



HAL
open science

Contribution au diagnostic et pronostic des systèmes à évènements discrets temporisés par réseaux de Petri stochastiques

Rabah Ammour

► **To cite this version:**

Rabah Ammour. Contribution au diagnostic et pronostic des systèmes à évènements discrets temporisés par réseaux de Petri stochastiques. Automatique. Normandie Université, 2017. Français. NNT : 2017NORMLH21 . tel-01720312

HAL Id: tel-01720312

<https://theses.hal.science/tel-01720312>

Submitted on 1 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Automatique, Signal, Productique, Robotique

Préparée au sein de « Université le Havre Normandie »

Contribution au Diagnostic et Pronostic des Systèmes à Événements Discrets Temporisés par Réseaux de Petri Stochastiques

Présentée et soutenue par

Rabah AMMOUR

Soutenue le 11/12/2017 devant le jury composé de :

M. Jean-Jacques LESAGE	Professeur des Universités / LURPA / ENS Paris-Saclay	Rapporteur
M. Mohamed GHAZEL	Chargé de Recherche - HDR / IFSTTAR	Rapporteur
Mme Isabel DEMONGODIN	Professeur des Universités / LSIS / Université de Marseille	Examinatrice
Mme Louise TRAVE	Directeur de Recherche / LAAS-CNRS / Université de Toulouse	Examinatrice
M. Édouard LECLERCQ	Maitre de Conférences / Université le Havre Normandie	Encadrant de thèse
M. Éric SANLAVILLE	Professeur des Universités / Université le Havre Normandie	Co-directeur de thèse
M. Dimitri LEFEBVRE	Professeur des Universités / Université le Havre Normandie	Co-directeur de thèse

Laboratoire GREAH (EA 3220)



Remerciements

Cette thèse de doctorat était une aventure unique et passionnante. Une expérience enrichissante qui m'a beaucoup apporté sur tous les plans. Elle n'aurait cependant pas été vécue ainsi sans les nombreuses personnes que j'ai eu l'honneur et le plaisir de côtoyer et qui m'ont aidé, de près ou de loin, à atteindre mes objectifs.

Ainsi, je tiens à exprimer ma forte reconnaissance à mes directeurs de thèse : M. Dimitri LEFEBVRE et M. Éric SANLAVILLE ainsi qu'à mon encadrant M. Édouard LECLERCQ, d'abord pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'acceptant dans cette aventure, ensuite pour leur disponibilité de tous les instants, leur remarquable générosité et leur précieux conseils prodigués durant toutes ces années de thèse. Au-delà de mon encadrement qu'ils ont mené avec grande énergie, ils ont été un soutien permanent sur le plan personnel et professionnel. Je veux avec ces quelques mots leur exprimer toute ma gratitude. Ce travail est aussi le vôtre !

Je tiens aussi à remercier M. Jean-Jacques LESAGE et M. Mohamed GHAZEL pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour le temps qu'ils ont consacré, malgré leurs charges et leurs responsabilités, à l'évaluation de mes travaux avec soin. Je remercie également Mme Louise TRAVE pour avoir acceptée de présider ma soutenance de thèse et Mme Isabel DEMONGODIN d'en être l'examinatrice. Merci pour le temps et l'effort que vous m'avez consacrés et de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon Jury de thèse.

Cette thèse s'est déroulée au sein du Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique du Havre (GREAH). Je tiens à remercier tous mes ami(e)s, collègues, enseignants et personnels du laboratoire. Mes remerciements s'adressent également aux membres du laboratoire LITIS ainsi que ceux du département Génie Mécanique et Productique (GMP) de l'IUT du Havre qui m'ont chaleureusement accueilli au sein de l'équipe enseignante.

Mes sincères remerciements vont aussi à M. Saïd AMARI qui m'a accueilli et initié au monde de la recherche scientifique durant ma formation et mon stage de Master au laboratoire LURPA de l'ENS Cachan. Merci pour ton amitié, tes conseils et ton soutien permanent.

Je remercie tous les membres du Club d'Aïkido René VDB du Havre, et particulièrement Brice, qui m'ont permis de m'évader et de m'améliorer dans ma pratique de ce sport.

Je ne peux terminer sans adresser mes plus profonds et sincères remerciements aux êtres qui me sont le plus chers. Je pense bien évidemment à mes très chers parents à qui je dois tout et à mes frères et sœurs et leurs familles qui m'ont toujours soutenu. Je leur dédie ce mémoire de thèse de doctorat et leur exprime tout mon amour. Je n'aurais jamais pu aller aussi loin sans vous. Je vous remercie infiniment et j'espère vous rendre fiers. A ma tendre femme qui m'a toujours soutenu. Ton amour, ton regard et ton sourire donnent un sens à ma vie, cet aboutissement est aussi le tien. Je dédie également ce mémoire à mon très cher oncle Belaïd et sa famille, à ma grand-mère Chabha, à ma belle-famille, tous mes cousins et cousines, tantes et oncles ainsi qu'à tous mes ami(e)s.

A mes très chers Parents *Saliha et Arezki*
A ma Femme chérie *Souraya*
A mes très chers Frères et Sœurs
Nadia, Samia, Farid, Djamel, Dalila
A toute ma Famille et Belle Famille

Table des matières

Introduction Générale	1
Chapitre 1. Formalismes et Méthodes pour le Diagnostic et le Pronostic des SED ...	7
1.1. Introduction	9
1.2. Quelques formalismes pour le diagnostic et le pronostic des SED.....	9
1.2.1. Automates à états finis.....	10
1.2.2. Réseaux de Petri	13
1.2.3. Réseaux de Petri partiellement mesurés	16
1.2.4. Réseaux de Petri stochastiques temporisés partiellement mesurés.....	19
1.3. Méthodes pour le diagnostic des SED	25
1.3.1. Approche par diagnostiqueur	25
1.3.2. Approche d'accessibilité de base.....	27
1.3.3. Approche graphe des classes d'états	30
1.3.4. Positionnement.....	32
1.4. Méthodes pour le pronostic des SED.....	34
1.4.1. Pronostic des automates à états finis.....	34
1.4.2. Pronostic des automates probabilistes.....	35
1.4.3. Pronostic des automates temporisés	37
1.4.4. Positionnement.....	38
1.5. Conclusion	39
Chapitre 2. Diagnostic des Réseaux de Petri Partiellement Mesurés	41
2.1. Introduction	43
2.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP non temporisés.....	43
2.3. Calcul des trajectoires compatibles	49
2.3.1. Approche par LMI	50
2.3.2. Approche incrémentale	52
2.4. Degrés de croyance des fautes (beliefs).....	58
2.5. Conclusion	59
Chapitre 3. Diagnostic des Réseaux de Petri Stochastiques Temporisés Partiellement Mesurés	61
3.1. Introduction	63
3.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP temporisés.....	63

3.3.	Probabilité des trajectoires partiellement temporisées.....	65
3.3.1.	Trajectoires compatibles partiellement temporisées.....	65
3.3.2.	Calcul de la probabilité des trajectoires.....	67
3.4.	Probabilité des fautes.....	72
3.5.	Datation des fautes.....	74
3.6.	Conclusion	79
Chapitre 4. Estimation d'Etat et Pronostic des RdP Stochastiques Temporisés Partiellement Mesurés		81
4.1.	Introduction	83
4.2.	Etat de l'art	83
4.2.1.	Etat de l'art sur l'estimation d'état des RdP.....	83
4.2.2.	Etat de l'art sur le pronostic des RdP	84
4.3.	Estimation d'état.....	86
4.4.	Pronostic des défauts	88
4.4.1.	<i>lmax-pronostic</i>	90
4.4.2.	<i>(ρ, δ)-pronostic</i>	96
4.5.	Estimation de la durée de vie résiduelle.....	102
4.6.	Conclusion	107
Chapitre 5. Application à un système de distribution et de tri.....		109
5.1.	Introduction	111
5.2.	Description et modélisation du système.....	111
5.3.	Diagnostic des fautes.....	114
5.4.	Pronostic des fautes.....	119
5.5.	Estimation de la durée de vie résiduelle.....	122
5.6.	Conclusion	126
Conclusion Générale & Perspectives		127
6.1.	Conclusions	127
6.2.	Perspectives.....	129

Liste des Figures

1.1	Exemple d'un automate à états finis déterministe.....	10
1.2	Exemple d'un automate probabiliste.....	12
1.3	Exemple d'un automate temporisé.....	13
1.4	Exemple simple d'un RdP.....	16
1.5	Exemple d'un RdP partiellement mesuré et de différentes configurations.....	18
1.6	Exemple d'un RdPS partiellement mesuré.....	22
1.7	Chaine de Markov du RdPS de la Figure 1.4.....	25
1.8	Exemple d'un automate et de son diagnostiqueur.....	26
1.9	Diagnostic de la faute de l'Exemple 1.6.....	27
1.10	Exemple d'un RdP étiqueté.....	28
1.11	MBRG du RdP de la Figure 1.10.....	29
1.12	BRD du RdP de la Figure 1.10.....	29
1.13	Exemple simple d'un RdP T-temporel.....	31
1.14	SCG associé au RdP T-temporel de la Figure 1.10.....	32
1.15	Exemple d'un automate à états finis et de son diagnostiqueur.....	35
1.16	Exemple d'un automate probabiliste.....	36
1.17	Exemple d'un automate temporisé (Cassez & Grastien 2013).....	37
2.1	Calcul des trajectoires compatibles : une croix indique que la trajectoire n'est plus compatible avec la mesure considérée.....	54
2.2	Le système de communication considéré.....	56
2.3	Modèle du système de communication.....	57
3.1	Exemple simple d'un RdPS partiellement mesuré.....	71
3.2	Erreur sur la probabilité de la faute f pour MT_1 et MT_2	74
3.3	Représentation de la date d'occurrence de la faute.....	75
3.4	Exemple de dates d'occurrence de la faute et représentation de l'intervalle $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+n}]$ pour $n > 1$	76
3.5	Distribution de la date d'occurrence de la faute f suivant MT_4 en utilisant la proposition 3.6 et la simulation Monte-Carlo.....	78
3.6	Distribution de la date d'occurrence de la faute f suivant MT_3 en utilisant la proposition 3.6 et la simulation Monte-Carlo.....	78
3.7	Etapes de diagnostic et de la datation de la faute.....	79
4.1	Exemple de détermination de l'ensemble $Post_\alpha(M, l_{max})$ avec $l_{max} = 4$	91

4.2	Le système de communication considéré	92
4.3	Modèle du système de communication (en bleu les places et transitions non mesurées)	92
4.4	Pronostic des fautes f_1 et f_2 calculé avec (4.11) et la simulation avec $l_{max} = 4$	95
4.5	Exemple simple d'un RdPS partiellement mesuré	97
4.6	Résultat du pronostic : (a) Pronostic des fautes avec $(10^{-2}, 1.5)$ - <i>pronostic</i> et suivant la simulation. (b) Erreur d'estimation $\xi(t, 10^{-2}, 1.5, f_i)$	101
4.7	Estimation de la RUL basée sur (ρ, δ) - <i>pronostic</i>	104
4.8	Modèle RdPS de dégradation d'un système de production	105
4.9	Trajectoire de mesure considérée	106
4.10	Estimation de la RUL	107
5.1	Schéma du système de distribution et de tri (Dotoli et al. 2011).....	111
5.2	Modèle RdPS du système de distribution et de tri	112
5.3	Diagnostic des fautes f_a et f_b sur les 20 premiers produits distribués.....	114
5.4	Performance du diagnostic de la faute f_a pour la première configuration	116
5.5	Performance du diagnostic de la faute f_b	117
5.6	Performance du diagnostic pour la seconde configuration de capteurs	118
5.7	Performance du diagnostic pour la seconde configuration de capteurs dans le cas d'une faute unique ($f_a = f_b = f$).....	119
5.8	Pronostic de la faute f_a	120
5.9	Pronostic de la faute f_b	121
5.10	RdPS du système de distribution et de tri incluant le processus de dégradation du commutateur sw_1	123
5.11	Trajectoire de mesure considérée pour l'estimation de la RUL.....	124
5.12	Estimation de la durée de vie résiduelle	125
6.1	Exemple d'un automate à états finis	131
6.2	Exemple d'un RdPS partiellement mesuré.....	132
6.3	Exemple d'un automate à états finis	134
6.4	Exemple d'un RdP stochastique	134

Liste des Tableaux

2.1	Classement des travaux sur le diagnostic des RdP	47
3.1	Probabilités des trajectoires compatibles.....	72
4.1	Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 2.3.....	88
4.2	Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 4.2.....	93
4.3	Erreur sur le pronostic de la faute f_1 en fonction du nombre de simulations N	94
4.4	Différence entre les deux approches l_{max} -pronostic et (ρ, δ) -pronostic	101
4.5	Estimation d'état (probabilité des modes) du RdPS partiellement mesuré de la Figure 4.8	106
5.1	Signification des places et des transitions du RdPS de la Figure 5.2	113
5.2	Temps de calcul du diagnostic en secondes pour chaque cycle (Intel Core i5 CPU 2.70 GHz).....	119
5.3	Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 5.2.....	120
5.4	Temps de calcul en secondes (Intel Core i5 CPU 2.70 GHz).....	122
5.5	Signification des places et des transitions du RdPS de la Figure 5.10.....	122
5.6	Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 5.8.....	124
5.7	Temps de calcul (secondes) pour l'estimation de la RUL.....	125

Abréviations

SED	Système à Événements Discrets
RdP	Réseau de Petri
RdPS	Réseau de Petri Stochastique
RUL	Remaining Useful Life – Durée de vie résiduelle
LMI	Linear Matrix Inequality – Inégalité matricielle linéaire
VA	Variable Aléatoire
BRG	Basis Reachability Graph - Graphe d'accessibilité de base
MBRG	Modified Basis Reachability Graph - Graphe d'accessibilité de base modifié
BRD	Basis Reachability Diagnoser – Diagnostiqueur d'accessibilité de base
SCG	State Class Graph – Graphe des classes d'états
ILP	Integer Linear Programming - Programmation linéaire en nombres entiers
FDG	Fault Diagnosis Graph - Graphe de diagnostic des fautes
COR	Caractéristiques Opérationnelles de Réception
MSCG	Modified State Class Graph - Graphe des classes modifié
RdPSG	Réseau de Petri Stochastique Généralisé
GREAH	Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique du Havre

Introduction Générale

Durant les phases de conception et de développement des systèmes, un certain nombre de vérifications et de tests de plus en plus performants sont entrepris afin de garantir au mieux leur sûreté de fonctionnement. Cependant, et malgré toutes les mesures qui peuvent être prises pour effectuer ces tests, il subsistera toujours le risque d'un comportement imprévu qui peut remettre en cause l'intégrité de ces systèmes. Ceci est dû à leur complexité croissante mais aussi à leur environnement de fonctionnement ou tout simplement aux phénomènes de vieillissement et d'obsolescence. L'apparition de ces comportements peut engendrer des conséquences plus ou moins graves, allant de l'indisponibilité partielle du système (et ainsi la baisse de la rentabilité) jusqu'aux catastrophes humaines, matérielles et écologiques. Il apparaît donc de plus en plus nécessaire de disposer de méthodes et d'outils particulièrement efficaces pour la *surveillance de l'état de santé* du système. Ces outils sont déployés durant son exploitation et relèvent du domaine général de la *sûreté de fonctionnement* (Villemeur 1988). Notre travail s'articule autour de la surveillance et concerne la catégorie des systèmes dits à mission prolongée (systèmes de production, de communication...). Le but de la surveillance de l'état de santé de ce type de systèmes est de garantir leur sécurité, leur disponibilité ainsi que le maintien de leur qualité dans le temps.

Au cours de cette thèse, on s'intéressera à la catégorie des *Systèmes à Événements Discrets (SED)*. Un SED est un système dont l'espace d'état est discret. Les transitions entre les états se produisent suite aux occurrences d'*événements* asynchrones (Ramadge & Wonham 1989; Cassandras & Lafortune 2009). Les systèmes étant souvent de nature continus, leur modélisation avec des SED nécessite un certain niveau d'abstraction. On peut par exemple caractériser par un événement le dépassement d'un seuil de remplissage d'un contenant même si le niveau de remplissage est une variable continue. D'autres systèmes relèvent directement de cette classe de comportement. C'est pourquoi, de nombreuses méthodologies ont été développées pour la modélisation, la conception, l'analyse de performance ou encore de la surveillance de ce type de systèmes. Les SED peuvent être classés selon le type d'application considérée (Cassandras & Lafortune 2009; Philippot 2006). Nous allons, dans ce qui suit, donner quelques-unes de ces classes avec des exemples de problématiques qui relèvent du contexte de notre étude.

- Les systèmes manufacturiers : ces systèmes sont modulaires et souvent flexibles. Ils sont composés de plusieurs ateliers organisés en réseaux de machines ou de robots multitâches composés eux même de nombreux organes électriques et mécaniques pour lesquels des phénomènes de fatigue et d'usure existent. Les chaînes de production de l'industrie automobile en sont un exemple caractéristique. Ces systèmes nécessitent des modèles modulaires qui peuvent facilement être adaptés à leur évolution permanente. De plus, la fatigue et l'usure dégradent progressivement les performances de l'équipement et doivent être pris en compte dans les stratégies de maintenance. Disposer d'un outil pouvant prédire les défauts futurs avec un niveau de confiance suffisamment élevé, permet d'évaluer la durée de vie résiduelle des organes et donc de mieux planifier les opérations de maintenance préventive et de maîtriser ainsi les périodes d'arrêt de la chaîne. L'ensemble de l'organisation du travail sur la chaîne de production sera impactée par la pertinence de cette planification.
 - Les réseaux de communication et d'échange de données : ces systèmes, largement dématérialisés, échangent de grandes masses de données dont l'analyse est coûteuse en temps de calcul et nécessite le recours à des outils automatiques de traitement de l'information. Ces données sont parfois sensibles et font face aux différentes menaces d'intrusion, de modification ou de détournement du système d'information. Détecter rapidement un comportement anormal ou dysfonctionnel et identifier précisément la partie du réseau incriminée sont des enjeux importants. Ceci permet de maintenir une disponibilité élevée au sein de l'ensemble du réseau et d'assurer l'intégrité des informations. Le recours à des moyens systématiques d'aide à la décision facilite cette gestion du système.
 - Les systèmes de gestion de l'information : pour améliorer les systèmes d'archivage et de gestion de l'information utilisés pour garantir la traçabilité des produits, il est important de pouvoir dater les événements. Par exemple dans un procédé chimique utilisé en industrie pharmaceutique, si une erreur technique engendre une modification d'un produit au cours du temps (en sortant d'un intervalle de tolérance par exemple), la composition d'un certain lot de produits sera impactée. La datation de l'erreur permet d'isoler les lots non conformes qui feront l'objet d'un rappel et de prendre en charge les personnes ayant déjà utilisé le produit si celui-ci a été commercialisé. Ceci permet aussi de résoudre des problèmes de responsabilité quant à l'apparition et la gestion de cette erreur.
 - Les réseaux de transport : ces réseaux constituent une autre classe de systèmes pour lesquels les contributions que nous développons peuvent apporter une aide significative. En particulier, les réseaux de trafic urbains dans une grande métropole ou interurbains dans une région densément peuplée représentent une problématique très intéressante. Ceci dans le sens où ces réseaux ne peuvent être parfaitement instrumentés à cause de leur taille et des différences entre les
-

usagers qui les parcourent. Localiser les incidents avec précision sur la base des informations transmises par les capteurs disponibles (vidéo, GPS, capteurs de proximité) et d'un modèle de haut niveau offrant une abstraction discrète des flux de véhicules contribue à améliorer la sécurité globale des usagers et à faciliter le travail des moyens d'intervention en cas d'incident.

La surveillance des SED dans le cadre de notre travail englobe les tâches de *diagnostic* et de *pronostic* des défauts. Le diagnostic des SED (Zaytoon & Lafortune 2013) vise à détecter au plus tôt une déviation du comportement nominal du système et d'en déterminer les causes. Quant au pronostic, il a pour objectif de prédire ces comportements afin d'entreprendre les actions nécessaires d'arrêt, de reconfiguration ou encore de maintenance prédictive. Les méthodes de diagnostic et de pronostic des défauts peuvent globalement être classées en deux catégories (Zwingelstein 1995; Papadopoulos & McDermid 2001).

- Les méthodes sans modèle : celles-ci consistent généralement à travailler directement sur une masse de données issues des capteurs du système.
- Les méthodes basées sur des modèles : celles-ci passent par la construction d'un modèle mathématique du système à diagnostiquer et/ou à pronostiquer.

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans la deuxième catégorie de méthodes. Deux types de modèles sont généralement exploités pour le diagnostic et le pronostic des SED. Certaines approches sont basées sur un *modèle nominal* du système qui représente uniquement son comportement attendu. Le deuxième type, appelé *modèle dysfonctionnel*, inclut à la fois son comportement nominal et son comportement fautif. Nous supposons dans notre étude que **nous disposons d'un modèle dysfonctionnel complet et correct**, c'est-à-dire (c.-à-d.) un modèle capable de reproduire de façon exacte tous les comportements (nominaux ou fautifs) du système. Nous travaillerons donc directement sur un modèle déjà construit. L'étape de modélisation, bien que non considérée dans le cadre de notre étude, est une étape primordiale. Le modèle peut avoir été obtenu par exemple en utilisant des méthodes d'identification ou à travers la « main experte » des concepteurs du système en question. Concernant les formalismes de modélisation, les automates à états finis et les réseaux de Petri (RdP) font partie des formalismes les plus utilisés pour la représentation des SED. Bien que leur utilisation soit intuitive, les automates à états finis se heurtent au phénomène de l'explosion combinatoire. Les RdP quant à eux permettent une modélisation plus compacte des systèmes. Leur pouvoir de représentation des différents phénomènes de synchronisation, de parallélisme ou encore de partage de ressources a permis leur utilisation pour une large variété de systèmes. Notre choix s'est porté sur les RdP pour le développement de nos approches.

Le comportement fautif dans un SED se produit suite à l'occurrence d'un événement particulier désigné par *faute*. Une faute est donc un événement dont l'arrivée est aléatoire et qui provoque une déviation du comportement nominal pouvant aboutir à la

défaillance du système. La défaillance se traduit par l'incapacité du système à délivrer le service pour lequel il a été conçu. Le diagnostic des SED s'intéresse à la détection des causes primaires des défaillances (c.-à-d. des événements de faute) en se basant sur une série de mesures issues des capteurs. Les événements de faute ne sont donc pas directement mesurables (leur diagnostic serait en effet trivial dans ce cas). Le pronostic des SED vise, quant à lui, à prédire les fautes avant leur occurrence. Les informations disponibles pour la surveillance d'un système sont limitées. Ceci est souvent dû au fait que le nombre de capteurs est minimisé pour différentes raisons (économiques, contraintes de poids ou d'espace, conditions de fonctionnement...). On ne dispose ainsi que d'une « vue partielle » de ce qui se passe réellement dans le système. Tout l'enjeu du diagnostic et du pronostic repose donc sur la capacité et la manière d'exploiter ce dont on dispose comme information pour surveiller l'état de santé du système.

L'objectif de notre travail est de développer une méthode générique pour le diagnostic et le pronostic des défauts. Le choix du modèle s'est porté sur les réseaux de Petri stochastiques temporisés (RdPS) partiellement mesurés. Ce choix est motivé par la grande expressivité des RdP, leur capacité de modélisation de différents types de systèmes ainsi que leurs fondements mathématiques solides. L'extension stochastique temporisée permet de caractériser l'incertitude des dates d'occurrence des événements qui sont modélisées par des variables aléatoires. Notons qu'une approche d'identification de modèles de RdPS (El Mehdi et al. 2012) a été mise en œuvre au sein du laboratoire GREAH. Ceci constitue une motivation supplémentaire quant à l'exploitation de ce formalisme. Enfin, ce modèle est partiellement mesuré permettant ainsi de distinguer ce qui est mesurable de ce qui ne l'est pas. La **contribution** de cette thèse est centrée sur **l'exploitation pertinente des informations temporelles pour le diagnostic et le pronostic des SED**. L'objectif est d'exploiter au mieux les informations disponibles pour pouvoir discerner avec précision les différents comportements qui expliqueraient les mesures. Nous nous focalisons plus particulièrement sur l'évaluation de la probabilité des fautes en fonction des mesures datées issues des capteurs du système. Dans le cas où une faute est détectée, nous proposons une méthode pour fournir plus de détails concernant la date de son apparition. On s'intéressera alors à la *datation des fautes* en estimant la distribution de leurs dates d'occurrence. Nous proposons ensuite une démarche permettant le pronostic du système. Une étape importante est *l'estimation de l'état* du système en fonction des mesures datées. Là encore, nous insisterons sur l'importance de l'information temporelle pour une caractérisation précise de l'état actuel du système. À partir de cette estimation, le résultat du pronostic consiste à fournir une probabilité d'occurrence future de la faute dans un intervalle de temps donné. Cette approche permettra in fine d'estimer la *durée de vie résiduelle (Remaining Useful Life ou RUL)* du système. Elle correspond à la durée restante la plus probable de bon fonctionnement jusqu'à l'occurrence de la défaillance.

L'organisation du mémoire peut être perçue sous deux angles différents : le premier est un cheminement du *non temporisé* vers le *temporisé*. Ceci permet de pointer l'avantage de la prise en compte des informations temporelles. Le deuxième concerne la

problématique étudiée et montre un cheminement du diagnostic vers le pronostic en passant par l'estimation d'état. La présentation des différents chapitres montre cette progression suivant ces deux axes. Nous avons fait le choix de détailler quelques approches de diagnostic et de pronostic dans le [Chapitre 1](#) et d'accompagner nos contributions par un état de l'art relatif à la problématique et au modèle étudié dans chaque chapitre. Dans ce qui suit, le contenu des différents chapitres est présenté.

Dans le [Chapitre 1](#), on introduira tout d'abord les deux formalismes les plus utilisés pour l'analyse des SED : les automates à états finis et les RdP. Les deux extensions de RdP qui seront exploitées dans le cadre de notre étude seront détaillées et les différentes notions et notations nécessaires dans la suite du document seront données. Par la suite, quelques approches de diagnostic et de pronostic seront présentées dans le but de positionner notre contribution par rapport à ces dernières. Des exemples simples seront donnés pour illustrer les différents aspects des problèmes traités.

Dans le [Chapitre 2](#), on présentera tout d'abord un état de l'art plus complet mais aussi moins détaillé sur le diagnostic des RdP non temporisés. On s'intéressera ensuite au diagnostic des SED non temporisés modélisés par des RdP partiellement mesurés. Nous mettrons l'accent sur la méthode de recherche des comportements compatibles avec les mesures. Celle-ci sera exploitée dans le reste du document.

Dans le [Chapitre 3](#), un état de l'art est présenté sur le diagnostic à base d'extension de RdP temporisés. On exposera par la suite notre approche de diagnostic des RdPS partiellement mesurés. Une méthode permettant de fournir une probabilité d'occurrence de la faute suivant une série de mesures datées est présentée et illustrée à travers un exemple. Celui-ci montre l'intérêt d'exploiter les informations temporelles dans le cadre du diagnostic.

Le [Chapitre 4](#) est consacré à l'estimation d'état et au pronostic des défauts. Un bref état de l'art sur ces deux problématiques sera d'abord exposé. Deux approches permettant de calculer la probabilité qu'une faute se produise sur un horizon de temps futur seront détaillées. Ces deux approches seront illustrées sur un exemple de système de communication. Le résultat du pronostic sera ensuite exploité pour estimer la RUL du système.

Le [Chapitre 5](#) présente une application des différentes approches développées au cours de cette thèse sur un système manufacturier destiné au tri et à la distribution. Les différents résultats de diagnostic, d'estimation d'état et de pronostic seront ainsi illustrés sur cet exemple.

Enfin, une synthèse des résultats ainsi que des perspectives de recherche seront données pour conclure ce document.

Chapitre 1. Formalismes et Méthodes pour le Diagnostic et le Pronostic des SED

1.1. Introduction	9
1.2. Quelques formalismes pour le diagnostic et le pronostic des SED	9
1.2.1. Automates à états finis	10
1.2.2. Réseaux de Petri.....	13
1.2.3. Réseaux de Petri partiellement mesurés.....	16
1.2.4. Réseaux de Petri stochastiques temporisés partiellement mesurés	19
1.3. Méthodes pour le diagnostic des SED	25
1.3.1. Approche par diagnostiqueur	25
1.3.2. Approche d'accessibilité de base	27
1.3.3. Approche graphe des classes d'états.....	30
1.3.4. Positionnement	32
1.4. Méthodes pour le pronostic des SED	34
1.4.1. Pronostic des automates à états finis	34
1.4.2. Pronostic des automates probabilistes.....	35
1.4.3. Pronostic des automates temporisés.....	37
1.4.4. Positionnement	38
1.5. Conclusion.....	39

1.1. Introduction

De nombreux formalismes de modélisation ont été développés pour l'analyse des SED. La complexité croissante de ces derniers nécessite des méthodes de représentation permettant de reproduire le plus fidèlement possible les différents comportements et phénomènes liés au système. Dans ce chapitre, nous allons, dans un premier temps, présenter les deux formalismes les plus utilisés pour la modélisation des SED, à savoir : les *automates à états finis* et les *RdP*. Ces formalismes ont été enrichis par la suite dans le but d'étendre leurs capacités de modélisation et d'analyse. Ils ont par exemple été adaptés pour représenter les capteurs d'un système notamment dans le cadre du diagnostic et du pronostic des SED. Ainsi, la mesure de certains événements et d'une partie de l'état du système est considérée pour obtenir des modèles partiellement mesurés. Trois niveaux d'abstraction existent pour l'étude d'un SED (Cassandras & Lafortune 2009). Le premier niveau correspond au cas où seule est disponible une information sur l'ordre des événements qui se sont produits. Le second niveau suppose une connaissance des dates d'occurrence de ces événements. Enfin, le troisième niveau suppose que l'on dispose, en plus, d'une information statistique sur l'occurrence des événements. Ce dernier niveau correspond au niveau le plus détaillé (Cassandras & Lafortune 2009). Plusieurs extensions, avec ou sans mesures partielles, ont alors été développées pour prendre en compte ces niveaux d'abstraction et modéliser les caractéristiques temporelles (modèles temporisés) et/ou aléatoires (modèles probabilistes ou stochastiques) des systèmes. Le choix du niveau dépend des objectifs d'analyse souhaités. Dans le cas du diagnostic et du pronostic, l'objectif est souvent d'exploiter le maximum d'informations disponibles pour une meilleure surveillance du système. Dans ce qui suit, nous allons présenter deux extensions de RdP qui seront exploitées dans le cadre de notre travail : les *RdP partiellement mesurés* et les *RdP stochastiques temporisés partiellement mesurés*. Nous allons ensuite exposer quelques-unes des différentes méthodes développées dans la littérature pour traiter les problématiques de diagnostic et de pronostic des SED. Nous nous concentrerons sur les approches qui permettent d'appréhender le principe général du diagnostic et du pronostic ainsi que sur celles qui sont les plus proches de notre cadre de travail. En utilisant des exemples simples, nous tenterons d'illustrer les caractéristiques les plus importantes des problèmes que nous étudions.

1.2. Quelques formalismes pour le diagnostic et le pronostic des SED

Dans ce qui suit, nous allons brièvement présenter le formalisme des automates à états finis. Ceci nous permettra d'illustrer le principe de quelques approches de diagnostic et de pronostic basées sur ce formalisme. Par la suite, nous présenterons les

RdP ainsi que les deux extensions sur lesquelles seront basées nos approches avec les différentes notions et notations qui seront nécessaires pour la suite de notre travail.

1.2.1. Automates à états finis

La théorie des automates a été développée avec la théorie des langages. (Burks & Wang 1957; Moore 1956; Kleene 1951) font partie des travaux ayant participé au développement de ce formalisme. Les automates à états finis peuvent être considérés comme une classe de graphes enrichis qui permettent de décrire le comportement d'un SED grâce à un ensemble d'événements et d'états. L'occurrence des événements fait ainsi évoluer le modèle d'un état à un autre. Graphiquement, un automate est composé d'un ensemble de cercles (qui représentent les états) et un ensemble d'arcs (qui représentent les transitions). Formellement, un automate à états finis déterministe est décrit comme suit (Cassandras & Lafortune 2009) :

Définition 1.1¹. Un automate à états finis déterministe A est un quadruplet $A = \langle \Sigma, X, \delta, x_0 \rangle$ avec :

- Σ un ensemble fini de symboles appelé *alphabet* décrivant les événements
- X un ensemble fini d'états
- $\delta : X \times \Sigma \rightarrow X$ la fonction de transition entre les états
- $x_0 \in X$ l'état initial

Cette définition est relative à un automate *déterministe* car l'état initial est considéré unique (x_0) et la relation de transition à partir de chaque état, et suite à l'occurrence d'un événement donné, définit toujours un état unique (la fonction δ étant définie sur $X \times \Sigma$ à valeurs dans X). Un *mot* (ou *séquence*) noté s est une suite ordonnée d'événements. Le nombre d'événements qui le forment est noté $|s|$. Il correspond à la taille du mot. On note par ε le *mot vide* qui peut représenter l'absence d'événements. Dans la théorie des langages, l'ensemble des mots ou chaînes pouvant être formés suivant un alphabet Σ et incluant l'élément vide ε est noté par Σ^* où « * » représente l'*Etoile de Kleene*. Le langage $L(A)$ engendré par un automate A est un sous ensemble de

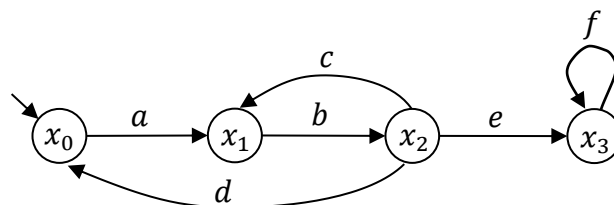


Figure 1.1. Exemple d'un automate à états finis déterministe.

¹ La définition de (Cassandras & Lafortune 2009) inclut l'ensemble des états marqués $X_m \in X$. Cet ensemble n'est généralement pas considéré pour le diagnostic et le pronostic des SED.

Σ^* . Il correspond à l'ensemble des mots réalisables par cet automate (c.-à-d. des mots auxquels correspondent des chemins dans A).

Exemple 1.1. La Figure 1.1 représente un exemple d'automate à états finis déterministe. Il est composé de l'ensemble d'événements $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$ et de l'ensemble des états $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. L'état initial est donné par x_0 (désigné par une flèche entrante sur le graphe). Les arcs sont une représentation graphique de la fonction de transition. Si on considère la séquence d'événements $abcb$, la notation $\delta(x_0, abcb) = x_2$ signifie que le franchissement de cette séquence à partir de l'état initial x_0 fait que le modèle évolue de l'état x_0 vers l'état x_2 . Le langage généré par l'automate A est donné par $L(A) = \{\varepsilon, a, ab, abc, abd, abe, abcb, \dots\}$.

Dans les domaines du diagnostic et du pronostic des SED, il est souvent nécessaire de distinguer ce qui est mesurable de ce qui ne l'est pas. De plus, certaines méthodes se basent sur un modèle de dysfonctionnement qui implique la représentation des événements de fautes. Ainsi, l'ensemble des événements Σ est généralement composé de deux ensembles Σ_o et Σ_u tels que $\Sigma_o \cap \Sigma_u = \emptyset$. $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ désigne l'ensemble des *événements mesurables* (c.-à-d. dont l'occurrence est directement mesurée par les capteurs du système ou correspondant aux ordres de contrôle). Le deuxième ensemble $\Sigma_u \subseteq \Sigma$ correspond quant à lui aux *événements silencieux*. On ne dispose d'aucune information directe quant à l'occurrence des événements de Σ_u . Enfin, l'ensemble des événements silencieux inclut l'ensemble Σ_f des événements qui représentent des fautes.

Dans ce qui suit, nous allons brièvement présenter deux extensions d'automates à états finis, à savoir les automates probabilistes et les automates temporisés. Des exemples de ces deux formalismes et de leur exploitation pour le pronostic seront donnés dans la suite du chapitre.

- **Automates probabilistes**

Les automates probabilistes (Segala 1995) sont une extension des automates finis où une probabilité d'occurrence est associée à chaque événement. Ce formalisme a été introduit pour analyser les SED probabilistes dans lesquels les fréquences d'exécution des actions sont connues. Dans le cas d'un automate probabiliste, une *matrice stochastique* peut être utilisée pour représenter les probabilités des transitions. Le langage engendré par un automate probabiliste est appelé *langage stochastique*. Un automate probabiliste est formellement défini comme suit :

Un automate à états finis probabiliste A_p est un quadruplet $A_p = \langle \Sigma, X, \delta_p, \pi_0 \rangle$ avec :

- Σ est l'ensemble des événements (alphabet)
- X un ensemble fini d'états

- $\delta_P: X \times \Sigma \times X \rightarrow [0,1]$ est la fonction des probabilités de transition telle que $\delta_P(x_i, \alpha, x_j)$ détermine la probabilité de transiter de l'état x_i vers l'état x_j suite à l'occurrence de l'événement α .
- $\pi_0: X \rightarrow [0,1]$ est la distribution initiale des probabilités ($\pi_0(x_i)$ est la probabilité que x_i soit l'état initial).

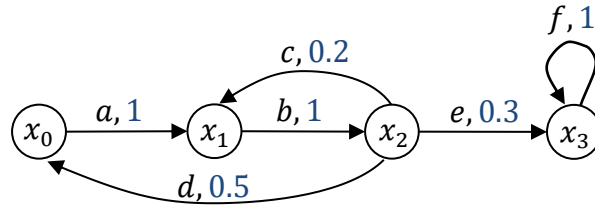


Figure 1.2. Exemple d'un automate probabiliste.

La probabilité des transitions vérifie $\forall x_i \in X: \sum_{\alpha \in \Sigma} \sum_{x_j \in X} \delta_P(x_i, \alpha, x_j) = 1$. Si l'on associe des probabilités de transition à l'automate de la Figure 1.1, on obtient un automate probabiliste représenté sur la Figure 1.2. Si l'on considère que l'état initial est donné par x_0 , alors la distribution initiale de probabilité sera donnée par $\pi_0(x_0) = 1$ et $\pi_0(x_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, 3$. $\delta_P(x_2, d, x_0) = 0.5$ signifie que, lorsque le système se trouve dans l'état x_2 , sa probabilité de transiter vers l'état x_0 suite à l'occurrence de l'événement d vaut 0.5.

- **Automates temporisés**

Les automates temporisés (Alur & Dill 1994) ont été mis au point pour l'analyse des systèmes temporisés. Ils sont généralement adaptés pour l'analyse et la vérification des systèmes temps réels et à fortes contraintes temporelles. Ces modèles peuvent être décrits comme des automates à états finis avec des contraintes temporelles. Celles-ci sont représentées par des inéquations mettant en jeu plusieurs horloges à valeurs réelles. L'automate temporisé de la Figure 1.3 est caractérisé par deux horloges h et g . Chaque horloge peut être indépendamment réinitialisée après un événement donné ($h := 0$ sur l'exemple de la Figure 1.3 signifie que l'horloge h est remise à zéro lorsque l'événement a se produit). Une horloge mesure donc le temps écoulé depuis sa dernière mise à zéro. Les contraintes sont de deux types : celles liées aux transitions et appelées *gardes* (reportées près des arcs sur l'exemple de la Figure 1.3) et celles associées aux états et appelées *invariants* (entre crochets sur l'exemple de la Figure 1.3). Par exemple la garde $h = 3$ signifie que la transition peut avoir lieu seulement lorsque l'horloge h est égale à 3. L'invariant $h \leq 5$ signifie que l'horloge h peut avoir une valeur inférieure ou égale à 5 lorsque le système est dans l'état associé à cet invariant et le modèle ne peut plus rester dans cet état lorsque $h > 5$. Formellement, un automate temporisé A_T est défini comme suit :

Définition 1.2. Un automate à états finis temporisé A_T est un sextuplet donné par $A_T = \langle \Sigma, X, \mathcal{H}, Inv, \delta_T, x_0 \rangle$ avec :

- Σ est l'ensemble des événements (alphabet)
- X un ensemble fini d'états
- \mathcal{H} est l'ensemble des horloges à valeurs réelles positives
- $\delta_T : X \times \mathcal{C}(\mathcal{H}) \times \Sigma \times 2^X \times X$ est un ensemble de transitions. $(x_i, c, \alpha, \gamma, x_j)$ correspond à une transition entre l'état x_i et x_j , gardée par la contrainte $c \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{C}(\mathcal{H})$ étant l'ensemble des contraintes) suite à l'occurrence de l'événement α avec une remise à zéro des variables spécifiées par γ .
- $Inv : X \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H})$ associe un invariant à chaque état
- x_0 : est l'état initial

À l'état initial, l'automate temporisé de la Figure 1.3 se trouve dans x_1 et les deux horloges sont à zéro. Quand l'événement a se produit à $h = 3$, l'évolution de x_1 vers x_2 réinitialise l'horloge h . À l'état x_2 , la valeur de l'horloge g est donnée par $h + 3$ car g n'a pas été réinitialisée. Pour que l'automate transite de x_2 vers x_1 , l'événement b doit se produire lorsque la valeur des deux horloges dépasse la valeur 4 et que $g \leq 8$.

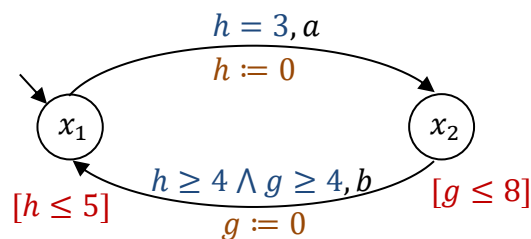


Figure 1.3. Exemple d'un automate temporisé

La modélisation des systèmes complexes en utilisant les automates à états finis et leurs extensions est souvent confrontée au problème de l'explosion combinatoire. C'est un problème récurrent dû à la granularité de la modélisation et qui résulte du nombre d'états qui augmente de façon vertigineuse en fonction de la taille et de la complexité du système.

1.2.2. Réseaux de Petri

Un RdP (Petri 1966) est un outil graphique et mathématique utilisé pour l'analyse et l'étude des SED. Face au problème de l'explosion combinatoire des automates à états finis, les RdP présentent une alternative intéressante. Ils ont été développés pour permettre la modélisation du comportement d'une classe importante de systèmes (Girault & Valk 2013) qui recouvrent les systèmes manufacturiers (DiCesare et al. 1993),

les systèmes de communication (Billington & Diaz 1999) ou encore les systèmes informatiques distribués (Reisig 2013). L'application des RdP à cette large variété de systèmes est rendue possible grâce notamment à la possibilité de modéliser facilement les phénomènes de synchronisation, de concurrence ou encore de partage de ressources. Un RdP est représenté sous forme d'un graphe biparti orienté. Il est constitué d'un ensemble de *places* et de *transitions* connectées par des arcs. Nous allons donner dans ce qui suit la définition formelle d'un RdP ainsi que les notions dont on aura besoin par la suite dans le reste du document. Plus de détails sur les RdP peuvent être trouvés dans (Peterson 1982; Murata 1989; Bobbio 1990) :

Définition 1.3. Un RdP noté G est donné par $G = \langle \mathcal{P}, \mathcal{T}, W_{PR}, W_{PO} \rangle$, avec :

- $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble de n places
- $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_q\}$ un ensemble de q transitions
- $W_{PR} \in (\mathbb{N})^{n \times q}$ (\mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels) la matrice d'incidence avant
- $W_{PO} \in (\mathbb{N})^{n \times q}$ la matrice d'incidence arrière

La matrice d'incidence $W \in (\mathbb{N})^{n \times q}$ est donnée par l'équation suivante :

$$W = W_{PO} - W_{PR} \quad (1.1)$$

L'état d'un RdP est donné par son *marquage*. Celui-ci associe à chaque place un certain nombre de *marques* communément appelées *jetons*. Le marquage est représenté par le *vecteur de marquage* $M = (m_k) \in (\mathbb{N})^n$ tel que m_k correspond au nombre de jetons dans la place P_k . La notation $M(P_k)$ sera aussi utilisée pour désigner le nombre de jetons dans la place P_k . Ainsi un RdP marqué est défini par le couple $\langle G, M_I \rangle$ où $G = \langle \mathcal{P}, \mathcal{T}, W_{PR}, W_{PO} \rangle$ est un RdP et M_I son marquage initial.

Lorsqu'un élément de W_{PR} (respectivement de W_{PO}) est supérieur à 1, un *poids* est indiqué sur l'arc correspondant du graphe (un arc sans aucune indication correspond implicitement à un poids de 1). De plus, lorsque tous les poids sont égaux à 1, le réseau est dit *ordinaire*, sinon il est dit *généralisé*.

Le *degré de validation* $n_j(M)$ d'une transition T_j représente le nombre de tirs possibles et simultanés de cette transition à partir de M . Il est donné par l'équation (1.2) :

$$n_j(M) = \min_{P_k \in {}^\circ T_j} \left(\left\lfloor \frac{M(P_k)}{W_{PR}(k, j)} \right\rfloor \right) \quad (1.2)$$

où ${}^\circ T_j$ est l'ensemble des places en amont de T_j (souvent désigné par « preset » de T_j) et $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière du nombre ($.$).

Une transition T_j est dite *sensibilisée* (ou *validée*) par un certain marquage M si et seulement si (ssi) $M \geq W_{PR}(:, j)$, où $W_{PR}(:, j)$ représente la colonne j de la matrice

d'incidence avant. Ceci implique que son degré de validation vérifie $n_j(M) > 0$. La sensibilisation de T_j est couramment notée $M [T_j >$. La transition T_j peut alors être franchie (ou tirée) et engendrer un nouveau marquage M' . On note alors $M [T_j > M'$.

Une *séquence de franchissement* σ_U représente une suite de transitions pouvant être franchies successivement à partir d'un marquage donné. On note alors $M [\sigma_U >$ et la séquence σ_U est donnée par :

$$\sigma_U = T(1)T(2) \dots T(h) \quad (1.3)$$

avec $T(j) \in \mathcal{T}$ pour $j = 1, \dots, h$ tel que $h = |\sigma_U|$ représente la taille de la séquence.

Lorsque le marquage initial M et les marquages intermédiaires d'une séquence σ_U sont spécifiés, on parle d'une *trajectoire* (σ_U, M) .

$$(\sigma_U, M) = M(0) [T(1) > M(1) \dots [T(h) > M(h) \quad (1.4)$$

avec $M(0) = M$.

Une séquence de franchissement σ_U peut être représentée en partie par son *vecteur de franchissement* $X(\sigma_U) \in (\mathbb{N})^q$. Une composante x_j de ce vecteur représente le nombre de fois que la transition T_j est tirée dans σ_U . Notons que l'information sur l'ordre de franchissement des transitions de σ_U est perdue quand celle-ci est représentée par son vecteur de franchissement $X(\sigma_U)$. Mais ce dernier est suffisant pour calculer le marquage atteint suite à l'occurrence d'une trajectoire (σ_U, M) grâce à l'équation d'état suivante :

$$M' = M + W.X(\sigma_U) \quad (1.5)$$

avec W la matrice d'incidence du RdP.

Remarque 1.1. À chaque séquence σ_U correspond un unique vecteur de franchissement. Cependant, un vecteur donné peut correspondre à plusieurs séquences mais qui ne sont pas forcément toutes réalisables avec le RdP considéré.

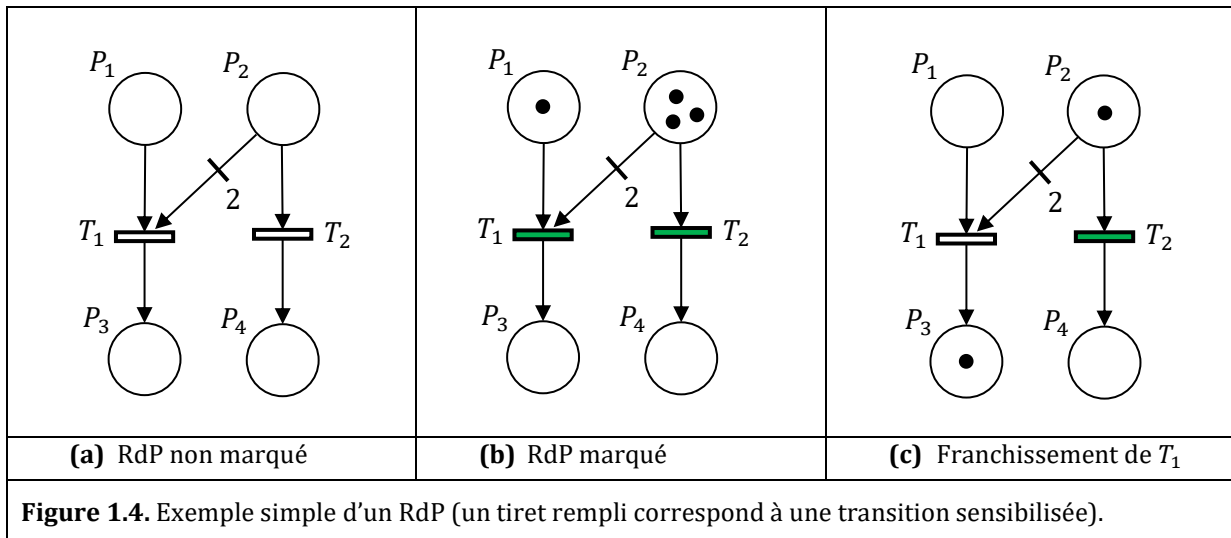
Un marquage M' est dit atteignable à partir de M s'il existe une séquence de franchissement σ_U telle que $M [\sigma_U > M'$. Pour un RdP marqué $\langle G, M_I \rangle$, l'ensemble $ReachSet(G, M_I)$ désigne l'ensemble des marquages atteignables à partir du marquage initial M_I . $\langle G, M_I \rangle$ est dit k -borné si le nombre de jetons dans chaque place est borné par k quel que soit le marquage atteint à partir de M_I . Dans ce cas, l'espace d'état du RdP est fini. Un RdP $\langle G, M_I \rangle$ est dit non borné lorsque le nombre de jetons de l'une (ou plusieurs) de ses places augmente indéfiniment durant l'évolution du RdP. Dans ce cas, le réseau possède une infinité d'états différents.

Exemple 1.2. La [Figure 1.4.\(a\)](#) montre un RdP simple non marqué. Il est composé d'un ensemble de quatre places $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et d'un ensemble de deux transitions $\mathcal{T} = \{T_1, T_2\}$. La matrice d'incidence de ce réseau est donnée par :

$$W = W_{PO} - W_{PR} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La Figure 1.4.(b) reprend ce RdP et lui associe un marquage donné par $M = (1\ 3\ 0\ 0)^T$. Celui-ci représente un état de ce RdP et peut aussi être représenté comme suit : $M(P_1) = 1, M(P_2) = 3, M(P_3) = 0, M(P_4) = 0$ ou d'une manière équivalente par $1P_1, 3P_2$ (cette dernière représentation implique que le reste des places ne contienne aucun jeton). Les deux transitions $\{T_1, T_2\}$ sont sensibilisées par le marquage M (symbolisé par le remplissage des tirets de T_1 et T_2 sur la Figure 1.4.(b)). Leurs degrés de validation sont respectivement $n_1(M) = \min\left(\left\lfloor \left(1, \frac{3}{2}\right) \right\rfloor\right) = 1$ pour la transition T_1 et $n_2(M) = 3$ pour la transition T_2 . Si l'on considère maintenant le tir de la séquence $\sigma = T_1$ (que l'on peut représenter par le vecteur de franchissement $X = (1\ 0)^T$), l'état du RdP évolue vers un nouveau marquage M' (représenté sur la Figure 1.4.(c)) et donné comme suit :

$$M' = M + W \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



1.2.3. Réseaux de Petri partiellement mesurés

Comme nous l'avons déjà précisé, les RdP sont des outils permettant de modéliser le fonctionnement des SED. Plusieurs déclinaisons des RdP ont été développées afin d'élargir leur pouvoir de modélisation. Nous nous intéressons aux modèles de RdP permettant à la fois de modéliser le fonctionnement d'un système et ses capteurs. Les RdP étiquetés ou labélisés (labeled Petri nets) sont les plus utilisés. Dans ce cas, des étiquettes sont associées à certaines transitions dont le franchissement est mesuré. Les transitions sans étiquettes sont dites silencieuses et ne fournissent aucune information lorsque celles-ci sont tirées. D'autres extensions considèrent une mesure du

marquage de certaines places. Dans notre cas, on s'intéresse aux RdP partiellement mesurés qui considèrent à la fois une mesure partielle des transitions et des marquages. Ces réseaux ont été initialement introduits dans (Ru & Hadjicostis 2009) puis utilisés dans (Lefebvre 2014a). Avant de donner la définition formelle des RdP partiellement mesurés, introduisons quelques notions et notations nécessaires.

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{q_0}\}$ un ensemble de q_0 étiquettes (tel que $q_0 \leq q$). Ces étiquettes sont associées aux transitions mesurables du RdP. Pour cela, on introduit la *fonction de labélisation* $\mathcal{L} : \mathcal{T} \rightarrow E \cup \{\varepsilon\}$ où ε représente l'absence de mesure associée aux transitions silencieuses. Pour une transition T_j , la fonction de labélisation vaut $\mathcal{L}(T_j) = e_k$ si l'étiquette e_k est associée au tir de la transition T_j et vaut $\mathcal{L}(T_j) = \varepsilon$ dans le cas où la transition est silencieuse. Cette fonction est étendue au franchissement des séquences avec $\varepsilon.\varepsilon = \varepsilon$ et $\varepsilon.e_k = e_k.\varepsilon = e_k$. Ainsi, $\mathcal{L}(\sigma)$ retourne la séquence des étiquettes générée par l'exécution de la séquence σ et retourne ε si la séquence ne fournit aucune mesure. Dans ce dernier cas, la séquence est dite silencieuse. La fonction \mathcal{L} peut-être codée par la matrice de mesure des transitions $L = (l_{kj}) \in \{0,1\}^{q_0 \times q}$ avec $l_{kj} = 1$ si la transition T_j est associée à l'étiquette e_k et $l_{kj} = 0$ sinon.

On considère aussi n_0 mesures partielles du marquage. Chaque mesure partielle de marquage donne le nombre de jetons dans un sous ensemble de places. Formellement, la matrice de mesure des marquages notée $H = (h_{kj}) \in \{0,1\}^{n_0 \times n}$ définit ces n_0 mesures : $h_{kj} = 1$ ssi la place P_j est utilisée dans le calcul de la $k^{\text{ème}}$ mesure. Ainsi, pour un certain marquage M , cette $k^{\text{ème}}$ mesure vaut $H(k, :).M$ (avec $H(k, :)$ la ligne k de la matrice H) et on appellera marquage mesuré, noté M^{obs} , le produit $H.M$. Un RdP partiellement mesuré est donc défini comme suit :

Définition 1.4. Un RdP partiellement mesuré G_O est défini par $G_O = \langle G, L, H \rangle$ (ou de manière équivalente $G_O = \langle G, \mathcal{L}, H \rangle$) avec :

- $G = \langle \mathcal{P}, \mathcal{T}, W_{PR}, W_{PO} \rangle$ un RdP
- L la matrice de mesure des transitions (ou de manière équivalente $\mathcal{L} : \mathcal{T} \rightarrow E \cup \{\varepsilon\}$ la fonction de labélisation)
- H la matrice de mesure des marquages

Un RdP partiellement mesuré marqué sera noté par $\langle G_O, M_I \rangle$ avec M_I le marquage initial. Les matrices L et H déterminent la configuration des capteurs du système.

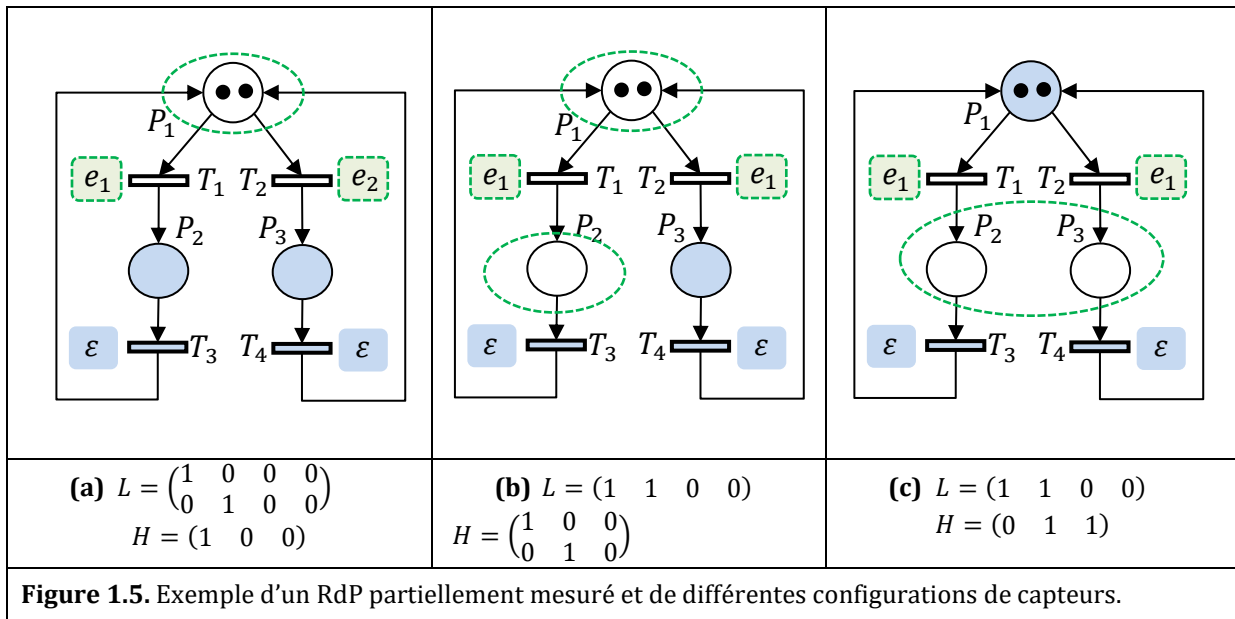
La mesure d'une trajectoire (σ_U, M) est réalisée par la *fonction de mesure* Γ qui dépend de la configuration des capteurs du système. Elle permet, grâce aux matrices L et H , de collecter les mesures associées à la trajectoire (σ_U, M) . Cette fonction agit comme un masque qui cache ce qui est non mesuré. Les mesures sont organisées suivant leur ordre d'occurrence et sont composées d'une suite de marquages et d'événements mesurés pour former la *trajectoire de mesure* notée MT et donnée par (1.6) :

$$MT = \Gamma(\sigma_U, M) = (M_0^{obs})e_1^{obs}(M_1^{obs}) \dots e_{K-1}^{obs}(M_{K-1}^{obs})e_K^{obs}(M_K^{obs}) \quad (1.6)$$

avec K la taille de MT , $M_0^{obs} = H.M$, M_j^{obs} le $j^{\text{ème}}$ marquage mesuré et $e_j^{obs} \in E \cup \{\varepsilon\}$ la $j^{\text{ème}}$ étiquette mesurée.

Une trajectoire (σ_U, M) qui satisfait $\Gamma(\sigma_U, M) = MT$ est dite compatible avec MT . L'ensemble des trajectoires compatibles est noté $\Gamma^{-1}(MT)$. Il est important de noter que pour une trajectoire de mesure donnée MT , plusieurs (et parfois une infinité) de trajectoires (ou comportements du système) sont compatibles avec ces mesures.

Pour modéliser le dysfonctionnement du système, on considère l'ensemble $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ des différentes classes de faute. Certaines transitions du RdP partiellement mesuré sont ainsi associées à l'occurrence d'une faute d'une classe donnée. La fonction $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow F \cup \{\emptyset\}$ associe aux transitions fautives la faute correspondante : $\mathcal{F}(T_j) = f_\alpha$ si la faute de classe f_α est associée à la transition T_j et $\mathcal{F}(T_j) = \emptyset$ si T_j est une transition non fautive qui correspond à un comportement nominal du système. Enfin, la fonction \mathcal{F} est étendue au cas d'une séquence σ telle que $\mathcal{F}(\sigma) = \cup_{T_j \in \sigma} \{\mathcal{F}(T_j)\}$. Notons que les transitions de faute sont nécessairement non mesurées ($\mathcal{L}(T_j) = \varepsilon$ si $\mathcal{F}(T_j) \neq \emptyset$).



Exemple 1.3. L'exemple de la [Figure 1.5](#) montre un RdP partiellement mesuré composé de trois places et de quatre transitions. Le marquage initial est donné par $M_I = (2 \ 0 \ 0)^T$. Différentes configurations possibles de capteurs sont représentées dans chaque cas (a, b et c) avec les matrices de mesure associées. Les places et transitions non colorées correspondent aux places et transitions mesurées.

Considérons la trajectoire (σ_U, M_I) avec $\sigma_U = T_1 T_2 T_3$. On note par Γ_a, Γ_b et Γ_c les trois fonctions de mesure associées aux trois configurations considérées. En appliquant ces

trois fonctions à la trajectoire (σ_U, M_I) , nous obtenons les trois trajectoires de mesure suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma_a(\sigma_U, M_I) &= MT_a = (2)e_1(1)e_2(0)\varepsilon(1) \\ \Gamma_b(\sigma_U, M_I) &= MT_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma_c(\sigma_U, M_I) &= MT_c = (0)e_1(1)e_1(2)\varepsilon(1).\end{aligned}$$

Nous remarquons que ces trois trajectoires de mesure sont différentes et dépendent de la configuration des capteurs. Si l'on s'intéresse maintenant aux trajectoires possibles ayant fourni ces mesures, les résultats suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned}\Gamma_a^{-1}(MT_a) &= \{(T_1T_2T_3, M_I), (T_1T_2T_4, M_I)\} \\ \Gamma_b^{-1}(MT_b) &= \{(T_1T_2T_3, M_I)\} \\ \Gamma_c^{-1}(MT_c) &= \{(T_1T_1T_3, M_I), (T_1T_2T_3, M_I), (T_2T_1T_3, M_I) \\ &\quad (T_1T_2T_4, M_I), (T_2T_1T_4, M_I), (T_2T_2T_4, M_I)\}\end{aligned}$$

Nous vérifions que le comportement ayant réellement engendré les différentes trajectoires de mesures est inclus dans chacun des ensembles. Cependant, seule la configuration (b) permet d'associer un comportement unique aux mesures obtenues. Dans les autres cas, plusieurs comportements différents peuvent engendrer la trajectoire de mesures. Il faut noter que les trajectoires compatibles avec une trajectoire de mesure donnée ne démarrent pas toutes forcément d'un même marquage. Si l'on considère la configuration de la [Figure 1.5.\(a\)](#) et en supposant la connaissance de l'espace d'état $ReachSet(G_O, M_I)$, l'ensemble des trajectoires compatibles obtenues à partir d'une trajectoire de mesure $MT = (1)\varepsilon(2)$ par exemple correspondra à $\Gamma_a^{-1}(MT) = \{(T_3, M_1), (T_4, M_2)\}$ avec $M_1 = (1 \ 1 \ 0)^T$ et $M_2 = (1 \ 0 \ 1)^T$.

1.2.4. Réseaux de Petri stochastiques temporisés partiellement mesurés

Comme nous l'avons déjà précisé, certaines extensions de RdP ont pour but de prendre en compte les aspects temporels des systèmes. Dans le cas du diagnostic et du pronostic, la prise en compte de cette information est cruciale. Celle-ci permet en effet de mieux caractériser l'état du système. De plus, lorsque l'on étudie des phénomènes stochastiques, les dates d'occurrence des événements doivent être obtenues par des durées de franchissement aléatoires. Dans notre travail, on considère les RdPS partiellement mesurés. Ces modèles prennent en compte à la fois le temps et les incertitudes. Il peuvent être définis comme des RdPS (Molloy 1982) équipés de capteurs d'événements et de marquages. Avant de définir les RdPS partiellement mesurés, intéressons-nous aux RdPS.

Les RdPS sont une extension temporisée des RdP. Les durées de franchissement des transitions sont représentées par des variables aléatoires (VA). La grande majorité des travaux considère des variables de distribution exponentielle. Ce choix sera implicite dans la suite de la thèse et est motivée par notre intérêt pour les processus de

défaillance qui sont souvent modélisés, en première approche, par des distributions exponentielles. Les RdPS sont caractérisés par le *vecteur des taux de franchissement* des transitions noté $\mu = (\mu_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ (\mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs) où μ_j est le taux de franchissement de la transition T_j . La durée de franchissement d'une transition T_j , sensibilisée à un marquage donné M , est une VA caractérisée par une fonction de densité de probabilité exponentielle de paramètre $n_j(M) \cdot \mu_j$. Les RdPS sont caractérisés par leurs politiques de choix, de service et de mémoire (Marsan 1988; Bause & Kritzinger 2002; Diaz 2013).

- **Politique de choix** : elle définit la manière dont est choisie la prochaine transition qui va être franchie en cas de conflit. Il existe une politique de choix dite de *pré-sélection*. Dans ce cas, le franchissement est déterminé par un calcul de probabilité selon une distribution uniforme et des poids préalablement attribués aux transitions. Une autre politique de choix est appelée politique *par compétition* (race policy). Dans ce cas et pour un groupe de transitions en conflit à un marquage donné, un tirage aléatoire de durées est effectué suivant les lois exponentielles et la transition dont la durée de franchissement est la plus petite sera franchie (voir [Exemple 1.4](#)).
- **Politique de mémoire** (Marsan et al. 1989) : elle concerne la prise en compte ou non des durées de tir restantes des transitions sensibilisées mais non franchies. Il est possible de ne pas prendre en compte ces durées et de les réinitialiser après chaque tir d'une transition. On parle alors d'*absence de mémoire* ou de *politique de réinitialisation* (resampling memory). Un deuxième choix consiste à prendre en compte seulement les durées relatives à la *dernière sensibilisation* du système (enabling memory). La mémoire est remise à zéro lors de la désensibilisation de la transition. Enfin, il est possible de prendre en compte les délais cumulés de *toutes les sensibilisations* de la transition depuis son dernier tir (age memory). Dans le cas de la loi exponentielle, la politique de mémoire ne modifie pas le comportement moyen.
- **Politique de service** : deux politiques de service existent selon le type de serveur considéré (fini ou infini). Dans le cadre de la politique *serveur fini*, un nombre fixe de jetons peut être tiré simultanément. On parle alors d'un serveur à *degré de réentrance borné* (multiple-server policy). Lorsque ce nombre est égal à 1, on parle de serveur *non-réentrant* (single-server policy). Ceci contrairement au cas *serveur infini* (ou *réentrant*) où le nombre de franchissements est illimité et dépend seulement du degré de validation des transitions (équation (1.2)).

On peut maintenant définir un RdPS de manière formelle comme suit :

Définition 1.5. Un RdP stochastique temporisé G_S est défini par sa politique de choix, de mémoire, de service et il est donné par le couple $G_S = \langle G, \mu \rangle$ où :

- $G = \langle \mathcal{P}, \mathcal{T}, W_{PR}, W_{PO} \rangle$ est un RdP

- $\mu = (\mu_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ est le vecteur des taux de franchissement des transitions.

On note par $\langle G_S, M_I \rangle$ le RdPS associé au marquage initial M_I .

Un RdPS partiellement mesuré est la combinaison d'un RdPS et d'un RdP partiellement mesuré. Il est caractérisé par des durées de franchissement aléatoires associées aux transitions ainsi qu'une mesure partielle des transitions et des marquages. Formellement, il est défini comme suit :

Définition 1.6. Un RdPS partiellement mesuré G_{OS} est défini par $G_{OS} = \langle G_S, L, H \rangle$ où :

- $G_S = \langle G, \mu \rangle$ est un RdPS
- L la matrice de mesure des événements
- H la matrice de mesure des marquages

Dans le cadre de ce travail, on considère les RdPS partiellement mesurés munis d'une politique de choix par compétition, d'une politique de service avec serveur réentrant et enfin d'une mémoire réinitialisable (pour sa facilité de mise en œuvre).

Si l'on considère un RdPS partiellement mesuré, la succession d'événements datés franchie dans un intervalle de temps $[t_0, t_h]$ est appelée *séquence temporisée* d'événements. Elle est donnée par (1.7).

$$\sigma = T(t_1)T(t_2) \dots T(t_h) \quad (1.7)$$

où $t_j \in [t_0, t_h]$ pour $j = 1, \dots, h$ correspondent aux dates de franchissement des transitions $T(t_j)$. Ces dates satisfont $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_h$. Si l'on considère le marquage $M(t_0)$ à partir duquel la séquence est tirée ainsi que les marquages intermédiaires, la *trajectoire temporisée* (1.8) est obtenue.

$$(\sigma, M) = M(t_0) [T(t_1) > M(t_1) \dots [T(t_h) > M(t_h)] \quad (1.8)$$

La fonction de mesure Γ définie dans la Section 1.2.3 est appliquée à la trajectoire temporisée (σ, M) de la forme (1.8) obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$. Nous obtenons ainsi une succession de marquages et d'événements mesurés et datés notée MT et qui correspond à la *trajectoire de mesure temporisée* (1.9).

$$MT = \Gamma(\sigma, M, \tau_0, \tau_{end}) = M^{obs}(\tau_0)e^{obs}(\tau_1)M^{obs}(\tau_1) \dots M^{obs}(\tau_{K-1})e^{obs}(\tau_K)M^{obs}(\tau_{end}) \quad (1.9)$$

où $M^{obs}(\tau_0) = H.M$, τ_j pour $j = 0, \dots, K$ correspondent aux dates de mesure, $e^{obs}(\tau_j)$ et $M^{obs}(\tau_j)$ sont respectivement les $j^{ème}$ étiquette et marquage mesurés à la date τ_j .

Une trajectoire temporisée (σ, M) est dite compatible avec la trajectoire de mesure MT si $\Gamma(\sigma, M, \tau_0, \tau_{end}) = MT$. Dans ce cas, en plus de la correspondance des événements et des marquages mesurés de (σ, M) avec MT , les dates de mesure doivent correspondre aux dates de tir. Notons qu'entre deux dates de mesure successives, des événements

silencieux peuvent se produire à n'importe quelle date comprise entre ces deux dates. Ainsi, une infinité de trajectoires compatibles représentée par l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$ peut être compatible avec une séquence de mesure donnée MT . Dans le but de représenter ces trajectoires, on introduit les *trajectoires partiellement temporisées*. Celles-ci correspondent à des trajectoires temporisées avec certaines dates d'occurrence des événements connues et d'autres inconnues.

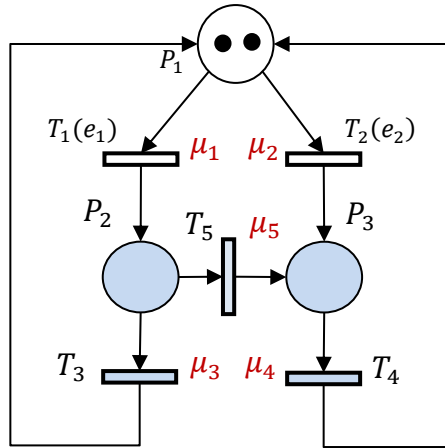


Figure 1.6. Exemple d'un RdPS partiellement mesuré

Exemple 1.4. On considère le RdPS partiellement mesuré représenté sur la [Figure 1.6](#) avec le marquage initial $M_I = (2 \ 0 \ 0)^T = 2P_1$. La configuration des capteurs est donnée par $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (L peut être également représentée par la fonction de labélisation $\mathcal{L}(T_1) = e_1$, $\mathcal{L}(T_2) = e_2$ et $\mathcal{L}(T_3) = \mathcal{L}(T_4) = \mathcal{L}(T_5) = \varepsilon$) et $H = (1 \ 0 \ 0)$. On considère les taux de franchissement $\mu = (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \mu_5)^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$. Si on simule le réseau à partir d'une date $t_0 = 0$ et du marquage $M(0) = M_I$, les deux transitions T_1 et T_2 sont sensibilisées avec un degré de validation $n_1(M_I) = n_2(M_I) = 2$. Ainsi deux durées d_1 et d_2 relatives à T_1 et T_2 respectivement sont tirées suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = n_1(M_I) \cdot \mu_1 = n_2(M_I) \cdot \mu_2 = 2$. Supposons que ces durées soient $d_1 = 0.15$ et $d_2 = 0.29$, la transition qui sera franchie est T_1 . En effet, ayant opté pour une politique de choix par compétition, c'est la transition avec la durée de tir minimale qui est franchie. La trajectoire $(T_1(0.15), M_I)$ aboutit au marquage $M(0.15) = M' = (1 \ 1 \ 0)^T$. À partir de ce marquage, les transitions sensibilisées sont T_1, T_2, T_3 et T_5 . Quatre durées sont ainsi tirées avec une loi exponentielle de paramètre $\lambda' = n_i(M') \cdot \mu_i = 1$ pour $i = 1, 2, 3, 5$. On suppose que le RdPS partiellement mesuré est ainsi simulé sur une durée $[0, 1]$ et que la trajectoire temporisée obtenue est donnée par (σ, M_I) avec $\sigma = T_1(0.15)T_2(0.55)T_3(0.89)$. En utilisant la fonction de mesure Γ , la trajectoire de mesure temporisée suivante est obtenue :

$$MT = \Gamma(\sigma, M_I) = 2P_1(0) e_1(0.15) 1P_1(0.15) e_2(0.55) 0P_1(0.55) \varepsilon(0.89) 1P_1(1).$$

En effet, à la date de début de mesure $t_0 = 0$ le marquage mesuré est donné par $2P_1$ (la notation « $2P_1$ » sera utilisée à la place de « (2) » lorsque seules des places isolées sont observées et non des sous-ensembles de places). Le franchissement de T_1 et T_2 aux dates 0.15 et 0.55 provoque l'émission des étiquettes e_1 et e_2 à ces mêmes dates et provoque aussi un changement du marquage mesuré : d'abord $1P_1$ puis $0P_1$. Ensuite, le franchissement de T_3 engendre seulement un changement du marquage mesuré de $0P_1$ à $1P_1$, ce qui explique l'utilisation du symbole ε à la date 0.89 (car ce changement du marquage mesuré est détecté). Enfin, aucune transition n'est franchie entre le dernier événement (représenté par ε) et la date de fin de mesure « 1 » à laquelle le marquage est mesuré et donné par $1P_1$.

Les trajectoires compatibles avec MT sont données par l'ensemble suivant :

$\Gamma^{-1}(MT) = \{(\sigma_i, M_I)\}$ pour $i = 1, \dots, 5$ tel que :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= T_1(0.15)T_2(0.55)T_3(0.89) \\ \sigma_2 &= T_1(0.15)T_2(0.55)T_4(0.89) \\ \sigma_3 &= T_1(0.15)T_5(t)T_2(0.55)T_4(0.89) \\ \sigma_4 &= T_1(0.15)T_2(0.55)T_5(t')T_4(0.89) \\ \sigma_5 &= T_1(0.15)T_2(0.55)T_4(0.89)T_5(t'')\end{aligned}$$

Les trajectoires (σ_3, M_I) , (σ_4, M_I) et (σ_5, M_I) sont des trajectoires partiellement mesurées. Par exemple, si l'on considère (σ_3, M_I) , la date t de franchissement de la transition T_5 peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle de temps $]0.15, 0.55[$.

L'espace d'état d'un RdPS est identique à l'espace d'état du RdP non temporisé de même structure. Donc $ReachSet(G_{OS}, M_I) = ReachSet(G, M_I)$. Pour un RdPS $\langle G, \mu \rangle$ avec $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, le graphe des marquages est, de plus, isomorphe à une chaîne de Markov à temps continu. La détermination de certaines caractéristiques du RdPS (probabilité des marquages en régime permanent, marquage moyen de chaque place, flux moyen des transitions,...) peut donc se faire en analysant la chaîne de Markov équivalente. La construction de cette chaîne est basée sur le graphe des marquages du RdPS pour lequel on associe, à chaque arc, la valeur du taux de franchissement de la transition correspondante multiplié par son degré de validation. Dans le cas d'un RdPS borné, le processus de Markov compte un nombre fini d'états. On peut alors définir le générateur du processus $A \in (\mathbb{R})^{N \times N}$, où N correspond au nombre d'états de la chaîne (cardinalité de l'ensemble $ReachSet(G_{OS}, M_I)$). La matrice A est donnée par :

$$A = (a_{ij}) \text{ tel que } a_{ij} = \begin{cases} n_k(M_i) \cdot \mu_k & \text{si } i \neq j \\ -\sum_{j \neq i}^N a_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec T_k la transition entre l'état M_i et l'état M_j et $n_k(M_i) \cdot \mu_k$ son taux de franchissement.

On s'intéresse aux probabilités des marquages en régime permanent d'un RdPS partiellement mesuré. L'utilisation de la chaîne de Markov et de son générateur permet de calculer ces probabilités. On considère que l'état du processus à l'instant $t_0 = 0$ est M_I . On note par $\pi_t = (\pi_t(M_i)) \in [0, 1]^{1 \times N}$ le vecteur ligne des probabilités des états à l'instant t . $\pi_t(M_i)$ représente ainsi la probabilité d'être dans l'état M_i à la date t . La résolution du système d'équations suivant permet de calculer la probabilité stationnaire de chaque marquage M_i notée $\pi_\infty(M_i)$:

$$\begin{cases} \pi_\infty \cdot A = 0 \\ \sum_{i=1}^N \pi_\infty(M_i) = 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans notre travail, nous n'utilisons pas directement le formalisme des chaînes de Markov qui suppose la connaissance explicite de tous les états et de leurs taux de transitions. Cependant, nous exploiterons l'information sur les probabilités des marquages en régime permanent dans le cas particulier où l'état initial du système est supposé inconnu.

Exemple 1.5. Reprenons l'exemple du RdPS de la [Figure 1.6](#) avec les mêmes paramètres et le même marquage initial. L'ensemble des états atteignables depuis $M_I = 2P_1$ est noté $ReachSet(G_{OS}, M_I)$ et contient six états :

$$\begin{aligned} M_1 &= (2 \ 0 \ 0)^T \\ M_2 &= (1 \ 1 \ 0)^T \\ M_3 &= (1 \ 0 \ 1)^T \\ M_4 &= (0 \ 2 \ 0)^T \\ M_5 &= (0 \ 1 \ 1)^T \\ M_6 &= (0 \ 0 \ 2)^T \end{aligned}$$

Ce RdPS est borné. Il est équivalent à une chaîne de Markov à temps continu représentée sur la [Figure 1.7](#). Pour un vecteur des taux de franchissement donné par $\mu = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, le générateur de cette chaîne est donné par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La résolution du système (1.10) permet de calculer les probabilités moyennes (ou stationnaires) des états en régime permanent. Les résultats suivants sont obtenus : $\pi_\infty(M_1) = 0.11$, $\pi_\infty(M_2) = 0.11$, $\pi_\infty(M_3) = 0.33$, $\pi_\infty(M_4) = 0.03$, $\pi_\infty(M_5) = 0.17$, $\pi_\infty(M_6) = 0.25$.

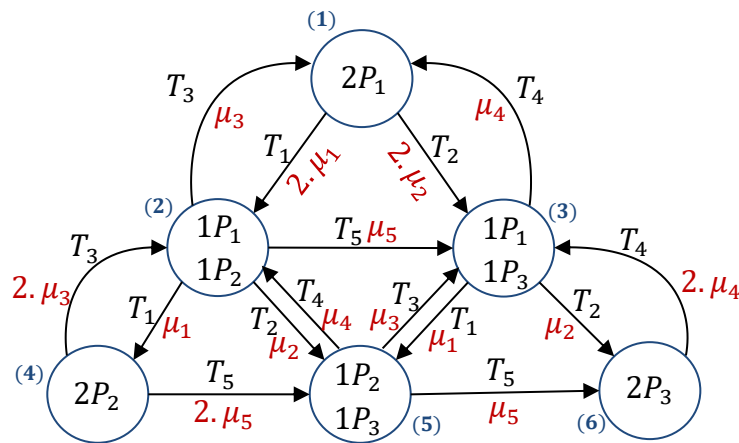


Figure 1.7. Chaîne de Markov du RdPS de la Figure 1.4

1.3. Méthodes pour le diagnostic des SED

Dans cette section, nous allons présenter quelques approches liées au diagnostic des SED. Dans un premier temps, nous exposerons l'*approche par diagnostiqueur* (Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996) qui a posé les bases formelles du diagnostic des SED en utilisant les automates à états finis. Nous allons ensuite nous intéresser au diagnostic des RdP à travers la méthode du *graphe d'accessibilité de base* (Giua & Seatzu 2005; Cabasino, Giua & Seatzu 2009; Cabasino et al. 2010). Enfin, l'intégration de l'information temporelle sera illustrée au travers de l'approche du *graphe des classes d'états* (Jiroveanu et al. 2006; Boel & Jiroveanu 2013; Ghazel 2005; Wang et al. 2013) basée sur les RdP temporels. Les approches que nous allons exposer se basent sur une représentation plus au moins compacte du graphe d'états. Dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons à la problématique du diagnostic des SED et non à l'analyse de la propriété de diagnosticabilité (la diagnosticabilité étant la capacité à diagnostiquer n'importe quelle occurrence d'une faute après un nombre fini et suffisant de mesures). Par conséquent, nous nous focaliserons dans ce qui suit sur l'application au diagnostic des approches considérées.

1.3.1. Approche par diagnostiqueur

L'approche par diagnostiqueur a été développée par (Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996) et fait partie des travaux précurseurs sur le diagnostic et l'analyse de la diagnosticabilité des SED. La méthode est basée sur un modèle non temporisé à base d'automates à états finis. Ce modèle est supposé connu et intègre à la fois le comportement normal et le comportement dysfonctionnel (ou fautif) du système. Les fautes sont représentées par des événements non mesurés. Plusieurs classes de fautes peuvent être considérées. Cependant, afin d'illustrer l'approche, nous allons considérer

par la suite le cas d'une faute unique. L'approche est basée sur **deux hypothèses : l'absence de cycles non mesurés et la vivacité du langage généré**. La première hypothèse évite que le système évolue indéfiniment dans un cycle sans générer de mesure. Il serait alors impossible de diagnostiquer la possible occurrence d'une faute. La deuxième hypothèse suppose que le langage généré est vivant. Un langage est vivant si, à partir de n'importe quel état, il existe toujours une évolution possible du système. Cette hypothèse élimine le cas où le système ne fournirait plus aucune mesure suite à un blocage. L'application de cette approche au diagnostic des SED consiste à construire un graphe déterministe nommé *diagnostiqueur*. Ce graphe est un estimateur d'état qui permet, grâce aux mesures, de déterminer l'état courant du système. Il est composé de macro-états regroupant les états qu'il est impossible de discerner suite à l'occurrence d'un événement mesuré. De plus, chacun de ces états est associé à une étiquette traduisant l'état du système : normal (N) ou fautif (F). Un macro-état contient donc plusieurs étiquettes. Lorsque ces étiquettes sont toutes normales (respectivement fautives), le macro-état (qui correspond à l'apparence du système) est dit N -certain (respectivement F -certain). Autrement (c.-à-d. dans le cas où des étiquettes N et F sont présentes à la fois dans le même macro-état), le macro-état est dit *ambigu*. En suivant l'évolution du système et de son apparence à l'arrivée de chaque nouvelle mesure, il est possible de diagnostiquer la faute de manière certaine lorsqu'un macro-état F -certain est atteint. Nous allons illustrer dans ce qui suit la méthode à travers un exemple simple.

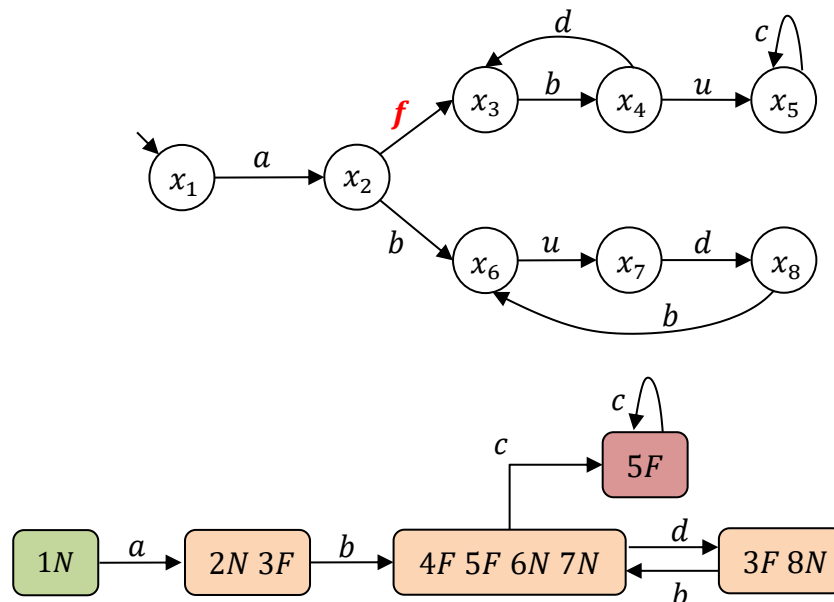


Figure 1.8. Exemple d'un automate et de son diagnostiqueur

Exemple 1.6. On considère un SED modélisé par l'automate de la Figure 1.8. Il est composé de huit états, d'un ensemble d'événements mesurés $\Sigma_o = \{a, b, c, d\}$ et d'un ensemble d'événements non mesurés $\Sigma_u = \{u, f\}$ avec f correspondant à l'événement faute. Le diagnostiqueur associé à ce système est représenté sur la même figure. On suppose la séquence $s = afbdbuc$. La séquence mesurée résultante est donnée par $s^{obs} = abdbc$. Ces deux séquences ainsi que les macro-états calculés après la collecte de chaque nouvelle mesure sont représentés sur la Figure 1.9. Ainsi, à partir de l'état initial et suite à l'occurrence du premier événement mesuré a le diagnostiqueur se trouve dans le macro-état $2N\ 3F$. En effet, il est possible que le système se retrouve dans l'état x_2 ou bien dans l'état x_3 . Ce dernier est atteint suite à la séquence af . À ce stade, il n'est pas possible de se prononcer sur l'occurrence de f . L'état estimé est mis à jour à chaque arrivée d'une nouvelle mesure. Après avoir collecté la séquence complète de mesure s^{obs} , le système se trouve nécessairement dans un macro-état F -certain (voir Figure 1.9). La faute est ainsi diagnostiquée sans ambiguïté dans ce cas.

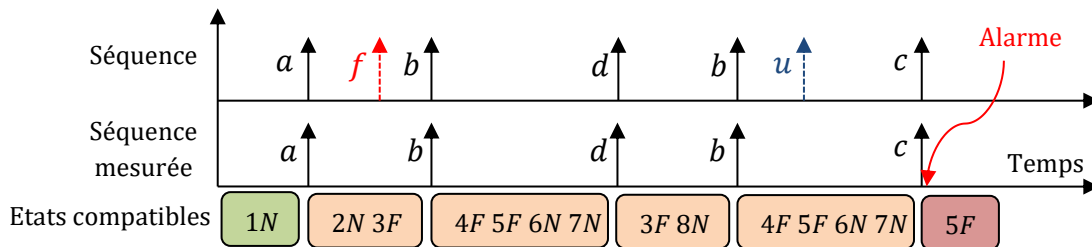


Figure 1.9. Diagnostic de la faute de l'Exemple 1.6.

1.3.2. Approche d'accessibilité de base

L'approche d'accessibilité de base (Giua & Seatzu 2005; Cabasino, Giua & Seatzu 2009; Cabasino et al. 2010) s'intéresse au diagnostic des SED modélisés par des RdP étiquetés. Cette extension de RdP peut être considérée comme un cas particulier d'un RdP partiellement mesuré pour lequel aucun marquage n'est mesuré. Cette classe particulière de réseaux est appelée RdP étiqueté et définie comme suit :

Définition 1.7. Un RdP étiqueté G_E est donné par $G_E = \langle G, \mathcal{L} \rangle$ avec

- G un RdP
- $\mathcal{L}: \mathcal{T} \rightarrow E \cup \{\varepsilon\}$ est la fonction de labélisation telle que E est l'ensemble des étiquettes et ε est associé aux transitions non mesurées (silencieuses)

Un RdP étiqueté marqué sera noté $\langle G_E, M_I \rangle$ avec M_I le marquage initial. Dans cette approche, il est supposé que la structure du RdP étiqueté est connue ainsi que son marquage initial. **Le RdP est supposé sans blocage après occurrence d'une faute et dépourvu de cycles composés exclusivement de transitions silencieuses.** Le principe de l'approche est proche de celui du diagnostiqueur dans le sens où il est fondé sur la construction d'un graphe estimateur d'état. Les fautes sont modélisées (comme

dans le cas du modèle automate à états finis du diagnostiqueur) par des événements particuliers. Bien que plusieurs classes de fautes peuvent être considérées, nous nous limiterons à une seule faute pour présenter le principe de l'approche. Dans un premier temps, le *graphe d'accessibilité de base modifié* (MBRG – Modified Basis Reachability Graph) est construit à partir du modèle RdP étiqueté. Ce graphe est un graphe déterministe qui contient généralement un nombre inférieur de nœuds que ceux du graphe des marquages du réseau. Il est admis que les événements fautes sont mesurés pour la construction de ce graphe. Chaque nœud contient deux informations représentées par le couple (M, x) : M représente le marquage atteint (appelé marquage de base) et x est une valeur binaire telle que $x = 1$ lorsque, parmi les séquences menant à l'état M , il existe au moins une séquence non fautive et une autre contenant la faute (c.-à-d. qu'il existe une ambiguïté quant à l'occurrence de la faute) et $x = 0$ dans le cas contraire. Les transitions entre les nœuds de ce graphe sont des événements mesurés avec des explications minimales (une explication minimale correspond à une suite d'événements silencieux qui explique le changement du marquage).

À partir du graphe obtenu, un deuxième graphe est construit. Celui-ci est appelé *diagnostiqueur d'accessibilité de base* (BRD – Basis Reachability Diagnoser). Les nœuds de ce graphe peuvent contenir plusieurs marquages possibles car seuls les événements mesurés sont gardés (les événements fautes ne sont plus considérés comme mesurés). De plus, ils contiennent, en plus des informations déjà contenues dans le MBRG, une étiquette $h \in \{N, F\}$. Ainsi, un nœud contient une étiquette N (associée à un marquage M) si ce marquage est atteint à partir de M_i sans l'occurrence d'une faute et contient F dans le cas contraire. Enfin, un tag Δ est rajouté étant donné qu'un même nœud peut contenir à la fois des étiquettes N et F . Ainsi, $\Delta = 1$ si la faute n'a certainement pas eu lieu (présence d'étiquettes N uniquement), $\Delta = 2$ s'il y a une ambiguïté quant à

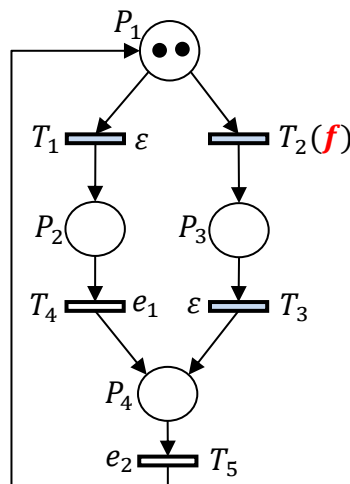


Figure 1.10. Exemple d'un RdP étiqueté

l'occurrence de la faute (présence d'étiquettes N et F à la fois) et enfin $\Delta = 3$ pour une occurrence certaine de la faute (étiquettes F uniquement). Le BRD est ainsi utilisé pour estimer l'état du système et diagnostiquer la faute. Dans ce qui suit, on illustre la méthode sur un exemple simple.

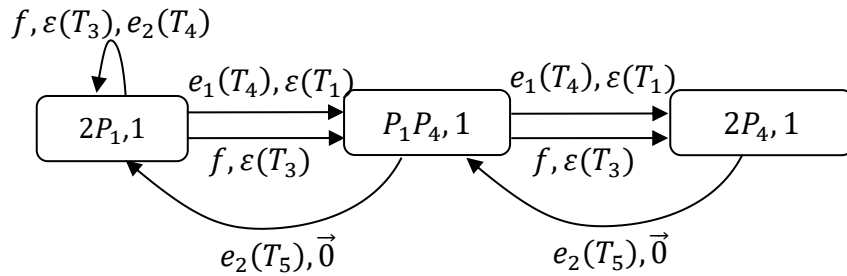


Figure 1.11. MBRG du RdP de la Figure 1.10

Exemple 1.7. On considère l'exemple de RdP étiqueté représenté sur la Figure 1.10. Les transitions $\{T_1, T_2, T_3\}$ sont considérées silencieuses (c.-à-d. $\mathcal{L}(T_1) = \mathcal{L}(T_2) = \mathcal{L}(T_3) = \epsilon$). Une faute f est associée à la transition T_2 . Les transitions T_4, T_5 renvoient respectivement les étiquettes e_1 et e_2 ($\mathcal{L}(T_4) = e_1, \mathcal{L}(T_5) = e_2$).

Le MBRG associé au RdP étiqueté de la Figure 1.10 est représenté sur la Figure 1.11. Ce graphe est composé de trois marquages différents. Les événements mesurés à l'origine des transitions entre les états sont représentés. Rappelons que l'événement faute est supposé mesuré. Par la suite, le BRD est construit et représenté sur Figure 1.12. Ce dernier est utilisé comme un estimateur de l'état du système en fonction des mesures. Ainsi, si l'on considère la séquence $\sigma = T_1 T_2(f) T_4 T_5 T_3 T_5$ à partir de l'état initial, les

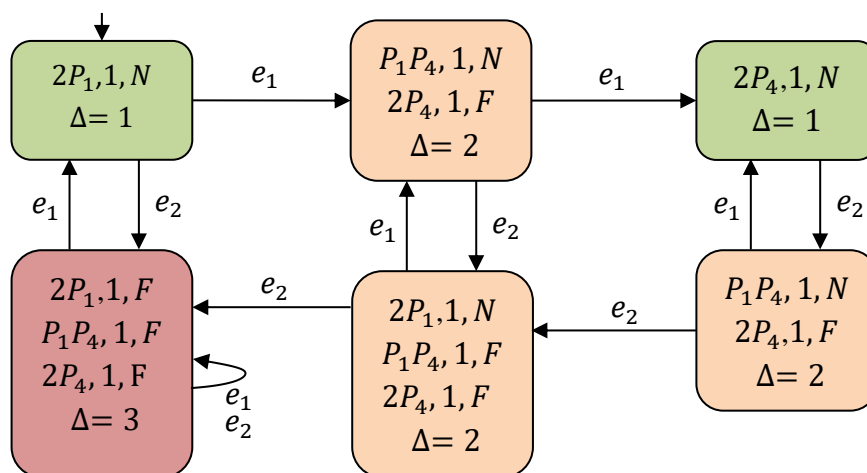


Figure 1.12. BRD du RdP de la Figure 1.10

étiquettes obtenues sont données par $\sigma^{obs} = e_1 e_2 e_2$. Il est possible de déduire du BRD que l'état du système suite à σ^{obs} correspond à une occurrence certaine de la faute. Cette dernière est donc diagnostiquée.

1.3.3. Approche graphe des classes d'états

La prise en compte du facteur temps est primordiale pour améliorer le diagnostic des SED. L'information temporelle permet souvent de discerner un comportement fautif d'un comportement nominal d'un système. De ce fait, plusieurs extensions permettant de modéliser les aspects temporels d'un système ont été mises au point. L'approche présentée dans cette section est basée sur les RdP *T-temporels* (Merlin 1975). Il s'agit d'un RdP où chaque transition est caractérisée par un intervalle de franchissement. Cet intervalle est composé d'une durée minimale et d'une durée maximale. Une transition sensibilisée ne peut être tirée que dans cet intervalle de temps. Comme dans la majorité des travaux sur le diagnostic, l'ensemble des transitions est partitionné en un ensemble de transitions mesurées et un ensemble de transitions silencieuses. De plus, des fautes sont associées à certaines transitions. Formellement, un RdP T-temporel avec des mesures partielles des transitions est défini comme suit :

Définition 1.8. Un RdP T-temporel G_T est défini par $G_T = \langle G, \mathcal{L}, I \rangle$ dans lequel :

- G est un RdP
- $\mathcal{L}: \mathcal{T} \rightarrow E \cup \{\varepsilon\}$ est la fonction de labélisation
- $I: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \times (\mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\})$ est la fonction qui associe à chaque transition un intervalle de franchissement (\mathbb{Q}^+ est l'ensemble des nombres rationnels positifs)

Un RdP T-temporel marqué sera donc noté par $\langle G_T, M_I \rangle$ avec M_I le marquage initial du réseau.

À cause des contraintes temporelles, l'évolution d'un RdP T-temporel ne correspond pas à celle du RdP non temporisée sous-jacent. Il n'est donc pas possible d'utiliser le graphe d'états pour l'analyse de ce type de modèles temporels. Pour pallier ce problème, des *classes d'états* sont utilisées. Une classe est formée d'un marquage ainsi que des contraintes temporelles liées au franchissement des transitions sensibilisées vers une autre classe. L'ensemble des classes et des transitions possibles entre elles forme le *graphe des classes d'états* (SCG – State Class Graph) (Berthomieu & Diaz 1991). Une classe i est ainsi définie par le couple $C_i = (M, D)$ avec M le marquage de la classe et D le domaine des instants de tirs possibles des transitions à partir de la classe C_i . Plusieurs classes peuvent ainsi être associées à un marquage unique mais leurs contraintes temporelles sont nécessairement différentes.

Dans cette approche, **il est supposé que le marquage initial est connu et qu'il n'existe pas de cycle d'événements silencieux**. L'objectif est d'exploiter les mesures datées (ensembles d'événements mesurés avec leurs dates d'occurrence) dans le but de

détecter l'occurrence des fautes. Le principe général de l'approche est de rechercher des trajectoires dans le graphe des classes d'états qui seraient compatibles avec les mesures. Cette recherche consiste à trouver les trajectoires qui fournissent les mesures et dont les dates respectent les contraintes temporelles (Jiroveanu et al. 2006; Boel & Jiroveanu 2013; Ghazel 2005).

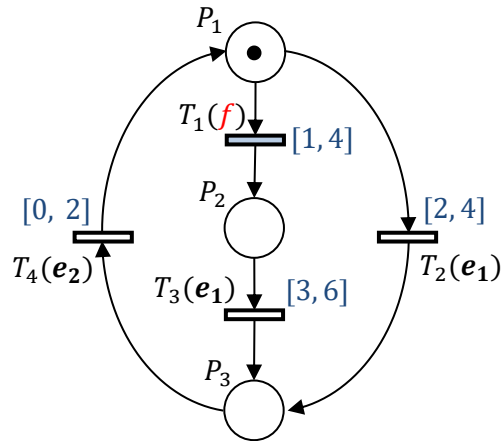


Figure 1.13. Exemple simple d'un RdP T-temporel

Exemple 1.8. On considère l'exemple de la Figure 1.13 d'un RdP T-temporel composé de trois places et de quatre transitions. Le marquage initial est donné par $M_I = 1P_1$. Les transitions $\{T_2, T_3, T_4\}$ sont mesurées telles que $\mathcal{L}(T_2) = \mathcal{L}(T_3) = e_1$ et $\mathcal{L}(T_4) = e_2$ contrairement à la transition T_1 qui est silencieuse et qui correspond à une faute f . À chaque transition est associé un intervalle de franchissement. Ainsi la transition T_2 par exemple ne peut être tirée avant deux unités de temps depuis sa sensibilisation mais devrait être tirée avant 4 unités de temps si elle reste toujours sensibilisée. Si l'on note par d_2 la durée nécessaire pour franchir T_2 depuis sa sensibilisation, on obtient la contrainte temporelle $2 \leq d_2 \leq 4$.

On s'intéresse aux étapes de la construction du SCG correspondant au RdP T-temporel de la Figure 1.13. La classe initiale C_0 du graphe est composée du marquage $M_I = 1P_1$ et du domaine D_0 des durées de tir des transitions sensibilisées à ce marquage. Les transitions T_1 et T_2 étant sensibilisées au marquage M_I , les contraintes du domaine sont : $1 \leq d_1 \leq 4, 2 \leq d_2 \leq 4$; avec d_i correspondant à la durée nécessaire au franchissement de la transition T_i depuis sa validation. La classe résultante C_0 ainsi que le SCG associé au RdP sont représentés sur la Figure 1.14.

Supposons maintenant une séquence donnée par $\sigma = T_1(2)T_3(6)T_4(7)$ obtenue dans l'intervalle de temps $[0, 7]$ et tirée à partir du marquage initial M_I qui est supposé connu. $T_1(2)$ veut dire que la transition T_1 (qui correspond à la faute) a été franchie à la date 2. À partir de σ , la séquence de mesure datée obtenue est donnée par $\sigma_T^{obs} = e_1(6)e_2(7)$. L'objectif est d'analyser le SCG pour déterminer les séquences compatibles avec les

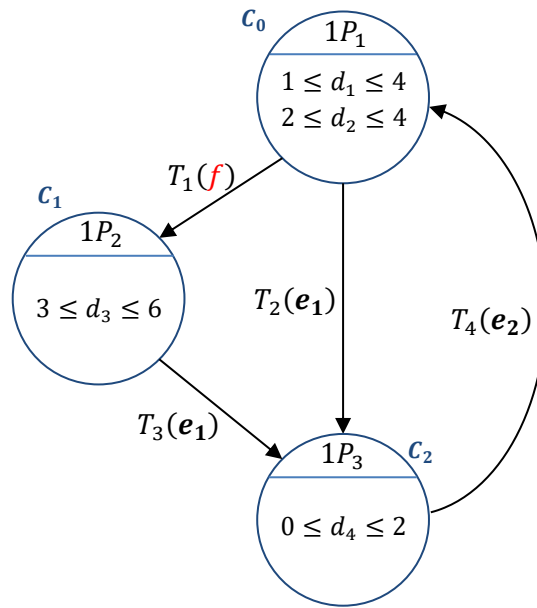


Figure 1.14. SCG associé au RdP T-temporel de la Figure 1.10

mesures. Si l'on considère la séquence de mesure sans tenir compte des dates (c.-à-d. considérer la séquence de mesure $\sigma^{obs} = e_1e_2$), les séquences compatibles sont données par $\sigma_1 = T_2T_4$, $\sigma_2 = T_2T_4T_1$, $\sigma_3 = T_1T_3T_4$ et $\sigma_4 = T_1T_3T_4T_1$ toutes tirées à partir de M_I qui est supposé connu. Trois de ces séquences ($\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$) contiennent la faute modélisée par le franchissement de T_1 . Aucune décision ne peut ainsi être prise quant à l'occurrence de la faute. Si maintenant on prend en compte les dates de mesures et qu'on associe les dates mesurées aux séquences compatibles on obtiendrait : $\sigma_1 = T_2(6)T_4(7)$, $\sigma_2 = T_2(6)T_4(7)T_1(t)$, $\sigma_3 = T_1(t')T_3(6)T_4(7)$ et $\sigma_4 = T_1(t')T_3(6)T_4(7)T_1(t)$ avec $8 \leq t \leq 11$ et $1 \leq t' \leq 4$. À partir du SCG, la date de tir de la transition T_2 est comprise entre 2 et 4 unités de temps depuis sa sensibilisation. Les séquences σ_1 et σ_2 ne sont donc pas compatibles avec la mesure car T_2 ne peut être franchie à la date 6. De plus, étant donné que la séquence de mesure est collectée dans l'intervalle de temps $[0, 7]$ et que l'événement T_4 a forcément eu lieu à la date 7, la séquence σ_4 n'est pas compatible car la transition T_1 ne peut pas être franchie à la date 7 ($8 \leq t \leq 11$). Par conséquent, la seule séquence compatible avec la séquence de mesure datée est σ_3 car elle vérifie toutes les contraintes. σ_3 contient la faute f : celle-ci a donc eu lieu de manière certaine.

1.3.4. Positionnement

L'objectif de notre travail est d'apporter une contribution sur la résolution du problème du diagnostic dans les SED. Notre approche de diagnostic sera caractérisée par trois points essentiels.

- **L'utilisation des réseaux de Petri** : de nombreuses méthodes de diagnostic des SED, telles que la méthode présentée par (Sampath et al. 1995; Sampath et al.

1996), sont basées sur les automates à états finis. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, ce formalisme se confronte au problème de l'explosion combinatoire. Il est souvent peu adapté pour la description des comportements complexes. Dans le cadre de notre travail, nous avons fait le choix d'utiliser les RdP. Ce formalisme présente l'avantage d'une modélisation compacte prenant en compte les phénomènes de parallélisme, de synchronisation et de partage des ressources. Ils sont donc particulièrement adaptés pour spécifier le comportement d'une large variété de SED. De nombreux travaux soulignent l'avantage des RdP par rapport aux automates et particulièrement dans le cadre du diagnostic (Lai et al. 2008).

- **Mesure partielle des transitions et des places** : comme nous allons le voir dans les chapitres suivants (état de l'art sur le diagnostic des RdP) et à l'instar de l'approche d'accessibilité de base présentée, de nombreuses méthodes se basent sur des modèles de RdP étiquetés qui reposent uniquement sur la détection du franchissement de certaines transitions. Dans notre cas, nous allons nous baser sur une structure de mesure plus générale grâce au modèle adopté. En effet, les RdP partiellement mesurés considèrent en plus de la détection du franchissement de certains événements, une mesure partielle du marquage d'une ou plusieurs places (voir Section 1.2.3). Cette structure offre une plus grande capacité de modélisation de l'instrumentation d'un système.
 - **Calcul de la probabilité de faute en fonction des dates des mesures** : Les méthodes basées sur un modèle non temporisé (approche diagnostiqueur, MBRG/BRD,...) exploitent seulement des événements mesurés collectés dans un ordre précis. La troisième approche présentée (graphe des classes d'états) met en évidence l'importance d'exploiter, en plus, l'information temporelle. Grâce à cette dernière, les comportements du système peuvent être mieux discernés. Nous allons exploiter dans notre approche les dates des mesures pour le diagnostic des SED et nous allons montrer l'impact que celles-ci ont sur le résultat du diagnostic. De plus, les trois méthodes présentées dans ce chapitre retournent une décision tout ou rien (c.-à-d. occurrence ou non occurrence certaine de la faute). Ils permettent seulement d'identifier les cas où tous les comportements compatibles incluent la faute ou bien ceux lorsqu'aucun comportement ne contient la faute. La décision est donc « binaire ». Dans le cas où seuls certains comportements potentiels contiennent la faute, aucune indication n'est disponible quant à l'occurrence ou non de la faute. Nous proposerons dans ce mémoire une méthode qui permet, grâce à l'extension stochastique du formalisme utilisé, de fournir dans tous les cas une probabilité d'occurrence de la faute et ceci en fonction des mesures et de leurs dates d'occurrence. Ceci permettra d'obtenir une décision de diagnostic nuancée. On insistera sur l'influence des dates des mesures sur les résultats du diagnostic.
-

1.4. Méthodes pour le pronostic des SED

Du fait des exigences accrues en matière de sûreté de fonctionnement des systèmes, il est aussi devenu important d'étudier le pronostic des défauts. Il s'agit de prédire les événements de fautes avant leurs occurrences. Les méthodes existantes s'intéressent à la fois à la problématique du pronostic et à celle de la pronosticabilité. La pronosticabilité évalue la capacité de prédire les défauts d'un système suite à un nombre suffisant de mesures. Comme nous l'avons fait dans la Section 1.3, nous allons nous intéresser aux approches existantes. Le pronostic des SED en utilisant les RdP reste une problématique très peu explorée à notre connaissance. En effet, les auteurs (Basile et al. 2009) dans leurs travaux sur le diagnostic et le pronostic distinguent le cas où la faute ne s'est pas produite de manière certaine (et donc peut se produire dans le futur) et s'intéressent beaucoup plus à la problématique du diagnostic qu'à celle du pronostic. Des résultats sur le pronostic ont été proposés dans (Lefebvre 2014a; Lefebvre 2014b) en utilisant les RdP partiellement mesurés et les RdPS partiellement mesurés. On s'intéressera à ces résultats dans l'état de l'art du Chapitre 4. Mais d'une manière générale, c'est davantage plutôt avec les automates à états finis que la problématique du pronostic des SED a été abordée dans la littérature. Pour montrer le principe général du pronostic et les résultats existants selon l'extension du modèle d'automates à états finis, nous avons choisi de présenter brièvement dans ce qui suit trois approches de pronostic : la première constitue une approche pionnière basée sur les automates à états finis et développée dans (Genc & Lafortune 2009). Le pronostic basé sur deux autres extensions d'automates à états finis est aussi présenté : le pronostic à base d'automates probabilistes (Chen & Kumar 2015b; Nouioua et al. 2014) et le pronostic à base d'automates temporisés (Cassez & Grastien 2013).

1.4.1. Pronostic des automates à états finis

L'approche de pronostic développée dans (Genc & Lafortune 2009) s'inspire de la méthode du diagnostiqueur développée dans (Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996). Les deux hypothèses sur **l'absence de cycles non mesurés et de non-blocages** sont retenues. La méthode est basée sur un automate à états finis $A = \langle \Sigma, X, \delta, x_0 \rangle$ similaire à celui utilisé dans la méthode du diagnostiqueur. L'ensemble des événements est partitionné en deux ensembles (événements mesurés et non mesurés). Des fautes sont associées à certains événements non mesurés. Le principe de l'approche consiste à analyser les mesures dans le but de prédire l'occurrence des événements de faute. Pour ce faire, on construit un estimateur d'état équivalent au diagnostiqueur présenté dans la Section 1.3.1. Celui-ci est composé de macro-états qui incluent les états possibles du système avec leurs étiquettes associées (N : normal ou F : fautif). Lorsqu'un macro-état du diagnostiqueur est atteint suite aux événements mesurés, les continuations possibles sont analysées. Lorsque celles-ci mènent vers des macro-états certains de fautes (c.-à-d. des états qui ne contiennent que des étiquettes F) alors la faute peut être prédite.

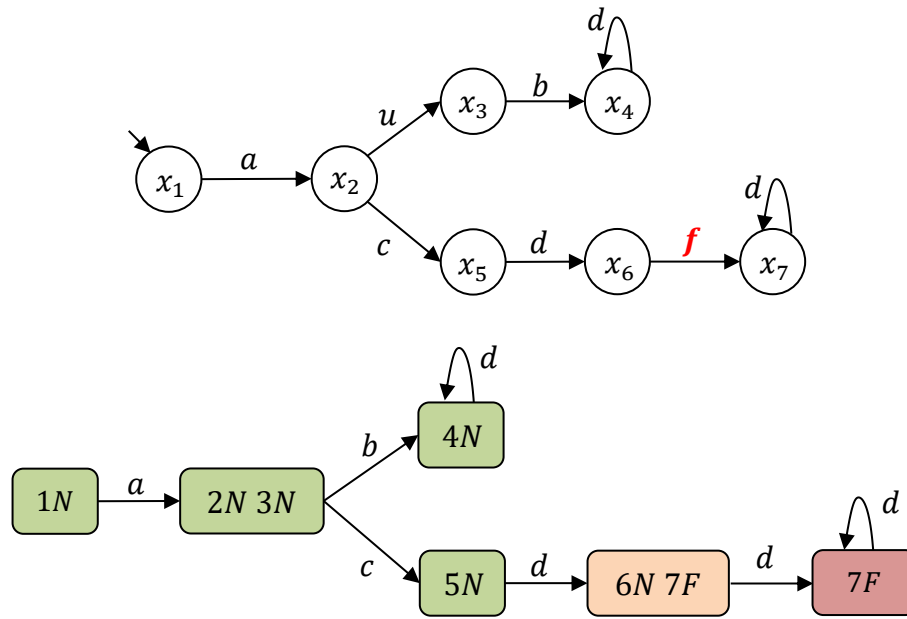


Figure 1.15. Exemple d'un automate à états finis et de son diagnostiqueur

Exemple 1.9. On considère l'exemple de l'automate à états finis représenté sur la Figure 1.15. Ce modèle représente à la fois le comportement nominal et fautif du système. Il est composé d'un ensemble de sept états et d'un ensemble d'événements $\Sigma = \{a, b, c, d, u, f\}$ partitionné en un ensemble d'événements mesurés $\Sigma_o = \{a, b, c, d\}$ et un ensemble d'événements non mesurés $\Sigma_u = \{u, f\}$. L'événement f correspond à une faute et l'objectif est de prédire l'occurrence future de celle-ci en fonction des mesures. Pour cela, le diagnostiqueur représenté sur la Figure 1.15 est construit (voir Section 1.3.1). Il est utilisé pour estimer l'état actuel du système en fonction des mesures mais aussi pour analyser les comportements futurs. Si l'on considère la séquence de mesure ac , le macro-état $5N$ est obtenu après ces mesures à partir du diagnostiqueur. C'est un état normal car il ne contient que l'étiquette N . À partir de ce macro-état, il existe une seule évolution possible du système qui passe par le macro-état incertain $6N\ 7F$ et qui se termine par un macro-état certain de faute $7F$. Ce dernier est atteint après au moins deux occurrences de l'événement d . On déduit qu'à partir de la séquence de mesures ac , il est possible de prédire l'occurrence de la faute f car le système évoluera inévitablement vers un état de faute.

1.4.2. Pronostic des automates probabilistes

Certaines approches de pronostic exploitent les automates probabilistes (définis dans la Section 1.2.1) pour le pronostic de défauts dans les SED. Dans ce cas, l'ensemble des événements est partitionné en événements mesurés et non mesurés de la même manière que dans le cas du pronostic avec des automates non probabilistes. La probabilité d'occurrence d'une séquence s est donnée par le produit des probabilités de transitions associées aux événements de s . Le principe du pronostic par automates

probabilistes (Chen & Kumar 2015b; Nouioua et al. 2014) consiste à calculer, suite à la collecte d'une séquence de mesure s^{obs} , la probabilité d'occurrence (ou de non occurrence) future d'une faute. Dans (Chen & Kumar 2015b), la probabilité notée $P_N^n(s^{obs})$ est calculée. Celle-ci évalue la probabilité que la faute ne se produira pas dans les prochains n événements suite à l'occurrence de s^{obs} . Par extension, $P_N^*(s^{obs})$ désigne la probabilité que la faute ne se produira pas dans le futur (quel que soit le nombre d'événements considérés dans l'évolution du système). En considérant un seuil $\rho \in [0, 1]$, il est ainsi possible d'émettre une alarme lorsque $P_N^m(s^{obs}) \leq \rho$ (ou $P_N^*(s^{obs}) \leq \rho$). Cette alarme signifie qu'il y a un risque d'au moins $1 - \rho$ que la faute se produise dans le futur. Lorsque $P_N^*(s^{obs}) = 0$, la faute se produira inévitablement. Le calcul de $P_N^*(s^{obs})$ est illustré sur l'exemple suivant :

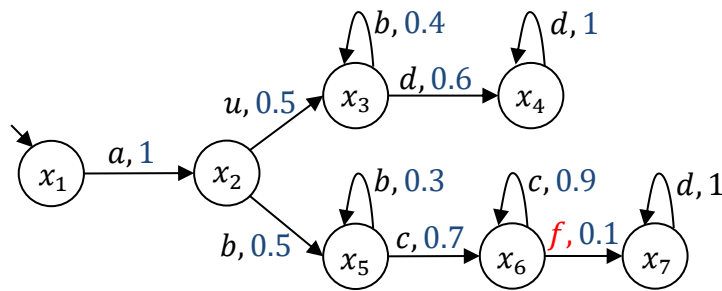


Figure 1.16. Exemple d'un automate probabiliste

Exemple 1.10. On considère l'exemple de l'automate probabiliste représenté sur la Figure 1.16. L'ensemble des événements est donné par $\Sigma = \{a, b, c, d, u, f\}$ avec $\Sigma_o = \{a, b, c, d\}$ l'ensemble des événements mesurés et $\Sigma_u = \{u, f\}$ l'ensemble des événements non mesurés. f est l'événement faute et les couples (événement, probabilité de transition) sont représentés sur les arcs. Si l'on considère un seuil de probabilité $\rho = 0.2$ et la séquence de mesures $s_1^{obs} = ab$, les deux séquences compatibles avec ces mesures sont données par $s_1 = aub$ et $s_2 = ab$. Les probabilités d'occurrence de ces séquences sont $P(s_1) = 1 \times 0.5 \times 0.4 = 0.2$ et $P(s_2) = 1 \times 0.5 = 0.5$. La probabilité $P_N^*(s_1^{obs})$ est donnée par $P_N^*(s_1^{obs}) = \frac{P(s_1)}{P(s_1) + P(s_2)} = \frac{0.2}{0.7} = 0.28$. En effet, suite à la séquence de mesures s_1^{obs} , le système se retrouve soit dans l'état x_3 soit dans l'état x_5 . Toutes les continuations possibles à partir de l'état x_3 sont saines (ne contiennent pas de faute) contrairement aux continuations de l'état x_5 à partir duquel la faute se produira inévitablement (l'automate transitera tôt ou tard de l'état x_5 vers l'état x_7). Ainsi, $P_N^*(s_1^{obs}) > \rho$. De la même manière, si l'on considère $s_2^{obs} = abbc$, $P_N^*(s_2^{obs}) = 0 < \rho$. Dans ce dernier cas, il est possible de prédire l'occurrence certaine de la faute suite à la séquence de mesure s_2^{obs} .

1.4.3. Pronostic des automates temporisés

Certaines approches se basent sur les automates temporisés (définis dans la Section 1.2.1) pour le pronostic des SED. Dans ce cas, l'évolution du système génère des séquences d'événements temporisés. Cependant, du fait des mesures partielles, seuls certains événements avec leurs dates sont mesurés. Le pronostic des SED basé sur les automates temporisés (Cassez & Grastien 2013) consiste à tirer profit de l'information temporelle contenue dans les mesures pour la prédiction des fautes. L'exemple suivant illustre l'importance des dates de mesure pour le pronostic.

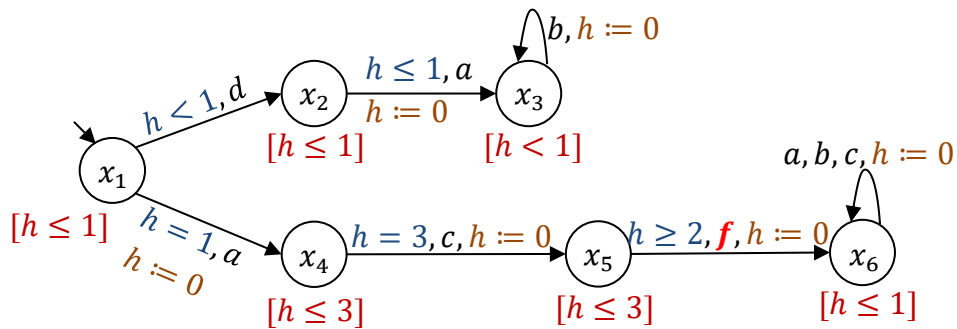


Figure 1.17. Exemple d'un automate temporisé (Cassez & Grastien 2013)

Exemple 1.11. On considère l'exemple de la Figure 1.17 adapté de (Cassez & Grastien 2013) qui représente un automate temporisé. Il est composé de six états. L'ensemble des événements mesurés est donné par $\Sigma_o = \{a, b, c\}$ et l'ensemble des événements non mesurés par $\Sigma_u = \{d, f\}$ avec f représentant la faute. Cet automate temporisé est caractérisé par une seule horloge h . Les gardes et les invariants sont représentés sur le graphe. On considère la séquence de mesure $s_T^{obs} = a(1)$ dans l'intervalle de temps $[0, 2]$ tel que a est l'événement et "1" sa date d'occurrence. La séquence de mesure non datée est dans ce cas $s^{obs} = a$. Deux séquences non datées sont compatibles avec s^{obs} : $s_1 = a$ et $s_2 = da$. Ces deux séquences mènent vers deux états différents x_4 et x_3 . En analysant les continuations possibles à partir de ces deux états, la faute se produira forcément à partir de l'état x_4 mais ne se produira pas à partir de x_3 . Il n'est donc pas possible de prédire l'occurrence de la faute. Si maintenant la date d'occurrence de la mesure est prise en compte, une seule séquence est compatible avec la mesure, elle est donnée par $s_{T_1} = a(1)$. En effet, la séquence $\sigma_{T_2} = d(t')a(1)$ (telle que $t' < 1$) ne peut se produire dans l'intervalle $[0, 2]$ sans que l'événement b ne se produise. Celui-ci doit survenir à une date strictement inférieure à 2 car son occurrence se produit après un séjour dans l'état x_3 de durée strictement inférieure à 1 (l'invariant de l'état x_3 est $h < 1$). Ainsi et du fait que b n'a pas été mesuré dans $[0, 2]$, seule la séquence s_{T_1} est compatible et l'état du système à la date 2 est sans ambiguïté x_4 . Comme indiqué plus haut, la faute se produira inévitablement à partir de cet état. La prise en compte des dates de mesure permet donc dans ce cas de prédire l'apparition future de la faute de façon certaine. De plus, la date de la faute f peut être calculée. Elle correspond à la somme des durées nécessaires à l'occurrence de a puis de c (respectivement égales à 1 et 3) ajoutée au délai

d'occurrence de f à partir de l'état x_5 , compris entre 2 (garde de f) et 3 (invariant de x_5). La date d'occurrence de f est ainsi comprise entre 6 et 7 unités de temps. Notons que l'exemple de la séquence de mesures précédente a été choisi dans le but d'illustrer un cas où il est possible de pronostiquer la faute. Cependant, si l'on considère la même mesure mais dans un intervalle de temps $[0, 1.9]$, les deux séquences s_{T_1} et s_{T_2} sont compatibles. Le système peut alors se trouver à la date 1.9 dans n'importe lequel des états x_4 et x_3 et la faute ne peut donc pas être pronostiquée.

1.4.4. Positionnement

Comme nous l'avions fait remarquer plus haut, le problème du pronostic des SED a principalement été abordé en utilisant les automates à états finis. Dans notre cas, on s'intéressera à ce problème en conservant le formalisme des RdPS partiellement mesurés pour les avantages qu'il offre et qui ont été précédemment signalés.

Le principe des approches présentées dans ce chapitre est d'exploiter les mesures pour déterminer les états courants du système (estimation d'état). Ensuite, analyser les continuations possibles à partir de ces états pour le pronostic de la faute. L'apport de notre travail sur le pronostic porte sur ces deux étapes.

- **Estimation d'état** : les deux approches basées sur les automates et les automates temporisés fournissent un ensemble d'états courants compatibles avec les mesures. Cependant, il n'existe aucune distinction entre deux états possibles. Dans notre cas, une probabilité sera associée à chaque état compatible. Bien que l'approche basée sur les automates probabilistes permette d'obtenir une probabilité, l'approche ne prend pas en compte les dates des mesures. Dans notre cas, nous allons montrer que celles-ci ont une influence sur le résultat de l'estimation d'état. Nous allons donc considérer des mesures datées pour améliorer l'estimation d'état et donc le pronostic des défauts.
 - **Pronostic** : Concernant les deux approches basées sur les automates et les automates temporisés présentées dans ce chapitre, une décision certaine sur l'occurrence future de la faute est obtenue seulement dans le cas où toutes les continuations à partir de l'estimation d'état aboutissent à une occurrence certaine de la faute (ou dans le cas où aucune d'entre elles n'aboutit à une occurrence de la faute). Cela correspond à une décision binaire (voir Section 1.3.4). Dans notre cas, c'est une probabilité d'occurrence future de la faute qui sera calculée. L'approche basée sur les automates probabilistes permet de calculer une telle probabilité. Cependant, cette probabilité est calculée sur un certain nombre d'événements futurs sans tenir compte des aspects temporels. Grâce à l'extension stochastique temporisée de notre modèle, nous allons calculer une probabilité d'occurrence future de la faute sur un horizon de temps donné. Ceci permet d'obtenir une indication sur le délai avant la faute. Lorsque cette faute correspond à l'occurrence d'une défaillance qui engendre la panne du
-

système, ce délai correspond à la durée de vie résiduelle (RUL) du système (Pecht 2008; Okoh et al. 2014; Si et al. 2011). L'évaluation de cette durée est cruciale pour prendre les mesures de maintenance nécessaires avant l'occurrence de cette défaillance.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit deux formalismes largement utilisés pour l'analyse des SED, à savoir les automates à états finis et les RdP. Nous avons par la suite exposé les deux extensions de RdP que nous allons utiliser pour le diagnostic et le pronostic des SED. Ces extensions correspondent aux RdP partiellement mesurés et aux RdP stochastiques temporisés partiellement mesurés. Dans le but d'exposer le principe du diagnostic et du pronostic et de positionner notre travail, nous nous sommes intéressés à certaines approches pionnières pour le traitement de ces problématiques. Pour le diagnostic des SED, nous avons présenté deux approches qui se basent sur un modèle non temporisés (automates à états finis et RdP étiquetés) et une troisième approche, basée sur les RdP T-temporels, qui prend en compte les contraintes temporelles du système et les dates des mesures. Trois approches qui concernent le pronostic des SED ont aussi été brièvement exposées. Il s'agit d'approches qui se basent sur les automates à états finis et ses extensions probabiliste et temporisée. Dans les approches de diagnostic et de pronostic présentées, seule une mesure partielle des événements est considérée et souvent la décision sur le diagnostic ou le pronostic d'une faute est binaire. De plus, peu d'approches exploitent les dates des mesures. Dans notre cas, nous allons utiliser un modèle RdPS partiellement mesuré prenant en compte à la fois une mesure partielle des événements et des marquages. Nous allons aussi tenir compte des mesures et de leurs dates d'occurrence et fournir, dans tous les cas, une probabilité d'occurrence passée ou future des fautes. On s'intéressera aussi à la datation des fautes lorsque celles-ci sont détectées. Nous présentons ces contributions dans les Chapitres 2 et 3.

Chapitre 2. Diagnostic des Réseaux de Petri Partiellement Mesurés

2.1. Introduction	43
2.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP non temporisés	43
2.3. Calcul des trajectoires compatibles	49
2.3.1. Approche par LMI.....	50
2.3.2. Approche incrémentale.....	52
2.4. Degrés de croyance des fautes (beliefs)	58
2.5. Conclusion.....	59

2.1. Introduction

Le diagnostic des SED consiste à analyser des mesures, c'est-à-dire des données issues des capteurs du système, dans le but de détecter l'occurrence d'événements non souhaités et silencieux. Ces événements représentent des *fautes* (ou *défauts*) qui engendrent un comportement fautif du système susceptible de provoquer une défaillance. Cette dernière peut causer d'importants dégâts humains et/ou matériels. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au diagnostic des SED modélisés par des RdP partiellement mesurés et non temporisés. L'objectif est d'exploiter des mesures composées d'une suite d'événements et de marquages mesurés dans le but de détecter l'occurrence d'une faute. Dans un premier temps, nous présentons un état de l'art sur le diagnostic des RdP non temporisés. Dans le premier chapitre, nous avons détaillé quelques approches de diagnostic pour illustrer cette problématique et positionner notre travail. L'état de l'art du présent chapitre se veut plus complet mais moins détaillé que les méthodes présentées au [Chapitre 1](#). Il complète ainsi ces méthodes en donnant les principales références utiles pour les travaux que nous avons menés. Deux méthodes de diagnostic développées récemment au GREAH sont ensuite détaillées : la première est basée sur la résolution d'*Inégalités Matricielles Linéaires* (Linear Matrix Inequalities ou LMI) (Lefebvre 2014a) et la seconde sur un algorithme incrémental (Ammour et al. 2017c). Elles permettent de déterminer l'ensemble des comportements compatibles avec une trajectoire mesurée donnée. Cet ensemble sera ensuite exploité dans les différentes contributions sur les SED temporisés que nous détaillerons dans la suite du mémoire. Enfin, on s'intéressera à la complexité des deux approches proposées avant de présenter un exemple pour illustrer les résultats.

2.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP non temporisés

Le problème de diagnostic des SED a été largement étudié en utilisant le formalisme des automates à états finis et des langages réguliers depuis les années 90 (Lin 1994; Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996). Plus tard, les RdP devenus incontournables pour la modélisation de différents types de systèmes (manufacturiers, informatiques, logistiques...), sont exploités pour l'étude du diagnostic des SED. La facilité avec laquelle ils modélisent le parallélisme et les synchronisations les rend plus adaptés aux applications pratiques. Plusieurs approches ont donc été développées pour traiter la problématique du diagnostic en utilisant les RdP. Celles-ci dépendent entre autres de l'extension des RdP considérées (RdP non temporisés, temporisés, continus, stochastiques...) ainsi que du type de mesures traitées : mesures totales ou partielles du tir des transitions et/ou du marquage des places. De plus, deux problématiques découlent du problème global de diagnostic des RdP (et des SED en général) : le premier est le problème du *diagnostic* dont le principe général est l'exploitation en ligne des

mesures issues du système dans le but de détecter et de localiser les fautes, le deuxième est celui de l'étude de la propriété de *diagnosticabilité* qui consiste à étudier la capacité, pour le système et sa configuration de capteurs, de diagnostiquer dans tous les cas l'occurrence d'une faute après un nombre suffisant et fini de mesures.

Globalement, les approches de diagnostic des RdP, quelles que soient leurs extensions, se basent :

- soit sur une construction d'un graphe à partir du modèle du système. Ce graphe est généralement une représentation compacte du graphe des marquages (espace d'état) en fonction des mesures.
- soit sur l'exploitation des propriétés structurelles du RdP.
- soit sur l'élaboration d'algorithmes qui exploitent directement la représentation mathématique du RdP.

Une combinaison entre ces différentes techniques est aussi souvent adoptée. Une grande partie des travaux sur le diagnostic des RdP se base sur des modèles qui incluent à la fois le comportement normal du système et son comportement fautif (c.-à-d. son comportement suite à l'occurrence d'une faute). Ce dernier est généralement désigné par *modèle fautif* ou *modèle de dysfonctionnement*. Les défauts sont généralement associés à certaines transitions, bien que quelques approches adoptent des modèles de défaut plus complexes (Wu & Hadjicostis 2005; Gougam et al. 2014). Le tir de ces transitions fautives est synonyme d'apparition d'un défaut dans le système. Ces modèles sont par ailleurs constitués d'un ensemble de transitions mesurées permettant de représenter l'instrumentation du système, ainsi que d'un ensemble de transitions non mesurées (ou silencieuses) qui représentent soit un comportement normal mais non mesuré du système, soit des fautes. Le diagnostic consiste à déduire l'ensemble des fautes qui ont pu se produire durant le fonctionnement du système en se basant sur les événements mesurés. Nous présentons dans ce qui suit une classification des méthodes de diagnostic des RdP selon la technique utilisée. Nous précisons à chaque fois le type de modèle et de mesures considérés.

- **Méthodes basées sur le graphe des marquages**

L'approche par *diagnostiqueur* développée initialement en utilisant le formalisme des automates (Lin 1994; Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996) et illustrée dans la Section 1.3.1 a été étendue au cas des RdP. Dans (Ushio et al. 1998), les auteurs considèrent que le marquage des places est mesuré et que toutes les transitions sont silencieuses avec des fautes associées à certaines d'entre elles. Ils s'intéressent à la problématique de la diagnosticabilité en se basant sur le graphe des marquages. Cette approche nécessite souvent l'exploration de la totalité de l'espace d'état et demande donc un effort considérable de calcul. Pour pallier ce problème, plusieurs solutions ont été proposées telles que l'utilisation d'une architecture de diagnostic distribuée avec des

modèles de RdP couplés par des places communes (Genc & Lafortune 2003; Genc & Lafortune 2007). Plus récemment, les auteurs de (Liu et al. 2017) ont proposé une méthode pour l'analyse de la diagnosticabilité et le diagnostic en ligne des RdP labélisés, dite à *la volée*. Celle-ci consiste à analyser la propriété au cours de la construction du diagnostiqueur. Ainsi, l'analyse de seulement une partie du graphe des marquages permet en général d'obtenir un résultat de diagnostic. Cette approche a été combinée avec d'autres méthodes basées sur les T-invariants (Li et al. 2015a) ou encore les vérificateurs (Li et al. 2015b).

D'autres méthodes se rapprochent de la méthode par diagnostiqueur mais visent à construire une partie seulement de l'espace d'état, celle qui est pertinente pour la détection des défauts et/ou la prise de décision quant à la diagnosticabilité du système. Dans (Cabasino et al. 2011), les auteurs utilisent une technique dite d'*accessibilité de base* qui s'appuie sur des RdP étiquetés dont le principe général est illustré dans la Section 1.3.2. Cette méthode a été d'abord introduite dans (Giua & Seatzu 2005; Cabasino et al. 2010) pour la détection de défauts. Elle vise à construire une partie réduite du graphe des marquages dite *graphe d'accessibilité de base* (Basis Reachability Graph ou BRG) qui est un graphe déterministe. Une notion importante pour la construction de ce graphe est celle des *explications minimales*. Ces dernières correspondent aux séquences d'événements non mesurés de longueur minimale qui expliquent le franchissement d'événements mesurés. Cette notion est inspirée des travaux de (Boel & Jiroveanu 2004). Ces derniers utilisent dans (Jiroveanu & Boel 2010) un modèle réduit appelé *automate-ROF* (automate ne contenant que les événements mesurés et les événements de faute) pour tester la diagnosticabilité des RdP bornés en supposant que la partie non mesurée est acyclique. Les auteurs de (Cabasino, Giua, et al. 2014) analysent la diagnosticabilité des RdP étiquetés en construisant deux graphes : le *graphe d'accessibilité de base modifié* (MBRG) et le *diagnostiqueur d'accessibilité de base* (BRD). Bien que la taille du MBRG soit inférieure à celle du graphe des marquages en pratique, sa construction peut nécessiter un nombre d'étapes égal à la taille du graphe des marquages. Dans (Boussif 2016), l'auteur propose la construction d'un diagnostiqueur semi-symbolique. Il compare ensuite cette approche dans (Boussif et al. 2017) avec deux autres approches du diagnostiqueur (Cabasino, Hadjicostis, et al. 2014; Liu et al. 2017).

La méthode de *dépliage* (Unfolding) des RdP utilisée dans (Benveniste et al. 2003) est appliquée au cas d'une architecture distribuée de capteurs. Cette technique permet de décrire une succession d'exécutions du système sans entrelacer les événements concurrents. Ainsi, il est supposé que le modèle RdP est composé de plusieurs sous modèles et que toutes les transitions sont étiquetées. Le superviseur collecte une séquence d'événements non synchronisés. La méthode de dépliage met donc à profit la nature distribuée du modèle et permet de construire en ligne un graphe de diagnostic sous forme d'un arbre mis à jour à chaque arrivée d'une étiquette. Ceci évite les

problèmes de complexité dus à l'énumération de l'espace d'état. Cette approche a été étendue plus tard à la présence d'événements silencieux (Haar et al. 2013).

- **Méthodes basées sur les propriétés structurelles**

(Prock 1991) est l'un des premiers auteurs à exploiter les propriétés structurelles des RdP pour le diagnostic des SED. Des RdP représentant le comportement normal du système sont utilisés et les fautes sont détectées suite à une variation du nombre de jetons dans un P-invariant. Les auteurs de (Wen et al. 2005) supposent, quant à eux, une mesure partielle des événements et du marquage. En étudiant la relation entre la diagnosticabilité et les invariants du RdP, ils établissent une condition suffisante pour la diagnosticabilité. Dans (Ramírez-Treviño et al. 2007), les auteurs considèrent des RdP interprétés, saufs et fortement connexes. Le diagnostic est réalisé grâce à un diagnostiqueur basé sur la partie nominale du RdP interprété. L'algorithme compare ainsi la sortie du système avec celle du diagnostiqueur pour la détection d'une déviation du comportement synonyme de l'occurrence d'une faute.

Dans (Cabasino, Giua, Lafortune, et al. 2009), les auteurs s'intéressent au cas des RdP non bornés et utilisent une méthode inspirée du diagnostic des SED modélisés par les automates à états finis appelée *approche vérificateur* (ou *produit jumelé*) (Jiang et al. 2001; Yoo & Lafortune 2002). Le principe consiste à réaliser dans un premier temps une copie du modèle du RdP en renommant les événements silencieux et en éliminant les événements de faute. Ensuite, l'approche réalise le produit synchronisé entre le modèle et sa copie et vérifie la présence, sur ce nouveau modèle, de cycles ambigus. La présence de ces derniers est synonyme de la non-diagnosticabilité du système. En effet, un cycle ambigu correspond à deux séquences, l'une normale et l'autre fautive, ayant le même comportement mesuré et donc indiscernables. L'approche vérificateur a inspiré plusieurs travaux utilisant le même principe de base (Chung 2005; Madalinski et al. 2010; Cabasino et al. 2012) et plus récemment (Gougam et al. 2013; Gougam et al. 2014) où les auteurs s'intéressent à la détection de motifs de faute (suite d'événements traduisant un certain comportement fautif du système) tout en exploitant les avantages de la méthode de dépliage.

- **Méthodes basées sur les techniques algébriques**

Ces méthodes exploitent la représentation mathématique des RdP. Dans (Wu & Hadjicostis 2005), les auteurs se basent sur un modèle représentant uniquement le comportement normal du système. Deux types de fautes sont considérés : des fautes sur les places qui faussent le marquage et des fautes sur les transitions qui engendrent un marquage incorrect. Ils utilisent une méthode d'identification qui s'appuie sur une technique de décodage algébrique et de redondance sur les places. Les auteurs supposent une mesure périodique du marquage du système. Dans (Lefebvre & Delherm 2007), le modèle inclut cette fois-ci des fautes associées à certaines transitions. Les auteurs supposent une mesure partielle du marquage de certaines places et l'objectif est de caractériser l'ensemble des places qu'il faut mesurer pour détecter le franchissement

des transitions fautives. Plus tard, dans (Ru & Hadjicostis 2009), les auteurs s'intéressent au cas des RdP partiellement mesurés (mesure partielle des transitions et des marquages) et développent une technique pour le calcul du *degré de croyance* (Belief) qui représente le ratio, suivant une trajectoire de mesure, entre le nombre de trajectoires compatibles fautives et le nombre total de trajectoires compatibles. Le même formalisme est exploité dans (Lefebvre 2014a) avec une mesure partielle des transitions et des marquages. La méthode est basée sur la résolution de LMI dans le but de déterminer tous les comportements compatibles avec la trajectoire de mesure. Cette méthode a été adaptée au diagnostic en ligne dans (Lefebvre 2014c) en limitant la taille de la trajectoire de mesure.

Dans (Dotoli et al. 2009), le diagnostic s'appuie sur la représentation mathématique des RdP et une résolution de systèmes linéaires avec contraintes en utilisant *la programmation linéaire en nombres entiers* (Integer Linear Programming ou ILP) en ligne. Cette technique permet de déterminer l'ensemble des séquences réalisables et compatibles avec les mesures et de tester la présence de fautes dans celles-ci. Cette approche est étendue dans (Basile et al. 2012) au cas de l'analyse hors ligne de la *K-diagnosticabilité*, c'est-à-dire la capacité à détecter la faute au pire K événements après

TABLEAU 2.1. Classement des travaux sur le diagnostic des RdP.

	RdP incluant le modèle de dysfonctionnement	Mesure partielle des...		Technique utilisée					
		Marquages	Transitions	ILP/LMI	Algébrique	Diagnostiqueur & graphe des marq.	Vérificateur	Dépliage	Propriétés structurelles
(Basile et al. 2008; Basile et al. 2009; Dotoli et al. 2009; Basile et al. 2012; Cong et al. 2017)	•		•	•					
(Lefebvre 2014a; Lefebvre 2014c)	•	•	•	•					
(Wu & Hadjicostis 2005)		•			•				
(Lefebvre & Delherm 2007)	•	•			•				
(Ru & Hadjicostis 2009)	•	•	•		•				
(Ushio et al. 1998)	•	•				•			
(Genc & Lafortune 2003; Giua & Seatzu 2005; Genc & Lafortune 2007; Cabasino et al. 2010; Cabasino et al. 2011; Cabasino, Giua, et al. 2014; Li et al. 2015a; Liu et al. 2017; Jiroveanu & Boel 2010)	•		•			•			
(Jiang et al. 2001; Yoo & Lafortune 2002; Chung 2005; Madalinski et al. 2010; Cabasino et al. 2012; Gougam et al. 2014; Gougam et al. 2013; Cabasino, Giua, Lafortune, et al. 2009; Li et al. 2015b)	•		•				•		
(Benveniste et al. 2003; Haar et al. 2013)	•		•					•	
(Ramírez-Treviño et al. 2007; Wen et al. 2005)		•	•						•
(Prock 1991)		•							•

son occurrence. Dans (Basile et al. 2009), les auteurs introduisent la notion de *g-marking*. Il est obtenu lorsque l'on souhaite mettre à jour un marquage avec un événement mesuré en utilisant l'équation d'état. Le marquage obtenu est généralement caractérisé par des composantes négatives dues à la présence de transitions silencieuses. En effet, l'événement mesuré n'est pas validé au marquage considéré et le franchissement d'une séquence de transitions silencieuses est nécessaire pour sa validation. L'utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers permet à partir des *g-markings* d'obtenir en ligne les vecteurs de franchissement qui expliquent la mesure et donc de détecter l'occurrence d'une faute. Dans (Basile et al. 2008), ces marquages sont utilisés pour établir deux conditions suffisantes : l'une pour la non diagnosticabilité et l'autre pour la diagnosticabilité. Plus récemment, la programmation linéaire en nombres entiers a été exploitée dans (Cong et al. 2017). Dans ce travail, les auteurs s'intéressent au diagnostic en ligne des RdP dans le cadre d'une architecture décentralisée.

Le TABLEAU 2.1 bien que non exhaustif, permet d'avoir un aperçu sur le classement des travaux sur le diagnostic des RdP en fonction du type de modèle considéré (incluant ou non le comportement fautif), du type de mesures et de la méthode utilisée. Nous remarquons que la majorité des approches est soit basée sur une mesure partielle des événements, soit sur une mesure partielle des marquages. Dans notre cas, nous nous intéressons au diagnostic des RdP partiellement mesurés incluant le modèle de dysfonctionnement et nous considérons à la fois une mesure partielle sur les transitions et les marquages. Ce formalisme offre une plus grande capacité de modélisation des différents types de capteurs. À titre d'exemple, une transition mesurée est plus adaptée pour modéliser un compteur du nombre de pièces usinées dans un atelier. Tandis qu'une place mesurée sera utilisée pour modéliser un capteur de type caméra fournissant le nombre de pièces en cours de traitement. Les méthodes se focalisant sur un seul type de mesure ne sont donc pas directement exploitables avec ce type de formalisme. Dans (Ru & Hadjicostis 2009), les auteurs s'intéressent au diagnostic des RdP partiellement mesurés. Cependant, ils proposent une transformation du RdP partiellement mesuré (pour des cas particuliers de mesure partielle du marquage) en un RdP étiqueté (c.-à-d. que la mesure partielle du marquage est représentée par des transitions mesurées dans le nouveau RdP). Bien que cette transformation ait été étendue au cas général d'une mesure pondérée d'un sous ensemble de places dans (Tong et al. 2016), nous proposons dans notre travail une méthode de diagnostic directement applicable sur le RdP partiellement mesuré. Ceci évite cette étape de transformation qui engendre nécessairement un coût supplémentaire en termes de calcul. Nous allons aussi brièvement présenter les résultats obtenus dans (Lefebvre 2014a) sur le diagnostic des RdP partiellement mesurés en utilisant les LMI. Nous allons montrer que notre approche basée sur un algorithme incrémental (Ammour et al. 2017c) présente un gain en termes de complexité de calcul. Cet algorithme permet, à partir d'une trajectoire de mesure, de calculer toutes les trajectoires (ou comportements) compatibles avec ces mesures. L'analyse de ces trajectoires fournit des

informations sur l'occurrence d'éventuels défauts permettant d'obtenir un diagnostic du système en fonction des mesures considérées.

2.3. Calcul des trajectoires compatibles

Dans cette section, on s'intéresse au calcul des trajectoires compatibles avec une trajectoire de mesures donnée. Pour ce faire, nous considérons un RdP partiellement mesuré $\langle G, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ ainsi qu'une trajectoire de mesure MT introduite par (1.6) et rappelée ci-après :

$$MT = (M_0^{obs})e_1^{obs}(M_1^{obs}) \dots e_{K-1}^{obs}(M_{K-1}^{obs})e_K^{obs}(M_K^{obs}) \quad (2.1)$$

où K représente le nombre d'événements mesurés correspondant à la taille de MT . L'étiquette $e_j^{obs} \in E \cup \{\varepsilon\}$ correspond au $j^{\text{ème}}$ événement mesuré et M_j^{obs} est le $j^{\text{ème}}$ marquage mesuré. $M_0^{obs} = H.M$ tel que M est le marquage à partir duquel les mesures ont été enregistrées. Ce marquage M est supposé inconnu. On note par $ReachSet(G, M_I)$ l'ensemble des états atteignables depuis M_I . Dans ce qui suit, on s'intéresse au RdP bornés et l'hypothèse suivante est considérée :

Hypothèse H2.1. L'ensemble $ReachSet(G, M_I)$ est supposé connu et de cardinalité finie.

Notons qu'entre deux mesures, plusieurs événements silencieux peuvent se produire sans que le marquage mesuré ne change. Aussi, une trajectoire (σ_U, M) qui satisfait $\Gamma(\sigma_U, M) = MT$ est dite compatible avec la trajectoire de mesure MT (voir Section 1.2.3). L'objectif est de calculer l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$ des trajectoires compatibles. Notons qu'une infinité de trajectoires peuvent être compatibles avec une mesure élémentaire de type $(M_{k-1}^{obs})e_k^{obs}(M_k^{obs})$. Pour éviter ce cas, l'hypothèse suivante est retenue :

Hypothèse H2.2. La partie non mesurée du graphe de marquage est acyclique.

Cette hypothèse est souvent retenue dans les travaux sur le diagnostic des SED. En effet, il est clair que si le système évolue indéfiniment dans un cycle sans fournir aucune mesure suite à l'occurrence d'une faute, cette dernière ne sera pas détectée. Dans notre cas, cette hypothèse peut être assurée grâce à la configuration des capteurs. Elle implique que les trajectoires compatibles restent de taille finie. Dans le cadre de cette hypothèse, on suppose que la taille maximale d'une trajectoire silencieuse (trajectoire qui ne génère aucune étiquette et qui ne modifie pas le marquage mesuré) est donnée par $h_{max} - 1$. Ainsi, h_{max} est définie comme étant la taille maximale d'une séquence de la forme :

$$\sigma_{Um} = T(1)T(2) \dots T(h_{max} - 1)T(h_{max}) \quad (2.2)$$

avec $T(1)T(2) \dots T(h_{max} - 1)$ une séquence d'événements silencieux et $T(h_{max})$ correspond à un événement qui produit une étiquette et/ou un changement dans le marquage mesuré. Le calcul de h_{max} est donné par (Lefebvre 2014a) :

$$h_{max} = \min\{h \geq 0 \text{ tel que } (A_\varepsilon)^h = 0\} \quad (2.3)$$

avec A_ε la matrice relative à la partie non mesurée du graphe des marquages. Elle est définie par $A_\varepsilon = (a_{\varepsilon ik}) \in \{0,1\}^{N \times N}$ (N étant le nombre d'états du graphe des marquages) tel que $a_{\varepsilon ik} = 1$ si la transition entre M_i et M_k est silencieuse et n'engendre pas un changement du marquage mesuré (c.-à-d. $H(M_i) = H(M_k)$) et $a_{\varepsilon ik} = 0$ sinon.

Dans le cadre de ces deux hypothèses, l'objectif est de caractériser l'ensemble des comportements possibles du système dont l'observation coïncide avec cette trajectoire de mesure. Dans un premier temps, nous allons présenter une approche, initialement développée dans (Lefebvre 2014a), qui consiste à résoudre un ensemble de LMI. La complexité de cette méthode est analysée. Nous présentons ensuite une deuxième approche dite approche incrémentale (Ammour et al. 2017c). Celle-ci présente l'avantage d'une complexité réduite par rapport à l'approche par LMI.

2.3.1. Approche par LMI

On considère une trajectoire $(\sigma_U, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$ compatible avec la trajectoire de mesure MT donnée par (2.1). La séquence σ_U peut s'écrire en utilisant la borne h_{max} , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_U = & T(1,1) \dots T(1, h_1 - 1) \mathbf{T}(\mathbf{1}, \mathbf{h}_1) T(2,1) \dots T(2, h_2 - 1) \mathbf{T}(\mathbf{2}, \mathbf{h}_2) \\ & \dots T(K, 1) \dots T(K, h_K - 1) \mathbf{T}(\mathbf{K}, \mathbf{h}_K) T(K+1,1) \dots T(K+1, h_{K+1} - 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec K la taille de MT et $h_j - 1$ le nombre d'événements silencieux entre la $(j - 1)^{ème}$ et la $j^{ème}$ mesure. Une transition $\mathbf{T}(\mathbf{j}, \mathbf{h}_j)$ avec $h_j \leq h_{max}$ et $j = 1, \dots, K$ correspond à une transition qui fournit une étiquette et/ou qui engendre un changement du marquage mesuré. Les autres transitions correspondent quant à elles à des événements silencieux ne provoquant pas de changement du marquage mesuré. Le groupe de transitions silencieuses $T(K+1,1) \dots T(K+1, h_{K+1} - 1)$ qui peut être franchi après le dernier événement mesuré correspond à la *clôture silencieuse*. Notons qu'avec l'hypothèse H2.2, l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$ est de cardinalité finie. Cet ensemble est obtenu en résolvant un ensemble de LMI. La Proposition 2.1 est utilisée pour calculer l'ensemble des trajectoires compatibles avec une mesure MT de la forme (2.1).

Proposition 2.1. (Lefebvre 2014a) Soient un SED modélisé par un RdP partiellement mesuré $\langle G, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H2.1 et H2.2, une trajectoire de mesure MT de la forme (2.1) et une trajectoire (σ_U, M) avec σ_U de la forme (2.4). (σ_U, M) est dite compatible avec MT ssi :

- 1) $H.M = M_0^{obs}$
- 2) (σ_U, M) satisfait l'inégalité matricielle (2.5), l'égalité (2.6) pour $k = 1, \dots, K$ et (2.7).

$$\begin{pmatrix} -I_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -I_q & 0 \\ (1_q)^T & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (1_q)^T & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (1_q)^T & 0 \\ W_{PR} & 0 & \dots & 0 & -I_n \\ -W & W_{PR} & \ddots & \vdots & -I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -W & \dots & -W & W_{PR} & -I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(T(1,1)) \\ \vdots \\ X(T(1, h_1)) \\ X(T(2,1)) \\ \vdots \\ X(T(2, h_2)) \\ \vdots \\ X(T(K, h_K)) \\ M \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0_q \\ 0_q \\ \vdots \\ 0_q \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & L & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L \\ H.W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & H.W & 0 \\ H.W & \dots & H.W & H.W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(T(k,1)) \\ \vdots \\ X(T(k, h_k - 1)) \\ X(T(k, h_k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \\ e_k^{obs} \\ 0_{no} \\ \vdots \\ 0_{no} \\ M_k^{obs} - M_{k-1}^{obs} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L \\ H.W & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & H.W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(T(K+1,1)) \\ \vdots \\ X(T(K+1, h_{K+1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \\ 0_{no} \\ \vdots \\ 0_{no} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Démonstration. Nous donnons ci-dessous la signification des trois systèmes linéaires. Pour plus de détails sur la démonstration, se référer à (Lefebvre 2014a).

Une trajectoire compatible est notée (σ_U, M) avec σ_U de la forme (2.4). Chaque transition de σ_U est associée à un vecteur de franchissement $X(T(k, m))$ avec $k = 1, \dots, (K + 1)$ et $m = 1, \dots, h_k$. Considérons les séquences de transitions $\sigma_U(k) = T(k, 1) \dots T(k, h_k - 1)T(k, h_k)$ de σ_U avec $k = 1, \dots, K$ qui vérifient (2.5) et (2.6). Les lignes 1 à 4 de l'inégalité (2.5) garantissent que chaque vecteur $X(T(k, m))$ est à composantes positives. De la même manière, les lignes 5 à 8 garantissent que les composantes ne contiennent au plus qu'une seule valeur égale à 1, c'est-à-dire que ces vecteurs peuvent représenter soit le franchissement d'une transition unique (si le vecteur contient une composante égale à 1) soit le fait qu'aucune transition n'est franchie. Enfin, les lignes 9 à 12 signifient qu'il existe un marquage $M \in ReachSet(G, M_I)$ à partir duquel la séquence $\sigma_U(k)$ est réalisable.

Lorsque $\sigma_U(k)$ vérifie (2.6), cela signifie qu'elle est compatible avec la mesure $(M_{k-1}^{obs})e_k^{obs}(M_k^{obs})$. En effet, les lignes 1 à 3 garantissent que $T(k, 1) \dots T(k, h_k - 1)$ sont des transitions silencieuses tandis que la ligne 4 indique que le franchissement de la transition $T(\mathbf{k}, \mathbf{h}_k)$ produit bien l'étiquette e_k^{obs} . De même, les lignes 5 à 7 garantissent que $T(k, 1) \dots T(k, h_k - 1)$ ne changent pas le marquage mesuré alors que la ligne 8 indique que le franchissement de la transition $T(\mathbf{k}, \mathbf{h}_k)$ provoque le changement du marquage mesuré de M_{k-1}^{obs} à M_k^{obs} .

Enfin, l'égalité (2.7) est semblable à (2.6) mais concerne la clôture silencieuse $T(K + 1, 1) \dots T(K + 1, h_{K+1} - 1)$ et garantit que cette dernière, lorsqu'elle existe, ne produit aucune étiquette mesurée et ne provoque aucun changement dans le marquage mesuré. Une solution (σ_U, M) des LMI (2.5), (2.6) et (2.7) constitue bien une trajectoire compatible avec MT . ■

La complexité de calcul de l'ensemble des trajectoires compatibles notée $\mathcal{O}(\Gamma^{-1}(MT))$ dépend de la taille K de la trajectoire de mesure MT , du nombre d'états du graphe des marquages ainsi que de la valeur de h_{max} qui correspond à la taille maximale d'une trajectoire silencieuse. Cette complexité est donnée par $\mathcal{O}(\Gamma^{-1}(MT)) = \mathcal{O}((q + 1)^{N(K+1)h_{max}})$, elle est donc exponentielle suivant le nombre d'états N du graphe des marquages et suivant la taille K de la trajectoire de mesure. Dans ce qui suit, une nouvelle approche incrémentale est proposée. L'objectif est de réduire la complexité de cette étape de recherche des trajectoires compatibles.

2.3.2. Approche incrémentale

Dans cette section, nous allons présenter une deuxième approche du calcul des trajectoires compatibles, basée sur un algorithme incrémental (Ammour et al. 2017c). On rappelle que le marquage à partir duquel les mesures sont enregistrées est inconnu mais suivant l'hypothèse H2.1, l'ensemble des marquages de l'espace d'état est fini et connu. L'ensemble des trajectoires compatibles $\Gamma^{-1}(MT)$ sera noté par *ConsistTrajSet*. Avant de présenter l'algorithme permettant de calculer cet ensemble, nous allons définir deux procédures : *Sil_events* et *Consist_event* nécessaires à l'algorithme principal de calcul des trajectoires compatibles.

La procédure *Sil_events* est donnée par un algorithme récursif qui calcule l'ensemble *SilTrajSet* pour une trajectoire donnée (σ, M) . Cet ensemble contient, en plus de la trajectoire considérée, toutes les trajectoires composées de (σ, M) et complétées par une clôture silencieuse (toutes les combinaisons possibles d'événements qui ne délivrent pas d'étiquette et qui ne changent pas le marquage mesuré).

Procédure 1. *Sil_events***Entrées :** $G, \mathcal{L}, H, (\sigma_U, M), \text{SilTrajSet}$ **Sortie :** *SilTrajSet*

1. $\text{SilTrajSet} \leftarrow \text{SilTrajSet} \cup (\sigma_U, M)$
2. Calculer M' tel que $M[\sigma_U > M']$
3. **pour** toute transition T validée à M'
4. **si** $\mathcal{L}(T) = \varepsilon$
5. calculer M'' tel que $M'[T > M'']$
6. **si** $H.M'' = H.M'$
7. $\text{SilTrajSet} \leftarrow \text{Sil_events}(G, \mathcal{L}, H, (\sigma_U T, M), \text{SilTrajSet})$
8. **fin si**
9. **fin si**
10. **fin pour**

La procédure suivante est notée *Consist_event*. Celle-ci calcule, à partir d'une trajectoire (σ, M) et d'une mesure $e_j^{obs}(M_j^{obs})$, l'ensemble des trajectoires de type $(\sigma T, M)$, telles que la transition T fournit l'étiquette e_j^{obs} et engendre un marquage mesuré (M_j^{obs}) .

Procédure 2. *Consist_event***Entrées :** $G, \mathcal{L}, H, (\sigma_U, M), e_j^{obs}(M_j^{obs})$ **Sortie :** *ConsistTraj***Initialisation :** $\text{ConsistTraj} \leftarrow \emptyset$

1. Calculer M' tel que $M[\sigma_U > M']$
2. **pour** toute transition T validée à M'
3. **si** $\mathcal{L}(T) = e_j^{obs}$
4. Calculer M'' tel que $M'[T > M'']$
5. **si** $H.M'' = (M_j^{obs})$
6. $\text{ConsistTraj} \leftarrow \text{ConsistTraj} \cup (\sigma_U T, M)$
7. **fin si**
8. **fin si**
9. **fin pour**

Ces deux procédures sont utilisées dans [Algorithme 1](#). Celui-ci calcule l'ensemble des trajectoires compatibles *ConsistTrajSet* à partir d'une trajectoire de mesure MT . La première étape de cet algorithme consiste à calculer l'ensemble des marquages compatibles avec la mesure initiale du marquage M_0^{obs} . Cet ensemble est noté *ConsistInitMark* (voir [Figure 2.1](#)). Cette étape nécessite le parcours de l'ensemble des marquages de $\text{ReachSet}(G, M_I)$. Ensuite, la deuxième étape consiste à traiter toutes les mesures de façon incrémentale en considérant chaque mesure élémentaire de la forme $e_j^{obs}(M_j^{obs})$. C'est à cette étape qu'interviennent les deux procédures *Sil_events* et *Consist_event* précédemment définies. En effet, pour le traitement de la première mesure $e_1^{obs}(M_1^{obs})$, la première procédure sert à calculer l'ensemble des trajectoires complétées par des événements silencieux à partir de chaque marquage compatible de l'ensemble

ConsistInitMark. Le résultat est stocké dans *SilTrajSet*. La deuxième procédure quant à elle, prend en compte la mesure $e_1^{obs}(M_1^{obs})$ et rajoute, pour chaque trajectoire de l'ensemble *SilTrajSet*, la prochaine transition franchissable qui est associée à l'étiquette e_1^{obs} et qui engendre un marquage mesuré donné par M_1^{obs} . Si cette transition n'existe pas pour une trajectoire donnée de l'ensemble *SilTrajSet*, celle-ci n'est plus compatible. Dans ce cas, l'exploration est abandonnée pour cette trajectoire qui ne sera pas rajoutée au nouvel ensemble *ConsistTraj*. Notons cependant qu'au moins une trajectoire sera compatible avec la mesure puisqu'il existera forcément un comportement du système expliquant les mesures obtenues. Pour la mesure suivante $e_2^{obs}(M_2^{obs})$, la même procédure est répétée pour chaque trajectoire de l'ensemble *ConsistTraj*. Enfin, et lorsque toute la trajectoire de mesure est traitée, un dernier appel (pour $K + 1$) de la procédure *Sil_events* permet de compléter les trajectoires obtenues par de possibles occurrences d'événement silencieux (clôture silencieuse) et l'ensemble *ConsistTrajSet* est finalement obtenu.

La [Proposition 2.2](#) donne la complexité de calcul de l'ensemble des trajectoires compatibles $\Gamma^{-1}(MT)$ en utilisant l'approche incrémentale.

Proposition 2.2. Soient un SED modélisé par un RdP partiellement mesuré $\langle G, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ et une trajectoire de mesure MT de taille K . Le calcul de l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$ avec l'approche incrémentale est de complexité $\mathcal{O}(N \cdot q^{(K+1) \cdot h_{max}})$.

Démonstration. À la première étape de l'[Algorithme 1](#), le graphe des marquages est exploré une seule fois pour la détermination de l'ensemble *ConsistInitMark*. La première étape est donc linéaire en N . Pour la seconde étape, la complexité pour un seul marquage compatible est, dans le pire des cas, exponentielle en K (taille de la trajectoire de mesure). Elle est donnée par $\mathcal{O}(q^{(K+1) \cdot h_{max}-1})$. En effet, pour chaque séquence de la

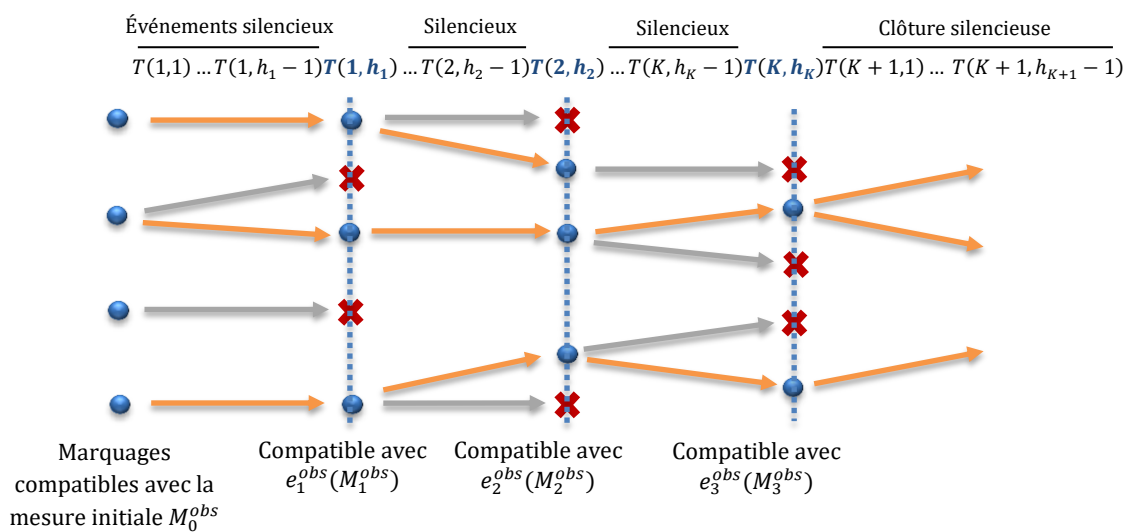


Figure 2.1. Calcul des trajectoires compatibles : une croix indique que la trajectoire n'est plus compatible avec la mesure considérée.

forme $T(j, 1) \dots T(j, h_j - 1)T(j, h_j)$, il existe un maximum de $h_{max} - 1$ événements silencieux en plus de celui correspondant à la mesure. Pour chaque événement, au pire q transitions sont testées. Ainsi, en considérant toute la trajectoire de mesure de taille K , la complexité est donnée par $\mathcal{O}(q^{K \cdot h_{max}})$. Pour chaque trajectoire obtenue, la clôture silencieuse correspond à un maximum de $h_{max} - 1$ événements silencieux avec donc une complexité $\mathcal{O}(q^{h_{max}-1})$. Enfin, la complexité totale de l'algorithme est ainsi donnée par $\mathcal{O}(N \cdot q^{K \cdot h_{max}} \cdot q^{h_{max}-1}) = \mathcal{O}(N \cdot q^{(K+1) \cdot h_{max}-1})$. ■

Algorithme 1. Calcul des trajectoires compatibles

Entrées : $G, \mathcal{L}, H, ReachSet(G, M_I), MT$
Sortie : $ConsistTrajSet$
Initialisation : $ConsistInitMark \leftarrow \emptyset, ConsistTrajSet \leftarrow \emptyset$
Etape 1 : Ensemble des marquages compatibles avec (M_0^{obs})

1. **pour** tout M dans $ReachSet(G, M_I)$
2. **si** $H.M = (M_0^{obs})$
3. $ConsistInitMark \leftarrow ConsistInitMark \cup \{M\}$
4. **fin si**
5. **fin pour**

Etape 2 : Traitement incrémental de la trajectoire de mesure

6. Calculer la taille K de MT
 7. **pour tout** M dans $ConsistInitMark$
 8. $ConsistTraj \leftarrow (\varepsilon, M)$
 9. **pour** $j \leftarrow 1: (K + 1)$ (pour chaque couple de mesure $e_j^{obs}(M_j^{obs})$)
 10. $SilTrajSet \leftarrow \emptyset$
 11. **pour** (σ_U, M) dans $ConsistTraj$
 12. $SilTrajSet \leftarrow Sil_events(G, \mathcal{L}, H, (\sigma_U, M), SilTrajSet)$
 13. **fin pour**
 14. **si** $j \neq (K + 1)$
 15. $ConsistTraj \leftarrow \emptyset$
 16. **pour** toute trajectoire (σ_U, M) dans $SilTrajSet$
 17. $ConsistTraj \leftarrow ConsistTraj \cup Consist_event(G, \mathcal{L}, H, (\sigma_U, M), e_j^{obs}(M_j^{obs}))$
 18. **fin pour**
 19. **fin si**
 20. **fin pour**
 21. $ConsistTrajSet \leftarrow ConsistTrajSet \cup SilTrajSet$
 22. **fin pour**
-

Contrairement à la méthode LMI, la complexité de l'algorithme incrémental est polynomiale en fonction du nombre d'états N du graphe des marquages (et non exponentielle). Ceci représente un gain important en termes de calcul en fonction de la taille du réseau. De plus, si l'on considère que les trajectoires compatibles sont mises à jour à chaque arrivée d'une nouvelle mesure de la forme $e_k^{obs}(M_k^{obs})$, la valeur de K sera égale à 1. Par conséquent, la complexité de chaque mise à jour sera linéaire en N et sera donnée par $\mathcal{O}(N \cdot q^{2 \cdot h_{max}-1})$, ($q^{2 \cdot h_{max}-1}$ étant assimilé à une constante). Cette complexité est adaptée aux applications de diagnostic en ligne.

Remarque 2.1. Une adaptation de l’[Algorithme 1](#) peut être réalisée pour traiter le cas des RdP partiellement mesurés non bornés. Dans ce cas, l’hypothèse [H2.1](#) n’est plus considérée et le graphe de couverture (Finkel 1993) est utilisé pour vérifier l’hypothèse [H2.2](#). Cependant, on suppose que le marquage à partir duquel on commence la collecte des mesures est connu. Ainsi, l’étape 1 de l’[Algorithme 1](#) n’est plus nécessaire car l’espace d’état n’a plus besoin d’être exploré et la complexité devient $\mathcal{O}(q^{(K+1).h_{max}-1})$ pour une trajectoire de mesure de taille K .

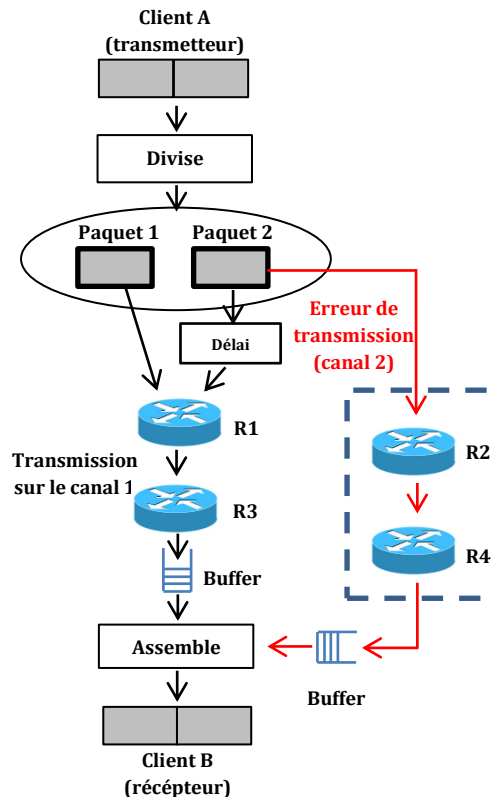


Figure 2.2. Le système de communication considéré.

Exemple 2.1. On considère le système de la [Figure 2.2](#) qui représente un protocole de communication simplifié, inspiré de (Ru & Hadjicostis 2009). Le modèle de ce système est représenté sur la [Figure 2.3](#) avec le marquage initial $M_I = 1P_1$ (c.-à-d. $M_I = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$). Les messages sont transmis du client A vers le client B. Dans un premier temps, le message est divisé (transition T_1) en deux paquets devant être acheminés en série sur le canal 1. À travers celui-ci, les paquets sont successivement traités par les routeurs R_1 et R_3 modélisés respectivement par les couples (P_2, T_2) et (P_4, T_4) avant de parvenir au buffer représenté par la place P_6 . Enfin, les deux paquets sont rassemblés pour reconstituer le message original et un accusé de réception est envoyé au client expéditeur (transition T_6). Ceci représente le fonctionnement normal du système.

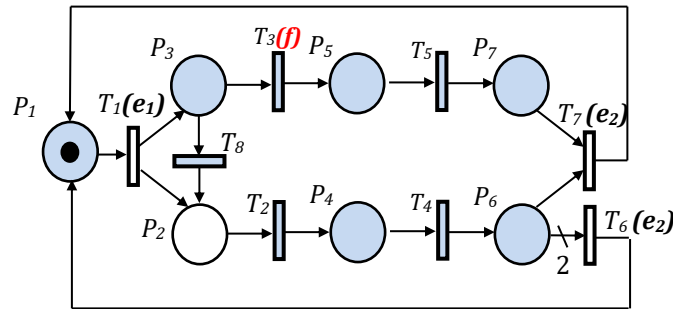


Figure 2.3. Modèle du système de communication (en bleu les places et transitions non mesurées).

Une faute f peut survenir durant l'envoi du message lorsque le deuxième paquet, devant être transféré sur le canal 1, est malencontreusement transféré sur le canal 2. Cette erreur est modélisée par la transition T_3 . Dans ce cas, les paquets sont assemblés pour reconstituer le message original et un accusé de réception est envoyé par la transition T_7 à l'expéditeur (client A) malgré le transfert du paquet 2 sur le mauvais canal.

Le système est équipé de deux capteurs d'événements : le premier indique que le message vient d'être divisé en deux paquets. Celui-ci est modélisé par l'étiquette e_1 associée à la transition T_1 . Le deuxième événement mesuré, représenté par l'étiquette e_2 , est associé aux deux transitions T_6 et T_7 . Ceci veut dire que l'accusé de réception ne fournit aucune indication quant à la façon dont les paquets ont été transférés (sur le canal 1 ou sur deux canaux différents). De plus, le marquage de la place P_2 est mesuré. Ainsi, l'information de la présence d'un paquet en cours de traitement dans le routeur R_1 est supposée connue. La fonction de mesure des étiquettes est ainsi donnée par $\mathcal{L}(T_1) = e_1$, $\mathcal{L}(T_6) = \mathcal{L}(T_7) = e_2$ et $\mathcal{L}(T_j) = \varepsilon$ pour $j \neq 1, 6, 7$ et la matrice de mesure du marquage par $H = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. Pour cette configuration de capteurs du système, on obtient la valeur $h_{max} = 4$.

L'implémentation et les calculs dans cet exemple et dans ceux qui vont suivre ont été réalisés avec MATLAB®. Cet exemple permet d'illustrer l'utilisation de l'algorithme incrémental pour le calcul de l'ensemble des trajectoires compatibles. Pour cela, on considère une trajectoire (σ_U, M) avec $\sigma_U = T_1$ et $M = 1P_1$. Cette trajectoire indique qu'un message a bien été divisé en deux paquets. La trajectoire de mesure obtenue à partir de la trajectoire (σ_U, M) grâce à l'instrumentation du système est donnée par $MT = (0P_2)e_1(1P_2)$. Les valeurs $(0P_2)$, $(1P_2)$ correspondent aux mesures successives du marquage de la place mesurée P_2 . La première étiquette e_1 est obtenue quand T_1 est franchie.

Plusieurs trajectoires peuvent être compatibles avec la trajectoire de mesure MT . Les séquences compatibles sont de taille maximale 7 et ont la forme suivante :

$$\sigma_U = T(1,1)T(1,2)T(1,3)\mathbf{T(1,4)}T(2,1)T(2,2)T(2,3)$$

En utilisant l'Algorithme 1, l'ensemble *ConsistInitMark* est obtenu dans un premier temps parmi les 16 marquages de l'ensemble $ReachSet(G, 1P_1)$. Cet ensemble est composé de 10 marquages possibles qui vérifient $M(P_2) = 0$. Notons que le marquage $M = 1P_1$ qui correspond effectivement au marquage initial de la trajectoire considérée est inclus dans cet ensemble. Pour $j = 1$, les mesures $e_1^{obs}(M_1^{obs}) = e_1(1P_2)$ sont considérées, les marquages de l'ensembles *ConsistInitMark* sont tout d'abord complétés avec les possibles occurrences d'événements silencieux grâce à la fonction *Sil_events*. Par la suite, seules les trajectoires pouvant être complétées par l'événement qui fournit l'étiquette e_1 et un marquage mesuré $M(P_2) = 1$ sont sélectionnées grâce à la fonction *Consist_event*. À ce stade, seule la trajectoire (T_1, M) avec $M = 1P_1$ est compatible avec les mesures $(0P_2)e_1(1P_2)$. Pour $j = 2$, la trajectoire précédente (T_1, M) est complétée par des événements silencieux (clôture silencieuse) et l'ensemble des trajectoires compatibles est obtenu en conséquence :

$$\Gamma^{-1}(MT) = \{(T_1, M), (T_1T_3, M), (T_1T_3T_5, M)\}$$

2.4. Degrés de croyance des fautes (beliefs)

Après avoir déterminé les comportements du système compatibles avec les mesures, le diagnostic consiste à analyser l'ensemble des trajectoires obtenues dans le but de déterminer si celles-ci contiennent ou non des fautes et d'en déterminer leur classe. Ce résultat est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.3. Soient un SED modélisé par un RdP partiellement mesuré $\langle G, \mathcal{L}, H, M_l \rangle$ et une trajectoire de mesure MT . Une faute de classe f_α s'est produite (resp. ne s'est pas produite) de manière certaine durant l'acquisition des mesures MT si pour toute trajectoire compatible $(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$, la séquence σ vérifie $f_\alpha \in \mathcal{F}(\sigma)$ (resp. $f_\alpha \notin \mathcal{F}(\sigma)$).

Démonstration. La démonstration de cette proposition est immédiate. On rappelle que le comportement du système ayant fourni la trajectoire de mesure fait nécessairement partie de l'ensemble des trajectoires compatibles $\Gamma^{-1}(MT)$. Ainsi, dans le cas où chacune de ces trajectoire contient au moins une faute de classe f_α , celle-ci est diagnostiquée sans ambiguïté. De la même manière et dans le cas où aucune des trajectoires compatibles ne contient la faute f_α , il est certain que cette dernière n'a pas eu lieu. ■

La Proposition 2.3 concerne seulement les cas où la décision est certaine. Dans le cas où seulement quelques trajectoires contiennent une faute de classe f_α , il n'est pas possible de se prononcer de manière sûre quant à l'occurrence de la faute en se basant uniquement sur la trajectoire de mesure considérée. Pour mesurer le risque qu'une faute soit apparue, on pourra utiliser le degré de croyance (belief) tel que défini dans (Ru & Hadjicostis 2009; Lefebvre 2014a) :

$$belief(MT, f_\alpha) = \frac{card(\{(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT) \text{ tel que } f_\alpha \in \mathcal{F}(\sigma)\})}{card(\Gamma^{-1}(MT))} \quad (2.8)$$

où $card(\Gamma^{-1}(MT))$ représente la cardinalité de l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$.

Exemple 2.2. Si l'on considère à nouveau l'exemple de la [Figure 2.2](#), trois trajectoires compatibles avec la trajectoire de mesure MT ont été obtenues. Deux de ces trajectoires contiennent la faute f (trajectoires (σ_2, M) et (σ_3, M)). Il n'est donc pas possible d'appliquer la [Proposition 2.3](#) pour dire avec certitude si la faute f a bien eu lieu. Il est par contre possible d'obtenir son degré de croyance qui est égal à $belief(MT, f) = \frac{2}{3}$.

2.5. Conclusion

L'état de l'art au début de ce chapitre a montré que la problématique du diagnostic des systèmes modélisés par des RdP non temporisés a été largement abordée au cours des dernières années. Dans notre cas, nous avons considéré la problématique du diagnostic des RdP partiellement mesurés. Ces réseaux sont caractérisés par une mesure partielle à la fois des transitions et des marquages. Ainsi, à partir d'une trajectoire de mesure obtenue lors du fonctionnement du système et composée d'une suite d'événements et de marquages mesurés, l'objectif est de détecter l'occurrence des fautes. Pour cela, nous avons tout d'abord rappelé une première approche développée au GREAH et basée sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires pour la détermination de l'ensemble des comportements du système compatibles avec les mesures. Ensuite, nous avons proposé un algorithme incrémental (Ammour et al. 2017c). L'analyse de la complexité des deux méthodes a montré que la seconde présente un gain significatif au niveau de la complexité des calculs. Une fois les trajectoires compatibles déterminées, l'utilisation du degré de croyance permet de fournir un diagnostic nuancé des fautes. Mais la croyance ne traduit pas la fréquence de la faute. Dans le but d'obtenir cette information, l'exploitation de toutes les informations disponibles, et en particulier des dates de mesure, est primordiale. Nous nous proposons donc de considérer l'information temporelle pour améliorer le diagnostic. Ceci est l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 3. Diagnostic des Réseaux de Petri Stochastiques Temporisés Partiellement Mesurés

3.1. Introduction	63
3.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP temporisés.....	63
3.3. Probabilité des trajectoires partiellement temporisées.....	65
3.3.1. Trajectoires compatibles partiellement temporisées	65
3.3.2. Calcul de la probabilité des trajectoires	67
3.4. Probabilité des fautes	72
3.5. Datation des fautes	74
3.6. Conclusion.....	79

3.1. Introduction

Dans le but d'améliorer le diagnostic des défauts dans les systèmes, l'exploitation de toutes les données et connaissances disponibles est cruciale. En particulier, le *facteur temps* est souvent considéré comme un porteur potentiel d'informations dans le cadre de la surveillance. De nombreux systèmes présentent des spécifications et des contraintes temporelles qui peuvent être exploitées pour le diagnostic. Dans le cas des SED, plusieurs méthodes de diagnostic ne s'intéressent qu'à l'aspect logique du comportement du système. Par conséquent, seul l'ordre d'occurrence des événements mesurés est pris en compte pour la détection et l'identification des défauts. Ainsi, ces méthodes ne profitent aucunement d'une information supplémentaire et souvent accessible qui est celle de la *date d'occurrence des événements*. Pour tirer profit de cette information, la composante temporelle doit être prise en compte dès l'étape de la modélisation du système. Il est ensuite naturel de l'exploiter pour essayer de discriminer les différents comportements du système et ainsi déterminer le type d'évolution (fautive ou non fautive). En effet, sans cette information temporelle, ces deux comportements sont, dans certains cas, totalement indiscernables. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au diagnostic des SED temporisés modélisés par des RdPS partiellement mesurés. La prochaine section prolonge l'état de l'art entamé dans le chapitre précédent avec les principales contributions sur le diagnostic des SED temporisés modélisés avec différentes extensions de RdP. Par la suite, nous présentons notre approche de diagnostic qui consiste, après avoir déterminé l'ensemble des trajectoires compatibles avec des mesures datées, à calculer la probabilité de ces trajectoires en fonction des dates des événements mesurés (Ammour et al. 2017c). Il est ainsi possible de déduire la probabilité d'occurrence des fautes. Enfin, nous proposons une méthode pour calculer la distribution de la date de la faute lorsque celle-ci a été diagnostiquée (Ammour et al. 2015). Ceci permet de caractériser l'intervalle de temps le plus probable d'occurrence de la faute et de donner une information supplémentaire sur le défaut améliorant ainsi le processus de diagnostic et éventuellement de maintenance du système.

3.2. Etat de l'art sur le diagnostic des RdP temporisés

Dans un premier temps, les problématiques du diagnostic et de la diagnosticabilité des SED en utilisant les automates à états finis, étudiées dans (Lin 1994; Sampath et al. 1995; Sampath et al. 1996), ont été étendues au cas des systèmes temporisés. Plusieurs travaux se sont ainsi appuyés sur des extensions temporelles d'automates à états finis (Alur & Dill 1994) pour l'étude du diagnostic des SED temporisés (Chen & Provan 1997; Tripakis 2002; Zad et al. 2005; Bouyer et al. 2005; Jiang & Kumar 2006; Cassez 2009). Depuis leur introduction, les RdP ont montré leur pouvoir de modélisation de différents

types de systèmes incluant des phénomènes de parallélisme, de partage de ressources et de conflits. Rapidement, des extensions de RdP ont été mises au point pour prendre en compte les aspects temporels des systèmes. Ces extensions ont été utilisées pour l'analyse, l'évaluation de performance ou encore le diagnostic des SED temporisés. Dans ce qui suit, nous présenterons un bref état de l'art sur les approches de diagnostic des SED basées sur des extensions temporisés de RdP.

Les premiers modèles de RdP prenant en compte l'aspect temporel visent à décrire les durées nécessaires à l'accomplissement de chaque opération d'un système donné. Cette extension est notée *RdP temporisés* (Timed PNs) (Ramchandani 1973). Dans cette extension, une durée est associée aux transitions (*RdP T-temporisés*). Celle-ci traduit la durée minimale de sensibilisation de la transition avant son possible franchissement. Cette durée peut aussi être associée aux places plutôt qu'aux transitions. On parle alors dans ce cas de *RdP P-temporisés* (Sifakis 1980). Il faut noter que cette durée peut être soit déterministe soit stochastique. D'autres modèles représentent cette fois-ci la contrainte temporelle de chaque transition par un intervalle composé d'une durée minimale de franchissement et une durée maximale. Cette extension est notée *RdP temporels* (Time PNs) (Merlin 1975). La contrainte est associée soit aux places (*RdP P-temporels*) ou aux transitions (*RdP T-temporels*). Une transition sensibilisée ne peut être tirée qu'après une durée incluse dans cet intervalle. On en déduit que les RdP temporisés peuvent être considérés comme un cas particulier des RdP temporels pour lesquels aucune durée maximale n'est considérée. Dans (Ghazel 2005), l'auteur s'intéresse au diagnostic des RdP temporels. Pour ce type de modèle, la méthode classique basée sur le graphe d'accessibilité s'avère inadaptée. En effet, le graphe des marquages ne permet pas de représenter le comportement du RdP temporels à cause des contraintes temporelles. Pour remédier à ce problème, l'auteur utilise une méthode basée sur le *graphe des classes d'états* (SCG) (voir Section 1.3.3) développé initialement par (Berthomieu & Diaz 1991). Une classe d'états est composée d'un marquage et des contraintes liées au franchissement des transitions à partir de ce marquage. L'analyse de ce graphe permet de fournir des conditions sur la diagnosticabilité du système. Dans (Liu et al. 2013), les auteurs utilisent le même formalisme et proposent une analyse *à la volée* de la diagnosticabilité. Cette technique consiste à mener conjointement l'analyse de la propriété et la construction du graphe. Ainsi, dans le cas d'une insatisfaction de la condition, il est inutile de construire le reste du graphe. Ceci représente un gain en termes de complexité. Les auteurs proposent aussi une solution pour calculer le délai minimum qui garantit la diagnosticabilité. Suivant le même formalisme, (Wang et al. 2013; Wang et al. 2015) introduisent le *graphe de diagnostic des fautes* (Fault Diagnosis Graph ou FDG). Celui-ci est inspiré du graphe des classes d'états et construit à partir d'un RdP temporel en ne gardant que les états nécessaires pour le diagnostic des fautes. L'état courant est ainsi mis à jour à chaque nouvelle mesure afin de détecter le défaut. Dans (Basile et al. 2015), les auteurs proposent un *graphe des classes modifié* (Modified State Class Graph ou MSCG) qui inclut une représentation exhaustive des évolutions possibles du système temporisé. La programmation linéaire ainsi que des algorithmes

sont utilisés pour obtenir une estimation d'état et un diagnostic du système en fonction des mesures datées.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au diagnostic des RdPS partiellement mesurés. Ce formalisme a été introduit dans (Lefebvre 2014b). Les événements mesurés ne permettent pas toujours de différencier des trajectoires fautives de celles relatives à un comportement normal. Cependant, nous montrons que la prise en compte des dates de mesure peut permettre de rendre ces comportements discernables grâce au calcul de la probabilité des trajectoires (Ammour et al. 2017c) à partir desquelles la probabilité des fautes est déduite. Enfin, d'autres d'informations sont données sur l'éventuelle faute détectée en évaluant la distribution de sa date d'occurrence (Ammour et al. 2015).

3.3. Probabilité des trajectoires partiellement temporisées

La méthode de recherche des séquences compatibles présentée dans le [Chapitre 2](#) est étendue au cas des RdPS partiellement mesurés. À partir d'une trajectoire de mesure temporisée, l'ensemble des trajectoires compatibles est obtenu. Ceci revient à rechercher tous les comportements du système qui sont cohérents avec les mesures collectées. Notons que dans le cas non temporisé, ces comportements cohérents sont tous équivalents, on ne peut donc pas dire qu'il est plus probable qu'un comportement soit à l'origine des mesures plutôt qu'un autre comportement dès lors que tous les deux sont compatibles avec les mesures. Cependant, dans le cas des RdPS partiellement mesurés, les trajectoires compatibles obtenues sont partiellement temporisées. En effet, les dates de certains événements de ces trajectoires sont connues grâce aux mesures temporisées. Nous proposons donc une méthode pour évaluer la probabilité des trajectoires compatibles en fonction des dates de mesure. Ceci permettra, en exploitant l'information temporelle, de se prononcer sur le comportement le plus probable du système en fonction des mesures datées.

3.3.1. Trajectoires compatibles partiellement temporisées

On considère un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ et une trajectoire temporisée (σ, M) obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$. La fonction de mesure Γ appliquée à cette trajectoire permet d'obtenir la trajectoire de mesure temporisée MT composée d'une succession d'étiquettes et de marquages mesurés et datés. Notez que la même notation MT , utilisée pour une trajectoire de mesure non temporisée dans le [Chapitre 2](#), est adoptée pour une trajectoire de mesure temporisée dans ce chapitre. La forme de cette trajectoire de mesure est donnée par (1.9) et rappelée ci-après :

$$MT = \Gamma((\sigma, M), \tau_0, \tau_{end}) = M^{obs}(\tau_0)e^{obs}(\tau_1)M^{obs}(\tau_1) \dots e^{obs}(\tau_{K-1})M^{obs}(\tau_{K-1})e^{obs}(\tau_K)M^{obs}(\tau_{end}) \quad (3.1)$$

avec $\tau_j, j = 0, \dots, K$ correspondant aux dates des mesures. $e^{obs}(\tau_j)$ est la $j^{ème}$ étiquette mesuré à la date τ_j . $M^{obs}(\tau_j)$ est le $j^{ième}$ marquage mesuré à la date τ_j et enfin

$M^{obs}(\tau_0) = H.M$ est le marquage mesuré à la date τ_0 (M correspondant au marquage à partir duquel les mesures sont enregistrées).

Dans ce qui suit, l'hypothèse H2.1 introduite dans le Chapitre 2 est complétée avec une condition sur les probabilités stationnaires. Il en résulte l'hypothèse suivante :

Hypothèse H3.1. L'ensemble $ReachSet(G, M_I)$ est supposé connu, de cardinalité finie et pour chaque marquage $M \in ReachSet(G, M_I)$, la probabilité stationnaire vérifie $\pi_\infty(M) > 0$.

Cette hypothèse est nécessaire pour le calcul de la probabilité des trajectoires compatibles. Elle peut cependant être relaxée si l'on suppose que le marquage (ou l'ensemble des marquages possibles avec leurs probabilités associées) à la date τ_0 est connu. Cela sera détaillé dans la Remarque 3.2.

L'hypothèse H2.2 (introduite dans le Chapitre 2) est quant à elle retenue dans ce qui suit. De plus, la sémantique du RdPS est définie par les politiques suivantes (voir Section 1.2.4): serveur réentrant (infini), absence de mémoire, et une politique de choix par compétition.

Une trajectoire partiellement temporisée (σ, M) compatible avec les mesures MT vérifie $\Gamma((\sigma, M), \tau_0, \tau_{end}) = MT$. L'ensemble des trajectoires compatibles est noté $\Gamma^{-1}(MT)$. Seules les dates de certains événements sont connues et la forme de la séquence temporisée σ est donnée par :

$$\sigma = T(t_{1,1}) \dots T(t_{1,h_1})T(t_{2,1}) \dots T(t_{2,h_2-1})T(t_{2,h_2}) \dots T(t_{K,h_{K-1}})T(t_{K,h_K})T(t_{K+1,1}) \dots T(t_{K+1,h_{K+1}-1}) \quad (3.2)$$

où $T(t_{k,\gamma})$ pour $k = 1, \dots, K$ et $\gamma = 1, \dots, (h_k - 1)$ correspondent aux événements silencieux et $T(t_{k,h_k}) = T(\tau_k)$ pour $k = 1, \dots, K$ correspondent aux événements ayant engendré une étiquette et/ou un changement dans le marquage mesuré. Enfin, le groupe de transition $T(t_{K+1,1}) \dots T(t_{K+1,h_{K+1}-1})$ correspond à la clôture silencieuse, c'est-à-dire aux événements silencieux pouvant se produire dans l'intervalle de temps $[\tau_K, \tau_{end}]$.

Le calcul de l'ensemble des trajectoires compatibles partiellement temporisées $\Gamma^{-1}(MT)$ est basé sur l'algorithme incrémental présenté dans la Section 2.3.2. Ainsi, deux étapes sont nécessaires pour obtenir ces trajectoires : la première consiste à utiliser l'algorithme incrémental en considérant la trajectoire de mesure non temporisée obtenue à partir de MT en faisant abstraction du temps. Ceci permet d'obtenir l'ensemble des trajectoires compatibles non temporisées. La deuxième étape consiste à identifier les transitions ayant engendré une étiquette et/ou un changement dans le marquage mesuré afin de leur associer les dates τ_k . Notons que ces transitions sont obtenues grâce à la procédure *Consist_event* introduite dans la Section 2.3.2. Des trajectoires $(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$ avec σ de la forme (3.2) sont ainsi obtenues.

3.3.2. Calcul de la probabilité des trajectoires

Dans cette section, on s'intéresse au calcul de la probabilité d'une trajectoire compatible partiellement temporisée. Ce calcul est important car il évalue la probabilité qu'une trajectoire compatible soit réellement celle dont sont issues les mesures. Pour ce faire, on s'appuiera sur les informations temporelles contenues dans cette trajectoire. Si l'on considère une trajectoire compatible $(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$ avec σ de la forme (3.2), plusieurs probabilités doivent être prises en compte pour le calcul de la probabilité de la trajectoire. Ces probabilités sont les suivantes :

- a) la probabilité d'être dans le marquage M à la date τ_0 notée $\pi_0(M)$.
- b) la probabilité de la trajectoire (σ_U, M) obtenue à partir de la trajectoire temporisée (σ, M) en faisant abstraction du temps.
- c) la probabilité de franchir chaque groupe de transitions silencieuses $T(t_{i,1}) \dots T(t_{i,h_i-1})$ pour $i = 1, \dots, K$ avant la date τ_i (c.-à-d. $t_{i,h_i-1} < \tau_i$) et de ne pas franchir la dernière transition mesurée $T(\tau_i)$ entre les dates t_{i,h_i-1} et τ_i
- d) la probabilité de franchir $T(\tau_i)$ dans un petit intervalle de temps $[\tau_i, \tau_i + dt]$ pour $i = 1, \dots, K$ tel que dt corresponde à une durée très petite comparativement aux dynamiques du système étudié.
- e) la probabilité de franchir les transitions $T(t_{K+1,1}) \dots T(t_{K+1,h_{K+1}-1})$ dans $]\tau_K, \tau_{end}]$ et de rester dans le dernier marquage atteint entre $t_{K+1,h_{K+1}-1}$ et τ_{end} (c.-à-d. $M(t_{K+1,h_{K+1}-1}) = M(\tau_{end})$). Ceci correspond à la probabilité d'occurrence de la clôture silencieuse dans $]\tau_K, \tau_{end}]$.

La probabilité d'être dans le marquage M à la date τ_0 est donnée par la probabilité stationnaire $\pi_0(M) = \pi_\infty(M)$ introduite dans la Section 1.2.4. Suivant l'hypothèse H3.1, celle-ci est non nulle.

La probabilité de la trajectoire non temporisée (σ_U, M) correspondante est donnée par l'équation (3.3). Celle-ci résulte du fait que les durées de tir des transitions sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes. Le double produit est quant à lui dû à la forme de la séquence compatibles donnée par (3.2).

$$P_U(\sigma_U, M) = \prod_{k=1 \dots (K+1)} \left(\prod_{\gamma=1 \dots h_k} \left(\frac{n_{k,\gamma}(M(k, \gamma-1)) \cdot \mu_{k,\gamma}}{\sum_{T_j \in T} n_j(M(k, \gamma-1)) \cdot \mu_j} \right) \right) \quad (3.3)$$

Avec $M(k, \gamma)$ les marquages résultant du franchissement des transitions $T(t_{k,\gamma})$ pour $k = 1, \dots, (K+1)$; $\gamma = 1, \dots, (h_k - 1)$. $M(k, 0)$ sont les marquages résultant du franchissement des transitions $T(t_{k-1, h_{k-1}})$, pour $k = 2, \dots, K$, et $M(1, 0) = M$. Enfin, $n_{k,\gamma}(M(k, \gamma-1))$ représente le degré de validation de la transition $T(t_{k,\gamma})$ au marquage $M(k, \gamma-1)$.

Maintenant, intéressons-nous à la probabilité (c). Pour calculer la probabilité de franchir une séquence donnée avant une certaine date et de ne pas franchir la dernière transition avant cette même date, la [Proposition 3.1](#) est introduite. Le but de cette proposition est de calculer la probabilité qu'une séquence d'événements silencieux soit franchie dans une fenêtre temporelle donnée et que la dernière transition de la séquence ne le soit pas.

Proposition 3.1. Considérons un RdPS $\langle G, \mu, M_I \rangle$ et une trajectoire (σ, M) avec M le marquage à la date τ_{k-1} et $\sigma = T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})T(t_n)$. Si (σ, M) est réalisée, la probabilité que les transitions $T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})$ soit franchies dans $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ et que $T(t_n)$ ne soit pas franchie avant τ_k est donnée par :

$$P(t_{n-1} \leq \tau_k \leq t_n) = \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_{n-1}(t) \left(1 - F_{n-1,n}((\tau_k - \tau_{k-1}) - t)\right) dt \quad (3.4)$$

avec f_{n-1} la fonction de densité de probabilité donnée par une Erlang généralisée (voir [Annexe](#)) d'ordre $n-1$ caractérisant la durée de franchissement des transitions $T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})$ et $F_{n-1,n}$ est la fonction de répartition qui caractérise la durée de franchissement de la dernière transition $T(t_n)$.

Démonstration. Considérons la trajectoire (σ, M) avec $\sigma = T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})T(t_n)$. La durée de franchissement des transitions $\sigma = T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})$ peut être donnée comme une somme de durées $(t_{n-1} - \tau_{k-1}) = d_1 + \dots + d_{n-1}$. Chaque durée d_i pour $i = 1, \dots, (n-1)$ est une VA indépendante exponentielle de paramètre $\sum_{T_i \in \mathcal{T}} n_i(M(i-1)) \cdot \mu_i$ avec $M(0) = M$. Ainsi, la durée $(t_{n-1} - \tau_{k-1})$ est elle-même une VA pouvant être caractérisée par une densité de probabilité $f_{n-1}(t)$ donnée par une Erlang généralisée. On en déduit que la probabilité de la condition $\tau_{k-1} \leq t_{n-1} \leq \tau_k$ (qui est équivalente à $0 \leq t_{n-1} - \tau_{k-1} \leq \tau_k - \tau_{k-1}$) est donnée par :

$$F_{n-1}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_{n-1}(t) dt \quad (3.5)$$

Suivant le même raisonnement pour la VA $(t_n - \tau_{k-1})$, la probabilité que celle-ci vérifie la même condition (c.-à-d. $0 \leq t_n - \tau_{k-1} \leq \tau_k - \tau_{k-1}$) est donnée par :

$$F_n(\tau_k - \tau_{k-1}) = \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_n(t) dt \quad (3.6)$$

En utilisant les propriétés de la convolution, cette équation peut être réécrite comme suit :

$$F_n(\tau_k - \tau_{k-1}) = \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_{n-1}(t) F_{n-1,n}((\tau_k - \tau_{k-1}) - t) dt \quad (3.7)$$

$F_{n-1,n}$ étant la fonction de répartition de la VA d_n qui caractérise la durée nécessaire pour le franchissement de la transition $T(t_n)$ depuis sa validation. La différence entre les équations (3.5) et (3.7) donne la probabilité de franchir les transitions $T(t_1)T(t_2)T(t_3) \dots T(t_{n-1})$ dans $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ et de ne pas franchir $T(t_n)$ avant τ_k , ainsi on obtient :

$$P(t_{n-1} \leq \tau_k \leq t_n) = \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_{n-1}(t) dt - \int_0^{\tau_k - \tau_{k-1}} f_{n-1}(t) F_{n-1,n}((\tau_k - \tau_{k-1}) - t) dt \quad (3.8)$$

Cette équation peut être réécrite selon (3.4). ■

Notons que l'équation (3.4) ne fournit aucune condition quant au franchissement de la dernière transition $T(t_n)$ après l'instant τ_k .

L'objectif de la Proposition 3.2 est de calculer la probabilité qu'une transition soit franchie dans une durée très petite dt (probabilité (d)).

Proposition 3.2. On considère un RdPS $\langle G, \mu, M_I \rangle$ caractérisé par le marquage M à la date t . Supposons que $T(t_j)$ soit la prochaine transition franchie à une date t_j . La probabilité de franchir celle-ci dans un petit intervalle de temps $[t, t + dt]$ est donnée par :

$$P(t_j \in [t, t + dt]) = \left(\sum_{T_k \in T} (n_k(M) \cdot \mu_k) \right) \cdot dt + o(dt) \quad (3.9)$$

Démonstration. La démonstration résulte du fait que des transitions sont simultanément validées. Ainsi, leur vitesse de franchissement est donnée par la somme de tous les degrés de validation de ces transitions multipliés par leur taux de franchissement. En multipliant le résultat par la durée $((t + dt) - t)$ on obtient (3.9). Il faut noter que $o(dt)$ est issu du développement limité d'ordre 1 de la fonction exponentielle, dt étant considéré assez petit, $o(dt)$ est donc négligeable. ■

Concernant le franchissement des transitions $T(t_{K+1,1}) \dots T(t_{K+1,h_{K+1}-1})$ dans $]\tau_K, \tau_{end}]$ (probabilité (e)), le résultat de la Proposition 3.1 peut être utilisé pour retrouver cette probabilité. En effet, celle-ci est donnée par :

$$P(\tau_K \leq t_{K+1,h_{K+1}-1} \leq \tau_{end}) = \int_0^{\tau_{end} - \tau_K} f_{n-1}(t) \cdot (1 - F_{n-1,n}((\tau_{end} - \tau_K) - t)) dt \quad (3.10)$$

avec f_{n-1} la fonction densité de probabilité de la somme des VA exponentielles correspondant aux durées de franchissement des transitions $T(t_{K+1,1}) \dots T(t_{K+1,h_{K+1}-1})$. $F_{n-1,n}$ est la fonction de répartition qui caractérise la durée de franchissement de n'importe quelle transition validée au marquage $M(t_{K+1,h_{K+1}-1})$. Celle-ci correspond à une VA exponentielle de paramètre égal à $\sum_{T_j \in T} (n_j(M(\tau_{end})) \cdot \mu_j)$.

La proposition suivante évalue la probabilité d'une trajectoire compatible partiellement temporisée en utilisant les probabilités (a, b, c, d, e).

Proposition 3.3. Considérons un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 ainsi qu'une trajectoire de mesure MT de la forme (3.1) obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$. La probabilité $P(\sigma, M)$ de la trajectoire compatible partiellement temporisée $(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$ est donnée par :

$$P(\sigma, M) = \frac{\pi(\sigma, M)}{\sum_{(\sigma', M') \in \Gamma^{-1}(MT)} \pi(\sigma', M')} \quad (3.11)$$

avec $\pi(\sigma, M)$ défini par (3.12).

$$\begin{aligned} \pi(\sigma, M) = \pi_0(M) \cdot P_U(\sigma_U, M) \cdot \prod_{j=1 \dots K} P(t_{j, h_{j-1}} \leq \tau_j \leq t_{j, h_j}) \cdot P(\tau_K \leq t_{K+1, h_{K+1}-1} \leq \tau_{end}) \\ \times \prod_{k=1 \dots K} P(t_{k, h_k} \in [t, t + dt]) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Démonstration. L'équation (3.12) est obtenue en utilisant les différents résultats de probabilité (a, b, c, d, e) détaillés auparavant. Notez que le comportement réel du système est nécessairement représenté par l'une des séquences compatibles. Ainsi, l'équation (3.11) est utilisée pour normaliser les probabilités de telle sorte que $\sum_{(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)} P(\sigma, M) = 1$. Grace à cette normalisation, le terme dt est simplifié rendant possible le calcul de la probabilité de la trajectoire compatible en utilisant l'équation (3.11). ■

Remarque 3.2. Nous avons fait remarquer dans le Chapitre 2 qu'une adaptation de l'Algorithme 1 est possible pour traiter le cas des RdP partiellement mesurés non bornés. Dans ce cas, l'hypothèse H2.1 n'est plus considérée mais remplacée par une connaissance du marquage à partir duquel les mesures sont collectées (ou d'un ensemble de marquages possibles). De la même manière, il est possible de considérer le cas des RdPS partiellement mesurés non bornés. L'hypothèse H3.1 est alors remplacée par la connaissance du marquage à la date du début de mesure τ_0 (ou l'ensemble des marquages possibles E_p avec leurs probabilités associées). Ainsi, il est possible d'appliquer la Proposition 3.3 une fois les trajectoires compatibles partiellement temporisées déterminées. La seule différence dans le calcul de la probabilité réside dans le fait de remplacer $\pi_0(M)$ (qui valait $\pi_\infty(M)$ dans le cadre de l'hypothèse H3.1) par la valeur suivante :

$$\pi_0(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \text{ correspond bien au marquage connu à } \tau_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et dans le cas où un ensemble E_p des marquages possibles est connu avec pour chaque marquage $M \in E_p$ une probabilité associée $P(M, \tau_0)$, par :

$$\pi_0(M) = \begin{cases} P(M, \tau_0) & \text{si } M \in E_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui rend possible l'utilisation de la Proposition 3.3 pour le cas des RdPS partiellement mesurés non bornés.

Exemple 3.1. On considère l'exemple de RdPS partiellement mesuré représenté sur la Figure 3.1 avec le marquage initial donné par $M_I = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Supposons que les paramètres du RdPS sont donnés par $\mu = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ et l'ensemble des étiquettes mesurés par $E = \{e_1, e_2\}$. La fonction de labélisation vérifie $\mathcal{L}(T_1) = e_1$, $\mathcal{L}(T_7) = \mathcal{L}(T_8) =$

e_2 . La matrice de mesure du marquage est donnée par $H = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. Une seule faute f est considérée, celle-ci est associée au franchissement de la transition T_3 (c.-à-d. $\mathcal{F}(T_3) = f$). Notons que l'hypothèse H2.2 est vérifiée avec $h_{max} = 4$. L'objectif de cet exemple est tout d'abord d'illustrer le calcul de la probabilité des trajectoires compatibles mais aussi de montrer l'intérêt de la prise en compte des dates de mesure dans ce calcul. Pour ce faire, on suppose que le marquage à partir duquel les mesures sont collectées est connu et correspond à M_I et on considère le scénario suivant :

On suppose que l'étiquette e_1 est collectée à la date $\tau_1 = 0.21$ à partir du marquage mesuré initial $M^{obs}(0) = (0)$. L'étiquette est supposée collectée dans deux intervalles de temps distincts : $[0, 0.5]$ et $[0, 2]$. Ainsi les deux trajectoires de mesure sont considérées : $MT_1 = 0P_2(0)e_1(0.21)1P_2(0.5)$ dans l'intervalle de temps $[0, 0.5]$ et $MT_2 = 0P_2(0)e_1(0.21)1P_2(2)$ dans l'intervalle de temps $[0, 2]$. Elles diffèrent seulement par leur date de fin de mesure τ_{end} . Notons aussi que ces deux trajectoires de mesure correspondent à une seule et même trajectoire de mesure non datée que l'on notera MT et qui est donnée par $MT = (0P_2)e_1(1P_2)$. L'utilisation de l'algorithme incrémental permet, à partir de MT , de retrouver toutes les séquences compatibles avec ces mesures. En rajoutant les dates qui correspondent aux événements mesurés, on obtient l'ensemble des trajectoires compatibles suivant : $\Gamma^{-1}(MT_1) = \Gamma^{-1}(MT_2) = \{(\sigma_i, M_I)\}$ pour $i = 1 \dots 3$ avec $M_I = 1P_1$, $\sigma_1 = T_1(0.21)$, $\sigma_2 = T_1(0.21)T_3(t_{2,1})$, et $\sigma_3 = T_1(0.21)T_3(t_{2,1})T_5(t_{2,2})$. Les trajectoires compatibles sont donc identiques pour les deux trajectoires de mesure MT_1 et MT_2 . Nous allons illustrer le calcul de la probabilité des trajectoires en utilisant la Proposition 3.3. Pour ce calcul, il est nécessaire d'évaluer les différentes probabilités (a, b, c, d, e) présentées précédemment pour chaque trajectoire.

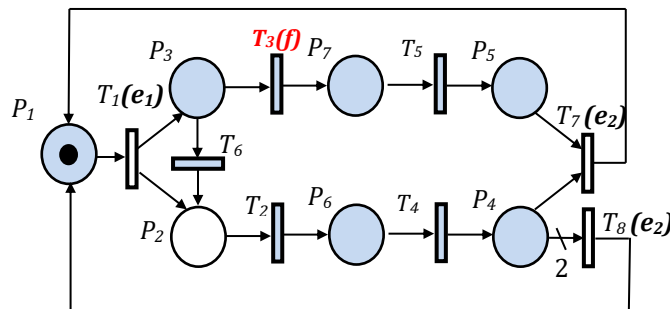


Figure 3.1. Exemple simple d'un RdPS partiellement mesuré.

Prenons comme exemple la trajectoire compatible (M_I, σ_2) avec $\sigma_2 = T_1(0.21)T_3(t_{2,1})$ et la date de fin de mesure $\tau_{end} = 0.5$. La probabilité du marquage à $\tau_0 = 0$ est donnée par $\pi_\infty(M_I) = 0.21$. La trajectoire compatible non temporisée résultante est notée par $P_U(\sigma_{U2}, M_I)$ avec $\sigma_{U2} = T_1T_3$. Sa probabilité (probabilité (b)) est obtenue en utilisant l'équation (3.3). La probabilité (c) concerne la probabilité de ne pas franchir la transition T_1 dans l'intervalle de temps $[0, 0.21]$ obtenue en utilisant l'équation (3.4). Ensuite, la

probabilité de franchir la transition mesurée $T_1(0.21)$ dans un intervalle de temps dt résulte du calcul de la probabilité (d). Celle-ci est donnée par $\mu_1 \cdot dt$. Enfin, T_3 correspond à une clôture silencieuse franchie dans l'intervalle $[0.21, 0.5]$ (probabilité (e)). Elle évalue la probabilité de franchir T_3 à une date donnée $t_{2,1}$ dans l'intervalle $[0.21, 0.5]$ et de ne franchir aucune autre transition entre $t_{2,1}$ et 0.5. Les mêmes calculs sont effectués pour (σ_1, M_I) et (σ_3, M_I) et les valeurs obtenues sont ensuite normalisées grâce à l'équation (3.11). Le TABLEAU 3.1 présente les résultats à la fois pour MT_1 et MT_2 .

TABLEAU 3.1. Probabilités des trajectoires compatibles

σ	$\Gamma^{-1}(MT_1)$			$\Gamma^{-1}(MT_2)$		
	Simulation	Proposition 3.3	Erreur	Simulation	Proposition 3.3	Erreur
T_1	0.716	0.718	< 1%	0.055	0.054	1.8%
T_1T_3	0.243	0.241	< 1%	0.266	0.271	< 1%
$T_1T_3T_5$	0.041	0.041	< 1%	0.679	0.675	< 1%

$$Erreur = 100 \times \frac{|P_{Prop} - P_{Simul}|}{P_{Simul}}$$

Les résultats obtenus sont illustrés en utilisant une simulation Monte-Carlo. Le RdPS est ainsi simulé et un nombre de trajectoires $N_s = 10^4$ qui fournissent la trajectoire de mesure $MT_j = 0P_2(0)e_1(0.21 \pm \epsilon)1P_2(\tau_{end})$ est obtenu. Cette simulation est réalisée pour les deux valeurs de $\tau_{end} = 0.5$ et $\tau_{end} = 2$ (c.-à-d. pour MT_1 et MT_2) et ϵ est une valeur faible choisie arbitrairement pour obtenir un nombre suffisant de trajectoires compatibles en un temps raisonnable. En effet, l'erreur diminue lorsque la valeur de ϵ tend vers 0 mais dans ce cas, le temps nécessaire pour l'obtention des trajectoires compatibles tend vers l'infini. Dans notre cas, nous avons choisi $\epsilon = 0.02$. Avec cette valeur, l'erreur ne dépasse jamais 2%. Nous concluons ainsi que l'écart entre les résultats de la simulation Monte-Carlo et ceux obtenus en utilisant la Proposition 3.3 est due à la simulation. Ceci montre l'avantage de l'utilisation de la proposition par rapport à la simulation notamment pour les trajectoires de faibles probabilités où un nombre important de simulations est requis pour l'obtention de résultats avec des erreurs acceptables.

Nous remarquons également que la probabilité d'une trajectoire compatible (σ_i, M_I) avec $i = 1, \dots, 3$ varie fortement selon la trajectoire de mesure considérée (MT_1 ou MT_2). Ceci illustre l'importance de la prise en compte des dates de mesure dans le calcul de la probabilité des trajectoires.

3.4. Probabilité des fautes

En plus de la détermination des comportements compatibles avec les mesures, nous avons proposé un calcul de la probabilité de chaque comportement, c'est-à-dire la probabilité que ce dernier corresponde réellement au comportement du système ayant

fourni les mesures. À partir de ces informations, il est maintenant possible d'évaluer la probabilité de chaque classe de faute en s'appuyant sur les mesures obtenues lors du fonctionnement du système ainsi que sur l'information temporelle incluse dans celles-ci. Ce résultat de diagnostic est donné par la [Proposition 3.4](#).

Proposition 3.4. Considérons un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses [H3.1](#) et [H2.2](#), et une trajectoire de mesure MT collectée durant l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$. La probabilité que la faute de classe f_α se soit produite en considérant la trajectoire de mesure MT est donnée par :

$$P(f_\alpha, MT) = \sum_{(\sigma, M) \in \Phi_\alpha(MT)} P(\sigma, M) \quad (3.13)$$

avec $\Phi_\alpha(MT) = \{(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT) \text{ tel que } f_\alpha \in \mathcal{F}(\sigma)\}$.

Démonstration. La proposition est basée sur la probabilité des trajectoires compatibles donnée par la [Proposition 3.3](#). Seules les trajectoires qui incluent la faute de classe f_α et qui appartiennent à l'ensemble $\Phi_\alpha(MT)$ sont considérées. La somme de leurs probabilités représente la probabilité d'occurrence de la faute dans l'intervalle $[\tau_0, \tau_{end}]$ suivant les mesures MT . ■

Exemple 3.2. Reprenons l'[Exemple 3.1](#) avec les mêmes paramètres ainsi que les deux trajectoires de mesure MT_1 et MT_2 . La probabilité des trajectoires compatibles est donnée par le [TABLEAU 3.1](#). On s'intéresse à l'évaluation de la probabilité de la faute f . Celle-ci est obtenue en appliquant la [Proposition 3.4](#). Les trajectoires contenant la faute f associée à la transition T_3 sont (σ_2, M_I) et (σ_3, M_I) . La somme de leurs probabilités nous permet d'obtenir la probabilité de la faute : $P(f, MT_1) = 0.282$ et $(f, MT_2) = 0.946$. On constate ainsi l'impact des dates de mesure sur le résultat du diagnostic. Notons que l'utilisation du degré de croyance donné par l'équation [\(2.8\)](#), ne permet aucunement de discerner le comportement réel du système en fonction des mesures datées. En effet, on obtient une même valeur du degré de croyance pour les deux trajectoires de mesure : $belief(MT_1, f) = belief(MT_2, f) = \frac{2}{3}$. On constate ainsi l'intérêt de l'exploitation de l'information temporelle contenue dans les mesures pour le diagnostic.

La simulation de Monte-Carlo utilisée dans l'[Exemple 3.1](#) est exploitée pour illustrer le résultat du diagnostic. La [Figure 3.2](#) représente l'évolution de l'erreur entre le résultat de simulation et celui de la [Proposition 3.4](#) pour plusieurs valeurs de N_s (nombre de trajectoires compatibles obtenues par simulation). Nous constatons que l'erreur diminue en fonction de N_s , elle est donc engendrée par la simulation et non par le calcul.

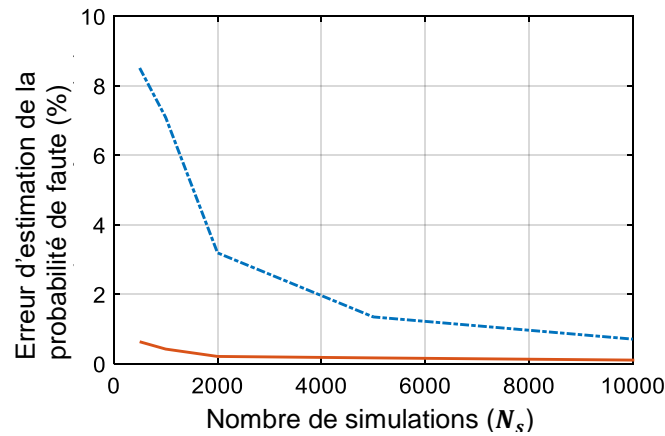


Figure 3.2. Erreur sur la probabilité de la faute f pour MT_1 (ligne discontinue) et MT_2 (ligne continue).

3.5. Datation des fautes

Dans le cas où une faute est détectée, de nombreux travaux s'intéressent à des méthodes permettant de donner des informations supplémentaires sur celle-ci (type de défaut, localisation des éléments défaillants ou encore l'identification des causes primaires de la faute). Dans cette section, nous nous intéressons à la faute diagnostiquée et essayons de caractériser sa date d'occurrence. Bien que la datation des fautes fournisse une information importante dans le processus du diagnostic, cette problématique est à notre connaissance peu explorée. Dans ce qui suit, l'objectif est d'analyser les trajectoires comportant la faute dans le but de fournir la distribution de sa date d'occurrence.

On considère d'abord une trajectoire compatible (σ, M) contenant la faute f_α avec σ de la forme (3.2). On suppose que l'événement de faute, que l'on notera $T_\alpha(t_\alpha)$, s'est produit entre les deux dates mesurées τ_i et τ_{i+1} suivant cette trajectoire compatible (c.-à-d. la date d'occurrence de la faute vérifie $t_\alpha \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$). La séquence σ de la trajectoire (σ, M) peut donc être réécrite ainsi :

$$\sigma = \dots T(\tau_i)T(t_{i,1}) \dots T(t_{i,m})T_\alpha(t_\alpha)T(t_{i,m+1}) \dots T(t_{i,n})T(\tau_{i+1}) \dots \quad (3.14)$$

On considère un intervalle de temps $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Notre objectif est de calculer la probabilité que la faute se soit produite dans $[t_s, t_f]$. Comme illustré sur la Figure 3.3, l'approche consiste à calculer la probabilité de franchir toutes les transitions $T(t_{i,1}) \dots T(t_{i,m})T_\alpha(t_\alpha)$ de sorte que $t_\alpha \in [t_s, t_f]$ et de franchir le groupe de transitions $T(t_{i,m+1}) \dots T(t_{i,n})T(\tau_{i+1})$ dans l'intervalle $[t_\alpha, \tau_{i+1}]$. La date t_α de franchissement de l'événement faute est donnée par $t_\alpha = \tau_i + d_\alpha$ avec $d_\alpha \geq 0$ une VA représentant la durée nécessaire pour le franchissement du groupe de transitions $T(t_{i,1}) \dots T(t_{i,m})T_\alpha(t_\alpha)$. On a

vu précédemment que d_α suivait une loi d'Erlang généralisée d'ordre $m + 1$. On note aussi par $d_\beta \geq 0$ la VA représentant la durée nécessaire pour le franchissement des transitions $T(t_{i,m+1}) \dots T(t_{i,n})T(\tau_{i+1})$ (Erlang généralisée d'ordre $n - m + 1$). La **Proposition 3.5** caractérise la probabilité qu'une faute de classe f_α se produise dans l'intervalle de temps $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+1}]$ (τ_i, τ_{i+1} sont deux dates de mesure successives) sachant que (σ, M) est la trajectoire compatible réalisée.

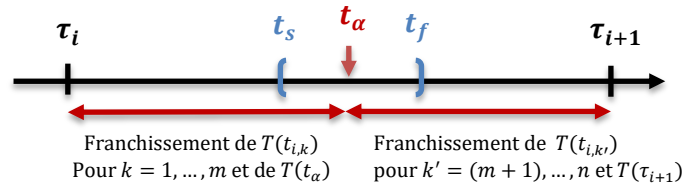


Figure 3.3. Représentation de la date d'occurrence de la faute.

Proposition 3.5. On considère un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 et une trajectoire de mesure MT obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$. On considère aussi une trajectoire compatible partiellement temporisée $(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)$. La probabilité que la faute de classe f_α se soit produite dans un intervalle de temps donné $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+1}]$ sachant que (σ, M) est la trajectoire compatible réalisée est donnée par :

$$P(t_\alpha \in [t_s, t_f] / (\sigma, M)) = \frac{\int_{t_s - \tau_i}^{t_f - \tau_i} g_\alpha(t) g_\beta((\tau_{i+1} - \tau_i) - t) dt}{\int_0^{\tau_{i+1} - \tau_i} g_\alpha(t) g_\beta((\tau_{i+1} - \tau_i) - t) dt} \quad (3.15)$$

où $g_\alpha(t)$ et $g_\beta(t)$ sont les densités des VA d_α et de d_β , durées de franchissement respectives des deux groupes de transitions $T(t_{i,1}) \dots T(t_{i,m})T_\alpha(t_\alpha)$ et $T(t_{i,m+1}) \dots T(t_{i,n})T(\tau_{i+1})$.

Démonstration. $P(t_\alpha \in [t_s, t_f] / (\sigma, M))$ est une probabilité conditionnelle. La séquence σ étant de la forme (3.14), les deux durées d_α et d_β vérifient $d_\alpha + d_\beta = \tau_{i+1} - \tau_i$. On est donc ramené à la recherche de la probabilité $P(d_\alpha \in [t_s - \tau_i, t_f - \tau_i] / (d_\alpha + d_\beta = \tau_{i+1} - \tau_i))$.

Si l'on considère deux variables aléatoires X et Y , la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est donnée par la formule de Bayes associée aux VA continues :

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (3.16)$$

où $f_{X,Y}(x, y)$ est la densité conjointe. En prenant $X = d_\alpha, Y = d_\alpha + d_\beta, y = \tau_{i+1} - \tau_i$ et sachant que la loi conjointe $f_{d_\alpha, d_\alpha + d_\beta}(x, y)$ est équivalente à $f_{d_\alpha, d_\beta}(x, y - x)$, on obtient :

$$f_{d_\alpha/d_\alpha+d_\beta=\tau_{i+1}-\tau_i}(x) = \frac{f_{d_\alpha, d_\beta}(x, (\tau_{i+1} - \tau_i) - x)}{f_{d_\alpha+d_\beta}(\tau_{i+1} - \tau_i)} \quad (3.17)$$

Le numérateur est la densité de la loi conjointe (d_α, d_β) . Le dénominateur est la densité de la somme des deux lois. On peut écrire que la densité de la loi conjointe est égale au produit des densités de d_α, d_β .

Enfin, la fonction de répartition est obtenue en intégrant la densité. Comme nous recherchons la probabilité que $d_\alpha \in [t_s - \tau_i, t_f - \tau_i]$, nous intégrons sur cet intervalle. Le dénominateur peut être sorti de l'intégrale car il ne dépend pas de x et l'on obtient la formule (3.15). ■

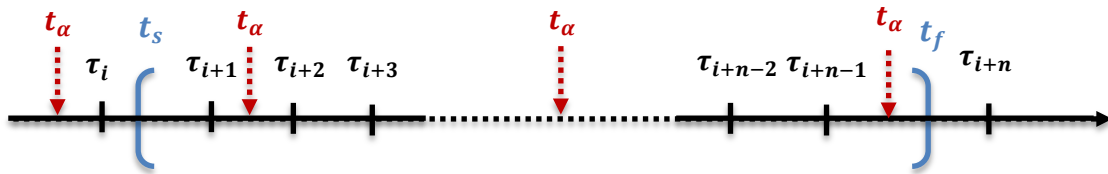


Figure 3.4. Exemple de dates d'occurrence de la faute et représentation de l'intervalle $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+n}]$ pour $n > 1$

Dans la Proposition 3.5 on a considéré que l'on connaît la trajectoire compatible réalisée. Cependant, cette information n'est pas disponible car on ne dispose que de l'ensemble des trajectoires ainsi que de leurs probabilités de réalisation. On considère alors le calcul de la probabilité qu'une faute se soit produite dans l'intervalle $[t_s, t_f]$ suivant la trajectoire de mesure MT . Cette probabilité sera notée $P(t_\alpha \in [t_s, t_f])$. Toutes les trajectoires de l'ensemble $\Gamma^{-1}(MT)$ qui incluent la faute sont prises en compte. Pour chacune de ces trajectoires, la date de la faute est incluse dans un intervalle $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ composé de deux dates de mesure successives. Aussi, le résultat est étendu au cas plus général où l'intervalle de temps considéré $[t_s, t_f]$ est inclus dans un intervalle borné par deux dates de mesure non successives (c.-à-d. $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+n}]$ avec $n > 1$, voir Figure 3.4). La probabilité $P(t_\alpha \in [t_s, t_f])$ est ainsi obtenue grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.6. On considère un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G_s, \mathcal{L}, H, M_l \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2. Considérons une trajectoire de mesure MT collectée dans $[\tau_0, \tau_{end}]$ et un intervalle $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+n}] \subseteq [\tau_0, \tau_{end}]$, avec $[\tau_i, \tau_{i+n}]$ le plus petit intervalle composé de deux dates de mesure et incluant l'intervalle $[t_s, t_f]$. La probabilité qu'une faute de classe f_α se soit produite dans l'intervalle de temps $[t_s, t_f] \subseteq [\tau_i, \tau_{i+n}]$ est donnée ci-dessous, ou les probabilités conditionnelles sont obtenues grâce à l'équation (3.15) :

$$\begin{aligned}
P(t_\alpha \in [t_s, t_f]) &= \sum_{(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)} P(\sigma, M) \cdot P(t_\alpha \in [t_s, t_f] / (\sigma, M)) \quad \text{si } n = 1 \\
P(t_\alpha \in [t_s, t_f]) &= \sum_{(\sigma, M) \in \Gamma^{-1}(MT)} P(\sigma, M) \cdot \left(P(t_\alpha \in [t_s, \tau_{i+1}] / (\sigma, M)) + P(t_\alpha \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+n-1}] / \right. \\
&\quad \left. (\sigma, M)) + P(t_\alpha \in [\tau_{i+n-1}, t_f] / (\sigma, M)) \right) \quad \text{si } n > 1
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Démonstration. Si $n = 1$, l'intervalle de temps $[t_s, t_f]$ est inclus dans un intervalle composé de deux dates de mesure successives $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ et la probabilité de faute pour une trajectoire compatible fixée est donnée par la formule (3.15).

Si maintenant $n > 1$, alors l'intervalle $[\tau_i, \tau_{i+n}]$ peut être divisé en plusieurs intervalles disjoints comme suit :

$$[t_s, t_f] = [t_s, \tau_{i+1}] \cup \bigcup_{k=1, \dots, n-2} [\tau_{i+k}, \tau_{i+k+1}] \cup [\tau_{i+n-1}, t_f] = [t_s, \tau_{i+1}] \cup [\tau_{i+1}, \tau_{i+n-1}] \cup [\tau_{i+n-1}, t_f]$$

Pour une trajectoire compatible donnée, la probabilité que la faute soit sur l'intervalle $[t_s, t_f]$ est donc la somme des probabilités sur chacun de ces intervalles.

Dans les deux cas, on fait ensuite la somme sur toutes les trajectoires compatibles pondérées par leurs probabilités de réalisation et l'on obtient le résultat. ■

Exemple 3.3. Nous reprenons ici l'exemple de la Figure 3.1 et nous considérons deux cas dans lesquels la faute f s'est certainement produite. L'objectif est de caractériser la distribution de la date d'occurrence de la faute. Ceci permet de fournir des indications sur l'intervalle de temps le plus probable dans lequel la faute se serait produite. Les deux cas considérés correspondent aux deux trajectoires de mesure suivantes : $MT_3 = 0P_2(0)e_1(0.006)1P_2(0.006)\varepsilon(0.31)0P_2(0.31)e_2(1.94)0P_2(0, 3)$ et $MT_4 = 0P_2(0)e_1(0.36)1P_2(0.36)\varepsilon(1.12)0P_2(1.12)e_2(2.78)0P_2(3)$ obtenues dans l'intervalle de temps $[0, 3]$. Les événements et les marquages qui composent les deux trajectoires sont identiques et seules les dates des mesures sont différentes. Les mesures successives de la place P_2 et l'observation de l'événement e_2 indiquent que le défaut est apparu sans ambiguïté. Ceci est confirmé en calculant l'ensemble des trajectoires compatibles relatif à chaque trajectoire de mesure en utilisant l'algorithme incrémental. Le résultat est donné comme suit :

$$\Gamma^{-1}(MT_3) = \{(M_l, \sigma_l)\} \text{ avec}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= T_1(0.006)T_3(t_{2,1})T_5(t_{2,2})T_2(0.31)T_4(t_{3,1})T_7(1.94) \\
\sigma_2 &= T_1(0.006)T_3(t_{2,1})T_2(0.31)T_5(t_{3,1})T_4(t_{3,2})T_7(1.94) \\
\sigma_3 &= T_1(0.006)T_3(t_{2,1})T_2(0.31)T_4(t_{3,1})T_5(t_{3,2})T_7(1.94) \\
\sigma_4 &= T_1(0.006)T_2(0.31)T_3(t_{3,1})T_5(t_{2,2})T_4(t_{3,3})T_7(1.94) \\
\sigma_5 &= T_1(0.006)T_2(0.31)T_4(t_{3,1})T_3(t_{3,2})T_5(t_{3,3})T_7(1.94) \\
\sigma_6 &= T_1(0.006)T_2(0.31)T_3(t_{3,1})T_4(t_{3,2})T_5(t_{3,3})T_7(1.94)
\end{aligned}$$

$\Gamma^{-1}(MT_4) = \{(M_l, \sigma_i)\}$ avec

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= T_1(0.36)T_3(2,1)T_5(2,2)T_2(1.12)T_4(3,1)T_7(2.78) \\ \sigma_2 &= T_1(0.36)T_3(2,1)T_2(1.12)T_5(3,1)T_4(3,2)T_7(2.78) \\ \sigma_3 &= T_1(0.36)T_3(2,1)T_2(1.12)T_4(3,1)T_5(3,2)T_7(2.78) \\ \sigma_4 &= T_1(0.36)T_2(1.12)T_3(3,1)T_5(2,2)T_4(3,3)T_7(2.78) \\ \sigma_5 &= T_1(0.36)T_2(1.12)T_4(3,1)T_3(3,2)T_5(3,3)T_7(2.78) \\ \sigma_6 &= T_1(0.36)T_2(1.12)T_3(3,1)T_4(3,2)T_5(3,3)T_7(2.78)\end{aligned}$$

La probabilité de chaque trajectoire compatible est différente selon la trajectoire de mesure considérée. Cependant la probabilité de la faute f est quant à elle égale à 1 pour les deux cas. L'utilisation de la [Proposition 3.6](#) en considérant des intervalles de temps de la forme $[t, t + 0.2]$ avec t variant de 0.1 à 3 par pas de 0.2 permet d'obtenir la distribution de la date d'occurrence de la faute f . Celle-ci est représentée par la courbe de la [Figure 3.5](#) pour MT_3 et celle de la [Figure 3.6](#) pour MT_4 . Les courbes sont comparées aux histogrammes obtenus par simulation Monte-Carlo de la distribution de la date de la faute. On peut ainsi conclure que l'intervalle de temps $[0, 0.3]$ est un intervalle de forte probabilité concernant l'occurrence de f suivant les mesures MT_3 . De la même manière, l'intervalle $[0.4, 0.8]$ est de forte probabilité quant à l'occurrence de f suivant MT_4 . Les dates de mesures ont ainsi eu un impact sur la distribution de la date de la faute et donc sur l'intervalle le plus probable de son occurrence.

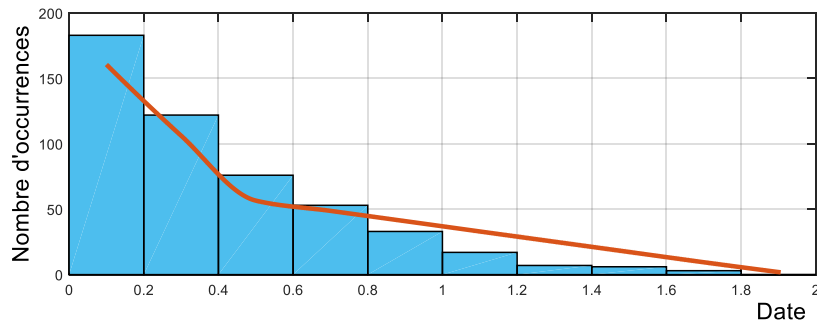


Figure 3.5. Distribution de la date d'occurrence de la faute f suivant MT_3 en utilisant la proposition 3.6 (courbe) et la simulation Monte-Carlo (histogramme).

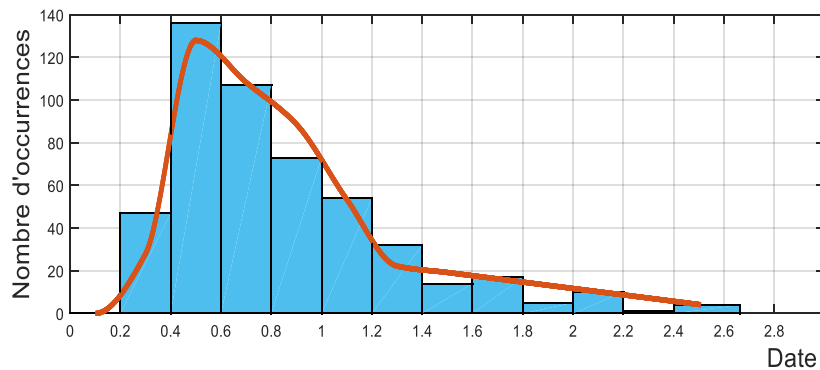


Figure 3.6. Distribution de la date d'occurrence de la faute f suivant MT_4 en utilisant la proposition 3.6 (courbe) et la simulation Monte-Carlo (histogramme).

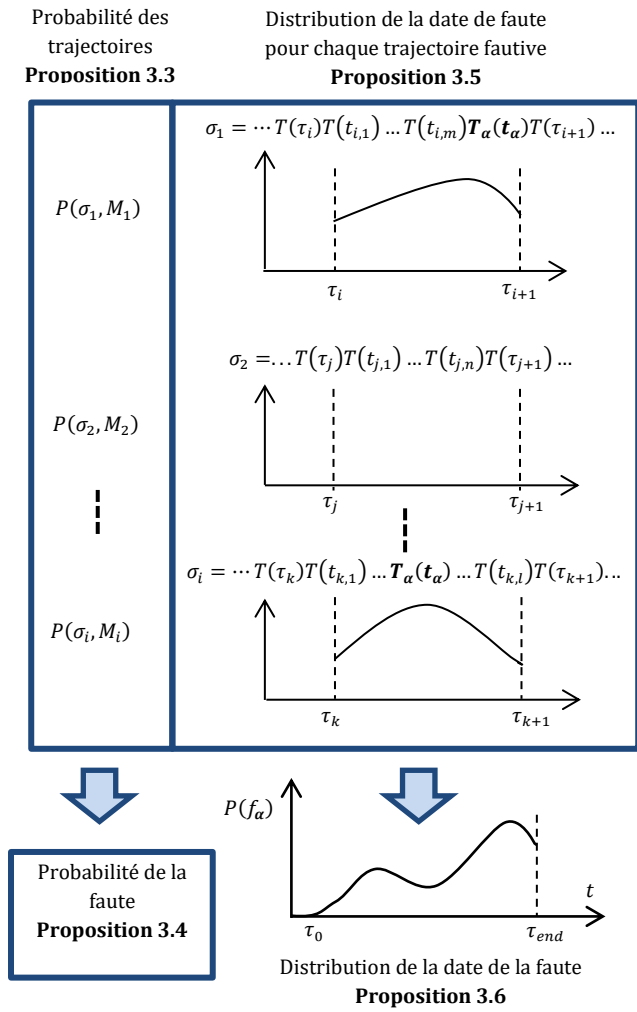


Figure 3.7. Etapes de diagnostic et de la datation de la faute.

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au diagnostic des SED temporisés. Pour cela, les RdP stochastiques partiellement mesurés sont utilisés pour modéliser le système avec ses capteurs. Le modèle représente à la fois le comportement fautif et normal du système. Comme nous pouvons le voir sur le schéma représenté sur la Figure 3.7, la démarche de diagnostic peut se décomposer en trois parties : la première consiste à rechercher tous les comportements compatibles avec les mesures et à calculer, suivant les dates de mesure, les probabilités de ces comportements (Ammour et al. 2017c). La deuxième étape exploite ces probabilités pour déduire la probabilité des fautes. Enfin, l'objectif de la dernière étape est de donner plus d'informations sur le défaut, en l'occurrence, on s'intéresse à déterminer l'intervalle de temps le plus probable dans

lequel la faute s'était produite (Ammour et al. 2015). Le résultat obtenu dans ce chapitre sur le calcul des probabilités de trajectoires sera exploité dans le chapitre suivant dans le but d'estimer l'état du système à la date de fin de mesure et d'envisager le pronostic des fautes futures que pourraient subir le système.

Chapitre 4. Estimation d'Etat et Pronostic des RdP Stochastiques Temporisés Partiellement Mesurés

4.1. Introduction	83
4.2. Etat de l'art.....	83
4.2.1. Etat de l'art sur l'estimation d'état des RdP	83
4.2.2. Etat de l'art sur le pronostic des RdP	84
4.3. Estimation d'état.....	86
4.4. Pronostic des défauts	88
4.4.1. <i>l</i> _{max} -pronostic.....	90
4.4.2. (ρ, δ) -pronostic	96
4.5. Estimation de la durée de vie résiduelle	102
4.6. Conclusion.....	107

4.1. Introduction

De par la complexité croissante des systèmes et celle des éléments technologiques intégrés, un dysfonctionnement imprévu peut avoir des conséquences inacceptables. Une des préoccupations majeures de ces dernières années est celle du *pronostic des défauts*. Il ne s'agit plus de diagnostiquer des événements de défauts qui se sont déjà produits, mais de les prédire avant même leur occurrence. Ceci, afin de prendre les mesures nécessaires (reconfiguration, maintenance...) pour garantir le fonctionnement sûr du système. Souvent, une étape importante dans le pronostic des défauts est l'*estimation de l'état* du système. L'étape d'estimation est rendue nécessaire car les mesures sont, dans la majorité des cas, partielles. En effet, dès la phase de conception, l'instrumentation est souvent réduite pour différentes raisons (technique, pratique, économique,...). L'estimation d'état dans le cas des RdP a pour objectif de déterminer le marquage du système en fonction des mesures partielles des places et/ou des transitions. Dans ce qui suit, on complète l'état de l'art des chapitres précédents avec les contributions qui concernent l'estimation d'état et le pronostic de défauts des SED, et plus particulièrement, à partir de leurs modèles RdP. Nous présenterons ensuite une méthode d'estimation d'état des RdPS partiellement mesurés en fonction d'une trajectoire de mesure (Ammour et al. 2016a; Ammour et al. 2017d). Cette approche est basée sur le calcul des probabilités des trajectoires compatibles détaillée au chapitre précédent. À partir de ce résultat, nous proposons deux approches de pronostic de défauts qui seront détaillées : la première est notée l_{max} -*pronostic* (Ammour et al. 2016b; Ammour et al. 2017c) et la seconde est notée (ρ, δ) -*pronostic* (Ammour et al. 2017b). Ces deux méthodes sont comparées en termes de complexité et d'erreur d'estimation de la probabilité des fautes pouvant survenir dans le futur (Ammour et al. 2017a). Enfin, le résultat du pronostic est exploité pour l'évaluation de la durée de vie résiduelle du système (Ammour et al. 2017d).

4.2. Etat de l'art

4.2.1. Etat de l'art sur l'estimation d'état des RdP

L'étude de l'estimation d'état est fondamentale pour aborder différentes problématiques de commande, de diagnostic et de pronostic des SED. Dans le cas des RdP non temporisés, le problème de l'estimation d'état consiste à déterminer quels marquages coïncident avec une série de mesures ordonnée et non temporisée. De nombreuses approches s'inspirent des observateurs utilisés pour les systèmes continus (Luenberger 1971). Ainsi, les auteurs de (Ramírez-Treviño et al. 2000) introduisent la notion d'*observabilité* pour le cas des RdP interprétés. Ils s'intéressent à l'estimation du marquage initial ainsi que du marquage courant du système. Le but est de reconstruire ces marquages à partir d'une mesure partielle des transitions. Par la suite, les auteurs de

(Giua & Seatzu 2002) se sont intéressés à la même problématique. Ils supposent cependant que la structure du RdP est connue, que le marquage initial est inconnu et que le franchissement de toutes les transitions est détectable. Plus tard, des événements silencieux sont considérés dans (Cabasino et al. 2011) mais le marquage initial est supposé connu. Dans (Cabasino et al. 2015), les auteurs traitent la problématique de l'estimation d'état des RdP dans un contexte probabiliste. Dans ce cas, ils supposent une connaissance a priori des probabilités de franchissement des transitions. D'autres contributions visent à s'affranchir de la connaissance du marquage initial, et ceci dans un contexte déterministe (Li & Hadjicostis 2013) ou probabiliste (Cabasino, Hadjicostis, et al. 2014). Dans ce dernier cas, les auteurs s'intéressent à la détermination du marquage initial. (Lefebvre 2013; Lefebvre 2014a) considèrent le problème de l'estimation d'état à partir d'une mesure partielle des événements et des marquages.

Les travaux cités jusqu'à maintenant, se basent uniquement sur l'ordre des événements et ne considèrent pas le temps. La prise en compte de l'information temporelle est pourtant déterminante pour une meilleure caractérisation de l'état du système. Dans ce cas, le problème est de déterminer quels sont les états compatibles avec une série de mesures datées (suite d'événements associés à leurs dates d'occurrences). Cette série est collectée dans un intervalle de temps donné. Dans (Ghazel et al. 2009), la méthode d'estimation d'état, appliquée sur des RdP temporels, est basée sur le *graphe des classes d'états*. Les auteurs supposent que le réseau ne contient pas de cycles silencieux. Cette méthode a été améliorée dans (Basile et al. 2013) en introduisant le *graphe des classes modifié*. Ce graphe modifié a aussi été utilisé dans (Basile et al. 2015) où, non seulement une estimation d'état est obtenue, mais aussi un ensemble d'intervalles de temps qui caractérise le franchissement des transitions d'une séquence compatible. Basée sur les RdP P-temporels, l'estimation d'état a aussi été abordée en utilisant *la programmation linéaire en nombres entiers* (Bonhomme 2013). Le même formalisme est utilisé dans (Bonhomme 2015). Dans ces travaux, il s'affranchit de la construction du graphe des classes d'états pour éviter les problèmes liés à l'explosion combinatoire. L'objectif est de déterminer l'ensemble des séquences compatibles avec les mesures en utilisant le RdP non temporisé sous-jacent et de tester ensuite celles compatibles avec l'information temporelle. Concernant le cas des systèmes temporisés dans un contexte probabiliste, il existe peu de travaux traitant de la problématique de l'estimation d'état (Lefebvre 2014b). Dans notre cas, on s'intéresse à l'estimation d'état des RdPS partiellement mesurés. Le modèle utilisé est similaire à celui étudié dans (Lefebvre 2014b). Cependant, le calcul des probabilités des états est amélioré grâce à la prise en compte des dates de mesures dans l'évaluation de la probabilité des trajectoires compatibles et dans l'estimation d'état.

4.2.2. Etat de l'art sur le pronostic des RdP

Le pronostic de défauts dans les SED est une problématique récente qui suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté du domaine. Pour de tels systèmes, il s'agit de

prédire des événements avant leur occurrence. Ces événements correspondent à des défauts qui provoquent le dysfonctionnement du système. L'objectif est donc de développer des méthodes permettant d'anticiper l'occurrence de ces événements. Il existe de nombreux travaux sur le pronostic des SED basés sur les automates à états finis. Bien que les RdP présentent une capacité de modélisation plus importante, la problématique du pronostic est peu explorée, à notre connaissance, en utilisant les RdP (Basile, Chiacchio & De Tommasi 2009; Lefebvre 2014a; Lefebvre 2014b). Nous allons présenter brièvement, dans ce qui suit, quelques travaux qui se basent sur les automates à états finis pour le pronostic des SED.

Le travail de (Genc & Lafortune 2009) est l'un des premiers à s'intéresser à la prédiction d'événements dans les SED partiellement mesurés. Les automates à états finis, où seulement certains événements sont mesurés, sont utilisés pour modéliser le système. La notion de *prédictibilité* a été introduite comme étant la capacité à prédire les futures occurrences d'événements en se basant sur les mesures actuelles. L'idée est similaire à celle de la *diagnosticabilité* introduite plus tôt dans (Sampath et al. 1995). La notion de prédictibilité a ensuite été étendue au cas de la prédiction de motifs d'événements dans (Jéron et al. 2008). Le même formalisme a aussi été adopté dans (Kumar & Takai 2010) où les auteurs s'intéressent au pronostic d'une architecture décentralisée. Dans ce cas, la décision globale est obtenue à partir du résultat des décisions locales.

Plus tard, la prédiction a été étendue au cas des SED temporisés partiellement mesurés (Cassez & Grastien 2013). Les automates temporisés sont ainsi exploités pour modéliser le système. Plus récemment, les auteurs de (Chen & Kumar 2015b) considèrent le pronostic des SED dans un contexte probabiliste. Ils établissent des conditions nécessaires et suffisantes pour la S_m -*pronosticabilité*. Cette propriété est la capacité de prédire le défaut au moins m événements avant son occurrence. D'autres travaux s'intéressent à certaines propriétés comme la robustesse (Takai 2015) ou encore la garantie des performances du pronostic d'une architecture décentralisée (Yin & Li 2016). Notons que les travaux cités jusqu'à maintenant considèrent soit des modèles (temporisés ou non temporisés) déterministes (c.-à-d. qui ne prennent pas en compte le caractère probabiliste des événements et dans ce cas le résultat de la prédiction, s'il est positif, est sans ambiguïté), soit des modèles probabilistes mais non temporisés. Cependant, la considération, à la fois du temps et des probabilités, est un facteur déterminant pour le pronostic des défauts. Ceci permet, par exemple, de fournir une indication sur la durée restante avant l'occurrence du défaut (qui correspond à la durée de vie résiduelle lorsque le défaut engendre la défaillance du système). Cette durée permet d'envisager les actions appropriées de reconfiguration et/ou de maintenance.

Dans notre travail, on s'intéresse au pronostic des RdPS partiellement mesurés. L'objectif est d'exploiter une série de mesures partielles datées des transitions franchies et des marquages dans le but d'estimer la probabilité d'occurrence future d'une faute. Dans un premier temps, l'estimation d'état à la date de fin de mesure est obtenue

(Ammour et al. 2016a; Ammour et al. 2017d). Les travaux existants sur l'estimation d'état des RdP concernent majoritairement soit les RdP temporisés déterministes, soit les RdP non temporisés dans un contexte probabiliste. Dans notre cas, on considère l'estimation d'état des systèmes temporisés stochastiques. Le but est de tirer profit de l'information temporelle (dates des mesures) pour une estimation précise de l'état du système en vue d'une prédiction des défauts futurs. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il existe peu de travaux, à notre connaissance, traitant le pronostic des RdP. Les auteurs de (Basile et al. 2009) proposent d'utiliser la méthode des *g-markings* (Section 2.2) à la fois pour le diagnostic et le pronostic. Cette méthode permet d'affirmer qu'une faute ne s'est pas encore produite, et donc peut se produire dans le futur. Dans (Lefebvre 2014b), l'auteur considère des RdPS partiellement mesurés et introduit la notion de degrés de croyance pour les événements fautifs futurs. Cependant, le pronostic est considéré dans le cas non temporisé car seule la probabilité de franchir une transition donnée plutôt qu'une autre est exploitée. Dans notre cas, une fois l'estimation d'état établie, on s'intéressera à la probabilité qu'une faute se produise dans un intervalle de temps futur donné.

4.3. Estimation d'état

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation d'état des RdPS partiellement mesurés. Il s'agit de déterminer l'ensemble des marquages qui coïncident avec les mesures ainsi que leurs probabilités associées. En d'autres termes, l'objectif est de déterminer, pour chacun de ces marquages, la probabilité que celui-ci soit effectivement le marquage du système à la date correspondant à la fin d'acquisition des mesures. Pour ce faire, on considère une trajectoire de mesure temporisée obtenue dans un intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$. Celle-ci a déjà été introduite par (3.1). Elle est rappelée ci-après :

$$MT = M^{obs}(\tau_0)e^{obs}(\tau_1)M^{obs}(\tau_1) \dots e^{obs}(\tau_{K-1})M^{obs}(\tau_{K-1})e^{obs}(\tau_K)M^{obs}(\tau_{end}) \quad (4.1)$$

On rappelle que l'algorithme incrémental sert à calculer, à partir de MT , toutes les trajectoires compatibles avec ces mesures. Notons que deux trajectoires compatibles peuvent soit aboutir à un même marquage, soit à deux marquages différents. Avant d'introduire le résultat de l'estimation d'état, on définit l'ensemble suivant qui permet de regrouper toutes les trajectoires compatibles qui mènent vers un marquage unique :

$$S(M, MT) = \{(\sigma, M') \in \Gamma^{-1}(MT) \text{ tel que } M'[\sigma > M]\} \quad (4.2)$$

$S(M, MT)$ représente ainsi l'ensemble des trajectoires compatibles avec les mesures MT et aboutissant au marquage M .

À chaque trajectoire compatible (σ, M') est associée sa probabilité $P(\sigma, M')$. Le calcul de cette dernière est détaillé dans la Section 3.3.2. Rappelons que le résultat de ce calcul dépend non seulement des événements et marquages mesurés, mais aussi des dates de

ces mesures. De plus, ce calcul de probabilité est obtenu sous les deux hypothèses : H3.1 (connaissance de l'ensemble des marquages atteignables avec leurs probabilités stationnaires supposées non nulles) et H2.2 (absence de cycle non mesuré). En exploitant la probabilité des trajectoires compatibles ainsi que l'ensemble $S(M, MT)$, la Proposition 4.1 donne la probabilité que le marquage M soit l'état courant du système à la date τ_{end} suivant la trajectoire de mesure MT .

Proposition 4.1. Soient un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 et une trajectoire de mesure MT obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$. La probabilité $P(M, \tau_{end})$ que le marquage M soit le marquage courant du système à la date τ_{end} est donnée par (4.3) :

$$P(M, \tau_{end}) = \sum_{(\sigma, M') \in S(M, MT)} P(\sigma, M') \quad (4.3)$$

avec $S(M, MT)$ donné par (4.2) et $P(\sigma, M')$ par (3.11).

Démonstration. La proposition est basée sur la probabilité des trajectoires compatibles donnée par (3.11). Seules les probabilités des trajectoires de l'ensemble $S(M, MT)$ (et qui conduisent donc au marquage M) sont exploitées. La somme de celles-ci représente la probabilité du marquage M à la date τ_{end} . ■

Exemple 4.1. Reprenons l'exemple de la Figure 2.3 introduit dans l'Exemple 3.1 avec les mêmes paramètres et la même instrumentation. L'objectif est d'illustrer l'estimation d'état en fonction des mesures et de montrer l'impact des dates de ces dernières sur les probabilités des marquages courants possibles du système. Pour cela, on considère les trois trajectoires de mesure suivantes qui diffèrent seulement par les dates :

$$\begin{aligned} MT_5 &= 0P_2(0)e_1(1.63)1P_2(1.63)\varepsilon(2.62)0P_2(2.62) \\ MT_6 &= 0P_2(0)e_1(0.57)1P_2(0.57)\varepsilon(0.77)0P_2(0.77) \\ MT_7 &= 0P_2(0)e_1(0.78)1P_2(0.78)\varepsilon(2.79)0P_2(2.79) \end{aligned}$$

Ces trajectoires de mesure correspondent à une même trajectoire de mesure non temporisée. L'algorithme incrémental permet, dans un premier temps, d'obtenir les trajectoires compatibles non temporisées. L'ajout des dates de mesure permet, par la suite, d'obtenir les ensembles des trajectoires partiellement mesurées qui ne diffèrent que par les dates des événements τ_1 et τ_2 . Ces ensembles sont notés $\Gamma^{-1}(MT_i) = \{(\sigma_j, M)\}$ pour $i = \{5, 6, 7\}$ avec $M = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ et :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= T_1(\tau_1)T_2(\tau_2) \\ \sigma_2 &= T_1(\tau_1)T_3(t_{1,1})T_2(\tau_2) \\ \sigma_3 &= T_1(\tau_1)T_3(t_{2,1})T_5(t_{2,2})T_2(\tau_2) \end{aligned}$$

avec $(\tau_1, \tau_2) = (1.63, 2.62)$ pour MT_5 , $(0.57, 0.77)$ pour MT_6 et $(0.78, 2.79)$ pour MT_7 .

Chaque trajectoire mène vers un marquage différent à la date τ_2 :

$$M[\sigma_1 > M_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$$

$$M[\sigma_2 > M_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$$

$$M[\sigma_3 > M_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$$

TABLEAU 4.1. Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la [Figure 2.3](#) (en gras la plus forte probabilité).

Etat courant	MT_5		MT_6		MT_7	
	Proposition 4.1	Simulation	Proposition 4.1	Simulation	Proposition 4.1	Simulation
M_1	0.238	0.232	0.803	0.805	0.036	0.034
M_2	0.410	0.405	0.178	0.176	0.230	0.232
M_3	0.352	0.362	0.019	0.018	0.734	0.733

Si l'on considère les trajectoires compatibles sans tenir compte des dates des événements, il est possible d'utiliser le degré de croyance défini dans la [Section 2.4](#) pour obtenir une estimation d'état dans le cas non temporisé. Ceci revient, pour un marquage M , à diviser $\text{card}(S(M, MT))$ par le nombre total de marquages possibles. On obtient ainsi un degré de croyance identique pour chacun des marquages M_1 , M_2 ou M_3 et qui est égale à $1/3$. Maintenant, en prenant en compte les dates, la [Proposition 3.3](#) permet de déterminer la probabilité des trajectoires compatibles. Celles-ci sont ensuite utilisées pour le calcul de l'estimation d'état ([Proposition 4.1](#)). La simulation de Monte-Carlo permet de conforter les résultats obtenus qui sont représentés dans le [TABLEAU 4.1](#). Pour chaque trajectoire de mesure, $N_s = 10^3$ trajectoires compatibles sont obtenues par simulation. Outre la similitude entre les résultats de l'estimation d'état obtenus grâce à la [Proposition 4.1](#) et ceux obtenus avec la simulation, notons la variation importante de ces résultats en fonction des dates de mesure : l'état courant le plus probable correspond à M_2 pour MT_5 à la date 2.62, à M_1 pour MT_6 à la date 0.77 et enfin à M_3 pour MT_7 à la date 2.79. Ces résultats sont confirmés par les simulations. Ils illustrent bien l'importance de l'exploitation de l'information temporelle et l'impact que celle-ci peut avoir sur le résultat de l'estimation d'état.

4.4. Pronostic des défauts

Nous nous intéressons dans ce qui suit au pronostic de défauts des SED modélisés par des RdPS partiellement mesurés. À partir d'une trajectoire de mesure obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$ et de l'estimation d'état résultante, l'objectif est d'estimer la probabilité qu'une faute de classe f_α se produise dans un intervalle de temps futur $[\tau_{end}, t]$. Pour ce faire, il est important d'analyser les comportements futurs possibles du système à partir des états courants compatibles avec les mesures. Ces comportements futurs sont des trajectoires réalisables dont le marquage initial est un marquage courant possible à la date τ_{end} . Nous allons présenter deux approches pour évaluer la probabilité d'une faute dans l'intervalle $[\tau_{end}, t]$. La principale difficulté est de sélectionner l'ensemble pertinent des comportements futurs à considérer pour le calcul de la

probabilité. Avant de s'intéresser plus en détail à ces deux approches, nous allons introduire quelques notations et définitions que nous utiliserons par la suite.

La date de fin de mesure est notée τ_{end} . Elle correspond à la date à partir de laquelle le pronostic est réalisé. On note par $Mark(\tau_{end})$ l'ensemble des marquages possibles à cette date. Cet ensemble est donné par (4.4) :

$$Mark(\tau_{end}) = \{M \text{ tel que } \exists(\sigma, M') \in \Gamma^{-1}(MT) : M'[\sigma > M]\} \quad (4.4)$$

$\Gamma^{-1}(MT)$ étant l'ensemble des trajectoires compatibles avec MT .

Le résultat de l'estimation d'état permet d'associer à chaque marquage M de l'ensemble $Mark(\tau_{end})$, sa probabilité $P(M, \tau_{end})$ donnée par l'équation (4.3). À partir d'un marquage donné $M \in Mark(\tau_{end})$, l'ensemble des continuations possibles (comportements futurs possibles du système) est noté $Post(M)$ et défini comme suit :

$$Post(M) = \{\sigma \text{ tel que } M[\sigma >]\} \quad (4.5)$$

On s'intéresse aussi à l'ensemble des séquences futures qui démarrent de M et se terminent par une faute de classe f_α . Cet ensemble est donné par :

$$Post_\alpha(M) = \{\sigma T_j \text{ tel que } ((M[\sigma T_j >]) \wedge (\mathcal{F}(\sigma) = \emptyset) \wedge (\mathcal{F}(T_j) = f_\alpha))\} \quad (4.6)$$

On considère une trajectoire future (σ, M) telle que $\sigma \in Post(M)$. On note par $D_\sigma(t - \tau_{end})$ la probabilité d'exécution de σ dans une durée de temps inférieure ou égale à $(t - \tau_{end})$ sachant que (σ, M) est réalisée. Elle est obtenue en utilisant la loi d'Erlang généralisée (voir Annexe). Ainsi, si l'on note $\sigma = M(0)T_1M(1)T(2) \dots M(k-1)T(k)$, les paramètres de la loi d'Erlang sont donnés par $\lambda_j = \sum_{T_i \in T} n_i(M(i-1))$. μ_i pour $j = 1:k$. La Proposition 4.2 donne la probabilité de réalisation d'une trajectoire future (σ, M) sous la condition que celle-ci soit exécutée dans une durée qui n'excède pas $(t - \tau_{end})$. Cette probabilité sera notée $P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end}))$.

Proposition 4.2. Soient un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 et une trajectoire de mesure MT obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$. À partir d'un marquage possible courant M , la probabilité de réalisation d'une trajectoire future (σ, M) avant une date $t > \tau_{end}$ est donnée par :

$$P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end})) = P(M, \tau_{end})P(\sigma_U, M)D_\sigma(t - \tau_{end}) \quad (4.7)$$

avec $P(M, \tau_{end})$ et $P(\sigma_U, M)$ données respectivement par les équations (4.3) et (3.3).

Démonstration. $P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end}))$ correspond à la probabilité de réalisation de (σ, M) et que celle-ci soit exécutée avant $(t - \tau_{end})$. En utilisant les probabilités conditionnelles, on obtient donc :

$$P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end})) = P(\sigma, M).P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end})/(\sigma, M)) \quad (4.8)$$

$P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end}) / (\sigma, M))$ est donnée par $D_\sigma(t - \tau_{end})$ et $P(\sigma, M)$ correspond à la probabilité que (σ, M) se réalise à partir de l'instant τ_{end} . Celle-ci est donnée par la probabilité d'être au marquage M à l'instant τ_{end} donnée par (4.3) et que la trajectoire non temporisée (σ_U, M) se réalise à partir de ce marquage (probabilité donnée par (3.3)). ■

Si l'on s'intéresse à la valeur exacte de la probabilité d'occurrence de la faute de classe f_α dans l'intervalle de temps $]\tau_{end}, t]$, celle-ci est obtenue en exploitant l'ensemble des séquences fautives futures $Post_\alpha(M)$ ainsi que l'équation (4.7). Elle est donnée par :

$$P_{ex}(t, f_\alpha) = \sum_{M \in Mark(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma \in Post_\alpha(M)} P(\sigma_U, M) D_\sigma(t - \tau_{end}) \right) \quad (4.9)$$

Cette équation est obtenue en considérant la somme des probabilités de tous les marquages possibles M à la date τ_{end} multipliées par la somme de toutes les probabilités d'occurrence de f_α avant $(t - \tau_{end})$ obtenues en utilisant (4.7).

Il est important de préciser qu'à partir des marquages possibles actuels, l'ensemble des séquences futures $Post(M)$ et $Post_\alpha(M)$ est généralement de cardinalité infinie. Même dans le cas où celle-ci est finie, la détermination de ces deux ensembles nécessite l'exploration de tout l'espace d'état. Le calcul de la probabilité exacte en utilisant (4.9) s'avère donc fastidieux et engendre des temps de calcul excessifs. Pour remédier à cela, nous proposons deux méthodes permettant d'explorer partiellement l'espace d'état à partir des marquages possibles à la date τ_{end} . L'exploitation des ensembles de trajectoires fautives obtenues permet ensuite d'estimer la probabilité d'occurrence future des fautes.

4.4.1. l_{max} -pronostic

La première méthode proposée pour le pronostic de défauts des RdPS partiellement mesurés est notée l_{max} -pronostic. À partir d'une trajectoire de mesure MT obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}]$, l'objectif est d'évaluer la probabilité de la future occurrence d'une faute. Rappelons que l'ensemble des états courants compatibles avec les mesures à la date τ_{end} est noté $Mark(\tau_{end})$. Chaque marquage courant possible M est caractérisé par sa probabilité $P(M, \tau_{end})$ donnée par (4.3).

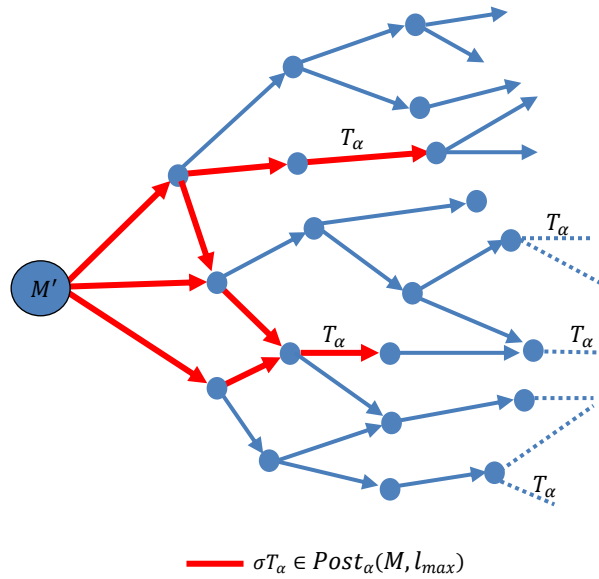


Figure 4.1. Exemple de détermination de l'ensemble $Post_\alpha(M, l_{max})$ avec $l_{max} = 4$.

À partir des marquages courants compatibles avec les mesures, la méthode l_{max} -pronostic consiste, dans un premier temps, à déterminer un ensemble de continuations possibles qui se terminent par une faute de classe f_α . Pour éviter des séquences futures infinies, leur taille est limitée par un nombre arbitraire d'événements l_{max} . En pratique, la méthode explore seulement une partie du graphe des marquages à partir de l'état estimé. La profondeur de l'arbre résultant (taille de la plus longue séquence à partir de l'état courant) est limitée par l_{max} (Figure 4.1). Seules les séquences se terminant par la faute de classe f_α sont exploitées. L'ensemble contenant ces séquences est noté $Post_\alpha(M, l_{max})$ et défini comme suit :

$$Post_\alpha(M, l_{max}) = \{(\sigma T_j, M) \text{ tel que } (M[\sigma T_j >]) \wedge (\mathcal{F}(\sigma) = \emptyset) \wedge (\mathcal{F}(T_j) = f_\alpha) \wedge (|\sigma T_j| \leq l_{max})\} \quad (4.10)$$

$Post_\alpha(M, l_{max})$ est l'ensemble des continuations de taille maximale l_{max} qui démarrent du marquage courant possible M et qui se terminent par une faute de classe f_α . La complexité de calcul de l'ensemble $Post_\alpha(M, l_{max})$ à partir d'un seul marquage M dépend du nombre de transitions q du RdP ainsi que de la valeur de l_{max} . Elle est donnée par $\mathcal{O}(q^{l_{max}})$. Ainsi, si l'on considère $N_{\tau_{end}}$ le nombre de marquages possibles à l'instant τ_{end} , la complexité pour tous les marquages correspond à $\mathcal{O}(N_{\tau_{end}} \cdot q^{l_{max}})$. Une fois l'ensemble $Post_\alpha(M, l_{max})$ calculé pour chaque marquage $M \in Mark(\tau_{end})$, l'objectif de l'équation (4.11) est d'évaluer la probabilité d'occurrence future d'une faute de classe f_α dans un horizon de temps $]\tau_{end}, t]$ en considérant les l_{max} futurs événements à partir de l'état courant du système :

$$\hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha) = \sum_{M \in Mark(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{(\sigma, M) \in Post_\alpha(M, l_{max})} (P(\sigma_U, M) \cdot D_\sigma(t - \tau_{end})) \right) \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) est obtenue de la même manière que l'équation (4.9) en ne considérant que les trajectoires de faute incluses dans l'ensemble $Post_\alpha(M, l_{max})$.

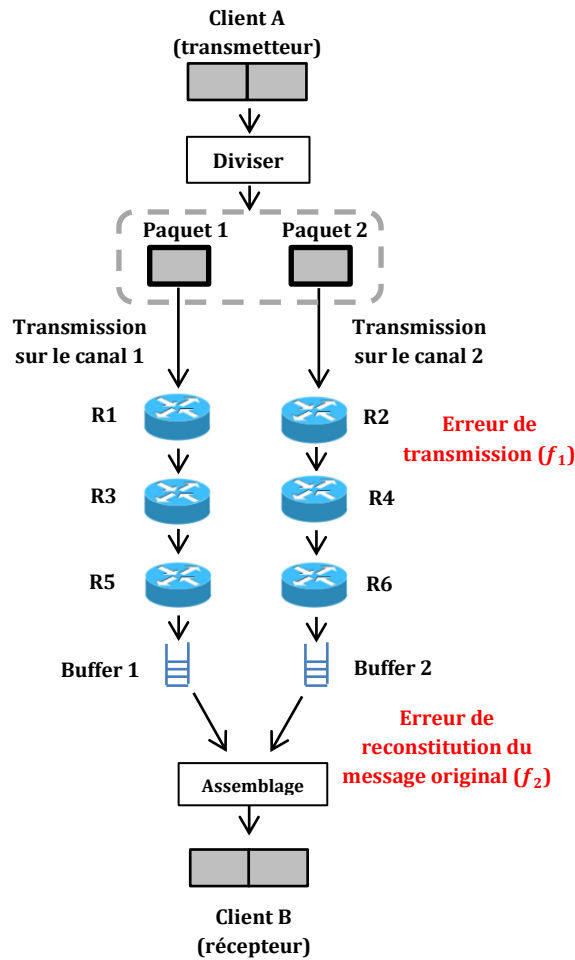


Figure 4.3. Le système de communication considéré.

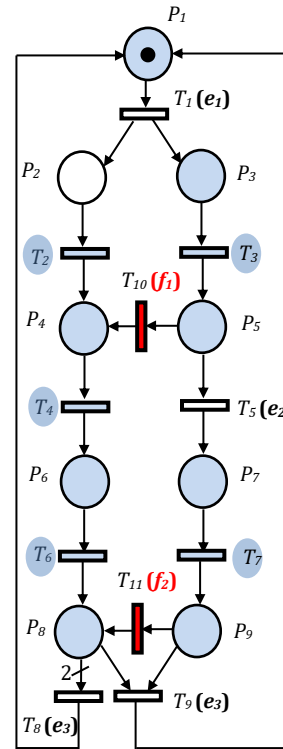


Figure 4.2. Modèle du système de communication (en bleu les places et transitions non mesurées).

Exemple 4.2. On considère le système de la Figure 4.3 qui représente un protocole de communication simplifié, inspiré de (Ru & Hadjicostis 2009). Le modèle de ce système est représenté sur la Figure 4.2 avec le marquage initial $M_I = 1P_1$ (c.-à-d. $M_I = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$) et $\mu_j = 1$ pour $j = 1, \dots, 11$. Les messages sont transmis du client A vers le client B. Dans un premier temps, le message est divisé (transition T_1) en deux paquets devant être acheminés sur deux canaux différents. À travers le canal 1, le premier paquet est successivement traité par les routeurs R_1, R_3 et R_5 modélisés respectivement par les couples $(P_2, T_2), (P_4, T_4)$ et (P_6, T_6) avant de parvenir au buffer 1 représenté par la place P_8 . Le paquet 2 est quant à lui traité par les routeurs R_2, R_4 et R_6 modélisés respectivement par $(P_3, T_3), (P_5, T_5)$ et (P_7, T_7) et entre dans le buffer 2 représenté par la place P_9 . Enfin, les paquets sont rassemblés pour reconstituer le message original et un accusé de réception est envoyé au client expéditeur (transition T_9). Ceci représente le fonctionnement normal du système.

Deux fautes peuvent survenir durant l'envoi du message. La première est une erreur de transmission qui concerne le paquet 2. Elle survient lorsque ce paquet, devant être transféré sur le canal 2, est malencontreusement transféré sur le premier canal par le routeur R_2 . Cette erreur est modélisée par la transition T_{10} associée à la faute f_1 . La deuxième faute f_2 est une faute liée à la reconstitution du message original. Celle-ci est modélisée par la transition T_{11} . Dans ce cas, les paquets ne sont plus assemblés pour reconstituer le message original. Un accusé de réception est envoyé à l'expéditeur (client A) quel que soit le comportement du système (transition T_8 ou T_9).

Le système est équipé de trois capteurs d'événements : le premier indique que le message vient d'être divisé en deux paquets. Celui-ci est modélisé par l'étiquette e_1 associée à la transition T_1 . Le deuxième événement mesuré indique la fin du traitement du paquet 2 par le routeur R_4 (étiquette e_2 associée à la transition T_5). Enfin, le troisième événement, représenté par l'étiquette e_3 , est associé aux deux transitions T_8 et T_9 . L'accusé de réception ne permet pas de distinguer les comportements fautifs du comportement nominal. De plus, le marquage de la place P_2 est mesuré. Ainsi, l'information de la présence d'un paquet en cours de traitement dans le routeur R_1 est supposée connue. La fonction de mesure des étiquettes est ainsi donnée par $\mathcal{L}(T_1) = e_1, \mathcal{L}(T_5) = e_2, \mathcal{L}(T_8) = \mathcal{L}(T_9) = e_3$ et $\mathcal{L}(T_j) = \varepsilon$ pour $j \neq 1, 5, 8, 9$ et la matrice de mesure du marquage par $H = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. Pour cette configuration de capteurs du système, on obtient la valeur $h_{max} = 5$.

On considère la trajectoire de mesure suivante obtenue dans l'intervalle de temps $[0, 0.9]$: $MT = 0P_2(0)e_1(0.42)1P_2(0.42)\varepsilon(0.9)0P_2(0.9)$. La date de fin de mesure coïncide avec la date du dernier événement. Dans ce cas, les trajectoires compatibles n'incluent pas de clôture silencieuse. Ces trajectoires sont données par $\Gamma^{-1}(MT) = \{(\sigma_i, M)\}$ pour $i = 1 \dots 5$ avec $M = 1P_1$ et :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= T_1(0.42)T_2(0.9) \\ \sigma_2 &= T_1(0.42)T_3(t_{1,1})T_2(0.9) \\ \sigma_3 &= T_1(0.42)T_3(t_{1,1})T_{10}(t_{1,2})T_2(0.9) \\ \sigma_4 &= T_1(0.42)T_3(t_{1,1})T_{10}(t_{1,2})T_4(t_{1,3})T_2(0.9) \\ \sigma_5 &= T_1(0.42)T_3(t_{1,1})T_{10}(t_{1,2})T_4(t_{1,3})T_6(t_{1,4})T_2(0.9) \end{aligned}$$

TABLEAU 4.2. Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 4.3.

Etat actuel possible	Probabilité de d'état
$M_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$	0.667
$M_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$	0.254
$M_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$	0.066
$M_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$	0.011
$M_5 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$	0.002

La Proposition 3.3 permet de calculer la probabilité des trajectoires compatibles. Les résultats suivants sont obtenus : $P(\sigma_1, M) = 0.667$, $P(\sigma_2, M) = 0.254$, $P(\sigma_3, M) = 0.066$, $P(\sigma_4, M) = 0.011$, $P(\sigma_5, M) = 0.002$. Le TABLEAU 4.2 donne l'estimation d'état du système à la date 0.9, c'est-à-dire la liste des états actuels possibles $Mark(0.9)$ du système en fonction des mesures MT ainsi que leurs probabilités associées. Notons que dans ce cas particulier, la probabilité des trajectoires correspond à la probabilité des états car chaque trajectoire mène vers un marquage possible différent.

L'objectif est de prédire l'occurrence future des fautes. Pour ce faire, l'équation (4.11) est exploitée avec une valeur de $l_{max} = 4$ après avoir calculé les ensembles $Post_\alpha(M, 4)$ pour chaque marquage $M \in Mark(0.9)$. La Figure 4.4 illustre les résultats obtenus. Les courbes en trait continu représentent la probabilité d'occurrence future des deux fautes dans un intervalle de temps $]\tau_{end}, t]$ (avec t variant de 0.9 à 6.5) obtenue avec (4.11). La date 0.9 correspond à la date de fin de mesure et le pronostic est réalisé à partir de celle-ci. Par exemple, pour une valeur de $t = 2.5$, la probabilité que les fautes se produisent dans l'intervalle de temps $]0.9, 2.5]$ est estimée à $P(f_1, 2.5, 4) = 0.33$ pour f_1 et $P(f_2, 2.5, 4) = 0.04$ pour f_2 . Il faut noter que ces probabilités tendent vers une valeur constante en fonction de t . Cette valeur correspond à la somme des probabilités des trajectoires de faute non temporisées.

TABLEAU 4.3. Erreur sur le pronostic de la faute f_1 en fonction du nombre de simulations N .

Nombre de simulations	500	1000	2500	5000
Valeur maximale de l'erreur sur le pronostic de f_1^*	18.23 %	7.45 %	5.31 %	4.53 %

$$(*) \max_{t \in]0.9, 6.5]} \left(\frac{|P_{simul}(t, l_{max}, f_1) - P_{calcul}(t, l_{max}, f_1)|}{P_{simul}(t, l_{max}, f_1)} \right) \cdot 100$$

Dans le but de conforter les résultats obtenus, la simulation Monte-Carlo est utilisée. Un nombre $N_s = 2500$ de continuations de longueur maximale $l_{max} = 4$ qui démarrent des états actuels possibles du système est obtenu (le réseau est simulé à partir des états actuels sur une durée suffisante $t \gg 6.5$ et les séquences obtenues sont tronquées à 4 événements). Pour chaque continuation contenant une faute f_1 ou f_2 , la date d'occurrence de cette dernière est enregistrée dans un ensemble à partir duquel la fonction de répartition de la date d'occurrence future des fautes sera estimée. Les résultats de simulations sont représentés par les lignes discontinues de la Figure 4.4. Ces résultats confirment ceux obtenus grâce à l'équation (4.11). Le TABLEAU 4.3 concerne la faute f_1 et représente l'évolution de l'écart entre la simulation et le résultat de la proposition. On remarque que l'écart diminue quand le nombre de simulation N_s augmente et ceci confirme que ces écarts sont principalement dus à des erreurs de précision de la simulation.

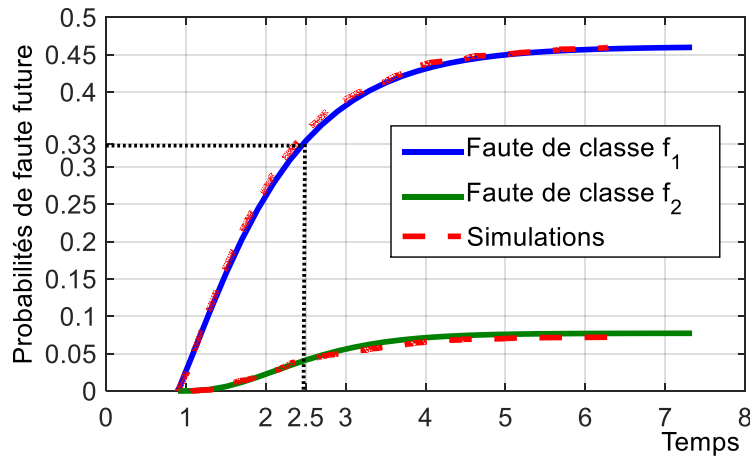


Figure 4.4. Pronostic des fautes f_1 et f_2 calculé avec (4.11) (lignes continues) et la simulation (lignes discontinues) avec $l_{max} = 4$.

On s'intéresse maintenant à l'erreur d'estimation de la probabilité future de la faute lorsque l'approche l_{max} -pronostic est considérée. L'équation suivante donne cette l'erreur d'estimation.

$$\xi_1(t, l_{max}, f_\alpha) = P_{ex}(t, f_\alpha) - \hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha) \quad (4.12)$$

avec $P_{ex}(t, f_\alpha)$ et $\hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha)$ données respectivement par (4.9) et (4.11). La Proposition 4.3 caractérise cette erreur d'estimation.

Proposition 4.3. On considère un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2. L'erreur d'estimation $\xi_1(t, l_{max}, f_\alpha)$ décroît en fonction de l'augmentation de l_{max} et $\hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha)$ tend vers $P_{ex}(t, f_\alpha)$ quand l_{max} tend vers l'infini.

Démonstration. L'erreur d'estimation satisfait $\xi_1(t, l_{max}, f_\alpha) \geq 0$ car $\hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha)$ est une sous estimation de la valeur réelle de la probabilité. En effet, la recherche des séquences futures $Post_\alpha(M, l_{max})$ est limitée par le nombre d'événements l_{max} qui les composent. Les séquences fautives de taille supérieure à l_{max} ne sont pas prises en compte. Celles-ci augmentent la probabilité d'occurrence de la faute. Par conséquent, en augmentant le nombre d'événements l_{max} , plus de séquences futures seront prises en compte et $\hat{P}(t, l_{max}, f_\alpha)$ augmentera et convergera vers la valeur $P_{ex}(t, f_\alpha)$ lorsque l_{max} tendra vers l'infini. ■

L'erreur d'estimation dépend de l_{max} . Lorsque l_{max} est arbitrairement choisi, il n'existe aucune garantie sur l'erreur d'estimation en fonction de l'horizon de pronostic $t - \tau_{end}$. En effet, une séquence de forte probabilité (suivant le taux de franchissement de ses transitions) peut ne pas être prise en compte dans l'estimation si sa taille dépasse l_{max} . L'objectif de la section suivante est de proposer une seconde approche qui permet de borner l'erreur d'estimation en fonction de l'horizon de pronostic.

4.4.2. (ρ, δ) -pronostic

La méthode (ρ, δ) -pronostic est basée sur deux paramètres : le seuil de l'erreur d'estimation ρ et l'horizon de pronostic δ . À partir des marquages de l'ensemble $Mark(\tau_{end})$, l'objectif est de calculer l'ensemble fini $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ de séquences futures (continuations possibles) approprié, tel que l'erreur d'estimation de la probabilité d'occurrence future d'une faute soit bornée par ρ lorsque l'horizon de pronostic $t - \tau_{end}$ n'excède pas δ . Dans ce qui suit, nous commençons par introduire l'ensemble $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ des séquences futures sur lequel se base l'approche (ρ, δ) -pronostic. Pour un marquage $M \in Mark(\tau_{end})$, $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ est défini comme suit :

$$Post_\alpha(M, \rho, \delta) = \left\{ \sigma T_j \text{ tel que } (M[\sigma T_j >]) \wedge (\mathcal{F}(\sigma) = \emptyset) \wedge (\mathcal{F}(T_j) = f_\alpha) \wedge (D_{\sigma T_j}(\delta) \geq \rho) \right\} \quad (4.13)$$

$Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ est l'ensemble des séquences réalisables à partir de M se terminant par une faute de classe f_α . De plus, la probabilité $D_{\sigma T_j}(\delta)$ d'exécuter ces séquences dans une durée δ est supérieure ou égale à ρ . On note aussi $Post(M, \rho, \delta)$ l'ensemble des continuations possibles à partir de $M \in Mark(\tau_{end})$ de la forme σT_j (T_j pouvant être une transition fautive ou non) qui satisfont les conditions $D_\sigma(\delta) \geq \rho$ et $D_{\sigma T_j}(\delta) < \rho$. Cet ensemble est défini comme suit :

$$Post(M, \rho, \delta) = \left\{ \sigma T_j \text{ tel que } (M[\sigma T_j >]) \wedge (\mathcal{F}(\sigma) = \emptyset) \wedge (D_\sigma(\delta) \geq \rho) \wedge (D_{\sigma T_j}(\delta) < \rho) \right\} \quad (4.14)$$

L'Algorithme 4.1, initialisé avec un marquage courant $M \in Mark(\tau_{end})$, explore partiellement l'espace d'état du RdPS à partir de ce marquage et calcule les deux ensembles $Post(M, \rho, \delta)$ et $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$. À l'étape initiale, une étiquette « à explorer » est associée au marquage M . L'algorithme utilise l'ensemble $SubSeq(M')$ qui contient des séquences franchissables à partir de M et qui aboutissent au marquage M' . Cet ensemble est initialisé avec ε pour le marquage M ($SubSeq(M) = \varepsilon$).

Un marquage M étiqueté « à explorer » est sélectionné et un test est effectué pour chaque transition validée par ce marquage. Ce test vérifie si chaque séquence menant vers M et complétée par la transition validée peut être franchie dans une durée δ avec une probabilité supérieure à ρ . Si ce test s'avère positif, et qu'en plus la transition validée est une transition fautive, alors la séquence est rajoutée à l'ensemble $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$. Si le test est vrai mais que la transition en question n'est pas fautive alors le nouveau marquage atteint, suite au franchissement de la séquence, est étiqueté. Enfin, si la condition n'est pas vérifiée, la séquence est rajoutée à l'ensemble $Post(M, \rho, \delta)$ et l'exploration est stoppée pour celle-ci. La procédure est répétée tant qu'un marquage étiqueté « à explorer » existe.

Exemple 4.3. Dans le but d'illustrer le calcul des ensembles précédemment définis, on considère l'exemple de la Figure 4.5 composé de deux places $\{P_1, P_2\}$ et de trois transitions $\{T_1, T_2, T_3\}$. Le taux de franchissement des transitions est donné par le

vecteur $\mu = (1 \ 1 \ 0.5)^T$ et seul le marquage de la place P_1 est mesuré. Une faute f est associée à la transition T_3 .

On considère que le marquage courant est donné par $M = (1 \ 0)^T$, Les deux ensembles suivants sont obtenus à partir de (4.5) et (4.6). Ainsi, l'ensemble des séquences futures possibles à partir de M est donné par :

Algorithme 4.1. Calcul des ensembles de trajectoires futures $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ et $Post(M, \rho, \delta)$.

Entrées : $\langle G, \mathcal{L}, H M_I \rangle, \rho, \delta, f_\alpha, M$

Sortie : $Post_\alpha(M, \rho, \delta), Post(M, \rho, \delta)$

Initialisation : $Post_\alpha(M, \rho, \delta) \leftarrow \emptyset, Post(M, \rho, \delta) \leftarrow \emptyset$

1. Assigner l'étiquette « à explorer » au marquage M
 2. $SubSeq(M) \leftarrow \{\varepsilon\}$
 3. **Tant que** un marquage avec une étiquette « à explorer » existe
 4. Sélectionner un marquage étiqueté
 5. **Pour** toute transition T validée à M
 6. Calculer M' tel que $M[T > M'$
 7. **Pour** toute séquence $\sigma \in SubSeq(M)$
 8. **si** $D_{\sigma T}(\delta) \geq \rho$
 9. **si** T est associée à une faute de classe f_α
 10. $Post_\alpha(M, \rho, \delta) \leftarrow \{\sigma T\}$
 11. **sinon**
 12. $SubSeq(M') \leftarrow SubSeq(M') \cup \{\sigma T\}$
 13. Assigner l'étiquette « à explorer » au marquage M'
 14. **fin si**
 15. **sinon** $Post(M, \rho, \delta) \leftarrow Post(M, \rho, \delta) \cup \{\sigma T\}$
 16. **fin si**
 17. **fin pour**
 18. **fin pour**
 19. Retirer l'étiquette du marquage M
 20. $SubSeq(M) \leftarrow \emptyset$
 21. **fin tant que**
-

$$Post(M) = \{T_1, T_3, T_1T_2, T_3T_2, T_1T_2T_1, T_1T_2T_3 \dots\}$$

Et l'ensemble des séquences futures se terminant par une faute est donné par :

$$Post_f(M) = \{T_3, T_1T_2T_3, T_1T_2T_1T_2T_3, \dots\}$$

En exploitant l'Algorithme 4.1 avec $\delta = 1$ et $\rho = 0.1$, les ensembles suivants, définis par

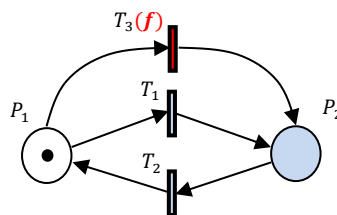


Figure 4.5. Exemple simple d'un RdPS partiellement mesuré

(4.14) et (4.13) sont obtenus :

$$\begin{aligned} Post(M, 0.1, 1) &= \{T_1 T_2 T_1 T_2\} \\ Post_f(M, 0.1, 1, f) &= \{T_3, T_1 T_2 T_3\} \end{aligned}$$

La probabilité de franchir la séquence $T_1 T_2 T_1$ avant une durée unitaire est supérieure ou égale à 0.1 ($D_{T_1 T_2 T_1}(1) \geq 0.1$) et la probabilité de franchir $T_1 T_2 T_1 T_2$ avant la même durée est inférieure à 0.1 ($D_{T_1 T_2 T_1 T_2}(1) < 0.1$). $T_1 T_2 T_1 T_2$ est donc la séquence de taille minimale garantissant la condition $D_{T_1 T_2 T_1 T_2}(1) < 0.1$. En effet, l'ajout de transitions supplémentaires ne fera que réduire la valeur de cette probabilité.

La complexité du calcul des deux ensembles $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$ et $Post(M, \rho, \delta)$ dépend du nombre q de transitions du réseau, de la taille l_{μ_m} de la plus longue séquence explorée et enfin de la complexité du test de la condition ($D_{\sigma T_j}(\delta) \geq \rho$) qui est donné par $\mathcal{O}(l_{\mu_m}^3)$. Notons que l_{μ_m} est borné par le nombre maximal de transitions pouvant être tirées dans une durée δ et avec une probabilité supérieure à ρ quand le taux de franchissement maximal μ_m du RdPS est considéré (les RdPS contenant des transitions immédiates ne sont pas considérés dans notre étude). La complexité pour un marquage donné M est donc donnée par $\mathcal{O}(q^{l_{\mu_m}} \cdot l_{\mu_m}^3)$. Si l'on considère $N_{\tau_{end}}$ comme étant le nombre de marquages possibles à l'instant τ_{end} , la complexité pour tous les marquages correspond à $\mathcal{O}(N_{\tau_{end}} \cdot q^{l_{\mu_m}} \cdot l_{\mu_m}^3)$. L'utilisation de l'algorithme de recherche des séquences futures pour des applications en ligne nécessite, au préalable, de vérifier si son temps d'exécution ne dépasse pas la vitesse d'évolution du système. Ceci dépend, entre autres, des paramètres choisis pour le pronostic.

On s'intéresse maintenant au calcul de la probabilité d'occurrence d'une faute de classe f_α dans l'intervalle $[\tau_{end}, t]$ en exploitant l'ensemble $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$. Celle-ci est approchée par :

$$\hat{P}(t, \rho, \delta, f_\alpha) = \sum_{M \in Mark(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma \in Post_\alpha(M, \rho, \delta)} P(\sigma_U, M) D_\sigma(t - \tau_{end}) \right) \quad (4.15)$$

L'erreur d'estimation en utilisant l'approche (ρ, δ) -pronostic est donnée par $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) = P_{ex}(t, f_\alpha) - \hat{P}(t, \rho, \delta, f_\alpha)$ et satisfait $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \geq 0$. Avant de s'intéresser à la borne de cette erreur, la Proposition 4.4 est introduite. Celle-ci sera nécessaire pour la caractérisation de cette erreur d'estimation.

Proposition 4.4. Soient un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 et une trajectoire de mesure MT obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$. À partir d'un marquage courant possible M à l'instant τ_{end} , on considère une séquence future $\sigma \in Post(M)$ qui ne contient pas de faute et qui aboutit au marquage M' (c.-à-d. $M[\sigma > M']$). L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{\substack{\sigma' \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma', M) \leq (t - \tau_{end})) \leq P((\sigma, M) \leq (t - \tau_{end})) \quad (4.16)$$

Démonstration. En utilisant l'équation (4.7), le terme de gauche de l'inégalité (4.16) peut s'écrire comme suit :

$$\sum_{\substack{\sigma \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma', M) \leq (t - \tau_{end})) = P(M, \tau_k) \sum_{\substack{\sigma' \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma')_U, M) \cdot D_{\sigma\sigma'}(t - \tau_{end}) \quad (4.17)$$

La probabilité d'exécution d'une séquence $\sigma\sigma'$ à partir d'un marquage M est inférieure à la probabilité d'exécution de la séquence σ à partir de M avant la même durée (c.-à-d. $P(\Delta(\sigma\sigma', M') \leq (t - \tau_{end})) \leq P(\Delta(\sigma, M') \leq (t - \tau_{end}))$). En effet, l'ajout de transitions supplémentaires à une séquence fait que la probabilité de franchir cette séquence dans une durée fixe diminue. En exploitant ce fait, l'équation (4.17) devient :

$$\sum_{\substack{\sigma \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma', M) \leq (t - \tau_{end})) \leq P(M, \tau_k) \sum_{\substack{\sigma' \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma')_U, M) \cdot D_\sigma(t - \tau_{end}) \quad (4.18)$$

Du fait que $P((\sigma\sigma')_U, M) = P(\sigma_U, M)P(\sigma'_U, M')$, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\sum_{\substack{\sigma \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P((\sigma\sigma', M) \leq (t - \tau_{end})) \leq P(M, \tau_k) \cdot P(\sigma_U, M) \cdot D_\sigma(t - \tau_{end}) \sum_{\substack{\sigma' \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P(\sigma'_U, M') \quad (4.19)$$

Sachant que $\sum_{\substack{\sigma' \in Post_\alpha(M') \\ t.q. M[\sigma > M']}} P(\sigma'_U, M') \leq 1$ et en exploitant l'équation (4.7), (4.16) est obtenue. ■

La Proposition 4.5 garantit une erreur d'estimation $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha)$ bornée.

Proposition 4.5. On considère un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses H3.1 et H2.2 et une estimation de la probabilité future $\hat{P}(t, \rho, \delta, f_\alpha)$ en fonction d'une trajectoire de mesure MT . L'erreur d'estimation $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha)$ satisfait :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \rho \text{ pour tout } t \leq \tau_{end} + \delta \quad (4.20)$$

Démonstration. On considère les trajectoires fautives qui ne sont pas prises en compte dans l'ensemble $Post_\alpha(M, \rho, \delta)$. Celles-ci vérifient $\sigma \in (Post_\alpha(M) \setminus Post_\alpha(M, \rho, \delta))$ et peuvent être décomposées de la manière suivante $\sigma = \sigma'\sigma''$ avec σ' un préfixe appartenant à l'ensemble $Post(M, \rho, \delta)$ tel que $M[\sigma' > M']$ et σ'' appartenant nécessairement à l'ensemble $Post_\alpha(M')$. Par conséquent, l'équation (4.9) peut être réécrite, en exploitant cette décomposition, de la façon suivante :

$$P_{ex}(t, f_\alpha) = \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} P(M, \tau_{end}) \left(\sum_{\sigma \in \text{Post}_\alpha(M, \rho, \delta)} P(\sigma_U, M) D_\sigma(t - \tau_{end}) \right. \\ \left. + \sum_{\sigma' \in \text{Post}(M, \rho, \delta)} \sum_{\substack{\sigma'' \in \text{Post}_\alpha(M') \\ \text{s.t. } M[\sigma'] > M'}} P((\sigma' \sigma'')_U, M) D_{\sigma' \sigma''}(t - \tau_{end}) \right) \quad (4.21)$$

En exploitant (4.15), l'erreur d'estimation $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha)$ devient :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) = \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma' \in \text{Post}(M, \rho, \delta)} \sum_{\substack{\sigma'' \in \text{Post}_\alpha(M') \\ \text{t.q. } M[\sigma'] > M'}} P((\sigma' \sigma'')_U, M) D_{\sigma' \sigma''}(t - \tau_{end}) \quad (4.22)$$

En exploitant le résultat de la Proposition 4.4 l'inégalité (4.23) est obtenue à partir de (4.22) :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma' \in \text{Post}(M, \rho, \delta)} P(\sigma'_U, M) D_{\sigma'}(t - \tau_{end}) \right) \quad (4.23)$$

Cette inégalité est valide pour tout $t > \tau_{end}$. Dans le cas particulier où $t \in]\tau_{end}, \tau_{end} + \delta]$, l'erreur d'estimation est maximale pour $t = \tau_{end} + \delta$. Ceci est dû au fait que l'erreur est croissante en fonction de t . Ainsi, on obtient :

$$\forall t \in]\tau_{end}, \tau_{end} + \delta]: \xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \xi_2(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f_\alpha) \quad (4.24)$$

En remplaçant t par $\tau_{end} + \delta$ dans (4.23), on obtient pour $t \in]\tau_{end}, \tau_{end} + \delta]$:

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma' \in \text{Post}(M, \rho, \delta)} P(\sigma'_U, M) D_{\sigma'}(\delta) \right) \quad (4.25)$$

La condition $D_{\sigma'}(\delta) < \rho$ étant satisfaite pour chaque $\sigma' \in \text{Post}(M, \rho, \delta)$, l'inégalité (4.25) devient :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma' \in \text{Post}(M', \rho, \delta)} P(\sigma'_U, M) \times \rho \right) \quad (4.26)$$

Etant donné que $\sum_{\sigma' \in \text{Post}(M', \rho, \delta)} P(\sigma'_U, M) \leq 1$, le résultat suivant est obtenu :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \rho \times \sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} P(M, \tau_{end}) \quad (4.27)$$

Enfin, la borne $\xi_2(t, \rho, \delta, f_\alpha) \leq \rho$ est obtenue car $\sum_{M \in \text{Mark}(\tau_{end})} P(M, \tau_{end}) \leq 1$. ■

TABLEAU 4.4. Différence entre les deux approches l_{max} -*pronostic* et (ρ, δ) -*pronostic*.

	Complexité pour un marquage courant M	Erreur d'estimation ξ
l_{max} - <i>pronostic</i>	$\mathcal{O}(q^{l_{max}})$	Non définie
(ρ, δ) - <i>pronostic</i>	$\mathcal{O}(l_{\mu_m}^3 \cdot q^{l_{\mu_m}})$	$\xi \leq \rho$ quand $t \leq \tau_{end} + \delta$

La méthode (ρ, δ) -*pronostic* a l'avantage de présenter une erreur d'estimation bornée par le paramètre ρ lorsque l'horizon de pronostic ne dépasse pas δ . L'approche l_{max} -*pronostic* ne garantit quant à elle aucune borne sur l'erreur d'estimation. Par contre, la complexité de cette approche dépend directement du paramètre l_{max} . L'approche présente donc l'avantage d'une complexité réduite par rapport à (ρ, δ) -*pronostic*. En effet, la complexité de cette dernière dépend de la valeur maximale du taux de franchissement μ_m du réseau et du test de la condition de probabilité durant l'exécution de l'Algorithme 4.1. Le TABLEAU 4.4 résume la différence entre les deux approches en termes de complexité et d'erreur d'estimation.

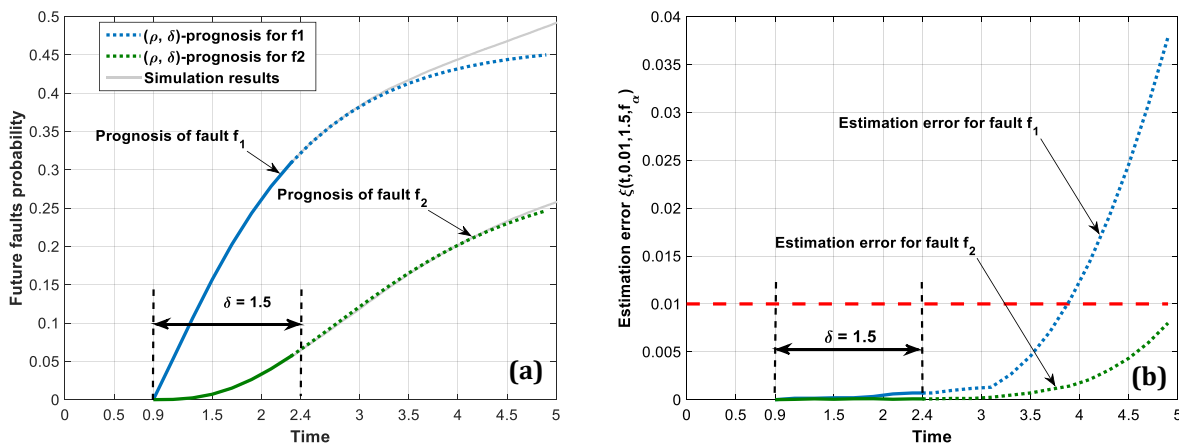


Figure 4.6. Résultat du pronostic : (a) Pronostic des fautes avec $(10^{-2}, 1.5)$ -*pronostic* et suivant la simulation. (b) Erreur d'estimation $\xi(t, 10^{-2}, 1.5, f_i)$.

Exemple 4.4. Reprenons l'exemple de la Figure 4.2 et la trajectoire de mesure obtenue dans l'intervalle de temps $[0, 0.9]$: $MT = 0P_2(0)e_1(0.42)1P_2(0.42)\varepsilon(0.9)0P_2(0.9)$. Le résultat de l'estimation d'état est détaillé dans le TABLEAU 4.2. On s'intéresse maintenant au pronostic des deux fautes suivant l'approche (ρ, δ) -*pronostic*. Pour cela, on considère un majorant de l'erreur d'estimation $\rho = 10^{-2}$ ainsi qu'un horizon de pronostic $\delta = 1.5$. L'ensemble des séquences futures fautives est obtenu en utilisant l'Algorithme 4.1. Cet ensemble est exploité pour le pronostic des fautes en utilisant l'équation (4.15). Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 4.6.(a) de même que ceux obtenus par la simulation Monte-Carlo. Ceux-ci sont obtenus en simulant le RdPS partiellement mesuré à partir des marquages courants possibles. Un nombre $N_s = 2500$ de continuations est obtenu. Pour chaque séquence contenant une faute f_i , la date d'occurrence de la faute est enregistrée dans un ensemble à partir duquel la fonction de

répartition de la date de la faute est estimée. Nous remarquons que les résultats correspondent à la simulation. La [Figure 4.6.\(b\)](#) représente l'évolution de l'erreur d'estimation $\xi(t, 10^{-2}, 1.5, f_i)$ pour les deux fautes ($i = \{1, 2\}$). Pour chacune de ces fautes, l'erreur satisfait la condition $\xi(t, 10^{-2}, 1.5, f_i) \leq 10^{-2}$ quand $t \leq \tau_{end} + \delta$ (c.-à-d. dans l'intervalle]0.9, 2.4]). On peut noter que cette condition est satisfaite au-delà de cet intervalle (jusqu'à $t = 3.8$ pour f_1 et jusqu'à $t = 5$ pour f_2). Ceci s'explique par le fait que l'erreur n'atteint la valeur ρ à la date $\tau_{end} + \delta$ que dans le pire des cas où chaque continuation de l'ensemble $Post(M, \rho, \delta)$ se termine par la faute considérée pour chaque $M \in Mark(\tau_{end})$.

4.5. Estimation de la durée de vie résiduelle

Dans cette section, on s'intéresse aux événements causant la défaillance et l'arrêt total d'un système. L'objectif est d'estimer la durée de vie résiduelle de ce dernier en supposant qu'il est en fonctionnement et non dans un état de panne. Pour cela, le résultat de l'estimation d'état en fonction des mesures est exploité pour évaluer l'état de dégradation du système. À partir de cette estimation, le résultat du pronostic basé sur l'approche (ρ, δ) -pronostic est utilisé pour estimer un intervalle de temps qui inclut la RUL.

Dans ce qui suit, on désigne par f l'événement causant la défaillance du système. En utilisant l'ensemble $Post_f(M, \rho, \delta)$, un intervalle de confiance $[\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f), \hat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f)]$ de la probabilité d'occurrence de f dans $]\tau_{end}, t]$ est obtenu avec :

$$\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) = \sum_{M \in Mark(\tau_{end})} \left(P(M, \tau_{end}) \sum_{\sigma \in Post_f(M, \rho, \delta)} P(\sigma_U, M) \cdot D_\sigma(t - \tau_{end}) \right) \quad (4.28)$$

$$\hat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f) = \hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) + \rho \quad (4.29)$$

La proposition suivante garantit l'encadrement de la valeur exacte de la probabilité d'occurrence future d'une faute en utilisant [\(4.28\)](#) et [\(4.29\)](#).

Proposition 4.6. Soient un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_I \rangle$ qui satisfait les hypothèses [H3.1](#) et [H2.2](#), une trajectoire de mesure MT obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$ et un couple de paramètres ρ et δ . La probabilité exacte $P_{ex}(t, f)$ que la faute f se produise dans l'intervalle $]\tau_{end}, t]$ satisfait :

$$P_{ex}(t, f) \in [\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f), \hat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f)] \text{ pour tout } t \leq \tau_{end} + \delta \quad (4.30)$$

Démonstration. $\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f)$ est égale à $\hat{P}(t, \rho, \delta, f)$ donnée par [\(4.15\)](#). Pour rappel, celle-ci est une sous-estimation de la probabilité exacte $P_{ex}(t, f)$. En effet, si l'ensemble des trajectoires futures fautives $Post_f(M, \rho, \delta)$ est de cardinalité finie (seules les séquences qui satisfont la condition de probabilité $(\geq \rho)$ sont retenues dans cet ensemble), d'autres séquences fautives, non prises en compte dans cet ensemble, sont

susceptibles de faire augmenter la probabilité de la faute. Par conséquent, la condition suivante est vérifiée pour tout $t \geq \tau_{end}$:

$$\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) \leq P_{ex}(t, f) \quad (4.31)$$

De plus, à partir du résultat de la [Proposition 4.5](#), l'erreur d'estimation vérifie la condition $\xi_2(t, \rho, \delta, f) \leq \rho$ si $t \leq \tau_{end} + \delta$. On rappelle que $\xi_2(t, \rho, \delta, f)$ est donnée par :

$$\xi_2(t, \rho, \delta, f) = P_{ex}(t, f) - \hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) \quad (4.32)$$

D'où le résultat suivant :

$$P_{ex}(t, f) \leq \hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) + \rho \text{ si } t \leq \tau_{end} + \delta \quad (4.33)$$

Sachant que $\hat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f) = \hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) + \rho$, on obtient le résultat [\(4.30\)](#) à partir de [\(4.31\)](#) et [\(4.33\)](#). ■

L'estimation de la RUL est basée sur l'utilisation inverse de la [Proposition 4.6](#) (voir la [Figure 4.7](#)). On considère un seuil de défaillance π_{RUL} à partir duquel le système est considéré hors service (c.-à-d. que le système sera considéré défaillant quand $P_{ex}(t, f) \geq \pi_{RUL}$). Ainsi, la RUL vérifie l'équation suivante :

$$P_{ex}(\tau_{end} + RUL, f) = \pi_{RUL} \quad (4.34)$$

La proposition suivante a pour but de fournir un encadrement de la RUL. Pour cela, on introduit les fonctions $P_{ex}^{-1}(\pi, f)$, $\hat{P}_{inf}^{-1}(\pi, \rho, \delta, f)$ et $\hat{P}_{sup}^{-1}(\pi, \rho, \delta, f)$ pour tout $\pi \in [0, 1]$ telles que $P_{ex}(t, f) = \pi$, $\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) = \pi$ et $\hat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f) = \pi$:

Proposition 4.7. Soient un SED modélisé par un RdPS partiellement mesuré $\langle G, \mu, \mathcal{L}, H, M_l \rangle$ qui satisfait les hypothèses [H3.1](#) et [H2.2](#), une trajectoire de mesure MT obtenue dans $[\tau_0, \tau_{end}]$ et un couple de paramètres ρ et δ . La valeur de la RUL correspondant au seuil choisi π_{RUL} sachant que le système fonctionne (c.-à-d. que la faute causant l'arrêt total du système ne s'est pas produite) satisfait :

$$\text{i) } (\tau_{end} + RUL) \in]\tau_{end}, \hat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)] \text{ si } \pi_{RUL} < \rho \quad (4.35)$$

$$\text{ii) } (\tau_{end} + RUL) \in [\hat{P}_{sup}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f), \hat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)] \quad (4.36)$$

si $\rho \leq \pi_{RUL} \leq \hat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)$

$$\text{iii) } RUL \geq \delta \text{ si } \pi_{RUL} > \hat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f) \quad (4.37)$$

Démonstration. À la date τ_{end} , le système est en fonctionnement et $RUL > 0$. De plus, $\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f) \leq P_{ex}(t, f)$ si $t \geq \tau_{end}$ et $\hat{P}_{inf}(t, \rho, \delta, f), P_{ex}(t, f)$ sont des fonctions continues et croissantes en fonction du temps, ainsi on obtient :

$$P_{ex}^{-1}(\pi, f) \leq \hat{P}_{inf}^{-1}(\pi, \rho, \delta, f) \text{ pour tout } \pi \in [0, 1] \quad (4.38)$$

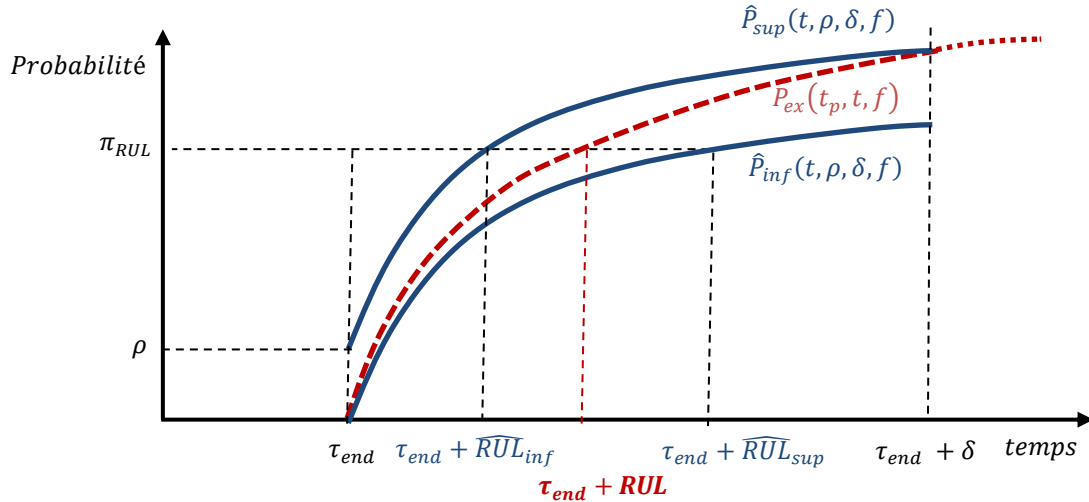


Figure 4.7. Estimation de la RUL basée sur (ρ, δ) -pronostic avec $\tau_{end} + \widehat{RUL}_{inf} = \widehat{P}_{sup}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)$ et $\tau_{end} + \widehat{RUL}_{sup} = \widehat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)$

- i) Dans le cas où $\pi_{RUL} < \rho$, on obtient $\tau_{end} \leq P_{ex}^{-1}(\pi_{RUL}, f) \leq \widehat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)$.
Donc $(\tau_{end} + RUL) \in]\tau_{end}, \widehat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f)]$ si $P_{ex}^{-1}(\pi_{RUL}, f) = \tau_{end} + RUL$.
- ii) La condition $P_{ex}(t, f) \leq \widehat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f)$ est vérifiée pour tout $t \in [\tau_{end}, \tau_{end} + \delta]$.
Les fonctions $P_{ex}(t, f)$ et $\widehat{P}_{sup}(t, \rho, \delta, f)$ sont continues et croissantes dans $[\tau_{end}, \tau_{end} + \delta]$ ainsi l'inégalité suivante est obtenue :

$$\widehat{P}_{sup}^{-1}(\pi, \rho, \delta, f) \leq P_{ex}^{-1}(\pi, f) \text{ pour tout } \pi \in [\widehat{P}_{sup}(\tau_{end}, \rho, \delta, f), \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)] \quad (4.39)$$

Cette relation est équivalente à :

$$\widehat{P}_{sup}^{-1}(\pi, \rho, \delta, f) \leq P_{ex}^{-1}(\pi, f) \text{ pour tout } \pi \in [\rho, \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)] \quad (4.40)$$

À partir de (4.38) et (4.40), l'inégalité (4.41) est obtenue pour tout $\rho \leq \pi_{RUL} \leq \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)$:

$$\widehat{P}_{sup}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f) \leq \tau_{end} + RUL \leq \widehat{P}_{inf}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f) \quad (4.41)$$

- iii) À partir de (4.39) et pour $\pi = \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)$, on obtient :

$$P_{ex}^{-1}(\widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f), \rho, \delta, f) \geq \widehat{P}_{sup}^{-1}(\widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f), \rho, \delta, f) \quad (4.42)$$

De plus, si $\pi_{RUL} > \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$P_{ex}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f) > P_{ex}^{-1}(\widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f), \rho, \delta, f) \quad (4.43)$$

Ainsi à partir de (4.42) et (4.43), on obtient $P_{ex}^{-1}(\pi_{RUL}, \rho, \delta, f) > \widehat{P}_{sup}^{-1}(\widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f), \rho, \delta, f)$ et $RUL \geq \delta$ dans le cas où $\pi_{RUL} > \widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f)$. Ceci est dû au fait que $\widehat{P}_{sup}^{-1}(\widehat{P}_{sup}(\tau_{end} + \delta, \rho, \delta, f), \rho, \delta, f) = \tau_{end} + \delta$. ■

Exemple 4.5. On considère le modèle de RdPS partiellement mesuré représenté par la Figure 4.8. Il modélise le processus de dégradation d'un système manufacturier représenté par ses deux états (arrêt et fonctionnement). Le système évolue ainsi d'un

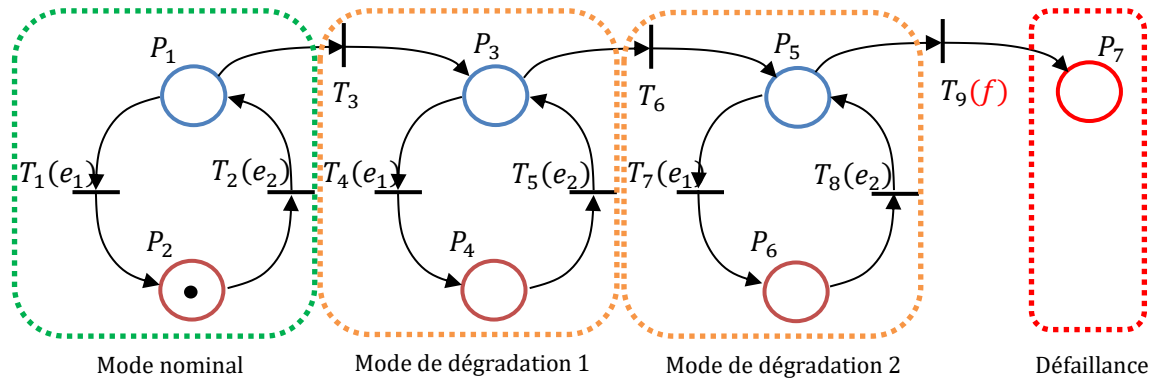


Figure 4.8. Modèle RdPS de dégradation d'un système de production.

état de fonctionnement normal (P_1, P_2) jusqu'à l'état de défaillance représenté par la place P_7 . Deux modes de dégradation sont représentés respectivement par les couples (P_3, P_4) pour le mode dégradé 1 et (P_5, P_6) pour le mode dégradé 2. Les places P_1, P_3 et P_5 signifient que le système est dans sa phase de production, alors que P_2, P_4, P_6 indiquent que le système est en attente. On considère l'événement « démarrer » qui fait passer le système de l'état d'arrêt à l'état de production. Cet événement est modélisé avec les transitions T_2, T_5 et T_8 . L'événement « arrêter » est quant à lui représenté par les événements T_1, T_4 et T_7 . Les transitions entre le mode nominal et les modes de dégradation sont données par T_3 et T_6 . La transition T_9 correspond à l'occurrence de la défaillance. Cet événement provoque l'arrêt complet du système.

Les dynamiques du système et de son processus de dégradation sont considérées connues et représentées par le vecteur de franchissement :

$$\mu = (0.5 \ 0.5 \ 0.05 \ 0.5 \ 0.25 \ 0.05 \ 0.5 \ 0.125 \ 0.05)^T.$$

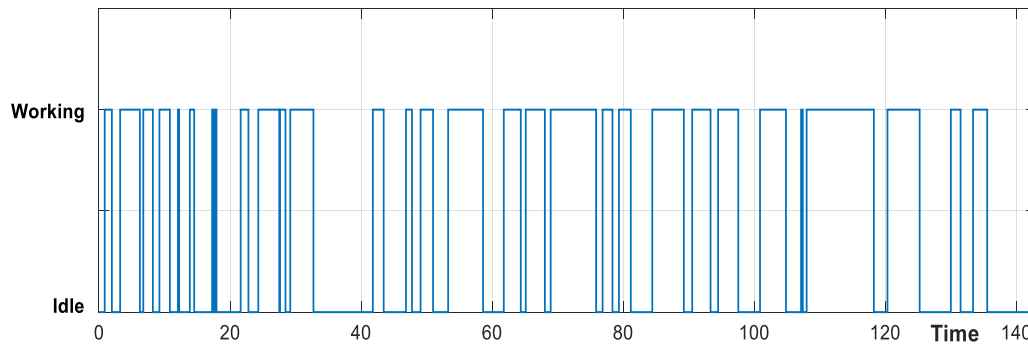
Le marquage initial est donné par $M_I = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ et l'ensemble des étiquettes est $E = \{e_1, e_2\}$. Les transitions mesurées vérifient $\mathcal{L}(T_1) = \mathcal{L}(T_4) = \mathcal{L}(T_7) = e_1$ et $\mathcal{L}(T_2) = \mathcal{L}(T_5) = \mathcal{L}(T_8) = e_2$. Cela signifie que l'étiquette e_1 est enregistrée à chaque fois que l'événement « arrêter » se produit et e_2 est enregistrée à chaque fois que l'événement « démarrer » se produit, quel que soit le mode concerné.

$H = ((1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T \ (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T \ (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T)^T$ est la matrice de mesure du marquage. À partir de cette matrice, on distingue si le système est dans un état de production, d'attente ou de défaillance. Cependant, les modes de fonctionnement normal et dégradés ne sont pas discernables. L'estimation d'état a pour but, dans le cas de cet exemple, de déterminer le mode dans lequel le système évolue en fonction d'une trajectoire de mesure datée.

TABLEAU 4.5. Estimation d'état (probabilité des modes) du RdPS partiellement mesuré de la Figure 4.8.

Etat actuel possible	Mode	Probabilité
$M_1 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$	Mode nominal	0.03
$M_2 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)^T$	Mode dégradé 1	0.66
$M_3 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T$	Mode dégradé 2	0.31

On considère une trajectoire de mesure obtenue dans l'intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}] = [0, 143]$. Elle est illustrée sur la Figure 4.9. Elle représente les transitions entre les périodes de production et d'attente du système, obtenues grâce à l'instrumentation (étiquettes e_1 et e_2). En se basant sur ces mesures, la première étape consiste à déterminer l'ensemble des trajectoires compatibles avec les mesures ainsi que leurs probabilités. Ensuite, l'utilisation de la Proposition 4.1 permet d'obtenir l'estimation d'état (c.-à-d. la liste des marquages possibles ainsi que leurs probabilités qui reflètent, dans le cas de cet exemple, la probabilité des modes). Les résultats de l'estimation d'état sont représentés dans le TABLEAU 4.5.

**Figure 4.9.** Trajectoire de mesure considérée

À partir des marquages possibles en fin d'acquisition des mesures, l'ensemble $Post_f(M, \rho, \delta)$ des séquences futures conduisant à la défaillance du système est calculé avec les paramètres $\rho = 0.05$ et $\delta = 55$. En se basant sur cet ensemble, les probabilités $\hat{P}_{inf}(t, 0.05, 55, f)$ et $\hat{P}_{sup}(t, 0.05, 55, f)$ d'une défaillance future du système sont calculées. Ces résultats sont confortés en utilisant la simulation Monte-Carlo avec un nombre $N_s = 10^5$ de continuations obtenues à partir de l'estimation d'état. Pour chaque séquence conduisant à la défaillance, la date d'occurrence de cette dernière est enregistrée dans un fichier. La courbe cumulative, équivalent statistique de la fonction de répartition, de la date d'occurrence de la défaillance est ensuite déduite à partir de ces données permettant d'obtenir $P_{sim}(t, f)$ qui approche $P_{ex}(t, f)$. Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 4.10. On note que, conformément à la Proposition 4.6 et si $t \leq 143 + 55$, la probabilité $P_{sim}(t, f) \in [\hat{P}_{inf}(t, 0.05, 55, f), \hat{P}_{sup}(t, 0.05, 55, f)]$.

L'objectif est d'estimer la RUL en utilisant les résultats du pronostic. On considère pour cet exemple le seuil $\pi_{RUL} = 0.65$. cette valeur satisfait les conditions $(\tau_{end} + \delta) \geq \hat{P}_{sup}^{-1}(0.65, 0.05, 55, f)$ et $\rho \leq \pi_{RUL}$ ($143 + 55 \geq 190.5$ et $0.05 \leq 0.65$). La Proposition 4.7 est utilisée pour obtenir un encadrement de la valeur de la RUL. On obtient ainsi $(143 + RUL) \in [\hat{P}_{sup}^{-1}(0.65, 0.05, 55, f), \hat{P}_{inf}^{-1}(0.65, 0.05, 55, f)]$ et finalement $RUL \in [47.5, 55]$. Ce résultat est conforté par la simulation qui nous fournit une estimation ponctuelle de la RUL = 51.95. Cette valeur est effectivement incluse dans l'intervalle calculé.

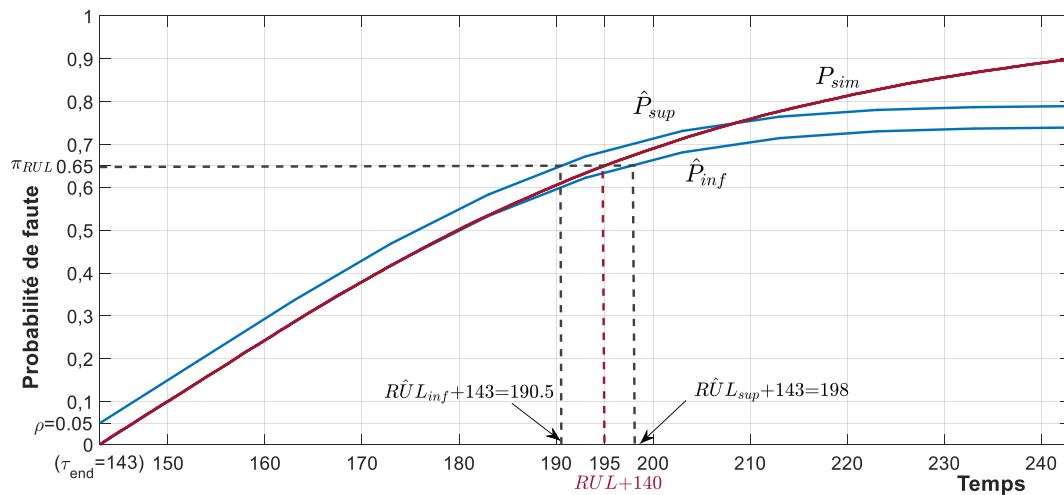


Figure 4.10. Estimation de la RUL

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au pronostic des SED. Cette problématique a suscité un intérêt croissant au cours de ces dernières années. Dans notre cas, les RdPS partiellement mesurés sont exploités pour modéliser le système et ses capteurs. Ce modèle inclut le comportement dysfonctionnel du système. Dans un premier temps, nous avons présenté un calcul de l'estimation d'état du système en fonction des mesures datées (Ammour et al. 2016a; Ammour et al. 2017d). Il s'agit de déterminer l'ensemble des marquages qui coïncident avec les mesures ainsi que leurs probabilités associées. Nous avons pu montrer l'importance de la prise en compte des dates de mesures pour caractériser l'état courant du système. Par la suite, les comportements futurs possibles du système ont été analysés dans le but de prédire l'occurrence des défauts. Deux méthodes de pronostic ont été présentées : la première est basée sur un nombre fixe d'événements futurs. Cette méthode est notée l_{max} -pronostic (Ammour et al. 2016b; Ammour et al. 2017c). La deuxième approche est basée

sur deux paramètres : l'horizon de pronostic et un seuil de l'erreur d'estimation. Cette méthode est notée (ρ, δ) -*pronostic* (Ammour et al. 2017b) et garantit une majoration de l'erreur d'estimation en fonction du paramètre δ . Les deux méthodes ont pour but d'estimer la probabilité d'occurrence d'une faute sur un intervalle de temps futur. Celles-ci ont été comparées en termes de complexité et d'erreur d'estimation (Ammour et al. 2017a) et les avantages et inconvénients de chacune d'elles ont été signalés. Enfin, le résultat du pronostic est exploité pour l'évaluation de la *durée de vie résiduelle* d'un système modélisé avec un RdPS partiellement mesuré incluant son processus de défaillance (Ammour et al. 2017d).

Chapitre 5. Application à un système de distribution et de tri

5.1. Introduction	111
5.2. Description et modélisation du système.....	111
5.3. Diagnostic des fautes.....	114
5.4. Pronostic des fautes.....	119
5.5. Estimation de la durée de vie résiduelle	122
5.6. Conclusion.....	126

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de tester et d'illustrer par la simulation les approches développées au cours de cette thèse. Pour ce faire, on considère un système de distribution et de tri modélisé par un RdPS partiellement mesuré. Le modèle simplifié que nous proposons inclut le fonctionnement normal et le fonctionnement dysfonctionnel du système. Dans un premier temps, nous allons calculer les probabilités des fautes en fonction des mesures datées pour évaluer les performances de notre approche de diagnostic. Nous allons ensuite nous intéresser au pronostic de ces fautes. Une estimation d'état est obtenue en fonction d'une série de mesures datées pour appliquer ensuite notre approche de pronostic. Enfin, nous complétons le modèle pour inclure le processus de dégradation du système et évaluer sa durée de vie résiduelle. Les programmes et les calculs sont réalisés avec MATLAB®.

5.2. Description et modélisation du système

Les systèmes de distribution et de tri sont utilisés dans les chaînes manufacturières, ou logistiques. Ils servent à déplacer des éléments tels que des pièces, des colis ou encore des bagages et à les trier en fonction de leurs caractéristiques (poids, destination, type...). Des opérations peuvent être effectuées sur ces éléments au cours de leur acheminement (assemblage, étiquetage, palettisation...). Ces systèmes sont étudiés, avec un certain niveau d'abstraction, comme des SED. En effet, leur dynamique est régie par l'occurrence d'événements (arrivée d'un produit, positions des actionneurs, sens de

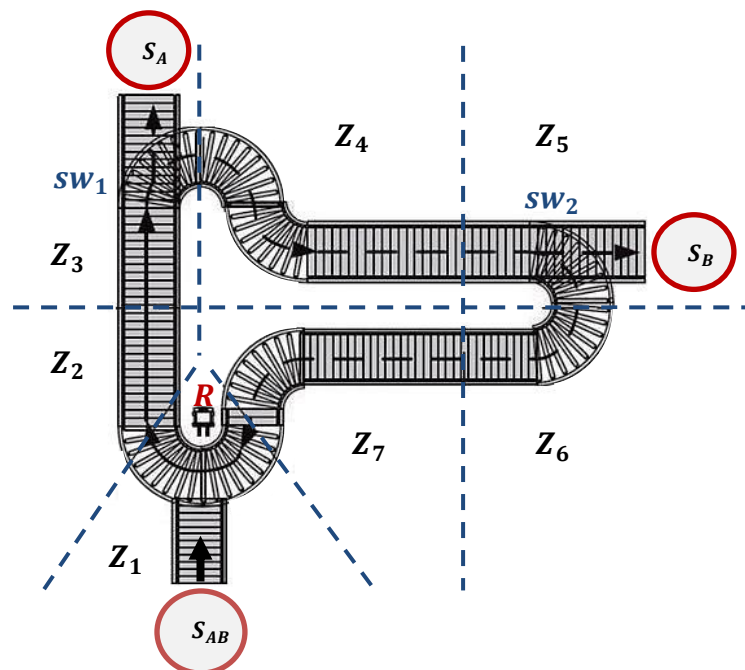


Figure 5.1. Schéma du système de distribution et de tri (Dotoli et al. 2011)

marche des convoyeurs...). Les méthodes issues des SED sont donc bien adaptées pour l'analyse de ce type de systèmes.

Le système considéré dans ce chapitre est similaire à celui étudié dans les travaux de (Dotoli et al. 2011; Lefebvre 2014b). La Figure 5.1 représente un schéma de ce système. Il est constitué d'un convoyeur sur lequel se déplacent les produits à trier. Ces derniers sont de deux types A et B. Le convoyeur est divisé en 7 zones dans lesquelles certaines opérations peuvent être réalisées. Les produits sont issus de la zone de stockage principale S_{AB} (zone 1). Les produits A sont acheminés vers la zone de stockage S_A (zone 3) et les produits B sont acheminés vers la zone de stockage S_B (zone 5). Pour déplacer chaque produit vers sa zone de destination, le convoyeur dispose de deux commutateurs sw_A et sw_B destinés à orienter respectivement les éléments A et B. Le capteur R est un lecteur qui permet de distinguer le type de produit entré dans le convoyeur et envoie cette information au superviseur qui active le commutateur approprié pour déplacer le produit. Lorsqu'un produit est distribué, un nouveau produit peut être chargé sur le convoyeur pour être distribué.

Le modèle RdPS simplifié du système de distribution et de tri considéré est représenté sur la Figure 5.2. Ce modèle représente à la fois le comportement nominal et le comportement dysfonctionnel du système. Le comportement nominal est représenté par les transitions T_1 à T_{10} . La place P_1 représente la zone de stockage principale S_{AB} à partir de laquelle les produits non triés arrivent. Les places P_2 à P_7 modélisent une présence du produit dans la zone associée Z_2 à Z_7 et les transitions T_3 à T_8 représentent le passage du produit d'une zone à une autre. La place P_8 signifie qu'un produit peut être chargé pour

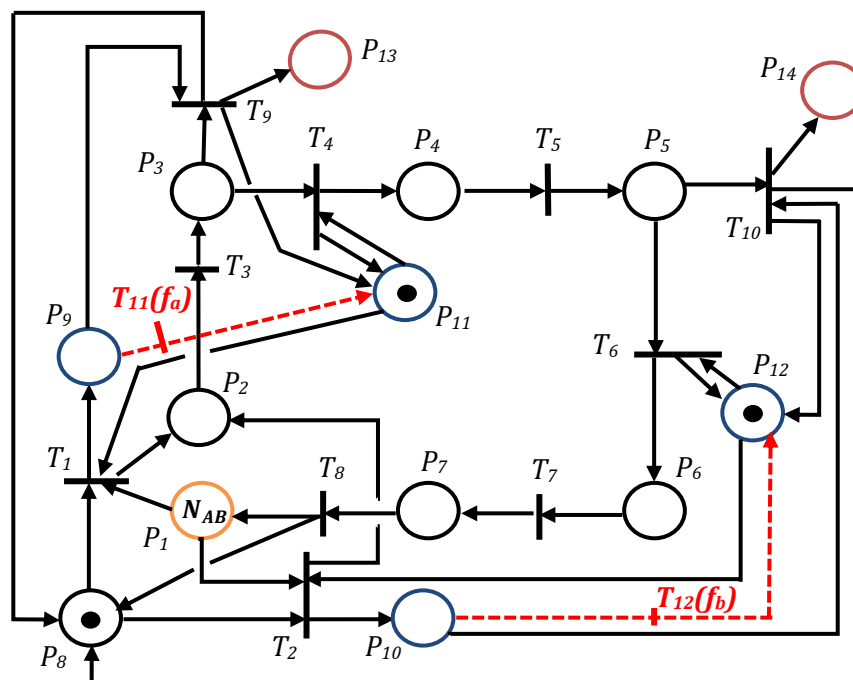


Figure 5.2. Modèle RdPS du système de distribution et de tri

être distribué. Les couples de places (P_9, P_{11}) et (P_{10}, P_{12}) sont respectivement associés aux états des commutateurs sw_1 et sw_2 (activé/désactivé). Enfin, les places P_{13} et P_{14} sont respectivement les zones de destination des produits A et B et les transitions T_9 et T_{10} représentent l'acheminement d'un produit dans chacune de ces zones. Le TABLEAU 5.1 précise la signification des différentes places et transitions du modèle. Le marquage initial du réseau est représenté sur la Figure 5.2. Il est supposé connu et il est donné par $M_I = N_{AB}P_1, 1P_8, 1P_{11}, 1P_{12}$. Cela signifie qu'il y a N_{AB} produits à trier et à distribuer, que le convoyeur est prêt à charger un produit et que les deux commutateurs sont désactivés.

TABLEAU 5.1. Signification des places et des transitions du RdPS de la Figure 5.2

Element	Signification
P_1	Nombre de produits dans la zone de stockage principale (Z_1)
$P_2 - P_7$	Produit dans les zones $Z_2 - Z_7$
P_8	Un nouveau produit peut être chargé
$P_9 - P_{10}$	Commutateur sw_1 (resp. sw_2) est activé
$P_{11} - P_{12}$	Commutateur sw_1 (resp. sw_2) est désactivé
$P_{13} - P_{14}$	Zones de distribution $S_A - S_B$
$T_1 - T_2$	Produit A (resp. B) est chargé
$T_3 - T_8$	Opération dans les zones $Z_2 - Z_7$ terminée
$T_9 - T_{10}$	Le produit est distribué dans S_A (resp. S_B)
T_{11}	Faute f_a : désactivation intempestive de sw_1
T_{12}	Faute f_b : désactivation intempestive de sw_2

Quand un produit de type A est sélectionné (franchissement de la transition T_1), le commutateur sw_1 est activé (modélisé par un jeton dans P_9). Lorsque T_3 est tirée après la fin de l'opération réalisée en zone 2 (place P_2), la transition T_9 est sensibilisée (au lieu de la transition T_4) et ceci permet de délivrer le produit A dans S_A (ajout d'un jeton dans P_{13}). De la même manière, quand un produit de type B est sélectionné (franchissement de T_2), le commutateur sw_2 est activé (modélisé par un jeton dans P_{10}) pour acheminer le produit B vers la zone de stockage S_B . Des opérations sont réalisées dans les zones 2,3,4 et 5 avant l'acheminement du produit.

Dans cette application, on considère deux fautes f_a et f_b qui affectent les commutateurs sw_1 et sw_2 . Ces deux fautes sont respectivement associées aux transitions T_{11} et T_{12} ($\mathcal{F}(T_{11}) = f_a, \mathcal{F}(T_{12}) = f_b$). La faute f_a (respectivement f_b) survient lorsque le commutateur sw_1 (respectivement sw_2), activé par la commande pour l'acheminement d'un produit vers la zone de stockage appropriée, se désactive intempestivement avant de diriger le produit vers la bonne destination. Lorsque l'une des fautes survient, le produit en cours d'acheminement est renvoyé vers la zone de stockage initiale S_{AB} . L'objectif est, dans un premier temps, d'appliquer les approches développées pour le diagnostic et le pronostic de ces deux fautes sur ce système de distribution et de tri.

5.3. Diagnostic des fautes

On s'intéresse au diagnostic des deux fautes f_a et f_b du système de distribution et de tri. Pour cela, on suppose que les dynamiques du système et celles des fautes sont connues. Elles sont données par le vecteur des taux de franchissement suivant $\mu = (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 3\ 6\ 0.3\ 0.5)^T (U.T)^{-1}$ (où U.T est exprimé en minutes). Notons que les taux des transitions modélisant les fautes sont délibérément exagérés dans le but de générer un plus grand nombre de fautes et d'illustrer plus facilement les performances de notre approche de diagnostic. Deux configurations de capteurs du système de distribution et de tri sont considérées. Pour chaque configuration, des simulations sont réalisées et les probabilités d'occurrences des fautes sont calculées.

- **Configuration 1 :**

On suppose la configuration de capteurs donnée par la fonction de labélisation et la matrice de mesure des marquages suivantes :

$$\mathcal{L}(T_1) = e_1, \mathcal{L}(T_2) = e_2, \mathcal{L}(T_j) = \varepsilon \text{ pour } j = 3, \dots, 12$$

$$H = [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

Cela signifie que l'information renvoyée par le capteur R sur le type de produit chargé

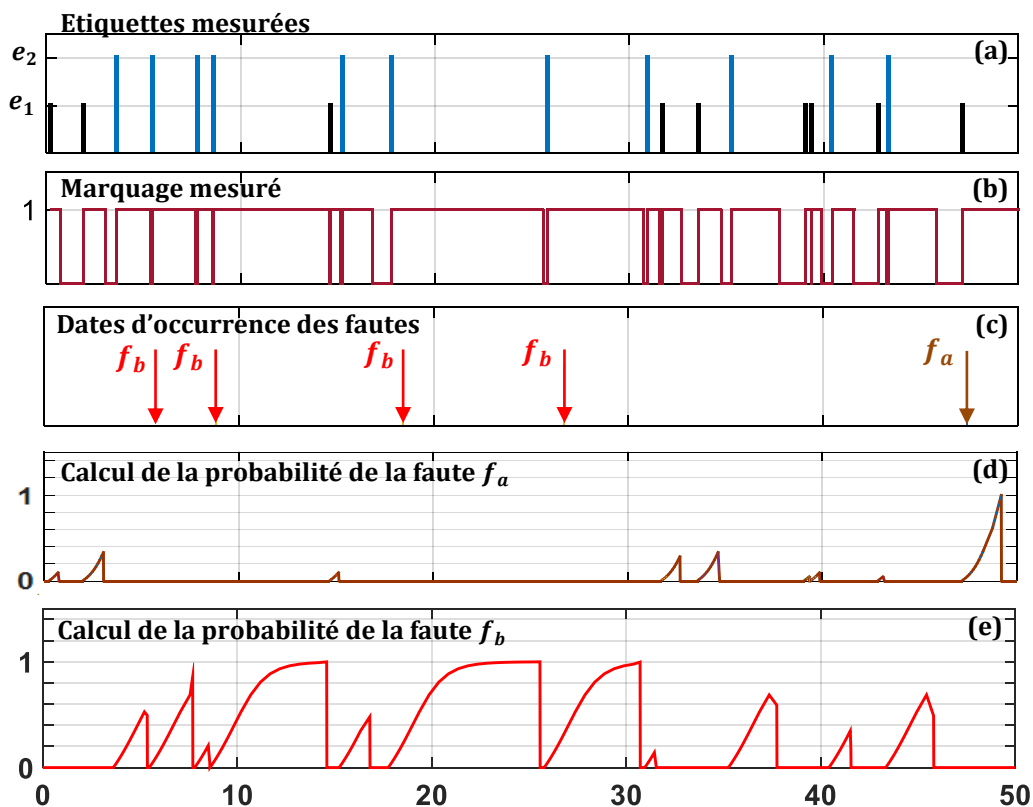


Figure 5.3. Diagnostic des fautes f_a et f_b sur les 20 premiers produits distribués

est connue. Ainsi, la détection d'une étiquette e_1 (respectivement e_2) nous permet de déduire qu'un produit A (respectivement B) a été chargé sur le convoyeur. De plus, le marquage mesuré donné par la matrice H et qui correspond à la somme des marquages $M(P_2) + M(P_3) + M(P_4) + M(P_5) + M(P_6) + M(P_7)$ nous renseigne sur la présence d'un produit en cours d'acheminement sur le convoyeur. En effet, si cette somme est égale à 1, alors un produit est en cours d'acheminement. Il n'est cependant pas possible de connaître, suivant cette mesure, la position du produit ou si celui-ci a bien été distribué ou encore si une erreur s'est produite.

Pour évaluer les performances de notre approche de diagnostic, nous considérons un scénario où 10^3 produits sont déplacés par le système et où des défauts surviennent selon les paramètres des densités de probabilité définis précédemment. Le marquage initial est donc caractérisé par $M(P_1) = N_{AB} = 10^3$. Sur la [Figure 5.3](#), les résultats obtenus pour le déplacement des 20 premiers produits sont représentés en fonction du temps (exprimé en minutes). Les étiquettes et le marquage mesuré sont représentés respectivement sur la [Figure 5.3.\(a\)](#) et la [Figure 5.3.\(b\)](#). Le système a traité 20 produits et a donc effectué 20 cycles. On désigne par cycle le traitement d'un produit (un cycle démarre lorsqu'un produit est chargé et se termine quand il est soit distribué soit retourné à la zone de stockage initiale). On peut constater l'occurrence d'une seule faute f_a et de quatre fautes f_b durant les 20 cycles qu'a effectués le système (ce nombre important d'occurrences des fautes est dû au choix des taux de franchissement élevés des transitions correspondantes). Ces occurrences des fautes pour le scénario simulé sont représentées sur la [Figure 5.3.\(c\)](#).

L'évolution de la probabilité d'occurrence des fautes f_a et f_b est représentée sur les [Figure 5.3.\(d\)](#) et [Figure 5.3.\(e\)](#). Cette probabilité est calculée en utilisant notre approche de diagnostic qui se base sur les mesures ainsi que sur leurs dates d'occurrence. La probabilité des fautes est remise à zéro après chaque cycle. En effet, on suppose qu'une décision quant à l'occurrence d'une faute va être prise à la fin de chaque cycle.

On note sur les [Figure 5.3.\(d\)](#) et [Figure 5.3.\(e\)](#) que l'occurrence des deux fautes est détectée à chaque fois avec une probabilité proche de 1. Il faut préciser que sans la prise en compte des dates des mesures, la détection des deux fautes n'est pas envisageable. En effet, si l'on considère un cycle qui renvoie une trajectoire de mesure non datée du type $MT = (0)e_i(1)\varepsilon(0)$ avec $i = 1,2$, des trajectoires normales et fautives sont compatibles avec ces mesures. Une faute ne peut donc être détectée à partir de la seule connaissance des étiquettes et marquages mesurés (non datés). À l'inverse, l'exploitation des dates des mesures permet d'évaluer la probabilité des comportements compatibles et de détecter l'occurrence des fautes.

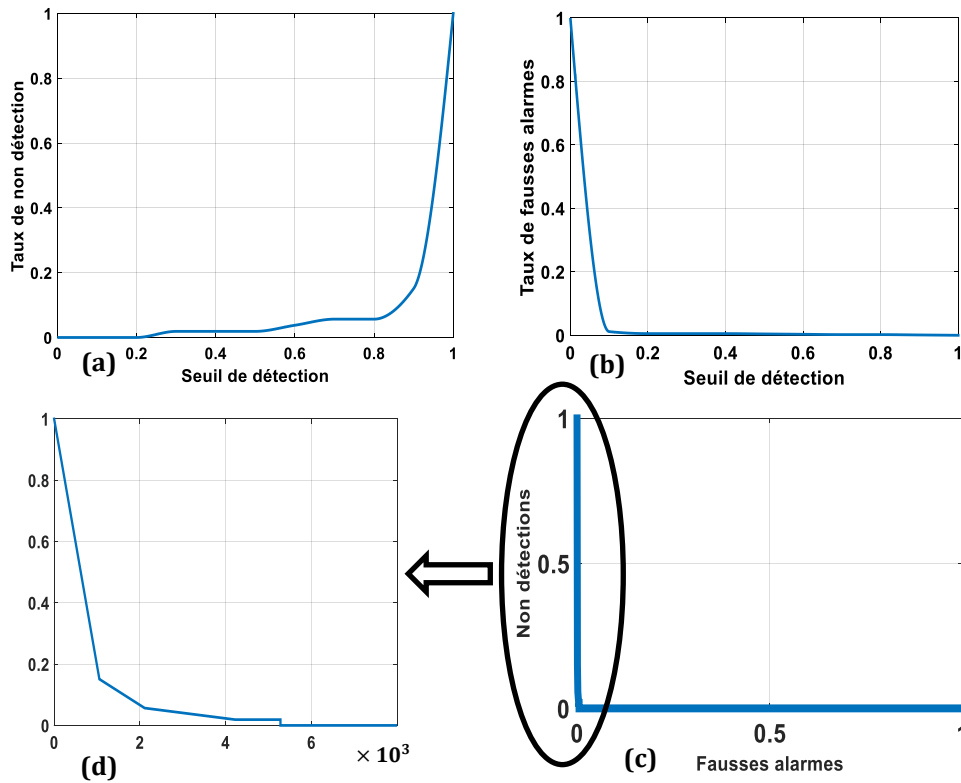


Figure 5.4. Performance du diagnostic de la faute f_a pour la première configuration de capteurs

On considère les taux de *non-détection* et de *fausses alarmes* pour réaliser une évaluation plus systématique des performances de notre approche de diagnostic. Pour cela, on définit un seuil de détection $s_D \in [0, 1]$. On considère qu'une faute f_α ($\alpha = a, b$) a eu lieu lorsque $P(f_\alpha) \geq s_D$ ($P(f_\alpha)$ étant la probabilité d'occurrence de la faute f_α évaluée avec la Proposition 3.4). Une non-détection correspond au cas où une faute s'est produite et que sa probabilité $P(f_\alpha)$ est inférieure à s_D ($P(f_\alpha) < s_D$). À l'inverse, une fausse alarme correspond au cas où $P(f_\alpha) \geq s_D$ alors que la faute ne s'est pas produite. On considère que la probabilité d'occurrence de chaque faute est calculée à la fin de chaque cycle pour un total de 10^3 produits traités. Les résultats des performances de notre approche de diagnostic pour f_a sont représentés sur la Figure 5.4. Les Figure 5.4.(a) et Figure 5.4.(b) représentent respectivement les taux de non-détection et de fausses alarmes en fonction du seuil. La Figure 5.4.(c) représente quant à elle le taux de non-détection en fonction du taux de fausses alarmes pour différents choix de seuils (La Figure 5.4.(d) est un agrandissement de la Figure 5.4.(c)). Ces trois courbes sont données pour la faute f_b sur la Figure 5.5. La courbe donnant le taux de non-détections en fonction des fausses alarmes est similaire à une courbe COR (Caractéristiques Opérationnelles de Réception) souvent utilisée dans la théorie de la détection du signal (Egan 1975) ainsi que dans le domaine du diagnostic des systèmes continus (Parate & Dandare 2013; Peimankar et al. 2017; Wheeler 2011). Dans ce dernier cas, ces courbes sont utilisées pour analyser les

performances du diagnostic et pour trouver le seuil permettant de garantir des taux de non-détections et de fausses alarmes spécifiques.

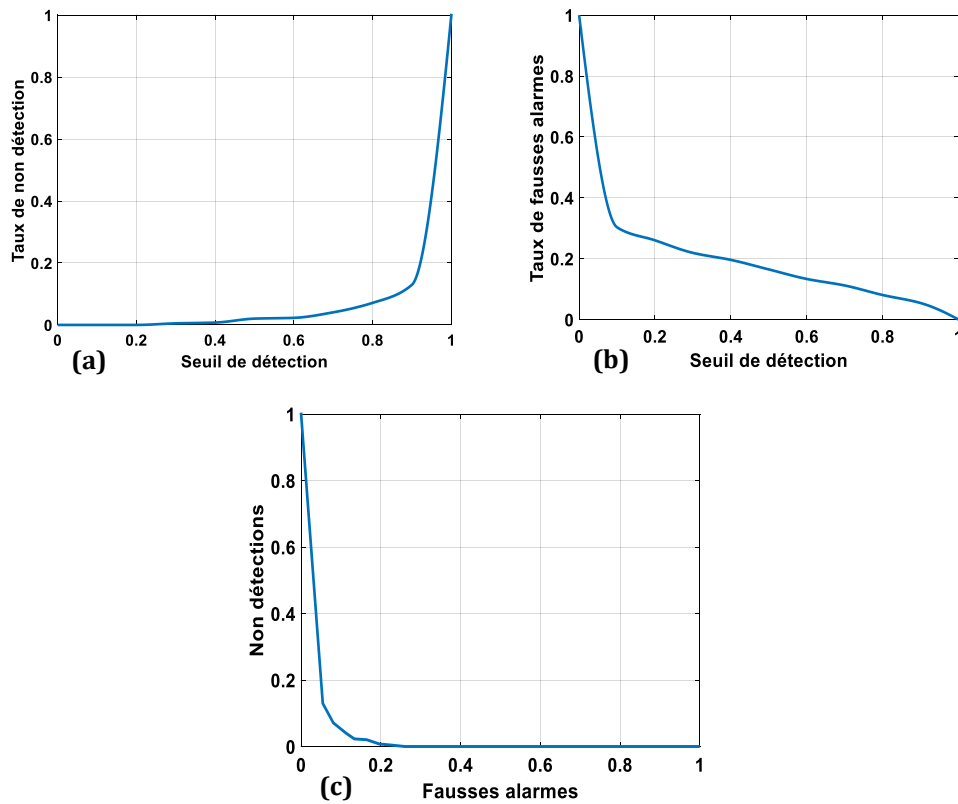


Figure 5.5. Performance du diagnostic de la faute f_b

Certains points de cette courbe COR sont importants : le point (0,0) est le point optimal où toutes les fautes sont détectées sans déclencher de fausses alarmes dans le cas où il n'y aurait pas eu de faute. Les points (1,0) et (0,1) correspondent respectivement à une émission permanente d'alarmes (avec ou sans occurrences de fautes) et à aucune émission d'alarmes (aucune détection qui implique un taux zéro de fausses alarmes). Le segment de droite passant par les points (1,0) et (0,1) correspond à une détection aléatoire. Ainsi, plus l'aire comprise entre ce segment et une courbe COR donnée est importante (c.-à-d. plus la courbe est proche du coude formé par les points (1,0), (0,0) et (0,1)), plus la méthode de diagnostic présente de bonnes performances.

On remarque que pour les deux fautes f_a et f_b , le taux de non-détection ne commence à augmenter qu'à partir de valeurs très élevées du seuil s_D ($s_D \geq 0.9$). Le taux de fausses alarmes augmente seulement pour des valeurs très faibles du seuil s_D ($s_D \leq 0.1$) pour la faute f_a . Pour la faute f_b , ce taux augmente pour les valeurs très faibles du seuil ($s_D \leq 0.1$) et se situe entre 0 et 30% pour des valeurs du seuil $s_D > 0.1$. Ces résultats sont confirmés par les deux courbes de non-détection en fonction des fausses alarmes (COR). L'approche de diagnostic présente des performances significatives dans ce cas étudié. Le taux de fausses alarmes de la faute f_b peut s'expliquer par le fait que le

comportement normal lié à la bonne distribution du produit B et le comportement fautif lié à l'occurrence de f_b présentent des similitudes dans les mesures fournies. Le choix du seuil de détection est donc important pour minimiser les taux de non-détection et de fausses alarmes.

- **Configuration 2**

On considère maintenant une deuxième configuration de capteurs donnée par :

$$\mathcal{L}(T_1) = \mathcal{L}(T_2) = e_1, \mathcal{L}(T_j) = \varepsilon \text{ pour } j = 3, \dots, 12$$

$$H = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Celle-ci se distingue, par rapport à la première configuration, par le fait que les produits ne sont plus discernables. Bien qu'une information soit obtenue lorsqu'un produit est chargé sur le convoyeur, celle-ci ne précise pas s'il s'agit du produit A ou du produit B. On considère ainsi, comme pour la première configuration, un traitement de 10^3 produits et l'on s'intéresse aux performances de notre approche de diagnostic pour la détection des fautes f_a et f_b .

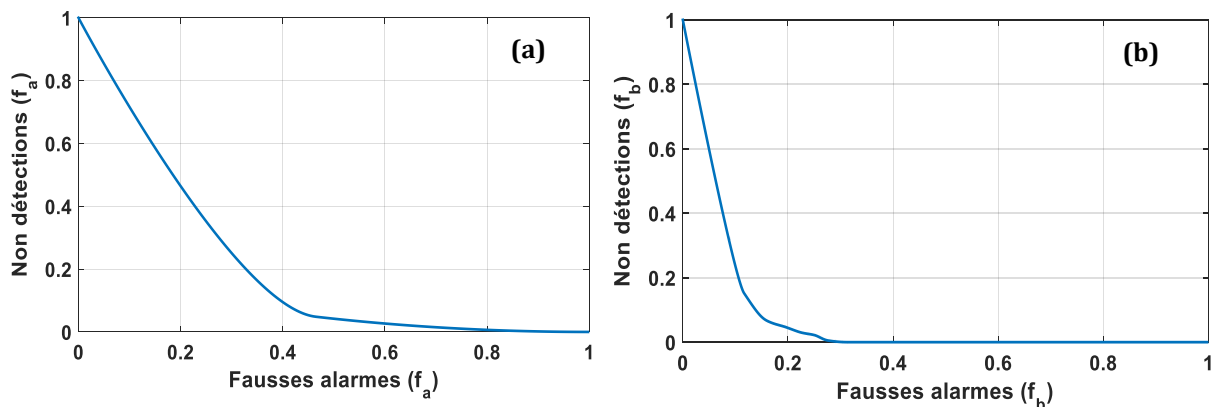


Figure 5.6. Performance du diagnostic pour la seconde configuration de capteurs

Les courbes COR relatives aux deux fautes f_a et f_b sont représentées sur la Figure 5.6. On remarque que les performances de notre approche de diagnostic se sont dégradées. Cette dégradation est plus significative pour la détection de la faute f_a (Figure 5.6.(a)) que pour la faute f_b (Figure 5.6.(b)). Elle résulte du fait de la perte de l'information sur le type de produit par rapport à la configuration 1. Cependant, et malgré la perte de cette information, l'approche de diagnostic distingue les comportements dysfonctionnels des comportements nominaux mais sans pouvoir associer le comportement anormal au commutateur qui l'a provoqué suivant la configuration considérée. Ceci peut être vérifié en considérant un seul type de faute. C'est-à-dire que l'on considère $f_a = f_b = f$ tel que

$\mathcal{F}(T_{11}) = \mathcal{F}(T_{12}) = f$. Dans ce cas, une alarme est émise à chaque fois qu'une faute de l'un des deux commutateurs se produit. La courbe COR relative à ce cas est donnée par la Figure 5.7. On confirme ainsi que l'approche de diagnostic permet de détecter l'occurrence de la faute. C'est le pouvoir de discernement entre les deux fautes qui a été impacté par cette nouvelle configuration de capteurs dans laquelle le type de produit n'est plus identifié.

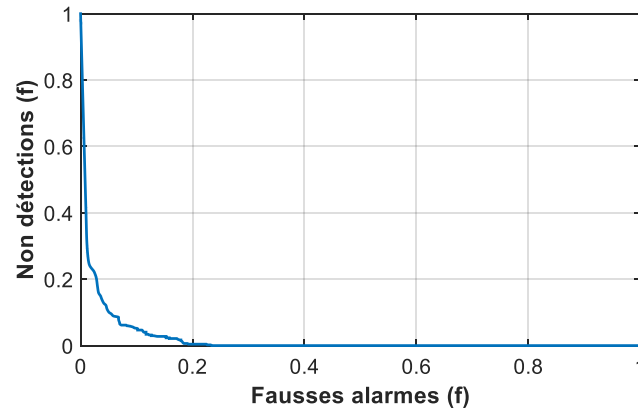


Figure 5.7. Performance du diagnostic pour la seconde configuration de capteurs dans le cas d'une faute unique ($f_a = f_b = f$)

Le TABLEAU 5.2 représente le temps de calcul du diagnostic pour chaque cycle pour les deux configurations. Les temps de calcul du diagnostic avec la configuration 2 sont plus importants que ceux de la configuration 1. Ceci est dû au fait qu'il y a plus de comportements compatibles avec les mesures par rapport à la configuration 1 car on ne distingue pas le type de produit chargé. Ces temps sont cependant largement inférieurs au temps moyen d'un cycle (~ 2 minutes).

TABLEAU 5.2. Temps de calcul du diagnostic en secondes pour chaque cycle (Intel Core i5 CPU 2.70 GHz).

	Configuration 1	Configuration 2
Trajectoires compatibles	0.020 s	0.025 s
Probabilité des deux fautes	1.83 s	4.95 s

5.4. Pronostic des fautes

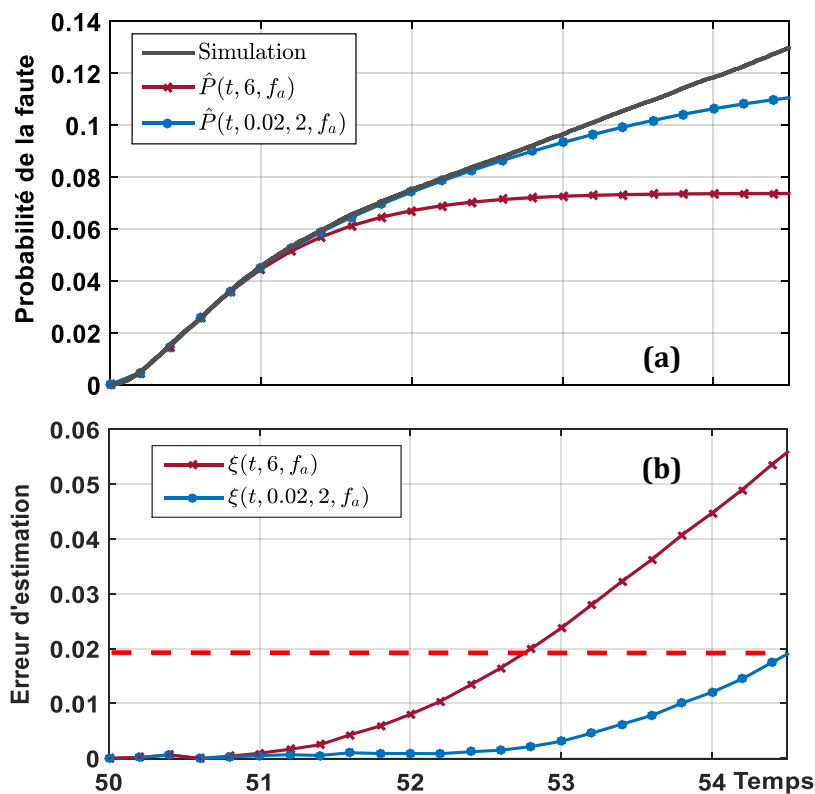
On suppose le modèle du système de distribution et de tri avec le même taux de franchissement des transitions $= (1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 4\ 3\ 6\ 0.3\ 0.5)^T (U.T)^{-1}$. L'objectif est d'exploiter les approches de pronostic développées au cours de notre étude pour la prédiction des fautes. Pour cela, on suppose la trajectoire de mesure représentée sur la Figure 5.3.(a) et la Figure 5.3.(b) représentant les étiquettes et marquages mesurés. Cette trajectoire est obtenue à partir du marquage initial $M_I = 10^3 P_1, 1P_8, 1P_{11}, 1P_{12}$

TABLEAU 5.3. Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 5.2.

Etat actuel possible	Probabilité de l'état
$M_1 = 988P_1, 1P_8, 1P_{11}, 1P_{12}, 8P_{13}, 4P_{14}$	0.52
$M_2 = 989P_1, 1P_8, 1P_{11}, 1P_{12}, 8P_{13}, 3P_{14}$	0.48

dans l'intervalle de temps $[0, 50]$ U.T. La première étape pour le pronostic des fautes consiste à réaliser une estimation d'état à partir des mesures datées. Cette estimation est donnée par le TABLEAU 5.3.

À partir de cette estimation d'état, les deux méthodes de pronostic développées dans notre étude sont utilisées pour évaluer la probabilité d'occurrence future des deux fautes. Une estimation $\hat{P}(t, 6, f_\alpha)$ est ainsi obtenue en utilisant l'approche l_{max} -pronostic avec une valeur arbitraire de $l_{max} = 6$. Une autre estimation $\hat{P}(t, 0.02, 2, f_\alpha)$ est quant à elle obtenue en utilisant l'approche (ρ, δ) -pronostic avec $\rho = 0.02$ et $\delta = 2$ (le système réalise en moyenne un cycle toutes les 2 minutes, le pronostic est donc réalisé sur un cycle). Ces deux estimations sont représentées sur la Figure 5.8.(a) pour la faute f_a et sur la Figure 5.9.(a) pour la faute f_b . Pour illustrer ces résultats, un nombre $N_s = 10^5$ de continuations à partir des marquages estimés est obtenu par simulation. Pour chaque continuation qui contient une faute f_a ou f_b , la date d'occurrence de la faute est enregistrée dans un fichier de données à partir duquel la fonction de répartition de la date d'occurrence est estimée. Les résultats de simulation sont représentés sur la Figure 5.8.(a) pour la faute f_a et sur la Figure 5.9.(a) pour la faute f_b . Pour évaluer les

Figure 5.8. Pronostic de la faute f_a

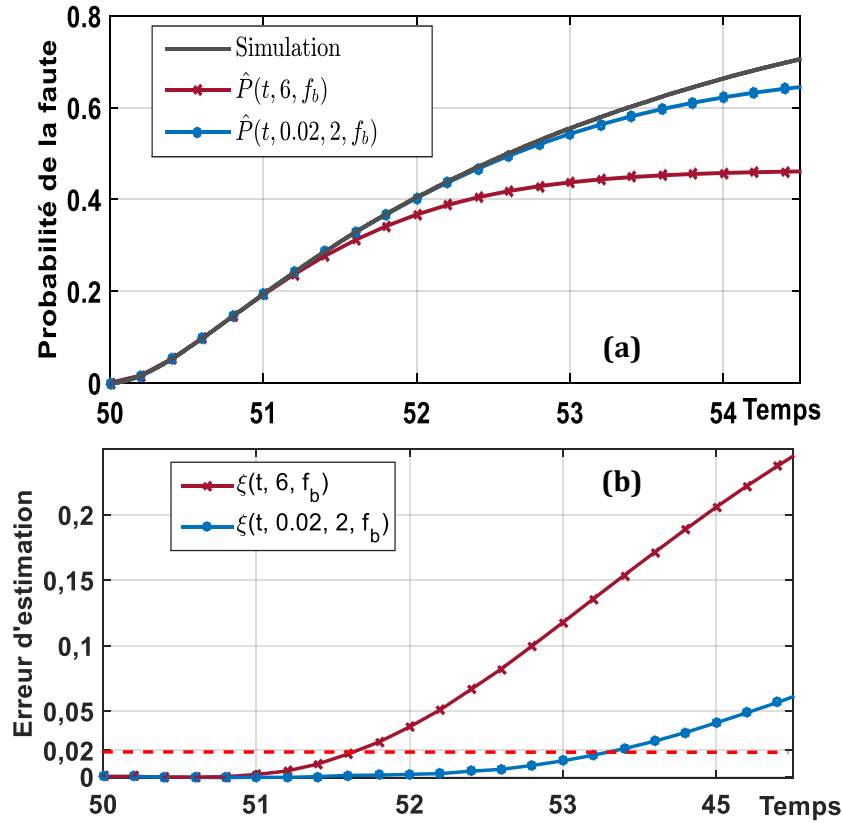


Figure 5.9. Pronostic de la faute f_b

estimations de pronostic obtenues, on s'intéresse aux erreurs d'estimation (écart entre l'estimation de la probabilité et les résultats de simulation pour chaque approche).

Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 5.8.(b) pour la faute f_a et sur la Figure 5.9.(b) pour la faute f_b . On retrouve alors qu'en utilisant l'approche (ρ, δ) -pronostic, l'erreur d'estimation $\xi(t, 0.02, 2, f_\alpha) \leq 0.02$ quand $t \leq 50 + \delta$ ($t \leq 52$) pour $\alpha = \{a, b\}$. De plus, l'erreur reste inférieure à cette valeur au-delà de l'horizon $\delta = 2$ (jusqu'à $t = 54.5$ pour la faute f_a et jusqu'à $t = 53.2$ pour f_b). L'estimation $\hat{P}(t, 6, f_\alpha)$ obtenue avec l'approche l_{max} -pronostic ne garantit quant à elle aucune majoration de l'erreur d'estimation. Par exemple si l'on considère la même borne d'erreur $\rho = 0.02$, la condition $\xi(t, 0.02, 2, f_\alpha) \leq 0.02$ quand $t \leq 52$ est satisfaite seulement pour f_a et non pour f_b .

L'approche (ρ, δ) -pronostic présente l'avantage d'une erreur d'estimation bornée sur un horizon de temps spécifié contrairement à l'approche l_{max} -pronostic. Cependant, comme nous pouvons le constater sur le TABLEAU 5.4, les temps de calcul sont importants pour l'approche (ρ, δ) -pronostic par rapport à l'approche l_{max} -pronostic. Ceci est dû aux tests de probabilité lors de la recherche des séquences futures ainsi que le nombre important de continuations prises en compte pour la garantie de la borne sur les erreurs d'estimation. Néanmoins, les temps de calcul restent inférieurs à l'horizon de pronostic choisi ($\delta = 2$ minutes), permettant ainsi une prédiction des défauts sur l'ensemble du cycle en cours.

TABLEAU 5.4. Temps de calcul en secondes (Intel Core i5 CPU 2.70 GHz).

	l_{max} -pronostic	(ρ, δ) -pronostic
Calcul des séquences futures se terminant par les deux fautes	0.008 s	1.06 s

5.5. Estimation de la durée de vie résiduelle

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation de la durée de vie résiduelle avec l'approche développée au cours de cette thèse. Pour ce faire, on considère un modèle adapté du système de distribution et de tri. Plus précisément, ce modèle contient le processus de défaillance lié à une panne du commutateur sw_1 . Ainsi, le système est en panne quand le commutateur sw_1 est définitivement bloqué. La probabilité de ce blocage augmente avec le nombre de fautes du commutateur. La Figure 5.10 représente le RdPS partiellement mesuré du système. Le modèle de la Figure 5.2 a été modifié et simplifié pour inclure le processus de défaillance. Ainsi, à chaque fois que le commutateur se désactive (franchissement de T_9) avant de diriger un produit A, le marquage de la place P_{13} augmente et le degré de validation (et donc la probabilité de franchissement) de la transition T_{10} augmente elle aussi. Quand T_{10} est tirée au moins une fois, le prochain produit A à déplacer sensibilise la transition T_{11} . Si cette dernière est tirée (au lieu de T_3 ou T_9) la défaillance notée f et associée à la transition T_{11} se produit. Le commutateur sw_1 est ainsi totalement bloqué et le franchissement de T_3 ou T_9 n'est plus possible. Le système est alors dans un état de panne. On note que ce même processus peut être considéré pour le commutateur sw_2 . Le modèle a aussi été simplifié en diminuant le nombre de zones (et donc le nombre de places). La signification des places et transitions est donnée par le TABLEAU 5.5.

TABLEAU 5.5. Signification des places et des transitions du RdPS de la Figure 5.10

Element	Signification
P_1	Nombre de produits dans la zone de stockage principale
$P_2 - P_5$	Produit dans les zones $Z_2 - Z_5$
P_6	Un nouveau produit peut être chargé
$P_7 - P_8$	Commutateur sw_1 (resp. sw_2) est activé
$P_9 - P_{10}$	Commutateur sw_1 (resp. sw_2) est désactivé
$P_{11} - P_{12}$	Zones de distribution produit A et B
$P_{13} - P_{15}$	Processus de dégradation
$T_1 - T_2$	Produit A (resp. B) est chargé
$T_3 - T_6$	Opération dans les zones $Z_2 - Z_5$ terminée
$T_7 - T_8$	Le produit A (resp. B) est distribué
T_9	Faute f_a : désactivation intempestive de sw_1
$T_{10} - T_{11}$	Processus de défaillance, sw_1 totalement bloqué et le système est en panne

La dynamique du système ainsi que les paramètres du processus de panne sont supposés connus. Ils sont donnés par le vecteur $\mu = (3 2 1 4 5 6 7 8 0.8 0.8 0.7)^T$ T.U.⁻¹ où T.U. est donné en minutes. On suppose une instrumentation du système donnée par la fonction de labélisation $\mathcal{L}(T_1) = e_1$, $\mathcal{L}(T_2) = e_2$ et $\mathcal{L}(T_3) = \mathcal{L}(T_{10}) = e_3$ (les autres transitions étant silencieuses). Ceci signifie que le type de produit sélectionné est connu (étiquettes e_1 et e_2) et l'étiquette e_3 représente le tir de T_3 ou de T_{10} . La matrice de mesure du marquage est quant à elle donnée par :

$$H = ((0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)^T (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1)^T)^T$$

À partir de cette matrice, une information est obtenue lorsqu'un produit est en cours d'acheminement (somme des marquages de P_2 à P_5) ainsi qu'une information lorsque le système est en panne (le marquage de P_{15} est mesuré).

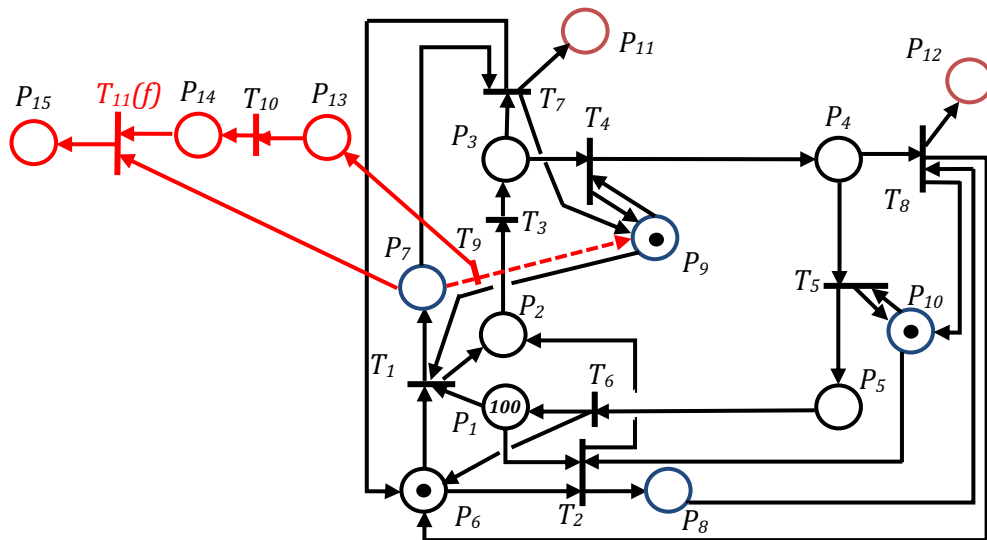


Figure 5.10. RdPS du système de distribution et de tri incluant (en rouge) le processus de dégradation du commutateur sw_1

À la date $\tau_0 = 0$, le marquage est supposé connu. Il est donné par $M = (100 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0)^T$. Une trajectoire de mesure est obtenue dans un intervalle de temps $[\tau_0, \tau_{end}] = [0, 22]$. Cette trajectoire est représentée sur la Figure 5.11. En se basant sur ces mesures, la première étape de notre approche consiste à calculer une estimation de l'état du système. Cette estimation reflète le niveau de dégradation du système. Ainsi, les trajectoires compatibles avec les mesures et leurs probabilités sont obtenues. L'estimation d'état est représentée sur le TABLEAU 5.6.

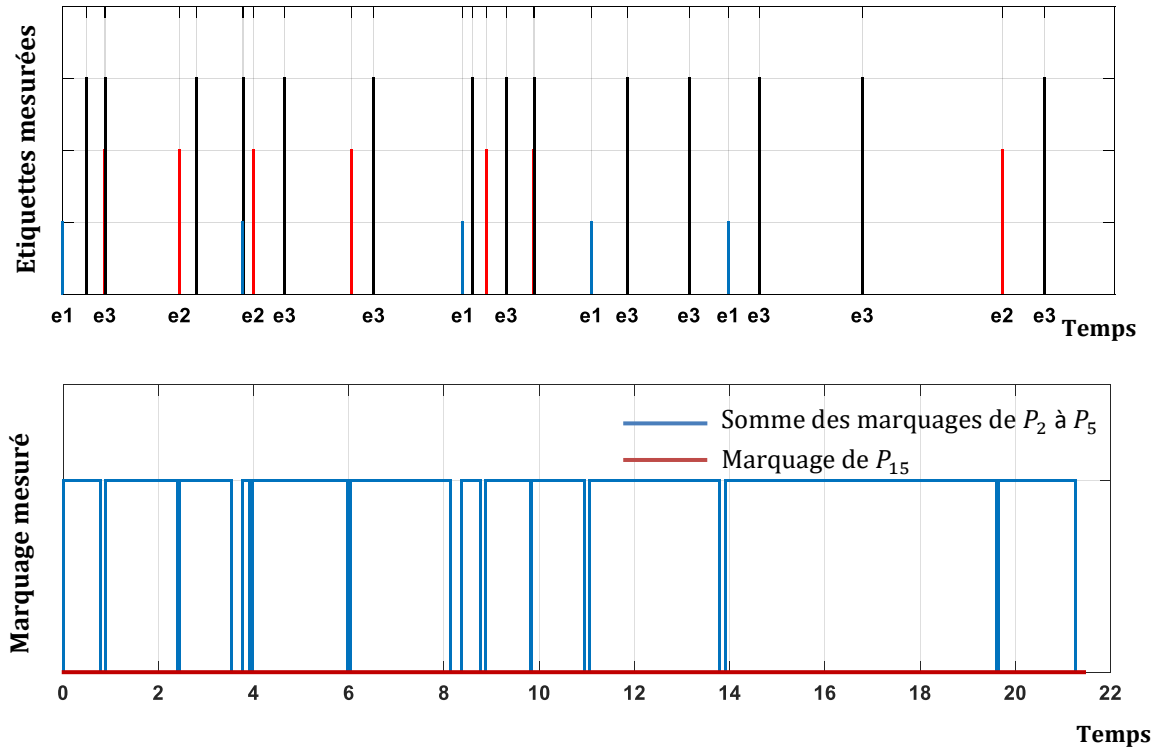


Figure 5.11. Trajectoire de mesure considérée pour l'estimation de la RUL.

À partir de l'estimation d'état, les comportements futurs du système sont considérés en calculant l'ensemble $Post_f(M, \rho, \delta)$ avec des paramètres $\rho = 0.05$ et $\delta = 5$ T.U. En utilisant cet ensemble, un encadrement de la probabilité d'occurrence future de la panne est obtenu grâce au calcul de $\hat{P}_{inf}(t, 0.05, 5, f)$ et $\hat{P}_{sup}(t, 0.05, 5, f)$. Pour conforter le résultat de cet encadrement, le système est simulé et un nombre $N_s = 10^4$ de continuations fautives à partir de l'estimation d'état est obtenu. Une fonction de répartition de la date d'occurrence de la faute est estimée à partir de cet ensemble de continuations. Les résultats de calcul de $\hat{P}_{inf}(t, 0.05, 5, f)$, $\hat{P}_{sup}(t, 0.05, 5, f)$ ainsi que ceux de la simulation notés $P_{sim}(t, f)$ (qui est une approximation de $P_{ex}(t, f)$) sont représentés sur la Figure 5.12. La Proposition 4.6 est confirmée car :

TABLEAU 5.6. Estimation d'état du RdPS partiellement mesuré de la Figure 5.8.

Etat actuel possible	Probabilité de d'état
$M_1 = 93P_1, 1P_6, 1P_9, 1P_{10}, 7P_{12}, 3P_{13}, 2P_{14}$	< 0.01
$M_2 = 92P_1, 1P_6, 1P_9, 1P_{10}, 7P_{12}, 2P_{13}, 2P_{14}$	< 0.01
$M_3 = 91P_1, 1P_6, 1P_9, 1P_{10}, 7P_{12}, 1P_{13}, 2P_{14}$	< 0.01
$M_4 = 90P_1, 1P_6, 1P_9, 1P_{10}, 7P_{12}, 0P_{13}, 2P_{14}$	0.99

$$P_{sim}(t, f) \in [\hat{P}_{inf}(t, 0.05, 5, f), \hat{P}_{sup}(t, 0.05, 5, f)] \text{ pour } t \leq 21.25 + 5$$

Pour estimer la RUL, on considère une valeur arbitraire du seuil de défaillance donné par $\pi_{RUL} = 0.55$. Ce seuil vérifie les conditions $(\tau_{end} + \delta) \geq \hat{P}_{sup}^{-1}(0.55, 0.05, 5, f)$ et $\rho \leq \pi_{RUL}$ données numériquement par $22 + 5 \geq 26.45$ et $0.05 \leq 0.55$. En appliquant la Proposition 4.5, on obtient $(22 + RUL) \in [\hat{P}_{sup}^{-1}(0.55, 0.05, 5, f), \hat{P}_{inf}^{-1}(0.55, 0.05, 5, f)]$ qui correspond à $RUL \in [4.45, 5.5]$. Ce résultat est confirmé par la simulation qui fournit un résultat ponctuel de la $RUL = 5.3$ T.U.

TABLEAU 5.7. Temps de calcul (secondes) pour l'estimation de la RUL.

	Temps de calcul (secondes) (Intel Core i5 CPU 2.70 GHz)
Trajectoires compatibles	9 s
Probabilité des trajectoires et estimation d'état	65 s
Détermination de la RUL	60 s

Le TABLEAU 5.7 représente les temps de calcul pour l'estimation de la RUL. Notons que dans notre cas, le calcul est basé sur une trajectoire de mesure. Ce temps augmente rapidement en fonction de la taille de cette trajectoire et des paramètres ρ et δ du pronostic. En conclusion, pour l'exemple considéré le temps de calcul de la RUL est du même ordre de grandeur que la RUL elle-même, ce qui n'est pas satisfaisant. Une des solutions pour améliorer le temps de calcul sera de mettre à jour l'estimation d'état ainsi que l'ensemble des trajectoires futures à chaque arrivée d'une mesure.

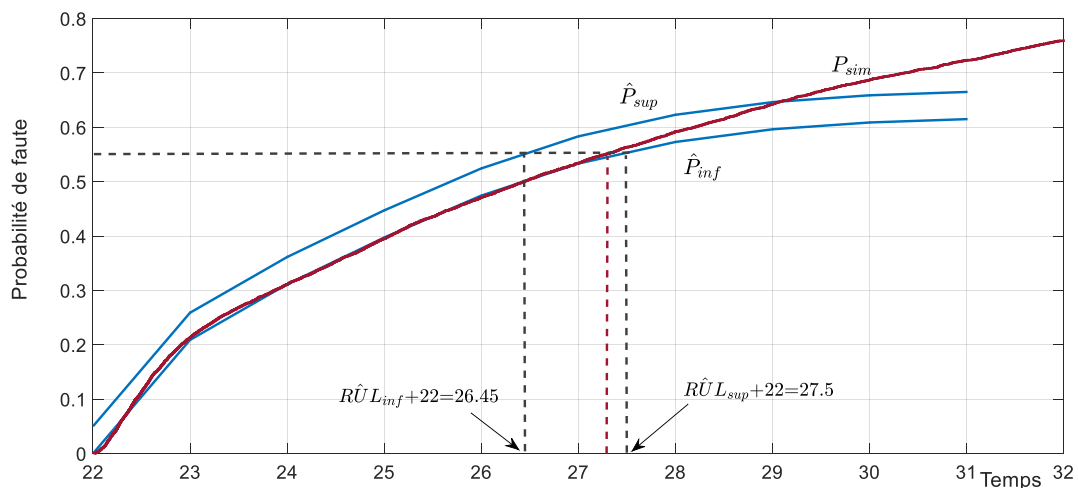


Figure 5.12. Estimation de la durée de vie résiduelle

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un exemple d'un système de distribution et de tri pour tester les approches développées au cours de cette thèse. Nous avons ainsi commencé par l'approche de diagnostic des fautes suivant deux configurations des capteurs de système. Cette approche présente de bonnes performances liées à l'exploitation des dates de mesures. Ces performances varient cependant selon la configuration considérée. Nous avons par la suite testé les deux approches de pronostic. Nous avons insisté sur l'intérêt de l'approche (ρ, δ) -pronostic qui garantit une erreur d'estimation bornée sur un horizon de temps défini. Cependant, elle présente une complexité importante par rapport à l'approche l_{max} -pronostic. Enfin, nous avons considéré un modèle qui intègre le processus de défaillance et nous avons estimé la durée de vie résiduelle du système en fonction d'une série de mesure datée. Un intervalle de temps incluant la RUL est obtenu. La méthode présente l'avantage de l'exploitation du modèle fonctionnel du système mais sa complexité augmente significativement notamment en fonction des paramètres ρ et δ .

Conclusion Générale & Perspectives

6.1. Conclusions

Le développement de méthodes et d'outils de surveillance des systèmes est une préoccupation majeure des industriels et de la communauté scientifique du domaine. Ce type d'outils permet de surveiller l'état de santé du système et de détecter les éventuels comportements anormaux de ce dernier. Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans ce contexte. Nous nous sommes intéressés à la surveillance des *Systèmes à Événements Discrets*. Les principales contributions de notre travail sont les suivantes :

- **Utilisation des réseaux de Petri stochastiques temporisés partiellement mesurés**

Nous avons développé une approche de surveillance des SED basée sur une extension de RdP. Le formalisme des RdP offre un grand pouvoir de modélisation des phénomènes complexes liés au fonctionnement du système, et ceci de manière compacte par rapport aux automates à états finis. Ils sont modulaires et donc parfaitement adaptés aux systèmes actuels composés de plusieurs modules qui interagissent entre eux. Ils sont aussi évolutifs dans le sens où ils peuvent facilement être mis à jour pour s'adapter aux changements que peut subir le système durant son cycle de vie (ajout de nouveaux composants ou modules, reconfiguration...). L'extension stochastique temporisée du formalisme considéré permet de prendre en compte les comportements aléatoires du système ainsi que les aspects temporels dès l'étape de la modélisation. De plus, le modèle considéré est partiellement mesuré et permet donc de représenter l'instrumentation du système. Du fait que l'on considère à la fois une mesure partielle des marquages et une détection partielle des événements, le modèle permet de représenter des informations hétérogènes qui peuvent aussi bien correspondre à des quantités mesurées ou bien à une détection des événements. Ceci rend possible la prise en compte d'une instrumentation composée de plusieurs types de capteurs.

- **Approche unifiée pour le diagnostic et le pronostic**

Les problématiques de diagnostic et de pronostic sont souvent étudiées séparément. Dans le cadre de cette thèse, nous avons proposé d'intégrer à la fois le diagnostic et le pronostic dans le cadre d'une approche analytique unifiée. Celle-ci est basée sur un même modèle fonctionnel du système qui inclut son comportement dysfonctionnel. Ceci

permet une plus grande compréhension du cycle de vie du système. Une combinaison des résultats du diagnostic et de pronostic peut aussi être envisagée. Par exemple, à travers l'exploitation des résultats du pronostic pour lever des ambiguïtés liées au diagnostic.

- **Exploitation efficace des mesures datées**

Pour être performant, un système de surveillance a besoin d'un maximum d'informations obtenues lors du fonctionnement du système. La façon dont il les exploite est aussi déterminante. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à l'exploitation d'une information qui est presque tout le temps accessible et qui est celle de la *date d'acquisition de chaque mesure*. Nous avons proposé, dans un premier temps, une méthode de *diagnostic des défauts*. Le diagnostic constitue une des activités principales d'un système de surveillance. Notre méthode tire profit de l'information temporelle et permet de calculer, grâce au modèle considéré, la probabilité d'occurrence d'un défaut en fonction des mesures et de leurs dates d'occurrence. Nous avons ensuite déduit une *estimation d'état* (probabilité des marquages qui coïncident avec les mesures et leurs probabilités associées) qui elle aussi dépend des dates des mesures. Nous avons exploité cette estimation pour le *pronostic des fautes*. Nous avons montré que la prise en compte des dates influence significativement les résultats du diagnostic et du pronostic. En effet, le pouvoir de discernement entre différents comportements qui coïncident avec les mesures est renforcé. Ceci rend possible la détection d'un comportement anormal synonyme d'une occurrence d'un défaut. Il rend possible aussi une estimation précise de l'état actuel du système pour le pronostic des défauts. Notre approche permet donc d'envisager un diagnostic/pronostic efficace avec un nombre réduit de capteurs. Ceci est primordial pour réduire le nombre de capteurs utilisés (ceci pour diverses raisons économiques, pratiques,...).

- **Datation des fautes**

Pour être performant, un système de surveillance ne doit pas se limiter à la seule détection du comportement anormal. Il doit aussi pouvoir donner le maximum d'informations sur ce dernier. Ainsi, nous avons proposé une méthode permettant de calculer la distribution de la date d'occurrence d'une faute détectée. Une telle information sur la date à laquelle le défaut a pu se produire est importante et permet d'obtenir le délai entre son occurrence et sa détection. Par exemple, les tâches réalisées et les services délivrés par le système entre ces deux dates (celle à laquelle la faute a eu lieu et celle où elle est détectée) peuvent ainsi être inspectés. D'une manière générale nous pensons que la datation des fautes présente un grand intérêt pour les problématiques de traçabilité et de maintenance.

- **Pronostic de défauts avec une garantie sur les erreurs d'estimation**

Un défaut non détecté (ou détecté tardivement) peut engendrer des conséquences allant de l'indisponibilité du système jusqu'aux catastrophes pouvant causer des dégâts

humains et matériels importants. Nous avons donc présenté une méthode pour le pronostic de la faute qui permet d'anticiper l'occurrence d'un défaut. L'approche se base sur les mesures datées et fournit dans un premier temps une estimation de l'état actuel du système. À partir de cette estimation, l'analyse des comportements futurs du système nous a permis de calculer la probabilité d'occurrence future de la faute. Cette probabilité est calculée sur un horizon de temps borné. Nous nous sommes focalisés sur l'erreur d'estimation en fonction de cet horizon. L'approche de pronostic proposée donne la possibilité à l'utilisateur de définir l'erreur d'estimation à ne pas dépasser sur un horizon de pronostic donné selon une approche analytique prouvée qui permet de garantir des marges d'erreur sur le résultat du pronostic. L'enjeu est de taille car un pronostic précis permettra de prendre les mesures préventives et correctives nécessaires avant l'apparition du défaut. Ces mesures permettront d'éviter des catastrophes et d'accroître à la fois la sécurité et la disponibilité du système.

- **Estimation de la durée de vie résiduelle du système :**

Dans le travail présenté, nous avons étendu l'approche de pronostic pour l'estimation de la *durée de vie résiduelle* du système. L'estimation de la RUL est souvent associée au pronostic. Elle représente la durée restante avant l'occurrence d'une défaillance qui mettrait le système hors service. Cette approche est basée sur un modèle de fonctionnement du système qui contient l'événement lié à l'occurrence de la défaillance. L'approche développée permet d'obtenir un intervalle incluant la RUL. Des mesures nécessaires peuvent ainsi être prises à temps afin d'allonger la durée de vie du système.

6.2. Perspectives

Plusieurs perspectives de recherche se dégagent au terme de cette thèse. Elles visent à améliorer et étendre les résultats obtenus. Parmi ces perspectives, on note deux points principaux : le premier point concerne le modèle utilisé. Une des limitations de celui-ci est d'avoir considéré que toutes les dates d'occurrence des événements suivent des lois exponentielles et qu'une faute est forcément liée à l'occurrence d'un événement. Le deuxième point concerne l'étude des deux propriétés de diagnosticabilité et de pronosticabilité.

A) Extension du modèle

Une première perspective serait d'étendre notre approche basée sur les RdPS partiellement mesurés au modèle réseaux de Petri stochastiques généralisés (RdPSG) partiellement mesurés. Un RdPSG (Marsan et al. 1994) est un réseau de Petri stochastique qui contient, non seulement des transitions avec des durées exponentielles (transitions temporisées), mais aussi des transitions avec des durées nulles (dites transitions immédiates). Le franchissement des transitions immédiates est prioritaire à celle des transitions temporisées. Lorsque deux ou plusieurs transitions immédiates

sont sensibilisées à la fois, c'est la technique de présélection qui est adoptée. Les RdPS classiques utilisés dans notre étude sont donc un cas particulier des RdPSG. Nous pensons qu'il est possible d'étendre notre approche de diagnostic et de pronostic de défauts à ce type de formalisme. La technique de recherche des trajectoires compatibles avec une trajectoire de mesure peut directement s'appliquer aux RdPSG puisqu'elle se base sur le modèle non temporisé sous-jacent. Cependant, il faudrait adapter le calcul des probabilités des trajectoires compatibles (pour le diagnostic) et celle des trajectoires futures (pour le pronostic) pour permettre la prise en compte des transitions immédiates. Ces dernières seront traitées différemment en fonction de la politique de présélection établie.

Une autre piste intéressante serait celle de l'étude d'autres types de défauts. Au cours de cette thèse, nous avons considéré que des fautes sont associées au franchissement de certaines transitions. D'autres types de défauts peuvent être considérés. On pense alors aux *motifs de défauts (ou de supervision)*. Un motif (Jeron et al. 2008; Gougam et al. 2017) peut correspondre à un ensemble d'événements particuliers. Cet ensemble d'événements peut être ordonné ou non. De plus, les événements correspondant à un motif peuvent se suivre directement ou ne pas se suivre directement (c.-à-d. autoriser d'autres événements à s'intercaler entre eux). Notons que les motifs permettent de représenter une large variété de comportements et que d'autres cas que ceux précédemment cités peuvent être considérés. Dans le cadre du diagnostic, notre approche permet d'obtenir les probabilités des trajectoires compatibles. Une recherche du motif défini a priori et associé à un défaut peut être réalisée en filtrant les séquences compatibles pour évaluer la probabilité d'occurrence de ce type de défaut. De la même façon, nous pensons qu'il est possible de rechercher ces motifs dans les comportements futurs du système pour envisager le pronostic de motifs de défauts.

Il serait aussi intéressant de considérer d'autres lois de probabilité que la loi exponentielle qui régit notre modèle. À ce titre, plusieurs extensions de RdPS qui considèrent des lois continues ou discrètes très générales existent. Ces extensions sont désignées par modèles RdPS non markoviens et plusieurs travaux s'intéressent à la modélisation et l'analyse des systèmes en utilisant ce type de formalisme (Bobbio et al. 1998; Trivedi et al. 1995; Haddad et al. 2006; Horváth et al. 2012; German 2000; Distefano et al. 2017). Il serait donc intéressant d'étendre notre approche de diagnostic et de pronostic à ce type de modèles afin d'étendre le champ d'application de l'approche développée. Des travaux récents au sein du laboratoire GREAH se sont penchés sur cette problématique en s'intéressant à ce type de modèles (Lefebvre 2017b; Lefebvre 2017a). Ils concernent le diagnostic de RdP temporels partiellement mesurés. Ce modèle est caractérisé par des intervalles de temps associés aux transitions où les durées de franchissement peuvent correspondre à différentes densités de probabilité (uniformes, triangulaires,...). Notons que le modèle de défaut considéré est de type *violation de contraintes temporelles*. En effet, à chaque transition est associé un intervalle de tolérance et le défaut survient lorsqu'une transition est franchie en dehors de cet

intervalle. Une thèse est en cours au sein du laboratoire et s'intéresse à cette problématique.

B) Etude des propriétés

Dans notre travail, nous avons abordé la question du diagnostic et du pronostic des SED en utilisant les RdPS partiellement mesurés. On s'est intéressé à l'évaluation des probabilités d'occurrence passée et future de la faute sans définir des seuils de détection. Comme nous l'avons évoqué au cours de cette thèse, de nombreux travaux s'intéressent aux problématiques de la diagnosticabilité et de la pronosticabilité (ou prédictabilité) des SED. Le but de la diagnosticabilité (resp. pronosticabilité) est de s'assurer que les fautes seront diagnostiquées (resp. prédites) dans tous les cas après un nombre suffisant et fini de mesures. Il serait intéressant d'étendre notre approche pour l'étude de ces deux problématiques. En effet, ceci permettra de vérifier que notre système est diagnosticable/pronosticable avant la mise en œuvre de notre approche de diagnostic/pronostic. C'est-à-dire qu'en définissant un seuil de probabilité, on sera certain, dans le cas du diagnostic, que la probabilité calculée avec notre approche dépassera ce seuil après un temps fini suivant l'occurrence de la faute. Et dans le cas du pronostic, la probabilité d'occurrence future de la faute dépassera ce seuil lorsque la faute arrivera certainement sur un horizon de temps donné. Nous avons mené une première réflexion sur ces problématiques. Nous allons brièvement présenter cette possibilité d'extension de notre approche à l'étude de ces propriétés en se focalisant sur les verrous à résoudre

- **Diagnosticabilité**

Pour la suite de notre travail, il serait intéressant d'étendre et de nuancer la propriété de diagnosticabilité pour tenir compte des dates de mesures. La diagnosticabilité est définie comme la capacité à discriminer un comportement fautif parmi des comportements nominaux en un temps fini suite à l'occurrence de la faute. Un système est diagnosticable s'il n'existe pas de séquence de mesures arbitrairement longue pour laquelle correspondent au moins un comportement fautif et un autre non fautif qui sont non discernables. Cette idée a été formulée dans les travaux de (Sampath et al. 1995). On

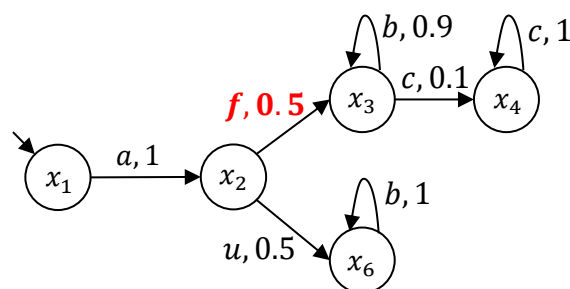


Figure 6.1. Exemple d'un automate à états finis

considère l'exemple de l'automate à états finis représenté sur la Figure 6.1 (sans tenir compte, dans un premier temps, des probabilités d'occurrence des événements). Il est composé d'un ensemble d'événements mesurés $\Sigma_o = \{a, b, c\}$ et d'un ensemble d'événements non mesurés $\Sigma_u = \{u, f\}$ avec f correspondant à l'événement faute. À partir d'une séquence $s = (afbbbb \dots)$, la séquence mesurée correspondante est donnée par $s^{obs} = (abbbbb \dots)$. Deux séquences coïncident avec ces mesures, l'une est fautive et donnée par $s_f = (afbbbb \dots)$ et l'autre non fautive et donnée par $s_n = (aubbbb \dots)$. Du fait que s peut-être arbitrairement longue, le système peut évoluer indéfiniment suite à l'occurrence de la faute sans jamais pouvoir la diagnostiquer. Le système n'est donc pas diagnosticable au sens de la définition établie par (Sampath et al. 1995).

On considère maintenant que l'automate est probabiliste (voir Section 1.2.1). Les probabilités d'occurrence des événements sont indiquées sur les arcs de l'automate de la Figure 6.1. On reprend la séquence $s = (afbbbb \dots)$ pour laquelle il n'est pas possible de diagnostiquer la faute f . On note cette séquence par $s = af(b)^n$ avec $(b)^n$ signifiant n occurrence de b . La probabilité d'occurrence de cette séquence est donnée par $P(s) = 1 \times 0.5 \times (0.9)^n$. Lorsque n augmente, la probabilité de cette séquence qui empêche de diagnostiquer la faute tend vers zéro et la probabilité d'occurrence de l'événement c , qui permet de diagnostiquer la faute, devient importante. L'automate qui n'était pas diagnosticable au sens de la définition de (Sampath et al. 1995) devient diagnosticable mais c'est une « diagnosticabilité probabiliste » notée *A-diagnosticabilité* dans (Thorsley & Teneketzis 2005). Plus tard, les auteurs de (Chen & Kumar 2015a) associent cette diagnosticabilité probabiliste à l'existence d'une méthode de diagnostic permettant de garantir des taux définis de *non détections* (occurrence d'une faute sans pouvoir la détecter) et de *fausses alarmes* (émission d'une alarme alors que la faute n'a pas eu lieu).

Etant donné que l'on considère dans notre étude le cas des systèmes stochastiques temporisés, la question est de savoir quel impact aurait une prise en compte des dates de mesures sur l'analyse de la diagnosticabilité d'un système ?

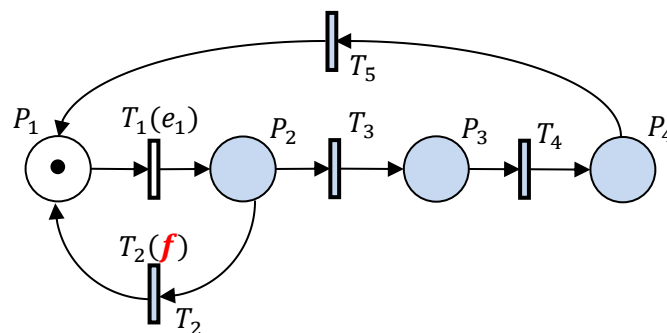


Figure 6.2. Exemple d'un RdPS partiellement mesuré

On considère l'exemple du RdPS partiellement mesuré de la [Figure 6.2](#) avec un marquage initial donné par $M_I = 1P_1$ et une configuration de capteurs donnée par les matrices $L = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ et $H = (1\ 0\ 0\ 0)$. La transition T_2 correspond à l'occurrence de la faute f (c.-à-d. $\mathcal{F}(T_2) = f$). Le vecteur des taux de franchissement est donné par $\mu = (1\ 1\ 1\ 0.1\ 1)^T$. Ce système n'est pas diagnosticable au sens de la définition de (Sampath et al. 1995). En effet, à chaque cycle du système correspondant à l'une des deux séquences $\sigma_f = T_1T_2(f)$ et $\sigma_{nf} = T_1T_3T_4T_5$ tirées à partir de M_I , le système fournit une même trajectoire mesurée donnée par : $MT = (1P_1)e_1(0P_1)\varepsilon(1P_1)$ (trajectoire obtenue lorsque les dates de mesures ne sont pas considérées). Du fait que σ_f contient la faute f et que σ_{nf} ne la contient pas, le système non temporisé n'est pas diagnosticable. On considère maintenant les dates de mesures et on simule le réseau pour obtenir un grand nombre de trajectoires de mesure temporisées de la forme $MT = 1P_1(\tau_0)e_1(\tau_1)0P_1(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)1P_1(\tau_2)$. Chaque trajectoire de mesure MT correspond à l'accomplissement d'un cycle du système. En utilisant la méthode de diagnostic développée au cours de cette thèse, on obtient un taux de détection de 92% et un taux de fausses alarmes de 3.2%. Si la diagnosticabilité du système est définie avec des taux de non détection et de fausse alarme qui ne devraient pas dépasser les 10%, par exemple, alors le système serait diagnosticable. Ces taux vont varier en fonction de la configuration des capteurs du système mais aussi des taux de franchissement des transitions. Il serait alors intéressant, à notre avis, d'étudier l'impact des dates de mesures sur l'étude de la diagnosticabilité des systèmes stochastiques temporisés. La difficulté serait de développer une approche permettant d'évaluer ces indicateurs en fonction des mesures possibles que l'on peut obtenir et des intervalles de temps qui peuvent séparer l'occurrence de ces mesures.

- **Pronosticabilité**

Les auteurs de (Genc & Lafortune 2009) se sont intéressés à la notion de prédictibilité (ou pronosticabilité). Celle-ci peut être définie comme étant la capacité de prédire l'occurrence de n'importe quelle faute après un nombre suffisant de mesures. Si l'on reprend l'exemple introduit dans la [Section 1.4.1](#) et qui est représenté sur la [Figure 6.3](#), il est possible de prédire l'occurrence de la faute f . En effet, on rappelle que l'acquisition de l'étiquette c indique que le système est dans l'état x_5 . À partir de cet état, le système évoluera inévitablement vers l'état x_7 et la faute se produira de manière certaine. Donc on dira que ce système est pronosticable.

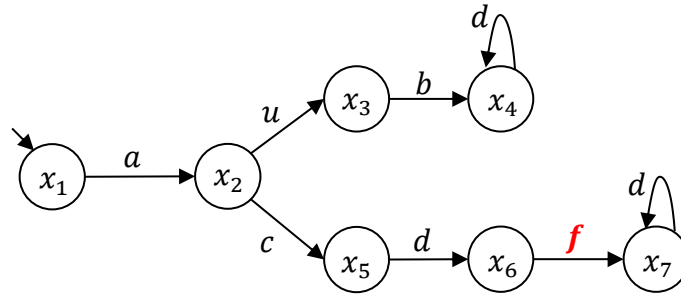


Figure 6.3. Exemple d'un automate à états finis

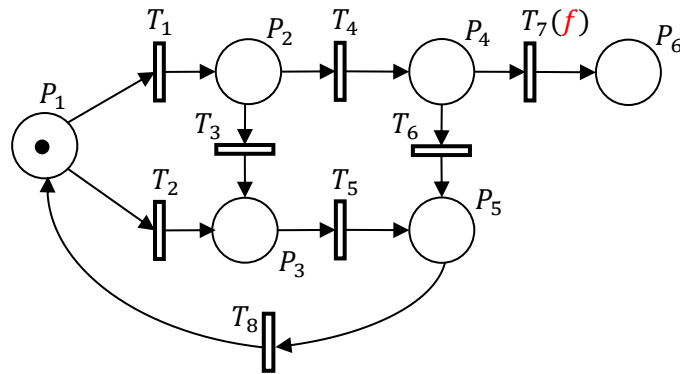


Figure 6.4. Exemple d'un RdP stochastique

Les auteurs de (Chen & Kumar 2015b) étendent l'analyse de la pronosticabilité aux automates probabilistes. De la même manière que pour la diagnosticabilité, ils définissent la S_m -*pronosticabilité*. Cette dernière est équivalente à l'existence d'un pronostiqueur qui permet de détecter une faute m événements avant son occurrence et qui satisfait des taux de non détections et de fausses alarmes. Il serait intéressant d'étendre notre approche à l'étude de la pronosticabilité des systèmes stochastiques temporisés. En utilisant l'approche (ρ, δ) -*pronostic* développée dans cette thèse et en considérant un seuil de détection π , l'objectif serait de tester si l'on peut prédire toute occurrence future d'une faute sur l'horizon δ . On considère l'exemple de la Figure 6.4. représentant un RdPS où la transition T_7 est associée à l'occurrence de la faute f . Le marquage initial est donné par $M_I = 1P_1$ et le vecteur de franchissement par $\mu = (1 \ 1 \ 0.2 \ 0.8 \ 1 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.5)^T$.

Dans un premier temps, on suppose que toutes les places du réseau sont mesurées (on s'affranchit du problème des mesures partielles). À partir de l'état unique précédent directement l'occurrence de la faute (état $1P_4$), on utilise l'approche (ρ, δ) -*pronostic* en considérant les paramètres $\rho = 0.1$ et $\delta = 5$. On obtient une estimation de la probabilité d'occurrence future de f donnée par $\hat{P}(5, 0.1, 5, f) = 0.74$. Si un seuil de détection de $\pi = 0.6$ est choisi, la faute sera prédite avant son occurrence lorsque l'état $1P_4$ est atteint.

Lorsque le modèle est partiellement mesuré, une estimation d'état du système est obtenue en fonction des mesures. Supposons que le système a évolué de son état initial et qu'il arrive à l'état $1P_4$ à une date t . Une probabilité que le système soit dans l'état $1P_4$ est obtenue et sera noté $P(1P_4, t)$. L'estimation de la probabilité d'occurrence de la faute à partir de cet état sur l'horizon $\delta = 5$ devient $\hat{P}(t + 5, 0.1, 5, f) = P(1P_4, t) \times 0.74$. Pour pouvoir prédire l'occurrence de la faute avec une probabilité supérieure ou égale au seuil $\pi = 0.6$ (c.-à-d. $\hat{P}(t + 5, 0.1, 5, f) \geq 0.6$), il faudrait obtenir une estimation de l'état $1P_4$ donnée par $P(1P_4, t) \geq 0.81$. Nous pensons alors que l'une des difficultés pour l'étude de la pronosticabilité dans notre cas est de s'assurer que, lorsque le système est dans un état donné, l'estimation d'état détecte celui-ci avec une certaine probabilité. Ce problème est un problème de détectabilité (Shu et al. 2008; Hadjicostis & Seatzu 2016). Cette notion traduit la capacité de détection de l'état actuel du système après un nombre suffisant de mesures. Dans cet exemple simple, on s'est intéressé à l'état qui sensibilise la transition de faute, il serait intéressant d'étudier les trajectoires menant vers l'occurrence de la faute pour essayer de garantir une pronosticabilité avec des marges (ou délais) avant l'occurrence de la faute.

Bibliographie

- Alur, R. & Dill, D.L., 1994. A theory of timed automata. *Theoretical computer science*, 126(2), pp.183–235.
- Amari, S.V., & Misra, R.B., 1997. Closed-form expressions for distribution of sum of exponential random variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 46(4), pp. 519-522.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2015. Estimation of the fault occurrence dates in DESs with partially observed stochastic Petri nets. *5th IFAC-Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)*. Atlanta, USA. pp. 254–259.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E., & Lefebvre, D., 2016a. State Estimation for DES according to Partially Observed Stochastic Petri Nets. *8th IFAC Conf. on Manufacturing Modeling, Management & Control (MIM)*. Troyes, France. pp. 390-395.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2016b. Faults prognosis using partially observed stochastic Petri nets. In *13th International Workshop on Discrete Event Systems, (WODES)*. IEEE. Xian, China. pp. 472–477.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2017a. A Comparative Study of Fault Prognosis Approaches for Timed Stochastic Discrete Event Systems. In *20th IFAC World Congress*. Toulouse, France. pp. 7001–7006.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2017b. Fault prognosis of timed stochastic discrete event systems with bounded estimation error. *Automatica*, 82, pp.35–41.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2017c. Faults prognosis using partially observed stochastic Petri-nets: an incremental approach. *Discrete Event Dynamic Systems*, pp.1–21.
- Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. & Lefebvre, D., 2017d. State estimation of discrete event systems for RUL prediction issue. *International Journal of Production Research*, 55(23), pp.7040-7057.
- Basile, F., Chiacchio, P., & De Tommasi, G. 2009. An efficient approach for online diagnosis of discrete event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(4), pp.748–759.
- Basile, F., Cabasino, M.P. & Seatzu, C., 2013. Marking estimation of Time Petri nets with unobservable transitions. In *IEEE 18th Conference on Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA)*. Cagliari, Italy. pp. 1–7.
- Basile, F., Cabasino, M.P. & Seatzu, C., 2015. State Estimation and Fault Diagnosis of Labeled Time Petri Net Systems With Unobservable Transitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(4), pp.997–1009.
- Basile, F., Chiacchio, P. & De Tommasi, G., 2009. Fault diagnosis and prognosis in Petri nets by using a single generalized marking estimation. *IFAC-PapersOnline*, 42(8),

pp.1396–1401.

- Basile, F., Chiacchio, P. & Tommasi, G. De, 2012. On ω -diagnosability of Petri nets via integer linear programming. *Automatica*, 48(9), pp.2047–2058.
- Basile, F., Chiacchio, P. & Tommasi, G. De, 2008. Sufficient conditions for diagnosability of petri nets. In *Proceedings - 9th International Workshop on Discrete Event Systems, (WODES)*. IEEE. Goteborg, Sweden. pp. 370–375.
- Bause, F. & Kritzinger, P.S., 2002. *Stochastic Petri Nets*: Verlag, Verlag Vieweg, Wiesbaden, 26.
- Benveniste, A., Fabre, E., Haar, S., & Jard, C. 2003. Diagnosis of asynchronous discrete-event systems: a net unfolding approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5), pp.714–727.
- Berthomieu, B. & Diaz, M., 1991. Modeling and verification of time dependent systems using time Petri nets. *IEEE transactions on software engineering*, 17(3), pp.259–273.
- Billington, J. & Diaz, M., 1999. *Application of Petri nets to communication networks: Advances in Petri nets*, Springer Science & Business Media.
- Bobbio, A., Puliafito, A., Telek, M., & Trivedi, K. S. 1998. Recent developments in non-Markovian stochastic Petri nets. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 8(1), pp.119–158.
- Bobbio, A., 1990. System Modelling with Petri nets. *Systems reliability assessment: proceedings of the Ispra course*, p.103.
- Boel, R. & Jiroveanu, G., 2013. The on-line diagnosis of time Petri nets. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol 433. Springer, London.
- Boel, R.K. & Jiroveanu, G., 2004. Distributed contextual diagnosis for very large systems. In *Proc. IFAC 7th Work. on Discrete Event Systems (WODES)*. Reims, France. pp. 343–348.
- Bonhomme, P., 2015. Marking estimation of P-time Petri nets with unobservable transitions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 45(3), pp.508–518.
- Bonhomme, P., 2013. State observer synthesis of real-time systems modeled by P-time Petri nets. In *IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, ETFA*, Cagliari, Italy. pp. 1–8.
- Boussif, A., 2016. *Contributions to Model-Based Diagnosis of Discrete-Event Systems*. Ph.D. Thesis, Université de Lille.
- Boussif, A., Liu, B. & Ghazel, M., 2017. An Experimental Comparison of Three Diagnosis Techniques for Discrete Event Systems. In *DX'17, 28th International Workshop on Principles of Diagnosis*. Brescia, Italy.
- Bouyer, P., Chevalier, F. & D'Souza, D., 2005. Fault diagnosis using timed automata. In *International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures*. Edinburgh, UK. Springer, pp. 219–233.
-

- Burks, A.W. & Wang, H., 1957. The Logic of Automata—Part I. *Journal of the ACM (JACM)*, 4(2), pp.193–218.
- Cabasino, M. P., Giua, A., Lafortune, S., & Seatzu, C., 2012. A New Approach for Diagnosability Analysis of Petri Nets Using Verifier Nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(12), pp.3104–3117.
- C Cabasino, M. P., Giua, A., Lafortune, S., & Seatzu, C., 2009. Diagnosability analysis of unbounded Petri nets. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China. pp. 1267–1272.
- Cabasino, M. P., Giua, A., Pocci, M., & Seatzu, C., 2011. Discrete event diagnosis using labeled Petri nets. An application to manufacturing systems. *Control Engineering Practice*, 19(9), pp.989–1001.
- Cabasino, M.P., Giua, A. & Seatzu, C., 2009., Diagnosability of bounded Petri nets. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China. pp. 1254–1260.
- Cabasino, M.P., Giua, A. & Seatzu, C., 2014., Diagnosability of discrete-event systems using labeled Petri nets. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 11(1), pp.144–153.
- Cabasino, M.P., Giua, A. & Seatzu, C., 2010. Fault detection for discrete event systems using Petri nets with unobservable transitions. *Automatica*, 46(9), pp.1531–1539.
- Cabasino, M.P., Hadjicostis, C.N. & Seatzu, C., 2014. Initial marking estimation in labeled Petri nets in a probabilistic setting. In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*. IEEE, pp. California, USA. 6725–6730.
- Cabasino, M.P., Hadjicostis, C.N. & Seatzu, C., 2015. Probabilistic marking estimation in labeled Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(2), pp.528–533.
- Cassandras, C.G. & Lafortune, S., 2009. *Introduction to discrete event systems*, Springer Science & Business Media.
- Cassez, F., 2009. A note on fault diagnosis algorithms. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*. Shanghai, China., pp. 6941–6946.
- Cassez, F. & Grastien, A., 2013. Predictability of Event Occurrences in Timed Systems. *International Conference on Formal Modeling and Analysis of Timed Systems*, Buenos Aires, Argentina. pp.62–76.
- Chen, J. & Kumar, R., 2015a. Failure Detection Framework for Stochastic Discrete Event Systems With Guaranteed Error Bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6), pp.1542–1553.
- Chen, J. & Kumar, R., 2015b. Stochastic failure prognosability of discrete event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6), pp.1570–1581.
- Chen, Y.-L. & Provan, G., 1997. Modeling and diagnosis of timed discrete event systems—a factory automation example. In *American Control Conference. Proceedings of the*
-

1997. New Mexico, USA, pp. 31–36.
- Chung, S.-L., 2005. Diagnosing PN-based models with partial observable transitions. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 18(2–3), pp.158–169.
- Cong, X., Fanti, M. P., Mangini, A. M., & Li, Z., 2017., Decentralized Fault Diagnosis by Petri Nets and Integer Linear Programming. In *20th IFAC World Congress*. Toulouse, France, pp. 14188–14193.
- Diaz, M., 2013. *Petri nets: fundamental models, verification and applications*, John Wiley & Sons.
- DiCesare, F., Harhalakis, G., Proth, J. M., Silva, M., & Vernadat, F. B., 1993. *Practice of Petri nets in manufacturing*, Springer, Netherlands.
- Distefano, S., Longo, F. & Scarpa, M., 2017. Marking dependency in non-Markovian stochastic Petri nets. *Performance Evaluation*, 110, pp.22–47.
- Dotoli, M., Fanti, M. P., Mangini, A. M., & Ukovich, W., 2011. Identification of the unobservable behaviour of industrial automation systems by Petri nets. *Control Engineering Practice*, 19(9), pp.958–966.
- Dotoli, M., Fanti, M. P., Mangini, A. M., & Ukovich, W., 2009. On-line fault detection in discrete event systems by Petri nets and integer linear programming. *Automatica*, 45(11), pp.2665–2672.
- Egan, J.P., 1975. *Signal Detection Theory and Roc Analysis*, Academic Press.
- Finkel, A., 1993. The minimal coverability graph for Petri nets. In *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, pp. 210–243.
- Genc, S. & Lafortune, S., 2003. Distributed diagnosis of discrete-event systems using Petri nets. In *Applications and Theory of Petri Nets 2003*. Springer, pp. 316–336.
- Genc, S. & Lafortune, S., 2007. Distributed diagnosis of place-bordered petri nets. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(2), pp.206–219.
- Genc, S. & Lafortune, S., 2009. Predictability of event occurrences in partially-observed discrete-event systems. *Automatica*, 45(2), pp.301–311.
- German, R., 2000. *Performance analysis of communication systems with non-Markovian stochastic Petri nets*, John Wiley & Sons, Inc.
- Ghazel, M., 2005. *Surveillance des systèmes à évènements discrets à l'aide des réseaux de Petri Temporels*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- Ghazel, M., Toguyéni, A. & Yim, P., 2009. State observer for des under partial observation with time petri nets. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 19(2), pp.137–165.
- Girault, C. & Valk, R., 2013. *Petri nets for systems engineering: a guide to modeling, verification, and applications*, Springer Science & Business Media.
- Giua, A. & Seatzu, C., 2005. Fault detection for discrete event systems using Petri nets
-

- with unobservable transitions. In *Decision and Control and European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*. Seville, Spain. pp. 6323–6328.
- Giua, A. & Seatzu, C., 2002. Observability of place/transition nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9), pp.1424–1437.
- Gougam, H.-E., Pencolé, Y. & Subias, A., 2017. Diagnosability analysis of patterns on bounded labeled prioritized Petri nets. *Discrete Event Dynamic Systems*, 27(1), pp.143–180.
- Gougam, H.-E.E., Subias, A. & Pencolé, Y., 2014. Discriminability Analysis of Supervision Patterns by Net Unfoldings. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(2), pp.459–464.
- Gougam, H.E., Subias, A. & Pencolé, Y., 2013. Supervision patterns: Formal diagnosability checking by petri net unfolding. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 4(PART 1), pp.73–78.
- Haar, S., Rodríguez, C. & Schwoon, S., 2013. Reveal your faults: It's only fair! In *Application of Concurrency to System Design (ACSD), 2013 13th International Conference on*. IEEE, Barcelona, Spain. pp. 120–129.
- Haddad, S., Mokdad, L. & Moreaux, P., 2006. *A new approach to the evaluation of non Markovian stochastic Petri nets*, Springer.
- Hadjicostis, C.N. & Seatzu, C., 2016. K-detectability in discrete event systems. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. Las Vegas, USA, pp. 420–425.
- Horváth, A., Paolieri, M., Ridi, L., & Vicario, E., 2012. Transient analysis of non-Markovian models using stochastic state classes. *Performance Evaluation*, 69(7), pp.315–335.
- Jéron, T., Marchand, H., Genc, S., & Lafortune, S., 2008. Predictability of sequence patterns in discrete event systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), pp.537–543.
- Jiang, S., Huang, Z., Chandra, V., & Kumar, R., 2001. A polynomial algorithm for testing diagnosability of discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8), pp.1318–1321.
- Jiang, S. & Kumar, R., 2006. Diagnosis of repeated failures for discrete event systems with linear-time temporal-logic specifications. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 3(1), pp.47–59.
- Jiroveanu, G. & Boel, R.K., 2010. The diagnosability of Petri net models using minimal explanations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(7), pp.1663–1668.
- Jiroveanu, G., Schutter, B. De & Boel, R.K., 2006. On-line diagnosis for time Petri nets. In *Discrete Event Systems, in 8th International Workshop on*. IEEE, Michigan, USA. pp. 313–318.
- Kleene, S.C., 1951. *Representation of events in nerve nets and finite automata*, RAND PROJECT AIR FORCE SANTA MONICA CA.
- Kumar, R. & Takai, S., 2010. Decentralized prognosis of failures in discrete event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1), pp.48–59.
-

- Lai, S., Nessi, D., Cabasino, M. P., Giua, A., & Seatzu, C., 2008. A comparison between two diagnostic tools based on automata and Petri nets. In *Discrete Event Systems, (WODES). 9th International Workshop on*. IEEE, Göteborg, Sweden. pp. 144–149.
- Lefebvre, D., 2013. State estimation and fault prediction with partially observed Petri nets. In *Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2013 IEEE 18th Conference on*. Cagliari, Italy, pp. 1–8.
- Lefebvre, D., 2014a. Fault diagnosis and prognosis with partially observed petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 44(10), pp.1413–1424.
- Lefebvre, D., 2014b. Fault diagnosis and prognosis with partially observed stochastic Petri nets. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 228(4), pp.382–396.
- Lefebvre, D., 2014c. On-Line Fault Diagnosis With Partially Observed Petri Nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7), pp.1919–1924.
- Lefebvre, D., 2017a. Detection of Temporal Anomalies for Partially Observed Timed PNs. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017.
- Lefebvre, D., 2017b. Probability of faults for partially observed Timed PNs with temporal constraints. In *Networking, Sensing and Control (ICNSC), 2017 IEEE 14th International Conference on*. IEEE, pp. 103–108.
- Lefebvre, D. & Delherm, C., 2007. Diagnosis of DES with Petri net models. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(1), pp.114–118.
- Li, B., Khlif-Bouassida, M., & Toguyéni, A., 2015a. On-the-fly diagnosability analysis of labeled Petri nets using T-invariants. *IFAC-PapersOnLine*, 48(7), 64-70..
- Li, B., Liu, B. & Toguyéni, A., 2015b. On-the-fly diagnosability analysis of labeled petri nets using minimal explanations. In *IFAC-PapersOnLine*, 48(21). IEEE, pp. 326–331.
- Li, L. & Hadjicostis, C.N., 2013. Minimum initial marking estimation in labeled Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(1), pp.198–203.
- Lin, F., 1994. Diagnosability of discrete event systems and its applications. *Discrete Event Dynamic Systems*, 4(2), pp.197–212.
- Liu, B., Gazel, M. & Toguyeni, A., 2013. Evaluation à la volée de la diagnosticabilité des systèmes à événements discrets temporisés. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 47(1–3), pp.227–242.
- Liu, B., Ghazel, M. & Toguyéni, A., 2017. On-the-Fly and Incremental Technique for Fault Diagnosis of Discrete Event Systems Modeled by Labeled Petri Nets. *Asian Journal of Control*.
- Luenberger, D., 1971. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6), pp.596–602.
- Madalinski, A., Nouioua, F. & Dague, P., 2010. Diagnosability verification with Petri net unfoldings. *International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering*
-

- Systems*, 14(2), pp.49–55.
- Marsan, M. A., Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., & Franceschinis, G., 1994. *Modelling with generalized stochastic Petri nets*, John Wiley & Sons, Inc.
- Marsan, M.A., 1988. Stochastic Petri nets: an elementary introduction. In *European Workshop on Applications and Theory in Petri Nets*. Springer, pp. 1–29.
- Marsan, M. A., Balbo, G., Bobbio, A., Chiola, G., Conte, G., & Cumani, A. (1989). The effect of execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 15(7), 832-846.
- Nadarajah, S., 2008. A review of results on sums of random variables. *Acta Applicandae Mathematicae*, 103(2), pp. 131-140.
- El Mehdi, S. O., Bekrar, R., Messai, N., Leclercq, E., Lefebvre, D., & Riera, B., 2012. Design and identification of stochastic and deterministic stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 42(4), pp.931–946.
- Merlin, P.M., 1975. *A study of the recoverability of computing systems*. PhD thesis, University of California.
- Molloy, M.K., 1982. Performance analysis using stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on computers*, 31(9), pp.913–917.
- Moore, E.F., 1956. Gedanken-experiments on sequential machines. *Automata studies*, 34, pp.129–153.
- Murata, T., 1989. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4), pp.541–580.
- Nouioua, F., Dague, P. & Ye, L., 2014. Probabilistic analysis of predictability in discrete event systems. In *DX 2014*.
- Okoh, C., Roy, R., Mehnen, J., & Redding, L., 2014. Overview of remaining useful life prediction techniques in through-life engineering services. *Procedia CIRP*, 16, pp.158–163.
- Papadopoulos, Y. & McDermid, J.A., 2001. Automated safety monitoring: A review and classification of methods. *International journal of COMADEM*, 4(4), pp.14–32.
- Parate, M.R. & Dandare, S.N., 2013. IC Engine Fault diagnosis Using ROC. , 4(1), pp.68–78.
- Pecht, M., 2008. *Prognostics and health management of electronics*, Wiley Online Library.
- Peimankar, A., Weddell, S. J., Jalal, T., & Laphorn, A. C., 2017. Evolutionary multi-objective fault diagnosis of power transformers. *Swarm and Evolutionary Computation*.
- Peterson, J.L., 1982. Petri net theory and the modeling of systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 24(4), p.356.
- Petri, C.A., 1966. *Communicating with Automata*. PhD Thesis Hamburg.
-

- Philippot, A., 2006. Contribution Au Diagnostic Décentralisé Des Systèmes à Événements Discrets: Application Aux Systèmes Manufacturiers. *Université De Reims Champagne Ardenne These*, p.211.
- Prock, J., 1991. A new technique for fault detection using Petri nets. *Automatica*, 27(2), pp.239–245.
- Ramadge, P.J.G. & Wonham, W.M., 1989. The control of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE*, 77(1), pp.81–98.
- Ramchandani, C., 1973. Analysis of asynchronous concurrent systems by timed petri nets.
- Ramírez-Treviño, A., Ruiz-Beltrán, E., Rivera-Rangel, I., & Lopez-Mellado, E., 2007. Online fault diagnosis of discrete event systems. A Petri net-based approach. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(1), pp.31–39.
- Ramírez-Treviño, A., Rivera-Rangel, I. & López-Mellado, E., 2000. Observer Design for Discrete Event Systems modeled by Interpreted Petri Nets. In *Robotics and Automation. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*. San Francisco, USA. pp. 2871–2876.
- Reisig, W., 2013. *Elements of distributed algorithms: modeling and analysis with Petri nets*, Springer Science & Business Media.
- Ross, S. M., 2014. *Introduction to probability models*, 11th Edition, Academic Press Elsevier.
- Ru, Y. & Hadjicostis, C.N., 2009. Fault Diagnosis in Discrete Event Systems Modeled by Partially Observed Petri Nets. *Discrete Event Dynamic Systems*, 19(4), pp.551–575.
- Sampath, M., Sengupta, R., Lafortune, S., Sinnamohideen, K., & Teneketzis, D., 1995. Diagnosability of discrete-event systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 40(9), pp.1555–1575.
- Sampath, M., Sengupta, R., Lafortune, S., Sinnamohideen, K., & Teneketzis, D. C., 1996. Failure diagnosis using discrete-event models. *IEEE transactions on control systems technology*, 4(2), pp.105–124.
- Segala, R., 1995. *Modelling and Verification of Randomized Distributed Real-Time Systems*. Massachusetts Institute of Technology.
- Shu, S., Lin, F., Ying, H., & Chen, X., 2008. State estimation and detectability of probabilistic discrete event systems. *Automatica*, 44(12), pp.3054–3060.
- Si, X. S., Wang, W., Hu, C. H., & Zhou, D. H., 2011. Remaining useful life estimation—a review on the statistical data driven approaches. *European journal of operational research*, 213(1), pp.1–14.
- Sifakis, J., 1980. Use of Petri nets for performance evaluation. *Acta Cybernetica*, 4(2), pp.185–202.
- Takai, S., 2015. Robust prognosability for a set of partially observed discrete event systems. *Automatica*, 51, pp.123–130.
-

- Thorsley, D. & Teneketzis, D., 2005. Diagnosability of stochastic discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(4), pp.476–492.
- Tong, Y., Li, Z. & Giua, A., 2016. On the equivalence of observation structures for Petri net generators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9), pp.2448–2462.
- Tripakis, S., 2002. Fault Diagnosis for Timed Automata. *FTRTFT -- Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, pp.205–221.
- Trivedi, K. S., Bobbio, A., Ciardo, G., German, R., Puliafito, A., & Telek, M., 1995. Non-markovian petri nets. In *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*. ACM, pp. 263–264.
- Ushio, T., Onishi, I. & Okuda, K., 1998. Fault detection based on Petri net models with faulty behaviors. In *Systems, Man, and Cybernetics. IEEE International Conference on*. San Diego, USA. pp. 113–118.
- Villemeur, A., 1988. *Suret  de fonctionnement des systèmes industriels: fiabilit -facteurs humains, informatisation* Eyrolles, Eyrolles.
- Wang, X., Mahulea, C. & Silva, M., 2015. Diagnosis of Time Petri Nets Using Fault Diagnosis Graph. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(9), pp.2321–2335.
- Wang, X., Mahulea, C. & Silva, M., 2013. Fault diagnosis graph of time Petri nets. In *European Control Conference (ECC)*. IEEE. Zurich, Switzerland. pp. 2459–2464.
- Wen, Y., Li, C. & Jeng, M., 2005. A polynomial algorithm for checking diagnosability of Petri nets. In *Systems, Man and Cybernetics, IEEE International Conference on*. pp. 2542–2547.
- Wheeler, T.J., 2011. *Probabilistic performance analysis of fault diagnosis schemes*. PhD thesis, University of Melbourne.
- Wu, Y. & Hadjicostis, C.N., 2005. Algebraic approaches for fault identification in discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12), pp.2048–2053.
- Yin, X. & Li, Z., 2016. Decentralized fault prognosis of discrete event systems with guaranteed performance bound. *Automatica*, 69, pp.375–379.
- Yoo, T.-S. & Lafortune, S., 2002. Polynomial-time verification of diagnosability of partially observed discrete-event systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 47(9), pp.1491–1495.
- Zad, S.H., Kwong, R.H. & Wonham, W.M., 2005. Fault diagnosis in discrete-event systems: Incorporating timing information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(7), pp.1010–1015.
- Zaytoon, J. & Lafortune, S., 2013. Overview of fault diagnosis methods for Discrete Event Systems. *Annual Reviews in Control*, 37(2), pp.308–320.
- Zwingelstein, G., 1995. *Diagnostic des défaillances: théorie et pratique pour les systèmes industriels*, Hermès.
-

Annexe. Somme de lois exponentielles

Les rappels sur la loi exponentielle, ses propriétés et la somme de variables aléatoires exponentielles présentés ci-dessous sont principalement tirés de (Ross 2014).

A. Variables aléatoires exponentielles

La distribution d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Sa fonction de répartition est notée $F(t)$, elle est calculée comme suit :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\text{A.2})$$

L'espérance E d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = -te^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{A.3})$$

On s'intéresse dans ce qui suit à quelques propriétés importantes de la loi exponentielle :

- **Absence de mémoire**

Une variable aléatoire X est dite « sans mémoire » si :

$$P\{X > t + h | X > h\} = P\{X > t\}$$

Si X modélise la durée de vie d'un produit, alors la probabilité que celui-ci fonctionne encore une durée $d = t - h$ sachant qu'il a déjà fonctionné pendant une période h est identique à la probabilité qu'il fonctionne pendant cette même durée d à partir de sa mise en fonction. Ainsi, la modélisation est dite « sans usure » ou « sans vieillissement ». Si l'on considère que la variable X est une loi exponentielle de paramètre λ , alors :

$$P\{X > t + h | X > h\} = \frac{P\{X > t + h, X > h\}}{P\{X > h\}} = \frac{P\{X > t + h\}}{P\{X > h\}}$$

Etant donné que $P\{X > t + h\} = P\{X > t\} \cdot P\{X > h\}$

On obtient $P\{X > t + h | X > h\} = P\{X > t\}$

La loi exponentielle est donc une loi sans mémoire.

- **Comparaison de deux lois exponentielles**

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de distributions exponentielles et de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . La probabilité que la variable X_1 soit inférieure à X_2 , notée $P\{X_1 < X_2\}$, est donnée par :

$$P\{X_1 < X_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (\text{A.4})$$

Ce résultat est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} P\{X_1 < X_2\} &= \int_0^{+\infty} P\{X_1 < X_2 | X_1 = x\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} P\{x < X_2\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

- **Minimum de lois exponentielles**

Soient n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de distributions exponentielles et de paramètres λ_i ($i = 1, \dots, n$). Le minimum de X_1, \dots, X_n , qu'on notera $X_{\min} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre égale à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Ceci peut être obtenu comme suit :

$$P\{\min\{X_1, \dots, X_n\} > t\} = P\{X_i > t, \text{ pour } i = 1, \dots, n\} \quad (\text{A.5})$$

Les variables étant indépendantes on obtient :

$$P\{X_i > t, \text{ pour } i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i > t\} = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} \quad (\text{A.6})$$

B. Somme de deux variables aléatoires et convolution

On considère deux variables aléatoires continues indépendantes X et Y de densités respectives f_X et g_Y définies sur l'ensemble des réels \mathbb{R} . La somme de ces deux variables

aléatoires, notée $Z = X + Y$, est une variable aléatoire de densité h_Z . Cette dernière est donnée par le produit de convolution des deux densités f_X et g_Y comme suit :

$$h(z) = (f * g)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(z-x)dx \quad (\text{A.7})$$

C. Somme de lois exponentielles

Le résultat donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires se généralise pour le cas d'une somme S de n variables aléatoires continues et indépendantes $X_i, i = 1, \dots, n$. Si l'on note par f_{X_i} la densité de probabilité de X_i alors la densité de la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est donnée par $f_{X_1} * f_{X_2} * \dots * f_{X_n}$.

Dans ce qui suit, on s'intéressera au cas d'une somme de variables aléatoires exponentielles $S = \sum_{i=1}^n X_i$ de paramètres λ_i .

- **Cas avec paramètres identiques**

On considère que les paramètres des variables aléatoires X_i pour $i = 1, \dots, n$ sont identiques et sont donnés par $\lambda_i = \lambda$ pour $i = 1, \dots, n$. La fonction de répartition $F(t)$ de la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est donnée par une loi d'Erlang :

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \text{ pour } t > 0 \quad (\text{A.8})$$

- **Cas avec paramètres distincts deux à deux**

Dans le cas où les paramètres des variables aléatoires X_i pour $i = 1, \dots, n$ sont distincts deux à deux (c'est à dire $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$), alors la fonction de répartition $F(t)$ de la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est donnée par :

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} e^{-\lambda_i t} \text{ pour } t > 0 \quad (\text{A.9})$$

- **Cas général**

On considère le cas général où les paramètres λ_i sont donnés par a valeurs distinctes caractérisées par les deux ensembles $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_a\}$ et $\{r_1, r_2, \dots, r_a\}$ où β_j est la valeur du paramètre et r_j sa multiplicité tel que $r_1 + r_2 + \dots + r_a = n$. La fonction cumulative $F_a(t)$ de la variable aléatoire S_n pour $t \geq 0$ est alors donnée par (Amari & Misra 1997, Nadarajah 2008):

$$F_a(t) = 1 - \left(\prod_{j=1}^a \beta_j^{r_j} \right) \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^{r_k} \frac{\Psi_{k,l}(-\beta_k) t^{r_k-l} \exp(-\beta_k t)}{(r_k - l)! (l - 1)!} \quad (\text{A.10})$$

avec $\Psi_{k,l}(x) = -\frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}} \{ \prod_{j=0, j \neq k}^a (\beta_j + x)^{-r_j} \}$ and $\beta_0 = 0, r_0 = 1$

Contributions au Diagnostic et Pronostic des Systèmes à Événements Discrets Temporisés par Réseaux de Petri Stochastiques

Résumé. La complexification des systèmes et la réduction du nombre de capteurs nécessitent l'élaboration de méthodes de surveillance de plus en plus efficaces. Le travail de cette thèse s'inscrit dans ce contexte et porte sur le diagnostic et le pronostic des Systèmes à Événements Discrets (SED) temporisés. Les réseaux de Petri stochastiques partiellement mesurés sont utilisés pour modéliser le système. Le modèle représente à la fois le comportement nominal et le comportement dysfonctionnel du système. Il permet aussi de représenter ses capteurs à travers une mesure partielle des transitions et des places. Notre contribution porte sur l'exploitation de l'information temporelle pour le diagnostic et le pronostic des SED. À partir d'une suite de mesures datées, les comportements du système qui expliqueraient ces mesures sont d'abord déterminés. La probabilité de ces comportements est ensuite évaluée pour fournir un diagnostic du système en termes de probabilité d'occurrence d'un défaut. Dans le cas où une faute est diagnostiquée, une approche permettant d'estimer la distribution de sa date d'occurrence est proposée. L'objectif est de donner plus de détails sur cette faute afin de mieux la caractériser. Par ailleurs, la probabilité des comportements compatibles est exploitée pour estimer l'état actuel du système. Il s'agit de déterminer les marquages compatibles avec les mesures ainsi que leurs probabilités associées. À partir de cette estimation d'état, la prise en considération des évolutions possibles du système permet d'envisager la prédiction de la faute avant son occurrence. Une estimation de la probabilité d'occurrence de la faute sur un horizon de temps futur est ainsi obtenue. Celle-ci est ensuite étendue à l'évaluation de la durée de vie résiduelle du système. Enfin, une application des différentes approches développées sur un cas d'un système de tri est proposée.

Mots clés. Diagnostic et pronostic de défauts, systèmes à événements discrets, réseaux de Petri stochastiques, datation des fautes, durée de vie résiduelle.

Contribution to Fault Diagnosis and Prognosis of Timed Discrete Event Systems using Stochastic Petri Nets

Abstract. Due to the increasing complexity of systems and to the limitation of sensors number, developing monitoring methods is a main issue. This PhD thesis deals with the fault diagnosis and prognosis of timed Discrete Event Systems (DES). For that purpose, partially observed stochastic Petri nets are used to model the system. The model represents both the nominal and faulty behaviors of the system and characterizes the uncertainty on the occurrence of events as random variables with exponential distributions. It also considers partial measurements of both markings and events to represent the sensors of the system. Our main contribution is to exploit the timed information, namely the dates of the measurements for the fault diagnosis and prognosis of DES. From the proposed model and collected measurements, the behaviors of the system that are consistent with those measurements are obtained. Based on the event dates, our approach consists in evaluating the probabilities of the consistent behaviors. The probability of faults occurrences is obtained as a consequence. When a fault is detected, a method to estimate its occurrence date is proposed. From the probability of the consistent trajectories, a state estimation is deduced. The future possible behaviors of the system, from the current state, are considered in order to achieve fault prediction. This prognosis result is extended to estimate the remaining useful life as a time interval. Finally, a case study representing a sorting system is proposed to show the applicability of the developed methods.

Keywords. Fault diagnosis and prognosis, discrete event systems, stochastic Petri nets, fault date estimation, remaining useful life.