcal{F}}$, $\succ_{\mathcal{F}}$ et $\zeta_{\mathcal{F}}$ les relations de cet espace de modes topologiques.

Remarque 6.2.48. Notons que $\vdash_{\mathcal{F}} = \succ_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire que $b \vdash_{\mathcal{F}} b' \iff b' \dashv_{\mathcal{F}} b$ pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$, puisque si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{R}}$, nous avons $g \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{R}}$ avec g définie par $g(t) = f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'espace de modes topologiques général de \mathcal{F} est symétrique (définition 3.3.10).

Nous retrouvons évidemment le graphe de voisinage et le graphe de dominance de PC de la littérature.

Proposition 6.2.49. La figure 3.2b et la figure 3.3 décrivent respectivement la relation de voisinage, ζ_{PC} , et la relation de dominance, \prec_{PC} , de PC.

Démonstration. Nous prouvons que la figure 3.3 décrit la relation de dominance générale de PC, \prec_{PC} . Cela implique directement que la figure 3.2b décrit la relation de voisinage générale de PC (définition 3.3.9).

Puisque $\prec_{\text{PC}} = \dashv_{\text{PC}}$, nous prouvons que la figure 3.3 décrit la relation de post-dominance \dashv . Nous devons donc prouver que nous avons les relations $\prec \dashv \prec$, $\prec \dashv =$, $= \dashv =$, $\succ \dashv =$, $\succ \dashv \succ$ et que nous n'avons pas les relations $\succ \dashv \prec$, $\prec \dashv \succ$, $= \dashv \prec$ et $= \dashv \succ$.

Puisque les fonctions constantes de \mathbb{R} dans $\varphi(\mathcal{B}_{\text{PC}}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ appartiennent à la dynamique générale $\mathcal{C}_{\text{PC}}^{\mathbb{R}}$ (définition 6.2.34), nous avons $\prec \dashv \prec$, $= \dashv =$ et $\succ \dashv \succ$. De plus, nous avons $\prec \dashv =$. En effet, soit f la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (t, -t)$. Pour $\tau = 0$ et $\tau' < \tau$, nous avons $f(\tau) = (0, 0) \in \varphi(\{=\})$ et pour tout $t \in]\tau', \tau[$, nous avons $f(t) = (t, -t) \in \varphi(\{<\})$ (définition 6.2.45). De manière similaire, avec $f(t) = (-t, t)$, nous montrons que $\succ \dashv =$.

Nous prouvons maintenant que nous n'avons pas la relation $\prec \dashv \succ$. Pour cela, il faut montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{PC}}^{\mathbb{R}}$, et tous $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ tels que $\tau' < \tau$, soit nous n'avons pas $\forall t \in]\tau', \tau[\ f(t) \in \varphi(\{<\})$, soit nous n'avons pas $f(\tau) \in \varphi(\{>\})$ (définition 6.2.45). Soient $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ tels que $\tau' < \tau$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{PC}}^{\mathbb{R}}$ tel que pour tout $t \in]\tau', \tau[$, $f(t) \in \varphi(\{<\})$. Nous montrons donc que $f(\tau) \notin \varphi(\{>\})$. Puisque $f \in \mathcal{C}_{\text{PC}}^{\mathbb{R}}$, il existe x et y des fonctions continues telles que $f(t) = (x(t), y(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in]\tau', \tau[$. Puisque x et y sont continues, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_{\epsilon} > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $|t - \tau| < \delta_{\epsilon} \implies |x(t) - x(\tau)| < \epsilon \wedge |y(t) - y(\tau)| < \epsilon$ (par la définition 6.2.4). Soient $\epsilon > 0$ et $t \in]\tau', \tau[$ tel que $|t - \tau| < \delta_{\epsilon}$. Nous avons $|x(\tau) - y(\tau) + y(t) - x(t)| \leq |x(\tau) - x(t)| + |y(t) - y(\tau)| < 2\epsilon$. Ainsi, $x(\tau) - y(\tau) + y(t) - x(t) < 2\epsilon$, d'où $x(\tau) - y(\tau) < 2\epsilon - y(t) + x(t)$. Puisque $x(t) < y(t)$, nous avons $x(\tau) - y(\tau) < 2\epsilon$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons $x(\tau) - y(\tau) < 2\epsilon$, donc $x(\tau) - y(\tau) \leq 0$. Par conséquent, $x(\tau) \leq y(\tau)$. Ainsi $f(\tau) \in \varphi(\{<=, =\})$, c'est-à-dire $f(\tau) \notin \varphi(\{>\})$. Nous n'avons donc pas $\prec \dashv \succ$. De manière analogue, nous n'avons pas $\succ \dashv \prec$, $= \dashv \prec$ et $= \dashv \succ$. \square

Remarque 6.2.50. Concernant RCC_8 , le graphe de dominance et donc le graphe de voisinage dépendent de la topologie considérée. Si on se place dans le cadre d'un espace métrique, dont la

distance définit la topologie, ces graphes dépendent de cette distance. Par exemple, avec la *distance duale de Hausdorff*, dans le cadre de régions bornées de \mathbb{R}^n , nous avons le graphe de voisinage de la figure 3.1a (Davis, 2001). Cependant, en considérant d'autres distances, le graphe de dominance et donc le graphe de voisinage de RCC_8 changent (Davis, 2001). Pour d'autres distances, les graphes de RCC_8 restent inchangés (Davis, 2001). Cela pose la question de la *bonne* topologie pour les régions.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre plus spécifique de la préservation de caractéristiques. Nous obtenons la définition suivante.

Définition 6.2.51. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} .

L'espace de modes topologiques de \mathcal{F} avec préservation de la caractéristique c est l'espace de modes topologiques de \mathcal{F} pour sa dynamique de préservation de la caractéristique c , c'est-à-dire $\mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{\mathbb{R}}$. Nous notons $\vdash_{\mathcal{F}}^c, \dashv_{\mathcal{F}}^c, \succ_{\mathcal{F}}^c, \prec_{\mathcal{F}}^c, \rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^c$ les relations de cet espace de modes topologiques.

Les mêmes remarques s'appliquent pour le graphe de voisinage et de dominance de RCC_8 dans le cadre de la préservation de caractéristiques.

Remarque 6.2.52. Notons que la propriété $\vdash_{\mathcal{F}}^c = \succ_{\mathcal{F}}^c$ est satisfaite, puisque si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{\mathbb{R}}$ nous avons $g \in \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{\mathbb{R}}$ avec g définie par $g(t) = f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, les espaces de modes topologiques de \mathcal{F} avec préservation de caractéristiques sont symétriques (définition 3.3.10).

Exemple 6.2.53. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et mesuré, de mesure t .

Ses graphes de transition pour la préservation de la taille sont $\vdash_{\mathcal{F}}^t, \dashv_{\mathcal{F}}^t, \succ_{\mathcal{F}}^t$ et $\prec_{\mathcal{F}}^t$.

Ainsi, $\prec_{\text{RCC}_{8,m}}^t$ est le graphe de voisinage avec préservation de la taille de RCC_8 doté de la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire de $\text{RCC}_{8,m} = (\text{RCA}_8, \mathfrak{R}_m, \varphi_m)$. Ce graphe de voisinage dépend du choix de la topologie de l'ensemble des régions mesurables \mathfrak{R}_m (voir la remarque 6.2.12).

6.2.6 Projections des graphes de transition

Dans cette section, nous montrons comment encoder les graphes de transition, dans le cadre des multi-algèbres, au sein de projections. La clôture algébrique basée sur ces projections propagera ainsi les interdépendances de ces graphes.

Définition 6.2.54. Soit $(\mathcal{B}, \vdash, \dashv)$ un espace de modes topologiques d'un formalisme qualitatif topologique $(\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ et soit τ une des relations de $(\mathcal{B}, \vdash, \dashv)$, c'est-à-dire $\tau \in \{\lhd, \succ, \prec, \rightsquigarrow, \vdash, \dashv\}$.

La *projection correspondant à la relation* $\tau \in \mathcal{B}$, notée \uparrow_{τ} , est la projection de \mathcal{A} dans \mathcal{A} satisfaisant :

$$\uparrow_{\tau} b = \bigcup \{b' \in \mathcal{B} \mid b \tau b'\}$$

pour tout $b \in \mathcal{B}$. Nous notons par \downarrow_{τ} la projection inverse de \uparrow_{τ} . Celle-ci satisfait $\downarrow_{\tau} b = \bigcup \{b' \in \mathcal{B} \mid b' \tau b\}$, pour tout $b \in \mathcal{B}$.

Ainsi, \uparrow_{\lhd} est la projection encodant le graphe de voisinage. Elle associe à chaque relation basique l'union des relations basiques voisines. De manière analogue, la projection \uparrow_{\prec} associe à une relation basique l'union des relations basiques qui la dominent et la projection \downarrow_{\prec} associe à une relation basique l'ensemble des relations basiques qu'elle domine.

Exemple 6.2.55. La projection \uparrow_{\lhd} correspondant au graphe de voisinage de la littérature de RCC_8 avec des régions de tailles variables (voir la figure 3.1a) est définie comme suit :

- $\uparrow_{\lhd}\{\text{DC}\} = \{\text{DC}, \text{EC}\},$
- $\uparrow_{\lhd}\{\text{EC}\} = \{\text{DC}, \text{EC}, \text{PO}\},$
- $\uparrow_{\lhd}\{\text{PO}\} = \{\text{EC}, \text{PO}, \text{TPP}, \text{EQ}, \overline{\text{TPP}}\},$
- $\uparrow_{\lhd}\{\text{EQ}\} = \{\text{PO}, \text{EQ}, \text{TPP}, \text{NTPP}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\},$
- $\uparrow_{\lhd}\{\text{TPP}\} = \{\text{PO}, \text{TPP}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}$ et

— $\uparrow_{\{NTPP\}} = \{TPP, NTPP, EQ\}$.

Exemple 6.2.56. Dans le cadre du calcul des points PC, nous avons les deux propriétés suivantes, liant les projections du graphe de dominance de PC (voir la figure 3.3) et les conversions multi-échelles de PC (voir la section 3.4.2 et en particulier la table 3.3). La projection de la relation de dominance \prec est la conversion ascendante :

$$\uparrow_{\prec} = \uparrow.$$

La projection inverse de la relation de dominance \prec est la conversion descendante :

$$\downarrow_{\prec} = \downarrow.$$

6.3 Séquences temporelles simples

Dans la section précédente, nous avons étudié les interdépendances spatio-temporelles entre les relations d'un formalisme qualitatif topologique pour une dynamique donnée. Ces interdépendances sont représentées par des graphes de voisinage et de dominance, et plus généralement par des graphes de perturbation et des graphes de pré-dominance et post-dominance, lorsque le sens du temps a une importance. De plus, nous avons montré comment déterminer les projections correspondant à ces graphes de transition.

Nous nous intéressons dans cette section aux séquences de réseaux de contraintes décrivant le monde par rapport à une séquence d'instants de référence ordonnés et distincts τ_1, \dots, τ_m , avec $m \in \mathbb{N}^*$. Nous formalisons le raisonnement sur ces séquences à la fois dans le cadre de la continuité sans relation intermédiaire (section 3.3.2) et dans le cadre de la continuité sur une partition du temps (section 3.3.3). Nous définissons, d'une part, les multi-algèbres des séquences temporelles. Celles-ci se basent sur les projections des graphes de transition. D'autre part, nous explicitons la sémantique de ces multi-algèbres. Nous montrons en particulier que ces formalismes constituent des formalismes séquentiels, ce qui prouve que le raisonnement est correct et que les résultats du cadre des multi-algèbres sont applicables (voir le chapitre 4).

6.3.1 Multi-algèbres des séquences temporelles simples

Nous commençons donc par présenter les multi-algèbres des séquences temporelles. Rappelons que nous avons présenté dans l'exemple 4.2.12 la multi-algèbre des séquences temporelles dont les relations appartiennent au calcul des points PC, dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire. Dans ce cadre, une relation d'une multi-algèbre décrit la séquence de relations classiques satisfaite par deux évolutions d'entités : la $i^{\text{ème}}$ relation est celle satisfaite au $i^{\text{ème}}$ instant de la séquence. Les projections, basées sur le graphe de voisinage, servent à propager les interdépendances temporelles de la continuité sans relation intermédiaire. En particulier, une séquence de relations basiques close par projection respecte nécessairement le graphe de voisinage. Ainsi, la multi-algèbre dans le cadre d'un graphe de voisinage est simple. L'algèbre \mathcal{A}_i est associée à l'instant τ_i de la séquence, et donc entre deux algèbres d'instant successifs, la projection est celle du graphe de voisinage ; dans les autres cas, il n'y a pas d'interdépendance. Cela se généralise simplement au cadre des graphes de perturbation, nécessaires lorsque l'évolution des relations dépend du sens du temps, comme le montre la définition suivante.

Définition 6.3.1. Soient T une séquence ordonnée d'instant distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$.

La multi-algèbre du formalisme \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par la dynamique \mathcal{C} , notée $T\mathcal{A}_p^{\mathcal{C}}$, est le produit cartésien \mathcal{A}^m doté des projections définies par :

$$\uparrow_i^j b = \begin{cases} \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}} b & \text{si } j = i + 1 \\ \downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}} b & \text{si } j = i - 1 \\ \mathcal{B} & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

La multi-algèbre du formalisme \mathcal{F} (généralement) temporalisé sans relation intermédiaire, notée TA_p , est la multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire par sa dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Remarque 6.3.2. Le p de TA_p^c signifie que nous sommes dans le cadre des graphes de *perturbation*.

La notation TA_p peut être ambiguë si plusieurs formalismes qualitatifs ont la même notation pour leur algèbre (non associative) \mathcal{A} .

Par exemple, TRCA_{8p} permet de représenter la séquence suivante : une région x est à l'intérieur d'une autre région y , ensuite ces deux régions se chevauchent, et enfin elles sont disjointes ou en contact extérieur. En effet, cette séquence se représente par (TPP NTPP, PO, EC DC). Notons toutefois que les projections effectives de TRCA_{8p} dépendent de la topologie choisie (voir la remarque 6.2.50).

Exemple 6.3.3. Considérons la séquence temporelle sur RCC_8 suivante :

- À τ_1 : $N^{xy} = \text{TPP}$, $N^{yz} = \text{PO}$, et $N^{xz} = \text{PO}$,
- À τ_2 : $N^{xy} = \text{PO}$, $N^{yz} = \text{TPP NTPP}$, et $N^{xz} = \text{PO}$,
- À τ_3 : $N^{xy} = \text{PO DC}$, $N^{yz} = \text{PO}$, et $N^{xz} = \overline{\text{TPP}}$.

Sa représentation sous forme de réseau sur une multi-algèbre est le réseau suivant sur TRCA_{8p} avec $m = 3$:

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO DC})$,
- $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP NTPP}, \text{PO})$ et
- $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}})$.

Sa clôture algébrique, basée sur la projection de l'exemple 6.2.55, est :

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO})$,
- $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP}, \text{PO})$ et
- $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \text{TPP})$.

Remarque 6.3.4. Bien que la dynamique naturelle soit la dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$, il y a de nombreuses raisons de considérer des dynamiques différentes, plus complexes et spécifiques. En particulier :

- On peut vouloir considérer des évolutions plus ou moins régulières. Par exemple, lorsque $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, on peut souhaiter que les évolutions considérées soient linéaires par morceaux. Si on veut que les évolutions soient plus régulières, on peut alors se restreindre aux fonctions dérivables dont la dérivée est continue ou plus spécifiquement aux fonctions polynomiales ou aux *splines* d'un certain degré.
- Les entités considérées peuvent avoir une ou plusieurs caractéristiques préservées au cours du temps, telles que la taille.
- On peut aussi s'intéresser à des entités qui n'évoluent pas indépendamment les unes par rapport aux autres (ce pourquoi \mathcal{C} est une dynamique de couples d'entités). Par exemple, si une région devient incluse dans une autre, dans certains contextes, elle ne peut plus en sortir.
- Enfin, on a la possibilité de modéliser des comportements complexes. On peut par exemple considérer différents types de régions, caractérisées à chaque instant par le même ensemble de relations basiques d'un formalisme \mathcal{F} , et avoir des évolutions de relations différentes en fonction du type des régions. Par exemple, considérons deux types de régions A et B . Les couples de régions de type A satisfont une certaine dynamique \mathcal{C}_A , les couples de régions de type B satisfont une certaine dynamique \mathcal{C}_B et les couples de régions de type (A, B) satisfont une certaine dynamique $\mathcal{C}_{(A, B)}$. Pour cela, il faut concevoir un nouveau formalisme différenciant le type des régions, en dupliquant les relations basiques de \mathcal{F} pour chaque couple de types de régions considérés. La composition de ce nouveau formalisme qualitatif est la composition du formalisme d'origine lorsqu'il y a concordance des types. Elle donne l'ensemble vide dans le cas contraire. Le raisonnement spatio-temporel offre même la possibilité d'un changement de type après la satisfaction de certaines relations.

Nous nous intéressons à présent aux multi-algèbres du cadre des séquences temporelles sur des intervalles où les interdépendances sont représentées par des graphes de dominance, et plus

généralement par des graphes de pré-dominance et de post-dominance. Dans ce contexte, nous avons une description complète du monde : à chaque instant τ_i et durant chaque intervalle ouvert $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, les entités sont décrites par un réseau de contraintes. Nous avons donc $2m - 1$ réseaux et $2m - 1$ algèbres \mathcal{A}_i . Ainsi, dans le cadre des multi-algèbres, τ_i est associé à \mathcal{A}_{2i-1} et $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ à \mathcal{A}_{2i} . La projection de la relation de post-dominance est imposée lorsque nous passons de l'algèbre d'un intervalle ouvert à celle d'un instant consécutif. Réciproquement, la projection de la relation de pré-dominance est imposée lorsque nous passons de l'algèbre d'un instant à celle d'un intervalle ouvert consécutif.

Définition 6.3.5. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$.

La multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sur les intervalles de T par la dynamique \mathcal{C} , notée $\text{TA}_{\mathcal{d}}^{\mathcal{C}}$, est le produit cartésien \mathcal{A}^{2m-1} doté des projections suivantes, pour tout $b \in \mathcal{B}$:

$$\uparrow_i^{i+1} b = \begin{cases} \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}} b & \text{si } i \text{ impair} \\ \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}} b & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$$

$$\uparrow_{i+1}^i b = \begin{cases} \downarrow_{\vdash_{\mathcal{F}}} b & \text{si } i \text{ impair} \\ \downarrow_{\dashv_{\mathcal{F}}} b & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$$

pour $i \in \{1, \dots, 2m - 2\}$, et

$$\uparrow_i^j b = \mathcal{B} \quad \text{si } |i - j| > 1$$

pour $i, j \in \{1, \dots, 2m - 1\}$.

La multi-algèbre de \mathcal{F} (généralement) temporalisé sur intervalles, notée $\text{TA}_{\mathcal{d}}$, est la multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sur intervalles par sa dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Remarque 6.3.6. Le \mathcal{d} de $\text{TA}_{\mathcal{d}}^{\mathcal{C}}$ signifie que nous sommes dans le cadre des graphes de *dominance*.

Exemple 6.3.7. Considérons la séquence temporelle sur PC suivante :

- À l'instant τ_1 : $N^{xy} = \{<\}$, $N^{yz} = \{<, >\}$,
- Sur l'intervalle $]\tau_1, \tau_2[$: $N^{xy} = \{<, =\}$, $N^{xz} = \{=\}$,
- À l'instant τ_2 : $N^{xy} = \{=, >\}$.

Sa représentation sous forme de réseau sur une multi-algèbre est le réseau N sur $\text{TPA}_{\mathcal{d}}$ (avec $m = 2$) suivant :

- $N^{xy} = (<, \leq, \geq)$,
- $N^{yz} = (\neq, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et
- $N^{xz} = (\mathcal{B}, =, \mathcal{B})$.

Sa clôture algébrique, basée sur les projections de l'exemple 6.2.56, est : $N^{xy} = (<, <, =)$, $N^{yz} = (>, >, =)$, et $N^{xz} = (=, =, =)$.

Pour finir, remarquons que $\text{TA}_{\mathcal{p}}^{\mathcal{C}}$ et $\text{TA}_{\mathcal{d}}^{\mathcal{C}}$ sont toujours des multi-algèbres arborescentes.

Lemme 6.3.8. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$.

- La multi-algèbre $\text{TA}_{\mathcal{p}}^{\mathcal{C}}$ est arborescente.
- La multi-algèbre $\text{TA}_{\mathcal{d}}^{\mathcal{C}}$ est arborescente.

Démonstration. La multi-algèbre $\text{TA}_{\mathcal{p}}^{\mathcal{C}}$ est arborescente (définition 4.3.9). En effet, une de ses anti-arborescences plénières est le graphe dont l'ensemble des noeuds est $\{1, \dots, m\}$ et l'ensemble des arcs est $\{i \rightarrow i + 1 \mid i \in \{1, \dots, m - 1\}\}$, puisque $\uparrow_i^j b = \mathcal{B}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $|i - j| > 1$ et car $\downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}} b = \uparrow_{i+1}^i b = \downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{i+1} b$, où $\downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{i+1}$ est la projection inverse de $\uparrow_{i+1}^{i+1} = \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}$ (définition 4.3.7), pour tous $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ et $b \in \mathcal{B}$. En effet, $\downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}$ est la projection inverse de $\uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}$ (définition 6.2.54).

La preuve pour $\text{TA}_{\mathcal{d}}^{\mathcal{C}}$ est analogue. Il faut considérer l'anti-arborescence dont l'ensemble des noeuds est $\{1, \dots, 2m - 1\}$ et l'ensemble des arcs est $\{i \rightarrow i + 1 \mid i \in \{1, \dots, 2m - 2\}\}$ et remarquer que $\downarrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}$ est la projection inverse de $\uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}$ et $\downarrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}$ est la projection inverse de $\uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}$. \square

Ainsi, utiliser la proposition 4.3.12, lorsque les relations basiques closes par projection sont cohérentes, permet de prouver que toutes les relations \bar{r} -cohérentes sont cohérentes.

6.3.2 Sémantique des séquences temporelles simples

Nous avons présenté les multi-algèbres des séquences temporelles et souligné comment la clôture algébrique permet d'inférer de nouvelles connaissances. Nous formalisons maintenant la sémantique des réseaux sur les multi-algèbres des séquences temporelles, notamment afin de montrer que le raisonnement est correct et que les résultats du cadre des multi-algèbres sont applicables dans ce contexte.

6.3.2.1 Relations temporalisées

Afin d'expliciter la sémantique des séquences temporelles, nous formalisons le fait qu'une relation soit satisfaite durant une période de temps : c'est ce que nous appelons *temporaliser* les relations. Nous montrons également que les relations temporalisées permettent de redéfinir simplement les relations de dominance et qu'elles constituent un formalisme qualitatif.

Nous commençons ainsi par temporaliser les relations d'un formalisme qualitatif à un instant et sur un intervalle.

Définition 6.3.9. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, \mathcal{C} une dynamique de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sur un intervalle I' de \mathbb{R} , $t \in I'$ et $I \subseteq I'$ un intervalle.

— La relation de \mathcal{C} , interprétation de $r \in \mathcal{A}$ à l'instant t , notée $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}}$, est définie comme suit :

$$\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid x(t) \varphi(r) y(t)\}$$

— La relation de \mathcal{C} , interprétation de $r \in \mathcal{A}$ durant l'intervalle I , notée $\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}$, est définie comme suit :

$$\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\}$$

Une relation r temporalisée sur un intervalle I correspond ainsi à l'ensemble des couples d'évolutions d'entités de \mathcal{C} qui satisfont une des relations basiques de r à chaque instant de I .

Exemple 6.3.10. La relation $\langle \langle \rangle \rangle_I^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}}$ est l'ensemble des couples (x, y) de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in I$.

La relation $\langle \{ <, = \} \rangle_I^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}}$ est l'ensemble des couples (x, y) de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in I$ ou satisfaisant $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I$.

Remarque 6.3.11. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $t \in \mathbb{R}$. Nous avons :

- $\langle r \rangle_{[t, t]}^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_{\emptyset}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^*$.
- $\langle \mathcal{B} \rangle_t^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^*$.
- $\langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^*$.

Remarquons dans le lemme suivant les propriétés élémentaires satisfaites par ces relations.

Lemme 6.3.12. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, \mathcal{C} une dynamique de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sur un intervalle I' de \mathbb{R} , $t \in I'$ et soient I et I' deux intervalles tels que $I \subseteq I'$ et $I' \subseteq I'$. Nous avons les propriétés suivantes, pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $r, r' \in \mathcal{A}$:

1. si $I \subseteq I'$ alors $\langle r \rangle_{I'}^{\mathcal{C}} \subseteq \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}$;
2. $\langle b \rangle_I^{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\}$;
3. $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_{[t, t]}^{\mathcal{C}}$;
4. $(x, y) \in \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \iff \exists b \in r \forall t \in I \quad (x, y) \in \langle b \rangle_t^{\mathcal{C}}$;
5. $\langle r \cup r' \rangle_I^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \cup \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}$;
6. $r \subseteq r' \implies \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \subseteq \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}$;

7. si $I \cap I' \neq \emptyset$ alors $\langle r \rangle_I^C \cap \langle r' \rangle_{I'}^C = \langle r \cap r' \rangle_I^C \cap \langle r \cap r' \rangle_{I'}^C$;
 8. $\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(r) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^C = \langle r \rangle_I^C$.

Démonstration. Les quatre premières propriétés sont immédiates. Nous prouvons les quatre dernières.

$$\begin{aligned}
 & - \langle r \cup r' \rangle_I^C = \langle r \rangle_I^C \cup \langle r' \rangle_{I'}^C : \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \cup r' \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\} \text{ par définition (déf. 6.3.9)} \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t) \vee \exists b \in r' \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\} ; \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\} \cup \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r' \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\} \\
 & = \langle r \rangle_I^C \cup \langle r' \rangle_{I'}^C \text{ par définition} \\
 & - r \subseteq r' \implies \langle r \rangle_I^C \subseteq \langle r' \rangle_{I'}^C :
 \end{aligned}$$

Supposons $r \subseteq r'$. Il existe alors $r'' \in \mathcal{A}$ telle que $r' = r \cup r''$. Ainsi, $\langle r' \rangle_{I'}^C = \langle r \cup r'' \rangle_{I'}^C = \langle r \rangle_I^C \cup \langle r'' \rangle_{I'}^C$ (propriété 5 de ce lemme). Nous avons bien $\langle r \rangle_I^C \subseteq \langle r' \rangle_{I'}^C$.

$$- \text{ Si } I \cap I' \neq \emptyset \text{ alors } \langle r \rangle_I^C \cap \langle r' \rangle_{I'}^C = \langle r \cap r' \rangle_I^C \cap \langle r \cap r' \rangle_{I'}^C :$$

Puisque $r \cap r' \subseteq r$ et $r \cap r' \subseteq r'$, nous avons $\langle r \cap r' \rangle_I^C \subseteq \langle r \rangle_I^C$ et $\langle r \cap r' \rangle_{I'}^C \subseteq \langle r' \rangle_{I'}^C$ (propriété 6 de ce lemme). Ainsi, nous avons $\langle r \cap r' \rangle_I^C \cap \langle r \cap r' \rangle_{I'}^C \subseteq \langle r \rangle_I^C \cap \langle r' \rangle_{I'}^C$. Nous montrons maintenant l'autre inclusion.

Supposons que $I \cap I' \neq \emptyset$. Soit $(x, y) \in \langle r \rangle_I^C \cap \langle r' \rangle_{I'}^C$. Il existe ainsi $b \in r$ et $b' \in r'$ telles que $(x, y) \in \langle b \rangle_I^C \cap \langle b' \rangle_{I'}^C$. En particulier, soit $t \in I \cap I'$. Nous avons $(x(t), y(t)) \in \varphi(b) \cap \varphi(b') = \varphi(b \cap b')$ puisque \mathcal{F} est un formalisme qualitatif. Nous avons par conséquent $\varphi(b \cap b') \neq \emptyset$ et ainsi $b \cap b' \neq \emptyset$, ce qui implique que $b = b'$. Par conséquent, il existe $b \in r \cap r'$ telle que $(x, y) \in \langle b \rangle_I^C$, c'est-à-dire $(x, y) \in \langle r \cap r' \rangle_I^C$, et telle que $(x, y) \in \langle b \rangle_{I'}^C$, c'est-à-dire $(x, y) \in \langle r \cap r' \rangle_{I'}^C$. Ainsi, $(x, y) \in \langle r \cap r' \rangle_I^C \cap \langle r \cap r' \rangle_{I'}^C$. Nous avons ainsi montré l'autre sens de l'égalité.

$$- \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(r) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^C = \langle r \rangle_I^C :$$

Soit $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(r) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^C$. D'une part, pour tout $t \in I$, nous avons $x(t) \varphi(r) y(t)$. Par conséquent, il existe $b_t \in r$ telle que $x(t) \varphi(b_t) y(t)$, c'est-à-dire $(x, y) \in \langle b_t \rangle_t^C$. D'autre part, il existe $b \in \mathcal{B}$ telle que pour tout $t \in I$, $(x, y) \in \langle b \rangle_t^C$ (propriété 4 de ce lemme). Ainsi, pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \varphi(b_t) \cap \varphi(b)$. Ainsi, $\varphi(b_t) \cap \varphi(b) = \varphi(b_t \cap b) \neq \emptyset$ et donc $b_t = b$ pour tout $t \in I$ car \mathcal{F} est un formalisme qualitatif. Par conséquent, il existe $b \in r$ telle que pour tout $t \in I$, $(x, y) \in \langle b \rangle_t^C$, c'est-à-dire $(x, y) \in \langle r \rangle_I^C$ (propriété 4 de ce lemme). Ainsi, $\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(r) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^C \subseteq \langle r \rangle_I^C$. Puisque $\langle r \rangle_I^C \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(r) y(t)\}$ et $\langle r \rangle_I^C \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_I^C$, nous avons l'inclusion inverse, ce qui conclut la preuve. \square

Remarquons qu'à partir des relations temporalisées, nous pouvons reformuler la définition des relations de pré-dominance et de post-dominance.

Proposition 6.3.13. *Soit $(\mathcal{B}, \vdash, \dashv)$ l'espace de modes topologiques d'un formalisme qualitatif topologique $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ pour une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soient $b, b' \in \mathcal{B}$.*

Nous avons les deux équivalences suivantes :

- $b \vdash b'$ si et seulement s'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_\tau^C \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^C \neq \emptyset$.
- $b \dashv b'$ si et seulement s'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_{\tau, \tau'}^C \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^C \neq \emptyset$.

Démonstration. Nous prouvons la propriété pour la relation de pré-dominance \vdash . La preuve est analogue pour la relation de post-dominance \dashv .

Nous commençons par expliciter la définition de la relation de pré-dominance \vdash dans le cadre des formalismes qualitatifs, en remarquant que nous avons $(x(\tau), y(\tau)) \in \varphi(b)$ si et seulement si $\delta(x(\tau), y(\tau)) = b$, avec $\tau \in I$ et $b \in \mathcal{B}$ (définition 6.2.46). Ainsi, pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$, nous avons $b \vdash b'$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathcal{C}^*$ et $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$, $(x(\tau), y(\tau)) \in \varphi(b)$ et $(x(t), y(t)) \in \varphi(b')$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$ (définitions 6.2.45 et 6.2.46). Remarquons que le fait que $(x, y) \in \mathcal{C}^*$ avec $(x(\tau), y(\tau)) \in \varphi(b)$ est équivalent à $(x, y) \in \langle b \rangle_\tau^C$ (définition 6.3.9). De manière similaire, le fait que $(x, y) \in \mathcal{C}^*$ avec $(x(t), y(t)) \in \varphi(b')$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$ est équivalent à

$(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau, \tau'}^{\mathcal{C}}$ (définition 6.3.9). Ainsi, nous avons $b \vdash b'$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathcal{C}^*$ et $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$, $(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}}$ et $(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau, \tau'}^{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels quel $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{\tau, \tau'}^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$. \square

Avec le lemme suivant, nous montrons que l'ensemble des relations temporalisées constitue un formalisme qualitatif symétrique. Ce résultat nous permet de montrer que les multi-algèbres des séquences temporelles constituent effectivement des formalismes séquentiels.

Lemme 6.3.14. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, \mathcal{C} une dynamique de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sur un intervalle I' de \mathbb{R} telle que $\mathcal{C}^* = \overline{\mathcal{C}^*}$, $t \in I'$ et $I \subseteq I'$ un intervalle.*

- *Le triplet $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_t^{\mathcal{C}})$ constitue un formalisme qualitatif (symétrique).*
- *Le triplet $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_I^{\mathcal{C}})$ constitue un formalisme qualitatif (symétrique).*

Démonstration. Nous vérifions les propriétés de la définition 4.2.1 pour $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_I^{\mathcal{C}})$. Cela implique que le triplet $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_t^{\mathcal{C}})$ est également un formalisme qualitatif, puisque $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_{[t, t]}^{\mathcal{C}}$. Soient $r, r' \in \mathcal{A}$, les propriétés suivantes sont effectivement satisfaites :

- \mathcal{A} est une algèbre non associative ;
- $\langle \cdot \rangle_I^{\mathcal{C}}$ est une fonction de \mathcal{A} dans $2^{\mathcal{C}^*} \subseteq 2^{\sqrt{\mathcal{C}} \times \sqrt{\mathcal{C}}}$;
- $\langle \emptyset \rangle_I^{\mathcal{C}} = \emptyset$, par définition ;
- $\langle \bar{r} \rangle_I^{\mathcal{C}} = \overline{\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}}$, en effet :

$\langle \bar{r} \rangle_I^{\mathcal{C}} =$	$\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in \bar{r} \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\}$	par	définition (déf. 6.3.9)
$=$	$\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(\bar{b}) y(t)\}$	car	$\bar{r} = \bigcup_{b \in r} \bar{b}$
$=$	$\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(\bar{b}) y(t)\}$	car	\mathcal{F} est un formalisme qualitatif
$=$	$\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad y(t) \varphi(b) x(t)\}$	par	la définition de l'inverse (sect. 2.2.1)
$=$	$\{(x, y) \mid (y, x) \in \mathcal{C}^* \wedge \exists b \in r \forall t \in I \quad y(t) \varphi(b) x(t)\}$	car	$\mathcal{C}^* = \overline{\mathcal{C}^*}$
$=$	$\{(x, y) \mid \overline{(y, x)} \in \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}\}$	par	la définition 6.3.9
$=$	$\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}$	par	la définition de l'inverse ;
- $\langle r \cap r' \rangle_I^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \cap \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}$, par la propriété 7 du lemme 6.3.12 ;
- $\langle r \cup r' \rangle_I^{\mathcal{C}} = \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \cup \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}$ (propriété 5 du lemme 6.3.12) ;
- Nous avons $\langle r \circ r' \rangle_I^{\mathcal{C}} \supseteq (\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \circ \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}}$, comme nous le montrons ci-dessous.
Par la définition de la composition (déf. 2.2.5) et par la définition de relation temporalisée (déf. 6.3.9), nous avons

$$\begin{aligned} \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \circ \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}} &= \\ &= \{(x, z) \mid \exists y \quad (x, y) \in \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \wedge (y, z) \in \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}\} = \\ &= \{(x, z) \mid \exists y \quad (x, y), (y, z) \in \mathcal{C}^* \wedge (\exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t) \wedge \exists b' \in r' \forall t \in I \quad y(t) \varphi(b') z(t))\}. \end{aligned}$$

De ce fait, et puisque $\langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} \subseteq \{(x, z) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \quad x(t) \varphi(\mathcal{B}) z(t)\}$, nous avons

$$\begin{aligned} (\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \circ \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} &= \\ &= \{(x, z) \mid \exists y \quad (x, y), (y, z) \in \mathcal{C}^* \wedge \left\{ \begin{array}{l} \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t) \\ \exists b' \in r' \forall t \in I \quad y(t) \varphi(b') z(t) \\ \forall t \in I \quad x(t) \varphi(\mathcal{B}) z(t) \end{array} \right\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}}\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'implication suivante, où $(x, y), (y, z) \in \mathcal{C}^*$ et $b, b' \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} &\forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t) \wedge \forall t \in I \quad y(t) \varphi(b') z(t) \wedge \forall t \in I \quad x(t) \varphi(\mathcal{B}) z(t) \\ \iff &\forall t \in I \quad (x(t) \varphi(b) y(t) \wedge y(t) \varphi(b') z(t) \wedge x(t) \varphi(\mathcal{B}) z(t)) \\ \iff &\forall t \in I \quad (x(t) \varphi(b) y(t) \wedge y(t) \varphi(b') z(t) \wedge x(t) (\varphi(b) \circ \varphi(b')) z(t) \wedge x(t) \varphi(\mathcal{B}) z(t)) \\ \text{par} &\quad \text{la définition de la composition (déf. 2.2.5)} \\ \iff &\forall t \in I \quad (x(t) \varphi(b) y(t) \wedge y(t) \varphi(b') z(t) \wedge x(t) ((\varphi(b) \circ \varphi(b')) \cap \varphi(\mathcal{B})) z(t)) \\ \implies &\forall t \in I \quad x(t) (\varphi(b) \circ \varphi(b')) \cap \varphi(\mathcal{B}) z(t), \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \circ \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} \subseteq \{(x, z) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \exists b' \in r' \forall t \in I \ x(t) (\varphi(b) \circ \varphi(b')) \cap \varphi(\mathcal{B}) z(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}}.$$

Nous concluons par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \circ \langle r' \rangle_I^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} \\ \subseteq & \{(x, z) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \exists b' \in r' \forall t \in I \ x(t) \varphi(b \otimes b') z(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} & \text{car } (\varphi(b) \circ \varphi(b')) \cap \varphi(\mathcal{B}) \subseteq \varphi(b \otimes b') \\ & & (\mathcal{F} \text{ est un formalisme qualitatif}) \\ \subseteq & \{(x, z) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \varphi(r \otimes r') z(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^{\mathcal{C}} & \text{car } r \subseteq r' \implies \varphi(r) \subseteq \varphi(r') \\ = & \langle r \otimes r' \rangle_I^{\mathcal{C}} & \text{par prop. 8 du lemme 6.3.12.} \end{aligned}$$

□

Notons que l'ensemble $\{\langle b \rangle_I^{\mathcal{C}} \mid b \in \mathcal{B}\}$, avec I un intervalle vérifiant $I \subseteq I'$ et \mathcal{B} un ensemble de relations basiques exhaustives et disjointes deux à deux sur \mathcal{U} , forme un ensemble de relations disjointes deux à deux, mais non exhaustives. Il s'agit d'une sous-partition (voir la section 4.2.1). C'est un des exemples qui justifient la généralisation de la notion de formalisme qualitatif, que nous proposons.

Remarque 6.3.15. Nous aurions pu définir $\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}$ par $\{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \varphi(r) y(t)\}$ mais cela aurait posé plusieurs problèmes. En particulier, ces relations alternatives ne forment pas un formalisme qualitatif. Elles ne sont pas closes par union. Notre approche est moins expressive, mais elle est suffisante pour de nombreuses applications comme la simulation qualitative et l'interpolation de séquences temporelles, comme nous le verrons dans la section 6.7.

6.3.2.2 Sémantique des séquences sur intervalles

Nous avons défini la temporalisation des relations dans la section précédente. En nous basant sur cette temporalisation, nous donnons maintenant un sens aux relations des multi-algèbres des séquences temporelles. Celles-ci s'interprètent simplement comme des intersections de relations temporalisées.

Nous commençons par expliciter la sémantique des réseaux sur $\text{T}\mathcal{A}_d$, c'est-à-dire la sémantique des séquences temporelles dans le cadre de partitions du temps, constituées de séquences de points τ_i et d'intervalles $]\tau_i, \tau_{i+1}[$. Nous appelons les formalismes permettant de raisonner sur ces séquences, les *formalismes temporalisés sur intervalles*.

Définition 6.3.16. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$.

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sur les intervalles de T par la dynamique \mathcal{C}* , que nous notons $\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}$, est le triplet $(\text{T}\mathcal{A}_d, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}})$ avec $\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}}$ la fonction de \mathcal{A} définie par :

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_{2i-1} \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \langle R_{2i} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}[}^{\mathcal{C}}.$$

Le formalisme \mathcal{F} (*généralement*) *temporalisé sur intervalles*, noté $\text{T}\mathcal{F}_d$, est le formalisme \mathcal{F} temporalisé sur intervalles par sa dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Par exemple, TPC_d donne la sémantique du réseau sur TPA_d de l'exemple 6.3.7.

Exemple 6.3.17. Considérons le réseau N sur TPC_d avec $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 0$ et $\tau_3 = 1$ ($m = 3$) défini par :

- $N^{xy} = (=, >, >, >, >),$
- $N^{yz} = (<, <, <, <, =),$
- $N^{xz} = (<, <, =, >, >).$

La famille u_x, u_y et u_z satisfaisant $u_x(t) = t$, $u_y(t) = -1$ et $u_z(t) = -t$ pour tout $t \in [-1, 1]$ est une solution de N . En effet, en particulier, $(u_x, u_z) \in \varphi_{\text{TPC}_d}(N^{xz}) = \langle \langle \rangle_{-1} \cap \langle \langle \rangle_{-1,0[} \cap \langle \langle \rangle_0 \cap \langle \langle \rangle_{]0,1[} \cap \langle \langle \rangle_1$.

Nous montrons maintenant que $\text{TF}_d^{\mathcal{C}}$, \mathcal{F} *temporalisé sur intervalles par la dynamique \mathcal{C}* , est un formalisme séquentiel, en nous basant sur le lemme suivant, c'est-à-dire sur le fait que les projections sont correctes.

Lemme 6.3.18. *Soit \mathcal{F} un formalisme qualitatif topologique et soit \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur I . Soient $\tau, \tau' \in I$ des instants tels que $\tau < \tau'$ et soit $b \in \mathcal{B}$.*

Nous avons les propriétés suivantes :

- $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$;
- $\langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \downarrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$;
- $\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$;
- $\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \downarrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau}$.

Démonstration. Nous prouvons les quatre propriétés.

- $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$:

Soit $(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$. Puisque $(x, y) \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$ et étant donné que $\langle r \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} = \bigcup_{b \in r} \langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$ pour tout $r \in \mathcal{A}$ (lemme 4.2.5), il existe $b' \in \mathcal{B}$ telle que

$$(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}.$$

Ainsi, $b \vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ (proposition 6.3.13), d'où $b' \in \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b$ (définition 6.2.54). Nous en déduisons donc,

$$\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \bigcup_{b'' \in \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b} \langle b'' \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} = \left\langle \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}.$$

Puisque $(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$, nous déduisons $(x, y) \in \left\langle \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$. Par conséquent, nous concluons

que la propriété $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\vdash_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$ est effectivement satisfaite.

- $\langle b \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \downarrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$:

La preuve de cette propriété est symétrique à celle de la propriété précédente.

- $\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$;

Soit $(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}}$. Comme \mathcal{C} est une dynamique sur \mathcal{F} , c'est-à-dire une dynamique de $\varphi(\mathcal{B})$ (définition 6.2.34), nous avons $(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$. Ainsi, étant donné que pour tout $r \in \mathcal{A}$, $\langle r \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} = \bigcup_{b \in r} \langle b \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$, il existe $b' \in \mathcal{B}$ tel que

$$(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}.$$

Ainsi, $b \dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ (proposition 6.3.13), d'où $b' \in \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b$ (définition 6.2.54). Nous en déduisons

$$\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \bigcup_{b'' \in \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b} \langle b'' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} = \left\langle \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}.$$

Puisque $(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$, nous déduisons $(x, y) \in \left\langle \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$. Par conséquent, nous concluons que

la propriété $\langle b \rangle_{\tau, \tau'[}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\dashv_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$ est effectivement satisfaite.

$$- \langle b \rangle_{\tau, \tau'}^{\mathcal{C}} \subseteq \langle \downarrow_{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}} b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}};$$

La preuve de cette propriété est symétrique à celle de la propriété précédente. \square

A partir de ce lemme, nous prouvons ainsi que $\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}$ est un formalisme séquentiel.

Proposition 6.3.19. *Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Tout formalisme qualitatif topologique \mathcal{F} temporalisé sur les intervalles de T par une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$, $\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}$, est un formalisme séquentiel.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique. Pour prouver que $\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}} = (\text{T}\mathcal{A}_d, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}})$ est un formalisme séquentiel, nous appliquons le lemme de combinaison (lemme 4.2.4). Nous vérifions ainsi ses hypothèses :

- $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}})$ avec $i \in \{1, \dots, m\}$ et $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}}^{\mathcal{C}})$ avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$ constituent des formalismes qualitatifs (lemme 6.3.14);
- $\mathfrak{R}' = \mathcal{C}^*$ et $\overline{\mathcal{C}^*} = \mathcal{C}^*$ (définition 6.2.34);
- L'interprétation $\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}}$ (définition 6.3.16) est une fonction de \mathcal{A}^{2m-1} dans $2^{\sqrt{\mathcal{C}} \times \sqrt{\mathcal{C}}}$ de la forme « $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{R}'$ », elle satisfait :

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_{2i-1} \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \langle R_{2i} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} = \bigcap_{i=1}^m \langle R_{2i-1} \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \langle R_{2i} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}';$$

nous avons en effet $\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^*$ et $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^*$ pour tous $t \in [\tau_1, \tau_m]$, $I \subseteq [\tau_1, \tau_m]$ et $r \in \mathcal{A}$.

- La propriété « $\varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' \subseteq \varphi_j(\overset{i}{\uparrow} b)$ » est satisfaite pour tous $i, j \in \{1, \dots, 2m-1\}$, par l'application directe du lemme 6.3.18 (cas $|i-j| = 1$) et car nous avons trivialement les propriétés suivantes (cas $|i-j| > 1$) :
 - $\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j, \tau_{j+1}}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j, \tau_{j+1}}^{\mathcal{C}}$ avec $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, m-1\}$;
 - $\langle b \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}}$ avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$;
 - $\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}}$ avec $i, j \in \{1, \dots, m\}$;
 - $\langle b \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j, \tau_{j+1}}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j, \tau_{j+1}}^{\mathcal{C}}$ avec $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$.

\square

Rappelons qu'être un formalisme séquentiel garantit qu'une relation est cohérente si et seulement si elle contient une relation basique cohérente et que le raisonnement est correct : utiliser les opérateurs pour éliminer des relations basiques d'une relation ne change pas son interprétation.

Remarquons que ce type de formalisme est en fait basé sur une sous-partition. Il ne vérifie donc pas la propriété $\varphi(R \otimes R') \supseteq \varphi(R) \circ \varphi(R')$, bien qu'il satisfasse la propriété essentielle $\varphi(R \otimes R') \supseteq (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m))$. Cette remarque s'applique également aux autres formalismes que nous présenterons au cours de ce chapitre.

Exemple 6.3.20. Plaçons nous dans le cadre de TPC_d avec $\tau_1 = -1$ et $\tau_2 = 1$ ($m = 2$) et considérons les évolutions x , y et z définies par $x(t) = t$, $y(t) = 2$ et $z(t) = -t$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Nous n'avons pas $\varphi_{\text{TPC}_d}((\langle, \langle, \langle) \diamond (\rangle, \rangle, \rangle)) = \varphi_{\text{TPC}_d}((\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})) \supseteq \varphi_{\text{TPC}_d}((\langle, \langle, \langle) \circ \varphi_{\text{TPC}_d}((\rangle, \rangle, \rangle))$. En effet, $(x, y) \in \varphi_{\text{TPC}_d}((\langle, \langle, \langle))$ et $(y, z) \in \varphi_{\text{TPC}_d}((\rangle, \rangle, \rangle))$, mais $(x, z) \notin \varphi_{\text{TPC}_d}((\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}))$. Sur $] -1, 1[$, la relation entre x et z change (la relation basique des couples appartenant à $\varphi_{\text{TPC}_d}((\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}))$ ne change pas sur $] -1, 1[$).

6.3.2.3 Sémantique des séquences sans relation intermédiaire

Nous avons défini la sémantique des séquences sur intervalles dans la section précédente. Nous définissons maintenant la sémantique des réseaux sur $\text{T}\mathcal{A}_p$, c'est-à-dire des séquences temporelles dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire entre les instants τ_i et τ_{i+1} . Nous définissons en particulier la relation d'être sans relation intermédiaire, et nous montrons le lien entre cette relation, les relations temporalisées et la définition de la relation de perturbation, c'est-à-dire de la relation de voisinage dépendant du sens du temps. Nous montrons enfin que les

formalismes temporalisés dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire constituent des formalismes séquentiels et donc que le raisonnement est correct.

Nous commençons par définir formellement la relation spatio-temporelle *sans relation intermédiaire*.

Définition 6.3.21. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et soit \mathcal{C} sa dynamique générale sur $[\tau_1, \tau_m]$, c'est-à-dire $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

La relation *sans relation intermédiaire* de \mathcal{F} durant un intervalle non vide $[\tau, \tau'] \subseteq [\tau_1, \tau_m]$, notée $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$, est définie par :

$$\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} = \left\{ (x, y) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (x, y) \in \langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}} \right\}.$$

Remarque 6.3.22. Les relations que satisfont les couples d'entités de la relation $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$ changent à un seul instant précis $t \in [\tau, \tau']$. Cet instant n'est pas forcément le même pour chaque couple d'évolutions.

Exemple 6.3.23. $(x, y) \in \text{SRI}_{[0, 1]}^{\text{PC}}$ avec $x(t) = t$ et $y(t) = 2t$: $(x(0), y(0)) \in \varphi(\{=\})$ et $(x(t), y(t)) \in \varphi(\{<\})$ pour tout $t > 0$.

$(x, y) \in \text{SRI}_{[-1, 1]}^{\text{PC}}$ avec $x(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$: $(x(t), y(t)) \in \varphi(\{=\})$ pour $t \leq 0$ et $(x(t), y(t)) \in \varphi(\{<\})$ pour tout $t > 0$.

Remarquons que $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$ est une relation symétrique.

Lemme 6.3.24. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et soient $\tau, \tau' \in [\tau_1, \tau_m]$ tels que $\tau < \tau'$.

$\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$ est symétrique, c'est-à-dire $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} = \overline{\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}}$.

Démonstration. Nous avons en effet, avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$:

$$\begin{aligned} & \overline{\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}} \\ = & \overline{\left\{ (x, y) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (x, y) \in \langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}} \right\}} && \text{par} && \text{définition} \\ & && && \text{(déf. 6.3.21)} \\ = & \left\{ (y, x) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (x, y) \in \langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}} \right\} && \text{par} && \text{la définition de } \bar{\cdot} \\ & && && \text{(sect. 2.2.1)} \\ = & \left\{ (y, x) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (y, x) \in \overline{\langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}}} \right\} && \text{par} && \text{la définition de } \bar{\cdot} \\ = & \left\{ (y, x) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (y, x) \in \overline{\langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}}} \right\} && \text{car} && \overline{r \cap r'} = \bar{r} \cap \bar{r}' \\ = & \left\{ (y, x) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (y, x) \in \langle \bar{b} \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle \bar{b} \cup \bar{b}' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle \bar{b}' \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}} \right\} && \text{car} && (\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_I^{\mathcal{C}}) \text{ est un} \\ & && && \text{formalisme qualitatif} \\ & && && \text{(lem. 6.3.14)} \\ = & \left\{ (y, x) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b_2, b'_2 \in \mathcal{B} \quad (y, x) \in \langle b_2 \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b_2 \cup b'_2 \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b'_2 \rangle_{]t, \tau']}^{\mathcal{C}} \right\} && \text{car} && b \in \mathcal{B} \iff \bar{b} \in \mathcal{B} \\ = & \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} && \text{par} && \text{définition} \end{aligned}$$

□

Nous détaillons maintenant le lien entre le fait d'être sans relation intermédiaire et la satisfaction de la relation de perturbation.

Proposition 6.3.25. Soit $(\mathcal{B}, \vdash, \dashv)$ l'espace de modes topologiques d'un formalisme qualitatif topologique \mathcal{F} pour une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soient $b, b' \in \mathcal{B}$. Nous avons l'équivalence suivante :

$b \rightsquigarrow b'$ si et seulement s'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

Démonstration. Soient $b, b' \in \mathcal{B}$. Supposons que nous avons $b \rightsquigarrow b'$ et montrons qu'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_\tau^c \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$. Puisque $b \rightsquigarrow b'$, nous avons soit $b \vdash b'$, soit $b \dashv b'$ (définition 3.3.9). Supposons que $b \vdash b'$. Par conséquent, il existe $\tau, \tau'' \in I$ tels que $\tau < \tau''$ et $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau'']}^c \neq \emptyset$ (proposition 6.3.13). Soit $\tau' \in]\tau, \tau''[$, par exemple $\tau' = \frac{\tau + \tau''}{2}$. Nous avons $\langle b' \rangle_{[\tau, \tau']}^c \subseteq \langle b' \rangle_{[\tau, \tau'']}^c$ (propriété 1 du lemme 6.3.12), donc $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau']}^c \subseteq \langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau'']}^c \subseteq \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$ (en prenant $t = \tau$). Ainsi, $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau']}^c \subseteq \langle b \rangle_\tau^c \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c$. Par conséquent, $\langle b \rangle_\tau^c \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer. Nous prouvons de manière similaire $\langle b \rangle_{\tau'}^c \cap \text{SRI}_{[\tau', \tau'']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau''}^c \neq \emptyset$ en supposant $b \dashv b'$. Nous avons ainsi montré le premier sens de équivalence de la proposition.

Supposons maintenant qu'il existe $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$ et $\langle b \rangle_\tau^c \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$, et montrons que $b \rightsquigarrow b'$. Puisque $\langle b \rangle_\tau^c \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$, il existe t tel que $t \in [\tau, \tau']$ et $b_2, b'_2 \in \mathcal{B}$ telles que $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b_2 \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b_2 \cup b'_2 \rangle_t^c \cap \langle b'_2 \rangle_{[t, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$ (par la définition 6.3.21). Nous avons trois cas à analyser :

— Cas $t \in]\tau, \tau'[$:

D'une part, par la propriété 7 du lemme 6.3.12, nous avons $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b_2 \rangle_{[\tau, t]}^c = \langle b \cap b_2 \rangle_\tau^c \cap \langle b \cap b_2 \rangle_{[\tau, t]}^c \neq \emptyset$. Nous avons par conséquent $\langle b \cap b_2 \rangle_\tau^c \neq \emptyset$, c'est-à-dire $b \cap b_2 \neq \emptyset$, puisque les relations temporalisées constituent un formalisme qualitatif (lemme 6.3.14). Ainsi, $b = b_2$ (par la définition 4.2.2). D'autre part, par un raisonnement analogue, nous prouvons $b' = b'_2$. Nous déduisons ainsi $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b \cup b' \rangle_t^c \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$. Nous avons donc en particulier $\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b \cup b' \rangle_t^c \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c \neq \emptyset$ (car $\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \subseteq \langle b \rangle_{[\tau, t]}^c$ et $\langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c \subseteq \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c$). Par conséquent, $\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap (\langle b \rangle_t^c \cup \langle b' \rangle_t^c) \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c \neq \emptyset$, car les relations temporalisées constituent un formalisme qualitatif (lemme 6.3.14). Ainsi, $(\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b \rangle_t^c \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c) \cup (\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b' \rangle_t^c \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c) \neq \emptyset$, par distributivité. Nous avons donc en particulier $\langle b \rangle_{[\tau, t]}^c \cap \langle b' \rangle_t^c \neq \emptyset \vee \langle b \rangle_t^c \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^c \neq \emptyset$, c'est-à-dire $b \dashv b' \vee b \vdash b'$ (proposition 6.3.13). Ainsi, nous déduisons $b \rightsquigarrow b'$ (définition 3.3.9).

— Cas $t = \tau$:

Nous avons $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b_2 \rangle_{[\tau, \tau]}^c \cap \langle b_2 \cup b'_2 \rangle_\tau^c \cap \langle b'_2 \rangle_{[\tau, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$. Ainsi, $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b'_2 \rangle_{[\tau, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$ et en particulier $\langle b'_2 \rangle_{[\tau, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$ sont satisfaites. Par la propriété 7 du lemme 6.3.12, nous avons $\langle b' \cap b'_2 \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$ et ainsi $b' = b'_2$. Par conséquent, nous avons $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau']}^c \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^c \neq \emptyset$ et $\langle b \rangle_\tau^c \cap \langle b' \rangle_{[\tau, \tau']}^c \neq \emptyset$ en particulier. Nous avons donc la relation $b \vdash b'$. La relation $b \rightsquigarrow b'$ est ainsi satisfaite.

— Cas $t = \tau'$:

De manière analogue, nous déduisons $b \rightsquigarrow b'$.

Nous avons ainsi montré l'autre implication, ce qui conclut la preuve. \square

Ainsi, à partir de la relation $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$, nous définissons la sémantique des séquences temporelles sans relation intermédiaire.

Définition 6.3.26. Soient T une séquence ordonnée d'instant distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$.

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par la dynamique \mathcal{C}* , noté $\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}$, est le triplet $(\text{T}\mathcal{A}_p^{\mathcal{C}}, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}})$ où

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_i \rangle_{\tau_i}^c \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\mathcal{F}}$$

Le formalisme \mathcal{F} (*généralement*) *temporalisé sans relation intermédiaire*, noté $\text{T}\mathcal{F}_p$, est le formalisme \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire par sa dynamique générale $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Ainsi, TRCC_{8p} donne la sémantique du réseau sur TRCA_{8p} de l'exemple 6.3.3 pour les topologies engendrant le graphe de voisinage classique de RCC_8 (voir la remarque 6.2.50).

Les projections de cette combinaison sont correctes, comme le montre la proposition suivante.

Lemme 6.3.27. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique et soit \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur I . Soient $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$ et soit $b \in \mathcal{B}$.

Nous avons les deux propriétés suivantes :

- $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$ et
- $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} \subseteq \left\langle \downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau}^{\mathcal{C}}$.

Démonstration. Nous prouvons la première propriété. La preuve de la seconde est analogue.

Soit $(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$. Puisque $(x, y) \in \mathcal{C}^*$, une dynamique de \mathcal{F} (définition 6.2.34), nous avons $(x, y) \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$. Il existe par conséquent une relation $b' \in \mathcal{B}$ telle que $(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$, puisque $\langle r \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} = \bigcup_{b \in r} \langle b \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$ pour tout $r \in \mathcal{A}$ (lemme 4.2.5). Nous avons donc

$$(x, y) \in \langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \cap \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}.$$

Ainsi, $b \rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ (proposition 6.3.25), d'où $b' \in \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b$ (définition 6.2.54). Nous déduisons donc

$$\langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} \subseteq \bigcup_{b'' \in \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b} \langle b'' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}} = \left\langle \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}.$$

Puisque $(x, y) \in \langle b' \rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$, nous déduisons que $(x, y) \in \left\langle \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$. Par conséquent, nous concluons que la propriété $\langle b \rangle_{\tau}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau'}^{\mathcal{C}}$ est satisfaite. \square

Ainsi, $\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}$ constitue un formalisme séquentiel.

Proposition 6.3.28. Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Tout formalisme qualitatif topologique \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$, $\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}$, est un formalisme séquentiel.

Démonstration. Pour prouver que $\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}} = (\text{T}\mathcal{A}_p^{\mathcal{C}}, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}})$ est un formalisme séquentiel, nous appliquons le lemme de combinaison (lemme 4.2.4). Nous vérifions ainsi ses hypothèses :

- $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}})$ avec $i \in \{1, \dots, m\}$ constituent des formalismes qualitatifs (lemme 6.3.14) ;
- $\mathfrak{R}' = \bigcap_{i=1}^{m-1} \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\mathcal{F}} = \overline{\mathfrak{R}'}$ car $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}} = \overline{\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}}$ pour tous $\tau, \tau' \in [\tau_1, \tau_m]$ tels que $\tau < \tau'$ (lemme 6.3.24) ;
- L'interprétation $\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}}$ (définition 6.3.26) est une fonction de \mathcal{A}^m dans $2^{\sqrt{\mathcal{C}} \times \sqrt{\mathcal{C}}}$ de la forme « $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{R}'$ », elle satisfait :

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}}}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_i \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\mathcal{F}} = \bigcap_{i=1}^m \langle R_i \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' ;$$

- La propriété « $\varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{R}' \subseteq \varphi_j(\uparrow_i^j b)$ » est satisfaite pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$, par l'application directe du lemme 6.3.27 pour le cas $|i - j| = 1$, puisque pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\mathcal{F}} \subseteq \left\langle \uparrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau_{i+1}}^{\mathcal{C}}$$
 et

$$\langle b \rangle_{\tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle b \rangle_{\tau_{i+1}}^{\mathcal{C}} \cap \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\mathcal{F}} \subseteq \left\langle \downarrow_{\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{C}} b \right\rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}},$$

et car nous avons trivialement la propriété suivante (cas $|i - j| > 1$) :

$$\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{R}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}}$$
 avec $i, j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $|i - j| > 1$.

\square

6.4 Étude du calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire et sur intervalles

Nous nous focalisons maintenant sur le calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire TPC_p et sur le calcul des points temporalisé sur intervalles TPC_d (dans le cadre de la dynamique générale). Nous avons montré dans la section précédente que le raisonnement des multi-algèbres associé aux séquences temporelles est correct. Nous montrons dans cette section qu'il est également complet pour le calcul des points. Nous montrons en outre que les relations \ulcorner -cohérentes sont cohérentes et nous discutons de la complexité de la décision de la cohérence.

6.4.1 Résultats de complétude

Dans cette section, nous montrons la complétude du raisonnement sur les séquences sans relation intermédiaire et sur les séquences sur intervalles du calcul des points. Les scénarios algébriquement clos sur TPC_p et TPC_d sont en effet cohérents.

Proposition 6.4.1. *Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Les scénarios algébriquement clos sur TPC_p sont cohérents.

Démonstration. Soit N un scénario algébriquement clos sur TPC_p . Chaque N_i est donc un scénario algébriquement clos sur PA. Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe une famille $\{p_x^i\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathbb{R}$ constituant une solution de N_i interprété sur PC, c'est-à-dire vérifiant $p_x^i \varphi_{\text{PC}}(N_i^{xy}) p_y^i$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$.

Considérons l'interpolation linéaire par morceaux sur les intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, notée p_x , prenant pour valeur p_x^i à l'instant τ_i pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, avec $x \in \mathbf{E}$. Nous allons montrer que la famille $\{p_x\}_{x \in \mathbf{E}}$ est une solution de N , c'est-à-dire qu'elle satisfait $p_x \varphi_{\text{TPC}_p}(N^{xy}) p_y$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, avec $\varphi_{\text{TPC}_p}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_i \rangle_{\tau_i} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}}$. L'évolution p_x est définie formellement par :

$$p_x(t) = \begin{cases} p_x^i & \text{si } t = \tau_i \\ \alpha_i(t) \cdot p_x^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} & \text{si } t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[\end{cases}$$

avec $\alpha_i(t) = \frac{\tau_{i+1} - t}{\tau_{i+1} - \tau_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Remarquons tout d'abord que nous avons la propriété $p_x \in \sqrt{\mathcal{C}_{\text{PC}}^{[\tau_1, \tau_m]}}$. L'évolution p_x est bien une fonction continue de $[\tau_1, \tau_m]$ dans \mathbb{R} (sur chaque intervalle $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$, p_x est linéaire, $\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} p_x(t) = p_x^i$ pour $i \in \{2, \dots, m\}$ et $\lim_{t \rightarrow \tau_i^+} p_x(t) = p_x^i$ pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$).

Par définition, les contraintes de N sont satisfaites à chaque instant clef de la séquence. En effet, puisque $p_x^i \varphi_{\text{PC}}(N_i^{xy}) p_y^i$, nous avons $p_x \langle N_i^{xy} \rangle_{\tau_i} p_y$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$. Il reste à montrer que les couples d'évolutions (p_x, p_y) sont sans relation intermédiaire. Nous montrons ainsi que la propriété $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$ est satisfaite pour tous $x, y \in \mathbf{E}$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Soient $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $x, y \in \mathbf{E}$. Nous énumérons maintenant les différents couples de relations (N_i^{xy}, N_{i+1}^{xy}) possibles sachant que N est algébriquement clos, et nous montrons que dans chacun de ces cas, il n'y a pas de relation intermédiaire. Les seuls couples possibles sont ceux clos par projection :

- $(<, <)$: nous avons $p_x^i < p_y^i$ et $p_x^{i+1} < p_y^{i+1}$. Par conséquent, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i < \alpha_i(t) \cdot p_y^i$ et $(1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} < (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$ pour tout $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$. Ainsi, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} < \alpha_i(t) \cdot p_y^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$, et donc $p_x(t) < p_y(t)$ pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. En conclusion, $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$.
- $(<, =)$: nous avons $p_x^i < p_y^i$ et $p_x^{i+1} = p_y^{i+1}$. Par conséquent, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i < \alpha_i(t) \cdot p_y^i$ et $(1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} = (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$ pour tout $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$. Ainsi, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} < \alpha_i(t) \cdot p_y^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$, et donc $p_x(t) < p_y(t)$ pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. En conclusion, $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$.
- $(=, =)$: nous avons $p_x^i = p_y^i$ et $p_x^{i+1} = p_y^{i+1}$. Par conséquent, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i = \alpha_i(t) \cdot p_y^i$ et $(1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} = (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$ pour tout $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$. Ainsi, $\alpha_i(t) \cdot p_x^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_x^{i+1} = \alpha_i(t) \cdot p_y^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$.

$\alpha_i(t) \cdot p_y^i + (1 - \alpha_i(t)) \cdot p_y^{i+1}$, et donc $p_x(t) = p_y(t)$ pour tout $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. En conclusion,
 $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$.

- Le cas ($>, >$) est symétrique à celui de ($<, <$). Nous avons également $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$.
- Les cas ($>, =$), ($=, <$), ($=, >$) sont symétriques à celui de ($<, =$).

Nous avons aussi $p_x \text{SRI}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^{\text{PC}} p_y$.

Ainsi, nous avons montré $p_x \varphi_{\text{TPC}_d}(N^{xy}) p_y$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$. En conclusion, N est cohérent. \square

Proposition 6.4.2. *Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Les scénarios algébriquement clos sur TPC_d sont cohérents (pour toute séquence τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^$).*

Démonstration. Soit N un scénario algébriquement clos sur TPC_d . Chaque N_i est donc un scénario algébriquement clos sur PA. Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \dots, 2m-1\}$, il existe une famille $\{p_x^i\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \mathbb{R}$ constituant une solution de N_i interprété sur PC, c'est-à-dire satisfaisant $p_x^i \varphi_{\text{PC}}(N_i^{xy}) p_y^i$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$.

Considérons l'interpolation linéaire par morceaux sur les intervalles $[\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}]$ et $[\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}]$, notée p_x , prenant pour valeur p_x^{2i-1} à l'instant τ_i pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ et p_x^{2i} à l'instant $\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$, avec $x \in \mathbf{E}$. Nous allons montrer que la famille $\{p_x\}_{x \in \mathbf{E}}$ est une solution de N , c'est-à-dire qu'elle satisfait $p_x \varphi_{\text{TPC}_d}(N^{xy}) p_y$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}$, avec $\varphi_{\text{TPC}_d}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_{2i-1} \rangle_{\tau_i} \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} \langle R_{2i} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}[}$. L'évolution p_x est définie formellement par :

$$p_x(t) = \begin{cases} p_x^{2i-1} & \text{si } t = \tau_i \\ \beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} & \text{si } t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[\\ p_x^{2i} & \text{si } t = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} \\ \gamma_i(t) \cdot p_x^{2i} + (1 - \gamma_i(t)) \cdot p_x^{2i+1} & \text{si } t \in]\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}[\end{cases}$$

avec $\beta_i(t) = \frac{\tau_{i+1} + \tau_i - 2t}{\tau_{i+1} - \tau_i}$ et $\gamma_i(t) = \frac{2\tau_{i+1} - 2t}{\tau_{i+1} - \tau_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Remarquons premièrement que nous avons la propriété $p_x \in \sqrt{\mathcal{C}_{\text{PC}}^{[\tau_1, \tau_m]}}$. L'évolution p_x est bien une fonction continue de $[\tau_1, \tau_m]$ dans \mathbb{R} (sur $]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$ et sur $]\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}[$ avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$, p_x est linéaire, $\lim_{t \rightarrow \tau_i} p_x(t) = p_x^{2i-1}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $\lim_{t \rightarrow \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}} p_x(t) = p_x^{2i}$ pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$).

Par définition, les contraintes de N sont satisfaites à chaque instant clef de la séquence. En effet, puisque $p_x^i \varphi_{\text{PC}}(N_i^{xy}) p_y^i$, nous avons $p_x \langle N_{2i-1}^{xy} \rangle_{\tau_i} p_y$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$ mais également $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}} p_y$ pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$, pour tous $x, y \in \mathbf{E}$. Ainsi, il reste à montrer la satisfaction des propriétés $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[} p_y$ et $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}[} p_y$ pour prouver celle de $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \tau_{i+1}[} p_y$, pour tous $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $x, y \in \mathbf{E}$.

Soient $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $x, y \in \mathbf{E}$. Nous allons montrer la propriété $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[} p_y$. La preuve de $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}[} p_y$ est analogue. Nous énumérons les différents couples possibles de relations $(N_{2i-1}^{xy}, N_{2i}^{xy})$ sachant que N est algébriquement clos, et nous montrons que pour chacune de ces possibilités, la propriété $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[} p_y$ est satisfaite. Les seuls couples possibles sont ceux clos par projection :

- ($<, <$) : nous avons $p_x^{2i-1} < p_y^{2i-1}$ et $p_x^{2i} < p_y^{2i}$. Par conséquent, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} < \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1}$ et $(1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} < (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$ pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. Ainsi, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} < \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$, soit $p_x(t) < p_y(t)$, pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. En conclusion, $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[} p_y$.
- ($=, <$) : nous avons $p_x^{2i-1} = p_y^{2i-1}$ et $p_x^{2i} < p_y^{2i}$. Par conséquent, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} = \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1}$ et $(1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} < (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$ pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. Ainsi, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} < \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$, soit $p_x(t) < p_y(t)$, pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. En conclusion, $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[} p_y$.
- ($=, >$) : ce cas est symétrique à celui de ($=, <$).

- $(=, =)$: nous avons $p_x^{2i-1} = p_y^{2i-1}$ et $p_x^{2i} = p_y^{2i}$. Par conséquent, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} = \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1}$ et $(1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} = (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$ pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. Ainsi, $\beta_i(t) \cdot p_x^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_x^{2i} = \beta_i(t) \cdot p_y^{2i-1} + (1 - \beta_i(t)) \cdot p_y^{2i}$, soit $p_x(t) = p_y(t)$, pour tout $t \in]\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}[$. En conclusion, $p_x \langle N_{2i}^{xy} \rangle_{\tau_i, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}} p_y$.

Ainsi, nous avons montré $p_x \varphi_{\text{TPC}_d}(N^{xy}) p_y$ pour tous $x, y \in E$. En conclusion, N est cohérent. \square

Ainsi, le réseau sur TPC_d de l'exemple 6.3.7 est cohérent : sa clôture algébrique est un scénario algébriquement clos.

6.4.2 Cohérence des relations \uparrow -cohérentes

Nous nous intéressons maintenant à la cohérence des relations \uparrow -cohérentes. Celles-ci sont toutes cohérentes pour TPC_p et pour TPC_d .

Proposition 6.4.3. *Soit T une séquence ordonnée d'instantants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$. Nous avons les deux propriétés suivantes :*

- *Les relations de TPC_p \uparrow -cohérentes sont cohérentes.*
- *Les relations de TPC_d \uparrow -cohérentes sont cohérentes.*

Démonstration. Nous appliquons directement et simplement la proposition 4.3.12 :

- Les relations basiques closes par projection de TPC_p (resp. de TPC_d) sont cohérentes par la proposition 6.4.1 (resp. par la proposition 6.4.2).
- Les multi-algèbres TPA_p et TPA_d sont arborescentes (lemme 6.3.8).

\square

Par exemple, la relation $(\leq, \mathcal{B}, \geq, \neq, =)$ de TPC_d est \uparrow -cohérente. Elle est donc cohérente.

6.4.3 Discussion à propos de la complexité de la décision de la cohérence

Pour conclure cette section à propos du calcul des points temporalisé, nous discutons de la complexité de la décision de la cohérence. Par la proposition 4.2.40, TPC_p et TPC_d étant des formalismes séquentiels dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents, le problème de décision de la cohérence est dans NP. La cohérence peut en particulier être décidée algébriquement avec des techniques de séparation et évaluation. Cependant, pour la continuité sans relation intermédiaire, le problème est plus précisément NP-complet (voir la section 3.3.4). En fait, il n'y a pas de sous-classe traitable de la forme \mathcal{S}^m qui soit intéressante. En particulier, avec les sous-classes de la forme \mathcal{S}^m avec $\{\langle \rangle\} \in \mathcal{S}$ et les sous-classes de la forme \mathcal{S}^m avec $\{\neq\} \in \mathcal{S}$, la décision de la cohérence pour la continuité sans relation intermédiaire est NP-complète (Westphal *et al.*, 2013; Westphal, 2015). Les seules sous-classes de la forme \mathcal{S}^m qui soient traitables satisfont $\mathcal{S} \subseteq \{\leq, \geq, =, \mathcal{B}\}$. Celles-ci sont de plus trivialement traitables⁴. Le cadre des multi-algèbres, contrairement à celui de Westphal et al. (voir la section 3.3.4), permet naturellement de s'intéresser à des sous-classes n'étant pas de la forme \mathcal{S}^m et plus particulièrement n'étant pas de la forme $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$. Aucun résultat négatif ou positif non trivial concernant de telles sous-classes n'a pour le moment été identifié⁵. Dans le cas où les résultats seraient négatifs, la recherche de fragments traitables pourra être effectuée en identifiant des sous-ensembles traitables qui ne possèdent pas la relation universelle $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$. De tels sous-ensembles seraient intéressants, malgré l'absence de la relation universelle, car ils permettraient de diminuer le facteur de branchement de la décision de la cohérence lors d'une recherche de scénarios algébriquement clos.

Concernant les séquences sur intervalles du calcul des points, la complexité de la décision de la cohérence n'a pas été étudiée. Cependant, nous conjecturons qu'elle est polynomialement équivalente à la décision de la cohérence des séquences sans relation intermédiaire du calcul des points et, plus précisément, qu'elle possède les mêmes sous-classes traitables (de la forme \mathcal{S}^m).

4. Il suffit d'affiner toutes les relations à l'égalité pour obtenir un scénario cohérent.

5. Toute sous-classe incluse dans \mathcal{S}^m avec $\mathcal{S} \subseteq \{\leq, \geq, =, \mathcal{B}\}$ est trivialement traitable.

6.5 Séquences temporelles avec relations de caractéristique

Nous nous intéressons dans cette section aux séquences temporelles dans le cadre spécifique de la préservation de caractéristiques. Rappelons que les séquences temporelles décrivent le monde par rapport à une séquence d'instants de référence ordonnés et distincts τ_1, \dots, τ_m , avec $m \in \mathbb{N}^*$. Le cadre général, présenté dans la section 6.3, permet de raisonner dans le contexte de la préservation de caractéristiques, mais le raisonnement associé n'est pas toujours complet. C'est pourquoi nous nous intéressons à de nouvelles multi-algèbres offrant une représentation plus expressive et un raisonnement plus précis dans ce cadre spécifique.

Nous commençons par analyser le problème de complétude concernant la préservation de la taille et plus généralement la préservation de caractéristiques. Nous introduisons ensuite les projections et les multi-algèbres des séquences temporelles spécifiques à ce contexte, qui permettent de raisonner explicitement sur les relations de caractéristique. En plus d'étendre les séquences temporelles sans relation intermédiaire et sur intervalles à ce contexte, nous nous intéressons à une troisième famille de séquences temporelles, qui ne requiert que la préservation des caractéristiques, utile dans des contextes spatio-temporels différents. Enfin, nous explicitons la sémantique de ces multi-algèbres et montrons que ces formalismes constituent des formalismes séquentiels.

6.5.1 Le problème de la taille et l'intégration lâche caractéristique-formalisme

Nous commençons par analyser le problème de complétude concernant la préservation de la taille. Nous généralisons ensuite la combinaison taille-topologie (exemples 3.2.4, 4.2.11 et 4.2.23) au contexte plus général des caractéristiques. Comme nous le verrons dans les sections suivantes, les projections de cette généralisation permettent de raisonner à propos des caractéristiques des entités entre des instants différents.

Dans le contexte de la dynamique de préservation de la taille, le raisonnement spatio-temporel présenté dans la section 6.3 n'est pas complet pour certains formalismes qualitatifs. Plaçons nous, par exemple, dans le cadre du calcul de la connexion des régions mesurables, $\text{RCC}_{8,m}$, temporalisé sans relation intermédiaire par la dynamique de préservation de la taille, c'est-à-dire $\text{TRCC}_{8,m}^{\mathcal{C}}$ avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,m,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}$. Une de ses relations est $(\text{TPP}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}})$. Celle-ci est \uparrow -cohérente (elle vérifie le graphe de voisinage de la figure 3.1b) mais elle n'est pas cohérente. En effet, cette relation implique que la première région a une taille plus petite au premier instant⁶, puis une taille plus grande au troisième instant. Nous avons ci-dessous un autre contre-exemple, moins trivial.

Exemple 6.5.1. Le réseau N sur $\text{TRCC}_{8,p}^{\mathcal{C}}$, avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}$, défini par :

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO})$,
- $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP}, \text{PO})$ et
- $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}})$

est algébriquement clos mais incohérent.

Remarque 6.5.2. Il existe des projections correctes plus restrictives permettant de décider la cohérence de la relation $(\text{TPP}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}})$. Celles-ci propagent les interdépendances de la taille entre instants non voisins. Elles satisfont en particulier $\uparrow_1^3 \text{TPP} = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8} \setminus \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}, \text{EQ}\}$. En fait, nous pouvons trouver des projections correctes telles que toute relation \uparrow -cohérente soit cohérente. Cependant, il n'est pas possible de trouver des projections correctes de façon à ce que tous les scénarios algébriquement clos soient cohérents. Par exemple, le réseau de l'exemple 6.5.1 sera toujours algébriquement clos et incohérent quelles que soient les projections correctes utilisées, puisque ses relations sont basiques et cohérentes.

Ainsi, ce problème de complétude ne provient pas du fait que les projections ne soient pas suffisamment restrictives. Pour tenter de le résoudre, nous proposons d'effectuer un raisonnement explicite sur la taille des entités. Pour cela, il faut considérer l'intégration lâche *taille-formalisme*,

6. Nous nous plaçons dans le contexte de la mesure de Lebesgue. Nous n'avons pas cette implication dans le cadre d'une mesure quelconque.

c'est-à-dire l'intégration lâche du formalisme \mathcal{F} avec le formalisme sur les tailles relatives de ses entités, c'est-à-dire PC^t (définition 6.2.16).

Le problème de la complétude peut arriver dans le contexte d'autres préservations de caractéristiques, pour certains formalismes. Nous proposons donc plus généralement de raisonner explicitement sur la caractéristique c considérée, en considérant une intégration lâche « formalisme \mathcal{F} - formalisme de relations de caractéristique $\tilde{\mathcal{F}}^c$ », avec $\tilde{\mathcal{F}}$ un formalisme sur les valeurs de la caractéristique (voir la section 6.2.2). Un choix judicieux de formalisme sur les caractéristiques *devrait* résoudre le problème de complétude.

Puisque nous nous intéressons au raisonnement spatio-temporel, l'intégration lâche caractéristique - formalisme n'est pas suffisante pour raisonner. Il faut nous placer dans le cadre des multi-algèbres. Cependant, les multi-algèbres vont se baser sur les projections de cette intégration lâche.

Définition 6.5.3. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ et $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ deux formalismes qualitatifs et c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} .

Nous notons $\uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c}$ la projection de l'algèbre \mathcal{A} vers l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\uparrow_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}}$ la projection de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ vers l'algèbre \mathcal{A} de l'intégration lâche de \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}^c$.

Exemple 6.5.4. Les projections $\uparrow_{\text{RCC}_{s,m}}^{\text{PC}^t}$ et $\uparrow_{\text{PC}^t}^{\text{RCC}_{s,m}}$ sont les projections de la combinaison taille-topologie STC (voir l'exemple 3.2.4 et la définition 6.2.16 ; $\text{PC}^t = \text{QS}$), définies respectivement par la table 3.1 et par la table 3.2.

6.5.2 Multi-algèbres des séquences temporelles avec relations de caractéristique

Dans la section précédente, nous avons abordé le problème de complétude concernant la préservation de la taille, et plus généralement la préservation de caractéristiques, ainsi que notre proposition de solution consistant à raisonner explicitement sur les caractéristiques des entités. Pour ce faire, nous allons généraliser l'intégration caractéristique-formalisme au cadre spatio-temporel. Il y a plusieurs généralisations possibles en fonction du type de séquences temporelles considérées. Dans cette section, nous formalisons les multi-algèbres de trois de ces généralisations, correspondant aux séquences temporelles *sans contrainte de transition*, aux séquences temporelles sans relation intermédiaire et aux séquences temporelles sur intervalles. Chacune de ces trois familles de multi-algèbres permet ainsi de raisonner explicitement sur la taille des entités, dans un contexte spatio-temporel différent.

Puisque nous généralisons l'intégration lâche caractéristique-formalisme, le produit cartésien de chacune de ces multi-algèbres contient l'algèbre des relations de caractéristique $\tilde{\mathcal{A}}$. De plus, les projections vers et depuis $\tilde{\mathcal{A}}$ sont par conséquent les projections de la combinaison caractéristique-formalisme. Chaque relation est alors un $(m + 1)$ -uplet consistant en m relations du formalisme temporalisé (une pour chaque période temporelle) plus une relation additionnelle indiquant la relation de caractéristique entre les deux entités.

Nous introduisons d'abord la famille de multi-algèbres du contexte des séquences temporelles sans contrainte de transition, dont la décision de la cohérence n'est pas triviale en général dans le contexte de la préservation de caractéristiques. Le fait qu'une caractéristique, telle que la taille, soit préservée induit des interdépendances spatio-temporelles correspondant aux projections de la combinaison caractéristique-formalisme (voir la section précédente).

Définition 6.5.5. Soient T une séquence ordonnée d'instantants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$, où $\mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$ est la dynamique de préservation de la caractéristique c .

La *multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sur les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c* , notée $T\mathcal{A}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{A}}^c$, est le produit cartésien $\mathcal{A}^m \times \tilde{\mathcal{A}}$ doté des projections

suivantes, pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \uparrow_i^{m+1} b &= \uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b && \text{si } 1 \leq i \leq m \\ \uparrow_{m+1}^i \tilde{b} &= \uparrow_{\mathcal{F}^c}^{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{b} && \text{si } 1 \leq i \leq m \\ \uparrow_i^j b &= \mathcal{B} && \text{si } 1 \leq i, j \leq m \end{aligned}$$

Remarque 6.5.6. Nous nous plaçons dans le cadre d'une dynamique $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$ afin de pouvoir considérer des dynamiques variées et complexes, vérifiant des propriétés spécifiques en plus de la préservation de la caractéristique c (voir la remarque 6.3.4).

Exemple 6.5.7. $\text{TRCA}_8^{\mathcal{C}} + \text{PA}^t$, où t est la mesure de Lebesgue et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,m,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}$, est la multi-algèbre de $\text{RCC}_{8,m}$ temporalisé par sa dynamique générale avec préservation de la taille, avec relations de QS. Son produit cartésien est $\text{RCA}_8^m \times \text{PA}$, et ses projections entre chaque algèbre RCA_8 et l'algèbre PA sont celles de la combinaison taille-topologie STC (voir l'exemple 6.5.4). $\text{TRCA}_8 + \text{PA}^t$ permet de représenter et raisonner sur les séquences temporelles décrivant les relations topologiques entre des régions de \mathbb{R}^n de taille constante.

Pour alléger les notations, nous notons $\text{TRCA}_8^{\mathcal{C}} + \text{PA}^t$ par TRCA_{8t} .

Exemple 6.5.8. Reprenons l'exemple 6.5.1 décrivant une séquence temporelle sur RCC_8 avec des régions de taille constante, correspondant à un scénario algébriquement clos pour $\text{TRCC}_{8p}^{\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,m,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}$, mais étant pourtant incohérente. Cette séquence exprimée sur TRCA_{8t} donne le réseau suivant :

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$,
- $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP}, \text{PO}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$ et
- $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$.

Suite à une clôture par projection, nous obtenons :

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO}, <)$,
- $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP}, \text{PO}, <)$ et
- $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, >)$.

Bien que nous n'imposons plus la continuité sans relation intermédiaire avec le raisonnement de TRCA_{8t} , nous déduisons que ce réseau est incohérent (une clôture par composition donne l'ensemble vide). L'incohérence de l'exemple 6.5.1 ne provient que du fait que la taille ne soit pas préservée au cours du temps.

Exemple 6.5.9. Considérons la description suivante :

- À τ_1 : nous avons x NTPP y ,
- À τ_2 : nous avons y NTPP z ,
- À τ_3 : nous ne savons rien.

Que pouvons-nous déduire de cette description ? Représentons-la par un réseau sur TRCA_{8t} . Nous obtenons le réseau N suivant :

- $N^{xy} = (\text{NTPP}, \mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$,
- $N^{yz} = (\mathcal{B}, \text{NTPP}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$ et
- $N^{xz} = (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$.

Suite à une clôture algébrique, nous déduisons que la relation entre x et y à l'instant τ_3 est $N_3^{xz} = \mathcal{B} \setminus \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \text{EQ}\}$. Remarquons que nous n'avons aucune information concernant x et y à chaque instant et sur leur relation de taille, et aucune information à propos des entités à l'instant τ_3 .

Notons que $\text{TA}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{A}}^c$ est une multi-algèbre arborescente. La condition nécessaire principale assurant que les relations \uparrow -cohérentes sont cohérentes est ainsi satisfaite (voir la proposition 4.3.12).

Lemme 6.5.10. Soient T une séquence ordonnée d'instantants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

La multi-algèbre $\text{TA}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{A}}^c$ est arborescente.

Démonstration. $\mathsf{TA}^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ est effectivement arborescente (définition 4.3.9) : une de ses anti-arborescences plénières est le graphe dont l'ensemble des noeuds est $\{1, \dots, m+1\}$ et l'ensemble des d'arcs est $\{i \rightarrow m+1 \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$, puisque $\uparrow_i^j b = \mathcal{B}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et que $\uparrow_{m+1}^i b = \downarrow_i^{m+1} b$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. En effet, $\uparrow_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}}$ est la projection inverse de $\uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c}$ (voir les définitions 4.3.7, 6.5.3 et 4.2.20). \square

Nous avons donc introduit la multi-algèbre des séquences temporelles avec relations de caractéristique *sans contrainte de transition* : le comportement des entités entre les instants de référence n'est pas fixé. Nous allons maintenant ajouter les relations de caractéristique dans le contexte de la contrainte de transition *sans relation intermédiaire* et dans celui des partitions du temps.

Nous généralisons ainsi la combinaison caractéristique-formalisme dans le cadre de la continuité sans relation intermédiaire et dans le cadre des séquences temporelles sur intervalles.

Définition 6.5.11. Soient T une séquence ordonnée d'instant distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F}, c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

La multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c , notée $\mathsf{TA}_p^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$, est le produit cartésien $\mathcal{A}^m \times \tilde{\mathcal{A}}$ doté des projections de TA_p^c ainsi que des projections suivantes, pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \uparrow_i^{m+1} b &= \uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ \uparrow_{m+1}^i \tilde{b} &= \uparrow_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} & \text{si } 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

La multi-algèbre de \mathcal{F} temporalisé sur les intervalles de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c , notée $\mathsf{TA}_d^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$, est le produit cartésien $\mathcal{A}^{2m-1} \times \tilde{\mathcal{A}}$ doté des projections de TA_d^c ainsi que des projections suivantes, pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \uparrow_i^{2m} b &= \uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b & \text{si } 1 \leq i < 2m \\ \uparrow_{2m}^i \tilde{b} &= \uparrow_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} & \text{si } 1 \leq i < 2m \end{aligned}$$

Exemple 6.5.12. $\mathsf{TRCA}_{8p}^c + \mathsf{PA}^t$ avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathsf{RCC}_{8,m,c}}^{[\tau_1, \tau_m]}$, que nous notons plus simplement $\mathsf{TRCA}_{8p,t}$, permet de représenter et raisonner sur des séquences temporelles sans relation intermédiaire décrivant les relations topologiques entre des régions de \mathbb{R}^n de taille constante.

Notons toutefois que ses projections effectives dépendent de la topologie choisie (consulter la remarque 6.2.50).

Considérons le réseau N suivant sur $\mathsf{TRCA}_{8p,t}$:

- $N^{xy} = (\mathsf{NTPP}, \mathsf{PO}, \mathsf{PO}, \mathcal{B})$,
- $N^{yz} = (\mathsf{PO}, \mathsf{NTPP}, \mathsf{PO}, \mathcal{B})$ et
- $N^{xz} = (\mathsf{PO}, \mathsf{PO}, \mathsf{NTPP}, \mathcal{B})$.

Bien que la clôture algébrique de ce réseau dans le contexte de TRCA_{8t} , pour une topologie donnant le graphe de voisinage classique de RCC_8 , soit un scénario algébriquement clos, sa clôture dans le contexte de $\mathsf{TRCA}_{8p,t}$ est trivialement incohérente. En effet, cette séquence ne respecte pas le graphe de voisinage.

Exemple 6.5.13. $\mathsf{TRCA}_{8d} + \mathsf{PA}^t$, que nous notons plus simplement $\mathsf{TRCA}_{8d,t}$, permet de représenter et raisonner sur des séquences temporelles sur intervalles décrivant les relations topologiques entre des régions de \mathbb{R}^n de taille constante.

Considérons la séquence temporelle de relations de RCC_8 sur des régions de taille constante suivante :

- À l'instant τ_1 : $N^{xy} = \{\mathsf{TPP}\}$, $N^{yz} = \{\mathsf{TPP}, \overline{\mathsf{TPP}}\}$,
- Sur l'intervalle $]\tau_1, \tau_2[$: $N^{xy} = \{\mathsf{TPP}, \mathsf{PO}\}$, $N^{xz} = \{\mathsf{EQ}\}$,
- À l'instant τ_2 : $N^{xy} = \{\mathsf{PO}, \overline{\mathsf{TPP}}\}$.

Sa représentation sous forme de réseau sur une multi-algèbre est le réseau N sur $\mathsf{TRCA}_{8d,t}$ (avec $m = 3$) suivant :

- $N^{xy} = (\mathsf{TPP}, \mathsf{TPP}, \mathsf{PO}, \mathsf{PO}, \overline{\mathsf{TPP}}, \mathcal{B}_{\mathsf{PA}})$,

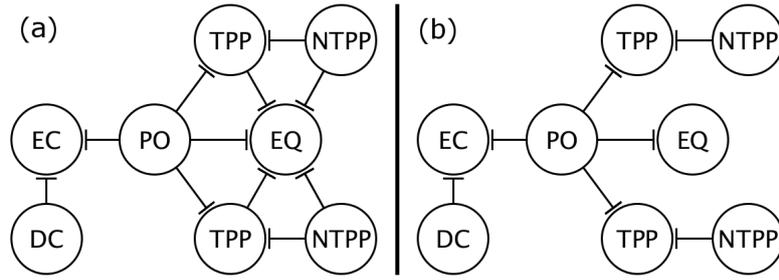


FIGURE 6.1 – (a) Graphe de dominance de RCC_8 (Davis, 2001); (b) Graphe de dominance de $\text{RCC}_{8,m}$ des régions de taille constante (pour la mesure de Lebesgue)

- $N^{yz} = (\text{TPP}, \overline{\text{TPP}}, \mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$ et
- $N^{xz} = (\mathcal{B}, \text{EQ}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{PA}})$.

La clôture algébrique, basée sur les projections du graphe de dominance de RCC_8 pour la distance de Hausdorff duale avec préservation de la taille (voir la figure 6.1), est :

- $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO}, <)$,
- $N^{yz} = (\overline{\text{TPP}}, \text{PO}, \text{PO}, >)$ et
- $N^{xz} = (\text{EQ}, \text{EQ}, \text{EQ}, =)$.

Remarque 6.5.14. Notons que, contrairement à TA_p^c d'une part et à $\text{TA}^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ d'autre part, $\text{TA}_p^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ n'est pas nécessairement arborescente (les interdépendances du voisinage et de la préservation de la caractéristique peuvent entrer en conflit; le graphe des projections résumant les interdépendances peut posséder des cycles (voir la section 4.3.2)). La même remarque s'applique à $\text{TA}_d^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ par rapport à TA_d^c et aux interdépendances du graphe de dominance.

6.5.3 Sémantique et propriétés des relations de caractéristique spatio-temporelles

Nous avons introduit les multi-algèbres des séquences temporelles avec relations de caractéristique dans la section précédente. Dans cette section, nous donnons un sens aux relations de caractéristique dans le contexte spatio-temporel afin d'explicitier la sémantique de ces multi-algèbres dans la section suivante, et nous montrons que les projections caractéristique-formalisme sont correctes.

Les relations de caractéristique spatio-temporelles sont simplement des relations temporalisées au sens de la définition 6.3.9.

Exemple 6.5.15. Plaçons-nous dans le cadre de séquences sur $\text{RCC}_{8,m}$ avec relations de PA sur les tailles des régions pour une certaine dynamique \mathcal{C} sur l'intervalle $[\tau_1, \tau_m]$. L'interprétation de la relation d'infériorité $<$ dans le cadre spatio-temporel est simplement $\langle < \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^c$ avec φ_{PC}^t comme fonction d'interprétation (ce sont les relations de $\text{QS} = \text{PC}^t$ qui sont temporalisées; voir l'exemple 6.2.17 et la remarque ci-dessous).

Remarque 6.5.16. Notons que la notation $\langle r \rangle_I^c$ peut être ambiguë lorsque l'on considère plusieurs relations temporalisées de formalismes différents. Elle ne l'est cependant pas lorsque leurs algèbres (non associatives) sont différentes (au moins en termes de notations), ce qui est le cas dans le reste de ce chapitre. Plus précisément, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, \mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{F}})$ un formalisme qualitatif et $r \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Nous avons $\langle r \rangle_I^c = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists b \in r \forall t \in I \ x(t) \varphi_{\mathcal{F}}(b) y(t)\}$.

Avec cette sémantique, les projections que nous avons proposées pour raisonner sur les caractéristiques dans la section précédente sont correctes.

Lemme 6.5.17. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} , \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur un intervalle I' satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F}, c}^{I'}$, $\tau \in I'$ et $I \subseteq I'$ un intervalle.

Nous avons les quatre propriétés suivantes, pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned}
 & - \langle \tilde{b} \rangle_{I'}^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} \rangle_{\tau}^c, \\
 & - \langle b \rangle_{\tau}^c \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \rangle_{I'}^c, \\
 & - \langle \tilde{b} \rangle_{I'}^c \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} \rangle_I^c \text{ et} \\
 & - \langle b \rangle_I^c \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \rangle_{I'}^c.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Nous prouvons les deux dernières propriétés. Les deux premières en sont une conséquence, puisque $\langle b \rangle_{\tau}^c = \langle b \rangle_{[r,\tau]}^c$ (propriété 3 du lemme 6.3.12) et car $\langle \mathcal{B} \rangle_{\tau}^c = \mathcal{C}^*$. Notons d'abord que $\tilde{\mathcal{F}}^c = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{U}, \tilde{\varphi}^c)$ (définition 6.2.16). Remarquons ensuite la satisfaction des deux propriétés :

$$\tilde{\varphi}^c(\tilde{b}) \cap \varphi(\mathcal{B}) \subseteq \varphi(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b})$$

et

$$\varphi(b) \cap \tilde{\varphi}^c(\tilde{\mathcal{B}}) \subseteq \tilde{\varphi}^c(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b)$$

pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$. Ces deux propriétés découlent du lemme 4.2.21, puisque $\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c}$ sont les projections de l'intégration lâche de \mathcal{F} et de $\tilde{\mathcal{F}}^c$ (définition 6.5.3).

Nous prouvons maintenant les deux dernières propriétés, en remarquant que \mathcal{C} est une dynamique de \mathcal{F} (définition 6.2.34).

$$\begin{aligned}
 & - \langle \tilde{b} \rangle_{I'}^c \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} \rangle_I^c : \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I' \ x(t) \tilde{\varphi}^c(\tilde{b}) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \quad \text{par} \quad \text{définition (déf. 6.3.9)} \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I' \ x(t) (\tilde{\varphi}^c(\tilde{b}) \cap \varphi(\mathcal{B})) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \quad \text{car} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}^* \ \forall t \in I' \ x(t) \varphi(\mathcal{B}) y(t) \\
 & \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I' \ x(t) \varphi(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b}) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \quad \text{car} \quad \tilde{\varphi}^c(\tilde{b}) \cap \varphi(\mathcal{B}) \subseteq \varphi(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b}) \\
 & \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \varphi(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b}) y(t)\} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_I^c \quad \text{car} \quad I \subseteq I' \\
 & = \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} \rangle_I^c \quad \text{par} \quad \text{la propriété 8 du lem. 6.3.12} \\
 & - \langle b \rangle_I^c \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \subseteq \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \rangle_{I'}^c :
 \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que nous avons $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \varphi^c(\tilde{\mathcal{B}}) y(t)\}$, que nous appelons propriété (1).

$$\begin{aligned}
 & \langle b \rangle_I^c \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \varphi(b) y(t)\} \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{I'}^c \quad \text{par} \quad \text{définition (déf. 6.3.9)} \\
 & \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) (\varphi(b) \cap \varphi^c(\tilde{\mathcal{B}})) y(t)\} \quad \text{par} \quad \text{la propriété (1)} \\
 & \subseteq \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ x(t) \tilde{\varphi}^c(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b) y(t)\} \quad \text{car} \quad \varphi(b) \cap \varphi^c(\tilde{\mathcal{B}}) \subseteq \tilde{\varphi}^c(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b) \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I \ c(x(t)) \tilde{\varphi}(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b) c(y(t))\} \quad \text{par} \quad \text{la définition de } \tilde{\varphi}^c \text{ (déf. 6.2.16)} \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I' \ c(x(t)) \tilde{\varphi}(\mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b) c(y(t))\} \quad \text{car} \quad \forall t, \hat{t} \in I' \ c(x(t)) = c(x(\hat{t})) \quad (\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{I'}) \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \forall t \in I' \ c(x(t)) \left(\bigcup_{\tilde{b} \in \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b} \tilde{\varphi}(\tilde{b}) \right) c(y(t))\} \quad \text{par} \quad \text{le lemme 4.2.5} \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists \tilde{b} \in \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \ \forall t \in I' \ c(x(t)) \tilde{\varphi}(\tilde{b}) c(y(t))\} \quad \text{car} \quad \forall t, \hat{t} \in I' \ c(x(t)) = c(x(\hat{t})) \\
 & = \{(x, y) \in \mathcal{C}^* \mid \exists \tilde{b} \in \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \ \forall t \in I' \ x(t) \tilde{\varphi}^c(\tilde{b}) y(t)\} \quad \text{par} \quad \text{la définition de } \tilde{\varphi}^c \\
 & = \langle \mathfrak{r}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c} b \rangle_{I'}^c \quad \text{par} \quad \text{définition}
 \end{aligned}$$

□

6.5.4 Sémantique des séquences temporelles avec relations de caractéristique

Nous avons introduit la sémantique des relations de caractéristique dans le contexte spatio-temporel et montré que les projections *caractéristique-formalisme* sont correctes par rapport à cette

sémantique. Nous pouvons maintenant expliciter la sémantique des multi-algèbres des séquences temporelles avec relations de caractéristique et montrer qu'elles constituent des formalismes séquentiels.

Nous commençons par la sémantique des séquences temporelles sans contrainte de transition.

Définition 6.5.18. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Le formalisme \mathcal{F} temporalisé sur les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c , noté $T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est le triplet $(T\mathcal{A}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{A}}^c, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c})$ où

$$\varphi_{T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c}(R) = \bigcap_{i=1}^m \langle R_i \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle R_{m+1} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}}$$

Lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$, nous notons $T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$ par $T\mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}}^c$.

Exemple 6.5.19. $\text{TRCC}_{8,m} + \text{PC}^t$ est donc le calcul des régions connectées et mesurables temporalisé avec relations de taille. Il permet de représenter et de raisonner sur les séquences temporelles (sans contraintes de transition) décrivant les relations topologiques entre des régions de \mathbb{R}^n de taille constante.

Pour alléger les notations, nous notons $\text{TRCC}_{8,m} + \text{PC}^t$ par TRCC_{8t} .

Comme le montre la proposition suivante, $T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$ est bien un formalisme séquentiel.

Proposition 6.5.20. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Le formalisme \mathcal{F} temporalisé sur les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c , $T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est un formalisme séquentiel.

Démonstration. Pour prouver que $T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c = (T\mathcal{A}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{A}}^c, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c})$ est un formalisme séquentiel, nous appliquons le lemme de combinaison (lemme 4.2.4). Nous vérifions ainsi ses hypothèses :

- Le formalisme des relations de \mathcal{F} à l'instant τ_i $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}})$ constitue un formalisme qualitatif (lemme 6.3.14), pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$;
- Le formalisme des relations de $\tilde{\mathcal{F}}^c$ sur l'intervalle $[\tau_1, \tau_m]$, $(\tilde{\mathcal{A}}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}})$, constitue un formalisme qualitatif (lemme 6.3.14) ;
- $\mathfrak{X}' = \mathcal{C}^*$ et $\tilde{\mathcal{C}}^* = \mathcal{C}^*$ (définition 6.2.34) ;
- $\varphi_{T\mathcal{F}^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c}$ (définition 6.3.26) est une fonction de $\mathcal{A}^m \times \tilde{\mathcal{A}}$ dans $2^{\sqrt{\mathcal{C}} \times \sqrt{\mathcal{C}}}$ de la forme « $\varphi(R) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_i(R_i) \cap \mathfrak{X}'$ ».
- La propriété « $\varphi_i(b) \cap \varphi_j(\mathcal{B}_j) \cap \mathfrak{X}' \subseteq \varphi_j(\mathcal{P}_i^j b)$ » est satisfaite pour tous $i, j \in \{1, \dots, m+1\}$. En effet, par application directe du lemme 6.5.17, nous avons pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}$:
 - $\langle \tilde{b} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{X}' \subseteq \langle \tilde{b} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}} \subseteq \langle \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} \tilde{b} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ (cas $i = m+1$) ;
 - $\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{X}' \subseteq \langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}} \subseteq \langle \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}^c}^{\mathcal{F}} b \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}}$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$ (cas $j = m+1$)
- et car nous avons trivialement la propriété suivante :
 - $\langle b \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}} \cap \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{X}' \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\tau_j}^{\mathcal{C}}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

□

Nous explicitons maintenant la sémantique des séquences temporelles sans relation intermédiaire avec relations de caractéristique et la sémantique des séquences sur intervalles avec relations de caractéristique.

Définition 6.5.21. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c* , noté $\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est le triplet $(\text{T}\mathcal{A}_p^c + \tilde{\mathcal{A}}^c, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c})$ où

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c}(R) = \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_p^c}((R_1, \dots, R_m)) \cap \langle R_{m+1} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^c$$

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sur les intervalles de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c* , noté $\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est le triplet $(\text{T}\mathcal{A}_d^c + \tilde{\mathcal{A}}^c, \sqrt{\mathcal{C}}, \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c})$ où

$$\varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c}(R) = \varphi_{\text{T}\mathcal{F}_d^c}((R_1, \dots, R_{2m-1})) \cap \langle R_{2m} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^c$$

Exemple 6.5.22. $\text{TRCC}_{8, m_p}^c + \text{PC}^t$ avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$, que nous notons plus simplement $\text{TRCC}_{8p,t}$, est donc le calcul des régions connectées et mesurables temporalisé avec voisinage et relations de taille. Il permet de représenter et de raisonner sur les séquences temporelles sans relation intermédiaire décrivant les relations topologiques entre des régions de \mathbb{R}^n de taille constante.

$\text{TRCC}_{8, m_d}^c + \text{PC}^t$, que nous notons plus simplement $\text{TRCC}_{8d,t}$, est donc le calcul des régions connectées et mesurables temporalisé avec dominance et relations de taille, qui permet de raisonner dans le contexte des séquences temporelles sur intervalles.

De manière analogue, $\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ et $\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ sont des formalismes séquentiels.

Proposition 6.5.23. Soient T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ un formalisme qualitatif topologique, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{C}, \tilde{\varphi})$ un formalisme qualitatif, c une fonction de \mathcal{U} dans \mathcal{C} et \mathcal{C} une dynamique de \mathcal{F} sur $[\tau_1, \tau_m]$ satisfaisant $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^{[\tau_1, \tau_m]}$.

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sans relation intermédiaire entre les instants de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c* , $\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est un formalisme séquentiel.

Le formalisme \mathcal{F} *temporalisé sur les intervalles de T par la dynamique \mathcal{C} avec relations de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la caractéristique c* , $\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$, est un formalisme séquentiel.

Démonstration. La preuve que $\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ (resp. $\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$) est un formalisme séquentiel est analogue aux preuves de la proposition 6.5.20 et de la proposition 6.3.28 (resp. de la proposition 6.3.19). En particulier, le lemme de combinaison (lemme 4.2.4) est applicable car les triplets $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{\tau_i}^c)$ avec $i \in \{1, \dots, m\}$, $(\mathcal{A}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}^c)$ avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $(\tilde{\mathcal{A}}, \sqrt{\mathcal{C}}, \langle \cdot \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^c)$ sont des formalismes qualitatifs (lemme 6.3.14) et car les projections de $\text{T}\mathcal{A}_p^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ (resp. $\text{T}\mathcal{A}_d^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$) sont correctes (lemme 6.3.27 (resp. lemme 6.3.18) et lemme 6.5.17). \square

Remarque 6.5.24. Nous aurions pu définir un opérateur $+$ entre formalismes séquentiels, et montrer que le formalisme résultant est toujours un formalisme séquentiel, mais cela aurait alourdi significativement la présentation.

Remarque 6.5.25. On peut doter les multi-algèbres $\text{T}\mathcal{A}^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$, $\text{T}\mathcal{A}_p^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ et $\text{T}\mathcal{A}_d^c + \tilde{\mathcal{A}}^c$ d'une autre sémantique naturelle. Au lieu d'imposer la préservation de la caractéristique, on peut n'imposer que la préservation de la *relation* de caractéristique au cours du temps. Cette sémantique est moins restrictive. Ainsi, si les scénarios algébriquement clos sont cohérents pour la sémantique de cette section, ils le sont également avec cette sémantique alternative.

Pour conclure, remarquons que la complétude des formalismes \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}^c$ n'assure pas la complétude du raisonnement spatio-temporel. La complétude de ces deux formalismes n'assure même pas la complétude de leur intégration lâche. Par exemple, l'intégration du calcul des intervalles avec les relations de taille n'est pas complet (voir le formalisme INDU⁷, exemple 3.2.9). Ainsi, dans un tel cas de figure, il faut changer de relations de caractéristique, considérer un autre formalisme qualitatif ayant une expressivité proche, ou trouver un autre moyen pour décider la cohérence.

7. La version intégration lâche d'INDU hérite de son résultat négatif.

6.6 Étude de la topologie temporalisée avec préservation de la taille

Nous étudions maintenant le cas particulier de TRCC_{8t} , c'est-à-dire $\text{RCC}_{8,m}$ temporalisé (par la dynamique de préservation de la taille) avec relations de taille de QS. Notons qu'entre deux instants d'une séquence sur TRCC_{8t} , il peut y avoir des relations intermédiaires.

Nous montrons que le raisonnement avec TRCC_{8t} est complet, que ses relations \vdash -cohérentes sont cohérentes et nous étudions ensuite la complexité de la décision de la cohérence associée. Nous identifions en particulier ses sous-algèbres maximales pour la traitabilité.

6.6.1 Complétude du raisonnement pour TRCC_{8t}

Cette section montre un résultat fondamental : la clôture algébrique suffit à décider la cohérence de tous les scénarios sur TRCC_{8t} , dans le cadre des régions de \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$.

Proposition 6.6.1 (Cohen-Solal *et al.*, 2017d,c). *Soit T une séquence ordonnée d'instantants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Les scénarios algébriquement clos sur TRCC_{8t} sont cohérents (pour \mathbb{R}^d , $d \geq 2$).

Démonstration. Soit N un scénario algébriquement clos sur TRCC_{8t} , avec n variables d'entité x_1, \dots, x_n et m instants τ_1, \dots, τ_m . Nous montrons qu'il est possible d'assigner à chaque x_i un élément f_i de $\sqrt{\mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,m,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}}$, c'est-à-dire une évolution continue d'une région mesurable de taille constante, tel que chaque contrainte soit satisfaite. Puisque nous avons juste besoin de prouver l'existence d'une solution, dans le but de rendre cette preuve aussi simple et claire que possible, nous choisissons une forme spécifique pour les régions et leur mouvement. En particulier, puisque les relations intermédiaires sont autorisées, nous pouvons traiter chaque instant indépendamment. Plus précisément, nous avons uniquement à montrer que pour tout scénario sur RCC_8 algébriquement clos, les régions peuvent être continûment déplacées une par une, de façon à ce que partant d'une configuration initiale fixée où les régions sont toutes disjointes, nous obtenons une configuration satisfaisant le scénario. Puisque cette évolution continue peut être inversée, la configuration initiale peut être utilisée comme une configuration *intermédiaire* entre toute paire d'instantants successifs, assurant que l'évolution est continue tout au long de la séquence.

Taille des régions : Puisque N est clos par composition et que les scénarios clos sur PA sont cohérents, nous pouvons associer à chaque région un entier $\text{rang}(x_i) \in \{1, \dots, n\}$ tel que les rangs satisfont les contraintes de taille. Sans perte de généralité, nous assumons que les x_i sont dans un ordre ascendant par rapport à leurs rangs, et que leurs rangs sont des entiers successifs ($\forall i \in \{2, \dots, n\} \quad \text{rang}(x_{i-1}) \leq \text{rang}(x_i) \leq \text{rang}(x_{i-1}) + 1$). Les régions de rang 1 sont les plus petites régions, les régions de rang 2 sont les secondes plus petites, etc. Évidemment, le rang d'une région ne dépend pas de l'instant considéré, la taille d'une région doit rester la même à tout instant.

Définition des régions : Considérons un scénario clos sur RCC_8 . Nous écrivons R^{ij} pour la relation basique de RCC_8 qui doit être satisfaite entre x_i et x_j à cet instant. Nous construisons chaque région comme une union disjointe de *sous-régions*, à savoir des *boules* fermées de \mathbb{R}^d . Cela nous permet de faire interagir une région avec chacune des autres régions le plus indépendamment possible. Pour chaque i , les sous-régions de x_i ont toutes le même rayon, que nous fixons à $3^{\text{rang}(x_i)}$ (pour qu'il soit plus de deux fois plus grand que le rayon des boules de rangs inférieurs – la raison sera clarifiée plus tard). Les sous-régions de x_i restent disjointes à tout moment, même lorsqu'elles bougent (ce n'est jamais un problème dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$), afin que la taille de x_i reste constante. Il y a n sous-régions *primaires* dans x_i , notées P_i^j ($1 \leq j \leq n$), qui seront utilisées pour imposer les relations EC et PO avec chaque autre région x_j (lorsque ces relations doivent être satisfaites). Puisque x_i peut avoir à contenir *toutes* les régions de rangs inférieurs (à cause des relations TPP et NTPP), qui, dans le pire des cas, pourraient être toutes déconnectées (DC), nous ajoutons à x_i autant de sous-régions *secondaires* que de sous-régions de rangs strictement plus petits. Ainsi, pour chaque k tel que $\text{rang}(x_k) < \text{rang}(x_i)$, pour chaque sous-région P de x_k , nous ajoutons à x_i une sous-région $P_i(P)$ qui servira à couvrir P si nécessaire. Remarquons que les entités de même rang ont exactement le même nombre de sous-régions, et ainsi la même taille.

Configuration initiale : Initialement, toutes les boules sont disjointes, suffisamment éloignées les unes des autres et leurs centres sont alignés sur une ligne, choisie arbitrairement, appelée

axe (nous choisissons également les directions *droite* et *gauche* sur cet axe). Hormis durant les déplacements, le centre de chaque boule est toujours sur cet axe. Nous appelons la *zone d'interaction* $Z(P)$ de la boule P , la zone fixée centrée autour de la position *initiale* de P – remarquons que les zones d'interaction ne bougent jamais. Nous supposons que les zones d'interaction sont disjointes, que chacune est suffisamment large pour contenir une boule de rayon 3^{n+1} centrée sur le centre de P (plus large que n'importe quelle sous-région) et qu'elles sont suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'une sous-région puisse quitter une zone et entrer dans une autre sans chevaucher aucune des autres zones. Initialement, chaque $Z(P)$ contient uniquement la sous-région P . Nous assurons qu'à chaque instant (un instant τ_i ou un instant entre les τ_i), il y a *au plus* une sous-région de chaque entité dans chaque zone d'interaction. C'est une façon simple d'assurer que les sous-régions d'une entité restent disjointes (et donc que la taille est préservée). Nous écrivons $\mathcal{Z}_i = \{Z(P_i) \mid P_i \text{ sous-région de } x_i\}$ pour l'ensemble des zones d'interaction de l'entité x_i . Si $R^{ij} = \text{EQ}$ pour certains i, j , nous pouvons bouger chaque sous-région x_j afin qu'elle devienne égale à une sous-région de x_i . Puisque le réseau est clos, cela est toujours possible (x_i et x_j ont le même rang et $\forall k \ R^{ik} = R^{jk}$). Nous pouvons ensuite *identifier* x_i et x_j , c'est-à-dire verrouiller leurs sous-régions afin qu'elles bougent toujours simultanément et restent donc égales à tout moment. Ainsi, dans la suite, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $i \neq j \iff R^{ij} \neq \text{EQ}$.

Étape 1 - relations de contact et de chevauchement : Pour chaque paire i, j telle que $i < j$, nous appliquons ce qui suit :

- si $R^{ij} = \text{PO}$, bouger P_j^i pour faire coïncider son centre avec celui de P_i^j (voir la figure 6.2.a,b) ;
- si $R^{ij} = \text{EC}$, bouger P_j^i pour faire coïncider son point le plus à gauche avec le point le plus à droite de P_i^j (voir la figure 6.2.c,d) ;
- si $R^{ij} = \text{TPP}$, bouger P_j^i pour faire coïncider son point le plus à droite avec le point le plus à droite de P_i^j (voir la figure 6.2.e).

Il est clair, à cette étape, qu'il y a au plus deux sous-régions dans chaque zone (appartenant à des régions distinctes), qu'en conséquence la taille de chaque région n'a pas changé, qu'aucune sous-région P_i^j telle que $i < j$ n'a bougé, et que toutes les relations PO et EC sont satisfaites.

Étape 2 - inclusions : Pour satisfaire le scénario, il ne reste plus qu'à imposer les relations TPP et NTPP entre les régions. Remarquons que nous avons garanti à l'étape 1 une connexion intérieure pour chaque relation TPP, nous avons ainsi juste à imposer les inclusions. Ceci est la

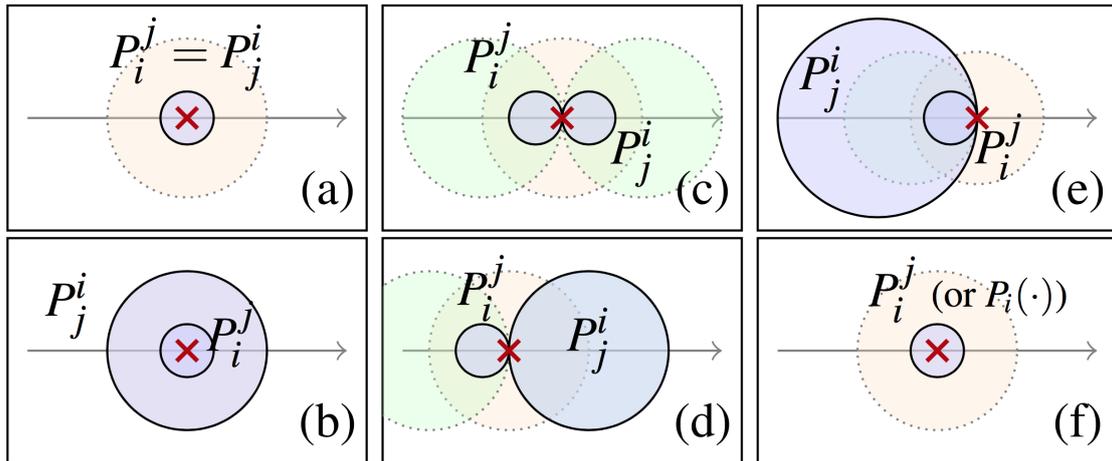


FIGURE 6.2 – En bleu, toutes les configurations possibles dans une zone d'interaction $Z(P_i^j)$ non vide à la fin de l'étape 1 : (a) $R^{ij} = \text{PO}$ et $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$; (b) $R^{ij} = \text{PO}$ et $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$; (c) $R^{ij} = \text{EC}$ et $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$; (d) $R^{ij} = \text{EC}$ et $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$; (e) $R^{ij} = \text{TPP}$; (f) $R^{ij} \in \{\text{DC}, \text{NTPP}\}$ (c'est également la configuration de toutes les zones d'interaction des boules secondaires et des sous-régions P_i^i). Les croix rouges marquent le *point d'interaction*. Les boules pâles en pointillé sont les positions possibles des plus petites boules secondaires durant l'étape 2 (en vert, les cas spéciaux).

partie la plus difficile : nous devons couvrir toutes les sous-régions des régions incluses *sans effets de bord* sur les autres entités et sans annuler les déplacements précédents. Autrement dit, il ne faut pas annuler la satisfaction des relations PO et EC et la satisfaction des connexions intérieures, ni annuler la satisfaction des relations DC devant être satisfaites.

Pour cela, nous traitons les entités dans l'ordre ascendant de leurs tailles, ce qui assure que lors de l'étape de x_i , les sous-régions de x_k avec $k \leq i$ ne bougeront pas. Pour chaque entité, dans l'ordre de leur taille, nous analysons chacune de ses *zones d'interaction*, et déplaçons toutes les boules des autres régions de taille supérieure devant s'y trouver afin que les relations soient satisfaites. Ainsi, les sous-régions peuvent uniquement bouger vers une zone d'une entité de rang inférieur. Notons que les sous-régions de x_i qui ont bougé vers une autre zone ont déjà été traitées et n'ont pas besoin d'être analysées. Autrement dit, une fois qu'une zone d'interaction a été traitée, on n'y revient plus jamais.

Concrètement, pour chaque i de 1 à n , considérons chaque zone d'interaction $Z(P_i) \in \mathcal{Z}_i$. Si elle est vide, P_i a bougé vers une autre zone, alors nous ne faisons rien. Sinon, il ne peut y avoir que six configurations, montrées dans la figure 6.2. Pour chaque k de $i + 1$ à n , nous analysons si nous avons besoin d'ajouter une sous-région de x_k dans cette zone. Si une boule de x_k est déjà présente, par construction nous savons qu'il n'y a pas besoin d'en ajouter une autre. S'il n'y en a pas, alors il faut en ajouter une dans deux cas :

- $R^{ik} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. La sous-région P_i doit être couverte par une sous-région de x_k ;
- la zone contient une boule d'une autre entité x_j , qui est arrivée ici durant l'étape 1 ou plus tôt durant cette itération, et $R^{jk} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ (ce cas peut concerner plusieurs boules, chacune d'une entité distincte).

S'il y a au moins une boule à couvrir *et* aucune sous-région de x_k n'est déjà présente, alors nous bougeons la sous-région $P_k(\cdot)$ de sa position initiale (par construction, elle n'a jamais bougé) vers $Z(P_i)$, afin qu'elle couvre *toutes* les boules qui nécessitent d'être couvertes et ne chevauche *aucune* boule qui ne doit pas être chevauchée. Pour cela, hormis dans deux cas spéciaux, il est suffisant de simplement faire coïncider le centre de $P_k(\cdot)$ avec le *point d'interaction* de $Z(P_i)$ (voir la figure 6.2), qui dépend uniquement de sa configuration à la fin de l'étape 1. Le premier cas spécial a lieu lorsque la zone a été utilisée pour imposer EC (figure 6.2.c,d) *et* que nous devons couvrir la boule de gauche (resp. de droite) *sans* chevaucher la boule de droite (resp. de gauche). Dans ce cas, nous rendons $P_k(\cdot)$ tangent au point d'interaction, en positionnant son centre du côté gauche (resp. droit) de l'axe (la boule verte en pointillé dans la figure 6.2.c,d). Le deuxième cas spécial a lieu lorsque la zone a été utilisée pour imposer TPP (figure 6.2.e) *et* que nous devons couvrir la boule P_i^j en étant couvert par la boule P_j^i (lorsque nous avons $R^{jk} = \{\overline{\text{TPP}}\}$). Dans ce cas, nous rendons $P_k(\cdot)$ tangent au point d'interaction, en positionnant son centre du côté gauche de l'axe (la boule verte en pointillé dans la figure 6.2.e).

Nous prouvons dans les annexes (section A.2) la satisfaction des relations du scénario N . Plus précisément, en utilisant le fait que N est algébriquement clos, nous montrons qu'aucune inclusion et qu'aucun chevauchement résultant de la construction ne contredit les contraintes du scénario N . Nous montrons également dans les annexes (section A.1) que l'évolution des régions est continue et que la taille des régions est préservée au cours du temps. \square

Ainsi, chercher un scénario algébriquement clos est suffisant pour décider la cohérence de n'importe quel réseau sur TRCC_{8t} : le raisonnement dans le cadre de TRCC_{8t} est complet pour la décision de la cohérence.

6.6.2 Cohérence des relations \uparrow -cohérentes et affaiblissement arborescent

Nous nous intéressons maintenant à la cohérence des relations \uparrow -cohérentes, propriété indispensable pour qu'une sous-classe soit algébriquement traitable.

Proposition 6.6.2. *Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Les relations \uparrow -cohérentes de TRCC_{8t} sont cohérentes.

Démonstration. Nous appliquons directement et simplement la proposition 4.3.12 :

- Les relations basiques closes par projection de TRCC_{8t} sont cohérentes (par la proposition 6.6.1).
- TRCA_{8t} est arborescente (lemme 6.5.10). □

Avant de nous intéresser à la complexité de la décision de la cohérence, nous nous intéressons à un affaiblissement arborescent de TRCC_{8t} . Celui-ci va nous permettre d'appliquer le théorème de découpage dans la section suivante et donc d'identifier des sous-classes traitables.

Définition 6.6.3. Nous appelons $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ l'affaiblissement de TRCA_{8t} ayant les mêmes projections, à l'exception des projections suivantes affaiblies :

$$\uparrow_{m+1}^i b = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$$

pour tous $b \in \text{PA}$ et $i \in \{1, \dots, m\}$.

Lemme 6.6.4. $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ est un affaiblissement arborescent de TRCA_{8t} .

Démonstration. Remarquons d'abord que TRCA_{8t} est arborescente : une de ses anti-arborescences plénières, que nous notons A , est le graphe dont l'ensemble des noeuds est $\{1, \dots, m+1\}$ et l'ensemble des d'arcs est $\{i \rightarrow m+1 \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ (lemme 6.5.10 et sa preuve).

- $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ est un affaiblissement arborescent (définition 4.3.45) de TRCA_{8t} puisque :
- $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ est un affaiblissement (définition 4.3.40) : nous avons $\text{TRCA}_{8t} \uparrow_i^j r \subseteq \text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}} \uparrow_i^j r$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et tout $r \in \mathcal{A}$;
- les projections de l'anti-arborescence A sont identiques : pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts et tout $r \in \text{RCA}_8$, nous avons $\text{TRCA}_{8t} \uparrow_i^{m+1} r = \text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}} \uparrow_i^{m+1} r$. □

6.6.3 Complexité et sous-algèbres algébriquement traitables de TRCC_{8t}

Nous nous intéressons maintenant à la complexité de la décision de la cohérence pour TRCC_{8t} . Remarquons pour commencer que TRCC_{8t} n'est pas traitable.

Proposition 6.6.5. Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Le problème de décision de la cohérence pour TRCC_{8t} est NP-complet.

Démonstration. Nous prouvons ce résultat en deux étapes. Nous notons $\mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,t}}^{[\tau_1, \tau_m]}$ par \mathcal{C} .

D'une part, nous montrons que le problème de décision de la cohérence pour TRCC_{8t} est dans NP. On obtient ce résultat par la proposition 4.2.40, car :

- TRCC_{8t} est un formalisme séquentiel (proposition 6.5.20).
- Ses scénarios algébriquement clos sont cohérents (proposition 6.6.1).

D'autre part, nous montrons qu'il existe une réduction polynomiale du problème de décision de la cohérence de $\text{RCC}_{8,m} = (\text{RCA}_8, \mathfrak{R}_m, \varphi_m)$ vers celui de TRCC_{8t} . À tout réseau N' sur $\text{RCC}_{8,m}$, nous associons le réseau N sur TRCC_{8t} satisfaisant :

- $\mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{N'}$,
- $N_1 = N'$,
- $N_i^{xy} = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$ pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$ et tous $x, y \in \mathbf{E}_N$ et
- $N_{m+1}^{xy} = \mathcal{B}_{\text{PA}}$, pour tous $x, y \in \mathbf{E}_N$.

Ainsi N est calculable en temps polynomial. Pour montrer la réduction polynomiale, il reste à montrer que le réseau N' est cohérent si et seulement si N est cohérent.

Nous montrons premièrement que si N est cohérent alors N' est cohérent. Soit $\{f_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \sqrt{\mathcal{C}}$ une solution de N . La famille $\{f_x(\tau_1)\}_{x \in \mathbf{E}'}$ est une solution de N' . En effet, nous avons $\{f_x(\tau_1)\}_{x \in \mathbf{E}'} \subseteq \mathfrak{R}_m$ et $(f_x(\tau_1), f_y(\tau_1)) \in \varphi_m(N_1^{xy}) = \varphi_m((N')^{xy})$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}'$, puisque $(f_x, f_y) \in \langle N_1^{xy} \rangle_{\tau_1}^{\mathcal{C}}$.

Nous montrons deuxièmement que si N' est cohérent alors N est cohérent. Soit $\{u_x\}_{x \in \mathbf{E}_{N'}}$ une solution de N' et soit $x \in \mathbf{E}_N$. Considérons la fonction f_x de $[\tau_1, \tau_m]$ dans \mathfrak{R}_m suivante : $f_x(t) = u_x$

pour tout $t \in [\tau_1, \tau_m]$. La famille $\{f_x\}_{x \in \mathbf{E}}$ est une solution de N . C'est assez clair puisque les N_i , $i \in \{2, \dots, m\}$, n'ajoutent aucune contrainte et seront donc satisfaits par ces fonctions constantes. Plus formellement, d'une part, nous avons $\{f_x\}_{x \in \mathbf{E}} \subseteq \sqrt{\mathcal{C}}$: pour tout $x \in \mathbf{E}$, f_x est continue (car f_x est une fonction constante) et $\mathbf{t}(f_x(t)) = \mathbf{t}(f_x(t')) = \mathbf{t}(u_x)$ pour tous $t, t' \in [\tau_1, \tau_m]$. D'autre part, nous avons $(f_x, f_y) \in \varphi_{\text{TRCC}_{8t}}(N^{xy})$ pour tous $x, y \in \mathbf{E}_N$, puisque :

- $(f_x, f_y) \in \mathcal{C}^*$ car pour tout $z \in \mathbf{E}_N$, $f_z \in \sqrt{\mathcal{C}}$,
- $(f_x(\tau_1), f_y(\tau_1)) = (u_x, u_y) \in \varphi_m((N')^{xy}) = \varphi_m(N_1^{xy})$ et donc $(f_x, f_y) \in \langle N_1^{xy} \rangle_{\tau_1}^{\mathcal{C}}$,
- $(f_x(\tau_i), f_y(\tau_i)) \in \varphi_m(\mathcal{B}_{\text{RCA}_8}) = \varphi_m(N_i^{xy})$ et donc $(f_x, f_y) \in \langle N_i^{xy} \rangle_{\tau_i}^{\mathcal{C}}$ pour $2 \leq i \leq m$,
- $(f_x(\tau_1), f_y(\tau_1)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} = \varphi^{\mathbf{t}}(\mathcal{B}_{\text{PA}}) = \varphi^{\mathbf{t}}(N_{m+1}^{xy})$ (avec $\varphi^{\mathbf{t}}$ l'interprétation de $\text{QS} = \text{PC}^{\mathbf{t}}$) et donc $(f_x, f_y) \in \langle N_{m+1}^{xy} \rangle_{[\tau_1, \tau_m]}^{\mathcal{C}}$ pour $2 \leq i \leq m$.

Ainsi, nous avons une réduction polynomiale de $\text{RCC}_{8,m}$ vers TRCC_{8t} pour la décision de la cohérence.

Enfin, par réduction polynomiale, puisque le problème de décision de la cohérence pour $\text{RCC}_{8,m}$ est NP-complet, le problème de décision de la cohérence pour TRCC_{8t} est NP-difficile. Or il est également dans NP. Par conséquent, il est NP-complet. \square

Puisque TRCC_{8t} n'est pas traitable, nous identifions, dans le reste de cette section, ses sous-algèbres maximales pour la traitabilité, en appliquant les résultats de traitabilité du cadre des multi-algèbres (chapitre 4).

Avant d'identifier ses sous-algèbres maximales, nous prouvons la traitabilité de $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$, une sous-classe intermédiaire (voir la section 2.4.4).

Proposition 6.6.6 (Cohen-Solal *et al.*, 2017d,c). *Soit T une séquence ordonnée d'instants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

La sous-classe $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ de TRCC_{8t} est algébriquement traitable.

Démonstration. Pour prouver ce résultat, nous utilisons l'affaiblissement arborescent $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ de TRCA_{8t} (définition 6.6.3).

Nous appliquons directement le théorème de découpage affaibli (corollaire 4.3.48). Ses hypothèses sont satisfaites :

- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ est trivialement de la forme $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_{m+1}$.
- TRCC_{8t} est un formalisme séquentiel (proposition 6.5.20).
- TRCA_{8t} est arborescente (lemme 6.5.10).
- Les scénarios algébriquement clos sur TRCC_{8t} sont cohérents (proposition 6.6.1).
- L'affaiblissement $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ est bien un affaiblissement arborescent de TRCA_{8t} (lemme 6.6.4).

Ses conditions d'application le sont également :

- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ et \mathcal{S}_{PA} sont des sous-algèbres (voir la section 2.4.4).
- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ et \mathcal{S}_{PA} sont minimales (proposition 2.4.27).
- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ est \uparrow -distributive, par le corollaire 4.3.31 et car chaque projection \uparrow_{m+1}^i affaiblie et chaque projection \uparrow_i^j , pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, sont trivialement sur-distributives par rapport à la composition et l'intersection (puisque $\uparrow r = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$, pour tout r).
- pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, pour tout $r \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$, nous avons $\uparrow_i^{m+1} r = \uparrow_{\text{RCC}_{8,m}}^{\text{PC}^{\mathbf{t}}} r = \uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$ (lemme 4.3.6) et $\uparrow_i^j r = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$; et pour tout $r' \in \mathcal{S}_{\text{PA}}$, nous avons $\uparrow_{m+1}^i r' = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8} \in \mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ (puisque \uparrow_{m+1}^i est affaiblie).

\square

Notons que comme cette sous-classe est simple (définition 4.3.15) et algébriquement traitable pour l'affaiblissement $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$, on peut décider la cohérence en appliquant uniquement une clôture par projection suivie d'une clôture par composition (au lieu d'alterner ces deux clôtures jusqu'à atteindre un point fixe). En effet, si clôturer un réseau N sur $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ par projection puis par composition ne donne pas l'ensemble vide, alors la clôture algébrique pour $\text{TRCA}_{8t}^{\text{aff}}$ de N n'est pas trivialement incohérente (par simplicité). Par conséquent, le réseau N est cohérent.

À présent nous identifions les trois seules sous-algèbres algébriquement traitables et maximales de TRCC_{8t} . Elles sont basées sur les sous-classes classiques de RCC_8 : $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 et \mathcal{Q}_8 (voir la section 2.4.4).

Théorème 6.6.7 (Cohen-Solal *et al.*, 2017d,c). *Soit T une séquence ordonnée d'instantants distincts τ_1, \dots, τ_m avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Les sous-algèbres $\hat{\mathcal{H}}_8^m \times \text{PA}$, $\mathcal{C}_8^m \times \text{PA}$ et $\mathcal{Q}_8^m \times \text{PA}$ de TRCC_{8t} sont algébriquement traitables. De plus, elles sont maximales pour la traitabilité (si $\text{P} \neq \text{NP}$).

Démonstration. Soit $\mathcal{S} \in \{\hat{\mathcal{H}}_8, \mathcal{C}_8, \mathcal{Q}_8\}$. Nous appliquons le théorème d'affinement affaibli (corollaire 4.3.49), avec TRCA_{8t} comme affaiblissement (c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'affaiblissement), en utilisant pour la sous-classe \mathcal{S} son affinement classique vers les relations basiques noté $h_{\mathcal{S}}$ (définition 2.4.19), et pour PA l'affinement h_{\max} (voir la section 2.4.4). Ses hypothèses sont satisfaites :

- TRCC_{8t} est un formalisme séquentiel (proposition 6.5.20).
- $\mathcal{S}^m \times \text{PA}$ est trivialement de la forme $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$.
- $H = (h_{\mathcal{S}}, \dots, h_{\mathcal{S}}, h_{\max})$ envoie les relations de $\mathcal{S}^m \times \text{PA}$ vers $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$.
- TRCA_{8t} est trivialement un affaiblissement de TRCA_{8t} .

Ses conditions d'application le sont également :

- \mathcal{S} et PA sont des sous-classes.
- \mathcal{S} est stable par $h_{\mathcal{S}}$ pour la composition (proposition 4.3.36) et PA est stable par h_{\max} pour la composition (proposition 4.3.35).
- $\mathcal{S} \times \text{PA}$ est stable par $(h_{\mathcal{S}}, h_{\max})$ pour la projection (lemme 4.3.37) et $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est trivialement stable par $(h_{\mathcal{S}}, h_{\mathcal{S}})$ pour la projection puisque $\uparrow_i^j r = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8}$, pour tout $r \in \text{RCA}_8$ et tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts.
- pour tout $r \in \mathcal{S}$, nous avons $\uparrow_{\text{RCC}_{8,m}}^{\text{PC}^t} r = \uparrow_{\text{RCA}_8}^{\text{PA}} r \in \text{PA}$ et pour tout $r' \in \text{PA}$, nous avons $\uparrow_{\text{PC}^t}^{\text{RCC}_{8,m}} r' = \uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCA}_8} r' \in \mathcal{S}$ (lemme 4.3.6). De plus, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distincts, et tout $r \in \mathcal{S}_i$, nous avons trivialement $\uparrow_i^j r = \mathcal{B}_{\text{RCA}_8} \in \mathcal{S}_j$.
- $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}^m \times \mathcal{S}_{\text{PA}}$ est algébriquement traitable (proposition 6.6.6).

Puisque $\hat{\mathcal{H}}_8$, \mathcal{C}_8 et \mathcal{Q}_8 sont les trois seules sous-algèbres de RCC_8 qui sont maximales pour la traitabilité (supposant $\text{P} \neq \text{NP}$) (Renz, 1999), $\hat{\mathcal{H}}_8^m \times \text{PA}$, $\mathcal{C}_8^m \times \text{PA}$ et $\mathcal{Q}_8^m \times \text{PA}$ sont ainsi également maximales. \square

6.7 Avantages et applications du cadre des multi-algèbres spatio-temporelles

Dans cette section, nous nous intéressons dans un premier temps aux avantages computationnels des multi-algèbres spatio-temporelles par rapport aux approches de l'état de l'art. Dans un second temps, nous appliquons le cadre des multi-algèbres spatio-temporelles aux contextes de la simulation qualitative et de l'*interpolation de réseaux de contraintes*, utile à la planification spatiale (Wolter et Kreutzmann, 2015; Westphal *et al.*, 2011) et pour raisonner sur des descriptions spatio-temporelles d'expressivité supérieure aux séquences temporelles (Ragni et Wöflf, 2006; Gerevini et Nebel, 2002).

6.7.1 Avantages computationnels des multi-algèbres

Nous présentons les différents avantages computationnels de l'approche des multi-algèbres spatio-temporelles concernant le raisonnement sur les séquences temporelles.

Les multi-algèbres sont bien adaptées pour raisonner sur les séquences temporelles. Contrairement aux autres approches telles que celle de Westphal *et al.* (Westphal *et al.*, 2013) ou celle de Gerevini et Nebel (Gerevini et Nebel, 2002) (voir la section 3.3.4), il n'y a pas besoin de dupliquer les variables d'entité pour chaque instant de la séquence afin de pouvoir ajouter des contraintes de transition entre une entité et elle-même à un autre instant. De ce fait, la clôture algébrique des multi-algèbres peut être imposée en temps $O(m \cdot n^3 + m^2 \cdot n^2)$ avec n le nombre de variables d'entité et m la longueur de la séquence, alors qu'elle est en temps $O(m^3 \cdot n^3)$ si les variables sont dupliquées. En effet, la clôture algébrique du cadre classique est en $O(n_v^3)$ avec n_v le nombre de

variables, ici $n_v = n \cdot m$ (voir la section 2.4.3). De plus, certaines contraintes de transition, telles que les contraintes T_2 et T_4 (section 3.3.4), nécessitent des techniques de propagation de contraintes d'arité supérieure à deux.

En outre, la non-duplication des variables a un second avantage : dans le cadre de la décision de la cohérence dans les cas intraitables, la profondeur de l'arbre de recherche de la séparation et évaluation est significativement plus petite. Notons cependant que l'approche de Westphal et al. a une expressivité supérieure à celle des multi-algèbres. Elle permet d'exprimer des contraintes d'arité quelconque entre des variables d'entité d'instant différent.

6.7.2 Simulation qualitative

Nous nous intéressons maintenant à la réalisation de simulations qualitatives à l'aide du cadre des multi-algèbres spatio-temporelles. Le but de la simulation qualitative est de déterminer l'ensemble des états qualitatifs futurs d'un état qualitatif initial respectant certaines contraintes (Cui *et al.*, 1992). Autrement dit, l'objectif est de déterminer l'ensemble des séquences de scénarios représentant toutes les évolutions d'entités satisfaisant un scénario initial et satisfaisant à chaque instant un ensemble de contraintes additionnel, appelées *contraintes d'état*. Afin d'avoir une représentation compacte des différentes évolutions qualitatives possibles, l'ensemble des scénarios futurs se représente par un graphe dont les noeuds sont les scénarios et les arcs décrivent le fait de pouvoir passer d'un scénario à un autre sans relation intermédiaire. Une chaîne de ce graphe partant du scénario initial représente une évolution qualitative possible à partir de cet état.

Exemple 6.7.1. La simulation qualitative partant du scénario initial « x DC y », avec x et y des variables de région, correspond par exemple au graphe de voisinage de RCC_8 (figure 3.1a).

Exemple 6.7.2. La figure 6.3 représente une simulation qualitative correspondant à un scénario initial avec trois variables de région de taille constante, toutes égales à l'instant initial et devant vérifier à tout instant un certain réseau de contraintes N .

Le cadre des multi-algèbres spatio-temporelles peut être utilisé pour effectuer des simulations qualitatives. Pour pouvoir déterminer le graphe des transitions sans relation intermédiaire, sous la contrainte d'état d'un réseau \tilde{N} , il est suffisant d'avoir une méthode qui détermine, à partir d'un scénario, l'ensemble des scénarios de \tilde{N} atteignables sans relation intermédiaire. Supposons que nous souhaitons déterminer la simulation qualitative à partir d'un scénario d'un formalisme qualitatif $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, \mathcal{U}, \varphi)$ dans le contexte d'une dynamique \mathcal{C} de \mathcal{F} . Pour déterminer l'ensemble des scénarios atteignables, sous la contrainte du réseau \tilde{N} , à partir d'un scénario S , il faut considérer le réseau N sur la multi-algèbre $\mathcal{T}\mathcal{A}_p^{\mathcal{C}}$ avec $m = 2$, défini par $N_1 = S$ et $N_2 = \tilde{N}$. Soit N' la clôture algébrique de N . L'ensemble des scénarios atteignables est l'ensemble des scénarios algébriquement clos de N'_2 . Notons que si \tilde{N} appartient à une sous-algèbre \mathcal{S} minimale ou algébriquement traitable telle que $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ soit \uparrow -close, énumérer les scénarios algébriquement clos en utilisant la clôture algébrique comme méthode d'élagage peut s'effectuer plus efficacement (car N'_2 sera sur \mathcal{S}).

Cette méthode est différente, bien que proche, de celle de Cui et al. (Cui *et al.*, 1992). Elle a l'avantage d'être plus performante computationnellement. L'algorithme proposé par Cui et al. détermine l'ensemble des scénarios respectant les contraintes de transition, et ensuite il ne garde que ceux qui sont algébriquement clos (un test est effectué pour chaque scénario). La méthode que nous proposons permet de filtrer un certain nombre de scénarios incohérents durant l'application des contraintes de transition (c'est-à-dire des projections) avant de commencer l'énumération. Cela évite ainsi un nombre significatif d'énumérations inutiles.

En adaptant cette méthode au cadre de $\mathcal{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}}$, on peut déterminer le graphe de dominance des états futurs (voir la figure 6.3). L'intérêt du graphe de dominance est qu'il assure que chaque séquence est sans état intermédiaire. Cette méthode s'adapte également au contexte de la préservation de caractéristiques (cas $\mathcal{T}\mathcal{F}_p^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$ et $\mathcal{T}\mathcal{F}_d^{\mathcal{C}} + \tilde{\mathcal{F}}^c$), ce qui peut être utile pour avoir la complétude. La complétude est en effet nécessaire, si l'on souhaite que toutes les transitions soient réalisables. Si le raisonnement n'est pas complet, nous obtenons une approximation supérieure des évolutions qualitatives possibles. Autrement dit, toutes les évolutions possibles sont au sein de la simulation mais certaines séquences ne sont pas réalisables. Le problème de la complétude se pose également pour l'approche de Cui et al.

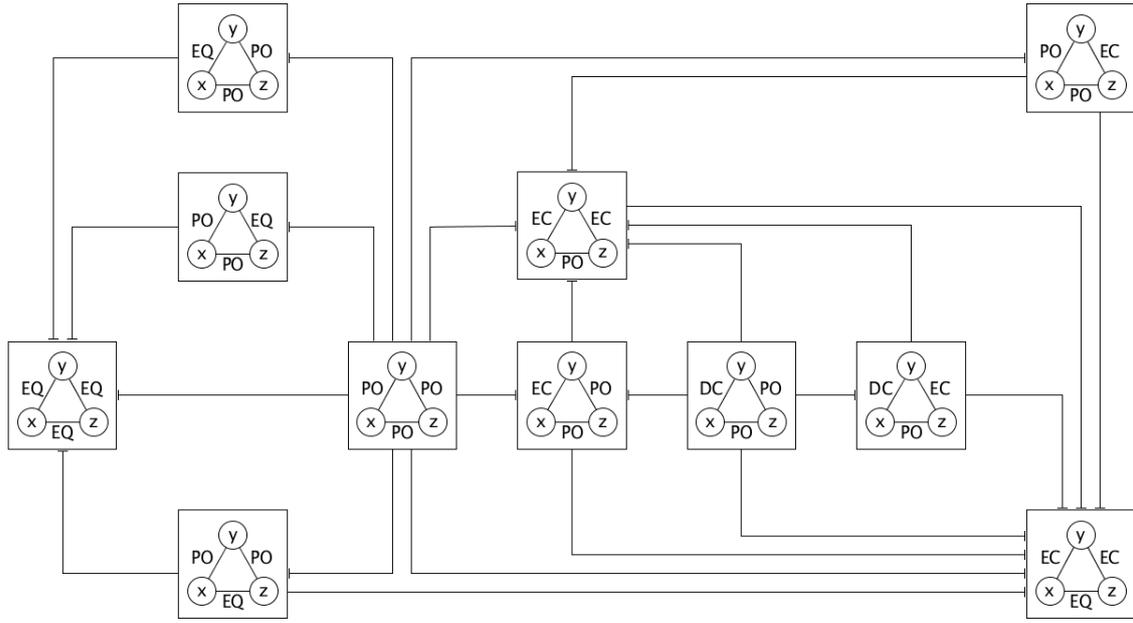


FIGURE 6.3 – Simulation qualitative du scénario S sur RCC_8 défini par $S^{xy} = EQ$, $S^{yz} = EQ$ et $S^{xz} = EQ$, avec $E_S = \{x, y, z\}$ des variables de région mobile de taille constante, sous la contrainte d'état N définie par $N^{xy} = \mathcal{B}$, $N^{yz} = \mathcal{B} \setminus \{DC\}$ et $N^{xz} = \mathcal{B} \setminus \{EC, DC\}$; il s'agit en fait d'un type de simulation qualitative plus précis : les arcs représentent la relation de *dominance* : il y a un arc si on peut passer d'un scénario à un autre *sans scénario intermédiaire* (tout scénario est relié implicitement à lui-même); ce graphe peut aisément être modifié de façon à obtenir le graphe de la simulation qualitative classique *sans relation intermédiaire*, en ajoutant des arcs supplémentaires

Notons que le cadre proposé par Cui et al. pour faire de la simulation qualitative a une expressivité *incomparable* avec notre approche. En particulier, leur approche autorise la conception de règles d'ajout et de suppression de variables d'entité. Le cadre que nous proposons permet de calculer des graphes de dominance (avec \mathcal{TF}_d^c). Il permet également d'effectuer des simulations qualitatives dans le contexte d'interdépendances non locales par l'utilisation de relations entre caractéristiques (cadres de $\mathcal{TF}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ et de $\mathcal{TF}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$) et par l'utilisation de projections entre périodes temporelles non voisines (en utilisant d'autres multi-algèbres spatio-temporelles).

Remarquons pour finir qu'un problème connexe est la détermination des relations basiques réalisables pour chaque couple d'entités au cours des m prochains changements qualitatifs. Au lieu de déterminer les scénarios réalisables, on détermine les relations réalisables, ce qui se représente sous une forme plus compacte. Ce problème est le problème de la *minimalité* adapté au contexte des séquences temporelles. Autrement dit, le réseau minimal constitue un autre type de représentation des différentes évolutions possibles, plus compacte et moins détaillée.

6.7.3 Interpolation de réseaux de contraintes

Nous nous intéressons dans cette section à l'utilisation des multi-algèbres spatio-temporelles pour effectuer des interpolations de réseaux de contraintes (Ragni et Wöflf, 2005; Westphal *et al.*, 2011; Wolter et Kreutzmann, 2015).

Le *problème de l'interpolation* de deux scénarios S et S' d'un formalisme qualitatif \mathcal{F} sous la contrainte d'état d'un réseau \tilde{N} consiste à déterminer un nombre entier $m \geq 2$ et une séquence de scénarios S_1, \dots, S_m , possédant une solution pour une certaine dynamique \mathcal{C} sur un intervalle $[a, b]$, telle que cette solution satisfasse S à l'instant a , S' à l'instant b et \tilde{N} à tout instant de $[a, b]$ ⁸.

8. Les réseaux S , S' , S_1, \dots, S_m et \tilde{N} doivent porter sur les mêmes variables, ce qui n'est pas restrictif. Ils doivent également être sur le même formalisme qualitatif.

Exprimé dans le cadre des multi-algèbres, le problème de l'interpolation consiste à déterminer un nombre entier $m \geq 2$ et un scénario N sur $\text{T}\mathcal{F}_p^c$, de longueur m , cohérent et satisfaisant $N_1 = S$, $N_m = S'$ et $N_i \subseteq \tilde{N}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Notons qu'il n'existe pas nécessairement de séquence interpolatrice. Un problème connexe est donc la *décision de l'interpolation*, qui consiste à déterminer si S et S' sont interpolables sous la contrainte d'état \tilde{N} .

Nous proposons maintenant deux techniques basées sur les multi-algèbres pour déterminer si deux scénarios sont interpolables, et dans ce cas déterminer la séquence interpolatrice.

Avec la première technique, il faut, d'une part, prendre pour m la borne minimale connue pour interpoler deux scénarios quelconques sous la contrainte d'état \tilde{N} (dans le pire des cas, il s'agit du nombre de scénarios algébriquement clos inclus dans \tilde{N}). Il faut, d'autre part, considérer le réseau N sur $\text{T}\mathcal{F}_p^c$ défini par $N_1 = S$, $N_m = S'$ et $N_i = \tilde{N}$ pour tout $i \in \{2, \dots, m-1\}$. Les deux scénarios sont interpolables si et seulement si N est cohérent. Une séquence interpolatrice est un scénario algébriquement clos de N , qui peut être déterminé par séparation et évaluation en utilisant la clôture algébrique comme méthode d'élagage. Notons que les sous-classes traitables sont fondamentales pour ce problème. En effet, lorsque \tilde{N} est sur une sous-classe \mathcal{S} telle que \mathcal{S}^m est une sous-algèbre \uparrow -close algébriquement traitable (et en particulier scénarisable par H ; définition 4.3.14), la décision de l'interpolabilité et la construction de l'interpolation sont polynomiales par rapport au nombre de variables n et à la borne m . Étant donné que la longueur nécessaire à l'interpolation est souvent bien plus petite que la limite théorique, une recherche croissante de la longueur interpolatrice, par exemple par dichotomie, peut être plus efficace.

Notons que le problème de l'interpolation sans contrainte d'état dans le cadre de la préservation d'une caractéristique c peut être décidé par le réseau N sur $\text{T}\mathcal{F}^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$, de longueur 3, défini par $N_1 = S$, $N_2 = S'$ et $N_3^{xy} = \tilde{\mathcal{B}}$ pour tous $x, y \in E$. S'il existe une sous-algèbre algébriquement traitable pour $\text{T}\mathcal{F}^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ alors décider l'interpolation sans contrainte d'état est polynomial par rapport au nombre de variables n . C'est donc le cas avec TRCC_{8t} (c'est-à-dire $\text{TRCC}_8 + \text{PC}^t$).

La deuxième technique que nous proposons est une adaptation de la simulation qualitative basée sur les multi-algèbres. Celle-ci peut, *a priori*, être plus efficace lorsque la borne minimale connue m est grande et que la longueur minimale effective pour interpoler est petite. L'idée est de parcourir l'arbre de la simulation qualitative, sans avoir à le construire intégralement, à la manière de l'algorithme A^* . La méthode consiste donc à chercher un chemin vers le scénario final à partir du scénario initial, en orientant la recherche par une heuristique. De manière analogue à la simulation qualitative, les multi-algèbres sont utilisées pour déterminer le réseau contenant tous les scénarios atteignables (voir la section 6.7.2). Il faut ensuite extraire l'un après l'autre certains de ces scénarios dans un ordre donné et tenter pour chacun d'eux d'atteindre le scénario final en itérant cette procédure.

Pour des raisons analogues au cadre de la simulation qualitative, cette approche est plus performante computationnellement que celle proposée dans l'état de l'art (Ragni et Wölfl, 2005). Plus précisément, la technique de Ragni et Wölfl génère les scénarios voisins puis élague ceux qui ne sont pas algébriquement clos, ce qui induit des énumérations inutiles (voir la section 6.7.2).

Remarquons que l'on peut adapter ces deux techniques aux contextes des autres multi-algèbres ($\text{T}\mathcal{F}_d^c$, $\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$ et $\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$), pour déterminer une séquence interpolatrice sans état intermédiaire ou obtenir, si nécessaire, la complétude du raisonnement. Comme avec la simulation qualitative, la complétude est essentielle pour résoudre les deux problèmes de l'interpolation⁹. Si nous n'avons pas la complétude, les méthodes présentées dans cette section, comme celles de l'état de l'art (Ragni et Wölfl, 2005; Westphal *et al.*, 2011; Wolter et Kreutzmann, 2015), ne peuvent ni décider ni construire une interpolation. En effet, identifier une séquence algébriquement close ne prouve pas la cohérence de cette séquence. Ces techniques permettent cependant de conclure que deux scénarios sont non interpolables, lorsqu'elles ne trouvent pas de séquence interpolatrice algébriquement close, puisque le raisonnement est correct.

Notons pour finir qu'un problème similaire est la détermination de la plus courte séquence interpolatrice (Wolter et Kreutzmann, 2015). Les deux techniques présentées ici sont adaptables pour

9. En fonction de l'application précise, il peut suffir d'avoir la complétude pour une séquence d'instant arbitraire τ_1, \dots, τ_m ou au contraire, il peut être nécessaire d'avoir la complétude pour toutes les séquences d'instant τ_1, \dots, τ_m .

résoudre cette variante. Avec la première méthode, on peut, par exemple, effectuer une recherche par dichotomie sur la longueur m .

6.8 Conclusion

6.8.1 Bilan

Nous avons proposé un cadre formel général basé sur les multi-algèbres pour raisonner sur les séquences temporelles.

Pour ce faire, nous avons défini les formalismes qualitatifs pour lesquels la notion de continuité a du sens, ainsi que les formalismes des relations de caractéristique, construits par changement de sémantique. Nous avons ensuite défini formellement ce que nous appelons dynamique. Nous avons en particulier formalisé la dynamique générale et les dynamiques de la préservation de caractéristiques. Nous nous sommes notamment focalisés sur celle de la préservation de la taille. Nous avons également généralisé la sémantique du cadre des graphes de transition de Galton en nous plaçant dans le cadre général de la continuité des espaces topologiques. Nous avons ensuite appliqué cette généralisation dans le contexte des formalismes qualitatifs pour définir leurs graphes de transition pour une dynamique donnée.

À partir de ces concepts, nous avons défini les multi-algèbres des formalismes qualitatifs temporalisés par une dynamique dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire et dans celui des partitions du temps. Celles-ci permettent de raisonner de manière correcte sur les séquences temporelles, grâce à la clôture algébrique, puisque dotées de leur sémantique elles constituent des formalismes séquentiels. Elles permettent, de plus, de décider la cohérence lorsque le raisonnement est complet, ce qui dépend du formalisme qualitatif et de la dynamique considérés.

Pour expliciter la sémantique de ces multi-algèbres, nous avons temporalisé les relations. Nous avons en particulier montré que ces relations temporalisées constituent un formalisme qualitatif symétrique, bien qu'elles ne constituent pas un formalisme qualitatif au sens de Ligozat et Renz et au sens de Dylla et al. Cela nous a également permis de montrer que les projections sont correctes, notamment en formulant une définition équivalente des relations de transition en terme de relations temporalisées.

Rappelons que le cadre que nous proposons a une *expressivité sémantique* élevée puisqu'il dépend d'une dynamique. Nous pouvons en effet nous placer dans des contextes spécifiques variés : préservation de caractéristiques, évolutions dépendant du sens du temps, entités évoluant non indépendamment les unes des autres, trajectoires de différentes régularités (lisses, linéaires, ...) et types d'entités différents évoluant chacun différemment.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas particulier du calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire et sur intervalles (dans le cadre de la dynamique générale). Nous avons montré que le raisonnement est complet et que les relations \bar{r} -cohérentes sont cohérentes. En outre, nous avons discuté de la complexité de la décision de la cohérence et du fait qu'il n'existe pas de sous-algèbre traitable de la forme \mathcal{S}^m pour la continuité sans relation intermédiaire.

Dans un second temps, nous avons formalisé le cadre des séquences temporelles avec relations de caractéristique, dans le contexte de la préservation de ces caractéristiques. Nous avons défini, en particulier, trois types de temporalisation différentes pour les séquences temporelles : sans contrainte de transition, sans relation intermédiaire et sur intervalles. Ce cadre permet d'exprimer et d'inférer les relations de caractéristique. Ainsi, dans le contexte de la préservation de la taille, contrairement à l'approche de Galton (Galton, 1993), nous n'avons pas besoin de connaître les relations de taille pour raisonner, puisque le formalisme peut lui-même les inférer.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas particulier de RCC_3 sans contrainte de transition et avec relations de taille (dans le contexte de la préservation de la taille). Nous avons montré que le raisonnement est complet, contrairement au cadre des séquences simples, c'est-à-dire sans relation de taille. Nous avons également montré que les relations \bar{r} -cohérentes sont cohérentes et que le problème de décision de la cohérence est NP-complet. Enfin, nous avons identifié toutes les sous-algèbres maximales pour la traitabilité, à l'aide du cadre formel des multi-algèbres.

Pour finir, nous avons montré que l'approche des multi-algèbres est plus performante computationnellement que les approches de l'état de l'art concernant les séquences temporelles. Nous

avons également montré comment utiliser ce cadre dans le contexte de la simulation qualitative et dans le contexte de l'interpolation de réseaux de contraintes, et nous avons présenté les avantages computationnels de ces utilisations.

6.8.2 Perspectives

Ce travail ouvre plusieurs voies de recherche. Nous les détaillons dans cette section.

Tout d'abord, il y a de nombreuses questions ouvertes concernant les formalismes temporalisés. D'une part, nous conjecturons que les raisonnements de $\text{TRCC}_{\mathcal{S}_p}$ et de $\text{TRCC}_{\mathcal{S}_p, \mathcal{t}}$ sont complets, et que nous pouvons identifier des sous-classes traitables. Notons qu'avoir la complétude de $\text{TRCC}_{\mathcal{S}_p}$ signifie que le graphe de voisinage de RCC_8 (avec taille variable) est *adapté* pour raisonner dans le cadre spatio-temporel. Il serait également intéressant d'étudier la complétude de ces formalismes en se restreignant aux régions intérieurement connexes, puisque de nombreux objets physiques vérifient cette propriété.

D'autre part, les résultats positifs et négatifs du calcul des points devraient se généraliser sans problème au calcul des intervalles, au calcul des points cardinaux et au calcul des rectangles (Balbani *et al.*, 1999).

Enfin, une analyse plus poussée de la complexité du calcul des points temporalisé serait à effectuer, notamment afin de savoir si l'on peut déterminer des fragments traitables intéressants.

Une autre voie de recherche concerne les différentes possibilités d'extensions du cadre introduit dans ce chapitre. Premièrement, nous n'avons pas formalisé le cadre des partitions d'un intervalle ouvert $] \tau_1, \tau_m [$. Ce cas n'est pas équivalent aux partitions de l'intervalle fermé $[\tau_1, \tau_m]$: les solutions de cette variante sont différentes. Par exemple, un ensemble de points divergeant vers l'infini en τ_m ou un ensemble de régions dont les tailles tendent vers zéro en τ_m sont de potentielles solutions pour cette variante. Nous pouvons également étendre le cadre aux cas où $\tau_1 = -\infty$ et $\tau_m = +\infty$. Cela permettrait d'imposer une *tendance* au sein d'une description. On pourrait par exemple imposer qu'un point soit plus petit qu'un autre mais qu'ils tendent à se rapprocher, en imposant qu'ils soient égaux à l'infini.

Deuxièmement, bien que le cadre que nous avons développé permette de raisonner dans le contexte de n'importe quelle dynamique, le raisonnement n'est pas complet pour un certain nombre de dynamiques. Par exemple, nous n'avons pas la complétude dans le cadre des dynamiques qui ne sont pas *qualitativement équivalentes par translation temporelle*. Pour avoir un raisonnement plus précis dans ce contexte, les projections doivent varier en fonction des instants et des intervalles de la séquence. De manière analogue, pour d'autres dynamiques, il peut être nécessaire que les projections entre entités temporelles non successives donnent une relation plus fine que la relation universelle. Autrement dit, pour certaines dynamiques spécifiques, il faut considérer d'autres multi-algèbres dont les projections sont plus restrictives. Une perspective de recherche connexe est l'identification de critères nécessaires et si possible suffisants, notamment sur les dynamiques, pour avoir la complétude du raisonnement.

Troisièmement, on peut définir les multi-algèbres des séquences temporelles dans le cadre du temps arborescent (Ben-Ari *et al.*, 1983; Graf, 1984; Westphal *et al.*, 2013), pour tenir compte de différents futurs alternatifs, bien que, du point de vue de la sémantique, il faille définir un temps continu arborescent (Davis, 1994). De telles multi-algèbres pourraient être utiles dans le cadre de la simulation qualitative ou de l'interpolation de réseaux de contraintes.

Enfin, le cadre des multi-algèbres spatio-temporelles ne s'applique pas à la continuité sans *état* intermédiaire (section 3.3.4). Dans ce contexte, l'appartenance des bornes des intervalles n'est pas connue. Cette incertitude n'est pas représentable dans notre cadre. Il faut considérer une structure algébrique plus générale que les multi-algèbres. Notons toutefois, d'une part, que toutes les solutions des séquences sur intervalles sont sans état intermédiaire. D'autre part, dans le cadre de la simulation qualitative ou dans le cadre de l'interpolation de réseaux de contraintes, il n'y a *a priori* pas de raison de considérer la continuité sans état intermédiaire à la place des partitions du temps classiques (c'est-à-dire à la place des séquences sur intervalles).

Pour conclure, nous nous intéressons aux problèmes ouverts liés aux séquences temporelles et à la continuité. D'une part, de nombreuses questions restent ouvertes concernant les topologies des

régions. En particulier, la topologie correspondant à la continuité des régions du sens commun n'a pas été déterminée. Par exemple, plusieurs topologies différentes donnent le graphe de voisinage intuitif de RCC_8 . De manière générale, il faudrait caractériser et classifier les différentes topologies des régions. Peut-être y a-t-il différentes notions de continuité physiquement raisonnables pour les régions et qu'elles correspondent à des régions de natures différentes ?

D'autre part, l'interpolation de réseaux de contraintes n'a pas été étudiée en profondeur. Une perspective de recherche serait d'identifier des sous-classes ou des critères garantissant l'existence d'une séquence interpolatrice et une meilleure borne maximale pour la longueur d'interpolation. Il faudrait également déterminer des sous-classes pour lesquelles on peut décider de l'interpolation en temps polynomial, mais également pour lesquelles on peut déterminer la séquence interpolatrice en temps polynomial lorsqu'elle existe. Une question annexe est celle de l'utilisation de telles sous-classes traitables pour améliorer significativement la résolution des cas intraitables.

Enfin, le problème de la minimalité n'a pas été étudié dans le contexte des séquences temporelles, ni ses potentielles applications concernant en particulier la simulation qualitative et l'interpolation de réseaux de contraintes.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Bilan

Les travaux menés dans cette thèse se positionnent sur plusieurs axes, comme la décision de la cohérence, les combinaisons de formalismes, le raisonnement spatio-temporel et le raisonnement multi-échelle. Nous passons en revue les principales contributions.

Généralisation de la définition de formalisme qualitatif de Ligozat et Renz

Nous avons généralisé la définition de formalisme qualitatif de Ligozat et Renz afin d'inclure les formalismes dont les relations basiques ne sont pas exhaustives ou qui ne possèdent pas d'égalité sur \mathcal{U} , puisque ces formalismes sont importants dans le cadre des combinaisons. Nous avons abordé plusieurs exemples tels que le formalisme QS mais également les formalismes définis à une échelle et les relations temporalisées sur un intervalle, que nous avons introduits au cours de cette thèse. Notons que le raisonnement dans ce cadre généralisé est identique à celui de l'approche de Ligozat et Renz, puisqu'il est basé sur la même structure algébrique, c'est-à-dire une algèbre de relation non associative.

De nouvelles extensions et combinaisons de formalismes

Nous avons introduit plusieurs nouveaux formalismes qualitatifs, qui sont des formalismes séquentiels. SPIC^G permet de raisonner dans le contexte d'informations temporelles multi-échelles, à des échelles non nécessairement totalement ordonnées, portant sur des points et des intervalles, même lorsque le type de ces entités n'est pas connu à certaines échelles. TRCC_{8t} permet de raisonner, de manière complète, sur les séquences temporelles topologiques à propos de régions de taille constante. À notre connaissance, un tel type de séquences temporelles n'a été ni proposé, ni étudié dans la littérature. TRCC_{8t} et plus généralement les formalismes temporalisés sans contrainte de transition $T\mathcal{F}^c + \hat{\mathcal{F}}^c$ permettent de raisonner dans le contexte de séquences de descriptions temporellement éloignées mais dépendantes par la préservation de caractéristiques. Nous avons également abordé leur application dans le contexte de l'interpolation de réseaux de contraintes pour décider de l'interpolabilité. Le formalisme TRCC_{8t} , en particulier, est très intéressant puisque nous avons montré qu'il possède des sous-classes traitables de grande taille.

Formalisation des sémantiques des raisonnements multi-échelle et spatio-temporel

Nous avons défini une sémantique formelle pour le raisonnement temporel multi-échelle et pour le raisonnement spatio-temporel. Plus précisément, nous avons formalisé les relations définies à une échelle temporelle, les relations définies sur un intervalle et les relations de caractéristiques. Ces trois types de relations constituent des changements de sémantique de relations différents.

Dans le cadre spatio-temporel, nous avons également généralisé la sémantique des graphes de transition de Galton en nous plaçant dans le cadre général de la continuité des espaces topologiques. En outre, nous avons formalisé le concept de dynamique. Nous nous sommes intéressés à

la dynamique générale, aux dynamiques de la préservation de caractéristiques et en particulier à la dynamique de la préservation de la taille.

Dans le cadre multi-échelle, nous avons défini deux sémantiques pour les descriptions multi-échelles : celle des échelles connues (calendrier Grégorien, ...) et celle des échelles indéterminées, intervenant dans le langage naturel. La formalisation de la sémantique du cadre multi-échelle nous a permis de déterminer les conditions d'application des opérateurs de conversion d'Euzenat, à savoir la satisfaction des relations *plus fin* et *plus grossier* du cadre de Bettini *et al.*

Cadre général pour les combinaisons de type intégration lâche

Nous avons proposé un cadre formel unificateur pour représenter des connaissances et raisonner dans le contexte des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles, mais également pour étudier ces différentes combinaisons. Notre cadre se base sur les multi-algèbres, la structure commune de ces combinaisons.

Ce cadre généralise proprement le cadre classique. Les concepts du cadre classique s'appliquent ou se généralisent de manière transparente. Par exemple, une description est un réseau unique dont les relations sont des m -uplets de relations classiques et le mécanisme d'inférence est toujours la clôture algébrique, qui a été généralisée. De plus, le cadre des multi-algèbres préserve la plupart des propriétés du cadre classique. Par exemple, si les scénarios algébriquement clos sont cohérents, alors le problème de décision de la cohérence est dans NP et on peut décider la cohérence par séparation et évaluation en utilisant la clôture algébrique.

Cependant, contrairement au cadre classique, les relations des multi-algèbres ne sont pas toutes cohérentes. La décision de la cohérence des relations est ainsi un nouveau problème.

Étude de la décision de la cohérence du raisonnement multi-échelle

Nous avons étudié en profondeur le raisonnement temporel multi-échelle qualitatif, en particulier dans le cadre d'échelles indéterminées. Nous avons montré que pour décider la cohérence il n'est pas suffisant de convertir les informations à l'échelle la plus fine et de décider ensuite la cohérence à cette échelle. Nous avons montré plus précisément que le problème de décision de la cohérence est NP-complet, même pour le calcul des points multi-échelle. Nous avons également prouvé que la décision de la cohérence (avec des échelles indéterminées, dans le contexte des points, des intervalles et des entités temporelles) peut être effectuée algébriquement – en utilisant la clôture algébrique qui permet de raisonner à toutes les échelles et entre toutes les échelles simultanément – puisque les scénarios algébriquement clos sont cohérents.

Cadre général pour les séquences temporelles

Nous avons proposé un cadre général, basé sur les multi-algèbres, afin de raisonner à propos des séquences temporelles dans le contexte de dynamiques complexes. Nous avons défini les multi-algèbres des formalismes qualitatifs temporalisés par une dynamique quelconque dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire et des partitions du temps. Nous avons en particulier montré que le raisonnement est complet dans le cadre du calcul des points temporalisé sans relation intermédiaire et sur intervalles. La clôture algébrique peut ainsi être utilisée pour décider la cohérence de ces séquences temporelles par séparation et évaluation.

Nous nous sommes ensuite focalisés sur la préservation des caractéristiques. Nous avons formalisé les multi-algèbres permettant de raisonner à la fois avec des informations dynamiques (les relations entre les entités à chaque instant) et avec des informations statiques (les relations des caractéristiques préservées des entités). Ces multi-algèbres permettent d'avoir un raisonnement plus précis, même lorsque les relations entre caractéristiques ne sont pas connues. Elles peuvent notamment permettre d'obtenir la complétude du raisonnement, pour certains formalismes et pour certaines relations de caractéristiques. C'est par exemple le cas pour TRCC_{8t} qui infère les relations de taille.

Amélioration des performances computationnelles du raisonnement spatio-temporel

L'approche des multi-algèbres spatio-temporelles est plus performante computationnellement que les approches de l'état de l'art. D'une part, la propagation des contraintes a une meilleure complexité. D'autre part, le facteur de branchement de la méthode de séparation et évaluation est plus petit. Enfin, l'utilisation des multi-algèbres dans le cadre de la simulation qualitative et de l'interpolation de réseaux de contraintes permet de diminuer significativement le nombre d'états à analyser pour résoudre ces tâches spatio-temporelles.

Résultats de traitabilité

Nous avons déterminé plusieurs résultats de traitabilité généraux dans le cadre des multi-algèbres. Ils peuvent ainsi s'appliquer dans le contexte des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles. Nous avons en particulier montré deux théorèmes de traitabilité.

D'une part, le théorème de découpage identifie des conditions garantissant qu'une combinaison de sous-classes traitables est elle-même traitable. Il se base sur le concept de scénarisabilité, critère de traitabilité du cadre classique que nous avons introduit.

D'autre part, le théorème d'affinement fournit des conditions assurant qu'une sous-classe hérite la traitabilité d'une sous-classe traitable plus petite, en adaptant la technique classique de réduction par affinement.

Ces deux théorèmes sont complémentaires : leur utilisation combinée permet d'identifier des sous-classes de plus grande taille. Nous avons également identifié plusieurs conditions plus fortes, telles que la sur-distributivité des opérateurs, simplifiant l'application de ces théorèmes. Nous avons par ailleurs proposé la technique de l'affaiblissement afin d'augmenter la portée de ces théorèmes.

Tous ces résultats nous ont permis de retrouver les sous-algèbres traitables de la combinaison taille-topologie STC, mais également d'identifier toutes les sous-algèbres maximales pour la traitabilité du formalisme spatio-temporel TRCC_{8t} .

7.2 Perspectives

Nous nous intéressons maintenant aux principales perspectives de recherche ouvertes par ces travaux.

Étude des formalismes temporalisés

Plusieurs problématiques importantes restent ouvertes concernant les séquences temporelles.

La complétude de TRCC_{8p} et celle de $\text{TRCC}_{8p,t}$ sont des questions centrales. En effet, celle-ci légitimerait l'utilisation des deux graphes de voisinage de RCC_8 dans le cadre des séquences temporelles et des formalismes spatio-temporels d'expressivité supérieure. De plus, l'identification d'une preuve formelle de la validité de ces graphes de voisinage pour des régions quelconques est également un problème ouvert. Une piste de recherche pour résoudre ce problème consisterait à étudier la topologie des relations topologiques, ce qui s'inscrit plus généralement dans l'étude de la topologie des régions, domaine actuel de recherche.

Enfin, le cadre spatio-temporel devra sûrement être étendu, pour raisonner sur les séquences temporelles dans le cadre de dynamiques spécifiques, en particulier *temporellement inhomogènes*, en introduisant de nouvelles multi-algèbres spatio-temporelles afin d'obtenir la complétude.

Optimisation des algorithmes pour décider la cohérence

Plusieurs améliorations algorithmiques sont possibles pour décider la cohérence.

D'une part, la clôture algébrique peut être calculée plus efficacement dans le cadre de certaines multi-algèbres. En particulier, pour plusieurs familles de séquences temporelles, la clôture algébrique peut être calculée en $O(m \cdot n^3)$. Il y a un gain d'un facteur m , la longueur de la séquence, ce qui est significatif dans le cadre spatio-temporel.

D'autre part, différentes techniques de séparation et évaluation peuvent être développées dans le cadre des multi-algèbres. Une perspective de recherche est de comparer ces différentes possibilités. L'une d'elle est peut-être plus performante computationnellement que les autres.

Enfin, la clôture algébrique devrait être parallélisable de façon à accélérer significativement son calcul (en parallélisant la composition de chaque réseau N_i).

Classes traitables du raisonnement multi-échelle et spatio-temporel

Plusieurs sous-classes algébriquement traitables peuvent être identifiées dans le cadre temporel multi-échelle qualitatif. Par exemple, les relations préconvexes de SIC^G , lorsque les échelles considérées sont totalement ordonnées, sont traitables (dans le contexte d'échelles qualitatives ou pour certains systèmes de discrétisation).

Dans le cadre spatio-temporel, nous conjecturons que nous pouvons identifier des sous-algèbres traitables pour les temporalisations de RCC_8 : $TRCC_{8p}$ et $TRCC_{8p,t}$, en particulier. Si cette conjecture se confirme, ce serait un résultat très important puisqu'il n'y a pas de sous-algèbres traitables pour le calcul des points. L'identification de méthodes performantes dans le cadre spatio-temporel est un grand enjeu pour l'application de ces techniques.

Raisonnement multi-échelle spatial et raisonnement multi-échelle général

Le raisonnement spatial multi-échelle est un enjeu important et complexe. Il permet de faire le lien entre les informations en domaine continu et les informations en domaine discret (comme les images numériques), mais également de raisonner avec des relations telles que « être presque en contact » ou « être un peu au sud ». Celui-ci est un enjeu complexe pour plusieurs raisons. D'une part, il faut généraliser les formalismes pour raisonner avec des types différents, plus nombreux et compliqués que dans le cadre temporel. D'autre part, les conversions dépendent des types d'échelles considérées. Enfin, deux définitions de « relation définie à une échelle » sont possibles. Tous ces paramètres ont une influence sur la complexité et la complétude du raisonnement. Leur pertinence dépend également du contexte applicatif.

En outre, un cadre général sur les formalismes qualitatifs multi-échelles devrait être développé, notamment pour unifier les deux définitions de relation à une échelle et les raisonnements associés.

Étude des autres formes de combinaison de type intégration lâche

La portée du cadre des multi-algèbres va au-delà des intégrations lâches, des formalismes multi-échelles et des séquences temporelles. En effet, ce cadre inclut le raisonnement sur les informations qualitatives de nature 2D et 3D et le raisonnement dans le contexte d'informations associées à des systèmes de coordonnées différents. Il inclut plus généralement les combinaisons de ces différentes familles : les séquences temporelles d'intégrations lâches, les formalismes multi-échelles avec informations 2D et 3D, etc. En fait, les multi-algèbres spatio-temporelles avec relations de caractéristiques constituent une autre forme de combinaison entre séquences temporelles et intégrations lâches. De telles combinaisons seraient *a priori* suffisamment expressives pour un certain nombre d'applications. Elles auraient également de bonnes performances computationnelles et posséderaient des sous-classes potentiellement traitables.

Étude de la minimalité

Le problème de la minimalité s'étend au cadre des multi-algèbres. Des résultats de complexité sont en particulier identifiables, permettant par exemple de déterminer des sous-classes *minimales* dans le contexte des séquences temporelles. À notre connaissance, ce problème n'a pas du tout été étudié, que cela soit dans le contexte des intégrations lâches, des séquences temporelles ou des formalismes multi-échelles. Le problème de la minimalité dans le cadre des séquences temporelles permet de faire de la prédiction et devrait avoir des applications, en particulier, dans le contexte de la simulation qualitative et de l'interpolation de réseaux de contraintes. Dans le cadre multi-échelle, il permet de déduire à chaque échelle les informations les plus précises possibles, connaissant les informations aux autres échelles.

Cadre unifié pour des combinaisons plus expressives

Le cadre des multi-algèbres est restreint à certains types de combinaisons. On peut cependant développer un cadre unificateur, basé sur une généralisation des multi-algèbres. Celui-ci permettrait de raisonner dans le contexte de séquences temporelles dont l'ordre des instants et des intervalles est incertain (c'est-à-dire caractérisé par des relations de PC / PIC) ainsi que dans le contexte de descriptions multi-échelles dont les relations de précision entre les échelles sont incertaines (relations d'ordre partiel (Ligozat *et al.*, 2004)).

Applications des raisonnements spatio-temporel et multi-échelle

Plusieurs directions de recherche pour appliquer les formalismes spatio-temporels et multi-échelles sont envisageables.

Concernant le raisonnement spatio-temporel, une étude approfondie de la simulation qualitative et de l'interpolation de réseaux de contraintes basée sur les multi-algèbres devrait être effectuée, notamment afin d'obtenir une résolution performante de ces problèmes. Plus généralement, le raisonnement sur les séquences temporelles devrait avoir de nombreuses applications dans le cadre de la planification. Il devrait, par exemple, permettre de décider s'il est possible de joindre un état à partir d'un autre, de déterminer des heuristiques pour accélérer la résolution quantitative (à l'instar de l'approche de Westphal *et al.* (Westphal *et al.*, 2011)) et de résoudre des problèmes de planification purement qualitatifs. Il devrait également avoir d'autres applications dans le cadre de l'analyse de scènes (Bhatt *et Dylla*, 2009), de la prédiction d'événements, etc.

Concernant le raisonnement multi-échelle, les applications se positionnent dans le cadre du traitement du langage naturel, afin de gérer des informations imprécises telles que « juste avant », « presque en contact », « à peu près égaux », etc., mais également dans le contexte de la fusion d'informations qualitatives. La fusion d'informations cherche à combiner des informations contradictoires. Cette contradiction peut provenir de la différence de précision des informations. Dans un tel cas de figure, le raisonnement multi-échelle, et plus particulièrement le calcul du réseau minimal des multi-algèbres, peut permettre d'effectuer une fusion.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Preuves complémentaires de la cohérence des scénarios algébriquement clos de TRCC_{8t}

Dans cette section, nous complétons la preuve de la proposition 6.6.1. Nous montrons que la taille de chaque évolution de région f_i de la solution est constante au cours du temps, que les relations des réseaux N_s sont satisfaites aux instants τ_s et que la solution est bien continue.

A.1 Évolution continue et préservation de la taille

Nous commençons par montrer que les régions évoluent continûment et que leur taille est préservée au cours du temps, en nous basant sur le fait que les sous-régions de chaque région sont disjointes deux à deux.

Lemme A.1.1. *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $t \in [\tau_1, \tau_m]$. Les sous-régions de $f_i(t)$ sont déconnectées deux à deux.*

Démonstration. Nous montrons qu'à chaque instant $t \in [\tau_1, \tau_m]$, les sous-régions de chaque région $f_i(t)$ sont disjointes (les boules sont des régions et sont donc fermées). Puisque l'état de la solution à un instant $t \in [\tau_1, \tau_m]$ est obtenu à partir de la configuration intermédiaire, il suffit de montrer que durant les déplacements permettant de passer de la configuration intermédiaire à la configuration de chaque instant τ_k (devant satisfaire N_k), les sous-régions de chaque région restent disjointes (les sous-régions de chaque région sont disjointes dans la configuration intermédiaire, elles sont plus précisément dans des zones différentes). Nous montrons ainsi que durant chaque déplacement et suite à chaque déplacement, les sous-régions de chaque région restent disjointes.

D'une part, par construction, chaque sous-région déplacée est déplacée vers une zone ne contenant aucune sous-région de sa région. En effet, durant l'étape 1, il y a au plus deux sous-régions dans une zone et elles appartiennent à des régions différentes. Durant l'étape 2, on ne déplace pas de sous-région d'une région dans une zone s'il y en a déjà une. D'autre part, chaque sous-région déplacée est déplacée (une par une) entre les zones : chaque sous-région déplacée est disjointe à tout moment de toutes les zones sauf celle de départ et celle d'arrivée, puisque les zones sont suffisamment éloignées les unes des autres. Enfin, puisque les différentes zones sont suffisamment grandes, elles contiennent intégralement les sous-régions s'y trouvant. En effet, chaque zone $Z(P)$, de la sous-région P , est suffisamment grande pour contenir une boule de rayon 3^{n+1} centrée sur le centre de la position initiale de P . Plus précisément, puisque toute sous-région placée dans cette zone est soit centrée sur le centre de P soit centrée sur un point du bord de P soit en contact extérieur ou intérieur de P , cette sous-région est bien intégralement dans cette zone (son rayon est inférieur ou égal à 3^n). Par conséquent, à chaque instant d'un déplacement, la sous-région déplacée est disjointe de toutes les autres sous-régions de sa région. Ainsi, à chaque instant, toutes les sous-régions d'une région sont disjointes. \square

Proposition A.1.2. *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. L'évolution de région f_i est une fonction continue sur $[\tau_1, \tau_m]$ à valeurs dans \mathfrak{R}_m : $f_i \in \sqrt{\mathcal{C}_{\text{RCC}_{8,m}}^{[\tau_1, \tau_m]}}$, où l'ensemble des régions \mathfrak{R}_m est doté respectivement de la distance de Hausdorff, de la distance de Hausdorff duale et de la distance de la différence symétrique.*

Démonstration. Nous dotons \mathfrak{R}_m de la topologie engendrée par la distance de Hausdorff (resp. de la distance de Hausdorff duale ; resp. de la distance de la différence symétrique).

Les sous-régions sont déplacées par translation successive dans \mathbb{R}^d . L'évolution de chaque sous-région est donc continue : la fonction f_{P_i} de $[\tau_1, \tau_m]$ dans \mathfrak{R}_m qui associe à chaque instant t de $[\tau_1, \tau_m]$ l'état de la sous-région P_i à l'instant t est une fonction continue (Davis, 2001). La fonction qui associe à un ensemble fini de régions déconnectées deux à deux leur union est une fonction continue dans le cadre de la distance de Hausdorff (resp. de la distance de Hausdorff duale ; resp. de la distance de la différence symétrique) (Davis, 2001). Étant donné que la composée de fonctions continues est une fonction continue (Queffélec, 2016), qu'une région est l'union de ses sous-régions, et que celles-ci sont déconnectées deux à deux à tout instant (lemme A.1.1), la fonction f_i qui à t associe $f_i(t) = \bigcup_{P_i \text{ de } x_i} f_{P_i}(t)$ est donc une fonction continue. \square

Proposition A.1.3. *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La taille de l'évolution de région f_i est constante au cours du temps.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous montrons maintenant que pour tout $t \in [\tau_1, \tau_m]$, $\mathbf{t}(f_i(t)) = T_i$ avec $T_i \in \mathbb{R}_*^+$. Par définition, à chaque instant $t \in [\tau_1, \tau_m]$, $f_i(t)$ est l'union des mêmes sous-régions. La taille de chacune de ses sous-régions est constante au cours du temps : elles sont, à tout instant, des boules de rayon $3^{\text{rang}(x_i)}$. Puisque les sous-régions de $f_i(t)$ sont disjointes (lemme A.1.1), la taille de $f_i(t)$, $\mathbf{t}(f_i(t))$, est la somme des tailles de ses sous-régions (\mathbf{t} est une mesure ; définition 6.2.9). Ainsi, pour tout $t \in [\tau_1, \tau_m]$, $\mathbf{t}(f_i(t)) = T_i$ avec T_i la somme des tailles de ses sous-régions. La taille de l'évolution de région f_i est ainsi constante au cours du temps. \square

A.2 Satisfaction des relations

Nous montrons maintenant la satisfaction des relations du réseau N_s à l'instant τ_s . Nous utilisons pour cela plusieurs lemmes décrivant les propriétés de la solution en fonction des relations du réseau N_s . Ces lemmes découlent directement de la procédure de construction de la solution et du fait que N est algébriquement clos (voir la table de composition de RCC₈, table 2.9).

Remarquons pour commencer les relations devant être satisfaites lorsqu'une sous-région se trouve dans une certaine zone.

Lemme A.2.1. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, k, l \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si une sous-région de x_i se trouve dans la zone $Z(P_k^l)$, nous avons les implications suivantes :*

- Si $N_s^{x_k x_l} \in \{\text{EC}, \text{PO}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ou alors $N_s^{x_l x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;
- Si $N_s^{x_k x_l} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;
- Si $N_s^{x_k x_l} \in \{\text{DC}, \overline{\text{NTPP}}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Si une sous-région de x_i se trouve dans la zone $Z(P_k^k)$, alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Démonstration. Nous commençons par montrer la première implication : nous montrons que si $N_s^{x_k x_l} \in \{\text{EC}, \text{PO}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ou alors $N_s^{x_l x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Si une sous-région de x_i est dans la zone $Z(P_k^l)$, c'est pour recouvrir une sous-région, recouvrant elle-même potentiellement une sous-région, jusqu'à atteindre x_k ou x_l . Ainsi, plus formellement, une sous-région de x_i est placée dans cette zone pour au moins une des quatre raisons suivantes :

- $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;
- $N_s^{x_l x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;
- il existe une suite de variables de N $\{w_q\}_{q=1}^Q$ telle que $N_s^{x_k w_1} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, $N_s^{w_1 w_2} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$..., $N_s^{w_{Q-1} w_Q} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{w_Q x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;
- il existe une suite de variables de N $\{w_q\}_{q=1}^Q$ telle que $N_s^{x_l w_1} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, $N_s^{w_1 w_2} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$..., $N_s^{w_{Q-1} w_Q} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{w_Q x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$;

Puisque N_s est clos par composition, si nous sommes dans le troisième cas, nous avons $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \diamond \dots \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et si nous sommes dans le quatrième, nous avons $N_s^{x_i x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \diamond \dots \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, nous avons soit $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ soit $N_s^{x_i x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Nous montrons maintenant que si $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. De manière analogue, nous montrons que soit $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ soit $N_s^{x_i x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Plaçons nous dans ce second cas. Puisque N_s est clos par composition, $N_s^{x_k x_i} \in N_s^{x_k x_l} \diamond N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, dans les deux cas, nous avons $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Nous montrons que si $N_s^{x_k x_l} \in \{\text{DC}, \overline{\text{NTPP}}\}$ alors $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Il n'y a que la sous-région P_k^l dans la zone $Z(P_k^l)$ avant le début de l'étape 2. Ainsi, si une sous-région de x_i est dans la zone $Z(P_k^l)$, c'est pour recouvrir une sous-région, recouvrant elle-même potentiellement une sous-région, jusqu'à atteindre nécessairement x_k . Par un raisonnement similaire, nous déduisons que $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Le cas de la zone $Z(P_k^k)$ est analogue. □

Remarque A.2.2. Chaque zone $Z(P_k^l)$ avec $N_s^{x_k x_l} = \{\overline{\text{TPP}}\}$ est vide.

Lemme A.2.3. Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{DC}\}$. Aucune sous-région de $f_i(\tau_s)$ n'est dans la même zone qu'une sous-région de $f_j(\tau_s)$.

Démonstration. Nous prouvons cette propriété par contraposée. Nous montrons que si une sous-région de $f_i(\tau_s)$ est dans la même zone qu'une sous-région de $f_j(\tau_s)$, alors $N_s^{x_i x_j} \neq \{\text{DC}\}$. Il y a de nombreux cas à analyser (les cas a, b, c, d, e et f de la figure 6.2). Pour chacun de ces cas, la preuve est analogue et se base sur le lemme A.2.1. Nous montrons le cas e et ensuite le cas a et b.

Cas e : la zone est $Z(P_k^l)$ avec $N_s^{x_k x_l} = \{\text{TPP}\}$ pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Supposons que $k \neq i, k \neq j, l \neq i$ et $l \neq j$. Dans les autres cas, la preuve est plus simple. Si j est dans cette zone, c'est que nous avons $N_s^{x_k x_j} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ (lemme A.2.1). Si i est dans cette zone, c'est que nous avons $N_s^{x_k x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Puisque N est clos par composition, nous avons :

$$N_s^{x_i x_j} \subseteq N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} = \mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}.$$

Nous montrons maintenant le cas a et b : la zone est $Z(P_k^l)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $N_s^{x_l x_k} = \{\text{PO}\}$. Supposons également $k \neq i, k \neq j, l \neq i$ et $l \neq j$. Dans les autres cas, la preuve est plus simple.

Par le lemme A.2.1, nous avons quatre cas à analyser :

$$- N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \text{ et } N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} :$$

Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_l x_i} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$.

$$- N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \text{ et } N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} :$$

Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$.

$$- N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \text{ et } N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} :$$

Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_l x_i} \diamond N_s^{x_l x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{PO}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$.

$$- N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} \text{ et } N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\} :$$

Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{PO}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$. □

Proposition A.2.4. Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si $N_s^{x_i x_j} = \{\text{DC}\}$ alors $f_i(\tau_s) \text{ DC } f_j(\tau_s)$.

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts et $s \in \{1, \dots, m\}$ tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{DC}\}$. Par le lemme A.2.3, aucune sous-région de $f_i(\tau_s)$ n'est dans la même zone qu'une sous-région de $f_j(\tau_s)$. Par conséquent, toutes les sous-régions de $f_i(\tau_s)$ sont disjointes de chacune des sous-régions de $f_j(\tau_s)$. Ainsi, $f_i(\tau_s) \text{ DC } f_j(\tau_s)$. □

Lemme A.2.5. Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$. Une sous-région de $f_i(\tau_s)$ est dans la même zone qu'une sous-région de $f_j(\tau_s)$ seulement si cette zone est une des zones :

- $Z(P_i^j)$ (si $i < j$)
- $Z(P_j^i)$ (si $j < i$)
- $Z(P_l^i)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $i < l$ et $N_s^{x_l x_i} = \{\text{EC}\}$.
- $Z(P_l^i)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $l < i$ et $N_s^{x_l x_i} = \{\text{EC}\}$.
- $Z(P_l^j)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $j < l$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$.
- $Z(P_l^j)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $l < j$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$.
- $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $l < k$, $N_s^{x_l x_k} = \{\text{EC}\}$, $N_s^{x_i x_l} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{EC}\}$.
- $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $l < k$, $N_s^{x_l x_k} = \{\text{EC}\}$, $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$.

Démonstration. Nous montrons que les seules zones possibles sont celles de l'énoncé. Pour cela, nous analysons tous les autres cas et montrons qu'ils ne peuvent arriver. Nous commençons par montrer que les autres zones utilisées pour imposer EC durant l'étape 1 ne peuvent arriver.

Remarquons pour commencer que les zones suivantes sont vides par construction :

- $Z(P_l^i)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $i > l$ et $N_s^{x_l x_i} = \{\text{EC}\}$:

En effet, P_l^i a été déplacée vers la zone $Z(P_l^i)$;

- $Z(P_l^i)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $l > i$ et $N_s^{x_l x_i} = \{\text{EC}\}$;
- $Z(P_l^j)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $j > l$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$;
- $Z(P_l^j)$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $l > j$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$;
- $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $l > k$ et $N_s^{x_l x_k} = \{\text{EC}\}$.

Nous supposons maintenant que nous sommes dans une zone $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $l < k$ et $N_s^{x_l x_k} = \{\text{EC}\}$, et nous montrons que nous avons soit $N_s^{x_i x_l} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{EC}\}$, soit $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$. Par le lemme A.2.1, nous avons $N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ou $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Par ce même lemme, nous avons également $N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ou $N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Nous avons donc quatre possibilités :

- $N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

Ce cas n'est pas possible. En effet, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Cependant, $\{\text{EC}\} \notin \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ce qui contredit $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$.

- $N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

D'une part, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_k} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_k} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{EC}\} = \{\text{EC}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$. D'autre part, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_k} \in N_s^{x_i x_j} \diamond N_s^{x_j x_k} = \{\text{EC}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} = \{\text{DC}, \text{EC}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$.

De manière analogue, nous avons $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$.

- $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

D'une part, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_l} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_l} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{EC}\} = \{\text{EC}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$. D'autre part, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_l} \in N_s^{x_i x_j} \diamond N_s^{x_j x_l} = \{\text{EC}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} = \{\text{DC}, \text{EC}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_l} = \{\text{EC}\}$.

De manière analogue, nous avons $N_s^{x_k x_j} = \{\text{EC}\}$.

- $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

Ce cas n'est pas possible. En effet, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Cependant, $\{\text{EC}\} \notin \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ ce qui contredit $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$.

Par conséquent, nous n'avons que deux cas. Le premier implique que $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$. Le second implique que $N_s^{x_i x_l} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{EC}\}$.

Ainsi, les zones $Z(P_l^k)$ utilisées pour imposer EC durant l'étape 1, autres que celles de l'énoncé, ne sont pas possibles.

Nous montrons maintenant que nous ne pouvons pas avoir une sous-région de $f_i(\tau_s)$ et une sous-région de $f_j(\tau_s)$ dans une zone $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $N_s^{x_l x_k} = \{\text{PO}\}$. Supposons également $k \neq i$, $k \neq j$, $l \neq i$ et $l \neq j$. Dans les autres cas, la preuve est plus simple.

Par le lemme A.2.1, nous avons quatre cas à analyser :

— $N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

Ce cas n'est effectivement pas possible. En effet, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_l x_j} \in N_s^{x_l x_i} \diamond N_s^{x_i x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Cependant, $\{\text{EC}\} \notin \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, ce qui contredit $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$.

— $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

De manière analogue, ce cas n'est également pas possible.

— $N_s^{x_l x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_k x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

Ce cas n'est pas possible. En effet, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_l x_i} \diamond N_s^{x_l x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{PO}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCCS}} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$, ce qui contredit $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$.

— $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$:

Ce cas n'est pas possible. En effet, puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_l x_k} \diamond N_s^{x_k x_i} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{PO}\} \diamond \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Ainsi, $N_s^{x_i x_j} \in \mathcal{B}_{\text{RCCS}} \setminus \{\text{DC}, \text{EC}\}$, ce qui contredit $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$.

La preuve que l'on ne peut avoir les autres zones est analogue. \square

Proposition A.2.6. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$ alors $f_i(\tau_s) \text{ EC } f_j(\tau_s)$.*

Démonstration. Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{EC}\}$. Nous montrons que si une sous-région P_i de $f_i(\tau_s)$ est dans la même zone qu'une sous-région P_j de $f_j(\tau_s)$, alors nous avons $P_i \text{ EC } P_j$. Soient P_i une sous-région de $f_i(\tau_s)$ et P_j une sous-région de $f_j(\tau_s)$ étant dans une même zone. Par le lemme A.2.5, nous avons plusieurs cas à analyser :

— Cas de la zone $Z(P_i^j)$: par construction, nous avons $P_i \text{ EC } P_j$.

— Cas de la zone $Z(P_l^k)$ pour $l, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts satisfaisant $l < k$, $N_s^{x_l x_k} = \{\text{EC}\}$, $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$ et $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$:

Par construction (nous sommes dans le cas spécial), P_i a été placée de façon à ce que son point le plus à droite soit sur le point d'interaction (puisque $N_s^{x_i x_k} = \{\text{EC}\}$) et P_j a été placé de façon à ce que son point le plus à gauche soit placé sur le point d'interaction (puisque $N_s^{x_l x_j} = \{\text{EC}\}$). Nous avons ainsi $P_i \text{ EC } P_j$.

— Les autres cas sont analogues.

Puisque les sous-régions de chaque région sont disjointes (lemme A.1.1), nous avons $f_i(\tau_s) \text{ EC } f_j(\tau_s)$ (l'union des bords des sous-régions d'une région constitue le bord de cette région). \square

Lemme A.2.7. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{PO}\}$. Aucune sous-région de $f_i(\tau_s)$ ne se trouve dans la zone $Z(P_j^j)$ où se trouve toujours P_j^j , la sous-région de $f_j(\tau_s)$.*

Démonstration. Nous prouvons cette propriété par contraposée. Par le lemme A.2.1, si une sous-région de $f_i(\tau_s)$ se trouve dans la zone $Z(P_j^j)$ nous avons $N_s^{x_j x_i} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Nous avons donc $N_s^{x_i x_j} \in \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$. Par contraposée, si $N_s^{x_i x_j} \notin \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$, alors aucune sous-région de $f_i(\tau_s)$ ne se trouve dans la zone $Z(P_j^j)$. \square

Proposition A.2.8. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si $N_s^{x_i x_j} = \{\text{PO}\}$ alors $f_i(\tau_s) \text{ PO } f_j(\tau_s)$.*

Démonstration. Puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{PO}\}$, nous avons par construction $P_i^j \in \{\text{EQ}, \text{NTPP}\} P_j^i$. Les régions $f_i(\tau_s)$ et $f_j(\tau_s)$ contiennent donc une même région. Par le lemme A.2.7, $Z(P_i^i)$ est disjoint de $f_j(\tau_s)$ et $Z(P_j^j)$ est disjoint de $f_i(\tau_s)$. Ainsi, nous avons $f_i(\tau_s) \text{ PO } f_j(\tau_s)$. \square

Lemme A.2.9. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Le rayon de chaque sous-région de x_j est plus de trois fois plus grand que le rayon de chaque sous-région de la région x_i .*

Démonstration. Puisque N est algébriquement clos et que $N_s^{x_i x_j} \in \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, nous avons $N_{m+1}^{x_i x_j} = \{<\}$. Étant donné que les variables $\{x_k\}_{k=1}^n$ ont été ordonnées selon leur taille, nous avons $i < j$ ($\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$). De ce fait, par construction, le rayon de chaque sous-région de x_j est plus de trois fois plus grand que le rayon de chaque sous-région de la région x_i . \square

Lemme A.2.10. Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$. Si une sous-région P_j de $f_j(\tau_s)$ se trouve dans une même zone qu'une sous-région P_i de $f_i(\tau_s)$ alors $P_i \{ \text{TPP}, \text{NTPP} \} P_j$.

Démonstration. Il y a de nombreux cas à analyser (les cas a, b, c, d, e et f de la figure 6.2). Pour chacun de ces cas, la preuve est analogue. Nous montrons le cas e : la zone est $Z(P_k^l)$ avec $N_s^{x_k x_l} = \{\text{TPP}\}$ pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Nous avons à nouveau plusieurs cas à analyser :

- Le cas $k = j$ et $l = i$ (zone $Z(P_j^i)$) est impossible : on ne peut avoir $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ puisque N est clos par composition.
- Le cas $k = j$ et $l \neq i$ (zone $Z(P_j^l)$) est impossible.

En effet, puisque P_i est dans $Z(P_j^l)$, par le lemme A.2.1, nous avons $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, ce qui contredit l'hypothèse $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ car N est clos par inversion.

- Cas $k = i$ et $l = j$ (zone $Z(P_i^j)$) : nous avons $P_i \text{ TPP } P_j$.
- Cas $k = i$ et $l \neq j$ (zone $Z(P_i^l)$). Il y a deux cas à analyser en fonction de l'endroit où a été placée la sous-région P_i :
 - Cas $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$:

Nous sommes dans le deuxième cas spécial. La sous-région P_j a été placée de façon à avoir $P_i^l \text{ TPP } P_j \text{ TPP } P_i^l$. En effet, d'une part, leurs points les plus à droite sont situés au même endroit (le point d'interaction) et leurs centres sont alignés sur l'axe, par construction. Ces sous-régions sont ainsi imbriquées tangentiellement selon leur taille. D'autre part, le rayon de P_i^l est strictement inférieur au rayon de P_j , lui-même strictement inférieur à celui de P_i^l (par le lemme A.2.9 puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$). Nous avons ainsi $P_i^l \text{ TPP } P_j \text{ TPP } P_i^l$ et en particulier $P_i^l \text{ TPP } P_j$.

- Cas $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:
- Le centre de P_j a été placé sur le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i^l . De plus, le point le plus à droite de P_i^l est sur le point d'interaction. De ce fait, P_j contient intégralement et non tangentiellement P_i^l (voir la figure 6.2.e). Nous avons $P_i^l \text{ NTPP } P_j$.
- Cas $k \neq i, l = j$ (zone $Z(P_k^j)$) :

Puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, la sous-région P_i a été placée de façon à avoir $P_k^j \text{ TPP } P_i \text{ TPP } P_j^k$ (deuxième cas spécial).

- Cas $k \neq j$ et $l = i$ (zone $Z(P_k^i)$) :

Puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, nous n'avons donc pas $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}\}$. Nous ne sommes pas dans le cas spécial : le centre de P_j a été placé sur le point d'interaction auquel est tangent P_i^k . Puisque le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i^k (lemme A.2.9), nous avons $P_i^k \text{ NTPP } P_j$.

- Cas $k \neq i, l \neq j, k \neq j$ et $l \neq i$ (zone $Z(P_k^l)$). Il y a quatre cas à analyser en fonction de l'endroit où ont été placées les sous-régions P_i et P_j :
 - Cas $N_s^{x_i x_l} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$:

Par construction, le point le plus à droite des sous-régions P_i et P_j est centré sur le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, le rayon de P_i est strictement plus petit que P_j . De ce fait, nous avons donc $P_i \text{ TPP } P_j$.

- Cas $N_s^{x_i x_l} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:

Le point le plus à droite de P_i est donc sur le point d'interaction (cas spécial). Le centre de P_j est le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i . Nous avons donc $P_i \text{ NTPP } P_j$.

- Cas $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$: ce cas est impossible.

Puisque N_s est clos par composition, $N_s^{x_i x_k} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$ (lemme A.2.1) et $N_s^{x_k x_l} = \{\text{TPP}\}$, nous avons $N_s^{x_i x_l} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_l}$ et donc $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{NTPP}\}$. Or, $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$, d'où $N_s^{x_i x_l} \notin \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$.

Par conséquent, $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} \subseteq (\mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}) \diamond \overline{\text{TPP}}$. Cependant, $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ et $\{\text{TPP}\} \notin (\mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}) \diamond \overline{\text{TPP}}$, d'où la contradiction.

- Cas $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:

Par construction, les sous-régions P_i et P_j sont centrées sur le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$, le rayon de P_i est strictement plus petit que P_j . Nous avons donc $P_i \text{ NTPP } P_j$. □

Proposition A.2.11. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ alors $f_i(\tau_s)$ TPP $f_j(\tau_s)$.*

Démonstration. Par construction, dans chaque zone où se trouve une sous-région de $f_i(\tau_s)$, il y a une sous-région de $f_j(\tau_s)$ (les sous-régions ont été traitées dans l'ordre de leur taille). Par le lemme A.2.10, chaque sous-région de $f_i(\tau_s)$ est contenue dans une sous-région de $f_j(\tau_s)$: nous avons $f_i(\tau_s)$ TPP \cup NTPP $f_j(\tau_s)$. Par construction, nous avons P_i^j TPP P_j^i . Puisque les sous-régions de chaque région sont disjointes (lemme A.1.1), la région $f_i(\tau_s)$ est ainsi en contact intérieur avec $f_j(\tau_s)$. Ainsi, nous avons $f_i(\tau_s)$ TPP $f_j(\tau_s)$. \square

Lemme A.2.12. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts tels que $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$. Si une sous-région P_j de $f_j(\tau_s)$ se trouve dans une même zone qu'une sous-région P_i de $f_i(\tau_s)$ alors P_i {NTPP} P_j .*

Démonstration. La preuve est similaire au lemme A.2.10 (les cas P_i TPP P_j n'arrivent pas car N_s est clos par composition). Il y a ainsi plusieurs cas à analyser (les cas a, b, c, d, e et f de la figure 6.2). Dans chacun de ces cas, la preuve est également analogue. Nous montrons à nouveau le cas e : la zone est $Z(P_k^l)$ avec $N_s^{x_k x_l} = \{\text{TPP}\}$ pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Nous analysons les différents sous-cas :

- Le cas $k = j$ et $l = i$ (zone $Z(P_j^i)$) est impossible : on ne peut avoir $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$ puisque N est clos par composition.
- Le cas $k = j$ et $l \neq i$ (zone $Z(P_j^l)$) est impossible.

En effet, puisque P_i est dans $Z(P_j^l)$, par le lemme A.2.1, nous avons $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$, ce qui contredit l'hypothèse $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$ car N est clos par inversion.

- Le cas $k = i$ et $l = j$ (zone $Z(P_i^j)$) est impossible.

On ne peut avoir simultanément $N_s^{x_i x_j} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$.

- Cas $k = i$ et $l \neq j$ (zone $Z(P_i^l)$). Il y a deux cas à analyser en fonction de l'endroit où a été placée la sous-région P_i :

- Le cas $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$ est impossible.

Puisque N_s est clos par composition, $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}\}$. Or, $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\} \notin \{\text{TPP}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}\}$, d'où la contradiction.

- Cas $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:

Le centre de P_j a donc été placé sur le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$, le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i^l . De plus, le point le plus à droite de P_i^l est sur le point d'interaction. De ce fait, P_j contient intégralement et non tangentiellement P_i^l (voir la figure 6.2.e). Nous avons P_i^l NTPP P_j .

- Le cas $k \neq i, l = j$ (zone $Z(P_k^j)$) est impossible.

Par le lemme A.2.1, nous avons $N_s^{x_k x_i} = \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_j} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}\}$. Or, $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\} \notin \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\} \diamond \{\text{TPP}\}$, d'où la contradiction.

- Cas $k \neq j$ et $l = i$ (zone $Z(P_k^i)$) :

Puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$, nous n'avons donc pas $N_s^{x_j x_i} = \{\text{TPP}\}$. Nous ne sommes pas dans le cas spécial : le centre de P_j a été placé sur le point d'interaction auquel est tangent P_i^k . Puisque le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i^k (lemme A.2.9), nous avons P_i^k NTPP P_j .

- Cas $k \neq i, l \neq j, k \neq j$ et $l \neq i$ (zone $Z(P_k^l)$). Il y a quatre cas à analyser en fonction de l'endroit où ont été placées les sous-régions P_i et P_j :

- Le cas $N_s^{x_i x_l} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$ est impossible.

Puisque N_s est clos par composition, nous avons $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} = \{\text{TPP}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}\}$. Or, $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\} \notin \{\text{TPP}\} \diamond \{\overline{\text{TPP}}\}$, d'où la contradiction.

- Cas $N_s^{x_i x_l} = \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:

Par construction, le point le plus à droite de P_i est sur le point d'interaction (cas spécial). Par construction, le centre de P_j est le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$, le rayon de P_j est plus de trois fois plus grand que celui de P_i . Nous avons donc P_i NTPP P_j (voir la figure 6.2.e).

- Cas $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} = \{\text{TPP}\}$: ce cas est impossible.

Puisque N_s est clos par composition, $N_s^{x_i x_k} = \{\overline{\text{TPP}}, \overline{\text{NTPP}}\}$ (lemme A.2.1) et $N_s^{x_k x_l} = \{\text{TPP}\}$, $N_s^{x_i x_l} \in N_s^{x_i x_k} \diamond N_s^{x_k x_l}$, et donc $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{NTPP}\}$. Or, $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$, d'où $N_s^{x_i x_l} \notin \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}$. Par conséquent, $N_s^{x_i x_j} \in N_s^{x_i x_l} \diamond N_s^{x_l x_j} \subseteq (\mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}) \diamond \overline{\text{TPP}}$. Cependant, $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$ et $\{\text{NTPP}\} \notin (\mathcal{B}_{\text{RCC}_s} \setminus \{\text{TPP}, \text{NTPP}\}) \diamond \overline{\text{TPP}}$, d'où la contradiction.

— Cas $N_s^{x_i x_l} \neq \{\text{TPP}\}$ et $N_s^{x_j x_l} \neq \{\text{TPP}\}$:

Par construction, les sous-régions P_i et P_j sont centrées sur le point d'interaction. Par le lemme A.2.9, puisque $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$, le rayon de P_i est strictement plus petit que P_j . Nous avons donc $P_i \text{ NTPP } P_j$. □

Proposition A.2.13. *Soient $s \in \{1, \dots, m\}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Si $N_s^{x_i x_j} = \{\text{NTPP}\}$ alors $f_i(\tau_s) \text{ NTPP } f_j(\tau_s)$.*

Démonstration. Par construction, dans chaque zone où se trouve une sous-région de $f_i(\tau_s)$, il y a une sous-région de $f_j(\tau_s)$ (les sous-régions ont été traitées dans l'ordre de leur taille). Ainsi, par le lemme A.2.12, chaque sous-région de $f_i(\tau_s)$ est contenue non tangentiellement dans une sous-région de $f_j(\tau_s)$. Nous avons donc $f_i(\tau_s) \text{ NTPP } f_j(\tau_s)$. □

Remarque A.2.14. Puisque N est clos par inversion, si $N_s^{x_i x_j} = \{\overline{\text{TPP}}\}$ alors nous avons $f_i(\tau_s) \overline{\text{TPP}} f_j(\tau_s)$ et si $N_s^{x_i x_j} = \{\overline{\text{NTPP}}\}$ alors nous avons $f_i(\tau_s) \overline{\text{NTPP}} f_j(\tau_s)$.

Table des figures

2.1	Ordre partiel (treillis) des relations basiques d'Allen	28
2.2	Les 8 relations de RCC_8 dans le plan	30
2.3	Ordre partiel des relations basiques de RCC_8 induit par l'ordre des relations d'Allen	31
2.4	Un réseau de contraintes sur RCC_8	32
2.5	Un réseau de contraintes sur RCC_8	33
2.6	Ordre total des relations basiques de PC induit par \mathbb{R}	37
2.7	Un réseau non minimal sur PC à gauche, et son réseau minimal à droite; la contrainte $v_1 = v_2$ n'appartient à aucun scénario cohérent	39
3.1	Graphes de voisinage de RCC_8 : (a) si la taille des régions change; (b) si la taille des régions est constante	50
3.2	(a) Une évolution de points spatiaux sur \mathbb{R} ; (b) Le graphe de voisinage du calcul des points	51
3.3	Graphe de dominance de PC (les boucles du graphe sont omises)	53
4.1	(a) Hiérarchie des relations basiques dans le cas général; (b) hiérarchie des relations basiques lorsque le raisonnement sur les relations peut s'effectuer de manière algébrique	82
4.2	Un réseau N sur PA^3 et ses trois tranches	82
4.3	(a) un réseau sur STC algébriquement cohérent, mais néanmoins incohérent; (b) un scénario cohérent sur STC	85
5.1	Les représentants $\mathfrak{g}(A)$, $\mathfrak{g}(B)$, $\mathfrak{h}(A)$, $\mathfrak{h}(B)$ des intervalles A et B aux échelles g et h , avec g plus fine que h	111
5.2	Réduction transitive du graphe de voisinage des relations basiques de PIC orienté par la conversion ascendante; la relation $=$ a été retirée du graphe pour le rendre planaire. Les relations rouges r sont reliées à la relation $=$: nous avons $r \rightarrow =$	118
5.3	Demi-treillis des échelles du domaine temporel \mathcal{T} , des jours, des semaines et des mois	120
6.1	(a) Graphe de dominance de RCC_8 (Davis, 2001); (b) Graphe de dominance de $RCC_{8,m}$ des régions de taille constante (pour la mesure de Lebesgue)	159
6.2	En bleu, toutes les configurations possibles dans une zone d'interaction $Z(P_i^j)$ non vide à la fin de l'étape 1 : (a) $R^{ij} = PO$ et $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$; (b) $R^{ij} = PO$ et $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$; (c) $R^{ij} = EC$ et $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$; (d) $R^{ij} = EC$ et $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$; (e) $R^{ij} = TPP$; (f) $R^{ij} \in \{DC, NTPP\}$ (c'est également la configuration de toutes les zones d'interaction des boules secondaires et des sous-régions P_i^j). Les croix rouges marquent le <i>point d'interaction</i> . Les boules pâles en pointillé sont les positions possibles des plus petites boules secondaires durant l'étape 2 (en vert, les cas spéciaux).	164

- 6.3 Simulation qualitative du scénario S sur RCC_8 défini par $S^{xy} = EQ$, $S^{yz} = EQ$ et $S^{xz} = EQ$, avec $\mathbf{E}_S = \{x, y, z\}$ des variables de région mobile de taille constante, sous la contrainte d'état N définie par $N^{xy} = \mathcal{B}$, $N^{yz} = \mathcal{B} \setminus \{DC\}$ et $N^{xz} = \mathcal{B} \setminus \{EC, DC\}$; il s'agit en fait d'un type de simulation qualitative plus précis : les arcs représentent la relation de *dominance* : il y a un arc si on peut passer d'un scénario à un autre *sans scénario intermédiaire* (tout scénario est relié implicitement à lui-même); ce graphe peut aisément être modifié de façon à obtenir le graphe de la simulation qualitative classique *sans relation intermédiaire*, en ajoutant des arcs supplémentaires 170

Liste des tableaux

2.1	Table de composition forte (resp. faible) des relations basiques $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{Z})	19
2.2	Table d'inversion des relations abstraites basiques pour $\mathbf{B} = \{<, =, >\}$	22
2.3	Table de composition des relations abstraites basiques représentant les relations $\{<, =, >\}$ sur \mathbb{R}	23
2.4	Définition et dimension des relations basiques du calcul des intervalles, avec x et y des intervalles	28
2.5	Table de composition des relations basiques d'IC	28
2.6	Définition, représentation et dimension des relations cardinales basiques entre deux points $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$ de \mathbb{R}^2	29
2.7	Table d'inversion des relations cardinales basiques	30
2.8	Définition des relations basiques de RCC_8 et d'autres relations topologiques entre deux régions x et y , avec z une autre région	31
2.9	Table de composition de RCC_8 (nous notons $[b,]$ l'ensemble $\{b' \mid b \leq b'\}$; la colonne d'EQ est omise)	31
2.10	Relations de la sous-classe $\mathcal{S}_{\text{RCA}_8}$ de RCC_8	37
2.11	Définitions des sous-classes $\hat{\mathcal{H}}_8, \mathcal{C}_8$ et \mathcal{Q}_8	38
3.1	Opérateur d'interdépendance de QS vers RCC_8	45
3.2	Opérateur d'interdépendance de RCC_8 vers QS	45
3.3	Conversions ascendante et descendante <i>génératrices</i> pour l'algèbre des points	59
3.4	Conversions ascendante et descendante <i>génératrices</i> pour l'algèbre de intervalles	59
3.5	Conversions ascendante et descendante <i>génératrices</i> de l'algèbre des relations cardinales	61
3.6	Conversions ascendante et descendante <i>génératrices</i> de RCC_8	61
3.7	Définition des relations entre un point x et un intervalle $y = (y^-, y^+)$	63
3.8	Relations de A_{16} entre des classes (ensembles vides et non vides) et des individus	64
5.1	Définitions des relations entre deux entités temporelles simples A et B en fonction des relations entre leurs bornes	112
5.2	Conversions des relations basiques entre points et intervalles; la conversion des relations inverses est donnée par les formules $\uparrow \bar{b} = \uparrow b$ et $\downarrow \bar{b} = \downarrow b$	117

Liste des symboles

NP	Classe de complexité des problèmes solvables en temps polynomial sur une machine de Turing non déterministe.
P	Classe de complexité des problèmes solvables en temps polynomial.
id	Fonction identité : $\text{id}(x) = x$.
A	Représentation canonique : ensemble des relations abstraites doté des opérateurs d'union, d'intersection, d'inversion et de composition faible (voir la section 2.2.3 page 20).
IA	Algèbre des intervalles (voir la section 2.3.1 page 27).
PA	Algèbre des points (exemple 2.2.18 page 24).
RCA ₈	Algèbre de RCC ₈ (voir la section 2.3.3 page 30).
\mathfrak{A}	Ensemble de relations sur \mathcal{U} étant la clôture par union d'un ensemble de relations basiques \mathfrak{B} (voir la section 2.2.2 page 17 et la section 2.2.1 page 16).
B	Ensemble des relations abstraites basiques de la représentation canonique (voir la section 2.2.3 page 20).
\mathfrak{B}	Ensemble de relations basiques sur \mathcal{U} .
C	Ensemble des contraintes d'un réseau N (déf. 2.4.1 page 32).
E	Ensemble des variables d'entité d'un réseau N (déf. 2.4.1 page 32).
\mathcal{U}	Univers, ensemble non vide des entités considérées.
h_{\max}	Affinement par les relations basiques de dimension maximale : $h_{\max}(r) = \{b \in r \mid \dim(b) = \dim(r)\}$ (voir la section 2.4.4 page 36).
h_{C_8}	Affinement classique de la sous-classe C_8 de RCC ₈ (déf 2.4.19 page 38).
$h_{\hat{\mathcal{H}}_8}$	Affinement classique de la sous-classe $\hat{\mathcal{H}}_8$ de RCC ₈ (déf 2.4.19 page 38).
h_{Q_8}	Affinement classique de la sous-classe Q_8 de RCC ₈ (déf 2.4.19 page 38).
CPC	Calcul des points cardinaux (calcul des relations cardinales ; voir la section 2.3.2 page 29).
IC	Calcul des intervalles (voir la section 2.3.1 page 27).
PC	Calcul des points (exemple 2.2.20 page 25).
QS	Calcul des tailles qualitatives des régions (exemple 2.2.22 page 25).
RCC ₈	Calcul de la connexion des régions (region connection calculus ; voir la section 2.3.3 page 30).
◦	Composition (forte). Elle est définie par : $r \circ r' = \{(x, z) \mid \exists y \ (x, y) \in r \wedge (y, z) \in r'\}$ (déf. 2.2.5 page 18).
$\bar{\cdot}$	Opérateur d'inversion des relations sur \mathcal{U} . La relation inverse de r , \bar{r} , est $\{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$ (voir la section 2.2.2 page 17 et la section 2.2.1 page 16).
◊	Composition faible. Elle est définie par : $r \diamond r' = \bigcup \{b \in \mathfrak{B} \mid b \cap (r \circ r') \neq \emptyset\}$ (déf. 2.2.7 page 18).

DC	Relation de non connexion de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
EC	Relation de connexion extérieur de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
EQ	Relation d'égalité de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
NTPP	Relation d'inclusion non tangentielle de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
PO	Relation de chevauchement partiel de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
TPP	Relation d'inclusion tangentielle de RCC_8 (voir la table 2.8 page 31).
B	Relation de la représentation canonique A s'interprétant comme la relation universelle (voir la section 2.2.3 page 20).
Id	Relation $\{(x, x) \mid x \in \mathcal{U}\}$.
\mathcal{S}_{PA}	Sous-classe de PA maximale pour la distributivité de la composition sur l'intersection : $\mathcal{S}_{PA} = \{\emptyset, \{<\}, \{=\}, \{>\}, \{<, =, >\}, \{<, >\}\}$.
\mathcal{C}_8	Sous-classe de RCC_8 maximale pour la traitabilité (voir la table 2.11 page 38).
$\hat{\mathcal{H}}_8$	Sous-classe de RCC_8 maximale pour la traitabilité (voir la table 2.11 page 38).
\mathcal{Q}_8	Sous-classe de RCC_8 maximale pour la traitabilité (voir la table 2.11 page 38).
\mathcal{S}_{RCA_8}	Sous-classe de RCA_8 maximale pour la distributivité de la composition sur l'intersection (voir la table 2.10 page 37).
\mathcal{A}	Algèbre non associative (déf. 2.2.17 page 24) ou multi-algèbre (déf. 4.2.10 page 74).
\mathcal{B}	Ensemble des relations basiques (atomes) d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70). Ensemble des relations basiques d'une multi-algèbre $\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m$ (déf. 4.2.10 page 74).
\mathcal{S}	Sous-ensemble, sous-classe ou sous-algèbre d'une algèbre non associative ou d'une multi-algèbre (déf. 2.4.8 page 34 et déf. 4.3.1 page 86).
\mathcal{S}_i	Tranche i du sous-ensemble $\mathcal{S} : \mathcal{S}_i = \{R_i \mid R \in \mathcal{S}\}$ (déf. 4.3.2 page 86).
\uparrow	Clôture par projection (déf. 4.2.15 page 75).
φ	Fonction d'interprétation d'un formalisme qualitatif classique (déf. 2.2.19 page 25), d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70) ou d'un formalisme séquentiel (déf. 4.2.18 page 76).
STC	Combinaison taille-topologie : intégration lâche de RCC_8 et QS (exemple 3.2.4 page 45).
A	Anti-arborescence (déf. 4.3.8 page 88).
\xrightarrow{A}	$v \xrightarrow{A} v'$ si et seulement si il y un arc du nœud v vers le nœud v' dans l'anti-arborescence A (déf. 4.3.8 page 88).
\rightarrow	$v \rightarrow v'$ si et seulement si il y un arc du nœud v vers le nœud v' dans l'anti-arborescence A (déf. 4.3.8 page 88).
\leftarrow	$v \leftarrow v'$ si et seulement si $v' \rightarrow v$ (déf. 4.3.8 page 88).
SPA^m	Scaled point multi-algebra (exemple 4.2.13 page 75).
\in	Relation d'inclusion pour les relations basiques d'une algèbre non associative : $b \in r$ si et seulement si $b \in \mathcal{B}$ et $b \subseteq r$ (déf. 4.2.3 page 72). Relation d'inclusion pour les relations basiques d'une multi-algèbre : $B \in R$ si et seulement si $B \in \mathcal{B}$ et $B \subseteq R$ (déf. 4.2.10 page 74).
\uparrow_i^j	Opérateur de projection de l'algèbre \mathcal{A}_i vers l'algèbre \mathcal{A}_j d'une multi-algèbre \mathcal{A} (déf. 4.2.7 page 73 et déf. 4.2.10 page 74).
\downarrow_i^j	Opérateur de projection réciproque de \uparrow_i^j . Il est défini par : $b \subseteq \downarrow_i^j b' \iff b' \subseteq \uparrow_i^j b$ (déf. 4.3.7 page 88).

- \mathcal{B} Relation universelle abstraite d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70). Elle s'interprète comme l'ensemble des couples d'entités considérés ($\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ou un sous-ensemble de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ dans le cadre des sous-partitions).
- \odot Composition d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70).
- e Relation d'identité d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70).
- \cap Intersection d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70).
- $\bar{\cdot}$ Inversion d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70).
- \cup Union d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70).
- \emptyset Relation vide d'une algèbre non associative \mathcal{A} (déf. 2.2.17 page 24) d'un formalisme qualitatif symétrique (déf. 4.2.1 page 70). Elle s'interprète comme l'ensemble vide.
- $\bar{\cdot}$ -clos Un sous-ensemble \mathcal{S} est $\bar{\cdot}$ -clos si pour tout $R \in \mathcal{S}$, $\bar{\cdot} R \in \mathcal{S}$. (déf. 4.3.4 page 86).
- $H(N)$ $H(N)$ est le réseau vérifiant $H(N)^{xy} = H(N^{xy})$ pour tous x, y (section 4.3.17 page 92).
- N_i Tranche i du réseau N : $N_i = (\mathbf{E}, \mathbf{C}_i)$ avec $\mathbf{C}_i = \{x R_i y \mid x R y \in \mathbf{C}\}$ (déf. 4.2.31 page 82).
- N^{xy} Relation entre x et y dans N (section 2.4.1 page 32).
- PIA Algèbre des points et intervalles (voir la section 5.2.2 page 112).
- \mathcal{G} Système de discrétisation (déf. 5.3.8 page 119).
- \mathbf{G} Ensemble formant un demi-treillis inférieur.
- \mathbb{G} Ensemble des variables d'échelle temporelle.
- \mathcal{T} Domaine temporel, ensemble totalement ordonné, par exemple \mathbb{R} .
- I_g Domaine de la fonction échelle g (déf. 3.4.1 page 57).
- \uparrow Conversion ascendante. Conversion des informations vers une échelle plus grossière, c'est-à-dire moins fine (voir la section 3.4.2 page 58).
- \downarrow Conversion descendante. Conversion des informations vers une échelle plus fine (voir la section 3.4.2 page 58).
- \mathbf{g} $\mathbf{g}(x)$ est le représentant de x à l'échelle g (déf. 5.2.2 page 110 et déf. 5.2.3 page 110).
- \mathbf{h} $\mathbf{h}(x)$ est le représentant de x à l'échelle h (déf. 5.2.2 page 110 et déf. 5.2.3 page 110).
- SIC Calcul des intervalles échelonné (voir la section 5.2.3 page 113).
- SIC $^{\mathcal{G}}$ Calcul des intervalles multi-échelle associé au système de discrétisation \mathcal{G} (déf. 5.3.12 page 120).
- SPC Calcul des points échelonné (déf. 5.2.11 page 113).
- SPC $^{\mathcal{G}}$ Calcul des points multi-échelle associé au système de discrétisation \mathcal{G} (déf. 5.3.12 page 120).
- SPIC Calcul des points et intervalles échelonné (déf. 5.2.13 page 114).
- SPIC $^{\mathcal{G}}$ Calcul des points et intervalles multi-échelle associé au système de discrétisation \mathcal{G} (déf. 5.3.12 page 120).
- PIC Calcul des points et intervalles (voir la section 5.2.2 page 112).
- SIA $^{\mathbf{G}}$ Multi-algèbre de IA échelonnée par \mathbf{G} (déf. 5.3.9 page 120).
- SPA $^{\mathbf{G}}$ Multi-algèbre de PA échelonnée par \mathbf{G} (déf. 5.3.9 page 120).

SPIA^G	Multi-algèbre de PIA échelonnée par G (déf. 5.3.9 page 120).
\in	$x \in g$ signifie x est représentable à l'échelle g (déf. 5.2.7 page 111).
\preceq	$g \preceq h$, c'est-à-dire g est plus fine que h , si et seulement si $\forall i \in I_g \exists j \in I_h \quad g(i) \subseteq h(j)$ (déf. 3.4.3 page 57).
\sqsubseteq	$g \sqsubseteq h$, c'est-à-dire g décompose h , si et seulement si $\forall j \in I_h \exists S \subseteq I_g \quad h(j) = \bigcup_{i \in S} g(i)$ (déf. 3.4.3 page 57).
\equiv	Relation d'équivalence entre échelles : $g \equiv h$ si et seulement si $\{g(i) \mid i \in I_g\} = \{h(j) \mid j \in I_h\}$ (déf. 5.3.6 page 119).
\prec	$g \prec h$, c'est-à-dire g est strictement plus fine que h , est défini par $g \preceq h$ et $\neg(g \equiv h)$ (déf. 5.3.6 page 119).
r_g	Relation r définie à une échelle $g : x r_g y \iff x, y \in g \wedge \mathfrak{g}(x) r \mathfrak{g}(y)$ (déf. 5.2.11 page 113 et déf. 5.2.13 page 114).
\mathfrak{T}	Espace topologique (déf. 6.2.1 page 130).
$\mathcal{C}_{\mathfrak{T}}^I$	Dynamique générale de \mathfrak{T} sur un intervalle I (déf. 6.2.23 page 134).
$\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^I$	Dynamique générale de \mathcal{F} sur un intervalle I (déf. 6.2.34 page 136).
$\mathcal{C}_{\mathfrak{T},c}^I$	Dynamique de la préservation de la caractéristique c des entités de \mathfrak{T} sur un intervalle I : $\{f \in \mathcal{C}_{\mathfrak{T}}^I \mid \forall t, t' \in I \quad c(f(t)) = c(f(t'))\}$ (déf. 6.2.25 page 135).
$\mathcal{C}_{\mathcal{F},c}^I$	Dynamique de la préservation de la caractéristique c de \mathcal{F} sur un intervalle I (déf. 6.2.42 page 137).
\mathcal{C}	Une dynamique (déf. 6.2.21 page 134).
\otimes	$\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ est l'ensemble des évolutions de couples d'entités correspondant à l'ensemble des couples d'évolutions $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ de deux dynamiques \mathcal{C} et \mathcal{C}' (déf. 6.2.27 page 135).
$\sqrt{\mathcal{C}}$	Ensemble des évolutions d'entités de la dynamique $\mathcal{C} : \sqrt{\mathcal{C}} = \{x \mid \exists y (x, y) \in \mathcal{C}\}$ (déf. 6.2.38 page 136).
\mathcal{C}^*	Ensemble des couples d'évolutions correspondant à l'ensemble des évolutions de couples \mathcal{C} (déf. 6.2.29 page 135).
\mathfrak{R}_m	Ensemble des régions mesurables de \mathbb{R}^n (déf. 6.2.11 page 132).
φ^c	Interprétation selon la caractéristique $c : \varphi^c(r) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \mid c(x) \varphi(r) c(y)\}$ (déf. 6.2.16 page 133).
φ_m	Interprétation de RCC_8 restreinte aux régions mesurables (déf. 6.2.13 page 132).
t	Mesure de Lebesgue (voir la section 6.2.1 page 130).
\mathcal{F}^c	Formalisme des relations de \mathcal{F} sur la caractéristique c des entités de \mathcal{U} (déf. 6.2.16 page 133).
$\text{RCC}_{8,m}$	RCC_8 restreint aux régions mesurables (déf. 6.2.13 page 132).
$\text{T}\mathcal{F}_d^c$	Formalisme \mathcal{F} temporalisé sur intervalles par la dynamique \mathcal{C} (déf. 6.3.16 page 146).
$\text{T}\mathcal{F}_p^c$	Formalisme \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire par la dynamique \mathcal{C} (déf. 6.3.26 page 150).
$\text{T}\mathcal{F}^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$	Formalisme \mathcal{F} temporalisé par la dynamique \mathcal{C} avec relations de \tilde{F} sur la caractéristique c (déf. 6.5.18 page 161).
$\text{TRCC}_{8,t}$	Calcul des régions connectés et mesurables temporalisé avec relations de taille (il se note également $\text{TRCC}_{8,m} + \text{PC}^t$; déf. 6.5.18 page 161).
$\text{T}\mathcal{F}_d^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$	Formalisme \mathcal{F} temporalisé sur intervalles par la dynamique \mathcal{C} avec relations de \tilde{F} sur la caractéristique c (déf. 6.5.21 page 162).
$\text{T}\mathcal{F}_p^c + \tilde{\mathcal{F}}^c$	Formalisme \mathcal{F} temporalisé sans relation intermédiaire par la dynamique \mathcal{C} avec relations de \tilde{F} sur la caractéristique c (déf. 6.5.21 page 162).

- $\uparrow_{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{F}}^c}$ Projection de l'algèbre \mathcal{A} vers l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ de l'intégration lâche de \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}^c$ (déf. 6.5.3 page 156).
- \uparrow_{τ} Projection du graphe de transition τ , avec $\tau \in \{\downarrow, \succ, \prec, \rightsquigarrow, \vdash, \dashv\} : \uparrow_{\tau} b = \bigcup \{b' \in \mathcal{B} \mid b \tau b'\}$ (déf. 6.2.54 page 139).
- $\vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ $b \vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathcal{C}$ et $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$, $(x(\tau), y(\tau)) \in \varphi(b)$ et $(x(t), y(t)) \in \varphi(b')$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$ (déf. 6.2.45 page 137 et déf. 6.2.46 page 138).
- $\dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ $b \dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathcal{C}$ et $\tau, \tau' \in I$ tels que $\tau < \tau'$, $(x(t), y(t)) \in \varphi(b)$ pour tout $t \in]\tau, \tau'[$ et $(x(\tau'), y(\tau')) \in \varphi(b')$ (déf. 6.2.45 page 137 et déf. 6.2.46 page 138).
- $\succ_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ $b \succ_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ si et seulement si $b \vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b' \vee b' \dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b$ (déf. 3.3.9 page 52, déf. 6.2.45 page 137 et déf. 6.2.46 page 138).
- $\rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ $b \rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ si et seulement si $b \dashv_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b' \vee b \vdash_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ (déf. 3.3.9 page 52, déf. 6.2.45 page 137 et déf. 6.2.46 page 138).
- $\wr_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}}$ $b \wr_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ si et seulement si $b \rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b' \vee b \rightsquigarrow_{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}} b'$ (déf. 3.3.9 page 52, déf. 6.2.45 page 137 et déf. 6.2.46 page 138).
- $\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}}$ Relation sur \mathcal{C} , interprétation de $r \in \mathcal{A}$ durant l'intervalle I :
 $\langle r \rangle_I^{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathcal{C} \mid \exists b \in r \forall t \in I \quad x(t) \varphi(b) y(t)\}$ (déf. 6.3.9 page 143).
- $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}}$ Relation sur \mathcal{C} , interprétation de $r \in \mathcal{A}$ à l'instant t :
 $\langle r \rangle_t^{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathcal{C} \mid x(t) \varphi(r) y(t)\}$ (déf. 6.3.9 page 143).
- $\text{SRI}_{[\tau, \tau']}^{\mathcal{F}}$ Dynamique de \mathcal{F} sans relation intermédiaire durant l'intervalle $[\tau, \tau']$:
 $\{(x, y) \mid \exists t \in [\tau, \tau'] \exists b, b' \in \mathcal{B} \quad (x, y) \in \langle b \rangle_{[\tau, t]}^{\mathcal{C}} \cap \langle b \cup b' \rangle_t^{\mathcal{C}} \cap \langle b' \rangle_{[t, \tau']}^{\mathcal{C}}\}$ (déf. 6.3.21 page 149).

Index

- échelle, 57
- échelle équivalente, 119
- échelle infinie, 115
- égalité, 16

- affaiblissement, 101
- affaiblissement arborescent, 102
- affinement, 38, 90
- algébriquement clos, 35, 83
- algébriquement cohérent, 35, 83
- algébriquement stable, 92
- algébriquement traitable, 35, 86
- algèbre (de relations) non associative, 24
- algèbre booléenne, 21
- algèbre de relations, 24
- algèbre des intervalles, 27
- algèbre des points, 24
- aligné, 57
- anti-arborescence, 88
- arborescente, 88, 142, 157
- atome, 72

- basique, 74
- basiques, 16
- BC-clôture, 46
- bi-clôture, 45
- bi-réseau de contraintes, 44
- bi-scénarios, 45
- bi-tranche, 92
- bipath-consistency, 45

- calcul des intervalles, 27
- calcul des intervalles multi-échelle, 120
- calcul des points, 25
- calcul des points échelonné, 113
- calcul des points cardinaux, 29
- calcul des points et intervalles, 112
- calcul des points et intervalles échelonné, 114
- calcul des points et intervalles multi-échelle, 120
- calcul des points multi-échelle, 79, 120
- calcul des points temporalisé, 151
- calcul des régions cardinales, 46
- calcul des tailles qualitatives, 26
- calendrier grégorien, 57
- caractéristique, 132

- $\bar{\tau}$ -clos, 86
- changement de sémantique, 133
- changement intégral, 50, 54
- clôture algébrique, 34, 83, 168
- clôture par projection, 75
- clôture par union, 17
- clôture topologique, 30
- clos par composition, 83
- clos par composition faible, 33
- clos par intersection, 18, 33
- clos par inversion, 33
- clos par projection, 75, 81
- clos par union, 17
- cohérence, 32
- cohérent, 33, 44, 49, 82
- cohérent pour des échelles qualitatives, 122
- cohérente, 80
- combinaison taille-topologie, 45, 79, 157
- complétude, 152, 155
- complet, 85
- composition, 18, 75
- composition faible, 18, 47
- composition forte, 18
- connexion, 30
- constraint satisfaction problem, 33
- continuité, 131
- contraintes de transition, 53, 168
- conversion ascendante, 57, 58, 139
- conversion descendante, 58

- d'inverse, 17
- décision de l'interpolation, 170
- déduction maximale d'information, 39
- description d'échelles qualitatives, 121
- dimension, 27, 37
- disjointes deux à deux, 16
- distance, 131
- distance de Hausdorff, 131
- distance de Hausdorff duale, 131
- distance de la différence symétrique, 131
- distributive maximale, 36
- distributivité, 36, 59, 95
- dynamique, 48, 134
- dynamique d'un formalisme qualitatif, 136
- dynamique de préservation de caractéristiques, 134

- dynamique de préservation de caractéristiques d'un formalisme, 136
- dynamique de préservation de la taille, 135
- dynamique de préservation de la taille d'un formalisme, 137
- dynamique générale, 134
- dynamique générale d'un formalisme qualitatif, 136

- ensemble des évolutions d'entités d'une dynamique, 136
- entité temporelle, 110
- espace de modes topologiques, 51
- espace de modes topologiques avec préservation de caractéristiques, 139
- espace de modes topologiques d'un formalisme, 137
- espace de modes topologiques général, 138
- espace mesuré, 132
- espace topologique, 30, 130
- espaces métriques, 131
- exhaustives, 16

- famille, 33
- formalisme des relations de caractéristique, 133
- formalisme qualitatif, 25, 26
- formalisme qualitatif mesuré, 136
- formalisme qualitatif séquentiel, 76
- formalisme qualitatif symétrique, 70, 144
- formalisme qualitatif topologique, 135
- formalisme temporalisé avec relations de caractéristique, 160
- formalisme temporalisé sans relation intermédiaire, 150
- formalisme temporalisé sans relation intermédiaire avec relations de caractéristique, 161
- formalisme temporalisé sur intervalles avec relations de caractéristique, 161
- formalismes temporalisés sur intervalles, 146

- granularité, 57
- granule, 57, 59
- graphe de dominance, 137
- graphe de voisinage, 137
- graphes de dominance, 51
- graphes de voisinage, 49

- hétérogène, 62
- homomorphisme, 22

- identité, 16
- incohérent, 82
- intégration lâche, 77, 156
- intégrations étroites, 46
- intégrations lâches, 44

- intersection, 17, 75
- intervalle de relations, 28
- inversion, 18, 75
- isomorphisme, 22

- maximal pour la traitabilité, 34
- mesure, 132
- mesure de Lebesgue, 132, 156
- modèle, 51
- modèle pour un espace de modes topologiques, 137
- multi-affinement, 90
- multi-algèbre, 74
- multi-algèbre échelonnée, 120
- multi-algèbre d'un formalisme temporalisé avec relations de caractéristique, 156
- multi-algèbre d'un formalisme temporalisé sans relation intermédiaire, 140
- multi-algèbre d'un formalisme temporalisé sans relation intermédiaire avec relations de caractéristique, 158
- multi-algèbre d'un formalisme temporalisé sur intervalles, 142
- multi-algèbre d'un formalisme temporalisé sur intervalles avec relations de caractéristique, 158

- opérateur d'interdépendance, 45
- opérateur de projection, 73
- opérateur de projection réciproque, 88

- partition, 118
- partition du temps, 146
- plénière, 88
- plus fin, 57
- plus grossier, 57
- points et des intervalles, 62
- problème de l'interpolation, 170
- problème de la minimalité, 39
- problème de la redondance, 40
- projection d'un graphe de transition, 139

- quasi-clos, 90

- réduction par affinement, 37
- régions, 30
- réseau de contraintes qualitatives, 32
- réseau minimal, 39
- racine, 88
- region connection calculus, 29
- relation échelonnée, 113
- relation définie à une échelle, 134
- relation de dominance, 52
- relation de perturbation, 52, 149
- relation de post-dominance, 51, 137, 144
- relation de pré-dominance, 51, 137, 144
- relation sans relation intermédiaire, 148

relation temporalisée, 143
relation universelle, 17
relations abstraites, 20
relations convexes, 36
relations de caractéristique, 133
relations préconvexes, 37
représentable, 111
représentant, 110
représentation canonique, 20
représentation produit, 47

séparation et évaluation, 35, 168
séquence temporelle, 49
sans état intermédiaire, 54
sans contrainte de transition, 156
sans relation intermédiaire, 50
satisfaction, 20
satisfiabilité, 33
scénario, 33, 82
scénarisable, 73, 90
schéma de partition, 17
simple, 91
simulation qualitative, 169
solution, 33, 49, 82
sous-algèbre, 34, 86
sous-classe, 33, 85
sous-classe minimale, 39
sous-ensemble, 33
sous-partition, 71, 77, 146, 148
stable pour la composition, 97
stable pour la projection, 98
strictement plus fin, 119
système de discrétisation, 119

topologie, 130
topologie induite, 131
topologie produit, 131
traitable, 33
tranche, 82, 86
trivialement incohérent, 35, 81, 83

uniforme, 96
union, 75
univers, 16

Bibliographie

- Charalambos D ALIPRANTIS et C KIM : Infinite dimensional analysis : A hitchhikers guide, 2006. 131
- James F. ALLEN : Maintaining knowledge about temporal intervals. *Commun. ACM*, 26(11):832–843, novembre 1983. ISSN 0001-0782. URL <http://doi.acm.org/10.1145/182.358434>. 27, 32
- James F ALLEN : Planning as temporal reasoning. *KR*, 91:3–14, 1991. 27
- Nouhad AMANEDDINE et Jean-François CONDOTTA : From path-consistency to global consistency in temporal qualitative constraint networks. In *International Conference on Artificial Intelligence : Methodology, Systems, and Applications*, pages 152–161. Springer, 2012. 39
- Nouhad AMANEDDINE et Jean-François CONDOTTA : On the minimal labeling problem of temporal and spatial qualitative constraints. In *FLAIRS Conference*, pages 16–21, 2013. 39
- Tom M APOSTOL : Mathematical analysis. 1974. 25
- Silvana BADALONI et Marina BERATI : Dealing with time granularity in a temporal planning system. In *Temporal Logic*, pages 101–116. Springer, 1994. 62, 66
- Philippe BALBIANI : Reasoning about negligibility and proximity in the set of all hyperreals. *Journal of Applied Logic*, 16:14–36, 2016. 62
- Philippe BALBIANI, Jean-François CONDOTTA et Luis Farinas del CERRO : A new tractable subclass of the rectangle algebra. In *Proc. of IJCAI*, volume 99, pages 442–447, 1999. 46, 54, 127, 173
- Philippe BALBIANI, Jean-François CONDOTTA et Gérard LIGOZAT : On the consistency problem for the indu calculus. *Journal of Applied Logic*, 4(2):119–140, 2006. 47, 48
- Gérard BECHER, Françoise CLÉRIN-DEBART et Patrice ENJALBERT : A model for time granularity in natural language. In *Temporal Representation and Reasoning, 1998. Proceedings. Fifth International Workshop on*, pages 29–36. IEEE, 1998. 62
- Gérard BECHER, Françoise CLÉRIN-DEBART et Patrice ENJALBERT : A qualitative model for time granularity. *Computational Intelligence*, 16(2):137–168, 2000. 59, 60
- Gerald BEER : *Topologies on closed and closed convex sets*, volume 268. Springer Science & Business Media, 1993. 131
- Gerald BEER et Roberto LUCCHETTI : Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 335(2):805–822, 1993. 131
- Mordechai BEN-ARI, Amir PNUELI et Zohar MANNA : The temporal logic of branching time. *Acta informatica*, 20(3):207–226, 1983. 173
- Brandon BENNETT, Anthony G COHN, Paolo TORRINI et Shyamanta M HAZARIKA : Describing rigid body motions in a qualitative theory of spatial regions. 2000. 56
- Brandon BENNETT, Anthony G. COHN, Frank WOLTER et Michael ZAKHARYASCHEV : Multi-dimensional modal logic as a framework for spatio-temporal reasoning. *Applied Intelligence*, 17(3):239–251, 2002. 55

- Christian BESSIERE, Amar ISLI et Gerard LIGOZAT : Global consistency in interval algebra networks : Tractable subclasses. *In In Proc. ECAI'96*. Citeseer, 1996. 39
- Claudio BETTINI, Curtis DYRESON, William EVANS, Richard SNODGRASS et X WANG : A glossary of time granularity concepts. *Temporal databases : Research and practice*, pages 406–413, 1998a. 61
- Claudio BETTINI, Sushil G. JAJODIA et Sean X. WANG : *Time Granularities in Databases, Data Mining and Temporal Reasoning*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st édition, 2000. ISBN 3540669973. 57, 58, 60, 109, 110, 115, 119
- Claudio BETTINI, Sergio MASCETTI et Vincenzo PUPILLO : Gstp : a temporal reasoning system supporting multi-granularity temporal constraints. *In IJCAI*, pages 1633–1634, 2003. 62
- Claudio BETTINI, X WANG et Sushil JAJODIA : An architecture for supporting interoperability among temporal databases. *Temporal Databases : Research and Practice*, pages 36–55, 1998b. 61
- Claudio BETTINI, Xiaoyang Sean WANG, Sushil JAJODIA et J-L LIN : Discovering frequent event patterns with multiple granularities in time sequences. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(2):222–237, 1998c. 61
- Mehul BHATT et Frank DYLLA : A qualitative model of dynamic scene analysis and interpretation in ambient intelligence systems. *International Journal of Robotics & Automation*, 24(3):235, 2009. 179
- Thomas BITTNER : Approximate qualitative temporal reasoning. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 36(1-2):39–80, 2002a. 62
- Thomas BITTNER : Approximate qualitative temporal reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 36(1-2):39–80, septembre 2002b. ISSN 1012-2443. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1015899702951>. 62
- Thomas BITTNER et Barry SMITH : Granular partitions and vagueness. *In Proceedings of the international conference on Formal Ontology in Information Systems-Volume 2001*, pages 309–320. ACM, 2001. 62
- Thomas BITTNER et John G STELL : Approximate qualitative spatial reasoning. *Spatial Cognition and Computation*, 2(4):435–466, 2000. 62
- Manuel BODIRSKY et Peter JONSSON : A model-theoretic view on qualitative constraint reasoning. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 58:339–385, 2017. 26
- Manuel BODIRSKY et Jan KÁRA : The complexity of temporal constraint satisfaction problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 57(2):9, 2010. 124
- Peter BOGAERT, Nico Van de WEGHE, Anthony G. COHN, Frank WITLOX et Philippe DE MAEYER : The qualitative trajectory calculus on networks. *In Proc. of the International Conference on Spatial Cognition*, pages 20–38. Springer, 2006. 56
- Manfred BROY : Refinement of time. *In International AMAST Workshop on Aspects of Real-Time Systems and Concurrent and Distributed Software*, pages 44–63. Springer, 1997. 62
- Tom BRUNS et Max EGENHOFER : Similarity of spatial scenes. *In Seventh international symposium on spatial data handling*, pages 31–42. Delft, The Netherlands, 1996. 49
- Alfredo BURRIEZA, Emilio MUÑOZ-VELASCO et Manuel OJEDA-ACIEGO : A pdl approach for qualitative velocity. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 19(01):11–26, 2011. 55
- Priti CHANDRA et Arun K PUJARI : Minimality and convexity properties in spatial csp. *In Tools with Artificial Intelligence, 2005. ICTAI 05. 17th IEEE International Conference on*, pages 5–pp. IEEE, 2005. 37, 39

- Juan CHEN, Anthony G. COHN, Dayou LIU, Shengsheng WANG, Jihong OUYANG et Qiangyuan YU : A survey of qualitative spatial representations. *The Knowledge Engineering Review*, 30(01):106–136, 2015. 27, 43, 63
- Luca CHITTARO et Angelo MONTANARI : Temporal representation and reasoning in artificial intelligence : Issues and approaches. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 28(1-4):47–106, 2000. 27
- MYUNG HYUN CHO : Some recent advances in hyperspace topologies and selection theories. *space*, 10(9):19–36, 1998. 131
- Emanuele CIAPESSONI, Edoardo CORSETTI, Angelo MONTANARI et Pierluigi SAN PIETRO : Embedding time granularity in a logical specification language for synchronous real-time systems. *Science of computer programming*, 20(1-2):141–171, 1993. 62
- Bowman L CLARKE : A calculus of individuals based on connection. *Notre Dame Journal of Formal Logic Notre-Dame, Ind.*, 22(3):204–219, 1981. 30
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : An algebra of granular temporal relations for qualitative reasoning. *In Proceedings of IJCAI*, pages 2869–2875, 2015a. 113, 116, 122
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Une algèbre des relations temporelles granulaires pour le raisonnement qualitatif. *In Neuvièmes Journées de l'Intelligence Artificielle Fondamentale, juillet 2015, Rennes, France*, 2015b. 113, 116, 122
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Vérification de la cohérence des multi-réseaux de contraintes qualitatives. *In Conférence Nationale en Intelligence Artificielle*, 2016. 74
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Checking the consistency of combined qualitative constraint networks. *In Proc. of AAAI*, 2017a. 74, 76, 91, 92
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Décision de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives combinés. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 31(1-2):41–70, 2017b. 70, 74, 76, 89, 91, 92, 95
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Séquences temporelles d'informations qualitatives : raisonner sur la topologie de régions mobiles de taille constante. *In 11e Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale*, 2017c. 163, 167, 168
- Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : Temporal sequences of qualitative information : Reasoning about the topology of constant-size moving regions. *In Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 986–992, 2017d. 163, 167, 168
- Anthony G. COHN, Nicholas M. GOTTS, Zhan CUI, David A. RANDELL, Brandon BENNETT et John GOODAY : Exploiting temporal continuity in qualitative spatial calculi. *Spatial and Temporal Reasoning in Geographic Information Systems*, pages 5–24, 1998. 51
- Anthony G. COHN et Shyamanta M. HAZARIKA : Qualitative spatial representation and reasoning : An overview. *Fundamenta informaticae*, 46(1-2):1–29, 2001. 49
- Anthony G. COHN, Sanjiang LI, Weiming LIU et Jochen RENZ : Reasoning about topological and cardinal direction relations between 2-dimensional spatial objects. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 51:493–532, 2014. 45, 46
- Carlo COMBI, Francesco PINCIROLI, Marco CAVALLARO et Giorgio CUCCHI : Querying temporal clinical databases with different time granularities : the gch-osql language. *In Proceedings of the Annual Symposium on Computer Application in Medical Care*, page 326. American Medical Informatics Association, 1995. 61

- Jean-François CONDOTTA, Souhila KACI, Pierre MARQUIS et Nicolas SCHWIND : Merging qualitative constraint networks defined on different qualitative formalisms. *In International Conference on Spatial Information Theory*, pages 106–123. Springer, 2009. 48, 128
- Zhan CUI, Anthony G COHN et David A RANDELL : Qualitative simulation based on a logical formalism of space and time. *In AAAI*, pages 679–684, 1992. 51, 169
- Ernest DAVIS : Branching continuous time and the semantics of continuous action. *In AIPS*, pages 231–236, 1994. 173
- Ernest DAVIS : Continuous shape transformation and metrics on regions. *Fundamenta Informaticae*, 46(1-2):31–54, 2001. 52, 53, 131, 132, 139, 159, 184, 191
- Giuliana DETTORI et Enrico PUPPO : How generalization interacts with the topological and metric structure of maps. *In Proceedings of 7th International Symposium on Spatial Data Handling*. Citeseer, 1996. 61
- Thomas DEVOGELE, Jenny TREVISAN et Laurent RAYNAL : Building a multi-scale database with scale-transition relationships. *In International symposium on spatial data handling*, pages 337–351. Citeseer, 1996. 61
- Giuseppe DI MAIO et Somashekhar NAIMPALLY : Comparison of hypertopologies. 1990. 131
- Matt DUCKHAM, Sanjiang LI, Weiming LIU et Zhiguo LONG : On redundant topological constraints. *In KR*, pages 307–316, 2014. 40
- Ivo DÜNTSCH, Hui WANG et Steve MCCLOSKEY : A relation–algebraic approach to the region connection calculus. *Theoretical Computer Science*, 255(1-2):63–83, 2001. 18, 30
- Frank DYLLA et Reinhard MORATZ : Exploiting qualitative spatial neighborhoods in the situation calculus. *In Proc. of the International Conference on Spatial Cognition*, pages 304–322. Springer, 2004. 51
- Frank DYLLA, Till MOSSAKOWSKI, Thomas SCHNEIDER et Diedrich WOLTER : Algebraic properties of qualitative spatio-temporal calculi. *In International Conference on Spatial Information Theory*, pages 516–536. Springer, 2013. 26, 27, 41, 70, 71, 114
- Frank DYLLA et Jan Oliver WALLGRÜN : Qualitative spatial reasoning with conceptual neighborhoods for agent control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 48(1):55–78, 2007. 50, 51
- Max EGENHOFER et Jayant SHARMA : Topological relations between regions in ρ^2 and \mathbb{Z}^2 . *In Advances in spatial databases*, pages 316–336. Springer, 1993. 49
- Max J EGENHOFER : The family of conceptual neighborhood graphs for region-region relations. *In Proc. of the International Conference on Geographic Information Science*, pages 42–55. Springer, 2010. 50
- Max J EGENHOFER : Qualitative spatial-relation reasoning for design. *In Studying Visual and Spatial Reasoning for Design Creativity*, pages 153–175. Springer, 2015. 50
- Abdelhaq EL JAI : *Eléments de topologie et espaces métriques*. Presses universitaires de Perpignan, 2007. 130, 131
- Jérôme EUZENAT : Représentation granulaire du temps. *Revue des Sciences et Technologies de l'Information-Série RIA : Revue d'Intelligence Artificielle*, 7(3):329–361, 1993. 58
- Jérôme EUZENAT : *Granularité dans les représentations spatio-temporelles*. INRIA, 1994. 58, 60, 66
- Jérôme EUZENAT : Granularity in relational formalisms with application to time and space representation. *Computational intelligence*, 17(4):703–737, 2001. 58, 60, 66, 101, 109, 115

- Jérôme EUZENAT : Algebras of ontology alignment relations. *The Semantic Web-ISWC 2008*, pages 387–402, 2008. 63
- Jérôme EUZENAT et Angelo MONTANARI : Time granularity. *Foundations of Artificial Intelligence*, 1:59–118, 2005. 57, 58, 59
- José FIADEIRO et Tom MAIBAUM : Sometimes "tomorrow" is "sometime". *Temporal logic*, pages 48–66, 1994. 62
- Massimo FRANCESCHET et Angelo MONTANARI : Dividing and conquering the layered land. *These de doctorat, Department of Mathematics and Computer Science, University of Udine, Italy*, 2001. 57
- Christian FREKSA : Conceptual neighborhood and its role in temporal and spatial reasoning. *In Proc. of the IMACS Workshop on Decision Support Systems and Qualitative Reasoning*, pages 181–187, 1991. 49, 50
- Christian FREKSA : *Using orientation information for qualitative spatial reasoning*. Springer, 1992. 49
- Thierry GALLOUËT et Raphaële HERBIN : Mesure, intégration, probabilités. 2013. 132
- Antony GALTON : Towards an integrated logic of space, time, and motion. *In Proc. of IJCAI*, pages 1550–1555, 1993. 56, 65, 172
- Antony GALTON : *Qualitative spatial change*. Oxford University Press, 2000. 49, 51, 52, 53, 65, 129, 130, 131, 132, 137
- Antony GALTON : Dominance diagrams : A tool for qualitative reasoning about continuous systems. *Fundamenta Informaticae*, 46(1-2):55–70, 2001. 51, 52
- Michael R. GAREY et David S. JOHNSON : *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979. ISBN 0716710447. 124
- Françoise GAYRAL : *Sémantique du langage naturel et profondeur variable : une première approche*. Thèse de doctorat, Paris 13, 1992. 62
- Alfonso GEREVINI et Bernhard NEBEL : Qualitative spatio-temporal reasoning with RCC-8 and Allen's interval calculus : Computational complexity. *In Proc. of ECAI*, pages 312–316, 2002. 49, 55, 56, 66, 107, 168
- Alfonso GEREVINI et Jochen RENZ : Combining topological and size information for spatial reasoning. *Artif. Intell.*, 137(1):1–42, 2002. 25, 44, 45, 46, 71, 83, 105
- Alfonso GEREVINI et Lenhart SCHUBERT : On computing the minimal labels in time point algebra networks. *Computational Intelligence*, 11(3):443–448, 1995. 39
- Alfonso E GEREVINI et Alessandro SAETTI : Computing the minimal relations in point-based qualitative temporal reasoning through metagraph closure. *Artificial Intelligence*, 175(2):556–585, 2011. 39
- Martin Charles GOLUMBIC et Ron SHAMIR : Complexity and algorithms for reasoning about time : A graph-theoretic approach. *Journal of the ACM (JACM)*, 40(5):1108–1133, 1993. 27
- Roop GOYAL et Max J EGENHOFER : Cardinal directions between extended spatial objects. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, pages 291–301, 2000. 70
- Susanne GRAF : *Logique du temps arborescent pour la spécification et la preuve de programmes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1984. 173
- Shyamanta M HAZARIKA et Anthony G. COHN : Qualitative spatio-temporal continuity. *In Proc. of the International Conference on Spatial Information Theory*, pages 92–107. Springer, 2001. 49

- Robin HIRSCH et Ian HODKINSON : *Relation algebras by games*, volume 147. Gulf Professional Publishing, 2002. 21, 23, 24, 72
- Jerry R. HOBBS : Granularity. *In Proceedings of IJCAI*, pages 432–435, 1985. 62
- Armen INANTS : *Qualitative calculi with heterogeneous universes*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2016. 44, 63, 108
- Peter JONSSON et Christer BÄCKSTRÖM : A unifying approach to temporal constraint reasoning. *Artificial Intelligence*, 102(1):143–155, 1998. 64
- Peter JONSSON et Thomas DRAKENGREN : Research note a complete classification of tractability in rcc-5. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 6:211–221, 1997. 30, 34
- Peter JONSSON et Andrei KROKHIN : Complexity classification in qualitative temporal constraint reasoning. *Artif. Intell.*, 160(1):35–51, 2004. 63
- Chen JUAN, Liu DAYOU, Jia HAIYANG et Zhang CHANGHAI : Integrative reasoning with topological, directional and size information based on mbr. *Journal of Computer Research and Development*, 3:007, 2010. 46
- Henry A KAUTZ et Peter B LADKIN : Integrating metric and qualitative temporal reasoning. *In AAAI*, volume 91, pages 241–246, 1991. 44, 63
- Andrei KROKHIN, Peter JEAUVONS et Peter JONSSON : Reasoning about temporal relations : The tractable subalgebras of Allen’s interval algebra. *Journal of the ACM (JACM)*, 50(5):591–640, 2003. 34, 37
- Yohei KURATA : 9-intersection calculi for spatial reasoning on the topological relations between multi-domain objects. *In Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, page 34. Citeseer, 2009. 62
- Yohei KURATA et Max J EGENHOFER : The 9+-intersection for topological relations between a directed line segment and a region. 49
- Yohei KURATA et Hui SHI : Toward heterogeneous cardinal direction calculus. *In Annual Conference on Artificial Intelligence*, pages 452–459. Springer, 2009. 62
- Peter B. LADKIN et Alexander REINEFELD : Effective solution of qualitative interval constraint problems. *Artif. Intell.*, 57(1):105–124, septembre 1992. ISSN 0004-3702. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0004-3702\(92\)90106-8](http://dx.doi.org/10.1016/0004-3702(92)90106-8). 36, 85
- Sanjiang LI et Anthony G. COHN : Reasoning with topological and directional spatial information. *Computational Intelligence*, 28(4):579–616, 2012. 45
- Sanjiang LI, Zhiguo LONG, Weiming LIU, Matt DUCKHAM et Alan BOTH : On redundant topological constraints. *Artificial Intelligence*, 225:51–76, 2015. 36, 40
- Sanjiang LI et Bernhard NEBEL : Qualitative spatial representation and reasoning : A hierarchical approach. *The Computer Journal*, 50(4):391–402, 2007. 61, 62, 127
- Gérard LIGOZAT : Towards a general characterization of conceptual neighborhoods in temporal and spatial reasoning. *In AAAI 1994 The Twelfth National Conference on Artificial Intelligence*, 1994. 53
- Gérard LIGOZAT : A new proof of tractability for ORD-Horn relations. *In Proc. of AAAI/IAAI*, volume 1, pages 395–401, 1996. 34
- Gérard LIGOZAT : Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages & Computing*, 9(1):23–44, 1998. 29, 35
- Gérard LIGOZAT : *Raisonnement qualitatif sur le temps et l’espace*. Lavoisier, 2011. 9, 16, 20, 24, 27, 32, 34, 36, 38, 39, 43, 48, 56, 127

- G erard LIGOZAT : *Qualitative spatial and temporal reasoning*. John Wiley & Sons, 2013. 34
- G erard LIGOZAT, Debasis MITRA et Jean-Fran ois CONDOTTA : Spatial and temporal reasoning : beyond allen’s calculus. *AI Communications*, 17(4):223–233, 2004. 179
- G erard LIGOZAT et Jochen RENZ : What is a qualitative calculus ? a general framework. *In Proc. of the Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence*, pages 53–64. Springer, 2004. 16, 17, 24, 25, 33, 41, 69, 70, 71, 106, 114
- Thomas D. C. LITTLE et Arif GHAFOR : Interval-based conceptual models for time-dependent multimedia data. *IEEE transactions on knowledge and data engineering*, 5(4):551–563, 1993. 27
- Weiming LIU et Sanjiang LI : Solving minimal constraint networks in qualitative spatial and temporal reasoning. *In Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 464–479. Springer, 2012. 39
- Weiming LIU, Sanjiang LI, Jochen RENZ *et al.* : Combining rcc-8 with qualitative direction calculi : Algorithms and complexity. *In Proc. of IJCAI*, pages 854–859, 2009. 46, 70
- Zhiguo LONG et Sanjiang LI : On distributive subalgebras of qualitative spatial and temporal calculi. *In Spatial Information Theory*, pages 354–374. Springer, 2015. 34, 36, 39, 40
- Roger MADDUX : Some varieties containing relation algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 272(2):501–526, 1982. 24
- Masoumeh MANSOURI et Federico PECORA : A robot sets a table : a case for hybrid reasoning with different types of knowledge. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 28(5):801–821, 2016. 43
- Pierre MARQUIS, Odile PAPINI et Henri PRADE : *Panorama de l’intelligence artificielle, ses bases m ethodologiques, ses d veloppements*, volume 1. 2014. 9
- Itay MEIRI : Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artif. Intell.*, 87(1–2):343–385, novembre 1996. ISSN 0004-3702. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0004-3702\(95\)00109-3](http://dx.doi.org/10.1016/0004-3702(95)00109-3). 44, 62, 63, 96, 109, 110, 112
- Ernest MICHAEL : Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 71(1):152–182, 1951. 131
- Roger MOHR et Thomas C HENDERSON : Arc and path consistency revisited. *Artificial intelligence*, 28(2):225–233, 1986. 45
- Angelo MONTANARI *et al.* : *Metric and layered temporal logic for time granularity*. ILLC, 1996. 57
- Reinhard MORATZ, Jochen RENZ et Diedrich WOLTER : Qualitative spatial reasoning about line segments. *In ECAI*, pages 234–238, 2000. 56, 71
- Philippe MULLER : Topological spatio-temporal reasoning and representation. *Computational Intelligence*, 18(3):420–450, 2002. 49
- Philippe MULLER *et al.* : A qualitative theory of motion based on spatio-temporal primitives. *KR*, 98:131–141, 1998. 55
- Isabel NAVARRETE, Antonio MORALES, Guido SCIAVICCO et M Antonia CARDENAS-VIEDMA : Spatial reasoning with rectangular cardinal relations. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 67(1):31–70, 2013. 70
- Bernhard NEBEL : Solving hard qualitative temporal reasoning problems : Evaluating the efficiency of using the ord-horn class. *Constraints*, 1(3):175–190, 1997. 85
- Bernhard NEBEL et Hans-J rgen B RCKERT : Reasoning about temporal relations : a maximal tractable subclass of Allen’s interval algebra. *Journal of the ACM*, 42(1):43–66, 1995. 34, 35

- Arun K PUJARI, G Vijaya KUMARI et Abdul SATTAR : Indu : An interval & duration network. *In Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 291–303. Springer, 1999. 47, 48
- Hervé QUEFFÉLEC : *Topologie-5e ed. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2016. 130, 131, 132, 184
- Marco RAGNI et Stefan WÖLFL : Temporalizing spatial calculi : On generalized neighborhood graphs. *In Proc. of KI*, pages 64–78. Springer, 2005. 50, 55, 170, 171
- Marco RAGNI et Stefan WÖLFL : Temporalizing cardinal directions : From constraint satisfaction to planning. *In Proc. of KR*, pages 472–480, 2006. 55, 168
- Marco RAGNI et Stefan WÖLFL : Reasoning about topological and positional information in dynamic settings. *In Proc. of the FLAIRS Conference*, pages 606–611, 2008. 47
- David A RANDELL, Zhan CUI et Anthony G. COHN : A spatial logic based on regions and connection. *In Proc. of KR*, pages 165–176, 1992. 30
- Jochen RENZ : A canonical model of the region connection calculus. *KR*, 98:330–341, 1998. 30, 35
- Jochen RENZ : Maximal tractable fragments of the region connection calculus : A complete analysis. *In Proc. of IJCAI*, pages 448–455, 1999. 34, 38, 98, 99, 168
- Jochen RENZ : A spatial odyssey of the interval algebra : 1. directed intervals. *In IJCAI*, pages 51–56, 2001. 56
- Jochen RENZ et Gérard LIGOZAT : Weak composition for qualitative spatial and temporal reasoning. *In Proc. of CP*, pages 534–548. Springer, 2005. 18, 30, 34, 35, 38
- Philippe RIGAUX et Michel SCHOLL : Multi-scale partitions : Application to spatial and statistical databases. *In International Symposium on Spatial Databases*, pages 170–183. Springer, 1995. 61
- Maribel Yasmina SANTOS et Adriano MOREIRA : Conceptual neighborhood graphs for topological spatial relations. *In Proc. of the World Congress on Engineering*, volume 1, pages 12–18, 2009. 49
- Hedda R SCHMIDTKE : Granularity as a parameter of context. *In CONTEXT*, pages 450–463. Springer, 2005. 62
- Hedda Rahel SCHMIDTKE : Context and granularity. *In Context in Computing*, pages 455–470. Springer, 2014. 62
- Hedda Rahel SCHMIDTKE et Woontack WOO : A size-based qualitative approach to the representation of spatial granularity. *In IJCAI*, volume 2007, pages 563–568, 2007. 62
- Michael SIOUTIS, Jean-François CONDOLTA, Yakoub SALHI et Bertrand MAZURE : A qualitative spatio-temporal framework based on point algebra. *In Proc. of AIMSA*, pages 117–128. Springer, 2014. 55
- Michael SIOUTIS, Jean-François CONDOLTA, Yakoub SALHI et Bertrand MAZURE : The implication of patchwork and compactness in qualitative spatio-temporal reasoning. *SteDy@IJCAI*, 2015a. 51, 55
- Michael SIOUTIS, Jean-François CONDOLTA, Yakoub SALHI, Bertrand MAZURE et David A RANDELL : Ordering spatio-temporal sequences to meet transition constraints : Complexity and framework. *In Proc. of AI Applications and Innovations*, pages 130–150. Springer, 2015b. 54
- Richard SNODGRASS : The temporal query language tquel. *ACM Transactions on Database Systems (TODS)*, 12(2):247–298, 1987. 27
- Fei SONG et Robin COHEN : The interpretation of temporal relations in narrative. 1988. 27
- John STELL et Michael WORBOYS : Stratified map spaces : A formal basis for multi-resolution spatial databases. *In SDH*, volume 98, pages 180–189, 1998. 61

- Marshall H STONE : The theory of representation for boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(1):37–111, 1936. 22
- Alfred TARSKI : On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic Logic*, 6(03):73–89, 1941. 23, 24
- Sabine TIMPF et Andrew U FRANK : Using hierarchical spatial data structures for hierarchical spatial reasoning. In *Proc. of the International Conference on Spatial Information Theory*, pages 69–83. Springer, 1997. 61
- Léonard TODJIHOUNDE : Topologie élémentaire pour la licence de mathématiques. cours et exercices corrigés. 2004. 130, 131
- Theodoros TOPALOGLOU : *On the representation of partial spatial information in knowledge bases*. Thèse de doctorat, National Library of Canada= Bibliothèque nationale du Canada, 1997. 61
- Peter van BEEK et Robin COHEN : Exact and approximate reasoning about temporal relations. *Computational intelligence*, 6(3):132–144, 1990. 24, 35, 39
- Nico Van de WEGHE, Anthony G. COHN et Philippe DE MAEYER : A qualitative representation of trajectory pairs. In *ECAI*, volume 16, page 1103, 2004. 56
- Nico Van de WEGHE, Anthony G. COHN, Guy DE TRE et Philippe DE MAEYER : A qualitative trajectory calculus as a basis for representing moving objects in geographical information systems. *Control and Cybernetics*, 35(1):97, 2006. 56
- Nico Van de WEGHE et Philippe DE MAEYER : Conceptual neighbourhood diagrams for representing moving objects. In *Proc. of the International Conference on Conceptual Modeling*, pages 228–238. Springer, 2005. 49
- Nico Van de WEGHE, Bart KUIJPERS, Peter BOGAERT et Philippe DE MAEYER : A qualitative trajectory calculus and the composition of its relations. In *Proc. of the International Conference on GeoSpatial Semantics*, pages 60–76. Springer, 2005. 56
- Marc VILAIN, Henry KAUTZ et Peter van BEEK : Constraint propagation algorithms for temporal reasoning : A revised report. In Daniel S. WELD et Johan de KLEER, éditeurs : *Readings in Qualitative Reasoning About Physical Systems*, pages 373–381. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1989. ISBN 1-55860-095-7. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=93913.93996>. 36
- Marc B. VILAIN, Henry KAUTZ et Peter BEEK : Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. In *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems*, pages 377–382. Morgan Kaufmann, 1986. 36
- Marc B. VILAIN et Henry A. KAUTZ : Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. In *AAAI*, volume 86, pages 377–382, 1986. 36
- Sheng-sheng WANG, Da-you LIU et Jie LIU : A new spatial algebra for road network moving objects. 2005. 56
- Frank WATTENBERG : Topologies on the set of closed subsets. *Pacific Journal of Mathematics*, 68(2):537–551, 1977. 131
- Matthias WESTPHAL : *Qualitative constraint-based reasoning : methods and applications*. Thèse de doctorat, University of Freiburg, Freiburg im Breisgau, Germany, 2015. 54, 154
- Matthias WESTPHAL, Christian DORNHEGE, Stefan WÖLFL, Marc GISSLER et Bernhard NEBEL : Guiding the generation of manipulation plans by qualitative spatial reasoning. *Spatial Cognition & Computation*, 11(1):75–102, 2011. 43, 50, 51, 53, 55, 168, 170, 171, 179
- Matthias WESTPHAL, Julien HUÉ, Stefan WÖLFL et Bernhard NEBEL : Transition constraints : A study on the computational complexity of qualitative change. In *Proc. of IJCAI*, pages 1169–1175, 2013. 50, 54, 55, 56, 154, 168, 173

- Matthias WESTPHAL et Stefan WOELFL : Bipath consistency revisited. *In ECAI Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, pages 36–40, 2008. 44, 65
- Stephan WINTER : Topological relations in hierarchical partitions. *In Proc. of the International Conference on Spatial Information Theory*, pages 141–155. Springer, 1999. 61
- Stefan WÖLFL et Matthias WESTPHAL : On combinations of binary qualitative constraint calculi. *In Proc. of IJCAI*, pages 967–973, 2009. 43, 44, 46, 47, 66
- Diedrich WOLTER et Arne KREUTZMANN : Analogical representation of rcc-8 for neighborhood-based qualitative spatial reasoning. *In Joint German/Austrian Conference on Artificial Intelligence (Künstliche Intelligenz)*, pages 194–207. Springer, 2015. 55, 168, 170, 171
- Diedrich WOLTER et Jae Hee LEE : Connecting qualitative spatial and temporal representations by propositional closure. *In Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1308–1314. AAAI Press, 2016. 64
- Michael WORBOYS : Imprecision in finite resolution spatial data. *GeoInformatica*, 2(3):257–279, 1998. 61
- Jing WU, Christophe CLARAMUNT et Min DENG : Towards a qualitative representation of movement. *In Proc. of the International Conference on Conceptual Modeling*, pages 191–200. Springer, 2014. 49
- Kai ZIMMERMANN et Christian FREKSA : Enhancing spatial reasoning by the concept of motion. *Prospects for Artificial Intelligence*, pages 140–147, 1993. 49

Titre : Un cadre algébrique pour le raisonnement qualitatif en présence d'informations hétérogènes : application aux raisonnements multi-échelle et spatio-temporel.

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons au *raisonnement multi-échelle qualitatif*, au *raisonnement spatio-temporel qualitatif* et aux combinaisons de *formalismes qualitatifs*. Nous proposons d'étendre le raisonnement temporel multi-échelle pour prendre en compte le fait que les intervalles de temps peuvent être perçus comme des instants à certaines échelles de précision, de formaliser intégralement ce raisonnement et d'étudier la *décision de la cohérence* dans ce contexte ainsi que sa complexité. Nous montrons en particulier que ce formalisme permet de décider la cohérence et que le problème de décision de la cohérence est NP-complet, même dans le cas le plus simple. En outre, nous proposons un cadre général permettant de raisonner sur les *séquences temporelles d'informations qualitatives*, une forme de description spatio-temporelle. Ce cadre permet notamment de raisonner dans le contexte d'évolutions complexes. Par exemple, les entités considérées peuvent avoir des caractéristiques préservées au cours du temps, évoluer de manière dépendante les unes par rapport aux autres, tout en ayant un comportement potentiellement irréversible et différent selon leur nature. De plus, dans ce cadre, le raisonnement est plus performant computationnellement que les approches de l'état de l'art. Nous étudions en particulier la décision de la cohérence dans le contexte spécifique de régions mobiles de taille constante, et montrons que ce cadre permet effectivement de décider la cohérence. De surcroît, nous proposons un cadre formel unifiant plusieurs formes d'extensions et de combinaisons de formalismes qualitatifs, incluant le raisonnement multi-échelle et les séquences temporelles. Ce cadre permet de raisonner dans le contexte de chacune de ces combinaisons et extensions, mais également d'étudier de manière unifiée la décision de la cohérence et sa complexité. Nous établissons en particulier deux théorèmes complémentaires garantissant que la décision de la cohérence est polynomiale, et nous les utilisons pour prouver que plusieurs fragments de séquences temporelles sont *traitables*. Pour plus de détail, voir le résumé étendu (à la page 3).

Mots-clés : raisonnement qualitatif, raisonnement spatio-temporel, raisonnement multi-échelle, contraintes et satisfaisabilité, complexité du raisonnement, combinaison de formalismes.

Title : An algebraic framework for qualitative reasoning in the presence of heterogeneous information : application to multi-scale and spatio-temporal reasoning.

Abstract : In this thesis, we are interested in *qualitative multi-scale reasoning*, *qualitative spatio-temporal reasoning* and combinations of *qualitative formalisms*. We propose to extend the multiscale temporal reasoning to take into account the fact that time intervals can be perceived as instants at certain scales of precision, to fully formalize this reasoning and to study its *consistency problem*. We show in particular that this formalism decides consistency and that the consistency problem is NP-complete, even in the simplest case. In addition, we propose a general framework for reasoning on *temporal sequences of qualitative information*, a form of spatio-temporal description. This framework allows for reasoning in the context of complex evolutions. For example, the considered entities may have characteristics preserved over time, evolve in a dependent manner with respect to each other, while having a potentially irreversible and different behavior depending on their nature. Moreover, in this context, reasoning is computationally more efficient than state-of-the-art approaches. In particular, we study the consistency problem in the specific context of constant-size moving regions, and show that this framework actually decides consistency. Furthermore, we propose a formal framework unifying several forms of extensions and combinations of qualitative formalisms, including multi-scale reasoning and temporal sequences. This framework allows one to reason in the context of each of these combinations and extensions, but also to study in a unified way the consistency problem. In particular, we establish two complementary theorems guaranteeing that the consistency problem is polynomial, and we use them to prove that several fragments of temporal sequences are *tractable*. For more details, see the extended abstract (at the page 3).

Keywords : qualitative reasoning, spatio-temporal reasoning, multi-scale reasoning, constraints and satisfiability, complexity of reasoning, combination of formalisms.