



HAL
open science

Construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle

Vincent Daudon

► **To cite this version:**

Vincent Daudon. Construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université Sorbonne Paris Cité, 2017. Français. NNT : 2017USPCC241 . tel-01721309v2

HAL Id: tel-01721309

<https://theses.hal.science/tel-01721309v2>

Submitted on 29 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Thèse de doctorat
de l'Université Sorbonne Paris Cité
Préparée à l'Université Paris Diderot**

École doctorale : **Savoirs Scientifiques (ED 400)**
Laboratoire SPHERE, UMR 7219

**Construction d'un concept de temps
mathématiquement manipulable
en philosophie naturelle**

Par **Vincent DAUDON**

**Thèse de doctorat d'Histoire et philosophie des sciences
Dirigée par Jean-Jacques SZCZECINIARZ**

Présentée et soutenue publiquement à l'université Paris Diderot le 15 décembre 2017

JURY

Vincent JULLIEN (Président)

Professeur à l'Université de Nantes

Laurence BOUQUIAUX (Rapporteur)

Professeur à l'Université de Liège, (Belgique)

Jean SEIDENGART (Rapporteur)

Professeur émérite à l'Université Paris Nanterre (Paris x)

Michel BLAY

Directeur de recherche émérite au CNRS

Christian BRACCO

Maître de Conférences à l'Université de Nice Sophia-Antipolis

Antoni MALET

Professeur à Universitat Pompeu Fabra, Barcelone (Espagne)

Anne-Lise REY

Maître de conférences à l'Université de Lille

Jean-Jacques SZCZECINIARZ (Directeur de thèse)

Professeur à l'Université Paris Diderot (Paris 7)



**Construction d'un concept de temps
mathématiquement manipulable
en philosophie naturelle**

Vincent DAUDON

Construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle

Résumé. En recherchant la loi de force centripète inscrite dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, Newton donna au temps un statut de grandeur privilégiée de la philosophie naturelle. Cependant, celui-ci apparaît de façon ambiguë, tantôt grandeur discrète, tantôt grandeur continue. Sa manipulation mathématique, qui repose essentiellement sur la *Méthode des premières et dernières raisons* et sur la *loi des aires*, laisse, en outre, apparaître un temps de nature géométrique. Confronté, dans la proposition x du livre II, à la résolution du mouvement d'un mobile qui éprouve une résistance en raison du carré de sa vitesse, Newton ne parvient pas à résoudre cette proposition au moyen de la géométrie. Il est contraint de reprendre son raisonnement et de recourir à une méthode algébrique pour énoncer de manière juste, dans l'édition de 1713, la solution de cette proposition, dans laquelle le temps apparaît alors sous une forme algébrisée, représenté par une lettre. Ainsi, d'un temps géométrisé, figuré par un élément d'espace dans l'édition de 1687, Newton en fit un être *per se* représenté par une lettre dans la proposition x de l'édition de 1713. Cependant, c'est à Varignon, qui aborda les propositions des *Principia* de Newton à l'aide du calcul différentiel, que l'on doit la fin de la mathématisation et la finalisation du concept de temps mathématique.

Mots-clés. Mathématique, philosophie naturelle ; Algèbre, calcul leibnizien, géométrie euclidienne, symbole mathématique ; Concept de temps, temps absolu, temps relatif ; Concept de force ; Leibniz, Newton, Varignon ; *Principia*.

Construction of a mathematically manipulated concept of time in natural philosophy

Abstract. By looking for the law of centripetal force registered in the *Mathematical Principles of the Natural Philosophy*, Newton gave to time a status of privileged magnitude of natural philosophy. However, this one appears in a ambiguous way, sometimes discrete magnitude, sometimes continuous magnitude. Its mathematical manipulation, which rests essentially on the *Method of first and last ratios* and on the *law of areas*, lets appear a time of geometrical nature. Confronted, in the proposal x of the book II, with the resolution of the movement of a mobile which tests a resistance which is proportional in the square of its speed, Newton does not succeed in solving this proposal by means of the geometry. It is forced to resume its reasoning and to resort to an algebraic method in order to express in a just way the solution of this proposal, in which the time appears then under an algebraic shape, represented by a letter. So, from a geometrical time, represented by an element of space in the edition of 1687, Newton made an entity *per se* represented by a letter in proposal x of the 1713 edition. But it is to Varignon, who approached the proposals of the *Principia* by means of the differential calculus, that we owe the end of the "mathematization" and the finalization of the concept of mathematical time.

Keywords. Mathematics, natural philosophy ; Algebra, calculus, Euclidean geometry, mathematical symbol ; Concept of time, absolute time, relative time ; Concept of force ; Leibniz, Newton, Varignon ; *Principia*.

Remerciements

Aussi solitaire que soit la rédaction d'une thèse en histoire et philosophie des sciences, celle-ci n'aurait pas pu être menée à bien sans le concours de nombreuses personnes que je souhaite sincèrement remercier.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Jean-Jacques Szczeciniarz, qui a accepté de diriger cette thèse après avoir suivi et guidé la rédaction de mon mémoire effectuée dans le cadre du master LOPHISS du département d'Histoire et philosophie des sciences de l'Université Paris 7 - Paris Diderot. Il a fait preuve à mon égard de beaucoup de bienveillance, d'exigence, mais surtout d'une extrême patience tant mon travail avançait lentement. Son aide, ses conseils avisés mais aussi ses remarques averties m'ont permis d'atteindre la fin de cette thèse avec une certaine joie. Ses critiques constructives et ses retours enthousiastes ont été décisifs pour mon travail, qui doit beaucoup à ses grandes connaissances et à son profond sens d'analyse philosophique.

Je remercie également le laboratoire SPHERE et l'école doctorale « Savoirs scientifiques », notamment leur équipe administrative : Françoise Contamina, Nad Fachard, Valérie Henni, Laurent Lemoine, Morgane Paquereau, Sandrine Pellé, Virginie Maouchi, Patricia Philippe, de m'avoir accueilli en leur sein. Je leur sais gré de m'avoir permis de fréquenter de jeunes chercheurs avec lesquels il fut toujours agréable d'échanger. Je pense principalement à Fabien Grégis, Jonathan Regier et Philippe Stamenkovic avec qui j'ai eu le plaisir et le bonheur d'animer le groupe de travail des doctorants en histoire et philosophie de la physique. Mais mes pensées vont aussi vers tous ceux qui ont occupé l'open space du bâtiment Condorcet durant ces longues années de recherche. Je veux nommer Nacera Bensaou, Pascal Bertin, Sylvain Cabanacq, Christine Cachot, Fernando Galvez, Roberto Hastenreiter-Cruz, Emmylou Haffner, Ramzi Kebaili, Julien Page, Mattia Petrolo, Eleonora Sammarchi, Sergio Valencia, Xiaofei Wang, Federico Zalamea, Felix Zheng, et tous ceux que j'aurais oubliés du fait de ces changements constants d'effectifs ... Ces contacts avec les doctorants m'ont permis à la fois de rompre avec mes activités professionnelles, de partager des sujets passionnants et d'aiguiser ma curiosité. Choses que je n'aurai pu faire en travaillant seul à domicile ou

en bibliothèque.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Fabien Grégis pour son accompagnement dans mon apprentissage laborieux de nouveaux logiciels de composition de documents, pour son assistance et sa disponibilité inestimables lors la finalisation de ma thèse, pour son aide précieuse lors de la rédaction de l'introduction et, enfin, pour avoir bien voulu endosser, temporairement, le rôle de contradicteur m'obligeant à la controverse intellectuelle. Il a fait preuve d'une extrême patience face à toutes mes demandes et à toutes mes exigences, nombreuses et excessives, qui l'empêchèrent bien souvent d'avancer dans ses propres recherches.

Ma gratitude va également à Nathalie Queyroux et David Denéchaud, bibliothécaires du Caphès, qui ont grandement amélioré mes conditions de travail par leur disponibilité, leur soutien moral et leur bienveillance constants. Ils m'ont en outre permis de profiter des facilités de la salle Ferdinand Buisson. Je remercie aussi tout particulièrement Catherine Charlier de s'être gentiment dévouée à l'ultime vérification de mon travail.

Je remercie aussi les collègues de l'Institut National des Jeunes Sourds de Paris qui ont aimablement accepté d'assumer le rôle de correcteur : Sylvie Cayrou, Céline Coumont, Marie-José Mazet, Esteban Merlette, Richard Nomballais, Véronique Pasquet, David Santomena. Je remercie, d'autre part, tout particulièrement Mélanie Daniel et son mari Laurent Hadj pour la reproofographie de mon manuscrit.

Durant ces années de travail, j'ai eu l'opportunité de rencontrer des chercheurs qui ont porté un intérêt particulier à mon sujet de recherche. Je remercie dans cette perspective Michela Malpangotto pour ses encouragements persistants et pour l'enthousiasme qu'elle a montré vis-à-vis de mon travail. J'exprime aussi tout ma gratitude envers Michel Blay pour son soutien moral et ses encouragements tout au long de cette thèse. Les nombreux entretiens qu'il m'a chaleureusement accordés m'ont donné la confiance indispensable à poursuivre dans cette voie délicate qu'est la physique newtonienne. Ses remarques, ses conseils, ses suggestions de lecture me furent d'une aide considérable pour préciser ma pensée sur les réflexions de ce travail de recherche. Je remercie cordialement à la fois Michela Malpangotto et Michel Blay pour la confiance qu'ils m'ont apportée en me proposant d'exposer mes travaux de recherche au séminaire « qu'appelle-t-on les débuts de la science classique ? ».

Je souhaite aussi exprimer toute ma reconnaissance envers Niccolo Guicciardini qui a pris le temps de me préciser patiemment les points centraux de la philosophie naturelle newtonienne. Sa bienveillance envers mes premiers écrits hésitants et maladroits et ses suggestions d'analyse des *Principia* de Newton m'ont encouragé à persévérer dans le décryptage de l'œuvre newtonienne. Ses propositions d'analyse de la proposition x du livre II des *Principia* m'ont poussé à m'aventurer sur une voie jusqu'alors

jamais empruntée, et ont ainsi donné une coloration à ma thèse. Son soutien, ses remarques et ses conseils, notamment au sujet de cette dernière analyse, m'ont encouragé et m'ont permis de ne pas m'enliser dans la littérature foisonnante des mathématiques et de la philosophie naturelle des XVII^e et XVIII^e siècles. Je le remercie aussi d'avoir eu la délicatesse de s'exprimer en français lors de nos nombreuses discussions, toujours passionnantes, qui ont alimenté ma réflexion.

Je remercie également tous ceux, très nombreux, que je n'ai pas mentionné mais qui d'une façon ou d'une autre m'ont aussi beaucoup apporté sur les plans intellectuel, personnel et professionnel.

Je remercie, enfin, Michel Blay, Laurence Bouquiaux, Christian Bracco, Vincent Julien, Antoni Mallet, Anne-Lise Rey et Jean Seidengart de siéger dans le jury de cette thèse. Je suis particulièrement reconnaissant envers Laurence Bouquiaux, Anne-Lise Rey et Jean Seidengart qui ont accepté, dans l'urgence, ma sollicitation.

Mes dernières pensées vont à mes amis et à ma famille ; mes parents, mes frères, Antoine et Benoît, ma sœur, Céline, mes nièces et mes neveux, mon oncle. J'ai une pensée paternelle pour Hélia, Solène et Théo, que je n'ai pas réellement vu grandir. Ils ont tout trois façonné un père constamment préoccupé et ont patiemment attendu que je prenne enfin part à leurs activités. Je remercie Théo pour ses interprétations violonistiques chargées d'émotions. Je te souhaite de poursuivre avec toujours autant de passion et de plaisir ta pratique du violon, qui ne demande qu'à ce que l'on tende l'oreille. J'embrasse tendrement Solène et Hélia qui m'ont accompagné et soutenu à leur manière durant toutes ces années, veillant à ne pas me déranger pendant « les moments où je fais quelque chose avec Galilée et Newton ». J'enlace dans mes bras leur mère, Laure, entrepreneuse de solutions et d'occupations pour les enfants afin de me libérer de mes obligations paternelles. Je salue ton courage, Laure, pour avoir supporté mes absences et mes silences quand tu te préoccupais de mon bien.

Je suis heureux de vous savoir quotidiennement tous les quatre à mes côtés. Merci de m'avoir permis de faire cette thèse !

Table des matières

Remerciements	6
Table des matières	11
Introduction générale	19
I Le temps dans les <i>Principia</i>	31
1 Le concept de force	33
1.1 La force pré-newtonienne	33
1.1.1 La vertu solaire	35
1.1.2 La force de percussion	36
1.1.3 La force centrifuge	37
1.2 La force dans les <i>Principia</i>	41
1.2.1 Définition de la force	41
1.2.2 Expression mathématique de la force centripète	45
1.2.3 Comparaison des expressions de F_{IV} et de F_{VI}	53
2 La conception du temps	55
2.1 Lex II	56
2.1.1 Origine de la loi II	56
2.1.2 L'énoncé et le commentaire	58
2.1.3 Le choc huguenien	68
2.2 Un temps scindé	71
2.2.1 Le concept de temps avant les <i>Principia</i>	72
2.2.2 Le temps relatif	74
2.2.3 L'équation du temps	76
2.2.4 Temps absolu	80
2.3 Conclusion	87

II	La manipulation du temps dans les <i>Principia</i>	89
3	Les moyens mis en place	91
3.1	La Méthode des Premières et Dernières Raisons	91
3.1.1	Lemme I	92
3.1.2	Les lemmes II à XI	98
3.1.3	Conclusion	109
3.2	La loi des aires	111
3.3	La théorie des proportions	118
3.4	Conclusion	123
4	Le recours à la <i>Méthode des suites infinies</i>	129
4.1	Proposition x, livre II	129
4.2	Les différentes versions	136
4.2.1	Édition de 1687 — Énoncé et commentaires	137
4.2.2	Édition de 1713 — Énoncé et commentaires	145
4.2.3	La <i>Méthode des suites infinies</i>	154
4.3	Rectification de la <i>Princeps editio</i>	161
4.3.1	Les premiers essais	164
4.3.2	Les Premières corrections	167
4.3.3	Amélioration de l'argument	168
4.4	Conclusion	171
III	Les <i>Principia</i> : base des travaux de philosophie naturelle de Leibniz et de Varignon	173
5	La philosophie naturelle de Leibniz	175
5.1	Présentation des textes	176
5.2	Les <i>Marginalia</i>	177
5.3	Le temps dans les écrits postérieurs aux <i>Principia</i>	183
5.3.1	Le <i>Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente</i>	183
5.3.2	Le <i>Tentamen de motuum caelestium causas</i>	191
5.4	Temps et force dans les écrits de Leibniz	198
6	La mécanique varignonienne	203
6.1	Élaboration de la cinématique	204
6.2	La dynamique	214
6.2.1	Le mouvement dans le vide	215
6.2.2	Les milieux résistants	227

Conclusion générale	231
Annexes	242
Lemmes de la <i>Méthode des Premières et Dernières Raisons</i>	245
Occurrences du temps dans les propositions des <i>Principia</i>	249
Sources primaires	255
Sources secondaires	261

Table des figures

1.1	<i>De vi centrifuga</i>	39
1.2	Proposition vi, livre I des <i>Principia</i>	48
1.3	Détermination de la force centripète	52
2.1	Composition des mouvements	60
2.2	Compound Law de B. Pourciau	66
2.3	Valeur de l'équation astronomique en fonction de la date	77
3.1	Théorème de la vitesse moyenne 1	94
3.2	Théorème de la vitesse moyenne 2	94
3.3	Théorème du mouvement naturellement accéléré	95
3.4	Lemme II	100
3.5	Lemme VI	103
3.6	Lemme VII	104
3.7	Déformation de la figure du lemme VII	105
3.8	Lemme IX	105
3.9	Déformation de la figure du lemme IX	107
3.10	Lemme XI	109
3.11	Anomalie moyenne	112
3.12	Loi des aires	114
3.13	Passage d'un discret à un temps continu	117
3.14	Figure xxx, Livre II des <i>Principia</i>	120
3.15	Figure xxxix	125
3.16	Glissement par démultiplication	126
4.1	Proposition x - édition 1687	138
4.2	Proposition x - édition 1713	147
4.3	Fluxion newtonienne	155
4.4	Variation d'une grandeur non fluxionnelle	159
4.5	<i>Amélioration de l'argument 1</i>	169
5.1	Proposition 2 du <i>Schediasma de resistentia medii</i>	186

5.2	Calcul de la trajectoire	188
5.3	Figure de l'article V du <i>Schediasma de resistentia</i>	191
5.4	Figure générale du <i>Tentamen de motuum caelestium causes</i>	193
5.5	Agrandissement d'une partie de la figure générale du <i>Tentamen de motuum caelestium causes</i>	198
6.1	Courbes des temps, des vitesses et des forces	209
6.2	Diagramme du mémoire exposé le 31 mars 1700 à l'Académie royale des sciences	212
6.3	Proposition xxxix du livre I des <i>Principia</i>	218
6.4	Forces centrales tendantes à un même point	221
6.5	Proposition générale du mémoire du 13 Août 1707	228

Liste des tableaux

1.1	Comparaison de la force centripète F_{iv} et F_{vi}	53
2.1	Éphémérides de la comète de Halley	78
2.2	Équation astronomique	79
3.1	Représentation géométrique de grandeurs physiques	123
4.1	Dénomination des brouillons de la proposition x	163
5.1	Correspondance entre les concepts et leur dénomination	179
5.2	Modifications leibniziennes de l'énoncé de la proposition vi, livre i de la <i>princeps editio</i>	182
6.1	Règle générale	207
6.2	Règles générales des mouvements en lignes courbes	212
6.3	Règles générales des mouvements rectilignes	235

Introduction générale

Il est communément admis depuis Galilée que les phénomènes de la nature s'expriment en langage mathématique. Pour le professeur de Padoue, cela signifiait avant tout recourir à la géométrie pour expliquer les phénomènes. En effet, que le corps tombe en mouvement uniformément accéléré, qu'il parcourt des distances différentes avec des vitesses égales, c'est aux propriétés des lignes droites et des lignes courbes que Salviati¹ se réfère. De nos jours, en revanche, les physiciens font appel à un formalisme mathématique très perfectionné. Ainsi, la diffusion de la chaleur, la propagation d'une onde ou le mouvement d'un corps massif se exprime au moyen d'une équation algébrique.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{Équation d'ondes en 3D.}$$

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad \text{Principe fondamental de la dynamique.}$$

$$\rho_{cP} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P \quad \text{Diffusion de la chaleur en 3D.}$$

Cette représentation des phénomènes s'appuie donc sur des symboles chargés d'une signification qui a trait à la nature, et d'une manière plus générale, à la réalité matérielle perçue par nos sens ou qui peut être observée de manière concrète. Autrement dit, le physicien a converti la nature en objet mathématique. Et cette conversion interroge. Comment est-il possible, en effet, d'exprimer nos perceptions au moyen du langage mathématique, qui par définition s'adresse, à notre raison. Plus précisément, comment être sûr que les lettres utilisées dans les équations de la physique mathématique représentent effectivement la réalité naturelle ? Autrement dit, comment être sûr que le recours à la lettre t représente effectivement le temps ?

1. Dans les *Discours concernant deux nouvelles sciences*, Galilée met en scène trois personnages : Salviati, Sagredo et Simplicio. Chacun de ces personnages représente un courant de pensée du XVII^e siècle. Simplicio expose les doctrines aristotéliennes, alors que Sagredo, jeune étudiant en mathématique, refuse de croire toutes philosophies non démontrées rationnellement. Sagredo, enfin, présente les caractéristiques du professeur Galilée.

Selon E. Giusti², le fondement de la géométrie galiléenne réside dans une correspondance entre objets mathématiques et objets naturels, les premiers étant à la fois une abstraction et un dévoilement des seconds, une « cristallisation » de laquelle ressort leur essence épurée de la diversité du réel, faisant des mathématiques la première des sciences naturelles. C'est dans ce cadre très général de l'élaboration d'une mathématisation de la nature que s'inscrit notre thèse, qui porte sur la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie de la nature, emboîtant ainsi le pas aux travaux de M. Blay³ à ce sujet.

Comme nous le montrerons dans cette thèse, le temps n'a pas été objet de mathématisation avant Newton. Nous entendons par là que le temps ne fut pas considéré avant la publication des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* comme un objet mathématique utilisable dans la physique mathématique naissante. Il apparaît certes dans les démonstrations mathématiques des propositions keplériennes et galiléennes traitant du mouvement, mais ni l'astronome allemand, ni le professeur de Padoue ne l'ont défini ou caractérisé. Or mathématiser le temps, consiste, pour nous, à conférer au temps les propriétés mathématiques *ad-hoc* qui permettent, à la fois, de le signifier de manière mathématique, conformément à notre conception, et qui autorisent, de fait, le physicien à l'utiliser dans la description mathématique des phénomènes de la nature. En d'autres termes, mathématiser le temps relève d'un processus qui vise à rendre compte du temps au sein de la physique au moyen du formalisme et des méthodes mathématiques utilisés pour modéliser les phénomènes de la nature. Ainsi construit, le temps devient un objet mathématique manipulable dans la description des phénomènes de la nature. Le physicien peut l'insérer dans les phrases mathématiques et lui appliquer les règles opératoires du calcul à effectuer. Il peut additionner ou soustraire des temps. Il peut multiplier ou diviser un temps par une autre grandeur, dans le respect des règles d'homogénéité des calculs et des dimensions physiques. Mais le physicien est aussi en mesure d'exprimer l'*instant* comme la *durée*, levant ainsi le paradoxe de Zénon. Pour les philosophes du tournant des XVII^e et XVIII^e siècles, qui connurent, par l'introduction du calcul différentiel, une transformation des pratiques mathématiques dans le traitement des phénomènes de la nature, construire un temps mathématiquement manipulable revenait à intégrer ce dernier au champ des variables du calcul leibnizien. Autrement dit, élaborer un objet algébrique fondé sur le concept de temps déjà existant, de sorte qu'il représente une grandeur de la philosophie naturelle. Pour nous, qui situons la naissance de l'algèbre à cette même période, un « objet algébrique » est simplement une grandeur mathématique représentée par un signe ou un symbole.

De fait, le temps, avant la publication de l'œuvre maîtresse newtonienne, est encore à la fois cet être subjectif de la philosophie cher à Saint Augustin, qui relie passé

2. [Giusti \(2000\)](#)

3. [Blay \(1992\)](#)

et futur, et cet élément lié à nos sens, utilisé pour sa mesure, tels l'heure, le jour, le mois ou l'année, ou pour indiquer une date dans les tables astronomiques. La mathématisation du temps n'est en fait qu'une conséquence de la recherche par Newton d'une expression mathématique de la « force centripète ».

Le temps est un thème important de la philosophie, qui intéressa à la fois des philosophes, des sociologues et des scientifiques. Les premiers, philosophes et sociologues, ont surtout examiné le temps biologique⁴, c'est-à-dire la perception que l'être humain avait du temps lors d'une activité, selon son âge ou encore selon le rythme biologique. Ils se sont aussi attardés sur le temps social⁵, celui qui lie les hommes, au moyen de calendriers ou d'horloges alors que les seconds ont davantage étudié le temps scientifique, notamment les problèmes nés de sa mesure et de sa topologie. Il est cependant un aspect qui focalise tout autant l'attention des philosophes, des sociologues et des scientifiques : c'est la flèche du temps, c'est-à-dire, le fait que la nature ne peut défaire ce qu'elle a déjà fait, selon un même processus. Autrement dit, que le temps s'écoule toujours dans un même sens, nous empêchant ainsi de revivre notre enfance. Parmi les œuvres traitant du temps en général, la *Construction du concept de temps*⁶ est certainement la plus exhaustive de ces dernières décennies. H. Barreau y présente la somme des connaissances acquises à ce sujet. Toutefois, la partie dédiée à l'établissement du concept de temps mathématique nous a paru peu approfondie. Selon l'auteur, l'essor de la physique mathématique au xvii^e siècle, c'est-à-dire « l'usage délibéré et exclusif de la géométrie » comme langage des sciences, a permis l'introduction du temps « pris dans son essence mathématique » dans l'élaboration de nouveaux concepts physiques, et d'en faire ainsi un composant de la géométrie appliqué à l'expérience. Autrement dit, le temps est devenu un élément constitutif de la mécanique à travers l'essor de la philosophie naturelle au xvii^e siècle. Cette introduction, nous dit H. Barreau, prolonge la caractérisation mathématique du temps commencée par Platon et Aristote. H. Barreau retrace ainsi très sommairement la voie, mathématique, selon laquelle le temps est devenu un élément de la géométrie. Partant de la fin du xiv^e siècle⁷, avec les travaux des maîtres du Merton College à Oxford et ceux de Buridan à Paris, il poursuit directement avec ceux de Galilée, qui mettent en évidence le rôle du temps dans le mouvement des corps. L'étude de la chute des corps, notamment, aurait débouché sur une intuition « géométrique » de laquelle découlerait la notion de vitesse instantanée qui a permis l'élaboration du concept de temps mathématique. Une troisième étape

4. Barreau (1998)

5. Elias (1996)

6. Barreau (1982)

7. Barreau ne s'attarde pas sur cette période de l'histoire. Il mentionne seulement les travaux des maîtres anglais et ceux de Buridan relatifs à l'utilisation du temps dans des propositions traitant du mouvement, précisant ainsi qu'il n'ignore pas l'importance de cette période vis-à-vis du « développement de la mécanique ».

voit l'« incorporation » du temps continu dans les mathématiques. Nous ne sommes toutefois pas totalement en accord avec H. Barreau. Il est vrai que l'introduction du temps dans les mathématiques de la philosophie naturelle est à la base de l'établissement de nouveaux concepts, comme celui de vitesse, par exemple, dont nous traitons dans notre thèse. Cependant, nous pensons que le recours à la géométrie n'est pas suffisant pour faire du temps un concept mathématiquement manipulable tel que nous l'avons défini. Nous montrerons d'ailleurs à ce sujet que le recours au calcul leibnizien était une étape clé, sinon primordiale, dans l'aboutissement de ce concept. En outre, faire appel au temps pour expliquer les phénomènes de la nature et l'introduire dans les démonstrations géométriques des propositions traitant du mouvement ne nous semble pas être un tout suffisant pour faire du temps un concept mathématique. Cette reconstitution de l'histoire laisse à penser que la géométrie est la partie congrue des mathématiques pour la manipulation du temps. Nous montrerons justement à ce propos que la géométrie n'en permet pas le traitement mathématique. Elle suscite aussi l'idée que l'introduction du temps parmi les paramètres descriptifs des phénomènes de la nature est apparu de manière naturelle et spontanée à Galilée. Nous n'avancons sur ce dernier point aucune hypothèse. Nous pensons seulement que de par le fait de reposer les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* sur une méthode mathématique qui met en jeu le temps de manière implicite, celui-ci serait tout de même devenu un paramètre de la philosophie naturelle. De manière similaire, l'« incorporation » d'un temps continu dans les mathématiques suggère que la caractérisation du temps, telle qu'elle est énoncée par Newton dans ses *Principes*, était l'étape nécessaire attendue à l'achèvement du concept. Autrement dit, une fois caractérisé en *absolu*, le temps devenait de fait un objet mathématiquement et aisément manipulable. Or l'étude des propositions de ces principes montre à la fois une dichotomie du temps et une ambiguïté dans sa manipulation qui transparait à travers celle de la force. Nous sommes amenés à dire que la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable ne procède pas d'un simple fait.

À la croisée de plusieurs champs disciplinaires (mathématique des XVII^e et XVIII^e siècles, philosophie naturelle, philosophie du temps, astronomie, etc.), la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle renvoie à un vaste corpus bibliographique dans lequel nous avons constaté l'existence d'une faiblesse, de par l'absence de sources primaires et secondaires spécifiquement dédiées au temps mathématique et à son traitement. Plus précisément, l'historien des sciences (et le philosophe) n'a pas disserté expressément du temps dans les écrits mathématiques de la philosophie naturelle naissante (et de la physique actuelle), ni de sa mathématisation. Seul le temps absolu newtonien a focalisé son attention. Aussi, la thèse de H. Barreau nous apparaît comme une première approche à l'élaboration du concept de temps mathématique. De par les grandes lignes de l'histoire des sciences qu'elle mentionne, elle offre des pistes d'exploration que nous avons empruntées et à

partir desquelles nous avons en partie bâti notre thèse : travaux des « Calculatores » de la fin du Moyen-Âge, travaux de Galilée traitant du mouvement local, introduction du temps continu dans les mathématiques.

Toutefois, l'attention portée au temps absolu, qui a engendré de nombreuses discussions philosophiques, s'est focalisée essentiellement sur sa conception, métaphysique ou scientifique, ainsi que sur sa légitimité. Berkeley, en 1710, tirait déjà le signal d'alarme, dans ses *Principes de la connaissance*. Pour l'évêque irlandais qui ne concevait pas une réalité non susceptible de perception, le temps et l'espace absolus étaient sources d'« un grave danger du point de vue théologique ⁸ ». Il est vrai, nous rappelle A. Koyré ⁹, qu'à travers le scholie général, introduit dans la seconde édition, apparaît un fort caractère métaphysique marqué par l'affirmation des absolus et de leur lien indispensable avec Dieu. Mais selon E. Mach, ces absolus ne sont que de simples « conceptions métaphysiques vaines » à partir desquelles rien ne peut être démontré. Toutefois, tous ne pensent pas les absolus newtoniens comme de pures hypothèses arbitraires métaphysiques. R. Disalle ¹⁰ considère le temps absolu comme « un concept bien défini » caractérisé par des lois physiques qui précisent la manière dont il doit être utilisé et comment les quantités associées doivent être mesurées. Ces échanges entre philosophes à travers les siècles ne nous renseignent cependant pas sur la mathématisation du temps. I.B. Cohen semble être un des premiers à fournir une interprétation mathématique du temps absolu qu'il perçoit comme une « variable indépendante fondamentale qui flue uniformément composée de “particules” de temps infinitésimales ¹¹ ». Et, c'est en partie à F. de Gandt ¹² que nous devons un décryptage de son maniement dans la *Méthode des premières et dernières raisons*, la méthode mathématique employée dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*.

Ainsi, « Le temps absolu, vrai & mathématique, sans relation à rien d'extérieur, [qui] coule uniformément, & s'appelle *durée* ¹³ » fut le point de départ de nos investigations. Cependant notre travail n'est pas une thèse sur les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. L'histoire de leur genèse, leur contenu ou encore leur apport à la compréhension du monde postérieur au XVII^e siècle ne sont pas passés ici au peigne fin. Pour remédier à nos lacunes à ces sujets, nous avons bénéficié, entre autres, des écrits de I. B. Cohen, de M. Blay ou encore ceux de N. Guicciardini publiés ces dernières décennies et devenus ouvrages de référence en la matière. Dans l'œuvre maîtresse du « patron de la science anglaise » de la fin du XVII^e siècle, nous nous sommes essentiellement attardés sur la section des *Définitions*, sur celle des *Axiomes ou Lois du mouvement* et sur la *section 1* présentant la méthode mathématique employée. Nous avons

8. Berkeley, *Principles of human knowledge* cité par Koyré ; Koyré (2005), p.265.

9. Koyré (2005), *Espace absolu et temps absolu, le cadre de Dieu*, p.265-281.

10. Disalle (2002)

11. Newton (1999), p.116.

12. de Gandt (1986) ; de Gandt (1995)

13. Newton (1966b), p.8

aussi étudié en détails certaines propositions¹⁴ prises individuellement dans l'ouvrage. Ce fut le cas des propositions I et VI du livre I et de la proposition X du second livre, qui est le pivot de notre thèse : elle est en effet, l'unique proposition des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* dans laquelle le temps est à la fois symbolisé et mathématiquement manipulé¹⁵. Par ailleurs, notre propos est d'expliquer la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable, c'est-à-dire de montrer comment le temps apparaît dans les mathématiques de la philosophie naturelle et la manière dont le philosophe l'utilise. Nous avons organisé notre étude à la fois à partir des textes fondateurs de la mécanique et de ceux du calcul différentiel puisque nous situons cet événement à la charnière des XVII^e et XVIII^e siècles. Nous avons été confronté à des méthodes mathématiques qui nous étaient inconnues (et) dont il nous a fallu non seulement comprendre le fondement mais aussi apprendre le maniement. C'est seulement après cette immersion dans ces procédés mathématiques des XVII^e et XVIII^e siècles que nous avons pu aborder sereinement les propositions de la philosophie naturelle naissante, saisissant au passage la puissance et les subtilités des méthodes expressément développées. Nous avons ainsi pu analyser les différentes étapes qui constituent l'élaboration de la proposition X incluant, dans la première édition des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, un temps géométrique, c'est-à-dire un temps représenté par une portion d'espace, et qui laisse apparaître, dans sa version finale, la lettre « t » signifiant le temps. Il eut été probablement plus aisé de recourir au formalisme mathématique actuel pour appréhender cette dernière proposition et celles des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* en général. Mais cela nous paraîtrait anachronique et fallacieux. Anachronique car l'utilisation systématique du formalisme mathématique, et celle du calcul différentiel en particulier, est arrivée dans les démonstrations des propositions de la philosophie naturelle avec L. Euler en 1750. Trompeur car c'est sous-entendre que la *Méthode des premières et dernières raisons* est capable de traiter du continu. Or nous voyons à travers les diverses propositions des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* que Newton fut contraint d'être imaginaire pour l'exprimer. Il dut très souvent recourir à des expédients, voire même à la *Méthode des fluxions* dans le cas de la proposition X du second livre, pour arriver à sa fin. Enfin, faire appel au formalisme actuel ce serait aussi considérer les grandeurs newtoniennes comme des fonctions, notion qui émergea en mathématique qu'au milieu du

14. Nous avons établi à cet effet, et placé en annexe (Voir page 249), une liste des propositions des deux premiers livres des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* dans lesquelles le temps intervient d'un point de vue mathématique. Nous y précisons en outre sous quelle forme le temps est présent dans la proposition : application de la loi des aires, théorie des proportions, exprimé littéralement, etc.

15. Le temps est aussi représenté au moyen des lettres t et T dans la proposition XI du second livre des *Principia*. Toutefois, conformément à son énoncé : « Trouver par les phénomènes la résistance d'un globe qui se meut dans un milieu comprimé et très fluide », – Newton (1966b), p.377-393. – Newton résout cette proposition expérimentalement.

xviii^e siècle. De surcroît, cela reviendrait à expliquer la physique des xvii^e et xviii^e siècles avec l'œil du physicien du xxi^e. Et nous pensons avec H.J.M.Bos¹⁶, que « [...] la malheureuse habitude des historiens des sciences de traiter mathématiquement les problèmes physiques directement au moyen du symbolisme mathématique moderne a obscurci plusieurs aspects importants de la physique du dix-septième siècle ». L'historien des sciences, nous semble-t-il, a en partie pour tâche d'expliquer l'état d'une science à une période donnée à l'aide des moyens dont disposaient les scientifiques de cette période.

Nous repons de nous jours l'explication du mouvement d'un corps, terrestre ou céleste, sur la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique. Formulée dans sa pleine généralité¹⁷ $F = m \frac{d^2r}{dt^2}$, elle fait intervenir les grandeurs fondamentales de la discipline que sont la masse, (m), l'espace, (r), et le temps, (t). Autrement dit, le temps joue un rôle primordial dans la description des phénomènes de la nature. Et le lecteur moderne qui s'attarde à la lecture des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* constatera non seulement que Newton n'a pas fait jouer au temps le rôle prépondérant qu'il a dans la physique actuelle, mais aussi que les phénomènes de la nature n'y sont pas décrits par des équations, ni au moyen d'un formalisme élaboré. Le professeur lucassien a en effet recouru à la géométrie et à la langue commune pour démontrer ses *Principes*. La loi II, qui spécifie l'effet d'une force sur un corps s'énonce ainsi¹⁸ :

loi II

« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, & se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

Or le principe fondamental de la dynamique, pilier de la mécanique actuelle, nous explique la manière dont la vitesse d'un corps varie. Celle-ci change à un rythme proportionnel à la force appliquée. Il apparaît donc une filiation entre la loi II et le principe

16. Traduction de l'auteur, « ... the unfortunate habit of historians of science of transferring the mathematical treatment of physical problems directly into modern mathematical symbolism has obscured many important aspects of seventeenth century physics. » H.J.M. Bos pense même qu'une étude approfondie de l'influence des méthodes et des styles mathématiques sur le développement de la physique apporterait de nouveaux points de vue importants. ; Bos (1974), p.47.

17. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit généralement sous la forme $F = m \frac{dv}{dt}$. Toutefois, la vitesse étant définie par le rapport $v = \frac{dr}{dt}$, où r est le vecteur position, il nous est possible d'exprimer ce principe par l'équation $F = m \frac{d^2r}{dt^2}$.

18. Newton (1966b), p.17.

fondamental de la dynamique. Toutefois, la loi II reste muette au sujet du temps. Celui-ci est implicite et évoqué par « les changements qui arrivent » dus à l'impression d'une force. Ce temps s'apparente à un instant, celui du choc, faisant du passage de la forme primitive à la forme actuelle de cette loi le chemin à éclairer pour arriver à notre fin. Cependant, comment expliquer, en respectant notre propos sur l'utilisation des procédés mathématiques de la période étudiée, la voie qui mène de la forme rhétorique à la forme symbolique ? Autrement dit, comment mettre à jour le chemin qui mène de la loi II à la notation « t » signifiant le temps dans la deuxième loi de Newton ?

La loi II met donc aussi en avant la notion de choc entre deux corps, seul moyen au XVII^e siècle, pour expliquer la modification de mouvement d'un corps terrestre. Celle des astres, en revanche, avait deux visages. Sur le continent, les philosophes recouraient à la doctrine cartésienne des tourbillons. La matière céleste, tournant autour du Soleil qui occupe le centre d'un gigantesque tourbillon, emporte les astres et se trouve être ainsi la cause de leur mouvement. Les Britanniques, par contre, justifiaient ce mouvement par une force d'attraction dirigée vers le Soleil, dont Newton fournit l'expression géométrique dans ses *Principes*¹⁹ : $F = \frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$. Ainsi, de par l'attraction du Soleil, les astres modifient leur position à chaque instant. « La force centripète » met donc en jeu un temps sempiternel et continu en contradiction, *a priori*, avec l'énoncé de la loi II. Mais la « force centripète » et la force accélératrice²⁰ représentent des objets physiques équivalents. Elles doivent donc posséder la même dimension physique. De fait, la « force centripète » ne peut être réduite à un simple objet mathématique. Elle recèle donc un caractère physique et doit cacher en elle une dimension temporelle. En outre, nous ne reconnaissons pas la force accélératrice dans l'expression newtonienne. Celle-ci n'est pas explicite et nécessite d'être accompagnée d'une figure pour prendre tout son sens. Trouver le chemin qui mène de l'expression newtonienne à celle de la force accélératrice répondrait donc à notre problématique et justifierait la présence d'une lettre pour signifier le temps.

Enfin, la loi II, le principe fondamental de la dynamique et « la force centripète », pris conjointement, soulèvent un problème d'un autre genre. Ils montrent des temps qui semblent être de nature différente. Plus précisément, la loi II met en avant l'*instant* quand le principe fondamental de la dynamique et la « force centripète » impliquent une *durée*. Est-il possible de passer de l'*instant* à la *durée* ? D'après le célèbre paradoxe de la flèche, le temps est soit *instant*, soit *durée* et le passage de l'un à l'autre est impossible. Mais le temps de la mécanique est en tout point de même nature. De fait, *instant* et *durée* correspondent-ils à une même grandeur ? Aussi, quel est le pont qui les relie ?

Le temps est apparu de manière définitive dans les mathématiques de la philosophie

19. Cette expression renvoie à la figure du corollaire 1 de la proposition VI du livre I, dont l'étude fait l'objet de la partie 1.2.2.

20. Nous nommons ainsi la force qui vérifie le principe de la dynamique du fait qu'elle est proportionnelle à une accélération, par définition.

de la nature avec les travaux de Galilée et de Newton. Mais c'est dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* que le temps mathématique prend ses racines et se déploie pleinement dans cette nouvelle discipline. La recherche d'une expression mathématique de la « force centripète » est la première étape de la construction du concept de temps mathématiquement manipulable. Elle s'achève au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles avec la refonte de l'œuvre newtonienne entreprise par Varignon, qui aboutit entre autres à une nouvelle façon de traiter les problèmes du mouvement en science. À ce moment seulement, le temps est devenu indépendant, non seulement de la figure, qui était un support indispensable pour l'appréhender - jusqu'aux travaux de Varignon - mais surtout de tout contexte. Il est, à ce moment-là, le *temps absolu* newtonien, un être *per se* auquel les philosophes peuvent désormais recourir sans contraintes.

La refonte varignonienne des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* s'inscrit dans un vaste programme de test des capacités du calcul leibnizien à obtenir des résultats de manière plus simple et plus rapide que les méthodes alors employées. Dans le domaine de la philosophie de la nature, les résultats fournis par ce calcul vont au-delà de ceux obtenus par la *Méthode des premières et dernières raisons*, puisqu'il permet à la fois l'élaboration de la notion de *vitesse dans chaque instant* et la construction du concept de *force accélératrice dans chaque instant*. Les capacités du calcul leibnizien appliqué à la philosophie naturelle sont telles que la science du mouvement connaît dans les premières décennies du XVIII^e siècle une réorganisation et un développement²¹, qui voient naître, entre autres, de nouvelles disciplines internes à la philosophie naturelle. Le sommet de ce développement est atteint avec l'œuvre de L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* publiée en 1736, qui, selon N. Guicciardini²² « marque la fin des méthodes newtoniennes pour la philosophie naturelle ». La *Mechanica* eulérienne marque ainsi la ligne de partage des eaux entre la mécanique newtonienne, qui appartient désormais au passé, et la mécanique analytique naissante. Mais le calcul leibnizien ne s'est pas imposé de manière évidente. De vives discussions au sujet de sa validité et de sa véracité ont vu le jour au sein de nombreuses académies. Varignon, à l'Académie royale des sciences de Paris, essuya de sévères critiques, contre lesquelles il se battit avec opiniâtreté pour faire reconnaître aux académiciens français la justesse, la puissance et les capacités du calcul leibnizien.

Notre thèse est structurée en trois parties suivies d'une conclusion. Dans la première partie, dont l'objet principal est le traitement du temps dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, nous mettrons à jour l'existence d'une relation entre « force centripète » et temps. Cette partie se place à la fois sur un plan historique et sur un plan conceptuel en précisant simultanément les conceptions de la force et celles du temps chez Newton.

21. Blay (1992), p. 249-369.

22. Guicciardini (1999), p.11

L'analyse du temps dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* nous a montré qu'on ne peut parler de force sans traiter du temps. Aussi, dans un premier chapitre, nous reviendrons sur la conception de la force mathématique pré-newtonienne avant de traiter de celle-ci dans l'œuvre fondatrice de la philosophie naturelle. Remontant jusqu'aux travaux de Kepler, nous montrerons que Newton fut le premier à exprimer mathématiquement l'attraction subie par un corps. La proposition présentant l'établissement de cette expression est examinée d'un point de vue du temps. Nous traiterons dans un second chapitre la conception newtonienne du temps. Nous aborderons alors la loi II, dont nous retraçons un historique partant des travaux de l'*Horologium Oscillatorium* d'Huygens pour aboutir à la conclusion que la loi II, au même titre que sa loi-mère (la loi du choc huguenien), place le choc hors de la durée. Nous aborderons ensuite à travers le « temps absolu » et « le temps relatif » la double conception du temps dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. Il apparaît que ces deux temps sont les deux faces d'un même et unique temps liées par l'« équation du temps ».

La seconde partie prolonge l'étude du temps dans les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* en se concentrant toutefois sur sa manipulation mathématique. D'un abord technique, elle repose sur l'analyse de propositions de l'œuvre newtonienne. Elle expose les différents procédés mathématiques utilisés par Newton afin d'opérer avec le temps. Dans le chapitre trois, nous expliciterons tout d'abord la *Méthode des premières et dernières raisons* dans laquelle le temps apparaît de manière implicite, tout juste perceptible par le mouvement des points et des lignes. Nous en viendrons ensuite à la loi des aires qui fournit de manière directe l'estimation du temps par l'évaluation de l'aire balayée par la ligne joignant le centre de force au corps. Le chapitre quatre est consacré à la proposition X du livre second des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. Dans cette proposition, Newton recourt à la *Méthode des fluxions et des suites infinies* qui repose sur une conception cinématique des mathématiques. Le temps en est donc un des paramètres centraux. Toutefois, nous réfutons le terme « temps », communément admis et utilisé par de nombreux commentateurs de Newton, qu'elle fait intervenir. Celui-ci flue, certes, de manière uniforme mais n'a pas la dimension physique du temps réel. Nous sommes d'accord, par ailleurs, sur ce point avec N. Guicciardini : « Le temps de la *Méthode des fluxions* n'est pas le temps réel. C'est un temps mathématique ». Aussi, l'emploi de ce terme dans la *Méthode des fluxions* est trompeur. Nous pensons, en outre, que le temps fluxionnel est la source de la caractérisation du *temps absolu*, qui est celui qui a été retenu dans notre civilisation moderne.

Cette proposition joue un rôle central dans notre thèse, puisqu'elle est la seule²³ à

23. Les symboles t et T écrits par Newton pour signifier le temps n'apparaissent cependant que dans les seconde et troisième éditions.

contenir un signe pour représenter le temps. Nous construirons de fait notre thèse autour de cette proposition, dont nous analyserons les différentes versions éditées ainsi que l'ensemble des rectifications successives, publiées par D.T. Whiteside²⁴, afin de faire ressortir une explication du recours au symbolisme par Newton pour signifier le temps. Nous nous intéresserons ici au maniement mathématique du temps, et non, comme l'ensemble des commentateurs qui se sont arrêtés sur cette proposition, à la rectification de l'erreur commise dans la première édition, dont Newton a eu connaissance par un membre de la famille Bernoulli.

La troisième partie présentera l'œuvre newtonienne revisitée par Leibniz et Varignon. Elle examinera une partie de leurs travaux de philosophie naturelle basés sur les *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. Dans le chapitre cinq, nous étudierons les annotations marginales leibniziennes de quelques propositions du manuscrit de Newton. Nous voyons que le calcul leibnizien se prête assez bien à l'écriture des propositions des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*²⁵.

La deuxième partie du chapitre sera consacrée à la philosophie naturelle leibnizienne, qui est le support d'un système du monde, à l'opposé de celui de Newton, dans lequel le temps et l'espace sont des grandeurs relationnelles, et non plus des *absolus*. Le chapitre six sera dédié à la mécanique varignonienne. Elle consiste en la généralisation de la procédure mathématique, qui a conduit à la réduction de l'ensemble des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* à quelques « règles générales » du mouvement et a donné un nouveau statut aux grandeurs utilisées.

24. Newton (1981), p.312-424.

25. Certains commentateurs de Newton font mention de « traduction » des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. Nous pensons qu'il s'agit plutôt d'une refonte ou d'une reformulation de ces principes mathématiques. « Traduire » n'est pas seulement remplacer un mot d'une langue par un mot d'une autre langue. Dans le cas d'un texte, c'est choisir des mots dans un corpus linguistique et opter pour une structure grammaticale afin de rendre le texte traduit le plus fidèle à l'original. Transposé à notre propos, cela implique de recourir à des procédés qui conservent l'essence de la *Méthode des premières et dernières raisons*. Or rien, exceptée elle-même, ne préserve l'essence de la *Méthode des premières et dernières raisons*. Aussi, noter « dt » à la place des termes « commencement du mouvement » ou de l'expression « particule de temps » n'est pas traduire en langage leibnizien un temps infiniment petit. C'est exprimer autre chose. Selon le sens leibnizien, à « dt » correspond un quelconque intervalle de temps fini infiniment petit, alors que l'expression newtonienne « particule de temps » recèle une durée destinée à tendre vers zéro et que le « commencement du mouvement » spécifie l'instant du phénomène considéré en sous-entendant une durée extensible. Celui-ci n'est donc pas quelconque. Aussi, recourir aux notations leibniziennes pour exprimer les mathématiques des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, c'est dénaturer le propos initial. En recourant au calcul différentiel, Varignon va au-delà de ce qu'a fait Newton. Il atteint des résultats nouveaux et une réorganisation des méthodes d'analyse des phénomènes naturels se met en place. La formulation, différente, devient plus claire et rend possible l'accès à de nouvelles disciplines. La mécanique commence à quitter le domaine des mathématiques appliquées pour intégrer celui de la physique naissante.

Enfin, une conclusion retracera brièvement notre histoire de la construction du concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle en y intégrant des éléments historiques et épistémologiques du symbolisme mathématique. Elle se veut ainsi être une ouverture sur l'utilisation de la notation mathématique dans la description des phénomènes naturels.

Première partie
Le temps dans les *Principia*

Chapitre 1

Le concept de force

Le concept de force constitue le cœur des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*¹, rédigés par Newton et publiés à Londres en 1687. Dans cette œuvre, Newton livre, pour la première fois en philosophie naturelle, une expression mathématique générique de la force et se propose de l'établir au cas particulier. Cependant, le concept de force n'apparaît pas en philosophie de la nature avec les *Principia*. Le rapide survol que nous présentons ici a pour objectif de rappeler, de façon sommaire, les étapes de la construction mathématique du concept de force qui précèdent la publication de l'œuvre majeure newtonienne.

Le concept de force mathématique pré-newtonien ne considérait pas le temps comme un élément fondamental de son expression. Or, nous pensons que la recherche d'une expression mathématique de la force est la raison de l'introduction du temps en tant que paramètre mathématique indépendant. Autrement dit, le concept de temps mathématiquement manipulable s'est construit autour de la recherche d'une expression mathématique de la force par Newton. Aussi, nous ne nous attarderons pas sur des auteurs, tels que Descartes ou Borelli, qui n'ont pas traité de la force sous un angle mathématique, faute de disposer de l'appareil mathématique suffisant ou qui n'ont pas pris suffisamment en considération le concept de force dans leur philosophie. Nous nous concentrerons davantage sur les doctrines qui ont fait émerger le concept de force mathématique aboutissant à l'expression mathématique formulée par Newton dans la proposition VI, livre I des *Principia*.

1.1 La force pré-newtonienne

Le développement du concept de force a pris un tournant significatif au début du XVII^e siècle, période à laquelle Kepler a recherché, pour la première fois une explica-

1. Nous nommerons cette œuvre, par la suite, *Principia*.

tion rationnelle au mouvement des planètes. Jusqu'alors, le concept de force reposait essentiellement sur des caractéristiques qualitatives faisant appel à divers champs. Initialement, la force était considérée comme une chose qui demeurait dans les corps vivants mais aussi dans les éléments naturels, comme une pierre ou le vent, expliquant ainsi leur vitalité. Elle apparaît aussi comme une notion de divinité. La « force divine » n'est pas seulement la force violente et brutale, mais elle est aussi un élément d'ordre de l'univers et de la morale. Le concept de force présent dans les modèles de pensée des civilisations anciennes a des liens très proches avec les idées religieuses. La doctrine platonicienne de la force comme émanation de l'âme en est une illustration. Mais le monde grec a laissé un grand nombre de conceptions de la force. Toutes, cependant, sont qualitatives. De la pensée aristotélicienne, par exemple, il ressort :

1. Une force inhérente à la matière, qui découle de la conception platonique de la force. C'est la *physis*.
2. Une force, émanant de la substance, qui est la cause du mouvement d'un second objet.

Ces forces, inséparables de l'objet, en sont le moteur et l'unique façon, pour Aristote, d'expliquer le mouvement. Aristote concevait plusieurs genres de mouvement, dont le mouvement local primait. Celui-ci était à son tour divisé en plusieurs types :

- Le mouvement circulaire qui est continu, uniforme, complet en lui-même et éternel.
- Le mouvement rectiligne, incomplet, périssable mais ni infini et ni éternel.
- Le mouvement composé des deux précédents.

Le mouvement local comportait aussi deux catégories : le mouvement « naturel » et le mouvement « violent ». Le mouvement « naturel » est celui réalisé par un corps qui regagne son lieu « naturel ». Il ne nécessite aucun effort particulier. Il se fait naturellement. C'est un procédé d'une tendance intérieure au corps.

A l'opposé, le corps mû contre son inclination naturelle subit un mouvement « violent », dépendant d'une puissance extérieure. Ainsi, une pierre lancée vers le ciel, subit un mouvement « violent » lors de sa montée dans les airs, avant de retomber au sol selon son mouvement « naturel ».

Aussi, la persistance du mouvement des projectiles pose un problème. C'est pour lever ce paradoxe que les scolastiques ont utilisé le concept d'« impetus ». L'« impetus » élaboré par Buridan ne cache pas les mêmes notions que celui de ses contemporains. Il s'agit, pour Buridan, d'une force permanente qui s'épuise si le corps rencontre une force opposée, alors que ses contemporains y voient ce qui maintient de façon naturelle le mouvement du corps, imprimé par une puissance ou une force. La notion de force, selon Aristote, et l'« impetus » restent mal définis et n'ont pas fait l'objet, par leur auteur, d'une mathématisation, même simple.

1.1.1 La vertu solaire

Une étape décisive dans le développement du concept de force apparaît avec Kepler. Ce dernier aborde le concept de façon nouvelle, en considérant simultanément astronomie et physique, qui, selon lui, sont deux disciplines qui ne peuvent être séparées². Il est, nous dit Caspar, l'un des premiers à avoir posé le problème du mouvement des planètes en termes de force³.

Cette recherche d'une explication dynamique du mouvement planétaire constitue un problème majeur de l'*Astronomia Nova*, dans laquelle la gravité est abordée comme « une affection mutuelle entre deux corps qui tendent à s'unir »⁴. Mais il focalise principalement son attention sur le mouvement des planètes autour du Soleil. Il l'explique en empruntant à la conception magnétique de la gravité de Gilbert, qui lie le Soleil et les planètes par des chaînes magnétiques.

Mais cette vision de la force ne doit en aucun cas cacher l'essence de la force. Elle est une faculté d'animation. Ainsi dans le *Mysterium Cosmographicum*, publié pour la première fois en 1596, elle prend la forme d'une âme animant les corps célestes, alors que dans l'*Astronomia Nova*, publié treize ans plus tard, elle est vue comme une *specie immateriata*, dont le siège est le Soleil. Ces *specie immateriata*, toutefois, sont susceptibles de traitement mathématique. Celui-ci repose sur des résultats d'observations de la voûte céleste et de la planète Mars en particulier, menées sur plusieurs années par Tycho Brahe déjà reconnu à cette époque, comme un astronome particulièrement méticuleux. Le moteur de la recherche keplérienne fut la validation de sa représentation physique du monde. En d'autres termes, Kepler cherchait à démontrer que son hypothèse selon laquelle le mouvement des planètes est dû à une force d'origine magnétique émanant du Soleil et imposant une vitesse inversement proportionnelle à la distance séparant la planète du Soleil s'accordait bien avec la théorie des Anciens. Ceci déboucha sur ce que nous nommons actuellement la deuxième loi de Kepler. L'astronome allemand concevait ainsi la force comme l'élément intermédiaire entre la variation de la distance et celle de la vitesse. Elle devint un concept relationnel.

Kepler se situait à la frontière de deux mondes divergents sur l'explication du mouvement des planètes. Le monde ptoléméen, justifiant le mouvement des corps célestes selon les thèses et spéculations aristotéliennes, et celui, dont il est l'un des investigateurs, marqué par l'exploration de la nature et de ses secrets, en particulier ceux du ciel

2. « Ich glaube, daß beide Wissenschaften so eng miteinander verflochten sind, daß die eine ohne die andere nicht zur Vollkommenheit gelangen kann » ; Kepler (1929), p.53. « Je pense que les deux sciences sont si étroitement liées, qu'une sans l'autre ne puisse atteindre la perfection » ; traduction de l'auteur.

3. « Kepler hat bereits angestrebt, was Newton vollbracht hat ; er hat das Problem gestellet, dessen Lösung Newtons Genie gelungen ist ». Kepler (1929), p.52. « Kepler a ambitionné ce que Newton a accompli. Il a posé le problème que le génie newtonien a résolu » ; traduction de l'auteur.

4. « Gravity is a mutual affection among related bodies which tends to unite and conjoin them [...] ». *Gesammelte Werke*, vol.3, p.25, cité par Jammer, Jammer (1957), p.85

étoilé. Son objectif s'inscrivait dans la recherche des causes profondes du mouvement, comme le rappelle Caspar ⁵.

« Mon but est de montrer que la machine céleste n'est pas de nature divine mais plutôt, pour ainsi dire, un mécanisme d'horloge, dans la mesure où presque tous les mouvements proviennent d'une simple et unique force magnétique ; de même que pour une horloge tous les mouvements proviennent d'un simple poids. Et je montre aussi comment cette représentation physique doit être arithmétiquement et géométriquement présentée ».

Cette force magnétique est nécessaire pour maintenir l'astre en mouvement autour du Soleil. Elle est un fait physiquement démontré par ses effets, ce que souligne la relation mathématique entre la vitesse et la distance.

L'idée d'une force centrale orientée du Soleil vers la planète est généralement acceptée au milieu du XVII^e siècle. Elle procède d'une lente diffusion de l'hypothèse képlérienne au cours de la première moitié du siècle. Toutefois, bien qu'elle rencontre des adeptes, tel que Borelli, qui se penchent sur la justification, non encore levée, du mouvement des planètes selon une ellipse, tous ne sont pas du même avis. Selon Boulliau ⁶, ce ne serait que pure imagination sans lien au fait. Pour celui-ci, le fait fondamental que constitue la variation de vitesse d'une planète sur son orbe est de nature divine. En référence à sa doctrine métaphysique, il avance l'argument que le principe de l'action doit résider dans l'agent lui-même. A l'image du feu qui contient la combustion ou de celle de la lumière contenant le principe d'illumination, le mobile possède la cause de son mouvement ⁷. Boulliau ne fournit cependant pas d'explication sur la forme de l'orbe des planètes.

1.1.2 La force de percussion

La contribution galiléenne au concept de force est complémentaire de celle de Kepler. Galilée a abordé le concept de force par l'aspect cinématique du mouvement. La force est, pour le padouan, avant tout et principalement un concept physique lié au mouvement. Il écrit, à cet effet, dans ses travaux de jeunesse, en référence aux *Mécaniques* ⁸,

5. « Mein Ziel ist es zu zeigen, daß die himmlische Maschine nicht eine Art göttlichen Lebenswesens ist, sondern gleichsam ein Uhrwerk, insofern nahezu alle die mannigfaltigen Bewegungen von einer einzigen ganz einfachen magnetischen körperlichen Kraft besorgt werden, wie bei einem Uhrwerk alle Bewegungen von dem einfachen Gewicht. Und zwar zeige ich auch, wie diese physikalische Vorstellung rechnerisch und geometrisch darzustellen ist ». Kepler (1929), p.53 ; traduction de l'auteur.

6. Jammer (1957), p.92.

7. Jammer (1957), p.93.

8. Tiré de Vilain (1996), p.78. La résistance dont parle ici Galilée désigne le corps à mouvoir.

« Une force qui est moitié moindre que la résistance pourra mouvoir celle-ci, dès lors qu'elle se meut avec une vitesse double, ou si l'on veut sur une distance deux fois plus grande que la résistance ».

Le travail de Galilée fut d'introduire la percussion, action instantanée, d'une part dans le cadre des machines simples et d'autre part au traditionnel problème de la statique des XVI^e et XVII^e siècles. Autrement dit, il ramena l'action instantanée de nature inconnue à une force de nature connue, telle que le poids. Il considéra aussi le produit du poids par la vitesse de déplacement du corps. Il est en effet plus facile d'entailler une pièce de bois en élevant une hache pour frapper la pièce qu'en posant simplement sur la pièce la hache surmontée éventuellement d'une grande masse. Mais cette force équivalente « poids » n'est ni plus ni moins celle de conception archimédéenne sans autre analyse.

Torricelli systématisera la pensée galiléenne de *momento* qui traduit l'action de la force en un instant. L'idée de *momento*, idée dynamique, provient d'un concept d'origine statique. Le transfert du domaine statique au domaine dynamique introduisit ainsi une temporalité dans le concept de force. La percussion est alors l'accumulation, en un seul instant, de tous les *momento*. Autrement dit, pour Galilée, la force est une séquence continue d'impulsions instantanées ajoutées les unes aux autres. La percussion est ainsi sans commune mesure avec la force exercée en un instant par le poids. Selon C. Vilain, cette analyse de la force de percussion par Torricelli se révèle judicieuse puisqu'elle « met l'accent sur le véritable problème : celui de la temporalité du choc⁹ ». Elle n'en donne pas cependant le sens qui apparaîtra en physique newtonienne. Aussi, il semblerait que parler, au XVII^e siècle, de la force de collision ne soit possible qu'en se référant à la somme des produits des corps par leurs vitesses.

1.1.3 La force centrifuge

Les travaux menés par Huygens sur la force centrifuge constitue une deuxième étape déterminante dans le développement de la mathématisation du concept de force précédant les travaux newtoniens. Huygens établit l'expression mathématique de la force centrifuge comme fonction de la vitesse orbitale¹⁰. Il énonce ses résultats dans l'*Horologium oscillatorum*, publié en 1673. Les résultats n'y sont ni démontrés, ni discutés, simplement énoncés dans la cinquième et dernière partie de l'œuvre. Selon J. G. Yoder¹¹, H. J. M. Bos¹² et C. Vilain¹³, Huygens était déjà en possession de ces tra-

9. Vilain (1996), p.79

10. Avec notre notation moderne, la force centrifuge se note $F = m \frac{v^2}{r}$, où m est la masse du corps, v , sa vitesse et r le rayon de la trajectoire circulaire.

11. Yoder (1988)

12. Huygens (1986)

13. Vilain (1996)

vaux en 1659, qu'il aurait portés dans un petit traité, le *De Vi Centrifuga*, non publié de son vivant. Il s'agissait, en 1659, selon C. Vilain, d'une mise au point dynamique, d'« une conceptualisation de ce qui n'était qu'une notion, qu'une intensité mal définie : la force ¹⁴ ».

La force centrifuge, selon le *Discours de la pesanteur*, « est [donc] un effet constant du mouvement circulaire » qui « [...] semble directement opposé à celui de la gravité, [...] ¹⁵ ». Autrement dit, pour un corps se déplaçant en ligne droite, cet effet peut être mesuré par la distance dont le mobile est dévié, durant une petite unité de temps. Or mesurer l'effet responsable de la déviation correspond, pour Huygens, à mesurer le « conatus » ¹⁶. Le concept de « conatus », au XVII^e siècle, était perçu comme l'action, la tendance subie par un corps durant un court intervalle de temps constant. Il est devenu une notion quantitative principalement avec Huygens ¹⁷. La notion de « conatus » était toutefois déjà présente à l'époque romaine et utilisée dans le sens d'inclination naturelle. Originellement le terme « conatus » signifie *effort, impulsion*.

La mise en comparaison de la force centrifuge à celle de la gravité dans le *Discours de la pesanteur*, ou dans le traité révisé de 1703 ¹⁸, apparaît, pour Huygens, comme un moyen d'évaluation de la force centrifuge, « car de même que l'on ne peut mesurer un temps que par un autre temps, on ne peut mesurer une force que par une autre force et non directement par une longueur ¹⁹ ». Cette procédure de comparaison semble être la façon de déterminer la valeur de la force aux XVII^e et XVIII^e siècles. Newton se réfère lui aussi à ce procédé ²⁰.

« [...] Or connaissant d'un côté la descente des graves, et de l'autre le temps de la révolution, et l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le corollaire 9 de cette proposition, la proportion cherchée entre la gravité et la force centripète. C'est par des propositions semblables que M. Huygens, dans son excellent traité de *Horologie oscillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent ».

Voyons, en nous fiant à la reconstitution de la procédure huguenienne par J. G. Yoder ²¹, comment Huygens s'y est pris pour déterminer la force centrifuge. J. G. Yoder modifie le diagramme présenté dans le *De Vi Centrifuga*. Elle le simplifie à l'essentiel

14. Vilain (1996), p.151.

15. Huygens (1992), p.164.

16. « For Huygens, the *conatus* of a moving body was measured by the distance that it covered, under the action of a given force, within a unit of interval of time », Jammer (1957), p.111.

17. Jammer (1957), p.111.

18. Vilain (1996), p.159.

19. Vilain (1996), p.157

20. Newton (1966b), p.38.

21. Yoder (1988), p.19-22

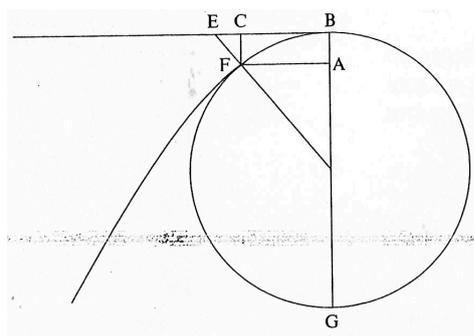


FIGURE 1.1 – Figure du *De vi centrifuga* simplifiée par J. G. Yoder.

(figure 1.1); des rayons tracés par Huygens, elle n'en garde qu'un seul. Elle nomme les points intervenant explicitement dans la démonstration. Elle ajoute, enfin, un segment auxiliaire CF, perpendiculaire à la tangente BE.

La parabole BF représente la trajectoire suivie par le corps en chute libre. Le cercle BFG est celle sur laquelle le corps se déplacerait s'il était soumis uniquement à la force centrifuge. Le diamètre du cercle égale le latus rectum de la parabole, de sorte qu'elle est définie par l'équation $CB^2 = CF \cdot BG$, dans laquelle F, très proche du point B, est considéré appartenir à la fois à la parabole et au cercle.

Dans le temps mis à parcourir l'arc de cercle \widehat{BF} en partant de B pour atteindre F, le corps, s'il se déplaçait le long de la tangente de façon uniforme, atteindrait, en partant du point B, le point précédant le point E²², prolongation du rayon passant par F et de la tangente. EF correspond donc à la distance parcourue par le corps, dans une unité de temps donné, sous l'effet de la force centrifuge. L'évaluation du segment EF correspond donc à celle du « conatus ». Elle fournira donc la valeur de la force centrifuge.

Les segments EF, CF, EB et CB sont tous considérés comme infinitésimaux, de sorte que EF peut être égalé à CF, et EB à CB. Ainsi, l'équation de la parabole, $CB^2 = CF \cdot BG$, après identification des longueurs, devient $EB^2 = EF \cdot BG$.

Et considérant FB infiniment petit et égal à EB, il advient que EF est égal au carré de l'arc FB^2 divisé par le diamètre du cercle BG, qui est une expression pour la force centrifuge.

Le concept de force fut traité mathématiquement à partir des travaux de Kepler. Toutefois, son idée de force, initialement pensée comme une âme, devint concret à partir du moment où il réalisa que la cause motrice des planètes diminuait selon l'inverse

22. « [...] that body, if released at B, would move inertially along the tangent line with a uniform rate to a point just shy of E, [...] »; Yoder (1988), p.21.

de la distance les séparant du soleil²³ :

« Si vous substituez le mot “ âme ” par le mot “ force ”, vous avez le principe sur lequel la physique céleste du traité de Mars etc. est basée ... Autrefois, je croyais que la cause du mouvement des planètes est une âme, fascinée comme je l'étais par l'enseignement de Scalinger sur les intelligences motrices. Mais quand je réalisai que ces causes motrices s'atténuaient avec la distance au Soleil, j'en vins à la conclusion que cette force est quelque chose de corporel, si ce n'est pas proprement ainsi, du moins dans un certain sens. »

La diminution apparente en $1/r$ est le résultat d'investigations mathématiques de la cause profonde du mouvement des corps célestes. Le concept de force selon les modèles aristotélien, ptoléméen ou encore ceux des médiévaux, comme Buridan ou Scalinger, ne pouvait aboutir à une formulation mathématique. Cette dernière demandait, en effet, un fondement ne reposant pas sur les doctrines déjà existantes mais exigeait une transformation du concept selon de nouvelles bases objectives. L'approche keplérienne qui s'attarde sur les faits réels et qui repose sur des mesures objectives ouvre une nouvelle voie à la compréhension du monde. Cependant, les concepts de base de la philosophie naturelle n'apparaissent pas encore de façon évidente. Ainsi, le temps n'est pas, pour Kepler, un paramètre privilégié de la physique. C'est à partir de Galilée que le temps sera introduit en tant que tel en philosophie naturelle. Toutefois, malgré les recommandations galiléennes, à savoir d'exprimer le mouvement en fonction du paramètre temps, le concept de force ne prendra pas en compte celui de temps avant les travaux newtoniens. L'exemple de la force centrifuge illustre clairement ce propos. Huygens, fin mathématicien, était resté fidèle aux pratiques mathématiques des xvi^e et $xvii^e$ siècles. Il considérait un intervalle de temps donné durant lequel il étudiait la dynamique du système considéré.

Nous verrons alors apparaître, avec Newton, une utilisation originale du temps dans les mathématiques de la philosophie naturelle. Il n'hésitera pas à introduire de nouvelles procédures et à faire des entorses aux pratiques communément admises afin d'obtenir l'expression mathématique de la force recherchée. Il ira même au-delà puisque dans la proposition x du second livre, il représentera le temps à l'aide d'un symbole.

23. « If you substitute for the word “ soul ” the word “ force ”, you have the very principle on which the celestial physics of the treatise on Mars etc. is based ... Formerly I believed that the cause of the planetary motion is a saoul, fascinated as I was by the teaching of Scalinger on the motory intelligences. But when I realized that these motive causes attenuated with the distance from the sun, I came to the conclusion that this force is something corporeal, if not so properly, at least in a certain sense » ; *Mysterium Cosmographicum*, édition de 1621 citée par Jammer, [Jammer \(1957\)](#), p.90 ; traduction de l'auteur

1.2 La force dans les *Principia*

1.2.1 Définition de la force

Le mot *force* était en ces temps employé au gré de chacun. Galilée, nous l'avons vu, ne l'utilise pas à propos de la chute des corps, qu'il attribue à la gravité. Mais celle-ci n'est pas une grandeur. Descartes l'emploie sous diverses formes ; le poids, son produit par la hauteur de chute, etc. Quant à Leibniz, il introduira la *force vive*, c'est-à-dire l'énergie cinétique actuelle, alors qu'Huygens préférera la *force centrifuge*, qu'il attribue à l'effet directement opposé à la gravité.

Newton, conscient de cette pratique, théorise la notion de force. Il appelle *force*, *vis* en latin, ce qui fait violence à l'état naturel d'un corps, reprenant ainsi l'idée antique aristotélicienne, selon laquelle le mouvement naturel d'un corps céleste était circulaire uniforme, et celui d'un corps terrestre était orienté vers le bas, vers le centre de la Terre. Tout autre mouvement découlait d'une action violente qui dérangeait l'ordre des choses. La *vis* est donc l'élément perturbateur de l'état naturel des choses, c'est-à-dire celui qu'elles ont par elles-mêmes. Toutefois, Newton ne reprend pas *in extenso* la thèse aristotélicienne. Il y modifie l'idée d'état naturel d'un corps. La définition de ce qui doit être tenu, pour Newton, d'état naturel d'un corps constitue l'énoncé de la *Lex Prima*²⁴ :

Première Loi.

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

Ainsi, repos et mouvement rectiligne uniforme constituent le nouvel état naturel d'un corps. Le repos devenant dès lors un mouvement, celui de vitesse nulle. Cet état, appelé *vrai* et défini par rapport à un espace absolu dont Newton précise les caractéristiques dans le scholie final de la section précédente, n'est modifié que par l'intervention d'une force extérieure. Toutefois, l'axiome se restreint à énoncer les seules conditions selon lesquelles le corps conserve son état naturel. Rien n'est précisé quant à la force agissante sur le corps. Nous sommes alors en droit d'attendre une définition générale de la force. C'est malheureusement peine perdue. Les *Principia* n'en fournissent aucune.

24. [Newton \(1966b\)](#), p.17.

C'est donc vers la section des *Définitions* qu'il faut nous tourner pour appréhender la notion de force newtonienne. Celle-là consacre six des huit définitions que la section contient à la force. La *Définition III*, première occurrence de la force, s'énonce ainsi ²⁵ :

Définition III.

« La force qui réside dans la matière (*vis insita*) est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévère de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite ».

Elle définit la force d'inertie, ce par quoi le corps conserve l'état inertiel dans lequel il se trouve. Est-ce cependant une force si on s'en réfère à la *Lex Prima*? Selon M. Blay, « la *vis insita* ne doit pas être confondue avec une force au sens où nous l'entendons aujourd'hui, ni non plus avec une force vive » ²⁶. Par contre, G. Barthélémy pense qu'il est difficile, voire impossible de répondre à la question, « puisqu'il manque une définition générale du concept » ²⁷. Elle semblerait plutôt être une cause de la conservation du mouvement. Elle n'apparaît, de plus, au lecteur moderne, d'aucun apport (quant à la notion de force) puisque l'état naturel ne demande pas, par définition, de causes pour être atteint.

La second emploi de la force est introduit par la *Définition IV* ²⁸ :

Définition IV.

« La force imprimée (*vis impressa*) est l'action par laquelle l'état du corps est changé, soit que cet état soit le repos, ou le mouvement uniforme en ligne droite. »

Elle est la force qui contraint le corps à modifier l'état dans lequel il se trouve. Elle existe uniquement dans l'action et ne subsiste plus dans le corps, dès que l'action vient à cesser. Et, en suivant Newton, c'est la *vis insita* qui permet au corps de persévérer dans le nouvel état dans lequel il se trouve. Elle est de fait, selon G. Barthélémy, le complément logique de l'idée d'inertie et lui est indissolublement liée. « La loi I ne peut dire ce qu'est l'état naturel sans préciser que sa condition est l'absence de forces imprimées. La *Définition IV* ne peut présenter la force imprimée sans dire que son effet est un changement d'état inertiel. Cette notion de force manquait dans l'idée d'inertie que les prédécesseurs de Newton avaient envisagée ²⁹ ». Parmi les « origines » de la force imprimée se trouvent le « choc », « la pression », mais surtout la « force centripète », qui est l'objet de la *Définition V* ³⁰ :

25. Newton (1966b), p.2.

26. Blay (1995), p.41

27. Barthélémy (1992), p.62.

28. Newton (1966b), p.3.

29. Barthélémy (1992), p.63.

30. Newton (1966b), p.3.

Définition v

« La force centripète est celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, soit qu'ils soient tirés ou poussés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque. »

La *vis centripeta*, telle qu'elle est définie, apparaît être un nouveau concept, dont le nom, inventé en hommage à la force centrifuge d'Huygens³¹, est inconnu du contemporain de Newton. Avec cette définition, Newton prend son indépendance vis-à-vis de la philosophie mécaniste continentale, selon laquelle une modification de mouvement ne pouvait résulter que d'une action de contact entre plusieurs corps. Mais c'est du commentaire de la définition que proviennent les explications de ce que Newton entend par « force centripète ». En reprenant l'exemple cartésien de la fronde, il met l'accent sur cette notion : « La pierre qu'on fait tourner par le moyen d'une fronde » a un mouvement circulaire aussi longtemps qu'elle est reliée à la corde. La pierre quitte sa trajectoire circulaire initiale aussitôt que nous ne la retenons plus dans cette trajectoire à l'aide de la corde. Elle a alors un mouvement rectiligne uniforme tangent au cercle qu'elle décrivait précédemment. La force qu'exerce la main pour retenir la pierre, par l'intermédiaire de la corde, est constamment orientée vers la main, centre du cercle décrit. C'est cette force que Newton appelle *force centripète*, qui est, selon Jammer, le réel point de départ de toutes considérations de la notion de force³². Or s'il en est ainsi pour la pierre retenue par la fronde, il doit en être de même de « la force magnétique qui fait tendre le fer vers l'aimant », de la « force qui retire continuellement le corps du mouvement rectiligne uniforme et le contraint à circuler sur des courbes », mais surtout de la gravité « qui fait descendre les corps vers le centre de la Terre ». De par ces exemples tirés de la vie quotidienne et du monde de l'astronomie, Newton anticipe la *Lex Prima* énoncée dans la section suivante et indique sa volonté d'identifier d'une part la force de gravitation à la force centripète et d'autre part de déterminer les causes du mouvement.

Les Définitions qui suivent abordent la mesure de la force centripète. Nous nous limiterons, cependant, aux définitions VII et VIII, qui introduisent la notion de « quantité accélératrice³³ » et de « quantité motrice » de la force centripète.

Définition VII

« La quantité accélératrice de la force centripète est la mesure de cette force qui est proportionnelle à la vitesse qu'elle génère en un temps donné ».

31. « In a memorandum, Newton said that he had invented the name in honor of Christiaan Huygens, who had used the oppositely directed *vis centrifuga* », [Cohen \(2002\)](#), p.62.

32. [Jammer \(1957\)](#), p.122.

33. [Newton \(1966b\)](#), p.5.

Ainsi la force centripète a la capacité de produire de la vitesse. Autrement dit, la force centripète, non seulement, fait tendre un corps vers un centre, mais elle modifie aussi la valeur de la vitesse. Cependant, la définition VII ne doit pas être identifiée au principe fondamental de la dynamique. En effet, outre qu'à la date de publication des *Principia*, la notion d'accélération telle qu'on l'entend de nos jours, c'est-à-dire $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, n'est ni un concept défini, ni un concept formalisé, la force centripète produit une vitesse en un « temps donné », fini. La production de la vitesse due à la force centripète s'apparente donc, en langage symbolique, à $\frac{\delta v}{\delta t}$ plutôt qu'au taux de variation $\frac{dv}{dt}$. La quantité accélératrice de la force centripète est donc simplement la composante de la force centripète responsable de la variation de la vitesse du corps dans une *durée* donnée.

La section des *Définitions* se termine avec la définition VIII, qui traite de la *quantité motrice* de la force centripète³⁴.

Définition VIII

« La quantité motrice de la force centripète est proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné ».

La « quantité motrice » est donc source de production de mouvement auquel elle est proportionnelle, « en un temps donné ». Pour I.B. Cohen, elle correspond au taux avec lequel le mouvement change³⁵. En revanche, G. Barthélémy y voit la production d'une quantité de mouvement³⁶ au sens actuel du terme. Aussi, l'assimilation du « mouvement » à la « quantité de mouvement », telle qu'elle est définie dans cette *Section*³⁷ est source de confusion et ne prête pas à une interprétation du terme « mouvement », dont il est vrai, nous ne trouvons aucune définition claire dans le texte des *Principia*. Nous n'adhérons d'ailleurs pas à cette comparaison, notamment du fait que la définition de la « quantité de mouvement » newtonienne laisse entendre que celle-ci s'apparente à un nombre. Mais, si nous suivons G. Barthélémy, nous sommes amenés à dire que la quantité motrice de la force centripète serait donc proportionnelle à la variation du produit³⁸ mv . Autrement dit, elle serait soit comme la variation de la masse, soit comme celle de la vitesse en un « temps donné ». Or par mouvement, nous entendons à la fois la trajectoire décrite par un corps et la vitesse avec laquelle il la décrit. De

34. Newton (1966b), p.6.

35. Cohen (2002), p.64.

36. Barthélémy (1992), p.63.

37. La quantité de mouvement est déterminée par la définition II : « La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse. », Newton (1966b), p.2.

38. En posant P la quantité de mouvement et en recourant à des notations anachroniques, $P = m \times v$.

fait, la quantité motrice de la force centripète doit être soit proportionnelle à la variation de la valeur de la vitesse, soit proportionnelle à la modification de la trajectoire, c'est-à-dire proportionnelle à la flèche, qui sont deux variations différentes de celle du produit mv . Aussi, la définition VIII est, pour nous, simplement celle de la quantité de force nécessaire à la production d'un mouvement, en un « temps donné ».

Les deux dernières définitions montrent un dédoublement de la force centripète qu'il semble difficile de désenchevêtrer. En effet, la quantité accélératrice par son action en « un temps donné » sur un corps engendre une vitesse et modifie ainsi le mouvement initial du corps. Du mouvement a donc été produit. Mais celui-ci n'existe que par l'action de la composante motrice de la force centripète. À l'inverse, la quantité motrice génère, en « un temps donné », le mouvement d'un corps. Autrement dit, elle produit une vitesse, dont la génération est du ressort de la quantité accélératrice de la force centripète. « Force accélératrice » et « force motrice » semblent tellement imbriquées qu'il nous paraît vain d'espérer, pour un même corps, de pouvoir distinguer nettement l'une de l'autre. Cependant, il apparaît que la force centripète, par l'intermédiaire de sa quantité accélératrice ou par celui de sa quantité motrice, n'agit sur un corps que durant un « temps donné ». Autrement dit, nous savons qu'il existe un lien entre force et temps. La détermination de cette dépendance temporelle de la force nous incite à étudier les caractéristiques de la force centripète à partir du mouvement des corps qu'elle produit.

1.2.2 Expression mathématique de la force centripète

La seconde section du livre I est consacrée à *la recherche des forces centripètes*. Sous ce nom, Newton recherche en fait, en s'appuyant sur les lemmes démontrés dans la section précédente, la loi générale de la force centripète. Il procède en trois points :

1. Il indique dans un premier temps, avec les propositions I et II, les conditions requises pour qu'une force tende vers un centre de force.
 - a) La trajectoire du corps doit être une ligne courbe.
 - b) Le corps doit posséder une vitesse initiale.
 - c) Le corps doit parcourir des aires proportionnelles au temps.
2. Il établit la loi générale de la force centripète.
3. Il confirme, sur des exemples qui sont davantage de nature mathématique que physique, la validité de la loi trouvée.

Des dix propositions prouvées dans cette section, nous nous concentrerons dans ce paragraphe, essentiellement sur les propositions IV et VI, qui établissent, respectivement, la loi de force dans le cas d'une trajectoire circulaire et dans le cas général.

Proposition IV

La proposition IV s'énonce ainsi³⁹ :

« Les corps qui parcourent uniformément différents cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles, et qui sont entre elles comme les carrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles ».

De l'énoncé de la proposition IV, nous pouvons écrire, à l'aide d'une notation moderne, une première expression mathématique de la force centripète pour un corps en mouvement circulaire uniforme :

$$F_{\text{cent.}}^{\text{circ.unif.}} = \frac{\widehat{AB}^2}{R}$$

$F_{\text{cent.}}^{\text{circ.unif.}}$ représente la force centripète subie par un corps qui parcourt à vitesse uniforme l'arc de cercle \widehat{AB} , de rayon R . Le mouvement étant circulaire uniforme, l'arc et la vitesse sont proportionnels. L'expression précédente peut donc s'écrire :

$$F_{\text{cent.}}^{\text{circ.unif.}} = \frac{v^2}{R}$$

que Newton établit dans le premier corollaire.

Le premier corollaire de la proposition précise d'ailleurs à ce sujet⁴⁰ :

« Comme ces arcs sont proportionnels aux vitesses des corps, les forces centripètes seront en raison composées de la raison doublée des vitesses directement, et de la raison simple des rayons inversement ».

Newton en propose la démonstration suivante⁴¹ :

« Ces forces tendent au centre des cercles par la proposition 2, et le corollaire 2 de la proposition 1 et elles sont entre elles, par le corollaire 4 de la proposition 1 comme les sinus versés des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'est-à-dire par le lemme 7 comme les carrés de ces mêmes arcs divisés par les diamètres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs sont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, et que les diamètres sont comme les rayons, les forces seront comme carrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux divisés par les rayons. C.Q.F.D. ».

39. [Newton \(1966b\)](#), p.54.

40. [Newton \(1966b\)](#), p.55.

41. [Newton \(1966b\)](#), p.54-5.

Elle repose sur des énoncés précédemment démontrés, dont il nous semble bon de préciser les conclusions : les corollaires 2 et 4 de la proposition I, la proposition II et le lemme VII de *la Méthode des premières et dernières raisons*.

La proposition I indique que si une force centripète agit sur un corps, alors les aires balayées par la ligne joignant le centre de la trajectoire au corps sont proportionnelles au temps. Le second corollaire établit que l'opération qui consiste à diminuer à l'infini la corde d'un arc n'affecte pas le caractère centripète d'une impulsion et n'a pour but, ici, selon G. Barthélémy, que d'évoquer au lecteur la possibilité de substituer un polygone à un cercle. Selon le corollaire 4⁴², les forces sont comme les flèches des arcs évanouissants, parcourus en des temps égaux. La proposition II permet de conclure que la force qui détourne continuellement un corps de la ligne droite est dirigée vers le centre du cercle. Enfin, le lemme VII de *la Méthode des premières et dernières raisons* permet la substitution de la corde d'un arc par l'arc lui-même⁴³

Venons-en maintenant à l'analyse de la démonstration.

Les corps décrivent leurs cercles respectifs « d'un mouvement égal ». Autrement dit, chaque corps décrit son cercle d'un mouvement uniforme qui lui est propre. Donc d'après la proposition II et le corollaire de la proposition I, les forces qui détournent les corps de la ligne droite sont dirigées vers un même centre. Le corollaire 4 de la première proposition indique alors que les forces sont comme les sinus versés des arcs évanouissants « décrits en de très petit temps égaux », c'est-à-dire, comme les flèches des arcs doubles, dirigées vers le centre du cercle. Enfin, des propriétés géométriques des triangles rectangles inscrits dans un cercle et du lemme VII, les sinus versés sont comme les carrés des arcs décrits divisés par le diamètre des cercles. Et donc les forces sont comme les carrés des arcs divisés par le rayon.

Proposition VI

L'objet de la proposition VI⁴⁴ est l'expression générale de la loi de force centripète.

« Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant, et qu'on suppose que la flèche de l'arc naissant, que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, et qui partage sa

42. Le corollaire 4 s'énonce ainsi : « Les forces par lesquelles les corps, qui se meuvent dans des espaces libres, sont détournés du mouvement rectiligne et contraints à décrire des courbes, sont entre elles comme les flèches des arcs évanouissants parcourus en temps égaux, et ces flèches convergent vers le centre des forces, et coupent les cordes des arcs évanouissants en deux parties égales ; car ces flèches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le corollaire 3 » ; Newton (1966b), p.51.

43. Nous reviendrons plus en détails dans une partie ultérieure (voir page 3.1) sur le contenu des lemmes développés dans *la Méthode des premières et dernières raisons*.

44. Newton (1966b), p.58.

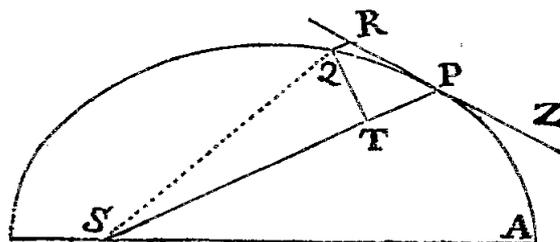


FIGURE 1.2 – Figure illustrant l'énoncé de la proposition VI de l'édition de 1687 des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*. Elle est tirée de [Newton \(1687\)](#).

corde en deux parties égales, passe, étant prolongée, par le centre des forces : la force centripète dans le milieu de l'arc sera en raison directe de cette flèche, et en raison doublée inverse du temps ».

La démonstration repose sur la figure 1.2 qui apparaît, dans les éditions de 1713 et 1727, au niveau du corollaire 1. Toutefois, vu l'importance de cette proposition vis-à-vis de l'enjeu des *Principia*, déterminer la loi de force centripète, il nous a semblé pertinent de l'introduire ici afin de faciliter la lecture de cette démonstration capitale.

Newton considère, dans cette proposition, le mouvement d'un corps, dans un milieu non résistant, le long d'un « arc naissant » parcouru « dans un temps infiniment petit ». La figure présente une courbe ellipsoïdale représentant la trajectoire du corps soumis à une force centripète dirigée vers S. Le corps se meut le long de la trajectoire courbe du fait de l'action de la force centripète, qui le retire continuellement de sa trajectoire rectiligne ZPR, tangente à la courbe en P, selon la loi I. En l'absence de force centripète, le corps parcourait la distance PR le long de la tangente « dans le temps infiniment petit ». Dans ce même temps, du fait de l'action de la force, le corps parcourt l'arc de cercle PQ. La proposition énonce que la valeur de la force centripète peut être évaluée par la mesure de la déflection QR infiniment petite, dans un temps donné. L'évaluation de la force revient donc à la mesure de la quantité QR. Toutefois, Newton ne procède pas de la sorte. L'énoncé préconise, en effet, de recourir plutôt à la flèche « de l'arc naissant », c'est-à-dire, à la ligne joignant le centre de force S au point P et qui coupe la corde PQ en deux parties égales.

La première partie de la première phrase – « Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant ... » – associée à la figure suggère fortement qu'il est question dans cette proposition du mouvement de corps célestes, tels que la Lune, les planètes ou les comètes, qui se déplacent librement dans l'espace. Dénommer, en outre, par S le centre de force, rappelant ainsi l'astre du jour – Sol, is en latin – ne paraît pas être un choix anodin et conforte le lecteur dans sa pensée première. Toutefois, la poursuite de la lecture de l'énoncé montre qu'il s'agit,

avant tout, d'un traitement purement mathématique de la force centripète. Le point S, en effet, est immobile, sans dimension et sans masse. L'énoncé expose ensuite les durées mises en jeu lors de la détermination de la force. Celle-ci se fait durant « un temps infiniment petit » pendant lequel un arc naît. L'étude détermine ainsi la force « au commencement du mouvement », c'est-à-dire lorsque les points P et Q coïncident. La proposition VI privilégierait donc l'instant plutôt que la durée, mettant ainsi en jeu, de manière implicite, la loi II. Newton énonce enfin la loi de force recherchée pour la force centripète. Elle est « en raison directe de la flèche et en raison doublée inverse du temps ». La force centripète, responsable du mouvement des corps célestes, s'exprime donc simplement en fonction des deux grandeurs fondamentales du mouvement : la longueur et le temps.

Apparaît alors un paradoxe. La proposition VI, qui cherche à rendre compte des causes du mouvement sur une durée, reposerait implicitement sur la loi II qui met uniquement en jeu l'impulsion. En effet, mesurer la force centripète revient à évaluer la ligne infiniment petite QR. Or déterminer QR implique d'évaluer une impulsion. Autrement dit, pour expliquer l'action de la force centripète qui agit de manière continue, Newton recourt à une loi qui exprime les changements dans le mouvement qui se font de manière instantanée. Voyons donc la démonstration⁴⁵ qu'il en propose.

« Par le corollaire 4 de la proposition I, la flèche dans un temps donné est comme la force ; donc, en augmentant le temps en une raison quelconque, la flèche (par les Cor. 2 et 3 du lemme XI.) augmentera dans la raison doublée du temps, car l'arc augmente en même raison que le temps, donc la flèche est en raison simple de la force, et en raison doublée du temps, et soustrayant de part et d'autre la raison doublée du temps, la force sera en raison directe de la flèche, et en raison doublée inverse du temps. C.Q.F.D..

On pourrait aussi démontrer facilement cette proposition par le Cor. 4. du lemme 10 ».

Comme le précise M. Blay⁴⁶, « de l'usage de la loi II, il n'est fait aucune référence dans cette démonstration de la proposition 6 ». Newton sait, en effet, pertinemment qu'il cherche à évaluer une force qui agit dans la durée. C'est la raison pour laquelle il en appelle au corollaire 4 de la proposition I et aux corollaires 2 et 3 du lemme XI. Du corollaire 4⁴⁷, nous concluons que la force, « dans un temps donné » est comme la

45. [Newton \(1966b\)](#), p.58.

46. [Blay \(1995\)](#), p.86.

47. Corollaire 4 : « Les forces par lesquelles les corps, qui se meuvent dans des espaces libres, sont détournés du mouvement rectiligne et contraints à décrire des courbes, sont entre elles comme les flèches des arcs évanouissants parcourus en temps égaux, et ces flèches convergent vers le centre de force, et coupent les cordes des arcs évanouissant en deux parties égales, car ces flèches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le corollaire 3 » ; [Newton \(1966b\)](#), p.51.

flèche. Des corollaires 2 et 3 du lemme XI⁴⁸, il ressort que si un corps décrit un arc de cercle à vitesse constante donnée, la longueur de l'arc est proportionnelle à la durée de parcours. Aussi, la flèche étant ultimement comme le carré de l'arc, elle est ultimement comme le carré du temps. Elle est donc « en raison doublée du temps dans lequel l'arc est décrit ». De fait, elle est conjointement proportionnelle à la force et au carré du temps, et « en soustrayant de part et d'autre la raison doublée du temps », la force est « en raison directe de la flèche et en raison doublée inverse du temps ».

Par cette proposition et sa démonstration, Newton informe le lecteur sur sa manière de traiter le temps mathématiquement. Il manipule le temps comme un nombre ou comme une portion d'espace. Plus précisément il opère avec le temps comme avec l'espace ou avec les nombres. Il « augmente le temps d'une raison quelconque » et il « soustrait de part et d'autre la raison doublée du temps ». Autrement dit, il considère le temps comme un ensemble de valeurs, de points dont on peut faire varier la taille, selon le besoin de la démonstration. Il divise aussi par le temps les deux membres d'une égalité, comme on divise ces mêmes membres par un nombre. Cependant, cette pratique peut être vue comme une trahison à l'*Avant-Propos à la première édition des Principia* justifiant le choix de la géométrie pour « trouver les forces qu'emploie la nature ». Mais elle soulève aussi le problème majeur de l'utilisation de cette partie des mathématiques pour résoudre les phénomènes de la nature. La géométrie des Anciens impose, en effet, d'évaluer une grandeur à l'aide de la théorie des proportions, selon laquelle seules des grandeurs de même genre peuvent être comparées, rendant ainsi impossible la division d'une longueur comme la flèche par un temps. Toutefois, cette pratique constitue une innovation dans les procédés mathématiques officiels de la fin du XVII^e siècle. Elle indique, en outre, que Newton considère le temps comme une grandeur mathématique avec laquelle il est possible d'opérer.

Mais cette manière de traiter mathématiquement du temps en montre surtout une double conception. En augmentant « le temps d'une raison quelconque », Newton suggère au lecteur l'idée d'une *durée* composée d'éléments unitaires. À l'instar de l'intervalle [AB], qui est la portion d'espace constituée des points compris entre le point A et le point B, l'intervalle de temps durant lequel l'arc est parcouru par le corps est la portion d'« espace-temps⁴⁹ » constituée d'instant, comprise entre le commencement et la fin du parcours. Ainsi, la conception newtonienne du temps, révélée par des expressions telles que « arc naissant », « infiniment petit » ou « [...] augmente en même raison que le temps », fait place à la fois à la *durée* et à l'instant. Se pose alors la question

48. Corollaire 2 : « Et ces carrés seront aussi entre eux à la fin comme les flèches des arcs, lesquelles coupent les cordes en deux parties égales, et convergent vers un point donné ; car ces flèches sont comme les sous-tendantes BD et Bd ».

Corollaire 3 : « Donc, lorsqu'un corps avec une vitesse donnée décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit » [Newton \(1966b\)](#), p.45.

49. Il ne s'agit pas ici de l'espace-temps de la théorie einsteinienne de la relativité, mais d'une *durée*.

de savoir comment Newton passe de l'instant à la *durée*. Nous ne traiterons cependant pas immédiatement ce problème. nous y reviendrons lorsque nous aborderons la proposition I⁵⁰.

Nous concevons que ce détour par le corollaire 4 de la proposition I et ceux du lemme XI peut laisser au lecteur la sensation d'une démonstration complexe. Toutefois, ils y introduisent, et en particulier le corollaire 3, les paramètres cinématiques nécessaires, desquels il ressort que le temps est la pierre angulaire de la démonstration. Par ailleurs, restreindre la démonstration à la loi II n'aurait pas débouché sur la dépendance temporelle de la force centripète, telle qu'elle apparaît dans la proposition VI et est exprimée mathématiquement dans son premier corollaire. Toutefois, avant de traiter ce premier corollaire, nous nous attarderons brièvement sur la possibilité « de démontrer facilement cette proposition par le corollaire 4. du lemme X ».

Proposition VI par le lemme X

Les corollaires 3 à 5 du lemme X⁵¹ sont les premiers endroits des *Principia* où apparaissent une relation entre la force et le temps. Le corollaire 4⁵², dont l'énoncé est le suivant :

« Donc, dans le commencement du mouvement, les forces sont comme les espaces décrits directement, et inversement comme les carrés des temps. »

stipule que la force est proportionnelle aux espaces traversés par le corps et inversement proportionnelle au carré du temps de parcours, ce qui n'est ni plus ni moins que la conclusion de la proposition VI. Donc prouver la proposition VI, selon le mode suggéré par Newton, revient à énoncer simplement le corollaire 4. du lemme X. Mais le lemme X repose sur le lemme IX. Donc prouver la proposition VI revient à démontrer le lemme IX. Nous n'effectuerons cependant pas ici cette démonstration que nous gardons pour l'analyse des lemmes de la *Méthode des premières et dernières raisons*⁵³

Nous relevons simplement que la force du lemme X, qu'elle « soit déterminée et immuable » ou qu'elle « augmente ou diminue continuellement » est « finie ». Autrement dit, elle n'est pas la force impulsive de la loi II, mais bien plutôt une force qui agit de manière continue sur une *durée*. Et, pour reprendre les termes de M. Blay⁵⁴, « c'est très naturellement que pour parvenir à son résultat de la proposition 6, Newton fait appel au lemme X ».

50. La proposition I est traitée au sous-chapitre 3.2

51. Le lemme X s'énonce ainsi : « Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps. » ; Newton (1966b), p.42

52. Newton (1966b), p.43.

53. Voir page 105.

54. Blay (1995), p.89

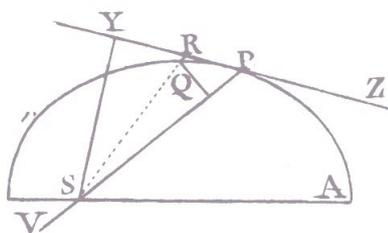


FIGURE 1.3 – Détermination de la force centripète

Proposition VI, Corollaire 1

L'expression mathématique de la loi de force centripète apparaît donc dans le corollaire 1⁵⁵ de la proposition VI, auquel est associée la figure 1.3.

« Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, & que cette courbe soit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR parallèle à SP, & qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP : la force centripète sera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P et Q coïncident ; car QR est égale à la flèche de l'arc double de QP, dont le milieu est P, et le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit, ainsi on peut l'écrire à la place de ce temps. »

La situation physique considérée est la même que celle de la proposition VI, le corps se déplace sur une courbe APQ touchée, en P, par la ligne tangente ZPR. Newton considère une petite portion PQ parcourue en un temps infiniment petit. Après construction géométrique, la force est comme la déflection QR. Mais évaluer QR revient à déterminer ce que devient le solide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Or $SP \times QT$ correspond au double de l'aire du triangle SPQ. Et, d'après la première proposition du livre I, l'aire SPQ est proportionnelle au temps durant lequel l'arc double de QP a été décrit. De sorte, que l'« on peut l'écrire à la place du temps ». Ainsi, ultimement, la force centripète est proportionnelle à $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Le corollaire 1 de la proposition VI fournit donc une expression mathématique aisément manipulable de la loi de force centripète.

Toutefois, avant de voir l'utilisation de cette expression par Newton pour détermi-

55. Newton (1966b), p.59.

F_{IV}	F_{VI}
Corps décrit en cercle	Corps décrit un orbe
$F \rightarrow C$	$F \rightarrow S$
Vitesse constante	Espace non résistant
$F_{IV} \propto \frac{\widehat{AB}}{R}$	$F_{VI} \propto \frac{a^*}{t^2}$

TABLE 1.1 – Tableau de comparaison de la force centripète obtenue dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme (F_{IV}) et de la force centripète subie par un corps décrivant un orbe quelconque dans un espace non résistant (F_{VI}). * : a est la flèche selon laquelle la force est dirigée.

ner la loi de force dans des cas particuliers, nous discuterons des forces déterminées dans les propositions IV et VI⁵⁶.

1.2.3 Comparaison des expressions de F_{IV} et de F_{VI}

Nous trouvons donc dans la section II du livre premier des *Principia* deux expressions mathématiques de la loi de force centripète, F_{IV} et F_{VI} . Une mise en parallèle de ces expressions fait ressortir que F_{VI} est le cas général dont F_{IV} décrit celui du cercle (Tableau 1.1).

En effet, si nous restreignons l'orbe décrit par le corps soumis à F_{VI} à un cercle, celle-ci s'identifie alors à F_{IV} . Le centre S de la trajectoire devient le centre C du cercle ; la flèche est désormais selon un rayon. Le temps de parcours de l'arc PQ est proportionnel au temps périodique ($a : t^2 :: R : T^2$). Or d'après le second corollaire de la proposition IV⁵⁷ « la raison composée de la raison directe des rayons, et de la raison doublée inverse des temps périodiques » est comme la force F_{IV} . De tout cela, nous voyons poindre, certes, le côté hypothético-déductif des *Principia* avec le renvoi à des propositions ou lemmes déjà établis, mais aussi, et surtout, le rôle central joué par le temps, qui apparaît sous la dichotomie *instant Vs durée*.

56. Nous nommerons F_{IV} et F_{VI} les expressions mathématiques de la force centripète obtenues respectivement par la proposition IV et la proposition VI.

57. *Corollaire 2 ; proposition IV* : « Et comme les temps périodiques sont en raison composée de la raison directe des rayons, et de la raison inverse des vitesses ; les forces centripètes seront en raison composée de la raison directe des rayons, et de la raison doublée inverse des temps périodiques. » ;Newton (1966b), p.51.

Chapitre 2

La conception du temps

Les *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* débutent par des *Définitions* suivies des *Lois du mouvement* ou *Axiomes*. Les Lois, au nombre de trois, comportent chacune un commentaire jouant le rôle de démonstration. Ils sont toutefois plus proches d'une illustration de la loi que d'une démonstration mathématique rigoureuse. Chaque commentaire est fondé sur des exemples, simples, illustrant des situations courantes de la vie quotidienne ou des situations astronomiques. Ainsi, ils permettent de mieux percevoir la pensée newtonienne et la portée de la loi qu'ils illustrent.

La troisième Loi, cependant, est suivie de 5 corollaires et la section se termine par un assez long scholie dans lequel Newton justifie la validité des lois et des corollaires en s'appuyant sur des découvertes de ses prédécesseurs. Ainsi, Galilée a découvert la loi de chute des corps grâce aux « deux premières lois du mouvement et les deux premiers corollaires ¹ ». « Par ces mêmes lois », Wren et Huygens ont découvert « les lois du choc et de la réflexion des corps durs ² », et « c'est [encore] sur ces mêmes lois et leurs corollaires qu'est fondée la théorie des oscillations des pendules, vérifiée tous les jours par l'expérience ³ ». Le scholie a aussi pour but de montrer « combien la troisième loi du mouvement est vraie et combien son usage est étendu ⁴ ».

Cependant, nous nous concentrerons essentiellement sur la loi II, énoncée, dans les *Principia*, de la façon suivante ⁵ :

« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée ».

1. [Newton \(1966b\)](#), p.28

2. [Newton \(1966b\)](#), p.28.

3. [Newton \(1966b\)](#), p.28.

4. [Newton \(1966b\)](#), p.28

5. [Newton \(1966b\)](#), p.17.

L'énoncé actuel

« Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système »

ne traite pas de « changements qui arrivent dans le mouvement » et, n'est, par ailleurs, que l'expression littérale de l'équation mathématique, $F = m \frac{dv}{dt}$, à laquelle nous nous référons généralement quand nous évoquons de nos jours la loi II. Comparé à l'énoncé newtonien, qui met en relation les « changements qui arrivent dans le mouvement » et la « force imprimée », le principe fondamental de la dynamique repose la résultante des forces sur le taux de variation de la vitesse en un temps donné. Il apparaît là une interprétation de l'énoncé newtonien, exempt de toutes notions de temps et de formulation mathématique, qui nous suggère d'analyser l'énoncé et le commentaire de 1687, qui place le choc comme responsable du mouvement. Nous nous tournerons, de fait, vers l'étude du choc huguenienne qui précède de quelques années la publication de la première édition des *Principia*.

2.1 Lex II

2.1.1 Origine de la loi II

Sur des hypothèses différentes de celles de Galilée, Huygens démontre, dans la seconde partie de l'*Horologium Oscillatorium*, les lois du mouvement uniformément accéléré et aboutit au mouvement d'un grave sur la cycloïde. *De la chute des graves et de leur mouvement sur la cycloïde*⁶ débute par trois Hypothèses⁷, qui, selon Huygens, régissent le mouvement des graves.

Première Hypothèse

« S'il n'y avait pas de gravité, et si l'air n'empêchait pas le mouvement des corps, alors tout corps continuerait son mouvement donné avec une vitesse uniforme en ligne droite ».

Deuxième Hypothèse

« Par l'action de la gravité, quelle que soit son origine, il arrive que les corps se déplacent d'un mouvement composé à la fois d'un mouvement

6. Il s'agit du titre de la seconde partie de l'*Horologium Oscillatorium* dans laquelle Huygens traite du mouvement des corps en chute libre et selon la cycloïde.

7. Traduction de l'auteur pour les trois Hypothèses ; [Huygens \(1986\)](#)

uniforme dans une direction ou une autre et d'un mouvement vers le bas dû à la gravité ».

Troisième Hypothèse

« Ces deux mouvements peuvent être considérés séparément, l'un n'étant pas empêché par l'autre ».

Alors que la première « Hypothèse » traite du mouvement en « ligne droite » des corps en général, la seconde ne concerne que le mouvement vertical « vers le bas ». Cette dernière semble, de prime abord, contredire la première « Hypothèse ». Nous pensons cependant qu'elles se complètent. La gravité, volontairement ignorée par Huygens dans la première Hypothèse, expliquerait ainsi le changement de mouvement qu'un corps peut subir. Dès lors, en reprenant l'idée de « changement de mouvement », et en la généralisant à l'ensemble des forces, Newton énonce, par la Loi II, l'effet d'une force sur un corps en mouvement. La Loi II est suivie d'un commentaire dont les dernières lignes rappellent fortement la troisième « Hypothèse » huguenienne, généralisée elle aussi à l'ensemble des forces.

« Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette première produira un mouvement double, et une force triple un mouvement triple, soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu et successivement, et ce mouvement, étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice, sera ajouté au mouvement que le corps est supposé avoir déjà, s'il conspire avec lui, ou en sera retranché, s'il lui est contraire, ou bien sera retranché ou ajouté en partie, s'il lui est oblique ; et de ces deux mouvements il s'en formera un seul, dont la détermination sera composée des deux premières⁸ ».

Nous pouvons donc supposer que la Loi II repose directement sur la seconde « Hypothèse » huguenienne. Toutefois, selon I.B. Cohen, les lois newtoniennes du mouvement seraient une amélioration, « même inconsciente » de la part de l'auteur anglais, des *Règles* cartésiennes, dont la seconde aborde le changement de mouvement d'un corps au contact d'un second corps :

« Je suppose pour seconde règle que quand un corps en pousse un autre, il ne saurait lui donner aucun mouvement, qu'il n'en perde en même temps autant du sien ; ni lui en ôter, que le sien ne s'augmente d'autant. Cette Règle jointe avec la précédente, se rapporte fort bien à toutes les expériences, dans lesquelles nous voyons qu'un corps commence ou cesse de se mouvoir, parce qu'il est poussé ou arrêté par quelque autre »

8. [Newton \(1966b\)](#), p.17.

Elle suggère l'idée d'un transfert de mouvement entre deux corps qui ne peut se produire que selon des normes bien établies et qui ne sauraient être transgressées. A ceci se mêle l'idée d'égalité. Un corps ne transmet à un second corps que le mouvement qu'il perd. Par ailleurs, il ne gagnera du mouvement du second corps seulement ce qui lui sera transmis de ce dernier. Le mouvement semble ainsi conservé.

Enfin, la notion de force, absente du discours cartésien, est restreinte à celle de gravité chez Huygens, qui avait toutefois introduit le concept de « force de collision » dans l'étude du choc⁹. De fait, le « changement de mouvement » se produit soit par le choc, soit par la gravité. Il faut cependant garder à l'esprit que la gravité huguenienne ne trouve pas son équivalent par celle qui est décrite dans les *Principia*. Huygens, partisan de la théorie cartésienne des tourbillons et opposé à une conception de force à distance, conçoit la gravité comme « l'effort que fait la matière fluide, qui tourne circulairement autour du centre de la Terre en tous sens, à s'éloigner de ce centre, et à pousser en sa place les corps qui ne suivent pas ce mouvement¹⁰ ».

Aussi, contrairement à I.B. Cohen, nous pensons que les fondements de la Loi II des *Principia* ne se limitent pas à une simple amélioration des lois cartésiennes de la Nature, mais que les travaux hugueniens, bien connus de Newton, participent tout autant à l'énoncé final de la Loi.

2.1.2 L'énoncé et le commentaire

Rappelons l'énoncé de la loi II¹¹ :

« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée ».

De cet énoncé, un corps peut donc voir son mouvement modifié et ne plus « persévérer dans l'état de repos ou de mouvement uniforme¹² », à condition toutefois qu'une force agisse sur lui. Mais Newton ne nous dit rien de la manière dont ces « changements arrivent » ni de la nature de cette « force motrice ». Aussi, discuterons nous, dans un premier temps, des « changements de mouvement », puis nous traiterons de la « force motrice », avant de donner notre point de vue sur les relations entre la loi II et le temps.

9. Vilain (1996)

10. Huygens (1992), p.169.

11. Newton (1966b), p.17.

12. Loi I : « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et le contraigne à changer d'état » ; Newton (1966b), p.17.

Le « changement de mouvement »

Un lecteur moderne associerait certainement « les changements qui arrivent dans le mouvement » à une variation de vitesse. Or la vitesse conçue comme l'objet mathématique que nous utilisons de nos jours n'existe pas encore à la date de rédaction des *Principia*. Bien que fondamentale en philosophie naturelle, la notion de vitesse est, en outre, absente des *Principia*. Aussi, cette interprétation, qui est probablement l'une des premières à venir à l'esprit du lecteur actuel, habitué à se représenter mentalement les constructions vectorielles, nous paraît inappropriée car anachronique. Ce propos s'accorde avec le point de vue de B. Pourciau, qui relève « que quelques commentateurs suggèrent que ΔV a une direction, vraisemblablement “ le long de la ligne selon laquelle la force est imprimée ”, et pour l'indiquer ils écrivent $\Delta \vec{V}$ ou $\Delta \mathbf{v}$ au lieu de ΔV , mais ces auteurs ne font pas toujours comprendre que la signification d'un tel “ changement de vitesse ” aurait été de Newton ¹³ ».

D'autres associeraient vraisemblablement « les changements qui arrivent dans le mouvement » à la variation de la quantité de mouvement, mais ce serait alors commettre une erreur, selon B. Pourciau ¹⁴. Le « mouvement » newtonien ne se limitait pas à la quantité de mouvement. Newton différenciait trois sens techniques du terme « mouvement ». Par endroits, le terme « mouvement » remplace l'idée de « quantité de mouvement ». Mais, il signifie aussi la trajectoire, c'est-à-dire la relation entre les positions et le temps, comme l'indique le titre de la section VI du livre I : *De la détermination des mouvements sur des orbites données* ¹⁵. Enfin, « mouvement » signifie aussi déplacement. B. Pourciau se réfère au scholie des *Définitions* pour justifier ce point de vue : « le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même ¹⁶ ». Par « mouvement vrai », ici, Newton indique un changement de position, c'est-à-dire un déplacement, nous dit B. Pourciau. C'est, d'ailleurs, le sens que nous privilégions pour « changements qui arrivent dans le mouvement ».

La loi II est suivie du commentaire ¹⁷ :

« Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette première produira un mouvement double, et une force triple un mouvement triple, soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait

13. Traduction de l'auteur ; « A few commentators suggest that ΔV has a direction, presumably “ along the line in which [the] force is impressed ” and to indicate this they write $\Delta \vec{V}$ or $\Delta \mathbf{v}$ rather than ΔV , but these authors do not always make clear what the meaning of such a “ directed change in speed or velocity ” would have been to Newton », Pourciau (2006), p.158.

14. Pourciau (2006)

15. Newton (1966b), p.114.

16. Newton (1966b), p.12.

17. Newton (1966a), p.18.

été peu à peu et successivement, et ce mouvement, étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice, sera ajouté au mouvement que le corps est supposé avoir déjà, s'il conspire avec lui ; ou en sera retranché, s'il lui est contraire, ou bien sera retranché ou ajouté en partie, s'il lui est oblique ; et de ces deux mouvements il s'en formera un seul, dont la détermination sera composée des deux premières ».

Nous regrettons que Newton n'ait pas joint de figure à ce commentaire. Celle-ci aurait éclairé d'autant le propos. Nous en percevons, cependant, que le corps, à la suite du choc, possède un mouvement dont la « détermination » procède à la fois du mouvement initial du corps et de l'orientation de la force au moment du choc. Trois cas distincts, que nous nous proposons d'analyser, ressortent alors :

1. Le corps est initialement au repos : l'impression engendre une vitesse qui induit un (nouveau) mouvement, proportionnel à la force motrice, conformément à la Définition VIII¹⁸, que le corps conserve, selon la Loi I.
2. Le corps est en mouvement rectiligne uniforme et la force est selon la ligne du mouvement : l'impression de la force modifie alors la valeur de la vitesse. Elle sera augmentée si la force et le mouvement sont de même sens ; elle sera diminuée dans le cas contraire.
3. La force est imprimée obliquement au mouvement rectiligne uniforme initial : un second mouvement, dans la direction de la force, est alors engendré.

La choc délimite ainsi deux mouvements distincts : celui avant et celui après l'impression. Le cas 3), illustré par la figure 2.1¹⁹, généralise les deux précédents.

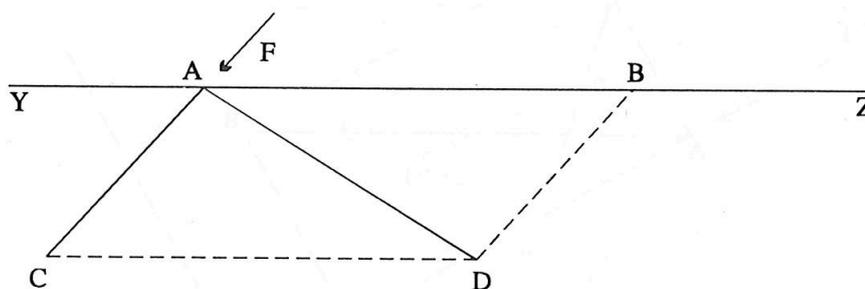


FIGURE 2.1 – Génération d'un mouvement dû à une impression.

18. « La quantité motrice de la force centripète est proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné », Newton (1966b), p.6.

19. Barthélémy (1992)

Il met davantage en lumière la destruction du mouvement initial de A vers B et illustre que seul persiste le mouvement du point A vers le point D. Toutefois, comme fait remarquer G. Barthélémy²⁰, dire que AB est modifié en AD par l'impression oblique d'une force ne suffit pas. AB est changé en AD car le mouvement AC est généré. Il importe alors de tenir compte de la génération de ce mouvement. Nous rejoignons sur ce point G. Barthélémy, pour qui « changer un mouvement, c'est lui en adjoindre un²¹ ».

Il pourrait cependant nous être objecté qu'il est imprécis d'employer le terme « génération » alors que nous traitons de « changement ». Toutefois, si nous considérons le changement au sens strict, c'est-à-dire si nous entendons par « changement » le passage d'un état de mouvement à un autre, alors considérer le terme « génération » pour un changement nous semble légitime, puisque, dans chacun des cas, un nouveau mouvement est induit. Newton aurait ainsi procédé à une extension de langage en rangeant sous le même terme aussi bien les vrais changements que les générations. Cet abus de langage revient à dire que le repos est un mouvement. Un tel abus de langage s'apparente à celui réalisé par le mathématicien lorsqu'il dit que zéro est un nombre.

Par ailleurs, durant les années 1692-93, qui correspondent à une intense période de révision de la première édition des *Principia*, Newton rédigea quatre versions différentes de l'énoncé de la loi II, analysées méticuleusement par I.B. Cohen²², et desquelles ressort l'idée de génération du mouvement :

1. « Vis omnis [in corpus liberum add & del] impressa motum sibi proportionalem a loco quem corpus alias occuparet in plagam propiam generat ».
2. « Motum genitum vi motrice impressae proportionalem esse & a loco que corpus alias occuparet in plagam vis illus fieri ».
3. « Vis impressa motum sibi proportionalem a loco quem corpus alias occuparet in plagam propiam generat ».
4. « [Mutationem motul del] Motum omnem novum quo status corporis mutatis proportionalem esse vi motrici impressae & fieri a loco quem corpus alias occuparet in plagam qua vis imprimitur ».

Ces rectifications constituent une partie des manuscrits de la Portsmouth Collection qui se trouvent à la bibliothèque universitaire de Cambridge et ne furent jamais discutées selon I.B. Cohen. Son analyse semble aller dans notre sens. Les propos qu'ils

20. Barthélémy (1992), p.71.

21. Barthélémy (1992), p.74.

22. Cohen (1971)

développent dans son article²³ vont au-delà de notre cadre, mais montrent toutefois que Newton n'était pas pleinement satisfait de son énoncé et a introduit dans ses rectifications l'idée de génération du mouvement. L'opposition « changements qui arrivent dans le mouvement » Vs « mouvement généré » montre l'hésitation de Newton entre deux termes permettant de signifier l'effet de la force imprimée. Un changement de mouvement s'apparente donc pour Newton à la génération d'un nouveau mouvement. L'ambiguïté de la loi II aurait été déplacée, selon I.B. Cohen, si « *mutationem motus* », dans la dernière version des *Principia*, avait été remplacé par « *motum genitum* ».

S'il semble que le « changement de mouvement » trouve une explication par rapport à la force et à l'espace, rien n'est cependant précisé quant au moment de l'impulsion. L'idée de génération ne permet pas non plus de décider de la manière dont la force agit. Est-elle imprimée instantanément ou dure-t-elle, un tant soit peu ? Si les astres ne vont pas en ligne droite, c'est qu'une force les en détourne de façon continue, nous dit la loi I. Nous ne pouvons donc penser l'action de la force que comme continue. Mais il existe aussi des phénomènes pour lesquels l'action agit de manière instantanée, comme le choc entre deux billes d'acier. Newton en était pleinement conscient, puisqu'il note dans le commentaire²⁴ :

« ... soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu et successivement ... ».

Mais l'effet est le même que la force soit imprimée en une fois ou par à-coups. Autrement dit une force d'intensité égale à trois impulsions produira le même effet que trois impulsions d'égale intensité imprimées successivement. Effet qui sera comme trois fois l'effet d'une seule impulsion. Peut-être nous faut-il alors revenir à la version latine du commentaire pour y voir plus clair. Celle-ci s'énonce ainsi²⁵ :

« Si vis aliqua motum quemvis generat ; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, et cum eo secundum utriusque determinationem componitur ».

La « force double » ou « triple » peut donc être imprimée soit « simul et semel », soit « gradatim et successive ». Une impression peut être instantanée au sens fort du terme, c'est-à-dire de durée parfaitement nulle. C'est le cas de deux billes qui s'entrechoquent. Mais une telle instantanéité ne relève pas de « semel », et encore moins de « simul », selon G. Barthélémy. Ce dernier adverbe renvoie à l'idée de choses se produisant dans le même temps. De fait, la force double n'est pas forcément une force de

23. Cohen (1971)

24. Newton (1966b), p.17.

25. La traduction française de la Marquise du Châtelet est à la page 59. La version latine provient de Newton (1726), p.14.

double intensité de la première, la « vis aliqua ». Il est possible d'imprimer deux fois la première force, successivement. Tout comme nous pouvons imprimer successivement (*successive*) deux forces égales à la première ou ensemble (*simul*) et en une seule fois (*semel*). G. Barthélémy propose même de refuser à « gradatim » d'exprimer l'idée de continuité, de sorte que les deux forces d'égale intensité seraient imprimées séparément. Et c'est justement l'emploi de « gradatim » qui est source de confusion de nos jours, selon I.B. Cohen. Il aurait perdu son sens originel, « pas à pas », pour être utilisé dans le sens « par à-coups ».

Aussi, G. Barthélémy va jusqu'à confronter les termes du même groupe, « semel » et « simul ». En effet, qu'apporte le premier au second ? Une production simultanée de choses l'est forcément en une fois. Par contre, des phénomènes qui se produisent en une seule fois ne sont pas obligatoirement simultanés, et n'ont pas nécessairement la même durée. De même, « gradatim » apporte-t-il une précision temporelle à « successive » ? Comme la régularité ou l'uniformité. La suite du commentaire ne confirme pas l'hypothèse selon laquelle le couple « simul-gradatim » apporterait une précision au couple « semel-successive ». De sorte que l'interprétation qui paraît mieux convenir, selon G. Barthélémy, consiste à répartir différemment les oppositions. Il oppose « semel » à « gradatim » et « simul » à « successive ». Il obtient ainsi un autre balancement, d'où nous notons que « simul » et « successive » insistent sur l'aspect temporel, alors que « semel » et « gradatim » précisent le devenir de la force première.

Il apparaît de façon assez évidente que la loi II ne permet pas une perception claire de l'impression vis-à-vis du temps, de sorte qu'il nous paraît délicat de l'exprimer mathématiquement. Sa mathématisation a cependant clarifié son énoncé mais a contribué à la perte du double mode d'action de la force newtonienne. Selon I.B. Cohen, seule une analyse au niveau infinitésimal permet d'entrevoir comment les deux modes d'action de l'impulsion produisent les effets illustrés dans le cadre de la loi II²⁶.

La « force motrice »

Venons-en maintenant à « la force motrice ». Selon C. Vilain, quand Newton écrit la loi II, il pense à la « force motrice » selon le mode de la percussion galiléenne. Autrement dit, il conçoit « la force motrice » comme une force qui restitue, en un instant, l'accumulation de tous les « momenti » précédents, c'est-à-dire une force infinie qui agit en un instant.

Selon G. Barthélémy, il n'en va pas aussi simplement. Si Newton avait voulu exprimer une loi pour une force impulsive, il l'aurait fait, « puisque il [Newton] avait moyen d'exprimer une telle différence, faut-il penser qu'il aurait négligé de choisir la formulation juste ? Rien ne dit qu'il n'y a pas là, en effet, manquement à la rigueur.

26. « Only by such an analysis on the infinitesimal level can we see how the 2 modes of action of an impuls — *simul et semel* and *gradatim et successive*— produce the effects illustrated by Newton within the framework of the stated *lex II* », Cohen (1971), p.166.

Toutefois, lorsqu'il s'agit de la rigueur dans la formulation, ce que l'on nomme précision du langage, les *Principia* offrent plutôt le spectacle d'un souci très poussé de cette qualité. Les phrases en sont même alourdies à l'extrême. L'abréviation y est rare, tout comme les symboles. Chaque fois qu'un énoncé justifie un élément de démonstration, sa référence est donnée. Le texte a été intégralement relu par son auteur. D'une édition à l'autre de nombreuses retouches ont été effectuées, de toutes dimensions : corrections de coquilles, ou au contraire refonte d'une démonstration ; ou, entre les deux, substitution à un mot d'un autre, jugé plus idoine. Dans ces conditions il paraît exclu que le texte d'un énoncé aussi important qu'un Axiome présente une négligence involontaire²⁷ ».

Cependant, G. Barthélémy conçoit bien qu'il y a erreur de la part de l'auteur, mais d'un tout autre genre. Résumons la pensée de G. Barthélémy. La loi II, nous l'avons vu, est la génération du mouvement. Mais que dire de celle du temps ? Autrement dit, comment envisager, sous le rapport de la temporalité, la façon dont le corps est empêché de conserver son état inertiel ? Ceci, la loi II ne le dit pas. Si la « force motrice » est la cause du changement, alors il y a deux façons de penser la force par rapport au temps. Soit la génération se fait dans l'instant, soit elle requiert la durée, de sorte que nous devons concevoir « la force motrice » sous deux approches distinctes. Ou si nous préférons, vis-à-vis de notre propos, que la « force motrice » peut être imprimée selon deux modalités temporelles, le coup ou la poussée. Cependant, l'énoncé fait l'impasse sur la durée lors du « changement de mouvement ». Aussi, la pensée newtonienne privilégie l'action instantanée. La poussée se résout alors en une succession de petits à-coups, et il apparaît tout au long des *Principia* un « dédoublement de la force ». Telle est l'erreur de Newton, selon G. Barthélémy : l'emploi d'un même mot pour deux notions différentes. C'est la postérité qui régla le problème en nommant *impulsion* la « force motrice » de la loi II et *force* celle demandant la durée. Aucune durée n'est mentionnée dans la loi II car sa force doit pouvoir s'imprimer tout entière dans l'instant, comme un choc par exemple. Aussi, la loi II semble être un axiome de faible portée du fait que l'impulsion est moins usitée que sa rivale, qui agit continûment. Nous retrouvons des propos similaires chez I.B. Cohen, qui distingue, dans le texte des *Principia*, deux types de forces :

- une force impulsion quasi-instantanée.
- une force agissant continuellement.

I.B. Cohen rejoint G. Barthélémy sur l'idée que Newton rédigea l'énoncé de la loi II de manière particulièrement attentive²⁸. Elle exprime, selon I.B. Cohen, la manière dont le

27. Barthélémy (1992), p.78.

28. « Some commentators have added a word or phrase to Newton's law so as to have it read that the rate of " change in motion " is proportional to the force. This alteration would make Newton's second law read like the one found in today's physics textbooks. Newton, however, did not make an error here. He chose his words very carefully. In his formulation of the second law, Newton was explicitly stating a law for impulsive forces, not a continuous force. [...] », Cohen (2002), p.65.

« changement de mouvement » se produit et met en avant l'impulsion. « Pas même un *dato tempore* » écrit M. Blay à ce sujet²⁹. A vrai dire, « si l'on voulait absolument écrire cette loi en termes modernes, l'expression la plus proche serait sans doute celle-ci : $F \propto \Delta mv$ où F est la force motrice imprimée, m la masse et v la vitesse, sachant que (mv) représente le « changement de mouvement ». Dans cette perspective, on peut dire qu'une force motrice imprimée n'est pas une force, au sens moderne du terme, mais une impulsion³⁰ ». Le commentaire ne laisse d'ailleurs à ce sujet aucun doute sur l'intention newtonienne, nous précise I.B. Cohen, puisque les propos mis en avant sont insensés dans le cas d'une force continue. Le corollaire 1, qui montre les effets combinés de deux forces agissant simultanément sur un corps, vient confirmer cette interprétation : le corps se meut d'un mouvement rectiligne uniforme après l'action de la force. Preuve que celle-ci agit de manière instantanée.

I.B. Cohen voit plusieurs raisons à la primauté de la force impulsive. Nous sommes témoins de l'impact, du choc ou de la pression subie par un corps, point que nous avons déjà évoqué. Plus important, peut-être, est le contexte dans lequel la dynamique newtonienne fut établie. Les *Principia*, en effet, furent rédigés à la suite d'une période de grande avancée de la science du mouvement, basée sur l'étude du choc, ne laissant pas de place à l'action à distance. Les prédécesseurs de Newton l'avaient simplement bannie de la philosophie naturelle. Nous notons, toutefois, dans le premier livre des *Principia* nombre de propositions qui considèrent davantage la force centripète et le mouvement orbital plutôt que la force impulsive. Propositions dans lesquelles se mêlent, d'ailleurs, force impulsive et force continue. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Cependant, tous ne sont pas du même avis. Bruce Pourciau, par exemple, discute, dans un article paru récemment³¹, l'interprétation selon laquelle découlerait de la loi II uniquement une impulsion. Il oppose à cette vision une interprétation particulière, basée sur les travaux mécaniques newtoniens, qui s'applique à la fois à une impulsion et à la force continue. Selon cette interprétation, qu'il nomme *the Compound Second Law*, « la variation de la quantité de mouvement est égale à la force motrice » qu'il écrit mathématiquement

$$M \frac{\overrightarrow{LQ}}{h} = M \frac{\overrightarrow{PG}}{h}$$

Autrement dit, « la déflexion d'un corps en mouvement est égale à la déflexion de ce corps initialement au repos », soit

$$\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{PG}$$

29. Blay (1995), p.48.

30. Blay (1995), p.48.

31. Pourciau (2006)

En outre, quel que soit h , cette loi est exacte dans le cas d'une force impulsive ou d'un mouvement uniforme. Elle l'est encore, à la limite, quand h tend vers zéro, si la force est centripète et continuellement variable³².

Les notations mathématiques se réfèrent aux figures 2.2.

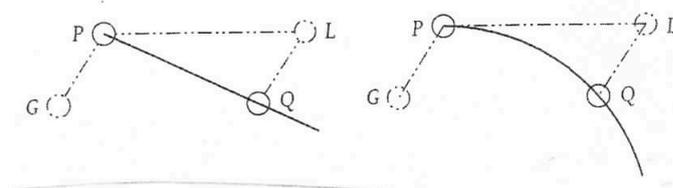


FIGURE 2.2 – Illustration de la Compound Law établie par B. Pourciau. Pourciau (2006) ; p.177.

La figure de gauche illustre la déflexion du corps initialement au repos, en P, soumis à une force donnée en un temps donné h , orientée selon la droite PG. Celle de droite illustre la déflexion, dans le même temps donné, d'un corps initialement en mouvement rectiligne uniforme, subissant, en P, une même force. La ligne orientée \overrightarrow{LQ} représente la déflexion du corps en mouvement générée dans le temps donné h . De manière similaire, \overrightarrow{PG} correspond à la déflexion du corps initialement au repos générée dans le temps h , donné. $M\frac{\overrightarrow{LQ}}{h}$ est alors la variation de la quantité de mouvement générée, en un temps donné h , alors que $M\frac{\overrightarrow{PG}}{h}$ représente la force motrice. Selon B. Pourciau, la « Compound Second Law » est l'interprétation newtonienne exacte de la loi II.

Le temps n'est pas explicitement présent

La polémique chez les commentateurs des *Principia* quant à l'absence ou la présence du concept de temps dans la loi II provient, pensons nous, de la traduction mathématique qui en a été faite. Nous avons mentionné, qu'actuellement, nous concevions la

32. La « Compound Second Law » s'énonce ainsi : « A change in motion equals the motive force :

$$M\frac{\overrightarrow{LQ}}{h} = M\frac{\overrightarrow{PG}}{h}.$$

Equivalently, a moving deflection equals the resting deflection :

$$\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{PG}.$$

This law holds exactly for any h when the force is either impulsive or uniform and exactly in the limit as h tends to zero when the force is centripetal and contiluously varying ». Pourciau (2006), p.177.

loi II comme le principe fondamental de la dynamique ou « deuxième loi de Newton », que nous énonçons $F = m \frac{dv}{dt}$. Cette mathématisation a engendré, nous semble-t-il, une double vision de la loi :

- La première vision, basée sur l'énoncé tel qu'il apparaît dans les *Principia*, rejette l'idée de la présence du temps dans la loi II puisqu'aucun intervalle de temps n'y est mentionné, et la considère, de fait, valable uniquement pour une impulsion. Un de ses représentants pourrait être N. Guicciardini, qui, dans son dernier ouvrage³³, écrit « de nombreux érudits ont fait face à la question de l'équivalence entre la loi II et sa formulation moderne $F = ma$. Remarquons que la loi de Newton est formulée comme une proportion, et non sous forme d'équation (comme dans le cas moderne). De plus, la loi de Newton ne fait aucune référence au temps. Selon ces érudits, la seconde loi de Newton est vue comme un énoncé de proportionnalité entre la magnitude de l'impulsion instantanée et le changement du moment discontinu dans la direction de l'impulsion. Cette conception d'une impulsion imprimée, responsable d'une variation discontinue du moment, peut être expliquée par l'approbation newtonienne à l'atomisme selon lequel l'impact causerait des changements de vitesse instantané ». Les partisans de cette conception incitent d'ailleurs le lecteur à ne pas confondre les deux formulations de la loi. La notation moderne approchée, selon M. Blay, serait $F = \Delta mv$, où F représente la force motrice imprimée et Δmv le changement de mouvement.
- Une deuxième approche qui repose sur la formulation moderne, $F = m \frac{dv}{dt}$, signifiant qu'une force, sur une durée donnée, agit de manière continue, que ce soit la gravité, qui fait tendre tous les corps vers le centre de la Terre, la force centripète, qui dévie continuellement les planètes de leur mouvement rectiligne uniforme, ou une poussée. Nous concluons à la présence du concept de temps par celle de la différentielle dt écrite dans l'énoncé.

Gardons nous donc bien de ne pas confondre ces deux formulations ! Ne reposant pas sur de mêmes bases, elles ne peuvent être prises pour équivalentes et débouchent donc forcément sur des conséquences différentes. Mais cette polémique est d'autant plus marquée que le concept de temps apparaît dans les *Définitions* (Définitions 7 et 8), qui précèdent les *Axiomes ou Lois du mouvement*, dans les lemmes 10 et 11 de la *Méthode des premières et dernières raisons* et surtout dans la proposition VI, dans laquelle Newton

33. Traduction de l'auteur : « Numerous scholars have faced the question of the equivalence between Newton's second law and its modern formulation as $\mathit{F} = ma$. Note that Newton's second law is formulated as a proportion, not as an equation (as in the modern case). Further, Newton's law makes no reference to time. According to some scholars, Newton's second law is explained as the statement of proportionality between the strength of instantaneous impulse and a discontinuous change of momentum in the direction of the impulse. This conception of an impulse impressed force that causes discontinuous changes of momentum might be related to Newton's endorsement of atomism, according to which impact between would cause instaneous changes of velocity » ; [Guicciardini \(2011\)](#)

détermine la loi de force centripète.

Toutefois, à l'opposé du premier point de vue, nous pouvons mentionner celui de B. Pourciau, pour qui l'absence de termes signifiant le concept de temps ne permet pas d'affirmer que la loi II est uniquement valable pour une impulsion. Il prend pour exemple l'énoncé selon lequel la taille des brins de maïs varie avec la température. Elle ne dépendrait donc pas du temps puisqu'aucun intervalle de temps n'est mentionné dans cet énoncé. Mais la moyenne de la température dépend, elle, de la durée sur laquelle elle est calculée. Et donc impliquer une moyenne de température, c'est considérer un intervalle de temps. L'argument tient aussi, dit-il, pour l'énoncé de la loi II. Énoncer la « force motrice », c'est donc aussi considérer un intervalle de temps, celui durant lequel elle agit. Par ailleurs, selon sa définition, la « force motrice » génère un mouvement en « un temps donné ». De fait, elle dépend d'un intervalle de temps. Et ainsi, conclut B. Pourciau « l'énoncé de la seconde loi, qui contient la “ force motrice imprimée ” doit dépendre d'un intervalle de temps donné³⁴ ».

L'énoncé de la loi II n'insiste pas sur le temps. Toutefois l'idée de son écoulement, liée, entre autre, aux « changements qui arrivent dans le mouvement », se dessine en filigrane, de sorte que le temps paraît être présent dans la loi II. En effet, des « changements qui arrivent ... », le lecteur moderne visualise une chronologie des événements. Par « mouvement », il entend la succession des positions occupées par le corps au cours du temps. De fait, il a à l'esprit l'ensemble des positions occupées par le corps auxquelles il associe des dates déterminées, distinctes et successives. Enfin, « la force a été imprimée » introduit chez lui l'idée d'un moment privilégié ; celui qui sépare les deux mouvements constitutifs du « changement de mouvement ». L'impression est ainsi la fin du premier mouvement et le début du second. Par ailleurs, le recours à un temps du passé au mode passif laisse entendre une chronologie des phénomènes intervenant dans les modifications du mouvement. Le corps subit une « impression » et modifie alors son mouvement, dans la ligne droite selon laquelle la force motrice est imprimée.

Nous retiendrons de ces formulations que la présence du temps dans la loi II est liée à la conception que l'on se fait de la force et que celui-ci, bien que pas explicitement énoncé, est fortement suggéré, notamment par l'image que crée la succession d'événements que se représente le lecteur.

2.1.3 Le choc huguenien

Aux XVI^e et XVII^e siècles, l'atomisme renaissant plaça au cœur de sa philosophie le choc, faisant de celui-ci l'unique cause de la modification du mouvement d'un corps.

34. Traduction de l'auteur ; « [...] and thus the statement of the second law, which contains the “ motive force impressed ”, must also depend on that given time interval » ; Pourciau (2006), p.162.

Galilée et Toricelli traitèrent de la « force de percussion » dans leurs études sur le mouvement, et Thomas Hariot et Beeckman élaborèrent des études précises du choc, malheureusement non publiées de sorte que les principaux travaux à ce sujet précédant les études hugueniennes sont ceux de Descartes. Les règles cartésiennes du choc, publiées dans les *Principes de Philosophie*, parurent en 1644. Dans la seconde partie de ses *Principes*, Descartes fournit les trois lois de la nature dont la dernière résume à elle seule celles du choc³⁵.

« Loi 3. que, si un corps qui se meut en rencontre un autre plus fort que soi, il ne perd rien de son mouvement, et s'il rencontre un plus faible qu'il puisse mouvoir, il en perd autant qu'il lui en donne. »

Ces règles découlent du principe de conservation « scalaire » du mouvement, qui s'exprime par le produit de la taille du corps par sa vitesse. Autrement dit, cette loi rend compte des conditions pour qu'un changement ait lieu lors d'un choc. Celui-là est possible s'il rend le mouvement « compatible ». Autrement dit, si les corps lors du choc ne se pénètrent pas l'un l'autre. Au « minimum », les deux corps entrechoqués se collent et vont tous les deux ensemble dans le même sens, le mouvement étant alors partagé entre eux.

Selon Huygens, qui débuta ses études sur le choc vers 1652, les lois établies par Descartes ne sont pas en accord avec l'expérience. Elles sont incompatibles avec la relativité du mouvement. Un changement de repère en modifierait l'énoncé. Aussi, Huygens ne s'engagea pas dans la voie ouverte par Descartes et s'appuya sur un principe d'invariance des lois par changement de repère. Il abordera, toutefois, aussi l'étude du choc par la notion de « force de collision », sans pour autant posséder la cause profonde du rebond.

« Si A et B sont égaux, mais A au repos et que B poursuive le même chemin [que dans le cas précédent où B avait une vitesse]. B restera immobile au lieu de la rencontre et A se mouvra vers la gauche, avec autant de vitesse qu'avait B auparavant. La force de collision sera la même que si B rencontrait le corps A avec une vitesse moitié que celle qu'il a vers la gauche, A se mouvant vers la droite avec cette même vitesse moitié³⁶ ».

Il y a donc équivalence, pour Huygens, entre la « force de collision » dans un choc symétrique et ce que nous appelons le « carreau », qui se déduit du précédent par un simple changement de repère. Huygens établit ainsi un principe de relativité, choc symétrique \longleftrightarrow « carreau », qui fut le fil conducteur de son étude et à partir duquel il rédigea le traité sur les règles du choc. « La fidélité de Huygens pour la relativité galiléenne va au-delà du respect pour un texte ou pour un maître incontesté³⁷ ».

35. Tiré de Vilain (1996), p.62.

36. Vilain (1996), p.73.

37. Vilain (1996), p.112.

En fondant l'étude du choc sur la relativité, Huygens mit l'accent sur l'impertinence de la notion de force dans le traitement du choc. Il refusa, par ailleurs, de se référer à cette notion du fait de son manque de concrétude. En effet, il ne rechercha pas à élaborer un concept de force, ni même à savoir quelles étaient les causes du rebond, mais à montrer que l'étude du choc se fonde dans la relativité du mouvement, dont la force de collision est une conséquence. De fait, « la première solution adoptée par Huygens lorsqu'il écrit que la force de percussion ne dépend que de la vitesse relative des deux corps et qu'elle est donc la même pour le choc "symétrique" et pour le "carreau", apparaît comme une simple conséquence d'un principe de relativité ayant le contenu dynamique que nous lui avons attribué dans le texte galiléen³⁸ ».

En regardant plus précisément avec l'œil du mathématicien de notre siècle le contenu de l'étude huguenienne du choc entre deux corps, de masse m_1 , m_2 se déplaçant à des vitesses v_1 et v_2 respectivement, et en accord avec C. Vilain pour qui il « est vraiment anachronique d'écrire ici des symboles [...] de vitesses » et de masse, il apparaît que la « force de collision », dont nous ignorons l'expression, ne dépend, en effet, que des quatre paramètres, m_1 , m_2 , v_1 , et v_2 . Le choc a ainsi été étudié par Huygens sans préoccupation du paramètre temps. Nous procédons toutefois, de nos jours, toujours de même lorsque nous étudions des phénomènes de collisions comme celles se produisant dans un accélérateur de particules. Notre attention se porte essentiellement, pour ne pas dire uniquement, sur la recherche de la vitesse (direction et valeur) avant ou après le choc.

Revenons maintenant brièvement à la loi II. Huygens n'a donc pas fait du temps un paramètre pertinent pour l'étude du choc. Celui-ci semble être intemporel, mais il marque, par ailleurs, un point privilégié dans l'écoulement du temps. Celui pendant lequel le « changement de mouvement » a lieu. Aussi, la loi II, telle qu'elle est énoncée dans les *Principia*, s'inscrit dans le droit fil de la loi huguenienne du choc. Elle place le choc au premier plan de la variation du mouvement et ignore le temps. Son commentaire, en outre, exclut toutes traces de modification du mouvement dues à une force à distance, de sorte que les « changements qui arrivent dans le mouvement » sont localisés hors de la *durée*. Prolongeant notre raisonnement, nous en venons à dire que le choc, l'*instant* qui lui est associé, et la loi II sont effectivement hors du temps.

Cependant, « le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même³⁹ », de sorte que « les changements qui arrivent dans le mouvement », résultent, en fait, d'une cause « absolue », qui, par définition, est « sans relation aux choses externes⁴⁰ ». Les *Principia* eux-mêmes placent, ainsi, le choc et la loi II hors du temps. Ceci pose la question de la conception newtonienne du

38. Vilain (1996), p. 136.

39. Newton (1966b), p.12.

40. Newton (1966b), p.8.

temps.

2.2 Un temps scindé

Le scholie des *Définitions* est le lieu où Newton s'étend sur le sens de termes « connus de tout le monde ». Il débute par un paragraphe rappelant la notion de temps. Newton y distingue un « temps absolu, vrai et mathématique » d'un « temps relatif, apparent et vulgaire ». Cette distinction fait référence à Platon pour qui les objets mathématiques sont des objets idéaux distincts des choses sensibles. Ainsi, le « temps absolu » serait un objet idéal appartenant à un monde mathématique alors que le « temps relatif » serait un élément du monde sensible. Mais elle rappelle aussi la définition du temps que Barrow note dans ses *Lectures géométriques*⁴¹ :

« [...] Maintenant, je vous prie, dites-moi ce qu'est le temps. Vous connaissez le banal adage de Saint Augustin : *Si personne ne me demande je le sais, mais si quelqu'un me demande de lui dire, alors je ne peux pas*. Mais comme les mathématiciens font fréquemment usage du temps, ils doivent avoir une idée distincte de la signification de ce mot, sinon ils sont dans l'erreur. Mes auditeurs peuvent donc, à cette occasion, très justement me demander une réponse, que je vais donner maintenant par les expressions les plus évidentes et les moins ambiguës, évitant autant que possible tous les mots insignifiants et vides de sens. *Temps*, (pour parler de manière abstraite) est la durée de chaque chose dans sa propre existence. Mais certaines choses continuent à être plus longtemps dans leur essence que d'autres. Celles-là *étaient* quand celles-ci n'étaient pas, et *sont* quand celles-ci ne sont pas ; elles existaient en premier, et cessaient d'être après celles-ci ; il n'y a personne qui s'aperçoive, que certaines choses naissent, et cessent d'être au même moment ; gardant une allure égale, telle qu'elle était, du début à la

41. Traduction de l'auteur ; « Now pray tell me what time is ? You know the very trite saying of St Austin, *If no one asks me, I know ; but if any person should require me to tell him, I cannot*. But because mathematicians frequently make use of time, they ought to have a distinct idea of the meaning of that word, otherwise they are quacks. My auditors may therefore, on this occasion, vey justly require an answer from me, which I shall now give, and that in the plainest and least ambiguous expressions, avoiding as much as possible all trifling and empty words. Time, (to speak abstractedly) is the continuance of any thing in its own being. But some things continue longer in their beings than others ; those *were* when these were not, and *are* when these are not ; they enter'd first into being, and cease to be after these ; nor is there any person but perceives, that some things enter into being, and cease to be at the same time ; keeping an equal pace, as it were, from the beginning to the end of their duration. Time absolutely therefore is quantity, as admitting in some manner the chief affections of quantity, equality, inequality, and proportion ; nor do I believe there is any one but allows that those things existed equal times, which rose and perished together, and that those things had unequal durations, when the one was in being before the other had existance, and continue in its being, after the other had cease to be. [...] » ; Barrow (1735), p.4-5.

fin de leur durée. Le temps est donc absolument une quantité, admettant d'une certaine manière les principales affections de la quantité, l'égalité, l'inégalité, et les proportions ; et je ne crois pas qu'il y en ait une qui permette que ces choses existaient en des temps égaux, qui augmentaient et périssaient ensemble ; et que ces choses étaient de durées inégales, quand l'une existait avant l'autre, et continue dans son essence, après que l'autre a cessé d'être. ».

2.2.1 Le concept de temps avant les *Principia*

Les premières préoccupations de l'humain vis-à-vis du temps remontent à bien avant l'Antiquité et concernent essentiellement la recherche d'un repère permettant de déterminer, avec une assez grande certitude - pour les périodes dont nous parlons - un moment important de la vie de la société, comme le début des semailles par exemple. Ces recherches étaient essentiellement fondées sur le mouvement des corps célestes, notamment celui du Soleil, de la Lune ou encore celui de la sphère des fixes à partir de l'Antiquité. Les Égyptiens cependant étaient capables de déterminer le début des semailles par rapport au niveau des eaux du Nil qu'ils surveillaient attentivement.

D'un point de vue conceptuel, toutefois, la notion de temps apparaît pour la première fois dans le *Timée*. Platon y conçoit le temps comme « une image mobile de l'éternité⁴² », le raccrochant ainsi au mouvement des astres, mais qui ne semble cependant pas exister pour l'intelligible.

Aristote transforme le temps en une des conditions du mouvement : il est « le nombre d'un mouvement selon l'antérieur et le postérieur⁴³ ». Temps et mouvement deviennent étroitement liés. Le temps est celui par lequel le mouvement peut être mesuré. Mais il est aussi celui qui nécessite du mouvement pour être mesuré. Cependant, le mouvement aristotélicien ne se limite pas au seul changement de lieu. Il inclue aussi les changements tels que ceux qui affectent un individu dans son être, la génération ou encore la corruption. Aristote privilégie, toutefois, un mouvement régulier, uniforme et invariant : celui du Soleil autour de la Terre. Un mouvement astronomique devient ainsi la mesure universelle du temps.

Au IV^e siècle, Saint Augustin insiste sur la question de l'être du temps, « qu'est-ce donc le temps ? ». Seul est ce qui demeure présent. Le passé n'est plus et l'avenir n'est pas encore, nous dit-il. Il est en ce sens fidèle à Parménide pour qui « l'être est, et il n'est pas possible qu'il ne soit pas ». Mais alors, le temps, faisant intervenir un passé qui n'est plus, et un futur qui n'est pas encore, comment peut-il être ? Notre

42. Platon (2001), p.127.

43. Aristote (2002), p.252.

expérience quotidienne nous montre précisément qu'il n'est pas : nous ne sommes plus dans l'instant passé, pas encore dans l'instant à venir et l'instant présent n'est déjà plus. Pourtant nous parlons du passé, du présent et du futur. Selon Saint Augustin, le passé est, par le souvenir que nous en gardons, le futur est, par l'attente que nous en avons et le présent est, par l'attention que nous lui portons. Si bien qu'il n'y a pas trois temps : passé, présent et futur, mais « le présent du passé, le présent du présent et le présent du futur ». Ces temps n'existent que pour nos esprits et représentent la mémoire, l'attention et l'attente respectivement. Il n'y a donc que le présent qui soit. Il est car être, c'est être présent. Passé et futur ne sont que parce qu'ils sont présents ... à l'âme. Le temps existe donc par et pour l'âme. Il est une « distension de l'âme », c'est-à-dire, une détente de l'âme reliant passé au futur.

Au XVII^e siècle, la vision aristotélicienne du temps est sérieusement remise en cause. Galilée lui confère un nouveau statut en l'introduisant comme paramètre mathématique central de la mécanique. Parallèlement, Descartes fait connaître sa conception de la notion de temps. Celle-ci est abordée uniquement dans le premier livre de ses *Principes de la philosophie*. Il ne lui accorde qu'une place secondaire. Le temps est à distinguer de la durée. Il est un nombre, une mesure divisible en autant de parties que nous le souhaitons et n'existant que dans notre esprit. La durée, quant à elle, est un temps concret et réel. Celui de la « duration » des choses qui continuent d'exister et se conservent. Descartes ne fait, de fait, aucune allusion à la mesure du temps en tant que grandeur physique.

Mais c'est Gassendi surtout, qui, outre la critique des instruments de mesure du temps, attaque la conception aristotélicienne. Le mouvement de révolution de la Terre, Kepler l'a montré, n'est pas uniforme. Le temps ne peut donc être mesuré précisément et, de surcroît, sa définition, aussi, est atteinte. C'est d'ailleurs sur ce dernier point qu'il s'oppose vivement, avec Barrow, entre autre à Aristote. Ils s'opposent à l'identification du temps à sa mesure. Ils perçoivent, avant tout, dans le temps une immuabilité conjointe à un écoulement permanent, qui annoncent le temps absolu newtonien. Ainsi, Gassendi écrit ⁴⁴ :

« Tout ceci nous fait enfin voir que le temps n'est pas dépendant du mouvement, ou n'est pas quelque chose de postérieur au mouvement ; mais seulement qu'il est indiqué par le mouvement comme la chose mesurée l'est par la mesure. Et parce que nous ne pouvons pas savoir combien il se serait passé de temps pendant que nous faisons quelque chose, ou que nous ne faisons rien ; nous nous sommes trouvés obligés de prendre garde au mouvement céleste, afin que selon sa quantité, nous puissions déterminer combien de temps il s'est écoulé. [...] Et c'est encore pour cela que voulant prouver plus haut que le temps est indépendant du mouvement

44. Bernier, *Abrégé de la philosophie de Gassendi*, Tome 2, p.35-36.

céleste, j'ai fait prendre garde qu'on conçoit que le temps s'écoule toujours de la même façon, soit que le ciel se repose, ou qu'il se meuve. [...] »

Le mouvement des corps célestes permet, certes, encore une évaluation du temps, mais celle-ci n'est qu'une image approchée de ce qu'il est réellement. Par essence, le temps s'écoule uniformément et est indépendant de toute représentation quantitative. Et selon Barrow, il ne suggère, en outre, ni le mouvement, ni le repos. Il n'est que l'expression de la permanence des choses⁴⁵.

« le temps ne suppose donc pas une existence actuelle, mais seulement la capacité ou la possibilité de l'existence permanente ; juste comme l'espace exprime la capacité d'une grandeur contenue en lui. Mais vous êtes peut être surpris de mon explication du temps sans rapport au mouvement, et je dirai, le temps implique-t-il le mouvement ? Je réponds négativement, comme sa nature absolue et intrinsèque le suggère. Pas plus qu'il n'implique le repos. La quantité de temps, en soi, ne dépend ni de l'un ni de l'autre ; puisque si les choses se déplacent, ou restent immobiles, si nous dormons ou sommes éveillés, le temps flue perpétuellement avec une égale teneur. »

Par « nature absolue et intrinsèque », le temps, au XVII^e siècle, est caractérisé par son écoulement, uniforme, indépendant des phénomènes.

2.2.2 Le temps relatif

Commentaire de la définition

Le « temps relatif » est introduit dans le scholie des *Définitions*⁴⁶.

« Le temps relatif, apparent et vulgaire, est cette mesure sensible et externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise du mouvement : telles sont les mesures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, et dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai ».

L'adjectif « relatif » sous-entend que ce temps est, mais par rapport à quelque chose. Autrement dit, le temps relatif n'est pas « la véritable quantité » dont il porte le nom. Il n'en est qu'une mesure sensible que nous employons ordinairement pour mesurer

45. Traduction de l'auteur ; « Time therefore does not imply an actual existence, but only the capacity or possibility of the continuance of existence ; just as space expresses the capacity of a magnitude contain'd in it. But you may perhaps wonder why I explain time without motion, and will say, does not time imply motion ? I answer no, as to its absolute and intrinsic nature ; any more than it does rest. The quantity of time, in itself, depends not on either of them ; for whether things move on, or stand still ; whether we sleep or wake, time flows perpetually with an equal tenor » ; Barrow (1735), p.6.

46. Newton (1966b), p.8.

le temps. Mais « comme la signification des mots doit répondre à l'usage qu'on en fait, on aurait tort si on entendait par les mots de *temps*, [...], autre chose que les mesures sensibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique⁴⁷ ». La signification première d'un mot est donc déterminée par l'emploi que nous en faisons, de sorte que, sans contre indication du contexte, le terme de « temps » doit être compris comme une quantité relative. Nous connaissons donc le temps de manière quotidienne uniquement par une mesure provenant de nos sens.

Cette mesure sensible, essentiellement liée au mouvement, nous fournit un temps « apparent », qui ne peut être « vrai » puisque le mouvement parfait est inexistant. Même celui des planètes connaît des irrégularités. Leur trajectoire n'est plus un cercle parcouru à vitesse constante. Celle-ci est plus grande au périhélie, moindre à l'aphélie.

Mais Newton qualifie aussi ce temps de « vulgaire », c'est-à-dire qu'il le considère comme un temps de sens commun, usité par tous, quotidiennement. C'est un temps relevant de l'empirique, origine de son imprécision, empêchant ainsi son emploi en mathématique.

Insuffisance du temps relatif

Toutefois, limiter le concept de temps au temps relatif semble délicat. En effet, pour évaluer la force centripète, il faut être en mesure d'évaluer soit l'aire du triangle SPQ , soit le temps auquel cette dernière est proportionnelle. Aussi, mesurer la durée d'un phénomène dans lequel le mouvement est inexistant ou qui ne fait pas intervenir la force centripète semble impossible. Toutefois, « la durée [...] serait la même quand il n'y aurait aucun mouvement », nous dit Newton. Qu'advierait-il du temps, cependant, si les planètes, pour une raison inconnue et improbable, venaient à s'arrêter ? À ne plus tourner autour du Soleil ? L'évaluation de la force centripète serait-elle encore possible ? L'expression mathématique $F_{vi} \propto \frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ ⁴⁸ implique, effectivement, dans ce cas un temps infini. Le temps ne serait donc pas mesurable et aucune force ne pourrait être évaluée.

Mais restreindre le concept de temps au mouvement des corps célestes autour du Soleil n'est pas plus raisonnable, puisqu'il est « très possible qu'il n'y ait point de mouvement parfaitement égal, qui puisse servir de mesure exacte du temps⁴⁹ ». Aussi, l'idée de Barrow selon laquelle le temps est autre chose que la mesure du mouvement nous apparaît vraie - A. Koyré affirme qu'il est une réalité indépendante. Elle montre

47. Newton (1966b), p.15.

48. Le corollaire 1 de la proposition VI stipule que « la force centripète est réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ [...] et le double de $SP \times QT$ est proportionnel au temps dans lequel l'arc est décrit ».

49. Newton (1966b), p.10.

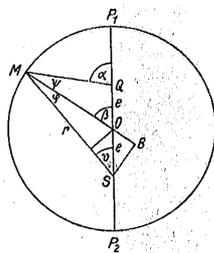
aussi que les pratiques des astronomes de son temps ne se limitaient pas à l'emploi du « temps relatif ». Les tables astronomiques du livre III des *Principia*⁵⁰ justifient pleinement ce propos et montrent, par ailleurs, que l'évaluation du temps dans un cadre mathématique nécessitait davantage que le « temps relatif ».

2.2.3 L'équation du temps

La distinction « du temps de ses mesures sensibles » est faite par l'*équation du temps*⁵¹. Celle-ci doit être comprise non pas comme une équation, au sens moderne, de la physique mathématique, c'est-à-dire l'égalité entre deux membres de même genre, mais comme une correction à apporter au temps relatif afin de connaître le temps vrai. Elle permet ainsi d'égaliser, ou d'uniformiser, les mouvements sensibles afin d'obtenir une mesure exacte du temps. Elle s'inscrit dans le cadre général de réduction d'un mouvement non-uniforme à un mouvement uniforme, présent dès l'Antiquité. Cette réduction du mouvement est la conséquence d'une conviction portant sur la réalité même du mouvement : « Les cieux se meuvent régulièrement, et si les apparences sont contraires, il faut retrouver le réel au-delà des apparences ». Les Anciens avaient donc aussi leur temps absolu : la rotation de la sphère des fixes. Elle était le mouvement le plus harmonieux et le plus régulier qui soit. Elle était la norme de la régularité. Ainsi temps et ciel étaient des concepts équivalents depuis le *Timée* jusqu'à l'*Almageste*, dans lequel Ptolémée introduisit le point équant afin d'expliquer le mouvement des corps célestes sur une base de mouvement uniforme. Au Moyen-Âge, Peurbach et Regiomontanus avaient aussi développé de telles horloges géométriques pour régulariser le mouvement des astres. Mais dans ces procédés, le point équant était fictif et arbitraire. Fictif car vide de matière ; il n'est qu'un point géométrique. Arbitraire car la taille du cercle dont il est le centre est sans importance. Kepler, en revanche, fit disparaître la notion d'arbitraire avec la loi des aires. Son « équation » est fondée sur des bases physiques. La régularité est garantie par des considérations dynamiques. Le mouvement de

50. Newton (1966b), Tome II, livre III, p.129.

51. L'équation du temps, aussi appelée équation astronomique, est un angle désignant la correction à apporter à l'anomalie moyenne pour obtenir l'anomalie vraie. Il s'agit, sur la figure ci-dessous, de l'angle Ψ . Voir page 111



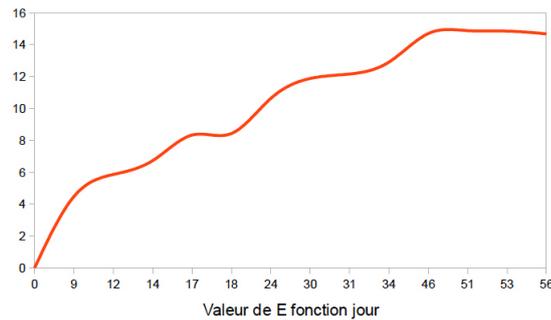


FIGURE 2.3 – Valeur de l'équation astronomique en fonction de la date

la planète est expliqué par la diffusion d'une force émanant du Soleil, phénomène régulier, et le temps de parcours est mesuré par l'aire balayée par la ligne joignant l'astre au Soleil. Newton, en considérant l'équation astronomique comme moyen de correction du temps apparent, se réfère ainsi à la pratique des astronomes de son siècle, qui voyaient une nécessité de posséder une échelle de temps plus satisfaisante que les repères habituels de *jours* et de *mois*, pris « communément pour une mesure égale du temps ». En pratique, ils utilisaient le temps local, ou apparent, qu'ils rectifiaient afin de mesurer avec davantage de précision le mouvement des corps célestes.

Des observations d'une comète réalisées par Flamsteed en 1680 et rectifiées par Halley, nous tirons la table 2.1, qui illustre le dernier propos. De cette table, nous avons calculé l'équation astronomique (table 2.2), dont nous avons tiré le graphe (figure 2.3) de la variation de l'équation du temps en fonction de la date.

Nous constatons que la correction à apporter varie en fonction du moment de l'année. De sorte qu'il est impossible de caler une horloge sur notre Soleil. Les astronomes ont alors défini un « jour solaire moyen » donné par un soleil moyen, astre fictif, qui tourne à vitesse constante sur une orbite circulaire dans le plan de l'équateur, afin de satisfaire leur besoin de précision dans les mesures des corps célestes.

Le besoin de déterminer exactement la longitude, afin de se repérer correctement en mer, et l'exigence des physiciens ont grandement amélioré la chronométrie. La publication, par Huygens, de l'*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ* permit un meilleur traitement théorique et pratique de l'isochronisme des oscillations, facilitant ainsi la réalisation d'horloges à pendule plus précises et plus rigoureuses capables de déceler, alors, l'inégalité du jour solaire vrai. L'apparition de nouvelles horloges, en lesquelles les philosophes et les astronomes espéraient trouver une régularité, tel que le mouvement des satellites de Jupiter découvert quelques années auparavant par Galilée, leur avait donné l'espoir d'avoir

	Temps apparent	Temps vrai	Longitude du Soleil	Longitude de la comète	Latitude boréale
	(h m)	(h m s)	(h ' ")	(h ' ")	(h ' ")
1680. Déc. 12*	4. 46	4. 46. 0	1.51.23 ♐**	6.32.30 ♐	8.28. 0
21	6. 32. $\frac{1}{2}$	6.39.59	11.06.44	5. 8.12 ♋	21.42.13
24	6. 12	6.17.52	14.09.26	18.49.23	25.23.05
29	7. 55	8.03.02	19.19.43	13.10.41 ♋	28. 9.58
30	8. 02	8.10.26	22.01. 9	17.38.20	28.11.53
1681. Janv. 5	5. 51	6. 1.38	26.22.18	8.48.53 ♈	26.15. 7
9	6. 49	7. 0.53	0.29. 2 ♋	18.44. 4	24.11.56
10	5. 54	6. 6. 10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6. 56	7.8.55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7. 44	7.58.42	16.45.36	9.35. 0 ♉	17.56.30
30	8. 07	8.21.53	21.49.38	13.19.51	16.42.18
Fev. 2	6. 20	6.34.51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6. 50	7. 4.41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

TABLE 2.1 – Éphémérides de la comète de Halley calculées à partir d'observations effectuées par Flamsteed. Tirées de [Newton \(1966b\)](#), livre III ; p.129. * Les dates correspondent à l'ancien style. La réforme du calendrier instaurée par le pape Grégoire XIII en 1582 ne fut pas suivie immédiatement par les Anglais, qui pensaient qu'il s'agissait avant tout d'une superstition du pape, de sorte qu'il existe, en 1680, un décalage de 11 jours entre le calendrier anglais et notre calendrier. Ils appliquèrent le nouveau calendrier en 1701 après une année considérée comme transitoire ; ** Les symboles apparaissant dans les colonnes des longitudes correspondent au signe de la constellation du zodiaque dans laquelle se trouve l'astre au moment de l'observation, selon la légende suivante : ♐ : Capricorne ; ♋ : Verseau ; ♋ : Poissons ; ♈ : Bélier ; ♉ : Taureau.

Date	Équation astronomique (m s)
1680 Déc. 12	0
21	4.29
24	5.52
29	8.20
30	8.26
1681 Jan. 5	10.38
9	11.53
10	12.10
13	12.55
25	14.42
30	14.53
Fev. 2	14.51
5	14.41

TABLE 2.2 – Calcul de l'équation astronomique d'après les éphémérides de la comète de Halley réalisées à partir des observations de Flamsteed en 1680.

enfin trouvé l'horloge universelle. Les mouvements des satellites, malheureusement, sont tout aussi imparfaits que ceux de la Terre, et ne peuvent « servir de mesure exacte du temps », ni fournir aux géographes et aux navigateurs le recours à une « heure universelle ». Le XVII^e siècle, à la recherche d'une horloge infaillible, n'a donc pas pu supprimer le recours à l'équation astronomique, dont « la nécessité [...] se prouve assez par l'expérience des horloges à pendule, et par les observations des éclipses des satellites de Jupiter ».

Mais l'« équation astronomique » est aussi une nécessité à la justification de l'existence du temps absolu. En permettant la correction d'un temps « apparent » en un temps « vrai », elle rend possible le passage du domaine des phénomènes, c'est-à-dire du domaine dans lequel les données empiriques sont relevées, au domaine de l'interprétation, soit le domaine réservé aux mathématiques. De sorte que nous devons admettre que ces deux temps ne peuvent être totalement disjoints. C'est cette coexistence temps absolu et temps relatif qui est à l'origine de notre considération de « ces quantités que par leurs relations à des choses sensibles » et qui nous a fait « tomber dans plusieurs erreurs ». Dès lors, comme nous le rappelle Marc Lachièze-Rey⁵², la confrontation des visions astronomique et métaphysique nous amène à confondre temps et mesure du temps, malgré les recommandations newtoniennes. Enfin elle confirme, de façon détournée, la pensée selon laquelle le temps absolu répond à un besoin physico-

52. Lachièze-Rey (2008)

mathématique.

2.2.4 Temps absolu

Le temps absolu est caractérisé ainsi ⁵³ :

« Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, et s'appelle *durée* ».

Ainsi, le temps est à la fois « absolu », « vrai », « mathématique » et « sans relation à rien d'extérieur ». Est-ce à dire que les mathématiques sont sans lien avec la vie quotidienne ? Ou l'absence de relation au monde extérieur fait-elle du temps un être qui trouve son origine au-delà du monde ? Quelle(s) raison(s) alors a (ont) poussé Newton à qualifier le temps d'absolu ?

Une origine métaphysique

Le temps absolu est *vrai*. Autrement dit, il représente les phénomènes de la nature et possède, par ailleurs, une consistance. De fait, il est *mathématique* puisque seules les mathématiques sont représentatives des choses de la nature et des phénomènes. Toutefois, en l'espèce, il est inexploitable car « sans relation à rien d'extérieur ». En cela il est métaphysique ; il existe, il représente les phénomènes de manière plus exacte encore mais ne se laisse pas saisir. Il coexiste avec les phénomènes sans en subir l'influence, de sorte qu'il coule toujours de la même manière, selon le même mode. Chaque instant, dans son essence, est identique au précédent et se confond avec le suivant. L'ensemble de ces instants, identiques, forme ainsi la *durée*, un intervalle de temps qui illustre de façon significative la persévérance de choses ainsi que celle du mouvement des corps célestes, qu'il soit lent, rapide ou le repos.

L'idée de caractère métaphysique, ou plutôt théologique, assigné au temps absolu nous vient essentiellement de l'explication des mouvements des corps célestes donnée par Newton dans le scholie général. Ces mouvements n'auraient pas « de causes mécaniques ; puisque les comètes se meuvent dans des orbites fort excentriques ». A l'instar de « cet admirable arrangement » du monde, qui « ne peut être que l'ouvrage d'un être tout-puissant et intelligent ». Ainsi le monde tel qu'il nous apparaît n'est que le fruit du travail d'un être, tout puissant, extérieur à notre monde. Et dans l'hypothèse où celui-ci ne serait pas unique, « il est certain, que tout portant l'empreinte d'un même dessein, tout doit être soumis à un seul et même Être : car la lumière que le Soleil et les étoiles fixes se renvoient mutuellement est de même nature. De plus, on voit que celui qui a arrangé cet Univers, a mis les étoiles fixes à une distance immense les unes des autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur

53. [Newton \(1966b\)](#), p.8.

gravité⁵⁴ ».

Selon F. de Gandt, la formation intellectuelle de Newton, provenant de disciplines diverses, justifie ses positions vis-à-vis de Dieu et de l'existence d'un tel monde. Ainsi, outre le mécanisme de Descartes, il fut influencé par l'atomisme et l'idée d'un espace vide empli de la présence divine au-delà du monde corporel, par l'épicurisme, autorisant un espace infini, enfin par la thèse de More selon laquelle Dieu est omniprésent et omnipotent. La pratique de l'alchimie, dans laquelle il retrouva les idées particulièrement imposantes d'une nature traversée par des forces mystérieuses et de la présence d'un esprit supérieur, joua aussi un rôle important sur la conception newtonienne de la nature.

Cette idée d'« Être infini qui gouverne [...] comme le *Seigneur de toutes choses* », est confirmée dans le scholie général⁵⁵ :

« Il est éternel et infini, tout-puissant, et omniscient, c'est-à-dire qu'il dure depuis l'éternité passée et dans l'éternité à venir, et qu'il est présent partout dans l'espace infini : il régit tout ; et il connaît tout ce qui est et tout ce qui peut être. Il n'est pas l'éternité ni l'infinité, mais il est éternel et infini, il n'est pas la durée ni l'espace, mais il dure et il est présent, il dure toujours et il est présent partout : il est existant toujours et en tout lieu, il constitue l'espace et la durée. »

Mais nous percevons déjà cette idée dans le *De Gravitatione*, ouvrage dans lequel Newton explique d'un point de vue philosophique les raisons qui rendent invalide le monde tourbillonnaire cartésien. Newton y précise que l'espace et le temps sont « des effets émanants d'un être qui existe à titre premier, puisque, quel que soit l'être que l'on pose, l'espace est posé par là-même. Il est d'ailleurs possible de produire les mêmes affirmations sur la durée⁵⁶ ».

L'espace et le temps sont donc partout présents dès que l'être est posé, de sorte que le temps est le même dans tout l'espace. Un moment de cette durée est alors le même à Rome, Londres, sur la Terre ou dans les cieux. En tant qu'effets émanants, ils sont des affections de l'être qui permettent de désigner la « quantité d'existence » de n'importe quel individu. Ainsi la quantité d'existence de Dieu, sous le rapport de la durée est éternelle et sous le rapport de l'espace est infini. Espace et durée sont donc présents à titre premier, mais la durée s'écoule uniformément alors que l'espace reste immobile. Cependant cette immobilité n'est pas mieux représentée que par la durée⁵⁷.

« D'ailleurs, la meilleure illustration que l'on puisse donner de l'immobilité de l'espace, c'est par la durée. En effet, de même que l'individuation des

54. [Newton \(1966b\)](#), Tome second, p.175.

55. [Newton \(1966b\)](#), Tome second, p.175.

56. [Newton \(1985a\)](#), p.44.

57. [Newton \(1985a\)](#), p.44.

parties de la durée résulte de l'ordre, de sorte que si hier pouvait changer de place avec aujourd'hui et devenir postérieur, il perdrait son individualité et serait non plus hier mais aujourd'hui. De même, les parties de l'espace doivent leur individuation à leurs positions, de sorte que, si deux quelconques d'entre elles pouvaient changer de position, elles changeraient en même temps d'individuation et chacune se changerait numériquement en l'autre ».

Ainsi la durée est le meilleur représentant de l'immobilité de l'espace en ce sens que chacune de ses parties occupe une position spécifique, de sorte qu'hier n'est pas demain, et qu'aujourd'hui ne peut précéder hier. Si aujourd'hui ne correspond pas à demain, c'est qu'ils tiennent, tous deux, une fonction différente dans la *durée*. De l'un nous pouvons atteindre l'autre — après aujourd'hui arrive demain — de l'autre, il nous est impossible de revenir à l'un. Une fois demain, « aujourd'hui » ne reviendra pas. Il est passé. Si demain prenait la place d'aujourd'hui, il perdrait alors son individualité. Il serait aujourd'hui et non plus demain. De là, nous concluons qu'une durée est constituée d'une succession de parties ordonnées, et c'est cet ordre et ce positionnement relatif qui confèrent à chacune des parties de la durée une individuation et imposent le sens et le rythme de l'écoulement de la durée. Cette idée est reprise dans le scholie final des *Définitions*⁵⁸.

« L'ordre des parties de l'espace est aussi immuable que celui des parties du temps ; car si les parties de l'espace sortaient de leur lieu, ce serait, si l'on peut s'exprimer ainsi, sortir d'elles-mêmes. Les temps et les espaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes et il sont les lieux de toutes les choses. Tout est dans le temps, quant à l'ordre de la succession : tout est dans l'espace, quant à l'ordre de la situation ».

Il semble donc que, de par ces points, le « temps absolu » trouve son origine dans la métaphysique. Toutefois, si tel était le cas, nous ne nous expliquerions pas son introduction en philosophie naturelle. Aussi, pensons nous qu'il procède du rationnel, ce qui lui conférerait, de surcroît, un caractère scientifique et expliquerait sa présence dans les *Principia*, unique œuvre newtonienne dans laquelle il est mentionné.

Une origine rationnelle

Le scholie général, qui influe sur les commentaires des dernières décennies selon lesquels les absolus newtoniens procèdent de la métaphysique, fut ajouté au texte à partir de la deuxième édition. Or le « temps absolu » est présent dès la première édition. Aussi, nous n'adhérons pas à cette dernière thèse et pensons, par ailleurs, que ce scholie fut ajouté par Newton afin d'éviter notamment de nouvelles querelles, qu'il lui aurait

58. [Newton \(1966b\)](#), p.10.

été difficiles de supporter. Il nous paraît alors légitime d'aborder la notion de « temps absolu » sous un angle différent.

Le temps absolu trouve sa justification, selon nous, dans le concept de force, dont la recherche de l'expression mathématique a nécessité la mathématisation du temps. En effet, la tâche principale de la philosophie naturelle est de « déduire les forces à partir des phénomènes ». Et, les définitions v à VIII⁵⁹ associées aux deux premières lois permettent l'évaluation de la force par l'intermédiaire de la mesure de l'accélération, tel est le cas dans les propositions 39 à 41. Mais nous devons déterminer les accélérations dans un espace-temps de référence si nous voulons déduire les forces réelles. Et, cet espace-temps doit se rapprocher autant que possible de l'espace-temps caractérisé par l'espace-temps absolu, vrai et mathématique.

Illustrons notre propos à l'aide d'une expérience de pensée reprise de N. Guicciardini⁶⁰. Plaçons nous dans un cadre spatial, supposé absolu⁶¹, dans lequel nous mesurons le temps à l'aide de deux horloges synchronisées sur deux mesures différentes de temps. La première est liée au Soleil, et la seconde suit le temps sidéral. Relativement au Soleil, la mesure des ombres fournit une mesure du temps. Ainsi, midi est défini au moment où l'ombre est la plus courte. Dans le second cas, la rotation diurne de la Terre constitue l'horloge.

A l'aide de ces deux horloges, mesurons la distance parcourue par un corps qui se déplace de manière rectiligne. Selon la première horloge, le corps parcourt un mètre par seconde. Selon l'horloge terrestre, il parcourt le premier mètre en une seconde, le mètre suivant en une seconde et une milliseconde, enfin un dernier mètre en une seconde et trois millisecondes. Un observateur solaire conclura que la force totale agissant sur le corps est nulle, alors que l'observateur terrestre affirmera qu'une force freine le corps. Nous en déduisons qu'il est important de mesurer l'accélération avec une « bonne » horloge, c'est-à-dire avec une horloge se rapprochant autant que possible du temps absolu afin de déduire les vraies forces. C'est pour cette raison que Newton eut besoin de postuler un temps absolu.

Nous pouvons aussi mesurer l'accélération par rapport à des référentiels se déplaçant de manière différente. Mesurons par exemple, l'accélération d'un corps dans un référentiel en repos par rapport aux étoiles et l'accélération de ce même corps dans un référentiel en repos par rapport à la Terre. Nous constatons qu'elles ne sont pas égales. Effectivement, par rapport aux étoiles, le mouvement du corps est rectiligne alors que le corps nous semblera décrire une trajectoire complexe par rapport à la Terre. Les forces déduites seront donc différentes. L'observateur sidéral ne déduira aucune force alors que l'observateur terrestre conclura à l'action d'une force accélératrice. Là aussi,

59. Les définitions v à VIII correspondent aux définitions des diverses caractéristiques de la « force centripète », telles que la quantité accélératrice ou la quantité absolue, par exemple.

60. Guicciardini (1999)

61. Le cadre spatial peut aussi se déplacer uniformément par rapport à l'espace absolu.

nous constatons la nécessité de mesurer les accélérations par rapport à un espace se rapprochant autant que possible de l'espace absolu.

De fait, la déduction de la force centripète par la proposition VI, qui est basée sur la mesure de la variation de la vitesse géométrique – autrement dit, l'accélération – nécessite de mesurer QR dans un cadre spatial qui est au repos (ou en mouvement rectiligne) relativement à l'espace absolu et nécessite un temps qui s'écoule uniformément, à l'instar du temps absolu.

La théorie newtonienne semble donc affirmer une structure spatio-temporelle « absolue » du monde fondée sur des suppositions physiques, notamment sur la nature de la force et de l'inertie, qui nous permettent de relier cette structure à l'expérience. Les conceptions de temps et d'espace ne reposent donc pas sur des hypothèses métaphysiques arbitraires ajoutées à d'autres hypothèses physiques empiriques. Selon R. Disalle, « elles sont des suppositions implicites dans les lois de la physique ⁶² ».

Aussi, la question qui peut être posée est de savoir si la conception newtonienne des absolus est requise par la physique newtonienne. Or les lois newtoniennes permettent de distinguer un corps en rotation ou accélération vraie d'un second corps en rotation ou accélération relative. Mais elles ne permettent pas de discerner si un corps est en repos dans un espace absolu ou de déterminer la vitesse absolue. Aussi, selon R. Disalle, les lois newtoniennes n'impliquent pas un espace absolu mais plutôt une structure quadri-dimensionnelle, que nous pourrions nommer « espace-temps newtonien », dont une ligne droite représenterait un mouvement rectiligne uniforme. L'interprétation physique de cette ligne serait le mouvement rectiligne uniforme d'un corps n'étant soumis à aucune force extérieure.

Revenons cependant brièvement sur le contexte philosophico-historique. La théorie newtonienne du temps s'apparente simplement à une analyse précise de ce qui était perçu comme le temps dans la science mécanique pratiquée par Newton et ses contemporains dont Descartes notamment. Les définitions d'espace, de temps et de mouvement proviennent de l'identification, par Descartes, de l'espace et de la matière. Le vide ne pouvait exister. Un mouvement dans l'espace est donc « relatif à » un fluide matériel. La théorie du vortex expliquait bien le mouvement des planètes autour du Soleil. Cependant, Descartes resta ambigu sur la définition « du mouvement dans le sens philosophique ». Dans le sens « vulgaire », le mouvement signifie l'action par laquelle un corps passe d'un endroit à un autre. Dans « le sens philosophique », il s'agit du déplacement du corps à partir des parties contiguës de ce corps vers les parties contiguës d'un autre corps dans son voisinage. Cette théorie du mouvement ne permettait pas d'expliquer, aux yeux de Newton, le mouvement des corps célestes autour du Soleil. Elle négligeait, de par sa définition du « mouvement au sens philosophique », la distinction

62. Disalle (2002), p.34.

entre mouvement inertiel et mouvement dû à l'action d'une force. La question posée par le scholie terminal des *Définitions* de savoir quels concepts de temps, d'espace et de mouvement sont nécessaires pour expliquer la dynamique du système solaire semble alors légitime. Elle ne remet pas en cause, pensons-nous, les convictions profondes de Newton. Nous pensons même qu'elle éclaire davantage la nature de ces convictions et leur relation à la physique newtonienne. Pour Newton, Dieu et les choses physiques étaient localisés dans l'espace et le temps, qui formaient un cadre à l'intérieur duquel celles-ci agissent les unes sur les autres. Leurs relations causales devenaient intelligibles à travers leurs relations spatio-temporelles et surtout par leurs effets sur leur état de mouvement. De ce dernier principe — localisation dans l'espace des choses et de Dieu — implicite au xvii^e siècle, Newton a défini les grandeurs absolues inscrites dans le scholie des *Définitions* ; si la physique est de comprendre les relations causales réelles dans le monde, alors elle doit définir le temps, l'espace et le mouvement de manière à rendre intelligible ces relations.

Newton, par ces définitions, offre une analyse conceptuelle de ce qui était présupposé dans les raisonnements classiques du mouvement au xvii^e siècle, omettant volontairement toutes hypothèses métaphysiques qui expliqueraient les phénomènes. Mais par ces définitions le temps, l'espace et le mouvement sont-ils absolus ? Le propos de Newton n'était pas de définir des grandeurs absolues de façon ontologique, mais de mettre à jour des concepts à partir de critères empiriques et de préciser les rôles joués par ceux-là dans la résolution de problèmes mécaniques. Ceci peut être aussi perçu, par le fait que ces définitions ne sont pas partie intégrante du corps du texte mais apparaissent seulement dans le scholie de la section. Il voulait aussi montrer que les concepts équivalents établis par ses contemporains n'étaient d'aucune utilité en mécanique.

De fait, le temps absolu se prête une nouvelle interprétation. Le « temps absolu », par sa caractérisation, est réel et objectif au sens scientifique ; il peut être représenté par un axe, d'un espace \mathbb{E}_1 , gradué, orienté, dont la direction indique le sens de l'écoulement du temps. Il est *vrai* ; c'est le temps des astronomes, qui permet la mesure du mouvement des corps célestes. Il possède quelque chose de vrai de par son taux constant d'écoulement. Enfin, il est *mathématique* ; c'est le temps avec lequel nous effectuons des opérations, c'est-à-dire qu'il est le temps que nous utilisons aussi bien dans les opérations de base, telles que l'addition ou la multiplication, mais aussi dans la théorie des proportions ou encore dans le calcul différentiel. En outre, à chaque élément d'une *durée* peut être associé un scalaire. Il est donc un élément du langage qui permet d'exprimer les phénomènes de la philosophie naturelle.

Ainsi vêtu, il représente le temps manipulé de nos jours dans les équations de la physique classique, et est une théorie du temps non pour son ontologie mais pour sa structure. Sa caractéristique clé n'est pas la distinction de l'individualité des mo-

ments, mais le fait que le temps s'écoule uniformément, de façon identique à chaque instant, et que les intervalles de temps égaux sont objectivement définis. Le monde de l'espace-temps est l'ensemble des événements successifs qui ont lieu dans l'espace à des moments finis de temps successifs. Il y a alors une mesure objective des rapports des intervalles de temps. Ceci est un fait objectif lié à la caractérisation « sans relation à rien d'extérieur » du temps absolu. Newton s'oppose ainsi à l'idée que les moments de temps aient une identité au-delà de leur ordre et de leur position mutuels. Ceci apparaît clairement dans l'affirmation, exprimée selon les termes leibniziens, « tout est dans le temps, quant à l'ordre de la succession : tout est dans l'espace, quant à l'ordre de la situation ». Il rejette ainsi les critiques de ses contemporains, notamment celle de Leibniz, pour qui, si le temps est absolu il doit être une « substance ». Chacune de ses parties doit pouvoir alors être distinguée. Par exemple, si le début de l'univers était déplacé à un autre moment du temps absolu, des modifications réelles devraient être perceptibles. Mais tel n'a pas été le cas. Le temps absolu viole donc le *principe des identités des indiscernables*, par lequel il ne peut y avoir deux choses distinctes qui ne diffèrent pas perceptiblement.

Le temps absolu implique aussi la simultanéité absolue. Chaque moment de temps est défini en tout point de l'espace. La simultanéité sous-entend donc que deux événements ayant lieu au même instant constitue un fait objectif.

Ces deux derniers points, égalité des intervalles de temps et simultanéité absolue, supposent toutefois l'existence d'un écoulement uniforme, qui semble être un concept plus problématique, bien qu'il existe des fondements objectifs pour juger si des intervalles de temps sont rigoureusement égaux. Autrement dit, la définition du temps absolu possède-t-elle un contenu scientifique suffisamment objectif, dans le contexte des *Principia*? Nous permet-elle de définir des intervalles de temps écoulés sans recours à l'arbitraire? Existe-t-il une bonne définition de ce que sont des intervalles de temps égaux, même en l'absence, actuellement, d'horloges capables de mesurer exactement de tels intervalles? R. Disalle répond affirmativement à ces questions : « c'est précisément la définition du temps impliqué par les lois newtoniennes du mouvement, qui postule une distinction objective entre mouvements inertiels, caractérisés par des distances égales parcourues en des temps égaux, et les mouvements accélérés par une force imprimée⁶³ ». De fait, la réalisation de l'horloge idéale, celle qui garderait le temps absolu, devrait approcher au mieux celle d'une horloge inertielle. La définition du temps absolu est de fait aussi bien fondée que les lois du mouvement. C'est probablement la raison, selon R. Disalle, pour laquelle, en dépit de toutes les objections philosophiques traditionnelles, elle a seulement été renversée par l'introduction des

63. Traduction de l'auteur ; « this is precisely the definition of time implied by Newton's laws of motion, which postulate an objective distinction between inertial motions, which cross equal distance in equal time, and motions that are accelerated by an impressed force » ; Disalle (2002), p.39.

nouvelles lois physiques einsteiniennes.

2.3 Conclusion

Le concept de temps newtonien présent dans les *Principia* est donc scindé en un « temps relatif, apparent et vulgaire », et en un « temps absolu, vrai et mathématique ». Le « temps relatif » nous apparaît comme une première approche à un temps mathématisable. Autrement dit, il est la première étape de la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle. Il permet la mesure du temps de façon convenable pour les choses communes, comme pour la mesure de l'heure, du jour ou encore du mois. Cependant, pour ce qui est des phénomènes de la nature, notamment ceux relevant de l'astronomie et, de manière plus précise de l'étude du mouvement des corps célestes, qui sont la raison première de la rédaction des *Principia*, il est nécessaire de recourir à l'« équation du temps ». Celle-ci précise le « temps relatif » mais n'en fait pas un temps « mathématique », de sorte que « temps relatif » et « temps absolu » ne sont pas assimilables. Le « temps relatif » participe de la quantité ; il permet d'atteindre le « temps absolu », mais n'est pas employé en mathématique car il n'est pas encore assez précis. Il ne respecte pas l'exactitude des mathématiques, notamment celle de la géométrie. Or, la philosophie naturelle a besoin d'un temps s'accordant avec la rigueur de la géométrie des Anciens. Newton ébauche ainsi un concept de temps sans relation au monde sensible, dont certains y voient une origine théologique.

« Or comme la signification des mots doit répondre à l'usage qu'on en fait, on aurait tort si on entendait par les mots de *temps*, d'*espace*, de *lieu* et de *mouvement*, autre chose que les mesures sensibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique. Lorsqu'on trouve donc ces termes dans l'Écriture, ce serait faire violence au texte sacré, si au lieu de les prendre pour les quantités qui leur servent de mesures sensibles, on les prenait pour les véritables quantités absolues, ce serait de même aller contre le but de la philosophie et des mathématiques, de confondre ces mêmes mesures sensibles ou quantités relatives avec les quantités absolues qu'elles mesurent⁶⁴. »

Ce temps, « absolu », laisse entendre qu'il est hors du monde. Effectivement, il est « sans relation à rien d'extérieur », puisqu'il est le temps du monde mathématique qui ne fait, que momentanément, des incursions dans le monde sensible. Toutefois, il reste encore à le façonner afin qu'il puisse être intégré dans les mathématiques, alors en élaboration, qui vont être utilisées lors de la refonte des *Principia*, et qu'il devienne, par la même, une variable fondamentale indépendante de la philosophie naturelle.

64. [Newton \(1966b\)](#) ; p.15.

Deuxième partie

La manipulation du temps dans les *Principia*

Chapitre 3

Les moyens mis en place pour un traitement mathématique du temps

3.1 La Méthode des Premières et Dernières Raisons

La *Méthode des premières et dernières raisons*, méthode géométrique composée de 11 lemmes, de leurs corollaires et scholies respectifs, et d'un scholie final, constitue la méthode mathématique qui permet de « trouver les forces qu'emploie la nature » et « à démontrer ensuite les autres phénomènes ». Elle compose la première section du livre I des *Principia* et est, selon son auteur, le fondement mathématique¹ sur lequel les phénomènes de la philosophie naturelle reposent. L'emploi de cette méthode trouve sa justification dans le scholie final de la section² :

« [...] J'ai commencé par ces lemmes ; pour éviter de déduire de longues démonstrations *ad absurdum*, selon la méthode des anciens Géomètres.

J'aurais eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles ; mais parce que l'hypothèse des indivisibles me paraît trop dure à admettre, et que cette méthode est par conséquent peu géométrique, j'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s'évanouissent, et j'ai commencé par faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent ces quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indivisibles ; mais en ayant prouvé le principe, je m'en servirai avec plus de sécurité [...] ».

Ainsi, en employant cette méthode, Newton évite « de déduire de longues démonstrations *ad absurdum*, selon la méthode des anciens géomètres », et peut même démontrer

1. Le titre exact donné à cette section par Newton est *De la méthode des premières et dernières raisons employée dans tout cet ouvrage*

2. [Newton \(1966b\)](#), p.47.

« tout ce qu'on démontre par celle [la méthode] des indivisibles ». Certes, la méthode des indivisibles offre « des démonstrations plus courtes », mais elle repose sur « une hypothèse trop dure à admettre » et « est peu géométrique ». De fait, il préfère employer une nouvelle méthode dont « en ayant prouvé le principe », dès le début de l'œuvre, il se servira « avec plus de sécurité ».

Cependant, la précision apportée au titre (« [...] employée dans tout cet ouvrage ») et la place offerte à cette section (section 1) par Newton contribuent davantage à influencer le lecteur peu attentif et à insister sur l'importance et la nouveauté du contenu de cette section. Elle place aussi d'entrée la résolution des phénomènes de la philosophie naturelle sur le plan mathématique, prolongeant ainsi la pensée galiléenne selon laquelle la compréhension de la nature est de nature mathématique. Une lecture méticuleuse et détaillée de l'intégralité de l'œuvre écarte l'importance accordée à ces lemmes et replace le travail newtonien dans une tradition contemporaine comprenant des recherches variées et de systématisations. En effet, ces lemmes, selon I.B. Cohen, ne jouent pas le rôle auxiliaire central que Newton veut laisser entendre. Ils n'apparaissent pas de façon systématique dans les preuves des diverses propositions composant les *Principia*. Pour D.T. Whiteside, ils permettent simplement de prouver de façon collective et générale les propositions, mais leur rôle est grandement diminué par rapport à ce que le titre de la section annonce.

Nous percevons toutefois la raison et l'intérêt de commencer cette œuvre par la présentation de cette méthode. Rendre compte des phénomènes de la nature demande de les considérer sur une durée. Or la géométrie euclidienne ne le permet pas, puisqu'elle considère les phénomènes de manière intemporelle. La *Méthode des premières et dernières raisons*, en revanche, remédie à ce problème, puisqu'elle constitue une géométrie « dynamique », dans laquelle les objets mathématiques « s'approchent » l'un de l'autre, « se déplacent », « se déforment », ..., évoluent dans le temps. Elle a intégré le temps, le rendant nécessaire à ses démonstrations. Elle diffère en ce sens de la géométrie classique. Elle prend aussi en compte les infiniment petits, géométriques et temporels.

3.1.1 Lemme I

La *Méthode des premières et dernières raisons* repose avant tout sur le lemme I³ :

« Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales ».

3. [Newton \(1966b\)](#), p.37.

Ce lemme porte l'essence d'une toute nouvelle approche de la géométrie. Alors que les Anciens parlaient de quantités déterminées, intemporelles, Newton traite de quantités qui « tendent vers », qui « approchent » d'une situation ultime. Les quantités « tendent continuellement à devenir égales » durant un intervalle de temps. C'est dans cet intervalle que la situation évolue, bascule vers l'état final. Ce basculement repose sur une opposition qui est une des marques du lemme 1. En effet, « les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité » évoquent un écoulement uniforme du temps durant lequel les grandeurs évoluent, pour brutalement, « à la fin », interrompre leur variation et demeurer dans un état final permanent et stationnaire dans lequel le temps semble ne plus exister. F. de Gandt⁴ met en avant ce retournement de situation, qui rend possible le saut d'une infinité d'étapes et une extrapolation à partir de situations finies jusqu'à l'état ultime des relations liant les grandeurs mises en jeu. Le lemme suggère ainsi des quantités dépendantes du temps. Celui-ci acquiert, avec ce premier lemme, un rôle majeur qu'il ne possédait pas auparavant.

Avant Galilée, dans le contexte de *l'Intension et de la rémission des formes et des qualités*, le temps était considéré comme une quantité intensive qui permettait l'étude d'une qualité, comme la vitesse. Toutefois, les démonstrations des propositions de philosophie naturelle étaient avant tout de nature géométriques. C'est seulement quand la démonstration est achevée que l'auteur recourt aux grandeurs physiques. Autrement dit, celles-ci, et le temps en particulier, ne sont pas mathématiquement manipulées. Le théorème de la vitesse moyenne, démontré par Oresme, en est une excellente illustration⁵ :

« Toute qualité uniformément difforme a même quantité que si elle informait uniformément le même sujet selon le degré du point milieu de ce sujet. En disant : selon le degré du point milieu, je sous-entends : si la qualité est linéaire ; si elle est superficielle, il faudra dire : selon le degré de la ligne moyenne ... Nous démontrerons cette proposition pour une qualité linéaire. Soit donc une qualité qui puisse être représentée par un triangle ABC ; c'est une qualité uniformément difforme qui, au point B, se termine au degré nul ; soit D le point milieu de la ligne qui représente le sujet ; le degré ou l'intensité qui affecte ce point est figuré par la ligne DE. La qualité qui aurait partout le degré ainsi désigné est représentable par le quadrilatère AFGB, ainsi qu'il résulte du chapitre v de la première partie. Mais par la xxvi^e proposition du premier livre d'Euclide, les deux triangles EFC et EGB sont égaux ».

4. de Gandt (1986)

5. Duhem (1976), p.556-7

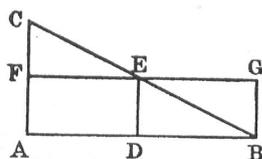


FIGURE 3.1 – Illustration du théorème de la vitesse moyenne. Figure tirée de [Duhem \(1976\)](#).

« Le triangle qui représente la qualité uniformément difforme et le quadrilatère AFGB qui représente la qualité uniforme selon le degré du point moyen sont donc égaux entre eux ; les deux qualités qui sont imaginables l'une par le triangle et l'autre par le quadrilatère sont aussi égales entre elles ; et c'est ce qu'on se proposait de démontrer. On raisonne de la même manière au sujet d'une qualité uniformément difforme qui, de part et d'autre, se termine à un certain degré, comme serait la qualité que le quadrilatère ABCD permet d'imaginer. Tirons, en effet, la ligne DE parallèle à la base sujette, et formons le triangle ECD ».

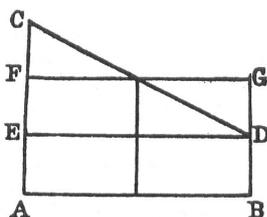


FIGURE 3.2 – Illustration du théorème de la vitesse moyenne. Figure tirée de [Duhem \(1976\)](#).

« Puis par le degré du point milieu, tirons la ligne FG égale et parallèle à la base sujette. Tirons enfin la ligne GD. Alors, comme précédemment, le triangle CED et le quadrilatère EFGD seront égaux, et il en sera de même du quadrilatère ACDB qui représente la qualité uniformément difforme et du quadrilatère AFGB qui représente la qualité uniforme, conçu selon le degré du point milieu du sujet AB. Donc, selon le chapitre v de la première partie, les qualités représentables par ces quadrilatères sont égales ».

C'est seulement par la suite qu'Oresme considère la vitesse.

« Au sujet de la vitesse, on peut dire exactement la même chose que d'une qualité linéaire, seulement, au lieu de dire : point milieu, il faut dire : instant

milieu du temps pendant lequel dure cette vitesse ».

Le temps fait son apparition dans les démonstrations mathématiques de la philosophie naturelle avec Galilée. Lors de la 3^e journée des *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Salviati énonce un premier théorème sur le mouvement naturellement accéléré⁶ :

« Le temps pendant lequel un espace donné est franchi par un mobile, partant du repos, avec un mouvement uniformément accéléré, est égal au temps pendant lequel le même espace serait franchi par le même mobile avec un mouvement uniforme, dont le degré de vitesse serait la moitié du plus grand et dernier degré de vitesse atteint au cours du précédent mouvement uniformément accéléré ».

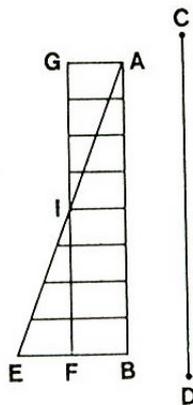


FIGURE 3.3 – Illustration du théorème I énoncé par Salviati lors de la troisième journée consacrée au mouvement naturellement accéléré. Figure tirée de Galilée (1995), p.140

Il le fait suivre de la démonstration :

« Représentons par la ligne AB le temps pendant lequel un mobile, partant du repos en C, franchira d'un mouvement uniformément accéléré l'espace CD ; on représentera le plus grand et dernier des degrés de la vitesse accrue dans les instants du temps AB par la ligne EB, formant avec AB un angle quelconque ; menons AE : toutes les lignes parallèles à BE, tirées des différents points de la ligne AB, représenteront les degrés de vitesse croissants après l'instant initial A. Divisons BE en son milieu par le point F, et menons FG et AG respectivement parallèles à AB et FB ; on aura

6. Galilée (1995), p.139.

construit le parallélogramme AGFB égal au triangle AEB, et dont le côté GF coupe AE en son milieu I ; si ensuite les parallèles du triangles AEB sont prolongées jusqu'à GI, nous aurons l'agrégat de toutes les parallèles contenues dans le quadrilatère égal à l'agrégat des parallèles contenues dans le triangle AEB : en effet celles qui se trouvent dans le triangle IEF correspondent à celles que contient le triangle GIA, et celles qui sont dans le trapèze AIFB sont communes. Comme d'autre part à tous les instants, pris un à un, de l'intervalle de temps AB correspondent tous les points, pris un à un de la ligne AB, et comme les parallèles menées à partir de ces points et comprises dans le triangles AEB représentent les degrés croissants de la vitesse grandissante, tandis que de leur côté les parallèles contenues dans le parallélogramme représentent autant de degrés de la vitesse non croissante, mais égale, il est clair qu'autant de moments qui font défaut dans la première moitié du mouvement accéléré (c'est-à-dire ceux qui sont représentés par les parallèles du triangle AGI) sont compensés par les moments que représentent les parallèles du triangle IEF. Il est donc manifeste que des distances égales seront parcourues en un même temps par deux mobiles, dont l'un partant du repos, se meut d'un mouvement uniformément accéléré, et l'autre d'un mouvement uniforme que caractérise un moment de vitesse égal à la moitié du plus grand moment de vitesse atteint par le premier. C.Q.F.D. ⁷ ».

Nous constatons que tout en restant dans un cadre mathématique purement euclidien, Galilée introduit le temps dans la démonstration.

1. Il expose, tout d'abord, son problème en vue d'une étude physique. Le temps, mis en correspondance avec une ligne qui sera son représentant spatial, est introduit dès le début de la démonstration.
2. Il ébauche ensuite un raisonnement basé sur des grandeurs spatiales mathématisées, dont la ligne AB est la représentante du temps et ses points les représentants de tous les instants. Le temps galiléen est donc une succession d'instantants constituant la durée.
3. Enfin, il conclut la preuve en réintégrant le domaine de la philosophie naturelle.

Revenons maintenant au lemme I. Avec ce lemme, Newton introduit la notion fondamentale de limite qui est essentielle, selon I.B. Cohen, au *Principia*. Il expose que les quantités ou les grandeurs, X, Y, Z, T, et les rapports établis à partir de ces quantités ou grandeurs $\frac{X}{Y}$, $\frac{X}{Z}$, $\frac{X}{T}$ tendent les uns vers les autres, durant un temps fini, de manière à ce que, avant la fin du temps, leur différence soit plus petite qu'un nombre positif, ϵ .

7. Galilée (1995), p.140

Le lemme 1 s'identifierait donc à la définition de la limite d'une suite de nombres. C'est du moins ce qu'affirme B. Pourciau dans ses articles *Newton and the notion of limit*⁸ et *The preliminary mathematical lemmas of Newton's Principia*⁹.

Selon S. Chandrasekhar, le lemme établit plus précisément que¹⁰ :

Si deux quantités $X(t)$ et $Y(t)$, appartenant à l'intervalle $t_0 < t < \infty$, dépendant continuellement du temps t , sont telles que, pour $t = t_1$,

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{X(t)}{Y(t)} \rightarrow 1; \quad (3.1)$$

alors

$$X(t_1) = Y(t_1) \quad (3.2)$$

Pour S. Chandrasekhar l'identification du lemme 1 à la définition de la limite est évidente. Toutefois, pour éviter la notation de limite et « satisfaire le puriste », il propose une écriture alternative de l'équation (3.1), suggérée par T. Needham, qui n'enlève cependant rien à cette identification¹¹

Le lemme 1, selon B. Pourciau, introduit deux fonctions f et g , qui peuvent éventuellement être des rapports, pour lesquelles, si le temps t tend, par la gauche, vers une constante positive c , alors $f(t) - g(t) \rightarrow 0$. En outre, « ces fonctions tendent constamment vers l'égalité », autrement dit la différence $f(t) - g(t)$ non seulement converge vers zéro, mais décroît aussi de manière monotone vers zéro. L'explication de B. Pourciau nous satisfait peu. Elle ne résout pas et n'explicite pas le passage du discontinu au continu. Elle est basée sur la notion de limite selon Cauchy et n'offre pas une vision intuitive de la limite. Elle laisse, de fait, le lecteur perplexe sur cette notion

8. [Pourciau \(1998\)](#)

9. [Pourciau \(2001\)](#)

10. Traduction de l'auteur. « More explicitly the lemma states : If two quantities $X(t)$ et $Y(t)$, depending continuously on " time " t , and neither of which vanishes in the range $t_0 < t < \infty$, and are such that

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left[\frac{X(t)}{Y(t)} \right] \rightarrow 1, \quad (1)$$

for some assigned $t = t_1$, then

$$X(t_1) = Y(t_1), \quad (2)$$

, » ; [Chandrasekhar \(2003\)](#), p.43.

11. « An alternative version of the lemma which may satisfy the purist is to formally write the equality (1) as $X(t) \asymp Y(t)$ for $t = t_1$, and observe that the basic theorems on limits allows us to conclude that $X(t) \asymp Y(t)$ for $t = t_1 \Leftrightarrow X(t)$ and $Y(t)$ become equal for $t = t_1$ » ; [Chandrasekhar \(2003\)](#), p.44.

newtonienne.

Ces diverses interprétations ont au moins un point commun : la notion de limite qui en ressort repose de manière explicite sur le temps, faisant de ce dernier la pierre angulaire du lemme I. Ainsi, comme le pense I.B. Cohen, « la variable fondamentale indépendante dans ces mathématiques est le temps, [...] ¹² ». Mais la notion de limite est exposée de manière plus intuitive dans le scholie final de la section I ¹³ :

« on objectera peut-être que si les dernières raisons qu'ont entre elles les quantités qui s'évanouissent sont données, les dernières grandeurs de ces quantités seront aussi données, et qu'ainsi toute quantité sera composée d'indivisibles, au contraire de ce qu'Euclide a démontré des incommensurables dans le dixième Livres de ses *Éléments*. Mais cette objection porte sur une supposition fautive ; car les dernières raisons qu'ont entre elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernières quantités, ou de quantités déterminées et indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent sans cesse, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer, et qu'elles ne sauraient atteindre, si ce n'est dans l'infini. »

La dernière vitesse d'un corps qui atteint d'un mouvement uniformément retardé un lieu dans lequel son mouvement s'arrête, est ainsi la vitesse qu'il a à l'instant même où il atteint ce lieu.

3.1.2 Les lemmes II à XI

Des lemmes de la première section du livre I des *Principia* ressort un double aspect du temps. Celui-ci permet leur division en deux groupes distincts ¹⁴.

- Un premier groupe, constitué des lemmes II à V, laisse apparaître, sous forme d'intervalles, un temps discret qui s'identifie à celui qui s'écoule lors de la réalisation d'actes successifs opérés par le mathématicien qui approximent des figures curvilignes par des portions rectilignes.
- Les lemmes VI à XI traitent de la déformation des figures géométriques due à un déplacement de points se rapprochant l'un vers l'autre, mettant en jeu un temps continu.

12. Traduction de l'auteur, « the fundamental independent variable in this mathematics is time, [...] » ; [Newton \(1999\)](#), p.106

13. [Newton \(1966b\)](#) ; p.48-9.

14. Nous reprenons ici une partition due à F. de Gandt, [de Gandt \(1986\)](#), p.195-222.

Groupe 1

Avec les lemmes II à V, Newton expose une méthode de quadrature des courbes. Il cherche à évaluer l'aire sous une courbe quelconque en considérant un ensemble de parallélogrammes, inscrits et circonscrits, dont il diminue la largeur et augmente, simultanément, leur nombre à l'infini. Le lemme I fournit alors la raison ultime entre la figure inscrite, la figure circonscrite et la figure curviligne.

Le temps qui n'apparaît pas de façon explicite dans l'énoncé des lemmes se manifeste toutefois :

1. Par l'emploi systématique, en début d'énoncé, de tournures impersonnelles contenant des verbes d'action, conjugués au présent, suscitant chez le lecteur l'impression de réaliser, par lui-même, une succession d'actions se déroulant chacune durant un court instant. Cette sensation est renforcée par l'emploi, en fin d'énoncé, de verbes conjugués au futur. La combinaison présent-futur, dans cet ordre, produit un effet d'écoulement du temps. Le lecteur, après avoir « vécu » divers événements, voit se réaliser la conclusion de ses agissements.
2. Par le recours au lemme I, pour lequel nous avons déjà discuté de la manière dont le temps s'y manifestait.

Regardons ce qu'il en est concrètement sur le lemme II ¹⁵.

Lemme II.

« Si dans une figure quelconque $AacE$, comprise entre les droites Aa , AE , et la courbe acE , on inscrit un nombre quelconque de parallélogrammes Ab , Bc , Cd , etc. compris sous les bases égales AB , BC , CD , etc. et sous les côtés Bb , Cc , Dd , etc. parallèle au côté Aa de la figure ; et qu'on achève les parallélogrammes, et qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernières raisons qu'auront entre elles la figure inscrite $AKbLcMdD$, la circonscrite $AalbmendoE$, et la curviligne $AabcdE$, seront des raisons d'égalité ».

15. [Newton \(1966b\)](#), p.38.

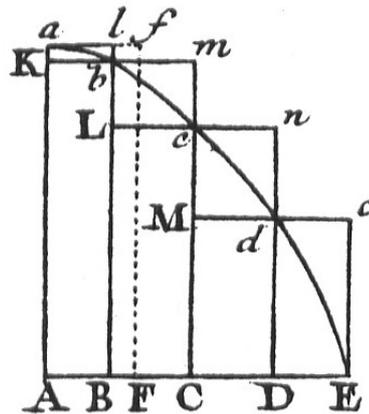


FIGURE 3.4 – Illustration du lemme II. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#).

Démonstration :

« car la différence de la figure inscrite et de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes Kl, Lm, Mn, Do, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle ABla fait sur l'une des bases Kb et sur la somme Aa, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, et à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. C. Q. F. D. ».

Ainsi, le lecteur du lemme II « inscrit » une première série de parallélogrammes, « achève » les parallélogrammes circonscrits à la courbe, « diminue ensuite » la largeur de ces derniers et « augmente » enfin, simultanément, « leur nombre à l'infini ». Il constate alors – à la superposition des lignes Bl et Aa – que les dernières raisons entre la figure inscrite, la circonscrite et la curviligne sont des raisons d'égalité.

D'un point de vue plus formel mais qui « n'enlève rien à la signification originelle newtonienne », la démonstration proposée par B. Pourciau montre clairement le rôle principal joué par le temps dans ce lemme ¹⁶.

16. Traduction de l'auteur ; « In notation more comfortable for us (and doing no real damage to Newton's original meaning), the figure AacE would be the graph of a function f defined on the segment AE. Newton clearly (but without saying so) takes f to be monotone decreasing with $f(E) = 0$. Of course the areas of the inscribed and circumscribed figures, $AKbLcMdD$ and $AalbmcndoE$, correspond to lower and upper sums, $L_n \equiv f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_n)\Delta t$ and $U_n \equiv f(t_0)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t$ that arise from a partition $A = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = E$ of the segment AE into n subintervals of equal length $\Delta t = \frac{AE}{n}$.

« A l'aide d'une notation plus confortable pour nous (et sans faire de réel dommage à la signification newtonienne originale), la figure $AacE$ serait le graphe d'une fonction f définie sur le segment AE . Newton suppose clairement (mais sans le dire) f monotone décroissante avec $f(E) = 0$. Naturellement, les aires des figures inscrites et circonscrites, $AKbLcMdD$ et $AalbmcndoE$, correspondent respectivement aux sommes ci-dessous,

$$L_n \equiv f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_n)\Delta t$$

et

$$U_n \equiv f(t_0)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t$$

qui proviennent de la partition $A = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = E$ du segment AE en n sous-intervalles d'égales longueurs $\Delta t = \frac{AE}{n}$

Si nous notons \mathcal{A} , l'aire sous le graphe de f (une aire que Newton suppose déterminée, mais pas définie), alors le lemme conclut : " les rapports ultimes [que L_n , \mathcal{A} , et U_n] ont entre eux sont les rapports d'égalité ", autrement dit, le rapport de l'un par rapport à un autre tendra vers 1 quand $n \rightarrow \infty$ ».

Le procédé consistant à faire sentir la présence du temps en mettant mentalement le lecteur en action puis à faire appel au lemme Γ pour conclure la démonstration se retrouve dans l'ensemble des lemmes de ce groupe, à l'exception du lemme ν , qui est le seul lemme de ce groupe à ne posséder ni démonstration, ni figure à laquelle se référer.

Lemme ν ¹⁷

« Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, et leurs aires sont en raison doublées de ces côtés ».

Aux aires et aux côtés n'est spécifiée aucune grandeur, faisant de ce lemme un lemme de portée générale, qui semble découler des précédents.

Si nous assignons le temps à un des côtés, le lemme ν s'apparente à la fois au lemme x , à l'hypothèse 4. de *De Motu* et au théorème Π de la troisième journée des *Discours concernant deux sciences nouvelles* de Galilée. Cependant, du lemme x ¹⁸ :

If by \mathcal{A} we denote the area under the graph of f (an area which Newton takes here to be computed, not defined), then the lemma concludes : " the ultimate ratios [which L_n , \mathcal{A} , and U_n] have to one another are ratios of equality ", that is, the ratio of any one to the other will tend to 1 as $n \rightarrow \infty$ » ; Pourciau (2001), p.22-24.

17. Newton (1966b), p.40.

18. Newton (1966b), p.42.

Lemme x

« Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps »,

de l'hypothèse 4. du *De Motu*¹⁹ :

Hypothèse 4.

« L'espace qu'un corps décrit sous l'action d'une force centripète quelconque au commencement de son mouvement, est en raison double du temps ».

et du théorème II de la troisième journée des *Discours concernant deux sciences nouvelles*²⁰ :

Théorème II – Proposition II

« Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps ».

apparaissent des conditions physiques non négligeables absentes du lemme v, de sorte que nous ne pouvons l'identifier exactement à ces derniers. Mais il apparaît de toute évidence qu'il joue un rôle majeur dans la recherche et l'évaluation « des forces qu'emploie la nature ».

Groupe 2

Les lemmes du second groupe traitent de la propriété locale des courbes au voisinage d'un point. Le lemme VI, qui introduit la notion fondamentale pour les *Principia* de courbure continue en un point, en est une illustration²¹ :

Lemme VI

« Si un arc de cercle quelconque ACB donné de position, est soutenu par la corde AB, et qu'au point A placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite AD prolongée des deux côtés, et que les points A et B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle BAD, compris sous la tangente et la corde diminuera à l'infini, et s'évanouira à la fin. »

19. Newton (1995), p. 155.

20. Galilée (1995), p. 140.

21. Newton (1966b), p. 40.

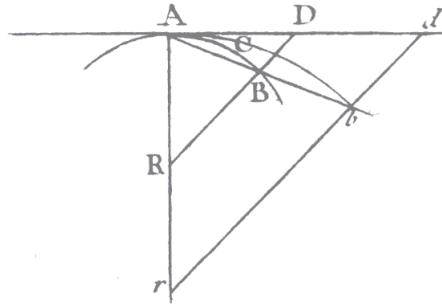


FIGURE 3.5 – Illustration du lemme VI. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#)

Démonstration :

« Car si cet angle ne s'évanouissait pas, l'arc ACB et la tangente AD contiendraient un angle rectiligne, et par conséquent la courbure au point A ne serait pas continue, ce qui est contre l'hypothèse. »

Le temps apparaît, ici, à travers le déplacement des « points A et B [qui] s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ». Newton fait appel à l'imagination du lecteur. Celui-ci doit se représenter l'effondrement de la figure dû au rapprochement des points A et B, l'un vers l'autre, engendrant ainsi l'évanouissement de l'angle BAD, et prend alors conscience de l'écoulement du temps à travers les positions successives occupées par les points.

Avec le lemme VII, Newton étend les conclusions du lemme précédent à l'arc, la corde et la tangente en procédant de nouveau par l'emploi de verbes, selon une combinaison présent/futur – « s'approche », « coïncideront » et « s'évanouira » – qui marque une succession d'étapes après lesquelles le temps semble s'être arrêté, produisant ainsi la sensation de l'écoulement du temps.

Lemme VII²²

« Les mêmes choses étant posées, la dernière raison qu'ont entre elles l'arc, la corde et la tangente, est la raison d'égalité. »

Démonstration :

« Car pendant que le point B s'approche du point A, supposons que les lignes AB, AD soient prolongées jusqu'aux points éloignés *b* et *d*, et qu'on mène la ligne *bd* parallèle à la sécante BD, et qu'on prenne de plus *Ac* toujours semblable à l'arc ACB. Lorsque les points A et B coïncideront,

22. [Newton \(1966b\)](#), p. 41.

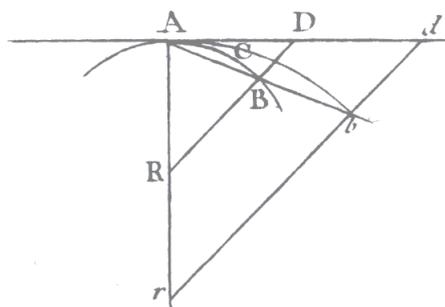


FIGURE 3.6 – Illustration du lemme VII. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#)

l'angle dAb s'évanouira par le lemme précédent ; donc les droites Ab , Ad , qui restent toujours de grandeur finie, et l'arc intermédiaire Ac coïncideront et seront par conséquent égales. Donc les droites AB , AD , et l'arc intermédiaire ACB , qui leur sont toujours proportionnels, s'évanouiront, et auront pour dernière raison la raison d'égalité. C.Q.F.D. »

Newton modifie ici continûment la figure jusqu'à disparition de certains de ses éléments. En s'approchant l'un vers l'autre, les points A et B entraînent avec eux la corde et déplacent le point D vers point A . L'angle BAD diminue alors jusqu'à s'évanouir, et les points A , B et D sont alors confondus. Cet évanouissement devient difficile à penser dès lors que les points A et B ne se rejoignent pas totalement. Il faut imaginer que le glissement de BD se ralentisse perpétuellement, mais sans jamais cesser, qu'il soit réglé de façon à ce que A et B se rapprochent de plus en plus sans toutefois s'atteindre. Dans ces conditions, le triangle ABD ne cesse d'exister. Il en est de même de ses propriétés. Et, le théorème de Thalès permet alors de dire que, lors de l'évanouissement, AB reste à AD comme Ab est à Ad . Mais Newton va plus loin en disant qu'il en est ainsi « ultimement ».

Afin de « visualiser » ce qui se produit à l'état ultime, Newton a construit, sur la base de l'énoncé, une seconde figure qui reste, dans le fini, toujours similaire et proportionnelle à la figure évanouissante. Ces deux figures se déforment et restent semblables à chaque instant, de sorte que la déformation peut être « suivie » jusqu'à l'état ultime, à l'échelle macroscopique. Cet artifice, qu'« on pourrait appeler “ méthode des témoins finis ”, parce qu'elle consiste à garder une trace, une mémoire de la situation infiniment petite, sous forme d'une configuration finie semblable, sur laquelle puissent se lire les relations entre éléments infinitésimaux »²³.

La figure 3.6 donne toutefois une idée très pauvre de la déformation subie. Le lecteur

23. [de Gandt \(1986\)](#), p. 210

est ainsi amené, s'il veut suivre la démonstration, à y adjoindre plusieurs diagrammes représentant diverses étapes de la transformation. Passant d'une configuration à la suivante jusqu'à l'état ultime, la figure « s'anime » sous ses yeux et la présence du temps, à travers son écoulement, lui apparaît dès lors moins cachée.

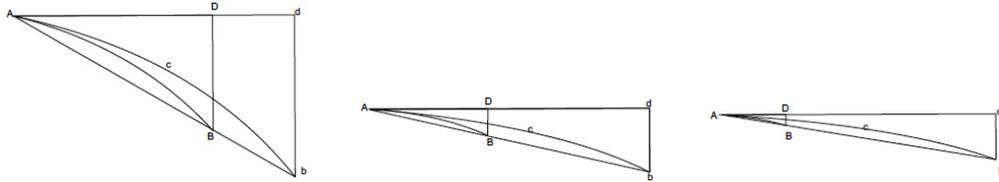


FIGURE 3.7 – Illustration des différentes étapes de la déformation de la figure lors du rapprochement des points A et B.

Mais c'est avec le lemme IX que la méthode des *témoins finis* est utilisée avec le plus de raffinement ²⁴.

Lemme IX

« Soient données de position la droite AE et la courbe ABC, qui se coupent sous un angle donné A, et soient menées de cette droite sous un autre angle donné les ordonnées BD, CE, qui rencontrent la courbe en B, et en C, si on suppose ensuite que les points B et C s'approchent l'un de l'autre continuellement du point A ; les aires des triangles ABD, ACE, seront à la fin entre elles en raison doublée des côtés ».

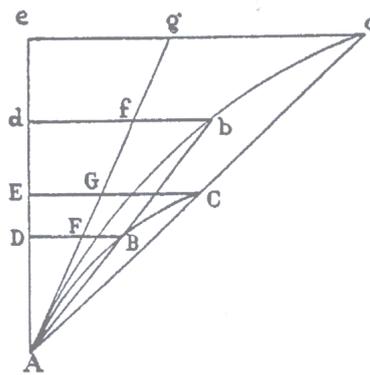


FIGURE 3.8 – Illustration du lemme IX. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#)

24. [Newton \(1966b\)](#), p. 42.

Démonstration :

« Pendant que les points B et C s'approchent du point A, imaginons toujours que la ligne AD soit prolongée à des points très éloignés d et e , et en telle sorte que Ad et Ae soient toujours proportionnelles à AD et à AE, de plus que les ordonnées db , ec , tirées parallèles aux ordonnées DB, EC rencontrent en b et c les lignes AB, AC prolongées ; enfin que abc soit une courbe en A, et coupe les ordonnées DB, EC, db , ec , en F, G, f , g . Cela posé, lorsque les points B et C coïncideront avec le point A, la longueur Ae restant la même, l'angle cAg s'évanouira, les aires curvilignes Abd , Ace coïncideront avec les aires rectilignes Afd , Age , et par conséquent elles seront (par le lemme 5) en raison doublée des côtés Ad , Ae ; mais les aires ABD, ACE sont toujours proportionnelles à ces aires, et les côtés AD, AE à ces côtés. Donc les aires ABD, ACE sont à la fin en raison doublée des côtés AD, AE. »

Il s'agit ici de montrer que deux aires, les aires ABD et ACE, sont, *in fine*, en raison doublée des côtés AD et AE. Pour cela, Newton construit, sur le diagramme relatif à l'énoncé, une figure qui lui est semblable et toujours proportionnelle. Il déplace ensuite, mentalement, le long de la courbe ABC, les points B et C, chacun à leur manière mais toujours de façon comparable, de sorte qu'ils coïncident, au même instant, avec le sommet A des triangles ABD et ACE. Il se concentre alors, entre « le commencement du mouvement » de B et C et l'instant de leur coïncidence avec A, uniquement sur l'évolution des aires curvilignes Abd , Ace , et des aires rectilignes Afd , Age , images, respectivement, des aires ABD, ACE, AFD, et AGE. À l'instant de la coïncidence des points B, C et A, les aires curvilignes Abd , Ace coïncident avec les aires rectilignes Afd et Age et sont, par le lemme v « en raison doublée des côtés Ad et Ae ». De sorte « qu'à la fin, les aires ABD et ACE sont en raison doublée des côtés AD et AE ».

Plus encore ici que dans le lemme VII, la nécessité de réaliser, mentalement ou sur le papier, une succession d'étapes montrant l'évolution de la déformation subie par les triangles, s'impose.

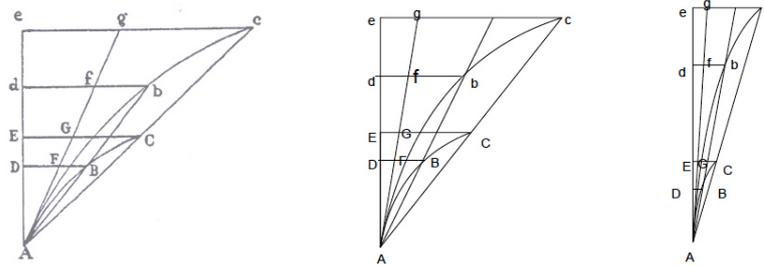


FIGURE 3.9 – Évolution de la déformation subie due au déplacement des points B et C vers le point A.

Mais le lemme IX semble surtout avoir des conséquences importantes pour la science newtonienne du mouvement puisqu'il permettrait la généralisation de la loi de chute des corps, établie par Galilée, par l'assimilation des abscisses AD et AE au temps et celle des ordonnées DB et EC à la vitesse acquise par le corps à l'instant correspondant.

Mais, c'est le lemme X²⁵, dont la démonstration repose sur la même figure que le lemme précédent, qui remplit ce rôle²⁶ :

Lemme X

« Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps. »

Démonstration :

« Que les lignes AD, AE représentent le temps, et les ordonnées DB, EC les vitesses produites ; les espaces décrits avec ces vitesses seront comme les aires ABD, ACE qui auraient été décrites par la *fluxion* de ces ordonnées, c'est-à-dire (par le lemme 9) que ces espaces seront dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps AD, AE. C.Q.F.D. ».

Ainsi, si les triangles ABD et ACE sont naissants, ou évanescents, la ligne ABC peut-être assimilée à la tangente Ag. Les côtés AB et AC sont alors rectilignes et engendrent le même angle. En conséquence, les aires des triangles ABD et ACE, qui représentent les espaces décrits dans leur état de naissance, sont l'une à l'autre comme le carré de AD est au carré de AE. Autrement dit, ces dernières longueurs représentant des temps, les distances parcourues, « au commencement du mouvement », sont comme

25. Voir page 51

26. Newton (1966b), p. 42-3.

le carré des temps de parcours. Newton démontre ainsi, pour le « commencement du mouvement », le théorème II relatif au « mouvement naturellement accéléré » énoncé et démontré par Galilée cinquante ans plus tôt.

Mais le lemme x est surtout le seul de cette section à mentionner explicitement la force. Celle qu'il avance n'est pas la force rencontrée dans la loi II, mais une force qui « presse » le corps. Autrement dit, le lemme x traite d'une force qui agit dans la *durée*, qui s'apparente davantage à la notion de force prise dans un sens moderne. Le lemme x serait donc le parent du principe fondamental de la dynamique, puisqu'il fait ressortir, en outre, à la fois le caractère moteur — le corps acquiert un mouvement, s'accordant avec la définition VIII — le caractère « accélérateur » de la force — le corps acquiert une accélération, conformément à la définition VII et place le temps comme grandeur indépendante privilégiée de la philosophie naturelle. Il est même le premier endroit des *Principia*, selon G. Barthélémy, où une relation entre force et temps est établie, notamment par ses corollaires 3, 4 et 5.

Mais pour faire du temps une grandeur indépendante privilégiée de la philosophie naturelle, Newton dut le matérialiser, le rendre visible sur le diagramme. Il l'a donc géométrisé en l'identifiant à une portion d'espace, les lignes AD et AE, alors unique grandeur mathématique avec laquelle il était possible d'opérer. Cette géométrisation dénote une avancée dans l'évaluation des grandeurs de la mécanique, puisqu'elle rend possible, entre autres, la détermination de la vitesse, dont A.C. Crombie affirme à son sujet que la « première nécessité était de donner une définition métrique de la vitesse comme grandeur représentant un rapport entre l'espace et le temps »²⁷. Or il semble que le lemme x permette l'évaluation de la vitesse sans même lui avoir attribué de définition métrique. La géométrisation newtonienne du temps apparaît donc comme un début de construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable en philosophie naturelle.

La section dédiée à la *Méthode des premières et dernières raisons* se termine par le lemme XI, dont les corollaires 2 et 3 fournissent une lecture plus aisée de la proposition VI qui fournit l'expression mathématique de la force centripète.

Lemme XI²⁸

« Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la sous-tendante évanouissante d'un angle de contact est à la fin en raison doublée de la sous-tendante de l'arc qu'elle termine. »

Corollaire 2²⁹ :

27. Crombie (1959), p.263

28. Newton (1966b), p.44.

29. Newton (1966b), p.45.

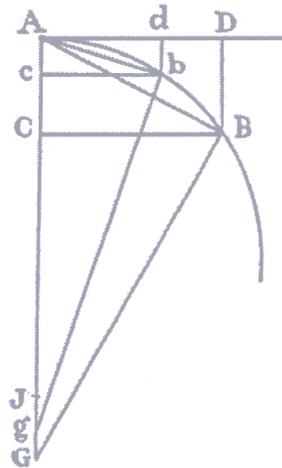


FIGURE 3.10 – Illustration du lemme XI. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#).

« Et ces carrés sont aussi ultimement comme sont les flèches des arcs, lesquelles coupent les cordes en deux parties égales, et convergent vers un point donné ; car ces flèches sont comme les sous-tendantes. »

Corollaire 3³⁰ :

« Donc, lorsqu'un corps avec une vitesse donnée décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit³¹. »

Le corollaire 3 est la conséquence géométrico-cinématique du résultat du corollaire 2. Il permet, dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme, l'estimation du temps de parcours.

3.1.3 Conclusion

Newton recourt donc à une méthode géométrique « des quantités qui naissent et qui s'évanouissent » comme moyen de résolution des phénomènes dynamiques. Elle permet la détermination de la dernière raison qu'ont entre elles des quantités évanouissantes, c'est-à-dire la détermination de la raison, « qu'ont entre elles, des quantités, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies, mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent ».

30. [Newton \(1966b\)](#), p.45.

31. [Newton \(1966b\)](#), p. 45.

Cette méthode repose sur l'idée de mouvement des quantités et de variation des grandeurs. Elle est fondée sur l'idée, pleinement d'actualité à l'époque de Newton, selon laquelle les points, les courbes, les surfaces se meuvent générant ainsi des lignes, des surfaces et des volumes. De sorte qu'une ligne est l'ensemble des positions successives occupées dans le temps par un point, une surface est générée par le déplacement d'une courbe en un temps donné, ... Les figures ne sont plus statiques. Elles doivent être pensées en mouvement.

En employant la *Méthode des premières et dernières raisons*, Newton travaille de façon concrète avec les concepts fondateurs de la philosophie naturelle qu'il met en place. A une ligne, une surface ou un volume sur la figure correspond une grandeur physique. Manipuler ces entités géométriques signifie donc, pour Newton, travailler concrètement avec les grandeurs associées. Ainsi, dire des abscisses AD et AE – du lemme x – qu'elles représentent un temps signifie, pour Newton, qu'opérer mathématiquement avec ces abscisses, c'est effectuer une série d'opérations mathématiques avec un temps.

En outre, les concepts fondateurs de la philosophie naturelle font intervenir des grandeurs qui fluent avec le temps. La *Méthode des premières et dernières raisons*, en introduisant le temps, de manière omniprésente, peut, dès lors, selon I.B. Cohen, aisément être appliquée au mouvement, aux forces, à la vitesse et à l'accélération.

« Si le temps, les forces, les mouvements et la vitesse peuvent être exprimés au moyen de lignes, de surfaces, de solides ou d'angles, alors ces quantités peuvent aussi être traitées à l'aide de la géométrie ³² ».

Enfin, les lemmes de la section 1 furent élaborés par Newton pour l'évaluation de la « force qu'emploie la nature ». L'omniprésence du temps dans cette section montre que ce dernier est un élément indispensable de la méthode. Il appartient de fait à la philosophie naturelle newtonienne et nous amène à penser qu'il fut introduit en philosophie naturelle par Newton d'une manière indépendante de celle de Galilée. En effet, Newton ne reprend pas les travaux et les méthodes de ce dernier. Il introduit le temps de façon naturelle, par l'emploi d'une méthode mathématique, limitée aux *Principia*, reposant sur une cinématique des courbes. Nous n'affirmons pas, toutefois, que le temps fut introduit en philosophie naturelle par Newton. Nous avançons seulement l'idée que si Galilée n'avait pas introduit le temps en philosophie naturelle, celui-ci serait tout de même devenu un élément privilégié de la physique par la voie mathématique empruntée par Newton dans la recherche de la « force qu'emploie la nature ». Il existe donc, selon nous, au moins deux voies indépendantes qui expliquent la présence du temps dans les mathématiques de la philosophie naturelle.

32. Traduction de l'auteur, « If times, forces, motions and speeds of motion be expressed by means of lines, areas, solids or angles, then these quantities too can be treated in geometry », [Newton \(1999\)](#), p.455.

3.2 La loi des aires

De la recherche des forces centripètes, section dans laquelle Newton établit la loi de force, débute par un théorème³³ :

Proposition I. Théorème I.

« Dans les mouvements curvilignes des corps, les aires décrites* autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, et sont proportionnelles au temps ».

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre sont les espaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, et par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons.

Selon cette proposition, aires planes curvilignes, générées « dynamiquement », et temps, physique, sont liés. Autrement dit, le théorème I, ou *loi des aires*, permet au philosophe de la nature de « voir » le temps sur le diagramme. Dans le cas d'un mouvement uniforme, longueur et temps sont proportionnels. Mais les planètes n'ont pas un mouvement uniforme le long de leur orbite ; la vitesse est plus grande à l'aphélie, plus petite au périhélie. Et, Galilée l'a montré, « au commencement du mouvement », la vitesse n'est pas constante. Mais, le théorème I offre aussi au philosophe un moyen d'accéder à l'évaluation de la grandeur temps. Il permet de connaître, par l'évaluation de l'aire délimitée par « les rayons qui partent du centre et par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons », la durée mise par un corps à parcourir une portion de sa trajectoire. A condition toutefois de pouvoir « quarrer » une aire. Or les lemmes de la *Méthode des premières et dernières raisons* s'y emploient. Newton possède donc, dès ce stade des *Principia*, le moyen mathématique soit de calculer après coup le temps employé par un corps pour parcourir une portion d'espace, soit de prédire le temps nécessaire au corps pour aller d'un point A à un point B de sa trajectoire. Il permet enfin de remonter à la nature de la force. Les aires décrites, « autour d'un centre immobile » et « dans un même plan immobile », impliquent un mouvement curviligne. La force doit donc être centripète.

La loi des aires a donc des implications dynamiques majeures, qui font dire à N. Guicciardini que c'est une des plus grandes idées scientifiques de Newton que de les avoir mises en évidence. Nous saisissons, dès lors, l'importance de ce théorème riche de conséquences et percevons d'autant mieux la place qui lui a été assignée au sein des *Principia*. Cependant, en agissant ainsi, Newton a mis clairement en évidence à la fois le caractère majeur du temps en philosophie naturelle – la force centripète, cœur de la philosophie naturelle newtonienne, en dépend – et la difficulté d'opérer directement avec le temps au XVII^e siècle – celui-ci doit être géométrisé. Sans lui, effectivement, l'évaluation du temps et la « recherche des forces centripètes » auraient

33. [Newton \(1966b\)](#), p.49

été probablement compromises.

L'idée d'employer cette proposition pour évaluer un temps n'est toutefois pas nouvelle à la période de rédaction des *Principia*. Kepler, dans l'*Astronomia Nova*, chapitre 40, précise ³⁴ :

« Il suit de ce qui précède que : comme la surface CDE s'identifie à la moitié de la trajectoire, que nous considérons être égal à 180° , les surfaces CAG ou CAH correspondent au temps de parcours de la planète de l'arc \widehat{CG} ou \widehat{CH} . Ainsi, la surface CGA est une mesure pour le temps ou pour l'anomalie moyenne, qui correspond à l'arc excentrique \widehat{CG} . L'anomalie moyenne est alors aussi une mesure pour le temps ».

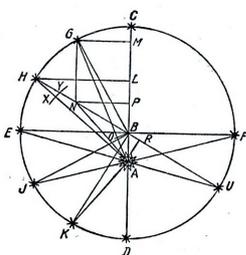


FIGURE 3.11 – Illustration de l'anomalie moyenne. L'*anomalie moyenne* provient de l'astronomie des Anciens, qui cherchaient à expliquer les mouvements apparents des planètes. Elle correspond à l'angle défini par la ligne des apsides CD et la ligne joignant l'excentrique et le lieu de la planète sur son orbite, BG. Figure tirée de Kepler (1929).

Ainsi pour Kepler, déjà, le temps peut se mesurer par l'évaluation d'une aire — l'aire CGA —, qui est aussi une mesure de l'*anomalie moyenne*. Cependant, Kepler n'est pas en mesure de quarrer l'aire à laquelle il est confronté. Il en appelle alors aux Géomètres de son temps, qu'il supplie, afin qu'ils lui montrent la méthode à suivre pour « calculer le contenu de la figure se trouvant devant [lui] ³⁵ ».

34. Traduction de l'auteur, « Daher folgt aus dem obigen : Wie sich die Fläche CDE zur halben Umlaufzeit, die wir mit 180° bezeichnen, verhält, so verhalten sich die Flächen CAG oder CAH zu den Zeiten, die der Planet auf \widehat{CG} oder \widehat{CH} verweilt. So wird also die Fläche CGA ein Maß für die Zeit oder die mittlere Anomalie, die dem Exzenterbogen \widehat{CG} entspricht, da die mittlere Anomalie ein Maß für die Zeit ist » ; Kepler (1929), p. 247.

35. Traduction de l'auteur, « Da unsere Zeit so ausgezeichnete Geometer besitzt, die zuweilen sehr lange über Dinge von weniger offenkundigem Wert schwitzen, so rufe ich sie alle einzeln auf, sie mögen mir helfen, eine Fläche aufzusuchen, die der Gesamtheit der Abstände gleichwertig ist. Geometrisch (im weiteren Sinn des Wortes) habe ich diese Aufgabe gelöst ; aber sie sollen mich lehren, wie man das, was

« Comme de notre temps il existe d'excellents géomètres, qui de temps à autres réfléchissent longuement à des choses de moindre valeur, je me permet de leur demander, s'ils veulent bien m'aider à évaluer une surface, qui est égale à l'ensemble de la distance. J'ai résolu ce problème de manière géométrique (dans le sens le plus large du mot). Mais ils doivent m'enseigner comment on peut estimer numériquement ce que j'ai obtenu par la figure géométrique. Bien mieux, ils doivent me montrer comment on calcule le contenu de la figure qui se trouve devant moi. »

La loi des aires, cependant, ne résulte pas de la volonté d'évaluer le temps de révolution des planètes, mais de la recherche de l'excentricité de l'orbite terrestre et de l'évaluation du partage de cette dernière. Kepler cherchait ainsi à valider sa représentation physique du monde : le mouvement des planètes est dû à une force d'origine magnétique qui émane du Soleil et impose une vitesse inversement proportionnelle à la distance. Il lui importait de démontrer que son hypothèse ne contredisait pas l'ancienne théorie astronomique qui, reposant sur les modèles d'excentrique et d'épicycle, fournissait une excellente exactitude de l'*équation astronomique*. Autrement dit, il voulait montrer que son hypothèse de l'attraction solaire n'était pas remise en question par la théorie des Anciens. C'est la raison pour laquelle il chercha d'abord à démontrer, dans le cadre de cette théorie, que la vitesse d'une planète, aux apsides, est inversement proportionnelle à la distance. Mais considérer la vitesse d'une planète inversement proportionnelle à la distance qui la sépare du Soleil, n'est toutefois pas pleinement compatible avec la théorie des excentriques et des épicycles. « Une petite différence », sans effet notable, persiste entre son hypothèse et la théorie des Anciens, excepté aux apsides. Il fut alors contraint de calculer, pour un arc de cercle donné, la somme des distances qui séparent le lieu du Soleil aux différentes positions successivement occupées par la planète sur cette orbite. Le calcul est particulièrement complexe. Il rechercha donc une aire qui égalait l'ensemble des distances considérées, mais ne fut cependant pas en mesure de l'évaluer.

Kepler ne parvint pas de fait à établir clairement le fond de ce qui constitue la proposition 1 des *Principia*. Newton, en revanche, en propose une démonstration, dans laquelle réside, selon S. Chandrasekhar³⁶, une nouveauté et une originalité de traitement.

« Supposé que le temps soit divisé en parties égales, et que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement, dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchait, la droite Bc = AB ;

ich durch eine geometrische Figur gewonnen habe, zahlenmäßig bestimmen kann ; vielmehr, sie sollen mir zeigen, wie man den Inhalt der von mir gefundenen Figur berechnet » ; Kepler (1929), p.250.

36. Chandrasekhar (2003), p.57

Donc en tirant au centre S , les rayons AS , BS , cS , les aires ASB , BS_c seraient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B , la force centripète agisse sur lui par un seul coup, mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc et à suivre la droite BC . Si on tire la ligne Cc parallèle à BS , laquelle rencontre BC en C , à la fin de ce second temps, le corps (selon le 1. corollaire des lois) sera en C dans le même plan que le triangle ASB .

En tirant ensuite la ligne SC , le triangle SBC sera égal au triangle SBc , à cause des parallèles SB , Cc , donc il sera aussi égal au triangle SAB .

De même, si la force centripète agit successivement sur le corps en C , D , E , etc. et qu'elle lui fasse décrire à chaque petite portion de temps les droites CD , DE , EF , etc. ces lignes seront toutes dans le même plan ; et le triangle SCD sera égal au triangle SBC , le triangle SDE au triangle SCD , et le triangle SEF au triangle SDE . Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : et en composant, les sommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ seront entre elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente et que leur largeur diminue à l'infini ; il est clair (par le cor. 4. du lemme 3.) que leur dernier périmètre ADF , sera une ligne courbe. Donc la force centripète, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption, et les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étaient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. C.Q.F.D. ³⁷ ».

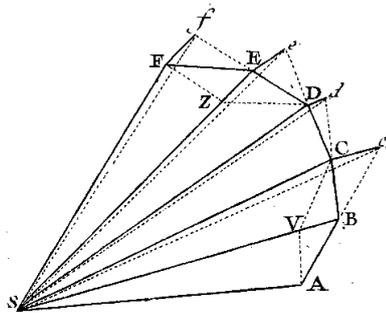


FIGURE 3.12 – Illustration de la proposition I. Figur tirée de [Newton \(1966b\)](#).

Newton assoit sa démonstration sur le temps. En premier lieu, selon un procédé présent en plusieurs passages des *Principia*, il suppose « que le temps soit divisé en

37. [Newton \(1966b\)](#), p.49-50

parties égales ». Le mouvement est donc perçu comme une succession de « petites portions » de mouvement qui se déroulent en des intervalles de temps égaux, dont il ne précise ni le nombre ni la largeur. Cette décomposition procède d'une opération mentale qui permet de restreindre l'étude du mouvement à un intervalle de temps unique, durant lequel, le corps laissé à lui-même, parcourra une ligne droite, selon la loi I³⁸. L'égalité temporelle de chacune des parties est donc un prérequis qui assure l'égalité des distances parcourues durant chacun de ces intervalles. Les aires balayées sont donc elles aussi égales. Dès lors, il n'a plus à se soucier du temps et peut s'en remettre à la loi II, selon laquelle « les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée³⁹ », laissant ainsi apparaître une force discontinue.

Il se concentre alors sur la première partie de temps, durant laquelle un corps, sous l'action d'une « force imprimée », décrit une ligne rectiligne AB. En B débute « un second temps égal au premier » durant lequel le corps, si aucune contrainte n'intervenait sur lui, décrirait la ligne $Bc = AB$. Or B est le point de la trajectoire où une force centripète agit sur le corps selon le mode de l'impulsion, le propulsant en C où il sera « à la fin de ce second temps ». Le corps décrit donc la droite BC, égale à AB.

Enfin, Newton construit le triangle SBC qui « est égal au triangle SAB », et lui est coplanaire. Il a ainsi construit deux triangles dont les aires, décrites en des temps égaux, sont égales. La proposition est donc prouvée pour les premiers triangles.

Par la suite, il réitère l'action de la force centripète aux points C, D et E, etc., qui correspondent au commencement de « petites portions de temps » égales et durant lesquelles le corps parcourt des lignes de même longueur (CD, DE, EF, etc.).

En procédant ainsi, Newton fait ressortir à la fois des moments de temps privilégiés – ceux qui correspondent à l'impulsion – et l'égalité des aires décrites en des temps égaux. Mais la trajectoire est polygonale. Comment y voir alors la continuité du mouvement et l'équivalence des instants ?

« [...] Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente et que leur largeur diminue à l'infini ; il est clair (par le Cor. 4. du lemme 3) que leur dernier périmètre ADF, sera une ligne courbe. Donc la force centripète, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption, et les aires quelconques SADS, SAFS, qui étaient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. C.Q.F.D.⁴⁰ ».

38. Loi I : « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état » ; Newton (1966b), p. 17

39. Newton (1966b), p.17

40. Newton (1966b) ; p. 49-50.

Newton a donc recouru à un passage à la limite pour franchir la ligne de démarcation entre les mondes discontinu et continu. Les points initialement mis en avant correspondent au « commencement » de chaque intervalle considéré, qui ont tous la même longueur. Autrement dit, Newton ne considère qu'une succession de points, séparés d'une même longueur. Il augmente ensuite, par la pensée, le nombre d'intervalles, simultanément qu'il en diminue, de manière identique, leur longueur « à l'infini ». Autrement dit, il imagine les intervalles s'amoinrir jusqu'à ce que les points correspondant aux chocs se touchent. Il a ainsi approximé une ligne polygonale en une ligne continue. De fait, comme la grandeur temps est assignée à la ligne, il est en mesure d'affirmer que le temps, initialement discontinu, est devenu continu. Mais le recours à ce passage à la limite, procédé aussi insolite que périlleux au XVII^e siècle⁴¹, ne cache pas le problème du traitement mathématique du temps en philosophie naturelle au XVII^e siècle.

La proposition I autorise donc la représentation mathématique d'une durée par une aire, à condition, toutefois, que sa démonstration, dont la pierre angulaire est un passage à la limite assimilant une somme d'instant à un temps continu, paraisse convaincante. Autrement dit, il faut être capable de dépasser les paradoxes de Zénon afin d'appréhender mathématiquement le chemin qui mène d'une conception discontinuitiste du temps au *temps absolu*.

Nous illustrons ce propos à l'aide de figures qui nous semblent fournir une bonne appréhension du passage à la limite. A la manière de Galilée, nous avons placé un axe vertical représentant le temps, sur lequel nous avons projeté l'ensemble des instants correspondants aux impulsions subies par le corps. Nous nous sommes toutefois limités au segment polygonal AE. Notre propos étant simplement d'illustrer la pensée newtonienne.

Nous voyons ainsi apparaître une ligne continue lorsque le nombre de choc augmente à l'infini, signifiant que le temps devient lui aussi un continuum. La proposition est, certes, démontrée, mais, « la tâche de la physique mathématique est loin d'être accomplie. Il manque à proprement parler une analyse du continu dégagée des intuitions géométriques⁴² ».

Il semble aller de soi, pour B. Pourciau⁴³, que la somme d'une infinité d'instant devienne un temps continu par un passage à la limite. Newton, cependant, ne justifie pas la transformation de l'arc polygonal en une ligne continue, lorsqu'il imagine l'augmentation à l'infini du nombre de triangles. D.T. Whiteside doute d'ailleurs de la validité d'un tel procédé. Mais, avec I.B. Cohen, le passage du discontinu au continu trouve

41. Il semblerait cependant que ce procédé ne soit pas si nouveau. SERGESCU rapporte que le concept de passage à la limite est déjà développé à la fin du XVI^e siècle et que Stevin, au début du siècle suivant, l'aurait utilisé dans ses démonstrations [Sergescu \(1949\)](#). Nous n'avons pas vérifié ces propos.

42. [Blay \(1995\)](#), p.80

43. [Pourciau \(2004\)](#)

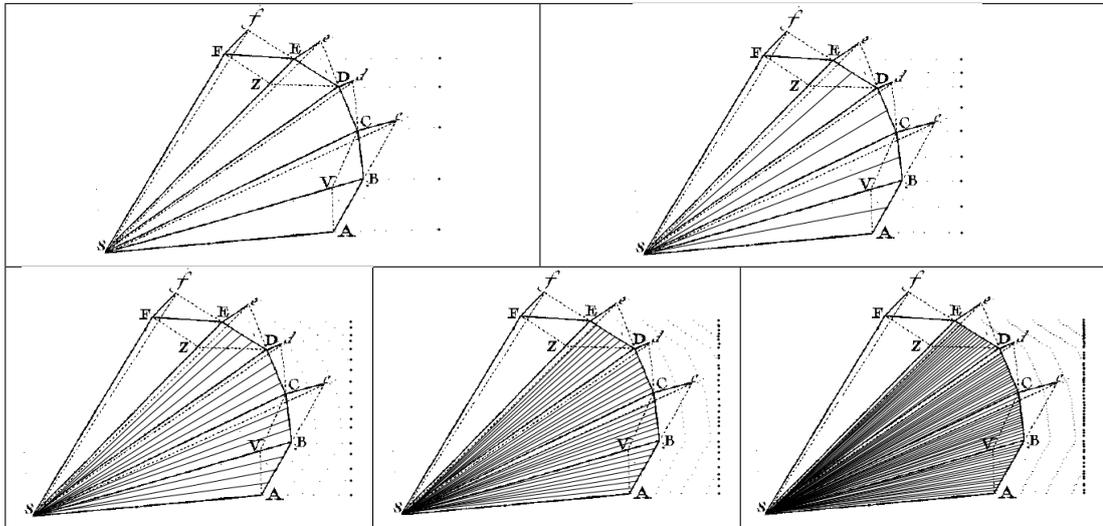


FIGURE 3.13 – Illustration du passage d'un temps discret à un temps continu. À chaque sommet d'un triangle correspond à un choc qui définit un instant, représenté par un point sur l'axe vertical des temps. En diminuant la largeur de la base de chaque triangle, le nombre de choc augmente. Les instants se rapprochent, pour constituer à l'infini un temps continu.

une nouvelle explication, puisque l'auteur de la dernière traduction des *Principia* en version anglaise, voit dans le temps newtonien une grandeur qui flue uniformément, et « selon cette idée, il serait peut être plus précis de dire que le temps newtonien est la mesure du flux qui peut être divisée en d'égales "longueurs" infinitésimales, plutôt que d'insister sur un temps newtonien composé d'une sorte d'unités infinitésimales discrètes⁴⁴ ». Nous retrouvons là l'idée hobbesienne fondatrice de la conception newtonienne du temps selon laquelle « l'instant doit être pris pour un temps indivisé et non pour un temps indivisible⁴⁵. Autrement dit, l'instant newtonien est un élément de temps d'une certaine épaisseur et non pas l'unité inétendue de temps. Et « la meilleure représentation du temps ne se fait que par la ligne⁴⁶ » constituée de points non réducibles à un inétendu.

Nous devons donc admettre que le temps newtonien est composé d'instant conti-

44. Traduction de l'auteur ; « Accordingly, it would be perhaps more accurate to say that Newtonian time is the measure of the flux that can be divided into infinitesimals of equal "length", rather than to insist that Newtonian time is itself made up of some sort of discrete infinitesimal units », [Newton \(1999\)](#) ; p.117.

45. *De Corpore*, part. II, chap. 8, §11 cité par M. Blay dans [Blay \(1993\)](#) ; p.135.

46. [Médina \(1997\)](#) ; p.182.

gus d'une certaine épaisseur rendant ainsi vain et insensé le passage du discontinu au continu, mais aussi la scission du temps en *absolu* et *relatif*, qui n'a d'ailleurs, selon G. Barthélémy, pas l'importance que Newton veut lui donner. Nous pensons même qu'elle n'a guère de portée dans les *Principia* et en philosophie naturelle en général. En effet, si tel n'était pas le cas, c'est-à-dire si l'instant constituait l'unité indivisible de temps, la mesure d'un intervalle de temps s'apparenterait à la somme des instants constituant cet intervalle. Ce qui signifie que cette somme serait identique à une partie de *durée*, c'est-à-dire à une partie de « temps absolu ». Or, par définition, le « temps absolu » ne peut être assimilé à une somme d'instant. Autrement dit, la mesure d'un intervalle de temps, c'est-à-dire celle d'un « temps relatif » se ramène à la mesure d'un « temps absolu ». Et donc « temps relatif » et « temps absolu » ne sont qu'un.

Enfin, de par sa présence dans les *Principia*, la loi des aires montre aussi, si cela s'avérait nécessaire, l'existence d'une certaine continuité en physique. Alors délaissée par les contemporains de Kepler qui la jugeaient trop complexe à utiliser, Newton l'intègre en tant que première proposition dans les *Principia*. En d'autres termes, elle constitue une partie du socle de la philosophie naturelle newtonienne. La prédiction des positions spatiales et temporelles qu'elle permet amena Newton à l'utiliser comme une horloge. Le savant anglais alla même au-delà de son prédécesseur, qui l'utilisa essentiellement pour réaliser les *tables Rudolphines* — qui furent d'une bien plus grande précision que les précédentes tables astronomiques — puisqu'il l'étendit à tous les corps décrivant un mouvement curviligne autour d'un centre fixe. Elle devint un pilier de la théorie newtonienne de par le caractère général que l'auteur des *Principia* lui conféra. Elle devint, de fait, valide aussi bien pour l'étude des corps célestes en mouvement que pour celle des corps, « simples », terrestres, marquant ainsi une rupture avec la physique pré-keplérienne. Transposée au temps, elle rompit la dichotomie aristotélicienne d'un temps céleste et d'un temps terrestre, unifiant ces derniers en un unique temps de la philosophie naturelle.

3.3 La théorie des proportions

Au XVII^e siècle, la méthode mathématique utilisée pour l'évaluation des différentes grandeurs de la philosophie naturelle était la théorie des proportions. Elle provient du livre v des *Eléments* d'Euclide et constitue la seule théorie mathématique de l'Antiquité qui traite des grandeurs en général. V. Jullien⁴⁷ nous apprend que les *Eléments* sont conçus comme la base d'une science pure et abstraite, qu'ils traitent de nombres, de la ligne, de la surface, du volume et de l'angle. Par contre les phénomènes auxquels Newton est confronté mettent en jeu la force, le mouvement, la vitesse, la densité... La théorie des proportions semble donc mal adaptée pour résoudre les phénomènes de

47. Jullien (1998)

la nature, qui sont variables, et dont les grandeurs caractéristiques sont liées par des relations fonctionnelles. Elle apparaît néanmoins dans les *Principia* comme un moyen puissant pour traiter des grandeurs continues, telles que la vitesse, la force, ou encore le temps. Elle est, en effet, opérationnelle sur les grandeurs représentant les concepts généraux de la philosophie naturelle et pour lesquelles les opérations d'addition et de comparaison ont un sens. Il semble effectivement raisonnable d'additionner des temps entre eux ou encore de les comparer, et même opportun de déterminer la *raison*⁴⁸ de deux quantités représentant un temps. Il paraît, cependant, nécessaire de rappeler, comme le font V. Jullien⁴⁹ et N. Guicciardini⁵⁰ qu'un rapport, une *raison* et une *proportion* ne sont ni des nombres, ni des grandeurs, et que les rapports euclidiens sont susceptibles d'égalité, d'inégalité et de manipulations opératoires. Notre tendance actuelle, dans les faits, est de considérer les *raisons* comme des nombres et les *proportions* comme des équations.

Pour avoir *raison* entre elles, les grandeurs doivent être de même genre, et doivent, si nous les multiplions par des nombres, se dépasser l'une l'autre. Il est donc impossible de définir une grandeur comme rapport de deux quantités hétérogènes, telle que la vitesse qui met en jeu le rapport d'une longueur et d'un temps. Mais nous pouvons donc dire de deux poids qu'ils ont même raison que deux temps.

$$\frac{P_1}{P_2} \propto \frac{t_1}{t_2}$$

L'évaluation d'un temps passe donc par l'établissement d'une série de proportions. Ainsi, nous trouvons dans les *Principia* des énoncés de la forme : « [...], les distances sont comme les temps ».

$$\frac{s_1}{s_2} \propto \frac{t_1}{t_2}$$

ou, si la distance parcourue est la même pour les deux corps, « [...], les vitesses sont comme les temps inversement ».

$$\frac{v_1}{v_2} \propto \frac{t_2}{t_1}$$

48. Le terme *raison* était employé pour la comparaison de deux quantités. Si davantage de quantités ou de nombres étaient impliqués, on parlait alors de *proportions*.

49. [Jullien \(1998\)](#)

50. [Guicciardini \(1999\)](#)

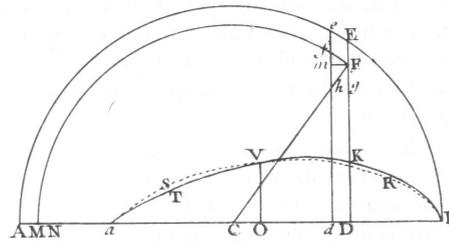


FIGURE 3.14 – Illustration de la proposition xxx, livre II. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#).

Une formulation mathématique plus élaborée peut être aussi accomplie à travers l’opération de composition ⁵¹, dont la preuve apportée par Newton à la proposition xxx du livre II montre un exemple.

Proposition xxx ⁵²

« Si la droite aB est égale à l’arc de cycloïde que le corps décrit en oscillant, et qu’à chacun des ses points D on élève des perpendiculaires DK qui soient à la longueur du pendule comme la résistance que le corps éprouve dans les points correspondants de l’arc est à la force de la gravité : je dis que la différence entre l’arc décrit dans toute la descente et l’arc décrit dans toute l’ascension subséquente, multipliée par la moitié de la somme de ces mêmes arcs sera égale à l’aire BKa , déterminée par toutes les perpendiculaires DK ».

Dans un premier temps, Newton pose géométriquement la situation.

« Car soit représenté, tant l’arc de cycloïde décrit dans une oscillation entière par la droite aB qui lui est égale, que l’arc qui serait décrit dans le

51. Nous indiquons dans le tableau ci-dessous les différentes opérations utilisées par Newton dans les *Principia*, relevées par I.B. Cohen ; [Newton \(1999\)](#), p.313-4.

Les noms latins des diverses transformations proviennent de la version latine des *Elements* d’Euclide du XVII^e siècle.

Alternando	Si $A : B \propto C : D$; alors $A : C \propto B : D$
Convertendo	Si $A : B \propto C : D$; alors $A : A - B \propto C : C - D$
Compendo	Si $A : B \propto C : D$; alors $A + B : B \propto C + D : D$
Dividendo	Si $A : B \propto C : D$; alors $A - B : B \propto C - D : D$
Ex æquo	Si $A : B \propto C : D$ et $E : F \propto G : H$; alors $A \times E : B \times F \propto C \times G : D \times H$
Ex æquo perturbate	Si $A : B \propto F : G$ et $B : C \propto E : F$; alors $A : C \propto E : G$

52. [Newton \(1966b\)](#), p.326.

vide par la longueur AB. Soit coupée AB en deux parties égales au point C, ce point C représentera le point le plus bas de la cycloïde, »

Il assigne ensuite les segments de lignes aux grandeurs mécaniques et établit les raisons simples existantes entre ces grandeurs.

« [...] et CD sera comme la partie de la force de la gravité par laquelle le corps est pressé en D suivant la tangente de la cycloïde, et elle aura la même raison à la longueur du pendule que la force en D à la force de la gravité. Soit donc représentée cette force par la longueur CD et la force de la gravité par la longueur du pendule, si on prend DK sur DE qui soit à la longueur du pendule dans la raison de la résistance à la gravité, DK exprimera la résistance. Du centre C et de l'intervalle CA ou CB soit tracé le demi-cercle BEeA. Que le corps décrive dans un espace de temps très petit l'espace Dd, ayant élevé les perpendiculaires DE, de, qui rencontrent la circonférence en E et en e, elles seront comme les vitesses que le corps, en descendant dans le vide, acquerrait aux lieux D et d. Ce qui est clair (par la Prop. 52. du livre 1). Soient ces vitesses exprimées par les perpendiculaires DE, de : et soit DF la vitesse que le corps acquiert en D en tombant de B dans un milieu résistant. Si du centre C et de l'intervalle CF on décrit le cercle FfM qui rencontre les droites de et AB en f et M, M sera le lieu auquel il monterait ensuite s'il n'éprouvait point de résistance ultérieure, et df serait la vitesse qu'il acquerrait en d. »

« [...] Abaisant Fm perpendiculairement sur df, le décrement Fg de la vitesse DF causé par la résistance de DK sera à l'incrément fm de cette même vitesse produit par la force CD comme la force génératrice DK à la force génératrice CD ... ».

Désormais les longueurs sont physiquement dimensionnées : CD et DK représentent une force, DE, de, DF, et df représentent une vitesse, alors que Fg et MN sont respectivement associés à une vitesse et à une longueur.

Puis, il compose les proportions à partir des grandeurs ainsi définies.

« [...] Mais à cause des triangles semblables Fmf, Fhg, FDC, on a fm : Fm (ou Dd) :: CD : DF ; et par conséquent, Fg : Dd :: DK : DF. Et aussi Fh : Fg :: DF : CF ; et par conséquent, Fh ou MN : Dd :: DK : CF ou CM. Donc la somme de toutes les MN × CM sera égale à la somme de toutes les Dd × DK. ... ».

Cette composition fournit une nouvelle raison qui lui permet de conclure la preuve de la proposition :

« [...] Au point mobile M soit toujours supposé une ordonnée élevée à angle droit, égale à l'indéterminée CM, laquelle parcourt par un mouvement continu toute la ligne Aa ; et le trapèze décrit par ce mouvement ou

le rectangle $Aa \times (1/2)AB$ qui lui est égal sera toujours égal à la somme de toutes les $MN \times CM$, et par conséquent à la somme de toutes les $Dd \times DK$, c'est-à-dire, à l'aire $BKVta$. C.Q.F.D. ».

Les transformations utilisées dans cette proposition mettent en jeu des rapports continus, c'est-à-dire des raisons telles que le second terme de la première raison est égal au premier terme de la seconde raison. Ces transformations jouent un rôle particulièrement important dans le texte des *Principia*. Elles sont le moyen d'obtenir de nouvelles raisons, à partir desquelles, éventuellement, il est possible de développer davantage le raisonnement. Toutefois, nous constatons que les proportions utilisées dans cette démonstration ne respectent pas les dimensions physiques, comme le montre le tableau 3.1 dans lequel nous avons regroupé les dimensions assignées à chacun des segment. Ainsi, « [...] le décrement Fg de la vitesse DF causé par la résistance de DK sera à l'incrément fm de cette même vitesse produit par la force CD comme la force génératrice $DK \dots$, » est l'unique proportion dimensionnellement correcte, selon le sens euclidien, énoncée dans cette proposition. En revanche, $fm : Fm$ (ou Dd) :: $CD : DF$ met en jeu trois dimensions différentes — une vitesse, une force et une longueur — laissant apparaître un irrespect du critère d'homogénéité des quantités comparées. L'emploi d'une équation aux dimensions, tel que nous le pratiquons de nos jours, met en évidence la nécessité de recourir à une constante ou à un coefficient de proportionnalité dimensionné. Or Newton, volontairement non rigoureux vis-à-vis de la théorie des proportions, n'en fit pas usage. Selon I.B. Cohen, il estimait que les raisons pouvaient être composées comme des nombres et qu'elles devaient être mélangées à la quantité⁵³.

« Dans les *Principia*, Newton expose avec audace des proportions mélangées. Contrairement à ses prédécesseurs, il énonçait ainsi qu'une quantité est proportionnelle à une quantité d'un genre complètement différent ».

53. Traduction de l'auteur, « In the *Principia*, Newton boldly set forth mixed proportions. Unlike his predecessors, he would state that a quantity is proportional to a quantity of a wholly different kind. », [Newton \(1999\)](#), p.312.

dimension	segments
Force	CD ; DK
Longueur	MN ; Fh ; Dd ; CF
Vitesse	DE ; de ; DF ; df ; Fg

TABLE 3.1 – Tableau illustrant le non respect des dimensions physiques lors de l'utilisation de la théorie des proportions par Newton. L'équation aux dimensions des proportions utilisées dans la proposition xxx montre un non respect des dimensions physiques. En effet, à la proportion $Fg : Dd :: DK : DF$ correspond l'égalité dimensionnelle $\frac{1}{temps} = masse \times \frac{1}{temps}$.

Newton fait usage de cet artifice en différents endroits des *Principia*. À la proposition XI du livre I, par exemple, il note : « la force centripète est inversement comme le carré de la distance SP ». En agissant ainsi, il exprime la dimension des grandeurs physiques, telles la force ou la vitesse, en fonction de la grandeur fondamentale de la géométrie. Pour I.B. Cohen, « Newton libère ainsi la description mathématique de la nature des liens restrictifs des anciennes règles⁵⁴ ». L'absence de constante dimensionnée dans les propositions des *Principia* pose cependant problème au lecteur moderne. Les opérations ne lui apparaissent pas homogènes et il les pense donc fausses. Mais il nous faut avoir à l'esprit que le souci de Newton était avant tout de se libérer des contraintes imposées par la théorie des proportions, qui semblait, à première vue, un moyen puissant de résolution des phénomènes naturels. Elle ne s'avéra, toutefois, pas assez souple pour faire face aux problèmes proposés au XVII^e siècle en philosophie naturelle.

3.4 Conclusion

Afin de contourner les incapacités de la géométrie euclidienne à rendre compte des phénomènes dynamiques de la nature, Newton a développé pour les *Principia*, sur le modèle de la pratique mathématique de Roberval⁵⁵, une géométrie cinématique sur laquelle il a fondé la *Méthode des premières et dernières raisons*, qui laisse apparaître le temps en filigrane. Mais l'évaluation de celui-ci demande de recourir soit à la loi des aires, soit à la théorie des proportions. Cette dernière, unique moyen d'évaluation d'une grandeur en géométrie euclidienne, impose au philosophe de la nature des contraintes strictes, du fait, entre autres, que les grandeurs qu'elle compare doivent

54. Traduction de l'auteur, « In this way Newton freed the mathematical description of nature from the restricting bonds of ancient rules. », [Newton \(1999\)](#), p.313.

55. [Roberval \(2003\)](#)

impérativement être de même genre. Elle l'oblige ainsi à des contorsions.

La loi des aires, en revanche, met en regard une surface (celle délimitée par un arc de cercle et les lignes sur lesquelles s'appuie cet arc) et un temps. Mais, « aucune précision n'est donnée par Newton sur le type de courbe plane décrit par le corps. Il n'est pas spécifié, en particulier, si cette courbe doit être fermée⁵⁶ ». En fait, Newton étend les conclusions de la proposition I, obtenues sur une courbe fermée, aux aires « ouvertes », voire même, dans le cas de la section VII du livre I, *De l'ascension et de la descension rectiligne des corps*, aux trajectoires rectilignes, qu'il considère, selon S. Chandrasekhar, comme le cas limite du mouvement le long de la section conique. L'évaluation du temps, dont la détermination est explicitement demandée dans la majorité des propositions de cette section, procède de la supposition de quadratures connues. La proposition xxxix en est un exemple⁵⁷ :

Proposition xxxix

« La quadrature des courbes étant supposée, le corps montant ou descendant dans une ligne droite qui passe par le centre vers lequel il est poussé, suivant une loi quelconque, on demande la vitesse de ce corps en un point quelconque de cette droite, ainsi que le temps employé à y arriver ; et réciproquement. »

Démonstration

« Que le corps E tombe d'un lieu quelconque A suivant la droite ADEC, et que BFG soit la courbe dont toutes les ordonnées AB, DF, EG, etc. soient proportionnelles aux forces en A, D, E vers le centre C, la vitesse en un point quelconque E sera comme la racine carrée de l'aire ABEG (C.Q.F.T.). Que la courbe VLM, dont l'asymptote est ABT, soit celle dont toutes les ordonnées EM soient réciproquement proportionnelles aux aires ABGE, l'aire ABTVME représentera le temps pendant lequel le corps parcourra en tombant la ligne AE.

Pour démontrer la première ds ces deux assertions, soit prise sur la droite AE une très petite ligne DE donnée de longueur, et soit SLF le lieu de la ligne EMG, lorsque le corps était en D ; si la force centripète est supposée celle qui convient pour que la vitesse du corps descendant soit proportionnelle à la racine carrée de l'aire ABGE, cette aire sera en raison doublée de la vitesse, c'est-à-dire, que si au lieu des vitesses en D et en E, on écrit V et $V + I$, l'aire DBFD sera, comme V^2 , et l'aire ABGE comme $V^2 + 2VI + I^2$, d'où il résultera que l'aire ABGE sera comme $2VI + V^2$, et par conséquent

56. Blay (1995), p.75.

57. Newton (1966b), p.129.

$\frac{DFGE}{DE}$ sera comme $\frac{2VI + I^2}{DE}$, c'est-à-dire, en prenant les premières raisons des quantités naissantes, que la longueur DF sera comme la quantité $\frac{2VI}{DE}$, ou comme sa moitié $\frac{I \times V}{DE}$.

Maintenant, le temps pendant lequel le corps en tombant parcourt la petite ligne DE , est comme cette petite ligne directement, et la vitesse V inversement ; de plus, la force est comme l'incrément I de la vitesse directement, et comme le temps inversement ; donc si on prend les premières raisons des quantités naissantes, cette force sera comme $\frac{I \times V}{DE}$, c'est-à-dire comme la longueur DF . Donc la force proportionnelle à DF ou EG fera cette descendre le corps avec une vitesse qui sera comme la racine de l'aire $ABGE$ C.Q.F.D.

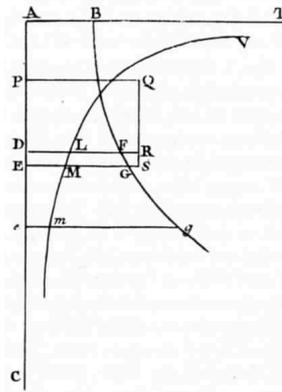


FIGURE 3.15 – Illustration de la figure xxxix. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#).

La seconde assertion est facile à démontrer présentement ; car puisque le temps, employé à parcourir une petite ligne DE d'une longueur quelconque donnée, est inversement comme la vitesse, et par conséquent inversement comme la ligne droite qui serait la racine de l'aire $ABFD$, et que DL , et par conséquent l'aire naissante $DLME$ est comme la même droite inversement : le temps sera comme l'aire $DLME$: et la somme de tous les temps, comme la somme de toutes ces aires, c'est-à-dire, par le Cor. du lemme 4. que le temps total employé à parcourir la ligne AE sera comme l'aire totale $ATVME$ (C.Q.F.D.). »

Newton démontre cette proposition en deux assertions. Dans la première, il cherche à exprimer la vitesse du corps en un point de la trajectoire verticale $ADEC$. Il assoit la démonstration sur l'évaluation de l'aire $ABEG$, dont la quadrature, par hypothèse, est supposée connue. La seconde assertion demande de rechercher le temps employé pour

parvenir à ce point. À cette fin, Newton évalue l'aire naissante DLME qui correspond au temps de parcours de l'infiniment petite distance DE. « Le temps total employé à parcourir la ligne AE » est alors représenté par l'aire totale ATVME. « La quadrature des courbes étant supposée », Newton n'évalue pas les aires. Il sous-entend qu'il est à même de les évaluer, le cas échéant, et parallèlement que la résolution de ces quadratures ne demandent pas d'efforts particulier au mathématicien. Selon N. Guicciardini, Newton se réfère à un catalogue de quadrature de courbes privé qu'il a élaboré durant les années 1665-66.

Quoi qu'il en soit, l'évaluation de ces aires repose à la fois sur la supposition de la quadrature et sur l'extension de la loi des aires à des surfaces délimitées par des courbes non fermées, qui rendent toute deux possible un plus grand champ d'étude des phénomènes dynamiques.

La *Méthode des premières et dernières raisons* et la loi des aires appellent toutes deux, en fin de démonstration, un passage à la limite qui se présente sous deux aspects qui font ressortir une conception dichotomique du temps dans les *Principia* :

1. Un temps continu rappelé par un procédé nommé « évanouissement par glissement⁵⁸ », qui consiste à modifier continûment une figure jusqu'à disparition de certains de ses éléments.
2. Un temps discret suggéré par un procédé de « glissement par démultiplication⁵⁹ », dans lequel un point M parcourt, lors d'intervalles de temps successifs et égaux, à chaque fois la moitié seulement du chemin qu'il a à parcourir, suivant la volonté de Zénon.

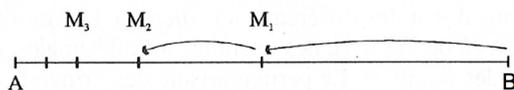


FIGURE 3.16 – Un point M parcourt durant des intervalles de temps successifs et égaux la moitié du chemin qu'il a à parcourir. Selon Zénon, il n'arrivera jamais à l'extrémité de la ligne.

Réitéré une infinité de fois, le polygone coïnciderait rigoureusement avec le cercle permettant ainsi au philosophe d'appréhender « le courbe à partir de la connaissance des lignes brisées⁶⁰ ». Mais, ce problème n'était pas nouveau à la période de publication des *Principia*. Le spectre de Zénon était à un tel point présent au XVII^e siècle, que « le

58. Barthélémy (1992), p.30

59. Barthélémy (1992), p.30

60. Barthélémy (1992), p.31

rappel de ses paradoxes [...] apparaissait comme autant d'entraves à l'exigence de mathématicité⁶¹ » et n'était pas pour rassurer Cavalieri⁶² :

« ... je suis arrivé à composer quelque petite chose sur le mouvement [...] : lorsqu'on en arrive à devoir prouver que le mobile, qui du repos doit passer à un degré quelconque de vitesse, doit passer par les [degrés] intermédiaires, je ne trouve aucune raison qui me tranquillise, bien qu'il me semble que généralement il en soit ainsi... »

61. [Blay \(1993\)](#), p.127

62. Cité par M. Blay dans [Blay \(1998b\)](#) ; p.564.

Chapitre 4

Le recours à la *Méthode des suites infinies*

4.1 Proposition x, livre II

Le livre II des *Principia* n'a pas connu le même essor et le même intérêt que les livres I et III. Placé entre les principes théoriques, exposés dans le premier livre, et leurs applications apparaissant dans le livre III, il fut, selon I.B. Cohen¹, un obstacle inutile à la compréhension du *Système du Monde*. Les historiens n'ont, en effet, pas montré à l'égard des propositions de ce livre le même enthousiasme que celui déployé pour l'étude des propositions des livres I et III. Les études à son sujet sont, en général, sans lien avec le reste de l'œuvre et correspondent généralement à des sujets précis qui n'abordent pas le thème principal du livre II : l'investigation théorique et expérimentale de la mécanique des fluides. Il est vrai qu'en première lecture, cette partie des *Principia* ne montre pas l'homogénéité du reste de l'ouvrage. Elle semble davantage constituée d'une collection de sujets déconnectés entre eux.

Le livre II est souvent considéré comme une œuvre de mécanique des fluides, à tort, selon G.Smith², pour qui, il fut préférable d'attribuer à ce livre le titre *De Motu corporum in mediis resistantibus*, qui apparaît dans la version augmentée du *De Motu*. Une grande part des critiques auraient ainsi probablement été évitées. Et la remarque écrite de la main de Newton, renvoyant le lecteur à la lecture des premières sections du livre I suivie immédiatement de celles du *Systemæ Mundi* aurait davantage été comprise de ses commentateurs, modifiant probablement la destinée de ce second livre.

D'un point de vue expérimental, les tentatives décrites dans le second livre fournirent les premières mesures précises des forces de résistance. Il fut possible d'en ex-

1. [Newton \(1999\)](#), p.161.

2. [Newton \(1999\)](#), p.188.

traire une mesure du coefficient de traînée. Les expériences de chute libre dans l'air, conduites par Desaguliers et réalisées à l'église Saint Paul, ont permis à Newton d'obtenir une valeur du coefficient de frottement, en accord avec la théorie mathématique décrite dans ce même livre, de sorte que, vue comme une tentative de mesure de la force de résistance et non comme un test de modèle hypothétique, cette expérience de chute libre représente un réel accomplissement.

Sur le plan théorique, le mouvement dans les milieux résistants est divisé en deux parties :

1. La solution aux équations du mouvement dans l'hypothèse d'une force de résistance proportionnelle à une vitesse à la puissance n ($f \propto v^n$) est fournie dans les sections 1 à 4.
2. Les bases pour déterminer les coefficients des équations exprimant la force de résistance ($f = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$) sont données dans les sections suivantes.

La prise en compte de la force de résistance dans l'étude des phénomènes dynamiques fut un élément important pour l'évaluation des trajectoires dans « l'art de jeter les bombes ». Elle permit à la balistique d'atteindre un haut degré de formulation, dont la proposition x du livre II des *Principia* est le sommet. Par ailleurs, cette proposition présente un intérêt particulier pour notre propos puisqu'elle est la seule de l'œuvre newtonienne dans laquelle le temps est à la fois représenté par un symbole et mathématiquement manipulé. Aussi, après un bref état des lieux de la balistique au XVII^e siècle, nous nous attarderons sur une analyse détaillée de la proposition x à travers, entre autres, l'étude des différentes versions publiées et ses rectifications éditées par D.T. Whiteside³.

Bref rappel de l'état des lieux de la balistique au XVII^e siècle

L'introduction du chapitre xv de *La mécanique au XVII^e siècle*⁴ est particulièrement éclairante quant à la divergence des préoccupations quotidiennes des savants et de celles du peuple.

« Le siècle qui nous occupe est particulièrement guerrier. Certes, Descartes avait sacrifié quelque temps au métier des armes, mais la plupart des grands savants de l'époque – et Huygens en est un exemple – restaient à l'écart des conflits militaires qui divisaient l'Europe. Et cependant, nous demeurons dans notre sujet en nous arrêtant quelque temps à l'art de la guerre, car c'est précisément la balistique qui devait mettre à l'épreuve

3. Newton (1981), p.312-424.

4. Dugas (1954)

la dynamique de Galilée, et conduire Huygens et Newton à étudier le mouvement en milieu résistant ⁵ ».

Mais elle éclaire aussi sur la pénétration des mathématiques au XVII^e siècle dans de nombreux domaines où prévalaient le jugement, l'expérience et le goût, puisque « c'est l'art de jeter des bombes » qui mit à l'épreuve la dynamique galiléenne et contribua au développement de la balistique. L'École navale française, créée pour le besoin des guerres de Louis XIV, vit ainsi, comme en Angleterre, l'introduction d'un enseignement de géométrie à des fins pragmatique et utilitaire. L'étude des trajectoires devint alors capitale, et artificiers et mathématiciens s'y consacrèrent, dès 1670. L'analyse de la trajectoire d'un projectile en milieu résistant fut ainsi abordée sous l'angle de la géométrie. Mais, des savants, comme Huygens ou Boyle, considéraient cette analyse comme une branche de la mécanique.

Au XVII^e siècle, cette analyse reposait sur la représentation que l'on avait de la trajectoire et faisait appel à la notion d'impétus. Quand une balle est tirée par une arme qui fait un certain angle avec l'horizontale, la balle s'élève dans les airs en ligne droite jusqu'à une certaine hauteur. Puis la trajectoire s'incurve lorsque l'impétus faiblit, et le projectile finit son mouvement en ligne droite vers le centre de la Terre. La hauteur maximale atteinte, dans ce cas, est proportionnelle à la charge de poudre. Les cas qui considéraient la diminution de la densité de l'air avec l'altitude ne s'accordaient pas avec ces conclusions. Et c'est alors la géométrie des triangles qui était mise à contribution pour résoudre ce genre de problèmes. L'impétus, certes, fournissait une explication nouvelle au mouvement des corps en chute mais ne permettait pas d'atteindre, de manière objective, la représentation du mouvement.

Un bond fut réalisé avec les travaux galiléens du mouvement complétés par ceux de Cavalieri et de Torricelli. La balistique galiléenne restait cependant à un niveau essentiellement théorique ne prêtant que peu d'importance au sort réel du projectile. Les théorèmes du mouvement étaient démontrés sans prendre en considération la résistance et, ensuite, seulement, selon la procédure scientifique adaptée, les modifications nécessaires en accord avec l'expérience étaient introduites. Torricelli reprit alors les travaux galiléens. Il fournit ainsi des solutions à des problèmes non traités par son maître. Il détermina, entre autre, des relations géométriques entre portée, flèche et angle de tir et sa théorie énonçait les solutions exactes de problèmes que l'artilleur, mathématiquement disposé, était à même de comprendre. À l'aide de ses travaux, qui représentent l'énoncé de la théorie balistique la plus simple, nombre d'artificiers apprirent à orienter convenablement leur arme afin d'atteindre la cible située à une distance donnée. Mais il existait toujours des différences entre les faits observés et les résultats théoriques, dont Torricelli était conscient. L'absence de prise en compte de la résistance de l'air empêchait davantage de développement et éloignait, de surcroît,

5. Dugas (1954), p.521-556.

la théorie balistique de toutes applications pratiques et précises, bien qu'aux vitesses ordinaires, incluant celles des projectiles propulsés mécaniquement, la résistance de l'air peut savamment être négligée. La théorie balistique se présentait de fait comme une simple approximation de la réalité fondée sur des lois pré-newtoniennes de la mécanique qui ne prenaient pas en compte la résistance du milieu.

La pression de l'air fut mise en évidence par Otto von Guericke, à Magdebourg, au milieu du xvii^e siècle et Boyle réalisa, quelques années plus tard, diverses expériences prouvant l'importance de l'influence de l'air sur la vitesse d'un corps en chute. Par ailleurs, Huygens avait obtenu, de manière indépendante, une valeur exacte de la valeur de la constante de gravitation, g , qui apparaît dans chaque résultat balistique. L'évaluation de cette constante fut faite indépendamment de toutes mesures expérimentales de l'accélération d'un corps en chute libre sur de courtes ou de longues distances. Et, aucune expérience de vérification de la théorie scientifique de la résistance de l'air ne fut réalisée avant 1710 par Newton et Hawksbee, dont les résultats apparaissent dans la seconde édition des *Principia*. Les travaux hugueniens, relevés par A.R. Hall ⁶, montrent l'insatisfaction de leur auteur vis-à-vis d'une loi de résistance directement proportionnelle à la vitesse. Il orienta sa pensée dans une autre direction, et ce n'est pas sans peine qu'il établit une loi de résistance en raison du carré de la vitesse, amenant A.R. Hall à dire ⁷ qu'

« il fit plus qu'assigner une valeur à l'exposant dans l'expression $R = KV^n$; il illustre et confirmait une déduction de la simplicité de la nature, que la loi carré était appropriée pour la résistance comme pour l'accélération, ou (comme Newton le prouvera plus tard) pour l'attraction gravitationnelle. Cette loi particulière de la résistance devrait donc être davantage associée au nom d'Huygens qu'à celui de Newton. Il pensait que si les résultats expérimentaux n'étaient jamais exacts, ceci était plus probablement dû aux inadéquations dans la méthode et les appareils que dans une telle complexité de la nature que n soit lui-même une variable ».

Ceci fut le premier fruit des efforts hugueniens à une formulation plus rigoureuse d'une science balistique. Mais Huygens était aussi conscient qu'« il est extrêmement difficile sinon du tout impossible de résoudre ce problème ⁸ ». Les progrès de la balis-

6. Hall (1952), p.114.

7. Traduction de l'auteur, « He was doing more than assign a value to the index in the expression $R = KV^n$; he was illustrating and confirming a deduction from the essential simplicity of nature, that the square law was as appropriate for resistance as for acceleration, or (as Newton was later to prove) for gravitational attraction. This particular law of resistance should therefore rather be associated with the name of Huygens than that of Newton. He thought that if experimental results were never exact, this was more probably due to inadequacies in the method and the apparatus than to such a complexity of nature as n itself being a variable » ; Hall (1952), p.115-6.

8. Huygens (1992), p.175.

tique dépendaient directement de l'invention des mathématiciens. Or le niveau atteint par le Hollandais, que personne n'a égalé durant deux décennies, ne suffisait pas. Les Britanniques aussi étaient insatisfaits de la résolution des problèmes balistiques par la géométrie. Ils sentaient la nécessité de recourir à un nouveau traitement mathématique qui prendrait en compte la diminution progressive de la vitesse initiale due à l'action de la résistance de l'air. Lorsque Newton s'attaqua au problème de la résistance, dont la proposition x du second livre des *Principia* est le point culminant de la science balistique à cette époque, l'état de la balistique semblait être dans l'impasse.

Le contexte de la proposition x

Les premières sections du livre II sont consacrées à l'étude du mouvement des projectiles dans les milieux résistants. La section I, dédiée à l'étude *Du mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison de leur vitesse* traite de la loi linéaire de résistance. Mais l'hypothèse selon laquelle « la résistance du corps en raison de la vitesse est plus mathématique que conforme à la nature ⁹ », a contraint Newton à traiter, dans une seconde section, d'une loi de résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Dès lors, Newton étudie dans cette section, selon un schéma commun à l'ensemble des sections dédiées à l'étude du mouvement sous différentes conditions de résistance, le mouvement rectiligne, le mouvement vertical et en vient, enfin, à traiter du mouvement oblique – par composition des deux précédents – que seule la proposition x étudie. Dans l'édition de 1726, qui sert généralement de support à toute étude de l'œuvre newtonienne, la proposition x est énoncée de la manière suivante ¹⁰ :

Livre II – Proposition x

« La force uniforme de la gravité tendant directement au plan de l'horizon, et la résistance étant comme la densité du milieu et le carré de la vitesse conjointement ; on demande à chacun des lieux, tant la densité du milieu nécessaire pour que le corps décrive une courbe quelconque donnée, que la vitesse du corps et la résistance du milieu à chacun des lieux de cette courbe. »

Cette proposition est présente dans les éditions de 1687, 1713 et 1726 ¹¹ :

9. [Newton \(1966b\)](#), p.254.

10. [Newton \(1966b\)](#), p.269.

11. L'analyse des différentes versions de la proposition x constitue le sous-chapitre 4.2. Par ailleurs, la proposition XL du livre II, pour laquelle nous avons précisé dans l'annexe B que le temps était aussi représenté sous forme littérale, apparaît pour la première fois, et sous une forme définitive, dans l'édition de 1713. Aussi, nous n'avons pas jugé nécessaire d'analyser cette proposition.

- La version de 1687 comprend un énoncé¹², une démonstration et trois corollaires.
- L'énoncé a été modifié dans la seconde édition (1713) : la fin de la requête est remaniée de « *tum corporis velocitas in iisdem locis* » en « *tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis* ». Il est suivi d'une démonstration et de deux corollaires au lieu des trois. Les corollaires 1 et 2 de l'édition de 1687 sont fondus en un seul et le corollaire 3 est devenu le deuxième de la nouvelle édition.
- L'énoncé et la preuve de l'édition de 1726 sont identiques à ceux de 1713. Ils sont suivis des deux mêmes corollaires que dans l'édition précédente, de quatre exemples et d'un scholie comportant huit règles.

Le but recherché est toutefois identique dans chacune des différentes versions. Il s'agit, « pour chacun des lieux », c'est-à-dire, pour chacune des positions de la trajectoire occupée au cours du temps, de rechercher la densité du milieu, la valeur de la vitesse du corps et la résistance du milieu.

Ces différentes versions s'expliquent par la rectification de la preuve faite par Newton suite à une erreur de calcul dans l'édition de 1687, qui lui fut annoncée par le neveu du mathématicien bâlois Johann Bernoulli, Niklaus Bernoulli, lors d'une visite de ce dernier à Londres, en septembre 1712. Selon D.T. Whiteside, qui résume et commente cet événement¹³, Niklaus Bernoulli rendit visite à A. de Moivre à Londres en septembre 1712 entre autres pour lui annoncer la découverte, par son oncle deux ans plus tôt, d'une erreur dans un facteur numérique dans l'exemple 1 qui suit la proposition x du livre II des *Principia*. Il demanda, en outre, à rencontrer M. Newton pour lui faire part de cette découverte. Ce dernier les invita, tous deux, deux fois à dîner à la maison. N. Bernoulli informa Newton que selon son oncle il apparaissait une contradiction dans le premier exemple qui suit la proposition x. Dans cet exemple, Newton se propose de chercher « la densité du milieu nécessaire¹⁴ » pour que le projectile se meuve selon une trajectoire semi-circulaire. Or selon la démonstration newtonienne, la résistance au mouvement est en chaque point égale à la gravité, qui lui est opposée. De fait, le corps, soumis à la gravité uniforme, se déplace à vitesse constante ; conséquence effectivement impossible. L'oncle, nous dit D.T. Whiteside¹⁵, a constaté le fait après avoir reformulé la proposition à l'aide du calcul leibnizien, sans pour autant avoir détecté l'erreur précisément, et l'a communiqué à Leibniz, dès août 1710¹⁶ :

12. L'énoncé latin présent dans la première édition est le suivant : « *Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitq; resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim : requiritur tum Medii densitas in locus singulis, quæfacial ut corpus in data quavis linea cura moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis* ».

13. Newton (1981), n.1, p.312.

14. Newton (1981), p.272

15. Newton (1981), p.49

16. Traduction de l'auteur, « [*Principia*, 1687] Pag. 260, prop. 10. Problema hoc [...] mihi non recte

« [*Principia*, 1687] Pag. 260, prop. 10. Ce problème, me semble-t-il, n'est pas correctement résolu par l'auteur. Encore qu'en de multiples endroits l'évidence fut recherchée, notamment où l'erreur n'est pas facile à détecter. [...] »

« La solution de l'auteur est manifestement contradictoire. En effet, page 265 où il applique la solution générale au cercle [...] la résistance égale la force motrice [...] »

« Par ma méthode de résolution, qui apparaît naturelle, j'ai trouvé [...] résistance est à la force motrice comme 3 à 2, c'est dans un rapport constant d'une fois et demi. »

Le compte-rendu de A. de Moivre daté du 18 octobre 1712 et adressé à Johann Bernoulli fait part de la reconnaissance de l'erreur par Newton et de son intention d'examiner le sujet de plus près : « deux ou trois jours après m'avoir informé, il me dit que l'objection [de M. Bernoulli] était bonne, et qu'il avait corrigé la conclusion [de sa proposition] ; en effet il me montra sa correction, et elle se trouva conforme au calcul de votre neveu¹⁷ ».

Etat de la littérature et intérêts d'étude de cette proposition

Selon I.B. Cohen, « toute personne étudiant l'histoire des *Principia* trouvera en la proposition x du livre second un intérêt particulier¹⁸ », de sorte que nous nous attendions à trouver une littérature foisonnante à son sujet. Nous dûmes toutefois nous rendre à l'évidence que peu de commentateurs des *Principia* se sont penchés sur cette propositions. Nous avons pu tout de même profiter des travaux pertinents et détaillés de N. Guicciardini¹⁹ sur le traitement mathématique newtonien de la proposition x et des remarques de I.B. Cohen²⁰. Mais il est vrai que les travaux quasi exhaustifs de D.T. Whiteside²¹ à ce sujet ont peut être rendu caduque toute nouvelle étude de cette

ab Auctore solutum videtur. Quanquam autem multis in locis evidentia desideretur, ubi tamen præcise erratum sit non facile detegitur. »

« Quidquid sit, ex solutione Auctoris manifeste contradictorium sequitur. Nam pag. 265. ubi applicat solutionem generalem ad circulum, [...] esset [...] resistentia æquæ vi motrici [gravitatis secundum tangentem curvæagentis], & sic quantum de velocitate per resistentiam quolibet momento amitteretur, tantumdem per vim motricem resarciretur : hinc ergo velocitas foret æquabilis, & tamen dicit decrescere ... ; adeoque sibi contradicit. Ego per meum solvendi methodum, qui valde naturalis videtur, invenio ... resistentiam ad vim motricem esse ut 3 ad 2, hoc est in constanti ratione sesquialtera. » ; Newton (1981) ; n.172, p.49

17. K. Wollenschläger, *Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und A. de Moivre*. (Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 43, 1933, 151-317) : 20-4, particulièrement 271, rapporté par Whiteside Newton (1981), n1, p.312-313.

18. « Anyone studying the history of the *Principia* will find book 2, prop. 10, to be of special interest ».
Newton (1999), p.167

19. Guicciardini (1999), p.233-247

20. Newton (1999), p.171-7

21. Newton (1981), p.313-424. ; The Mathematical Principles.

proposition avant même qu'elle ne soit publiée.

Le cœur de notre problème réside, néanmoins, dans cette proposition. En effet, la proposition x est un tournant dans le traitement mathématique du temps dans les *Principia* et *de facto* en philosophie naturelle, d'où les caractères particulier et fondamental qu'elle revêt pour nous. Plus exactement, ce sont les modifications apportées par Newton lors des diverses rectifications de la proposition qui nous intéressent, notamment l'introduction de paramètres signifiant le temps et le changement de méthode mathématique employée. L'analyse des diverses rectifications de cette proposition montre, en effet, qu'aussi longtemps que Newton chercha la solution à l'aide de la géométrie, il ne parvint pas à ses fins. Par contre, le recours à la *Méthode des suites infinies*, qui est une méthode algébrique, lui permit à la fois d'appréhender de manière plus stricte et plus précise l'infiniment petit, de se libérer des contraintes rigoureuses de la géométrie et d'entrevoir ainsi un nouveau mode de raisonnement qui déboucha sur la bonne solution.

En effet, dans la version de 1713, Newton fit appel à la *Méthode des suites infinies* et introduisit un symbolisme partiel par la désignation des durées par les lettres t et T. Ce n'est, cependant, pas tant l'emploi des lettres t et T qui nous importe, mais le fait d'utiliser un symbole pour signifier le temps. Dès lors, la présence des symboles signifiant le temps et la manipulation mathématique de ce dernier sont explicites en philosophie naturelle. Dans la version de 1687, il recourut à *Méthode des premières et dernières raisons* et à la théorie des proportions pour manipuler mathématiquement le temps. Nous pouvons donc finalement estimer l'emploi, pour la première fois, d'un paramètre rendant possible la mathématisation du temps en philosophie naturelle dans les *Principia* dans le premier quart du XVIII^e siècle. Cette estimation est essentiellement fondée sur les travaux newtoniens. Or ceux de Leibniz, du marquis de l'Hospital et de Varignon doivent aussi être pris en compte pour confirmer cette hypothèse.

4.2 Analyse des différentes versions

La lecture de la traduction française de la version de 1726 des *Principia* par la Marquise du Châtelet nous a incité à nous plonger dans les versions latines des éditions de 1687 et de 1713. En effet, la découverte de symboles signifiant le temps, dans la proposition x de la troisième édition, nous a poussé à vérifier leur présence ainsi que la méthode mathématique employée dans la démonstration des versions antérieures. Contrairement à notre manière de procéder, nous présenterons une analyse chronologique des énoncés et des preuves de la proposition x présentés par Newton. La version de 1726 étant identique à celle de 1713, nous étudierons uniquement les versions des éditions de 1687 et de 1713. Une étude comparative des conséquences des méthodes mathématiques mises en jeu et des conceptions du temps qui en découlent suivra ces présentations.

4.2.1 Édition de 1687 — Énoncé et commentaires

Énoncé

Le texte original de la proposition x tel qu'il fut publié en 1687 est présenté, et abondamment commenté, dans le dernier volume des *Mathematical Papers*²² qui rassemble les écrits mathématiques newtoniens datant de 1697 à 1722.

« Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim : requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæfaciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis²³ ».

La preuve étant la suivante :

« Sit AK planum illud plano schematis perpendiculare ; ACK linea curva, C corpus in ipsa motum ; & FCf recta ipsam tangens in C. Fingatur autem corpus C nunc progredi ab A ad K per lineam illam ACK, nunc vero regredi per eandem lineam ; & in progressu impediri a medio, in regressu æque promoveri, sic ut in iisdem locis eadem semper sit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus describat corpus progrediens arcum quam minimum CG, & corpus regrediens arcum Cg ; & sint CH, ch longitudines æquales rectilineæ quas corpora de loco C exeuntia his temporibus absq̄ medii & gravitatis actionibus describerent : & a punctis C ; G, g ad planum horizontale AK demittantur perpendicula CB, GD, gd, quorum GD ac gd tangenti occurrant in F & f. Per medii resistentiam sit ut corpus progrediens vice longitudinis CH describat solummodo longitudinem CF ; & per vim gravitatis transfertur corpus de F in G : adeoq̄ lineola HF vi resistentiæ, & lineola FG vi gravitatis simul generantur. Proinde (Lem. x. Lib. I.) lineola FG est ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq̄ (ob datam gravitatem) ut quadratum temporis ; & lineola HF ut resistentia & quadratum temporis, hoc est ut resistentia & lineola FG. Et inde resistentia sit ut HF directe & FG inverse, sive ut $\frac{HF}{FG}$. Hæc ita se habent in lineolis nascentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non sunt accuratæ.

Et simili argumento est fg ut quadratum temporis, adeoq̄ ob æqualia tempora æquatur ipsi FG ; & impulsus quo corpus regrediens urgetur est ut $\frac{hf}{fg}$. Sed impulsus corporis regredientis & resistentia progredientis ipso

motus initio æquantur, adeoq̄ & ipsis proportionales $\frac{hf}{fg}$ & $\frac{HF}{FG}$ æquantur ;

22. Newton (1981), p.373-390.

23. Newton (1981), p.373.

Démonstration :

« Soient AK le plan de l'horizon perpendiculaire au plan de la figure, ACK une ligne courbe, C un corps en mouvement le long de cette ligne, et FC*f* la droite tangente à la courbe en C.

On suppose d'autre part que le corps C se déplace de A vers K selon la ligne ACK et recule le long de cette même ligne. En se déplaçant de A vers K, il subit une résistance de la part du milieu alors qu'en allant de K vers A, il est assisté par le milieu dans son mouvement, de sorte qu'en un lieu donné la vitesse du corps est la même qu'il se déplace de A vers K ou de K vers A.

Le corps décrit, en des intervalles de temps égaux, un arc au minimum égal à CG en se déplaçant de A vers K, et un arc C*g* en se déplaçant dans le sens contraire. Soient CH, *ch* des lignes droites de longueurs égales, que les corps, s'éloignant de C, décriraient dans ces temps sans les actions du milieu et de la gravité. Que l'on fasse tomber, des points C, G, *g* vers le plan horizontal AK, les perpendiculaires CB, GD, *gd*, dont GD et *gd* coupent la tangente en F et *f*. Quand le corps progresse de la longueur CH, il décrit, du fait de la résistance du milieu, seulement la longueur CF. Et par la force de gravité, le corps est porté de F en G. Ainsi les éléments de lignes HF et FG sont générées simultanément, la première par la force de résistance, la seconde par la gravité. Donc (par le lemme x, livre 1) l'élément de ligne FG est comme la gravité et le carré du temps conjointement, donc (puisque la gravité est donnée) comme le carré du temps, et la petite ligne HF est comme la résistance et le carré du temps, c'est-à-dire comme la résistance et la petite ligne FG. Et donc la résistance est comme HF directement et comme FG inversement, ou comme $\frac{HF}{FG}$. C'est ainsi dans le cas de petites lignes naissantes. Et les rapports de ces petites lignes de longueurs finies sont approximatifs.

Et par un argument similaire, *fg* est comme le carré du temps et donc est égal à FG, puisque les temps sont égaux. L'impulsion qui pousse le corps est comme $\frac{hf}{fg}$. Mais l'impulsion sur le corps qui rétrograde et la résistance sur celui qui progresse sont égales au commencement du mouvement. Ainsi les proportions $\frac{hf}{fg}$ et $\frac{HF}{FG}$ sont égales ; et comme les longueurs *fg* et FG sont égales, *hf* et HF le sont aussi. CF, CH (ou *ch*) et C*f* sont donc en progression arithmétique, et donc HF est la demi-différence entre C*f* et CF ; et la résistance qui, ci-dessus, était comme $\frac{HF}{FG}$, est comme $\frac{Cf - CF}{FG}$.

D'autre part la résistance est comme la densité du milieu et le carré de la vitesse. Or la vitesse est comme la longueur CF décrite directement et le temps \sqrt{FG} inversement, c'est-à-dire comme $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$, et donc le carré de la vitesse est comme $\frac{CF^2}{FG}$. C'est pourquoi la résistance, elle-même proportionnelle à $\frac{Cf - CF}{FG}$, est comme la densité du milieu et le rapport $\frac{CF^2}{FG}$ conjointement. La densité du milieu est donc comme $\frac{Cf - CF}{FG}$ directement et $\frac{CF^2}{FG}$ inversement, c'est-à-dire comme $\frac{Cf - CF}{FG^2}$. C.Q.F.D. »

Commentaires

Newton considère un corps se déplaçant sous l'influence de la gravité, constante et uniforme, et d'une résistance proportionnelle au produit de la densité du milieu et du carré de la vitesse. La trajectoire est donnée. Il est demandé de trouver la densité et la vitesse en chaque point de la trajectoire.

Il nous apparaît que cette proposition suit le schéma « classique » des *Principia* :

- La trajectoire est supposée et une figure est associée au texte²⁷.
- Les conditions d'étude sont posées : le point C , représentatif du corps, décrit la trajectoire ACK dans un milieu résistant. Il est soumis à la gravité constante et uniforme et à l'action du milieu dans lequel il se déplace.
- L'étude dynamique débute alors par la considération d'intervalles de temps donnés égaux, signifiés sur la figure par des segments, durant lesquels Newton exprime mathématiquement les grandeurs physiques mises en jeu.
- Enfin, le recours à la théorie des proportions permet la recherche de l'expression mathématique de la résistance, de la densité et de la vitesse.

Toutefois, ce schéma assez grossier ne permet pas de discuter du maniement mathématique du temps dans cette proposition. Il nous montre, cependant, que la résolution des propositions des *Principia* s'inscrit dans un cadre formel, lié à la volonté newtonienne d'employer la *Méthode des premières et dernières raisons* comme moyen de résolution des phénomènes naturels. Aussi, afin de faire ressortir le traitement du temps, une étude détaillée nous paraît s'imposer.

La trajectoire ACK , perpendiculaire à l'horizon, étant supposée, Newton considère,

27. D.T. Whiteside informe le lecteur [Newton (1981), n.4, p.374] que la figure est à la fois l'illustration de la preuve précédente et celle de l'exemple 1, qui considère une trajectoire semi-circulaire. Aussi, la trajectoire du corps C traversant le milieu résistant est représentée par un demi-cercle de centre O et de diamètre AK (Voir figure 4.1). Nous devons plutôt la comprendre comme une courbe quelconque continue dessinée dans le plan vertical du papier.

tout d'abord, la ligne droite FCf , tangente à la courbe en C , lieu occupé par un corps lors de l'étude. Il suppose, d'autre part, que le corps se déplace de A vers K . Il imagine de même que le même corps peut se mouvoir dans le sens contraire, de K vers A , comme un film projeté à rebours, de sorte que la vitesse en un point est la même que le corps se déplace dans un sens, de A vers K , ou en sens opposé, de K vers A . La résistance qui retarde le corps allant de A vers K communique ainsi une « accélération positive » au corps qui se déplace dans le sens contraire²⁸. Enfin, Newton considère un très petit intervalle de temps durant lequel le corps qui progresse parcourt un arc au minimum égal à l'arc \widehat{CG} et le corps allant à rebours un arc au minimum égal à l'arc \widehat{Cg} . En l'absence de l'action du milieu et de la gravité, le corps parcourrait durant cet intervalle de temps, conformément à la première loi, une des deux lignes droites, d'égales longueurs, CH ou Ch , selon le sens de parcours de la trajectoire.

Le milieu semble donc agir de manière différente selon le mouvement considéré du corps. Dans le premier cas, il s'oppose au mouvement du corps, dans le second il l'assiste dans son mouvement. Nous pouvons donc voir la proposition x comme une double étude : celle d'un corps se déplaçant dans un espace résistant soumis à la gravité, constante, perpendiculaire au plan de l'horizon et orientée vers le bas, et à la résistance du milieu proportionnelle au produit du carré de la vitesse et de la densité, et celle d'un corps se déplaçant dans le même milieu résistant soumis à trois forces, la même force de gravité, la même résistance du milieu, et à l'« assistance du milieu ». Le premier corps, positionné en C , parcourt la trajectoire de A vers K . La résistance, opposée à la direction de la vitesse, empêche le mouvement. Elle freine le corps et diminue ainsi la valeur de la vitesse. Il parcourt, durant l'intervalle de temps considéré, l'arc \widehat{CG} le long de la trajectoire. En absence de forces, il franchirait, durant le même temps, la ligne droite CH . Le second corps parcourt la trajectoire de K vers A . Aussi positionné en C , il subit une résistance, qui s'oppose à son mouvement mais dont l'effet s'ajoute à celui de la gravité, empêchant d'autant le corps dans son mouvement vers A . Le corps parcourt un arc \widehat{Cg} égal à l'arc \widehat{CG} ²⁹. En l'absence de force, il parcourrait la petite ligne droite Ch . L'« accélération positive » dont parle N. Guicciardini est due, selon nous, à l'« assistance du milieu », sur laquelle Newton ne s'étend malheureusement pas. Elle s'oppose à l'action conjointe de la gravité et de celle de la résistance du milieu dans le second cas et est telle que la vitesse des deux corps est la même en un même point.

Puis, Newton décompose le mouvement selon un axe tangentiel à la courbe au

28. « Newton assumes that a body describes this curve from A to K . He further imagines that the same body moves in the contrary direction, from K to A , as in a movie projected in the wrong temporal direction. So the speed of the body which progresses is the same as that of a regressing body at the same points. Furthermore, the resistance which retards the first body imparts a positive acceleration to the second body » ; Guicciardini (1999), p.234.

29. La vitesse des deux corps est la même en un même point de la trajectoire et ils se déplacent durant un même intervalle de temps, partant du point C . De fait, les arcs \widehat{Cg} et \widehat{CG} ont même longueur.

point C et un axe vertical, à l'aide desquels il précise les caractéristiques de la force de résistance et celles de la force de gravitation. La force de résistance est uniquement comme la « petite ligne HF, » décrite le long de la tangente, et la gravité est représentée seulement par le segment vertical infiniment petit FG ; HF et FG étant générés simultanément³⁰. Il recourt par la suite au lemme x de la *Méthode des premières et dernières raisons*³¹ qui permet l'évaluation de ces forces. De là, il montre que la résistance est directement comme HF et inversement comme FG, soit comme le rapport $\frac{HF}{FG}$ ³². Cependant, ce choix d'axes paraît obscur. Il permet certes à Newton d'établir que la résistance agit seule selon la composante tangentielle et qu'elle ne possède pas de composante selon l'axe vertical. Mais nous sommes tentés de dire, à l'instar de N. Guicciardini³³, qu'avec un tel choix d'axes, gravité et résistance ont une composante sur chacun des axes définis. Selon D.T. Whiteside, l'élément de ligne FG n'est pas simplement généré par la gravité, mais aussi par la composante négative de la résistance sur l'axe tangentiel³⁴. La solution à ce problème ne sera établie que par J.L. Lagrange. Dans sa *Théorie des fonctions analytiques*³⁵, il se propose d'« analyser la solution que Newton a donnée de ce problème dans la première édition ... » à la lumière des formules obtenues dans la partie mathématique de son œuvre. Ainsi Lagrange montre, « par la loi de dérivation », que la flèche FG s'exprime en fonction de la gravité, de l'intervalle de temps considéré, de la vitesse du corps en C et de la résistance au mouvement, tel que $FG = \frac{g}{2}\theta^2 - \frac{gr}{6u}\theta^3$, où g , θ , r et u sont respectivement la gravité, l'intervalle de temps, la résistance et la

30. « Per medii resistentiam sit ut corpus progrediens vice longitudinal CH describat solummodo longitudinem CF ; & per vim gravitatis transfertur corpus de F in G : adeoq lineola HF vi resistentiæ & lineola FG vi gravitatis simul generantur » ; Newton (1981), p.374.

31. Lemme x : « Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps. », Newton (1966b), p.42.

32. Nous supposons, comme Newton, que la gravité est constante et la masse du corps unitaire. Alors,

selon le lemme 10.	$F \propto t^2$
la résistance est comme FH	$f \propto FH$
la gravité est comme FG	$g \propto FG$
FH et FG étant générées simultanément	$FH \propto f.t^2$ et $FG \propto g.t^2$
donc	$f \propto \frac{HF}{FG}$

33. « This choice of non rectangular component directions is very confusing at a first reading. One in fact is tempted to object that resistance also acts along the vertical, and that there is a tangential component of gravity » ; Guicciardini (1999), p.234.

34. Traduction de l'auteur, « [...] the 'linelets' FG is generated not merely by the force of vertically downwards gravity, but also through the component (here negative) of the force of resistance to the motion along CFH which acts in the same downwards direction » ; Newton (1981), n.6., p.374.

35. Lagrange (2007), p.370-6.

vitesse du corps. De sorte que la chute du corps est générée à la fois par la gravité et la résistance. Mais ceci n'apparaît qu'au troisième ordre, ce que la méthode newtonienne choisie ne pouvait mettre en évidence.

« Par un argument similaire », et en se focalisant au commencement du mouvement, instant durant lequel la raison des proportions naissantes est la raison d'égalité ($\frac{hf}{fg}$ et $\frac{HF}{FG}$ sont donc égales), Newton établit l'expression mathématique de la résistance. Celle-ci est comme $\frac{Cf - CF}{FG}$ ³⁶. Par ailleurs, selon l'énoncé de la proposition x, la résistance est proportionnelle à la densité du milieu et au carré de la vitesse, soit $f \propto d.v^2$ où d représente la densité du milieu et v la vitesse du mobile. En outre, le

36. De la démonstration, nous pouvons écrire les proportionnalités et les égalités suivantes dans lesquelles nous avons désigné la résistance par f :

$$f \propto \frac{HF}{FG} \quad (4.1)$$

$$fg = FG \quad (4.2)$$

$$f \propto \frac{hf}{fg} \quad (4.3)$$

De là, nous déduisons que

$$hf = HF \quad (4.4)$$

En outre,

$$CH = CF + FH \quad (4.5)$$

$$Cf = Ch + hf \quad (4.6)$$

d'où

$$HF = CH - CF \quad (4.7)$$

Par ailleurs, CF , CH (ou Ch) et Cf sont en progression arithmétique, donc

$$CF + r = CH \quad (4.8)$$

$$CF + r = Ch \quad (4.9)$$

$$Ch + r = Cf \quad (4.10)$$

Des équations (4.5), (4.9) et (4.10), nous obtenons

$$HF \propto Cf - CF \quad (4.11)$$

et donc

$$f \propto \frac{Cf - CF}{FG} \quad (4.12)$$

carré de la vitesse peut s'écrire $v^2 \propto \frac{CF^2}{FG}$. De là, Newton détermine la densité du milieu :

$$f \propto \frac{CF^2}{FG} \cdot d \quad (4.13)$$

$$f \propto \frac{Cf - CF}{FG} \quad (4.14)$$

$$\frac{CF^2}{FG} \cdot d \propto \frac{Cf - CF}{FG} \quad (4.15)$$

$$d \propto \frac{Cf - CF}{CF^2} \quad (4.16)$$

Les résultats énoncés semblent cependant erronés puisque D.T. Whiteside et N. Guicciardini insèrent un coefficient « 2 » au dénominateur de l'expression de la résistance. En effet, la « loi de dérivation » lagrangienne fournit une expression de la flèche fg différente de celle de FG par la présence d'un signe positif devant le terme du troisième ordre, de sorte que la différence des flèches fg et FG n'est pas nulle. De fait, fg et FG ne sont donc pas égaux et hf et HF non plus. Le rapport de la résistance à la gravité ne s'exprime donc pas comme Newton le note dans la preuve de la proposition mais précisément comme le font remarquer D.T. Whiteside et N. Guicciardini, c'est - à - dire $\frac{Cf - CF}{2FG}$.

En projetant à rebours le mobile, Newton procède également à un retournement de la flèche du temps. Mais celui-ci ne contredit pas le « temps absolu », qui coule de manière uniforme « sans relation à rien d'extérieur ». En effet, la théorie du temps que ce dernier explicite est une théorie pour sa structure et non pour son ontologie. Son caractère principal est d'ailleurs de s'écouler uniformément, de manière identique à chaque instant, et non pas la distinction de l'individualité des moments. Newton était, comme nous l'avons déjà dit, opposé à l'idée que les moments de temps aient une identité au-delà de leur ordre et de leur position. Le monde de l'espace-temps newtonien était constitué de l'ensemble des événements successifs qui ont lieu dans l'espace à des moments finis de temps successifs.

Mais la proposition x montre aussi que le maniement du temps par Newton, en 1687, s'inscrit dans les procédures mathématiques de son temps. Newton restreint l'étude du mouvement du mobile à un intervalle de temps donné et détermine, durant cet intervalle, les caractéristiques des forces agissant sur le corps en fonction des données de la figure. De manière simpliste, nous pourrions dire que Newton fixe le temps et étudie la dynamique du problème afin d'exprimer mathématiquement les forces mises en jeu en fonction des données de la figure. Selon P. Souffrin³⁷, cette façon de faire cor-

37. Souffrin (1992)

respond à une pratique courante aux XIV - XVI^e siècles. Il s'agissait de convenir d'un intervalle de temps durant lequel l'auteur analysait l'évolution du système étudié et y exprimait mathématiquement les grandeurs physiques considérées.

Enfin, à la décomposition du mouvement est liée une décomposition du temps. Le temps de parcours de l'arc \widehat{CG} , donné, peut être vu comme la somme du temps de parcours de l'élément de ligne CF , sous l'action de la résistance seule, suivi du temps de chute FG , sous l'effet de la gravité seule. Par conséquent, le temps est segmenté en intervalles de longueurs différentes qui peuvent être additionnés, montrant, par ailleurs, que Newton considère le temps, dans cette version de la proposition x , comme une grandeur géométrique décomposable à laquelle les opérations fondamentales mathématiques sont applicables.

4.2.2 Édition de 1713 — Énoncé et commentaires

Énoncé

Nous utiliserons pour cette étude une traduction personnelle de l'énoncé et de la preuve de la version latine de l'édition de 1713³⁸ ci-dessous, version quasi-définitive de la proposition x . Les modifications, légères, apportées par l'énoncé de la version de 1726 n'influencent en rien le raisonnement et la construction de la preuve.

« Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim : requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis ».

La preuve est la suivante :

« Sit PQ planum illud plano schematis perpendiculare, $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q ; G, H, I, K , loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E , insistentes; & sint BC, CD, DE distantie ordinatarum inter se æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN , curvam tangentes in G & H , & ordinatis CH, DI sursum productis occurrentes in L & N , & compleatur parallelogrammum $HCDM$.

Et tempora quibus corpus describit arcus GH, HI , erunt in subduplicata ratione altitudinum LH, NI quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo : & velocitates erunt ut longitudines descriptæ GH ,

38. [Newton \(1972\)](#)

HI directe & tempora inverse. Exponentur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementur velocitatis tempore t factum exponentur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset (ut Galilæus demonstravit) id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI describente, auget arcum illum sola longitudine HI – HN seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum præ dictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$, resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$ sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad 2NI.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur –o, o, 2o. Pro ordinata CH scribatur P, & pro MI scribatur series quæ libet $Qo + Roo + so^3 + \&c.$ Et seriei termini omnes post primum, nempe $Roo + So^3 + \&c.$ erunt NI, & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 - \&c.$, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - \&c.$, & $P + Qo - Roo + So^3 - \&c.$ respective. Et quadrando differentias ordinarum BG – CH & CH – DI, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI, quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 + \&c.$, & $oo + QQoo + 2QRo + \&c.$ Quorum radices $o\sqrt{I + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{I + QQ}}$, & $o\sqrt{I + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{I + QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præ terea si ab ordinata CH subducatur semisumma ordinarum BG ac DI, & ab ordinata DI subducatur semisumma ordinarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæc sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum

infinite parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{NI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI, & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R} \sqrt{I + QQ}$. Et cum 2NI sit 2Roo, resistentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R} \sqrt{I + QQ}$ ad 2Roo, id est, ut $3S\sqrt{I + QQ}$ ad

4RR.

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HN_q}{NI}$ seu $\frac{I + QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, is est, ut $\frac{3S\sqrt{I + QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{I + QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{I + QQ}}$. Q.E.I. »

A cette proposition est jointe la figure 4.2 :

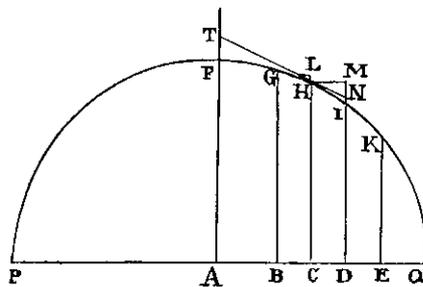


FIGURE 4.2 – Illustration de la proposition x de l'édition de 1713. La figure montre une trajectoire parabolique ainsi qu'une modification de notation. Newton a ainsi rectifié certaines de ses erreurs. Figure tirée de [Newton \(1713\)](#).

La traduction de l'énoncé et de la preuve que nous nous proposons se formulent ainsi :

« Supposons uniforme la force de gravitation tendant directement vers le plan de l'horizon, et la résistance proportionnelle conjointement à la densité du milieu et au carré de la vitesse. Il est alors demandé la densité du milieu, en chacun des lieux, qui fait que le corps se meut en une ligne courbe quelconque donnée, la vitesse du corps et la résistance du milieu, en ces mêmes lieux. »

« Soit PQ, le plan de l'horizon perpendiculaire au plan de la figure, PFHQ une ligne courbe qui coupe ce plan aux points P et Q. G, H, I, K quatre lieux, par lesquels le corps passe, lorsqu'il se déplace sur cette courbe de F vers Q. GB, HC, ID, KE quatre ordonnées parallèles, abaissées de ces points vers l'horizon PQ, qu'elles rencontrent, respectivement, aux points

B, C, D, E, et soient BC, CD, DE les distances entre les ordonnées, égales entre elles. On mène à partir des points G et H les droites GL et HN tangentiellement à la courbe en G et H, et rencontrant les ordonnées CH, DI, prolongées vers le haut, en L et N. On complète le parallélogramme HCDM.

Les temps durant lesquels le corps décrit les arcs GH et HI, seront alors en raison sous-doublée des altitudes LH, NI, que le corps pourrait décrire, dans les mêmes temps, en tombant des tangentes ; et les vitesses seront comme les longueurs GH et HI décrites directement et comme les temps inversement. On représente les temps par T et t, et les vitesses par $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$. $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ représentera alors le décrement de la vitesse durant le temps t. Ce décrement provient de la résistance qui retarde le corps et de la gravité qui l'accélère. La gravité dans le corps en chute décrivant l'espace NI génère une vitesse avec laquelle un espace double peut être décrit dans le même temps, (comme Galileo l'a démontré) c'est-à-dire la vitesse $\frac{2NI}{t}$. Mais pour le corps décrivant l'arc HI, la gravité l'augmente seulement de la longueur HI - HN ou $\frac{MI \times NI}{HI}$ ³⁹ et génère ainsi seulement la vitesse $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. On ajoute cette vitesse au décrement précité, et on obtient le décrement de la vitesse résultant de la résistance seule, c'est-à-

39. Dans les triangles rectangles infinitésimaux, nous avons :

$$HI^2 = HM^2 + MI^2 \quad \text{et} \quad HN^2 = HM^2 + (MI - IN)^2$$

Nous pouvons alors calculer le rapport $\left(\frac{HN}{HI}\right)^2$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{HN}{HI}\right)^2 &= \frac{HM^2 + MI^2 - 2MI \cdot IN + IN^2}{HI^2} \\ &= 1 - \frac{IN \cdot (2MI - IN)}{HI^2} \\ \text{Donc } \frac{HN}{HI} &= 1 - \frac{MI \cdot IN}{HI^2} + \frac{1}{2} \frac{IN^2}{HI^2}; \quad \text{or } IN \ll 1 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$HI - HN = \frac{MI \cdot IN}{HI}$$

dire $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. D'où puisque la gravité, dans ce même temps, génère dans le corps en chute une vitesse $\frac{2NI}{t}$, la résistance sera à la gravité comme $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ à $\frac{2NI}{t}$, ou comme $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ à $2NI$.

De là, si on écrit $-o, o, 2o$, respectivement, pour les abscisses CB, CD, CE, et P pour l'ordonnée CH, et la suite quelconque $Qo + Roo + So^3 + etc.$ pour MI, tous les termes de la suite après le premier, à savoir $Roo + So^3 + etc.$ seront NI, et les ordonnées DI, EK, et BG seront $P - Qo - Roo - So^3 - etc.$, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - etc.$, et $P + Qo - Roo + So^3 - etc.$ respectivement. Et en élevant au carré la différence des ordonnées BG - CH et CH - DI et en ajoutant aux carrés résultant les carrés de BC et CD, on obtient les carrés des arcs GH et HI : $oo + QQoo - 2QRoo^3 + etc.$, et $oo + QQoo + 2QRoo + etc.$ Les radicaux $o\sqrt{I + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{I + QQ}}$, et $o\sqrt{I + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{I + QQ}}$ sont les arcs GH et HI. En outre, si on soustrait de l'ordonnée CH la demi-somme des ordonnées BG et DI, et de l'ordonnée DI, la demi-somme des ordonnées CH et EK, les flèches Roo et $Roo + 3So^3$ des arcs GI et HK subsisteront. Et celles-ci sont proportionnelles aux petites lignes LH et NI, et sont donc dans le rapport double des temps T et t infiniment petits.

La raison $\frac{T}{t}$ est donc $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ ou $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$ ⁴⁰. Ainsi en substituant les valeurs trouvées de $\frac{T}{t}$, GH, HI, MI, et NI dans $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, il apparaîtra $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{I + QQ}$. Et comme $2NI$ est $2Roo$, la résistance sera à la gravité comme $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{I + QQ}$ à $2Roo$, c'est-à-dire, comme $3S\sqrt{I + QQ}$ à $4RR$. Or cette vitesse est celle avec laquelle le corps, partant d'un point H quelconque le long de la tangente HN, décrirait dans le vide une parabole de diamètre HC et de paramètre $\frac{HN^2}{NI}$ ou $\frac{I + QQ}{R}$.

Et la résistance est comme la densité du milieu et le carré de la vitesse conjointement, et pour cette raison la densité du milieu est comme la résistance directement et le carré de la vitesse inversement, c'est-à-dire, comme $\frac{3S\sqrt{I + QQ}}{4RR}$ directement et $\frac{I + QQ}{R}$ inversement, c'est-à-dire comme

40. En effectuant un développement limité de l'expression précédente, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{R + 3So}{R}} = \left(1 + \frac{3So}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{3So}{2R}\right) = \frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$$

$$\frac{S}{R\sqrt{I+QQ}} \quad \text{Q.E.I.} \gg$$

Commentaires

Newton cherche ici à écrire l'équation de la trajectoire du mobile. Il ne suit pas pour cela le schéma « classique » de démonstration présent dans les *Principia*, mais imagine le mouvement sous deux approches distinctes, dont la seconde revient à considérer un mouvement rectiligne uniforme suivi d'une chute libre :

1. Selon la ligne courbe PFHQ qui correspond à la trajectoire réelle.
2. Selon la tangente à la courbe en H, suivie de la chute du corps d'une hauteur h .

Après avoir décrit la trajectoire suivie par le corps et posé les hypothèses, Newton exprime le temps de parcours des arcs \widehat{GH} et \widehat{HI} en fonction des hauteurs de chute LH et NI. Le temps de parcours de l'arc \widehat{GH} est proportionnel à la hauteur \sqrt{LH} , que le corps pourrait parcourir dans un même temps en chutant de la tangente, de sorte que nous pouvons écrire $t_{GH} \propto \sqrt{LH}$. De manière similaire, le temps de parcours de l'arc \widehat{HI} peut se noter $t_{HI} \propto \sqrt{NI}$. LH différant de NI, les temps de parcours sont inégaux. Newton fait reposer sa démonstration sur des intervalles de temps distincts, contrairement aux méthodes usuellement pratiquées. De là, il définit les vitesses de parcours de ces arcs.

Il représente ensuite ces temps par des lettres (« Exponentur tempora per t & T, \dots »), qui apparaissent dans les expressions des vitesses de parcours des arcs \widehat{GH} et \widehat{HI} (« ... & velocitates per $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$ ») et dans celle du décrement de vitesse durant le temps t (« ... decrementur velocitatis tempore t factum exponentur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ »). Newton exprime ainsi explicitement la vitesse d'un corps par un rapport de grandeurs algébriques de genres différents et non plus par une relation de correspondance qui met en jeu des proportions de genre identique. Il a donc quitté le cadre *stricto sensu* de la géométrie des proportions. Le temps est représenté par un symbole et ne fait appel ni à une grandeur géométrique, ni à un lemme de la *Méthode des premières et dernières raisons*, ni aux conclusions de la proposition 1 du livre 1. Il est, dans cette version de la proposition x, une grandeur qui ne nécessite pas de support pour « exister ». Il peut être appréhendé pour lui-même.

La suite de la démonstration consiste en la recherche de l'équation du mouvement et en l'évaluation de la vitesse et de la densité du milieu. Autrement dit, Newton cherche à exprimer la variation temporelle de la vitesse en fonction des forces responsables de ce mouvement. Pour cela, il exprime les diverses vitesses mises en jeu et les lie aux forces subies par le corps. La gravité, g , génère, selon les travaux de Galilée, une vitesse qui, lors de la chute NI du corps, permettrait à celui-ci de décrire un espace double,

soit la vitesse $\frac{2NI}{t}$. L'action de la résistance, f , produit un décrement de vitesse égal à $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI \times MI}{t \times HI}$. La gravité est donc à la résistance comme $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI \times MI}{t \times HI}$ à $\frac{2NI}{t}$, soit $\frac{f}{g} = \frac{\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}}{\frac{2NI}{t}}$.

Cette dernière expression repose entre autres sur le temps. Elle met en relation la variation de vitesse acquise pendant la durée t à la somme algébrique des composantes tangentielles des forces produisant le mouvement. Autrement dit, elle lie l'accélération du corps aux composantes tangentielles des forces responsables du mouvement. Ceci apparaît plus clairement aux yeux du lecteur moderne, habitué à davantage de symbolisme⁴¹.

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= \frac{\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}}{\frac{2NI}{t}} \\ \frac{f}{g} &= V - v + \frac{MN}{HN} \cdot \frac{2NI}{t} \\ ft &= V - v + \frac{MN}{HN} \cdot gt \\ \frac{V - v}{t} &= f - \frac{MN}{HN} \cdot g \end{aligned}$$

41. Dans ce calcul, nous posons $NI = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ conformément aux travaux galiléens, $\frac{MI}{HI} = \frac{MN}{HN}$, $V = \frac{GH}{T}$ et $v = \frac{HI}{t}$.

En nommant α , l'angle formé par la tangente et la verticale, la dernière égalité correspond à

$$\frac{V - v}{t} \propto f - g \cdot \sin \alpha$$

Pour résoudre l'équation du mouvement obtenue de manière géométrique, Newton recourt à la notation, nouvelle pour les *Principia*, introduite dans la *Méthode des suites infinies*. Il exprime ainsi les abscisses CB, CD et CE (« Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur $-o, o, 2o$, pro ordinata CH scribatur P, [...] Ordinatae DI, EK, et BG erunt $P - Qo - Roo - So^3, P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ et $P + Qo - Roo + So^3$ respective ») dans lesquelles P, Q, R, et S correspondent à des coefficients, alors que « o » est une petite quantité⁴². Ainsi, CB, CD et CE correspondent à d'infinies petites parties de l'axe horizontal PQ. Mais, ces trois infiniment petites distances, égales par hypothèse, peuvent aussi être vues comme celles parcourues par le point Q, se déplaçant sur la droite PQ de P vers Q, en des temps infiniment petits, T, t, et τ respectivement.

Newton pose ensuite P pour l'ordonnée CH. La différence d'altitude définie par l'infiniment petite distance MI égale à la série $MI = Qo + Roo + So^3 + etc.$ Durant le temps infiniment petit t, le corps « chute » d'une altitude égale à la longueur MI, de sorte que l'ordonnée DI s'exprime $DI = P - Qo - Roo - So^3 - etc.$. La hauteur IK est le double de HI. EK s'exprimera donc par $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - etc.$. Enfin, partant de G pour arriver en H, durant le temps infiniment petit T, le corps perd une altitude égale aussi à MI. BG est donc égale à $BG = P + Qo - Roo + So^3 - etc.$ Enfin, $NI = Roo + So^3 + etc.$, de sorte que NI est une infime partie de l'infiniment petite hauteur MI.

Newton a ainsi formulé, sous forme de séries infinies développées au troisième ordre, l'ensemble des distances intervenant dans l'équation du mouvement. La longueur des arcs \widehat{GH} et \widehat{HI} est en revanche obtenue « en élevant au carré la différence des ordonnées $BG - CH$ et $CH - DI$ » auxquelles il ajoute « les carrés de BC et CD ». Il vient ainsi :

$$GH^2 = oo + QQoo - 2QRo^3 + etc.$$

$$HI^2 = oo + QQoo + 2RQo^3 + etc.$$

La racine de ces quantités fournissent alors la valeur des arcs.

42. « [...] et infinite parva quantitæ o (i.e. per mo) designetur, », - [Newton \(1969\)](#), p.80.

$$\begin{aligned} GH &= o\sqrt{1 + QQo} - \frac{QRoo}{\sqrt{1 + QQ}} \\ HI &= o\sqrt{1 + QQo} + \frac{QRoo}{\sqrt{1 + QQ}} \end{aligned}$$

Il détermine alors les flèches des arcs \widehat{GI} et \widehat{HK} , qui sont « proportionnelles aux petites lignes LH et NI », c'est-à-dire que les flèches indiquent la direction de la force de gravitation et lui sont directement proportionnelles. Elles sont pour Newton l'équivalent de petites chutes galiléennes dues à la gravitation uniquement. Il obtient les valeurs des flèches en soustrayant, pour l'arc \widehat{GI} , la demi-somme des ordonnées BG et DI de l'ordonnée CH ; et en retranchant la demi-somme des ordonnées CH et EK de l'ordonnée DI, pour l'arc \widehat{HK} .

Première flèche = Roo

Deuxième flèche = Roo + 3So³

En outre, ces flèches sont aussi, et surtout, « en raison doublée des temps infiniment petits t et T ». De sorte qu'il est tout à fait possible d'évaluer le rapport $\frac{t}{T}$ intervenant dans l'équation du mouvement. Il vient $\frac{t}{T} = 1 + \frac{3So}{2R}$. Newton réduit ainsi à « la classe de quantités simples » la fraction t sur T, s'affranchissant, par la même, du genre temps dans l'équation du mouvement. N'ayant affaire qu'à des quantités, il peut alors calculer le rapport de la résistance à la gravité. Le passage par les séries infinies lui a donc permis d'éliminer le genre temps de l'équation du mouvement et de ramener toutes les dimensions des grandeurs à celui de la quantité. Enfin, il substitue aux grandeurs de l'équation les développements en série obtenus. Après calculs, la résistance est à la gravité comme $3S\sqrt{1 + QQ}$ est à 4RR, soit $\frac{f}{g} = \frac{3S\sqrt{1 + QQ}}{4RR}$ ⁴³. Mais la vitesse est celle avec laquelle un corps, partant de H vers N tangentiellement à la courbe peut parcourir dans le vide une parabole de diamètre HC et de paramètre $\frac{HN^2}{NI}$. De fait, cette vitesse a pour module $\sqrt{\frac{1 + QQ}{R}}$. Et « la résistance étant comme le carré de la vitesse et de la densité du milieu conjointement », la densité du milieu, que nous notons ρ , s'identifie à $\rho = \frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$.

43. Dans cette équation, nous avons conservé la notation f pour désigner la résistance et g pour signifier la gravité.

N. Guicciardini⁴⁴ note cependant que la valeur de la densité du milieu obtenue à partir de l'équation du mouvement est $\rho = \frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, qui diffère d'un coefficient $\frac{3}{2}$ du résultat de 1687⁴⁵.

4.2.3 La Méthode des suites infinies

Ainsi Newton a recouru à la *Méthode des suites infinies*, dont le principe, comme le rappelle K. Simonsen⁴⁶, est fondé sur la conception cinématique des mathématiques dans laquelle l'idée de temps joue un rôle clé comme variable fondamentale. Les quantités auxquelles Newton applique la *Méthode des suites infinies* sont des quantités géométriques générées par un processus d'écoulement du temps. Il définit ainsi deux genres de quantités. Les « quantités fluentes », qui sont des quantités qui coulent, c'est-à-dire des quantités qui augmentent, diminuent ou restent constantes avec le temps et des quantités appelées « fluxions ». Une fluxion est la quantité de vitesse ou le degré de changement avec laquelle la fluente flue. Autrement dit, la fluxion d'une fluente est le taux avec lequel la fluente varie. Ainsi, à la fin d'une variation croissante d'une fluente, celle-ci est augmentée d'une quantité infiniment petite dans le temps, notée $\dot{x}o$ ⁴⁷. Une représentation géométrique, telle que la propose N. Guicciardini (Voir la figure 4.3) dans son dernier ouvrage⁴⁸, permet une visualisation claire et une compréhension précise des notions de fluente, fluxion et de moment.

44. Guicciardini (1999), p.239-40

45. [...] while the density is given by $\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, which differs by a factor $\frac{3}{2}$ from the 1687 results.

Guicciardini (1999), p.240.

46. Simonsen (2003)

47. La notation newtonienne \dot{x} désignant la fluxion de x ne fut pas introduite dans les écrits mathématiques avant 1691, selon D.T. Whiteside. Les notations utilisées par Newton pour l'écriture d'une fluxion fut évolutive. A l'époque de la rédaction de la *Méthode des fluxions et des suites infinies*, soit 1671, il note les quantités fluentes par les lettres de la fin de l'alphabet, x, y, z . Les fluxions sont notées par des lettres du milieu de l'alphabet, m, n , et r ou p, q . Les moments sont alors notés mo ou po . Ce n'est qu'à partir de 1690 qu'il utilisa la notation « dot » (point surmontant le symbole) pour écrire la fluxion d'une quantité fluente. Le moment de la fluente x sera alors $\dot{x}o$. Aussi, avons nous fait le choix de conserver la notation « dot », qui est la plus couramment employée de nos jours, même si nous ne lui accordons pas la même signification.

48. Guicciardini (2011), p.181.

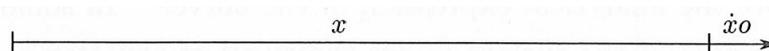


FIGURE 4.3 – Illustration de la fluxion newtonienne. La portion de droite x , correspondant à la longueur parcourue à un instant t par le point décrivant la ligne, est la fluente. La vitesse avec laquelle la ligne est parcourue est la fluxion, notée \dot{x} . L'infiniment petite portion $\dot{x}o$ de droite, dont s'est accrue la ligne durant un intervalle de temps infiniment petit, est le moment. Il est supposé être une partie infiniment petite d'une quantité fluente (« [...] additamenta infinite parva quibus illæ quantitates per singula temporis infinte parva intervalla augentur, [...] », [Newton \(1969\)](#), p.80). Il représente la variation continue de cette fluente après un temps indéfiniment petit. Selon N. Guicciardini, ce raisonnement repose sur l'idée selon laquelle la fluxion est constante sur un intervalle de temps infiniment petit. Le moment est *de facto*, proportionnel à la fluxion ([Guicciardini \(2011\)](#), p.180). Figure tirée de [Guicciardini \(2011\)](#).

Une quantité infiniment petite « o »

« o » s'apparente donc à un intervalle de temps infiniment petit, si l'on en croit N. Guicciardini ⁴⁹, D.T. Whiteside ⁵⁰ et K. Simonsen pour qui « la *Méthode des fluxions* suppose que les quantités fluentes sont engendrées par des fluxions. c'est-à-dire, qu'elles sont augmentées (ou diminuées) d'une quantité infiniment petite appelé le "moment contemporain", pendant un temps très petit « o », appelé "le moment de temps" [...] ⁵¹ ». Aussi, reportons nous au paragraphe de la *Méthode des fluxions* introductif de la notation « o » et dans lequel Newton en précise la signification.

« Les moments des quantités fluentes (c'est-à-dire, leurs parties infiniment petites, par addition desquelles elles augmentent durant chaque période de temps infiniment petite) sont comme leurs vitesses de variation. Pour cette raison, si le moment de chaque particule de temps, c'est-à-dire x , est exprimé par le produit de sa vitesse \dot{x} et une quantité infiniment petite « o » (c'est-à-dire, par $\dot{x}o$), alors les moments des autres quantités, v , y , z , [...], seront exprimées par $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, [...] étant donné que $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ et $\dot{z}o$, sont les unes aux autres comme \dot{v} , \dot{x} , \dot{y} , et \dot{z} .

Maintenant, puisque les moments (disons $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$) des quantités fluentes (disons x et y) sont les additions infiniment petites par lesquelles ces quantités augmentent durant chaque intervalle de temps infiniment petit, il

49. « the indefinitely (or infinitely) small interval of time is always denoted by o , so that the moment of y is no ». [Guicciardini \(2011\)](#), p.181.

50. « If we take the base variable of 'time' to be t , then (in anachronistic and differential form) $o = dt$, [...] » – [Newton \(1969\)](#), n.96, p.80.

51. [Simonsen \(2003\)](#), p.279

s'ensuit que ces quantités x et y après chaque intervalle de temps infiniment petit deviendra $x + \dot{x}o$, et $y + \dot{y}o$. En conséquence, une équation qui exprime un rapport de quantités fluentes sans variation à chaque instant exprimera ce rapport d'égalité entre $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ comme les quantités x et y ; et aussi $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$, peuvent être substitués à la place de ces dernières quantités, x et y , dans ladite équation⁵² ».

Nous n'y lisons pas que « o » représente une quantité infiniment petite de temps. Newton écrit seulement que les moments des quantités fluentes, c'est-à-dire les petites parties par lesquelles les fluentes sont augmentées, ne sont produites que durant un temps indéfiniment petit. Mais il se garde de le représenter par « o » ou par un quelconque symbole. Il ajoute ensuite que si le moment d'une quantité fluente quelconque est défini par le produit de sa vitesse (c'est-à-dire par sa fluxion) par une quantité indéfiniment petite, qu'il note « o », alors le moment d'autres quantités fluentes sera déterminé de manière similaire, c'est-à-dire par le produit de leur fluxions par une quantité infiniment petite, « o ». A dire vrai, il note, à plusieurs endroits, que « o » est « une quantité indéfiniment (ou infiniment) petite ». Il n'écrit aucune relation explicite entre la notation « o » et le temps indéfiniment petit durant lequel la fluente flue.

Il est cependant indéniable que le concept de temps est présent dans la théorie des fluxions. Mais cette présence s'explique, selon nous, plutôt par la conception de la méthode. Celle-ci repose sur l'idée de « mouvement local retardé ou accéléré d'une façon quelconque »⁵³, créant ainsi chez le lecteur l'idée de déplacement, dans le temps. Idée renforcée par l'énoncé des deux seuls problèmes que traitent les fluxions :

1. La longueur de l'espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du mouvement à un temps donné quelconque.
2. La vitesse du mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'espace décrit à un temps donné quelconque.

52. Traduction de l'auteur, « The moments of the fluent quantities (that is, their indefinitely small parts, by addition of which they increase during each infinitely small period of time) are as their speeds of flow. Wherefore if the moment of any particular one, say x , be expressed by the product of its speed \dot{x} and an infinitely small quantity o (that is, by $\dot{x}o$), then the moments of the others, $v, y, z, [\dots]$, will be expressed by $\dot{v}o, \dot{y}o, \dot{z}o, [\dots]$ seeing that $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ and $\dot{z}o$, are to one another as $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$, and \dot{z} .

Now, since the moments (say, $\dot{x}o$ and $\dot{y}o$) of fluent quantities (x and y , say) are the infinitely small additions by which those quantities increase during each infinitely small interval of time, it follows that those quantities x and y after any infinitely small interval of time will become $x + \dot{x}o$, and $y + \dot{y}o$. Consequently, an equation which expresses a relationship of fluent quantities without variance at all times will express that relationship equally between $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$ as quantities, x and y ; and so $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$, may be substituted in place of the latter quantities, x and y , in the said equation » ; Newton (1969), p.79-81.

53. Newton (1966a), p.20

En effet, le champ lexical utilisé pour la formulation de ces énoncés suggère davantage au lecteur l'idée de résolution de problèmes de dynamique, et plus précisément de cinématique, que celle de problèmes mathématiques. Il confère ainsi au temps un rôle primordial plaçant celui-la comme un des piliers sur lesquels reposent la *Méthode des fluxions et des suites infinies*. Nous retrouvons cette impression dans l'énoncé de la « quantité relative ⁵⁴ » :

« [...] Et que la quantité relative est l'espace que décrit dans ce temps un corps ou un point qui se meut d'un mouvement accéléré ou retardé d'une façon quelconque : enfin que l'esprit du problème est de déterminer par la vitesse donnée à chaque instant l'espace parcouru pendant le temps tout entier. »

Le problème IV ⁵⁵, *Tirer les tangentes des courbes*, recourt lui aussi, bien que de façon moins marquée, à ce champ lexical.

« On peut tirer les tangentes différemment, selon les différentes relations des courbes aux lignes droites, et premièrement soit BD une ligne droite ordonnée sous un angle donné à une autre ligne droite AB, prise pour base ou abscisse, et soit BD terminée à une courbe ED. Faites mouvoir cette ordonnée et faites-lui parcourir un espace indéfiniment petit et parvenir à *bd*. Elle aura augmenté du moment *cd*, tandis que AB aura augmenté du moment *Bb*, auquel *Dc* est égal et parallèle. [...] . »

Le concept de temps apparaît surtout par la méthode de résolution des problèmes. Newton recourt grandement, à cet effet, à des verbes d'action donnant ainsi au lecteur à la fois l'idée que les points et les lignes se meuvent, que les figures évoluent dans le temps et celle qu'il est l'acteur des diverses actions, brèves, à la fin desquelles il observe la conclusion. Newton crée ainsi une rupture entre la succession d'actions se déroulant chacune durant un bref instant, laissant l'impression au lecteur que bien du temps s'est écoulé, et l'observation de la conclusion, qui laisse penser que le temps s'est arrêté. L'introduction du problème IX ⁵⁶, *Trouver l'aire d'une courbe proposée quelconque*, nous semble à cet égard assez évocateur.

« La résolution de ce problème dépend de celle du problème 2, où par la relation donnée des Fluxions, on trouve celle des fluentes. Concevez comme ci-devant que la droite BD perpendiculaire à l'abscisse AB décrive par son mouvement l'aire cherchée AFBD, et qu'en même temps une ligne égale à l'unité décrive de l'autre côté de AB le parallélogramme ABEC ; si vous supposez que BE soit la fluxion de ce parallélogramme, BD sera la fluxion de l'aire cherchée. »

54. Newton (1966a), p.30.

55. Newton (1966a), p.49.

56. Newton (1966a), p.93.

Nous avons affaire à un lecteur pensif, concentré sur une figure, qui voit défiler devant ses yeux une droite qui parcourt un espace alors qu'en même temps, de l'autre côté de la figure, une autre ligne se meut. Newton oppose ici des verbes de « réflexion », action mentale généralement pensée comme illimitée dans le temps, à des verbes liés au mouvement, action temporaire. Enfin, il termine la présentation de ce problème par l'introduction des fluxions BE et BD, qui, pour le lecteur s'apparentent à des vitesses.

Pour nous, l'affirmation selon laquelle « o » représente un intervalle infiniment petit de temps provient de l'interprétation faite de l'équation $dx = \dot{x}o$, dont de nombreux commentateurs l'ont probablement identifiée à la relation $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Par analogie, ils en ont conclu que « o » et « dt » étaient équivalents. Mais ceci relève de méthodes mathématiques actuelles, notamment celle de l'équation aux dimensions. Assigner la dimension « temps » à « o » implique que dans l'équation $dx = \dot{x}o$, x ait la dimension d'une longueur et \dot{x} celle d'une vitesse physique, c'est-à-dire la dimension d'une longueur sur celle d'un temps réel. Outre que la vitesse, définie mathématiquement par le rapport d'une longueur par un temps, n'était pas encore définie à l'époque de publication des *Principia* et de la *Méthode des fluxions*, x ne représente pas forcément une longueur. Il est, comme le dit Newton, « une quantité [...] augmentée graduellement et indéfiniment ». Celle-ci peut être une longueur, mais tout aussi bien une aire ou un volume. De manière similaire, bien que Newton affirme, effectivement, qu'il représente « par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point [...] les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit », il précise, tout autant, que la quantité de référence n'est pas « le temps en tant que tel », mais « une autre quantité » dont l'accroissement uniforme est identique à celui du temps. Aussi, si une surface augmente du fait de la variation constante du périmètre la délimitant, la quantité de référence sera le périmètre et non le temps. De sorte que l'identification au temps du symbole « o » par l'analogie de l'équation $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ne nous paraît pas être valide. La fluxion newtonienne, en effet, est ce que nous appelons de nos jours en mathématique une dérivée plutôt qu'une vitesse physique. Autrement dit, à une fluxion newtonienne correspond la variation d'une première grandeur par rapport à une seconde, qui n'est pas nécessairement le temps. C'est pourquoi la notation « o » doit être comprise, pensons nous, dans le sens précisé par Newton, c'est-à-dire comme « une quantité indéfiniment petite », sans être nécessairement le temps pour autant. En revanche, la grandeur de référence flue par rapport au temps. C'est pourquoi nous avançons que le temps réel est davantage caché dans la notation de la fluxion que dans « o ». La figure 4.4 illustre notre propos.

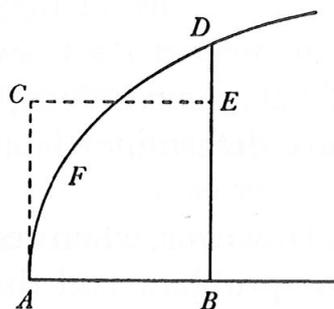


FIGURE 4.4 – Illustration de la variation d’une grandeur non fluxionnelle. L’aire z augmente par l’accroissement (par rapport au temps) de la ligne BD qui se déplace le long de AB. Ici, la fluxion sera définie comme la variation de z par rapport à celle de BD, qui flue comme le temps.

Enfin, l’écriture $\frac{dx}{dt}$ est possible car le temps, dans ce cas, peut être représenté par un symbole. A l’époque de la rédaction de la *Méthode des suites infinies* et de celle des *Principia*, le concept de temps mathématique n’était pas encore clairement établi, et le représenter par un symbole n’était tout simplement pas à l’ordre du jour. Donc identifier, dans une équation, une grandeur mathématique, tel que le temps, à l’aide d’une seconde équation, établie postérieurement, qui découle de la première, et dont l’écriture n’est possible que parce que les grandeurs qu’elle met en jeu possèdent des symboles, relève, selon nous, d’anachronisme. C’est, en effet, assigner à « o » notre concept de temps scientifique.

Le temps fluxionnel

Newton précise le temps dont il est question dans la *Méthode des fluxions et des suites infinies* après avoir défini les deux problèmes auxquels se « réduit toute la difficulté de l’analyse ».

« Cùm autem temporis nullam habeamus æstimationem nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitibus quæ sunt ejusdem generis aliquam æquabili fluxione augeri fingam cui. cæteræ tanquam temporis referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Siquando itaque vocabulum temporis in sequentibus occurat [...] eo nomine non tempus formaliter spectatum subintelligi de-

bet sed illa alia quantitas cujus æquabili incremento sive fluxione tempus exponitur et mensuratur⁵⁷ ».

Nous n'avons pas estimé nécessaire de traduire ce célèbre passage, préférant nous rattacher aux diverses traductions, anglaises et françaises, déjà existantes, notamment celle réalisée par M. Panza, dans laquelle le raisonnement newtonien apparaît au lecteur au fil de la lecture, rendant, *in fine*, la proposition plus claire et plus compréhensible.

« D'ailleurs, comme nous n'avons aucune considération du temps sinon en ce qu'il se manifeste et se mesure par [un] déplacement uniforme, et comme de surcroît seules les quantités du même genre peuvent être comparées entre elles, [de même, que seulement] entre elles [peuvent être comparées] leurs vitesses d'accroissement et de décroissement, je ne me référerai pas, par la suite, au temps en tant que tel, mais j'imaginerai que, parmi les quantités proposées qui sont du même genre, l'une s'accroît avec une fluxion uniforme [et que] les autres s'y réfèrent comme au temps, de sorte que le nom " temps " puisse lui être assigné par analogie. Ainsi, lorsque le terme " temps " apparaît par la suite [...], on ne doit pas entendre par ce terme le temps en tant que tel, mais cette autre quantité par l'accroissement uniforme ou la fluxion de laquelle le temps se manifeste et se mesure⁵⁸ ».

Newton appréhende, ainsi, le temps seulement par sa manifestation et sa mesure selon un « déplacement uniforme ». Autrement dit, il ne considère du temps que son changement, constant et régulier. A chaque seconde commence une nouvelle seconde, identique, et de même durée. Et, comme seules des quantités de même genre, telles que les vitesses, d'accroissement ou de décroissement, sont comparables entre elles, toute référence au temps demande de se reporter à une quantité du genre temps. C'est-à-dire de se référer à une quantité dont l'accroissement est, à l'identique du temps, uniforme. Ainsi, l'emploi du nom « temps » ne se réfère pas au temps de la nature, c'est-à-dire au temps réel mais à toute quantité dont la fluxion est constante et égale à 1.

Ainsi, le terme « temps », comme le rappelle N. Guicciardini⁵⁹, n'est jamais employé dans la théorie des fluxions pour le temps réel. Il n'existe pas de traitement mathématique du temps formel dans la *Méthode des fluxions*, mais uniquement un traitement mathématique d'un temps mathématique. De fait, d'un point de vue de la philosophie

57. Newton (1969), p.72

58. Panza (2005), n.39, p.524

59. Traduction de l'auteur, « Newton warned the reader not to identify the time of the fluxional method with real time. Any fluent quantity whose fluxions is assumed constant ($\dot{x} = 1$) plays the role of fluxional time ($x = t + C$). The choice of x as the time variable is arbitrary (and further if $y = kx$ also \dot{y} is constant) and in general dictated by computational convenience. His language here is reminiscent of Barrow's *Lectiones Geometricæ* ». Guicciardini (2011), p.181.

naturelle, en 1671, date de rédaction du traité des fluxions, deux temps distincts co-existent :

1. un temps mathématique : le temps fluxionnel.
2. un temps de la nature.

4.3 Les rectifications de la version de 1687

Suite à l'annonce par N. Bernoulli d'une erreur découverte par son oncle dans l'exemple 1 de la proposition x, livre II des *Principia*, Newton a cherché à reformuler l'argumentation de la proposition de sorte que l'exemple 1 corresponde au résultat qu'il lui a été présenté. En un très court laps de temps, il a ainsi produit un nombre important de brouillons, rassemblés par D.T. Whiteside dans ses célèbres *Mathematical Papers*⁶⁰, qui ont abouti à la réécriture de la proposition x⁶¹.

Ces brouillons constituent le chapitre six de la première partie du huitième volume des *Mathematical Papers*. D.T. Whiteside a organisé ce chapitre en deux « paragraphes » et quatre annexes correspondant chacun à un groupe de brouillons⁶². Le premier « paragraphe » contient les « premières corrections » dans lesquelles apparaît une hésitation dans l'argumentation. Ceux du second paragraphe mettent en avant un nouveau mode de raisonnement et l'« amélioration de l'argumentation ». Les annexes présentent « la version de 1687 », les « premiers essais » de sauvegarde du raisonne-

60. Newton (1981), p.312-424.

61. L'étude qui suit s'appuie sur les divers brouillons de la proposition x du second livre des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* de Newton rassemblées par D.T. Whiteside dans les *Mathematical Papers* 8. Nous avons scanné ces brouillons et les avons volontairement regroupées dans un volume annexe afin de faciliter le travail du lecteur désireux de vouloir se reporter au brouillon de son choix sans qu'il ait à faire constamment des aller-retours entre le texte et l'annexe placée en fin de volume, et lui permettre ainsi un meilleur suivi de notre raisonnement.

62. Chaque écrit de Newton a été répertorié par l'université de Cambridge sous un sigle de la forme XXXX.ss : $xxx^{r/v}$. XXXX correspond au numéro du catalogue, ss indique la section dans le catalogue et $xxx^{r/v}$ précise le numéro et le versant du feuillet. Les brouillons de la proposition x portent le sigle Add. 3965.XX : $xxx^{r/v}$ ou Add. 3968.XX : $xxx^{r/v}$. Add. 3965 et Add. 3968 renvoient à la collection PORTSMOUTH, principale collection des papiers mathématiques et scientifiques de Newton, gardée à la bibliothèque de l'université de Cambridge. La référence Add. 3965 concerne les papiers datés de 1686 à 1725 en relation avec les *Principia*, alors que Add. 3968 regroupe les écrits, de 1665 à 1727, en relation avec la dispute de priorité de l'invention du calcul infinitésimal. Les sections 10, 12, et 13 de la référence Add. 3965 renvoient respectivement à la résistance des fluides et à des notes brutes, à des additions et des corrections à la première édition des *Principia*, et à des additions et des corrections à la seconde édition des *Principia*. La section 18 de la référence Add. 3968 regroupe des copies de la main de Newton de lettres de Leibniz destinées à Hans Sloane. Ainsi, le sigle Add. 3965.10 : 135^v – 136^v signifie le verso des feuillets 135 et 136 des brouillons qui, soit traitent de la résistance des fluides, soit sont des notes brutes. Ils font partie des papiers newtoniens en relation avec les *Principia*.

ment originel⁶³, les « derniers efforts » et un complément à la proposition x sur la courbure des courbes, rédigé après la publication de la seconde édition des *Principia*.

Notre propos, dans ce sous-chapitre, étant d'étudier dans la proposition x le passage d'un temps géométrique, représenté par une portion d'espace, à un temps algébrique, caractérisé par son indépendance à tout support, nous nous sommes essentiellement concentrés sur les brouillons des deux premiers « paragraphes » et les premiers essais⁶⁴, que nous avons classés de manière chronologique en nous appuyant sur le catalogue de l'université de Cambridge. En étudiant les brouillons de manière chronologique, nous pensons ainsi percevoir l'évolution de la pensée newtonienne et les raisons qui ont amenées Newton à recourir à l'introduction d'un paramètre temps dans les mathématiques de la philosophie de la nature, ce que ne nous permettait pas le classement de D.T. Whiteside. Nous avons analysé individuellement chacune de ces tentatives et nous les avons comparées les une aux autres afin d'esquisser le chemin qui conduit de la version de 1687, erronée, à celle, rectifiée, publiée en 1713.

Nous avons regroupé les brouillons dans le tableau ci-dessous. Nous les avons nommés selon la dénomination du paragraphe attribuée par D.T. Whiteside, que nous avons fait suivre d'un chiffre indiquant la position du brouillon dans le groupe. Ainsi, par « *Premières corrections 2* - automne 1712 - Add. 3965.12 : 197^v/197^r » nous entendrons le second brouillon du groupe « *Premières corrections* », écrit à l'automne 1712 et catalogué sous la référence Add. 3965.12 : 197^v/197^r⁶⁵.

63. Cette annexe est constituée de onze brouillons, dont les trois derniers ne traitent pas de la proposition x. Le neuvième brouillon traite l'exemple d'une trajectoire hyperbolique parcourue par un mobile dans un milieu résistant, dont le rapport de la résistance à la gravité est construit de manière géométrique le long de l'arc considéré. Newton cesse les calculs quand ceux-ci « deviennent trop compliqués à contrôler pour lui » [« ... But breaks off when the calculations become too complicated for him to control », Newton (1981), p.xli]. Le brouillon 10 montre le calcul de la variation de la densité quand la résistance varie comme la puissance de la vitesse, et le dernier essai explicite des calculs approximatifs testés afin de voir si d'autres types de trajectoires logarithmiques peuvent être parcourues dans un milieu de densité uniforme par un mobile soumis à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

64. Les brouillons constituant l'annexe « les trois dernières tentatives de sauvegarder le raisonnement originel » furent rédigés, selon D.T. Whiteside, peu de temps avant la rédaction de la version finale de la proposition remaniée que Newton envoya à son éditeur, Cotes, le 6 janvier 1713, pour publication de la seconde édition des *Principia*. À cette date, le problème était résolu depuis l'automne 1712. Aussi, n'avons nous pas pensé utile de reposer notre étude sur le contenu de cette annexe. Par ailleurs, nous pouvons nous demander ce qui a poussé Newton à vérifier une dernière fois s'il lui était possible de préserver la version originelle alors qu'il possédait une version rectifiée et qu'il était en période de travail intense, notamment par la vérification de l'impression de la seconde édition des *Principia*.

65. Voir note 62 pour l'explication du système d'archivage des manuscrits de Newton.

écrit	date	folio
<i>Premiers essais 1</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3965.10 : 109 ^r – 103 ^r
<i>Premiers essais 2</i>	automne/fin sept. 1712	recto d'un folio possession privée
<i>Premiers essais 3</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3968.18 : 261 ^r
<i>Premiers essais 4</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3965.12 : 219 ^v /220 ^v
<i>Premiers essais 5</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3968.18 : 261 ^r
<i>Premiers essais 6</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3965.12 : 198 ^r
<i>Premiers essais 7</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3965.10 : 136 ^v
<i>Premiers essais 8</i>	automne/fin sept. 1712	Add. 3965.10 : 135 ^v – 136 ^v
<i>Premières corrections 1</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 196 ^r
<i>Premières corrections 2</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 197 ^v /197 ^r
<i>Premières corrections 3</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 196 ^v
<i>Premières corrections 4</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 200 ^r
<i>Premières corrections 5</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 201 ^r
<i>Premières corrections 6</i>	automne 1712	Add. 3965.12 : 219 ^r (+220 ^r)/219 ^v
<i>Amélioration de l'argument 1</i>	automne/deb. oct. 1712	Add. 3965.12 : 190 ^r – 191 ^r
<i>Amélioration de l'argument 2</i>	automne/deb. oct. 1712	Add. 3965.12 : 198 ^r – 199 ^r
<i>Amélioration de l'argument 3</i>	automne/deb. oct. 1712	Add. 3965.12 : 192 ^r – 193 ^v

TABLE 4.1 – Tableau des dénominations attribuées à chaque brouillon de la proposition x, livre II.

4.3.1 Les premiers essais

Les « premiers essais » correspondent aux vérifications, infructueuses, rédigées à la fin du mois de septembre 1712 pour comprendre où se trouvait l'erreur dans le raisonnement de la version de 1687 et essayer de lui trouver des alternatives. Ils sont au nombre de huit. *Premiers essais 1* contient trois tentatives différentes dont la première s'apparente à une vérification de la précision du calcul dans l'exemple 1. Supposant l'expression du rapport de la résistance à la gravité dans le cas général valable, Newton déduit de nouveau dans cet exemple le résultat publié en 1687. Le second essai, fondé sur des bases différentes, produit le même résultat erroné. Dans le dernier essai, Newton considéra, pour la première fois, les mouvements tangentiels dans des « instants » successifs égaux, mais ne put se débarrasser de son « idée fixe » selon laquelle l'arc \widehat{Cg} et l'arc \widehat{CG} doivent être égaux.

D.T. Whiteside, dans *premiers essais 2*, a volontairement omis les lignes d'ouverture dans lesquelles Newton a reproduit son calcul de l'exemple 1 de la première édition, confirmant ainsi que l'expression du rapport de la résistance à la gravité obtenue en 1687 est erronée. Il prend le manuscrit à l'endroit où Newton aborde le problème général à l'aide de la nouvelle approche : les tangentes aux arcs \widehat{cG} et \widehat{CG} doivent être tirées des points correspondants c et C . Newton exprime alors correctement le rapport de la résistance à la gravité comme $2 \frac{IG}{CG} GF + Cf - CF$ à $2GF$, mais il oublie de prendre en compte les composantes accélératrices de la gravité agissant instantanément le long de la courbe. Par ailleurs, Newton exprime les temps de parcours des arcs \widehat{cG} et \widehat{CG} par la lettre t (« ... [Jam posito t pro temporibus æqualibus quo corpus pergit a c ad C ut et a C ad G erit] $2Cf \cdot Cc :: t \cdot \frac{Cc, t}{2Cf} \dots$ », [Newton \(1981\)](#), p.396).

Le *Premiers essais 3* correspond à une refonte mineure de la rectification précédente. Il apparaît pour la première fois une tentative de calcul du décrement de vitesse $HC - HN$ dû à la gravité et les arcs \widehat{HC} et \widehat{cG} ⁶⁶ sont parcourus en des « instants » de temps successivement égaux, représentés par les arcs de cercle.

Premiers essais 4 traite des corollaires 1, 2 et 3 de la proposition x . Newton tente d'y réduire l'expression générale du rapport de la résistance à la gravité à une forme plus simple à évaluer quand elle est appliquée à une trajectoire circulaire.

Avec *Premiers essais 5*, Newton modifie son mode de raisonnement. Il cherche à calculer, pour la première fois, le rapport de la résistance à la gravité le long de la trajectoire en revenant au procédé utilisé dans la démonstration de la proposition ι : les forces agissent, simultanément, selon le mode de l'impulsion au début de chaque moment de temps successifs. Il oublie toutefois de considérer une racine carré dans le

66. Newton a modifié la notation de ses figures. Le point g est devenu le point H . Nous renvoyons le lecteur au document d'accompagnement.

calcul. Par ailleurs, le temps est noté en toutes lettres dans les calculs⁶⁷.

Premiers essais 6 est une version légèrement retravaillée et réorganisé de la version précédente. Le rapport de la résistance à la gravité obtenu dans le cas d'une trajectoire semi-circulaire est conforme à celui présenté par N. Bernoulli.

Premiers essais 7 montre quelques lignes de calculs dont l'idée sera reprise ultérieurement, lors des premières corrections.

Enfin *Premiers essais 8* s'apparente à un brouillon intermédiaire des versions *Amélioration de l'argument 1* et *Amélioration de l'argument 3*, dans lequel Newton considère le parcours des arcs \widehat{HC} et \widehat{CG} selon un mouvement horizontal uniforme et distingue, pour la première fois, des temps, inégaux et infinitésimaux, de parcours de ces arcs. En effet, bien que D.T. Whiteside estime sa rédaction à la fin de septembre 1712 et le classe, de fait, dans le groupe *Premiers essais*, les références de ces brouillons⁶⁸ ne permettent pas de considérer ce classement comme unique. Nous aurions plutôt tendance à ranger *Premiers essais 8* dans le groupe *Amélioration de l'argument*. Nous reposons, entre autres, notre raisonnement sur la section attribuée à ces brouillons. La 10^e section regroupe les compte-rendus des travaux d'Hauksbee supervisés par Newton, les travaux sur la résistance des fluides et des notes brutes datés entre 1665 et 1750, alors que la 12^e a trait aux additions et corrections de la première édition des *Principia*, rédigées entre 1688 et 1712. Or *Premiers essais 8* est aussi une correction de la première édition des *Principia*, de sorte qu'il aurait pu être rangé dans la section 12 de la collection *Portsmouth*. Par ailleurs, les tentatives *Premiers essais 1* à *Premiers essais 7* peinent à se détacher du raisonnement de la *princeps editio* quand *Premiers essais 8* présente des points identiques à la version éditée en 1713. Il ressort, en effet, de ces deux dernières versions des similitudes aussi bien dans l'architecture de la preuve que dans la manière d'exprimer les grandeurs (notamment le temps) ou encore dans l'écriture d'une équation du mouvement. Nous avons relevé comme points identiques :

- Architecture de la preuve :
 - Description géométrique du phénomène⁶⁹.
 - Introduction des paramètres physiques temps et vitesse.
 - Recherche de l'expression du rapport de la résistance à la gravité.
 - Appel aux séries infinies, introduites de façon explicite, pour la résolution de l'équation.
 - Expression de la densité du milieu, la vitesse du corps et la résistance du milieu.
- Similitude des textes : certaines phrases sont identiques.

67. « ... IN = 2 BH – AG – CI · KP = 2 CI – BH – DK. [erit IN · KP] :: temp[us] in HI · temp in IK :: HI · IR. », Newton (1981), p.402.

68. Les références de ces brouillons sont les suivantes : *Premiers essais 8* : Add. 3965.10 : 135^v – 136^v, *Amélioration de l'argument 1* : Add. 3965.12 : 190^r – 191^r et *Amélioration de l'argument 3* : Add. 3965.12 : 192^r – 193^v.

69. La notation de la figure entre ces deux versions diffère cependant.

- Expression symbolique du temps : le temps est exprimé au moyen des mêmes lettres T et t.
- Écriture de l'équation du mouvement.

Aussi, considérer *Premiers essais 8* comme une tentative appartenant au groupe des *Premiers essais* nous paraît difficile tant le pas franchi entre *Premiers essais 6*, qui présente, pour la première fois, le calcul correct du rapport de la résistance à la gravité, et *Premiers essais 8*, tentative susceptible d'être publiée, est énorme. En outre, *Premières corrections 1* qui suit chronologiquement *Premiers essais 8* est fondée sur le mode de raisonnement de 1687. Cela supposerait donc de la part de Newton un retour en arrière dans sa réflexion. Or nous savons qu'il avait hâte de trouver la solution de cette proposition, d'une part parce que l'impression attendait la version définitive, d'autre part parce qu'il a dû être, ne serait-ce qu'un peu, contrarié qu'on lui annonce une erreur, dont on pensait qu'il ne trouverait pas la solution. Enfin la note de bas de page de *Amélioration de l'argument 3* : « We may notice (for what it is worth) that Newton's preparatory draft to the next sentence and a half — in exactly the same words (and with the same slip '... , DE scribantur' which we mend in immediate sequel) — is found at the bottom of Add.3965.10.136^v »⁷⁰ suggère⁷¹ fortement que *Premiers essais 8* fut rédigé entre les tentatives *Amélioration de l'argument 1* et *Amélioration de l'argument 3*. Aussi, bien que D.T. Whiteside ait classé *Premiers essais 8* parmi les *Premiers essais*, nous l'intégrerons, dans le but de notre étude, dans le groupe *Amélioration de l'argument*.

Un début de solution correcte semble donc apparaître avec *Premiers essais 5* pour lequel le temps, écrit en toutes lettres, est considéré de manière discontinu. Cependant, l'emploi d'un symbole pour représenter le temps est néanmoins déjà présent dans *Premiers essais 2*. L'utilisation mathématique du symbole dans cette tentative reste toutefois obscure et celui-ci n'est pas davantage usité dans la démonstration. Il disparaît d'ailleurs des tentatives suivantes, bien que l'allusion au temps y est explicite, en particulier dans *Premiers essais 3*, où les temps considérés sont de nature géométrique, et dans *Premiers essais 6*⁷².

Premiers essais voit donc apparaître un changement du mode de raisonnement parallèlement à l'introduction et à l'utilisation, éphémères, d'un symbole pour signifier le temps.

70. Newton (1981), n.30, p.358.

71. Nous rappelons que Add. 3965.10.136^v correspond à *Premiers essais 8*.

72. « [...] Cape HM ad GH ut tempus describendi chordam HI ad tempus describendi chordam GH id est ut \sqrt{IL} ad $\sqrt{HK} \times IL$ ad HK id est ut $\frac{HK + IL}{2}$ ad HK. [...] », Newton (1981), p.404.

4.3.2 Les Premières corrections

Premières corrections comporte les brouillons préliminaires qui débouchent sur une version correcte que Newton s'est empressé de transmettre à J. Bernoulli par l'intermédiaire de son neveu au début du mois d'octobre 1712. Ils reprennent l'hypothèse de base de la version de 1687 – exceptée la version correcte – qui consiste en la considération de la traversée de deux arcs de cercle par le mobile en des temps donnés, égaux.

Premières corrections 1 montre un calcul décousu, très rapidement abandonné par Newton, qui laisse tout de même entrevoir une nouvelle expression de la résistance à la gravité. Cependant, appliquée au cas de la trajectoire semi-circulaire de l'exemple 1, le résultat obtenu est incorrect.

Newton reformule alors de manière plus complète, dans *Premières corrections 2*, le raisonnement de 1687, mais tombe de nouveau dans la même erreur ; soit l'omission d'un coefficient « 2 » dans l'expression des lignes générées par la résistance et la gravité (« Consequently the linelets nh and fn or ih are, by the force of the resistance and that of gravity respectively, simultaneously generated, and so the resistance is to gravity as hn to hi , or Cf , and hence the resistance is as $\frac{hn}{Cf}$ », [Newton \(1981\)](#), p.318-9).

La reformulation plus radicale que constitue *Premières corrections 3* aboutit elle aussi à un résultat faux, mais laisse apparaître un temps de nature géométrique, c'est-à-dire un temps représenté par un élément de la figure ; à savoir ici un élément de ligne.

Premières corrections 4 marque, quant à elle, un virage dans la rectification de la proposition x. Newton essaie, en effet, pour la première fois, de construire l'équation du mouvement selon un axe tangentiel à la trajectoire. Il n'applique plus pour cela la méthode classique des mathématiciens du XVII^e siècle. Autrement dit, il ne limite pas le phénomène à un unique intervalle de temps durant lequel il étudierait l'évolution dynamique du phénomène.

Concrètement, il considère des intervalles de temps égaux durant lesquels il évalue les distances parcourues par le mobile (« ... Let the body in equal moments of time describe the distances \widehat{CG} , \widehat{Gg} ... », [Newton \(1981\)](#), p.325.) et examine les effets de la gravitation et de la résistance du milieu sur le mobile (« ... and the difference \widehat{gh} will be the decrement of the (arc-)distance which is generated by the forces of gravity and resistance jointly in a moment of time. ... », [Newton \(1981\)](#), p. 325. « The will there be equal the distances FG , fg which the body will on falling by the force of gravity in those moments of time describe », [Newton \(1981\)](#), p. 327.). De là, il exprime le rapport de la résistance à la gravité (« ... and then rg be the increment of the arc by the force of gravity in a moment of time, and consequently rh will be the decrement of the arc ensuing from the resistance of the medium in the same moment, and so the resistance will be to gravity as rh to rg the gravity will the be to gravity as $D+d$ to d . », [Newton \(1981\)](#), p. 325.). Mais ces temps restent toutefois de nature géométrique (« ... The time,

however, is as \sqrt{GF} , ... », [Newton \(1981\)](#), p. 325.).

Nous retrouvons les mêmes éléments dans *Premières corrections* 5, qui n'est qu'une tentative supplémentaire bâtie sur l'hypothèse de 1687.

En revanche, *Premières corrections* 6 montre une modification du raisonnement. Newton considère maintenant la variation uniforme de la composante horizontale du mouvement selon des « æqualibus temporibus momentis », représentés de manière géométrique (« ... In consequence, represent the times by \sqrt{Cf} and \sqrt{FG} , ... », [Newton \(1981\)](#), p. 333). Il cherche de fait à exprimer le rapport de la résistance à la gravité selon l'axe horizontal. Pour cela, il exprime l'incrément de vitesse du mobile dû à l'action de la gravité seule (« ... and consequently the speed which gravity adds to the speed of the body is $2IF \times \frac{FG}{CF \times \sqrt{FG}}$ or $2IF \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$ », [Newton \(1981\)](#), p. 333.), puis celui dû à l'action de la résistance seule (« ... And so this speed, ... makes up the decrement of the speed arising from the resistance alone $\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + 2IF \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$ », [Newton \(1981\)](#), p. 333.). En les rapprochant l'un l'autre, il obtient le rapport cherché (« ... As a result, the resistance is to the force of gravity as $\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + 2IF \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$ to $2\sqrt{FG}$, or as $\frac{fg}{2\sqrt{Cf} \times FG} - \frac{CF}{2FG} + \frac{IF}{CF}$ to 1 », [Newton \(1981\)](#), p. 335.).

Premières corrections voit donc l'arrivée de l'expression exacte du rapport de la résistance à la gravité. Newton fut capable de l'exprimer car il réalisa, par les échecs successifs, qu'il ne pourrait pas rectifier l'argument de 1687 en conservant son hypothèse initiale de la traversée des arcs de cercle en des instants égaux. Il modifia, de fait, son raisonnement et considéra alors la composante horizontale du mouvement, qui lui permit ainsi d'écrire, pour la première fois et de manière correcte, le changement de vitesse du mobile dû à l'action commune de la résistance et de la gravité. D'où il déduisit le rapport juste de la résistance à la gravité. La modification entreprise conserve toutefois un temps de nature géométrique.

4.3.3 Amélioration de l'argument

Amélioration de l'argument comprend trois brouillons rédigés en vue d'affiner l'argument correct développé dans la dernière version de *Premières correction*. Au début du mois d'octobre 1712, Newton avait atteint son objectif de rectification de la proposition x, mais il s'engagea toutefois dans la réécriture de la proposition afin de l'affiner et de l'adapter à l'espace, laissé libre, qui contenait initialement le texte.

Amélioration de l'argument 1 apparaît être la « solution » au mouvement des corps soumis à une résistance en raison doublée des vitesses. Elle reprend dans une forme amplifiée et plus ordonnée l'argument de *Premières corrections* 6, selon lequel c'est la pro-

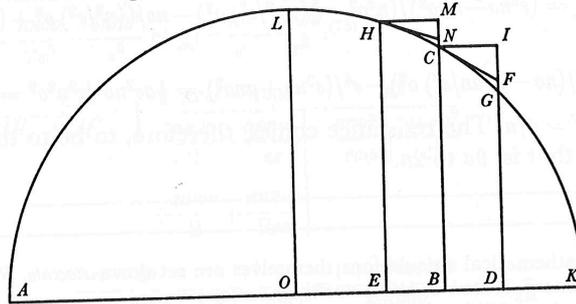


FIGURE 4.5 – Illustration de la version *Amélioration de l'argument 1*. Figure tirée de [Newton \(1981\)](#).

jection horizontale du mouvement qui varie uniformément en des moments de temps égaux.

Newton construit en premier lieu la figure représentative de la situation (figure 4.5). Il imagine un corps se déplaçant, dans un milieu résistant, sur la ligne courbe de L vers K et bâtit un raisonnement dans lequel les temps nécessaires au parcours des arcs \widehat{HC} et \widehat{CG} sont proportionnels à une portion d'espace. Autrement dit, pour nous, de nature géométrique (« ... And the times in which the body describes the arcs \widehat{HC} and \widehat{CG} will be in the halved ratio of the heights NF, FG which the body would in those times be able to describe by falling from the tangents, ... Represent the times by \sqrt{CN} and \sqrt{FG} ... », [Newton \(1981\)](#), p. 340.). Il évalue alors le décrement de la vitesse dû à la gravité et celui dû à la force de résistance, qui lui permettent d'exprimer le rapport de la résistance à la gravité (« ..., and the decrement of the speed attained in time \sqrt{FG} will be represented by $\frac{HN}{\sqrt{CN}} - \frac{CN}{\sqrt{FG}}$. This decrement arises from the resistance retarding the body and the gravity accelerating it, ... Gravity in a falling body which, as it falls, describe the distance FG generates the speed $\frac{2FG}{\sqrt{FG}}$, that is, $2\sqrt{FG}$, but in the

body describing the arc \widehat{CG} it generates the speed $2\frac{(\widehat{CG} - CF)}{\sqrt{FG}}$, that is, $2FI \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$;

for there is CF to FI as FG to $\widehat{CG} - CF$. Add this speed to the above-mentioned decrement and there will be had the decrement of the speed arising from the resistance alone, namely $\frac{HN}{\sqrt{CN}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + 2FI \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$. Accordingly, the resistance is to gravity

as $\frac{HN}{\sqrt{CN}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + 2FI \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}$ as $2\sqrt{FG}$, or as $\frac{HN}{2\sqrt{CN} \times FG} - \frac{CF}{2FG} + \frac{FI}{CF}$ to 1. ... », [Newton \(1981\)](#), p. 341.).

Amélioration de l'argument 2 aborde le problème avec un argument alternatif. La résistance et la gravité agissent *simul et semel* au début de chaque moments de temps infinitésimaux successifs. Il s'agit d'une approche, dont le cœur apparaît clairement dans *Premiers essais 5* et *Premiers essais 6*, qui assimile la trajectoire à un polygone d'une infinité de côtés infinitésimaux (« ... Now conceive that the projectile moves in the infinitely small chords Fg, Gh, HI and innumerable other similar ones throughout the length of the curve \widehat{PQ} , and that the resistance and gravity act merely at the points F, G, H, I, by their actions changing the motion of the body at those points alone, ... », [Newton \(1981\)](#), p. 347.). Cependant, la résolution de la proposition est identique à la précédente. Newton détermine les incréments de vitesses dus à la résistance et à la gravité afin d'exprimer l'équation du mouvement selon l'axe tangentiel.

Enfin *Amélioration de l'argument 3*, version définitive du problème général reformulée à partir de *Amélioration de l'argument 1* et de *Premiers essais 8*, annonce la fin des efforts newtoniens. Dans ce brouillon, Newton note le temps, pour la première fois, par des symboles : T et t (« ... Then the times in which the body shall describe the arcs \widehat{GH} and \widehat{HI} will be in the halved ratio of the heights LH, NI which the body could in those times describe in falling from the tangents, ... Express the times by T and t, and the speed by $\frac{\widehat{GH}}{T}$ and $\frac{\widehat{HI}}{t}$; ... », [Newton \(1981\)](#), p. 357.).

Cependant, comment interpréter cette substitution ? Nous devons, nous semble-t-il, pour mieux appréhender le fait, nous imaginer la situation dans laquelle Newton se trouvait probablement. Il apprend qu'une erreur s'est glissée dans l'exemple 1 de la proposition x du livre II de la première édition des *Principia*. Certainement désobligé, il tente, dès lors, de rectifier la proposition, dont l'imprimeur et Cotes, son éditeur, attendent avec impatience la version correcte et définitive à adjoindre à la seconde édition des *Principia*, dont l'impression est quasiment terminée. Durant ces (quelques) jours, Newton dut être totalement absorbé par ce travail laborieux de correction. Alors qu'il rédigea enfin, après une dizaine de tentatives toutes aussi infructueuses, une solution qui semblait lui convenir, et qu'il aurait pu transmettre en l'état à Cotes, il la modifia, entre autre, en y substituant l'écriture de radicaux signifiant le temps par des symboles qui expriment cette même grandeur.

Nous voyons dans ce geste une double volonté :

1. simplifier l'écriture
2. signifier la dimension du temps

Plongé dans son travail et enfin satisfait d'une solution correcte, Newton chercha à l'améliorer. Adeptes de l'algèbre de Viète, dont il a une connaissance et une maîtrise étendue et développée, il recourut au formalisme sans prêter attention au lecteur. Cependant, recourir à un symbole pour représenter une grandeur en philosophie naturelle signifie pour le professeur lucassien écrire un signe qui laisse deviner aisément

à la fois la grandeur et sa dimension. Conscient que les radicaux \sqrt{CN} et \sqrt{FG} n'ont pas la dimension d'un temps, il leur substitue des symboles rappelant l'idée de temps. Le choix d'écrire les lettres t et T s'accorde de fait parfaitement avec sa pensée.

Il montre, par ailleurs, par ce geste, que le temps est une grandeur indépendante et nécessaire à la résolution mathématique des phénomènes de la nature. L'expression des vitesses, $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$, en est ainsi un exemple significatif, puisque celles-ci ne sont plus exprimées en faisant appel à la théorie des proportions aux moyens de comparaison, mais directement telles qu'elles sont définies en maints endroits dans les *Principia*, par le rapport d'une [longueur] sur un [temps]. En agissant ainsi, Newton se démarque de la pensée philosophique et de la pratique mathématique du XVII^e siècle. Toutefois, il n'arrivera pas à concrétiser la rupture ainsi créée puisqu'il réduit la dimension temporelle à celle de « simple quantité » en recourant à la *Méthode des suites infinies* pour obtenir l'expression mathématique de la densité du milieu, de la vitesse du corps et celle de résistance du milieu.

4.4 Conclusion

L'analyse des diverses rectifications de la proposition x, livre II des *Principia* nous contraint donc à renoncer à connaître les raisons qui ont poussées Newton à recourir à un paramètre temps dans son œuvre majeure. Reposant son raisonnement, dans la version de 1687, sur le parcours d'arcs de cercle en des temps égaux, Newton le modifie en recherchant l'équation de la trajectoire selon la composante tangentielle au mouvement. Enfin, il reformule la version correcte en introduisant alors les symboles T et t pour signifier le temps.

Un des problèmes majeur auquel Newton fut confronté était celui de la représentation géométrique du temps. Celle-ci est particulièrement délicate dans le cas du mouvement dans un milieu résistant. Dans la version de 1687, Newton considérait des incréments de trajectoire infinitésimaux, qui correspondent à des intervalles de « temps absolu » égaux. C'était un choix naturel puisqu'il concevait les quantités géométriques comme générées par un flux continu. Mais les incréments géométriques, fonction du « temps absolu », ne sont pas aisément représentables à l'aide de la *Méthode des premières et dernières raisons*. Dans la version rectifiée, il suppose des incréments d'abscisse égaux. Ces derniers deviennent alors les paramètres indépendants du problème auxquels il correspond des incréments de « temps absolu » inégaux, qui seront éliminés de l'équation de la trajectoire quand celle-ci sera exprimée au moyen des coefficients de Taylor.

Mais, Newton fut déjà confronté en 1687 à un choix de méthode de résolution pour la proposition x. Soit il poursuivait ses efforts d'évaluer, au moyen de la géométrie, deux

longueurs infinitésimales différentes décrites dans le même temps, soit il considérait deux temps différents durant lesquels des longueurs infinitésimales étaient parcourues en faisait appel à sa méthode des suites infinies⁷³. C'est cette dernière voie qu'il suivit en 1713. En 1687, il adhéra à la géométrie. Autrement dit, il recourut à la représentation de grandeurs physiques au moyen d'éléments (ligne, surface, etc.) d'une figure dessinée sur un support, dont chacune des parties représentait aussi les propriétés de la grandeur représentée. Aux portions d'espace représentant le temps correspondaient, de fait, aussi les caractéristiques du temps. La manipulation mathématique de ces portions d'espace signifiait donc aussi la manipulation du concept temps et de sa dimension, de sorte que les contraintes imposées par la géométrie, et la théorie des proportions notamment, l'empêchaient d'exprimer correctement l'incrément de vitesse cherché. Enfermé dans cette voie, il ne put résoudre la proposition x. Ce n'est qu'en se libérant du concept et de la dimension du temps, qu'il put évaluer correctement le rapport de la résistance à la gravité.

Mais, quand il aborda, en 1712, la rectification de la proposition x du livre second des *Principia*, le temps était déjà intégré, sur le continent, au corpus des variables du calcul leibnizien⁷⁴ qui en faisait, de fait, déjà un paramètre indépendant de tout support. En effet, dans l'approche leibnizienne, la trajectoire est représentée localement en termes de différentiels. Autrement dit, l'équation de la trajectoire fait intervenir des symboles algébriques représentant les infiniment petits des grandeurs mises en jeu. Et durant la manipulation algébrique de ces derniers, le recours à la figure, et donc leur interprétation géométrique, n'est pas une nécessité. Aussi, l'emploi du calcul différentiel leibnizien permit d'éviter à Varignon ce que nous appelons l'impasse newtonienne.

73. « ... Now, either one undergoes the effort of evaluating two increments of the abscissa o and o' described in the same time or, if one prefers, two different times may be used which correspond to two increments having the same absolute value », Galuzzi (1991), p.183.

74. Nous traitons des travaux de Varignon en philosophie naturelle, dans le chapitre 6. Ceux-ci montrent une approche différente des phénomènes de la nature et du traitement mathématique du temps.

Troisième partie

Les *Principia* : base des travaux de philosophie naturelle de Leibniz et de Varignon

Chapitre 5

La philosophie naturelle de Leibniz

Dans le numéro d'octobre 1684 des *Acta eruditorum*, une nouvelle méthode mathématique traitant des infiniment petits est publiée : la « *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec Irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* ». Avec cette méthode, il est désormais plus aisé, selon son auteur, de rechercher des maximas, des minimas, des tangentes aux courbes et d'évaluer des surfaces et des volumes. Aussi, une poignée de mathématiciens s'en sont emparé afin de mieux la comprendre, de la développer, et l'ont soumise pour cela aux propositions de la mécanique. Ils se sont ainsi engagés, vers 1690, dans une reformulation mathématique des *Principia*, œuvre maîtresse de la philosophie naturelle de cette période.

Des contributeurs au développement du calcul différentiel leibnizien, les frères Bernoulli et Varignon sont probablement ceux dont les travaux ont eu le plus de portée en philosophie de la nature. Jean Bernoulli voyait dans cette nouvelle méthode la possibilité de traiter des problèmes jusqu'alors irrésolus. Il s'est d'ailleurs penché sur la proposition x du livre II des *Principia* pour laquelle il a relevé une erreur obligeant Newton à procéder à une correction dans la hâte. Toutefois, ses apports au traitement mathématique du temps en philosophie naturelle restent limités. L'utilisation de la *nova methodus* dans le traitement mathématique des propositions de la philosophie naturelle a permis à Varignon de reformuler de nombreuses propositions des *Principia* et d'exposer sous un nouveau jour les concepts newtoniens manipulés. Cependant, malgré le succès apparent de cette méthode, le calcul différentiel ne s'est pas imposé de manière naturelle comme moyen de résolution des problèmes physiques des XVII^e et XVIII^e siècles.

Fondée sur les travaux de Leibniz et de Varignon concernant les *Principia*, cette partie a pour objectif de montrer l'évolution du traitement mathématique du temps en philosophie de la nature qui aboutit à un concept de temps mathématiquement

manipulable. Nous traiterons tout d'abord des annotations et commentaires leibniziens des *Principia* avant de discuter des conceptions du temps et de la force dans des écrits de Leibniz.

5.1 Présentation des textes

Les écrits leibniziens relatifs aux *Principia*, actuellement conservés à bibliothèque régionale de Basse Saxe à Hanovre sous la référence LH 35, *Mathematica*, n'étaient initialement pas destinés à être publiés. Ils regroupent commentaires et annotations manuscrites directement relevés sur l'exemplaire personnel des *Principia* de Leibniz auxquels s'adjoignent deux écrits : le *Tentamen de motuum cœlestium causas* et le *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente*. Les commentaires et annotations permettent, selon D. Bertoloni, de reconstruire dans un premier temps l'étude leibnizienne de l'œuvre newtonienne, alors que les deux derniers écrits nous livrent les réflexions du philosophe allemand sur le mouvement planétaire et les causes physiques de la résistance au mouvement. Ils montrent aussi le grand intérêt que portait Leibniz à l'application du calcul différentiel en philosophie naturelle.

C'est sur l'ensemble de ces écrits que nous basons notre étude leibnizienne des *Principia*. Les commentaires et annotations sont composés de trois groupes de notes distincts :

1. Les annotations personnelles de l'exemplaire privé de Leibniz des *Principia*, publiées et commentées par E.A. Fellmann en 1973¹. Elles concernent des points que Leibniz a jugés de première importance.
2. Des *morceaux choisis* de la première édition des *Principia* publiés par D. Bertoloni pour la première fois en 1988² et datés de 1690³. Ces *morceaux choisis*, écrits de la main de Leibniz, sont divisés en deux ensembles :
 - Le premier ensemble recouvre les *Définitions*, les *Lois du mouvement*, quelques propositions du livre I et les huit premières propositions du livre second.
 - Le second ensemble est composé de notes relatives aux *Définitions*, aux *Lois du mouvement*, aux lemmes 9, 10 et 11 de la *Méthode des premières et dernières raisons* et à la proposition 6 du premier livre. Leibniz aborde aussi les livres II et III. Ce second ensemble apparaît à D. Bertoloni comme plus exploratoire et ce dernier estime qu'il fut probablement écrit avant le premier ensemble.

1. Leibniz (1973)

2. Bertoloni Meli (1988)

3. En se basant sur le contenu des *morceaux choisis*, qui marque leur appartenance aux premières réactions leibniziennes aux *Principia*, du papier utilisé pour rédiger ces *morceaux choisis*, et des révélations de Leibniz vis-à-vis de la date à laquelle il vit pour la première fois l'œuvre de Newton, D. Bertoloni date la rédaction des *morceaux choisis* au séjour romain de Leibniz, soit entre avril et novembre 1690.

3. Des *Notes* qui constituent la partie la plus importante des trois sources. Elles correspondent à des pensées immédiates de Leibniz au sujet des *Principia*. Elles complètent et clarifient ainsi des remarques des *Marginalia* et constituent parallèlement le point de départ de travaux sur le mouvement planétaire. Elles furent publiées pour la première fois par D. Bertoloni ⁴, qui évalue leur rédaction à l'automne 1688 alors que Leibniz se trouvait à Vienne. Elles sont consacrées aux quarante premières pages des *Principia*. Autrement dit, elles traitent des *Définitions*, des *Lois* et abordent aussi les lemmes de la section I. Quelques références à des propositions ultérieures, comme la proposition I, sont aussi discutées.

En outre, l'année 1689 vit paraître dans les *Acta Eruditorum*, deux articles de Leibniz traitant de l'application du calcul différentiel à des problèmes de philosophie naturelle : *Tentamen de motuum caelestium causas* et *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente*. Selon E.J. Aiton ⁵ et D. Bertoloni ⁶, ils furent rédigés, suite à la lecture d'une recension des *Principia* dans les *Acta Eruditorum*, alors que Leibniz était en séjour à Vienne lors d'un voyage vers l'Italie. A cette période, Leibniz n'avait pas encore eut l'œuvre newtonienne entre les mains. Selon E.A. Fellmann, qui cite la correspondance de Leibniz, sa première confrontation avec les *Principia* date de la fin de l'été 1689 ⁷ :

« Après avoir bien considéré le livre de M. Newton que j'ai vu à Rome pour la première fois, j'ai admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne ... »

Son intention, semble-t-il ⁸, était de faire connaître ses propres investigations sur des sujets importants traités par Newton. Le premier article paru, *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente*, traite du mouvement dans les milieux résistants alors que le second, le *Tentamen de motuum caelestium causas*, publié un mois plus tard, en février 1689, aborde les causes du mouvement des planètes.

5.2 Annotations leibniziennes des *Principia*

La comparaison des commentaires et annotations aux écrits postérieurs montre que l'intérêt de Leibniz portait essentiellement sur les propositions ayant trait au mouvement des corps selon des trajectoires coniques et sur celles traitant du mouvement des corps qui éprouvent une résistance. Les *Marginalia* et les *morceaux choisis* s'attardent en effet davantage sur les premières sections des deux premiers livres des *Principia*.

4. Bertoloni Meli (2002)

5. Aiton (1986), p.134.

6. Bertoloni Meli (2002)

7. Extrait d'une lettre de Leibniz destinée à Huygens, datée du 8 février 1690, mais qui ne fut jamais envoyée Leibniz (1973), p.13.

8. Aiton (1986), p.134.

Cependant, l'absence de considération de la masse dans la philosophie naturelle leibnizienne semble suggérer que Leibniz s'est limité aux seules propositions des toutes premières sections de l'œuvre newtonienne, qui sont à l'origine de la mécanique du point. Or il n'en est rien puisqu'il annote plusieurs propositions centrales du mouvement des corps massiques comme la célèbre proposition 66 et ses nombreux corollaires, traitant du problèmes à trois corps.

Mais le bibliothécaire d'Hanovre ne s'est pas restreint aux propositions de la philosophie naturelle traitées mathématiquement. Il s'est aussi penché sur les *Définitions*, sur les *Lois du mouvement* et sur la *Méthode des premières et dernières raisons*. Les annotations des définitions se limitent essentiellement aux définitions de la force et de sa mesure dans lesquelles Leibniz conserve le rôle donné au temps par Newton. Pour Leibniz aussi, les forces motrice et accélératrice sont donc générées « en un temps donné », suggérant ainsi qu'il considère, lui aussi, le temps comme un paramètre fondamental de la philosophie naturelle sur lequel est construit le concept de force. Par ailleurs, les commentaires et notes relatives à la section I des *Principia* ne concernent pas la formulation mathématique des lemmes. Autrement dit, Leibniz conserve la géométrie infinitésimale newtonienne et ne reformule pas les lemmes de *Méthode des premières et dernières raisons* au moyen de la *nova methodus*. En revanche, il remplace, dans l'énoncé du lemme x, le terme « vi » par celui de « velocitate » transformant ainsi l'énoncé initial⁹ :

« Spatia, quæ corpus urgente quacunque vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum. »

en l'énoncé suivant¹⁰ :

« Spatia, quæ corpus urgente quacunque velocitate regulari describit sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum. »

Leibniz a probablement en tête la « sollicitation », c'est-à-dire une vitesse infinitésimale qu'il note généralement « *dc* ». Selon D. Bertoloni, la raison pour laquelle il aurait substitué au terme « vi » celui de « velocitate » procède de la définition de la force dans la seconde loi. Celle-ci, en effet, définit la force proportionnellement aux « changements qui arrivent dans le mouvement », c'est-à-dire à la « sollicitation » leibnizienne, et non à l'accélération, qui ne joue, par ailleurs, aucun rôle dans la dynamique leibnizienne. Mais la résolution du lemme x semble en fait n'être, pour Leibniz, qu'un simple exercice mathématique.

Les *Marginalia* montrent une approche algébrique des propositions newtoniennes. En effet, Leibniz a noté entre lignes de la démonstration des abréviations qui renvoient à un formalisme utilisé dans sa *nova methodus*¹¹.

9. Newton (1687) p.32.

10. Bertoloni Meli (1988), p.481.

11. Nous avons reproduit, en rouge, les annotations de Leibniz telles qu'elles apparaissent dans les *Marginalia*, intercalées entre les lignes du texte de la preuve de la proposition newtonienne.

« Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia »

« Namq; motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & corpus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & temproa conjunctim. Q.E.D. ¹² »

Les objets ou les concepts sont ainsi représentés par la première lettre du mot les désignant :

Corpus	→	c
Motus	→	m
Resistentia	→	r
Tempus	→	t

TABLE 5.1 – tableau de correspondance entre les concepts et leur dénomination.

Le corps est donc noté c . Il s'agit en fait de sa masse. cdv représente ainsi le produit du corps, soit sa masse, par la variation, infiniment petite, de la vitesse v . Le produit cdv s'identifie alors aux parties perdues du mouvement. En recourant au symbolisme, Leibniz décrit le phénomène en peu de symboles; $cdv \propto rdt$: la perte de mouvement est comme l'action de la résistance durant un intervalle de temps infiniment petit. Cette approche algébrique des propositions des *Principia* repose sur l'emploi systématique de symboles, essentiellement une lettre, représentant une grandeur de la philosophie naturelle. Lorsque celle-ci subit une variation infinitésimale, Leibniz fait précéder de la lettre d le symbole signifiant la grandeur. Mais Leibniz ne se limite pas à nommer les grandeurs physiques par des lettres. Il utilise, par moments, ce symbolisme pour calculer ¹³.

12. Leibniz (1973); p.38.

13. Leibniz (1973); p.39.

« Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inq; principiis singularum partium (addendo resistantiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressionem geometricam ».

« Exponentur enim vis gravitatis per datam lineam AC ; resistantia per lineam indefinitam AK ; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC ; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC , ideoq; in dimidiata ratione resistantiæ) incrementum resistantiæ data temporis particula factum per lineolam KL , & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ ; & centro C asymptotis rectangulis CA , CH describatur hyperbola quævis BNS , erectis perpendicularibus AB , KN , LO , PR , QS occurrens in B , N , O , R , S . Quoniam AK est ut AP^2 , erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est ut AP in KC . Nam velocitatis incrementum PQ , per motus Leg. 2. proportionale est vi generanti KC . Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN , & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KO \times KN$; hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP . Atqui area hyperbolicæ axem habens AX , verticem principalem A & asymptoton DC . Jugantur Dp , DP , & erit sector circularis AtD ut tempus ascensus omnis futuri; & sector hyperbolicus ATD ut tempus descensus omnis præteriti. »

Oltre les annotations intercalées entre les lignes du texte, trois groupes de notes encadrent la démonstration de cette proposition :

1. Un commentaire, marginé à gauche, quant au calcul effectué par Newton¹⁴ :

« NB. je crains qu'une erreur subsiste, en effet, comme les vitesses sont dans le demi-rapport des résistances supposées, l'incrément de temps n'est pas moindre que l'impulsion gravitationnelle. Ils sont égaux. Ajout NB, p. 257 ».

14. Traduction de l'auteur. « NB. Vereor ne subsit error, nam, cum velocitates sunt in dimidiata ratione resistantiæ supponendum est temporis incrementa non minus quam gravitatis impressiones esse æquales. Adde sign. NB, p.257 » ; Leibniz (1973), p.60.

2. Une esquisse de démonstration¹⁵, marginée à droite, faisant appel à la notation du calcul différentiel¹⁶.

« Si fuisset $v = gr$ fieret $dv = gdr = \overline{g-r}$. Ergo $\overline{drg} : \overline{g-r} = dt$.
 Et fiet $t = \int \overline{drg} : \overline{g-r}$ jam $v = ds = gr$ et $r = g - gdr$. Ergo fiet
 $V = gg - g^2dr$. Ergo $ds = gg\overline{1-dr}$ et $\int ds = t - r$ nam $g = dt = 1$.
 aliter : $dr = dv : g$ et $dv = dds$. Ergo $ds = 1 - dds$. Ergo $s = t - ds$. »

3. Un dernier groupe, noté en bas de page¹⁷, semblant être la suite de l'esquisse précédente¹⁸.

« KN = aa : $\overline{g-r}$.
 constans g , resistentia r . conatus absolutus $g - r = dv$ $vv = gr$.
 $2vdv = gdr$. $2v = gdr : \overline{g-r} = ds$. Ergo $2 \int vdt = \int gdr : \overline{g-r}$.
 jam $\int vdt = s$. Ergo $s = \int gdr : \overline{g-r}$. seu s existentibus logarith-
 mis, $g - r$ seu incrementa velocitatis sunt numeri. quoniam autem
 dt est constans, et omitti in multiplicando vel poni potest, hinc, ob
 $2v = ds = gdr : \overline{g-r}$ et $v = \sqrt{gr}$, fit $2dt = gdr : \overline{g-r}\sqrt{gr}$, seu
 $2t = \int gdr : \overline{g-r}\sqrt{gr}$. »

Deux niveaux d'annotations apparaissent dans cette proposition. Les notes intercalées correspondent à une simple transcription du texte newtonien, alors que celles écrites dans la marge de droite et en bas de page proposent une ébauche de démonstration basée sur le calcul différentiel. Elles montrent à la fois la facilité avec laquelle les grandeurs de la philosophie naturelle peuvent être notées en langage algébrique et la possibilité d'opérer avec ces signes, sans perdre l'essence des grandeurs physiques représentées. Selon E.A. Fellmann, « il s'agit seulement d'une transposition du texte newtonien dans la langue propre de Leibniz », dont le contenu se résume à l'équation $dv = g - r$ qui exprime la loi du mouvement d'un mobile soumis à une résistance en raison doublée des vitesses. Cependant, l'algébrisation de la proposition donne le sentiment de perdre l'information provenant de la figure, comme celle indiquant la direction et le sens de la vitesse ou de celle de la force, par exemple.

Mais dans cette proposition aboutissant à la loi horaire, le temps apparaît sous la lettre « t », contredisant ainsi notre idée selon laquelle il aurait été symbolisé pour la première fois en philosophie naturelle en 1712. Toutefois, Leibniz ne fait que le noter. Il écrit, en effet, dans la marge de droite « nam $g = dt = 1$ », signifiant par là que l'intervalle de temps considéré est constant. Autrement dit, Leibniz reste dans la tradition

15. Leibniz (1973), p.39.

16. Nous ne respectons pas la présentation de la note marginale

17. Leibniz (1973), p.62.

18. Là encore, nous ne respectons pas la présentation des *Marginalia*

Newton	Leibniz
dato tempore	dato eodem manente tempore
vis	velocitas
quadratum temporis	tempus

TABLE 5.2 – Modifications apportées par Leibniz à l'énoncé de la proposition VI du livre I de l'édition de 1687.

mathématique du XVII^e siècle qui voulait que l'étude mathématique d'un phénomène dynamique soit réalisée dans un temps donné. Il apparaît, de fait, sur ce point moins avancé que Newton, qui, avec la *Méthode des premières et dernières raisons*, triturait mathématiquement le temps.

Mais Leibniz a aussi apporté par endroits des modifications au texte. Le tableau 5.2 montre celles concernant la proposition VI du livre I. La version leibnizienne¹⁹ de cette preuve s'énonce alors²⁰ :

« Namq ; in figura indefinite parva QRPT lineola nascens QR dato eodem manente tempore, est ut velocitas centripeta (per Leg. II.) & data velocitate, ut tempus (per Lem. x) atq ; adeo, neutro date, ut vis centripeta & tempus conjunctim, adeoq ; vis centripeta ut lineola QR directe & temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ, ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq ; vis centripeta ut QR directe atq. ; $SP_{quad.}$ in $QT_{quad.}$ inverse, id est ut $\frac{SP_{quad.} \times QT_{quad.}}{QR}$. »

Selon E. A. Fellmann, l'insertion « eodem manente » doit être lue « dato eodem momento temporis », c'est-à-dire « au même moment de temps donné ». Ceci apporte une

19. La version originale est « Namq ; in figura indefinite parva QRPT lineola nascens QR dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) & data vi, ut quadratus temporis (per Lem. x) atq ; adeo, neutro date, ut vis centripeta & tempus conjunctim, adeoq ; vis centripeta ut lineola QR directe & temporis inverse. Est autem tempus ut area SPQ, ejusve dupla $SP \times QT$, id est ut SP & QT conjunctim, adeoq ; vis centripeta ut QR directe atq. ; $SP_{quad.}$ in $QT_{quad.}$ inverse, id est ut $\frac{SP_{quad.} \times QT_{quad.}}{QR}$. » ; Leibniz (1973), p.32.

20. Traduction de l'auteur, « En effet, dans la petite figure indéfinie QRPT, la ligne naissante QR à un instant donné, est comme la vitesse (par la loi II) & à vitesse donnée, comme le temps (par le lemme x) et si aucun des deux n'est donné, elle est comme la force centripète et le temps conjointement. Et donc la force centripète est comme la ligne QR directement et le temps inversement. D'autre part le temps est comme l'aire SPQ, soit le carré de $SP \times QT$, c'est-à-dire comme SP & QT conjointement. Et la force centripète est comme QR directement et $SP^2 \cdot QT^2$ inversement, c'est-à-dire comme $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. » ; Leibniz (1973), p.32.

précision inessentielle au texte des *Principia*. En revanche, les substitutions de « *velocitas* » à « *vis* » et de « *tempus* » à « *quadratum temporis* » apportent une lecture différente de la démonstration. Mais surtout elles indiquent une conception différente de la physique. Elles montrent que la force, telle qu'elle est définie dans les *Principia*, est exclue de la philosophie naturelle leibnizienne. Nous expliquons cela en nous référant à l'article de E.J. Aiton, *The application of the infinitesimal calculus to some physical problems by Leibniz and his Friends*²¹, dans lequel ce dernier expose la conception leibnizienne de la courbe. Une courbe est, pour Leibniz, un polygone composé d'une infinité de côtés infinitésimaux du premier ordre. Et pour parcourir une telle trajectoire, le corps doit subir une infinité d'impulsions instantanées à chaque sommet, et non pas être soumis à une force centripète continue.

5.3 Traitement du temps dans les écrits postérieurs aux *Principia*

Dans le *Commercium epistolicum*, œuvre anonyme attribuée à Newton, ce dernier attire l'attention sur le fait que les articles publiés par Leibniz en 1689 dans *Acta Eruditorum* contiennent les principales propositions des *Principia*. Il agit ainsi afin de se prémunir dans la controverse sur l'invention du calcul différentiel qui l'opposait à Leibniz. En réponse, ce dernier affirmait avoir travaillé douze ans auparavant sur la résistance des corps et avoir communiqué ses résultats à l'*Académie Royale des Sciences*. Nous n'entrerons pas davantage dans cette controverse, mais il nous paraît cependant intéressant de nous attarder sur certaines propositions de ces écrits. Nous élargirons ainsi temporairement notre propos à l'étude du traitement mathématique du temps par Leibniz dans sa philosophie naturelle. Étant le fondateur du calcul différentiel, nous présumons qu'il l'a employé pour prouver quelques propriétés, et, de fait, manipulé mathématiquement le temps. Nous verrons d'abord quelques propositions du *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente* avant d'aborder celles du *Tentamen de motuum cœlestium causes*.

5.3.1 Le *Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente*

Le *Schediasma* présente en six propositions quelques réflexions spécifiques sur la cause physique de la résistance au mouvement des projectiles. Il développe la théorie de la résistance et de son application à la balistique, négligée, selon Leibniz²², par Galilée

21. Aiton (1986),

22. Aiton (1972), p.258

et ses successeurs²³. Il ne contient toutefois que des résultats déjà obtenus par Huygens, dans le *Discours sur la cause de la pesanteur*²⁴, et par Newton dans les *Principia*. Toutefois, ces derniers traitent de manière plus détaillée et plus extensive le mouvement résistant puisqu'ils incluent, entre autres, à la fois l'étude *Du mouvement circulaire des corps dans les milieux résistants*, celle *du mouvement et de la résistance des corps oscillants* et celle *du mouvement des fluides et de la résistance des projectiles*.

Leibniz distingue, dans le *Schediasma* deux types de résistance dont les effets s'additionnent :

1. La *résistance absolue*, générée par le frottement du corps sur les particules du milieu fluide. Elle est similaire à des frottements entre surfaces solides. Elles s'apparente simplement à une force entre le corps et les particules individuelles composant le fluide. Elle dépend uniquement de la viscosité du fluide et est donc, de fait, indépendante de la vitesse du corps. L'effet de la *résistance absolue* est de ralentir le mobile proportionnellement à la vitesse. Elle s'apparente donc à la résistance traitée dans la section I du livre II des *Principia*.
2. La *résistance respectivo*, produite sur le mobile par le choc des particules qui constituent le milieu dans lequel se trouve le mobile, a un effet global proportionnel à la fois à la distance parcourue et à la vitesse du corps. Elle correspond donc à la résistance éprouvée par les corps en raison doublée de leur vitesse, qui n'est autre que le thème de la seconde section du livre II des *Principia*.

Leibniz présente donc une conception différente de la résistance de celles d'Huygens et de Newton. Ceux-ci considéraient la résistance du milieu à un corps comme la pression d'un courant de particules sur le corps alors que Leibniz envisage d'abord l'action individuelle des particules du fluide. Chaque impact du corps avec une particule de fluide fait perdre un degré de vitesse proportionnellement à la vitesse que le corps possède encore. L'ensemble des actions de chacune des particules constitue l'effet de la résistance. Ainsi, en traversant des distances égales, la résistance est proportionnelle à la vitesse, mais en des intervalles de temps égaux, elle est proportionnelle au carré de la vitesse. Leibniz est parvenu à cette hypothèse par une considération *a priori* de la cause de la résistance.

Les trois premiers articles traitent de la *résistance absolue*. Leibniz aborde ce sujet en débutant par l'exposition des conséquences de l'action d'une résistance proportionnelle à la vitesse sur un mobile et termine par l'établissement de l'équation de la trajectoire d'un projectile dans un milieu résistant. La proposition I traite du mouvement

23. Nous ne rejoignons pas E.J. Aiton sur ce point. Nous pensons plutôt que Galilée omettait volontairement les « accidents » afin de rendre la situation plus claire et de pouvoir ainsi mieux la décrire.

24. Le *Discours sur la cause de la pesanteur* fut publié en 1690, mais les résultats qu'il contient ont été trouvés dès 1668-9.

d'un mobile non soumis à la gravité²⁵ :

« Supposons uniforme le mouvement d'un mobile retardé régulièrement selon les distances. »

Leibniz traite cet article en trois propositions²⁶ :

« Prop. (1). Les décrets des forces sont proportionnels aux incréments des distances (qui est l'hypothèse du cas présent). »

« Prop. (2). Les vitesses sont proportionnelles aux distances ; celles perdues aux distances traversées, celles restantes aux distances à traverser.

Si les incréments des distances sont supposés être égaux, les décrets des forces seront égaux (par la prop.1) ; alors si les décrets des forces du même mobile sont égaux, les décrets des vitesses sont aussi égaux (les forces sont en effet comme les carrés des vitesses ; maintenant si les carrés sont égaux, les côtés sont également égaux) ; donc les éléments des vitesses perdues sont comme les éléments des distances traversées, les éléments de vitesses restantes comme les éléments de distances à traverser. Donc les vitesses sont comme les distances. En effet, si la vitesse est initialement AE, toute la distance à traverser dans le milieu est la ligne AB, la partie déjà traversée AM, la partie restante MB, la vitesse restante MC (ou AF, celle perdue FE, alors ECB sera une ligne droite. »

« Prop. (3). Si les distances restantes (MB ou LT) sont comme les nombres, les temps pris à les traverser (ML ou BT) seront comme les logarithmes ; puisque si les éléments des distances sont en progression géométrique, les distances restantes seront dans la même progression. Donc (par la prop.2)

25. Traduction de l'auteur, « Art.I. Supposing the motion of the moving body to be uniform in itself and retarded evenly according to the distances. », Aiton (1972), p.261.

26. Traduction de l'auteur, « Prop.(1). The decrements of the forces are proportional to the increments of the distances (which is the hypothesis of the present case). » ; « Prop.(2). The velocities are proportional to the distances ; those lost to the distances traversed, those remaining to the distances still to be traversed. If the increments of the distances are supposed to be equal, the decrements of the forces will be equal (by prop.1.) ; then if the decrements of the forces of the same moving body are equal, the decrements of the velocities are also equal (the forces are indeed as the squares of the velocities ; now equal squares arising, the sides are likewise equal) ; therefore the elements of the velocities lost are as the elements of the distances traversed, the elements of the velocities remaining as the elements of the distances still to be traversed. Therefore the velocities are as the distances. Certainly, if the velocity is initially AE, the whole distance to be traversed in the medium is the line AB, the part of it already traversed AM, that still to be traversed MB, the velocity remaining MC (or AF), that lost FE, then ECB will be a straight line. » ; « Prop.(3). If the distances remaining (MB or LT) are as numbers, the times taken (ML or BT) will be as logarithms ; for if the elements of the distances are in geometrical progression, the distances remaining will be in the same progression ; therefore (by prop.2) the remaining velocities also. Therefore the increments of the times are equal, therefore the times themselves are in arithmetical progression ... » ; Aiton (1972), p.261-2. La proposition (2) est illustrée par la figure 5.1

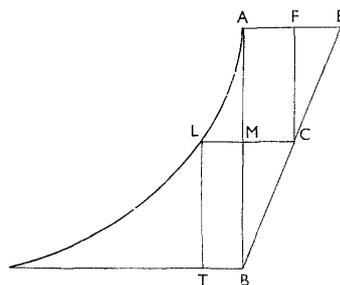


FIGURE 5.1 – Illustration de la proposition 2. La vitesse initiale est AE, la distance totale à parcourir dans le milieu résistant est AB. AM représente la partie parcourue et MB celle restant à parcourir. De par les frottements dus au milieu, la vitesse après le parcours de AM est MC. Figure tirée de [Aiton \(1972\)](#).

les vitesses restantes le seront aussi. Donc les incréments de temps sont égaux, donc les temps eux-mêmes sont en progression arithmétique ... »

Dans la proposition.1, il s'agit d'un mouvement infinitésimal dans lequel les « forces » sont similaires à la « force morte²⁷ » ou à la « sollicitation » de la gravité. Dans ce mouvement, la force est proportionnelle à la distance, qui, elle-même, est proportionnelle à la vitesse. De sorte que le décrement de force est mesuré par celui de la vitesse. Le problème est traité de manière géométrique et nous retrouvons dans cette démonstration des procédés similaires à ceux utilisés par Newton ou Huygens, notamment l'appel à une figure géométrique sur laquelle sont représentées les grandeurs physiques. Le temps nous apparaît là aussi de manière géométrique, c'est-à-dire qu'il prend forme à travers un élément d'une figure géométrique.

L'article II traite du mouvement vertical²⁸ :

« Supposons le mouvement d'un corps accéléré par la gravité et freiné régulièrement par le milieu selon les distances parcourues. »

Leibniz aborde cet article en quatre propositions²⁹ :

27. Nous discutons du concept de la « force vive » et de celui de la « force morte » dans 5.4

28. Traduction de l'auteur ; « Art. II Supposing the motion to be accelerated by gravity and retarded by the medium evenly according to the places. » ; [Aiton \(1972\)](#), p.263.

29. Traduction de l'auteur ; « Prop. (1). The first hypothesis in this case is as the single previous hypothesis ; truly the decrements of the forces (that is, in this case, of the velocities) made by the absolute resistance, are proportional to the increments of the distances. » ; « Prop. (2). The accessions of of the velocities by gravity are proportional to the increments of time, and this is the second hypothesis, from the nature of the motion of heavy bodies. » ; « Prop. (3). Lines proportional to the times taken are given ; if from each of these is taken away an equal line corresponding to the distance traversed by the moving point, the line remaining will be proportional to the velocity acquired ; for the impressed velocities are

« Prop. (1) La première hypothèse dans ce cas est comme l'hypothèse précédente. Les décrets des forces (c'est-à-dire, dans ce cas, des vitesses) résultant de la résistance absolue, sont proportionnels aux incréments de distances. »

« Prop. (2). Les augmentations de vitesses dues à la gravité sont proportionnelles aux incréments de temps, et ceci est la seconde hypothèse de la nature du mouvement des corps pesant. »

« Prop. (3). Soit données des lignes proportionnelles au temps. Si de chacune de ces lignes est tracée une ligne correspondant aux distances traversées par le mobile, la partie restante de la ligne à traverser restante sera proportionnelle à la vitesse acquise ; puisque les vitesses imprimées sont proportionnelles aux temps (par la prop.2). Et les diminutions de vitesse sont proportionnelles aux distances parcourues, donc les vitesses acquises restent comme les différences. »

« Prop. (4). Si les différences de la vitesse maximale aux vitesses acquises sont comme les nombres, alors les temps seront comme les logarithmes [...] »

L'article II s'apparente davantage à un théorème dont les diverses propositions serviront de base à la démonstration des articles suivants.

Enfin, il clôt la théorie de la *résistance absolue* par un article traitant de la trajectoire d'un projectile dans un milieu résistant³⁰ :

« Supposons le mouvement d'un projectile dans un milieu de résistance proportionnelle à la vitesse. »

Leibniz examine avec cet article un mouvement composé des deux précédemment étudiés, dont la proposition principale³¹ est le pendant de la quatrième proposition du second livre des *Principia*³² :

proportional to the times (by prop.2), the velocities lost to the distances traversed (by prop.1 here, exactly as prop.2 of the preceding article) ; therefore the acquired velocities remaining are as the differences. » ; « Prop. (4). If the complements of the acquired velocities to the maximum velocity are as numbers, then the times taken will be as logarithms ... » ; Aiton (1972), p.263.

30. Traduction de l'auteur ; « Supposing a heavy body to be projected in a medium having absolute resistance » ; Aiton (1972), p.264.

31. Traduction de l'auteur ; « Prop.(4). The trajectory AP, or the relation between the coordinates AG, the distance of descent, and AM, the distance of the progression in itself uniform, can be found. For by art. II, prop.3 is given the simple relation between the time taken, the distance AG traversed in descending and the velocity in G acquired in descending. In this relation AM is substituted for the time, by help of the relation between these given in art. I, prop.3. The relation between AG and AM therefore remains, which although it is transcendental, involves nothing other than logarithms. » ; Aiton (1972), p.264.

32. Proposition IV, livre II : « Supposant que la force de la gravité soit uniforme dans quelque milieu

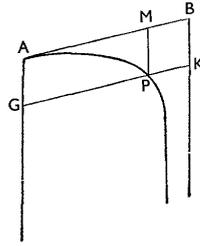


FIGURE 5.2 – Calcul de la trajectoire. Figure tirée de Aiton (1972).

« Prop.(4). La trajectoire AP, ou la relation entre les coordonnées AG, la distance de descente, et AM, la distance de progression uniforme, peut être trouvée. Puisque par l'article II, prop. 3 est donnée la relation simple entre le temps, la distance AG traversée en descente et la vitesse acquise en G lors de la descente. Dans cette relation AM est substitué par le temps, par l'aide de la relation entre celle donnée dans l'article I, prop.3. La relation entre AG et AM, bien que transcendante, n'implique rien d'autre que des logarithmes. ».

Avec cette proposition Leibniz livre la manière d'obtenir l'équation de la trajectoire, mais ne donne pas la relation mathématique liant les coordonnées AG à celles de AM. Il procède, pour ainsi dire, de manière similaire à Newton avec les *Principia*, à savoir, qu'il recourt aux résultats de propositions précédentes et à une figure afin de représenter les grandeurs physiques. Le symbolisme apparent n'est toutefois que significatif. Il n'est pas empreint de sens physique. La droite « AM », à laquelle le temps est substitué, ne possède pas de dimension temporelle. Elle permet simplement de visionner le temps sur la figure. Cependant, Leibniz oriente la preuve vers l'obtention d'une équation, c'est-à-dire, qu'il cherche à écrire une relation symbolique explicitant le lien entre plusieurs grandeurs du phénomène. Le détail des calculs fut précisé dans le scholie du manuscrit *De resistentia medii absoluta*, duquel E.J. Aiton a repris la première tentative³³ :

homogène, et qu'elle tende perpendiculairement au plan de l'horizon, trouver le mouvement d'un projectile dans ce même milieu, en supposant que la résistance soit proportionnelle à la vitesse », Newton (1966b), p.250.

33. Le calcul de l'équation de la trajectoire est ainsi rapporté par E.J. Aiton : « Let GP = x , AG = y , the maximum velocity in the direction AG = a and the maximum velocity in the direction AB = b . Also let c be the velocity in the direction AB and v the velocity in the direction AG. Then $t = a \int \frac{dx}{b-x}$ (Art. I, prop.3), $c = b - x$ (Art. I, prop.2) and $v = t - y$ (Art. II, prop.3), so that $\frac{v}{c} = \frac{b-x}{t-y}$ and hence $v = a \int \frac{dx}{b-x} - y$. Since $\frac{dx}{dy} = \frac{b-x}{v}$, it follows that $v = (b-x) \frac{dy}{dx}$ and consequently $(b-x)dy = dx \int \frac{adx}{b-x} - ydx$, or we may write $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{b-x}y = \frac{1}{b-x} \int \frac{adx}{b-x}$, which is the

« Supposons $GP = x$, $AG = y$, la vitesse maximum dans la direction $AG = a$ et la vitesse maximale dans la direction $AB = b$ (figure 5.2). Soient aussi c la vitesse dans la direction AB et v la vitesse dans la direction AG . Alors $t = a \int \frac{dx}{b-x}$ (Art. I, prop.3), $c = b - x$ (Art. I, prop.2) et $v = t - y$ (Art. II, prop.3), tel que $\frac{v}{c} = \frac{b-x}{t-y}$ et par conséquent $v = a \int \frac{dx}{b-x} - y$. Puisque $\frac{dx}{dy} = \frac{b-x}{v}$, il s'ensuit que $v = (b-x) \frac{dy}{dx}$ et par conséquent $(b-x)dy = dx \int \frac{adx}{b-x} - ydx$, ou nous pouvons écrire $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{b-x}y = \frac{1}{b-x} \int \frac{adx}{b-x}$, qui est l'équation différentielle de la trajectoire. »

Leibniz réduit ce mouvement élaboré à deux mouvements simples qu'il étudie individuellement. Il définit tout d'abord deux directions privilégiées, l'horizontale et la verticale, et nomme, sous forme symbolique, chacune des grandeurs nécessaires à la résolution du phénomène. Ensuite sur chacun des axes défini, il exprime un élément de vitesse en se référant aux propositions des articles précédents. Il évalue alors le rapport d'une infiniment petite variation de vitesse selon l'axe horizontal sur une infiniment petite variation de vitesse selon l'axe vertical, et il obtient l'expression de la trajectoire AP. Ce n'est toutefois, qu'en mars 1696, après plusieurs tentatives de résolution de cette proposition qu'il arriva la solution cherchée.

Leibniz ne résolut ainsi le problème du mouvement d'un projectile soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse qu'en faisant appel à une méthode géométrico-algébrique, c'est-à-dire en recourant à une méthode dont le fondement est géométrique – il recourt à une figure – mais dont les grandeurs mises en jeu ne s'identifient pas de manière arrêtée aux éléments d'espace qui les désignent. AG n'est pas la vitesse maximale sur l'axe vertical et AM n'est qu'une façon parmi d'autres de signifier le temps. La figure n'est qu'un support pour visualiser ces grandeurs dénommées par des symboles. Autrement dit, nous n'avons pas affaire à une simple transposition en langage algébrique d'une démonstration géométrique comme ce fut le cas avec les notes marginales des *Principia*. Cependant, la démonstration proposée ne s'apparente pas encore à l'algorithmisation varignonienne de la mécanique. Nous pouvons toutefois dire que cette preuve constitue une étape supplémentaire dans la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable. Mais si Leibniz employa une telle méthode c'est que la géométrie euclidienne ne lui permettait pas d'exprimer le rapport des infiniment petits de vitesse et d'exprimer ainsi l'équation de la trajectoire AP. Autrement dit, le recours à une méthode mathématique pour la résolution d'un phénomène est dicté par ce dernier. Nous avons vu dans le chapitre précédent que Newton fit de même, vingt-trois ans plus tard, lorsqu'il chercha à corriger l'erreur de la proposition x.

differential equation of the trajectory. » ; Aiton (1972), p.264.

La seconde partie des *Schediasma* est dédiée à la *résistance respective*, traitée en trois articles. Leibniz y étudie le mouvement d'un corps plongé dans un milieu résistant proportionnel au carré de la vitesse. Son étude suit un schéma similaire à celui de la *résistance absolue*. Il débute par l'étude du mouvement d'un corps non soumis à la gravité avant de traiter le mouvement vertical. Les conclusions de ces études constituent un socle sur lequel Leibniz assie la recherche de la trajectoire d'un projectile dans un milieu résistant proportionnellement au carré de la vitesse dans le troisième et dernier article de la seconde partie du *Schediasma*. Dans cette seconde partie, nous nous arrêterons seulement sur l'article VI, qui est l'analogue de la proposition X du second livre des *Principia*. Il s'énonce³⁴ ainsi :

« Supposons le mouvement d'un projectile dans un milieu homogène de résistance proportionnelle au carré de la vitesse. »

Leibniz répond à cet article en deux propositions, dont la première s'apparente grandement à la proposition IV de l'article III de la *résistance absolue*. En effet, il explique ici, de nouveau, que « la trajectoire peut être trouvée³⁵ » :

« Prop.(1). la trajectoire peut être trouvée (ou la relation entre AS et AB). De la distance AS est donnée (par l'article V, prop.6) AV la vitesse de descente en S ou en P. De là (par la prop.7) est donné le temps écoulé. De ceci (par la proposition IV, prop.3) est donnée la distance AM ou SP. En conséquence à partir des abscisses AS, les ordonnées SP sont données, et donc les points de la ligne peuvent être trouvés. »

Les éléments apportés par E.J. Aiton³⁶ quant à la résolution de cette proposition par Leibniz nous renvoient à la conclusion précédente.

34. Traduction de l'auteur ; « Supposing the heavy body to be projected in a uniform medium having respective resistance. » Aiton (1972), p.270.

35. Traduction de l'auteur, « Prop. (1). The trajectory can be found (or the relation between AS and AB). From the distance AS is given (by Art. v, prop.6) AV the velocity of descent in S or in P. From this (by prop.7) is given the time expended. From this (by Art. iv, prop.3) is given the distance AM or SP. Consequently from the given abscissae lines AS are given the ordinates SP, and hence the points of the line can be found. » ; Aiton (1972), p.271.

36. Aiton (1972), p.271.

« J'appelle une *circulation harmonique* le mouvement d'un corps, si les vitesses de circulation sont inversement proportionnelles aux rayons ou aux distances à partir du centre de circulation, ou (ce qui est la même chose) si les vitesses de circulation autour du centre diminuent proportionnellement comme les distances à partir du centre augmentent. Ou plus brièvement, si les vitesses de circulation augmentent proportionnellement à la proximité. Ainsi, si, par exemple, les rayons, à savoir les distances, augmentent uniformément ou arithmétiquement, les vitesses augmenteront en progression harmonique. En conséquence, la circulation harmonique peut avoir lieu non seulement dans un arc de cercle, mais aussi dans toute autres courbes décrites. Supposons que le mobile M parcourt une courbe quelconque $M_3M_2M_1$ ou $M_1M_2M_3$ et qu'il décrit les éléments de courbes M_3M_2, M_2M_1 en des temps égaux ; son mouvement peut être conçu comme composé d'un mouvement circulaire autour d'un centre comme \odot (par exemple M_3T_2, M_2M_1), et d'un mouvement rectiligne tel que T_2M_2, T_1M_1 (où $\odot T_2$ est pris égal à $\odot M_3$ et $\odot M_1$ à $\odot M_2$). Ce mouvement peut aussi être conçu de manière équivalente à celui d'une règle ou celui d'une ligne droite rigide infiniment longue $\odot\pi$ qui se déplace autour d'un centre \odot , dans le même temps que le corps M parcourt la ligne $\odot\pi$. En outre, le mouvement rectiligne d'approche ou d'éloignement du centre (que j'appelle *mouvement paracentrique*) n'est pas important à condition qu'une circulation du mobile M, telle que M_3T_2 , est à une autre circulation, M_2T_1 , comme $\odot M_1$ est à $\odot M_2$. Autrement dit si les circulations réalisées en des éléments de temps sont inversement comme les rayons. Car, puisque ces arcs de circulation élémentaires sont comme les temps et les vitesses combinées et les éléments de temps sont pris égaux, les circulations seront comme les vitesses, et en conséquence les vitesses inversement comme les rayons, et donc la circulation sera appelée harmonique. »

Une circulation est harmonique si le mouvement d'un mobile se fait avec une vitesse de révolution inversement proportionnelle à la distance qui sépare le corps du centre de la circulation. Selon cette définition, la circulation harmonique n'est pas restreinte

around some such centre as \odot (as for instance M_3T_2, M_2M_1), and a rectilinear one such as T_2M_2, T_1M_1 (where $\odot T_2$ is taken equal to $\odot M_3$ and $\odot M_1$ to $\odot M_2$). This motion can also be conceived to be such that, while a ruler or an indefinitely long and rigid straight line $\odot\pi$ moves around the centre \odot , at the same time the body M moves along the line $\odot\pi$. Further, it does not matter what is the rectilinear motion of approach to or recess from the centre (which I call *paracentric motion*), provided that a circulation of the moving body M, such as M_3T_2 , is to another circulation of it, M_2T_1 , as $\odot M_1$ to $\odot M_2$, namely if the circulations completed in equal elements of time are inversely as the radii. For since these arcs of elementary circulations are as the times and speeds combined, and the elements of time are taken to be equal, the circulations will be as the velocities, and consequently the velocities inversely as the radii, and therefore the circulation will be called harmonic. », Bertoloni Meli (2002), p.129-30.

nous avons supposé par hypothèse des éléments de temps égaux, les éléments d'aire sont aussi égaux, et vice versa. Et donc les aires $\int MA$ sont proportionnelles au temps de parcours des arcs AM traversés. »

Leibniz démontre l'égalité de l'aire de triangles balayée par une ligne. Il recourt à cet effet à la géométrie. Cependant, il s'agit d'une géométrie des infiniment petits et des différences. Le temps y intervient sous forme d'intervalles égaux, « par hypothèse ». Mais prouver d'un point de vue strictement géométrique que les aires balayées durant des intervalles de temps égaux sont égales revient à éliminer le temps de la démonstration, et à appliquer les lois de la géométrie euclidienne.

Comparée à la démonstration newtonienne, le côté dynamique a disparu. Newton s'appuyait, en effet, sur les deux premières lois du mouvement pour démontrer la loi des aires. En avançant l'action d'une force instantanée à intervalles de temps égaux, Newton traitait la proposition sous l'angle de la dynamique. Les longueurs mises en jeu sont les distances parcourues par le mobile et les aires balayées le sont par le mobile aussi. Enfin, l'égalité étant démontrée pour une succession de triangles adjacents, Newton généralise la proposition au cas des courbes réellement parcourues par un corps, de sorte que la démonstration leibnizienne nous suggère que Leibniz ne pense pas cette proposition comme un élément nécessaire du mouvement d'un corps soumis à une force centrale.

Vient ensuite la proposition 5, qui justifie un lemme important sur les infiniment petits, auquel Leibniz fit souvent référence sous le nom de *Lemme des Incomparables*, notamment dans sa correspondance avec Varignon⁴⁰

40. Proposition 5 : « In the demonstrations I have employed *incomparably small quantities*, such as the difference between two finite quantities, incomparable with the quantities themselves. Such matters, if I am not mistaken, can be exposed most lucidly as follows. Thus if someone does not want to employ *infinitely small* quantities, one can take them to be as small as one judges sufficient as to be incomparable, so that they produce an error of no importance and even smaller than allowed. In the same way as the Earth is like a point, or the diameter of the Earth as an infinitely small line with respect to the sky, so it can be demonstrated that if the sides of an angle have a basis incomparably smaller than them, the angle they enclose will be incomparably smaller than the right angle, and the difference between the sides will be incomparable with the sides themselves ; and the difference between the whole sine, the sine of the complement, and the secant, will be incomparable with the terms of the difference, as the difference between the sine, the chord, the arc, and the tangent. Therefore, since these quantities are infinitely small, the differences will be *infinitely many times infinitely small*, and also the versed sine will be infinitely many times infinitely small, thus incomparable with the sine. Further, there are infinitely many orders both of infinite and infinitely small quantities. Moreover, it is possible to use finite triangles similar to the *inassignable* ones, which are most useful for finding tangents, maxima, minima, and for unfolding the curvature of lines ; likewise, almost in every application of geometry to nature ; for, if motion is represented by a finite line, which is traversed by a body in a given time, the impetus or velocity is expressed by an infinitely small line, and the element of velocity, which is solicitation of gravity or centrifugal conatus, by a line infinitely many times infinitely small. I reckoned these matters were to be noted down here as *lemmas for our Method of incomparable quantities and analysis of infinities*,

« Dans les démonstrations, j'ai employé des *quantités incomparablement petites* telles que la différence entre deux quantités finies est incomparable avec les quantités elles-mêmes. Ces questions, si je ne me trompe, peuvent être exposées de manière plus lucide. Ainsi, si quelqu'un ne veut pas employer de *quantités infiniment petites*, on peut les prendre comme aussi petites qu'on les juge suffisamment incomparables, de sorte qu'elles produisent une erreur insignifiante et même plus petite qu'autorisée. De la même façon que la Terre est comme un point, ou le diamètre de la Terre est comme une infiniment petite ligne par rapport au ciel, il peut être démontré que si les côtés d'un angle ont une base incomparablement plus petits qu'eux, l'angle qu'ils délimitent sera incomparablement plus petit que l'angle droit. La différence entre les côtés sera alors incomparable aux côtés eux-mêmes. Et la différence entre le sinus entier, le sinus du complément, et la sécante, sera incomparable avec les termes de la différence, comme la différence entre le sinus, la corde, l'arc, et la tangente. Donc, puisque ces quantités sont *infiniment petites*, les différences seront *infiniment plusieurs fois infiniment petites* et aussi le sinus verse sera infiniment de fois infiniment petit, donc incomparable avec le sinus. En outre, il y a infiniment beaucoup d'ordre d'infinis d'infiniment petites quantités. De plus, il est possible d'utiliser des triangles finis semblables aux *inassignables*, qui sont plus utilisés pour trouver les tangentes, maxima, minima, et pour déployer la courbure des lignes. De même, dans la plupart des applications de la géométrie à la nature, si le mouvement est représenté par une ligne finie, qui est parcourue par un mobile en un temps donné, l'impétus ou la vitesse est exprimée par une infiniment petite ligne, et l'élément de vitesse, qui est la sollicitation de la gravité ou du conatus centrifuge, sera représenté par une ligne infiniment de fois plus petite. J'ai estimé que ces questions devaient être notées ici comme des *lemmes* pour *notre Méthode des quantités incomparables et l'analyse des infinis*, juste comme un élément de cette nouvelle doctrine. »

Leibniz débute par une définition des *quantités incomparablement petites*, puis illustre la proposition avec des grandeurs mathématiques, pour en venir très vite à justifier son emploi dans le *Tentamen*. Il se réfère à cet effet à l'*Almageste* de Ptolémée en nommant le titre d'un de ses chapitres : « la Terre, qui est comme un point ». Il montre de la sorte la nécessité de recourir à ce lemme dans les mathématiques de la philosophie naturelle, et donc à l'utilisation des infiniment petits dans les preuves des propositions de la philosophie naturelle. Introduite par la définition des *quantités incomparablement petites*, la proposition 5, à l'instar du lemme 1 de la première section des *Principia*, avertit le lecteur du genre nouveau des mathématiques auxquelles il va être confronté. Elle

just as elements of this new doctrine. » ; Bertoloni Meli (2002), p.131.

joue dans le *Tentamen* le même rôle que le lemme 1 dans la *Méthode des premières et dernières raisons*, sans toutefois faire du temps un élément fondamental du *Tentamen*. Elle rappelle aussi, par ailleurs, le scholie terminal de la première section des *Principia*, dans lequel Newton justifie l'emploi de la *Méthode des premières et dernières raisons* et confirme la mise en œuvre, dans les *Principia*, d'une nouvelle méthode mathématique en philosophie de la nature.

Leibniz aborde ensuite la loi de force centrifuge⁴¹ :

« Le *conatus centrifuge*, à savoir le conatus extérieur à la circulation, peut être exprimé par PN, le sinus verse de l'angle de circulation $M_1 \odot N$ (ou par D_1T_1 , qui se révèle être le même car la différence entre les rayons est inassignable), puisque le sinus verse est égal à la perpendiculaire tracée d'une extrémité de l'arc d'un cercle à la tangente de l'autre extrémité, par lequel nous avons exprimé le conatus extérieur dans le paragraphe précédent. (Le conatus extérieur peut aussi être exprimé par PV, la différence entre le rayon et la sécante du même angle ; la distance entre leur différence et le sinus verse est infiniment infiniment plusieurs fois infiniment petite et complètement insignifiante comparée au rayon.). D'où, de plus, puisque le sinus verse est comme le carré de la corde, il suit que les efforts centrifuges des corps décrivant des cercles égaux avec un mouvement uniforme sont comme les carrés des vitesses, et ceux des corps décrivant des cercles de différente taille sont comme les carrés des vitesses et des rayons inversement »

La force centrifuge, pour Leibniz, était celle qui agit sur une planète suite à sa rotation autour d'un centre⁴². Elle est comme PN (figure 5.4) ou, de par le jeu des différences négligeables, peut aussi être exprimée par PV. Aussi, Leibniz, pour évaluer les conatus, recourt simplement à la géométrie euclidienne, faisant du temps et de la force (dans le sens newtonien) des éléments extérieurs à sa philosophie naturelle. La force centrifuge est introduite au début de la démonstration pour être relayée, ensuite, par un segment,

41. Traduction de l'auteur, « Centrifugal Conatus, namely the outward conatus of circulation can be expressed by PN, the versed sine of the angle of circulation $M_1 \odot N$ (or by D_1T_1 , which turns out to be the same because the difference between the radii is inassignable); for the versed sine is equal to the perpendicular drawn from one end-point of a circle to the tangent from the other end-point, whereby we expressed the outward conatus in the preceding paragraph. (Centrifugal conatus can be also expressed by PV, the difference between the radius and the secant of the same angle ; the distance between their difference and the versed sine is infinitely infinitely many times infinitely small, and so wholly insignificant with respect to the radius.) Hence, furthermore, since the versed sine is as the square of the chord, it follows that centrifugal endeavours of bodies describing equal circles with uniform motion are as the squares of the velocities, and those of bodies describing circles of different size as the squares of the velocities inversely as the radii » ; Bertoloni Meli (2002), p.133.

42. Pour Newton, la force centrifuge est la force exercée par la planète sur le Soleil.

PN ou PV ; quant au temps, il est tout simplement absent de la preuve. Newton, lors de l'établissement de la loi de force centripète, insiste sur ces éléments que sont le temps et la force. Son approche est, de nouveau, dynamique.

Nous nous sommes attardés par la suite uniquement sur la proposition 15, qui est la seule, parmi celles restantes, à avoir un lien avec notre propos. Elle met à égalité l'accélération radiale de la planète et la somme des forces subies dans le cas d'un mouvement de circulation. Il y démontre que l'accélération radiale est la différence (ou la somme) de l'attraction gravitationnelle et de deux fois la force centrifuge. Il présente son raisonnement de la façon suivante ⁴³ :

« L'élément d'impetus paracentrique d'un mouvement de circulation harmonique est la différence ou la somme de la sollicitation paracentrique et de deux fois le conatus centrifuge. La somme si la légèreté est présente, la différence si c'est la gravité. Si la gravité prévaut, la vitesse de descente augmente ou la vitesse d'ascension diminue, mais le contraire a lieu si le conatus centrifuge prévaut. De ${}_1M$ et ${}_3M$, supposons ${}_1MN$ et ${}_3M_2D$ normaux à \odot_2M . Alors, du fait de la circulation harmonique, les triangles ${}_1M_2M\odot$ et ${}_2M_3M\odot$ étant égaux, leurs hauteurs ${}_1MN$ et ${}_3M_2D$ seront aussi égales. Prenons maintenant ${}_2MG$ égal à L_3M tracée parallèle à ${}_2ML$; les triangles ${}_1M_2N$ et ${}_3M_2DG$ seront alors congruents, et ${}_1M_2M$ égal à G_3M , et N_2M égal à G_2D . De plus, sur la ligne droite \odot_2M , prenons $\odot P$ égal à \odot_1M et \odot_2T égal à \odot_3M . P_2M sera alors la différence entre les rayons \odot_2M et \odot_3M . Maintenant P_2M est égal à $G_2D + NP$, et ${}_2T_2M$ égal à ${}_2MG + GD - {}_2D_2T$, donc $P_2M - {}_2T_2M$ sera $NP + {}_2D_2T - {}_2MG$, c'est-à-dire deux fois ${}_2D_2T - {}_2MG$. Maintenant la différence entre les rayons exprime la vitesse paracentrique. La différence de la différence exprime

43. Traduction de l'auteur, « In every harmonic circulation the element of paracentric impetus is the difference or sum of the paracentric sollicitation and twice of the centrifugal conatus ; the sum indeed if levity is present, the difference if gravity. When the sollicitation of gravity prevails, the velocity of descent increases or the velocity of ascent decreases, but the contrary happens when twice centrifugal conatus prevails. From ${}_1M$ and ${}_3M$, let ${}_1MN$ et ${}_3M_2D$ be normal to \odot_2M ; then, because of the harmonic circulation the triangles ${}_1M_2M\odot$ and ${}_2M_3M\odot$ have been shown to be equal, their altitudes ${}_1MN$ and ${}_3M_2D$ will be also equal. Now, taking ${}_2MG$ equal to L_3M , let ${}_3MG$ be drawn parallel to ${}_2ML$ itself ; the triangles ${}_1M_2N$ and ${}_3M_2DG$ will then be congruent, and ${}_1M_2M$ equal to G_3M , and N_2M equal to G_2D . Further, in the straight line \odot_2M , take $\odot P$ equal to \odot_1M and \odot_2T equal to \odot_3M . P_2M will be then the difference between the radii \odot_2M and \odot_3M . Now P_2M is equal to $G_2D + NP$, and ${}_2T_2M$ is equal to ${}_2MG + GD - {}_2D_2T$, therefore $P_2M - {}_2T_2M$ will be $NP + {}_2D_2T - {}_2MG$, that is twice ${}_2D_2T - {}_2MG$. Now the difference between the radii expresses the paracentric velocity, the difference of the differences expresses the element of paracentric velocity, ${}_2D_2T$ or NP is the centrifugal conatus of the circulation, being namely the versed sine (by 11), and ${}_2MG$ or ${}_3ML$ is the sollicitation of gravity. Thus the element of paracentric velocity is equal to the difference between twice the centrifugal conatus NP or ${}_2D_2T$ and the simple sollicitation of gravity G_2M or the sum of twice the centrifugal conatus and the simple sollicitation of levity », Bertoloni Meli (2002), p.143-5.

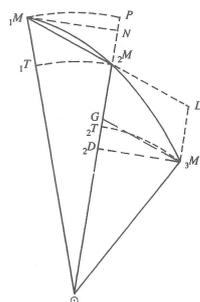


FIGURE 5.5 – Agrandissement d’une partie de la figure générale du *Tentamen de motuum caelestium causas* réalisé par D. Bertoloni afin d’illustrer la démonstration de la proposition 15.

l’élément de vitesse paracentrique. De plus, ${}_2D_2T$ ou NP est le conatus centrifuge de la circulation, puisqu’il est le sinus verse par la proposition 11, et ${}_2MG$ ou ${}_3L$ est la sollicitation de la gravité. Ainsi l’élément de vitesse paracentrique est égal à la différence entre deux fois le conatus centrifuge NP ou ${}_2D_2T$ et la sollicitation de gravité G_2M , ou la somme de deux fois le conatus centrifuge et la sollicitation de légèreté. »

Leibniz recourt seulement à la géométrie euclidienne (figure 5.5) et au *Lemme des Incomparables* afin de prouver cette proposition, dans laquelle Keil et Newton ont vu une erreur dans l’expression de la force centrifuge mise en avant par ce dernier dans la querelle qui l’opposait à Leibniz. Le résultat final est cependant correct, comme le rappelle E.J. Aiton⁴⁴. Cette démonstration montre toutefois que Leibniz ne recourt pas au temps qu’il a placé hors de sa philosophie naturelle.

5.4 Temps et force dans les écrits de Leibniz

En guise de conclusion, nous devons avouer notre étonnement quant au contenu des *Marginalia*. Nous nous attendions, en effet, à ce que Leibniz ait démontré les propositions des *Principia* à l’aide de sa *Nova Methodus*, et nous pensions même voir un début de traitement mathématique, parent de celui que nous pratiquons, notamment concernant le temps. Or nous constatons qu’il a, pour une grande majorité des propositions, simplement transcrit l’énoncé en langage algébrique et, pour quelques unes, produit une démonstration personnelle basée sur le calcul différentiel mais montrant un état encore peu avancé de ce calcul. Peut-être devons-nous cet étonnement à une

44. Aiton (1962), p.75

mauvaise interprétation du titre de l'ouvrage de E. A. Fellmann : *Marginalia in Newtoni Principia Mathematica*. Le titre est pourtant explicite ; il ne s'agit pas d'une réédition des *Principia* basée sur une nouvelle méthode mathématique et Leibniz a effectivement marginé le texte de Newton. Cependant, à partir des notes marginales, de même que du *Schediasma* et du *Tentamen*, nous percevons une distinction de conception des fondements de la philosophie naturelle entre les deux protagonistes que sont Newton et Leibniz, en particulier en ce qui concerne la force et le temps.

En 1695, Leibniz publie, dans les *Acta Eruditorum*, le *Specimen dynamicum*, synthèse de ses pensées sur la dynamique. Il révèle un concept de force particulièrement développé qui fut pour l'essentiel élaboré après le passage de Leibniz à Paris entre 1676 et 1678. Le *specimen dynamicum* nous dévoile, en effet, un système dynamique, développé de manière quasi-continue de 1670 à sa mort en 1716, basé sur une multitude de forces distinctes et variées, dont les principales sont la force morte et la force vive. Le concept de force chez Leibniz débute dès les années 1670 avec la doctrine du mouvement universel unique. Il s'est développé ensuite au fur et à mesure pour arriver au concept de force morte et force vive. Nous ne développerons pas en détails l'évolution du concept de force chez Leibniz, qui est hors de notre propos. Nous préférons renvoyer le lecteur à l'article de A. Robinet⁴⁵, pour une analyse détaillée et approfondie de l'élaboration et de l'évolution de ce concept. Mais le *Specimen Dynamicum* met aussi l'accent sur le lien entre ces forces et l'ensemble divin de la Nature, la détermination des lois principales en s'attachant surtout au concept de mouvement.

Dix ans avant la parution des *Principia*, les intérêts qui guidaient Leibniz dans ses recherches en philosophie naturelle se focalisaient sur la mécanique du mouvement, notamment l'étude du choc et en particulier, les règles cartésiennes du choc, la définition de la force de percussion et la distinction des corps durs et des corps élastiques. La relativité cinématique attirait aussi son attention. Mais l'absence de remarques sur les lois du mouvement quinze ans plus tard suggère que sa réflexion à ce sujet était encore en chantier au moment de la rédaction des *Marginalia*. Jusqu'en 1676, Leibniz s'était davantage intéressé à des problèmes de mathématique. La mécanique et la physique ne l'avaient pas occupé avec la même constance, ni la même intensité. Il était resté, dans ces disciplines, davantage au stade de l'apprentissage et n'a pas montré le génie créateur qu'il a développé en mathématique. Il a élaboré sa mécanique peu à peu, la fondant sur l'étude du choc, qui fournit la pierre de touche des principes sur lesquels la science du mouvement devrait s'édifier. Mais l'expérience commençait à ébranler l'édifice cartésien et Leibniz ne pouvait se contenter de fonder les principes de la mécanique sur le succès de leurs applications. Il tenta, à la fin de la période parisienne, de réduire les lois

45. [Robinet \(1984\)](#)

du mouvement au principe général de l'égalité entre la cause pleine et l'effet entier⁴⁶, « le vrai principe *a priori* de la mécanique », qui, s'il n'était pas respecté, « le mouvement universel s'ensuivrait ». C'était le seul moyen d'établir « la physique véritable et sans hypothèse, sans suppositions ni principes d'expérience, mais fondée sur la réalité du calcul et de la géométrie ». Les principes de la mécanique doivent donc exprimer la constitution même de la nature, sa structure métaphysique. Or le choc cartésien n'expliquait pas la réflexion, et la physique associée ne permettait pas de différencier les mouvements. En outre, les démonstrations physiques doivent être tirées de la cause efficiente. Et dire que la cause efficiente des phénomènes consiste en la grandeur ou la vitesse du corps ne fournit qu'une hypothèse probable. La physique cartésienne ignorant les raisons intimes des choses, seule la raison hypothético-déductive pouvait, aux yeux de Leibniz, faire sortir la « nouvelle mécanique » de l'impasse dans laquelle elle se trouvait. Il fallait donc, si l'on voulait donner des démonstrations certaines en physique, expliquer les phénomènes par les phénomènes et les multiples effets particuliers à partir des causes générales peu nombreuses.

Leibniz essaya à diverses reprises de mathématiser la philosophie naturelle. L'importance et l'enjeu de cette mathématisation des concepts fondamentaux de la mécanique, perçus dès 1676, aboutirent, deux ans plus tard, à la redéfinition de la mécanique avec ce qu'a appelé M. Fichant « la réforme » de la dynamique⁴⁷. La réforme de la dynamique, dont la dénomination est attribuée à Leibniz lui-même, consiste en la modification du concept de force, alors considérée comme « *quantitas effectus* », mesurée par le produit de la quantité du corps par celle de sa vitesse⁴⁸. Leibniz le redéfinit comme l'effet non plus de la vitesse du corps, mais de la hauteur à laquelle celui-ci peut s'élever. La force leibnizienne, fondée sur le principe de la variation d'altitude que le corps, soumis à cette force, peut subir, est estimée par le produit de la quantité du corps par le carré de la vitesse⁴⁹. C'est précisément cette substitution de la formule mv^2 à la formule mv que Leibniz appela « *Reformatio* », qui deviendra le principe de conservation de la force vive. Cette dernière décèle une réalité profonde pour Leibniz : elle est la raison de tous les changements mécaniques. Il y a dans les corps, selon lui, quelque chose de supérieur à eux. C'est la raison pour laquelle il n'en appelle pas à un « *Deus ex machina* » pour expliquer le mouvement comme le firent Descartes ou Newton, si nous nous référons au scholie général. La force vive constitue ainsi pour Leibniz une notion complète et inexhaustible puisque « toute notion définie, quelle qu'elle soit, qui

46. Le principe général de l'égalité entre la cause et l'effet entier découle de la dialectique classique : « *Ut geometrica pendet ex metaphysicis de toto et parte, ita mechanica ex metaphysicis de causa et effectu* » ; Robinet (1984), p.10.

47. Fichant (1974)

48. « *factum ex quantitate corporis ducta in quantitatem velocitatis* » ; Fichant (1974), p.197

49. « *Hinc vis eadem manet, non quando manet eadem quantitas motus seu summa factorum ex celeritatibus in corpora, sed summa factorum ex quadratis celeritatum in corpora* » ; Fichant (1974) p.197.

n'enveloppe pas l'infini est une notion abstraite et incomplète. Il n'y a de réel que ce qui est inexhaustible⁵⁰ ». Elle ne permet pas toutefois d'évaluer de manière précise les phénomènes.

Cette différence de conception de la force explique l'absence de recours à l'espace et au temps pour son élaboration. Le temps n'est ainsi pas pensé comme un paramètre fondamental de la philosophie de la nature. Il semble ne pas exister. D'ailleurs, « il n'existe pas, à parler exactement, parce qu'un ensemble n'existe jamais quand il n'a pas ses parties coexistantes⁵¹ ». Il est, à l'instar de l'espace, d'ordre relationnel. Il est l'ordre des choses successives. E. A. Fellmann ajouterait même qu'ils sont « une expression de séries causales correspondant au type d'ordre empiriquement donné [dans le monde]⁵² ».

Cependant, Leibniz ne rejetait pas le temps *absolu*, ni le temps *relatif*. Celui-là est « égal », celui-ci est « la chose en mouvement dans le temps, même s'il se pourrait pourtant qu'il soit nul lorsque le mouvement est égal⁵³ ». Ainsi, pour Leibniz, le temps absolu est composé d'une succession d'éléments identiques. Par contre, le temps relatif, temps sensible lié au mouvement des corps, peut sembler inexistant si le mouvement [des corps] est uniforme. Mais, surtout, en infinitiste convaincu, Leibniz considère le temps comme un tout infini qui vérifie le principe de continuité, faisant du temps un candidat au calcul différentiel.

50. Brehier (1990b), p.210.

51. Cité par E. Bréhier ; Brehier (1990b) ; p.213

52. Leibniz (1973), p.124.

53. « Tempus absolutum est æquale, relativum a rebus motis in tempore, cum tamen fortasse nullus sit motus æquabilis. Sic locus absolutus est immotus, relativus est motus. Etsi forte nullum in mundo corpus immotum detur » ; Bertoloni Meli (1988), p.480.

Chapitre 6

La mécanique varignonienne

Le *Project d'une nouvelle mécanique* de Varignon fut publié la même année que les *Principia* de Newton, en 1687. Par la suite, les principaux travaux varignonniens furent édités dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. Varignon y exposa, entre autres, durant trente cinq ans, son point de vue sur la mécanique et sur le mouvement en particulier. Son dernier article fut publié l'année de sa mort, en 1722. À partir de toutes ces publications, nous devons certainement percevoir une évolution de la mathématisation du temps. Aussi, nous nous proposons, afin d'étayer notre propos, d'analyser les textes divulgués suffisamment tardivement par rapport la publication de l'œuvre newtonienne, mais de ne pas aborder ceux parus après la mise en place du concept de temps mathématiquement manipulable. Nous supposons ainsi que Varignon n'a pas eu le temps de la lire, et éviterons, par ailleurs, des redondances. Le *Project d'une nouvelle mécanique* ne sera donc pas abordé, tant il paraît évident qu'en octobre 1687, Varignon n'avait pas eu accès au texte newtonien. Par ailleurs, le premier article traitant du mouvement fut publié en 1692, et en 1711, Varignon avait déjà écrit plusieurs articles touchant au mouvement en général, à la force centrale et au mouvement dans les milieux qui leur résistent. Aussi, nous limiterons notre étude à une période allant de 1692 à 1711.

Les textes sur lesquels s'appuie notre étude, sont, en fait, de deux sortes ¹ :

1. les œuvres publiées. Celles que nous utiliserons seront essentiellement des mémoires publiés dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences ... avec les mémoires de mathématique, de physique... tirez des registres de cette Académie*.
2. les manuscrits. Il s'agit soit de textes contenus dans les registres manuscrits des Procès-Verbaux de séances de l'Académie royale des Sciences – textes rédigés par des copistes officiels –, soit des mémoires conservés dans les pochettes de séance, dont certains sont autographes. Tous sont conservés aux Archives de l'Académie des Sciences à Paris.

1. [Varignon \(1988\)](#); p.387-408.

Nous regarderons tout d'abord le traitement mathématique du temps par Varignon, dans une approche cinématique de l'étude du mouvement. Nous aborderons ensuite ce même traitement mathématique dans la détermination de la force centrale, « tant centrifuge que centripète » pour terminer, enfin, par l'étude du mouvement dans les milieux résistants.

6.1 Élaboration de la cinématique

La construction mathématique du mouvement s'est faite en deux moments :

1. Tout d'abord, en 1692, Varignon établit des « règles générales du mouvement uniforme ² » qui comprennent tous les rapports imaginables entre les forces motrices, les corps mus, les espaces parcourus, les vitesses de ces corps et les temps mis à parcourir ces espaces. Il les exprime « pour abrégé » à l'aide de lettres ³ « au lieu des termes *corps, masse, espace, temps, force, et vitesse* » :

$$\begin{aligned} & ac.db :: ef.gh \\ x.z :: \frac{f}{c} \frac{h}{d} :: fd.hc :: \frac{d}{b} \frac{c}{f} \end{aligned}$$

La première proportion exprime l'action des forces uniformes a et b sur les corps M et N, quand la seconde exprime la vitesse de ces corps. Il étendit, l'année suivante, ces règles aux mouvements accélérés en appliquant le même principe au traité galiléen *De motu naturaliter accelerato*. Il obtint alors deux nouvelles équations qui constituent les « règles générales » des mouvements accélérés ⁴

2. Les règles générales du mouvement uniforme découlent d'un principe général : « I. Principe : Dans toutes sortes de mouvements, soit qu'ils se fassent en roulant ou en glissant, soit en ligne droite ou en ligne courbe, soit que ces mouvements soient uniformes, ou accélérés, ou retardés, dans toutes les proportions & dans toutes les variations imaginables ; la somme des forces qui font le mouvement dans tous les instants de sa durée, est toujours proportionnelle à la somme des chemins ou des lignes que parcourent tous les points du corps mu » ; [Varignon \(1692\)](#) ; p.190.

3. Les lettres utilisées par Varignon sont présentées dans le tableau suivant.

Corps	Masse	Espace	Temps	Force	Vitesse
M	e	f	c	a	x
N	g	h	d	b	z

[Varignon \(1692\)](#), p.192

4. Les symboles utilisés se réfèrent aux grandeurs suivantes :

Corps	Masse	Espace	Temps	premières force	Exposant des abscisses	Dernières abscisses	Dernières vitesse
M	e	f	c	r	p	v	x
N	g	h	d	f		y	z

Varignon suppose des vitesses qui croissent comme les puissances p des temps ou des espaces. De manière générale, elles croissent comme les puissances p des abscisses des grandeurs v et y qui représentent tout ce que nous voudrions.

$$e f f y^{p+1} = g h r v^{p+1}$$

$$w e f y^p = x g r v^p$$

2. Puis en 1698, Varignon présenta à l'Académie, le 5 juillet, un premier mémoire qui fournit une *Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion*, fondé sur les résultats antérieurs et généralisant l'ensemble des travaux sur le mouvement. Ce mémoire débute par un diagramme. Varignon pose ensuite les hypothèses ($dz =$ instant ; $dx =$ espace parcouru dans chaque instant ; $y =$ la vitesse avec laquelle dx aura été parcouru), définit la vitesse et livre la règle générale qu'il illustre par cinq exemples impliquant, pour trois d'entre eux, des paraboles « à cause qu'elles sont les plus simples, qu'elles donnent encore tout ce que j'ai dit de ces sortes de mouvements dans les mémoires de 93. Et que l'hypothèse de Galilée en fait un cas⁵ ». Les deux derniers exemples généralisent définitivement le propos, que Varignon conclue :

« Et ainsi de toutes les autres hypothèses d'*espace*, de *vitesses*, de *temps*, ou de courbes qui les expriment par leurs coordonnées : c'est-à-dire, que deux de ces trois choses à discrétions étant données telles qu'on voudra par les coordonnées de quelque courbe que ce soit, géométrique ou mécanique, il n'importe ; on trouvera toujours de même la troisième avec les deux autres courbes qui servent à exprimer le rapport de toutes ces trois choses⁶. ».

Deux mois plus tard, Varignon présenta à l'Académie un second mémoire qui constitue essentiellement une application de la règle à toutes sortes de courbes, notamment les cycloïdes renversées pour lesquelles il veut démontrer, d'une manière nouvelle, les chutes isochrones. Il montra ainsi que l'expression des temps $dz = \frac{dx}{y}$, présentée dans le mémoire du 5 juillet, est englobée dans une forme plus générale : $ds = \frac{a}{y} \sqrt{dx^2 + dv^2}$ dans laquelle a est une constante afin d'observer l'homogénéité, x représente l'espace parcouru, v est l'ordonnée de BG et s le temps de parcours de BG.

Deux mémoires présentés à l'Académie en 1699 prolongent les travaux antérieurs. Le premier⁷ permet de comparer le temps de chute le long de courbes différentes,

5. Blay (1989) ; p.226.

6. Blay (1989) ; p.228.

7. Ce mémoire porte le long titre : *Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant, les temps des chutes soient en telle raison qu'on voudra à ce qu'un corps en mettrait à tomber de pareille hauteur le long de quelque autre courbe donnée que ce soit, quelque différentes que soient aussi les hypothèses d'accélération ou de variation de vitesse de part et d'autre*, Blay (1989) ; p.236-245.

« de manière générale ». Le second⁸ poursuit le travail présenté à l'Académie en juin 1693. Ces deux mémoires sont consacrés à la recherche d'une durée et ne sont qu'une application de la « règle générale » : $ds = \frac{a}{y} \sqrt{dx^2 + dv^2}$.

Avec Varignon, les phénomènes de la philosophie naturelle commencent à être traités de manière générale. En effet, Varignon ne chercha à énoncer que des généralités édictées sous formes de « Règles ». Il s'en explique dans un mémoire de 1692 : selon l'Académicien, « les philosophes [...] n'ont pas assez examiné le mouvement en général ». Ses prédécesseurs se seraient uniquement concentrés sur ce qu'ils avaient en vue pour leur ouvrage, superposant ainsi des connaissances dans le domaine sans jamais les relier. Wallis, par exemple, essaya de généraliser la mécanique. Mais le chemin suivi ne lui permit pas d'obtenir un nombre suffisant de règles applicables à l'ensemble de la discipline. En outre, ses règles ne sont, à aucun moment, prouvées de « manière générale et universelle ». En revanche, Varignon, dès son premier mémoire, s'attacha à fournir des règles prouvées de manière déductive et reposant sur un principe, renvoyant ainsi au stade de simples corollaires les règles déjà existantes. Le principe fondateur englobe le mouvement dans sa généralité. Celui-ci peut se faire en roulant, en glissant, être uniforme, accéléré, ralenti et se produit aussi bien en ligne droite que selon une trajectoire courbe. Il reste cependant un principe difficile d'emploi, de sorte que Varignon le restreignit, en 1692, à l'étude des corps qui glissent de manière uniforme. Quelques années plus tard, en 1698, et toujours avec le même souci constant d'asseoir ses travaux sur ceux déjà existants, Varignon livra une nouvelle règle générale « pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion », fondée sur ce même principe et généralisant ainsi l'ensemble des travaux sur la vitesse déjà effectués. Cette volonté de généraliser les règles exprimant les phénomènes naturels ne nous était pas apparue avec Newton. Les *Principia* furent publiés trois fois. Mais chaque nouvelle parution ne contient que quelques corrections et quelques révisions de la version antérieure. Newton n'avait jamais cherché à synthétiser les propositions d'une même section et à les regrouper sous une même loi mathématique. Chaque proposition est un cas particulier qui s'inscrit dans un thème déterminé.

Mais surtout, Varignon chercha à exprimer ces règles sous une forme mathématique. Les diverses formulations mélangent notation algébrique et usage de la théorie des proportions de sorte que, tout en restant dans le cadre établi de la fin du XVII^e siècle selon lequel une grandeur est exprimée proportionnellement à une autre, Varignon représenta les grandeurs de la philosophie naturelle par un symbole, les rendant ainsi indépendantes de toutes figures. Le temps fut ainsi libéré de tout support géométrique. Il devint un être ontologique.

8. Ce mémoire est intitulé : *Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant il approche ou s'éloigne de l'horizon en telle raison des temps qu'on voudra.*, Blay (1989) ; p.245-248.

Mais, c'est avec le premier mémoire de 1698 que Varignon franchit une étape fondamentale dans la construction d'un concept de temps mathématiquement manipulable. Il y inclut une nouvelle méthode mathématique alors peu connue en France et en Europe, et reposant sur un nouveau mode de raisonnement. Entre 1693, date de la publication du mémoire traitant du mouvement uniforme, et 1698, l'année où il exposa à l'Académie la *règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques à discrétion* se sont écoulées cinq années durant lesquelles Varignon ne présenta aucun mémoire à l'Académie, et ne publia aucun travail sur le mouvement. Durant ces années, Varignon s'est consacré à l'apprentissage du calcul différentiel de Leibniz, arrivé en France en 1691-92 par le marquis de l'Hospital. Ce dernier avait entrepris la rédaction d'un ouvrage intitulé *Analyse des infiniment petits*, suite aux cours qui lui furent enseignés par Jean Bernoulli à sa demande. Intéressé par le nouveau calcul, Varignon apporta une attention particulière au contenu de ce livre qu'il appliqua à la mécanique seulement après appropriation complète des règles de ce nouveau calcul, c'est-à-dire vers 1697-98. Il faisait ainsi partie avec Leibniz, les frères Bernoulli, Jacques et Jean, et le marquis de l'Hospital des cinq personnes alors en possession du calcul différentiel.

La règle générale donnée dans ce mémoire paraît être encore plus novatrice que le lemme 1 de la *Méthode des premières et dernières raisons*⁹ :

Des Vitesses,	Des Temps,	Des Espaces
$y = \frac{dx}{dz}$	ou $dz = \frac{dx}{y}$	ou $dx = ydz$

TABLE 6.1 – « Règle générale pour toutes sortes de mouvement de vitesse quelconques variées à discrétion », tirée de [Blay \(1989\)](#).

Ainsi, la vitesse « dans chaque instant » est définie de manière mathématique à la fois par un quotient de grandeur de genre différent et par un rapport de différentielles. Les « règles générales » ne découlent donc pas d'un diagramme et trouvent en fait leur origine dans les infiniment petits, dont le calcul leibnizien semble le moyen le plus pertinent pour les exprimer¹⁰ :

« Cela posé, les instants seront = dz ; l'espace parcouru dans chaque instant, sera = dx ; et la vitesse avec laquelle dx aura été parcourue sera = y . De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, à cause que $y + / - dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la règle de tous les mouvements variés comme on voudra, c'est à dire quelque rapport d'espace, de temps ou de

9. [Blay \(1989\)](#), p.222

10. [Blay \(1989\)](#), p.222.

vitesse, qu'on suppose : la vitesse de chaque instant étant toujours et par tout égale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même différentielle de temps. »

L'absence de symbole représentant la force dans l'expression de la vitesse « dans chaque instant » suggère que l'étude du mouvement peut se passer de la connaissance de la cause de celui-ci. Varignon élabore ainsi avec sa « règle générale » une nouvelle discipline de la philosophie naturelle : la cinématique, par laquelle il cherche à décrire le mouvement de manière mathématique sans considération aux causes qui lui ont donné naissance. Mais si l'étude du mouvement est possible sans recours à la notion de force, elle n'en repose pas moins sur les concepts de longueur et de temps, plaçant ces derniers au premier plan de la philosophie naturelle. La cinématique, en outre, relègue la figure à un rôle d'illustration, introduisant ainsi une conception « ingénue » des grandeurs en philosophie de la nature, c'est-à-dire qu'elle permet l'étude des phénomènes de la nature sans considération aux concepts sous-jacents. Elle ne prend en compte uniquement leur représentation mathématique. Une distance est représentée par « d », la vitesse apparaît dans les démonstrations par la lettre « v », alors qu'au temps est associée la lettre « t ». Cette conception du traitement des phénomènes de la nature renforce cependant chez le lecteur le sentiment d'une perte d'informations, ce dernier n'ayant plus aucun support sur lequel se pencher pour visualiser le phénomène.

Dans le second article ¹¹ exposé à l'Académie durant l'année 1698, Varignon recourt de nouveau à la cinématique pour chercher la durée de chute, isochrone, dans toutes sortes de courbes, d'un mobile. Il recherche à exprimer un intervalle de temps infiniment petit en fonction des espaces parcourus et des vitesses du corps. Il manipule de fait mathématiquement le temps. Ce qu'il ne fit pas en 1692 puisque des intervalles aussi petits n'étaient probablement pas encore conceptualisables, sur le plan mathématique, pour Varignon ¹².

Mais c'est avec les mémoires du 30 janvier et du 31 mars 1700 que Varignon achève l'élaboration de la cinématique. Dans le premier de ces mémoires, il propose une méthode de détermination « générale » des forces, des vitesses, des espaces et des temps, « dans toutes sortes de mouvement rectilignes variés ». Ce court mémoire ne fait référence à aucun écrit précédent ¹³. Il débute par une figure (figure 6.1) montrant six

11. Ce mémoire porte pour titre : *Application de la Règle générale des vitesses variées, comme on voudra aux mouvements par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où l'on déduit une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée*; Blay (1989), p.229-35.

12. En 1692, Varignon énonce une règle générale du mouvement uniforme : « le produit de la durée de ce mouvement par la force qui l'a commencé est toujours proportionnel au produit de la masse du corps mu par la longueur du chemin qu'il aura parcouru, c'est-à-dire, par le chemin de son centre de gravité. » Il exprime ensuite cette règle mathématiquement de la manière suivante : $ac.db :: ef.gh$ à l'aide des proportions; Varignon (1692), p.191.

13. Il existe cependant au moins une version antérieure, consultable dans les Registres manuscrits des procès-verbaux des séances de l'Académie royale des Sciences, dont M. Blay cite le premier paragraphe

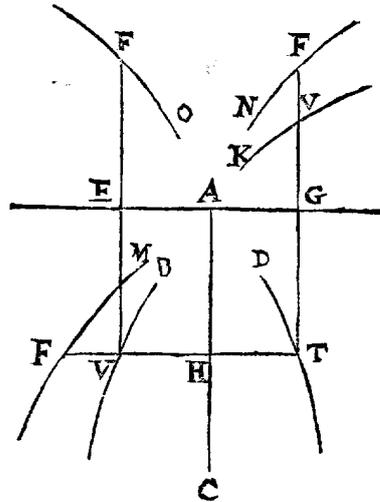


FIGURE 6.1 – Diagramme du mémoire « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discrétion » exposé le 30 janvier 1700 à l'Académie royale des sciences. TD représente la « *courbe des temps* ». VB et VK représentent les « *courbes des vitesses* » et FM, FN, FO sont les « *courbes des forces* ». Figure tirée de [Varignon \(1700c\)](#).

courbes TD, VB, VK, FM, FN, FO, appelées « *courbe des temps* » (TD), « *courbes des vitesses* » (VB, VK) et « *courbes des forces* » (FM, FN, FO).

Dans le langage moderne, elles expriment, respectivement :

1. les variations de l'espace AH en fonction du temps HT,
2. les variations de l'espace AH en fonction de la vitesse VH
3. les variations du temps AG en fonction de la vitesse VG
4. les variations de l'espace AH en fonction de la force centrale FH
5. les variations du temps AG en fonction de la force centrale FG
6. les variations de la vitesse EA en fonction de la force centrale FE

dans sa *Naissance de la mécanique analytique* : « Le cinq juillet de 1698 je démontrai à l'Académie une Règle générale pour toutes sortes de mouvements variés à discrétion, et telle qu'en prenant sur la figure présente (dont tous les angles rectilignes sont droits) AH pour tout l'espace parcouru, les ordonnées VH = VG d'une courbe quelconque, VB ou VK pour les vitesses à chaque point H de cet espace, et les ordonnées HT d'une autre courbe aussi quelconque TD pour les temps employés à venir de A en H ; une de ces trois courbes étant donnée, l'on en déduira toujours les deux autres ; [Blay \(1992\)](#), p. 181. ». De fait, ce mémoire s'inscrit directement dans le prolongement du mémoire du 5 juillet 1698.

Varignon pose ensuite les hypothèses et attribue à chacune des quatre variables principales *espace, temps, vitesse et force* un symbole algébrique ¹⁴ :

« Cela étant posé, soient les espaces parcourus $AH = x$, les temps employés à les parcourir $AT = AG_t$, les vitesses en H (que j'appellerai *finales*) $HV = AE = GV = v$, les forces centrales correspondantes $HF = EF = GF = y$. »

Il met alors en place les concepts cinématiques ¹⁵ :

« De là, on aura dx pour l'espace parcouru comme d'une vitesse uniforme v , à chaque instant ; dv pour l'accroissement de vitesse qui s'y fait ; ddx pour ce qui se parcourt d'espace en vertu de cet accroissement de vitesse ; & dt pour cet instant. »

Enfin, il énonce les deux « règles générales » des mouvements en ligne droite ¹⁶ :

« A ce compte, la vitesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au temps employé à le parcourir, l'on aura déjà $v = \frac{dx}{dt}$ pour une première règle, laquelle donnera $dv = \frac{ddx}{dt}$, en faisant dt constante.

De plus, les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante & continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force & des carrés des temps employés à les parcourir, l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose ici de résoudre. »

Ainsi, comme dans le mémoire du 5 juillet 1698, la vitesse est considérée comme uniforme durant l'intervalle de temps, infinitésimal, dt , de sorte que nous pouvons écrire avec Varignon $v = \frac{dx}{dt}$. Par la suite, Varignon montre l'usage de ces règles à l'aide de deux exemples, dont le premier reprend l'hypothèse de Galilée sur la pesanteur : les espaces $AH(x)$ sont comme les carrés des vitesses correspondantes $VH(v)$ et la courbe VB est une parabole dont le lieu est $x = vv$. Partant, il recherche alors l'équation de chacune des six courbes. De par les hypothèses et la règle 1, $\sqrt{x} = \frac{dx}{dt}$ ou $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

De sorte que $t = 2\sqrt{x}$ ou $x = \frac{1}{4}t^2$ pour le lieu de la courbe des temps DT . Mais la

14. Varignon (1700c), p.23

15. Varignon (1700c); p.23

16. Varignon (1700c); p.23

recherche des courbes FM, FN, et FO est peut être plus instructive quant à l'utilisation du temps. L'équation de la courbe des vitesses BV reste inchangée : $x = vv$. Sa différentielle donne $dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Avec la règle II, y devient $y = \frac{dx}{2dt\sqrt{x}}$. Or nous savons d'après la règle I, que $x = \frac{1}{4}tt$; d'où $t = 2\sqrt{x}$ et $dt = \frac{2dx}{t}$. Donc $y = \frac{tdt}{2tdt} = \frac{1}{2}$. Varignon précise alors ¹⁷ : « La même chose se trouvera encore par le moyen de la seule équation $x = \frac{1}{4}tt$ de la courbe FM, en faisant dt constante ; puisqu'alors cette équation donnant $ddx = \frac{dt^2}{2}$, la seconde règle donnera aussi $y = \frac{d^2}{2} = \frac{1}{2}$ ». Les lignes FM, FN, et FO sont donc des droites parallèles.

Le mouvement est ainsi explicité sans qu'au préalable il ait été définies les grandeurs physiques mises en jeu. L'approche de l'étude du mouvement par le biais du calcul des différences leibnizien n'impose donc pas le besoin d'une représentation géométrique des grandeurs utilisées.

L'accomplissement total de la cinématique est atteint avec le mémoire du 31 mars 1700 consacré au « mouvement en général par toutes sortes de courbes », qui prolonge de fait le mémoire présenté deux mois plus tôt à l'Académie. Varignon y matérialise les rapports entre les différents paramètres à l'aide d'un graphique très similaire à celui du mémoire du 30 janvier. Cependant, deux éléments le distinguent du précédent (figure 6.2) :

1. Le mobile décrit désormais la trajectoire curviligne QL.
2. Le mobile est repéré par un système de coordonnées constituées de l'abscisse AH et d'une ordonnée définie par l'arc circulaire HL que le centre C du corps décrit.

Aux six courbes précédentes s'ajoute donc la courbe QL, nommée *courbe des chemins*.

Varignon procède alors de manière analogue au mémoire précédent. Il pose les hypothèses et assigne un symbole aux grandeurs principales ¹⁸ :

« Soient encore aussi $AH = x$, les temps $HT = AG = t$, les vitesses $HV = AE = GV = v$, & les forces centrales absolues $HF = EF = GF = y$. Soit de plus l'espace parcouru $QL = s$, $AC = a$, $CH = r$, & $Rl = dz$. »

Il organise ensuite les concepts cinématiques. De la définition de $QL = s$, « l'on aura de-là ds pour l'espace parcouru d'une vitesse uniforme v , à chaque instant ; dv

17. Varignon (1700c) ; p. 25.

18. Varignon (1700a), p.85.

il reste à achever les concepts cinématiques manipulés. Trajectoire, vitesse et temps restent, pour le moment, de simples objets mathématiques que Varignon utilise dans l'unique but de résoudre les questions du mouvement qu'il a réduites à des questions calculatoires. Il ne recourt pas non plus au concept d'accélération alors qu'il considérait déjà dans le mémoire précédent « l'accroissement de vitesse qui s'y fait », sous-entendu durant un intervalle de temps « dt » infiniment petit. Autrement dit, il manipulait déjà avec le mémoire du 30 janvier 1700 l'idée qui se cache derrière ce que nous nommons « accélération » de nos jours. C'est quelques années plus tard, dans le mémoire du 6 juillet 1707, que Varignon donna une définition de la vitesse²⁰ :

« Définition II. : Quoique dans le mouvement il n'y ait de réel ou d'absolu que la masse ou quantité de matière du corps mû, l'espace qu'il parcourt, la force qui le lui fait parcourir, et le temps qu'il y emploie, on ne laisse pas d'ordinaire d'y concevoir encore une autre chose qu'on appelle *vitesse*. Par ce mot on entend le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir : de sorte que plus cet espace est grand par rapport à ce temps, ou ce temps petit par rapport à cet espace, plus dit-on qu'a été grande la vitesse avec laquelle il aura été parcouru. »

Ainsi, la vitesse est l'élément du mouvement qui vient compléter l'ensemble des choses réelles que sont la masse du corps mû, l'espace qu'il parcourt, la force qui le lui fait parcourir et le temps qu'il met à le parcourir. Elle est le lien entre l'espace parcouru et le temps mis à le parcourir. Elle est d'autant plus grande que l'espace parcouru est d'autant plus grand par rapport au temps ou que le temps est d'autant plus petit par rapport à cet espace. Sur le plan mathématique, elle s'exprime par un quotient. C'est l'objet du corollaire qui suit la définition²¹ :

« Corollaire : Suivant ce langage on voit qu'en prenant e pour l'espace parcouru, & t pour le temps employé à le parcourir, la fraction $\frac{e}{t}$ exprimera tellement la vitesse de ce mouvement, qu'elle en sera la mesure précise pendant toute sa durée, si cette vitesse est toujours la même, & $\frac{de}{dt}$, pendant chaque *instant* dt de sa durée, qu'elle qu'en soit la vitesse, en prenant ici d pour la caractéristique d'un infiniment petit. ».

20. [Varignon \(1707b\)](#); p.223.

21. [Varignon \(1707b\)](#); p.223.

Enfin, avec les définitions III à VI²², Varignon aborde la notion d'accélération^{23 24} :

« Définition III : On appelle ici en général *mouvement varié* ou de *vitesse variée*, celui dont les vitesses croissent ou décroissent de quelque manière ou suivant quelque proportion que ce doit : On le dit *accéléré* ou *croissant*, tant qu'elles croissent ou augmentent, & *retardé* ou *décroissant*, tant qu'elles décroissent ou diminuent : La vitesse en sera aussi dite *accélérée* dans le premier cas, & *retardée* dans le second. La quantité dont elle augmentera à chaque instant, sera aussi appelée son *accélération* ou son *accroissement instantané* ; & la quantité dont elle diminuera à chaque instant, sera de même appelée son *retardement* ou son *décroissement instantané*. Nous appellerons aussi *vitesse entière instantanée*, ou simplement *vitesse*, tout ce que le corps mû en aura à chaque instant de son mouvement : je dis *simplement vitesse*, toute vitesse étant instantanée. »

Ainsi, d'un point de vue mathématique, la seconde règle générale, sous la forme $y = \frac{dv}{dt}$, s'assimile à la définition mathématique de l'accélération instantanée, en restant toutefois dans le registre langagier leibnizien, c'est-à-dire en considérant le rapport $\frac{dv}{dt}$ comme un rapport de variations et non comme un quotient de dérivées.

6.2 La dynamique

Avec les travaux de 1692 à 1699, Varignon s'était surtout concentré sur l'étude cinématique du mouvement. 1700 marqua une année charnière. Varignon introduisit pour la première fois de façon explicite la notion de force dans le mémoire du 30 janvier. Mais c'est en tout 29 mémoires traitant du concept de force et étudiant le mouvement tant dans le vide que « dans les milieux qui lui résistent », que Varignon présenta à l'Académie entre 1700 et 1711. S'appuyant sur ses travaux de la fin du XVII^e siècle, non

22. Ce mémoire, intitulé *Des mouvements variés à volonté, comparés entre eux & avec les uniformes* débutent par sept définitions réparties ainsi : la première définition est celle de l'*instant*. la seconde, que nous venons de citer est celle de la vitesse et les définitions III à VI concernent les divers mouvements variés. Enfin, la définition VII énonce ce que Varignon entend par mouvement uniforme.

23. Les définitions IV, V, et VI s'attardent sur les différents types d'accélération. Varignon distingue ainsi les mouvements de *vitesse continûment variée*, c'est-à-dire ceux pour lesquels les accroissements ou décroissements instantanés « s'en feront de suite dans les instants non interrompus, et seront tous de même genre », des mouvements *continûment accélérés*, c'est-à-dire ceux pour lesquels les vitesses « croissent toutes continûment ». Enfin, un mouvement peut aussi être qualifié d'*uniformément accéléré* lorsque « les accélérations ou les accroissements continus de vitesses seront tous égaux entre eux ». Chacune de ces définitions possède un contraire. Ainsi, un mouvement dont les accroissements se font dans des instants interrompus et ne sont pas de même genre, est un mouvement de *vitesse discontinûment variée*, etc.

24. Varignon (1707b) ; p.223-4.

seulement il paracheva la cinématique, mais il donna aussi une forme mathématique à la dynamique initiée par Newton dans les *Principia*.

Nous verrons dans un premier temps l'emploi mathématique du temps qu'il fit dans le développement de la force centrale. Nous aborderons ensuite le traitement mathématique du temps dans l'étude des milieux résistants.

6.2.1 Le mouvement dans le vide

L'objet principal du mémoire du 31 mars 1700 est l'étude de la force centrale « tant centrifuge, que centripète » agissant sur un corps qui décrit une trajectoire curviligne. Toutefois, les « forces centrales tendantes au foyer des sections coniques » sont renvoyées à un mémoire ultérieur traitant « de la pesanteur des planètes²⁵ » :

« [...] Il en résulte aussi une formule très-simple des *forces centrales*, tant centrifuges, que centripètes, lesquelles sont le principal fondement de l'excellent ouvrage de M. Newton *De Phil. natur. Princ. Mathem.*. Mais la brièveté de mémoire ne me permettant pas de m'étendre ici autant qu'il faudrait sur les usages de cette règles pour la découverte des pesanteurs des planètes, j'en réserverai la recherche pour une autre fois [...] »

Varignon distingue ainsi la force centrale, comme celle qui fait décrire au corps une trajectoire géométrique, de la force de pesanteur qui explique la trajectoire mécanique d'une planète.

Force centrale

La force centrale est définie dans le mémoire du 30 janvier 1700²⁶ :

« De plus, les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force & des carrés des temps employés à les parcourir, l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. »

Alors que la « force centripète » s'exprime $F = \frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ dans les *Principia*, Varignon la note $y = \frac{ddx}{dt^2}$, soit par le rapport d'une portion d'espace par un temps, selon une définition dont il se cache bien de préciser l'origine et qui ne se réfère à aucune figure. Si nous retournons aux premiers mémoires de Varignon, la force dont ils traitent est définie relativement à une autre force. Dans le mémoire de 1692, la force apparaît dans le principe I²⁷ :

25. [Varignon \(1700a\)](#); p.84.

26. [Varignon \(1700c\)](#), p.24

27. [Varignon \(1692\)](#), p.191

« Dans toutes sortes de mouvements, soit qu'ils se fassent en roulant ou en glissant, soit en ligne droite ou en ligne courbe, soit que ces mouvements soient uniformes, ou accélérés, ou retardés, dans toutes les proportions & dans toutes les variations imaginables ; la somme des forces qui font le mouvement dans tous les instants de sa durée, est toujours proportionnelle à la somme des chemins ou des lignes que parcourent tous les points du corps mû. »

A l'aide d'une notation mathématique moderne²⁸, ce principe peut s'écrire $\int F dt \propto \int dx$. Varignon, toutefois, ne le traduit pas mathématiquement et le restreint au mouvement uniforme duquel il ressort que si « les forces a et b , demeurant toujours les mêmes, c'est-à-dire uniformes, font glisser les corps M et N , dont les masses sont e et g , par les espaces g et h , pendant les temps c et d , il est toujours vrai que $ac \cdot db :: ef \cdot gh$ ». Il décline alors cette relation de proportionnalité selon la modification des hypothèses envisagée. Ainsi, si $a = b$, alors :

$$c.d :: ef.gh \quad (6.1)$$

$$e.g :: ch.df \quad (6.2)$$

$$f.h :: ag.be \quad (6.3)$$

Mais si $c = d$:

$$a.b :: ef.gh \quad (6.4)$$

$$e.g :: ab.df \quad (6.5)$$

$$f.h :: ag.be \quad (6.6)$$

etc.

Cette succession de relations est cependant d'utilisation laborieuse et apporte peu aux connaissances, de sorte qu'elle ne peut être, selon nous, la première étape d'un raisonnement aboutissant à l'expression de la force écrite dans le mémoire du 30 janvier 1700. Cette dernière, en outre, ne respecte pas la théorie des proportions, puisqu'elle fait apparaître un quotient de grandeurs de genre différent, et est avant tout définie de manière indépendante. Autrement dit, elle est déterminée sans relation à toute autres force. Aussi, il nous faut chercher ailleurs. L'introduction du mémoire du 31 mars 1700 nous met sur la piste. Il y ressort, en effet, que Varignon avait une bonne connaissance des *Principia* et maîtrisait notamment la proposition VI du livre premier, le lemme x de la *Méthode des premières et dernières raisons* et ses corollaires²⁹ :

28. F désigne la force et x un chemin suivi.

29. [Newton \(1966b\)](#) ; p.43

« Corollaire 3 : Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les carrés des temps »,

Ainsi, la force centrale varignonienne trouve son origine dans le lemme x.

Mais ces règles permettent surtout de retrouver en quelques lignes seulement des résultats établis dans les *Principia*³⁰ :

« Mais avant que de finir, il est bon de remarquer que sans aucune nouvelle hypothèse, les deux règles précédentes nous donnent tout d'un coup la Prop. 39. du Liv. I de M. Newton, *De Phil. nat. Princ. Math.* [...] »

La proposition 39 du livre I, dernière de la section 7 qui a pour objet l'étude *De l'ascension et de la descension rectiligne des corps*, s'énonce ainsi³¹ :

« La quadrature des courbes étant supposée, & le corps montant ou descendant dans une ligne droite qui passe par le centre vers lequel il est poussé, suivant une loi quelconque, on demande la vitesse de ce corps en un point quelconque de cette droite, ainsi que le temps employé à y arriver : & réciproquement ».

Cette proposition diffère des autres de la même section par sa résolution qui repose sur la supposition de l'existence de la quadrature d'une courbe. Autrement dit, Newton conjecture que l'aire sous la courbe peut être évaluée et renvoie, par ailleurs, le lecteur à des résultats obtenus dans sa jeunesse à l'aide de *la Méthode des Fluxions et des séries infinies*. En outre, Newton prouve la proposition xxxix en deux assertions, dont la première consiste à trouver une aire (figure 6.3) qui représente la vitesse atteinte par un corps en un point E se déplaçant sous l'action d'une force centripète quelconque³² :

« Que le corps E tombe d'un lieu quelconque A suivant la droite ADEC, & que BFG soit la courbe dont toutes les ordonnées AB, DF, EG, & soient proportionnelles aux forces en A, D, E vers le centre C, la vitesse en un point quelconque E sera comme la racine quarée de l'aire ABEG ».

Démonstration³³ :

« Pour démontrer la première de ces deux assertions, soit prise sur la droite AE une très petite ligne DE donnée de longueur, & soit DLF le lieu de la

30. Varignon (1700c), p.27

31. Newton (1966b) ; p.129.

32. Newton (1966b) ; p.129.

33. Newton (1966b) ; p.130.

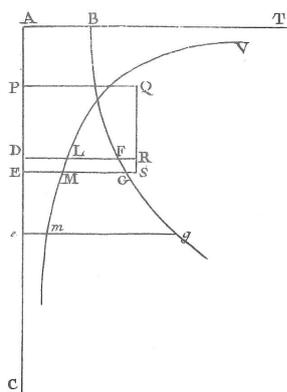


FIGURE 6.3 – Illustration de la proposition xxxix du livre I des *Principia*. Figure tirée de [Newton \(1966b\)](#).

ligne EMG, lorsque le corps était en D ; si la force centripète est supposée celle qui convient pour que la vitesse du corps descendant soit proportionnelle à la racine quarrée de l'aire ABGE, cette aire sera en raison doublée de la vitesse, c'est-à-dire, que si au lieu des vitesses en D & en E, on écrit V & $V + I$, l'aire ABFD sera comme V^2 , & l'aire ABGE comme $V^2 + 2VI + I^2$, d'où il résultera que l'aire DFGE sera comme $2VI + I^2$, & par conséquent $\frac{DFGE}{DE}$ sera comme $\frac{2VI + I^2}{DE}$, c'est-à-dire, en prenant les premières raisons des quantités naissantes, que la longueur DF sera comme la quantité $\frac{2VI}{DE}$, ou comme sa moitié $\frac{I \times V}{DE}$.

Maintenant, le temps, pendant lequel le corps en tombant parcourt la petite ligne DE, est comme cette petite ligne directement, & la vitesse V inversement ; de plus, la force est comme l'incrément I de la vitesse directement, & comme le temps inversement ; donc si on prend les premières raisons des quantités naissantes, cette force sera comme $\frac{I \times V}{DE}$, c'est-à-dire comme la longueur DF. Donc la force proportionnelle à DF ou à EG fera descendre le corps avec une vitesse qui sera comme la racine de l'aire ABGE.
C.Q.F.D »

La vitesse au point E est donc donnée. Elle est « comme la racine quarrée de l'aire ABGE ». Donc lorsque le corps est en D, sa vitesse correspond à l'aire ABDF. Durant le temps de chute de D à E, qui est le temps cherché, le corps a parcouru l'élément de ligne DE et sa vitesse s'est accrue de I . De sorte qu'au lieu de noter les vitesses par les aires ABGE et ABDF, il le fait à l'aide des symboles V et I et les vitesses en D et E deviennent respectivement V^2 et $(V + I)^2 = V^2 + 2VI + I^2$. Par conséquent, l'élément

d'aire DFGE est comme $2VI + I^2$ et « en prenant les premières raisons des quantités naissantes », la force, qui est proportionnelle à l'ordonnée DF, est donc comme $\frac{I \times V}{DE}$. D'autre part, la force, par définition, est comme l'incrément de vitesse et inversement comme le temps, et ce dernier peut être exprimé en fonction de la longueur DE et de la vitesse, considérée comme uniforme sur le parcours infiniment petit DE. Ainsi, la force est comme $\frac{I \times V}{DE}$. Elle est donc proportionnelle à la même quantité que l'élément de ligne DE.

Varignon recourt à sa règle générale³⁴ :

« [...] En effet, ces deux règles donnent $dt = \frac{dx}{v}$, $dt = \frac{dv}{y}$; & par conséquent $\frac{dv}{x} = \frac{dv}{y}$, ou $ydx = vdv$, ce qui donne aussi (\int signifie *somme*)
 $\int ydx = \frac{1}{2}vv$ ou $v = \sqrt{2 \int ydx}$: c'est-à-dire en général, les vitesses VH, comme les racines carrées des espaces renfermées entre AH, FH, & la courbe FM, quelles que soient les forces $y(FH)$; ainsi que l'a démontré M. Newton dans la première parties de cette 39^e proposition ».

En utilisant ainsi seulement deux règles, Varignon arrive, en quelques lignes, aux mêmes conclusions que Newton. Il expédie, pour ainsi dire, la proposition 39 au corpus des cas particuliers de la dynamique. La manipulation mathématique du temps qui consiste à égaler deux intervalles infiniment petits afin d'obtenir une équation différentielle, dont la solution est l'expression de la vitesse recherchée, ne s'apparente pas à la pratique newtonienne telle qu'elle apparaît dans la proposition 1. Autrement dit, Varignon ne suppose pas, selon la pratique des géomètres du xvii^e siècle, un phénomène pouvant être découpé en intervalles de temps égaux, et dont l'étude durant un seul de ces intervalles suffit.

Dans la seconde assertion, Newton cherche à évaluer le temps de parcours de l'élément de ligne DE³⁵ :

« La seconde assertion est facile à démontrer présentement ; car puisque le temps, employé à parcourir une petite ligne DE d'une longueur quelconque donnée, est inversement comme la vitesse, & par conséquent inversement comme la ligne droite qui serait la racine de l'aire ABFD, & que DL, & par conséquent l'aire naissante DLME est comme la même droite inversement : le temps sera comme l'aire DLME : & la somme de tous les temps, comme la somme de toutes ces aires, c'est-à-dire, par le corol. du lemme 4. que le temps total employé à parcourir la ligne AE sera comme l'aire totale ATVME. C.Q.F.D. »

34. [Varignon \(1700c\)](#) ; p.27.

35. [Newton \(1966b\)](#) ; p.130-1

Newton s'appuie sur l'assertion précédente et fait usage de la *Méthode des premières et dernières raisons* (par le corollaire 4.) pour prouver la deuxième partie de cette proposition. Il recourt en outre, à la supposition de la quadrature de l'aire qui représente le temps.

Varignon procède tout autrement :

« [...] Il suit aussi de-là & de la première des deux règles précédentes, que $dt = \frac{dx}{\sqrt{2 \int y dx}}$. D'où l'on voit encore en général, que si VB , au lieu d'être une courbe des vitesses, était telle que VH fut partout en raison réciproque des $\sqrt{2 \int y dx}$, c'est-à-dire, en sorte qu'on eut partout $VH = \frac{2}{\sqrt{2 \int y dx}}$, ayant alors $VH \times dx = \frac{dx}{\sqrt{2 \int y dx}}$, l'on aurait aussi $dt = VH \times dx$, & enfin $t = \int VH \times dx$, c'est-à-dire, les temps TH comme les espaces correspondants, compris entre AH , HV , & BV , ainsi que Newton l'a encore démontré dans la seconde partie de la même 39^e proposition³⁶ ».

En effet, la vitesse étant donnée par $v = \frac{dx}{dt}$ par la première des règles et par $v = \sqrt{2 \int y dx}$ selon la première assertion, l'identification des deux égalités donne immédiatement la durée cherchée : $dt = \frac{dx}{\sqrt{2 \int y dx}}$. Par une nouvelle identification entre le résultat précédent et $dt = VH \times dx$, Varignon aboutit, par intégration, au résultat cherché : $t = \int VH \times dx$.

Avec le mémoire du 31 mars 1700, Varignon distingue les *forces centrales tendantes à un même point* des *forces centrales tendantes suivant des directions parallèles*. Les premières constituent l'objet de la section II des *Principia* : *De la recherche des forces centripètes*. Leur traitement par Varignon dans ce nouveau mémoire montre aussi la facilité d'emploi des nouvelles règles vis-à-vis des propositions newtoniennes³⁷ :

« [...] j'en réserverai la recherche pour une autre fois, me contentant de faire voir ici avec quelle facilité elle expédie les exemples que voici, dont la plupart sont de M. Newton ; à savoir ceux des prop. 7, 8, 9, 10, de son premier livre, lesquels sont compris dans les art. 1, 19, 12, 9, ci-après. [...] »

36. Varignon (1700c); p.27.

37. Varignon (1700a); p.84.

Varignon détermine d'abord une expression différentielle du petit arc ds parcouru par le corps L (figure 6.4). À cette fin, il commence par exprimer, en fonction du paramètre p , le quotient $\frac{aapdr}{\sqrt{2arr - aap \times aap - prr}}$, qui correspond à l'élément d'arc dz , qui lui permet d'obtenir l'expression différentielle caractéristique de la trajectoire $ds^2 = dr^2 + dz^2 = \frac{2a^3pr - 2apr^4 + aappr}{2arr - aap \times aap - prr \times dr^2}$.

Il poursuit par la recherche de l'expression de la force y . Partant, Varignon pose $\frac{ds^2}{dz^2} = \frac{2aarr - 2r^4 + apr}{a^3p}$ qui s'exprime aussi sous la forme $\frac{ds^2}{r^2dz^2} = \frac{2aa - 2r^2 + ap}{a^3p}$. Or le mouvement est sujet à la loi des aires. De fait, « l'on aura partout ici suivant M. Newton (Phil. nat. Princ. Math. Lib. I. sect. 2 th. 1.) les dt comme les rdz , ou $dt = rdz$. ». L'expression précédente s'écrit alors $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a^3 - 2r^2 + ap}{a^3p}$. Varignon parvient enfin à l'expression de la force recherchée, en différenciant les deux expressions précédentes et en considérant les intervalles de temps constants. Ainsi, comme le signale M. Blay³⁹, « Varignon fait apparaître, à l'issue de son calcul, et seulement d'un calcul, l'expression générale, trouvée précédemment, de la force centrale y ».

La définition du « Rayons des Forces », exposée à l'Académie en novembre 1700, vient compléter l'étude varignonienne des forces centrales⁴⁰ :

« Dans une courbe quelconque, j'appelle *Rayons des Forces* du corps qui la décrit, les droites tirées de ce corps au point où concourent les directions de ce qu'il en doit avoir pour la décrire, sans autre secours que celui d'une première impression à angle quelconque avec la première de ces directions, & ne point s'échapper par la touchante au point où il se trouve, ainsi qu'il lui arriverait sans de telles forces que j'appellerai *Centrales*, lesquelles sont les seules que je lui suppose dans toute la durée de son mouvement ».

Avec cette définition, le concept de force centrale est quasiment achevé. La force est donc la raison qui empêche un corps de quitter sa trajectoire curviligne selon la touchante.

Reprenant la pratique mathématique cartésienne qui veut que l'on nomme par une des premières lettres de l'alphabet les grandeurs définies et que l'on recourt aux dernières lettres de l'alphabet pour dénommer les variables, Varignon substitue, dans le mémoire présenté à l'Académie le 29 janvier 1701, la lettre f à y , achevant ainsi le concept de force en philosophie naturelle⁴¹.

39. Blay (1992), p.203.

40. Varignon (1700b), p.225

41. Varignon (1701) ; p.37.

« En un mot les forces centrales étant toujours $f = \frac{SC}{dt^2}$, il est visible que leur expression étant donnée, l'on aura aussitôt celle de SC, [...] ».

Varignon a ainsi établi le concept de force en se fondant sur les travaux newtoniens, notamment la proposition VI du premier livre des *Principia*. Il en a recherché une relation mathématique plus générale, exprimée de manière nouvelle ne dépendant pas d'une figure. Mais, il subsiste toutefois des difficultés de conceptualisation dans la force centrale varignonienne. Cette dernière est supposée « constante et continuellement appliquée », et le corps animé d'un mouvement uniforme. Parallèlement, sa vitesse subit des accroissements. Autrement dit, un élément d'espace « est parcouru comme d'une vitesse uniforme » durant un intervalle de temps infiniment petit, et l'élément d'espace suivant se voit être parcouru à une vitesse, elle aussi, constante mais infiniment supérieure. Il nous faut donc imaginer, entre le commencement du mouvement et sa fin, la vitesse du corps passant par une infinité de vitesses différant infiniment peu d'une vitesse moyenne, et dont chacune diffère infiniment peu de la suivante. En termes modernes empruntés à la thermodynamique, nous dirions que nous avons affaire à une vitesse réversible. Mais si la vitesse est constante durant un intervalle de temps infiniment petit, et augmente d'une quantité négligeable entre deux de ces intervalles de temps identiques successifs, cela implique que la force centrale agit instantanément au commencement de chaque « instant » uniquement, à la manière d'une impulsion, rappelant par la même la force centripète newtonienne apparaissant, entre autres, dans la première proposition du livre I des *Principia*. Le problème de la conceptualisation de la force centripète newtonienne n'est donc pas résolu. Selon M. Blay, « les difficultés de la conceptualisation varignonienne résident principalement dans le fait que l'expression de l'accroissement de vitesse dv et celle de la force « y » impliquent, [...], une modélisation ambiguë du mode d'action de la force en ce sens que celle-ci est censée agir, suivant l'expression que Varignon s'efforce de déterminer, soit seulement au tout début de l'intervalle de temps dt (c'est une conséquence implicite des manipulations strictement mathématiques conduisant à l'expression de dv), soit de façon constante et continue pendant tout l'intervalle de temps dt (c'est l'hypothèse explicite relative au calcul de « y »)⁴² ». Nous reprocherons à Varignon, avec M. Blay, de s'être davantage consacré à « faire tourner » l'algorithme mathématique au détriment du développement de manière rigoureuse d'un concept d'accroissement de vitesse.

La notion d'« instant » n'est pas non plus définie. Nous aurions aimé que Varignon y apporte des précisions, notamment parce que choisir l'espace et l'« instant » comme piliers des concepts de vitesse et de force centrale suggère que ceux-là soient préalablement définis. Or ce n'est que dans le mémoire du 6 juillet 1707, portant sur les *mouvements variés à volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes*, que Varignon

42. Blay (1992); p.187.

aborda de manière explicite la notion d'« instant⁴³ »

« Par le mot d'*instant* nous entendrons ici une particule de temps infiniment petite, ou (pour parler comme quelques modernes depuis M. Descartes) indéfiniment petite, c'est-à-dire, moindre que quelque grandeur assignable de temps que ce soit : c'est ce qu'en langage des anciens l'on appellerait *minor quavis quantitate data*. C'est aussi ce qu'on entend par les *Éléments* d'un corps ou d'un espace & par les *points* dont on dit quelquefois que ce corps ou cet espace est composé »

L'« instant » est donc l'équivalent au temps du point à l'espace. Cette idée apparaît encore plus clairement dans un traité publié à titre posthume⁴⁴ :

« Définition v. L'instant est pris ici pour la plus petite portion de temps possible, et par conséquent doit être regardé comme un point indivisible d'une durée quelconque »

L'« instant » varignonien est donc un indivisible de durée quelconque, c'est-à-dire un intervalle de temps infiniment petit fini (celui qui ressort de la notation leibnizienne « dt »). Mais, bien que d'une certaine épaisseur, il ne peut être confondu avec la « particule de temps » newtonienne, puisque celle-ci est une durée qui tend vers zéro. La reformulation mathématique des *Principia* par Varignon repose donc, en partie, sur des concepts différents de ceux qui ont permis leur élaboration, notamment celui du temps, qui, chez Varignon, a une origine leibnizienne. Autrement dit, le temps varignonien est une grandeur relationnelle composé de « points indivisibles d'une durée quelconque ».

Force de pesanteur

Avec le mémoire du 13 novembre 1700, Varignon aborde la force de pesanteur. Il se consacre, de fait, exclusivement à l'étude de problèmes astronomiques. Nous nous limiterons cependant uniquement au lemme II⁴⁵ d'où découle la règle générale donnant l'expression des « forces centrales nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbites qu'on leur a supposés ».

Lemme II

« Un corps L décrivant une courbe quelconque QLM, trouver ses forces centrales en générale. »

43. [Varignon \(1707b\)](#) ; p.222-3.

44. *Traité du mouvement et de la mesure des eaux coulantes et jaillissantes. Avec un traité préliminaire du mouvement en général. Tiré des ouvrages manuscrits de feu Monsieur Varignon, par l'Abbé Pujol* publié de façon posthume à Paris en 1725, cité par [Blay \(1992\)](#) ; n.8, p. 156.

45. [Varignon \(1700b\)](#) ; p.227.

Il en propose la démonstration suivante ⁴⁶ :

« Soient encore du centre C les rayons CL, Cl, indéfiniment proches l'un de l'autre, avec les arcs LH, LR, dont le premier rencontre AC en H, et le second, CL en R ; duquel point R soit encore aussi RP perpendiculaire sur Ll. Soient de plus AH = x , HC ou LC = r , Rl = dz , Ll = ds , v = la vitesse (du corps mû) en L suivant LM, dt = le temps (instant) que ce corps met à parcourir Ll, y = la force centrale en L, ou ce qu'il a là de pesanteur vers C. Cela posé, l'on aura dv pour l'accroissement de vitesse, qui résulte de cette force (y) au corps mû suivant Ll pendant l'instant dt ; et dds pour ce que ce corps parcourt alors d'espace en vertu de cet accroissement de vitesse. Enfin en prenant AC = a , l'on aura aussi $a = x + r$; ce qui donne $dx + dr = 0$ ou $dx = -dr$, en différenciant le tout positivement.

À ce compte, la force absolue (y) en L vers C, étant à ce que le corps mû en reçoit d'elle suivant Ll :: LR. LP :: Ll(ds).LR(dx). Cette force suivant Ll, sera = $\frac{ydx}{ds}$. Or les espaces parcourus avec des forces constantes et continuellement appliquées, telles qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, et telle qu'est aussi toute force instantanée, étant en raison composée de celles de ces forces et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $dds = \frac{ydx}{ds} \times dt^2$. Donc $y = \frac{dsdds}{dxdt^2}$. Ce qu'il fallait trouver ».

Nous retrouvons avec la démonstration du lemme II celle de la règle générale énoncée dans le mémoire du 13 novembre 1700 : position du problème, énoncé des hypothèses et des relations cinématiques et étude dynamique débouchant sur l'évaluation de la force centrale absolue en un point donné. De fait, l'expression de la force centrale de pesanteur est identique à celle de la force responsable des mouvements en ligne courbe :

$$y = \frac{dsdds}{dxdt^2}.$$

La suite du mémoire présente « quelques usages de cette règle » dans lesquels « les temps t [sont pris] comme les aires ACLQ ($\int \frac{rdz}{2}$), ou $dt = rdz$, suivant la prop.I. Sect.2. Liv.I. de M. Newton, *De Phil. nat. Princ. Mat* ». Ainsi, par le recours à la loi des aires, Varignon élimine le temps des démonstrations. La loi des aires ne lui sert toutefois pas à identifier aire et temps comme le fit Newton dans les démonstrations des *Principia*. Varignon procède comme les ingénieurs. Autrement dit, il effectue un changement de variable. Il substitue rdz à dt afin, simplement, de pouvoir évaluer la force centrale y .

46. [Varignon \(1700b\)](#); p.227-8.

6.2.2 Les milieux résistants

L'étude du mouvement des projectiles dans les milieux résistants repose pour sa quasi-totalité sur la proposition générale établie dans le mémoire⁴⁷ présenté à l'Aca-

47. Varignon traite du mouvement des corps dans les milieux résistants dans douze mémoires, assez longs, publiés dans les Recueils des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* entre 1707 et 1711, dont M. Blay donne, dans son livre *La naissance de la mécanique analytique*, la liste chronologiques :

1. M1 : *Des mouvements faits dans des milieux qui leur résistent en raison quelconque*, daté du 13 Août 1707.
2. M2 : *Des mouvements primitivement variés dans les milieux qui leur résistent en raison des vitesses auxquelles ils s'opposent*, daté du 7 Mars 1708.
3. M3 : *Différentes manières de déterminer la courbe que décrirait un corps de pesanteur constante, jeté suivant quelque direction que ce fût dans u milieu dont les résistances seraient en raison des vitesses de ce corps*, daté du 18 Juillet 1708.
4. M4 : *Accord des solutions du mémoire du 18 Juillet dernier, page 250, etc. avec celles de M. Newton, & de M. Huygens, touchant la ligne que décrirait un corps de pesanteur constante jeté suivant quelque directions que ce fût dans un milieu dont les résistances seraient en raison des vitesses de ce corps.*, daté du 24 août 1708.
5. M5 : *Autres solutions du problème déjà résolu dans le mémoire du 18 Juillet dernier, page 251. etc. touchant la courbe que décrirait un corps de pesanteur constante, jeté dans un milieu résistant en raison des vitesses de ce corps.*, daté du 5 Décembre 1708.
6. M6 : *Courbe de projection décrite en l'air dans l'hypothèse des résistances de ce milieu en raison des vitesse actuelles du mobile, nonobstant lesquelles résistances les accélérations des chutes se fassent en raison des temps, ainsi que quelques philosophes disent l'avoir observé*, daté du 9 Mars 1709.
7. M7 : *Des mouvements primitivement variés dans des milieux résistants en raison des carrés des vitesses effectives de ces mouvements*, daté du 15 Juin 1709.
8. M8 : *Des mouvements commencés par des vitesses quelconques, & ensuite primitivement accélérés en raison des temps écoulés, dans des milieux résistants en raison des carrés des vitesses effectives du mobile*, daté du 17 Août 1709.
9. M9 : *Des mouvements primitivement retardés en raison des temps qui resteraient à écouler jusqu'à leur extinction dans le vide faits dans des milieux résistants en raison des carrés des vitesses effectives du mobile.*, daté du 18 Décembre 1709.
10. M10 : *Des mouvements primitivement variés dans des milieux résistants en raison des sommes faites des vitesses effectives de ces mouvements, & des carrés de ces mêmes vitesses.*, daté du 4 Juin 1710.
11. M11 : *Des mouvements commencés par des vitesses quelconques, & ensuite primitivement accélérés en raison des temps écoulés, dans des milieux résistants en raison des sommes faites des vitesses effectives du mobile, et des carrés de ces mêmes vitesses.*, daté du 27 Août 1710.
12. M12 : *Des mouvements primitivement retardés en raison des temps qui resteraient à écouler jusqu'à leur entière extinction dans le vide, faits dans des milieux résistants en raison des sommes faites des vitesse effectives de ces mouvements dans ces milieux, & des carrés de ces mêmes vitesses.*, daté du 20 Juin 1711.

; Blay (1992), p. 277-279.

Cet ensemble s'articule en trois séries, dont la première, publiée en 1708 et 1709, considère un milieu qui résiste en fonction de la vitesse du mobile. Varignon présente durant l'année 1709 trois autres mémoires, dans lesquels il considère le milieu résistant de manière proportionnelle au carré de la vitesse.

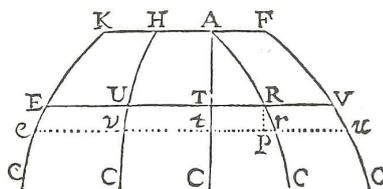


FIGURE 6.5 – Illustration du corrolaire 1. Figure tirée de [Varignon \(1707a\)](#).

démie le 13 Août 1707 et intitulé *Des mouvements faits dans des milieux qui leur résistent en raison quelconque*.

Proposition générale⁴⁸

« Soit un corps quelconque, qui en mouvement dans un milieu sans résistance ni action pendant les temps AT, dût avoir des vitesses qui fussent à la fin de ces temps, comme les ordonnées correspondantes TV d'une courbe quelconque FVC : c'est-à-dire, dont les vitesses primitives à la fin des temps AT, fussent comme les ordonnées correspondantes TV d'une courbe quelconque FVC dont l'axe soit AC. Trouver en général les résistances de ce milieu, ce qu'elles laisseraient de vitesses au mobile à la fin des temps AT, ce que ces vitesses restantes lui feraient parcourir d'espace pendant ces temps, etc. »

Varignon se propose ici (figure 6.5) de déterminer à la fois l'équation de la « courbe des résistances totales » (ARC) et celle de la « courbe des vitesses restantes » (HUC). Pour ce faire, il se donne deux dates infiniment proches T et t sur l'axe AC. Les lignes TR, et tr « expriment [donc] les résistances que le milieu aura faites au corps mû pendant les temps AT, At ». De fait, l'incrément de résistance exercée par le milieu sur le mobile durant l'« instant » Tt s'exprimera par Pr. Or les résistances instantanées sont caractérisées par les ordonnées de la courbe KEC, c'est-à-dire par TE et te. Donc, « l'on aura partout Pr en raison constante à TE, c'est-à-dire que la fraction $\frac{Pr}{TE}$ sera constante ». De fait, « $\frac{Pr}{TE} = \frac{Tt}{a}$ sera l'équation générale des courbes ARC et HUC, en prenant les instant Tt constants de même que la grandeur a ». Et « en appelant AT, t; TR, r; TE, z; TV, v; RV ou (hyp.) TU, u; & conséquemment aussi Tt, dt; & Pr,

Il supposa, avec la dernière série présentée à l'Académie en 1710-1711, une résistance en raison de la somme des vitesses effectives du mobile et de leur carré, qui est, une hypothèse « plus vraisemblable encore que la seconde des deux précédentes, qui passe pourtant d'ordinaire pour l'être le plus ».

48. [Varignon \(1707a\)](#); p.386.

dr ; outre $r = v - u$, & $dr = dv - du$ ⁴⁹ », l'équation des courbes ARC et HUC s'écrira $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$, ou $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a}$.

Varignon a ainsi obtenu l'équation du mouvement dans un milieu résistant. Toutefois, le traitement mathématique du temps ne diffère pas de celui appliqué lors de la recherche des règles générales. Le calcul leibnizien permet donc de ne pas recourir systématiquement à l'imagination pour traiter le temps dans les propositions de la philosophie naturelle et a ainsi rendu possible sa manipulation mathématique.

49. [Varignon \(1707a\)](#); p.387.

Conclusion générale

Le maniement du temps en tant que paramètre mathématique fondamental de la philosophie naturelle procède de la recherche, par Newton, de la loi de force centripète. Cette dernière résulte d'une part des travaux de Kepler et d'autre part de la loi de force centrifuge établie par Huygens. Newton aborde la force centripète par ses quantités accélératrice et motrice, évaluées toutes deux « en un temps donné ». La dépendance temporelle ainsi établie apparaît donc clairement à la fois dans l'énoncé de la sixième proposition du livre 1 des *Principia* et dans la formulation mathématique énoncée dans son premier corollaire. Force centripète et temps sont « en raison doublée inverse » l'une de l'autre.

Des contemporains de Newton, nombreux étaient ceux qui s'étaient intéressés au concept de force. Toutefois, à l'exception d'Huygens, aucun ne l'avait approché sous un angle mathématique, et Huygens, nous l'avons vu, a déduit l'expression de la force centrifuge d'un principe qui exclut le temps. Ses contemporains continentaux adhéraient en effet à la doctrine cartésienne du mouvement, de sorte qu'ils n'éprouvaient pas le besoin de rechercher une expression mathématique de la force. Il semble donc que Newton soit le seul à avoir émis l'hypothèse d'une force agissant à distance et à en avoir recherché une expression mathématique. L'idée d'une telle force était « dans l'air », sur les îles britanniques. Hooke aurait eu, semble-t-il, lui aussi, et le premier, l'idée d'une telle force. Selon J. Lohne⁵⁰, qui se base sur des documents d'époque – les mémoires de la *Société Royale* relatifs à la fois aux déclarations et aux papiers de Hooke, aux écrits publics de Hooke⁵¹ ainsi qu'à son journal personnel – Hooke aurait influencé Newton et lui aurait communiqué le moyen d'évaluer cette force. Toutefois, J. Lohne ne se réfère pas au *Waste Book* de Newton, ce que déplore fortement Erlichson⁵². Les conclusions de ce dernier, qui rejoignent celles de A. Koyré, se résument ainsi : Newton doit à Hooke sa motivation de repenser le problème sous l'angle des orbites et des forces, c'est-à-dire de trouver « la méthode de détermination des figures ». Il fut ainsi contraint de résoudre le problème de la vitesse aréolaire pour un corps en

50. [Lohne \(1960\)](#)

51. Il s'agit essentiellement du *Cometa* publié en 1678 et de son *Attempt to prove the motion of the Earth* lu à la *Société Royale* en 1671 et imprimé en 1674.

52. [Erlichson \(1992\)](#)

orbite soumis à une force centripète.

Newton choisit d'exprimer « les forces qu'emploie la nature » par la *Méthode des premières et dernières raisons*. Cette méthode mathématique est fondée sur les *Éléments* d'Euclide, unique base culturelle commune au mathématicien et au philosophe de la nature aux XVII^e et XVIII^e siècles, qui requièrent notamment la théorie des proportions comme moyen d'évaluation des quantités. Les *Éléments*, système hiérarchisé de définitions, d'axiomes, de postulats et de propositions, jouent de fait un rôle important car ceux sont les seuls éléments mathématiques à disposition du philosophe dans l'établissement des lois de la science de la nature. Ils lui fournissent un modèle fécond auquel il peut se référer pour établir une doctrine de la connaissance du vrai, mais ils sont surtout conçus comme une base d'une science pure et abstraite, relative au nombre, à la ligne, à la surface, etc. Or la philosophie de la nature traite de poids, de vitesse, de temps, de densité, etc. Il y a donc une division entre la géométrie euclidienne et les grandeurs que lui demande d'évaluer le philosophe. C'est en ce sens que s'adresse Roberval à son lecteur au début du sixième livre de ses *Éléments de Géométrie*⁵³ :

« Il peut y avoir raison entre deux choses, les comparant autrement que par la quantité : comme par la pesanteur, par la lumière, par le son, par le mouvement, par les forces et par d'autres accidents. Mais cette raison n'est pas de la pure géométrie qui ne compare que les cinq genres dont il a été parlé [...], savoir les lignes par leur longueur, les superficies par leur longueur et largeur ensemble, les solides par leur longueur, largeur et profondeur ensemble, les angles par leur ouverture et les nombres par la multitude des unités qu'ils contiennent. Toutes les autres raisons sont de la physique. Et pourtant elles ne laissent pas d'être en usage dans la mathématique mêlée de la physique, comme dans l'optique, dans la mécanique, dans la musique, dans l'astronomie, etc., ce qui n'est pas proprement de ce lieu où nous n'entendons traiter que des raisons géométriques. Mais il faut se souvenir que la même méthode dont nous nous servons ici servira aussi lorsqu'il faudra traiter des autres raisons. Pourtant, cet avertissement n'est qu'une exclusion des raisons qui ne sont point de géométrie et qui pour cette cause sont renvoyées ailleurs. ».

La géométrie euclidienne ne serait pas, *a priori*, le langage adéquat pour exprimer les grandeurs physiques. Toutefois, la théorie des proportions, héritée des *Éléments*, apparaît au cœur de procédures démonstratives de propositions de la philosophie naturelle. Aussi, elle semble incontournable pour le philosophe des XVII^e et XVIII^e siècles. Selon L. Brunschvicg⁵⁴, elle est intéressante, non seulement pour l'instrument qu'elle représente pour l'étude des grandeurs en général, mais aussi car elle met en évidence une

53. *Les Éléments*, 2^e avertissement, Livre VI, p.7-8 ; cité par Jullien, [Jullien \(2006\)](#), p.259.

54. [Brunschvicg \(1972\)](#), p.509.

fonction de la pensée humaine. Elle permet la détermination d'un rapport entre termes présentés par l'intuition ou déjà isolés par l'analyse. Mais, elle est d'un emploi strict et impose de sévères contraintes, puisque seules deux quantités de même genre peuvent avoir raison entre elles. Il devient alors impossible au philosophe de produire une nouvelle quantité, comme une vitesse ou un poids spécifique. Il peut toutefois exprimer un rapport de vitesse comme composé du rapport des distances et du rapport inverse des temps. La composition des raisons permettrait ainsi de réaliser une succession d'évaluations aboutissant, *in fine*, à la connaissance, à chaque instant, des caractéristiques de la quantité cherchée. Et, selon L. Brunshvicg⁵⁵ :

« La géométrie apparaît[trait] alors comme la forme universelle de la science, universelle en ceci que la continuité de la grandeur linéaire lui permet de couvrir tout le champ d'une proportion entre quantités indéterminées

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

et universelle encore en ceci que toute mesure appliquée aux phénomènes physiques a pour résultat de fournir des quantités analogues au continu linéaire : *temps, chaleur, pesanteur, etc.* »

Toutefois, nous l'avons vu cette théorie est limitée et Newton en a fait l'amère expérience, à l'automne 1712, lorsqu'il cherchait à rectifier la preuve de la proposition x du livre II des *Principia*. Alors qu'il savait qu'une erreur existait dans la preuve de sa démonstration, suite à l'annonce que lui avait fait Niklaus Bernoulli, neveu de Johann Bernoulli, il a persévéré à la rectifier en focalisant son attention uniquement sur une méthode qui demandait l'évaluation de la force par la théorie des proportions. Aussi longtemps qu'il persistât dans l'usage de cette méthode, ses recherches furent infructueuses.

Engagé ainsi, dans ce que nous appelons l'*impasse newtonienne*, il ne put en sortir qu'après avoir modifié son raisonnement, c'est-à-dire après avoir perçu que la géométrie des Anciens et la théorie des proportions, même modifiées à des fins précises, ne le mèneraient pas à la solution cherchée. Il abandonna alors le raisonnement basé sur la comparaison de la longueur des arcs de cercle parcourus durant des intervalles de temps donnés égaux, qui demandait, par la suite, de comparer ces longueurs d'arcs au moyen de la théorie des proportions afin d'évaluer la force recherchée. Il introduisit dans son raisonnement, outre la projection horizontale du mouvement, un symbolisme, notamment pour représenter le temps, et recourut à la *Méthode des suites infinies* de sorte que chaque grandeur put être exprimée de manière adimensionnelle et l'évaluation de grandeur de genre différent rendue possible. La théorie des proportions fut ainsi « vaincue ». Newton s'en est ainsi libéré. Autrement dit, il s'est affranchi des concepts

55. Brunshvicg (1972), p. 510.

et des dimensions rattachés aux notations.

Aussi, nous pouvons nous questionner sur la raison qui poussa Newton à préférer utiliser une méthode géométrique classique, dont il fait l'éloge dès l'avant-propos à la première édition des *Principia*, alors qu'il possédait déjà une méthode, algébrique, lui permettant de résoudre son problème. Cette question fut grandement débattue dans les années 1980, et notre propos n'est pas d'ajouter à tout ce qui a déjà été écrit à ce sujet. Nous retiendrons seulement de ce débat que la formation mathématique newtonienne n'a pas suivi l'ordre chronologique de l'histoire des mathématiques. Newton a tout d'abord commencé par maîtriser la pratique de l'algèbre et ses rapports aux constructions géométriques selon la manière cartésienne. C'est ensuite, dans les années 1673-1683, période durant laquelle il était professeur lucassien à Cambridge, qu'il découvrit les trésors de l'analyse des Anciens. Parallèlement, il développa des doutes et des objections sur la puissance de la *Géométrie* cartésienne qui l'amènèrent à réévaluer fondamentalement les méthodes classiques et géométriques. Plongé dans cet état d'esprit, il rédigea donc les *Principia* dans un style véritablement classique. Pour Aldo Brigaglia,⁵⁶ :

« La raison fondamentale du choix newtonien réside dans un besoin de cohérence interne [...] Le langage choisi est celui qui lui paraît répondre au mieux aux exigences de clarté, de rigueur, d'efficacité et d'élégance. »

Mais la géométrie euclidienne, qui, certes, a jusqu'à présent porté seule le poids de l'univers physique, est une forme mathématique simple. Elle est, pour le philosophe, l'instrument par excellence de la conquête scientifique de l'univers et lui semble inévitable. Mais elle lui offre une physique rudimentaire et lui fournit un schéma bien trop pauvre pour satisfaire aux exigences de la philosophie newtonienne.

L. Brunschvicg, toutefois, refuse de voir la géométrie euclidienne comme une « simple convention de l'esprit avec lui-même⁵⁷ », tel le choix d'un système de coordonnées.

« Il faut y voir – nous dit-il – une hypothèse de l'esprit sur les choses, qui, due sans doute à la suggestion des expériences originelles, a pris assez de consistance et de précision pour donner à l'esprit possession de la nature. La géométrie euclidienne est vraie, en tant que nous la recueillons comme le produit de la collaboration entre l'esprit et les choses⁵⁸. »

Varignon ne sembla pas s'embarrasser pour aborder les problèmes de la philosophie naturelle. Certes, il utilisa initialement la théorie des proportions pour évaluer

56. Brigaglia, *La riscoperta dell'analisi classica e i problemi apolloniani*, p. 151. cité par Jullien (2006), p.306.

57. Brunschvicg (1972) ; p. 520.

58. Brunschvicg (1972) ; p.520.

les grandeurs, mais les « Règles générales » étaient déjà exprimées en langage symbolique et dès que le calcul leibnizien lui fut acquis, il se tourna exclusivement vers lui. Les règles furent alors formulées sous forme différentielle, mais surtout, les grandeurs mises en jeu, de dimensions différentes, étaient en rapport l'une à l'autre. Varignon s'était ainsi libéré des contraintes de la géométrie et de la théorie des proportions notamment. Par ailleurs, les grandeurs ne devant plus leur existence à des figures, il lui fut plus aisé de démontrer les propositions des *Principia*. La procédure dorénavant développée ne demandait plus qu'à « tourner ».

Cependant, le temps, et les grandeurs en général, ne sont pas conceptualisés dans la philosophie varignonienne. Varignon adhérait à la conception leibnizienne du temps. Et c'est un des points clés de sa réussite, nous semble-t-il, que de n'avoir considéré les grandeurs uniquement sous un aspect relationnel, en excluant à la fois, dans la pratique mathématique, la dimension et le concept attachés à la grandeur manipulée. La « courbe du temps » (figure 6.1⁵⁹), TD, représente la distance en fonction du temps. De manière analogue, les « courbes de vitesses », VB et VX, représentent la vitesse en fonction de la distance et du temps respectivement. De sorte que les courbes de la figure introductive du mémoire du 30 janvier 1700 révèlent les différentes combinaisons de dépendance fonctionnelle parmi les paramètres du mouvement. Pour signifier ces relations de manière mathématique, Varignon s'est tourné vers le formalisme algébrique. A chaque point H sur AC sont associés une distance $AH = x$, un temps $HT = AG = t$, une vitesse $HV = AE = GV = v$ et une force centripète $HF = EF = GF = y$. Les « Règles générales » s'énoncent alors :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$y = \frac{dv}{dt} = \frac{ddx}{dt^2}$$

TABLE 6.3 – Règles générales des mouvements rectilignes

La vitesse et la force, v et y , telle qu'elles sont définies, n'ont donc, en tant qu'entités géométriques, aucune signification opérationnelle. Elles en acquièrent une seulement en tant qu'entité algébrique au contact d'autres quantités algébriques reliées par des égalités exprimées algébriquement. Ainsi, au point L, le corps a une vitesse v , et l'élément de trajectoire traversé, dx , est le produit de la vitesse du corps en L et de l'incrément de temps dt nécessaire pour le traverser. Ainsi, ni v , ni dt n'ont de représentation géométrique sur la figure, bien que la vitesse soit le rapport d'un élément de

59. Voir page 209.

la figure, dx , et d'une seconde quantité extérieure à celle-ci, dt . De manière similaire, la force résulte du rapport de deux grandeurs, ddx et dt , dont aucune n'a de représentation sur la figure. Les différentes courbes de temps, de vitesse et de force ne jouent donc aucun rôle dans l'analyse du phénomène. Le raisonnement procède uniquement symboliquement.

Les procédés mathématiques des *Principia* renvoient aux *Éléments* d'Euclide, qui s'inscrivent dans le style d'une écriture grecque des mathématiques purement rhétorique, où tout se dit avec des mots. Cependant, la pleine vigueur et la force dont ils jouissaient au xvii^e siècle cachent les limitations inhérentes à une telle forme de textes mathématiques. Les quelques signes présents, tels AB et AD, introduits et définis au cours d'une démonstration n'appartiennent pas à la langue commune, et n'ont qu'une fonction désignative. Ils repèrent respectivement la ligne AB et le carré de diagonale AD. Ils n'ont pas de fonction opératoire et n'obéissent à aucune règle syntaxique propre distincte de celles de la langue commune. Autrement dit, il n'y a pas dans les *Éléments* de représentation symbolique d'objets mathématiques ou de concepts mathématiques. De manière similaire, la dénomination ABTVME de la proposition xxxix⁶⁰ du livre I des *Principia* n'a qu'une fonction désignative. Par contre le symbole « t » utilisé par Varignon exprime un concept. Il représente la notion de temps à laquelle est adjoint l'objet mathématique avec lequel nous effectuons des opérations et que la géométrie ne pouvait représenter même dans ses plus fines conceptions. Aussi, lorsque Newton nota « t » et « T » dans la proposition x du livre second, il ne désignait pas seulement un temps, mais précisait aussi un objet mathématique dont il se servit par la suite afin de trouver la densité du milieu, la vitesse du corps et la résistance du milieu. Il agit ainsi comme les auteurs de son temps, de manière spontanée, sans concertation avec la communauté savante et sans se soucier des répercussions de cette notification. Il semble avoir procédé par convenance, dans un souci de nécessité. Le terme « tempus » intervenant à plusieurs reprises dans la preuve, il pensait probablement préférable de le noter de manière abrégée. Mais introduire des signes, au xvii^e siècle, dans un texte mathématique, dans une preuve notamment, génère de surcroît une complexité de lecture et de compréhension du texte. Le lecteur naïf de la fin de ce siècle, seul face à un ensemble structuré de signes, était contraint de procéder à la manière du déchiffrement de la Pierre de Rosette. Il devait, avant tout, trouver des référents par l'examen et la comparaison à de nombreux textes. Alors en possession de la signification de chacune des instructions, il était en mesure de déterminer les opérations effectuées et l'ordre dans lequel elles avaient été réalisées. Le texte ainsi reconstitué prenait alors tout son sens.

60. Proposition xxxix : « [...] Que la courbe VLM, dont l'asymptote est ABT, soit celle dont toutes les ordonnées EM soient réciproquement proportionnelles aux aires ABGE, l'aire ABTVME représentera le temps pendant lequel le corps parcourra en tombant la ligne AE [...] C.Q.F.T. », Newton (1966b), p.129-130. La figure correspondante est à la page 217

Le choix d'un symbole n'est donc pas fortuit bien qu'il relève du hasard. Le philosophe pioche, en effet, dans une réserve de signes à disposition, tels que les alphabets latin et grec, les signes de ponctuation de la langue naturelle ou encore parmi les chiffres indo-arabiques. Mais ce choix requiert l'univocité de la représentation. À un objet mathématique doit être associé un unique signe interprété toujours de la même façon. Selon F. Cajori, outre le fait que le signe choisi doit être bref, facile à lire, à écrire et à imprimer, il doit suggérer clairement et de manière définitive le concept pour lequel il est utilisé. Mais il doit, avant tout, pouvoir s'adapter au développement de la science. De fait, le choix newtonien quant à la dénomination des deux durées distinctes semble convenir. Les difficultés de lecture et celles de compréhension du texte ne sont pas accentuées. L'utilisation de la lettre « t » désignant le temps est en outre toujours d'actualité. Mais, « même si elles étaient fort commodes, ces représentations pouvaient ne pas être ; [...] plutôt que répéter inlassablement à chaque équation un "æquari", Recorde, par exemple, décida d'utiliser l'abréviation commode dont nous usons [encore] aujourd'hui ⁶¹ ».

L'emploi de symboles non chiffrés, notamment celui de lettres, représentant l'« inconnue » ou le « donné », fut initié par F. Viète à la fin du xvi^e siècle, qui, pour les distinguer, recourut à des types alphabétiques différents ⁶² :

« Or afin que ceci soit aidé par l'art, les grandeurs données seront distinguées des requises par un symbole constant perpétuel et apparent, en signifiant les grandeurs requises par l'élément Alphabétique A, ou quelques autres voyelles, E, I, O, U, Y, et les données par les éléments B, C, D, ou quelques autres des consonnes. »

Mais la représentation du « donné » rend surtout possible l'écriture de canons et de formules, c'est-à-dire, selon Leibniz ⁶³, l'écriture de « formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande » de manière concise et non ambiguë, contrairement à l'écriture rhétorique qui nécessite pour la même suite d'instructions universelles plusieurs lignes, voire plusieurs pages, rédigées, en outre, de manière confuse et équivoque. Ainsi, par la possibilité de l'écriture d'expressions littérales, l'écriture symbolique apporte un mode d'écriture mathématique entièrement nouveau à la fin du xvii^e siècle « en même temps qu'un outil universel d'une efficacité qui demeure aujourd'hui inégalée dans certain registre social de communication – celle des résultats entre hommes de science ». Mais il ne faut pas pour autant tomber dans l'excessivité, tel Leibniz, qui voudrait qu'à « chaque concept élémentaire corresponde une lettre donnée et à tous les " enchaînements d'idées " correspondraient aussi, de manière univoque, des relations

61. Serfati (2005), p.31-2.

62. Vauléard, J.-L. de, *La nouvelle algèbre de Monsieur F. Viète*. Corpus des œuvres de philosophie en langue française. Fayard. Paris. 1986 ; p.47., Serfati (2005), p.156.

63. Serfati (2005), p.162.

bien définies entre les signes⁶⁴ ». Certes, il n’y aurait plus de frontière entre le signe et la chose, entre le représentant et le représenté, mais une telle considération, qui prend en compte l’ensemble de tous les attributs du représenté, risque d’être contre productif. À tel point que le représenté deviendrait inaccessible au lecteur. Cependant, venant de Leibniz, cette exagération a le mérite de nous éclairer sur l’emploi de la lettre « t » dans les *Marginalia* et les mémoires de Varignon : « t » et le concept de temps sont, par définition, égaux.

Dans un contexte fixé, par ailleurs, il est possible de considérer la matérialité d’un signe et son interprétation. C’est l’objet du « concept significatif » du signe, mis à jour par M. Serfati⁶⁵. Ainsi, en mathématique, le signe **Croix** (+) est la matérialité du concept *Addition*, dont la signification est la somme de plusieurs éléments. Appliqué au concept de temps en philosophie naturelle, celui-ci est matérialisé par la lettre « t » et s’interprète comme le *temps absolu* tel qu’il est spécifié par Newton dans le scholie des *Définitions*. Autrement dit, le temps n’apparaît plus comme l’élément d’espace lié à l’écoulement uniforme de la *durée*, mais a gagné le statut de grandeur mathématique. Il est ainsi devenu un ensemble continu d’objets ordonnables dans lequel les relations définies d’égalité et de supériorité sont soumises aux axiomes suivants⁶⁶ :

1. Si $t = T$, alors $T = t$; $t = t$; $t = T$ et $T = \tau$ entraîne $t = \tau$.
2. Si $t < T$ et $T \leq \tau$, $t < \tau$; Si $t < T$ et si $\tau \leq t$, $\tau < T$.
3. Deux objets de l’ensemble satisfont à une et une seule des trois relations $t = T$, $t < T$ ou $T < t$. Deux objets égaux ne sont d’ailleurs pas, en général, distingués.
4. Un élément t de l’ensemble étant donné, il existe toujours deux autres éléments, T et τ , tels que $T < t < \tau$. T n’existe pas si t est le premier élément. De même, τ n’existe pas si t est le dernier élément.
5. Un ensemble ordonné est dense si, t et T étant donnés $t < T$, il existe un élément τ tel que $t < \tau < T$.

S’ajoutent à ces axiomes, les quatre opérations élémentaires qui permettent de calculer avec le représentant du temps. Mais le temps est aussi une grandeur mesurable et à chacune de ses mesures lui est associé un nombre. Ce sont ces nombres que cachent en réalité la lettre « t », avec laquelle le philosophe opère librement. L’image du temps qui s’écoule de manière uniforme et indépendante des phénomènes se dissipe alors lentement, au profit d’une lettre commune de notre alphabet latin, qui est incapable de communiquer l’information au lecteur. La perte du concept de temps est ainsi réelle.

64. F. Mahnke, *Leibniz als Begründer der Symbolischer Mathematik*, Isis, **30**, IX/2, 1926, 279-293, in Serfati (2005), p.272. Traduction de Colette Bloch.

65. Serfati (2005), *la constitution de l’écriture symbolique mathématique*. Thèse de doctorat soutenue à l’université Paris 1

66. Itard (1953), p.3.

Les paragraphes qui précèdent ont pour seul but de présenter au lecteur une composante, importante nous semble-t-il, de la mathématisation du temps. Nous ne voudrions pas cependant laisser croire que le recours au formalisme explique à lui seul la mathématisation du temps aux XVII^e et XVIII^e siècles. L'avènement du calcul différentiel et l'utilisation de ce dernier en philosophie naturelle jouent, selon nous, un rôle majeur. Le calcul différentiel se présente en effet comme un moyen puissant de traitement mathématique du temps du fait de l'autonomie réciproque existante entre lui et le symbole « t ». Il dispense « l'imagination d'une attention suivie aux figures ». Il permet ainsi au philosophe de ne pas se concentrer constamment sur la figure et d'élaborer ainsi un raisonnement qui va au-delà de la simple représentation qu'il a sous les yeux. Newton avait introduit le temps de manière détournée par la *Méthode des premières et dernières raisons*, mais celle-ci l'obligeait, de manière régulière, à revenir vers les figures et à recourir à la théorie des proportions.

D'autre part, chaque proposition des *Principia* apparaît comme un cas particulier traité de manière indépendante. Certes, Newton s'appuyait, de temps à autres, sur des résultats déjà démontrés. Mais il n'apparaît pas dans son œuvre de traitement général. À chaque nouvelle proposition, il précisait les hypothèses, définissait les grandeurs utiles, relativement à la figure de référence, puis déroulait son raisonnement. Il recourait enfin aux lemmes appropriés de la *Méthode des premières et dernières raisons* et à la théorie des proportions pour l'évaluation de la force, de la vitesse, du temps, etc. Or recourir au calcul différentiel demande d'agir d'une toute autre manière. Ce dernier permet une résolution systématique et méthodique des propositions auxquelles il confère un caractère de généralité. Le philosophe ne se restreint pas au cas singulier. Varignon l'a ainsi montré en réduisant à une seule *règle générale* l'ensemble des propositions *De la recherche des forces centripètes*. Le calcul différentiel achève en quelque sorte l'algébrisation de la géométrie encore inaboutie et oblige l'imagination « de courir des équations aux figures ». En effet, la *Nova methodus* ne présente pas seulement une nouvelle méthode mais correspond aussi à une nouvelle pratique de la géométrie. Elle ne s'apparente pas à une traduction des figures et des problèmes mais au réel point de départ. Ainsi, « pour aborder les problèmes épineux de la géométrie, il ne faudrait plus s'aider du calcul pour raisonner sur les figures, mais poser des règles opératoires et commencer par calculer⁶⁷ ». En fait, Leibniz définit un mode opératoire qui permet au philosophe de se soustraire aux contraintes de la géométrie. En effet, si Newton parvint à résoudre la proposition x, c'est surtout parce qu'il abandonna l'idée de la résoudre à l'aide de la géométrie et qu'il fit appel à la *Méthode des suites infinies*, qui est une méthode variationnelle. Si Varignon put, entre autres, élaborer la cinématique sur la base des *Principia*, c'est parce qu'il s'était tourné vers le calcul différentiel leibnizien. Or ce dernier, fondé sur la théorie des sommes et des différences des séquences de nombres, ne traite pas directement de géométrie euclidienne. Il assigne à une quantité

67. Parmentier (1989)

finie, par l'action d'un opérateur noté « d », une quantité infiniment petite, appelée « différence » ou « différentielle », de même dimension géométrique, contrairement à la fluxion newtonienne, qui transforme une ligne en une vitesse. Si \mathcal{A} , par exemple, est une aire, alors $d\mathcal{A}$ est un infiniment petit élément de surface. Réciproquement, l'action de l'opérateur « somme », (\int) , génère une quantité infiniment grande de même dimension ; « $\int \mathcal{A}$ » est donc une infiniment grande surface. Le procédé opère de manière équivalente avec les grandeurs physiques. L'opérateur « d » appliqué à une durée attribue ainsi un « moment » de temps (dt), infiniment petit. Pareillement, l'opérateur « somme » (\int) fournit une quantité infiniment grande de dimension temporelle.

De fait, le calcul différentiel permet de lever bien des difficultés rencontrées en recourant à la géométrie. En effet, les grandeurs manipulées par le philosophe étaient d'ordre physique, comme la masse, la vitesse, le temps, etc., auxquelles était adjointe une dimension géométrique : ligne, aire, volume. Or la manipulation algébrique de ces quantités pouvait conduire à des dimensions différentes. Le produit d'une longueur par une surface fournit un volume. Mais, il arrive aussi que la dimension résultante de l'opération ne puissent être interprétée au moyen d'un élément d'espace, telle que la multiplication d'une aire par un volume. Il était donc impératif pour le philosophe, au risque de ne pouvoir résoudre la proposition, de ne considérer que la dimension physique des grandeurs manipulées. Le cas échéant, l'élaboration d'une nouvelle grandeur physique, comme la vitesse par exemple, pouvait être réalisée. Varignon en effet considérait la vitesse comme le rapport d'une longueur sur un temps. Expression interdite selon la théorie des proportions puisqu'elle met en jeu des grandeurs de genre différent. Toutefois, selon le calcul leibnizien, la vitesse est pensée comme le rapport de deux quantités différentielles, $v = \frac{dx}{dt}$, autorisant son évaluation.

Mais il est aussi possible d'appliquer l'opérateur « différence » (d) à la quantité finie dt . Ce faisant, nous obtenons la « différence » de la « différence » d'une durée, soit $d(dt) = ddt$, c'est-à-dire une quantité infiniment infiniment petite. Répétée suffisamment de fois, cette opération permet au philosophe d'atteindre l'instant mathématique. À l'inverse, agréger l'ensemble des « moments » de temps d'une même séquence redonnera le terme de la séquence, $\int (dt + dt + dt + \dots) = \Delta t$. Le philosophe possède donc avec le calcul leibnizien le moyen d'exprimer à la fois l'instant mathématique, (dt), et la *durée*, (Δt).

Enfin, comme l'a montré H.J.M. Bos⁶⁸, poser dx constant revient à désigner x comme la variable indépendante privilégiée. Ainsi, la pratique usuelle du géomètre du XVII^e siècle qui veut que l'intervalle de temps soit fixé, trouve son équivalent avec le calcul différentiel. En effet, choisir dt constant revient à fixer la durée de l'intervalle et à faire du temps la variable indépendante privilégiée du phénomène.

68. Bos (1974)

La mathématisation du temps s'avère donc être un problème physico-mathématique, qui a trouvé sa solution à travers l'énonciation par Newton d'un temps *absolu*. En d'autres termes, c'est parce que Newton caractérisa le temps d'*absolu* que ce dernier put être intégré au champ des variables du calcul différentiel leibnizien et être ainsi mathématiquement manipulé. Par cette caractérisation, Newton créa un temps à l'image de l'espace *absolu*, c'est-à-dire à l'image d'un espace dont les propriétés géométriques rendent possible le traitement mathématique du mouvement par l'analyse des infiniment petits.

Annexes

Enoncés des lemmes de la *Méthode des Premières et Dernières Raisons*

LEMME PREMIER

Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

LEMME II

Si dans une figure quelconque $AacE$, comprise entre les droites Aa , AE , et la courbe acE , on inscrit un nombre quelconque de parallélogrammes Ab , Bc , Cd , etc. compris sous les bases égales AB , BC , CD , etc. et sous les côtés Bb , Cc , Dd , etc. parallèles au côté Aa de la figure; et qu'on achève les parallélogrammes $akbl$, $bLcm$, $cMdn$, etc. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, et qu'on augmente leur nombre à l'infini? : les dernières raisons qu'auront entre elles la figure inscrite $AKbLcMdD$, la circonscrite $AalblcndoE$, et la curviligne $AabcdE$, seront des raisons d'égalité.

LEMME III

Les dernières raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB , BC , CD , etc. des parallélogrammes soient inégales, pourvu qu'elles diminuent toutes à l'infini.

LEMME IV

Si dans deux figures $AacE$, $PprT$, on inscrit, comme ci-dessus, deux suites de parallélogrammes, dont le nombre soit le même, et que lorsque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernières raisons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, soient les mêmes; ces deux figures $AacE$ et $PprT$ seront entre elles dans cette même raison.

LEMME V

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, et leurs aires sont en raison doublées de ces côtés.

LEMME VI

Si un arc de cercle quelconque ACB donné de position, est soutenu par la corde AB , et qu'au point A placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite AD prolongée des deux côtés, et que les points A et B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle BAD , compris sous la tangente et la corde diminuera à l'infini, et s'évanouira à la fin.

LEMME VII

Les mêmes choses étant posées, la dernière raison qu'ont entre elles l'arc, la corde et la tangente, est la raison d'égalité.

LEMME VIII

Si les droites données AR , BR , l'arc ACB , la corde AB , et la tangente AD , forment trois triangles RAB , $RACB$, RAD , et que les points A et B s'approchent l'un de l'autre : ces triangles, qui s'évanouiront, seront à la fin semblables, et leur dernière raison sera la raison d'égalité.

LEMME IX

Soient données de position la droite AE et la courbe ABC , qui se coupent sous un angle donné A , et soient menées de cette droite sous un autre angle donné les ordonnées BD , CE , qui rencontrent la courbe en B et en C , si on suppose ensuite que les points B et C s'approchent l'un et l'autre continuellement du point A ; les aires des triangles ABC , ACE , seront à la fin entre elles en raison doublée des côtés.

LEMME X

Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps.

LEMME XI

Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la soustendante évanouissante d'un angle de contact est à la fin en raison doublée de la soustendante de l'arc qu'elle termine.

Occurrences mathématiques du temps dans les propositions des *Principia*

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les propositions des livres I et II des *Principia* dans lesquelles nous avons relevé un emploi mathématique du temps dans la démonstration. Nous avons débuté le tableau avec la section III⁶⁹. Pour chacune des occurrences, nous précisons, le cas échéant, la manière dont le temps est représenté ainsi que le moyen auquel NEWTON a recouru pour le manipuler.

Une proposition est repérée par une numérotation composée d'un chiffre romain majuscule, séparé par un point virgule, de chiffres arabes minuscules, eux-même espacés par une virgule. Le chiffre romain indique le numéro du livre, et les chiffres arabes la section et le numéro de la proposition dans l'édition de 1726⁷⁰. Ainsi, la numérotation II ; 8, 50 signifie la 50^e proposition à la section 8 du livre second.

69. Les propositions des sections I et II ont été analysées dans le corps du texte.

70. [Newton \(1966b\)](#)

Livre Premier	
<i>Section III : Du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques.</i>	
I ; 3, 11	Proposition VI et ses corollaires ; Théorie des proportions.
I ; 3, 12	
I ; 3, 13	
I ; 3, 14	Méthode des premières et dernières raisons ; Proposition VI.
I ; 3, 16	Ligne. lemme VII ; propositions I et VI ; Théorie des proportions.
<i>Section VI : De la détermination des mouvements dans des orbes données.</i>	
I ; 6, 30	Aire. Théorie des proportions.
I ; 6, 31	Ligne. Théorie des proportions.
<i>Section VII : De l'ascension et de la descension rectiligne des corps.</i>	
I ; 7, 32	Aire.
I ; 7, 35	Portion d'aire. Théorie des proportions.
I ; 7, 36	Ligne courbe ; aire.
I ; 7, 37	Aire.
I ; 7, 38	Portion de courbe.
I ; 7, 39	Aire. Théorie des proportions ; Temps infiniment petit.
<i>Section VIII : De la détermination des orbés que décrivent des corps sollicités par des force centripètes quelconques.</i>	
I ; 8, 40	Ligne. Théorie des proportions.
I ; 8, 41	Aire. Théorie des proportions ; proposition I.
I ; 8, 42	Aire. Quadrature supposée.

Livre Premier	
<i>Section IX : Du mouvement des corps dans des orbles mobiles, et du mouvement des apsides.</i>	
I ; 9,43	Aire.
<i>Section X : Du mouvement des corps dans des superficies données, et des oscillations des corps suspendus par des fils.</i>	
I ; 10, 52	Longueurs. Théorie des proportions.
I ; 10, 54	Ligne, aire. Théorie des proportions.
I ; 10, 55	Aire. Proposition I.
I ; 10, 56	Aire. Repose sur résultats de la proposition 41.
<i>Section XI : Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripètes.</i>	
I ; 11,58	Théorie des proportions ; lemme 10 de la <i>méthode des premières et dernières raisons</i> .

Livre Second	
<i>Section I : Du mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison de leur vitesse.</i>	
II ; 1, 1	Intervalles égaux infiniment petits tendant vers zéro (« particules de temps »).
II ; 1, 2	Particules de temps. Passage à la limite.
II ; 1, 3	Aires. Lemme 2 de la <i>méthode des premières et dernières raisons</i> ; Théorie des proportions.
II ; 1, 4	Aire. Théorie des proportions.
<i>Section II : Du mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison doublée des vitesses.</i>	
II ; 2, 5	Intervalles infiniment petits égaux ; segments.
II ; 2, 6	Lignes. Théorie des proportions.
II ; 2, 7	Particules de temps. Théorie des proportions.
II ; 2, 9	Secteur angulaire. Théorie des proportions.
II ; 2, 10	Représentation littérale (t et T) ; infiniment petits. Calcul algébrique.
<i>Section III : Du mouvement des corps qui éprouvent des résistances qui sont en partie en raison de la vitesse, et en partie en raison doublée de cette même vitesse.</i>	
II ; 3, 11	Aire hyperbolique ; infiniment petit. Théorie des proportions.
II ; 3, 12	Longueur. Théorie des proportions.
II ; 3, 13	Secteur ; Théorie des proportions.
II ; 3, 14	
<i>Section IV : Du mouvement circulaire des corps dans les milieux résistants.</i>	
II ; 4, 15	Aire ; Théorie des proportions.
II ; 4, 16	

Livre Second	
Section VI : <i>Du mouvement et de la résistance des corps oscillants.</i>	
II ; 6, 27	Infiniment petit.
Section VII : <i>Des mouvements des fluides et de la résistance des projectiles.</i>	
II ; 7, 40 Expériences 13 et 14	Représentation littérale G, P. Représentation littérale T, t. Les temps sont exprimés en seconde, notés « ” » et non « s ».
Section VIII : <i>De la propagation de mouvement dans les fluides.</i>	
II ; 8, 47,	Arcs de cercle. Théorie des proportions.
Section IX : <i>Du mouvement circulaire des fluides.</i>	
II ; 9, 51,	Aires. Théorie des proportions.
II ; 9, 52,	Carré de la distance. Théorie des proportions.

Sources Primaires

ARISTOTE (2002), *Physique*, Paris, GF Flammarion. Présentation et traduction par P. Pellegrin.

BARROW, I. (1735), Lecture I, in CENGAGE, G. (dir.) : *Geometrical Lectures explaining the generation, nature and properties of curve lines read in the university of Cambridge by Isaac Barrow, translated from the latin edition, revisited, corrected and amended by the late Sir Isaac Newton. By Edmund Stone, F.R.S.*, pp.1 – 26. London, Edmund Stone, F.R.S.

BARROW, I. (1973), in WHEWELL, W. (dir.), *The mathematical works*, pp.159 – 172, Hildesheim, New York, Georg Olms Verlag.

GALILÉE (1995), *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Paris, coll. Epiméthée, Presse Universitaire de France. Introduction, traduction, notes et index par M. Clavelin.

HUYGENS, C. (1986), *The Pendulum Clock or geometrical Demonstrations concerning the motion of pendula as applied to Clocks*, Ames, Iowa state university Press. Translated with notes by R. J. Blackwell, introduction H. J. M. Bos.

HUYGENS, C. (1992), *Traité de la lumière, introduction de Michel Blay*, Paris, Dunod.

KEPLER, J. (1929), *Neue Astronomie*, Berlin, München, R. Oldenburg. Übersetzt und eingeleitet von M. Caspar.

KEPLER, J. (1979), *Astronomie nouvelle*, Paris, Albert Blanchard. Traduction française du latin par J. Perroux.

LEIBNIZ, G. (1973), Marginalia in Newtoni Principia Mathematica (1687).

LEIBNIZ, G. (1989a), De geometrica recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum, in PARMENTIER, M. (dir.) : *Naissance du calcul différentiel ; 26 articles des Acta Eruditorum*, pp.126–143. Paris, Vrin.

- LEIBNIZ, G. (1989b), *Nova methodus pro maximi et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, in PARMONTIER, M. (dir.) : *Naissance du calcul différentiel ; 26 articles des Acta Eruditorum*, pp.96–117. Paris, Vrin.
- NEWTON, I. (1687), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, S. Pepys, Reg. Soc. Præses.
- NEWTON, I. (1713), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Cambridge.
- NEWTON, I. (1726), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, A. Guili & J. Innys, Regiae Societatis typographos.
- NEWTON, I. (1955), *Traité d'optique, reprod. fac-similé de l'édition de 1772*, Paris, Gauthiers-Villard. Reproduction fac-similé de l'édition de 1772.
- NEWTON, I. (1966a), *Méthode des fluxions et des suites infinies*, Paris, éd. A. Blanchard. Trad. par M. Buffon.
- NEWTON, I. (1966b), *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Paris, Albert Blanchard. Traduction française de Gabrielle-Emilie de Breuteuil, marquise de Chastellet, 1756-1759, réédition.
- NEWTON, I. (1969), *The Mathematical papers of Isaac Newton*, volume III, Cambridge, Cambridge University Press.
- NEWTON, I. (1972), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, volume 2, Cambridge, Cambridge University Press. The third edition (1726) with variant readings assembled and edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen, with the assistance of Anne Whitman.
- NEWTON, I. (1974), *The Mathematical papers of Isaac Newton*, volume VI, Cambridge, Cambridge University Press.
- NEWTON, I. (1981), *The Mathematical papers of Isaac Newton*, volume VIII, Cambridge, Cambridge University Press.
- NEWTON, I. (1985a), *De la gravitation ou le fondement de la mécanique classique*, Paris, Les Belles Lettres. Introduction, traduction et notes de M. F. Biarnais.
- NEWTON, I. (1985b), *De la philosophiæ naturalis principia mathematica : Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Paris, coll. Epistémé, C. Bourgeois. Préface de S. Hawkins ; traduction nouvelle, postface. et bibliographie. établies par M. F. Biarnais.

- NEWTON, I. (1995), *De la gravitation suivi Du mouvement des corps*, Paris, coll. 'tel', Gallimard. Présenté par F. de Gandt, *De la Gravitation*, trad. du latin par M. F. Biarnais ; *Du mouvement des corps* trad. du latin et commenté par F. de Gandt.
- NEWTON, I. (1999), *The Principia, Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Berkeley, Los Angeles, London, University of California Press. Translated by I. Bernard Cohen and Anne Whitman with the assistance of Julia Budenz, preceded by a guide to Newton's Principia by I. Bernard Cohen.
- NEWTON, I. (2005), *Principia : Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Paris, Dunod. Traduction, analyse et commentaires par la marquise du Châtelet ; préf. de Voltaire.
- PLATON (2001), *Timée, Critias*, Paris, GF Flammarion. Présentation et traduction par Luc Brisson.
- ROBERVAL, G. (2003), Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes, in *Principaux écrits mathématiques*. Paris, Albert Blanchard. Textes inédits en français et en latin, traduits en français pour la première fois, d'après les manuscrits de la Bibliothèque Nationale et les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences par J. Peyroux.
- VARIGNON, P. (1692), Règles du mouvement en général, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.190–195.
- VARIGNON, P. (1693a), Application de la règle générale des mouvements accélérés à toutes les hypothèses possibles d'accélération ordonnées dans la chute des corps, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.107–112.
- VARIGNON, P. (1693b), Des poids qui tombent ou qui montent le long de plusieurs plans contigus, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.181–187.
- VARIGNON, P. (1693c), Règles des mouvements accélérés suivant toutes les proportions imaginables d'accélération ordonnées, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.93–96.
- VARIGNON, P. (1700a), Du mouvement en général par toutes sortes de courbes ; et des forces centrales, tant centrifuges, que centripètes, nécessaires aux corps qui les décrivent, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.83–101.
- VARIGNON, P. (1700b), Des forces centrales ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbés qu'on leur a supposés jusqu'ici, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.224–243.

- VARIGNON, P. (1700c), Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.22–27.
- VARIGNON, P. (1701), Autres règle générale des forces centrales, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.20–40.
- VARIGNON, P. (1703a), Addition au premier mémoire de l'Académie, de l'année 1699. Touchant la manière de trouver des courbes le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horizon, ou d'un point donné quelconque, en telle raison des tems, et dans telle hypothèse de vitesses qu'on voudra, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.140–150.
- VARIGNON, P. (1703b), Des courbes décrites par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, placées à discrétion entr'elles, et par rapport aux plans de ces mêmes courbes, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.212–229.
- VARIGNON, P. (1704), Manière de discerner les vitesses des corps mûs en lignes courbes ; de trouver la nature ou l'équation de quelque courbe que ce soit, engendré par le concours de deux mouvemens connus ; et réciproquement de déterminer une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer ainsi telle courbe qu'on voudra, et même deux, pour la décrire de telle vitesse qu'on voudra, suivant cette courbe., *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.286–306.
- VARIGNON, P. (1705), Du mouvement des planètes sur leurs orbites, en y comprenant le mouvement de l'apogée ou de l'aphélie, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.347–360.
- VARIGNON, P. (1706), Comparaison des forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles courbes qu'on voudra, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.178–235.
- VARIGNON, P. (1707a), Des mouvemens faits dans des milieux qui leur résistent en raison quelconque, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.382–476.
- VARIGNON, P. (1707b), Des mouvemens variés à volonté, comparés entr'eux et avec les uniformes, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.222–275.
- VARIGNON, P. (1708a), Accord des solutions du mémoire du 18. Juillet dernier, pag.250. etc. avec celles de M. Newton, et de M. Hugheens, touchant la ligne que décrirait un corps de pesanteur constante jetté suivant quelque direction que ce fût dans un milieu dont les résistances seraient en raison des vitesses de ce corps, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.302–312.

- VARIGNON, P. (1708b), Autres solutions du problème déjà résolu dans le mémoire du 18. Juillet dernier, pag. 250. et touchant la courbe que décrirait un corps de pesanteur constante, jetté dans un milieu résistant en raison des vitesses de ce corps, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.419–455.
- VARIGNON, P. (1708c), Différentes manières de déterminer la courbe que décrirait un corps de pesanteur constante, jetté suivant quelque directions que ce fût dans un milieu dont les résistances seraient en raison des vitesses de ce corps, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.250–274.
- VARIGNON, P. (1708d), Des mouvemens primitivement variés dans des milieux qui leur résistent en raison des vitesses ausquelles ils s'opposent, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.113–154.
- VARIGNON, P. (1709a), Courbe de projection décrite en l'air dans l'hypothèse des résistances de ce milieu en raison des vitesses actuelles du mobile, nonobstant lesquelles résistances les accélérations des chûtes se fassent en raison des tems, ainsi que quelques philosophes disent l'avoir observé, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.69–85.
- VARIGNON, P. (1709b), Des mouvemens commencés par des vitesses quelconques, et ensuite primitivement accelerés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du mobile, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.267–308.
- VARIGNON, P. (1709c), Des mouvemens primitivement retardés en raison des tems qui resteraient à écouler jusqu'à leur entière extinction dans le vuide faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du mobile, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.63–91.
- VARIGNON, P. (1709d), Des mouvemens primitivement variés dans les milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives de ces mouvemens, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.193–227.
- VARIGNON, P. (1710a), Des forces centrales inverses, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.533–544.
- VARIGNON, P. (1710b), Des mouvemens commencés par des vitesses quelconques, et ensuite primitivement accelerés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des sommes faites des vitesses effectives du mobile, et des quarrés de ces mêmes vitesses, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.491–518.

VARIGNON, P. (1710c), Des mouvemens primitivement variés dans des milieux résistans en raison des sommes faites des vitesses effectives de ces mouvemens, et des quarrés de ces mêmes vitesses, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.243–274.

VARIGNON, P. (1711), Des mouvemens primitivement retardés en raison des tems qui resteraient à écouler jusqu'à leur entière extinction dans le vuide, faits dans des milieux résistans en raison des sommes faites des vitesses effectives de ces mouvemens dans ces milieux, et des quarrés de ces mêmes vitesses, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pp.248–281.

VARIGNON, P. (1988), Liste des œuvres de Pierre Varignon, in SPEISSER, D. (dir.) : *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, volume Band 2, pp.387–408. Basel, Birkhäuser Verlag.

Sources Secondaires

- AITON, E. J. (1960), The celestial mechanics of Leibniz, *Annals of science*, 16(2), pp.65–82.
- AITON, E. J. (1962), The celestial mechanics of Leibniz in the light of newtonian criticism, *Annals of science*, 18(1), pp.31 – 41.
- AITON, E. J. (1969), Kepler's second law of planetay motion, *History of science society*, 60(1), pp.75–90.
- AITON, E. J. (1972), Leibniz on motion in a resisting medium, *Archives for History of Exact Sciences*, 9(3), pp.257–274.
- AITON, E. J. (1984), The mathematical basis of Leibniz's theory of planetary motion, *Studia Leibnitiana*, 13, pp.209 – 225.
- AITON, E. J. (1986), The application of the infinitesimal calculus to some physical problems by Leibniz and his friends, *Studia Leibnitiana*, 14, pp.133 – 143.
- AITON, E. J. (1989), Polygons and parabolas : some porblems concerning the dynamics of planetary orbits, *Centaurus*, 31, pp.207 – 221.
- BALIBAR, F. (1984), *Galilée, Newton lus par Einstein, espace et relativité*, Paris, Press Universitaire de France.
- BARREAU, H. (1982), *Construction de la notion de temps, 3 vol., Thèse de doctorat d'état. Fondement des sciences*, thèse de doctorat, Strasbourg.
- BARREAU, H. (1998), *Le temps*, Paris, coll. Que sais-je ?, Presse Universitaire de France.
- BARTHÉLÉMY, G. (1987), De la force accélératrice dans les Principia, *Revue d'histoire des sciences*, 40(3-4), pp.273–280.
- BARTHÉLÉMY, G. (1992), *Newton mécanicien du cosmos*, Paris, Vrin.

- BERTOLONI MELI, D. (1986), Some aspects of the interaction between natural philosophy and mathematics in leibniz, in EDITORE, L. S. O. (dir.) : *The Leibniz renaissance (International workshop, Firenze, 2-5 giugno 1986)*, volume 28, pp.9–22. Paolo Rossi, Walter Bernardi.
- BERTOLONI MELI, D. (1988), Leibniz's Excerpts from the Principia Mathematica, *Annals of science*, 45, pp.477 – 505.
- BERTOLONI MELI, D. (1991), Public claims, private worries : Newton's Principia and Leibniz's theory of planetary motion, *Studies in History and Philosophy of Science*, 22(3), pp.415 – 449.
- BERTOLONI MELI, D. (1993), The emergence of reference frames and the transformation of mechanics in the enlightenment, *Historical studies in the physical and biological sciences*, 23(2), pp.301–335.
- BERTOLONI MELI, D. (2002), *Equivalence and priority : Newton versus Leibniz. Including Leibniz's unpublished manuscripts on the Principia*, Oxford, Clarendon Press.
- BERTOLONI MELI, D. (2006), *Thinking with objects*, The Johns Hopkins University Press.
- BERTOLONI MELI, D. (2010a), The axiomatic tradition in seventeenth-century mechanics, in CHIGACO et LA SALLE, O. C., Illinois (dir.) : *Discourse on a new method : reinventing the marriage of history and philosophy of science*, pp.23–41. Domski, M and Dickson, M.
- BERTOLONI MELI, D. (2010b), Patterns of transformation in seventeenth-century mechanics, *The monist*, 93(4), pp.580–597.
- BLAY, M. (1986), Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley, *Revue d'histoire des sciences*, 39(3), pp.223–253.
- BLAY, M. (1987), Le traitement newtonien du mouvement des projectiles dans les milieux résistants, *Revue d'histoire des sciences*, 40(3-4), pp.325–355.
- BLAY, M. (1988), Varignon ou la théorie du mouvement des projectiles comprise en une proposition générale, *Annals of Science*, 45(6), pp.591–618.
- BLAY, M. (1989), Quatre mémoires inédits de Pierre Varignon consacrés à la science du mouvement, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 39, pp.218–248.
- BLAY, M. (1992), *La naissance de la mécanique analytique : la science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*, Paris, Presse Universitaire de France.

- BLAY, M. (1993), *Les raisons de l'infini. Du monde clos à l'univers mathématique*, Paris, coll. nrf essais, Gallimard.
- BLAY, M. (1995), *Les Principia de Newton*, Paris, coll. Philosophies, Presse Universitaire de France.
- BLAY, M. (1998a), Calcul de l'infini, in BLAY, R., M. ; Halleux (dir.) : *Science classique XVII^e- XVIII^e siècle- Dictionnaire critique*, pp.692–711. Paris, Flammarion.
- BLAY, M. (1998b), Infini, in BLAY, R., M. ; Halleux (dir.) : *Science classique XVII. ieme- XVIII. ieme siècle- Dictionnaire critique*, pp.563–571. Paris, Flammarion.
- BLAY, M. (1998c), Mathématisation, in BLAY, R., M. ; Halleux (dir.) : *science classique XVI^e-XVIII^e siècles- Dictionnaire critique*, pp.603–609. Paris, Flammarion.
- BLAY, M. (1998d), Mouvement, in BLAY, R., M. ; Halleux (dir.) : *Science classique XVII. ieme- XVIII. ieme siècle- Dictionnaire critique*, pp.784–800. Paris, Flammarion.
- BLAY, M. (2001), Force, continuity, and the mathematization of motion at the end of the seventeenth century, in BUCHWALD, I., Jed Z ; Cohen (dir.) : *Isaac Newton's natural philosophy*. Cambridge, Massachusetts ; London, England, M.I.T. Press.
- BLAY, M. (2006), Infini et mathématisation du mouvement au xvii^e siècle, in BARTOCCI, P., C. et Odifreddi (dir.) : *La mathématique. Les lieux et les temps*, volume 1, pp.397–425. Paris, CNRS éditions.
- BLAY, M. (2010), *Penser avec l'infini, La fécondité d'une notion mathématique et philosophique, de Giordano Bruno aux Lumières*, Paris, Vuibert, Adapt-Snes éditions.
- BOS, H. J. M. (1974), Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian cacluls, *Archives for History of Exact Sciences*, 14, pp.1–90.
- BOS, H. J. M. (1980a), Mathematics and rational mechanics, in ROUSSEAU, G. S. et POTTER, R. (dir.) : *The ferment of knowledge : studies in the historiography of eighteenth century*. Cambridge, New York, Melbourne, Cambridge university press.
- BOS, H. J. M. (1980b), Newton, Leibniz and the leibnizian tradition, in *From the calculus to the set theory, 1630-1910, an introductory history*. Princeton and Oxford, Princeton University Press.
- Bos, H. J. M. (1982), L'élaboration du calcul infinitésimal, Huygens entre Pascal et Leibniz, in *Huygens et la France*, pp.115 – 121. Paris, Vrin.
- Bos, H. J. M. (1986), Fundamental concepts of the leibnizian calculus, *Studia Leibnitiana*, 14, pp.103–118.

- BOYER, C. B. (1959), *The history of the calculus and its conceptual development*, New York, Dover edition.
- BRACKENRIDGE, J. (2000), Newton's dynamics : the diagram as a diagnostic device, in DALITZ, R., H et NAUENBERG, M. (dir.) : *The foundations of Newtonian scholarships*, pp.71 – 102. London, World Scientific.
- BRACKENRIDGE, J. et NAUENBERG, M. (2002), Curvature in Newton's dynamics, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- BREHIER, E. (1990a), *Histoire de la philosophie, I*, Paris, coll. Quadridge, Presse Universitaire de France.
- BREHIER, E. (1990b), *Histoire de la philosophie, II*, Paris, coll. Quadridge, Presse Universitaire de France.
- BRINKLEY, J. (1810), On Sir Isaac Newton's first solution of the problem for finding the relation between resistance and gravity, that a body may be made to describe a given curve : and the source of error in that solution pointed out, *The transaction of the Royal Irish Academy*, 11, pp.45–59.
- BRUNSCHVICG, L. (1972), *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Albert Blanchard.
- CAJORI, F. (1993), *A history of mathematical notations*, New York, Dover edition.
- CALE, G. (1984), Leibniz'force : where force and metaphysics collide, *Studia Leibnitiana*, 13, pp.62–70.
- CARNOT, L. (1970), *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, Albert Blanchard.
- CHANDRASEKHAR, S. (2003), *Newton's Principia for the common reader*, Oxford : Clarendon Press Oxford, New York : Oxford University Press.
- CHAREIX, F. (2003), La découverte des lois du choc par Christiaan Huygens, pp.15 – 58.
- COHEN, I. (1967), Newton's second law and the concept of force in the Principia, *The Texas Quartely*, 10(3), pp.127–157.
- COHEN, I. (1971), Newton's second law and the concept of force in the principia, in PALTER, R. (dir.) : *The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton, 1666-1966*. M.I.T. Press.

- COHEN, I. (2002), Newton's concepts of force and mass, with notes on the laws of motion, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- COHEN, I. B. (1993), *Les origines de la physique moderne*, Paris, Editions du Seuil.
- COSTABEL, P. (1965), Pierre Varignon (1654-1722) et la diffusion en France du calcul différentiel et intégral, in *Conférences du Palais de la Découverte*, D n° 108.
- CROMBIE, A. (1959), *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1600)*, Paris, Presse Universitaire de France. Traduction de l'anglais de J. d'Hermies, 2 vols.
- CURTIS, W. (2002), Newton and celestial mechanics, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.,
- DAUDON, V. (2007), Mesure de temps, étude sur le passage d'un calendrier agraire à un calendrier religieux, Mémoire de D.E.A., Université Paris 7 – Denis Diderot.
- DENIS, M. et BLAYAU, N. (2004), *Le 18^e siècle*, Paris, Armand Collin.
- DISALLE, R. (2002), Newton's philosophical analysis of space and time, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- DISALLE, R. (2006), *Understanding Space-Time*, Cambridge, Cambridge University Press.
- DOUGLAS, M. J. (1989), Philosophical theory and mathematical practice in the seventeenth century, *Studies in History and Philosophy of Science*, 20(2), pp.215–244.
- DUCHESNAU, F. (1998), Leibniz, in *Science classique XVI^e-XVIII^e siècle- Dictionnaire critique*. Paris, Flammarion.
- DUGAS, R. (1950), *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, Ed. du Griffon.
- DUGAS, R. (1954), *La mécanique au XVII^e siècle*, Neuchâtel, Ed. du Griffon.
- DUHEM, P. (1976), *Système du monde, Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, volume 7, Paris, Hermann.
- DUHEM, P. (1992), *L'évolution de la mécanique*, Paris, coll. Mathesis, Vrin.
- ELIAS, N. (1996), *Du temps*, Paris, Fayard. Traduit de l'allemand par Michèle Hulin.
- ERLICHSON, H. (1992), Newton and Hooke on centripetal force motion, *Centaurus*, 35, pp.46–63.

- FAUVEL, J. (2000), Newton's mathematical language, in DALITZ, M., R.H ; Nauenberg (dir.) : *The foundations of Newtonian Scholarships*, pp.154 – 159. London, World Scientific.
- FELLMANN, E. A. (1988), The ' Principia ' and continental mathematicians, *Notes and Records of the Royal Society of London*, 42(1), pp.13–34.
- FICHANT, M. (1974), La "réforme" leibnizienne de la dynamique, d'après des textes inédits, *Studia Leibnitiana*, Supplementa 13, pp.195–214.
- FICHANT, M. (1978), Les concepts fondamentaux de la mécanique selon Leibniz, en 1676, *Studia Leibnitiana*, Supplementa 17, pp.219–232.
- FLECKENSTEIN, J. O. (1946), Johann I Bernoulli als kritiker des " Principia " Newtons, *Elemente des Mathematik*, 1(6), pp.100–108.
- FLECKENSTEIN, J. O. (1948), Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, XXVIII(5), pp.76–138.
- GABBEY, A. (1971), Force and inertia in seventeenth century dynamics, *Studies in History and Philosophy of Science*, 2(1), pp.1–67.
- GABBEY, A. (1998), Force, force vive, conservation, in *science classique XVI^e-XVIII^e siècles- Dictionnaire critique*, pp.524 – 534. Paris, Flammarion.
- GABBEY, A. (2002a), Newton, active powers, and the mechanical philosophy, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- GABBEY, A. (2002b), Newton's mathematical principle of natural philosophy : a treatise on "mechanics" ?, in *The Investigation of difficult things*. Cambridge, Cambridge University Press.
- GALUZZI, M. (1991), Some considerations about motion in a resisting medium in newton's principia, in *Giorate di storia della matematica*. Editel.
- de GANDT, F. (1981), Duratio, fluxio, æquatio. Trois aspects du temps newtonien, *Archives de Philosophie*, 44, pp.353–370.
- de GANDT, F. (1985), Temps physique et temps mathématique chez Newton, in *Mythes et représentations du temps*, pp.87–105. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique.

- de GANDT, F. (1986), Le style mathématique des Principia de Newton, *Revue d'histoire des sciences*, 39(3. Etude sur l'histoire du calcul infinitésimal), pp.195–222.
- de GANDT, F. (1987), Le problème inverse dans les Principia, Liv. I, prop. 39-41, *Revue d'histoire des sciences*, 40(3-4), pp.281–309.
- de GANDT, F. (1995), *Force and geometry in Newton's Principia; translated by Curtis Wilson*, Princeton, Princeton University Press.
- GIUSTI, E. (2000), *La naissance des objets mathématiques*, Paris, Collection l'esprit des sciences, Ellipses.
- GRANGER, G. (1981), Philosophie et mathématique leibniziennes, *Revue de métaphysique et de morale*, 86e année(1 (Janvier-Mars)), pp.1–37.
- GRANT, E. (1995), *La physique au Moyen-Âge*, Paris, coll. bibliothèque d'histoire des sciences, Presse Universitaire de France. Traduction française de P.A. Fabre.
- GRANT, E. (1996), *The Foundation of modern sciences in the Middle Ages*, Cambridge, Cambridge University Press.
- GREENBERG, J. L. (1986), Mathematical physics in the eighteenth-century France, *Isis*, 77(1), pp.59–78.
- GUICCIARDINI, N. (1989), *The development of newtonian calculus in Britain, 1700–1800*, Cambridge, Cambridge University Press.
- GUICCIARDINI, N. (1999), *Reading the Principia. The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge, Cambridge University Press.
- GUICCIARDINI, N. (2002), Analysis and synthesis in Newton's mathematical work, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- GUICCIARDINI, N. (2003), Newton's method and Leibniz's calculus, in JAHNKE, H. N. (dir.) : *A history of analysis*, pp.73–103. American Mathematical Society Press.
- GUICCIARDINI, N. (2011), *Isaac Newton On mathematical certainty and method*, London, The MIT Press.
- HALL, A. (1952), *Ballistics in the seventeenth century*, Cambridge, Cambridge University Press.
- HALL, A. R. (1958), Correcting the Principia, *Osiris*, 13, pp.291–326.

- HALL, A. R. (2001), Newton and absolutes : sources, in HARMAN, P. et SHAPIRO, A. (dir.) : *The Investigation of difficult things*. Cambridge, Cambridge University Press.
- HALL, A. R. (2002), Newton versus Leibniz : from geometry to metaphysics, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*, pp.431–454. Cambridge, Cambridge University Press.
- HAWKINGS, S. (2007), *Une brève histoire du temps*, Paris, Ed. J'ai lu.
- HOCK, F. (1984), Remarques sur newton et la géométrie, in du séminaire d'épistémologie comparative d'Aix-en-Provence E.R.A 650 du C.N.R.S., T. (dir.) : *Appliquer les mathématiques ?* Paris, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique.
- ITARD, J. (1953), Quelques remarques historiques sur l'axiomatique du concept de grandeur, *La revue scientifique*, 91^e année, pp.3–14.
- JAMMER, M. (1957), *Concept of force, a study in the foundations of dynamics*, Havard university press.
- JEANDALY, J. (2009), *Une histoire illustrée de la mesure du temps, de la course du Soleil aux horloges atomiques*, Paris, Vuibert.
- JULLIEN, V. (1998), Euclidien, in HALLEUX, M. B. R. (dir.) : *Science classique XVIème-XVIIIème siècle- Dictionnaire critique*, pp.502–510. Paris, Flammarion, Paris.
- JULLIEN, V. (2006), Quelques aspects du caractère incontournable des *Eléments* d'euclide au xvii^e siècle., in *Philosophie naturelle et géométrie au xvii^e siècle*, pp.257–309. Paris, Honoré Champion.
- KLEIN, E. (2004), Le temps, in LECOURT, D. (dir.) : *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, pp.925–929. Paris, Presse Universitaire de France.
- KNOBLOCH, E. (1998), Algèbre et géométrie, in *Science classique XVIème-XVIIIème siècle- Dictionnaire critique*, pp.673–690. Paris, Flammarion.
- KOYRÉ, A. (1968), *Etudes newtoniennes*, Paris, Gallimard.
- KOYRÉ, A. (2005), *Du monde clos à l'univers infini*, Paris, coll. 'tel', Gallimard.
- Perez de LABORDA, A. (1986), Newtons Fluxionsrechnung im Vergleich zu Leibniz Infinitesimalkalkül, *Studia Leibnitiana*, 14, pp.239–257.
- LACHIÈZE-REY, M. (2008), *Au delà de l'espace et du temps : la nouvelle physique*, Paris, Le pommier.
- LAGRANGE, J. (2007), *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, J. Gabay.

- LANDES, D. (1987), *L'heure qu'il est*, Paris, Ed. Gallimard.
- LEBRUN, F. (2006), *Le 17^e siècle*, Paris, Armand Colin.
- LIBERA, A. d. (1991), *Penser au Moyen-Âge*, Paris, Editions du Seuil.
- le LIONNAIS, F. (1959), *Le temps*, Paris, Ed. Robert Delpierre.
- LOHNE, J. (1960), Hooke versus Newton, *Centaurus*, 7(1), pp.6–52.
- MACH, E. (1987), *La mécanique, exposé historique et critique de son développement*, Paris, Jacques Gabay.
- MAGLO, K. (2003), The reception of Newton's gravitational theory by Huygens, Varignon, and Maupertuis : how normal science may be revolutionary, *Perspectives on Sciences*, 11(2), pp.135–169.
- MAHONEY, M. S. (1984), Changing canons of mathematical and physical intelligibility in the later 17th century, *Historia Mathematica*, 11, pp.417–423.
- MARONNE, S. et PANZA, M. (2014), Euler, reader of Newton : mechanics and algebraic analysis, *Advances in Historical Studies*, 3(1), pp.12–21.
- MÉDINA, J. (1985), Les mathématiques chez Spinoza et Hobbes, *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, T. 175(2), pp.177 – 188.
- MÉDINA, J. (1997), Le temps chez Hobbes, *Les études philosophiques*, 2, pp.171 –190.
- MEYERSON, E. (1951), *Identité et réalité*, Paris, Vrin.
- NAUENBERG, M. (2011), Proposition 10, Book 2, in the Principia, revisited, *Archives for History of Exact Sciences*, 65, pp.567–587.
- NAUENBERG, M. (2012), Comment on " Is Newton's second law really Newton's ? " by Bruce Pourciau [Am. J. Phys. 79(10), 1015-1022 (2011)], *American Association of Physics Teachers*, 80(10), pp.931–933.
- NICHOLAS, J. M. (1978), Newton's extremal second law, *Centaurus*, 22, pp.108 – 130.
- PANZA, M. (1991), Eliminare il tempo : Newton, Lagrange e il problema inverso del moto resistente, in *Giornate di Storia della Matematica*, pp.438–487. Editel.
- PANZA, M. (2003), *Newton*, Paris, Les Belles Lettres.
- PANZA, M. (2005), *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, Paris, coll. Sciences dans l'histoire, Ed. Albert Blanchard.

- PANZA, M. et SERENI, A. (2013), Introduction, in *Introduction à la philosophie des mathématiques*, pp.7 – 97, Paris, collection Champs essai, Flammarion.
- PARMENTIER, M. (1989), *Naissance du calcul différentiel ; 26 articles des Acta Eruditorum*, Paris, Vrin.
- PATRAS, F. (2004), Géométries, in LECOURT, D. (dir.) : *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, pp.457 – 462. Paris, Presse Universitaire de France.
- PATY, M. (1994), Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique, in GARMA, S., FLAMANT, D. et NAVARRO, V. (dir.) : *Contra los titanes de la rutina - Contre les titans de la routine*, pp.401 – 428. Comunidad de Madrid/ C.S.I.C., Madrid.
- PATY, M. (1996), Sur l'histoire du problème du temps : le temps physique et les phénomènes, in KLEIN, E. et SPIRO, M. (dir.) : *Le temps et sa flèche*, pp.21–58. Paris, coll. Champs, Flammarion.
- PATY, M. (2001), Réflexions sur le concept de temps, *Revista de Filosofia*, 25, pp.53–92.
- PATY, M. (2004), L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de d'alembert, in R. MORELON, A. H. (dir.) : *De Zénon d'Elée à Poincaré, Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, pp.391–426. Louvain, Editions Peeters.
- PIETTRE, B. (1989), *Philosophie et science du temps*, Paris, coll. Que sais-je ?, Presse Universitaire de France.
- PIETTRE, B. (2004), Platon, in LECOURT, D. (dir.) : *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, pp.739 – 740. Paris, Presse Universitaire de France.
- POURCIAU, B. (1998), The preliminary mathematical lemmas of Newton's Principia, *Archives for history of Exact sciences*, 52, pp.279–295.
- POURCIAU, B. (2001), Newton and the notion of limit, *Historia Mathematica*, 28, pp.18–30.
- POURCIAU, B. (2003), Newton's argument for proposition 1 of the Principia, *Archives for history of exact sciences*, 57, pp.267–311.
- POURCIAU, B. (2004), The importance of being equivalent : Newton's two models of one-body-motion, *Archives for history of Exact sciences*, 58, pp.283 – 321.
- POURCIAU, B. (2006), Newton's interpretation of Newton's second law, *Archives for History of Exact Sciences*, 60, pp.157–207.

- POURCIAU, B. (2007), Force, deflection, and time : Proposition VI of Newton's Principia, *Historia Mathematica*, 34, pp.140–172.
- POURCIAU, B. (2009), Proposition II (book I) of Newton's Principia, *Archives for history of exact sciences*, 63, pp.129–167.
- POURCIAU, B. (2011), Is Newton's second law really Newton's, *American Association of Physics Teachers*, 79(10), pp.1015–1022.
- POURCIAU, B. (2012), Reply to " Comment on ' Is Newton's second law really Newton's ? ' by Bruce Pourciau [Am. J. Phys. 79(10), 1015-1022 (2011)] ", *American Association of Physics Teachers*, 80(10), pp.934–935.
- RICHARD T. W., A. (1995), Newton's Fluxions and Equably Flowing Time, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26, pp.323–351.
- ROBINET, A. (1984), Dynamique et fondements métaphysiques, *Studia Leibnitiana*, 13, pp.1–24.
- ROCHOT, B. (1956), Sur les notions de temps et d'espace chez quelques auteurs du XVII^e siècle, notamment Gassendi et Barrow, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, IX, pp.97 – 104.
- ROVELLI, C. (2008), *Qu'est-ce que le temps ? Qu'est-ce que l'espace ?*, Bernard Gilson Editeur.
- RUSSEL, J. (1964), Kepler's Laws of planetary motion : 1609-1666, *British Journal for the History of Science*, 2, pp.1–24.
- RYNASIEWICZ, R. (1995a), By their properties, causes and effects : Newton's scholium on time, space, place and motion - I. The text, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26(1), pp.133 – 153.
- RYNASIEWICZ, R. (1995b), By their properties, causes and effects : Newton's scholium on time, space, place and motion - II. The context, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26(2), pp.295– 321.
- SAY, C. (2010), *Construction des concepts et principes fondateurs de la physique classique : cas de la dynamique newtonienne*, thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot.
- SCRIBA, J. (1964), The Inverse Method of Tangents : a Dialogue between Leibniz and Newton, *Archives for History of Exact Sciences*, pp.113 – 137.

- SEIDENGART, J. (2004), Infini, in LECOURT, D. (dir.) : *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, pp.514 – 519. Paris, Presse Universitaire de France.
- SELLÉS, A. M. (2006), Infinitesimals in the foundations of Newtons's mechanics, *Historia Mathematica*, pp.210 – 223.
- SERFATI, M. (2005), *La révolution symbolique*, Paris, Collections « Transphilosophiques », Editions PETRA.
- SERGESCU, P. (1949), *Les recherches sur l'infini mathématique jusqu'à l'établissement de l'analyse infinitésimale*, volume 1083, Paris, Hermann, coll. Actualités scientifiques et industrielles.
- SIMONOVITS, A. (1974), Die Kategorien des Raumes und der Zeit in der Philosophie den Naturwissenschaft des 17. und 18. Jahrhunderts, *Studia Leibnitiana*, Supplementa 13, pp.121 – 132.
- SIMONSEN, K. (2003), *Génèse conceptuelle et mathématisation dans la mécanique de Newton – suivi d'une comparaison avec Leibniz*, thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot.
- SINACEUR, H. (1998), Différents aspects du formalisme, in NEF, D., F; Vernant (dir.) : *Le formalisme en question*, pp.129–146. Paris, Vrin.
- SINACEUR, H. (2004), Infini mathématique, in LECOURT, D. (dir.) : *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, pp.519 – 525. Paris, Presse Universitaire de France.
- SMITH, G. (2002), The methodology of the Principia, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- SOUFFRIN, P. (1992), Sur l'histoire du concept de vitesse chez Galilée et la tradition scolastique, in BRÉMONT (dir.) : *Le temps, sa mesure et sa perception au Moyen Âge, Actes du colloque Orléans 12-13 avril 1991*, pp.243–268. Caen, Paradigme.
- STEIN, H. (2002), Newton's metaphysics, in COHEN, I. et SMITH, G. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- STEPHENSON, B. (1987), *Kepler's physical astronomy*, New York, Springer-Verlag.
- TATON, R. (1995), *La science moderne*, volume 2, Paris, coll. Quadridge, Press Universitaire de France.
- TRUESDELL, C. (1960-1962), A programm toward rediscovering the rational mechanics of the age of reason, *Archives for History of Exact Sciences*, 1, pp.1–36.

- VERDET, J. (1998), *Histoire de l'astronomie ancienne et classique*, Paris, coll. Que sais-je ?, Presse Universitaire de France.
- VILAIN, C. (1996), *La mécanique de Christian Huygens*, Paris, Albert Blanchard.
- VOLLRATH, E. (1969), Platons Lehre von der Zeit im Timaeus, *Philosophisches Jahrbuch*, 76, pp.257–263.
- WESTFALL, R. S. (1994), *Newton*, Paris, coll. Figures de la science, Flammarion.
- WHITESIDE, D. (1960-1962), Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, *Archives for History of Exact Sciences*, 1, pp.179–388.
- WHITESIDE, D. (1970), *The mathematical principles underlying Newton's Principia Mathematica*, University of Glasgow.
- WHITESIDE, D. (1991), The prehistory of the 'Principia' from 1664 to 1686., *Notes and Records of the Royal Society of London*, 45, pp.11 – 61.
- WILSON, C. (1974), Newton and some philosopher on Kepler's "laws", *Journal of the history of ideas*, 35(2), pp.231–258.
- WILSON, C. (2002), Newton and celestial mechanics, in COHEN, I. B. et SMITH, G. E. (dir.) : *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge, Cambridge University Press.
- WURTZ, J.-P. (1989), La naissance du calcul différentiel et le problème du statut des infiniment petits : Leibniz et Guillaume de l'Hospital, in *La mathématique non standard*, pp.13–41. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique.
- YODER, J. G. (1988), *Unrolling time*, Cambridge, Cambridge University Press.
- YOUSCHKEVITCH, A. (1978), Comparaison des conceptions de Leibniz et de Newton sur le calcul infinitésimal, *Studia Leibnitiana*, Supplementa 17, pp.69–80.