HAL
open science

# Réduction des niveaux vibratoires d'un panneau au moyen de trous noirs acoustiques structurés en réseau périodique : conception d'une méta-plaque

Omar Aklouche

## To cite this version:

Omar Aklouche. Réduction des niveaux vibratoires d'un panneau au moyen de trous noirs acoustiques structurés en réseau périodique : conception d'une méta-plaque. Vibrations [physics.class-ph]. Le Mans Université - LAUM - Le Mans (72), 2017. Français. NNT : 2017LEMA1030 . tel-01717745v1

**HAL Id: tel-01717745**

**https://theses.hal.science/tel-01717745v1**

Submitted on 26 Feb 2018 (v1), last revised 31 May 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Omar AKLOUCHE

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de :
**Docteur de Le Mans Université**, sous le label de L'**Université Bretagne Loire**

**École doctorale : SPIGA**

**Discipline : 60**
**Spécialité : Acoustique**
**Unité de recherche : LAUM UMR CNRS 6613**

**NNT : 2017LEMA1030**
**Soutenue le : 27 / 10 / 2017.**

# Réduction des niveaux vibratoires d'un panneau au moyen de trous noirs acoustiques structurés en réseau périodique : conception d'une méta-plaque

## JURY

| | |
|---|---|
| Rapporteurs : | **Emmanuel FOLTETE**, Professeur, Institut FEMTO-ST (Besançon) |
| | **Ruben PICO VILA**, Professeur, Université Polytechnique de Valence (Gandia) |
| Examinateurs : | **Manuel COLLET**, Directeur de recherche CNRS, École Centrale de Lyon (Lyon) |
| | **Anne-Christine HLADKY**, Directrice de recherche CNRS, Institut d'électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie (Lille) |
| Invités : | **François BESLUAU**, Ingénieur, Airbus Operation SAS (Toulouse) |
| | **Pascal AUDRAIN**, Docteur, IRT Jules VERNE (Le Mans) |
| Directeur de thèse : | **François GAUTIER**, Professeur, Université du Maine (Le Mans) |
| Co-directeurs de thèse : | **Adrien PELAT**, Maître de conférences, Université du Maine (Le Mans) |
| | **Sylvain MAUGEAIS**, Maître de conférences, Université du Maine (Le Mans) |

# Résumé

À cause de la gêne qu'elles occasionnent, les vibrations des structures mécaniques constituent un sujet d'étude important dans de nombreux contextes industriels. La réduction des niveaux vibratoires indésirables est en général obtenue de façon passive grâce à l'ajout de matériaux viscoélastiques, granulaires ou encore d'absorbeurs dynamiques. Ces méthodes efficaces et relativement simples de mise en œuvre donnent cependant lieu à une masse ajoutée, qui n'est en général pas souhaitée. L'utilisation de l'effet trou noir acoustique (TNA) est une stratégie alternative, permettant d'amortir les structures de façon passive sans pour autant augmenter leur masse. Le TNA consiste à réaliser un amincissement local de la structure et à la revêtir d'une couche viscoélastique. L'effet TNA résulte alors de l'augmentation locale de l'amplitude vibratoire, qui sollicite fortement le revêtement, donnant lieu de ce fait à un amortissement localisé important.

L'objectif de ce travail de thèse est de réaliser une analyse détaillée du mécanisme d'amortissement induit par le TNA, afin d'en tirer le meilleur parti. Un TNA sans revêtement viscoélastique, inséré dans une plaque mince infinie est analysé dans un premier temps au moyen d'un modèle ondulatoire. L'analyse des relations de dispersion, montre que quatre ondes de flexion coexistent dans la région inhomogène et qu'au-delà d'une fréquence de coupure, toutes ces ondes sont fortement atténuées, traduisant ainsi l'effet TNA. L'étude de la section efficace de diffusion montre qu'il existe des résonances locales piégées, et qu'il est possible de les contrôler au moyen des caractéristiques géométriques. Le TNA avec revêtement est étudié en utilisant un modèle aux différences finies. On montre que l'ajout du film viscoélastique induit un mécanisme d'amortissement local important, permettant d'augmenter significativement l'amortissement global de la structure.

L'effet TNA étant surtout efficace au-delà de sa fréquence de coupure, la conception d'une méta-plaque, consistant en une organisation périodique de trous noirs est proposée, de façon à tirer parti de possibles bandes d'arrêt de Bragg ou de résonance en basses fréquences. Un réseau carré est étudié numériquement par la méthode PWE et expérimentalement par mesure de mobilités vibratoires. L'analyse des diagrammes de dispersion montre qu'il est difficile d'obtenir des bandes interdites complètes à basses fréquences en utilisant un TNA à profil classique. Les mesures confirment ce constat : les mobilités sont uniquement lissées dans la gamme des hautes fréquences, traduisant un effet cumulatif des différents trous noirs. Une autre stratégie consiste à utiliser un réseau périodique de TNA à profil sinusoïdal, à symétrie carrée ou triangulaire. La plaque est analysée numériquement et expérimentalement. Les résultats montrent que la méta-plaque est à la fois amortie en basses fréquences par les effets de réseau et à hautes fréquences par les effets cumulatifs des trous noirs, ce qui en fait une structure intéressante pour l'ingénieur.

# Abstract

Because of the inconvenience they cause, the vibrations of the mechanical structures are an important subject of study in many industrial contexts. The passive reduction of the undesirable vibratory levels is generally obtained by the addition of viscoelastic materials, granular materials or dynamic absorbers. These efficient and relatively simple methods of implementation give rise to an added mass, which is generally not desired. The Acoustic Black Hole (ABH) is an alternative strategy, allowing the structures to be damped passively without increasing their mass. The ABH consists of performing a local thinning of the structure and coating it with a thin viscoelastic layer. The ABH effect then results from the local increase in the vibratory amplitude, which strongly stresses the viscoelastic coating, giving rise to high localized damping.

The general objective of the thesis work is to carry out a detailed analysis of the damping mechanism induced by the ABH, in order to make the most use of it. A black hole without a viscoelastic coating, inserted into an infinite thin plate is initially analyzed by means a wave model. The analysis of the dispersion relations shows that four bending waves coexist in the inhomogeneous region and that, beyond a cutoff frequency, all these waves are strongly attenuated, thus reflecting the ABH effect. The study of the scattering cross-section shows that there are local trapped resonances, and that it is possible to control them by means the geometric characteristics. The ABH with viscoelastic coating is studied using a finite difference formulation. It is shown that the addition of the viscoelastic film induces an important local damping mechanism, allowing to significantly increase the overall damping of the structure.

The ABH effect being especially effective beyond its cutoff frequency, we propose the design of a meta-plate, consisting of a periodic distribution of a set of black holes, so as to take advantage of possible low frequency Bragg or resonance band gaps. A square periodic lattice is studied numerically by the PWE method and experimentally by measurement of vibratory mobilities. The analysis of the dispersion diagrams shows that it is difficult to obtain complete band gaps at low frequencies by using the classical ABH. The measurements confirm this finding : the mobilities are only smoothed in the high frequency range, reflecting a cumulative effect of the different black holes. Another strategy is to use a periodic rectangular or triangular lattice of black holes with sinusoidal profiles. The plate is analyzed numerically and experimentally and the results show that the meta-plate is both damped at low frequencies by the lattice effects and at high frequencies by the cumulative effects of black holes,which makes an interesting structure for the engineer.

# Remerciements

Le travail de cette thèse n'aurait pas été possible sans le soutien de certaines personnes, que j'aimerais mettre en avant dans ces remerciements. En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement ma direction de thèse, à savoir François GAUTIER, Adrien PELAT et Sylvain MAUGEAIS, de m'avoir fait confiance et d'avoir travaillé à mes côtés sans relâche pour mener à bien cette thèse. François, merci pour ton accompagnement, ta disponibilité et pour l'enthousiasme et le savoir que tu m'as transmis. Adrien, merci pour ton entière implication dans cette thèse. Tes critiques et conseils tout au long de ces années ont été constructifs et m'ont toujours guidé dans le bon sens. Sylvain, merci pour ta disponibilité, ton humanisme et ta grande patience pendant nos réunions en tête à tête. Tes généreux secours au cours des moments de difficulté ont été d'une très grande qualité et d'un immense réconfort pour moi. Enfin merci à tous les trois pour votre patience pendant les longues, et fructueuses, réunions de travail, qui ont été d'un intérêt inestimable.

Je remercie l'Institut de Recherche Technologique Jules Vernes (IRT JV) d'avoir financé ces travaux, et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour l'accomplissement de cette thèse. Je remercie également Charles PEZERAT d'avoir dirigé le projet de recherche VIBROLEG (VIBROacoustique des structure LEGères), dans lequel s'inscrit cette thèse, et d'avoir veillé à son bon déroulement. Mes remerciements vont au président de l'Université du Maine, Rachid EL GUERJOUMA, et aux directeurs du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM), Joël GILBERT (directeur du LAUM jusqu'à 2016) et Pierrick LOTTON (directeur actuel du LAUM), pour leur accueil chaleureux dans leurs université et laboratoire. Mes remerciements vont aussi à Pascal LEROUX qui m'a accueilli dans les locaux de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans (ENSIM) depuis mon stage de Master 2. J'ai effectué deux ans d'enseignement en tant que CTER à l'ENSIM, durant lesquels j'ai pu collaborer avec une équipe soudée, dynamique et compétente de collègues d'enseignants et d'enseignants-chercheurs : merci à Matthieu, Yannick, Youcef, Charly, Julien, Alexey, Antoine, Adalbert, Sahar, Nadia, Changwei, Nicolas, Mourad, François et Adrien. Je tiens également à remercier l'équipe administrative pour la bonne humeur de tous les jours. Un grand merci au staff technique : Mathieu, Nicolas, Julien et Catherine, pour leur aide fréquemment sollicitée.

J'adresse aussi mes remerciements à Emmanuel FOLTETE et Ruben PICO VILA pour avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. Je tiens à remercier Anne-Christine HLADKY d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie également tous les membres du jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail, à savoir Manuel COLLET en tant que examinateur, François BESLUAU et Pascal AUDRAIN en tant que invités. Je remercie tout particulièrement Pascal pour son écoute précieuse, ses

conseils et pour sa relecture du manuscrit. Je n'oublie pas les membres de mon comité de suivi de thèse : merci à Emmanuel FOLTETE et Jean-Philippe GROBY pour leurs remarques et critiques constructives, et leurs écoute et conseils pendant les réunions de CST.

Plusieurs travaux ont contribué au développement de la thématique "trou noir acoustique" au sein du LAUM. Je remercie toutes les personnes qui ont fait avancer ce thème par leurs projets, stages et thèses. Je tiens à remercier tout particulièrement Pierre-Yvon BRYK, Yue LIE, Anthony DELETANG, Ameer-Adli ZALI et Ao WANG pour leur pleine implication et leur apport scientifique important à cette thèse.

Mes remerciements seraient incomplets si je ne fais pas mention de mes chers collègues de bureau : Margaux, Julien, Charly, Martial et Sahar, avec qui j'ai partagé des moments très forts au quotidien, à savoir des moments difficiles la plus part des fois, et de joie parfois. Margaux, merci pour ta gentillesse, ton écoute, tes conseils et ton retour d'expérience sur la thèse. Julien, un grand merci pour tous les moments partagés ensemble depuis le stage de M2. Je garde toujours en tête à quel point tu étais serviable et prêt à m'aider, à savoir ton occupation, à ma place, de la paperasse et de la logistique des déplacements à l'IRT ou en congrès. Tu as pu être présent quand j'avais besoin de toi, je te remercie infiniment pour ta patience. Charly, ta présence dans le bureau a été toujours importante et d'un grand intérêt pour moi. Merci pour les moments de discussions techniques et de critiques scientifiques fructueuses, partagés ensemble. Merci également pour les interminables, mais enrichissants, débats géopolitiques tenus parfois au bureau. Martial, ton passage à l'ENSIM a été court mais mémorable. Merci pour les échanges scientifiques intéressants au quotidien. Sahar, tu es arrivée à l'ENSIM au bon moment..., au moment où tout le monde était parti pour d'autres horizons. Merci de m'avoir tenu compagnie avec ton agréable humeur de tous les jours. Merci de ta présence à mon côté dans les périodes les plus difficiles. De nombreuses autres personnes m'ont accompagné dans cette aventure. Je leur suis reconnaissant d'avoir participé à l'ambiance de ma vie de thésard. Je pense à la "Team" des doctorants de l'ENSIM : Vivien, Laurianne, Thibault, Olfa, Yosra, Charlie, Océane, Antoine, Sylvain, Paul, Justine, Julien, Hicham et Torea.

Qu'ils soient en Algérie ou ailleurs, mes amis(es) aussi ont contribué à l'aboutissement de cette thèse. J'adresse mes remerciements à Smail, Ouahiba, Djamel, Nacer, Linda, Tahar, Massiva, Taous, Amina, Nacira, Rafik, Fatiha, Massinissa, Lyes, Kaci, Kouceila, Menad, Ferhat, Sofiane, Yacine, Mustafa, Taous, Mohamed, Amar, Moussa, Waziza, Slimane, Makhlouf, Lyes, Zaki, qui ont su m'écouter, me conseiller et me remonter le moral dans les moments difficiles. Ma famille, même si loin de moi, a joué un rôle important dans cette thèse. Je suis reconnaissant à mes parents : Oulaid et M'barka, mes frères : dadda Mohand et Massinissa, et à mes sœurs : danna Samia, Hassina et Souad, pour leur soutien moral hebdomadaire, pour la confiance qu'il m'ont accordée et d'avoir toujours cru en moi. Une personne de très grande importance dans ma vie, qui m'accompagne, soutient et qui me supporte tout le temps. Il s'agit de mon épouse Asma KECHOUT, dont je ne pourrai mesurer l'apport dans l'accomplissement de cette thèse. Tout ce que j'ai pu souffrir et obtenir, elle l'a vécu avec moi. Je te remercie infiniment ma chérie.

***"Quelle que soit la durée de la nuit,***
***le soleil finit toujours par se lever"***

# Table des matières


Résumé . . . 2
Abstract . . . 3
Remerciements . . . 4
Table des Matières . . . 5
Table des Figures . . . 9
Nomenclature . . . 12

**Introduction générale** **16**
Contexte de la thèse . . . 16
Vibrations des structures : définition et enjeux . . . 16
Allégement des structures mécaniques . . . 17
Méthodes usuelles d'amortissement vibratoire . . . 17
Trou noir acoustique : synthèse bibliographique . . . 20
Préliminaire . . . 20
Trou noir acoustique 1D . . . 21
Trou noir acoustique 2D . . . 26
Méta-plaque avec réseau carré de trous noirs débouchants . . . 28
Description des plaques testées . . . 28
Dispositif expérimental . . . 28
Comparaison des mobilités de la plaque de référence et la méta-plaque . . . 29
Objectifs de la thèse . . . 30
Organisation du manuscrit . . . 30

**1 Introduction à la diffusion des ondes de flexion par un obstacle** **32**
Résumé . . . 32
1.1 Généralités : diffusion des ondes . . . 32
1.2 Théorie des plaques de Kirchhoff . . . 34
1.2.1 Introduction . . . 34
1.2.2 Vibrations de flexion d'une plaque mince circulaire . . . 35
1.2.2.1 Équation du mouvement . . . 35
1.2.2.2 Solutions analytiques de l'équation des plaques uniformes . 37
1.3 Diffusion des ondes de flexion . . . 39
1.3.1 Conditions à l'interface $r = b$ . . . 41
1.3.2 Application numérique et discussion . . . 43
1.4 Conclusion . . . 46

**2 Modèle analytique de diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique 48**
2.1 Introduction . . . 48
2.2 Modèle d'un trou noir sans film . . . 48
2.2.1 Position du problème . . . 48
2.2.2 Mise en équations . . . 50
2.2.3 Méthode analytique de résolution . . . 51
2.2.3.1 Champ de déplacement extérieur ($r \geq b$) . . . 51
2.2.3.2 Champ de déplacement intérieur ($a \leq r \leq b$) . . . 51
2.2.4 Résultats numériques . . . 54
2.2.4.1 Relations de dispersion . . . 54
2.2.4.2 Champ de déplacement total . . . 56
2.2.4.3 Section efficace de diffusion . . . 58
2.2.5 Modes piégés . . . 61
2.2.5.1 Introduction . . . 61
2.2.5.2 Calcul des modes piégés . . . 61
2.2.6 Analyses paramétriques . . . 62
2.2.6.1 Influence du facteur de pertes uniforme $\eta_0$ . . . 63
2.2.6.2 Influence de l'épaisseur de troncature $h_t$ . . . 64
2.2.6.3 Influence de la constante du profil $a'$ . . . 64
2.3 Conclusion . . . 65

**3 Conception et caractérisation d'un trou noir acoustique à résonances contrôlées 68**
3.1 Introduction . . . 68
3.2 Modèle de différences finies . . . 68
3.2.1 Configurations étudiées . . . 68
3.2.2 Modèle de rigidité équivalente . . . 69
3.2.3 Discrétisation de la zone non-uniforme . . . 71
3.2.4 Validation du modèle du TN débouchant . . . 72
3.3 Effet de l'hétérogénéité radiale de pertes . . . 74
3.3.1 Préliminaire . . . 74
3.3.2 Rôle de la non-uniformité de l'amortissement dans le trou noir bidimensionnel . . . 75
3.4 Aménagement de la zone centrale . . . 76
3.4.1 Contrôle par la raideur . . . 76
3.4.1.1 Modèle . . . 77
3.4.1.2 Résultats . . . 78
3.4.2 Contrôle de résonances par la masse . . . 79
3.4.2.1 Description de la géométrie . . . 79
3.4.2.2 Formulation du problème . . . 80
3.4.2.3 Résultats et discussions . . . 83
3.5 Conclusion . . . 86

**4 Modélisation et tests expérimentaux d'une méta-plaque à réseau périodique carré 88**
Résumé . . . 88
4.1 Ondes et structures périodiques . . . 88
4.1.1 Bref historique . . . 88
4.1.2 Les structures périodiques . . . 89
4.1.3 Réseaux direct, réseau réciproque et zone de Brillouin . . . 90
4.1.4 Théorème de Floquet-Bloch . . . 91
4.1.5 Cristaux phononiques . . . 92
4.2 Méthode PWE pour les milieux périodiques . . . 95
4.2.1 PWE pour une poutre . . . 95
4.2.1.1 Équation de flexion de poutre . . . 95
4.2.1.2 Développement en séries de Fourier . . . 96
4.2.1.3 Problème aux valeurs propres . . . 96
4.2.1.4 Diagrammes de dispersion . . . 98
4.2.2 PWE pour une méta-plaque . . . 100
4.2.2.1 Position et formulation du problème . . . 100
4.2.2.2 Résolution du problème . . . 102
4.2.2.3 Validation de la méthode . . . 103
4.2.2.4 Application à la méta-plaque de trous noirs . . . 104
4.2.2.5 Cas de la méta-plaque accordée . . . 107
4.3 Test expérimental d'une méta-plaque de trous noirs avec masse centrale . . . 109
4.3.1 Description du montage expérimental . . . 109
4.3.2 Accord de la résonance du trou noir à la fréquence de Bragg . . . 110
4.3.3 Résultats de mesures . . . 110
4.4 Conclusion . . . 112

**5 Méta-plaque à réseau périodique : nouvelle géométrie combinant bande interdite et effet trou noir 114**
Résumé . . . 114
5.1 Remise en question du profil quadratique . . . 115
5.1.1 Définition du nouveau profil d'épaisseur . . . 115
5.1.2 Étude du profil en fonction de $\gamma$ . . . 117
5.2 Remise en question du réseau carré . . . 119
5.2.1 Définition du réseau triangulaire . . . 119
5.2.2 Application de la méthode PWE au réseau triangulaire . . . 120
5.2.2.1 Validation sur la plaque uniforme . . . 120
5.2.2.2 Courbes de dispersion du trou noir circulaire : $\gamma = 1$ . . . 121
5.2.3 Dimensionnement de la cellule . . . 122
5.2.4 Choix du profil optimal . . . 124
5.3 Validation expérimentale . . . 125
5.3.1 Méta-plaque à réseau triangulaire . . . 125
5.3.1.1 Description du processus expérimental . . . 125
5.3.1.2 Réponse vibratoire de la méta-plaque sans adhésif . . . 126
5.3.1.3 Analyse de l'amortissement induit par l'adhésif . . . 126
5.4 Conclusion . . . 135

**Conclusions générales et perspectives** **136**
Conclusions générales . . . . . 136
Perspectives . . . . . 137

**Bibliographie** **138**

**Annexes** **150**

**A Diffusion par des obstacles de forme simple** **150**

**B Diffusion par un trou noir acoustique débouchant** **152**
B.1 Effort de Kelvin-Kirchhoff . . . . . 152
B.2 Constantes de propagation . . . . . 152
B.3 Système linéaire . . . . . 155

**C Éléments complémentaires de calculs : méthode des différences finies** **156**
C.1 Discrétisation de l'équation du mouvement . . . . . 156
C.2 Discrétisation des conditions aux limites . . . . . 157
C.2.1 Discrétisation décentrée à droite : $r = a$ . . . . . 157
C.2.2 Discrétisation décentrée à gauche : $r = b$ . . . . . 158

**D Mesure du facteur de perte du film viscoélastique utilisé** **160**

# Table des figures


1 Évolution du nombre de publications scientifiques liées au TNA . . . . . 21
2 Vue de profil d'un TNA 1D muni d'une fine couche de matériau viscoélastique. 22
3 Mobilité vibratoire d'entrée d'une poutre avec deux trous noirs . . . . . 23
4 Module et phase du coefficient de réflexion expérimental de poutres/TNA . 24
5 Valeurs propres et modes propres d'une poutre/TNA . . . . . 24
6 Module du coefficient de réflexion d'une poutre/TNA avec et sans défaut . 25
7 Profil du trou noir acoustique bidimensionnel . . . . . 26
8 Indice d'efficacité d'un TNA 2D avec et sans revêtement viscoélastique . . 27
9 Méta-plaque avec 60 trous noirs acoustiques débouchants. . . . . 28
10 Montage expérimental . . . . . 29
11 Mobilités vibratoires de deux plaques : référence et 60 trous noirs . . . . . 29

1.1 Diffusion des ondes par une surface rugueuse et rigide. . . . . 33
1.2 Types de diffusion des ondes. . . . . 33
1.3 Moments et efforts s'exerçant sur un élément de plaque circulaire . . . . . 36
1.4 Variation des fonctions de Bessel en fonction de leur argument $x$ . . . . . 38
1.5 Onde plane de flexion incidente sur un obstacle dans une plaque mince infinie 40
1.6 Diagrammes de directivité des trois diffuseurs étudiés pour $\alpha = 0.5$, 1 et 5 44
1.7 Champ rétrodiffusé lointain en fonction de $\alpha$ . . . . . 45

2.1 Description des cotes d'un trou noir acoustique débouchant. . . . . 49
2.2 Onde plane en incidence normale sur un trou noir acoustique débouchant . 49
2.3 Courbes de dispersion à l'intérieur du trou noir . . . . . 54
2.4 Courbes de dispersion de $k_{3,n}$ pour différents ordres circonférentiels . . . . 56
2.5 Champs du déplacement et diagrammes polaires du trou noir débouchant . 57
2.6 Section efficace globale de diffusion du trou noir débouchant . . . . . 59
2.7 Sections efficaces de diffusion élémentaires du trou noir débouchant . . . . 60
2.8 Module en dB du déterminant de la matrice $\boldsymbol{M}$ pour $n = 0$ . . . . . 62
2.9 Module en dB des déformées modales des modes piégés du trou noir . . . . 62
2.10 Influence du facteur de pertes uniforme $\eta_0$ sur la section efficace de diffusion 63
2.11 Profil du trou noir pour différentes valeurs du ratio d'épaisseur $h_t/h_0$. . . . 64
2.12 Influence de l'épaisseur de troncature $h_t$ sur la section efficace de diffusion . 64
2.13 Profil du trou noir pour différentes valeurs de la constante du profil $a'$. . . 65
2.14 Influence de $a'$ sur la section efficace de diffusion . . . . . 65

3.1 Vue de profil des trois configurations de TN considérées . . . . . 69
3.2 Évolution radiale du facteur de pertes équivalent . . . . . 71
3.3 Champ du déplacement : calculs analytique et numérique . . . . . 74

3.4 Section efficace et nombres d'onde propres analytiques et numériques . . . 74
3.5 Section efficace et champ du déplacement en fonction de l'épaisseur du film 76
3.6 Profil du trou noir non-débouchant pour plusieurs valeurs de $h_1$ . . . . . 78
3.7 Section efficace de diffusion et champ du déplacement du TN non-débouchant 79
3.8 Profil d'épaisseur d'une plaque munie d'un trou noir avec masse centrale. . 80
3.9 Section efficace de diffusion du TN non-débouchant avec masse et revêtement 83
3.10 Vue de profil du TN non-débouchant avec masse centrale. . . . . 84
3.11 Section efficace du TN non-débouchant en fonction de la masse centrale . . 84
3.12 Trois ordres de profils du TN non-débouchant avec masse centrale . . . . . 85
3.13 Section efficace du TN non-débouchant avec masse en fonction du profil . . 86

4.1 Types de structures périodiques classées selon leur dimension . . . . . 89
4.2 Réseau direct, réseau réciproque et première zone de Brillouin . . . . . 91
4.3 Représentation schématique du théorème de Floquet-Bloch . . . . . 92
4.4 Schéma d'une chaine diatomique de masses-ressorts . . . . . 93
4.5 Courbes de dispersion dans les réseaux monoatomique et diatomique . . . 94
4.6 Schéma d'une poutre périodique et sa section droite . . . . . 95
4.7 Courbes de dispersion d'une poutre périodique, calculées avec la "PWE" . 99
4.8 Courbes de dispersion d'une poutre périodique, calculées par la "EPWE" . 100
4.9 Méta-plaque, cellule unitaire et sa première zone de Brillouin . . . . . 101
4.10 Courbes de dispersion d'ondes de flexion dans une plaque uniforme. . . . . 104
4.11 Courbes de dispersion d'une plaque avec réseau périodique d'inclusions cylindriques . . . . . 105
4.12 Profil d'épaisseur de la cellule unitaire de la méta-plaque étudiée. . . . . 105
4.13 Courbes de dispersion de la méta-plaque avec réseau carré de trous noirs . 106
4.14 Profils réels et synthétisés des fonctions périodiques $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. . . . . 106
4.15 Profile de la cellule unitaire de la méta-plaque accordée. . . . . 107
4.16 Courbes de dispersion de la méta-plaque accordée. . . . . 108
4.17 Modes de la cellule unitaire de méta-plaque de trous noirs avec masse centrale 108
4.18 Description du montage expérimental. . . . . 109
4.19 Mobilité et déformée opérationnelle du trou noir avec masse. . . . . 110
4.20 Mobilité quadratique moyenne d'une méta-plaque de trou noir avec masse . 111
4.21 Déformées de la méta-plaque de trous noirs avec masse centrale. . . . . 111

5.1 Cellule unitaire du réseau carré avec le nouveau profil. . . . . 116
5.2 Spectres des profils (a) d'épaisseur et (b) de la rigidité de flexion. . . . . 116
5.3 Variation de l'épaisseur, son spectre et les courbes de dispersion dans le réseau carré en fonction de $\gamma$. . . . . 118
5.4 Cellule unitaire du réseau carré, épaisseur et diagramme de dispersion pour $\gamma = -1$. . . . . 119
5.5 Méta-plaques avec $5 \times 5$ cellules carrées et triangulaires. . . . . 120
5.6 Courbes de dispersion d'une plaque uniforme à réseau triangulaire. . . . . 121
5.7 Cellule unitaire du réseau triangulaire, épaisseur et diagramme de dispersion pour $\gamma = 1$. . . . . 122
5.8 Variation de l'épaisseur, son spectre et les courbes de dispersion dans le réseau triangulaire en fonction de $\gamma$. . . . . 123
5.9 Profil de la cellule et diagramme de dispersion de la méta-plaque optimale. 124

5.10 Photographie de la méta-plaque réalisée pour les tests. . . . . 125
5.11 Mobilité quadratique moyenne de la méta-plaque sans adhésif. . . . . 126
5.12 Mobilités quadratiques moyennes de la méta-plaque sans et avec film adhésif. 127
5.13 Champ de mobilité quadratique moyenne de la méta-plaque à fréquence fixée. 128

C.1 Schéma utilisé pour discrétisation. . . . . 156

D.1 Mesure du facteur de perte du film utilisé en fonction de la fréquence . . . 160

# Nomenclature

## Variables générales

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $x, y, z$ | Coordonnées spatiales cartésiennes | m |
| $r, \theta, z$ | Coordonnées spatiales cylindriques | m, rad, m |
| $t$ | Temps | s |
| $f$ | Fréquence | Hz |
| $\omega$ | Pulsation | rad.s$^{-1}$ |
| $k_f$ | Nombre d'onde naturel de flexion | rad.m$^{-1}$ |
| $\lambda$ | Longueur d'onde | m |

## Paramètres physiques de la plaque

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $\rho$ | Masse volumique | kg.m$^{-3}$ |
| $\eta$ | Facteur de pertes du matériau | - |
| $E_0$ | Module d'Young élastique | Pa |
| $E$ | Module d'Young avec pertes | Pa |
| $\nu$ | Coefficient de Poisson | - |
| $D$ | Rigidité de flexion | Pa.m$^3$ |

## Paramètres géométriques du trou noir

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $h_{TN}$ | Épaisseur de la zone variable | m |
| $h_0$ | Épaisseur de la zone uniforme | m |
| $h_t$ | Épaisseur de troncature | m |
| $a$ | Rayon intérieur | m |
| $b$ | Rayon extérieur | m |
| $a'$ | Constante du profil | m |
| $m$ | Ordre du profil | - |

## Variables d'état

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $W$ | Déplacement transversal | m |
| $\Theta_r$, $\Theta_\theta$ | Pentes dans les directions $r$ et $\theta$ | - |
| $M_r$, $M_\theta$ | Moments fléchissants dans les directions $r$ et $\theta$ | N |
| $M_{r\theta}$ | Moment de torsion | N |
| $Q_r$, $Q_\theta$ | Efforts tranchants de Kirchhoff dans les directions $r$ et $\theta$ | N.m$^{-1}$ |
| $V$ | Effort tranchant de Kélvin-Kirchhoff | N.m$^{-1}$ |

## Champs vibratoires

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $W_{inc}$ | Champ du déplacement incident | m |
| $W_{diff}$ | Champ du déplacement diffusé | m |
| $W^{ext}$ | Champ du déplacement dans la zone extérieure | m |
| $W^{int}$ | Champ du déplacement dans la zone intérieure | m |
| $W^{TN}$ | Champ du déplacement dans la zone du trou noir | m |
| $W^{cent}$ | Champ du déplacement dans la zone centrale | m |

## Propriétés de diffusion

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $f(\theta)/\sqrt{b}$ | Fonction de directivité, ou fonction de forme | m |
| $f(\pi)/\sqrt{b}$ | Champ rétrodiffusé lointain | m |
| $Q_{diff}$ | Section efficace de diffusion | m |

## Milieux périodiques & PWE

| Grandeur | Description | Unité |
|---|---|---|
| $L$ | Période spatiale du réseau | m |
| $\boldsymbol{k}$ | Nombre d'onde de Bloch | rad.m$^{-1}$ |
| $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$, $\boldsymbol{G_3}$ | Vecteurs d'onde du réseau réciproque | rad.m$^{-1}$ |
| $\boldsymbol{W_k(G_1)}$ | Coefficients de Fourier du vecteur $\boldsymbol{G_1}$ | m |
| $\Gamma XM$, $\Gamma MK$ | Périmètres des zones de Brillouin irréductibles des réseaux carré et triangulaire | - |

# Introduction Générale

## Contexte de la thèse

Le contexte de cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet de recherche VIBROLEG (VIBROacoustique des structures LÉGères), financé par l'Institut de Recherche Technologique Jules Verne (IRT JV), qui réunit un ensemble d'organismes académiques (Le Mans Université et son laboratoire d'acoustique, le LAUM) et industriels comme Airbus, Naval Group, STX, DAHER, le CETIM, Bureau Veritas et General Electric. L'objectif de ce projet est de répondre à certaines problématiques liées à la caractérisation vibratoire et à l'allégement des structures utilisées en ingénierie mécanique, en particulier dans le domaine des transports. Le projet est structuré dans son ensemble sous forme de thèses de doctorat, organisées selon deux grands axes de recherche. Le premier axe concerne la thématique du diagnostic vibratoire et s'organise en trois thèses : l'holographie optique numérique ultra-rapide pour la mesure du champ vibratoire [1], la caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire [2, 3] et la caractérisation de sources aéroacoustiques excitant les structures légères [4]. Le second axe est centré autour de la thématique de l'allégement des structures et se décline également en trois thèses, proposant des méthodes innovantes pour la réduction des vibrations : la première thèse, faisant l'objet de ce manuscrit, propose une méthode d'amortissement vibratoire par réseau périodique de trous noirs acoustiques, la seconde se base sur l'utilisation de patchs piézoélectriques pour l'augmentation de l'isolation acoustique et vibratoire de parois d'une structure vibrante [5], et la troisième thèse concerne l'utilisation de matériaux granulaires légers dans les structures tubulaires pour la réduction des niveaux vibratoires [6].

## Vibrations des structures : définition et enjeux

Les vibrations se produisent dans de nombreux systèmes mécaniques et structurels. Si elles sont incontrôlées, celles-ci peuvent alors entraîner des situations catastrophiques. Divers exemples pointant les risques et les problèmes induits par les vibrations indésirables peuvent être cités : les vibrations des machines d'usinage peuvent conduire à un usinage inadéquat des pièces [7]. La défaillance d'une structure peut se produire en raison des contraintes dynamiques élevées développées pendant un tremblement de terre [8] ou même à cause des vibrations induites par le vent [9]. Les vibrations que subit une hélice d'un hélicoptère en rotation à des vitesses élevées sont souvent importantes. Lorsque l'hélice possède un défaut de fabrication, celui-ci peut s'aggraver à cause des vibrations et conduire à un dysfonctionnement de l'hélice pouvant causer une catastrophe pour l'appareil en vol [10]. Les vibrations excessives des pompes [11], des compresseurs [12], des turbomachines [13] et d'autres machines de production industrielles induisent des vibrations qui peuvent

entraîner un fonctionnement inefficace des machines, tandis que le bruit rayonné peut provoquer de fortes nuisances pour l'entourage [14–16]. La liste des problèmes engendrés par les vibrations est longue et ne peut se résumer aux quelques exemples cités. Néanmoins, ces exemples montrent à quel point les vibrations constituent un sujet omniprésent dans l'industrie mécanique, ainsi à quel point il est important de les réduire pour assurer la sécurité et le fonctionnement correct des équipements.

## Allégement des structures mécaniques

L'allégement des structures mécaniques suscite actuellement beaucoup d'intérêt. L'objectif visé est de réduire principalement la consommation d'énergie nécessaire au transport des structures. Cela permet de réduire l'émission des gaz à effet de serre, comme le dioxyde de carbone ($CO_2$), qui sont à l'origine de la pollution atmosphérique et la progression du réchauffement climatique. Par exemple dans le transport routier, il est établi par l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME) qu'une diminution de 500 kg de la masse d'un véhicule permet de baisser les émissions du $CO_2$ d'environ de 2 % (d'après [17]). Dans les structures légères, le problème des vibrations se pose de façon assez naturelle : en effet ces structures sont très sensibles aux excitations extérieures et peuvent vibrer avec de grandes amplitudes, ce qui les rend de plus en plus rayonnantes (sur le plan acoustique) et fragiles (sur le plan mécanique). La réduction de masse est l'un des facteurs principaux d'augmentation des nivaux vibratoires et acoustiques, qui conduisent à la dégradation des performances vibratoires et du confort acoustique. De ce fait, le contrôle des vibrations indésirables des structures légères est un enjeu important.

## Méthodes usuelles d'amortissement vibratoire

L'amortissement met en jeu des forces dissipatives qui agissent sur un système vibrant de façon à diminuer son énergie mécanique. Le phénomène est causé par divers mécanismes : impacts, glissement ou autres frottements, interaction fluide-structure, rayonnement vibratoire aux appuis et mécanismes internes (viscoélastiques, thermoélastiques) dissipant l'énergie sous forme de chaleur. L'amortissement, contrairement aux caractéristiques de rigidité et d'inertie, est une quantité souvent difficile à quantifier car il résulte souvent de plusieurs mécanismes physiques différents coexistants. Il ne peut pas en général être mesuré à l'aide d'expériences statiques. L'amortissement est généralement plus difficile à décrire que les effets de raideurs et d'inertie. Le concept d'amortissement est introduit dans l'analyse des vibrations pour tenir compte de la dissipation d'énergie dans les structures et les machines. En fait, l'amortissement visqueux [18–20], qui est la forme d'amortissement la plus couramment utilisée dans l'analyse des vibrations, est souvent choisi pour la modélisation, car il permet une solution analytique des équations de mouvement plutôt que parce qu'il modélise correctement la physique. Les problèmes de base sont : la modélisation des phénomènes physiques de la dissipation d'énergie afin de produire des modèles prédictifs et la création de traitements complémentaires qui augmenteront l'amortissement dans un système mécanique afin de réduire les vibrations, le bruit rayonné et la fatigue structurelle.

Tout système mécanique réel présente une forme de dissipation de son énergie mécanique. Dans la modélisation des systèmes, l'amortissement peut être négligé si l'énergie mécanique dissipée pendant la durée d'intérêt est faible par rapport à l'énergie mécanique totale initiale de l'excitation dans le système. Même pour les systèmes très amortis, il peut être utile d'effectuer une analyse en négligeant les termes d'amortissement, afin d'étudier des caractéristiques dynamiques essentielles, comme les caractéristiques modales d'un système (fréquences naturelles non amorties et formes des modes).

Trois mécanismes d'amortissement sont importants dans l'étude des systèmes mécaniques [14, 19], et sont les suivants :

1. *Amortissement interne du matériau* : il a plusieurs origines parmi lesquelles on distingue la dissipation d'énergie associée aux :
   — défauts de la microstructure, tels que les limites des grains et les impuretés,
   — effets thermoélastiques provoqués par des gradients de température locaux résultant de contraintes extérieures,
   — mouvements de dislocation dans les métaux [21, 22],
   — mouvements des chaînes dans les polymères [23, 24].
   Plusieurs modèles ont été utilisés pour représenter la dissipation d'énergie induite par l'amortissement interne en fonction des différents matériaux utilisés en ingénierie. Aucun modèle ne peut représenter de manière satisfaisante les caractéristiques d'amortissement internes de tous les matériaux. Néanmoins, deux types généraux d'amortissement interne peuvent être identifiés : l'amortissement viscoélastique [25–27] et l'amortissement hystéretique [28].

2. *Amortissement structurel* : résulte de la dissipation d'énergie mécanique occasionnée par le frottement dû au mouvement relatif entre les composants et par un contact impactant ou intermittent aux articulations dans un système ou une structure mécanique [29]. Le comportement de dissipation d'énergie dépend des détails du système mécanique particulier. Par conséquent, il est extrêmement difficile de développer un modèle analytique généralisé qui permettrait d'écrire de manière satisfaisante l'amortissement structurel. La dissipation d'énergie causée par le frottement est généralement représentée par un modèle de frottement de Coulomb [30]. La dissipation d'énergie causée par l'impact est déterminée à partir du coefficient de restitution des corps ou systèmes qui sont en contact [31–33]. La méthode la plus commune d'estimation de l'amortissement structurel est par mesure. Les valeurs mesurées, cependant, représentent l'amortissement global dans le système mécanique. La composante d'amortissement structurel est alors estimé en soustrayant les valeurs correspondant à d'autres types d'amortissement de la valeur d'amortissement global, tels que l'amortissement du matériau présent dans le système.

3. *Amortissement des fluides* : provient de la dissipation d'énergie mécanique résultant des forces de traînée et des interactions dynamiques associées lorsqu'un système mécanique ou ses composants se déplacent dans un fluide [34, 35].

Comme indiqué ci-dessus, plusieurs types d'amortissement sont intrinsèquement présents dans un système mécanique. Si le niveau d'amortissement disponible dans le système

n'est pas suffisant pour son bon fonctionnement, des dispositifs d'amortissement externes peuvent être ajoutés soit lors de la conception d'origine, soit pendant les modifications de conception ultérieures du système. De nombreux systèmes et structures n'ont pas suffisamment d'amortissement interne ou naturel pour limiter les vibrations à des niveaux acceptables. La plupart des structures métalliques, par exemple, ont des amortissements de l'ordre de 1 ‰ et vont donc fortement vibrer et rayonner du bruit à des niveaux élevés. Dans ce cas, le développement de techniques d'amortissement complémentaire à celui déjà présent dans la structure devient d'intérêt majeur.
Il existe deux méthodes de contrôle des vibrations, qui permettent d'ajouter de l'amortissement externe à un système mécanique afin d'améliorer ses caractéristiques de dissipation d'énergie. Elles sont :

1. *Méthodes actives* : consistent à utiliser des actionneurs qui agissent sur la structure pour atténuer l'intensité des vibrations. Ces actionneurs permettent de contrôler les vibrations à chaque instant et nécessitent des sources d'alimentation externes [36–39].
2. *Méthodes passives* : consistent à ajouter des dispositifs (matériaux ou systèmes) qui possèdent un caractère dissipatif, à la structure de telle sorte que les vibrations de la structure porteuse sont amorties passivement [40, 41], c'est-à-dire, sans avoir recours à l'utilisation d'une source d'énergie externe supplémentaire comme dans le cas des méthodes actives. Dans le présent travail, l'accent sera mis uniquement sur l'amortissement par méthodes passives.

Dans les techniques de contrôle passif des vibrations, une solution simple consiste à revêtir la surface de la structure avec un matériau amortissant, habituellement un matériau viscoélastique [42]. En fait, en industrie automobile par exemple, chaque corps d'automobile produit est traité avec un traitement amortissant de surface pour réduire le bruit de la route et du moteur transmis à l'intérieur de l'habitacle. L'ajout d'une couche viscoélastique à un substrat métallique ajoute de l'amortissement car, à mesure que la structure hôte se met à vibrer, elle fait travailler le matériau viscoélastique en traction-compression [43], ce qui provoque une dissipation de l'énergie par la chaleur. Cette notion de couche de matériau viscoélastique sur la surface d'une feuille de métal est connue sous le nom de traitement amortissant par revêtement libre. Le mécanisme de dissipation résultant est décrit pour la première fois par le modèle d'Oberst [44], permettant de calculer les propriétés équivalentes d'une poutre telles que la rigidité, le module d'Young et le facteur de pertes équivalents.

En ajoutant une troisième couche, souvent plus rigide et mince, au dessus du matériau viscoélastique, ce dernier est contraint à travailler en cisaillement [45] et provoque une plus grande dissipation d'énergie. De tels traitements sont appelés traitements amortissants par revêtement contraint. Ross-Ungar-Kerwin [46–48] ont généralisé le modèle d'Oberst [44] pour les poutres bicouches à un modèle avec trois couches, permettant également l'établissement des propriétés homogènes de tel milieu stratifié. D'autres traitements intéressants d'amortissement de surface consistent à utiliser un matériau piézocéramique habituellement sous la forme d'un mince patch stratifié sur la surface d'une poutre ou d'une structure en forme de plaque [49, 50]. À mesure que la surface se déforme, une tension est produite par effet piézoélectrique. Si une résistance électrique est attachée à

travers la couche de piézocéramique, l'énergie est dissipée sous forme de chaleur et le système se comporte exactement comme un traitement d'amortissement par revêtement viscoélastique libre.

Les vibrations peuvent également être atténuées passivement par utilisation de matériaux granulaires [51, 52]. Cette technique d'amortissement structurel peut être mise en place en remplissant une cavité ou une enceinte de particules, fixée sur une zone de la structure où les vibrations sont de grandes amplitudes. L'énergie vibratoire est alors dissipée, sous forme de chaleur, par frottement engendré lors de la collision des différentes particules entre elles et avec la structure. La méthode d'amortissement par utilisation de milieux granulaires dérive de la méthode d'amortissement par impact [53, 54]. L'amortissement par impact implique une seule particule dans une enceinte généralement plus large que celle utilisée dans l'amortissement par les granulaires. En revanche, ces derniers mettent en jeux plusieurs particules pour générer un amortissement. De part leur efficacité, les granulaires sont utilisés dans diverses applications, à savoir les raquettes de tennis [55], les structures d'ingénierie civile [56] et même dans les navettes spatiales [57, 58].

Un autre moyen classique de traitement des vibrations consiste à rajouter des systèmes masse-ressort, appelés "absorbeurs dynamiques", sur une structure pour atténuer ses vibration et la protéger des excitations et chocs extérieurs. Cette technique d'amortissement nécessite la connaissance précise de la fréquence d'excitation pour accorder au mieux l'absorbeur [59]. De part leur robustesse et simplicité de mise en œuvre, ces systèmes sont largement étudiés dans la littérature [26, 60, 61] et appliqués dans divers domaines [62, 63]. Les absorbeurs dynamiques peuvent se présenter sous une autre forme en utilisant des systèmes de masse-ressort avec amortissement visqueux ou de masse connectée à un ressort viscoélastique [64–66]. D'autres techniques d'amortissement passif utilisent des matériaux à gradient de propriétés : le traitement consiste à empiler des matériaux de différentes propriétés physiques de sorte que l'impédance aux interfaces diminue graduellement vers l'extrémité de la structure. Ce concept est étudié par Vemula *et al.* [67] dans le cas de poutre et plaque et a montré la possibilité de diminuer la réflexion des ondes à l'extrémité de la structure. Cette approche est similaire à celle du trou noir acoustique proposée dans ce manuscrit, pour lequel le gradient s'applique sur l'épaisseur et la rigidité de flexion.

# Trou noir acoustique : synthèse bibliographique

## Préliminaire

L'utilisation de l'effet "trou noir acoustique" (TNA) est un moyen passif de réduction des niveaux vibratoires d'une structure mécanique sans masse ajoutée. Le nombre d'articles scientifiques étudiant ce dispositif augmente depuis les premiers travaux apparaissant à la fin des années 1980. Ces articles montrent que plusieurs propriétés sont habituellement observées dans un TNA inséré dans une poutre ou une plaque : amortissement important des résonances de la structure, coefficient de réflexion faible, vibrations localisées, modes internes piégés, fréquences de coupure,...etc. Le but de cette synthèse bibliographique est de fournir un bref état de l'art sur les principales propriétés du TNA, rappeler des références représentatives des différentes équipes travaillant dans ce domaine

et donner des illustrations à travers des résultats numériques et expérimentaux obtenus durant ces années. À cette fin, des recherches sont effectuées sur une collection de TNA 1D (poutre) et 2D (plaque) de différents types : TNA 1D avec une épaisseur variable seulement, TNA 1D avec épaisseur et largeur variables, TNA 1D non linéaire, TNA 1D avec défauts locaux, TNA 2D circulaire avec et sans trou central, TNA 2D circulaire avec et sans masse centrale, réseau périodique de TNAs intégré sur un panneau plan. La capacité de ces différentes configurations à amortir les vibrations est alors discutée.

La thématique du TNA est relativement récente car le premier travail décrivant l'effet a été publié par Mironov en 1988 [68]. Pour les trois dernières décennies, la communauté scientifique travaillant sur ce thème a été en croissance et concerne environ une dizaine d'équipes d'organisations universitaires et industrielles. La figure 1 montre le nombre de publications par an liées au trou noir acoustique. L'évolution au cours des cinq dernières années traduit l'intérêt grandissant pour le TNA. En effet, la bibliographie scientifique compte, à la connaissance de l'auteur [1], environ cinquante articles publiés dans des revues et journaux internationaux à comité de lecture, cinq brevets et de nombreuses communications en congrès ou sous forme de conférences. La première session de congrès spécifiquement consacrée au TNA a été organisée en 2012 dans le cadre du congrès international «ACOUSTICS» [69–75], qui s'est déroulé du 23 au 27 avril à Nantes (France). Depuis 2015, une session dédiée à ce thème est organisée chaque année dans le contexte du congrès international «INTERNOISE» [76–94].

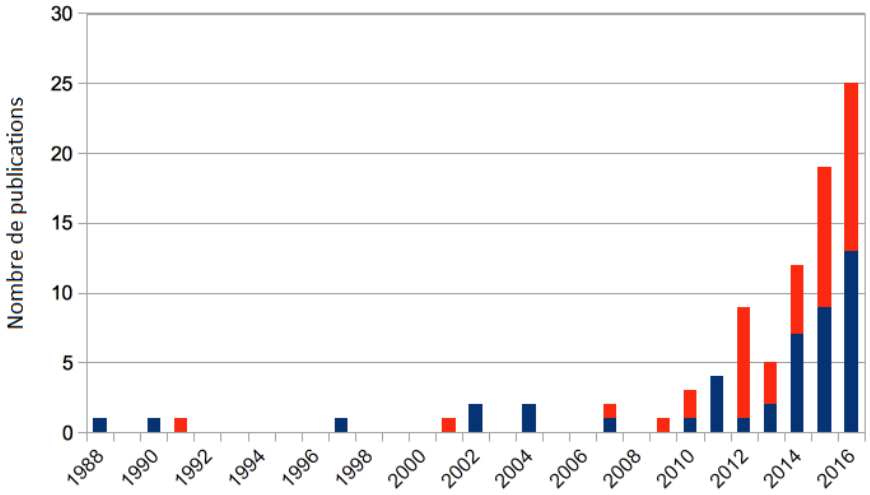



FIGURE 1 – Évolution du nombre de publications scientifiques liées au trou noir acoustique de 1988 à 2016. En bleu les articles publiés dans des journaux internationaux, et en rouge les différentes communications dans des congrès internationaux.

## Trou noir acoustique 1D

Le principe du trou noir acoustique de type poutre ou plaque est basé sur le fait que la célérité des ondes de flexion se propageant dans un milieu inhomogène décroît avec l'épaisseur du milieu. Pour une poutre dont l'épaisseur est décroissante au voisinage de l'une de

1. Le recensement des articles et communications liés au TNA, présenté sur la Fig 1, est réalisé par A. PELAT, pour être présenté au congrès "INTERNOISE 2017" à HONG KONG.

ses extrémités, il est possible de déterminer le profil de cette épaisseur de telle sorte que la propagation des ondes dans cette région ait lieu sans réflexion à l'extrémité. Ceci est possible théoriquement si l'épaisseur de la poutre diminue en suivant une loi de puissance jusqu'à une épaisseur strictement nulle [68]. De telles variations locales d'épaisseur et de la rigidité de flexion entraînent une vitesse de phase progressivement décroissante et une augmentation d'amplitude des vibrations à mesure que l'épaisseur décroit.

L'épaisseur à l'extrémité de la poutre n'est cependant jamais nulle en pratique et cela induit la réflexion des ondes à l'extrémité. La solution proposée pour réduire cette réflexion est l'ajout d'une fine couche de matériau viscoélastique (voir Fig 2), qui va permettre d'augmenter la dissipation d'énergie vibratoire [95].

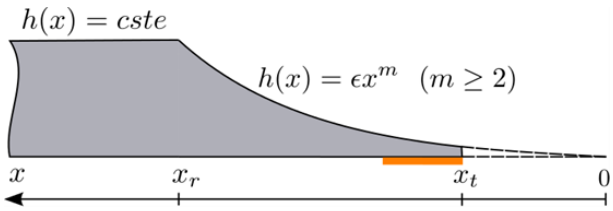



FIGURE 2 – Vue de profil d'un TNA 1D muni d'une fine couche de matériau viscoélastique.

• La littérature disponible montre que, lorsqu'il est intégré dans des structures mécaniques, le trou noir acoustique peut conduire à une diminution importante du niveau des vibrations. De nombreux démonstrateurs ont été testés expérimentalement et analysés numériquement [96, 97]. La figure 3 montre les mobilités d'entrée (rapport entre la réponse de la vitesse et la force au point d'excitation) de deux poutres en aluminium d'épaisseur de 1.5 mm. La première poutre est uniforme et prise comme référence, et la seconde est munie de deux trous noirs de 6 cm de long à ses extrémités. Les résultats montrent que l'insertion des trous noirs permet d'introduire un effet de lissage sur les mobilités mesurées. A partir d'une certaine fréquence (environ 1 kHz pour la poutre testée), une forte atténuation (environ 10 dB) des vibrations peut être constatée : le comportement résonant de la poutre est presque totalement supprimé dans cette gamme hautes fréquences.

• Lorsqu'un trou noir acoustique est inséré à l'extrémité d'une poutre, son efficacité peut être évaluée par son coefficient de réflexion : moins celui-ci est élevé plus le TNA est efficace. Plusieurs modèles théoriques et numériques de coefficient de réflexion ont été proposés en utilisant l'hypothèse de l'acoustique géométrique [95], l'hypothèse d'onde plane [98] ou le formalisme multimodal [99], l'hypothèse de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [100], la décomposition en ondelettes [101] ou encore en utilisant la méthode des éléments finis [102]. Une méthodologie expérimentale basée sur la technique de Kundt a été proposée pour mesurer le coefficient de réflexion de la terminaison arbitraire d'une poutre [103].

La figure 4 montre le coefficient de réflexion typique, $R$, qui peut être obtenu pour une poutre munie d'un TNA à son extrémité. A hautes fréquences, le module de $R$ (voir Fig 4(a)) présente une valeur d'autant plus faible que l'épaisseur finale est faible. La courbe noire correspond à une poutre d'aluminium pour laquelle l'épaisseur finale est de l'ordre de 100 µm approximativement, ce qui est une épaisseur assez faible à obtenir au moyen d'une machine classique. Le coefficient de réflexion est beaucoup plus faible dans

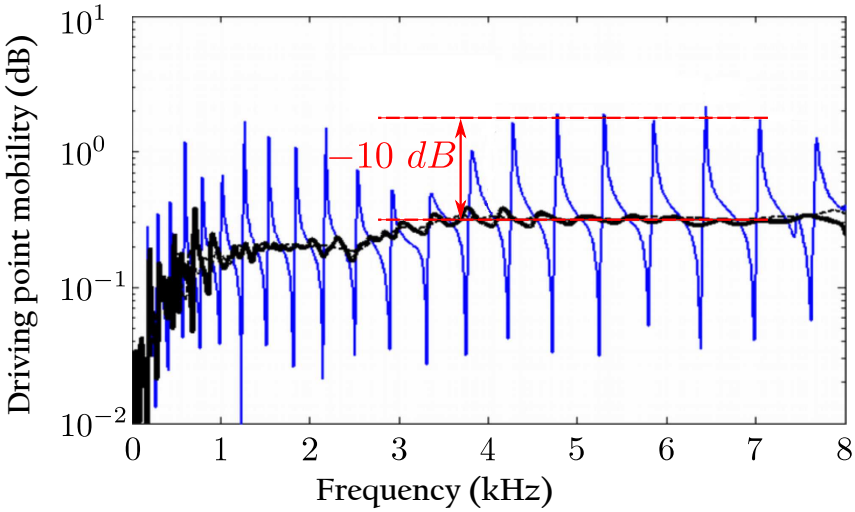



FIGURE 3 – Mobilités vibratoires d'entrée d'une poutre munie de deux trous noirs à ses extrémités libres (en noir), et d'une poutre de référence (en bleu).

le cas d'une poutre de polymère réalisée par impression 3D (courbe grise interrompue) pour laquelle l'épaisseur finale est d'environ 20 µm. Les arches typiques qui peuvent être observées sont interprétées comme des résonances du trou noir [102]. Il peut être démontré à partir d'un modèle de différences finies 1D d'une poutre non-uniforme que les minimas du module du coefficient de réflexion correspondent aux résonances des modes piégés localisés, fournissant la dissipation [78]. La phase (voir Fig 4(b)) du coefficient de réflexion d'une terminaison TNA (courbes en noir et en gris interrompu) semble diminuer plus que pour le cas de référence d'une terminaison d'épaisseur uniforme (ligne grise). Cela signifie qu'une onde incidente passe plus de temps dans le profil décroissant car elle est ralentie.

- En plus de la description de la propagation d'ondes qui peut être effectuée à partir du coefficient de réflexion, l'étude des caractéristiques modales d'une structure munie d'un TNA donne également une compréhension détaillée de son fonctionnement. En utilisant un modèle de différence finie bidimensionnel d'une plaque non-homogène, les effets globaux et locaux peuvent être analysés à partir d'un point de vue modal [104].

La figure 5(a) compare le spectre des valeurs propres d'une poutre de référence de longueur finie (triangles $\triangle$) et la même poutre avec une extrémité TNA, recouverte d'une couche de matériau viscoélastique (triangles $\nabla$). Les modes de la poutre de référence sont disposés le long d'une ligne droite dont l'angle avec l'axe imaginaire correspond au facteur de perte du matériau constituant la poutre. Lors de l'insertion du TNA, la majeure partie des modes sont disposés sur une ligne droite dont l'angle est d'environ 10 fois plus grand que l'angle initial. Cela peut être interprété comme un effet global indiquant que la poutre non-uniforme vibre comme une poutre uniforme de facteur de pertes équivalent 10 fois plus important que celui de la poutre sans trou noir. Certaines valeurs propres apparaissent dans le plan complexe avec des facteurs de pertes très élevé (modes 23 et 41). Ces valeurs propres correspondent à des modes hautement localisés dans la zone du TNA qui exhibent des motifs à deux dimensions avec des oscillations transversales le long de la largeur de la poutre. Ces modes sont hyper-amortis et donnent à la structure un effet amortissant local supplémentaire.

- Comme cela a été observé dans de nombreuses études, l'épaisseur résiduelle de l'ex-

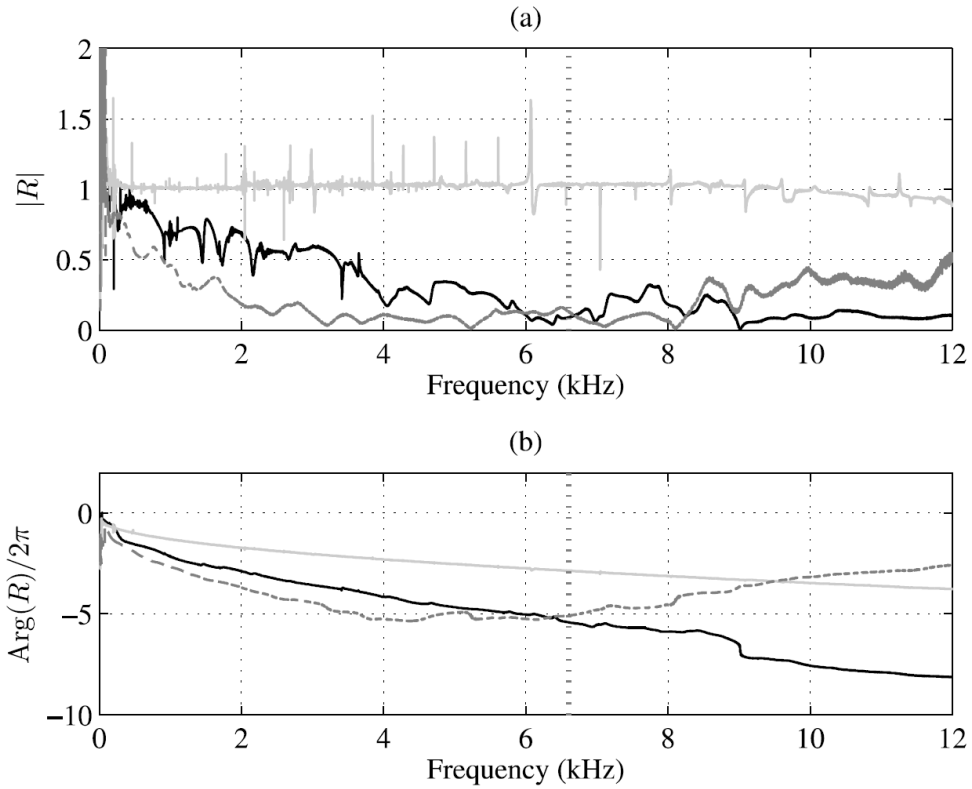



FIGURE 4 – Estimation expérimentale du module (a) et de la phase (b) du coefficient de réflexion $R$ aux extrémités libres des poutres en aluminium (courbe noire continue) et en polymère (courbe grise interrompue) munies d'un trou noir acoustique, et d'une poutre de référence (courbe continue en gris clair), (*d'après* [103]).

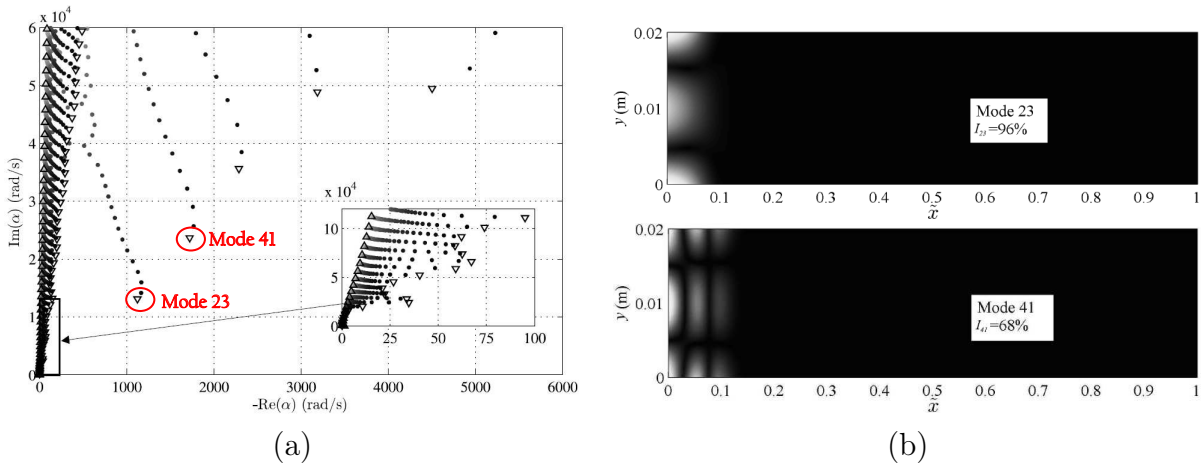
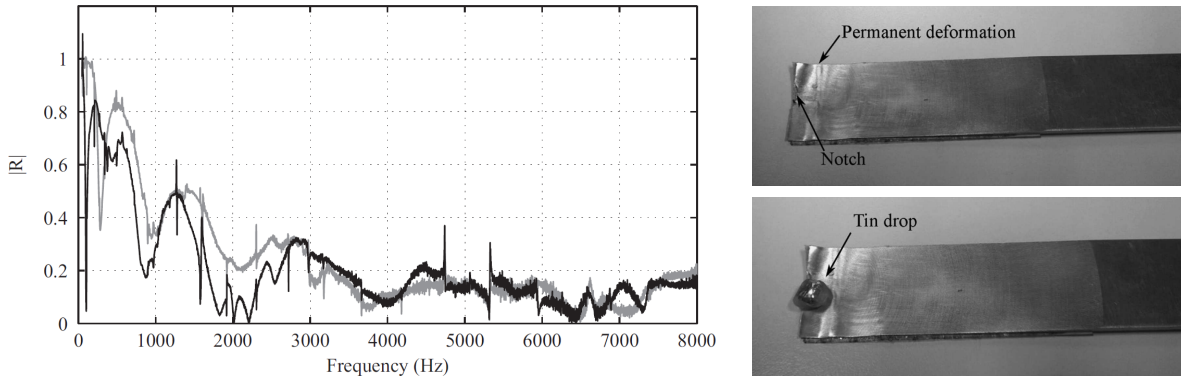



FIGURE 5 – (a) Spectres des valeurs propres des poutres de référence (△), avec trou noir acoustique (▽) et poutres intermédiaires avec un dégradé d'épaisseur entre la référence et le TNA (•). (b) Module des déformées propres des modes 23 et 41 (*d'après* [104]).

trémité TNA joue un rôle central mais difficile à contrôler lors de la fabrication. Certaines déchirures, imperfections géométriques ou matérielles peuvent apparaître facilement. Les imperfections spatiales réparties ou localisées ont fait l'objet d'études expérimentales [105] et numériques [106]. Les résultats montrent que, même si les imperfections tendent à réduire l'efficacité d'amortissement, le traitement des vibrations par effet TNA reste assez

robuste. Il est montré dans [99] que les imperfections localisées peuvent être contrôlées et exploitées pour améliorer l'efficacité d'amortissement par effet TNA. Comme le montre la figure 6(a), la présence d'un défaut local peut réduire le coefficient de réflexion d'environ 10 %.
D'autres améliorations géométriques telles que le trou noir spiral [107] ou le profil modifié avec des plateformes étendues [85] ont été étudiés pour minimiser la réflexion d'une terminaison TNA, puis maximiser la réduction du champ vibratoire.




(a) (b)

FIGURE 6 – (a) Module du coefficient de réflexion de poutres/TNA sans (courbe grise) et avec défaut contrôlé (courbe noire). (b) Face usinée des poutres/TNA sans et avec défaut contrôlé (*d'après* [108]).

- Comme le trou noir acoustique reste non efficace à basses fréquences, d'autres améliorations que celles citées précédemment peuvent être proposées. Tirer parti des non-linéarités géométriques est un moyen de baisser la fréquence seuil d'efficacité [108]. En effet, le déplacement de la poutre dans la région de petite épaisseur est grand et peut facilement dépasser l'épaisseur de la plaque, ce qui conduit à une non-linéarité géométrique qui peut induire le transfert d'énergie de la gamme des basses fréquences à celle des hautes fréquences dans laquelle le trou noir est efficace.

## Trou noir acoustique 2D

Les structures bidimensionnelles telles que les panneaux ou les plaques sont d'un intérêt majeur car elles sont plus directement liées à d'éventuelles applications industrielles. La fabrication d'un trou noir acoustique sur les bords d'un panneau rectangulaire a été testée avec succès [109, 110]. Les résultats montrent une réduction significative de la mobilité du panneau, comme il peut également être observé dans le cas des poutres. L'extension du concept au cas bidimensionnel consiste en une cuvette de révolution (voir Fig 7) dont le profil radial est similaire à celui du trou noir unidimensionnel. Plusieurs configurations de géométrie dans la zone centrale du TNA 2D peuvent être proposées pour rendre sa stratégie plus adaptée aux applications industrielles.

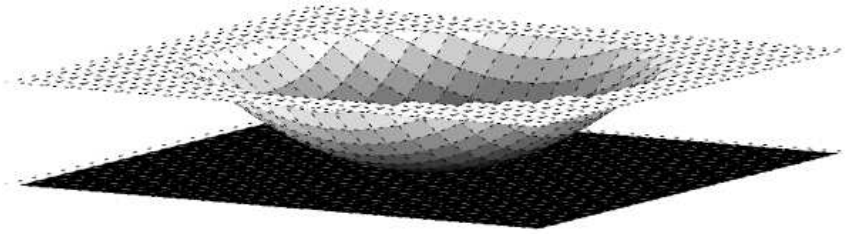


FIGURE 7 – Profil du trou noir acoustique bidimensionnel (*d'après* [111]).

• La mise en œuvre du trou noir circulaire a été testée expérimentalement sur différents types de plaques [112] et analysée dans l'espace des nombres d'ondes [113]. De la même manière que dans le cas unidimensionnel, une chute d'amplitude des vibrations très intéressante a été observée lorsqu'une couche d'amortissement est placée dans la zone centrale d'épaisseur faible. La figure 8 montre l'effet de la couche d'amortissement sur l'efficacité du TNA. Un indicateur d'efficacité est défini à partir d'un ensemble de fonctions de transfert (mobilités) mesurées [74]. Cet indicateur ($E$) représente la diminution globale (en dB) du niveau de mobilité moyenne par bande de tiers d'octave. Comme prévu, le résultat montre que sans couche viscoélastique amortissante, l'indicateur reste faible (environ 0 dB) montrant qu'aucune dissipation supplémentaire n'est produite. Lorsqu'un film viscoélastique est ajouté, l'indice d'efficacité est augmenté d'environ 5 à 10 dB.
D'autres géométries de trous noirs 2D, à variation unidirectionnelle de profil, ont également été proposées et testées expérimentalement [97].

• Le trou noir acoustique 2D est un diffuseur pénétrable, résonant et amorti. Parmi les types de modélisations des vibrations proposés, on cite les approches d'onde qui peuvent être obtenues en résolvant l'équation de la plaque présentant une inhomogénéité axisymétrique. Une solution analytique de référence dans le cas d'un profil quadratique et une solution numérique aux différences finies incorporant des variations arbitraires du profil et de l'amortissement sont établies, et font l'objet des chapitres 2 et 3 de ce manuscrit.

• Dans la gamme des basses fréquences, lorsque le trou noir n'a pas les caractéristiques d'un amortisseur efficace, il existe des résonances locales piégées. Celles-ci peuvent être exploitées pour améliorer l'efficacité globale du traitement d'un panneau dans lequel un réseau de trous noirs est inséré en créant des bandes d'arrêt de résonance. Les fréquences et déformées associées à ces résonances peuvent être contrôlées par la répartition de masse

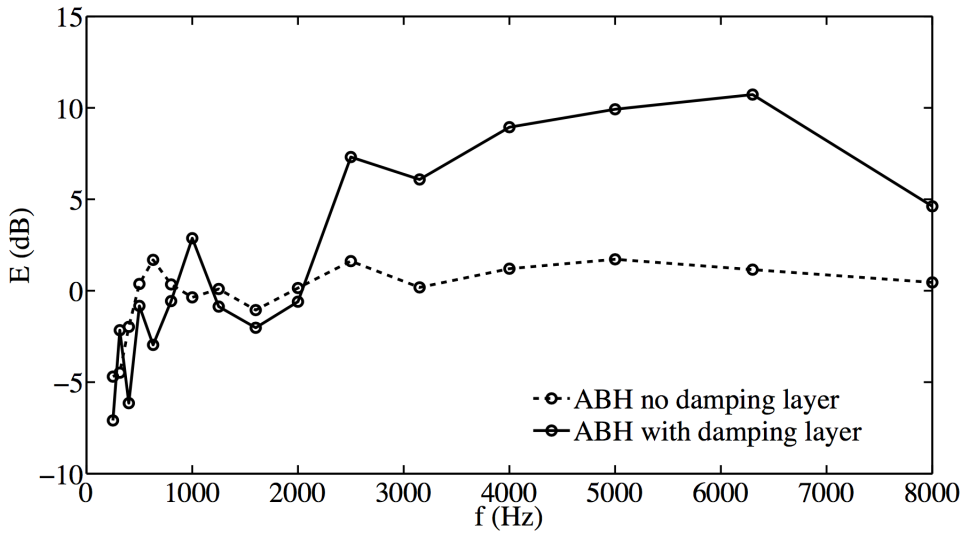



FIGURE 8 – Indice d'efficacité d'un trou noir acoustique avec (ligne continue) et sans (ligne interrompue) film viscoélastique, inséré dans un panneau plan (*d'après* [74]).

et de la raideur dans le panneau. Cette stratégie fait alors l'objet des chapitres 4 et 5. Plusieurs études à la fois expérimentales [114, 115] et numériques [116] ont été réalisées sur ce type de structures et ont montré un amortissement cumulatif intéressant à hautes fréquences, impliquant une atténuation très forte du champ vibratoire. Le panneau se comporte alors comme une structure presque non-résonnante dans cette gamme de fréquences. La relation de dispersion des ondes de flexion dans une plaque mince avec un réseau périodique de trous noirs acoustiques a été également étudiée numériquement, mais le dimensionnement choisi ne permet pas de montrer l'existence des bandes d'arrêt complètes dans la gamme des basses fréquences [117]. Une étude récente décrit numériquement les caractéristiques des bandes d'arrêt d'une structure périodique de type poutre avec trou noir [118].

• Le trou noir acoustique a également été étudié pour son éventuel utilisation à des fins de récupération d'énergie piégée. À la fois numériquement et expérimentalement, les résultats montrent que le trou noir peut permettre une augmentation drastique de l'énergie récoltée par rapport aux structures traditionnelles [119, 80]. Le niveau de préparation technique étant en augmentation permanente, certains travaux ont été réalisés pour évaluer la pertinence du concept du trou noir lorsqu'il est appliqué aux structures industrielles. Les cas des pales de turbine [120] et des pales d'un turboréacteur [121] ont été testés car leur géométrie peut intégrer naturellement les profils du trou noir. Dans d'autres contextes, le trou noir a été utilisé comme dispositif isolant pour les ondes de flexion dans des plaques minces [122] et comme dispositif anéchoïque dans une étude expérimentale d'une cochlée artificielle [100].

# Test expérimental d'une plaque avec réseau de trous noirs débouchants

Nous présentons dans cette section un premier test expérimental visant à montrer l'efficacité du traitement vibratoire par effet trou noir dans la gamme des hautes fréquences. L'objectif est de quantifier la diminution de l'amplitude des résonances d'une plaque munie d'un réseau périodique carré de trous noirs acoustiques débouchants. On appelle ici trou noir débouchant, un trou noir avec un trou central (le rayon de troncature est non nul).

## Description des plaques testées

La mobilité vibratoire est mesurée pour deux plaques : une plaque de référence (sans traitement) et une méta-plaque avec 60 trous noirs débouchants, distribués périodiquement avec une période spatiale $L$. Le profil d'épaisseur d'une cellule unitaire est le même que celui décrit dans la figure 2 avec $m = 2$ (profil quadratique). Les paramètres géométriques de la méta-plaque sont donnés dans le tableau suivant :

| $L$ | $x_t$ | $h(x_t)$ | $x_r$ | $h(x_r)$ |
|---|---|---|---|---|
| 90 mm | 5 mm | 0.1 mm | 30 mm | 5 mm |

Tableau 8 – Paramètres géométriques de la méta-plaque de 60 trous noirs.

L'admittance mécanique, appelée également "mobilité vibratoire", est définie comme le rapport de la vitesse vibratoire et la force appliquée :

$$Y_{ij} = \frac{V_i}{F_j}, \tag{1}$$

où $V_i$ est la vitesse vibratoire d'un point $i$ où la mesure est effectuée et $F_j$ représente la force appliquée sur un point $j$.

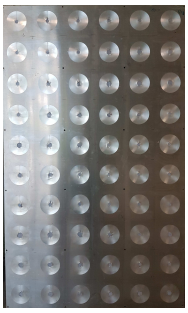
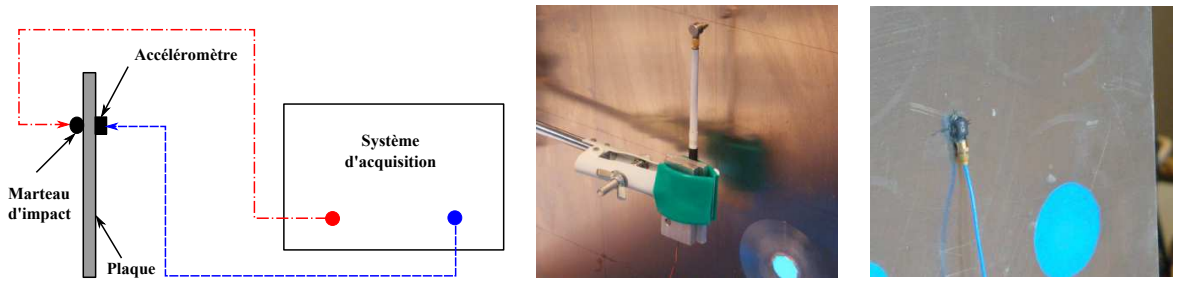


FIGURE 9 – Méta-plaque avec 60 trous noirs acoustiques débouchants. Les deux plaques testées sont en aluminium ($\rho = 2700$ kg/m$^3$, $E_0 = 70$ GPa et $\nu = 0.33$), de longueur de 90 cm et de largeur de 54 cm.

## Dispositif expérimental

La figure 10(a) illustre le montage expérimental. Pour chaque mesure, les plaques sont excitées en un point par un marteau d'impact (Fig. 10(b)). Un accéléromètre mesure

l'accélération sur l'autre face de la plaque comme indiqué sur la Fig 10(c). Les mesures effectuées sont colocalisées, c'est-à-dire que l'accélération est mesurée sur le même point que l'impact ($Y_{jj}$). Les signaux sont acquis au moyen d'une station d'acquisition OROS, qui permet le calcul des fonctions de transfert. L'analyse s'étend sur la bande de fréquences [0 - 8000] Hz. Ce système d'acquisition permet de suivre l'évolution de la mobilité vibratoire en fonction de la fréquence.




(a) (b) (c)

FIGURE 10 – (a) : Montage expérimental. (b) : Marteau d'impact sur la face avant de la plaque. (c) : Accéléromètre sur la face arrière de la plaque.

## Comparaison des mobilités de la plaque de référence et la méta-plaque

La figure 11 montre les mobilités vibratoires moyennes issues du test expérimental décrit ci-dessus. Ces mesures montrent clairement l'intérêt de l'utilisation des réseaux de trous noirs acoustiques pour augmenter l'amortissement vibratoire des structures. L'insertion du réseau dans la plaque permet d'introduire un effet de lissage des fonctions de transfert mesurées : à partir d'une fréquence seuil de l'ordre de 1500 Hz, le comportement résonant de la plaque avec 60 trous noirs est fortement atténué (environ 10 dB), mettant ainsi en évidence l'effet cumulatif hautes fréquences attendu.

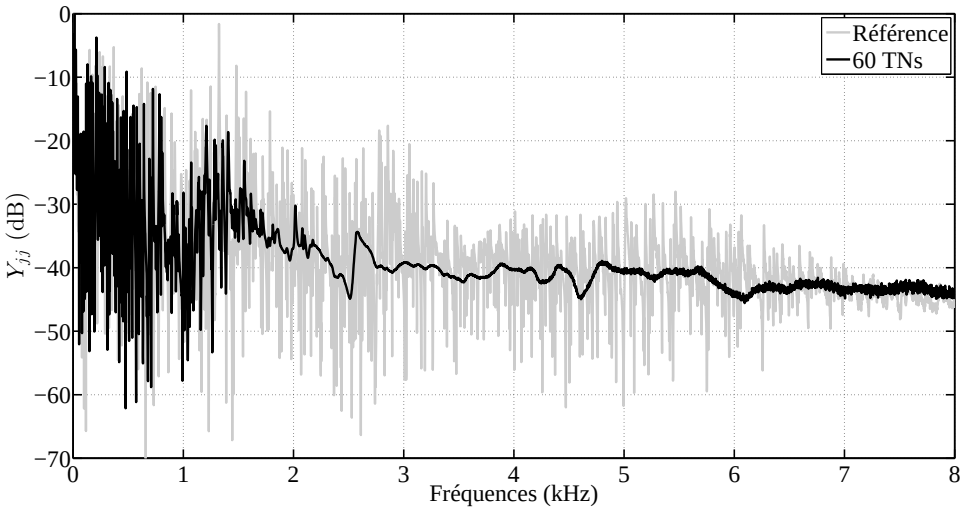



FIGURE 11 – Mobilité vibratoire moyenne mesurée en dB (0 dB = 1 m/s/N) sur deux plaques : référence et méta-plaque avec 60 trous noirs débouchants .

## Objectifs de la thèse

L'utilisation de l'effet "trou noir acoustique" pour la réduction des niveaux vibratoires des structures légères s'avère d'être une perspective prometteuse, notamment dans le domaine des transports. Le potentiel de cette technique est pointé et est mis en avant dans plusieurs publications scientifiques (voir synthèse bibliographique ci-dessus). De nombreux travaux ont montré que le trou noir acoustique est un amortisseur efficace à hautes fréquences mais il l'est moins en basses fréquences. L'objectif principal de cette thèse est d'examiner la possibilité d'étendre le domaine d'efficacité de cette technique à la gamme des basses fréquences. Nous proposons dans ce travail une stratégie qui permet d'atteindre l'objectif visé, à savoir le dimensionnement d'un démonstrateur d'une plaque amortie sur une plage de fréquences étendue, comprenant les basses fréquences. Nous proposons pour cela d'insérer un réseau périodique de trous noirs dans une plaque mince, dans le but de tirer profit à la fois du cumul des effets des trous noirs en hautes fréquences, et des effets de périodicité du milieu pour augmenter l'amortissement de la plaque en basses fréquences. Le comportement vibratoire du trou noir acoustique au sein d'une structure est complexe, et sa périodisation l'est encore plus. Il est donc nécessaire de l'analyser finement et le caractériser lorsqu'il est isolé avant de l'étudier en réseau. Ceci constitue alors une étape préliminaire de caractérisation, dont l'objectif la compréhension de son comportement vibratoire pour préparer son implémentation en réseau.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit s'articule en cinq chapitres : les trois premiers chapitres concernent le trou noir acoustique isolé, et les deux derniers traitent les aspects de réseaux périodiques de trous noirs acoustiques.

Le premier chapitre étudie la diffusion des ondes de flexion par des obstacles de formes simples. Quelques définitions fondamentales et notations générales concernant cette étude sont donc données : généralités sur la diffusion et théorie des plaques minces, permettant de fixer le cadre théorique de l'étude.

Dans le second chapitre, la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique à profil quadratique est étudiée. Un modèle ondulatoire analytique permettant d'analyser les propriétés de diffusion, la dispersion des ondes et le comportement vibratoire du trou noir acoustique sans film viscoélastique est proposé et utilisé pour identifier ses caractéristiques principales.

Le troisième chapitre propose l'étude d'un trou noir avec revêtement viscoélastique. Un modèle numérique basé sur la méthode des différences finies, traitant la diffusion par cet obstacle complexe, est alors développé. Ce modèle permet de prendre en compte des variations arbitraires du profil d'épaisseur et de l'amortissement rajouté par le revêtement.

Le quatrième chapitre a pour objectif l'étude de la propagation des ondes de flexion dans une plaque mince, munie d'un réseau périodique à symétrie carrée de trous noirs acoustiques, appelée "méta-plaque". Les courbes de dispersion dans ce type de plaques

sont calculées en utilisant la méthode PWE (Plane Wave Expansion) et analysées. Les notions de base, liées aux milieux périodiques telles que les réseaux de Bravais, le théorème de Floquet-Bloch et les bandes interdites, sont donc brièvement rappelées au début de ce chapitre. Enfin, une étude expérimentale de la méta-plaque basée sur des mesures de mobilité par scan vibrométrique est présentée.

Dans le cinquième chapitre, une autre architecture de réseau périodique, permettant de dimensionner une méta-plaque amortie dans la gamme des basses fréquences, est développée. Celle-ci est basée sur l'utilisation de réseaux à symétrie triangulaire. La nouvelle méta-plaque est à nouveau analysée numériquement par la méthode PWE et testée expérimentalement.

Enfin, le manuscrit se termine par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés, suivie de perspectives et propositions pour de futurs travaux.

# Chapitre 1

# Introduction à la diffusion des ondes de flexion par un obstacle

## Résumé

Le but de ce chapitre bibliographique est d'introduire les définitions et notations essentielles, sur lesquelles se base l'étude du phénomène de la diffusion des ondes de flexion par un obstacle, présent dans le milieu de propagation. La définition de la diffusion des ondes est donnée dans le cas général, à travers des exemples de différents types de milieux de propagation. La théorie des plaques minces, issue de la théorie d'élasticité, est ici rappelée pour fixer les concepts théoriques et les quantités physiques utilisés tout au long de ce manuscrit. Des modèles analytiques, issus de la littérature, traitant la diffusion par des obstacles de formes simples sont appliqués aux ondes de flexion dans le cadre de la théorie des plaques de Kirchhoff, et sont présentés dans ce chapitre.

## 1.1 Généralités : diffusion des ondes

En général, un milieu de propagation n'est homogène que sur une partie limitée de l'espace. Il est en effet fréquent que les milieux présentent des inhomogénéités locales faisant obstacle à la propagation. Le phénomène de diffusion d'ondes résulte d'une ou plusieurs interactions entre des ondes incidentes et un obstacle. Lorsqu'une onde, de type quelconque, rencontre une inhomogénéité géométrique (changement de forme du milieu de propagation) ou physique (propriétés différentes de celles du milieu de propagation), elle est réfléchie par l'obstacle dans de multiples directions de l'espace (voir Fig. 1.1). Autrement dit, au passage d'une onde, l'obstacle se comporte comme une source secondaire émettant des ondes vers l'extérieur de la surface constituant l'obstacle. Ce phénomène de distribution d'énergie réfléchie dans l'espace est appelé diffusion. Durant le siècle dernier, la diffusion des ondes par différents types d'obstacles a été étudiée : P. Morse et H. Feshbach [123] ont établi le cadre théorique général pour analyser la diffusion des ondes électromagnétiques et acoustiques par des cylindres et des sphères. Le cas spécifique des ondes de flexion dans une plaque fine est introduit par C. Mow et Y. Pao [124] dans le cadre de la théorie des plaques de Kirchhoff, en analysant la diffusion par une inclusion rigide circulaire. A. Norris et C. Vemula [125] ont étudié analytiquement les propriétés de diffusion des cas limites d'un trou et d'une inclusion rigide insérés dans une plaque

mince infinie. Les mêmes auteurs [126] ont analysé les mêmes diffuseurs en utilisant la théorie des plaques de Mindlin, et ont mis en évidence les différences entre les résultats obtenus avec les théories de Kirchhoff et de Mindlin. V. A. Squire et T. W. Dixon [127] ont appliqué une méthode similaire pour analyser la diffusion des ondes de flexion par une inclusion circulaire revêtue. Dans ce cas, le diffuseur est dit pénétrable, dans la mesure où l'intérieur du diffuseur est le siège de vibrations. Dans ce cas, le couplage entre les déplacements interne et externe est décrit par des relations de continuité à l'interface.

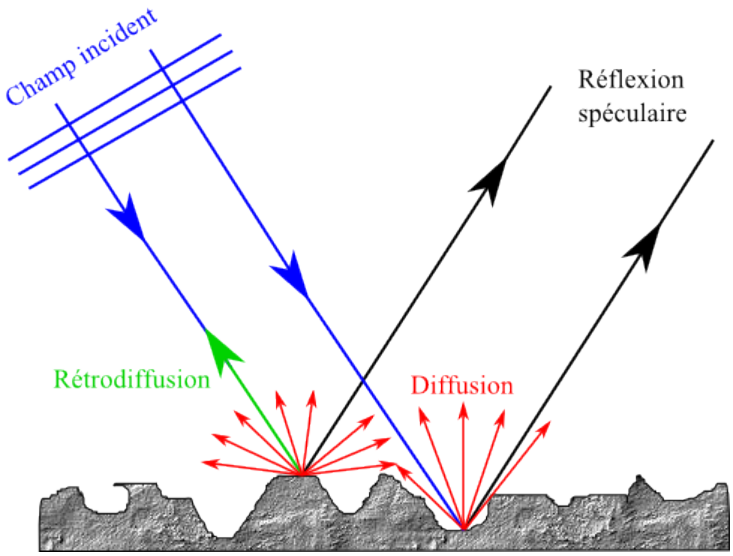



FIGURE 1.1 – Diffusion des ondes par une surface rugueuse et rigide, avec des rugosités de différentes formes et tailles.

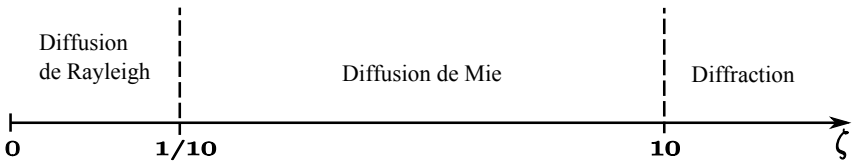



FIGURE 1.2 – Types de diffusion des ondes, classés en fonction du paramètre adimensionnel $\xi = \dfrac{2\pi R}{\lambda}$, où $\lambda$ est la longueur d'onde incidente et $R$ la taille typique de l'obstacle (*d'après* [128]).

Il existe trois types de diffusion, classés selon un paramètre fréquentiel adimensionnel $\zeta = 2\pi R/\lambda$ (voir Fig 1.2), qui permet de comparer la longueur d'onde incidente $\lambda$ à la taille typique $R$ de l'obstacle. En pratique, $R$ est le rayon de l'obstacle lorsqu'il est de forme cylindrique ou sphérique [128]. Lorsque $\zeta \ll 1$ (en pratique $\zeta < 0.1$), c'est-à-dire que $\lambda$ est au moins dix fois plus grande que la taille de l'obstacle, comme par exemple dans la diffusion de la lumière par des particules de très petite taille. On dit qu'il s'agit de la diffusion de Rayleigh [129]. Lorsque $\zeta \gg 1$ (en pratique $\zeta > 10$), l'obstacle est au moins dix fois plus grand que $\lambda$, comme par exemple dans le cas de la diffusion des ultrasons ou de la lumière par une fente. On dit qu'il s'agit du régime de la diffraction [130]. Le domaine fréquentiel intermédiaire correspond à $\zeta \approx 1$. Dans ce domaine, la longueur d'onde incidente considérée est comprise entre une longueur d'onde dix fois plus grande et une longueur d'onde dix fois plus petite que la taille de l'obstacle (en pratique

$0.1 < \zeta < 10$). On dit qu'il s'agit de la diffusion de Mie [131]. Pour les vibrations de plaques que nous étudierons dans ce manuscrit, les longueurs d'ondes varient de quelques millimètres à quelques mètres. Les obstacles que nous considèrerons sont de l'ordre du centimètre à quelques dizaines de centimètres. Le domaine de diffusion de Mie est donc celui qui convient le mieux aux problématiques des vibrations mécaniques, et qui est choisi pour toutes les études de diffusion des ondes de flexion présentées dans ce document.

## 1.2 Théorie des plaques de Kirchhoff

### 1.2.1 Introduction

Les vibrations de flexion d'une plaque dépendent de ses caractéristiques géométriques et physiques. Deux théories des plaques existent dans la littérature : la première théorie est celle des plaques minces, qui d'après [132], est annoncée pour la première fois par Poisson dans son mémoire [133], et la seconde est celle des plaques épaisses. Ces deux théories sont respectivement des extensions des théories des poutres minces d'Euler-Bernoulli et des poutres épaisses de Timoshenko [134, 135]. Le rapport entre la longueur d'onde et l'épaisseur est le paramètre fixant la limite d'applicabilité des théories de plaques. On admet généralement que la théorie de Kirchhoff est valide lorsque la longueur d'onde est supérieure à 6 à 8 fois l'épaisseur. Deux théories des plaques minces existent : la première (théorie linéaire) concerne les plaques minces avec des petites déformations et la seconde (théorie non linéaire) concerne les plaques minces avec des grandes déformations. La théorie des plaques minces avec des petites déformations, connue sous le nom de théorie de Kirchhoff, est valide tant que le déplacement de la plaque reste faible devant l'épaisseur, en respectant les hypothèses suivantes, qui sont largement discutées dans la littérature [136–139].

1. Le plan médian de la plaque reste neutre pendant la déformation : il n'y pas de déformations dans ce plan.
2. La section droite de la plaque, initialement orthogonale au plan médian, reste plane et orthogonale à celui-ci. Il en résulte de cette hypothèse que les déformations en cisaillement transverse sont négligées.
3. Les contraintes normales dans la direction transversale de la plaque sont négligées. Elles doivent en effet être nulles sur les surfaces extérieures et, en supposant que la plaque est suffisamment mince, il est admis naturellement que ces contraintes sont nulles dans la direction transversale (direction perpendiculaire au plan médian).
4. Seul le déplacement transversal est considéré : l'inertie de rotation est négligée.

En utilisant ces hypothèses, toutes les composantes des contraintes utilisées dans la théorie de l'élasticité peuvent être exprimées en fonction du déplacement de la plaque, qui est une fonction des deux variables du plan de la plaque. Ce déplacement satisfait une équation aux dérivées partielles linéaire du mouvement et les conditions aux limites. L'ensemble de l'équation du mouvement associée aux conditions aux limites permet d'avoir toutes les informations nécessaires pour calculer le déplacement et en déduire les contraintes en tout point de la plaque. La deuxième hypothèse, stipulant que l'effet de la force de cisaillement est peu important sur le déplacement de la plaque, est généralement satisfaisante. Dans le cas où le cisaillement est important, comme par exemple

dans le cas d'une plaque contenant un trou, il devient nécessaire de prendre en considération l'effet de l'effort de cisaillement dans la théorie. La prise en compte de ce dernier induit une correction de la théorie des plaques minces, et des termes supplémentaires sont rajoutés dans l'équation aux dérivées partielles du mouvement [140].

Lorsque les vibrations sont de niveau important, la flexion d'une plaque est accompagnée par des déformations du plan médian dues à des contraintes dans le plan. Ces contraintes sont négligées dans la théorie de Kirchhoff mais doivent être prises en compte dans l'équation aux dérivées partielles du mouvement à fort niveau. En conséquence, l'équation gouvernant le mouvement de flexion de la plaque devient non-linéaire, ce qui rend sa résolution plus compliquée. La théorie des plaques minces tenant compte des non linéarités géométriques dues aux grands déplacements est connue sous le nom de la théorie de Von Kàrmàn [141].

Les théories de Kirchhoff et de Von Kàrmàn ne sont plus adaptées dans le cas des plaques avec des épaisseurs considérables. Dans ce cas, la théorie des plaques épaisses, connue sous le nom de la théorie de Mindlin [142–144], doit être appliquée. Cette théorie, énoncée par Uflyand [145] ensuite complétée par Mindlin [146], inclut les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation. Elle fournit donc une meilleure description de la propagation des ondes dans la plaque.

### 1.2.2 Vibrations de flexion d'une plaque mince circulaire

L'objectif de cette section est d'établir l'équation du mouvement, nécessaire à l'étude des vibrations de flexion d'une plaque circulaire isotrope d'épaisseur variable. Le cadre théorique fixé est la théorie de Kirchhoff, qui prend en compte les hypothèses discutées dans la Sec. 1.2.1. L'équation de flexion est établie dans un premier temps pour une plaque d'épaisseur variable. Dans un second temps, l'équation générale est simplifiée pour obtenir l'équation du cas particulier d'une plaque d'épaisseur constante. Des solutions analytiques de cette équation sont données par la suite.

#### 1.2.2.1 Équation du mouvement

On considère une plaque élastique isotrope, de forme circulaire, d'épaisseur variable $h(r,\theta)$, de masse volumique $\rho_0$ , de module de Young complexe $E_0^*$ et de coefficient de Poisson $\nu_0$. L'épaisseur de la plaque est supposée quelconque et peut varier dans l'espace. Sa variation est caractérisée dans le système des coordonnées polaires par les composantes $(r,\theta)$. La figure 1.3 montre les différents moments fléchissants et efforts tranchants agissant sur un élément infinitésimal de surface $dS = rdrd\theta$ de la plaque. A un instant $t$ donné, cet élément surfacique est décrit par les variables d'état suivantes [138, 147] :

$$W = W(r,\theta), \tag{1.1}$$

$$\Theta_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \tag{1.2}$$

$$\Theta_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}, \tag{1.3}$$

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)\right], \tag{1.4}$$

$$M_\theta = -D\left[\nu_0 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right], \tag{1.5}$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu_0)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right), \tag{1.6}$$

$$Q_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}\right], \tag{1.7}$$

$$Q_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta}) + M_{r\theta} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}\right], \tag{1.8}$$

où $W$ est le déplacement transversal (selon la direction $z$), $\Theta_r$, $\Theta_\theta$, $M_r$, $M_\theta$, $Q_r$ et $Q_\theta$ représentent respectivement les pentes, les moments fléchissants et les efforts tranchants de Kirchhoff dans les directions $r$ et $\theta$. $M_{r\theta}$ est le moment de torsion et

$$D = \frac{E_0^* h^3(r,\theta)}{12\,(1-\nu_0^2)} \tag{1.9}$$

la rigidité de flexion de la plaque d'épaisseur variable.

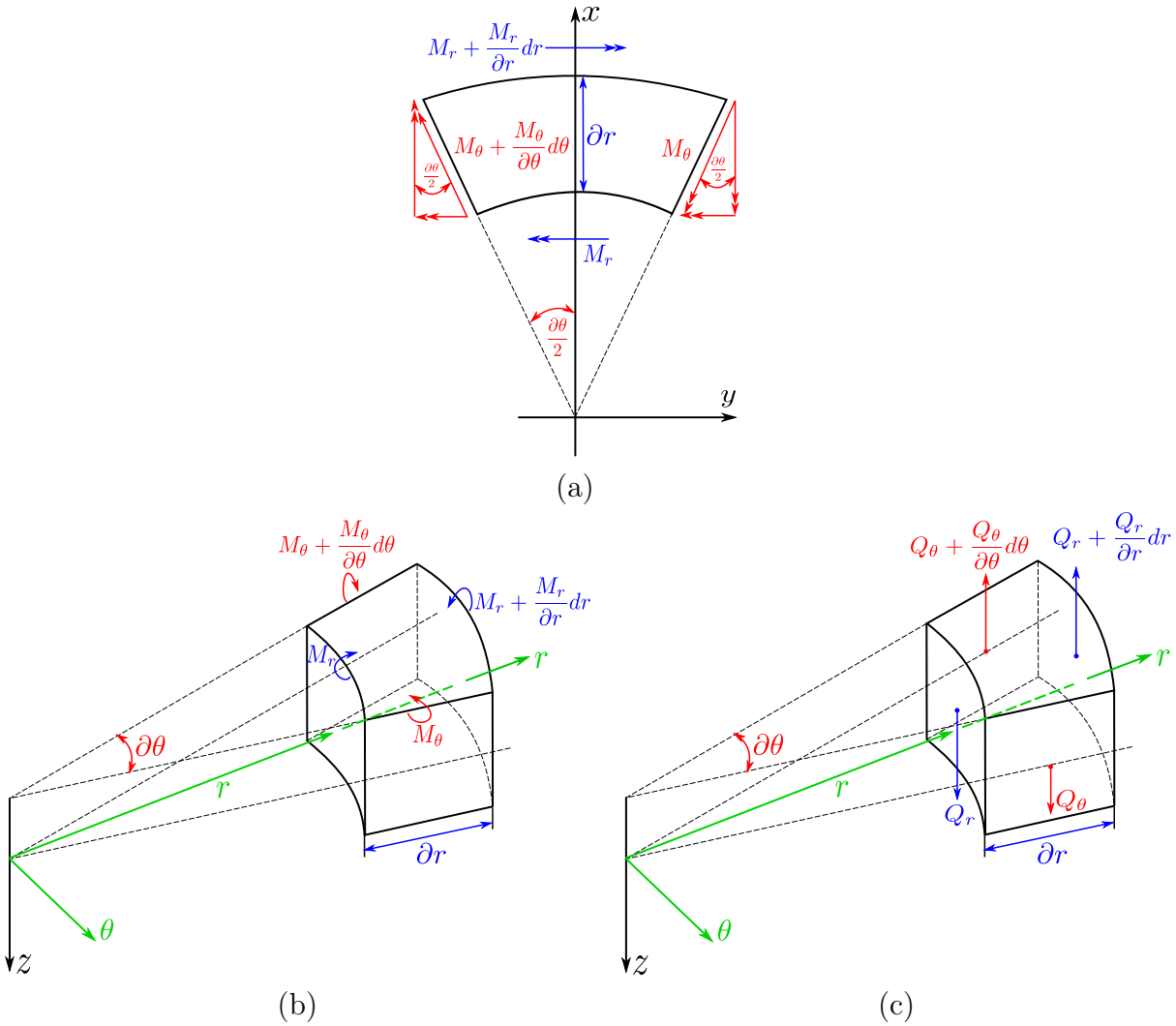



FIGURE 1.3 – Moments et efforts s'exerçant sur un élément surfacique de plaque circulaire. (a) Vue de dessus, (b) moments fléchissants et (c) efforts tranchants.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial r} = \rho_0 h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

Pour obtenir l'équation gouvernant le mouvement transversal de la plaque, les trois Eqs. (1.4), (1.5) et (1.6) sont injectées dans les Eqs. (1.7) et (1.8). Les deux équations résultantes sont substituées dans l'Eq. (1.10). La rigidité de flexion $D$ est variable dans l'espace du fait de la variation de l'épaisseur en fonction de $r$ et de $\theta$. En considérant que l'épaisseur varie uniquement dans la direction radiale (variation axisymétrique), l'équation du mouvement est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre à coefficients variables. Elle est donnée par [147] :

$$\nabla^2\left[D(r)\nabla^2 W(r,\theta)\right] - (1-\nu_0)\diamondsuit^4\left\{D(r), W(r,\theta)\right\} + \rho_0 h(r)\frac{\partial^2 W(r,\theta)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.11}$$

où $\diamondsuit^4$ est l'opérateur aux dérivées partielles, défini comme :

$$\diamondsuit^4\left\{D, W\right\} = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right] + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}. \tag{1.12}$$

Dans le cas d'une plaque d'épaisseur constante $h_0$, la rigidité de flexion est constante ($D = D_0$). Par conséquent, l'opérateur ($\diamondsuit^4$) donné par l'Eq. (1.12) s'annule et l'équation du mouvement (1.11) se ramène à l'équation des plaques uniformes

$$D_0\Delta^2 W(r,\theta) + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W(r,\theta)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.13}$$

où

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \tag{1.14}$$

représente le double Laplacien, exprimé en coordonnées polaires.

#### 1.2.2.2 Solutions analytiques de l'équation des plaques uniformes

Nous cherchons à établir la forme générale des solutions de (1.13) en régime harmonique ($W \propto e^{-i\omega t}$, où $\omega$ est la pulsation harmonique et $t$ représente le temps) et pour une plaque circulaire de dimension finie. L'équation du mouvement harmonique de flexion de la plaque circulaire d'épaisseur constante s'écrit :

$$\left(\Delta^2 - k_{f0}^4\right) W(r,\theta) = 0, \tag{1.15}$$

où $k_{f0}$ est le nombre d'onde de flexion donné par :

$$k_{f0} = \sqrt[4]{\frac{\rho_0 h_0}{D_0}}\sqrt{\omega}. \tag{1.16}$$

La solution complète de l'équation (1.15) est la combinaison linéaire des solutions des équations suivantes :

$$\left(\nabla^2 + k_{f0}^2\right) W_1(r,\theta) = 0, \tag{1.17}$$

$$\left(\nabla^2 - k_{f0}^2\right) W_2(r,\theta) = 0. \tag{1.18}$$

Le champ du déplacement $W(r,\theta)$ est $2\pi$ périodique en $\theta$ et admet un développement de Fourier sur les ordres circonférentiels $n$ sous la forme :

$$W(r,\theta) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} W_{j,n}(r)\cos(n\theta). \tag{1.19}$$

En substituant l'Eq. (1.19) dans les Eqs. (1.17) et (1.18), on obtient :

$$\frac{d^2W_{1,n}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_{1,n}}{dr} + \left(k_{f0}^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)W_{1,n} = 0, \tag{1.20}$$

$$\frac{d^2W_{2,n}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_{2,n}}{dr} - \left(k_{f0}^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)W_{2,n} = 0, \tag{1.21}$$

qui sont respectivement l'équation de Bessel ordinaire et l'équation de Bessel modifiée [148, 149]. Ces deux équations admettent les solutions suivantes, [150, 151] :

$$W_{1,n} = A_nJ_n(k_{f0}r) + B_nY_n(k_{f0}r), \tag{1.22}$$

$$W_{2,n} = C_nI_n(k_{f0}r) + D_nK_n(k_{f0}r), \tag{1.23}$$

où $J_n$ et $Y_n$ sont les fonctions de Bessel ordinaires de première et de deuxième espèce, décrivant deux ondes propagatives. Dans l'Eq. (1.23), $I_n$ et $K_n$ sont les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre $n$, qui décrivent deux ondes évanescentes (voir Fig. 1.4).

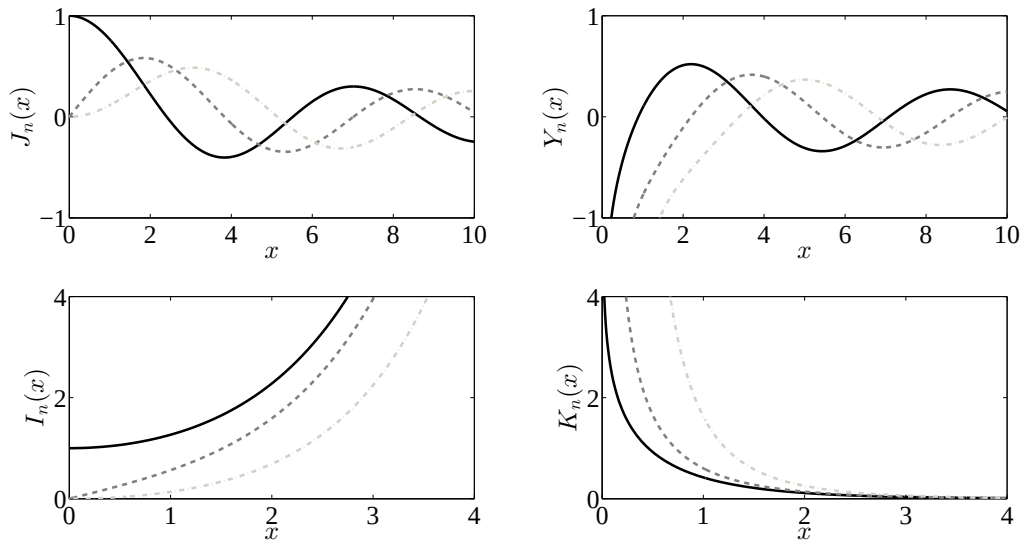



FIGURE 1.4 – Variation des fonctions de Bessel en fonction de leur argument $x$ pour les ordres circonférentiels (——) $n = 0$, (−−) $n = 1$ et (−.−) $n = 2$.

La solution complète de l'Eq. (1.15) est une somme de ces ondes propagatives et évanescentes et s'écrit :

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_nJ_n(k_{f0}r) + B_nY_n(k_{f0}r) + C_nI_n(k_{f0}r) + D_nK_n(k_{f0}r)\right]\cos(n,\theta), \tag{1.24}$$

avec $A_n$, $B_n$, $C_n$ et $D_n$ les amplitudes du champ de déplacement transverse à déterminer par l'application des conditions aux limites du domaine. La solution donnée par l'Eq. (1.24), est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel tracées sur la Fig. 1.4, projetées sur les $\cos(n\theta)$. Cette solution, décrivant le champ du déplacement en tout point de la plaque, est une solution générale purement mathématique. Physiquement, le champ du déplacement doit être fini au centre de la plaque ($r = 0$) et à l'infini ($r \to \infty$). Or, la figure 1.4 montre que les fonctions $Y_n(x)$ et $K_n(x)$ tendent rapidement vers l'infini ($-\infty$ pour $Y_n(x)$ et $+\infty$ pour $K_n(x)$) lorsque $x = 0$. Nous ne retenons que les solutions qui décrivent un champ vibratoire physique, décrit par une somme de fonctions de Bessel non divergentes, ni en $r = 0$, ni lorsque et $r \to \infty$. Le champ vibratoire retenu pour décrire le champ vibratoire dans une plaque circulaire de dimension finie est donc :

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n J_n(k_{f0} r) + C_n I_n(k_{f0} r)\right] \cos(n,\theta). \tag{1.25}$$

## 1.3 Diffusion des ondes de flexion

Dans cette section, la diffusion des ondes de flexion par un obstacle est étudiée dans une plaque mince infinie d'épaisseur constante $h_0$. L'obstacle est circulaire, de rayon $b$, et joue le rôle de diffuseur d'ondes. Cette plaque est faite d'un matériau élastique dont les caractéristiques sont la masse volumique $\rho_0$, le coefficient de Poisson $\nu_0$ et le module d'Young complexe $E_0^* = E_0(1 - i\eta_0)$ conforme à la convention temporelle $e^{-i\omega t}$, avec $E_0$ le module élastique sans pertes et $\eta_0$ le facteur de pertes. Selon la condition considérée à l'interface $r = b$ (voir Fig. 1.5), l'obstacle représente trois configurations donnant lieu à trois types de diffuseurs : la première configuration correspond à un trou avec un bord encastré en $r = b$. Dans ce cas, le diffuseur est appelé inclusion rigide. La seconde configuration correspond à un trou simple avec un bord libre. La dernière configuration correspond à une inclusion souple, où le diffuseur est un changement de milieu (matériau et épaisseur de plaque), permettant ainsi aux ondes de pénétrer à l'intérieur. Ce dernier diffuseur possède les caractéristiques suivantes : épaisseur $h_1$, masse volumique $\rho_1$, coefficient de Poisson $\nu_1$ et module d'Young complexe $E_1^* = E_1(1 - i\eta_1)$.

On considère, comme illustré sur la Fig. 1.5, une onde plane harmonique de flexion $W_{inc} = W_0 e^{ik_{f0}x} e^{-i\omega t}$, se propageant dans la direction des $x$ croissants, où $W_0$ est l'amplitude de l'onde incidente, $k_{f0}$ est le nombre d'onde à l'extérieur du diffuseur et $\omega$ est la pulsation harmonique. Quel que soit le type de diffuseur considéré, l'onde incidente $W_{inc}$ donne lieu à un champ diffusé vers l'extérieur du diffuseur, appelé $W_{diff}$. Ce champ diffusé est solution de l'équation du mouvement (1.15), et doit satisfaire la condition de Sommerfeld [152, 153] :

$$\lim_{k_{f0} r \to +\infty} \left[\sqrt{r}\left(\frac{\partial W_{diff}}{\partial r} - ik_{f0} W_{diff}\right)\right] = 0, \tag{1.26}$$

qui impose la décroissance du champ diffusé à l'infini. En prenant en considération la convention temporelle $e^{-i\omega t}$ et en ne conservant dans (1.24) que les termes non divergeant et satisfaisant (1.26), le champ diffusé est donné par [124, 125] :

$$W_{diff}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(k_{f0} r) + B_n K_n(k_{f0} r)\right] \cos(n,\theta), \tag{1.27}$$

où

$$H_n^{(1)}(k_{f0}r) = J_n(k_{f0}r) + iY_n(k_{f0}r) \tag{1.28}$$

représente la fonction de Hankel de première espèce d'ordre $n$ ; $J_n(k_{f0}r)$, $Y_n(k_{f0}r)$ et $K_n(k_{f0}r)$ sont les fonctions de Bessel d'argument $k_{f0}r$, représentées sur la figure 1.4 en fonction de l'argument $x$. Notons qu'ici le champ diffusé $W_{diff}$ ne prend en compte que les ondes progressives et les ondes évanescentes divergentes, c'est-à-dire les ondes qui s'éloignent du diffuseur.

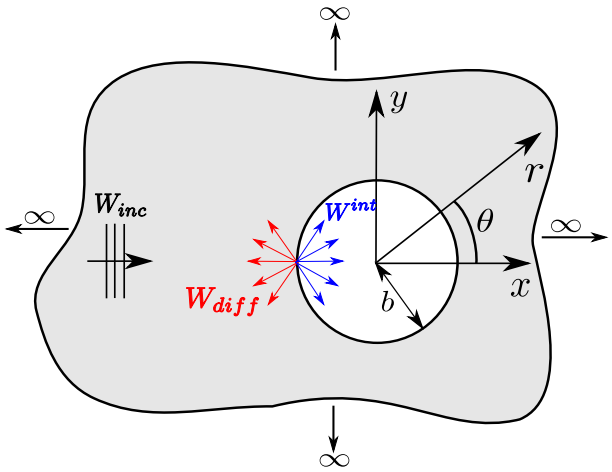



FIGURE 1.5 – Onde plane de flexion incidente sur un obstacle inséré dans une plaque mince infinie. L'obstacle peut être un diffuseur de trois types différents : trou simple, inclusion rigide ou inclusion souple, appelée trou borgne dans la littérature [154].

A l'extérieur de l'obstacle ($r > b$), le champ du déplacement totale $W^{ext}$ est une superposition de l'onde plane incidente $W_{inc}$ et du champ diffusé $W_{diff}$ :

$$W^{ext} = W_{inc} + W_{diff}, \tag{1.29}$$

où l'onde plane incidente peut être développée en une somme d'ondes cylindriques en utilisant la fonction de Bessel de première espèce :

$$W_{inc}(r,\theta) = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_{f0}r)\cos(n\theta), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases}. \tag{1.30}$$

Finalement, le champ total extérieur au diffuseur s'écrit :

$$W^{ext}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n J_n(k_{f0}r) + A_n H_n^{(1)}(k_{f0}r) + B_n K_n(k_{f0}r) \right] \cos(n\theta), \quad r \geq b. \tag{1.31}$$

Dans les deux cas du trou simple (condition de bord libre) et de l'inclusion rigide (condition de bord encastré), l'onde plane incidente ne donne lieu qu'au champ extérieur $W^{ext}$ car les conditions de bord ne permettent pas la transmission de l'onde à l'intérieur. En revanche, l'inclusion souple permet la pénétration de l'onde incidente à l'intérieur et donne naissance à un champ vibratoire intérieur appelé $W^{int}$. Tout comme le champ diffusé $W_{diff}$, le champ intérieur $W^{int}$ est également solution de l'Eq. (1.15) de la plaque circulaire. Elle est cette

fois composée des fonctions de Bessel qui décrivent uniquement un champ fini au centre du domaine ($r = 0$). Le champ intérieur s'écrit :

$$W^{int}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n J_n(k_{f1} r) + G_n I_n(k_{f1} r)\right] \cos(n\theta), \quad r \leq b, \tag{1.32}$$

où $k_{f1} = \sqrt[4]{\dfrac{\rho_1 h_1}{D_1}}\sqrt{\omega}$ et $D_1 = \dfrac{E_1^* h_1^3}{12\,(1-\nu_1^2)}$ sont respectivement le nombre d'onde naturel de flexion et la rigidité de flexion à l'intérieur de cette inclusion souple. Les coefficients $A_n$, $B_n$, $F_n$ et $G_n$ sont les amplitudes du champ vibratoire total de la plaque pour chaque ordre circonférentiel $n$, déterminées dans la section suivante par l'application des conditions aux limites pour le trou simple et l'inclusion rigide et par l'application des conditions de continuité à l'interface $r = b$ pour l'inclusion souple.

### 1.3.1 Conditions à l'interface $r = b$

Nous allons maintenant appliquer les conditions aux limites et les conditions de continuité à l'interface $r = b$ de chacun des diffuseurs, pour déterminer les inconnues du champ total $A_n$, $B_n$, $F_n$ et $G_n$.

- ***Inclusion rigide :*** le bord de l'inclusion rigide est encastré en $r = b$. Cette condition d'encastrement impose la nullité du déplacement $W^{ext}$ et la pente $\Theta$ en ce bord. Il est donc possible d'écrire :

$$\begin{aligned} W^{ext}|_{r=b} &= 0, \\ \Theta(W^{ext})|_{r=b} &= 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

La substitution de l'Eq. (1.31) dans les Eqs. (1.33) donne lieu au système linéaire de deux équations avec deux inconnues

$$\boldsymbol{M}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}, \tag{1.34}$$

où $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ sont respectivement la matrice du problème, le vecteur des inconnues et le vecteur source qui s'écrivent :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\alpha) & K_n(\alpha) \\ H_n^{(1)'}(\alpha) & K_n'(\alpha) \end{bmatrix}, \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = -W_0 \varepsilon_n i^n \begin{Bmatrix} J_n(\alpha) \\ J_n'(\alpha) \end{Bmatrix}, \tag{1.36}$$

où

$$\alpha = k_{f0} b \tag{1.37}$$

est un nombre d'onde adimensionnel. Dans l'Eq. (1.35), $H_n^{(1)'}$ et $K_n'$ sont les dérivées premières des fonctions $H_n^{(1)}$ et $K_n$ par rapport à $r$. Après la résolution analytique du système linéaire, on obtient [125] :

$$A_n = -W_0 \varepsilon_n i^n \left[\frac{J_n(\alpha)K_n'(\alpha) - J_n'(\alpha)K_n(\alpha)}{H_n^{(1)}(\alpha)K_n'(\alpha) - H_n^{(1)'}(\alpha)K_n(\alpha)}\right], \tag{1.38}$$

$$B_n = -W_0 \varepsilon_n i^n \mathbf{W} \left[ H_n^{(1)}(\alpha) K_n'(\alpha) - H_n^{(1)'}(\alpha) K_n(\alpha) \right]^{-1}, \tag{1.39}$$

où

$$\mathbf{W}\left\{ J_n(\alpha), H_n^{(1)}(\alpha) \right\} = J_n'(\alpha) H_n^{(1)}(\alpha) - J_n(\alpha) H_n^{(1)'}(\alpha) = \frac{-2i}{\pi\alpha} \tag{1.40}$$

représente le Wronskien [148–151].

• ***Trou simple :*** le cas du trou simple impose que le moment fléchissant $M$ et l'effort tranchant $V_0$ soient nuls en $r = b$. On écrit donc

$$\begin{aligned} M(W^{ext})|_{r=b} &= 0, \\ V_0(W^{ext})|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

où $M$ est défini dans l'Eq. (1.4) avec $D = D_0$ et $V_0$ est l'effort tranchant de Kelvin-Kirchhoff [137, 147], donné par l'opérateur aux dérivées partielles suivant :

$$V_0(\cdot) = -D_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2(\cdot) + (1-\nu_0) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{(\cdot)}{r} \right] \right\}. \tag{1.42}$$

En substituant l'Eq. (1.31) dans les Eqs. (1.41), on obtient le même type de système que celui de l'inclusion rigide (voir l'Eq. (1.34)), avec cette fois

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} S_{H_n}(\alpha) & S_{K_n}(\alpha) \\ T_{H_n}(\alpha) & T_{K_n}(\alpha) \end{bmatrix}, \tag{1.43}$$

et

$$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = -W_0 \varepsilon_n i^n \begin{Bmatrix} S_{J_n}(\alpha) \\ T_{J_n}(\alpha) \end{Bmatrix}. \tag{1.44}$$

Le système linéaire du trou simple admet également des solutions analytiques. Elles s'expriment sous la forme suivante [125, 155] :

$$A_n = -W_0 \varepsilon_n i^n \left[ \frac{S_{J_n}(\alpha) T_{K_n}(\alpha) - S_{K_n}(\alpha) T_{J_n}(\alpha)}{S_{H_n}(\alpha) T_{K_n}(\alpha) - S_{K_n}(\alpha) T_{H_n}(\alpha)} \right], \tag{1.45}$$

$$B_n = -W_0 \varepsilon_n i^n \left[ \frac{S_{H_n}(\alpha) T_{J_n}(\alpha) - S_{J_n}(\alpha) T_{H_n}(\alpha)}{S_{H_n}(\alpha) T_{K_n}(\alpha) - S_{K_n}(\alpha) T_{H_n}(\alpha)} \right]. \tag{1.46}$$

• ***Inclusion souple :*** pour résoudre le problème de la plaque avec une inclusion souple, dans lequel on a quatre coefficients à déterminer ($A_n$, $B_n$, $F_n$ et $G_n$), il faut écrire un système linéaire de quatre équations. Ces quatre équations sont établies par l'application des conditions de continuité à l'interface $r = b$ entre le milieu extérieur et le milieu intérieur. A cette interface le champ $W$, la pente $\Theta$, le moment de flexion $M$ et l'effort tranchant $V_0$ sont continus. On écrit alors :

$$\begin{aligned} W^{ext}|_{r=b} &= W^{int}|_{r=b}, \\ \Theta(W^{ext})|_{r=b} &= \Theta(W^{int})|_{r=b}, \\ M(W^{ext})|_{r=b} &= M(W^{int})|_{r=b}, \\ V_0(W^{ext})|_{r=b} &= V_0(W^{int})|_{r=b}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

En substituant les Eqs. (1.31) et (1.32) dans les Eqs. (1.47), on obtient un système linéaire qui contient quatre équations avec quatre inconnues, dont la matrice $\boldsymbol{M}$, le vecteur des inconnues $\boldsymbol{X}$ et le vecteur source $\boldsymbol{S}$ s'écrivent [125] :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\alpha) & K_n(\alpha) & -J_n(\beta) & -I_n(\beta) \\ k_{f0}H_n^{(1)'}(\alpha) & k_{f0}K_n'(\alpha) & -k_{f1}J_n'(\beta) & -k_{f1}I_n'(\beta) \\ S_{H_n}(\alpha) & S_{K_n}(\alpha) & -S_{J_n}(\beta) & -S_{I_n}(\beta) \\ T_{H_n}(\alpha) & T_{K_n}(\alpha) & -T_{J_n}(\beta) & -T_{I_n}(\beta) \end{bmatrix}, \tag{1.48}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ F_n \\ G_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = -W_0\varepsilon_n i^n \begin{Bmatrix} J_n(\alpha) \\ k_{f0}J_n'(\alpha) \\ S_{J_n}(\alpha) \\ T_{J_n}(\alpha) \end{Bmatrix}, \tag{1.49}$$

où

$$\beta = k_{f1}b. \tag{1.50}$$

Les expressions détaillées des éléments de la matrice $\boldsymbol{M}$ et du vecteur $\boldsymbol{S}$ correspondant à chacun des trois diffuseurs étudiés sont données dans l'annexe A.

### 1.3.2 Application numérique et discussion

Les résultats numériques concernant l'inclusion rigide et le trou simple présentés dans cette section, sont publiés dans l'article [125]. Ils sont reproduits ici pour les comparer avec ceux du trou borgne. On appelle ici trou borgne une réduction locale et uniforme d'épaisseur. Il s'agit d'un cas particulier de l'inclusion souple décrite dans l'introduction du paragraphe 1.3. L'ensemble des applications numériques est effectué pour une plaque d'acier d'épaisseur extérieure $h_0 = 25.4$ mm. Les caractéristiques du matériau constituant cette plaque dans les zones extérieure et intérieure au diffuseur sont considérées identiques. Ces caractéristiques sont la masse volumique $\rho_0 = 7800$ kg/m$^3$, le module de Young élastique $E_0 = 210$ GPa avec un coefficient de pertes $\eta_0 = 0.001$ et le coefficient de Poisson $\nu_0 = 0.3$. Les diffuseurs sont de même taille ($b = 60$ mm).

La directivité des trois diffuseurs étudiés est analysée à travers la fonction de forme $f(\theta)$. Cette fonction est obtenue à partir de l'expression asymptotique du champ diffusé (voir l'Eq. (1.27)) lorsque $r \to \infty$, dans laquelle les ondes évanescentes sont négligées :

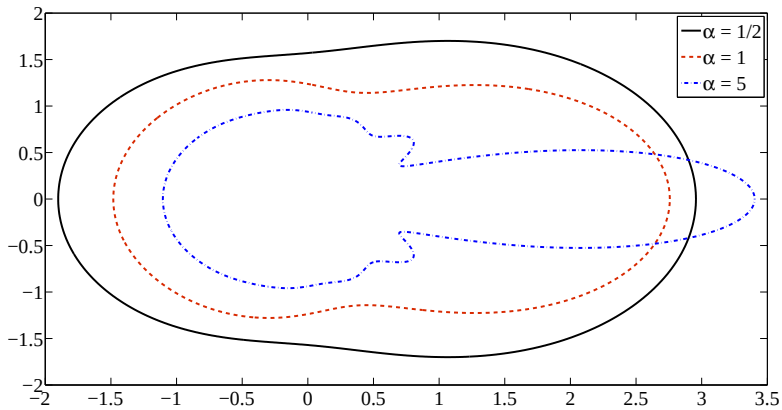
$$W_{diff}(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{f0} r}} e^{i(k_{f0}r - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n \cos(n\theta), \quad r \to \infty. \tag{1.51}$$

Cette écriture asymptotique du champ diffusé est équivalente à :

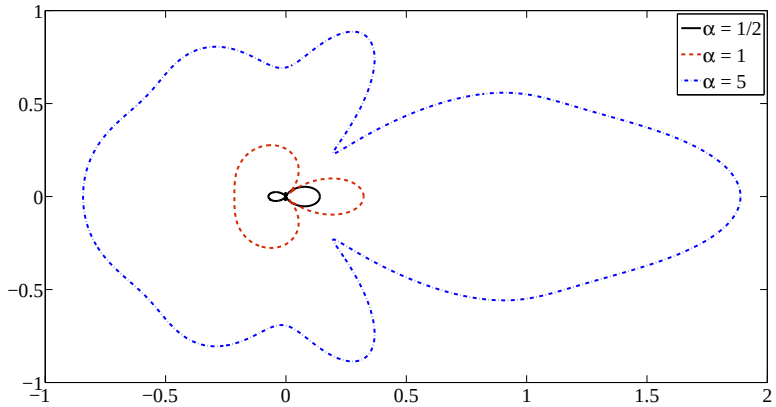
$$W_{diff}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2r}} e^{i(k_{f0}r - \frac{\pi}{4})} f(\theta), \qquad r \to \infty, \tag{1.52}$$

avec

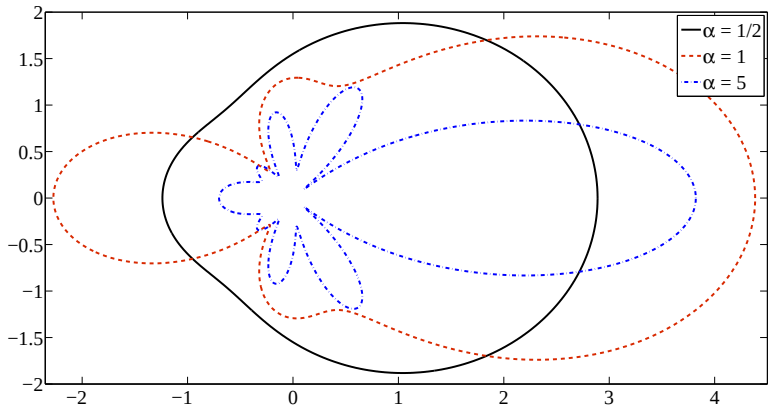
$$f(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi k_{f0}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n \cos(n\theta). \tag{1.53}$$




(a)




(b)




(c)

FIGURE 1.6 – Diagrammes de directivité des trois diffuseurs étudiés pour les nombres d'onde de flexion adimensionnels $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$. (a) une inclusion rigide, (b) un trou simple et (c) un trou borgne d'épaisseur $h_1 = h_0/10$.

La fonction $\left|f(\theta)/\sqrt{b}\right|$, correspondant au module de l'amplitude du champ lointain diffusé, est tracée sur la figure 1.6 pour les nombres d'onde adimensionnels $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$. Sur cette figure, l'onde incidente est dirigée selon l'axe des abscisses croissantes ; le diagramme présente la distribution polaire du champ diffusé en champ lointain. Les diagrammes de directivité présentés sur les Figs. 1.6(a) et 1.6(b) montrent qu'à basse fréquence ($\alpha = 0.5$), l'inclusion rigide se comporte comme un monopole et le trou simple comme une combinaison de monopole et de quadripole. Ceci est un résultat qui peut être prédit directement à partir des expressions de $A_n$ données par les Eqs. (1.38) et (1.45) : le développement asymptotique de $A_n$ à la limite basse fréquence ($\alpha \to 0$) montre que tous ces coefficients tendent vers zéro sauf $A_0$ pour l'inclusion rigide et $A_0$ et $A_2$ pour le trou simple. En augmentant la fréquence ($\alpha = 1$ et $\alpha = 5$), l'inclusion rigide et le trou simple convergent vers un même type de comportement, caractérisé par une diffusion directionnelle, exprimée par l'apparition d'un large lobe derrière l'obstacle autour duquel se développent de petits lobes dont le nombre augmente avec la fréquence.
La Fig. 1.6(c) montre que le trou borgne étudié possède un comportement semblable à celui de l'inclusion rigide en termes de directivité. Il se comporte également comme un monopole à basse fréquence ($\alpha = 0.5$) et exhibe un comportement typique des hautes fréquences pour $\alpha = 5$, qui se distingue par une diffusion maximale derrière le diffuseur.

Le champ rétrodiffusé, défini comme le champ diffusé dans la direction opposée à la direction de l'onde incidente (voir Fig 1.1), est tracé en module sur la figure 1.7 en fonction du nombre d'onde adimensionnel $\alpha$, pour les trois types de diffuseurs étudiés. Comme le montre la figure, le champ rétrodiffusé tend vers zéro à la limite basse fréquence pour le trou simple et le trou borgne. Il tend vers l'infini pour l'inclusion rigide. A hautes fréquences, le facteur $|f(\pi)|/\sqrt{b}$ (amplitude rétrodiffusée en champ lointain) pour le trou simple et l'inclusion rigide approchent asymptotiquement l'unité. Ceci peut-être expliqué par le fait que le coefficient de réflexion en amplitude d'une onde réfléchie par une extrémité rigide ou libre vaut l'unité dans les deux cas.

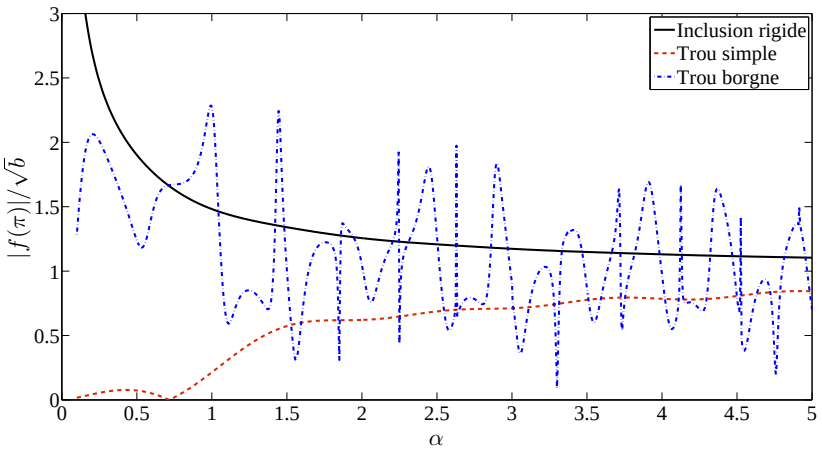



FIGURE 1.7 – Champ rétrodiffusé (champ lointain, diffusé dans la direction $\theta = \pi$) en fonction de $\alpha$. Ce champ est divisé par $\sqrt{b}$ pour l'exprimer en mètre.

Le trou borgne étant pénétrable, et permet la transmission du champ de l'extérieur vers

l'intérieur, il peut résonner localement à certaines fréquences particulières, dépendantes de sa géométrie. Ce comportement se manifeste par des augmentations locales du champ rétrodiffusé à certaines fréquences qui peuvent être calculées en résolvant un problème homogène aux valeurs propres (voir Sec 2.2.5).

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre bibliographique synthétise les outils théoriques descriptifs de la diffusion des ondes de flexion par des obstacles de formes simples, insérés dans une plaque infinie. La théorie utilisée pour décrire les vibrations des plaques minces est la théorie de Kirchhoff. Dans ce cadre, l'équation régissant le mouvement de flexion d'une plaque circulaire d'épaisseur variable est établie, et résolue analytiquement dans le cas d'une plaque d'épaisseur constante. Cette théorie est utilisée pour étudier la diffusion des ondes de flexion par trois types de diffuseurs : une inclusion rigide qui constitue une inhomogénéité caractérisée par un périmètre rigide, un trou simple avec un bord libre et une inclusion souple, appelée trou borgne, avec un bord permettant la continuité de la vibration. Un modèle ondulatoire analytique permettant d'analyser les propriétés de diffusion de ces diffuseurs est décrit dans ce chapitre. Ce modèle est centré sur l'étude des variations du champ rétrodiffusé et la directivité du champ diffusé en fonction de la fréquence. Il est montré que le champ rétrodiffusé du trou simple et du trou borgne tend vers zéro à la limite basse fréquence, tandis que celui de l'inclusion rigide tend vers l'infini. En augmentant la fréquence, le champ rétrodiffusé tend vers l'unité pour le trou simple et l'inclusion rigide, et oscille entre les deux pour le trou borgne tout en montrant un comportement résonnant. L'étude de la directivité du champ diffusé montre que l'inclusion rigide et le trou borgne se comportent comme un monopole à basses fréquences, tandis que le trou simple est une combinaison de monopole et de quadripole. A des fréquences élevées, les trois diffuseurs ont des comportements similaires, caractérisés par une diffusion essentiellement orientée vers l'aval du diffuseur. Le modèle et les notions théoriques décrits dans ce chapitre constituent un point de départ pour l'étude du trou noir acoustique et sont utilisés par la suite pour analyser le comportement vibratoire de ce dernier.

# Chapitre 2

# Modèle analytique de diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique

## 2.1 Introduction

Le trou noir acoustique (TN) appartient à la classe des diffuseurs pénétrables, pour lesquels un champ interne à l'obstacle existe. Pour comprendre les types et le comportement complexe des ondes à l'intérieur du TN, qui résultent du couplage dû aux variations locales d'épaisseur et la distribution des mécanismes dissipatifs, l'étude préliminaire du trou noir sans revêtement viscoélastique est nécessaire. L'amortissement dans la plaque est considéré au moyen d'un module d'Young complexe. C'est l'hétérogénéité d'amortissement induite par le revêtement viscoélastique qui n'est ici pas prise en compte. L'effet de cette hétérogénéité est étudié au chapitre 3. Une analyse d'un tel diffuseur à travers un modèle ondulatoire analytique est proposée dans ce chapitre : la caractérisation du champ diffusé et des propriétés de diffusion de ce diffuseur pénétrable constitue l'objet de cette analyse, dont le contenu est une traduction de l'anglais au français d'un article publié dans le "*Journal of Sound and Vibration*" [156]. Ce modèle est utilisé pour dimensionner le TN pour une application d'amortissement vibratoire, et constitue également une première étape avant l'étude d'un TN avec revêtement. La description du problème à résoudre et la formulation du modèle ondulatoire sont données dans les sections 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3. Dans la Sec. 2.2.4, ce modèle est utilisé pour identifier les caractéristiques principales du trou noir. Les modes locaux associés au diffuseur sont mis en évidence et sont étudiés dans la Sec. 2.2.5. Enfin, des études paramétriques sur les propriétés de diffusion du TN sont réalisées dans la Sec. 2.2.6.

## 2.2 Modèle d'un trou noir sans film

### 2.2.1 Position du problème

Le milieu de propagation considéré est une plaque infinie, d'épaisseur constante $h_0$ constituée d'un matériau de masse volumique $\rho_0$, de module de Young complexe $E_0^*$ et de coefficient de Poisson $\nu_0$. Un trou noir acoustique sans film viscoélastique (Fig. 2.1) de

rayon extérieur $b$ et de rayon intérieur $a$, dit "rayon de troncature", est placé à l'origine du système de coordonnées polaires $(r, \theta)$. Le TN est constitué d'une cuvette de révolution, donnant lieu à une diminution graduelle de l'épaisseur en fonction du rayon, suivant une loi de puissance : l'épaisseur présente une variation axisymétrique, et est donnée par :

$$h(r) = \begin{cases} h_{TN} = h_0 \left( \dfrac{r - a'}{b - a'} \right)^m, & a \leq r \leq b \\ h_0, & r \geq b \end{cases}, \tag{2.1}$$

de façon à ce que l'épaisseur de la plaque au bord d'un trou central virtuel de rayon $r = a'$ $(a' < a)$ soit nulle (voir Fig. 2.1).

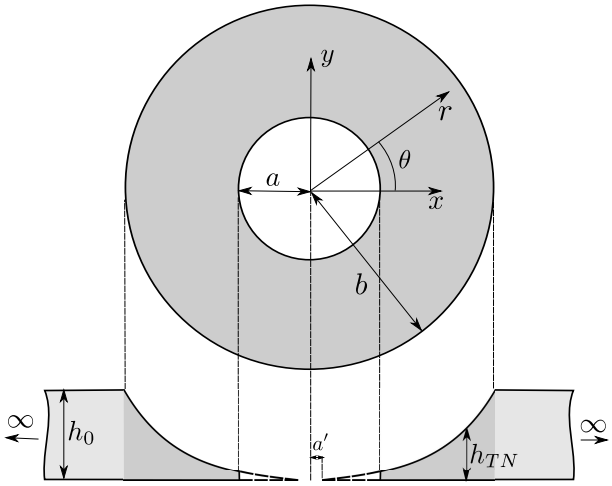



FIGURE 2.1 – Description des cotes d'un trou noir acoustique débouchant inséré dans une plaque infinie.

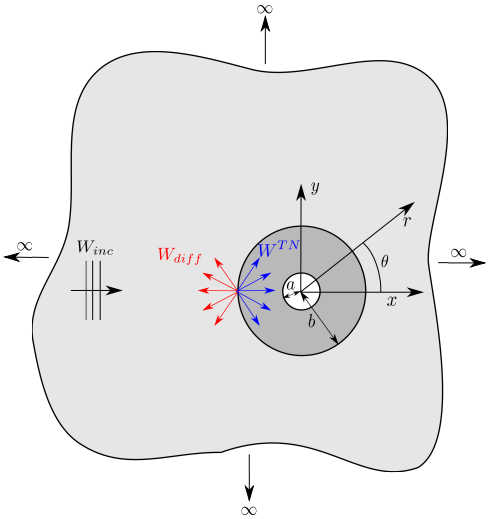



FIGURE 2.2 – Schéma du problème considéré : onde plane de flexion en incidence normale sur un trou noir acoustique débouchant.

Comme illustré dans la Fig. 2.2, une onde plane harmonique de flexion $W_{inc} = W_0 e^{ik_{f0}x} e^{-i\omega t}$, se propageant dans la direction $x$ est considérée. On note la pulsation naturelle $\omega$, $k_{f0}$ est le nombre d'onde de flexion dans la plaque d'épaisseur uniforme $h_0$.

L'onde incidente $W_{inc}$ donne lieu à un champ de déplacement $W_{diff}$ appelé champ diffusé et un champ intérieur au TN, noté $W^{TN}$. Dans la suite de cette section, un modèle analytique est proposé pour analyser les propriétés de diffusion du trou noir.

### 2.2.2 Mise en équations

Un modèle ondulatoire basé sur la théorie de Kirchhoff est développé dans le cas d'une plaque avec une épaisseur localement variable. Ce cadre théorique de travail, supposant que les contributions des forces de cisaillement sont négligées, n'est valide qu'à partir d'une longueur d'onde six fois supérieure à l'épaisseur ($\lambda > 6h$) en tous points de la plaque [157]. Cela revient à dire que les ondes se propagent dans le milieu à basses fréquences. Cependant, le déplacement hors-plan $W$ est supposé petit devant l'épaisseur $h$. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, le modèle non linéaire de Von Karman [141] doit être utilisé. Dans le cas où l'hypothèse des basses fréquences n'est plus valide, c'est-à-dire que les ondes sont susceptibles de se propager dans l'épaisseur, la théorie de Mindlin [158] doit être appliquée. Dans notre problème, la géométrie du trou noir et la gamme de fréquences étudiée sont choisis afin que la théorie classique de Kirchhoff soit valide.

A l'extérieur du diffuseur ($r \geq b$), où l'épaisseur est uniforme, le champ du déplacement $W^{ext}$, appelé champ externe, est solution de l'équation de mouvement (1.15), donnée dans le chapitre 1.

Dans la zone interne au trou noir ($a \leq r \leq b$), l'épaisseur décroit en suivant l'Eq. (2.1). La rigidité de flexion interne au TN est indépendante de $\theta$ et varie uniquement en fonction de $r$ tel que $D_{TN} = D_0 \left(\dfrac{r-a'}{b-a'}\right)^{3m}$. Par conséquent, le champ du déplacement $W^{TN}$ à l'intérieur du TN, satisfait l'équation du mouvement, [147, 159], suivante :

$$\nabla^2 \left[D_{TN} \nabla^2 W^{TN}\right] - (1-\nu_0) \diamondsuit^4 \left\{D_{TN}, W^{TN}\right\} - \rho_0 h \omega^2 W^{TN} = 0, \qquad a \leq r \leq b, \tag{2.2}$$

où $\diamondsuit^4$ est l'opérateur aux dérivées partielles défini comme :

$$\diamondsuit^4 \left\{D_{TN}, W^{TN}\right\} = \frac{\partial^2 D_{TN}}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial W^{TN}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W^{TN}}{\partial \theta^2}\right] + \frac{\partial^2 W^{TN}}{\partial r^2} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial D_{TN}}{\partial r}\right]. \tag{2.3}$$

A l'interface entre le TN et la zone uniforme extérieure ($r = b$), le champ du déplacement $W$, la pente $\Theta$, le moment fléchissant $M$ et l'effort tranchant $V$ sont continus. Cette condition de continuité permet d'écrire :

$$\begin{array}{lcl} W^{ext}|_{r=b} & = & W^{TN}|_{r=b}, \\ \Theta(W^{ext})|_{r=b} & = & \Theta(W^{TN})|_{r=b}, \\ M(W^{ext})|_{r=b} & = & M(W^{TN})|_{r=b}, \\ V_0(W^{ext})|_{r=b} & = & V(W^{TN})|_{r=b}. \end{array} \tag{2.4}$$

Les opérateurs différentiels de $\Theta$, $M$, $V_0$ sont donnés respectivement par les Eqs. (1.2), (1.4) et (1.42) et $V$ est donné par :

$$\begin{array}{rcl} V(\cdot) & = & -\left(D_{TN}\right)\dfrac{\partial^3(\cdot)}{\partial r^3} - \left(\dfrac{\partial D_{TN}}{\partial r} + \dfrac{D_{TN}}{r}\right)\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2} + \left(\dfrac{D_{TN}}{r^2} - \dfrac{\nu_0}{r}\dfrac{\partial D_{TN}}{\partial r}\right)\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial r} \\ & & -\left(\dfrac{D_{TN}(2-\nu_0)}{r^2}\right)\dfrac{\partial^3(\cdot)}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\dfrac{D_{TN}(3-\nu_0)}{r^3} - \dfrac{\nu_0}{r^2}\dfrac{\partial D_{TN}}{\partial r}\right)\dfrac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} \end{array}. \tag{2.5}$$

Notons que dans le cas où la rigidité de flexion de la plaque est constante ($D_{TN} = D_0$), ce qui est le cas à l'extérieure du trou noir, l'opérateur donné par l'Eq. (2.5) devient le même que celui dans l'Eq. (1.42).

Le trou noir possède une extrémité libre en $r = a$, ce qui implique la nullité du moment de flexion et de l'effort tranchant en cette limite :

$$\begin{aligned} M(W^{TN})|_{r=a} &= 0, \\ V(W^{TN})|_{r=a} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Finalement, l'équation du mouvement (2.2), les conditions de continuité, Eq. (2.4), et les conditions aux limites, Eq. (2.6), associées à la condition d'excitation $W_{inc} = W_0 e^{ik_{f0}x}$, constituent le problème à résoudre.

### 2.2.3 Méthode analytique de résolution

Dans cette section, on présente la méthode analytique permettant de calculer le champ diffusé par le trou noir et d'étudier ses propriétés de diffusion. Pour contrôler la décroissance du profil, toute la formulation mathématique concernant le trou noir est exprimée par rapport à un repère polaire translaté $(\widehat{r}, \theta)$, où $\widehat{r} = r - a'$ représente la coordonné radiale translatée d'une distance $a'$. La distance $a'$, montrée dans la Fig. 2.1, désigne le rayon d'un cercle virtuel sur lequel l'épaisseur de la plaque donnée par l'Eq. (2.1) est nulle.

#### 2.2.3.1 Champ de déplacement extérieur ($r \geq b$)

Tout comme pour les diffuseurs étudiés dans le chapitre 1, dans la région extérieure au trou noir ($r \geq b$) où l'épaisseur de la plaque est constante, le champ du déplacement total $W^{ext}(r, \theta)$ est une superposition du champ incident $W_{inc}(r, \theta)$ et du champ diffusé $W_{diff}(r, \theta)$, et s'écrit donc comme une somme de ces deux champs (voir l'Eq. (1.31)). Il est donné par :

$$W^{ext} = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_{f0} r) \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(k_{f0} r) + B_n K_n(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta), \qquad r \geq b. \tag{2.7}$$

Les constantes $A_n$ et $B_n$ sont obtenues pour chaque ordre ciconférentiel $n$ en appliquant les conditions de continuité, Eq. (2.4), et les conditions aux limites, Eq. (2.6), qui nécessitent la description du champ à l'intérieur du trou noir. La méthode qui décrit la façon d'obtenir ce champ est détaillée ci-dessous.

#### 2.2.3.2 Champ de déplacement intérieur ($a \leq r \leq b$)

A l'intérieur du trou noir, où l'épaisseur de la plaque varie en fonction de $r$, le champ du déplacement $W^{TN}(\widehat{r}, \theta)$ satisfait l'équation de mouvement (2.2). Une telle solution est $2\pi$ périodique et peut être développée en série de Fourier :

$$W^{TN}(\widehat{r}, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{TN}(\widehat{r}) \cos(n\theta), \tag{2.8}$$

où l'axe $x$ est l'axe de référence pour l'angle $\theta$. La substitution de l'Eq. (2.8) dans l'Eq. (2.2) en prenant en compte les propriétés d'orthogonalité des fonctions $\cos(n\theta)$ mène à l'équation suivante, satisfaite par $W_n^{TN}(\widehat{r})$ pour chaque ordre circonférentiel $n$ :

$$\frac{\partial^4 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^4} + \left[\frac{2}{D_{TN}}\frac{\partial D_{TN}}{\partial \widehat{r}} + \frac{2}{\widehat{r}}\right]\frac{\partial^3 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^3} + \left[\frac{1}{D_{TN}}\frac{\partial^2 D_{TN}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2+\nu_0}{\widehat{r}D^{TN}}\frac{\partial D_{TN}}{\partial \widehat{r}} - \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^2}\right]\frac{\partial^2 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^2}$$
$$+\left[\frac{\nu_0}{\widehat{r}D_{TN}}\frac{\partial^2 D_{TN}}{\partial \widehat{r}^2} - \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^2 D_{TN}}\frac{\partial D_{TN}}{\partial \widehat{r}} + \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^3}\right]\frac{\partial W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}}$$
$$-\left[\frac{\nu_0 n^2}{\widehat{r}^2 D_{TN}}\frac{\partial^2 D_{TN}}{\partial \widehat{r}^2} - \frac{3n^2}{\widehat{r}^3 D_{TN}}\frac{\partial D_{TN}}{\partial \widehat{r}} + \frac{n^2(4-n^2)}{\widehat{r}^4} + \frac{\rho_0 h_{TN}\omega^2}{D_{TN}}\right] W_n^{TN} = 0. \tag{2.9}$$

La rigidité de flexion $D_{TN}$ dépend de l'épaisseur à l'intérieur du TN, qui elle-même, dépend de $r$. En considérant la définition $D_{TN}(\widehat{r}) = D_0\left(\frac{\widehat{r}}{b-a'}\right)^{3m}$ [159, 160], l'Eq. (2.9) se transforme comme suit :

$$\widehat{r}^4\frac{\partial^4 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^4} + \widehat{r}^3\left[2+6m\right]\frac{\partial^3 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^3} + \widehat{r}^2\left[3m(3m+1+\nu_0) - (1+2n^2)\right]\frac{\partial^2 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^2}$$
$$+\widehat{r}\left[3m(3m-1)\nu_0 - 3m(1+2n^2) + (1+2n^2)\right]\frac{\partial W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}} \tag{2.10}$$
$$+\left[3m(3n^2-(3m-1)\nu_0 n^2) + n^2(n^2-4) - \frac{12\rho_0\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 (b-a')^{-2m}}\widehat{r}^{4-2m}\right] W_n^{TN} = 0.$$

La résolution analytique de l'Eq. (2.10) est possible si ses coefficients sont constants. Dans le cas particulier d'un trou noir avec un profil quadratique ($m = 2$), le dernier terme de cette équation devient indépendant de $\widehat{r}$. Ceci permet d'écrire

$$\widehat{r}^4\frac{\partial^4 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^4} + \widehat{r}^3\left[14\right]\frac{\partial^3 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^3} + \widehat{r}^2\left[6(7+\nu_0) - (1+2n^2)\right]\frac{\partial^2 W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}^2}$$
$$+\widehat{r}\left[30\nu_0 - 5(1+2n^2)\right]\frac{\partial W_n^{TN}}{\partial \widehat{r}} + \left[n^2(n^2-30\nu_0+14) - \frac{12\rho_0\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 (b-a')^{-4}}\right] W_n^{TN} = 0. \tag{2.11}$$

L'Eq. (2.11) peut maintenant être résolue dans un espace modifié en utilisant le changement de coordonnées décrit par la relation :

$$\widehat{r} = r_0 e^{\widehat{z}}, \tag{2.12}$$

où $\widehat{z} = \frac{z}{r_0}$ est un paramètre adimensionnel, $r_0 = b - a'$ et $z$ est homogène à une longueur. En utilisant l'Eq. (2.12), qui implique que $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \widehat{r}} = \frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial(\cdot)}{\partial \widehat{z}}$, l'Eq. (2.11) peut alors s'écrire comme une équation différentielle à coefficients constants :

$$\alpha_4\frac{\partial^4 W_n^{TN}(\widehat{z})}{\partial \widehat{z}^4} + \alpha_3\frac{\partial^3 W_n^{TN}(\widehat{z})}{\partial \widehat{z}^3} + \alpha_2\frac{\partial^2 W_n^{TN}(\widehat{z})}{\partial \widehat{z}^2} + \alpha_1\frac{\partial W_n^{TN}(\widehat{z})}{\partial \widehat{z}} + \alpha_0 W_n^{TN}(\widehat{z}) = 0, \tag{2.13}$$

avec les coefficients $\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 10 + 6\nu_0 - 2n^2$, $\alpha_1 = -24 + 24\nu_0 - 8n^2$, $\alpha_0 = n^2(n^2 - 30\nu_0 + 14) - \dfrac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 r_0^{-4}}$. En cherchant des solutions pour $W_n^{TN}(\widehat{z})$ qui sont proportionnelles à $e^{K\widehat{z}}$ ($K$ étant la constante de propagation adimensionnelle), l'équation caractéristique suivante est établie :

$$\alpha_4 K^4 + \alpha_3 K^3 + \alpha_2 K^2 + \alpha_1 K + \alpha_0 = 0. \tag{2.14}$$

Pour chaque ordre circonférentiel $n$, l'équation polynomiale (2.14) admet quatre racines $K_{p,n}$ ($p = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) qui peuvent être obtenues en utilisant la méthode de Ludovico Ferrari [161] comme suit :

$$K_{p,n} = -2\mp\sqrt{7 - 3\nu_0 + n^2 \pm \sqrt{8n^2(3\nu_0 - 1) + 9(1-\nu_0)^2 + \frac{12\rho_0\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 r_0^{-4}}}}, \tag{2.15}$$

où les constantes de propagation $K_{1,n}$, $K_{2,n}$, $K_{3,n}$ et $K_{4,n}$ sont obtenues à partir de la relation de dispersion Eq.(2.15) en prenant les combinaisons de signes $(-,+)$, $(+,+)$, $(-,-)$ et $(+,-)$ respectivement. L'expression du champ du déplacement $W^{int}(z,\theta)$ à l'intérieur du trou noir est finalement donnée par

$$W^{int} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{4}\left[C_{p,n}e^{ik_{p,n}z}\right]\cos(n\theta), \qquad k_{p,n} = \frac{K_{p,n}}{ir_0}. \tag{2.16}$$

Pour chaque ordre circonférentiel $n$, les coefficients $A_n$, $B_n$ et $C_{p,n}$ sont calculés pour le trou noir en substituant les Eqs. (2.7) et (2.16) dans les expressions des conditions de continuité, Eq. (2.4), et les conditions aux limites, Eq. (2.6). Le système de six équations avec six inconnues ($6 \times 6$), donné par l'Eq. (2.17), est alors inversé numériquement.

$$\boldsymbol{M}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}, \tag{2.17}$$

où $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ représentent respectivement la matrice calculée à partir des conditions de continuité et des conditions aux limites, le vecteur des coefficients recherchés et le vecteur source.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\alpha) & K_n(\alpha) & -1 & -1 & -1 & -1 \\ k_{f0}H_n^{(1)'}(\alpha) & k_{f0}K_n'(\alpha) & -ik_{1,n} & -ik_{2,n} & -ik_{3,n} & -ik_{4,n} \\ S_{H_n}(\alpha) & S_{K_n}(\alpha) & -\gamma_{1,n} & -\gamma_{2,n} & -\gamma_{3,n} & -\gamma_{4,n} \\ T_{H_n}(\alpha) & T_{K_n}(\alpha) & -\xi_{1,n} & -\xi_{2,n} & -\xi_{3,n} & -\xi_{4,n} \\ 0 & 0 & \Gamma_{1,n} & \Gamma_{2,n} & \Gamma_{3,n} & \Gamma_{4,n} \\ 0 & 0 & \Xi_{1,n} & \Xi_{2,n} & \Xi_{3,n} & \Xi_{4,n} \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_{1,n} \\ C_{2,n} \\ C_{3,n} \\ C_{4,n} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = -W_0\varepsilon_n i^n \begin{Bmatrix} J_n(\alpha) \\ k_{f0}J_n'(\alpha) \\ S_{J_n}(\alpha) \\ T_{J_n}(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.19}$$

La méthode de Ludovico Ferrari pour la recherche des racines des polynômes d'ordre 4 et le calcul détaillé des éléments de la matrice $\boldsymbol{M}$ et du vecteur source $\boldsymbol{S}$ sont présentés dans l'annexe B.

### 2.2.4 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans cette section sont obtenus pour une plaque d'aluminium, dont les valeurs numériques des propriétés géométriques et physiques sont listées dans le tableau 2.1.

| Matériau | | Géométrie | |
|---|---|---|---|
| $\rho_0$ | 2700 (kg/m$^3$) | $a'$ | $10^{-3}$ (m) |
| $\nu_0$ | 0.33 | $a$ | $5.10^{-3}$ (m) |
| $E_0$ | 69 (GPa) | $b$ | $6.10^{-2}$ (m) |
| $\eta_0$ | $10^{-3}$ | $h_0$ | $1,5.10^{-3}$ (m) |
| | | $m$ | 2 |

Tableau 2.1 – Paramètres physiques et géométriques de la plaque simulée.

#### 2.2.4.1 Relations de dispersion

Le modèle présenté dans la Sec. 2.2.3 montre que dans l'espace transformé $\widehat{z}$, défini à partir du changement de variable, Eq. (2.12), le trou noir est vu comme un milieu de propagation dans lequel existent quatre ondes. La dispersion de ces ondes est étudiée dans la Fig. 2.3, dans laquelle sont tracées les parties réelles et imaginaires des nombres d'onde adimensionnels $k_{p,n}b$ ($p = 1$ à 4) en fonction du nombre d'onde de flexion adimensionnel $\alpha = k_{f0}b$ ($k_{f0}$ est le nombre d'onde à l'extérieur et $b$ étant le rayon extérieur du trou noir). Pour faciliter la lecture et l'interprétation des résultats, les courbes de dispersion sont tracées sur la Fig. 2.3 uniquement pour l'ordre circonférentiel fondamental ($n = 0$).

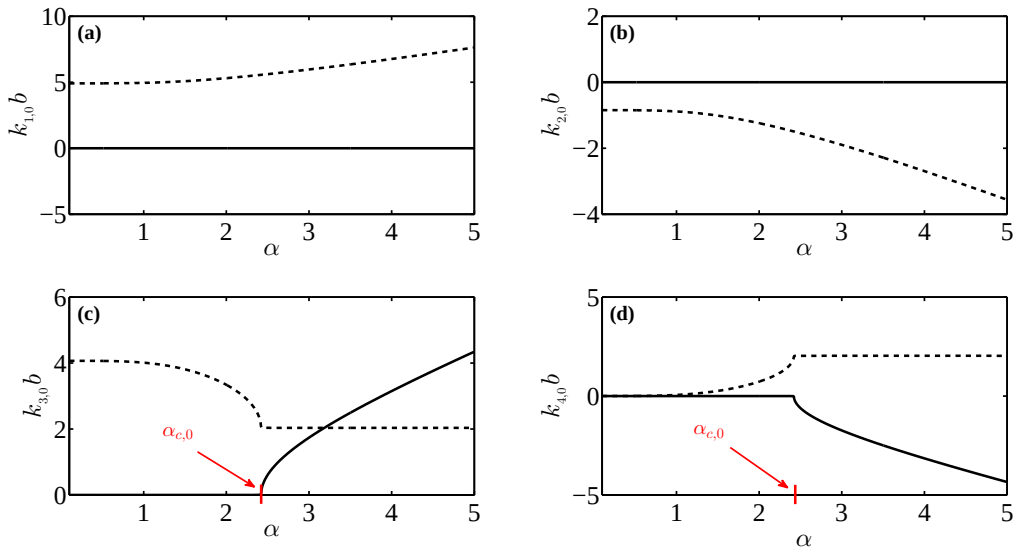



FIGURE 2.3 – Courbes de dispersion à l'intérieur du trou noir. Les parties réelles (———) et imaginaires (– – –) de $k_{p,0}b$ ($p = 1$ à 4) sont tracées en fonction du nombre d'onde de flexion adimensionnel $\alpha$, défini dans la zone uniforme de la plaque.

En se basant sur la convention temporelle $e^{-iwt}$, on peut analyser le comportement des ondes à l'intérieur du trou noir et en déterminer le type : les ondes associées aux nombres

d'onde $k_{p,n}$ qui ont une partie réelle non nulle et positive ($\Re\{k_{p,n}\} > 0$) correspondent à des ondes dites divergentes (sortantes), c'est-à-dire les ondes qui se propagent dans la direction des $x$ croissants. Ce raisonnement implique que les ondes qui se propagent avec un nombre d'onde dont la partie réelle est négative ($\Re\{k_{p,n}\} < 0$) sont dites convergentes (rentrantes). Les parties imaginaires $\Im\{k_{p,n}\}$ traduisent l'atténuation ($\Im\{k_{p,n}\} > 0$) ou l'amplification ($\Im\{k_{p,n}\} < 0$) des ondes dans la direction des $x$ croissants.
Les Figs. 2.3(a) et 2.3(b) montrent que $k_{1,0}$ et $k_{2,0}$ correspondent à des ondes évanescentes ($\Re\{k_{p,0}\} \approx 0$) divergente ($p = 1$) et convergente ($p = 2$) respectivement. Les tracés de $k_{3,0}$, (Fig. 2.3(c)), et $k_{4,0}$, (Fig. 2.3(d)), exhibent un nombre d'onde adimensionnel de coupure $\alpha_{c,n}$ pour chaque ordre $n$. L'expression analytique de ces nombres d'ondes s'obtient à partir de la relation de dispersion, Eq. (2.15), comme :

$$\alpha_{c,n} = \frac{b}{r_0}\sqrt[4]{n^2(n^2 - 30\nu_0 + 22) - 24\nu_0 + 40}. \tag{2.20}$$

Les fréquences de coupure $f_{c,n}$ correspondantes peuvent ainsi être dérivées de l'Eq. (2.20) comme :

$$f_{c,n} = \frac{h_0}{2\pi r_0^2}\sqrt{\frac{E_0\left[n^2(n^2 - 30\nu_0 + 22) - 24\nu_0 + 40\right]}{12\rho_0(1 - \nu_0^2)}}. \tag{2.21}$$

En dessous de $\alpha_{c,0}$, le nombre d'onde $k_{3,0}$ correspond à une onde évanescente ($\Re\{k_{3,0}\} \approx 0$) divergente, et devient propagative ($\Re\{k_{3,0}\} > 0$) au dessus de $\alpha_{c,0}$ tout en restant atténuée exponentiellement ($\Im\{k_{3,0}\} > 0$). Le cas de $k_{4,0}$ est particulièrement intéressant et illustrateur de l'un des effets du trou noir acoustique : à basses fréquences (à des nombres d'onde adimensionnels inférieurs à $\alpha_{c,0}$), l'onde correspondant à $k_{4,0}$ est évanescente ($\Re\{k_{4,0}\} \approx 0$) convergente. A hautes fréquences (à des nombres d'onde adimensionnels supérieurs à $\alpha_{c,0}$), cette onde reste convergente et devient propagative ($\Re\{k_{4,0}\} < 0$) amplifiée exponentiellement ($\Im\{k_{4,0}\} < 0$) à partir de $\alpha_{c,0} \approx 2.42$, qui représente le nombre d'onde adimensionnel fondamental de coupure du trou noir simulé.

Cette analyse vient confirmer certaines interprétations de résultats numériques et expérimentaux existants dans la littérature [111, 162], où il est montré que le trou noir acoustique devient actif à partir d'une certaine fréquence seuil, appelée également fréquence d'allumage dans [104], qui correspond ici à la première fréquence de coupure $f_{c,0}$. A partir de cette fréquence de coupure, des ondes propagatives apparaissent et conduisent à des résonances locales internes, amplifiant les amplitudes du déplacement à l'intérieur du trou noir.
La Fig. 2.4 montre que l'analyse faite sur les résultats présentés sur la Fig. 2.3 peut être généralisée pour tous les ordres circonférentiels $n$, et montre qu'il existent un nombre d'onde adimensionnel de coupure $\alpha_{c,n}$ pour chaque $n$ en suivant l'Eq. (2.20). Les nombres d'onde $\alpha_{c,n}$ séparent les deux comportements évanescent (en dessous de $\alpha_{c,n}$) et propagatif (au dessus de $\alpha_{c,n}$) montrés sur les Figs. 2.3(c) et 2.3(d). Pour chaque ordre circonférentiel $n$, on retrouve deux ondes évanescentes, non représentées sur la Fig. 2.4, quelque soit la fréquence de l'onde incidente sur le trou noir.

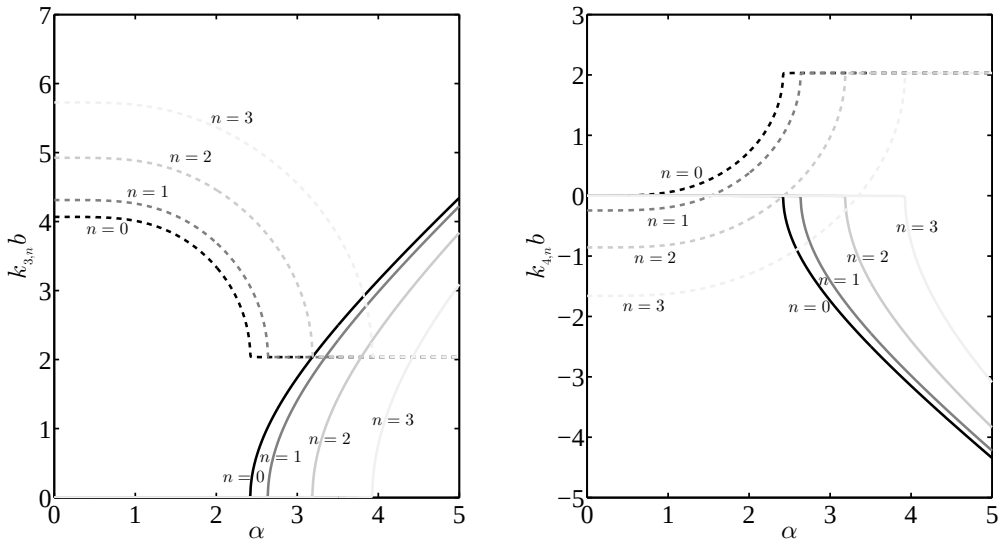
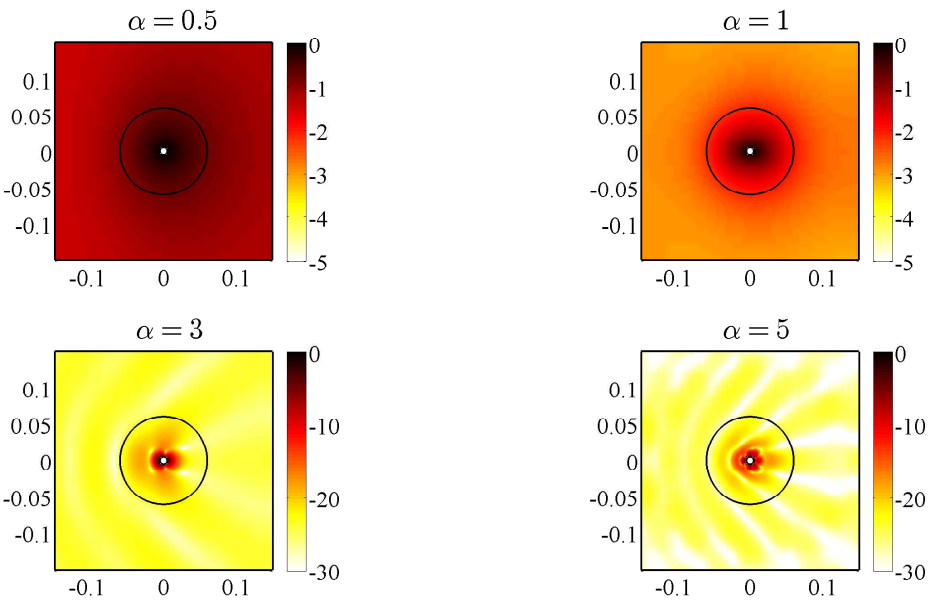



FIGURE 2.4 – Courbes de dispersion de $k_{3,n}$ pour différents ordres circonférentiels $n = 0$, 1, 2 et 3. Les lignes continues et les lignes interrompues correspondent respectivement aux parties réelles et aux parties imaginaires de $k_{3,n}b$.

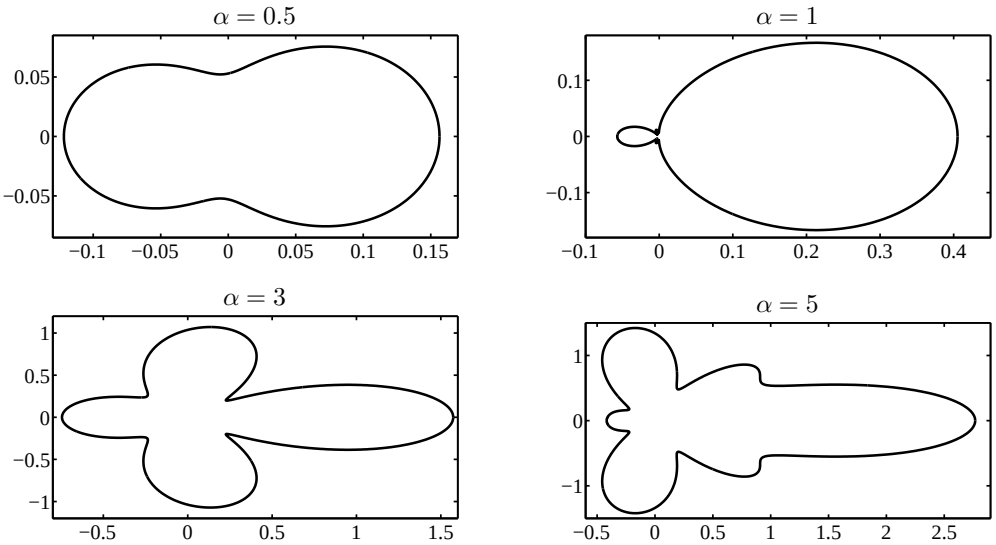
#### 2.2.4.2 Champ de déplacement total

Le champ du déplacement total est calculé après la résolution du système linéaire, Eq. (2.17). Le module de ce champ est tracé sur la Fig. 2.5(a) en dB, pour quatre fréquences d'onde incidente : $f \approx 26$ Hz, 102 Hz, 923 Hz et 2563 Hz, correspondant respectivement aux quatre nombres d'onde de flexion adimensionnels $\alpha = 0.5$, 1, 3 et 5. Comme attendu et déjà montré dans des travaux antérieurs [111, 162], la Fig. 2.5(a) montre que le champ vibratoire est quasiment uniforme à basses fréquences : l'absence d'ondes propagatives en dessous de la première fréquence de coupure rend le trou noir inactif (voir $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1$). A hautes fréquences ($\alpha = 3$ et $\alpha = 5$), le trou noir exhibe un comportement typique qui se distingue par un rétrécissement des longueurs d'ondes et une augmentation des amplitudes en son bord libre (différences d'amplitudes importantes (30 dB) par rapport au champ extérieur). Cependant, le champ montre des patterns d'interférences de plus en plus complexes lorsque la fréquence augmente. Ceci est dû à l'augmentation du nombre d'ondes propagatives associées aux différents ordres circonférentiels $n$.

La fonction de forme $\left|f(\theta)/\sqrt{b}\right|$, appelée également fonction de directivité, correspondant au amplitudes du champ diffusé $W_{diff}$ loin du diffuseur ($r \gg$) est tracée sur la Fig. 2.5(b) en diagrammes polaires. Cette figure montre qu'à basses fréquences ($\alpha = 0.5$), le trou noir, étant inactif, diffuse peu d'énergie (l'amplitude du champ diffusé est inférieure à 15 % de l'onde incidente) et possède une directivité similaire avec celle du trou simple étudié dans le chapitre 1 (voir la Fig. 1.6(b)). A hautes fréquences ($\alpha = 3$ et $\alpha = 5$), l'amplitude du champ diffusé est du même ordre de grandeur que l'onde incidente et présente des lobes de directivité de plus en plus complexes en augmentant la fréquence.




(a)




(b)

FIGURE 2.5 – (a) : Module en dB du champ du déplacement d'une plaque infinie, munie d'un trou noir acoustique débouchant. Le champ est calculé pour des fréquences d'onde incidente correspondant à $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ et $\alpha = 5$. Les cercles noirs concentriques désignent les limites interne et externe du trou noir. Pour chaque fréquence, le champ est normalisé par rapport à sa valeur maximale, de telle sorte que le maximum du champ soit désigné par 0 dB dans la barre des couleurs. (b) : Diagrammes polaires de la fonction de forme $\left|f(\theta)/\sqrt{b}\right|$ (définie par l'Eq. (1.53)) du trou noir acoustique débouchant.

#### 2.2.4.3 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion, notée $Q_{diff}$ dans ce manuscrit, est classiquement utilisée pour quantifier et analyser l'énergie globale diffusée par un obstacle : elle rend compte de la visibilité d'un diffuseur par une onde incidente se propageant à une fréquence donnée. Cette quantité est définie comme le rapport entre le flux d'énergie globale du champ diffusé et le flux d'énergie associé au champ incident par unité de longueur [125]. Si un problème de propagation d'ondes est traité dans un espace de dimension $N$, la section efficace prend la dimension $N-1$. Par exemple, dans le cas d'un problème tridimensionnel (diffusion d'ondes par une sphère), la section efficace est homogène à une surface. Dans notre cas, où le problème est bidimensionnel (diffusion dans une plaque), elle est donc homogène à une longueur, et est donnée par

$$Q_{diff} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta. \tag{2.22}$$

La section efficace de diffusion globale du trou noir acoustique simulé est tracée dans la Fig. 2.6 en fonction du nombre d'onde adimensionnel $\alpha$. Les courbes de $Q_{diff}$ associées au trou simple et au trou borgne, étudiés dans le chapitre 1, sont présentées sur cette figure pour les comparer avec le trou noir. A basses fréquences (Fig. 2.6(b)), le trou noir et le trou simple présentent quasiment le même comportement : la longueur d'onde incidente étant grande devant le rayon extérieur $b$, les deux diffuseurs sont invisibles par l'onde incidente et diffusent une énergie quasi nulle. Contrairement à ces deux diffuseurs, le trou borgne montre une section efficace nettement supérieure. Ceci peut être expliqué par le fait que ce dernier résonne dans cette gamme de fréquences.

Au dessus du premier nombre d'onde adimensionnel de coupure du trou noir $\alpha_{c,0} \approx 2.42$, le comportement du trou noir diffère de celui du trou simple et ressemble plus au trou borgne. Le trou simple exhibe une section efficace lisse, tandis que celle du trou noir et du trou borgne présente des variations importantes en particulier pour certaines fréquences. Les variations de la section efficace globale constatées dans la Fig. 2.6(a) résultent d'une combinaison complexe de plusieurs sections efficaces élémentaires, associées aux différents ordres circonférentiels $n$ pris en compte dans le calcul numérique. Les sections efficaces de diffusion élémentaires associées aux ordres $n = 0$, 1 et 2 sont tracées sur la Fig. 2.7 pour le trou noir. Ces sections présentent des maximas associés aux résonances des modes locaux du trou noir, appelés "modes piégés". Cependant, au dessus de chaque fréquence de coupure $f_{c,n}$, l'interférence des ondes propagatives présentes dans le milieu conduit à l'allumage d'une série de modes piégés, associés aux ordres $n$. Ces modes piégés sont étudiés dans la Sec. 2.2.5.

A plus hautes fréquences ($\alpha > 5$, Fig. 2.6(c)), la section efficace globale du trou noir et du trou borgne oscille autour de celle du trou simple et tendent vers une valeur asymptotique correspondant approximativement à la moitié du périmètre $\pi b$ des diffuseurs . Ces variations montrent une certaine périodicité en fonction de la fréquence, qui peut être expliquée pour le trou noir à partir de l'expression asymptotique de l'Eq. (2.20) : lorsque $n \gg 1$ (à des fréquences élevées), $\alpha_{c,n} \approx \frac{b}{r_0} n$ de sorte que les fréquences de coupure deviennent harmoniques (des multiples de $f_{c,0}$), conduisant à des patterns de résonances répétitifs.

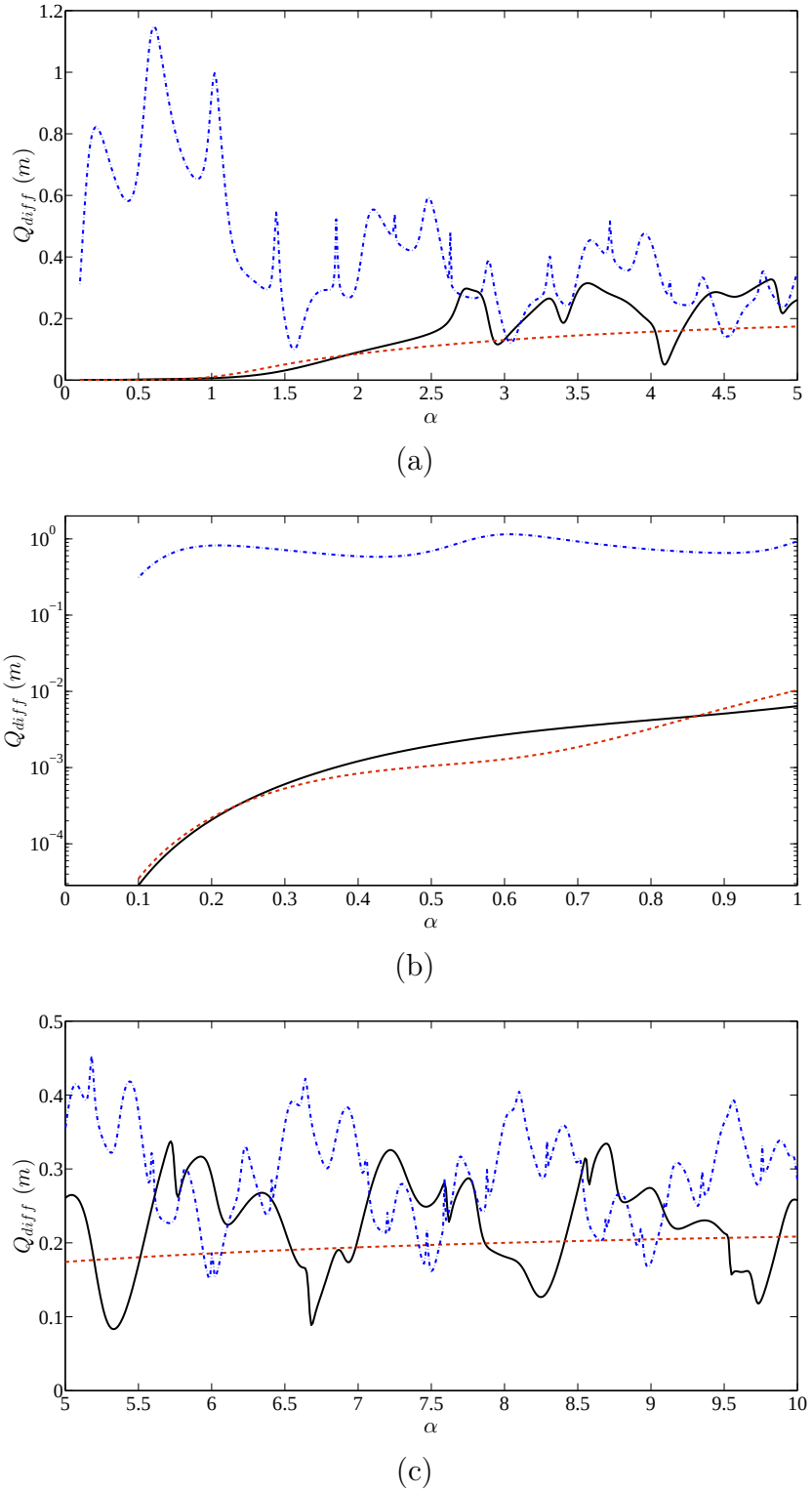
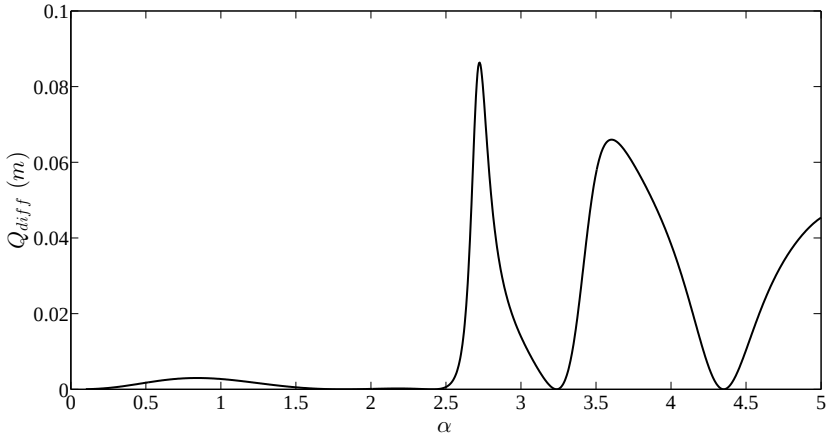
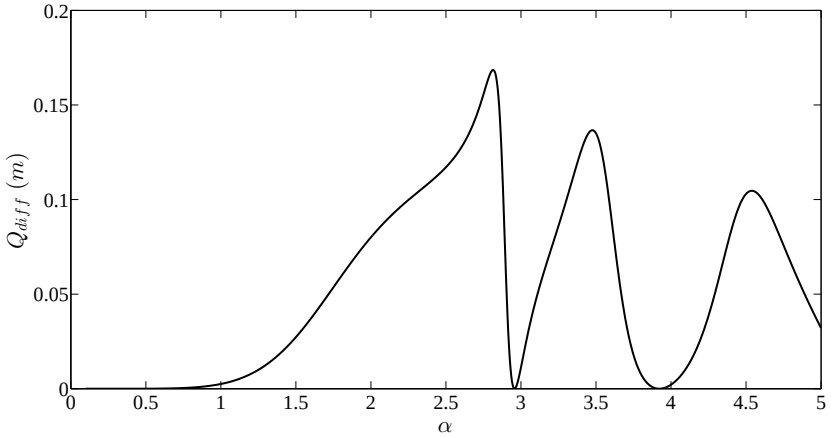


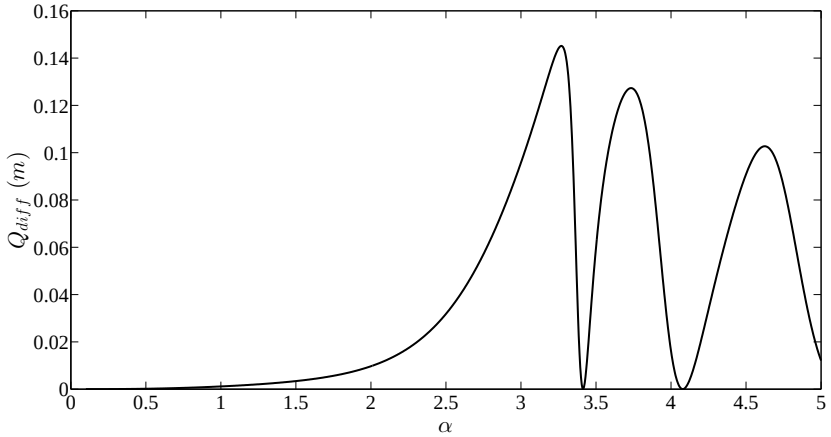

FIGURE 2.6 – (a) : Section efficace de diffusion de trois diffuseurs : trou noir acoustique débouchant (———), trou simple (− − −) et trou borgne (−. − .−). (b) : Zoom de Fig. 2.6(a) dans la gamme des basses fréquences (échelle logarithmique). (c) : section efficace à hautes fréquences ($\alpha$ entre 5 et 10). Notons qu'ici le trou simple et le trou borgne sont de même taille que le trou noir, avec un rayon $b = 6$ cm. Les propriétés du matériau du trou borgne sont données dans le tableau 2.1 avec une épaisseur $h_1 = h_0/10$.




(a)




(b)




(c)

FIGURE 2.7 – Sections efficaces de diffusion élémentaires du trou noir, correspondant aux ordres circoférenciels $n = 0$ (a), $n = 1$ (b) et $n = 2$ (c).

### 2.2.5 Modes piégés

#### 2.2.5.1 Introduction

La présence d'un obstacle à la propagation des ondes dans un milieu, même infini, peut donner lieu à des phénomènes de résonance locale, liés à l'excitation de ce qu'on appelle des modes piégés. Ces modes correspondent à des oscillations libres, localisées autour et éventuellement à l'intérieur du diffuseur si celui-ci est pénétrable. Les modes piégés sont observés et étudiés dans différents domaines de la physique ondulatoire. Dans le cas d'un guide d'ondes acoustique bidimensionnel, Callan et al. [163] ont étudié les oscillations libres localisées autour d'un obstacle rigide, de forme cylindrique. Cobelli et al. [164] ont observé expérimentalement les modes piégés dans un canal d'eau, dans lequel un cylindre circulaire rigide est inséré. Porter [165] a montré que les modes piégés d'un trou avec un bord libre sont obtenus numériquement quand il est placé dans une plaque fine de longueur infinie et simplement appuyée sur deux bords parallèles. Xeridat [154] a analysé la diffusion des ondes de Lamb et a mis en évidence la présence de résonances locales pour un trou non débouchant.
Dans cette section, nous étudions les modes piégés pouvant exister dans une plaque infinie, contenant un trou noir acoustique débouchant. Cette étude est basée sur la résolution d'un problème homogène et l'analyse des déformées propres du trou noir.

#### 2.2.5.2 Calcul des modes piégés

Par définition, les modes piégés sont des solutions d'un problème homogène (sans le second membre), donné pour le trou noir étudié par l'équation matricielle suivante :

$$\boldsymbol{M}.\boldsymbol{X} = 0, \tag{2.23}$$

où $\boldsymbol{M}$ est la matrice définie à partir des conditions de continuité et des conditions aux limites du problème (voir Eq. (2.18)), dont les éléments sont détaillés dans l'annexe B. Les valeurs propres de l'Eq. (2.23) sont calculées dans le plan complexe de $kb$ pour chaque ordre circonférentiel en localisant numériquement les zéros du déterminant de la matrice $\boldsymbol{M}$ (voir Fig. 2.8). Les déformées propres associées aux valeurs propres calculées sont obtenues à partir du vecteur propre $\boldsymbol{X}$.

La Fig. 2.9 montre des exemples de patterns des modes piégés du trou noir, correspondant aux ordres circonférentiels $n = 0$, 1 et 2. La relation entre ces modes et les variations de la section efficace de diffusion globale ($Q_{diff}$) du trou noir est ici mise en évidence : les maximas de $Q_{diff}$ se produisent à des nombres d'onde adimensionnels $\alpha$ correspondant aux parties réelles des valeurs propres $kb$ dans la Fig. 2.9. Par exemple, les maximas de $Q_{diff}$ en $\alpha \approx 2.73$ et $\alpha \approx 3.56$ sont associés respectivement à l'allumage des modes pour lesquels $kb = 2.71 - 0.07i$ et $kb = 3.56 - 0.2i$. Notons que l'étalement des modes à l'extérieur du trou noir dépend du rapport $\left|\frac{\Re[kb]}{\Im[kb]}\right|$ : le mode est d'autant plus localisé dans le centre du trou lorsque ce rapport est grand.

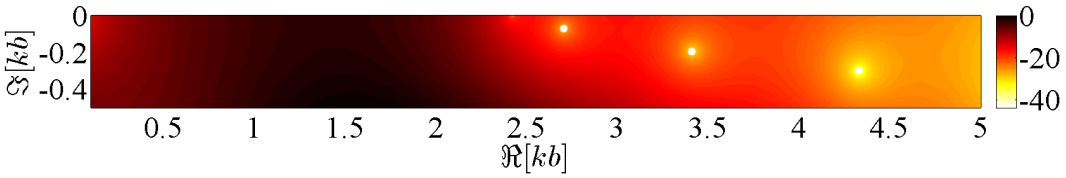



FIGURE 2.8 – Module en dB du déterminant de la matrice $\boldsymbol{M}$ pour $n = 0$, représenté dans le plan complexe de $kb$. Le déterminant de $\boldsymbol{M}$ est normalisé par rapport à sa valeur maximale, de telle sorte que le maximum sur la barre des couleurs soit désigné par 0 dB. Les valeurs propres, indiquées par des points lumineux sur la figure, correspondent aux coordonnées des minimas locaux du déterminant dans le plan complexe de $kb$.

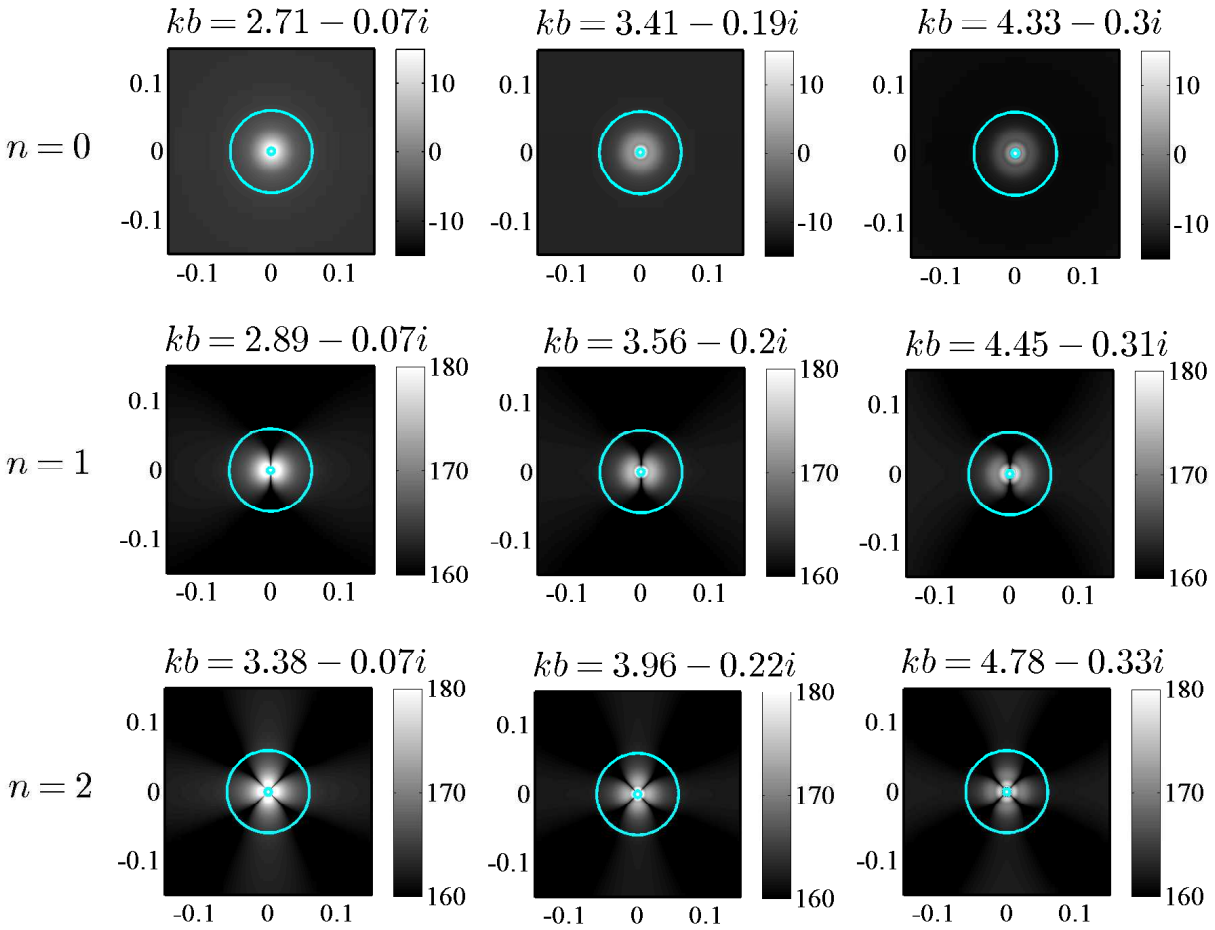



FIGURE 2.9 – Module en dB des déformées modales des modes piégés du trou noir. Trois modes sont montrés pour chacun des ordres circonférentiels suivants : $n = 0$ (1ère ligne), $n = 1$ (2ème ligne) et $n = 2$ (3ème ligne).

### 2.2.6 Analyses paramétriques

Les caractéristiques géométriques du trou noir et les propriétés du matériau constituant la plaque sont nombreuses, et leurs effets sur les propriétés de diffusion doivent être explorés afin d'établir des règles de dimensionnement permettant de fixer ces propriétés pour des applications spécifiques d'ingénierie mécanique. La réalisation d'un dimensionne-

ment du trou noir à partir du modèle développé est difficile du fait du nombre important de paramètres intervenant dans la réponse vibratoire, qui elle-même résulte d'une combinaison complexe de plusieurs contributions d'ordres circonférentiels. Néanmoins, des explorations paramétriques qualitatives peuvent être réalisées facilement en analysant les variations de la section efficace de diffusion. Cette section se focalise donc sur l'étude de l'influence du facteur de pertes $\eta_0$ du matériau, de l'épaisseur de troncature $h_t$ et de la constante du profil $a'$ du trou noir sur le comportement de la section efficace de diffusion globale $Q_{diff}$. La relation donnée par l'Eq. (2.24), liant les différents paramètres géométriques du trou noir (voir Fig. 2.1), est établie à partir de l'Eq. (2.1) pour un profil quadratique ($m = 2$).

$$a = a'\left(1 - \sqrt{\frac{h_t}{h_0}}\right) + b\left(\sqrt{\frac{h_t}{h_0}}\right). \tag{2.24}$$

#### 2.2.6.1 Influence du facteur de pertes uniforme $\eta_0$

Sur la Fig. 2.10, la section efficace de diffusion globale du trou noir, dont les caractéristiques sont définies dans le Tab. 2.1, est tracée pour différents facteurs de pertes $\eta_0$ du matériau. La figure montre que $\eta_0$ contrôle la quantité globale d'énergie diffusée, en particulier dans la gamme des hautes fréquences dans laquelle les variations de $Q_{diff}$ deviennent de plus en plus lisses avec l'augmentation de $\eta_0$ : les valeurs aux maximas sont divisées par deux lorsque $\eta_0$ augmente de 0.1% à 10%. Il est montré également que le facteur de pertes uniforme $\eta_0$ joue un rôle mineur sur le comportement du trou noir à basses fréquences. Comme discuté dans 2.2.4.1 et 2.2.4.3, on définit la transition entre les basses et les hautes fréquences par la condition $\alpha_{c,0} \approx 2.42$ pour le trou noir étudié, qui correspond à une longueur d'onde incidente $\lambda = \frac{2\pi b}{2.42}$. Pour toutes les valeurs de $\eta_0$, le même premier nombre d'onde de coupure adimensionnel $\alpha_{c,0}$ sépare les deux zones basses et hautes fréquences. A partir de ces observations, on peut prévoir des effets importants du facteur de pertes sur la diffusion du trou noir en présence d'un revêtement viscoélastique amortissant.

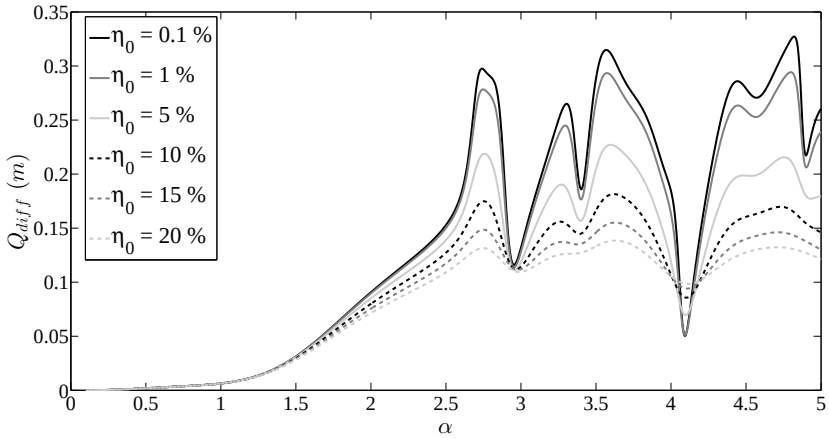



FIGURE 2.10 – Influence du facteur de pertes uniforme $\eta_0$ sur les variations de la section efficace de diffusion.

#### 2.2.6.2 Influence de l'épaisseur de troncature $h_t$

La section efficace de diffusion globale du trou noir, défini par les paramètres listés dans le Tab. 2.1, est calculée et tracée sur la Fig. 2.12 pour différentes valeurs du ratio d'épaisseur $h_t/h_0$. Cette figure est tracée en utilisant l'Eq. (2.24) en fixant les paramètres $b$, $h_0$ et $a'$ et en faisant varier l'épaisseur de troncature $h_t$ comme illustré sur la Fig. 2.11. Comme attendu, l'effet de l'épaisseur de troncature n'est pas significatif à basses fréquences : la fréquence de coupure n'étant pas dépendante de $h_t$, le trou noir présente un comportement inchangé quelque soit la valeur de $h_t$. L'effet de l'épaisseur de troncature est visible dans la zone des hautes fréquences comme étant un paramètre de contrôle du gradient de rigidité du trou noir : la position des résonances en fonction de la fréquence est décalée vers les hautes fréquences en augmentant $h_t$. Par exemple, la première résonance située à $\alpha \approx 2.73$ lorsque $h_t = h_0/100$ est décalée à $\alpha \approx 3.84$ lorsque $h_t = h_0/10$. Cette étude paramétrique montre que le diamètre du trou central pour un profil donné, peut jouer un rôle majeur sur le champ diffusé à l'extérieur du trou noir.

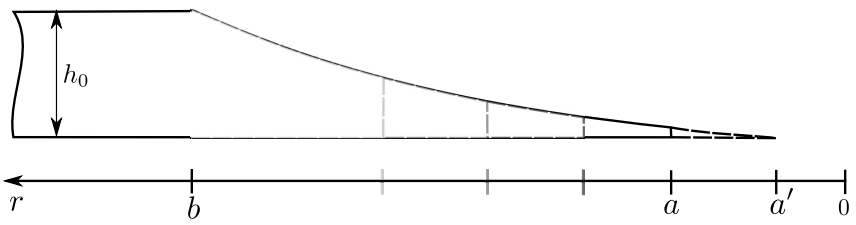



FIGURE 2.11 – Profil du trou noir pour différentes valeurs du ratio d'épaisseur $h_t/h_0$.

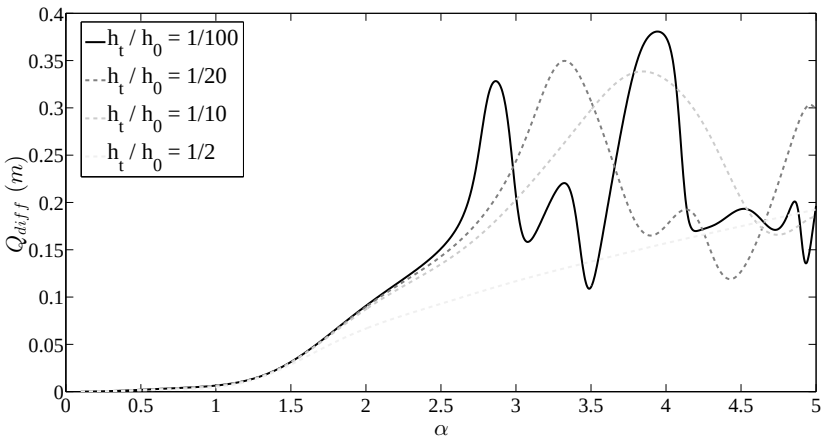



FIGURE 2.12 – Influence de l'épaisseur de troncature $h_t$ sur la section efficace de diffusion, avec $b = 6$ cm, $h_0 = 1.5$ mm et $a' = 1$ mm.

#### 2.2.6.3 Influence de la constante du profil $a'$

La Fig. 2.14 montre la section efficace de diffusion du trou noir simulé pour différentes valeurs de la constante de profil $a'$. Cette figure est tracée en suivant l'Eq. (2.24), en fixant les paramètres $b$, $h_0$ et $h_t$ et en faisant varier $a'$, qui fait varier le rayon de troncature $a$ (voir Fig. 2.13). Tel que l'indique l'Eq. (2.20), $a'$ est un des paramètres permettant de contrôler les fréquences de coupure à chaque ordre circonférentiel. Par exemple, $\alpha_{c,0}$ augmente de

2.43 lorsque $a' = 1$ mm à 3.58 lorsque $a' = 20$ mm. En augmentant $a'$, la décroissance du profil du trou noir devient de plus en plus sévère, faisant augmenter la raideur du trou noir. Par conséquent, les résonances se décalent vers les hautes fréquences. Cette étude montre que le profil de décroissance de l'épaisseur est un paramètre qui contrôle la raideur du trou noir, avec lequel on peut contrôler les résonances de ce diffuseur.

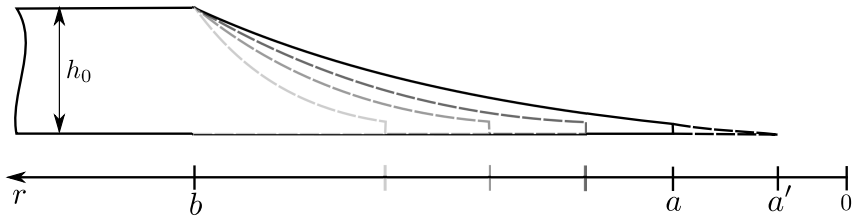



FIGURE 2.13 – Profil du trou noir pour différentes valeurs de la constante du profil $a'$.

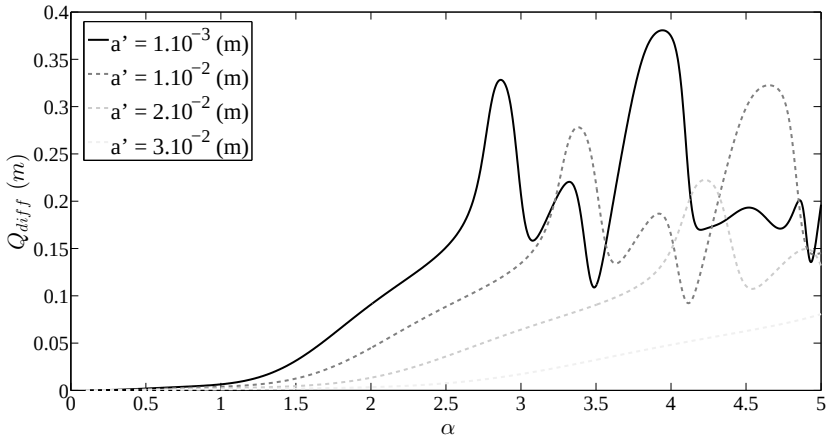



FIGURE 2.14 – Influence de $a'$ sur la section efficace de diffusion, avec $b = 6$ cm, $h_0 = 1.5$ mm et $h_t = 15$ $\mu$m.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la diffusion des ondes de flexion par un trou noir acoustique débouchant, vu comme un diffuseur pénétrable, est modélisée dans le cadre de la théorie des plaques minces de Kirchhoff. Dans le cas d'un profil quadratique ($m = 2$) avec des propriétés d'amortissement interne uniforme, le calcul analytique des relations de dispersion des ondes à l'intérieur du trou noir est un résultat clé du modèle développé. Les fréquences de coupure, obtenues analytiquement, donnent une interprétation théorique de la fréquence seuil à partir de laquelle l'amortissement des vibrations est important, observée expérimentalement et numériquement dans des travaux antérieurs. Il est montré pour chaque ordre circonférentiel qu'en dessous de la fréquence de coupure, il existe quatre ondes évanescentes dans le trou noir et que deux ondes se transforment en propagatives au dessus de cette fréquence. Les deux ondes propagatives donnent lieu à l'apparition des modes piégés du trou noir. L'analyse de la réponse du trou noir à une onde plane incidente de flexion permet de comprendre finement le comportement modal de ce diffuseur. Dans la simulation du champ vibratoire et de la section efficace de diffusion, il

est montré qu'en dessous du premier nombre d'onde de coupure adimensionnel ($\alpha_{c,0}$), la section efficace de diffusion globale du trou noir se comporte comme celle du trou simple. A hautes fréquences (au dessus de $\alpha_{c,0}$), le trou noir se comporte comme le trou borgne : la section efficace exhibe des maximas à des fréquences spécifiques, liés aux résonances de ses modes piégés. L'influence du matériau et de la géométrie du trou noir sur son comportement vibratoire est mise en évidence à travers des explorations paramétriques sur le facteur de pertes uniforme $\eta_0$, l'épaisseur de troncature $h_t$ et la constante du profil $a'$. Il est montré que $\eta_0$ tend à réduire le comportement résonant du trou noir, en particulier à hautes fréquences, ce qui laisse à penser que l'ajout d'un revêtement viscoélastique jouerait le même rôle dans cette gamme de fréquences, c'est-à-dire, lisser la courbe de la section efficace à hautes fréquences. L'étude des paramètres géométriques $h_t$ et $a'$, qui contrôlent la raideur du trou noir, montre que les résonances de ce diffuseur peuvent être décalées en fréquence en fonction de ces deux paramètres. Le modèle montre que pour obtenir un trou noir résonant à basses fréquences, il faut que la décroissance d'épaisseur soit lente avec une épaisseur de troncature très fine, ce qui implique la diminution de $a'$ et $h_t$. En pratique, la réalisation de tel trou noir est très vite limité par les moyens technologiques d'usinage actuels. Une autre configuration de trou noir, réalisable simplement en pratique, est proposée pour contrôler ses résonances. Cette configuration consiste à boucher le centre du trou noir, donnant lieu à ce que nous appelons "trou noir acoustique non-débouchant", lui permettant de résonner à basses fréquences. L'analyse et la caractérisation du comportement de ce trou noir non-débouchant fait l'objet du chapitre 3.

# Chapitre 3

# Conception et caractérisation d'un trou noir acoustique à résonances contrôlées

## 3.1 Introduction

Ce chapitre présente des propositions d'aménagements géométriques du cœur du trou noir permettant de tirer partie et de contrôler les résonances internes d'un trou noir acoustique. Dans un premier temps, un revêtement viscoélastique est modélisé de façon à décrire l'amortissement induit en hautes fréquences. La modélisation est réalisée via l'étude de la diffusion des ondes de flexion par ce TN (trou noir) lorsqu'il est inséré dans une plaque infinie. D'un point de vue physique, le film viscoélastique modifie la rigidité du diffuseur et rajoute un amortissement local non-uniforme, c'est-à-dire dépendant de l'espace, à celui déjà présent dans la plaque [44, 47, 166]. Cet amortissement inhomogène modifie la forme de l'équation du mouvement de flexion, et rend l'obtention analytique du champ du déplacement à l'intérieur du TN difficile. Un modèle hybride couplant des solutions en onde à l'extérieur du TN et un schéma aux différences finies à l'intérieur du TN est présenté dans la Sec. 3.2 pour la diffusion d'une onde plane par ce trou noir. Le modèle résultant, basé sur des propriétés mécaniques équivalentes du diffuseur, permet de prendre en compte un profil radial d'épaisseur arbitraire, et de mettre en évidence l'influence du film viscoélastique (Sec 3.3) et les possibilités de contrôle en masse et en raideur de la première résonance du TN.

## 3.2 Modèle de différences finies

### 3.2.1 Configurations étudiées

Dans cette section est présentée la méthodologie de calcul du champ vibratoire par la méthode des différences finies, appliquée à différentes configurations du trou noir acoustique. Dans un premier temps, la méthode est utilisée pour développer un modèle de diffusion d'ondes de flexion par le trou noir dit "débouchant" (voir Fig. 3.1(a)) muni d'un film viscoélastique dans la zone $r \in [a; b]$. Ce modèle permet d'analyser les propriétés de diffusion du TN avec film, et sert de validation de la méthode analytique présentée dans le chapitre 2 pour le TN débouchant sans film. Dans un second temps, le même modèle est étendu pour étudier un TN "non-débouchant" (voir Fig. 3.1(b)) afin de montrer l'importance pratique de cette configuration. La configuration finale constitue l'objectif de

ce chapitre et concerne un TN non-débouchant avec une masse en son centre (voir Fig. 3.1(c)), pour contrôler ses propriétés de diffusion

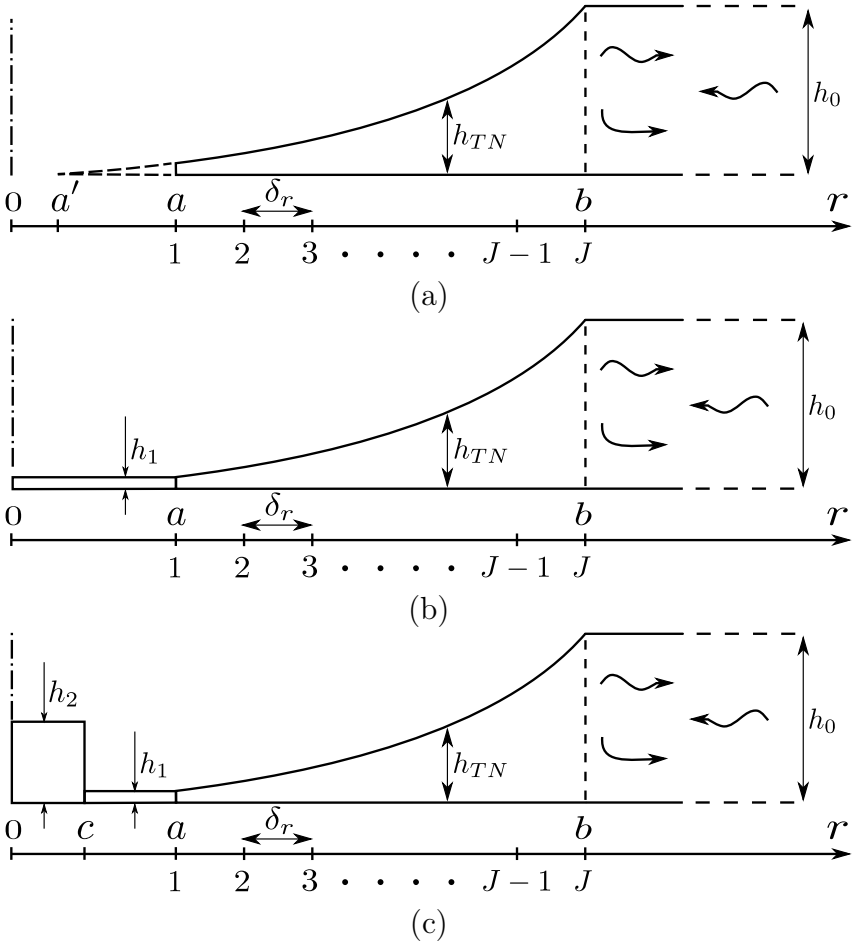



FIGURE 3.1 – Vue de profil des trois configurations de TN considérées : (a) TN débouchant, (b) TN non-débouchant et (c) TN non-débouchant avec masse centrale

Tout comme dans le chapitre 2, le problème à résoudre est celui de l'interaction d'une onde plane de flexion avec le trou noir acoustique (voir Fig 2.2). Le milieu de propagation considéré est une plaque infinie, dans laquelle un trou noir revêtu d'une couche mince de matériau viscoélastique est inséré. Les configurations du trou noir étudiées sont illustrées dans la Fig. 3.1. Le principe de la résolution consiste à appliquer un schéma numérique aux différences finies dans la zone $r \in [a; b]$, couplé à la méthode ondulatoire présentée dans les chapitres 1 et 2 pour les zones d'épaisseurs constantes. La formulation mathématique du schéma aux différences finies, développée dans les sections 3.2.3 et 3.2.4 se base sur la discrétisation de l'ensemble de l'équation du mouvement de la plaque et les conditions aux interfaces $r = a$ et $r = b$.

### 3.2.2 Modèle de rigidité équivalente

Le film viscoélastique couvrant la zone du trou noir $r \in [a; b]$ ou une partie de cette zone (Fig. 3.1) induit des modifications de ses propriétés mécaniques. Dans le modèle suivant, des propriétés mécaniques équivalentes sont considérées. Le rôle du film intervient dans le facteur de pertes pour la rigidité de flexion complexe. La rigidité équivalente de

l'association plaque/revêtement peut s'écrire comme :

$$D_{eq}(\widehat{r}) = \Re\left[D_{TN}(\widehat{r})\right](1 - i\eta_{eq}(\widehat{r})), \quad \widehat{r} = r - a', \quad a \leq r \leq b, \tag{3.1}$$

où $D_{TN}(\widehat{r}) = \dfrac{E_{TN}h_{TN}^3}{12(1-\nu_{TN}^2)}$ est la rigidité de flexion complexe du trou noir sans film, et $\eta_{eq}(\widehat{r})$ représente le facteur de pertes équivalent variable. Il s'écrit :

$$\eta_{eq}(\widehat{r}) = \eta_{TN} + \eta_r(\widehat{r}), \tag{3.2}$$

où $\eta_{TN}$ est le facteur de pertes du TN sans film, et $\eta_r(\widehat{r})$ représente le facteur de pertes variable rajouté, dû à la présence du film. En reportant Eq. (3.2) dans Eq. (3.1), la rigidité équivalente est alors obtenue comme suit :

$$D_{eq}(\widehat{r}) = D_{TN}(\widehat{r}) - D_r(\widehat{r}), \tag{3.3}$$

avec la rigidité rajoutée $D_r(\widehat{r}) = \Re\left[D_{TN}(\widehat{r})\right](i\eta_r(\widehat{r}))$. La rigidité rajoutée $D_r(\widehat{r})$ est déterminée en suivant le modèle de Ross-Ungar-Kerwin [47], qui décrit une loi de mélanges, utilisée dans [162, 110, 17], permettant d'établir l'expression de $\eta_r(\widehat{r})$ tel que :

$$\eta_r(\widehat{r}) = \frac{\eta_f \dfrac{E_f h_f}{E_{0,TN}h_{TN}}\left[4\left(\dfrac{h_f}{h_{TN}}\right)^2 + 6\left(\dfrac{h_f}{h_{TN}}\right) + 3\right]}{1 + \dfrac{E_f h_f}{E_{0,TN}h_{TN}}\left[4\left(\dfrac{h_f}{h_{TN}}\right)^2 + 6\left(\dfrac{h_f}{h_{TN}}\right) + 5\right]}, \tag{3.4}$$

où $E_f$, $\eta_f$ et $h_f$ sont respectivement le module d'Young élastique, le coefficient de pertes et l'épaisseur du film. L'épaisseur du trou noir sans film $h_{TN}$ est définie dans le chapitre 2 par l'Eq. (2.1). On en déduit alors la masse volumique équivalente :

$$\rho_{eq}(\widehat{r}) = \frac{\rho_{TN}h_{TN}(\widehat{r}) + \rho_f h_f}{h_{eq}(\widehat{r})}, \tag{3.5}$$

avec l'épaisseur équivalente

$$h_{eq}(\widehat{r}) = h_{TN}(\widehat{r}) + h_f. \tag{3.6}$$

Le rapport de la partie imaginaire et de la partie réelle de la rigidité de flexion équivalente complexe (Eq. (3.3)) traduit le facteur de pertes équivalent ($\dfrac{\Im[D_{eq}]}{\Re[D_{eq}]} = \eta_{eq}$), présenté par l'Eq. (3.2). L'évolution de ce dernier en fonction de $r$ est montrée sur la figure 3.2 pour une plaque en aluminium munie d'un trou noir quadratique débouchant (voir Fig 3.1(a)). A titre d'exemple, une plaque d'épaisseur uniforme $h_0 = 10$ mm est choisie, avec un trou noir de caractéristiques suivantes : rayon intérieur $a = 5$ mm, rayon extérieur $b = 87.5$ mm, épaisseur de troncature $h(a) = 1$ mm, masse volumique $\rho_{TN} = 2700$ kg/m$^3$, module d'Young élastique $E_{0,TN} = 69$ GPa, coefficient de Poisson $\nu_{TN} = 0.33$ et facteur de pertes $\eta_{TN} = 0.1$ %. La plaque est entièrement revêtue d'un film viscoélastique d'épaisseur uniforme $h_f = 1$ mm avec une masse volumique $\rho_f = 1000$ kg/m$^3$, un module d'Young élastique $E_f = 1$ GPa et un facteur de pertes $\eta_f = 65$ %.

Comme prévu par les Eqs. (3.2) et (3.4), quel que soit $r$, le facteur de pertes équivalent $\eta_{eq}$ est plus élevé que celui de la structure porteuse seule (plaque). La figure 3.2 montre

que dans la partie de la plaque où l'épaisseur est uniforme ($r > b$) et largement supérieure à celle du film ($h_0 \gg h_f$), le facteur de pertes équivalent reste constant à 5 %, ce qui correspond à 5 fois la valeur initiale ($\eta_{eq} = 5\eta_{TN}$). A l'intérieur du TN, où l'épaisseur décroit progressivement entre $r = b$ et $r = a$, l'effet du film viscoélastique devient de plus en plus visible : le rapport $\frac{\Im[D_{eq}]}{\Re[D_{eq}]}$ augmente de façon importante et atteint une valeur maximale d'environ 10% en $r = a$. Cette variation caractéristique du facteur de pertes équivalent dans l'espace confère alors au trou noir acoustique la capacité d'amortir efficacement les ondes qui se propagent dans la plaque.

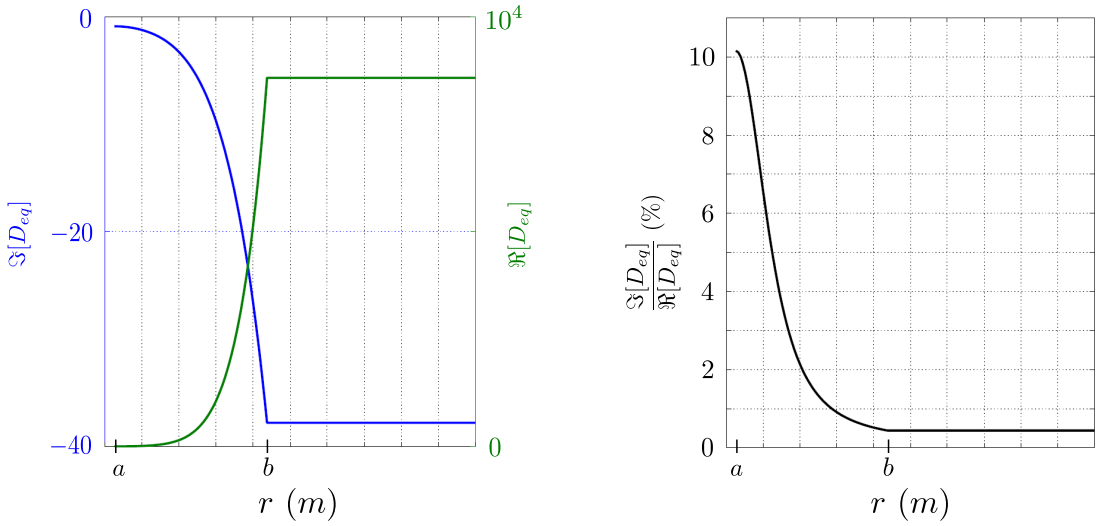



FIGURE 3.2 – Évolution radiale (en fonction de $r$) du rapport de la partie imaginaire et la partie réelle de la rigidité de flexion équivalente dans une plaque munie d'un trou noir acoustique débouchant, défini dans l'intervalle $r \in [a; b]$.

### 3.2.3 Discrétisation de la zone non-uniforme

La zone non-uniforme du trou noir est une plaque circulaire d'épaisseur variable. L'équation gouvernant le mouvement de flexion dans ce type de milieu est donnée par l'Eq. (2.2), et rappelée ci-dessous pour le TN muni d'un film viscoélastique.

$$\nabla^2 \left[D_{eq}\nabla^2 W^{TN}\right] - (1-\nu_{eq})\diamondsuit^4 \left\{D_{eq}, W^{TN}\right\} - \rho_{eq}h_{eq}\omega^2 W^{TN} = 0, \qquad a \leq r \leq b, \tag{3.7}$$

où $\diamondsuit^4$ est l'opérateur aux dérivées partielles défini par l'Eq. (2.3), et $D_{eq}$, $\nu_{eq}$, $\rho_{eq}$ et $h_{eq}$ sont respectivement la rigidité, le coefficient de Poisson, la masse volumique et l'épaisseur équivalents de la plaque non-uniforme munie du film viscoélastique. Le champ à l'intérieur du trou noir $W^{TN}$ est une fonction $2\pi$ périodique de la variable angulaire $\theta$ et peut s'écrire

$$W^{TN}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{n,j}^{TN}(\widehat{r})\cos(n\theta), \;\; \widehat{r} = r - a', \tag{3.8}$$

où $W_{n,j}^{TN}$ représente le déplacement discret en un point $j$ ($j = 1, 2, \ldots J$) à l'intérieur du trou noir. La substitution de l'Eq. (3.8) dans l'Eq. (3.7) permet d'écrire, pour chaque ordre circonférentiel $n$, l'équation différentielle du mouvement sous la forme suivante :

$$\lambda_4(\widehat{r})\frac{\partial^4 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^4} + \lambda_3(\widehat{r})\frac{\partial^3 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^3} + \lambda_2(\widehat{r})\frac{\partial^2 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^2} + \lambda_1(\widehat{r})\frac{\partial W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}} + \lambda_0(\widehat{r})W_{n,j}^{TN} = 0, \tag{3.9}$$

où

$$
\begin{aligned}
\lambda_0(\widehat{r}) &= -\left[\frac{n^2\nu_{eq}}{\widehat{r}^2 D_{eq}}\frac{\partial^2 D_{eq}}{\partial \widehat{r}^2} - \frac{3n^2}{\widehat{r}^3 D_{eq}}\frac{\partial D_{eq}}{\partial \widehat{r}} + \frac{n^2(4-n^2)}{\widehat{r}^4} + \frac{\rho_{eq}h_{eq}\omega^2}{D_{eq}}\right], \\
\lambda_1(\widehat{r}) &= \left[\frac{\nu_{eq}}{\widehat{r}D_{eq}}\frac{\partial^2 D_{eq}}{\partial \widehat{r}^2} - \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^2 D_{eq}}\frac{\partial D_{eq}}{\partial \widehat{r}} + \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^3}\right], \\
\lambda_2(\widehat{r}) &= \left[\frac{1}{D_{eq}}\frac{\partial^2 D_{eq}}{\partial \widehat{r}^2} + \frac{2+\nu_{eq}}{\widehat{r}D_{eq}}\frac{\partial D_{eq}}{\partial \widehat{r}} - \frac{2n^2+1}{\widehat{r}^2}\right], \\
\lambda_3(\widehat{r}) &= \left[\frac{2}{D_{eq}}\frac{\partial D_{eq}}{\partial \widehat{r}} + \frac{2}{\widehat{r}}\right], \\
\lambda_4(\widehat{r}) &= 1.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

En utilisant les approximations centrées des dérivées, définies dans l'annexe C, la forme discrétisée de l'Eq. (3.9) est

$$
\Lambda_1(\widehat{r}_j)W_{j-2} + \Lambda_2(\widehat{r}_j)W_{j-1} + \Lambda_3(\widehat{r}_j)W_j + \Lambda_4(\widehat{r}_j)W_{j+1} + \Lambda_5(\widehat{r}_j)W_{j+2} = 0, \tag{3.11}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1(\widehat{r}) &= \left[\frac{\lambda_4(\widehat{r})}{\delta_r^4} - \frac{\lambda_3(\widehat{r})}{2\delta_r^3}\right], \\
\Lambda_2(\widehat{r}) &= \left[-4\frac{\lambda_4(\widehat{r})}{\delta_r^4} + \frac{\lambda_3(\widehat{r})}{\delta_r^3} + \frac{\lambda_2(\widehat{r})}{\delta_r^2} - \frac{\lambda_1(\widehat{r})}{2\delta_r}\right], \\
\Lambda_3(\widehat{r}) &= \left[6\frac{\lambda_4(\widehat{r})}{\delta_r^4} - 2\frac{\lambda_2(\widehat{r})}{\delta_r^2} + \lambda_0(\widehat{r})\right], \\
\Lambda_4(\widehat{r}) &= \left[-4\frac{\lambda_4(\widehat{r})}{\delta_r^4} - \frac{\lambda_3(\widehat{r})}{\delta_r^3} + \frac{\lambda_2(\widehat{r})}{\delta_r^2} + \frac{\lambda_1(\widehat{r})}{2\delta_r}\right], \\
\Lambda_5(\widehat{r}) &= \left[\frac{\lambda_4(\widehat{r})}{\delta_r^4} + \frac{\lambda_3(\widehat{r})}{2\delta_r^3}\right],
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

sont les coefficients variables qui traduisent les variations radiales des propriétés mécaniques du trou noir, et $\delta_r$ représente le pas de discrétisation spatiale.

### 3.2.4 Validation du modèle du TN débouchant

La validation numérique de la méthode des différences finies est réalisée dans le cas du TN débouchant, décrit sur la figure la Fig. 3.1(a), qui a été étudié analytiquement dans le chapitre 2. Le déplacement extérieur ($r \geq b$) étant une somme du champ incident et du champ diffusé, il est donnée par l'Eq. (2.7). A l'interface $r = b$, le TN est lié continument avec le milieu extérieur, où l'épaisseur $h_0$ est constante. Cette condition imposant la continuité du champ du déplacement, de la pente, du moment fléchissant et de l'effort tranchant, justifie donc l'écriture des conditions données par l'Eq. (2.4). L'extrémité du

TN en $r = a$ est libre. Par conséquent, le moment fléchissant et l'effort tranchant s'annulent en cette limite. Ce qui permet d'établir les deux relations données par l'Eq. (2.6). La substitution des Eqs. (2.7) et (3.8) dans les Eqs. (2.4) et (2.6) permet d'obtenir, pour chaque ordre circonférentiel $n$, le système linéaire $\boldsymbol{M.X} = \boldsymbol{S}$ donné par l'Eq. (2.17), qui est cette fois de dimension $(J+2) \times (J+2)$, avec

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} H(\alpha) & K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_{f_0} H^{'}(\alpha) & k_{f_0} K^{'}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_g & -b_g \\ S_H(\alpha) & S_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 c_g & -b^2 d_g & -b^2 e_g \\ T_H(\alpha) & T_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -b^3 f_g & -b^3 g_g & -b^3 l_g & -b^3 p_g \\ 0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_1) & \Lambda_2(\widehat{r}_1) & \Lambda_3(\widehat{r}_1) & \Lambda_4(\widehat{r}_1) & \Lambda_5(\widehat{r}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_J) & \Lambda_2(\widehat{r}_J) & \Lambda_3(\widehat{r}_J) & \Lambda_4(\widehat{r}_J) & \Lambda_5(\widehat{r}_J) \\ 0 & 0 & c_d & d_d & e_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_d & g_d & l_d & p_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

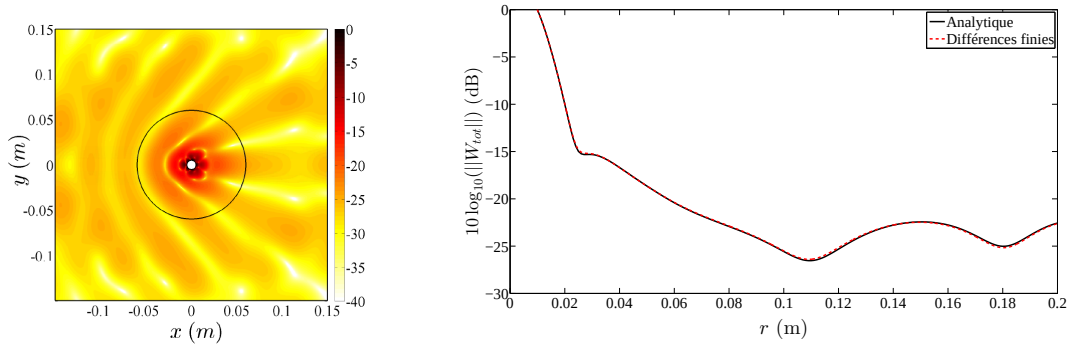
$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} A_n & B_n & W_1 & W_2 & W_3 & \cdots & \cdots & W_{J-3} & W_{J-2} & W_{J-1} & W_J \end{bmatrix}^T, \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{S} = -W_0 i^n \epsilon_n \begin{bmatrix} J(\alpha) & k_{f_0} J^{'}(\alpha) & S_J(\alpha) & T_J(\alpha) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{3.15}$$

où les éléments de la matrice $\boldsymbol{M}$ et du vecteur source $\boldsymbol{S}$ sont détaillés dans l'annexe C.

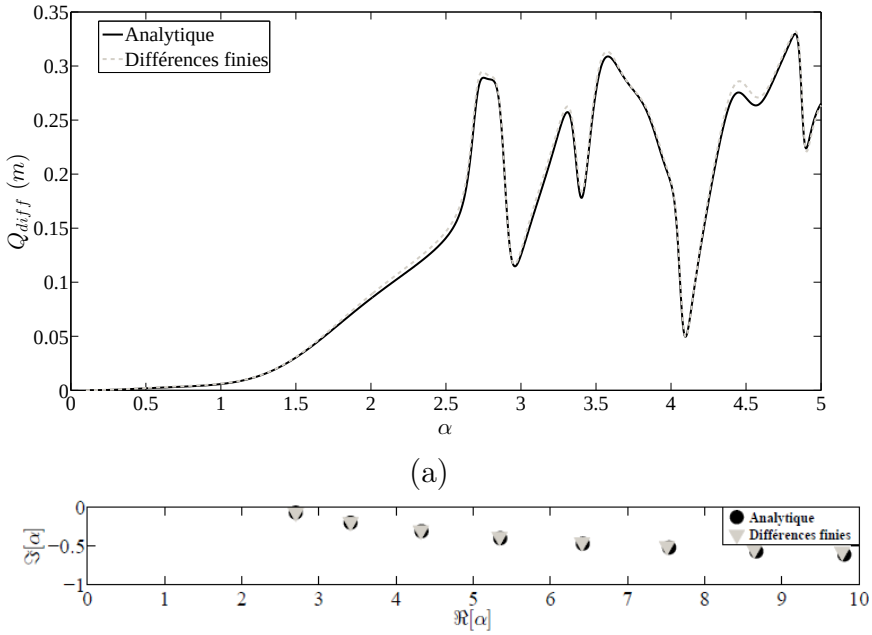
### Applications numériques

Des applications numériques utilisant le pas de discrétisation $\delta_r = 10^{-4}$ m et les valeurs données par la table 2.1 sont présentées sur les Figs 3.3 et 3.4. Le champ du déplacement total représenté à une fréquence donnée sur la Fig 3.3(a) est la somme de plusieurs ordres circonférentiels. Une coupe radiale ($r \geq 0$, $\theta = 0$) est donnée par la Fig 3.3(b). Ces deux figures sont obtenues par la méthode analytique du chapitre 2 et par la méthode des différences finies pour un profil de décroissance d'épaisseur quadratique ($m = 2$). Les deux résultats numérique et analytique sont quasi identiques, ce qui valide l'implémentation de la méthode des différences finies. Le calcul de la section efficace de diffusion $Q_{diff}$ est effectué sur une plage de fréquences étendue (voir Fig 3.4(a)) avec les deux méthodes. Là encore les résultats concordent. Un dernier type de résultat utile pour la suite, concerne les modes locaux qui sont solutions du système homogène $\boldsymbol{M.X} = \boldsymbol{0}$. Les zéros du déterminant de $\boldsymbol{M}$ sont obtenus dans le plan complexe du nombre d'onde de flexion adimensionnel $\alpha = k_{f_0} b$ au moyen des deux méthodes, et sont tracés sur la Fig 3.4(b). Les variations du déterminant dans le plan complexe et les valeurs propres complexes obtenues sont les mêmes dans les deux méthodes de résolution.




(a) (b)

FIGURE 3.3 – Deux calculs de champs vibratoires sont effectués pour le nombre d'onde adimensionnel $\alpha = 5$ : (a) module du champ en dB calculé avec les différences finies pour les ordres circonférentiel $n = 0$ à 10. (b) coupe radiale ($r \geq 0$, $\theta = 0$) du module du champ calculé analytiquement et numériquement avec les différences finies.




(a)

(b)

FIGURE 3.4 – Section efficace de diffusion (a) et nombres d'onde propres adimensionnels dans le plan complexe de $\alpha$ (b) calculés analytiquement et avec les différences finies.

## 3.3 Effet de l'hétérogénéité radiale de pertes

### 3.3.1 Préliminaire

La loi de mélange présentée dans la Sec. 3.2.2 décrit un modèle qui permet d'estimer le facteur de pertes équivalent $\eta_{eq}$ en chaque point de l'espace. L'inhomogénéité de $\eta_{eq}$ n'est bien sûr pas sans conséquences sur le comportement vibratoire du trou noir. Quel que soit le cas considéré, conservatif ou dissipatif, lorsque le facteur de pertes est une constante dans l'espace, la rigidité de flexion équivalente l'est également ($D_{eq}$ = cste) et peut sortir de l'opérateur différentiel dans l'Eq. (3.7). Cette configuration donne lieu à des déformées

modales du TN purement réelles [167]. Dans le cas où le facteur de pertes est inhomogène, la rigidité de flexion devient dépendante de l'espace et ne peut alors sortir de l'opérateur différentiel. Par conséquent, le problème aux valeurs propres liée à ce cas fournit des déformées modales complexes avec des coefficients d'amortissements modaux plus élevés que ceux d'une plaque uniforme avec un facteur de pertes équivalent constant. Denis [17] a étudié l'effet de l'inhomogénéité spatiale du facteur de pertes sur le comportement modal d'un trou noir acoustique au sein d'une poutre (TN monodimensionnel). En analysant les fréquences propres dans le plan complexe, il a pu montrer que la distribution spatiale inhomogène du facteur de pertes est à l'origine de l'augmentation d'un facteur 10 du coefficient d'amortissement modal, et donc de l'amélioration des performances du trou noir. Dans la section suivante, le rôle de la non-uniformité de l'amortissement dans le trou noir bidimensionnel est mis en évidence par l'analyse de ses propriétés de diffusion en présence du film viscoélastique.

### 3.3.2 Rôle de la non-uniformité de l'amortissement dans le trou noir bidimensionnel

L'amortissement induit par le film n'est pas uniforme dans la mesure où il dépend du ratio d'épaisseur entre la plaque et le revêtement. Ceci est une source d'hétérogénéité, qui est mise en évidence sur la Fig 3.5. On montre sur cette figure les variations de la section efficace de diffusion et du champ du déplacement en présence d'un film viscoélastique, dont les caractéristiques sont listées dans le tableau 3.1. Le facteur de perte de ce film est mesuré par DMA (Dynamical Mechanical Analysis) et est présenté dans l'annexe D.

| $h_f$ | $\rho_0$ | $E_f$ | $\eta_f$ |
|---|---|---|---|
| 1.5 mm | 100 kg/m$^3$ | 50 MPa | 1.7 |

Tableau 3.1 – Propriétés du film viscoélastique utilisé pour la simulation.

La section efficace de diffusion est tracée sur la Fig 3.5(a) en fonction du nombre d'onde adimensionnel $\alpha \in [0.1; 10]$, correspondant à la plage de fréquences $f \in [1; 10252]$ Hz. Le résultat montre que le film agit sur l'ensemble des amplitudes de la section efficace en les diminuant significativement, en particulier dans la zone des hautes fréquences : l'augmentation de l'épaisseur du film $h_f$ tend à réduire les résonances du trou noir. Le léger décalage des résonances du TN vers les basses fréquences s'explique par l'ajout de masse apportée par le film viscoélastique. La non-uniformité de l'amortissement se traduit par une diminution conséquente de la section efficace de diffusion à hautes fréquences.
L'effet de l'hétérogénéité est également visible sur les cartes du champ du déplacement total de la plaque avec le TN. La Fig 3.5(b) montre le module du champ du déplacement calculé à $\alpha = 5$, correspondant à la fréquence $f \approx 2563$ Hz en l'absence du film. Cette figure montre les interférences entre le champ incident et le champ diffusé, résultant de l'interaction avec le trou noir. L'effet de la diminution d'épaisseur de la plaque dans la zone du TN se manifeste par l'augmentation des amplitudes à l'extrémité libre du TN. Le champ vibratoire de la plaque avec TN en présence du film est représenté sur la Fig 3.5(c). Sur cette figure, les interférences significativement moins marquées à l'extérieur du TN traduisent la faible diffusion du trou noir au profit d'une dissipation induite importante.

L'effet du film est visible sur toute la plaque par l'atténuation du champ vibratoire, en particulier au centre du trou noir où les amplitudes sont significatives en l'absence du film.

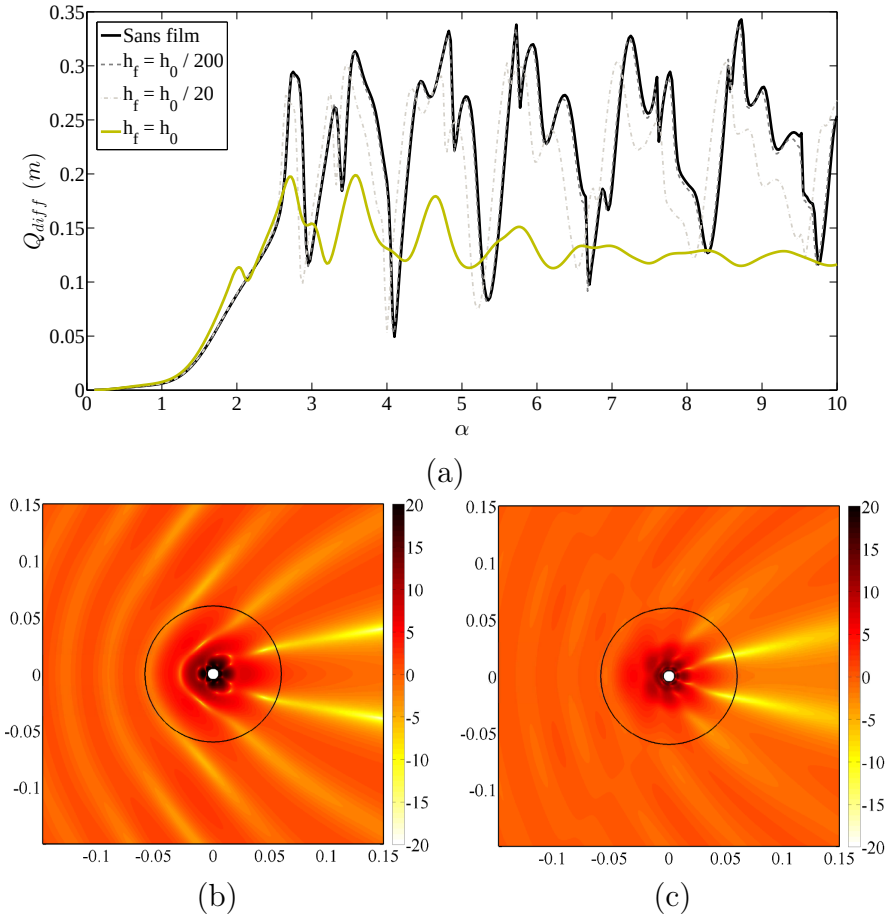



FIGURE 3.5 – Section efficace de diffusion du TN débouchant calculée pour différentes valeurs d'épaisseur du film (a). Champ du déplacement de la plaque munie d'un TN débouchant sans film (b) et avec film (c), calculé au pic de la section efficace de diffusion situé à $\alpha = 5$. Le module du champ total est normalisé par le module du champ incident et est représenté en dB entre $-20$ et 20 dB.

## 3.4 Aménagement de la zone centrale pour le contrôle de résonances

### 3.4.1 Contrôle par la raideur

Le trou noir acoustique débouchant (Fig 3.1(a)) étudié dans la section 3.2.4, présentant un trou physique au centre, constitue une zone fragile pour la structure et engendre une difficulté d'usinage, notamment lorsqu'il s'agit d'atteindre des épaisseurs de troncature (en $r = a$) très faibles. Par ailleurs, ce trou central peut gêner l'application du trou noir dans des contextes ou d'autres fonctionnalités techniques, comme l'étanchéité par exemple. Une réponse à ces aspects technologiques consiste à laisser au cœur du TN une zone centrale dont l'épaisseur peut être contrôlée. Ceci donne lieu à la configuration

présentée sur la Fig 3.1(b), appelée trou noir acoustique "non-débouchant". Il s'agit alors d'une cuvette constituée d'une zone d'épaisseur décroissante $h_{TN}$ et d'une zone centrale d'épaisseur résiduelle constante $h_1$. La caractérisation de la diffusion d'ondes de flexion par ce type de trou noir est basée sur le modèle aux différences finies développé dans la Sec 3.2.3, en tenant compte de l'existence du champ vibratoire dans la zone centrale ($r \leq a$).

#### 3.4.1.1 Modèle

Tout comme le TN débouchant, le TN non-débouchant est un diffuseur pénétrable : sous l'effet d'une excitation extérieure, il se comporte comme une source secondaire émettant des ondes vers l'extérieur ($r > b$). En considérant une excitation sous forme d'onde plane, le champ du déplacement extérieur, lorsque $r \geq b$, est toujours la somme du champ incident et du champ diffusé (voir Eq. (2.7)). Le champ incident donne lieu aux champs de déplacement dans la zone non-uniforme ($a < r < b$) d'épaisseur décroissante $h_{TN}$ et dans la zone centrale ($r \leq a$) d'épaisseur constante $h_1$. Le champ du déplacement est calculé par la méthode des différences finies dans la zone non-uniforme en considérant l'Eq. (3.8). Le champ dans la zone centrale ($r \leq a$) est ondulatoire et est défini dans le chapitre 1 par l'Eq. (1.32). Le fait que la vibration soit continue aux interfaces $r = a$ et $r = b$, le champ du déplacement, la pente, le moment fléchissant et l'effort tranchant le sont également. L'équation du mouvement discrétisée avec la substitution des Eqs. (2.7), (3.8) et (1.32) dans l'Eq. (2.4) pour $r = a$ et $r = b$ donnent lieu au système

$$\boldsymbol{M}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}, \tag{3.16}$$

qui est de dimension $(J+4) \times (J+4)$, avec

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} H(\alpha) & K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ k_{f_0} H'(\alpha) & k_{f_0} K'(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_g & -b_g & 0 & 0 \\ S_H(\alpha) & S_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 c_g & -b^2 d_g & -b^2 e_g & 0 & 0 \\ T_H(\alpha) & T_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -b^3 f_g & -b^3 g_g & -b^3 l_g & -b^3 p_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_1) & \Lambda_2(\widehat{r}_1) & \Lambda_3(\widehat{r}_1) & \Lambda_4(\widehat{r}_1) & \Lambda_5(\widehat{r}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_J) & \Lambda_2(\widehat{r}_J) & \Lambda_3(\widehat{r}_J) & \Lambda_4(\widehat{r}_J) & \Lambda_5(\widehat{r}_J) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J(\beta) & -I(\beta) \\ 0 & 0 & a_d & b_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_1} J'(\beta) & -k_{f_1} I'(\beta) \\ 0 & 0 & a^2 c_d & a^2 d_d & a^2 e_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_J(\beta) & -S_I(\beta) \\ 0 & 0 & a^3 f_d & a^3 g_d & a^3 l_d & a^3 p_d & 0 & 0 & 0 & -T_J(\beta) & -T_I(\beta) \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} A_n & B_n & W_1 & W_2 & W_3 & \cdots & \cdots & W_{J-3} & W_{J-2} & W_{J-1} & W_J & F_n & G_n \end{bmatrix}^T, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{S} = -W_0 i^n \epsilon_n \begin{bmatrix} J(\alpha) & k_{f_0} J'(\alpha) & S_J(\alpha) & T_J(\alpha) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{3.19}$$

où $\boldsymbol{X}$ est le vecteur inconnu du problème. Les calculs détaillés des différents éléments de la matrice $\boldsymbol{M}$ et du vecteur source $\boldsymbol{S}$ sont donnés dans l'annexe C.

#### 3.4.1.2 Résultats

Les résultats présentés dans cette section sont issus de simulations numériques d'une plaque en aluminium munie d'un trou noir acoustique non-débouchant avec film viscoélastique, dont les côtes sont $h_0 = 5$ mm, $a = 15$ mm et $b = 87.5$ mm. Le rayon $a'$ du cercle virtuel auquel l'épaisseur décroissante est nulle (voir Fig 3.1(a)), est réglé pour atteindre l'épaisseur $h_1$ souhaitée pour les simulations (voir Fig 3.6). Les caractéristiques physiques du matériau constituant la plaque et le film viscoélastique sont respectivement données dans les tableaux 2.1 et 3.1 avec $h_f = 5$ mm.

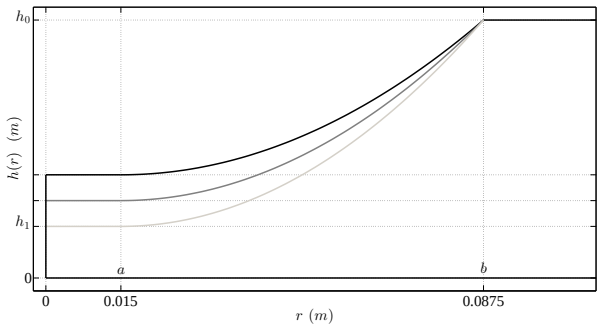



FIGURE 3.6 – Vue de profil du trou noir non-débouchant. La raideur de celui-ci est modifiée par l'épaisseur $h_1$ de la zone centrale ($r \in [0; a]$).

Les sections efficaces de diffusion $Q_{diff}$ des trous noirs acoustiques débouchant (Fig 3.1(a)) et non-débouchant (Fig 3.1(b)) sont tracées sur la figure 3.7(a) en fonction de la fréquence. Le trou noir débouchant (TND) est un diffuseur peu visible en basses fréquences (car sa section efficace est faible), et résonant en hautes fréquences à partir de la première fréquence de coupure. Les résonances hautes fréquences sont ensuite atténuées par effet trou noir en présence du film viscoélastique.

Lorsqu'une zone centrale d'épaisseur $h_1$ est considérée (voir Fig 3.6), le comportement résonant en hautes fréquences est modifié. En effet, la Fig. 3.7(a) montre que les effets conjoints de masses et raideur rajoutées par cette zone centrale modifient la position fréquentielle des maxima et l'allure de la section efficace de diffusion en fonction de son épaisseur $h_1$. En basses fréquences, l'insert de la zone centrale induit l'apparition d'un pic de résonance à une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du trou noir débouchant de même profil d'épaisseur. La position fréquentielle de cette résonance additionnelle est contrôlée en raideur par l'épaisseur de la zone centrale : le pic est décalé vers les hautes fréquences lorsque $h_1$ augmente.

Le champ du déplacement de la plaque est composé par une somme de plusieurs contributions d'ordres circonférentiels. Il est ici calculé à la première fréquence de résonance du TN où la contribution de l'ordre circonférentiel fondamental ($n = 0$) est maximale, et représenté sur les Figs 3.7(b), (c) et (d) pour les épaisseurs de zone centrale $h_1 = 100$ $\mu$m, $h_1 = 150$ $\mu$m et $h_1 = 200$ $\mu$m. Les trois cartes de champs montrent un maximum d'amplitude dans la zone centrale du TN, indiqué par une tache noire. Cette tache résulte de la superposition entre la résonance du mode local fondamentale ($n = 0$) axisymétrique et les contributions des ordres circonférentiels supérieurs ($n > 0$). Lorsque $h_1$ augmente, la résonance se décale vers les hautes fréquences, impliquant un champ plus compliqué quand les contributions des ordres circonférentiels supérieurs sont importantes.

L'épaisseur de la zone centrale est ici utilisée pour contrôler les résonances du trou noir. L'augmentation de cette épaisseur donne lieu à une augmentation locale de raideur, mais aussi de masse, qui conduit à des variations complexes de la fréquence du premier mode local que l'on cherche à contrôler. On propose d'ajouter une zone supplémentaire d'épaisseur constante à la configuration étudiée, constituant une sorte de plot cylindrique, qui va jouer le rôle de masse, faisant décaler les résonances vers les basses fréquences lorsque son épaisseur augmente. Cette configuration finale, illustrée sur la Fig 3.1(c), fait donc l'objet de l'étude présentée dans la section suivante.

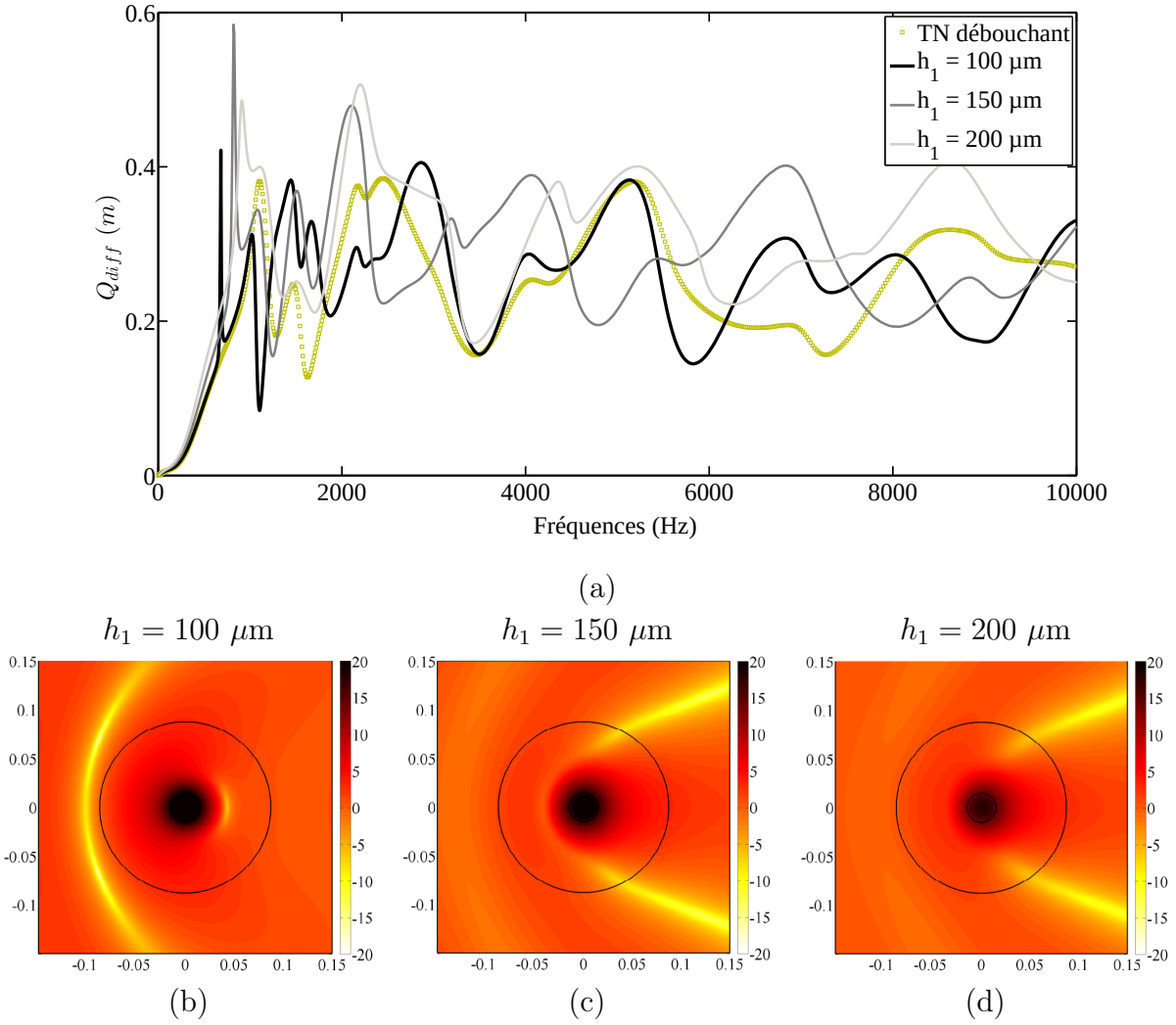



FIGURE 3.7 – Section efficace de diffusion du TN non-débouchant calculée pour différentes valeurs d'épaisseur $h_1$ de la zone centrale (a). Module en dB du champ du déplacement de la plaque munie du TN non-débouchant, calculé à la fréquence du premier pic de la section efficace de diffusion : (b) $h_1 = 100$ $\mu$m, (c) $h_1 = 150$ $\mu$m et (d) $h_1 = 200$ $\mu$m.

## 3.4.2 Contrôle de résonances par la masse

### 3.4.2.1 Description de la géométrie

Dans cette section la zone centrale du trou noir est aménagée de sorte que la masse et la raideur de ce dernier soient découplées, pour pouvoir contrôler ses premières ré-

sonances à l'aide de masse. Il s'agit donc de la configuration illustrée sur la Fig 3.1(c), où on peut distinguer quatre zones : une zone centrale ($r < c$) d'épaisseur constante $h_2$, une zone intermédiaire ($c \leq r \leq a$), également d'épaisseur constante $h_1$, une zone non-uniforme ($a < r < b$) où l'épaisseur décroit radialement et une zone extérieure au TN ($r \geq b$) d'épaisseur constante $h_0$. Ce système peut donc être vu comme un système masse-ressort, où la zone centrale constitue la masse et la zone intermédiaire constitue le ressort. L'épaisseur ($h_p$) de la plaque munie de ce type de trou noir est décrite par l'Eq. (3.20).

$$h_p = \begin{cases} h_0, & r \geq b \\ h_0 \left(\dfrac{r-a'}{b-a'}\right)^m, & a < r < b \\ h_1, & c \leq r \leq a \\ h_2, & r < c \end{cases} . \tag{3.20}$$

### 3.4.2.2 Formulation du problème

Le trou noir acoustique muni d'un film viscoélastique et avec masse centrale est inséré dans une plaque mince infinie, soumise à une onde plane incidente. Le profil d'épaisseur de la plaque avec le trou noir est donné sur la figure 3.8.

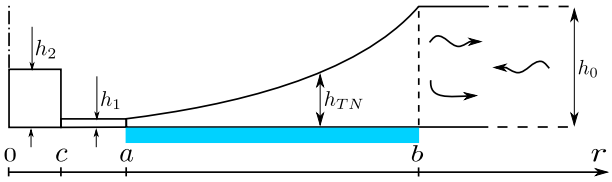



FIGURE 3.8 – Profil d'épaisseur d'une plaque munie d'un trou noir avec masse centrale.

Suite à cette excitation le champ du déplacement de la plaque, qui est solution de l'équation du mouvement (2.2), peut être décrit à tous les endroits de la plaque. Le champ $W^{ext}$ à l'extérieur du TN ($r \geq b$), rappelé par l'Eq. (3.21), est une superposition de l'onde incidente et du champ diffusé. Dans la zone non-uniforme du TN ($a < r < b$), le déplacement $W^{TN}$ est calculé par la méthode des différences finies et s'exprime comme dans l'Eq. (3.8). La région centrale du TN est composée de deux zones uniformes d'épaisseurs $h_1$ (lorsque $c \leq r \leq a$) et $h_2$ (lorsque $r < c$), où les déplacements $W^{cent1}$ et $W^{cent2}$ sont donnés par les Eqs. (3.22) et (3.23) respectivement. Les fonctions de Bessel utilisées pour décrire le champ vibratoire dans les deux zones centrales sont illustrées dans le chapitre 1 par la Fig 1.4.

$$W^{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n J_n(k_{f0} r) + A_n H_n^{(1)}(k_{f0} r) + B_n K_n(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta). \tag{3.21}$$

$$W^{cent1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L_n J_n(k_{f1} r) + P_n Y_n(k_{f1} r) + R_n I_n(k_{f1} r) + U_n K_n(k_{f1} r) \right] \cos(n, \theta). \tag{3.22}$$

$$W^{cent2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ F_n J_n(k_{f2} r) + G_n I_n(k_{f2} r) \right] \cos(n, \theta), \tag{3.23}$$

où $k_{fq} = \sqrt[4]{\dfrac{\rho_q h_q}{D_q}}\sqrt{\omega}$ représentent les nombres d'onde uniformes liés aux zones extérieure ($q = 0$) et centrales ($q = 1$ et $q = 2$), et $h_q$, $\rho_q$ et $D_q$ sont respectivement l'épaisseur, la masse volumique et la rigidité de flexion de la zone $q$.

Les inconnues du problème $A_n$, $B_n$, $L_n$, $P_n$, $R_n$, $U_n$, $F_n$, $G_n$ et $W_{n,j}^{TN}$ sont à déterminer par l'application des conditions de continuité au niveau des interfaces $r = a$, $r = b$ et $r = c$, imposant la continuité du déplacement, la pente, le moment de flexion et l'effort tranchant. L'équation du mouvement discrétisée (voir l'Eq. (3.11)) avec la substitution des Eqs. (3.21), (3.8), (3.22) et (3.23) dans l'Eq. (2.4) pour $r = a$, $r = b$ et $r = c$ donnent lieu au système $\boldsymbol{M}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}$, qui est de dimension $(J + 8) \times (J + 8)$, dont la matrice $\boldsymbol{M}$ et les vecteurs $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ sont donnés par les Eqs. (3.24), (3.25) et (3.26). L'inversion de ce système fournit alors le vecteur des inconnues $\boldsymbol{X}$.

***Note :*** les différents éléments de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{S}$ sont détaillés dans l'annexe C.

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}
H(\alpha) & K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_{f_0} H^{'}(\alpha) & k_{f_0} K^{'}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_g & -b_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_H(\alpha) & S_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 c_g & -b^2 d_g & -b^2 e_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
T_H(\alpha) & T_K(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -b^3 f_g & -b^3 g_g & -b^3 l_g & -b^3 p_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_1) & \Lambda_2(\widehat{r}_1) & \Lambda_3(\widehat{r}_1) & \Lambda_4(\widehat{r}_1) & \Lambda_5(\widehat{r}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_1(\widehat{r}_J) & \Lambda_2(\widehat{r}_J) & \Lambda_3(\widehat{r}_J) & \Lambda_4(\widehat{r}_J) & \Lambda_5(\widehat{r}_J) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J(\beta) & -Y(\beta) & -I(\beta) & -K(\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_d & b_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_1} J^{'}(\beta) & -k_{f_1} Y^{'}(\beta) & -k_{f_1} I^{'}(\beta) & -k_{f_1} K^{'}(\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & a^2 c_d & a^2 d_d & a^2 e_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_J(\beta) & -S_Y(\beta) & -S_I(\beta) & -S_K(\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & a^3 f_d & a^3 g_d & a^3 l_d & a^3 p_d & 0 & 0 & 0 & -T_J(\beta) & -T_Y(\beta) & -T_I(\beta) & -T_K(\beta) & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J(\gamma) & Y(\gamma) & I(\gamma) & K(\gamma) & -J(\zeta) & -I(\zeta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{'}(\gamma) & Y^{'}(\gamma) & I^{'}(\gamma) & K^{'}(\gamma) & -\dfrac{k_{f_2}}{k_{f_1}} J^{'}(\zeta) & -\dfrac{k_{f_2}}{k_{f_1}} I^{'}(\zeta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_J(\gamma) & S_Y(\gamma) & S_I(\gamma) & S_K(\gamma) & -\dfrac{D_1}{D_2} S_J(\zeta) & -\dfrac{D_1}{D_2} S_I(\zeta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_J(\gamma) & T_Y(\gamma) & T_I(\gamma) & T_K(\gamma) & -\dfrac{D_1}{D_2} T_J(\zeta) & -\dfrac{D_1}{D_2} T_I(\zeta)
\end{bmatrix}, \tag{3.24}
$$

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} A_n & B_n & W_1 & W_2 & \cdots & W_{J-2} & W_{J-1} & W_J & L_n & P_n & R_n & U_n & F_n & G_n \end{bmatrix}^T, \tag{3.25}
$$

$$
\boldsymbol{S} = -W_0 i^n \epsilon_n \begin{bmatrix} J(\alpha) & k_{f_0} J^{'}(\alpha) & S_J(\alpha) & T_J(\alpha) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{3.26}
$$

avec

$$
\alpha = k_{f_0} b, \quad \beta = k_{f_1} a, \quad \gamma = k_{f_1} c, \quad \zeta = k_{f_2} c.
$$

#### 3.4.2.3 Résultats et discussions

Les résultats numériques présentés dans cette section concernent le trou noir non-débouchant muni d'une masse en son centre et avec un film viscoélastique dans la zone non-uniforme $r \in [a; b]$ (voir Fig 3.8). Les simulations sont effectuées sur la base des paramètres géométriques présentés dans le Tab 3.2. Le film viscoélastique possède les mêmes caractéristiques que celui utilisé pour les simulations de la Sec. 3.4.1.

| $h_0$ | $h_1$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 mm | 200 $\mu$m | 15 mm | 87.5 mm | 5 mm |

Tableau 3.2 – Cotes du TN non-débouchant avec masse centrale.

• *Section de diffusion : effet du film viscoélastique*

La section efficace de diffusion ($Q_{diff}$) du TN non-débouchant avec masse centrale d'épaisseur $h_2 = 5$ mm, calculée en présence et en absence du film viscoélastique, est représentée sur la Fig 3.9 en fonction de la fréquence. Pour les deux cas (avec et sans film), on constate que le TN est peu visible ($Q_{diff} \longrightarrow 0$) par l'onde incidente à très basses fréquences et devient visible ($Q_{diff} \nearrow$) lorsque la fréquence augmente. La section efficace présente des variations complexes, dues aux résonances des modes piégés du TN. En présence du film, le comportement modal de ce TN est modifié dans la zone des hautes fréquences : les résonances liées aux différents modes piégés sont atténuées, et légèrement décalées vers les basses fréquences sous l'effet de la masse rajoutée par le film. La masse du film étant négligeable devant celle de la structure porteuse, la fréquence de la première résonance (premier pic à environ 500 Hz) n'est pas affectée par l'ajout du film.

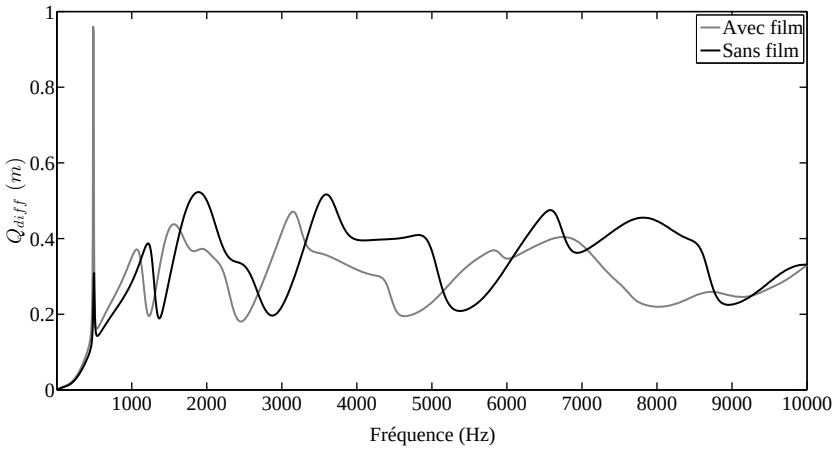



FIGURE 3.9 – Section efficace de diffusion du TN non-débouchant en présence et en absence du film viscoélastique, calculée pour $h_2 = 5$ mm, correspondant à une masse de la zone centrale $m_c \approx 1$ gr.

• *Section de diffusion : effet de la masse centrale*

L'effet de la masse centrale sur le comportement du TN est mis en évidence sur la Fig 3.11 via une étude exploratrice de la section efficace de diffusion en fonction de cette masse. En effet, la $Q_{diff}$ du TN est calculée en tenant compte des paramètres présentés dans le Tab 3.2, et pour les épaisseurs $h_2 = h_1$, $h_2 = 5h_1$, $h_2 = 15h_1$ et $h_2 = 25h_1$, qui correspondent à des masses centrales $m_c \approx 0.04$ gr, $m_c \approx 0.2$ gr, $m_c \approx 0.6$ gr et $m_c \approx 1$ gr respectivement (voir Fig 3.10). La figure 3.11 montre que la masse centrale agit sur l'ensemble des variations de la section efficace en modifiant les fréquences de résonance du TN. Ces résonances sont décalées vers les basses fréquences lorsque la masse centrale augmente ; par exemple, le pic de résonance qui apparait à 910 Hz pour $m_c \approx 0.04$ gr, correspondant à la résonance du premier mode piégé, passe à 485 Hz pour $m_c \approx 1$ gr. Ce décalage en fréquence des résonances, de plus en plus important en hautes fréquences, explique la perturbation de la structure modale du TN et les variations complexes de la section efficace.

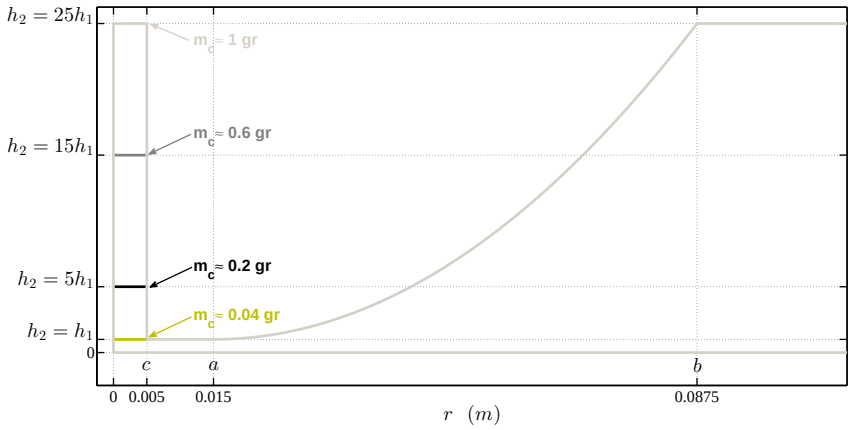



FIGURE 3.10 – Vue de profil du TN non-débouchant avec masse centrale. La masse ($m_c$) de la zone centrale ($r \in [0; c]$) est modifiée par l'épaisseur $h_2$.

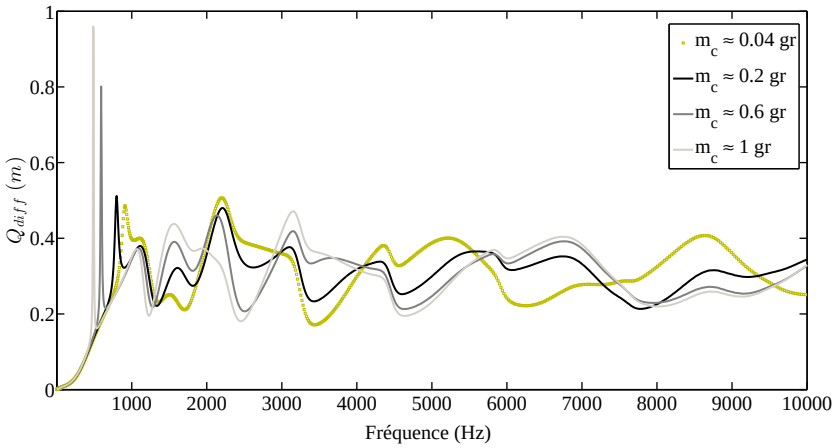



FIGURE 3.11 – Section efficace de diffusion du TN non-débouchant en fonction de la masse $m_c$ de la zone centrale.

• *Section de diffusion : effet de l'ordre du profil*

Les trous noirs acoustiques étudiés dans ce chapitre sont quadratiques : c'est-à-dire qu'ils ont un profil d'épaisseur décroissant en suivant une loi de puissance d'ordre 2 (voir l'Eq. (3.20) avec $m = 2$). Le modèle de différences finies développé dans la Sec. 3.2 permet de prendre en compte n'importe quel profil d'épaisseur, variant en loi de puissance. L'influence de l'ordre du profil d'épaisseur sur le comportement du trou noir est étudiée à travers l'analyse des variations de la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence. La section efficace du TN non-débouchant avec masse centrale d'épaisseur $h_2 = 5$ mm est calculée en présence du film viscoélatique pour les trois profils d'épaisseur $m = 2$, $m = 3$ et $m = 4$ (voir Fig. 3.12), et représentée sur la figure 3.13.

La Fig. 3.12 montre que la raideur du TN est diminuée par l'augmentation de l'ordre $m$ du profil. Ceci est dû à l'élargissement de zone centrale située entre $c$ et $a$. La diminution de cette raideur a des conséquences directes sur les fréquences de résonances du trou noir : ce dernier se comportant comme un système masse-ressort, ses fréquences de résonances sont décalées vers les basses fréquences lorsque la raideur de la zone $r \in [c; a]$ diminue ou lorsque la masse centrale augmente. Cette analyse est confirmée en Fig 3.13, montrant le décalage des pics de la section efficace de diffusion vers les basses fréquences lorsque l'ordre $m$ du profil augmente.

L'augmentation de $m$ amincit la zone non uniforme du trou noir. Par conséquent l'effet du film viscoélastique est d'autant plus visible pour des trous noirs ayant un ordre élevé (par exemple $m = 3$) : les résonances hautes fréquences sont atténuées par le film. Pour des ordres plus élevés ($m = 4$), le trou noir exhibe une section efficace de diffusion plus lisse (résonances complètement aplaties), qui pour cette simulation tend asymptotiquement vers une valeur proche du demi-périmètre d'un TN de rayon équivalent $r_{eq} \approx 6$ cm. On note qu'au delà de $m = 4$, pour le TN simulé, le comportement de ce dernier est semblable à celui d'un trou simple de mêmes dimensions.

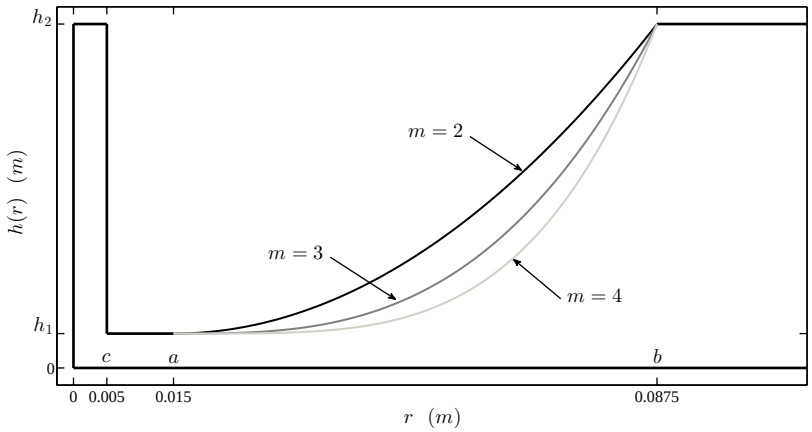



FIGURE 3.12 – Schéma du TN non-débouchant avec masse centrale. Trois ordres de profils sont représentés : $m = 2$, $m = 3$ et $m = 4$.

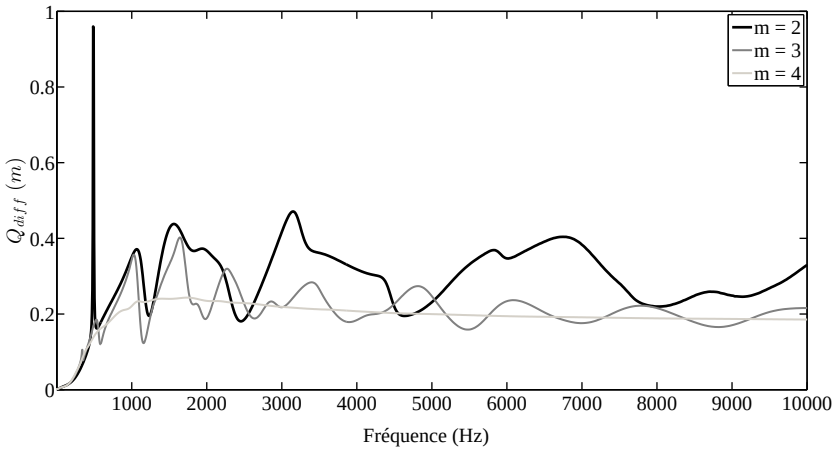



FIGURE 3.13 – Section efficace de diffusion du TN non-débouchant muni d'un film viscoélastique et d'une masse centrale, calculée pour 3 ordres de profils différents : $m = 2$, $m = 3$ et $m = 4$.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la diffusion des ondes de flexion par trois types de trous noirs acoustiques, munis d'une couche mince de matériau viscoélastique, est étudiée. Cette caractérisation met en jeu un modèle de différences finies, permettant de décrire le comportement vibratoire de la zone non-uniforme de la plaque, couplé à un modèle ondulatoire décrivant le comportement vibratoire dans les zones d'épaisseurs constantes. Le calcul numérique issu de la méthode des différences finies est validé sur le cas du trou noir débouchant quadratique ($m = 2$) sans film vicoélastique, en comparant le champ, la section efficace de diffusion et les fréquences des modes piégés avec les résultats obtenus dans le chapitre 2 par un modèle analytique.

L'effet du film viscoélastique, introduisant un amortissement inhomogène, est mis en évidence en analysant la section efficace du TN débouchant. Il est montré que le film agit principalement dans la zone des hautes fréquences, en atténuant le comportement résonant du trou noir.

La configuration du trou noir non-débouchant est d'une grande importance, car elle permet d'une part d'apporter une solution aux difficultés d'usinage et de tenue mécanique du TN, et d'autre part de contrôler de ses résonances. Le comportement résonant de ce trou noir, assimilé à un système masse-ressort, est contrôlé dans un premier temps par la raideur de la zone centrale en faisant varier son épaisseur $h_1$. Il est montré par le calcul de la section efficace de diffusion que les résonances du TN sont décalées vers les hautes fréquences lorsque l'épaisseur finale $h_1$ du TN augmente. Les simulations ont montré qu'il est possible de rendre le TN résonant à basses fréquences en diminuant suffisamment $h_1$, ce qui peut engendrer des difficultés d'usinage et la diminution des performances mécaniques de la structure lorsque $h_1$ devient très faible. Pour solutionner ces problèmes, une zone supplémentaire d'épaisseur uniforme $h_2$ est rajoutée au centre du TN. Cette zone, jouant le rôle d'une masse, permet de contrôler les résonances du TN en les faisant décaler vers les basses fréquences lorsque cette masse centrale augmente. Il est montré, pour le

trou noir simulé, que la première résonance à 910 Hz se produisant lorsque la masse de la zone centrale $m_c \approx 0.04$ gr, est décalée à 485 Hz lorsque $m_c \approx 1$ gr.

Les résonances du TN peuvent également être contrôlées au moyen de la raideur centrale tout en gardant fixée l'épaisseur $h_1$ de la zone centrale et en modifiant l'ordre $m$ du profil d'épaisseur non-uniforme du TN. Il est montré que la raideur du TN diminue avec l'augmentation de $m$. Par conséquent, le comportement résonant du trou noir se décale graduellement vers les basses fréquences jusqu'à disparaitre pour les profils d'ordres élevés, comme par exemple dans le cas du profil de puissance $m = 4$.

# Chapitre 4

# Modélisation et tests expérimentaux d'une méta-plaque à réseau périodique carré

## Résumé

L'objectif de ce chapitre est la caractérisation numérique et expérimentale d'un panneau, appelé "méta-plaque", muni d'un réseau périodique à symétrie carré de trous noirs acoustiques. L'étude des milieux périodiques nécessite des connaissances théoriques, d'une part pour leur modélisation mathématique et d'autre part pour l'analyse de leur comportement physique. Quelques notions théoriques de base, utiles à l'étude générale de ces milieux, sont brièvement rappelées en début de ce chapitre : à des fins pédagogiques, un exemple issu de la littérature, mettant en avant l'existence de bandes interdites dans un système périodique discret est donné. La méthode de décomposition en ondes planes, couramment appelée "Plane Wave Expension" (PWE) en anglais, est utilisée pour modéliser les phénomènes liés à la propagation des ondes de flexion dans la méta-plaque. Avant son application au cas de la méta-plaque, l'implémentation numérique de la méthode PWE est validée sur des cas de littérature, traitant des poutres périodiques et des plaques avec réseaux périodiques d'inclusions rigides. Des tests expérimentaux [1], basés sur un scan par vibromètre laser à balayage, sont réalisés sur cette méta-plaque. Des cartes de champs vibratoires et de fonctions de transfert sont alors extraites et analysées.

## 4.1 Ondes et structures périodiques

### 4.1.1 Bref historique

L'étude de la propagation des ondes dans les milieux périodiques a depuis longtemps suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Sous l'hypothèse que le son se propage dans l'air de la même façon qu'une onde élastique se propage dans un réseau de masses ponctuelles, Newton [168–170] proposa au 17$^{\text{ème}}$ siècle une expression analytique de la

1. Les tests expérimentaux présentés dans ce chapitre sont réalisés en collaboration avec Ameer ADLI ZALI dans le cadre de son stage de Master 2 (mars-juillet 2016), intitulé "Conception de structures non résonantes : effet du contraste de rigidité sur les bandes d'arrêt de poutres et plaques périodiques en flexion".

célérité du son. A partir de l'année 1727 (d'après [171]), les travaux de Newton sur les réseaux furent poursuivis par Daniel Bernoulli et son père Johann Bernoulli en établissant qu'un système de $n$ masses ponctuelles possède $n$ modes de vibration et $n$ fréquences propres. Plus tard, en se basant sur les travaux de Kelvin et Rayleigh sur la propagation des ondes élastiques dans une chaine de masses-ressorts, Léon Brillouin [171] a mené au milieu du 20$^{\text{ème}}$ siècle une étude plus générale sur la propagation des ondes dans les milieux périodiques en décrivant analytiquement la dispersion des ondes mécaniques et électromagnétiques dans les réseaux périodiques. En étudiant les symétries des réseaux, Brillouin a défini les domaines fondamentaux, connus sous le nom "des zones de Brillouin", liés aux différents types de réseaux. Il a ainsi décrit et discuté l'existence de bandes interdites, encore appelées "bandes d'arrêt", qui sont des intervalles fréquentiels dans lesquels la propagation des ondes est fortement atténuée. Le réseau représente alors une barrière empêchant la transmission des ondes, dont la capacité de stopper la propagation est directement liée aux caractéristiques physiques et géométriques du milieu de propagation. A partir de là, de nombreux champs d'application se sont développés autour de la conception de matériaux artificiels, périodiquement structurés, pour le contrôle de la propagation des ondes.

### 4.1.2 Les structures périodiques

Selon leurs dimensions spatiales, les structures périodiques peuvent être présentées sous trois catégories : les structures présentant une périodicité de leurs caractéristiques physiques ou géométriques selon une, deux ou trois directions de l'espace comme montré par la Fig 4.1. Les structures périodiques unidimensionnelles (Fig 4.1(a)) sont en pratique constitué d'alternance périodique de deux matériaux selon une direction de l'espace. Les structures ayant une périodicité bidimensionnelle (Fig 4.1(b)) se distinguent par un plan avec des motifs agencés périodiquement et invariant selon la dimension perpendiculaire à ce plan. Ces structures sont généralement constituées de réseaux d'obstacles, pouvant être des inclusions ou des trous entièrement ou partiellement percés, insérés dans la matière. Enfin, les structures périodiques tridimensionnelles (Fig 4.1(c)) peuvent être définies concrètement par un arrangement périodique de motifs (ex : sphères) dans les trois dimensions de l'espace.

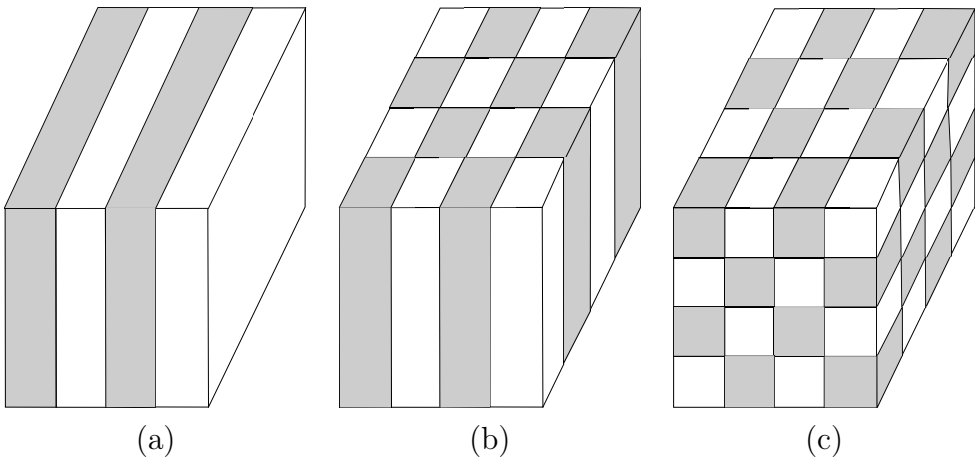



FIGURE 4.1 – Illustration des structures périodiques avec une périodicité à une dimension (a), à deux dimensions (b) et à trois dimensions (c). (*d'après* [172])

### 4.1.3 Réseaux direct, réseau réciproque et zone de Brillouin

En cristallographie géométrique, les différents réseaux sont caractérisés dans l'espace par leurs vecteurs de base, la norme de ces vecteurs et les angles qui les séparent. Ainsi, selon les symétries des différentes mailles, on dénombre 7 systèmes cristallins dans la nature, donnant lieu à 14 types de réseaux tridimensionnels de Bravais [173]. Un réseau 3D peut être décrit mathématiquement par une base de trois vecteurs $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ et $\overrightarrow{a_3}$, et dont les nœuds sont repérés par des coordonnées $m_1$, $m_2$ et $m_3$, qui sont des entiers relatifs. Ce réseau, dit "direct", est invariant pour toute translation $\overrightarrow{R}$, qui s'écrit [174]

$$\overrightarrow{R} = m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3}, \tag{4.1}$$

où $\overrightarrow{R}$ représente le vecteur position désignant un point du réseau.

A tout réseau direct, on peut associer dans l'espace des nombres d'onde un réseau réciproque, qui, lui aussi est invariant par toute translation $\overrightarrow{G}$, s'écrivant

$$\overrightarrow{G} = n_1\overrightarrow{b_1} + n_2\overrightarrow{b_2} + n_3\overrightarrow{b_3}, \tag{4.2}$$

sous réserve que la condition suivante soit satisfaite :

$$\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = 2\pi\delta_{ij}, \quad \text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \tag{4.3}$$

où $n_1$, $n_2$ et $n_3$ sont des entiers relatifs, $\delta_{ij}$ représente le symbole de Kronecker et $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$ et $\overrightarrow{b_3}$ sont les vecteurs de base définis à partir du triplet $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$, et donnés par

$$\overrightarrow{b_1} = 2\pi\frac{\overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{a_3}}{\overrightarrow{a_1}.(\overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{a_3})}; \qquad \overrightarrow{b_2} = 2\pi\frac{\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_3}}{\overrightarrow{a_1}.(\overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{a_3})}; \qquad \overrightarrow{b_3} = 2\pi\frac{\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}}{\overrightarrow{a_1}.(\overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{a_3})}. \tag{4.4}$$

En se limitant au réseaux 2D, on peut montrer qu'il existe 5 types de mailles compatibles à la construction d'un tel réseau bidimensionnel, qui correspondent aux réseaux 2D de Bravais suivants [175] : réseau carré, réseau rectangulaire, réseau rectangulaire centré, réseau hexagonal ou triangulaire et réseau oblique. Dans ce manuscrit, l'ensemble des travaux s'appuie sur les réseaux 2D de symétries carrées et triangulaires de longueur caractéristique (période spatiale) $L$.

Le réseau direct 2D est obtenu en considérant uniquement les vecteurs de base $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ dans l'Eq. (4.1), où $||\overrightarrow{a_1}|| = ||\overrightarrow{a_2}|| = L$. Les schémas (a)-(b) et (d)-(e) de la figure 4.2 illustrent respectivement les réseaux directs et réciproques carrés et hexagonaux (ou triangulaires), dont les cellules unitaires sont représentées en pointillé. Les premières zones de Brillouin des deux réseaux sont illustrées (en lignes rouges continues) sur les figures 4.2(c)-(f) respectivement. Les zones de Brillouin irréductibles sont repérées par des triangles grisés, délimités par les parcours $\Gamma XM$ pour le réseau carré et $\Gamma KM$ pour le réseau triangulaire.
Les expressions des vecteurs de base du réseau réciproque 3D (Eq. (4.4)) restent valables pour les réseaux 2D en posant le troisième vecteur de base du réseau direct $\overrightarrow{a_3} = 1.\overrightarrow{z}$, où $\overrightarrow{z}$ est le vecteur perpendiculaire au plan défini par $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$. Les vecteurs de base du réseau réciproque 2D sont finalement donnés en fonction de $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ uniquement, et sont résumés dans le tableau 4.1 pour les réseaux carré et triangulaire.

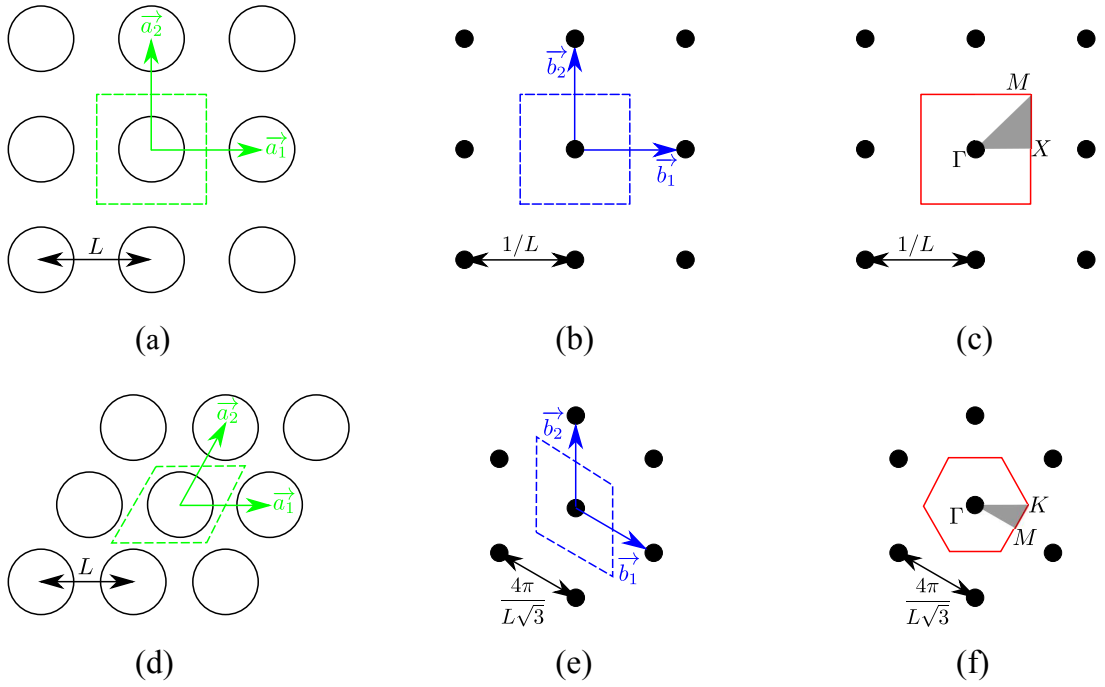



FIGURE 4.2 – Représentation 2D des réseaux directs (a) et (d), réseaux réciproques (b) et (e) et des premières zones de Brillouin pour les réseaux carrés ((a), (b) et (c)) et pour les réseaux triangulaires ((d), (e) et (f)). Les zones de Brillouin irréductibles des deux réseaux sont représentées par des triangles grisés : $\Gamma XM$ et $\Gamma KM$ (*d'après* [176]).

| Type du réseau | Vecteurs du réseau direct | Vecteurs du réseau réciproque |
|---|---|---|
| **Carré** | $\overrightarrow{a_1} = L(1,0)$<br>$\overrightarrow{a_2} = L(0,1)$ | $\overrightarrow{b_1} = \frac{2\pi}{L}(1,0)$<br>$\overrightarrow{b_1} = \frac{2\pi}{L}(0,1)$ |
| **Triangulaire** | $\overrightarrow{a_1} = L(1,0)$<br>$\overrightarrow{a_2} = L\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\overrightarrow{b_1} = \frac{2\pi}{L}\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$<br>$\overrightarrow{b_2} = \frac{2\pi}{L}\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ |

Tableau 4.1 – Vecteurs directs et réciproques 2D des réseaux carré et triangulaire.

### 4.1.4 Théorème de Floquet-Bloch

L'origine du théorème de Floquet-Bloch revient aux travaux du mathématicien Achille Marie-Gaston Floquet en 1883 [177] sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. En étudiant les équations de Mathieu et Hill [178–180], Floquet proposa une solution pour les systèmes différentiels du second ordre, ayant des coefficients périodiques : dans un réseau périodique, la solution calculée entre deux points voisins $i$ et $j$ distants l'un de l'autre d'une distance égale à la longueur caractéristique du réseau, est équivalente à

un déphasage de la forme $e^{i\phi}$. En 1929, Félix Bloch a généralisé les travaux de Floquet et les a appliqués pour la première fois dans le cadre de la physique moderne en démontrant que la fonction d'onde d'un électron dans un potentiel périodique présente une périodicité de second degré [181]. A partir de là, découle le théorème connu sous le nom de "Floquet-Bloch", qui stipule que la propagation d'ondes (de tous types) dans un milieu périodique peut être décrite par une superposition d'une infinité d'ondes planes de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et d'une fonction périodique de même période que le réseau. La figure 4.3 illustre la conséquence de l'application de ce théorème dans le cadre de la mécanique vibratoire : le champ du déplacement $W(\overrightarrow{r_2})$ au point repéré par le vecteur position $\overrightarrow{r_2}$, est le même que celui au point repéré par le vecteur $\overrightarrow{r_1}$, mais déphasé d'un facteur $e^{i\boldsymbol{k}\overrightarrow{L}}$, où $W(\overrightarrow{r_1})$ est un déplacement périodique de période $L$ et $\boldsymbol{k}$ représente le nombre d'onde de Bloch.

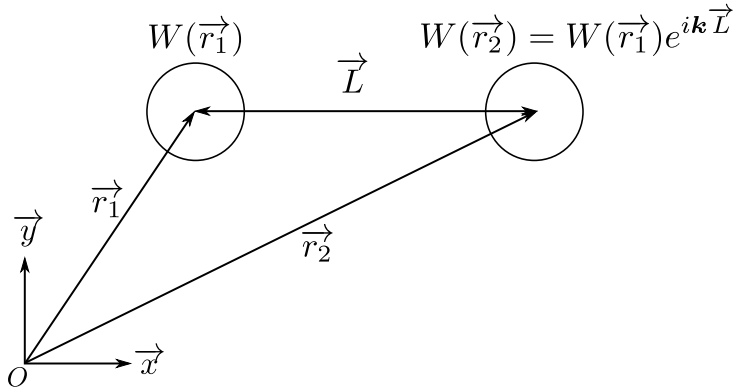



FIGURE 4.3 – Représentation schématique du théorème de Floquet-Bloch (*d'après* [182]).

### 4.1.5 Cristaux phononiques

Les cristaux, qui sont des matériaux périodiques, peuvent en général être catégorisés en fonction du type d'ondes qui s'y propagent : on trouve alors les cristaux électroniques pour les électrons, les cristaux photoniques pour les ondes électromagnétiques ou lumineuses et les cristaux phononiques pour les ondes élastiques (vibratoires ou sonores). Ces cristaux ont des caractéristiques intéressantes et donnent lieux à un champ d'application très vaste. Une revue bibliographique synthétique sur leurs propriétés et leur utilisation dans les divers domaines d'application est donnée dans les thèses de doctorat de S. Benchabane [183] et Q. Rolland [184] et les travaux de Mead [185]. Dans ce manuscrit, l'intérêt est porté uniquement sur les cristaux phononiques, en l'occurrence vibratoires, qui sont en lien direct avec le champ de recherche de cette thèse.

Comme démontré dans plusieurs travaux de la littérature, les cristaux phononiques présentent des propriétés similaires à celles de leurs homologues photoniques, à savoir la production de bandes fréquentielles interdites dans lesquelles la propagation d'ondes n'est plus possible. L'obtention de bandes interdites dans un milieu de propagation nécessite d'avoir un motif répété périodiquement et constitué de deux matériaux avec un contraste de propriétés prononcé. Un exemple simple peut être donné dans le cas d'un milieu périodique discret : il s'agit d'une chaine périodique de masses-ressorts.

La figure 4.4 illustre une chaine périodique de motifs répétés infiniment. Chaque motif est composé de deux masses ponctuelles $M_1$ et $M_2$, espacées l'une de l'autre d'une distance $L$ et reliées avec un ressort sans masse, de raideur $K$.

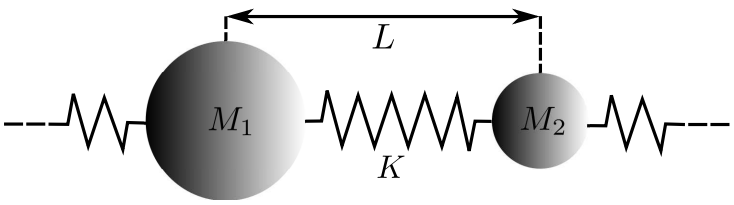



FIGURE 4.4 – Schéma d'un système périodique diatomique de masses-ressorts.

La propagation dans ce type de système peut être étudiée en analysant la dispersion des ondes qui s'y propagent. La relation de dispersion du système est calculée en recherchant les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2K - M_1\omega^2 & -2K\cos(kL) \\ -2K\cos(kL) & 2K - M_2\omega^2 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont données par [176] comme :

$$\omega_{1,2}^2 = K\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_1}\right) \mp \sqrt{K^2\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_1}\right)^2 - \frac{4K^2}{M_1M_2}\sin^2(kL)}, \tag{4.6}$$

où $\omega_1(k)$ et $\omega_2(k)$ correspondent à deux distinctes branches de dispersion.

Deux systèmes peuvent être étudiés et comparés : le système monoatomique avec $M_1 = M_2$ et le système diatomique où $M_1 \neq M_2$. Les diagrammes de dispersion des deux systèmes sont calculés à partir de la relation (4.6) dans la première zone de Brillouin $k \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et représentés sur la figure 4.5. Le système monoatomique (Fig 4.5(a)) montre que les ondes peuvent se propager à tous les nombres d'onde : autrement dit, pour toute fréquence, il existe un nombre d'onde qui lui correspond comme solution. Dans le cas du système diatomique ($M_1 \neq M_2$), la figure 4.5(b) montre qu'il existe une bande interdite, indiquée par l'intervalle grisé entre 1 et $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$, dans laquelle la propagation est stoppée : mathématiquement, aucun nombre d'onde réel n'est solution à ce problème dans cette gamme de fréquences.

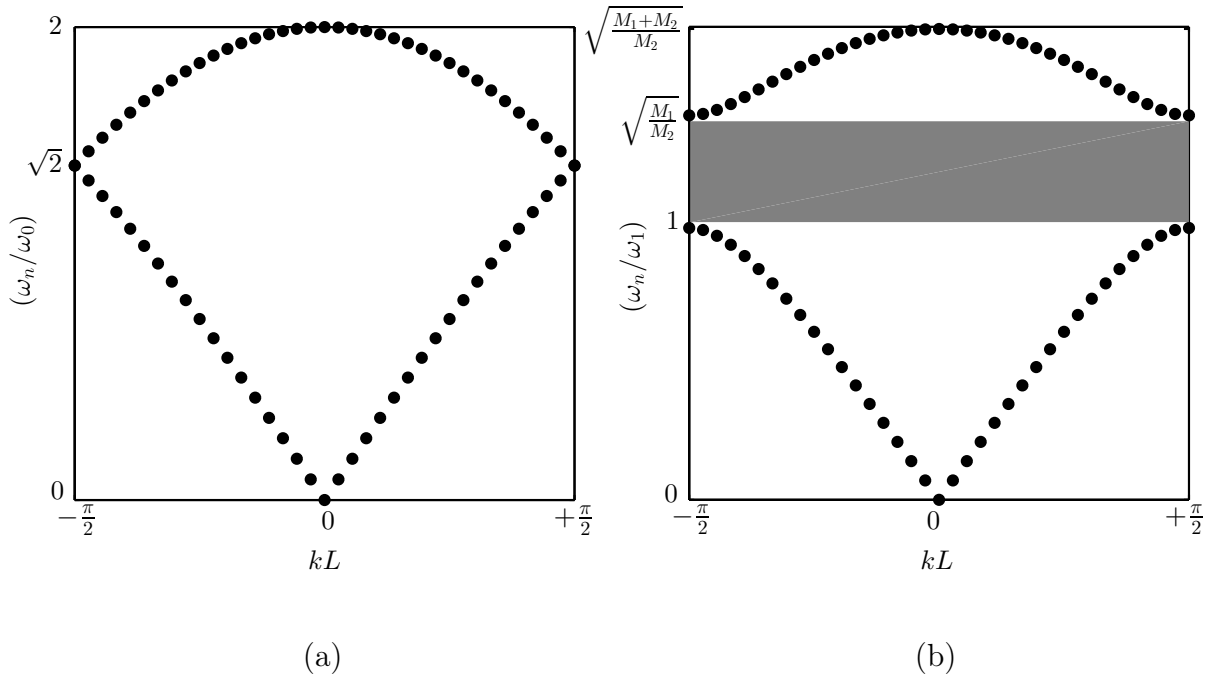



FIGURE 4.5 – Courbes de dispersion dans les systèmes périodiques discrets (a) monoatomique et (b) diatomique. Les pulsations $\omega_n$ ($n = 1$ ou 2) sont normalisées par rapport à $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M_1}} = \sqrt{\frac{K}{M_2}}$ pour le système monoatomique et par rapport à $\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M_1}}$ pour le système diatomique. On note, d'après [176], que l'expression de $\omega_1$ n'est valide que lorsque $M_1 > M_2$.

Tout comme les cristaux phononiques discrets, il existe aussi des cristaux phononiques continus. Étant des matériaux artificiels, ils sont conçus au départ pour répondre à des problématiques d'isolation et de transmission phonique ou vibratoire. Par la suite, ils sont utilisés à des fins de confinement et de guidage d'ondes. Ils sont en général constitués d'un arrangement périodique d'inclusions comme des trous, cylindres ou des sphères, insérés dans un milieu environnant de propriétés différentes, appelé "matrice", en suivant une, deux ou trois directions de l'espace.
L'étude de la propagation des ondes élastiques dans les cristaux phononiques a connu beaucoup de progrès au cours des trois dernières décennies [186–192]. En raison de leur capacité à produire des bandes interdites, les structures périodiques peuvent avoir de nombreuses applications potentielles [190–192]. Les principaux mécanismes responsables de la création des bandes interdites sont basés sur la diffusion de Bragg [193] et les résonances locales [194–197]. Pour le premier mécanisme, la première bande interdite, dite de "Bragg", se produit lorsque la longueur d'onde est le double de la longueur caractéristique du réseau (période spatiale du réseau), mais pour le second mécanisme, la bande interdite, dite de "résonance", est imposée par la fréquence de résonance associée aux diffuseurs insérés dans le milieu et dépend moins de la périodicité et de la symétrie de la structure.

## 4.2 Méthode PWE pour les milieux périodiques

### 4.2.1 PWE pour une poutre

Dans cette section, la méthode de décomposition en ondes planes est appliquée dans le cas d'une poutre périodique d'Euler-Bernoulli [198]. L'objectif est de calculer les courbes de dispersion d'ondes de flexion dans ce type de structure. Les trois étapes clés de cette méthode sont présentées dans les paragraphes 4.2.1.1, 4.2.1.2 et 4.2.1.3.

#### 4.2.1.1 Équation de flexion de poutre

Le milieu de propagation illustré sur la figure 4.6-(a) est une poutre mince, composée d'un réseau périodique infini de cellules élémentaires. Chaque cellule élémentaire est de longueur caractéristique $L$, appelée "période spatiale du réseau", et est constituée de deux milieux de longueur $l_i$ ( l'indice "$i$" désigne le milieu 1 ou le milieu 2). La section droite $S_i$ de la poutre est définie dans le plan $yz$ et est donnée par $S_i = d_i h_i$ (voir Fig 4.6-(b)). Les caractéristiques physiques de la poutre sont la masse volumique $\rho_i$ et le module d'Young élastique $E_{0,i}$.

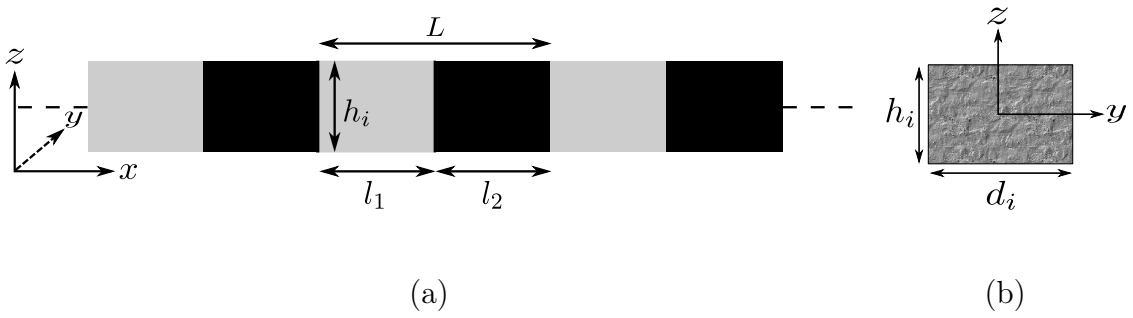



FIGURE 4.6 – (a) Schéma d'une poutre composée d'une succession de deux milieux, disposés de façon périodique. (b) Section droite de la poutre.

Dans le système des coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$, où le plan $xy$ constitue le plan neutre de la poutre, l'équation qui gouverne le mouvement de flexion de la poutre périodique en régime harmonique (convention $e^{-i\omega t}$) est donnée par [199, 200] :

$$\omega^2 \alpha(\boldsymbol{x}) W(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\beta(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{x})}{\partial x^2}\right], \tag{4.7}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(\boldsymbol{x}) = \rho S \\ \\ \beta(\boldsymbol{x}) = EI \end{cases}, \tag{4.8}$$

où $W$ représente le déplacement transversal de la poutre (dans la direction $z$), $S = dh$ est la section droite et $I = \dfrac{dh^3}{12}$ est le moment quadratique de la section droite. Les variables

$\alpha(\boldsymbol{x})$ et $\beta(\boldsymbol{x})$, sont des fonctions périodiques du vecteur position $\boldsymbol{x}$, désignant la masse linéique et la rigidité de flexion de la poutre respectivement.

#### 4.2.1.2 Développement en séries de Fourier

D'après le théorème de Bloch [197, 201–203], le champ du déplacement transversal harmonique de la poutre périodique peut être exprimé comme :

$$W(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \tag{4.9}$$

où $\boldsymbol{k}$ est le vecteur nombre d'onde de Bloch. Le champ $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ est une fonction périodique présentant la même périodicité spatiale que la structure, Il peut se développer en série de Fourier comme

$$W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{G_1}} W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) e^{i\boldsymbol{G_1}.\boldsymbol{x}}, \tag{4.10}$$

avec $\boldsymbol{G_1} = 2\pi \left(\frac{n_1}{L}\right)$ est un vecteur monodimensionnel appartenant au réseau réciproque. Le nombre $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ est un entier relatif et $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1})$ représentent les coefficients de Fourier correspondant au vecteur d'ondes $\boldsymbol{G_1}$. En substituant l'expression Eq. (4.10) dans la relation Eq. (4.9), la solution de l'équation différentielle (4.7) prend la forme suivante :

$$W(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{G_1}} W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) e^{i\boldsymbol{G_1}.\boldsymbol{x}}. \tag{4.11}$$

Les fonctions $\alpha(\boldsymbol{x})$ et $\beta(\boldsymbol{x})$ intervenant dans l'équation de mouvement (4.7) peuvent être développées en séries de Fourier. Si $H(\boldsymbol{x})$ désigne l'une des fonctions $\alpha(\boldsymbol{x})$ ou $\beta(\boldsymbol{x})$, il est possible d'écrire

$$H(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{G_2}} H_{(\boldsymbol{G_2})} e^{i\boldsymbol{G_2}.\boldsymbol{x}}, \tag{4.12}$$

où $H_{(\boldsymbol{G_2})}$ représente le coefficient de Fourier associé au vecteur d'ondes $\boldsymbol{G_2}$, donné par

$$H_{(\boldsymbol{G_2})} = \frac{1}{L} \int_L H(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{G_2}.\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4.13}$$

Les variations de $H(\boldsymbol{x})$ étant connues, l'équation 4.13 fournit $H_{(\boldsymbol{G_2})}$ de façon explicite.

#### 4.2.1.3 Problème aux valeurs propres

La substitution des Eqs. (4.11) et (4.12) dans l'Eq. (4.7) donne lieu à l'équation de couplage suivante :

$$\omega^2 \sum_{\boldsymbol{G_1}} \alpha(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}).W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) = \sum_{\boldsymbol{G_1}} \beta(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}) \left[(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})^2 . (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})^2\right] .W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}), \tag{4.14}$$

où

$$\boldsymbol{G_3} = \boldsymbol{G_1} + \boldsymbol{G_2}. \tag{4.15}$$

Deux types de problèmes aux valeurs propres peuvent être déduits de l'Eq. (4.14) : le premier, dit "standard" [204], est celui dans lequel les pulsations propres sont recherchées en fonction du nombre d'onde de Bloch ($\omega = f(\boldsymbol{k})$). Le second problème, dit "polynomial" [205–207], fournit les nombres d'onde propres de Bloch en fonction de la pulsation

$(\boldsymbol{k} = f(\omega))$.

- *Formulation standard (méthode $\omega(\boldsymbol{k})$)* :

En considérant que les vecteurs $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ prennent toutes les valeurs possibles des vecteurs du réseau réciproque, l'équation (4.14) est un système infini d'équations linéaires des vecteurs propres $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1})$. En pratique, pour le développement des calculs numériques, le nombre de ces vecteurs est fini. En tronquant les sommes dans les équations (4.11) et (4.12) en choisissant $N$ vecteurs réciproques, l'équation (4.14) devient un système à $(2N+1) \times (2N+1)$ équations pour le problème standard, et s'écrit alors sous la forme matricielle comme :

$$-\omega_n^2 \boldsymbol{PW} = \boldsymbol{QW}, \tag{4.16}$$

avec

$$\boldsymbol{P} \;= \boldsymbol{P}_{ij} \;= \alpha(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{Q} \;= \boldsymbol{Q}_{ij} \;= -\beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j)\left[\left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_{1}}_j\right)^2 . \left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_{3}}_i\right)^2\right]. \tag{4.18}$$

et

$$\boldsymbol{W} \;= W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.19}$$

où $i$ et $j$ sont les indices de sommation, indiquant le nombre de $\boldsymbol{G_3}$ et $\boldsymbol{G_1}$.
Pour des valeurs données du nombre d'onde de Bloch $\boldsymbol{k}$, le système d'équations (4.16) admet des solutions pour certaines valeurs propres $\omega_n$ réelles, où $n$ est la $n^{\text{ème}}$ branche de dispersion. La relation entre $\omega_n$ et $\boldsymbol{k}$ est obtenue en laissant $\boldsymbol{k}$ parcourir l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{L}; +\frac{\pi}{L}\right]$, qui représente la première zone de Brillouin [171, 176] pour un milieu périodique monodimensionnel.

- *Formulation polynomiale (méthode $\boldsymbol{k}(\omega)$)* :

La méthode PWE standard ($\omega(\boldsymbol{k})$) ne permet pas vraiment de prendre en compte l'amortissement dans la structure, dans la mesure où le nombre d'onde $\boldsymbol{k}$ qui parcourt la zone de Brillouin est contraint à conserver des valeurs réelles. Nous proposons une méthodes $\boldsymbol{k}(\omega)$ dans laquelle les vecteurs d'ondes admissibles sont calculés pour un ensemble de valeurs réelles de la pulsation. Pour établir le problème aux valeurs propres, l'Eq. (4.14) est réécrite de façon à faire apparaitre un polynôme en $\boldsymbol{k}_n$ tel que :

$$\sum_{\boldsymbol{G_1}} \left[\boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{k}_n + \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{k}_n^2 + \boldsymbol{Q}_3 \boldsymbol{k}_n^3 + \boldsymbol{Q}_4 \boldsymbol{k}_n^4\right] W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) \;=\; 0, \tag{4.20}$$

où

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{Q}_{0,ij} = \omega^2 \alpha(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j) - \boldsymbol{G_{1}}_j^2 \boldsymbol{G_{3}}_i^2 \beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_{1,ij} = 2\boldsymbol{G_{1}}_j \boldsymbol{G_{3}}_i (\boldsymbol{G_{1}}_j + \boldsymbol{G_{3}}_i)\beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_{2,ij} = \left[(\boldsymbol{G_{1}}_j + \boldsymbol{G_{3}}_i)^2 + 2\boldsymbol{G_{1}}_j \boldsymbol{G_{3}}_i\right] \beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{Q}_{3,ij} = 2(\boldsymbol{G_{1}}_j + \boldsymbol{G_{3}}_i)\beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.24}$$

$$\boldsymbol{Q}_4 = \boldsymbol{Q}_{4,ij} = \beta(\boldsymbol{G}_{\mathbf{3}i} - \boldsymbol{G}_{\mathbf{1}j}), \tag{4.25}$$

sont des matrices carrées, de même taille $(2N+1) \times (2N+1)$ et $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G}_{\mathbf{1}})$ est le vecteur propre recherché.
La relation entre $\boldsymbol{k}_n$ et $\omega$ est obtenue en résolvant numériquement le système aux valeurs propres en $\boldsymbol{k}_n$ (4.20) pour une plage de pulsations $\omega$ donnée, en utilisant la fonction "polyeig" de Matlab [205–207].

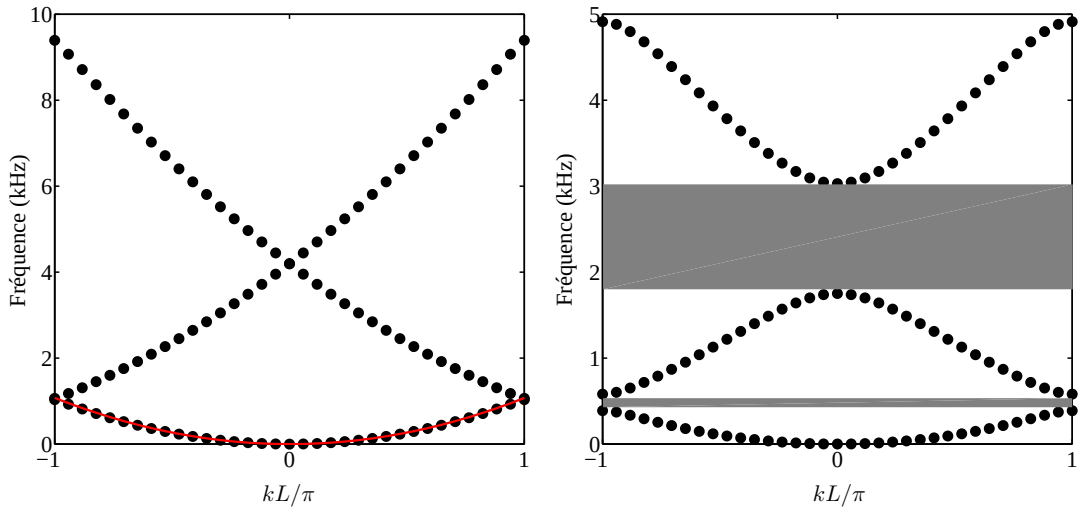
#### 4.2.1.4 Diagrammes de dispersion

Les courbes de dispersion calculées en utilisant les méthodes PWE (pour le problème standard) et EPWE (pour le problème polynomial), sont présentées dans cette section d'une part pour valider l'implémentation des deux méthodes, et d'autre part pour illustrer les caractéristiques de la propagation des ondes de flexion dans une poutre périodique.

Les paramètres du matériau sont choisis dans un premier temps de façon à représenter le cas d'une poutre uniforme, constituée d'un matériau de masse volumique $\rho_i = 2730$ kg/m$^3$ et module d'Young élastique $E_i = 77.56$ GPa ($i$ désigne le milieu 1 ou 2). A titre d'exemple, les paramètres géométriques sont choisis tels que : $L = 150$ mm, $l_i = L/2$, $d_i = 10$ mm et $h_i = 10$ mm. Sur la figure 4.7(a) sont tracées les trois premières branches de dispersion de la poutre périodique uniforme, obtenues en utilisant la méthode PWE, où les milieux 1 et 2 sont de mêmes matériaux et dimensions. La relation de dispersion naturelle $w = k_f^2\sqrt{\dfrac{EI}{\rho S}}$, où $k_f$ représente le nombre d'onde naturel de flexion, est tracée (en ligne rouge continue) et se trouve superposée à la première branche calculée. Le résultat montre que pour toutes les valeurs du nombre d'onde de Bloch $\boldsymbol{k}$ considérées ($\boldsymbol{k} \in \left[-\dfrac{\pi}{L}; +\dfrac{\pi}{L}\right]$), il existe des solutions $\omega_n$ au problème aux valeurs propres dans l'Eq. (4.16). Ce qui signifie que les ondes de flexion peuvent se propager à toutes les fréquences dans cette poutre.

Dans un second temps, et afin d'étudier une poutre périodique avec un contraste de rigidité dans la cellule élémentaire, le matériau du milieu 1 est remplacé par un autre matériau plus léger et moins rigide, avec une masse volumique $\rho_1 = 1180$ kg/m$^3$ et un module élastique $E_1 = 4.35$ GPa. Pour des fins de comparaison avec la littérature et pour une meilleure convergence du calcul numérique, 201 vecteurs du réseau réciproque ($n_1 = 0, \pm 1, ..., \pm 100$) sont considérés dans l'algorithme de la méthode PWE utilisée. La figure 4.7(b) présente le diagramme de dispersion de cette poutre périodique non-uniforme. Le résultat est en parfait accord avec celui trouvé par Yu Dianlong [208], et montre qu'il existe deux intervalles fréquentiels, $[387.8; 580.7]$ et $[1751.4; 3030.3]$ Hz, dans lesquels aucune fréquence ne correspond au nombre d'onde $\boldsymbol{k}$. Autrement dit, aucune valeur de $\omega_n$ ne satisfait l'équation de dispersion (4.16). Dans ces intervalles, appelés "bandes interdites", aucune onde ne se propage.

Pour valider la méthode EPWE, on s'est référé aux travaux de Junyi [209] sur la mesure des courbes de dispersion de poutres périodiques en utilisant la méthode de superposition d'ondes ("wave superposition method").
La poutre choisie pour l'application de la méthode EPWE possède les caractéristiques




(a) (b)

FIGURE 4.7 – Courbes de dispersion d'une poutre périodique, calculées en utilisant la méthode PWE/$\omega(\boldsymbol{k})$ : (a) poutre uniforme et (b) poutre non-uniforme (*d'après* [208]).

géométriques suivantes (voir Fig 4.6) : $L = 80$ mm, $l_1 = 17$ mm, $l_2 = 63$ mm, $h_i = 3$ mm et $d_i = 20$ mm. Les caractéristiques des deux matériaux constituant la cellule unitaire sont listées dans le tableau 4.2.

| $\rho_1$ (kg/m$^3$) | $\rho_2$ (kg/m$^3$) | $E_{0,1}$ (GPa) | $E_{0,2}$ (GPa) | $\eta_1$ (%) | $\eta_2$ (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2710 | 2700 | 2.38 | 70 | 1.68 | 0.105 |

Tableau 4.2 – Paramètres physiques utilisés pour la poutre étudiée : masses volumiques $\rho_i$, modules d'Young élastiques $E_{0,i}$ et coefficients de pertes $\eta_i$.

A partir du problème aux valeurs propres polynomial formulé dans l'Eq. (4.20), les nombres d'onde propres $\boldsymbol{k}_n$ sont calculés pour des valeurs données de la pulsation $\omega$, et leurs parties réelles et parties imaginaires adimensionnelles ($\Re[kL]$ et $\Im[kL]$) sont tracées sur la figure 4.8 en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec ceux obtenus par Junyi [209] pour cette poutre. La représentation de $kL$ en parties réelles et imaginaires permet d'analyser les modes propagatifs et les modes évanescents séparément : la Fig 4.8(a) montre qu'il existe une bande interdite entre 300 Hz et 900 Hz, dans laquelle n'existe aucun mode propagatif. Cette bande interdite se manifeste sur la Fig 4.8(b) par des parties imaginaires de $kL$ non nulles, traduisant l'atténuation. On note qu'à l'intérieur de la bande interdite, les parties imaginaires de $kL$ s'organisent sous forme d'un ovale, correspondant à des modes purement évanescents.
Les modes propagatifs sont calculés en utilisant la méthode PWE et les résultats obtenus sont comparés à ceux trouvés avec la méthodes EPWE. La Fig 4.8(a) montre, encore une fois, un bon accord entre les deux méthodes.

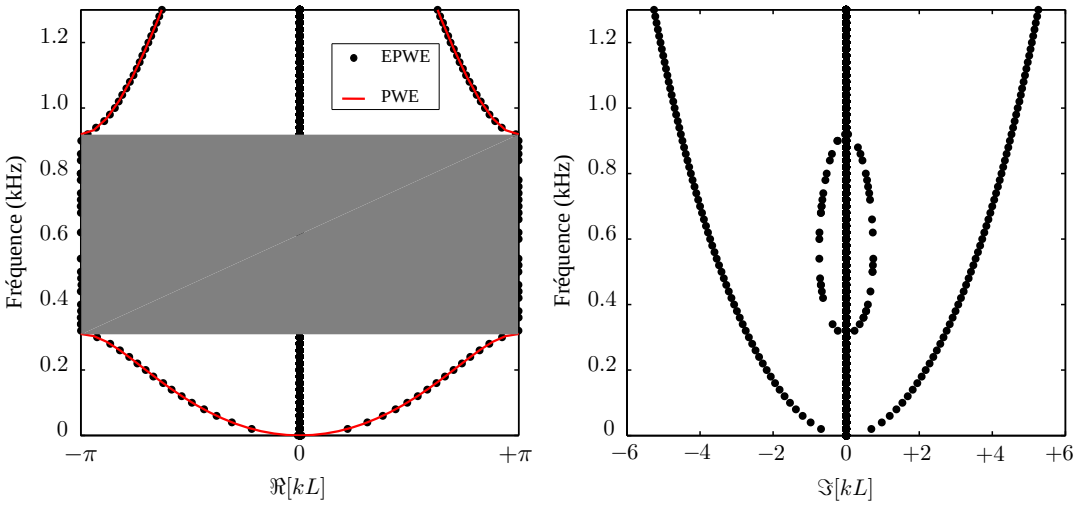


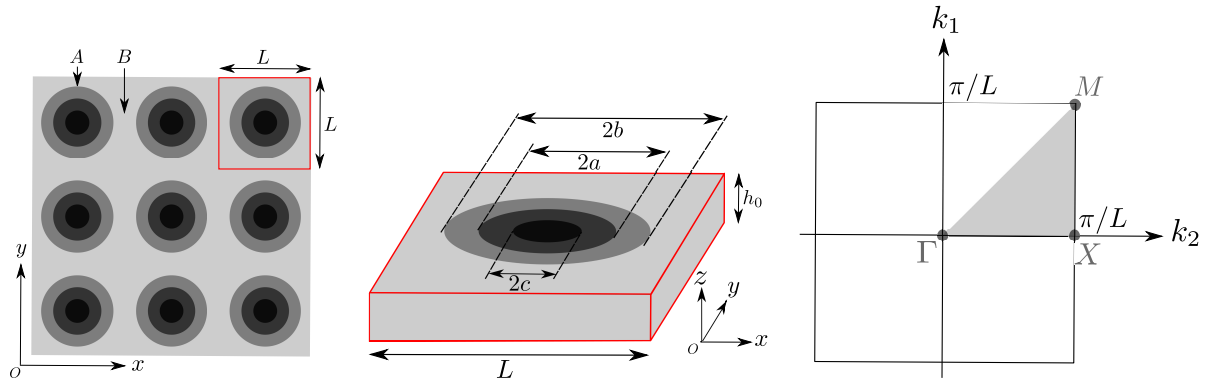

FIGURE 4.8 – Courbes de dispersion d'une poutre périodique, calculées par les méthodes EPWE et PWE : (a) parties réelles et (b) parties imaginaires de $kL$ (*d'après* [209]).

## 4.2.2 PWE pour une méta-plaque

Dans cette section, le modèle développé pour le cas d'une poutre périodique est étendu à deux dimensions pour l'étude de plaques. L'objectif est l'analyse de la propagation dans une plaque munie d'un réseau périodique à symétrie carrée de trous noirs acoustiques. L'association de la plaque et du réseau de trous noirs constitue alors ce qui est appelé dans ce manuscrit une "méta-plaque".

### 4.2.2.1 Position et formulation du problème

La méta-plaque à étudier est montrée sur la figure 4.9-(a). Elle est composée d'une infinité de cellules élémentaires carrées de coté $L$ et de surface $\Omega = L^2$, disposées de façon périodique. Un trou noir acoustique est placé au centre de chacune de ces cellules (voir Fig 4.9-(b)). Les trous noirs (zone A) apparaissent alors comme des diffuseurs pénétrables et résonants, placés dans une plaque mince d'épaisseur uniforme $h_0$ (zone B), jouant le rôle de structure porteuse. Tous les trous noirs sont de même taille et chacun est composé de trois zones : une zone centrale $A_1$ d'épaisseur uniforme $h_2$ et de rayon $c$, une zone intermédiaire $A_2$ également d'épaisseur uniforme $h_1$ et de rayon $a$ et une zone non uniforme $A_3$ de rayon $b$ et d'épaisseur $h_3$, dont le profil est donné dans le chapitre 3 par l'Eq. (3.20) pour $a < r < b$.




(a) (b) (c)

FIGURE 4.9 – (a) : Schéma illustrant la vue de dessus de la méta-plaque étudiée. (b) : Cellule unitaire carrée. (c) : Première zone de Brillouin de la cellule unitaire, où le triangle grisé, délimité par $\Gamma XM$, représente la zone de Brillouin irréductible.

L'équation gouvernant le mouvement harmonique ($\propto e^{-i\omega t}$) de flexion de la plaque est donnée en coordonnées cartésiennes ($x$,$y$,$z$) par [202, 203] comme :

$$\begin{aligned}\omega^2\alpha(\boldsymbol{r})W(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}+\beta(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}\right)\\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(D(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{r})}{\partial y^2}+\beta(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{r})}{\partial x^2}\right),\\ &+ 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\gamma(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{r})}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned} \tag{4.26}$$

avec

$$\begin{cases}\alpha(\boldsymbol{r}) = \rho h\\ \beta(\boldsymbol{r}) = D\nu \qquad , \quad \text{et} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\\ \gamma(\boldsymbol{r}) = D(1-\nu)\end{cases} \tag{4.27}$$

où $W$ est le déplacement transversal de la plaque, $D$ est la rigidité de flexion, $\rho$ la masse volumique, $h$ l'épaisseur, $E$ est le module de Young élastique et $\nu$ le coefficient de Poisson. Les fonctions $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions périodiques du vecteur position $\boldsymbol{r} = (x, y)$, et représentent la masse surfacique et la rigidité de flexion de la plaque.

Comme dans tout milieu périodique, le théorème de Floquet-Bloch [197, 201–203] impose que le champ du déplacement transversal de la méta-plaque soit exprimé comme

$$W(\boldsymbol{r}) = e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})}W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}), \tag{4.28}$$

où $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ est le vecteur nombre d'onde de Bloch et $\omega$ représente la pulsation. Le champ périodique $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ présente la même périodicité spatiale que la structure, et peut se développer en série de Fourier :

$$W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G_1}} W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) e^{i\boldsymbol{G_1}.\boldsymbol{r}}, \tag{4.29}$$

avec $\boldsymbol{G_1} = 2\pi\left(\frac{n_1}{L}, \frac{n_2}{L}\right)$ est un vecteur bidimensionnel du réseau réciproque. Les nombres $n_1$, et $n_2$ sont des entiers relatifs et $W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1})$ représente les coefficients de Fourier correspondant au vecteur d'ondes $\boldsymbol{G_1}$. En substituant l'expression Eq. (4.29) dans la relation Eq. (4.28), la solution de l'équation différentielle (4.26) prend la forme suivante :

$$W(\boldsymbol{r}) = e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})} \sum_{\boldsymbol{G_1}} W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) e^{i\boldsymbol{G_1}.\boldsymbol{r}}. \tag{4.30}$$

Les fonctions périodiques $D(\boldsymbol{r})$, $\alpha(\boldsymbol{r})$, $\beta(\boldsymbol{r})$ et $\gamma(\boldsymbol{r})$ intervenant dans l'équation de mouvement (4.26) peuvent être développées en séries de Fourier. Si $H(\boldsymbol{r})$ désigne l'une d'entre elles, le développement s'écrit :

$$H(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G_2}} H(\boldsymbol{G_2}) e^{i\boldsymbol{G_2}.\boldsymbol{r}}, \tag{4.31}$$

où $H(\boldsymbol{G_2})$ représente le coefficient de Fourier associé au vecteur d'ondes $\boldsymbol{G_2}$. Le coefficient $H(\boldsymbol{G_2})$ est obtenu en utilisant la transformée de Fourier spatiale suivante :

$$H(\boldsymbol{G_2}) = \frac{1}{L^2} \int_{[0,L]^2} H(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{G_2}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}. \tag{4.32}$$

Les variations de $H(\boldsymbol{r})$ étant connues, l'équation (4.32) fournit $H_{(\boldsymbol{G_2})}$ de façon explicite.

#### 4.2.2.2 Résolution du problème

En considérant les équations (4.30) et (4.31), l'équation du mouvement (4.26) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
&\omega^2 \sum_{\boldsymbol{G_1}} \alpha(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}) W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) = \\
&\sum_{\boldsymbol{G_1}} D(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}) \left[(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_x^2 (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_x^2 + (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_y^2 (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_y^2\right] W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) \\
&+ \sum_{\boldsymbol{G_1}} \beta(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}) \left[(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_y^2 (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_x^2 + (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_x^2 (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_y^2\right] W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1}) \\
&+2 \sum_{\boldsymbol{G_1}} \gamma(\boldsymbol{G_3} - \boldsymbol{G_1}) \left[(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_x (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_y (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_x (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_3})_y\right] W_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{G_1})
\end{aligned}, \tag{4.33}$$

où $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_x$ et $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{G_1})_y$ représentent respectivement la somme des composantes $x$ et $y$ des vecteurs nombres d'onde $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{G_1}$. Le vecteur d'onde $\boldsymbol{G_3}$ vaut la somme des deux vecteurs $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ et s'écrit :

$$\boldsymbol{G_3} = \boldsymbol{G_1} + \boldsymbol{G_2}. \tag{4.34}$$

Dans l'équation (4.33), les vecteurs $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ peuvent prendre une infinité de valeurs dans le réseau réciproque, ce qui conduit à un système infini d'équations linéaires. En

pratique, la troncature des équations (4.30) et (4.31) à $N$ vecteurs réciproques, c'est-à-dire $(2N+1)^2$ valeurs de $\boldsymbol{G_1}$ dans l'Eq. (4.30), ramène le système infini à un système de $(2N+1)^2 \times (2N+1)^2$ équations. Ce dernier peut alors se mettre sous la forme de l'Eq. (4.16), avec cette fois

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \alpha(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j), \tag{4.35}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{ij} = & - D(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j)\left[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_x^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_x^2 + (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_y^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_y^2\right] \\ & - \beta(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j)\left[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_y^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_x^2 + (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_x^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_y^2\right], \\ & - 2\gamma(\boldsymbol{G_{3}}_i - \boldsymbol{G_{1}}_j)\left[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_x(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{1}}_j)_y(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_x(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G_{3}}_i)_y\right] \end{aligned} \tag{4.36}$$

où $i$ et $j$ sont des indices variant de $-N$ à $+N$, ce qui fait de $\boldsymbol{P}_{ij}$ et $\mathbf{Q}_{ij}$ des matrices de dimension $(2N+1)^2 \times (2N+1)^2$.

Pour une valeur réelle du vecteur nombre d'onde de Bloch $\boldsymbol{k}$ appartenant à la zone de Brillouin irréductible (voir Fig 4.9(c)), l'équation (4.33) admet des solutions pour certaines valeurs propres $\omega_n$, où $n$ désigne la $n^{\text{ème}}$ branche de dispersion. La relation entre $\omega_n$ et $\boldsymbol{k}$ est obtenue usuellement en limitant la variation de $\boldsymbol{k}$ uniquement aux directions $\Gamma X$, $XM$ et $M\Gamma$, dites de "haute symétrie" de la zone de Brillouin irréductible, c'est-à-dire, sur la périphérie du triangle grisé, délimité par les points $\Gamma XM$ (voir Fig 4.9(c)).

#### 4.2.2.3 Validation de la méthode

Les diagrammes de dispersion calculés en utilisant la méthode PWE, sont présentés dans cette section à la fois pour la validation de la méthode et son application au cas d'une méta-plaque munie d'un réseau périodique à symétrie carré de trous noirs acoustiques.

- *Plaque uniforme*

La méthode est appliquée dans un premier temps pour calculer les courbes de dispersion d'ondes de flexion dans une plaque uniforme infinie. Cette dernière est considérée comme étant un milieu périodique, de période spatiale $L = 20$ cm et d'épaisseur $h_0 = L/10$. Le matériau de la plaque est homogène et possède les caractéristiques suivantes : la masse volumique $\rho = 1142$ kg/m$^3$, le module d'Young élastique $E_0 = 4.35$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.378$. Dix branches de dispersions sont calculées en considérant 1681 ondes planes, correspondant à une troncature $N = 20$. Les solutions $(\omega_n)$ obtenues sont normalisées par le facteur $L/C_t$ ($C_t = 1160$ m/s est la vitesse transversale de propagation dans le matériau), et tracées sur la figure 4.10 en fonction du nombre d'onde de Bloch $\boldsymbol{k}$, variant sur le périmètre de la zone de Brillouin irréductible ($\Gamma XM$) montrée sur la Fig. 4.9-(c). La relation de dispersion naturelle $\omega = (k_x^2 + k_y^2)\sqrt{\dfrac{D}{\rho h_0}}$ des ondes de flexion dans une plaque uniforme, où $k_x$ et $k_y$ représentent les composantes $x$ et $y$ du nombre d'onde de flexion, est calculée et superposée (courbe rouge continue) sur la première branche de dispersion dans la Fig. (4.10). Le résultat ne montre bien sûr aucune bande interdite dans le milieu de propagation.

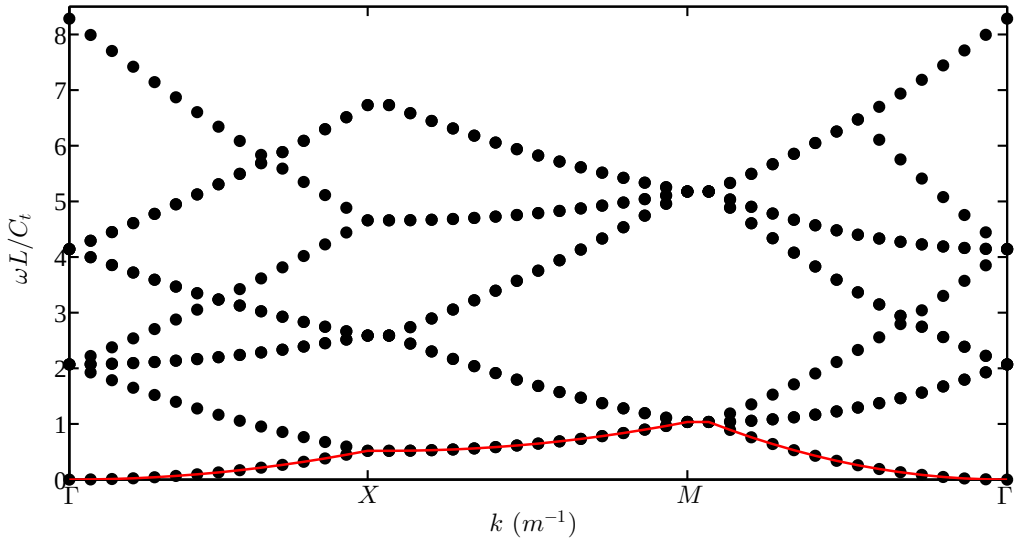



FIGURE 4.10 – Courbes de dispersion d'ondes de flexion dans une plaque périodique uniforme. Calcule sur le pourtour de la zone de Brillouin définie sur la figure 4.9(c).

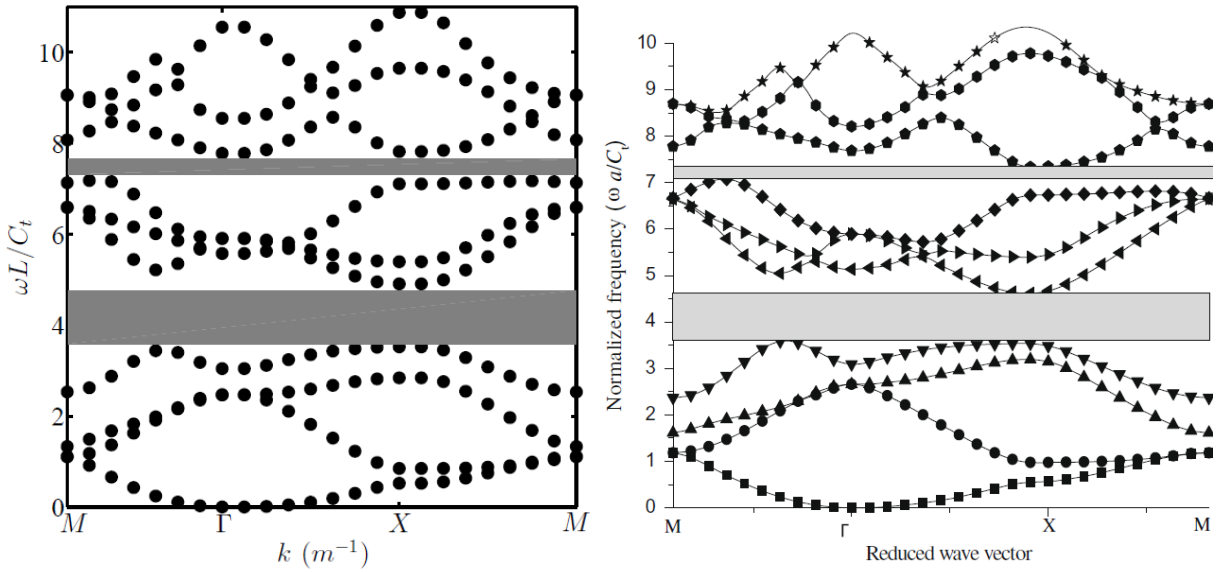
- *Plaque munie d'un réseau périodique carré d'inclusions cylindriques*

Un deuxième cas de validation, issu de la littérature [202], est proposé. Il s'agit de la même plaque uniforme simulée, dans laquelle est inséré un réseau périodique carré d'inclusions cylindriques avec un facteur de remplissage $F_r = 0.283$, définissant le rapport entre l'aire de l'inclusion et l'aire de la cellule unitaire. Les inclusions ont la même épaisseur que la plaque uniforme ($h_0$) et sont faites d'un matériau avec les caractéristiques suivantes : $\rho = 3970$ kg/m$^3$, $E_0 = 402.7$ GPa et $\nu = 0.23$. Le diagramme de dispersion calculé par notre méthode est donné sur la figure 4.11(a). Le même graphe issu de la publication est donné sur la Fig 4.11(b). La troncature n'étant pas précisée dans cette publication, une troncature à $N = 20$ est choisie pour notre calcul, ce qui donne lieu à des matrices $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ de taille $(1681 \times 1681)$. L'accord entre les deux résultats est satisfaisant pour les six premières branches de dispersion. De légères différences sont constatées pour les branches d'ordre élevé, qui sont probablement dues à la troncature choisie ($N = 20$) qui est différente de celle fixée (mais non précisée) dans la publication. Néanmoins, les deux bandes interdites sont retrouvées approximativement aux mêmes intervalles fréquentiels et avec les mêmes largeurs, ce qui valide le calcul effectué.

#### 4.2.2.4 Application à la méta-plaque de trous noirs

Considérons une méta-plaque de trous noirs acoustiques non-débouchants, dont le profil d'épaisseur de la cellule unitaire du réseau est représentée sur la figure 4.12. Les paramètres géométriques de cette dernière sont les suivantes : $L = 350$ mm, $a = 15$ mm, $b = 87.5$ mm, $h_0 = 5$ mm, $h_1 = 0.2$ mm et $h_{TN}$ est donnée dans le chapitre 3 par l'Eq. (3.20) pour $a < r < b$. Le matériau de la plaque est l'aluminium avec les caractéristiques suivantes : $\rho = 2700$ kg/m$^3$, $E_0 = 70$ GPa et $\nu = 0.33$.

Un calcul des courbes de dispersion d'ondes de flexion dans cette méta-plaque est réalisé en utilisant la méthode PWE en considérant 961 ondes planes ($N = 15$), et le résultat est présenté sur la Fig 4.13. Le même calcul est réalisé avec le logiciel d'éléments finis




(a) (b)

FIGURE 4.11 – Courbes de dispersion d'ondes de flexion dans une plaque munie d'un réseau périodique carré d'inclusions cylindriques : (a) notre résultat et (b) résultat issu de la littérature (*d'après* [202]).

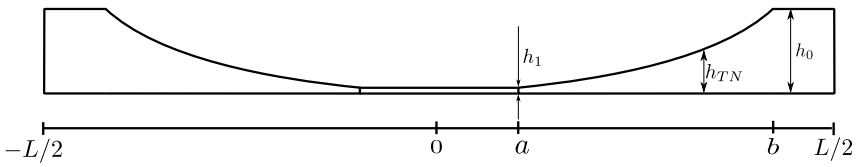



FIGURE 4.12 – Profil d'épaisseur de la cellule unitaire de la méta-plaque étudiée.

"Comsol Muliphysics" et est montré sur cette même figure. Ce dernier calcul, réalisé avec un maillage adaptatif suffisamment fin, est considéré comme référence. La comparaison des deux calculs permet de constater que les courbes obtenues ont les mêmes allures, ce qui valide l'implémentation de la méthode PWE. Un léger décalage pour les branches d'ordre élevé est observé. Ce constat permet d'en déduire que le calcul par la PWE n'a pas suffisamment convergé pour les branches hautes fréquences, et qu'il faudrait augmenter la troncature $N$. Il apparait cependant clairement que la méta-plaque simulée ne présente pas de bandes interdites dans la plage des basses fréquences. Plusieurs explorations paramétriques, portant sur la géométrie du trou noir, non présentées dans le manuscrit montrent de même une absence de bandes interdites dans cette plage de fréquences.

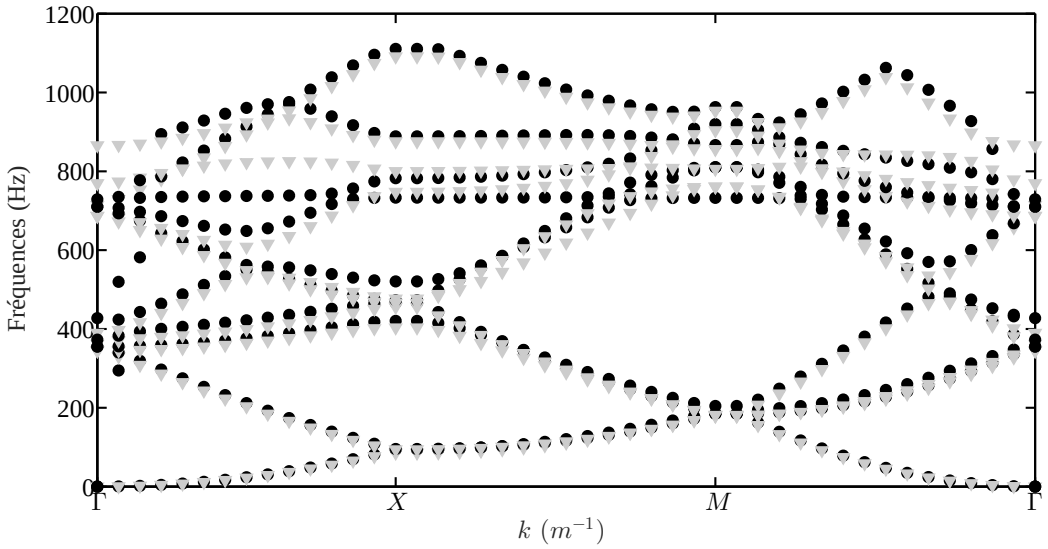
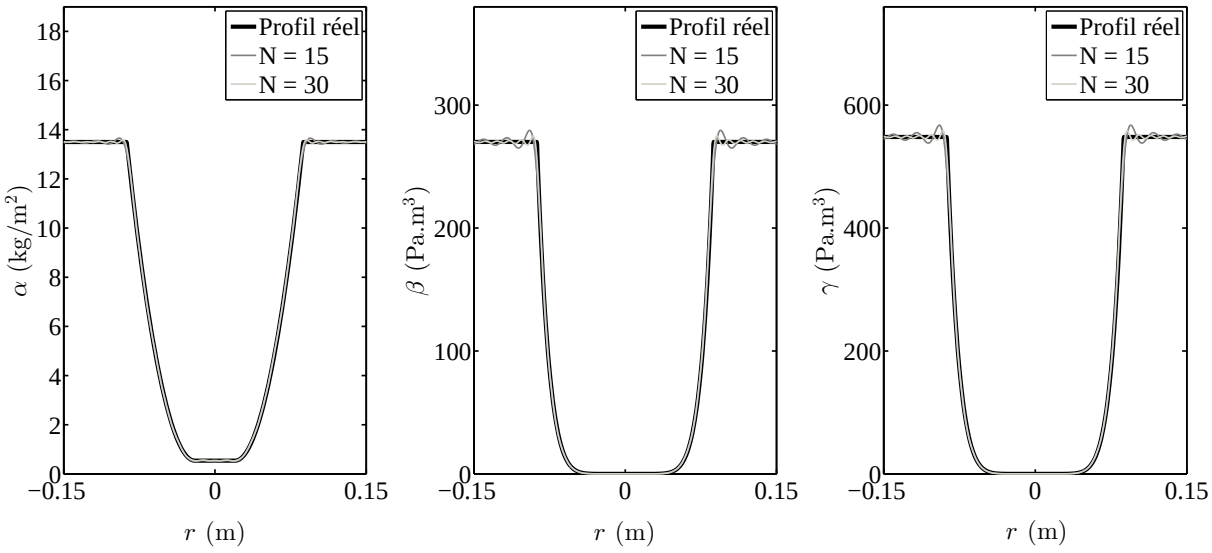



FIGURE 4.13 – Courbes de dispersion de la méta-plaque avec réseau carré de trous noirs, calculée en utilisant la méthode PWE (triangles gris) et Comsol (ronds noirs).

La difficulté de convergence de la méthode pour les branches d'ordre élevé provient du nombre insuffisant de composantes de Fourier utilisées dans le calcul. En effet, le manques de composantes de Fourier induit des erreurs dans la synthèse des profils d'épaisseur et de la rigidité. La Fig 4.14 montre la variation des fonctions périodiques $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ de l'équation de mouvement en fonction du nombre de composantes de Fourier. Le résultat montre que l'erreur est minimisée avec l'augmentation de $N$ (voir $N = 30$).

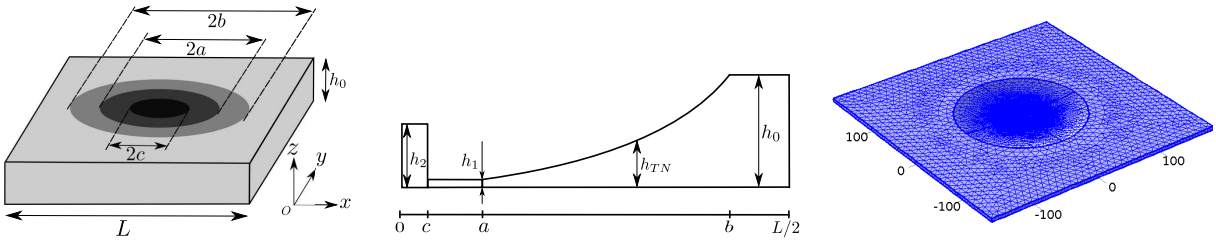



(a) (b) (c)

FIGURE 4.14 – Profils réels et synthétisés des fonctions périodiques (a) $\alpha$, (b) $\beta$ et (c) $\gamma$.

#### 4.2.2.5 Cas de la méta-plaque accordée

L'absence de bandes interdites nous conduit à modifier la structure du diffuseur : une masse centrale est ajoutée au trou noir non-débouchant avec l'idée de créer une résonance locale permettant l'ouverture de ce qu'on appelle une bande interdite de résonance.

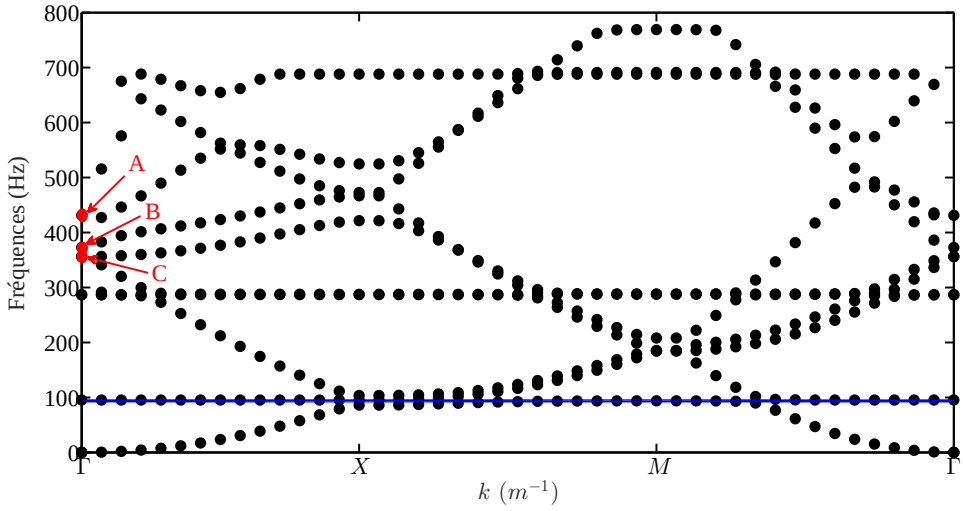



(a) (b) (c)

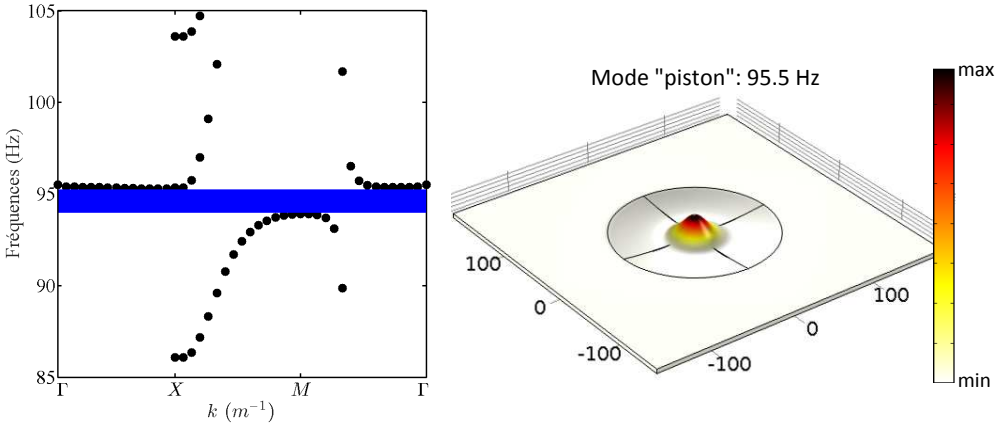
FIGURE 4.15 – (a) Cellule unitaire de la méta-plaque avec réseau de trous noirs avec masse centrale. (b) vue de profil de la demi-cellule unitaire. (c) Maillage utilisé pour la méta-plaque simulée.

Le calcul des branches de dispersion dans la méta-plaque de trous noirs avec masse centrale, dont la cellule unitaire est donnée par la figure 4.15(a), est effectué par éléments finis au moyen du logiciel Comsol et en considérant la géométrie présentée sur la Fig 4.15(b), avec les paramètres suivants : $L = 350$ mm, $a = 20$ mm, $b = 87.5$ mm, $c = 10$ mm, $h_0 = 5$ mm, $h_1 = 0.26$ mm, $h_2 = 0.26$ mm et $h_{TN}$ est donnée par l'Eq. (3.20). La zone centrale, définie par un diamètre qui vaut $2c$ (voir Fig 4.15(a)), joue alors le rôle d'une masse. Elle est modélisée en augmentant localement la masse volumique de sorte que l'ajout de masse soit de 25 grammes dans cette zone, dans l'idée d'accorder la fréquence de résonance de chaque trou noir à la fréquence de Bragg qui, elle, est fixée par la périodicité du milieu. Le maillage utilisé pour le calcul Comsol (voir Fig 4.15(c)) est adaptatif, et est composé de 28161 éléments tétraédriques permettant de prendre en compte exactement 169611 degrés de liberté dans la cellule simulée. La figure 4.16(a) montre l'existence d'une bande interdite de résonance, malheureusement faible (voir le zoom sur la Fig 4.16(b)). De ce fait, elle est peu visible et présente donc un intérêt applicatif limité. Cependant, cette bande d'arrêt existe et sous réserve d'un accord précis, il est possible d'en tirer profit. Deux types de modes peuvent exister dans la méta-plaque étudiée : les modes liés aux résonances de la zone centrale, qui sont très localisés au centre de cette zone (voir le mode piston sur la Fig 4.16(b)), et les modes globaux, liés aux résonances de toute la cellule unitaire comme dans le cas des modes désignés par A, B et C dans la Fig 4.16(a), dont les allures sont montrées sur la Fig 4.17.

Indépendamment des effets hautes fréquences liés à la structure trou noir de la cellule unitaire, la méta-plaque étudiée présente donc une bande interdite complète en basses fréquences, malheureusement de très faible largeur.

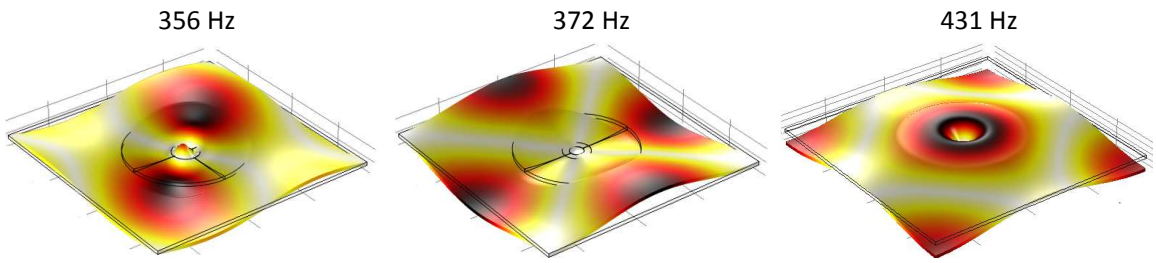



(a)




(b)

FIGURE 4.16 – (a) Courbes de dispersion de la méta-plaque accordée. (b) zoom sur la bande interdite de résonance (à gauche) et allures du mode de résonance piston (à droite).




(a) (b) (c)

FIGURE 4.17 – Allure des modes de la cellule unitaire indiqués par A, B er C dans la figure 4.16 : (a) mode A, (b) mode B et (c) mode C.

## 4.3 Test expérimental d'une méta-plaque de trous noirs avec masse centrale

L'effet hautes fréquences du réseau de trous noirs est établi expérimentalement dans l'introduction générale sur la configuration des trous noirs débouchants. L'objectif de cette section est l'analyse d'une méta-plaque, consistant en un réseau périodique carré de trous noirs acoustiques non-débouchants avec masse centrale. Nous proposons ici une étude expérimentale de cette méta-plaque, centrée sur l'analyse des champs et mobilités vibratoires mesurés. Outre l'effet d'amortissement à hautes fréquences, nous cherchons ici à mettre en évidence un effet basses fréquences lié aux résonances locales (de type piston) des trous noirs comme décrit sur la figure 4.16.

### 4.3.1 Description du montage expérimental

La géométrie de la cellule unitaire de la méta-plaque testée est décrite par la figure 4.15(b), dont les paramètres sont inscrits dans le tableau 4.3 telle que la plaque est usinée avec $h_1 = h_2$. Une masselotte réalisée au moyen de rondelles est collée sur la surface de la région centrale de rayon $c$ de chaque trou noir.

| $L$ | $h_0$ | $h_1$ | $h_2$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 350 mm | 5 mm | 0.2 mm | 0.2 mm | 20 mm | 87.5 mm | 10 mm |

Tableau 4.3 – Paramètres géométriques de la méta-plaque de trous noirs avec masse.

Le montage expérimental est montré sur la figure 4.18 : un panneau de 15 trous noirs est excité par un pot vibrant raccordé à la structure par une courte tige métallique et un capteur d'effort. Un vibromètre laser à balayage permet la mesure de la vitesse en un grand nombre de points.

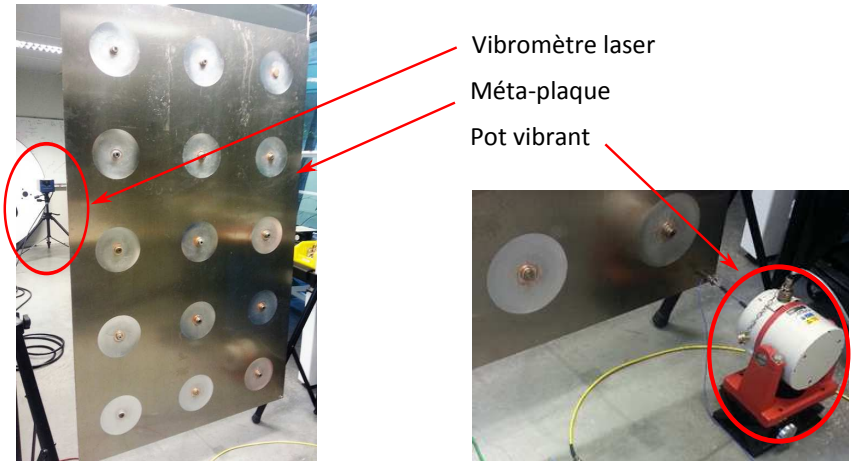
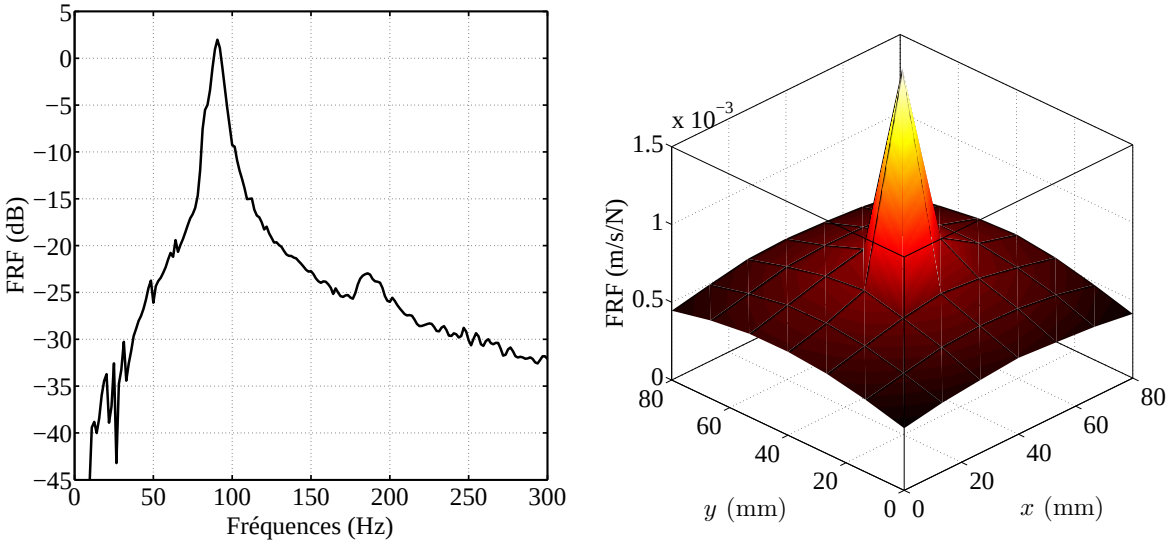



FIGURE 4.18 – Description du montage expérimental.

### 4.3.2 Accord de la résonance du trou noir à la fréquence de Bragg

Dans une phase préliminaire, on réalise un impact au centre du trou noir. La mobilité en ce point est donnée sur la figure 4.19(a). Elle montre une résonance isolée très marquée, associée à un mode local que nous appellerons mode "piston". La déformée opérationnelle à la fréquence de résonance est donnée sur la figure 4.19(b) : elle montre clairement un lobe vibratoire prononcé localisé dans la région faible du trou noir. La fréquence de résonance de ce mode piston est ajustable aisément en modifiant la masse centrale utilisée et la surface de collage de cette masse sur la plaque. Cette surface de collage contrôle directement la raideur locale présentée par cette masse pour la méta-plaque réalisée. Dans une phase d'accord, on vient ajuster chaque masse de façon à positionner la valeur du mode piston autour de 100 Hz, qui représente la première fréquence de Bragg du réseau.




(a) (b)

FIGURE 4.19 – (a) Mobilité vibratoire et (b) déformée opérationnelle du trou noir avec masse à sa fréquence de résonance, mesurées au vibromètre à balayage.

### 4.3.3 Résultats de mesures

Les résultats finaux sont donnés sur la figure 4.20. La mobilité quadratique moyenne sur l'ensemble du panneau est présentée sur une large plage de fréquences. Le nombre de modes impliqués est très important et donne lieu à de multiples résonances bien résolues en basses fréquences. L'effet des trous noirs lisse les mobilités dans la plage hautes fréquences, au-delà de la fréquence de coupure qui est ici au alentours de 1200 Hz.

Un zoom sur la plage basses fréquences révèle les résonances du système. A 100 Hz environ, un minimum est obtenu, que l'on peut attribuer, sans que cela soit certain à cause de sa faible largeur fréquentielle, à la bande interdite de résonance obtenue avec le réseau de résonateurs.

Plusieurs cartes de déformées montrant le comportement vibratoire du panneau avant, dans et au-delà de cette bande interdite sont données (voir Fig 4.21). En particulier au centre de cette possible bande interdite (93 Hz), le champ vibratoire est d'amplitude particulièrement faible. La possible présence d'une bande d'arrêt en basses fréquences, associée à l'effet du trou noir en hautes fréquences est donc observé expérimentalement.

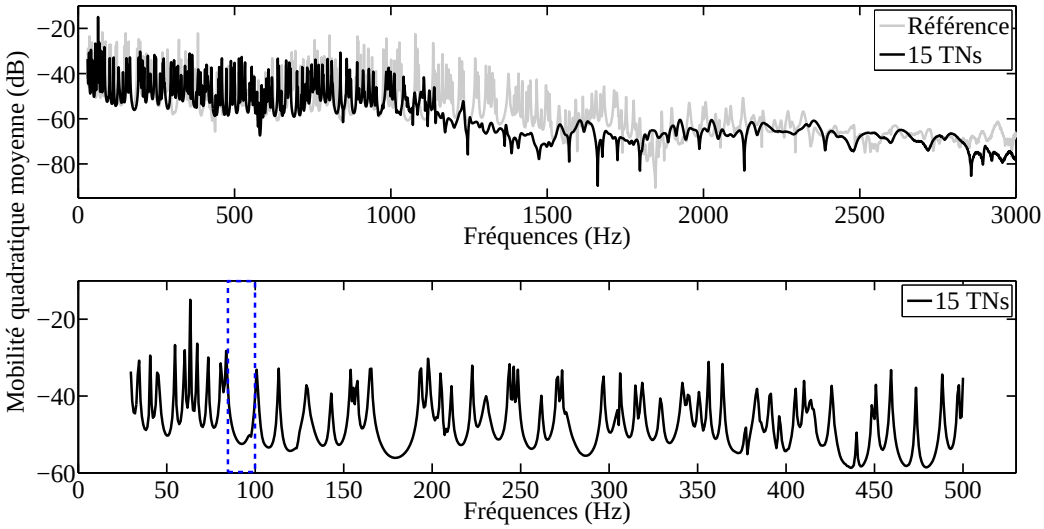



FIGURE 4.20 – Mobilité quadratique moyenne d'une méta-plaque munie d'un réseau carré de trous noirs acoustiques avec masse centrale (0 dB = 1 m/(s.N)).

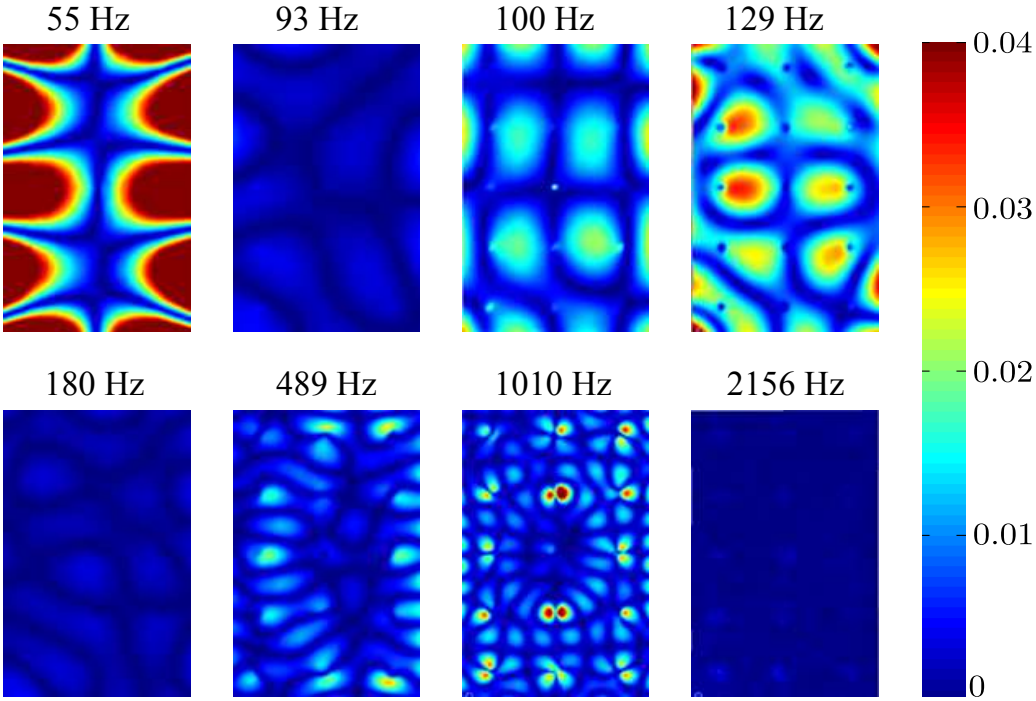



FIGURE 4.21 – Déformées de la méta-plaque de trous noirs avec masse centrale.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un panneau muni d'un réseau périodique carré de trous noirs acoustiques est caractérisé numériquement et expérimentalement. Un modèle basé sur la méthode PWE est développé pour un panneau infini, et est validé sur poutres et plaques munies d'inclusions cylindriques. L'application de la méthode PWE au cas de la méta-plaque de trous noirs non-débouchants a révélé des difficultés de convergence à cause de la complexité de la géométrie, impliquant une troncature élevée du calcul. Un modèle basé sur les éléments finis, réalisé avec le logiciel "Comsol Multiphysics" a permis de valider le cas de la méta-plaque. Il est montré, à travers le calcul des courbes de dispersion, que la plaque étudiée ne présente pas de bandes interdites basses fréquences. Un cas particulier de réseau de trous noirs avec masse centrale a montré la possibilité de créer une bande interdite basses fréquences par effet de résonance. En effet, l'accord des fréquences des modes pistons des trous noirs à la fréquence de Bragg, liée à la périodicité du milieu, permet l'ouverture d'une étroite bande interdite complète de résonance en basses fréquences, dont il est possible de tirer profit sous réserve d'un accord précis.

L'intérêt d'utiliser les réseaux de trous noirs acoustiques pour amortir les panneaux est montré expérimentalement. Les résultats du test expérimental réalisé dans l'introduction générale sur la méta-plaque de trous noirs débouchants, sont à nouveau confirmées dans ce chapitre pour la méta-plaque de trous noirs non-débouchants : le traitement n'est efficace qu'à partir de la fréquence de coupure des diffuseurs, ce qui se traduit par une diminution importante de la mobilité de la plaque au-delà de la fréquence de coupure.

Les effets basses fréquences liés au résonances des trous noirs sont également explorés. Le test expérimental de la méta-plaque de trous noirs dont la fréquence du mode piston est accordée à la fréquence de Bragg a mis en évidence une bande fréquentielle étroite de faible mobilité, interprétée comme une possible bande interdite de résonance. Ce résultat expérimental corrobore les prédictions numériques, et permet d'observer à la fois les effets de la bande interdite en basses fréquences et du trou noir en hautes fréquences.

Dans le chapitre suivant, une solution technique permettant de résoudre les problèmes de convergence de la méthode PWE est apportée. Une autre architecture de réseau, permettant de montrer clairement la présence d'une bande interdite basses fréquences assez large est également proposée en étudiant numériquement et expérimentalement de nouveaux types de profils de trous noirs.

# Chapitre 5

# Méta-plaque à réseau périodique : nouvelle géométrie combinant bande interdite et effet trou noir

## Résumé

Les travaux menés dans le chapitre 4 ont permis de conclure sur les difficultés d'obtention de bandes interdites basses fréquences avec une géométrie de trou noir circulaire. Par ailleurs, le temps de calcul important et la faible convergence de la méthode PWE sont des difficultés. Il est établi que ces problèmes sont liés à la complexité du profil géométrique du trou noir choisi, qui demande un nombre élevé de composantes de Fourier pour avoir des résultats assez précis. Il est pointé également qu'une bande interdite de résonance étroite basse fréquence peut être obtenue sous réserve d'un accord bien précis des fréquences de résonance des trous noirs à la fréquence de Bragg.

Dans ce cinquième et dernier chapitre [1], une solution technique basée sur le choix d'un nouveau profil du trou noir, est proposée. Sa structure permet une mise en œuvre de la méthode PWE avec peu de termes et assure une bonne convergence à moindre coût de calcul. Dans l'idée d'obtenir une bande interdite basse fréquence large, deux réseaux périodiques carré et triangulaire sont considérés avec le nouveau profil. La méta-plaque à réseau triangulaire est à nouveau étudiée numériquement par la méthode PWE et expérimentalement par mesures vibrométriques de mobilités vibratoires. La confrontation des deux résultats permet alors d'atteindre l'objectif visé, qui est le dimensionnement d'une méta-plaque produisant une bande interdite basse fréquence assez large.

Un exemple concret s'agissant d'une structure industrielle [2] présentant des similitudes géométriques avec la méta-plaque étudiée, est présenté dans ce chapitre. Cette structure est étudiée expérimentalement à travers la mesure et l'analyse des mobilités vibratoires, et a montré un potentiel applicatif élevé dont il est particulièrement intéressant d'approfondir l'étude.

1. Les travaux de ce chapitre sont réalisés en collaboration avec Ao Wang dans le cadre de son stage de Master 2 (mars-juillet 2017), intitulé "Conception de structures non résonantes utilisant un réseau périodique de trous noirs acoustiques", effectué au LAUM et supervisé par A. PELAT et F. GAUTIER.
2. Partie confidentielle, masquée dans ce document.

## 5.1 Remise en question du profil quadratique

Comme indiqué et discuté dans le chapitre 4, la convergence de la méthode PWE dépend fortement du type de profil du trou noir : moins il y a de discontinuités dans le profil, et plus la convergence de cette méthode est rapide. Il est donc important d'avoir un profil qui minimise le nombre de composantes de Fourier utilisées, minimisant donc le temps de calcul. Un nouveau profil de trou noir, permettant de résoudre les problèmes de convergence de la méthode PWE et qui permet l'ouverture de bandes interdites, est défini dans cette section.

### 5.1.1 Définition du nouveau profil d'épaisseur

L'idée de base pour définir ce nouveau profil d'épaisseur consiste à travailler dans le domaine des nombres d'onde. En fixant le nombre de composantes de Fourier intervenant dans le calcul (nombre de $\boldsymbol{G_2}$ dans l'Eq. (4.32)), il est possible de synthétiser une géométrie de la cellule unitaire du réseau.
En se basant sur cette idée, un profil de la cellule élémentaire décrit par une somme de cosinus est proposé sous la forme suivante :

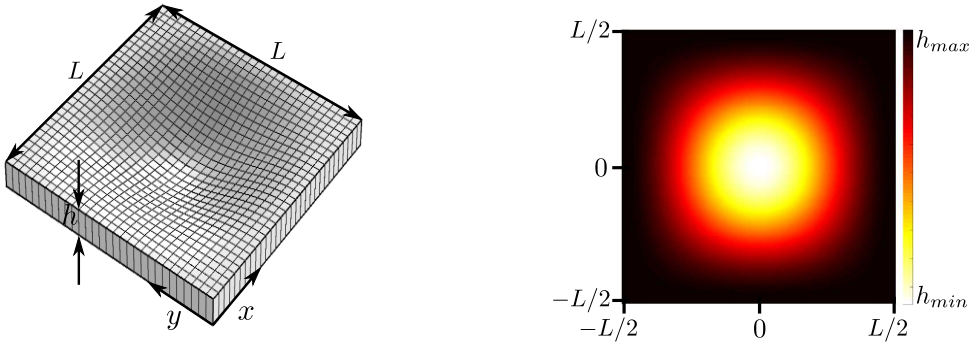
$$h(x,y) = \alpha + \beta \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}y\right) + \gamma \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}y\right) \right], \tag{5.1}$$

où $h(x,y)$ représente l'épaisseur dépendant des variables cartésiennes $x$ et $y$, et $L$ désigne la période spatiale du réseau (voir Fig 5.1(a)). Les paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes contrôlées par le paramètre $\gamma$ et les épaisseurs minimale $h_{min}$ et maximale $h_{max}$ (voir Fig 5.1(b)). En recherchant les minimas et les maximas de $h(x,y)$ et en les fixant aux valeurs imposées $h_{min}$ et $h_{max}$, on peut écrire :

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{\gamma h_{max} + (\gamma - 2)h_{min}}{2\gamma - 2}, & \text{si } \gamma < -1 \\ \dfrac{(2+\gamma)h_{max} + (2-\gamma)h_{min}}{4}, & \text{si } \gamma \in [-1;1] \\ \dfrac{(2+\gamma)h_{max} + \gamma h_{min}}{2\gamma + 2}, & \text{si } \gamma > 1 \end{cases}, \tag{5.2}$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{h_{max} - h_{min}}{2\gamma - 2}, & \text{si } \gamma < -1 \\ \dfrac{h_{min} - h_{max}}{4}, & \text{si } \gamma \in [-1;1] \\ \dfrac{h_{min} - h_{max}}{2\gamma + 2}, & \text{si } \gamma > 1 \end{cases}. \tag{5.3}$$

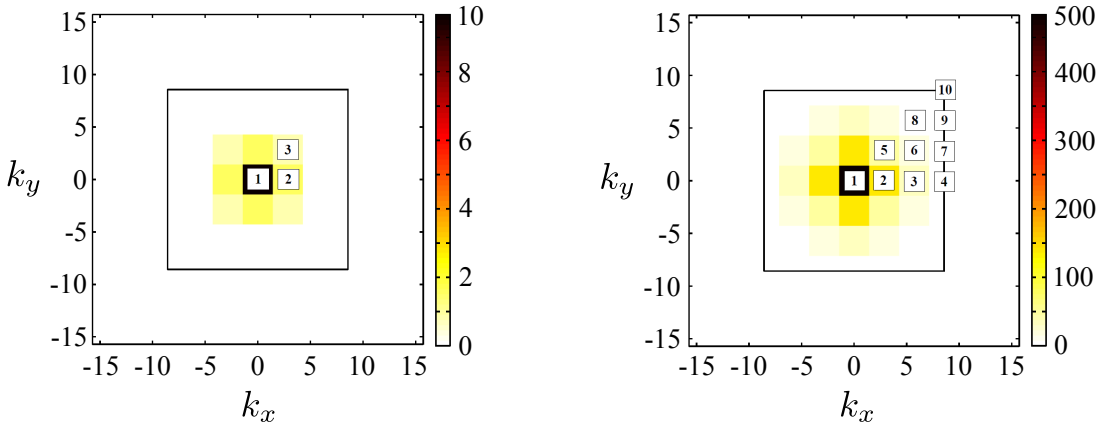
Le spectre des variations d'épaisseur et de rigidité de la cellule unitaire montrée sur la Fig 5.1, est effectué avec une troncature $N = 3$. Le spectre (module de la transformée de Fourier) des fonctions $h(x,y)$ et $D = \dfrac{Eh(x,y)^3}{12(1-\nu^2)}$ comprend par construction peu de composantes.




(a) (b)

FIGURE 5.1 – Cellule unitaire du réseau carré : (a) vue en perspective et (b) vue de dessus. La cellule tracée est construite en prenant $\gamma = 1$ dans le nouveau profil (Eq. (5.1)).

Un exemple de champ est donnée sur la figure 5.1 pour $\alpha = 3.8$ mm, $\beta = 1.2$ mm et $\gamma = 1$. Les spectres d'épaisseur de rigidité associés sont présentés sur la figure 5.2. Sur cette figure, le carré noir délimite les composantes prises en compte dans le calcul, correspondant à $(2N + 1)^2$ composantes. La Fig 5.2(a) montre que le spectre d'épaisseur est constitué de 9 composantes. Du fait de la symétrie hermitienne et la symétrie de la cellule unitaire, seules 3 composantes de l'épaisseur sont indépendantes. La rigidité de flexion est proportionnelle à la puissance 3 de l'épaisseur, et nécessite donc un peu plus de composantes pour la synthèse de son profil. La Fig 5.2(b) montre que le spectre de rigidité comprend 49 composantes, dont 10 composantes indépendantes. Ces résultats montrent qu'une troncature à $N = 3$, correspondant à 49 vecteurs réciproques $\boldsymbol{G_2}$, suffit pour reconstruire exactement les profils d'épaisseur et de la rigidité et permet de réduire considérablement le temps de calcul avec le profil choisi. Sur la base de ce résultat, les diagrammes de dispersion issus de la méthode PWE, qui sont présentés dans la suite de ce chapitre, sont calculés en se limitant à la troncature $N = 3$.




(a) (b)

FIGURE 5.2 – Spectres des profils d'épaisseur et de la rigidité de flexion. Les composantes indépendantes de Fourier sont numérotées : de 1 à 3 pour l'épaisseur et de 1 à 10 pour la rigidité.

### 5.1.2 Étude du profil en fonction de $\gamma$

Le profil d'épaisseur donné par l'Eq. (5.1) est piloté par la période du réseau $L$ et les paramètres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Tel que le montre les Eqs. (5.2) et (5.3), les paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont dépendants de la constante $\gamma$ et des épaisseurs extrêmes $h_{min}$ et $h_{max}$. Plusieurs types de profils de la cellule unitaire peuvent être construits en fonction de la valeur de $\gamma$. Sur la figure 5.3 sont présentés les profils d'épaisseur (colonne à gauche), leurs spectres (colonne du milieu) et les courbes de dispersion (colonne à droite) pour quelques valeurs de $\gamma \in [-7; 7]$, obtenus avec les paramètres fixés suivants : $L = 35$ cm, $h_{min} = 0.2$ mm et $h_{max} = 5$ mm. En fonction des valeurs étudiées de $\gamma$ (entre $-7$ et 7), la figure montre quatre types de profils d'épaisseur de la cellule unitaire, et sont :

• *Type (1)* : obtenu pour des valeurs de $\gamma < -1.5$ et se distingue par des maximas d'épaisseur aux coins de la cellule unitaire avec un minimum situé sur le bord entre deux maximas. On note que l'épaisseur au centre de la cellule augmente en diminuant $\gamma$.

• *Type (2)* : obtenu pour $-1.5 < \gamma < 0$ et se distingue également par des maximas d'épaisseur sur les coins de la cellule élémentaire. La différence par rapport au profil de type (1) est que les minimas d'épaisseur, constituant des points faibles de la structure, sont alignés en rejoignant le centre de la cellule. Notons qu'en augmentant $\gamma$, l'étendue des zones de faible épaisseur se réduit graduellement et se localise au centre de la cellule.

• *Type (3)* : ce type de profil a une forte ressemblance avec le trou noir circulaire quadratique étudié dans les chapitres précédents. Il est obtenu lorsque $0 < \gamma < 1.5$ et a une épaisseur qui diminue vers le centre de la cellule de façon axisymétrique et avec un maximum sur les bords.

• *Type (4)* : ce type de profil est réalisable lorsque $\gamma > 1.5$. Tout comme dans le profil de type (1), les minimas et maximas d'épaisseur sont alternés en $x$ et en $y$ et forment une sorte de grillage, mais inversement au type (1), les minimas du type (4) sont situés sur les coins et le centre de la cellule élémentaire.

Les spectres présentés sur la Fig 5.3 présentent un point commun : quel que soit la valeur de $\gamma$, les différents types de profils sont décrits exactement avec 9 composantes dans le domaine de Fourier pour une synthèse satisfaisante, ce qui rend également rapide le calcul des courbes de dispersion par la méthode PWE. Il est montré sur la même figure (colonne de droite) qu'il est possible d'ouvrir des bandes interdites basses fréquences pour certains types de profils de la cellule unitaire lorsque $\gamma \in [-2; -0.7]$. Une attention particulière est portée sur le profil d'épaisseur donné par $\gamma = -1$, et les résultats sont reproduits sur la figure 5.4 pour plus de lisibilité. On voit donc sur cette figure la cellule unitaire en perspective (Fig 5.4(a)), l'épaisseur de la cellule unitaire représentée en couleur (Fig 5.4(b)) et le diagramme de dispersion (Fig 5.4(c)). Ce dernier montre que ce type de profil est intéressant numériquement car il présente deux bandes interdites basses fréquences, dont l'une est assez large ($[102 - 159]$ Hz), et plusieurs bandes directionnelles non représentées sur la Fig 5.3. En pratique, ce profil n'est pas favorable car il présente des points faibles connectés, et forment des lignes se croisant au centre de la cellule. Ceci dégrade alors la tenue mécanique de la structure et induit des difficultés d'usinage.
La recherche d'une configuration assez solide et qui permet d'ouvrir des bandes interdites plus large dans la plage des basses fréquences nous conduit à remettre en question les réseaux à symétrie carrée. Le réseau à symétrie triangulaire est alors proposé et étudié dans la section suivante.

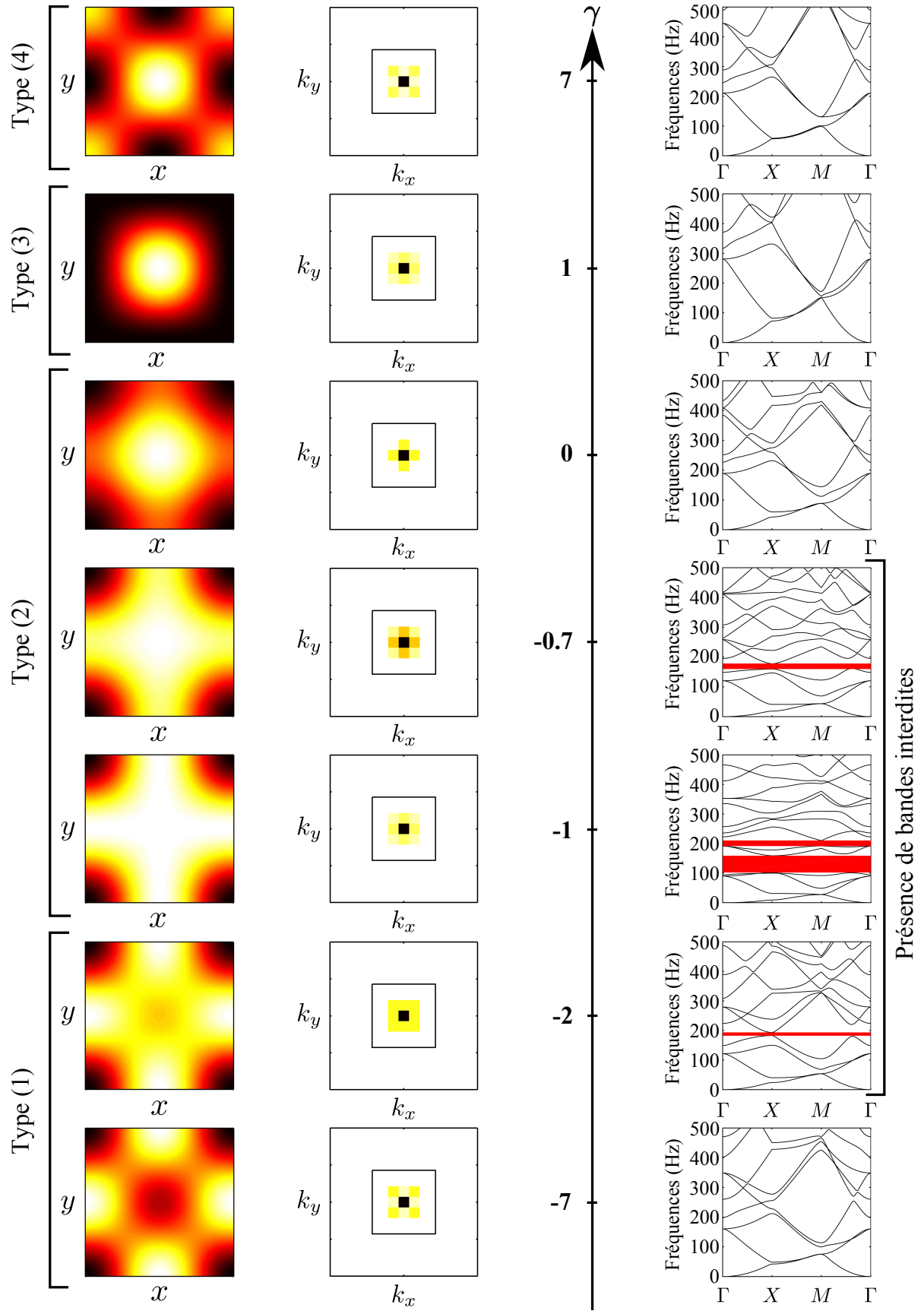



FIGURE 5.3 – Variation du profil d'épaisseur, du spectre d'épaisseur et des courbes de dispersion dans le réseau carré pour quelques valeurs de $\gamma \in [-7; 7]$.

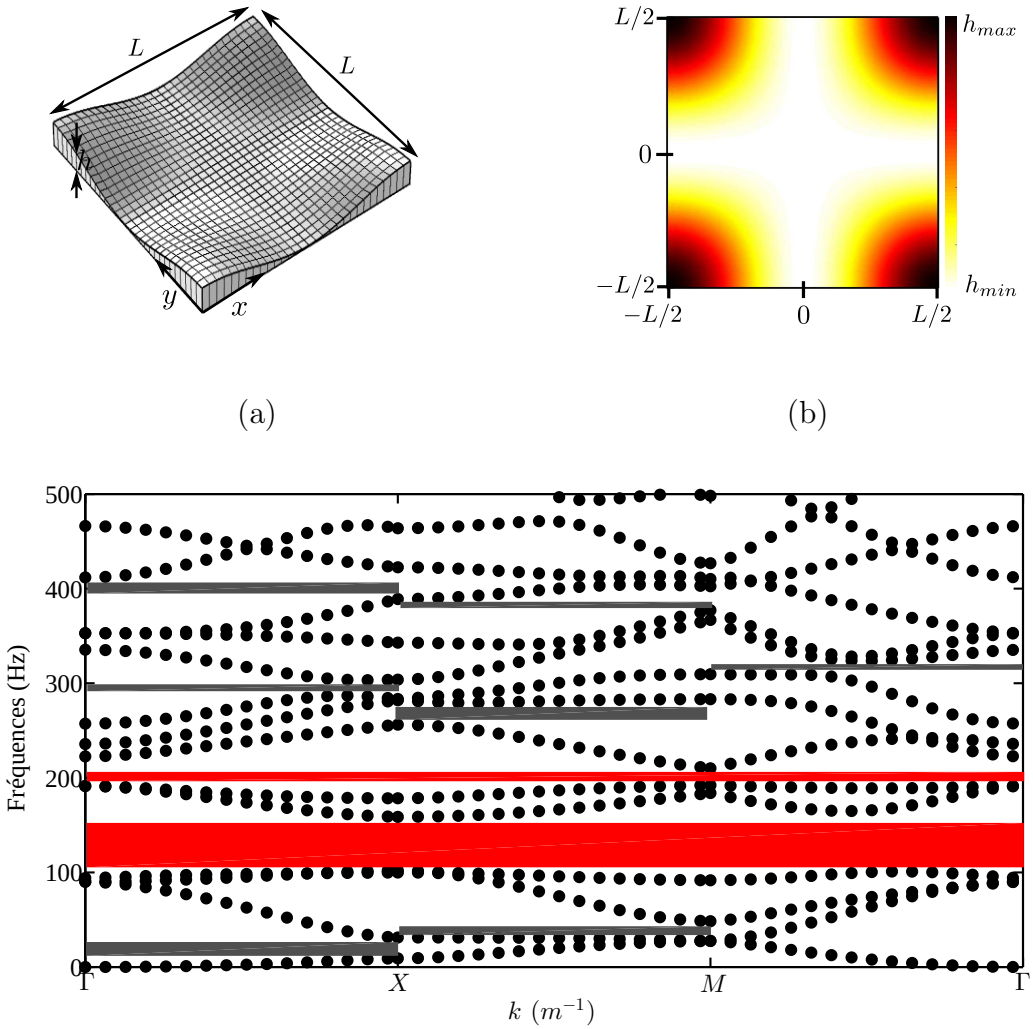



FIGURE 5.4 – (a), (b) et (c) respectivement : cellule unitaire en vue de perspective, carte représentant l'épaisseur et diagramme de dispersion du réseau carré avec $\gamma = -1$.

## 5.2 Remise en question du réseau carré

L'étude du réseau carré avec le nouveau profil en cosinus a montré qu'il est possible d'améliorer la convergence de la méthode PWE et d'obtenir des bandes interdites basses fréquences lorsque le paramètre $\gamma = -1$. Mais dans ce cas, la structure est trop fragile et n'a donc pas de potentiel applicatif intéressant. Le réseau triangulaire est alors proposé dans cette section comme alternative.

### 5.2.1 Définition du réseau triangulaire

Tel qu'il est illustré sur la figure 5.5, le réseau triangulaire est défini à partir du réseau carré en changeant la base $(x, y)$ pour la base $(u, v)$. En se basant sur le tableau 4.1, on établi le lien entre les deux bases comme :

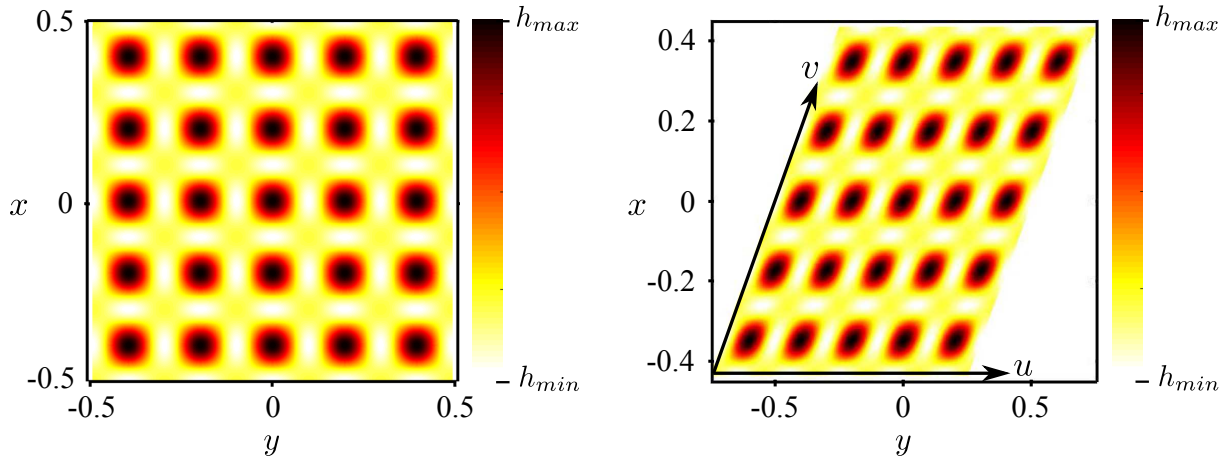
$$u(x, y) = 1x + 0y, \tag{5.4}$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \tag{5.5}$$

Le nouveau profil, donné par l'Eq. (5.1) pour le réseau carré, s'exprime alors pour le réseau triangulaire sous la forme :

$$h(u,v) = \alpha + \beta\left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}u\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}v\right) + \gamma\cos\left(\frac{2\pi}{L}u\right)\cos\left(\frac{2\pi}{L}v\right)\right], \tag{5.6}$$

où $L$ représente la période spatiale du réseau et $\alpha$ et $\beta$ sont donnés respectivement par les mêmes relations qu'en Eq. (5.2) et Eq. (5.3).




(a) (b)

FIGURE 5.5 – Méta-plaque avec réseau périodique de $5 \times 5$ cellules (a) carrées et (b) triangulaires. La barre des couleurs désigne l'évolution de l'épaisseur : blanc pour l'épaisseur minimale et noir pour l'épaisseur maximale.

### 5.2.2 Application de la méthode PWE au réseau triangulaire

La méthode PWE est utilisée dans cette section pour calculer les diagrammes de dispersion d'un réseau triangulaire. Pour valider la méthode sur ce réseau, cette dernière est appliquée dans un premier temps sur une plaque uniforme et les courbes de dispersion obtenues sont comparées à celles calculées en utilisant Comsol. Dans un second temps, la même méthode est utilisée pour étudier le profil en cosinus, donné par l'Eq. (5.6).

#### 5.2.2.1 Validation sur la plaque uniforme

La plaque considérée est une plaque en aluminium, d'épaisseur uniforme $h = 5$ mm. Elle est supposée périodique et possède une période spatiale $L = 20$ cm. Les courbes de dispersion d'ondes de flexion dans cette plaque sont calculées en utilisant la méthode PWE et le logiciel Comsol et sont représentées dans la figure 5.6, sur le parcours $\Gamma MK\Gamma$ de la zone de Brillouin irréductible du réseau triangulaire (voir Fig 4.2(f)).
Les résultats fournis par les deux calculs sont parfaitement superposés, ce qui valide donc l'implémentation de la méthode PWE.

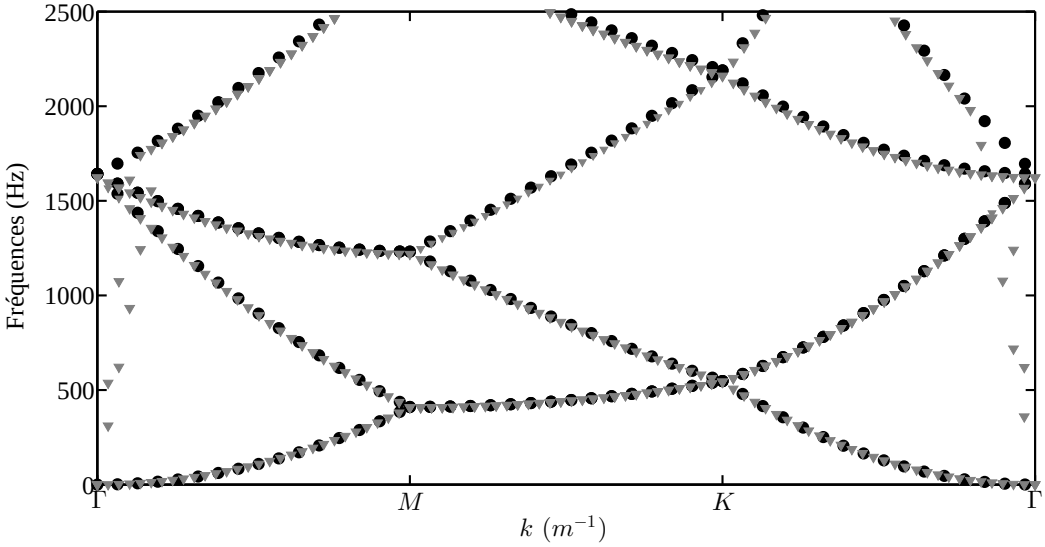



FIGURE 5.6 – Courbes de dispersion d'une plaque uniforme à réseau triangulaire, calculées avec la méthode PWE (ronds noir) et avec éléments finis en utilisant le logiciel Comsol Multiphysics (triangles gris).

#### 5.2.2.2 Courbes de dispersion du trou noir circulaire : $\gamma = 1$

La plaque considérée cette fois a une épaisseur non-uniforme et est composée d'un réseau périodique triangulaire de période $L = 35$ cm. Le profil de chaque cellule unitaire est donné par l'équation (5.6) et illustré sur la figure 5.7(a). A titre d'exemple, le paramètre $\gamma$ est choisi égale à 1 pour représenter le cas d'un trou noir circulaire (voir Fig 5.7(b)). Les épaisseurs minimal et maximal sont fixées de sorte que le contraste d'épaisseur $C_h = \dfrac{h_{max}}{h_{min}}$ soit égal à 25, avec $h_{min} = 0.2$ mm et $h_{max} = 5$ mm.

Le diagramme de dispersion des ondes de flexion dans cette plaque est calculé avec la PWE dans la plage de fréquences $[0 - 1000]$ Hz et présenté sur la figure 5.7(c). Le résultat montre l'absence de toute bande interdite complète dans la plage fréquentielle étudiée, mis à part quelques bandes directionnelles (incomplètes) étroites, signalées en gris sur la figure. Ce résultat permet de conclure que quel que soit le type de réseau utilisé, le trou noir acoustique circulaire sans masse centrale ne permet pas l'ouverture de bandes interdites en basses fréquences, corroborant ainsi le résultat donné dans la figure 5.3 pour $\gamma = 1$, et confirmant le constat établi dans le chapitre 4 pour le trou noir quadratique circulaire (voir Fig 4.12 de la Sec. 4.2.2.4).

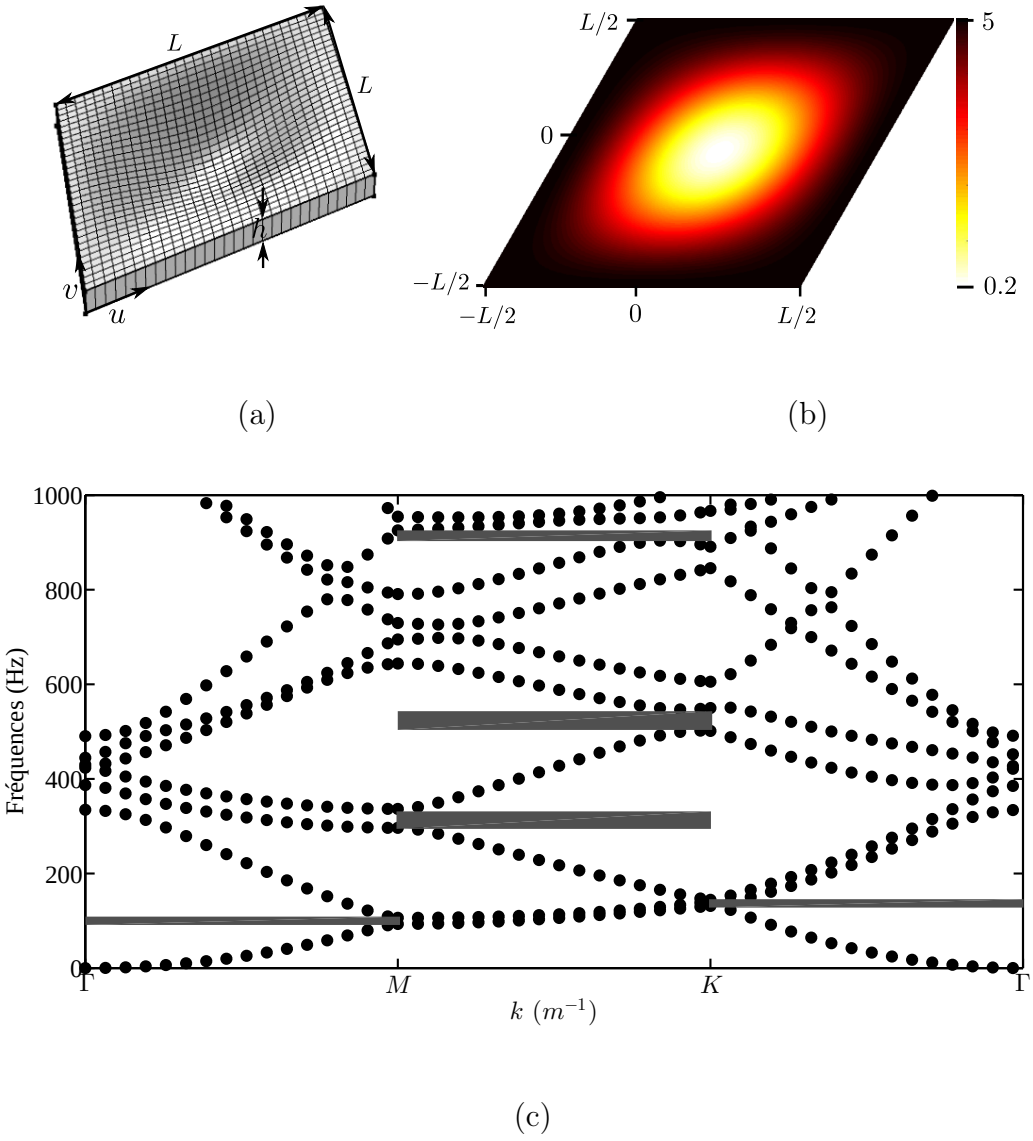



FIGURE 5.7 – (a), (b) et (c) respectivement : cellule unitaire en vue de perspective, carte d'épaisseur (en mm) et diagramme de dispersion du réseau triangulaire avec $\gamma = 1$.

### 5.2.3 Dimensionnement de la cellule

On cherche dans cette section à dimensionner le profil de la cellule unitaire de sorte que celle-ci, une fois insérée dans le réseau triangulaire, soit capable de produire des bandes interdites assez larges dans la plage des basses fréquences. L'optimisation d'un profil qui réponde à des exigences et qui soit usinable est réalisée en suivant la même démarche que pour le réseau carré, présentée dans la section 5.1.2. Le profil d'épaisseur donné par l'équation (5.6) est donc étudié en fonction du paramètre $\gamma \in [-7; 7]$. Les mêmes types de profils qu'en Fig 5.3 sont obtenus et représentés sur la figure 5.8 (voir la colonne à gauche). La colonne du milieu représente le spectre d'épaisseur pour chaque valeur de $\gamma$ et montre, comme pour le réseau carré, que 9 composantes de Fourier suffisent à la synthèse des profils proposés. La colonne à droite présente les courbes de dispersion correspondant à chaque profil, calculées avec la méthode PWE en prenant une période $L = 35$ cm et en fixant les épaisseur $h_{min}$ et $h_{max}$ à 0.2 et 5 mm respectivement. Ces courbes montrent la présence de bandes interdites basses fréquences pour des valeurs de $\gamma \in [-3; -0.7]$.

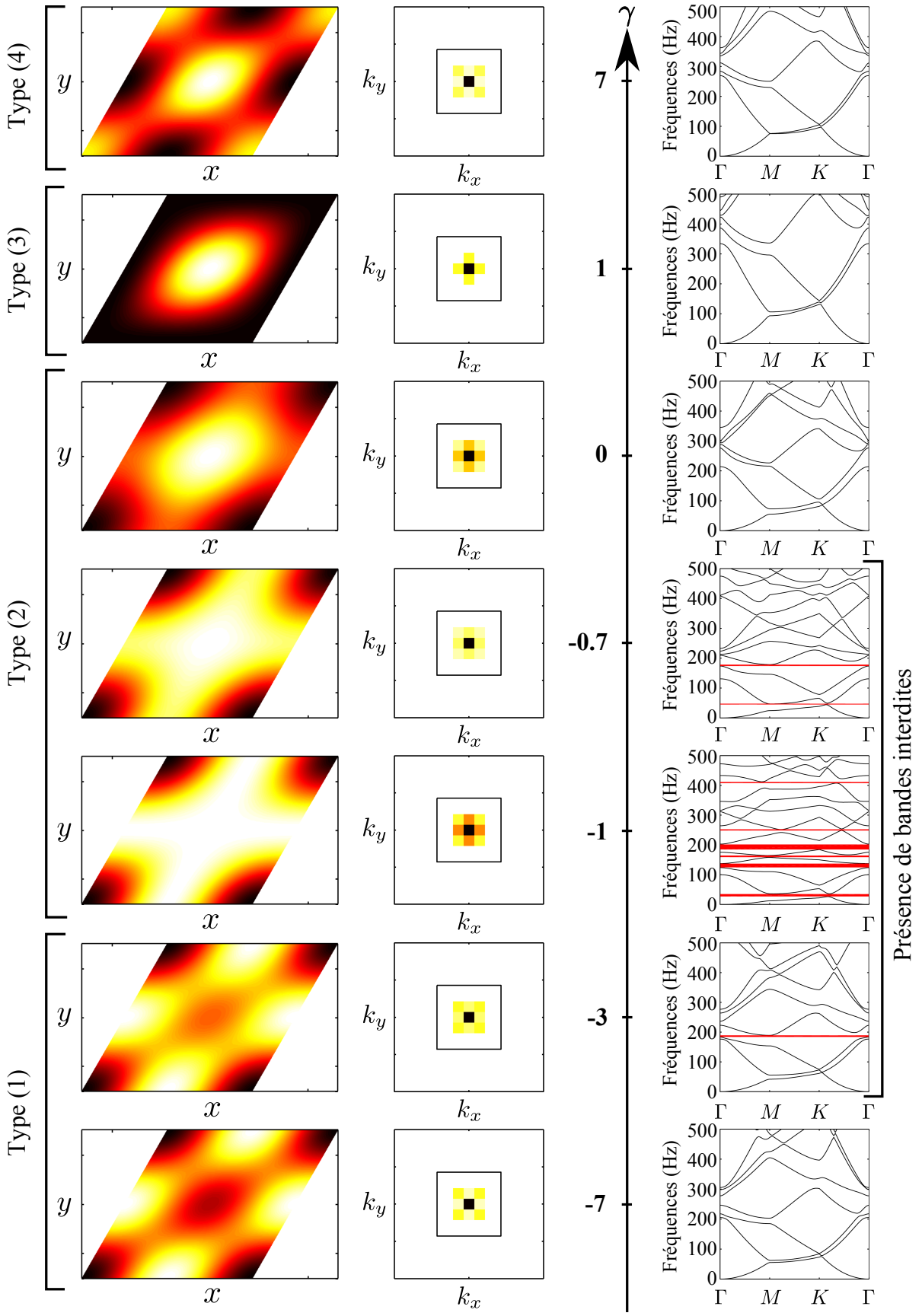
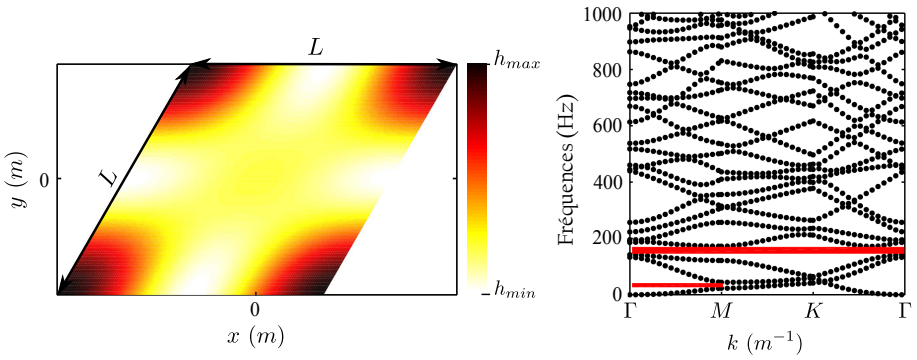


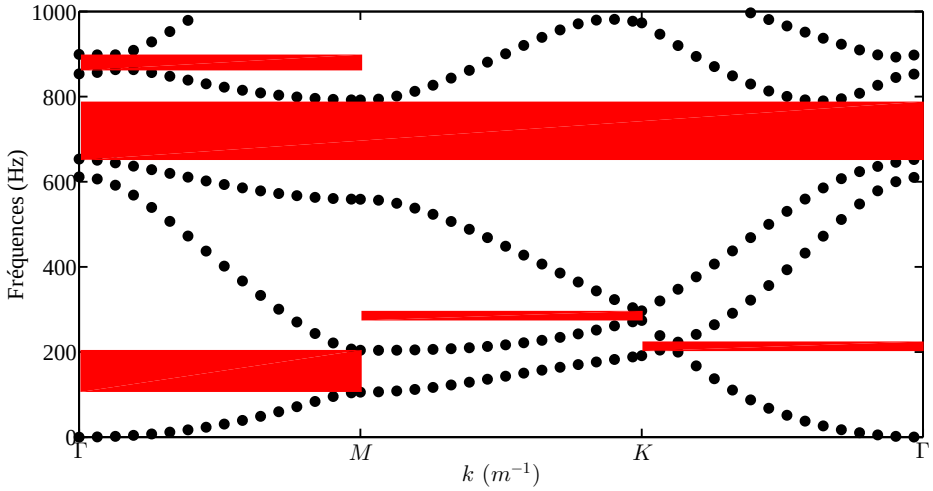

FIGURE 5.8 – Variation du profil d'épaisseur, du spectre d'épaisseur et des courbes de dispersion dans le réseau triangulaire pour quelques valeurs de $\gamma \in [-7; 7]$.

### 5.2.4 Choix du profil optimal

L'étude du profil d'épaisseur en fonction de $\gamma$ a montré qu'il est possible de construire des profils, lorsque $\gamma \in [-3; -0.7]$, permettant de créer des bandes interdites basses fréquences (voir Fig 5.8). Tout comme le réseau carré, le profil correspondant à $\gamma = -1$ est intéressant numériquement car il produit plusieurs bandes interdites, mais reste très limité en pratique à cause de sa fragilité. Un profil plus robuste est proposé avec $\gamma = -1.5$ et est montré sur la figure 5.9(a). Ce dernier se situe à la limite qui sépare les types (1) et (2) (voir Fig 5.8) et se caractérise par une alternance de minimas et maximas au long des bords de la cellule unitaire. La figure 5.9(b) présente les courbes de dispersion correspondant à ce profil. Elle met en évidence une bande interdite complète entre les fréquences 142 Hz et 172 Hz. Pour augmenter la rigidité statique de la structure et optimiser la largeur de la bande interdite trouvée, l'épaisseur de la méta-plaque et augmentée de façon à garder le même contraste d'épaisseur $C_h = 25$. Le résultat correspondant à cette configuration finale est affiché sur la figure 5.9(c). Il montre une bande interdite complète de largeur d'environ 140 Hz (entre 652 Hz et 792 Hz) et plusieurs bandes directionnelles.




(a) (b)




(c)

FIGURE 5.9 – (a) : Profil de la cellule optimale, (b) : diagramme de dispersion calculé avec $\gamma = -1.5$ et (c) : diagramme de dispersion de la méta-plaque optimale.

## 5.3 Validation expérimentale

Le travail mené dans cette section concerne des tests vibratoires de la méta-plaque triangulaire dimensionnée précédemment, et d'une structure industrielle [3]. Il s'agit alors d'une caractérisation expérimentale par scann vibrométrique, visant à démontrer la capacité de la méta-plaque à amortir les vibrations en basses fréquences en créant des bandes interdites, et examiner le potentiel applicatif du traitement développé pour la structure industrielle.

### 5.3.1 Méta-plaque à réseau triangulaire

#### 5.3.1.1 Description du processus expérimental

La méta-plaque testée est photographiée sur la figure 5.10. Elle est composée de trois zones : deux zones $S_A$ et $S_B$ d'épaisseur constante $h_{max}$ et une zone usinée en suivant le profil donné par l'Eq. (5.6), avec $L = 20$ cm, $h_{min} = 0.3$ mm et $h_{max} = 7.5$ mm. Deux configurations de cette méta-plaque sont testées : la première correspond à la plaque sans revêtement (sans traitement) et la seconde est celle avec un adhésif collé sur la face plane de la zone usinée, constituant un revêtement viscoélastique. La mesure de propriétés mécaniques de cet adhésif est décrite dans l'annexe D.

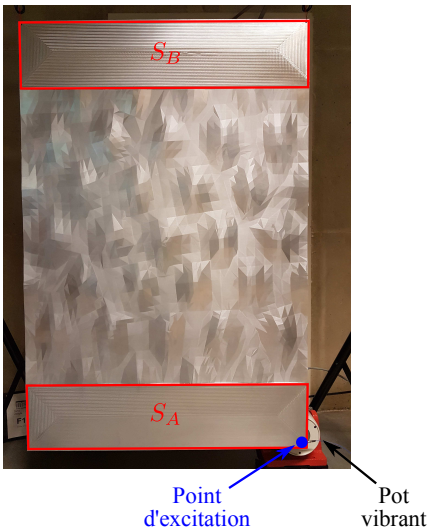



FIGURE 5.10 – Photographie de la méta-plaque réalisée pour les tests.

Les mesures sont réalisées en utilisant la technique de vibrométrie laser : la méta-plaque est suspendue avec de simples ficelles de manière à approcher des conditions aux limites de liberté sur ses bords. Un pot vibrant avec capteur de force excite la plaque au coin de la zone $S_A$ (voir Fig 5.10) dans la bande de fréquence $[0 - 6.25]$ kHz. La vitesse vibratoire est ensuite mesurée en chaque point de maillage par un vibromètre laser à balayage. Les signaux mesurés permettent d'étudier la réponse vibratoire de la plaque à travers l'analyse des courbes de mobilité en fonction de la fréquence et des cartes vibratoires à fréquence choisie. L'analyse de la réponse vibratoire de la méta-plaque sans et avec revêtement adhésif est proposée dans les sections 5.3.1.2 et 5.3.1.3.

3. Parie confidentielle, masquée dans ce document.

#### 5.3.1.2 Réponse vibratoire de la méta-plaque sans adhésif

La figure 5.11 représente la mobilité quadratique moyenne de la zone $S_B$ de la méta-plaque en l'absence du film adhésif viscoélastique sur la bande fréquentielle $[0-6]$ kHz. La bande interdite complète prédite numériquement par la méthode PWE est signalée par une bande rouge sur la figure. Le signal présente de très nombreuses variations autour d'une valeur moyenne qui décroit avec la fréquence. Les variations autour de cette valeur moyenne traduisent la densité modale particulièrement élevée de la plaque en raison de sa taille relativement grande (1 m $\times$ 1.5 m) et de son épaisseur mince. La figure montre en effet la présence de très nombreux pics de mobilité, chacun associé à une résonance du panneau. Des émergences de 10 à 20 dB en basses fréquences témoignent du caractère très résonant de la méta-plaque en l'absence de traitement anti-vibratoire. Une chute brusque de mobilité moyenne est observée autour de la fréquence de 700 Hz, correspondant à peu près au centre de la bande interdite calculée par la PWE, validant ainsi les prédictions numériques et le dimensionnement de la méta-plaque réalisés dans les sections 5.3.1.2 et 5.3.1.3.

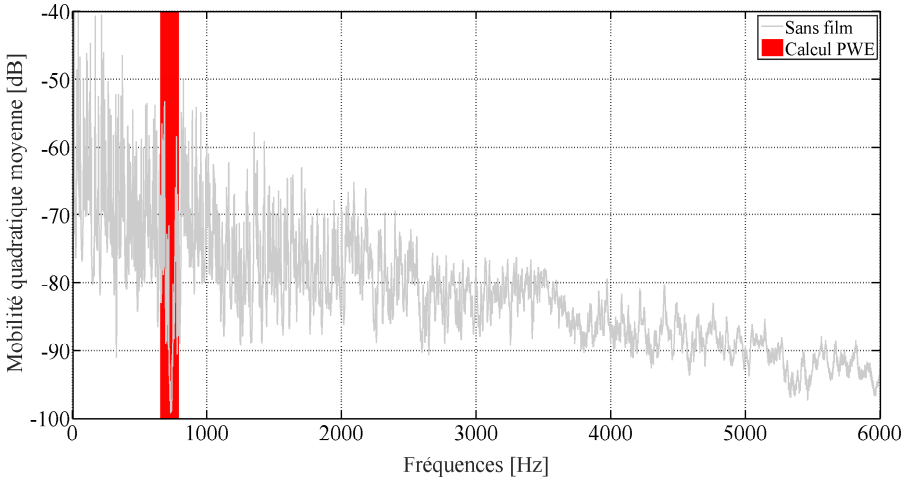
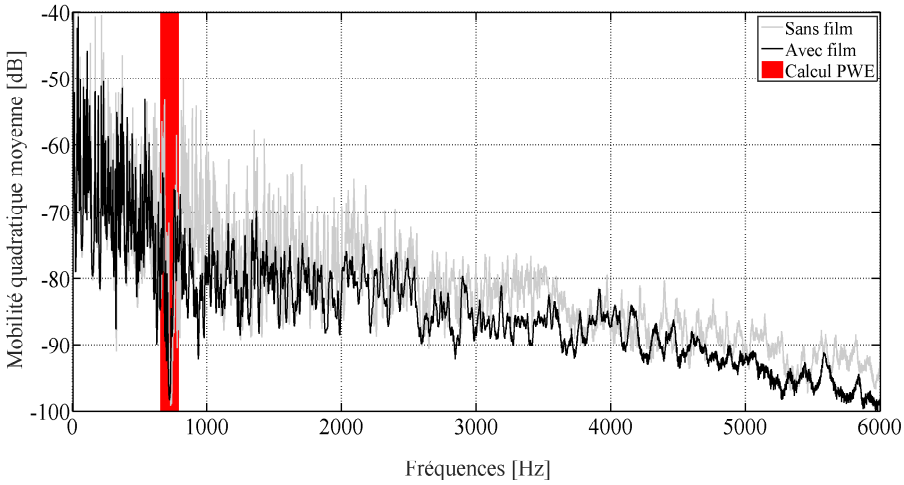



FIGURE 5.11 – Mobilité quadratique moyenne de la méta-plaque à réseau triangulaire sans adhésif dans la bande de fréquence $[0-6]$ kHz.

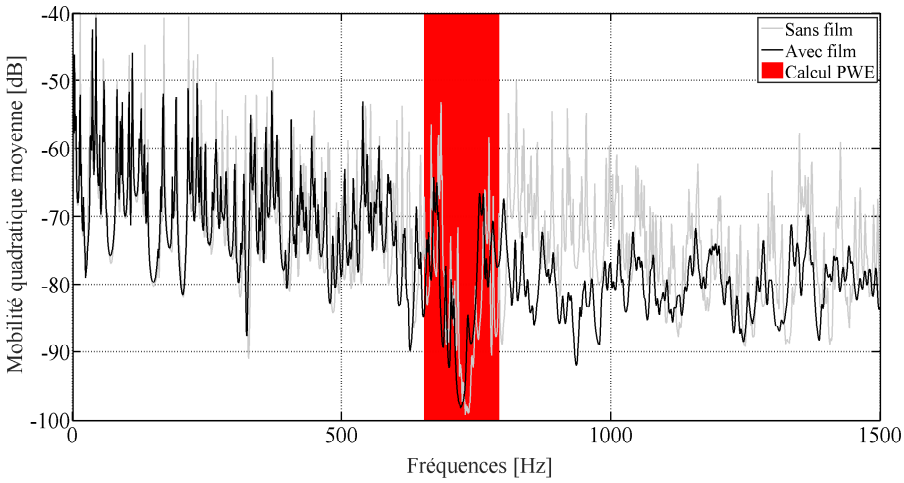
#### 5.3.1.3 Analyse de l'amortissement induit par l'adhésif

La figure 5.12 montre les mobilités quadratiques moyennes de la zone $S_B$ de la méta-plaque sans (courbe grise) et avec traitement viscoélastique (courbe noire). Comme attendu, La représentation en large bande fréquentielle (Fig 5.12(a)) montre que l'ajout de l'adhésif ne modifie que très peu la valeur moyenne de la mobilité en haute fréquence. Un effet de "lissage" de la réponse vibratoire est clairement observé en particulier pour les fréquences supérieures à 600 Hz. Ce lissage correspond à une diminution du caractère résonant de la plaque associée à l'amortissement induit par le film adhésif. En basses fréquences ($f < 600$ Hz), le traitement n'induit pas d'importante réduction d'amplitude des pics de résonance (voir Fig 5.12(b)). Tandis qu'à plus haute fréquence, la réduction des amplitudes des pics de résonance est de l'ordre de 5 dB en moyenne. Dans cette bande haute fréquence, l'amortissement induit est tout à fait analogue à celui de l'effet trou noir

acoustique. La localisation du champ vibratoire permet alors d'augmenter significativement la dissipation de l'énergie par l'adhésif.




(a)




(b)

FIGURE 5.12 – (a) Mobilités quadratiques moyennes de la méta-plaque sans et avec film adhésif dans la bande fréquentielle $[0-6]$ kHz et (b) zoom sur la bande $[0-1.5]$ kHz.

Les champs de mobilités vibratoires moyennes de la méta-plaque sans et avec revêtement adhésif sont présentés sur les figures 5.13(a)-(b) à une fréquence fixe. La comparaison des deux résultats montre nettement l'effet du film viscoélastique rajouté : une diminution de mobilité de l'ordre de 10 dB en moyenne est clairement observée. Les figures 5.13(c)-(d)-(e) montrent le champ de mobilité de la méta-plaque aux fréquences 193 Hz, 728 Hz et 3405 Hz. Le champ basse fréquence (Fig 5.13(c)) montre des résonances associées aux modes globaux de la plaque. A la fréquence 728 Hz (Fig 5.13(d)), la carte montre un champ fortement atténué sous l'effet de la bande interdite située entre 652 et 792 Hz. A des fréquences plus élevées (Fig 5.13(e)), la plaque possède un champ globalement atténué par rapport à celui à 193 Hz et exhibe des effets de localisation d'énergie vibratoire dans les zones de faible épaisseur.

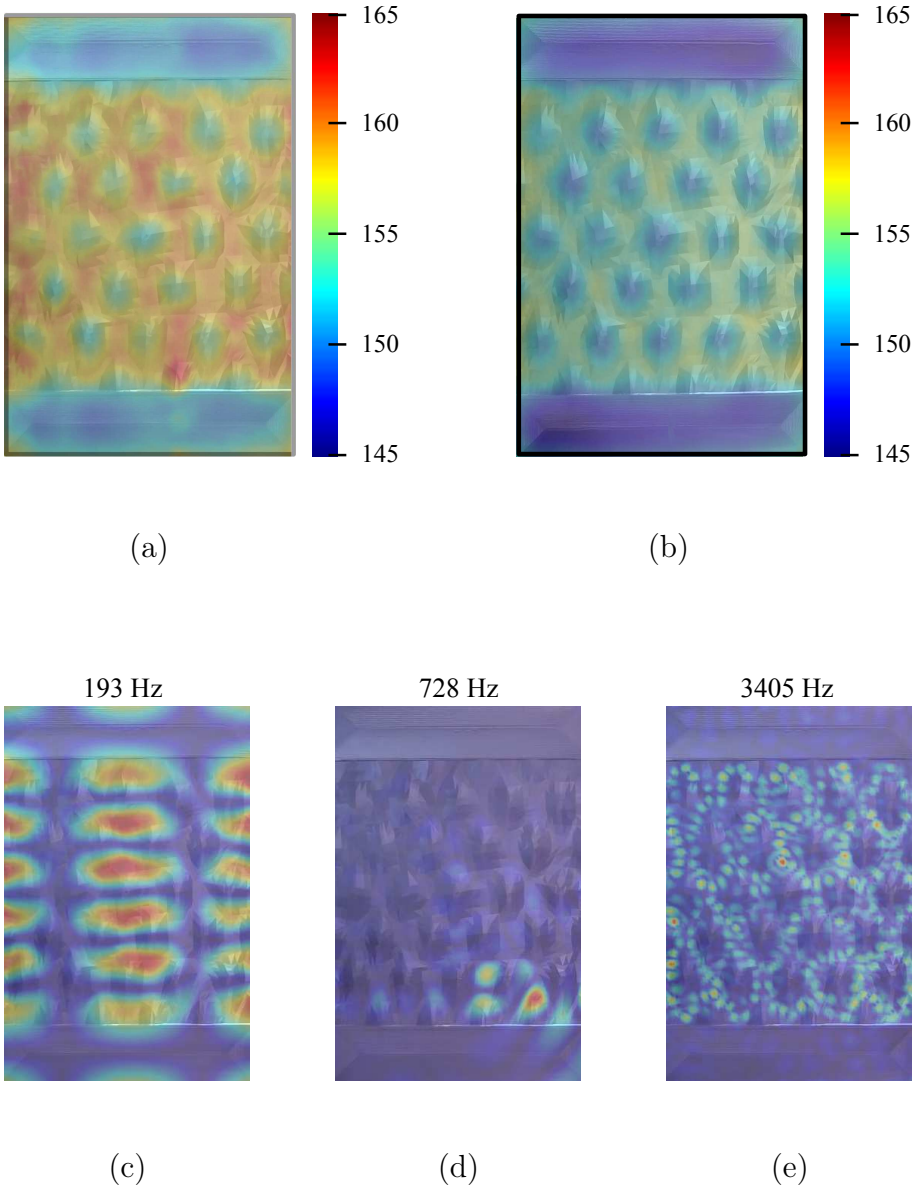



FIGURE 5.13 – Champs de mobilités quadratiques moyennes de la méta-plaque sans (a) et avec adhésif (b), représentés en dB (0 dB = $10^{-9}$ m/s/N) à fréquence fixée. Champs de mobilités représentés en mm/s/N aux fréquences 193 Hz (c), 728 Hz (d) et 3405 Hz (e).

Contenu confidentiel

Contenu confidentiel

Contenu confidentiel

Contenu confidentiel

Contenu confidentiel

Contenu confidentiel

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux types d'études sont réalisées : la première est numérique et se base sur l'analyse des courbes de dispersion dans une méta-plaque à réseau périodique avec les symétries carrée et triangulaire, et la seconde s'articule autour de tests expérimentaux de la méta-plaque à réseau triangulaire et d'un panneau de fuselage d'avion. Un nouveau type de profil d'épaisseur de la plaque, constitué d'une somme de cosinus, est proposé et a permis d'enlever les difficultés de convergence de la méthode PWE pointées dans le chapitre 4 pour le trou noir quadratique, et réduire considérablement le temps de calcul. Les diagrammes de dispersion calculés en utilisant ce nouveau profil ont montré qu'il est possible d'ouvrir des bandes interdites complètes basses fréquences dans un réseau carrée pour des valeurs de $\gamma \in [-2; -0.7]$.

Le réseau carré ne permettant pas d'obtenir des bandes interdites suffisamment larges, il est remis en question et est remplacé par le réseau triangulaire. Ce dernier est à nouveau exploré en étudiant le profil d'épaisseur en fonction de $\gamma$. L'analyse des courbes de dispersion obtenues pour ce réseau a montré l'existence de bandes interdites complètes pour $\gamma \in [-3; -0.7]$. A partir de cette étude, un compromis entre une bande interdite assez large et une bonne tenue mécanique de la structure est trouvé pour $\gamma = -1.5$ et un contraste d'épaisseur $C_h = 25$. Ce paramétrage a permis le dimensionnement d'une méta-plaque qui crée une bande interdite large de 140 Hz. Cette méta-plaque est ensuite réalisée et étudiée expérimentalement. Les résultats des tests effectués ont montré une capacité remarquable de la plaque à amortir les vibrations à basses fréquences par la bande interdite produite et à hautes fréquences par l'effet de l'adhésif viscoélastique rajouté.

L'étude expérimentale réalisée sur la structure industrielle a montré qu'une fonction technologique d'amortissement vibratoire peut être ajoutée à la structure lorsqu'elle est munie d'un adhésif viscoélastique. Cet amortissement vibratoire ajouté tire partie de l'effet de localisation de l'énergie vibratoire induit par la géométrie typique de la structure. En ce sens, l'effet exploité est proche de l'effet trou noir acoustique. L'intérêt du traitement réside dans son coût financier très modique, sa grande facilité de mise en œuvre et dans l'ajout de masse négligeable qu'il représente. Les mesures montrent que si le revêtement est appliqué à la structure, une réduction d'amplitude des pics de résonance de l'ordre de 5 dB peut être atteinte.

# Conclusions générales et perspectives

## Conclusions générales

L'objectif de cette thèse était de développer une plaque architecturée, utilisant d'une part l'effet trou noir acoustique et d'autre part des effets de bande d'arrêt induits par une organisation sous forme de réseau périodique. Pour atteindre cet objectif, une série d'études analytiques, numériques et expérimentales sont réalisées à travers les cinq chapitres de cette thèse.

• Le premier chapitre de la thèse est une étude bibliographique portant sur la diffusion des ondes de flexion par des obstacles de forme simple, tels qu'un trou simple, une inclusion rigide ou un trou borgne. Le contenu de ce chapitre a constitué un socle solide pour les chapitres suivants en termes de modélisation analytique et a permis la compréhension des phénomènes physiques complexes lié à la diffusion.

• Le trou noir acoustique est étudié dans sa version la plus simplifiée dans le chapitre 2 : il s'agit d'un trou noir (TN) quadratique débouchant et sans film viscoélastique. Un modèle ondulatoire de diffusion des ondes planes de flexion par ce type de TN est développé. Ce modèle étant analytique, il fournit une description rigoureuse de l'interaction des ondes avec le TN. A partir de la relation de dispersion, il est montré qu'il existe quatre ondes évanescentes à l'intérieur du TN, dont deux se transformant en propagatives au-delà de la fréquence de coupure. L'analyse de la section de diffusion a montré que le TN est un diffuseur résonant à hautes fréquences et quasiment invisible en basses fréquences : il est établi que le caractère résonant du TN à des fréquences au-delà de la fréquence de coupure résulte de la résonance des modes piégés présents dans cette gamme de fréquences.

• Le film viscoélastique joue un rôle important dans l'efficacité du TN, et sa prise compte dans le modèle précédent induit de grandes difficultés techniques dans la résolution analytique du problème de la diffusion. Pour cela, un modèle numérique basé sur la méthode de différences finies est développé dans le chapitre 3 pour caractériser le TN avec film. Le but de ce chapitre est d'une part de décrire l'amortissement induit par le film et d'autre part de contrôler les résonances locales du trou noir. Le modèle développé a montré que le revêtement viscoélastique agit principalement dans la zone des hautes fréquences en diminuant la section efficace de diffusion, et qu'il est possible de piloter les résonances par la masse et la raideur de la zone centrale. Il est établi qu'une très faible masse permet de décaler considérablement la première fréquence de résonance du trou noir. La raideur de la zone du trou noir dépend de son profil. Il est montré pour qu'un trou noir ayant un ordre de profil $m$ élevé voit ses résonances se décaler vers les basses

fréquences et tendent à disparaitre lorsque $m > 4$.

• Dans le chapitre 4, un panneau muni d'un réseau périodique carré de trous noirs acoustiques est caractérisé numériquement et expérimentalement. Un modèle basé sur la méthode PWE est développé pour un panneau infini, et est validé sur poutres et plaques munies d'inclusions cylindriques. Le calcul du diagramme de dispersion de la méta-plaque de trous noirs non-débouchants par la méthode PWE a révélé des difficultés de convergence à cause de la complexité de la géométrie, impliquant une troncature élevée du calcul. Un modèle réalisé sous "Comsol Multiphysics" a permis de valider le cas de la méta-plaque. Les courbes de dispersion obtenues dans le cas particulier du réseau de trous noirs avec masse centrale ont montré la possibilité de créer une bande interdite basses fréquences sous réserve d'un accord précis des fréquences de résonance des trous noirs à la fréquence de Bragg. Cette bande interdite est cependant très étroite. La méta-plaque accordée à la fréquence de Bragg est testée : les mesures de mobilité vibratoire ont montré un effet de lissage des résonances en hautes fréquences, et une possible présence d'une bande interdite de résonance, dans laquelle la mobilité est d'amplitude particulièrement faible. Ces résultats expérimentaux corroborent les prédictions numériques, et permettent d'observer à la fois les effets de la bande interdite en basses fréquences et du trou noir en hautes fréquences.

• Le dernier chapitre conduit à la réalisation d'un démonstrateur de laboratoire non résonant sur des plages de fréquences contrôlées, combinant pour la première fois des effets cumulatifs des trous noirs en hautes fréquences et de bande interdite de Bragg en basses fréquences. L'obtention de ce résultat nécessite de reconsidérer la géométrie de la cellule unitaire alors conçue comme une combinaison de fonctions cosinus. Le profil topologique résultant met en évidence trois épaisseurs caractéristiques : 1) une épaisseur moyenne adaptée (1.8 mm) permettant d'assurer la tenue mécanique en statique du panneau, 2) une épaisseur minimale suffisamment faible (300 µm) permettant de générer un effet trou noir hautes fréquences, 3) une épaisseur maximale suffisamment élevée (7.5 mm) induisant un contraste de propriété significatif à l'origine de l'ouverture d'une bande interdite de largeur exploitable.

# Perspectives

Les perspectives pour la suite des travaux de cette thèse sont nombreuses.

• Les études numériques menées sur le trou noir acoustique quadratique seul ou inséré dans un réseau permettent d'envisager d'autres formes de trous noirs, comme par exemple un trou noir rectangulaire ou elliptique qui peuvent s'avérer efficaces et peut-être simples à modéliser. L'étude d'un trou noir isolé avec le profil optimal, établi dans le chapitre 5, serait utile et pourrait permettre d'apprendre davantage sur son comportement vibratoire.

• Le film viscoélastique joue un rôle important dans les mécanismes de dissipation du trou noir. Son rôle est déterminé expérimentalement dans le chapitre 5 pour la méta-plaque triangulaire. Une perspective à court terme est d'étendre le modèle PWE, en développant

donc un modèle Extended-PWE, pour apprendre plus sur la dispersion des ondes dans le milieu, notamment sur la dissipation.

• Les réseaux périodiques peuvent être utilisés pour filtrer, guider ou piéger les ondes. Il serait intéressant d'étudier un réseau de trous noirs acoustiques couplant les fonctions de guidage et de piégeage, comme par exemple un réseau dans lequel manquerait une rangée de trous noirs et ayant un trou noir de grande taille au centre de la structure.

• Une perspective à long terme serait d'intégrer le trou noir acoustique dans une structure sandwich. Cela permettrait de rigidifier la structure tout en tirant profit des propriétés du trou noir.

# Bibliographie


[1] Julien Poittevin, Pascal Picart, Charly Faure, François Gautier, and Charles Pézerat. Multipoint vibrometer based on high-speed digital in-line holography. *Applied optics*, 54(11) :3185–3196, 2015.

[2] Thibault Wassereau, Charles Pezerat, Jean-Louis Guyader, and Frédéric Ablitzer. Characterization of materials and flaw detection using force analysis technique. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 251, pages 452–462. Institute of Noise Control Engineering, 2015.

[3] Thibault Wassereau, Frédéric Ablitzer, Charles Pézerat, and Jean-Louis Guyader. Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the timoshenko beam problem. *Journal of Sound and Vibration*, 399 :86–103, 2017.

[4] Océane Grosset, Charles Pézerat, Jean-Hugh Thomas, and Frédéric Ablitzer. Introduction of the fluid-structure coupling into the force analysis technique. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 11(2) :322–326, 2017.

[5] Charlie Bricault, Charles Pezerat, and Manuel Collet. Semi-passive control of the acoustic vibrations and radiation waves with a periodic lattice of piezoelectric patches. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 251, pages 158–172. Institute of Noise Control Engineering, 2015.

[6] Antoine Sternberger, Jean-Michel Génevaux, and Adrien Pelat. Dissipation ajoutée expérimentalement à une structure par un amas de granulaire à surface libre. *Congrès Français d'Acoustique, VIbration, SHocks and NOise*, 2016, Le Mans, France.

[7] Lionel Arnaud. Vibrations d'usinage : la bête noire de l'usinage. *Revue la forge*, 2010.

[8] William HK Lee, Paul Jennings, Carl Kisslinger, and Hiroo Kanamori. *International handbook of earthquake & engineering seismology*, volume 81. Academic Press, 2002.

[9] M Guesdon, M Pluviose, and M Watremetz. Vibrations dûes à la turbulence du vent. *La Houille Blanche*, (3-4) :217–224, 1988.

[10] Rene H Miller and Charles W Ellis. Helicopter blade vibration and flutter. *Journal of the American Helicopter Society*, 1(3) :19–38, 1956.

[11] Christopher E Brennen. *Hydrodynamics of pumps*. Cambridge University Press, 2011.

[12] Lucjan Witek. Experimental crack propagation and failure analysis of the first stage compressor blade subjected to vibration. *Engineering failure analysis*, 16(7) :2163–2170, 2009.

[13] Richard H Kemp, Marvin H Hirschberg, and William C Morgan. Theoretical and experimental analysis of the reduction of rotor blade vibration in turbomachinery through the use of modified stator vane spacing. 1958.

[14] Malcolm J Crocker. *Handbook of noise and vibration control*. John Wiley & Sons, 2007.

[15] Lothar Cremer and Manfred Heckl. Structure-borne sound : Structural vibrations and sound radiation at audio frequencies. *Berlin and New York, Springer-Verlag*, Second edition, 1988.

[16] Frank J Fahy and Paolo Gardonio. *Sound and structural vibration : radiation, transmission and response*. Academic press, 2007.

[17] Vivien Denis. *Amortissement vibratoire de poutres par effet Trou Noir Acoustique*. PhD thesis, Le Mans, 2014.

[18] Charles F Desmond. Viscous vibration damping, June 10 1969. US Patent 3,448,830.

[19] Clarence W De Silva. *Vibration damping, control, and design.* CRC Press, 2007.

[20] William Weaver Jr, Stephen P Timoshenko, and Donovan Harold Young. *Vibration problems in engineering.* John Wiley & Sons, 1990.

[21] A V Granato and Kurt Lücke. Theory of mechanical damping due to dislocations. *Journal of applied physics*, 27(6) :583–593, 1956.

[22] André RIVIERE and Juan-Jorge MARTINEZ-VEGA. *Mesure de frottement interne.* Ed. Techniques Ingénieur, 2000.

[23] Montgomery T Shaw and William J MacKnight. *Introduction to polymer viscoelasticity.* John Wiley & Sons, 2005.

[24] Robert D Corsaro and Leslie Howard Sperling. Sound and vibration damping with polymers, dallas tx, april 9-14, 1989. In *A. C. S. symposium series.* American Chemical Society.

[25] BC Nakra. Vibration control with viscoelastic materials. iii. *The Shock and Vibration Digest*, 16(5) :17–22, 1984.

[26] Ahid D Nashif, David IG Jones, and John P Henderson. *Vibration damping.* John Wiley & Sons, 1985.

[27] Daniel J Inman. *Vibration with control.* John Wiley & Sons, 2017.

[28] Ahmad Al Majid. *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire : opérateur d'hystérésis, phénomène métrique.* PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 2002.

[29] Ardéshir Guran, BF Feeny, A Klarbring, and Y Ishida. *Impact and Friction of Solids, Structures and Intelligent Machines : In Memoriam of PD Panagiotopoulos (1950–1998)*, volume 14. World Scientific, 2000.

[30] Iain G Main. *Vibrations and Waves in Physics.* Cambridge University Press, 1993.

[31] L Gaul and R Nitsche. Friction control for vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(2) :139–150, 2000.

[32] Walter Sextro. *Dynamical contact problems with friction.* Springer, 2002.

[33] Ladislav Pust, Luděk Pešek, and Alena Radolfová. Various types of dry friction characteristics for vibration damping. *Engineering Mechanics*, 18(3-4) :203–224, 2011.

[34] Robert D Blevins. Flow-induced vibration. *Van Nostrand Reinhold, New York*, 1977.

[35] François Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques.* Hermann, Tome 4, 2001.

[36] CH Park and A Baz. Vibration damping and control using active constrained layer damping : A survey. *The Shock and vibration digest*, 31(5) :355–364, 1999.

[37] Nicolas Rizet. *Contrôle actif de vibrations utilisant des matériaux piézo-électriques.* PhD thesis, 1999.

[38] Bernard GARNIER. Contrôle actif des vibrations. *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, (R6200) :R6200–1, 2002.

[39] Valérie Pommier, Marc Budinger, Bernard Mouton, and Sylvaine Leleu. Contrôle actif de vibrations. *J3eA*, 5 :010, 2006.

[40] Vincent Roberti. *Contrôle de structures : théories et applications.* PhD thesis, 1994.

[41] I Wayan Suweca. *Contrôle vibratoire des structures.* PhD thesis, 2000.

[42] David IG Jones. *Handbook of viscoelastic vibration damping.* John Wiley & Sons, 2001.

[43] Eric E Ungar and Edward M Kerwin Jr. Plate damping due to thickness deformations in attached viscoelastic layers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(2) :386–392, 1964.

[44] Hermann Oberst and Kurt Frankenfeld. Über die dämpfung der biegeschwingungen dünner bleche durch fest haftende beläge. *Acta Acustica united with Acustica*, 2(6) :181–194, 1952.

[45] E. E. Ungar. loss factors of viscoelastically damped beam structures. *journal of acoustical society of america*, 34(8) :1082–1089, 1952.

[46] Edward M Kerwin Jr. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical society of America*, 31(7) :952–962, 1959.

[47] D. Ross, E. E. Ungar, and E. M. Kerwin. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. In J. E. Ruzicka, editor, *Structural Damping*, pages 49–87, Oxford, 1960. Pergamon Press.

[48] Eric E Ungar and Edward M Kerwin Jr. Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts. *The Journal of the acoustical Society of America*, 34(7) :954–957, 1962.

[49] George A Lesieutre. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *The Shock and Vibration Digest*, 30(3) :187–195, 1998.

[50] G Song, V Sethi, and H-N Li. Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials : A review. *Engineering Structures*, 28(11) :1513–1524, 2006.

[51] Philip R Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA journal*, 14(12) :1675–1682, 1976.

[52] Yoshiaki ARAKI, Yasunori YUHKI, Isao YOKOMICHI, and Yasusuke JINNOUCHI. Impact damper with granular materials : 3rd report, indicial response. *Bulletin of JSME*, 28(240) :1211–1217, 1985.

[53] Stepan Simonian. Particle damping applications. In *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, page 1906, 2004.

[54] Clara Salueña, Thorsten Pöschel, and Sergei E Esipov. Dissipative properties of vibrated granular materials. *Physical Review E*, 59(4) :4422, 1999.

[55] Siegfried Kuebler. Vibration dampner for sports racket, August 11 1998. US Patent 5,792,011.

[56] John Russell Hall et al. Dissipation of elastic wave energy in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(6) :27–56, 1963.

[57] Holt Ashley. On passive damping mechanisms in large space structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 21(5) :448–455, 1984.

[58] Richard Ehrgott, Hagop Panossian, and Gary Davis. Modeling techniques for evaluating the effectiveness of particle damping in turbomachinery. In *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 17th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 11th AIAA No*, page 2690, 2009.

[59] Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.

[60] Rahul Rana and TT Soong. Parametric study and simplified design of tuned mass dampers. *Engineering structures*, 20(3) :193–204, 1998.

[61] Yung-Hsiang Chen and Yen-Hui Huang. Timoshenko beam with tuned mass dampers and its design curves. *Journal of Sound and Vibration*, 278(4) :873–888, 2004.

[62] T Pinkaew, P Lukkunaprasit, and P Chatupote. Seismic effectiveness of tuned mass dampers for damage reduction of structures. *Engineering Structures*, 25(1) :39–46, 2003.

[63] JF Wang, CC Lin, and BL Chen. Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *International Journal of Solids and Structures*, 40(2) :465–491, 2003.

[64] RL Adkins, DIG Jones, and AD Nashif. Effect of tuned dampers on vibrations of simple structures. *AIAA Journal*, 5(2) :310–315, 1967.

[65] David IG Jones. Response and damping of a simple beam with tuned dampers. *The journal of the acoustical society of America*, 42(1) :50–53, 1967.

[66] JC Snowdon. Vibration of cantilever beams to which dynamic absorbers are attached. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 39(5A) :878–886, 1966.

[67] C Vemula, AN Norris, and GD Cody. Attenuation of waves in plates and bars using a graded impedance interface at edges. *Journal of Sound and Vibration*, 196(1) :107–127, 1996.

[68] MA Mironov. Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval. *Journal of Soviet Physics Acoustics-USSR*, 34(3) :318–319, 1988.

[69] Elizabeth Bowyer, Victor Krylov, and Daniel O'Boy. Damping of flexural vibrations in rectangular plates by slots of power-law profile. In *Acoustics 2012*, 2012.

[70] Elizabeth Bowyer, Daniel O'Boy, and Victor Krylov. Damping of flexural vibrations in composite plates and panels containing one- and two-dimensional acoustic black holes. In *Acoustics 2012*, 2012.

[71] Elizabeth Bowyer, Jeffrey Lister, Victor Krylov, and Daniel O'Boy. Experimental study of damping flexural vibrations in tapered turbofan blades. In *Acoustics 2012*, 2012.

[72] Simon Foucaud, Guilhem Michon, Yves Gourinat, Adrien Pelat, and François Gautier. Immersed acoustic black hole as a travelling wave absorber : understanding artificial cochlear mechanics. In *Acoustics 2012*, 2012.

[73] Vivien Denis, Adrien Pelat, and François Gautier. Simulation of vibrations of a 2d acoustic black hole placed in an infinite plate using the finite difference time domain method. In *Acoustics 2012*, 2012.

[74] Adrien Pelat, Jacques Cuenca, François Gautier, and Laurianne Barguet. Potentialities of the acoustic black hole effect for damping plate vibrations. In *Acoustics 2012*, 2012.

[75] Jacques Cuenca, Adrien Pelat, François Gautier, and Neil Ferguson. Improving the acoustic black hole effect for vibration damping in one-dimensional structures. In *Acoustics 2012*, 2012.

[76] Elizabeth P Bowyer and Victor V Krylov. A review of experimental investigations into the acoustic black hole effect and its applications for reduction of flexural vibrations and structure-borne sound. 2015.

[77] Philip A Feurtado and Stephen C Conlon. Experimental analysis of vibration and radiated sound power reduction using an array of acoustic black holes. *Inter-Noise2015, San Fransisco, CA (August 9–12, 2015)*, 2015.

[78] A Pelat, V Denis, and F Gautier. Experimental and theoretical study of the reflection coefficient of a abh beam termination. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 250, pages 5001–5009. Institute of Noise Control Engineering, 2015.

[79] Abdelhalim Azbaid El-Ouahabi, Victor V Krylov, and Daniel J O'Boy. Investigation of the acoustic black hole termination for sound waves propagating in cylindrical waveguides. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 250, pages 636–645. Institute of Noise Control Engineering, 2015.

[80] Liuxian Zhao, Stephen C Conlon, and Fabio Semperlotti. An experimental study of vibration based energy harvesting in dynamically tailored structures with embedded acoustic black holes. *Smart Materials and Structures*, 24(6) :065039, 2015.

[81] Stephen C Conlon, John B Fahnline, Micah R Shepherd, and Philip A Feurtado. Vibration control using grids of acoustic black holes : How many is enough ? In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 250, pages 3139–3152. Institute of Noise Control Engineering, 2015.

[82] Fabio Semperlotti and Hongfei Zhu. Acoustic meta-structures based on periodic acoustic black holes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :2265–2265, 2015.

[83] Xiuxian Jia, Yu Du, and Kunmin Zhao. Vibration control of variable thickness plates with embedded acoustic black holes and dynamic vibration absorbers. In *ASME 2015 Noise Control and Acoustics Division Conference at InterNoise*, 2015.

[84] Mikhail Mironov. Analytical solution of black hole equation and some consequences. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 1577–1581. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[85] Liling TANG, Li CHENG, Hongli JI, and Jinhao QIU. Enhanced acoustic black hole effect using a modified thickness profile. 2016.

[86] Vivien Denis, Cyril Touzé, and François Gautier. Effects of geometrical nonlinearities on the acoustic black hole effect. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 4431–4441. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[87] Philip Feurtado. Assessing acoustic black hole performance via wavenumber transforms. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 458–463. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[88] Wonju Jeon. Vibration damping using a spiral acoustic black hole. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 1300–1304. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[89] Wei Huang, Jinhao Qiu, and Li Cheng. Flexural wave focalization in plates with imperfect two-dimensional acoustic black hole. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 1718–1728. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[90] Jeong-Guon Ih, Ik-Jin Lee, and Jakob S Jensen. Truncated acoustic black hole structure with the optimized tapering shape and damping coating. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 6096–6103. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[91] Elizabeth Patricia Bowyer. Acoustic black hole manufacturing for practical applications and the effect of geometrical and material imperfection. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 3924–3934. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[92] Xiaoqiang Zhou and F Semperlotti. The energy absorption properties of helmholtz resonators enhanced by acoustic black holes. In *Proc. of the 45th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, INTERNOISE 2016*, 2016.

[93] Oriol Guasch and Patrícia Sánchez-Martín. Transfer matrices to analyze the acoustic black hole effect in duct terminations. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 2590–2598. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[94] Oskar Prill and Rebecca Busch. Finite element simulations of acoustic black holes as lightweight damping treatments for automotive body panels with application to full vehicle interior wind noise predictions. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 253, pages 5210–5221. Institute of Noise Control Engineering, 2016.

[95] VV Krylov and FJBS Tilman. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3) :605–619, 2004.

[96] Victor V Krylov. New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic'black holes'. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(5) :830–837, 2004.

[97] EP Bowyer and Victor V Krylov. Slots of power-law profile as acoustic black holes for flexural waves in metallic and composite plates. In *Structures*, volume 6, pages 48–58. Elsevier, 2016.

[98] VB Georgiev, J Cuenca, F Gautier, L Simon, and VV Krylov. Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect. *Journal of sound and vibration*, 330(11) :2497–2508, 2011.

[99] Vivien Denis, Adrien Pelat, and François Gautier. Scattering effects induced by imperfections on an acoustic black hole placed at a structural waveguide termination. *Journal of Sound and Vibration*, 362 :56–71, 2016.

[100] Simon Foucaud, Guilhem Michon, Yves Gourinat, Adrien Pelat, and François Gautier. Artificial cochlea and acoustic black hole travelling waves observation : Model and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 333(15) :3428–3439, 2014.

[101] Liling Tang, Li Cheng, Hongli Ji, and Jinhao Qiu. Characterization of acoustic black hole effect using a one-dimensional fully-coupled and wavelet-decomposed semi-analytical model. *Journal of Sound and Vibration*, 374 :172–184, 2016.

[102] Philip Feurtado and Stephen Conlon. Investigation of boundary-taper reflection for acoustic black hole design. *Noise Control Engineering Journal*, 63(5) :460–466, 2015.

[103] Vivien Denis, François Gautier, Adrien Pelat, and J Poittevin. Measurement and modelling of the reflection coefficient of an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 349 :67–79, 2015.

[104] V Denis, A Pelat, F Gautier, and B Elie. Modal overlap factor of a beam with an acoustic black hole termination. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2475–2488, 2014.

[105] EP Bowyer, DJ O'Boy, Victor V Krylov, and Jane L Horner. Effect of geometrical and material imperfections on damping flexural vibrations in plates with attached wedges of power law profile. *Applied Acoustics*, 73(5) :514–523, 2012.

[106] Wei Huang, Hongli Ji, Jinhao Qiu, and Li Cheng. Wave energy focalization in a plate with imperfect two-dimensional acoustic black hole indentation. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(6) :061004, 2016.

[107] Jae Yeon Lee and Wonju Jeon. Vibration damping using a spiral acoustic black hole a. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(3) :1437–1445, 2017.

[108] Vivien Denis, Adrien Pelat, Cyril Touzé, and François Gautier. Improvement of the acoustic black hole effect by using energy transfer due to geometric nonlinearity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016.

[109] Victor V Krylov and RETB Winward. Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates. *Journal of Sound and Vibration*, 300(1) :43–49, 2007.

[110] DJ O'Boy, Victor V Krylov, and V Kralovic. Damping of flexural vibrations in rectangular plates using the acoustic black hole effect. *Journal of Sound and Vibration*, 329(22) :4672–4688, 2010.

[111] Jacques Cuenca. *Wave models for the flexural vibrations of thin plates*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, France, 2009.

[112] EP Bowyer and Victor V Krylov. Experimental investigation of damping flexural vibrations in glass fibre composite plates containing one-and two-dimensional acoustic black holes. *Composite Structures*, 107 :406–415, 2014.

[113] Philip A Feurtado and Stephen C Conlon. Wavenumber transform analysis for acoustic black hole design. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(1) :718–727, 2016.

[114] EP Bowyer, DJ O'Boy, Victor V Krylov, and F Gautier. Experimental investigation of damping flexural vibrations in plates containing tapered indentations of power-law profile. *Applied Acoustics*, 74(4) :553–560, 2013.

[115] Philip A Feurtado and Stephen C Conlon. An experimental investigation of acoustic black hole dynamics at low, mid, and high frequencies. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(6) :061002, 2016.

[116] Stephen C Conlon, John B Fahnline, and Fabio Semperlotti. Numerical analysis of the vibroacoustic properties of plates with embedded grids of acoustic black holes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(1) :447–457, 2015.

[117] Hongfei Zhu and Fabio Semperlotti. Phononic thin plates with embedded acoustic black holes. *Physical Review B*, 91(10) :104304, 2015.

[118] Liling Tang and Li Cheng. Broadband locally resonant band gaps in periodic beam structures with embedded acoustic black holes. *Journal of Applied Physics*, 121(19) :194901, 2017.

[119] Liuxian Zhao, Stephen C Conlon, and Fabio Semperlotti. Broadband energy harvesting using acoustic black hole structural tailoring. *Smart Materials and Structures*, 23(6) :065021, 2014.

[120] Jose Javier Bayod. Application of elastic wedge for vibration damping of turbine blade. *Journal of System Design and Dynamics*, 5(5) :1167–1175, 2011.

[121] EP Bowyer and Victor V Krylov. Damping of flexural vibrations in turbofan blades using the acoustic black hole effect. *Applied Acoustics*, 76 :359–365, 2014.

[122] Alfonso Climente, Daniel Torrent, and José Sánchez-Dehesa. Omnidirectional broadband insulating device for flexural waves in thin plates. *Journal of Applied Physics*, 114(21) :214903, 2013.

[123] P.M.C. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*, volume 1,2. McGraw-Hill, 1953.

[124] C.C. Mow and Y.H. Pao. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Taylor and Francis Group, 1973.

[125] AN Norris and C. Vemula. Scattering of flexural waves on thin plates. *Journal of sound and vibration*, 181(1) :115–125, 1995.

[126] C Vemula and AN Norris. Flexural wave propagation and scattering on thin plates using mindlin theory. *Wave Motion*, 26(1) :1–12, 1997.

[127] Vernon A Squire and Tony W Dixon. Scattering of flexural waves from a coated cylindrical anomaly in a thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 236(2) :367–373, 2000.

[128] Michel Laug. *Traitement optique du signal et des images : bases théoriques et applications [Optical processing of the signal and images : theoretical bases and applications]*. Cepadues Editions, 1980.

[129] Craig F Bohren and Donald R Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.

[130] A Fresnel. Premier mémoire sur la diffraction de la lumière. *Verdet et al., op. cit.(12), i*, 12, 1815.

[131] Vasundara V Varadan. *Acoustic, electromagnetic, and elastic wave scattering–focus on the T-matrix approach : international symposium held at the Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, June 25-27, 1979*. Pergamon, 1980.

[132] Augustus Edward Hough Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179 :491–546, 1888.

[133] Siméon Denis Poisson. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques et des fluides. *Ann Chimie et Physique*, 42 :145–171, 1829.

[134] Stephen P Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245) :744–746, 1921.

[135] Stephan P Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253) :125–131, 1922.

[136] Philip McCord Morse, Acoustical Society of America, and American Institute of Physics. *Vibration and sound*, volume 2. McGraw-Hill New York, 1948.

[137] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger, and S Woinowsky. *Theory of plates and shells*. New York : McGraw-hill, 1959.

[138] Karl F Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover, New York, 1991.

[139] Jean-Louis Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermes Science, 2002.

[140] Eric Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.

[141] Hu-Nan Chu and George Hermann. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *Journal of applied mechanics*, 23 :532–540, 1956.

[142] WH Wittrick. Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on mindlin's plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 23(4) :441–464, 1987.

[143] Kim-Meow Liew, Y Xiang, S Kitipornchai, and CM Wang. *Vibration of Mindlin plates : programming the p-version Ritz method*. Elsevier, 1998.

[144] Yi-Yuan Yu. *Vibrations of elastic plates : linear and nonlinear dynamical modeling of sandwiches, laminated composites, and piezoelectric layers*. Springer Science & Business Media, 2012.

[145] Ya S Uflyand. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. *Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech*, 12(287-300) :8, 1948.

[146] RD Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. 1951.

[147] A.W. Leissa. *Vibration of Plates*. N70-18461. NASA, 1969.

[148] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Dover publications, 1965.

[149] Edmund T Whittaker and George N Watson. *A course of modern analysis : an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions, with an acount of the principal transcendental functions*. University Press, 1935.

[150] Norman William McLachlan. *Bessel functions for engineers.* Clarendon Press, 1961.

[151] Arnold F Nikiforov and Vasiliĭ Uvarov. *Fonctions spéciales de la physique mathématique.*

[152] Christopher M Linton and Philip McIver. *Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions.* CRC Press, 2001.

[153] Mihai Caleap. *Modélisation de la propagation d'ondes élastiques antiplanes dans des milieux multifissurés.* PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2009.

[154] Olivier Xeridat. *Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb [Experimental study of the propagation, the scattering and the localization of Lamb waves].* PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2011.

[155] WJ Parnell and PA Martin. Multiple scattering of flexural waves by random configurations of inclusions in thin plates. *Wave Motion*, 48(2) :161–175, 2011.

[156] Omar Aklouche, Adrien Pelat, Sylvain Maugeais, and François Gautier. Scattering of flexural waves by a pit of quadratic profile inserted in an infinite thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 375 :38–52, 2016.

[157] Frank Fahy and Paolo Gardonio. *Sound and Structural Vibration, 2nd Edition.* Elsevier, 2007.

[158] K.W. Liew, C.M. Wang, Y. Xiang, and S. Kitipornchai. *Vibration of Midlin plates.* Elsevier Science Ltd, 1998.

[159] DJ O'Boy and VV Krylov. Damping of flexural vibrations in circular plates with tapered central holes. *Journal of Sound and Vibration*, 330(10) :2220–2236, 2011.

[160] HD Conway. Some special solutions for the flexural vibration of discs of varying thickness. *Archive of Applied Mechanics*, 26(6) :408–410, 1958.

[161] E Durand. *Solutions numériques des équations algébriques [Numerical solutions of algebraic equations].* Paris : Masson, 1971.

[162] VB Georgiev, J Cuenca, F Gautier, L Simon, and VV Krylov. Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect. *Journal of sound and vibration*, 330(11) :2497–2508, 2011.

[163] M Callan, CM Linton, and DV Evans. Trapped modes in two-dimensional waveguides. *Journal of Fluid Mechanics*, 229 :51–64, 1991.

[164] PJ Cobelli, Vincent Pagneux, Agn Maurel, and Philippe Petitjeans. Experimental observation of trapped modes in a water wave channel. *EPL (Europhysics Letters)*, 88(2) :20006, 2009.

[165] R Porter. Trapped waves in thin elastic plates. *Wave Motion*, 45(1) :3–15, 2007.

[166] VV Krylov and FJBS Tilman. Acoustic 'black holes' for flexural waves as effective vibration dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3) :605–619, 2004.

[167] Michel Géradin and Daniel J Rixen. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics.* John Wiley & Sons, 2014.

[168] Isaac Newton, Daniel Bernoulli, Colin MacLaurin, and Leonhard Euler. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, volume 1. excudit G. Brookman ; impensis TT et J. Tegg, Londini, 1833.

[169] Isaac Newton. Principia mathematica. *Newton's principia*, page 634, 1934.

[170] Isaac Newton. *The Principia : mathematical principles of natural philosophy.* Univ of California Press, 1999.

[171] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal lattices.* Courier Corporation, 2003.

[172] John D Joannopoulos, Steven G Johnson, Joshua N Winn, and Robert D Meade. *Photonic crystals : molding the flow of light.* Princeton university press, 2011.

[173] Henri Bouasse. *Cristallographie géométrique : groupes de déplacements.* Ed. Techniques Ingénieur, 1929.

[174] Charles Kittel. *Introduction to solid state physics.* Wiley, 2005.

[175] Jean-Jacques Rousseau and Alain Gibaud. *Cristallographie géométrique et radiocristallographie-3ème édition-Livre+ compléments en ligne.* Dunod, 2007.

[176] Pierre A Deymier. *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, volume 173. Springer Science & Business Media, 2013.

[177] Gaston Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 12, pages 47–88, 1883.

[178] Emile Mathieu. *Traité de physique mathématique*, volume 1. Gauthier-Villars, Paris, 1873.

[179] George William Hill. *The collected mathematical works of George William Hill*. Carnegie institution of Washington, 1906.

[180] Robert Campbell and Joseph Pérès. Théorie générale de l'équation de mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique. *Masson et Cie*, 1955.

[181] Felix Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 52(7) :555–600, 1929.

[182] Aroune Duclos. *Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions*. PhD thesis, Université du Maine, 2007.

[183] Sarah Benchabane. *Guidage et filtrage des ondes dans les cristaux phononiques*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2006.

[184] Quentin Rolland. *Couplages acousto-optiques dans les cristaux photoniques et phononiques*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2013.

[185] DM Mead. Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from southampton, 1964–1995. *Journal of sound and vibration*, 190(3) :495–524, 1996.

[186] Rosa Martinezsala, J Sancho, Juan V Sánchez, Vicente Gómez, J Llinares, Francisco Meseguer, et al. Sound-attenuation by sculpture. *nature*, 378(6554) :241–241, 1995.

[187] Michael M Sigalas and Eleftherios N Economou. Elastic and acoustic wave band structure. *Journal of sound and vibration*, 158(2) :377–382, 1992.

[188] Manvir S Kushwaha, Peter Halevi, Leonard Dobrzynski, and Bahram Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical review letters*, 71(13) :2022, 1993.

[189] Zhilin Hou and Badreddine M Assouar. Modeling of lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method. *Physics Letters A*, 372(12) :2091–2097, 2008.

[190] Sarah Benchabane, Abdelkrim Khelif, J-Y Rauch, Laurent Robert, and Vincent Laude. Evidence for complete surface wave band gap in a piezoelectric phononic crystal. *Physical Review E*, 73(6) :065601, 2006.

[191] Saeed Mohammadi, Ali Asghar Eftekhar, William D Hunt, and Ali Adibi. High-q micromechanical resonators in a two-dimensional phononic crystal slab. *Applied Physics Letters*, 94(5) :051906, 2009.

[192] Tsung-Tsong Wu, Liang-Chen Wu, and Zi-Gui Huang. Frequency band-gap measurement of two-dimensional air/silicon phononic crystals using layered slanted finger interdigital transducers. *Journal of Applied Physics*, 97(9) :094916, 2005.

[193] William Henry Bragg. An introduction to crystal analysis. 1929.

[194] Zhengyou Liu, Xixiang Zhang, Yiwei Mao, YY Zhu, Zhiyu Yang, Che Ting Chan, and Ping Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485) :1734–1736, 2000.

[195] Jin-Chen Hsu and Tsung-Tsong Wu. Lamb waves in binary locally resonant phononic plates with two-dimensional lattices. *Applied physics letters*, 90(20) :201904, 2007.

[196] Gang Wang, Xisen Wen, Jihong Wen, Lihui Shao, and Yaozong Liu. Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures. *Physical review letters*, 93(15) :154302, 2004.

[197] W Xiao, GW Zeng, and YS Cheng. Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs. *Applied Acoustics*, 69(3) :255–261, 2008.

[198] OA Bauchau and JI Craig. Euler-bernoulli beam theory. In *Structural analysis*, pages 173–221. Springer, 2009.

[199] Wen Jihong Yu Dianlong Wang Gang and Zhao Honggang Liu Yaozong. Elastic wave band gaps in flexural vibrations of straight beams [j]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 4 :001, 2005.

[200] Jakob Søndergaard Jensen. Phononic band gaps and vibrations in one-and two-dimensional mass–spring structures. *Journal of Sound and Vibration*, 266(5) :1053–1078, 2003.

[201] Manvir S Kushwaha, P Halevi, G Martinez, L Dobrzynski, and B Djafari-Rouhani. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review B*, 49(4) :2313, 1994.

[202] Zong-Jian Yao, Gui-Lan Yu, Yue-Sheng Wang, and Zhi-Fei Shi. Propagation of bending waves in phononic crystal thin plates with a point defect. *International Journal of Solids and Structures*, 46(13) :2571–2576, 2009.

[203] Zong-jian Yao, Gui-lan Yu, Yue-sheng Wang, Zhi-fei Shi, and Jian-bao Li. Propagation of flexural waves in phononic crystal thin plates with linear defects. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 11(10) :827–834, 2010.

[204] James Hardy Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*, volume 87. Clarendon Press Oxford, 1965.

[205] Jean-Pierre Dedieu and Françoise Tisseur. Perturbation theory for homogeneous polynomial eigenvalue problems. *Linear algebra and its applications*, 358(1-3) :71–94, 2003.

[206] Françoise Tisseur and Karl Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM review*, 43(2) :235–286, 2001.

[207] Françoise Tisseur. Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications*, 309(1-3) :339–361, 2000.

[208] Dianlong Yu, Jihong Wen, Yaozong Liu, Jing Qiu, and Gang Wang. Flexural vibrations band gaps in periodic beams including rotary inertia and shear deformation effects. *Chinese Journal of Mechanical Engineering(English Edition)*, 19(1) :25–27, 2006.

[209] L Junyi, V Ruffini, and D Balint. Measuring the band structures of periodic beams using the wave superposition method. *Journal of Sound and Vibration*, 382 :158–178, 2016.

# Annexes

# Annexe A

# Diffusion par des obstacles de forme simple

Cette annexe est dédiée au développement de certains calculs nécessaires, qui permettent d'aboutir aux résultats présentés dans le chapitre 1. L'objectif est de détailler les coefficients intervenant dans les différents systèmes linéaires, liés aux trois diffuseurs étudiés. Les systèmes linéaires de l'inclusion rigide et du trou simple sont des sous-systèmes du système linéaire de l'inclusion souple (trou borgne) : les matrices de dimension $(2 \times 2)$, données par les Eqs. (1.35) et (1.43) constituent respectivement les blocs $(2 \times 2)$ haut à gauche et bas à gauche de la matrice donnée par l'Eq. (1.48). Idem pour le vecteur $\boldsymbol{S}$ dans l'Eq. (1.49) : il est composé par les deux vecteurs $\boldsymbol{S}$ donnés par les Eqs. (1.36) et (1.44). En conséquence, il est donc nécessaire de détailler uniquement les calculs liés au problème de l'inclusion souple.

Ci-dessous, les expressions des champs des déplacements transverses, pentes, moments fléchissants et des efforts tranchants de Kelvin-Kirchhoff utilisés dans les conditions de continuité données par l'Eq. (1.47).

$$W^{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n J_n(k_{f0} r) + A_n H_n^{(1)}(k_{f0} r) + B_n K_n(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta), \quad r \geq b, \tag{A.1}$$

$$\Theta(W^{ext}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{f0} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n J_n'(k_{f0} r) + A_n H_n^{(1)'}(k_{f0} r) + B_n K_n'(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta), \tag{A.2}$$

$$M(W^{ext}) = -\frac{D_0}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n S_J(k_{f0} r) + A_n S_H(k_{f0} r) + B_n S_K(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta), \tag{A.3}$$

$$V_0(W^{ext}) = -\frac{D_0}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ W_0 \varepsilon_n i^n T_J(k_{f0} r) + A_n T_H(k_{f0} r) + B_n T_K(k_{f0} r) \right] \cos(n\theta). \tag{A.4}$$

$$W^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ F_n J_n(k_{f1} r) + G_n I_n(k_{f1} r) \right] \cos(n\theta), \quad r \leq b, \tag{A.5}$$

$$\Theta(W^{int}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{f1} \left[ F_n J_n'(k_{f1} r) + G_n I_n'(k_{f1} r) \right] \cos(n\theta), \tag{A.6}$$

$$M(W^{int}) = -\frac{D_1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_n S_J(k_{f1}r) + G_n S_I(k_{f1}r)\right]\cos(n\theta), \tag{A.7}$$

$$V_0(W^{int}) = -\frac{D_1}{r^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_n T_J(k_{f1}r) + G_n T_I(k_{f1}r)\right]\cos(n\theta). \tag{A.8}$$

La substitution des Eqs. (A.1 - A.8) dans les conditions de continuité (1.47) mène aux Eqs. (1.48) et (1.49), où

$$S_{J_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu) - \chi^2\right] J_n(\chi) - (1-\nu)\chi J_n^{'}(\chi), \tag{A.9}$$

$$S_{H_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu) - \chi^2\right] H_n(\chi) - (1-\nu)\chi H_n^{'}(\chi), \tag{A.10}$$

$$S_{I_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu) + \chi^2\right] I_n(\chi) - (1-\nu)\chi I_n^{'}(\chi), \tag{A.11}$$

$$S_{K_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu) + \chi^2\right] K_n(\chi) - (1-\nu)\chi K_n^{'}(\chi), \tag{A.12}$$

$$T_{J_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu)\right] J_n(\chi) - \left[\chi(n^2(1-\nu) + \chi^2)\right] J_n^{'}(\chi), \tag{A.13}$$

$$T_{H_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu)\right] H_n(\chi) - \left[\chi(n^2(1-\nu) + \chi^2)\right] H_n^{'}(\chi), \tag{A.14}$$

$$T_{I_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu)\right] I_n(\chi) - \left[\chi(n^2(1-\nu) - \chi^2)\right] I_n^{'}(\chi), \tag{A.15}$$

$$T_{K_n}(\chi) = \left[n^2(1-\nu)\right] K_n(\chi) - \left[\chi(n^2(1-\nu) - \chi^2)\right] K_n^{'}(\chi). \tag{A.16}$$

La notation du coefficient de Poisson $\nu$ varie selon le milieu considéré : $\nu_0$ pour le milieu extérieur ($r > b$) et $\nu_1$ pour le milieu intérieur ($r < b$). Le nombre d'onde adimensionnel $\chi$ s'écrit comme :

$$\chi = \begin{cases} k_{f0}b = \alpha, & \text{si } \ r > b \\ \\ k_{f1}b = \beta, & \text{si } \ r < b \end{cases}. \tag{A.17}$$

# Annexe B

# Diffusion par un trou noir acoustique débouchant

Dans la première partie de cette annexe, on présente la démonstration de l'Eq. (2.5), concernant l'effort tranchant de Kelvin-Kirchhoff utilisé pour une plaque d'épaisseur variable. Dans la seconde partie, la méthodologie de calcul des constantes de propagation adimensionnelles, données dans le chapitre 2 par l'Eq. (2.15), est présentée. La dernière partie concerne les calculs liés à l'application des conditions de continuité et des conditions aux limites menant au système linéaire à inverser, présenté dans l'Eq. (2.17).

## B.1 Effort de Kelvin-Kirchhoff

L'opérateur aux dérivées partielles d'effort tranchant radial de Kelvin-Kirchhoff pour une plaque circulaire s'écrit de manière générale comme, [147] :

$$V(\cdot) = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}, \tag{B.1}$$

où le moment de torsion $M_{r\theta}$ et l'effort tranchant $Q_r$ sont définis par les Eqs. (1.6) et (1.7). En prenant en compte la variation axisymétrique de la rigidité de flexion dans les deux dernières équations, l'effort de Kelvin-Kirchhoof recherché est

$$\begin{aligned} V(\cdot) \;=\; & -(D)\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial r^3} - \left(\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{D}{r}\right)\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2} + \left(\frac{D}{r^2} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\right)\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \\ & - \left(\frac{D(2-\nu)}{r^2}\right)\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\frac{D(3-\nu)}{r^3} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial D}{\partial r}\right)\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2} \end{aligned}, \tag{B.2}$$

qui est défini dans le cas du trou noir par l'Eq. (2.5).

## B.2 Constantes de propagation

La relation de dispersion donnée par l'Eq. (2.15) est calculée suite à la résolution de l'équation polynômiale d'ordre 4 suivante :

$$\alpha_4 K^4 + \alpha_3 K^3 + \alpha_2 K^2 + \alpha_1 K + \alpha_0 = 0. \tag{B.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= 1, \\
\alpha_3 &= 8, \\
\alpha_2 &= -2n^2 + 6\nu_0 + 10, \\
\alpha_1 &= -8n^2 + 24\nu_0 - 24, \\
\alpha_0 &= n^2(n^2 - 30\nu_0 + 14) - \frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 r_0^{-4}},
\end{aligned} \tag{B.4}$$

où $K$ représente la constante de propagation adimensionnelle recherchée.
La méthode de *Ludovico Ferrari* (1522-1565), [161], est appliquée pour pour rechercher les racines de l'Eq. (B.3). Cette méthode se déroule en trois étapes : (1) *changement de variable*, (2) *factorisation de l'équation* et (3) *fin de résolution.*

- 1$^{\text{ère}}$ **étape :** *changement de variable*

Le changement de variable utilisé s'écrit comme :

$$K = \widehat{K} - \frac{\alpha_3}{4\alpha_4}, \tag{B.5}$$

où $\widehat{K}$ est la nouvelle inconnue de l'équation. La substitution de l'Eq. (B.5) dans l'Eq. (B.3) permet de faire disparaître les termes en $\widehat{K}^3$ et ramener l'Eq. (B.3) à

$$\widehat{K}^4 + c_1\widehat{K}^2 + c_2\widehat{K} + c_3 = 0, \tag{B.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{3}{8}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \\
c_2 &= \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)^3 - \frac{\alpha_3\alpha_2}{2\alpha_4^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \\
c_3 &= -3\left(\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}\right)^4 + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{16\alpha_4^3} - \frac{\alpha_3\alpha_1}{4\alpha_4^2} + \frac{\alpha_0}{\alpha_4}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

En substituant les Eqs. (B.4) et (B.7) dans l'Eq. (B.6), on obtient

$$\widehat{K}^4 + \left[-14 + 6\nu_0 - 2n^2\right]\widehat{K}^2 + \left[n^2(n^2 + 22 - 30\nu_0) - 24\nu_0 + 40 - \frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^* h_0^2 r_0^{-4}}\right] = 0. \tag{B.8}$$

- 2$^{\text{ème}}$ **étape :** *factorisation de l'équation*

Le but de cette étape est de factoriser l'Eq. (B.8). L'astuce est de constater que pour n'importe quelle valeur de $s$, on peut écrire

$$\widehat{K}^4 = \left(\widehat{K}^2 + s\right)^2 - 2s\widehat{K}^2 - s^2. \tag{B.9}$$

La substitution de l'Eq. (B.9) dans l'Eq. (B.8) donne

$$\begin{aligned}\left(\widehat{K}^2+s\right)^2 &= \left[2s-(-14+6\nu_0-2n^2)\right]\widehat{K}^2 \\ &+ \left[s^2-\left(n^2(n^2+22-30\nu_0)-24\nu_0+40-\frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^*h_0^2r_0^{-4}}\right)\right].\end{aligned} \tag{B.10}$$

Le terme de droite de l'Eq. (B.10) est un polynôme d'ordre 2 en $\widehat{K}$. Afin de le factoriser, on cherche les valeurs de $s$ pour lesquelles son discriminant s'annule. Ce discriminant s'écrit :

$$\Delta=-4\left[2s-(-14+6\nu_0-2n^2)\right]\left[s^2-\left(n^2(n^2+22-30\nu_0)-24\nu_0+40-\frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^*h_0^2r_0^{-4}}\right)\right]. \tag{B.11}$$

Les valeurs de $s$ pour lesquelles l'Eq. (B.11) s'annule sont :

$$s_1=-7+3\nu_0-n^2, \tag{B.12}$$

$$s_{2,3}=\pm\sqrt{n^2(n^2+22-30\nu_0)-24\nu_0+40-\frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^*h_0^2r_0^{-4}}}. \tag{B.13}$$

- 3$^{\text{ème}}$ **étape :** *fin de la résolution*

Une seule valeur de $s$ suffit pour la résolution du problème. En rapportant l'Eq. (B.12) dans l'Eq. (B.10), on obtient

$$(\widehat{K}^2+s_1)^2=(c_4\widehat{K}+c_5)^2, \quad c_4 \text{ est réel ou complexe,} \tag{B.14}$$

où $c_4^2=2s_1-c_1$, et pour $c_5$, on distingue deux situations :

$$c_5=\begin{cases}-\dfrac{c_2}{2\alpha_4}, & \text{si } c_4^2\neq 0\\ \sqrt{s_1^2-c_3}, & \text{si } c_4^2=0\end{cases}. \tag{B.15}$$

Sachant que la constante $c_4^2$ est nulle, l'Eq. (B.14) se transforme par identité remarquable à

$$\left(\widehat{K}^2+s_1+c_5\right)\left(\widehat{K}^2+s_1-c_5\right)=0, \tag{B.16}$$

pour laquelle les solutions s'écrivent :

$$\widehat{K}_{1,2}=\pm\sqrt{-s_1-c_5}, \tag{B.17}$$

$$\widehat{K}_{3,4}=\pm\sqrt{-s_1+c_5}. \tag{B.18}$$

Puisqu'on avait au départ $K=\widehat{K}-\dfrac{\alpha_3}{4\alpha_4}$, il reste donc qu'à soustraire $\dfrac{\alpha_3}{4\alpha_4}$ aux quatre solutions $\widehat{K}_{1,2}$ et $\widehat{K}_{3,4}$ pour trouver les solutions de l'Eq. (B.3) sous la forme :

$$\boxed{K_{p,n}=-2\pm\sqrt{7-3\nu_0+n^2\pm\sqrt{8n^2(3\nu_0-1)+9(1-\nu_0)^2+\frac{12\rho\omega^2(1-\nu_0^2)}{E_0^*h_0^2r_0^{-4}}}}}, \tag{B.19}$$

avec $p=1$ à 4.

## B.3 Système linéaire

Les expressions du champ du déplacement, pente, moment fléchissant et d'effort tranchant de Kelvin-Kirchhoff à l'intérieur du trou noir débouchant, s'écrivent comme :

$$W^{TN} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{4} \left[ C_{p,n} \left( \frac{\widehat{r}}{r_0} \right)^{ik_{p,n} r_0} \right] \right\} \cos(n\theta), \tag{B.20}$$

$$\Theta(W^{TN}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{4} \left[ \frac{C_{p,n}}{\widehat{r}} ik_{p,n} r_0 \left( \frac{\widehat{r}}{r_0} \right)^{ik_{p,n} r_0} \right] \right\} \cos(n\theta), \tag{B.21}$$

$$M(W^{TN}) = -D_{TN} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{4} \left[ \frac{C_{p,n}}{\widehat{r}^2} \gamma_{p,n} \left( \frac{\widehat{r}}{r_0} \right)^{ik_{p,n} r_0} \right] \right\} \cos(n\theta), \tag{B.22}$$

$$V(W^{TN}) = -D_{TN} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{4} \left[ \frac{C_{p,n}}{\widehat{r}^3} \xi_{p,n} \left( \frac{\widehat{r}}{r_0} \right)^{ik_{p,n} r_0} \right] \right\} \cos(n\theta), \tag{B.23}$$

Les expressions équivalentes pour le milieu extérieur sont données par les Eqs. (A.1 - A.4). En substituant les Eqs. (A.1) et (B.20) dans les expressions des conditions de continuité (2.4), et l'Eq. (B.20) dans les conditions aux limites (2.6), le système donné dans le chapitre 2 par les Eqs. (2.18) et (2.19) est alors obtenu avec les coefficients suivants :

$$\gamma_{p,n} = -k_{p,n}^2 r_0^2 + ik_{p,n} r_0 (\nu_0 - 1) - \nu_0 n^2, \quad r_0 = b - a', \tag{B.24}$$

$$\xi_{p,n} = -ik_{p,n}^3 r_0^3 - 4k_{p,n}^2 r_0^2 + \left[ 6(\nu_0 - 1) - n^2(2 - \nu_0) \right] ik_{p,n} r_0 + n^2(3 - 7\nu_0), \tag{B.25}$$

$$\Gamma_{p,n} = \gamma_{p,n} \left[ \frac{r_1}{r_0} \right]^{ik_{p,n} r_0}, \quad r_1 = a - a', \tag{B.26}$$

$$\Xi_{p,n} = \xi_{p,n} \left[ \frac{r_1}{r_0} \right]^{ik_{p,n} r_0}. \tag{B.27}$$

# Annexe C

# Éléments complémentaires de calculs : méthode des différences finies

Cette annexe fournit quelques éléments complémentaires de calcul concernant la méthode de différences finies utilisée dans le chapitre 3. Trois types de trous noirs (débouchant, non-débouchant et non débouchant avec masse centrale) sont étudiés dans ce chapitre en utilisant un schéma aux différences finies couplé à la méthode ondulatoire présentée dans les chapitres 1 et 2. Les matrices correspondant aux différents types de trous noirs sont données par les Eqs. (3.13), (3.17) et (3.24) respectivement. Il est donc question dans cette annexe de détailler la démarche d'obtention de ces matrices.

La méthode de différences finies est appliquée uniquement dans la zone du trou noir, où l'épaisseur est variable. La figure C.1 montre le schéma de discrétisation utilisé dans la zone $r \in [a; b]$.

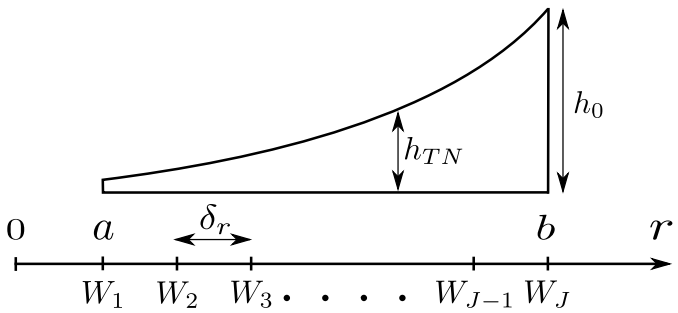



FIGURE C.1 – Schéma utilisé pour discrétisation.

## C.1 Discrétisation de l'équation du mouvement

L'équation du mouvement de flexion d'une plaque circulaire d'épaisseur variable est ici rappelée :

$$\lambda_4(\widehat{r})\frac{\partial^4 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^4} + \lambda_3(\widehat{r})\frac{\partial^3 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^3} + \lambda_2(\widehat{r})\frac{\partial^2 W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}^2} + \lambda_1(\widehat{r})\frac{\partial W_{n,j}^{TN}}{\partial \widehat{r}} + \lambda_0(\widehat{r})W_{n,j}^{TN} = 0, \quad \text{(C.1)}$$

où les coefficients $\lambda_i$ ($i = 0$ à 4) sont donnés dans le chapitre 3 par l'Eq. (3.10), et $W_{n,j}^{TN}$ représente le déplacement dans le trou noir discrétisé. L'équation du mouvement

discrétisée, donnée par l'Eq. (3.11) est obtenue en substituent les approximations des dérivées centrées en Eq. (C.2) dans l'Eq. (C.1).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}} &\approx \frac{-W_{j-1} + 0\boldsymbol{W_j} + W_{j+1}}{2\delta_r}, \\
\frac{\partial^2 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^2} &\approx \frac{W_{j-1} - 2\boldsymbol{W_j} + W_{j+1}}{\delta_r^2}, \\
\frac{\partial^3 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^3} &\approx \frac{-W_{j-2} + 2W_{j-1} + 0\boldsymbol{W_j} - 2W_{j+1} + W_{j+2}}{2\delta_r^3}, \\
\frac{\partial^4 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^4} &\approx \frac{W_{j-2} - 4W_{j-1} + 6\boldsymbol{W_j} - 4W_{j+1} + W_{j+2}}{\delta_r^4},
\end{aligned} \tag{C.2}$$

## C.2 Discrétisation des conditions aux limites

La discrétisation des conditions aux limites implique l'utilisation des approximations décentrées des dérivées : à droite à l'interface $r = a$ et à gauche en $r = b$ (voir Fig C.1).

### C.2.1 Discrétisation décentrée à droite : $r = a$

Les approximations décentrées à droite des dérivées sont données de façon générale dans l'équation (C.3). Il suffit alors de remplacer l'indice $j$ par 1 pour décrire le déplacement à l'interface $r = a$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}} &\approx \frac{-\boldsymbol{W_j} + W_{j+1}}{\delta_r}, \\
\frac{\partial^2 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^2} &\approx \frac{\boldsymbol{W_j} - 2W_{j+1} + W_{j+2}}{\delta_r^2}, \\
\frac{\partial^3 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^3} &\approx \frac{-\boldsymbol{W_j} + 3W_{j+1} - 3W_{j+2} + W_{j+3}}{\delta_r^3}.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Le déplacement dans le trou noir s'écrit comme :

$$W^{TN}(\widehat{r}, \theta) \approx \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{TN}(\widehat{r_j}) \cos(n\theta), \quad a \leq r \leq b, \tag{C.4}$$

où $W_n^{TN}(\widehat{r_j}) \approx W_j$ ($j = 1, 2, \ldots J$).

En utilisant Eq. (C.4) et en substituant Eq. (C.3) dans Eqs. (1.2), (1.4) et (2.5), on obtient :

$$W^{TN}|_{r=a} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{W_1} \cos(n\theta), \tag{C.5}$$

$$\Theta(W^{TN})|_{r=a} \approx \sum_{n=0}^{\infty} [a_d \boldsymbol{W_1} + b_d W_2] \cos(n\theta), \tag{C.6}$$

$$M(W^{TN})|_{r=a} \approx -D_{eq}|_{r=a} \sum_{n=0}^{\infty} [c_d \boldsymbol{W_1} + d_d W_2 + e_d W_3] \cos(n\theta), \tag{C.7}$$

$$V(W^{TN})|_{r=a} \approx -D_{eq}|_{r=a} \sum_{n=0}^{\infty} [f_d \boldsymbol{W_1} + g_d W_2 + l_d W_3 + p_d W_4] \cos(n\theta), \tag{C.8}$$

avec

$$a_d = -\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.9}$$

$$b_d = +\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.10}$$

$$c_d = +\frac{1}{\delta_r^2} - \frac{\nu_{eq}}{r_1}\frac{1}{\delta_r} - \frac{\nu_{eq} n^2}{r_1^2}, \tag{C.11}$$

$$d_d = -\frac{2}{\delta_r^2} + \frac{\nu_{eq}}{r_1}\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.12}$$

$$e_d = +\frac{1}{\delta_r^2}, \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned} f_d &= -\frac{1}{\delta_r^3} + \frac{1}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} + \frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{\delta_r}\left(\frac{\nu_{eq}}{r_1}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} - \frac{(2-\nu_{eq})n^2+1}{r_1^2}\right) \\ &- \frac{\nu_{eq} n^2}{r_1^2}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} + \frac{(3-\nu_{eq})n^2}{r_1^3}, \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$g_d = +\frac{3}{\delta_r^3} - \frac{2}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} + \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\delta_r}\left(\frac{\nu_{eq}}{r_1}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} - \frac{(2-\nu_{eq})n^2+1}{r_1^2}\right), \tag{C.15}$$

$$l_d = -\frac{3}{\delta_r^3} + \frac{1}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=a} + \frac{1}{r_1}\right), \tag{C.16}$$

$$p_d = +\frac{1}{\delta_r^3}. \tag{C.17}$$

### C.2.2 Discrétisation décentrée à gauche : $r = b$

Le déplacement à l'interface $r = b$ est obtenu cette fois en remplaçant $j$ par $J$. Les approximations à gauche s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}} &\approx \frac{-W_{j-1} + \boldsymbol{W_j}}{\delta_r}, \\ \frac{\partial^2 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^2} &\approx \frac{W_{j-2} - 2W_{j-1} + \boldsymbol{W_j}}{\delta_r^2}, \\ \frac{\partial^3 W_n^{TN}(\widehat{r_j})}{\partial \widehat{r}^3} &\approx \frac{-W_{j-3} + 3W_{j-2} - 3W_{j-1} + \boldsymbol{W_j}}{\delta_r^3}. \end{aligned} \tag{C.18}$$

En utilisant Eq. (C.4) et en substituant Eq. (C.18) dans Eqs. (1.2), (1.4) et (2.5), on obtient :

$$W^{TN}|_{r=b} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{W_J} \cos(n\theta), \tag{C.19}$$

$$\Theta(W^{TN})|_{r=b} \approx \sum_{n=0}^{\infty} [a_g W_{J-1} + b_g \boldsymbol{W_J}] \cos(n\theta), \tag{C.20}$$

$$M(W^{TN})|_{r=b} \approx -D_{eq}|_{r=b} \sum_{n=0}^{\infty} [c_g W_{J-2} + d_g W_{J-1} + e_g \boldsymbol{W_J}] \cos(n\theta), \tag{C.21}$$

$$V(W^{TN})|_{r=b} \approx -D_{eq}|_{r=b} \sum_{n=0}^{\infty} [f_g W_{J-3} + g_g W_{J-2} + l_g W_{J-1} + p_g \boldsymbol{W_J}] \cos(n\theta), \tag{C.22}$$

où

$$a_g = -\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.23}$$

$$b_g = +\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.24}$$

$$c_g = +\frac{1}{\delta_r^2}, \tag{C.25}$$

$$d_g = -\frac{2}{\delta_r^2} - \frac{\nu_{eq}}{r_0}\frac{1}{\delta_r}, \tag{C.26}$$

$$e_g = +\frac{1}{\delta_r^2} + \frac{\nu_{eq}}{r_0}\frac{1}{\delta_r} - \frac{\nu_{eq} n^2}{r_0^2}, \tag{C.27}$$

$$f_g = -\frac{1}{\delta_r^3}, \tag{C.28}$$

$$g_g = +\frac{3}{\delta_r^3} + \frac{1}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} + \frac{1}{r_0}\right), \tag{C.29}$$

$$l_g = -\frac{3}{\delta_r^3} - \frac{2}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} + \frac{1}{r_0}\right) - \frac{1}{\delta_r}\left(\frac{\nu_{eq}}{r_0}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} - \frac{(2-\nu_{eq})n^2+1}{r_0^2}\right), \tag{C.30}$$

$$\begin{aligned} p_g &= +\frac{1}{\delta_r^3} + \frac{1}{\delta_r^2}\left(\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} + \frac{1}{r_0}\right) + \frac{1}{\delta_r}\left(\frac{\nu_{eq}}{r_0}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} - \frac{(2-\nu_{eq})n^2+1}{r_0^2}\right) \\ &- \frac{\nu_{eq} n^2}{r_0^2}\frac{D'_{eq}}{D_{eq}}|_{r=b} + \frac{(3-\nu_{eq})n^2}{r_0^3}. \end{aligned} \tag{C.31}$$

# Annexe D

# Mesure du facteur de perte du film viscoélastique utilisé

Le film adhésif viscoélastique utilisé dans les simulations présentées dans le chapitre 3 et les tests expérimentaux du chapitre 5, est caractérisé par DMA (Dynamical Mechanical Analysis). L'échantillon a été sollicité en cisaillement à une fréquence de 1 Hz dans la plage des températures allant de $-100$ à 100 °C avec une rampe de 3 °C/min. A partir de ce test, le module de cisaillement, le module d'Young et le facteur de perte sont estimés dans la gamme de fréquences $[10^{-4} - 10^{6}]$ Hz à une température de 20 °C. Les résultats de la DMA ont montré que cet adhésif présente des propriétés intéressantes, notamment en termes d'amortissement viscoélastique : le facteur de perte mesuré est toujours supérieur à 100 % et peut atteindre une valeur de 175 % entre 100 et 200 Hz (Fig D.1).

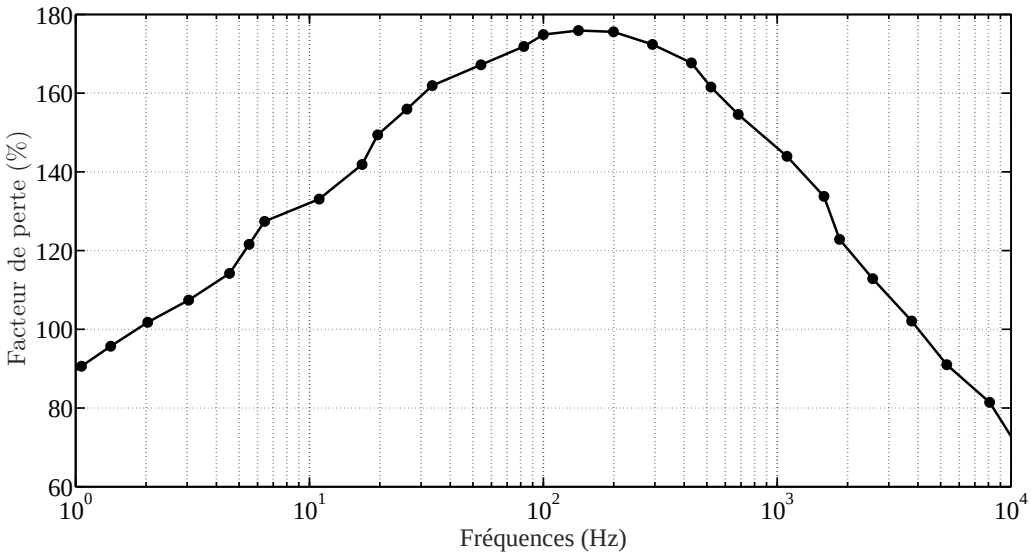



FIGURE D.1 – Mesure du facteur de perte en fonction de la fréquence du film adhésif viscoélastique utilisé comme revêtement.

# Thèse de Doctorat

Omar AKLOUCHE

## Réduction des niveaux vibratoires d'un panneau au moyen de trous noirs acoustiques structurés en réseau périodique : conception d'une méta-plaque

**Résumé**

Le "Trou Noir Acoustique" (TNA) constitue un moyen passif de réduction des vibrations des structures sans pour autant augmenter leur masse. Il s'agit d'un amincissement local de la structure, revêtu d'un matériau viscoélastique. L'effet TNA résulte alors de l'augmentation locale de l'amplitude vibratoire, qui sollicite fortement le revêtement, donnant lieu à un amortissement important. Une analyse détaillée des mécanismes de dissipation du TNA est réalisée : la diffusion des ondes de flexion par un TNA est étudiée lorsque ce dernier est inséré dans une plaque infinie. On montre que le revêtement induit un amortissement local important, permettant d'augmenter significativement l'amortissement global. Le TNA étant surtout efficace en hautes fréquences (HF), il est périodisé sur une plaque pour tirer parti des bandes interdites en basses fréquences (BF). Deux réseaux (carré et triangulaire) sont étudiés numériquement par la méthode PWE et expérimentalement par mesure de mobilités vibratoires. Les résultats montrent que la plaque est à la fois amortie en BH par effet de réseau et en HF par l'effet TNA.

**Mots clés**

Trou noir acoustique, Amortissement vibratoire, Diffusion d'ondes, Réseaux périodiques.

**Abstract**

The "Acoustic Black Hole" (ABH) is a passive device of reducing vibrations of structures without increasing their mass. It consists in a local thinning of the structure, coated with a thin layer of viscoelastic material. The ABH effect results from the local increase in vibratory magnitude, which strongly solicits the coating, giving rise to local significant damping. A detailed analysis of the mechanisms of dissipation of the ABH is carried out : the scattering of bending waves by an ABH is studied when the latter is inserted in an infinite thin plate. It is shown that the coating induces a significant local damping, allowing to significantly increase the global damping. The ABH is especially effective at high frequencies (HF), it is periodized on a plate to take advantage of the band gaps effect at low frequencies (LF). Two lattices (square and triangular) are studied numerically by the PWE method and experimentally by measuring vibratory mobilities. The results show that the plate is damped at the same time in LF by the lattice effect and in HF by the ABH effect.

**Key Words**

Acoustic black hole, Vibratory damping, Wave scattering, periodic lattices.

Université Bretagne Loire