



HAL
open science

Etude du prolongement méromorphe de fonctions zêta spectrales grâce à la géométrie non commutative

Franck Gautier-Baudhuit

► **To cite this version:**

Franck Gautier-Baudhuit. Etude du prolongement méromorphe de fonctions zêta spectrales grâce à la géométrie non commutative. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Clermont Auvergne [2017-2020], 2017. Français. NNT : 2017CLFAC042 . tel-01724063

HAL Id: tel-01724063

<https://theses.hal.science/tel-01724063>

Submitted on 6 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES
FONDAMENTALES

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :

MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Par GAUTIER-BAUDHUIT Franck

Master

Étude du prolongement méromorphe de
fonctions zêta spectrales grâce à la géométrie
non commutative

Soutenue publiquement le VENDREDI 10 NOVEMBRE 2017 , devant la
commission d'examen.

Présidente : Mme.Sylvie PAYCHA

Rapporteur : M.Ali BAKLOUTI

Rapporteur : M.Nigel HIGSON

Examineur : M.François DUMAS

Directeur : M.Jean-Marie LESCURE

Directeur : M.Dominique MANCHON

*A ma grand mère et à ma mère adorées.
A Patricia, mon épouse bien-aimée.
Au goût des cerises, au chant des grillons
et à l'amor sempervirens.
A Armelle, mon amie d'enfance et mon trésor.*

RÉSUMÉ: Cette thèse s'intéresse à des familles de fonctions zêta spectrales (séries de Dirichlet) qui peuvent être associées à certaines algèbres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert. Dans ce mémoire, la principale question étudiée sur ces fonctions zêta est l'existence d'un prolongement méromorphe à partir d'un demi-plan ouvert du plan complexe au plan complexe tout entier. Généralisant une idée de Nigel Higson, on propose dans la partie I, une méthode pour prouver l'existence de ce prolongement méromorphe pour certaines fonction zêta spectrales. Cette méthode s'effectue dans le cadre d'algèbres d'opérateurs différentiels généralisés et elle s'appuie sur une suite de réduction. Le théorème principal donne, sous certaines conditions, l'existence d'un prolongement méromorphe, une localisation des pôles dans les supports de suites arithmétiques et une borne supérieure pour l'ordre de ces pôles. Dans la partie II, on reformule la méthode de la partie I dans le contexte et avec le vocabulaire des triplets spectraux de Connes et Moscovici. Dans la troisième partie, on donne une application pour des fonctions zêta associées à des opérateurs de type Laplace sur des variétés lisses, compactes et sans bord. Cet exemple a été initialement traité par Nigel Higson avec cette approche en 2006. Une deuxième application traite de fonctions zêta associées au tore non commutatif. Dans la partie IV, on utilise le calcul pseudodifférentiel associé à des algèbres de Lie nilpotentes et développé par Dominique Manchon, pour construire de nouveaux triplets spectraux. Dans la partie V se trouve la principale application de la méthode exposée dans ce mémoire. On prouve l'existence du prolongement méromorphe pour des fonctions zêta provenant de représentations de Kirillov d'une classe d'algèbre de Lie nilpotentes.

Mots clés: Algèbres de Lie nilpotentes, fonctions zêta spectrales, géométrie différentielle, géométrie non commutative, laplacien, opérateurs différentiels, opérateurs de Schrödinger, prolongement méromorphe, représentation de Kirillov, tore non commutatif, triplets spectraux.

ABSTRACT: The thesis is about a families of zeta functions (Dirichlet series) that may be associated to certain algebras of Hilbert space operators. In this thesis, the main question in studying these zeta functions is to establish their meromorphic continuation from a half-plane in the complex plane to the full plane. Following an idea of Nigel Higson, we develop, in part I, a method for proving the existence of a meromorphic continuation for some spectral zeta functions. The method is based on algebras of generalized differential operators. The more important tool is the reduction sequence. The main theorem states, under some conditions, the existence of a meromorphic continuation, a localization of the poles in supports of arithmetic sequences and an upper bound of their order. A formulation of the method into the framework of Connes and Moscovici, the regular spectral triples, setting in part II. In the third part, we give an application for zeta functions associate to a Laplace-type operator on a smooth, closed manifold. This example was initially treated in this way by Nigel Higson in 2006. We give another application for zeta functions associate to the noncommutative torus. In part IV, using the work of Dominique Manchon on algebras of pseudodifferential operators associated to unitary representations of nilpotent Lie group, we construct new spectral triples. In part V, set the main application of the method. We applicate the reduction method for some algebras of generalized differential operators, arising from a Kirillov representation of a class of nilpotent Lie algebras.

Keywords: Nilpotent Lie algébras, spectral zeta function, differential geometry, noncommutative geometry, Laplacian, differential geometry, Schrödinger operators, meromorphic continuation, Kirillov representation, noncommutative torus, spectral triples.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord profondément remercier mes directeurs de thèse Jean-Marie Lescure et Dominique Manchon. Ils m'ont fait confiance, ils m'ont encouragé et ils m'ont guidé. Je les remercie pour leur très grande disponibilité, pour la qualité de leurs suggestions et pour les nombreuses relectures du mémoire. Je me souviens que Jean-Marie m'a accueilli d'une manière extraordinaire lorsque j'ai repris des études en Master 2. C'est grâce à lui que j'ai entrepris ce travail de recherche. J'ai eu beaucoup de chance que Dominique ait accepté de co-diriger ma thèse, je le remercie d'avoir proposé un sujet de recherche aussi passionnant.

Je remercie sincèrement Ali Bakoutli et Nigel Higson d'avoir rapporter sur ma thèse. C'est un grand honneur qu'ils se soient intéressés à mon travail. J'adresse mes remerciements chaleureux et toute ma gratitude à Sylvie Paycha pour avoir accepté de faire partie du jury et d'en être la présidente. Je voudrais aussi dire avec quel plaisir, j'ai appris que François Dumas serait membre du jury. Je le remercie pour la façon dont il m'a encouragé et accompagné durant cette thèse.

Quand a germé dans mon esprit l'idée de reprendre des études, je n'étais pas très sûr de moi. Je suis donc allé à l'université un jour d'été, pour avoir des conseils. J'ai été reçu par Julien Bichon, responsable du Master. Il m'a encouragé et lorsque j'ai quitté son bureau ma décision était prise. L'occasion m'est donnée ici de lui exprimer toute ma gratitude. Je remercie aussi Jérôme Chabert pour ses cours en Master 2 et Robert Yuncken pour ses encouragements. Durant ces années de thèse, je ne suis pas allé souvent dans mon bureau. J'ai préféré travailler dans l'ambiance de la bibliothèque de mathématiques, entouré de livres. Je voudrais dire tous mes remerciements à Annick Montori, responsable de la bibliothèque, dont la compétence et la disponibilité facilitent énormément la vie des tous les thésards en général. De façon globale, je remercie tous les membres du département de mathématiques pour leur accueil.

Lorsque j'ai repris le chemin de l'université, il y a maintenant cinq ou six ans, je l'ai fait comme un loisir. Je ne ressentais alors aucun besoin de communiquer sur cette activité dans mon milieu professionnel. La recherche nécessaire à l'élaboration d'une thèse est la majorité du temps une activité exaltante. Cependant, il existe des passages plus difficiles, des moments de doute, des périodes de stagnation voire de recul. Lorsque j'ai traversé ces moments délicats, je me suis posé des questions. j'ai ressenti le besoin de m'ouvrir sur ma démarche. Je retiendrai l'écoute attentive, bienveillante et les réactions encourageantes dont j'ai pu bénéficier. Je remercie Robert Cabane, ses encouragements précoces m'ont été extrêmement précieux. Je remercie aussi Karim Zayana, il a su me proposer des activités stimulantes et m'a apporté beaucoup de positivité. Je veux aussi vivement remercier Charles Torossian, il m'a encouragé dans une période difficile, ma thèse portant d'ailleurs sur un domaine mathématiques qu'il connaît fort bien. Au niveau de mon lycée, je veux remercier François Brugière et Eric Jacquot pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma

démarche. Et bien sûr, je veux exprimer ma profonde sympathie à mes collègues, Geneviève, Laure, Natacha, Olga, Pascale, Christophe, Jérôme, Max, Olivier. Mes plus sincères remerciements s'adressent aussi à ceux qui donnent du sens à toute cette démarche, ceux qui tiennent ma curiosité éveillée, ceux qui me donnent confiance au présent et à l'avenir, mes étudiants.

J'aime la citation de Lao Tseu qui dit que le but est dans le chemin. Il y a évidemment celui de la thèse proprement dit, mais lorsque l'on est plus vraiment jeune, on mesure le fait que la route a commencé il-y-a longtemps. On se dit que pour avoir la chance de faire ce bout de balade, il a fallu beaucoup de belles rencontres. Je voudrais remercier, M.Belisme, M.Maillot, Mme Chassagne, M.Dujol, M.Poncet, Mme Chevet, Mme. Perrin, M.Auque, M.Coffi, M.Ducourtioux, M.Martini, qui du collège à l'université m'ont fait aimer les mathématiques. Du plus profond de mon coeur monte une pensée pour Albert Badrikian, qui nous a quitté trop tôt. Je lui dédie très modestement le contenu mathématiques de cette thèse. Merci aussi à Manon et Jonathan, mes compagnons d'étude.

Je remercie Armelle pour la relecture poétique qu'elle a faite de ce mémoire. J'ai découvert les mots et les phrases sous un jour nouveau. Les objets mathématiques ont donc une vie cachée. Comme toujours, elle m'a fait rêver. Merci à Guillaume et Gilles, entre nous c'est une belle histoire, celle des copains d'abord. J'ai aussi une pensée pour mon frère Frédéric et mes filleules Charlène et Gabrielle. Merci à Raphaëlle et à Paul, je leur dirai un jour que c'est eux qui m'ont donné l'envie de me lancer dans cette aventure.

Pour moi, les meilleures périodes de recherche ont souvent été les vacances. Durant ces dernières années, à la maison, j'ai été bien absorbé par la thèse. Mes fils, Clément et Jérémy ont aujourd'hui 21 ans et 20 ans, j'ai essayé de partager un maximum de choses avec eux. Ils ne m'ont jamais fait ressentir que je les délaissais. Je crois au contraire qu'aujourd'hui ils sont un peu fiers de moi. Je les remercie et je veux leur dire tout mon amour. Enfin, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et plus que cela à Patricia mon épouse. Elle a tout fait pour que je sois dans les meilleures conditions. Souvent elle a été ma meilleure supportrice, confiante lorsque moi je doutais, et je doute souvent. Je la remercie de toujours être à mes côtés.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
I Prolongement méromorphe dans les algèbres d'opérateurs différentiels généralisés	6
1 Espaces de Sobolev et opérateurs différentiels généralisés	6
1.1 Opérateurs compacts, trace et idéaux	6
1.2 Espaces de Sobolev généralisés	9
1.3 Ordre analytique d'un opérateur	10
1.4 Algèbre d'opérateurs différentiels généralisés	13
2 Holomorphie et traces associées à un laplacien généralisé	16
2.1 Formules de Cauchy	17
2.2 Holomorphie de la trace	18
2.3 Familles holomorphes	21
2.4 Développements de Taylor	22
2.5 Développements de Taylor généralisés	24
3 Prolongement méromorphe	29
3.1 Suites de réduction	29
3.2 Le théorème d'interpolation	30
3.3 Le théorème de prolongement méromorphe	32
II Prolongement méromorphe dans le cadre des triplets spectraux	34
4 Triplets spectraux	34
4.1 Triplets spectraux compacts et non compacts	34
4.2 Propriétés	34
4.3 Dimension métrique d'un triplet spectral	35
4.4 Spectre des dimensions d'un triplet spectral	36
5 Algèbres d'opérateurs différentiels généralisés associées à un triplet spectral	36
6 Prolongement méromorphe dans le cadre des triplets spectraux	38
III Applications aux Variétés et au Tore non commutatif	39

7	Variétés riemanniennes compactes	39
7.1	Algèbre d'opérateurs différentiels	39
7.2	Suites de réduction	40
7.3	Théorème de prolongement méromorphe pour les variétés	42
7.4	Exemple de la sphère S^1 , la série de Riemann	43
8	Le tore non commutatif (T.N.C)	44
8.1	Définition et calculs	44
8.2	Dérivations	46
8.3	Triplet spectral associé au T.N.C	46
8.4	Algèbre d'opérateurs différentiels généralisés du T.N.C	47
8.5	Suite de réduction	48
8.6	Prolongement méromorphe pour le T.N.C	50
IV	Triplets spectraux associés à des groupes de Lie nilpotents	52
9	Représentations des groupes de Lie nilpotents	52
9.1	Représentations adjointes et coadjointes d'un groupe de Lie	52
9.2	Méthode des orbites de Kirillov	53
9.3	Représentation dérivée de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	54
10	Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents	56
10.1	Symboles	56
10.2	Quantification de Weyl	56
10.3	Produit de symboles	57
10.4	Calcul pseudo-différentiel	57
10.5	Espaces de Sobolev-Goodman	58
11	Construction des triplets spectraux	59
11.1	Algèbre du triplet	59
11.2	Opérateur de Dirac	60
11.3	Triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$	60
11.4	Régularité et sommabilité du triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$	61
11.5	Triplets spectraux non compacts	62
V	Prolongement méromorphe pour une classe d'algèbres de Lie	62
12	Calcul pratique de la représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$	63
13	Les ensembles $O(I)$ et $T(I)$	63
14	Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}}$	65
15	Générateurs de l'idéal $I(f)$	66
16	Réduction dans l'algèbre $U(\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}})$	69
17	Prolongement méromorphe	72

18 Les algèbres de Heisenberg	73
18.1 L'algèbre de Heisenberg de dimension 3	74
18.2 L'algèbre de Heisenberg de dimension $2n + 1$	74
19 Les algèbres Filiformes	75
19.1 Opérateurs de Schrödinger Homogènes en dimension 1	75
19.2 Opérateurs de Schrödinger quartique	76
19.3 Algèbre filiforme de dimension $q + 2$	76
20 Une algèbre particulière de dimension 6	77
21 Construction conjecturale de triplets spectraux de multiplicité du spectre des dimensions arbitraire	78
22 Une algèbre de Lie de dimension 7. Obstacle à une générali- sation directe de la méthode ?	79
22.1 Algèbres de Lie \mathfrak{g}_7	79
22.2 Générateurs de l'idéal $I(f)$	79
22.3 Une base de Gröbner de l'idéal $I(f)$	80
22.4 Base monomiale de l'algèbre quotient $U(\mathfrak{g}_7)/I(f)$	80
22.5 Un opérateur de réduction	80
23 Une construction générale des paires de Gelfand-Kirillov	82
23.1 Quelques résultats d'algèbre	82
23.2 Opérateurs Γ	83
23.3 Algorithme de construction	84

Introduction

Soit \mathcal{M} une variété riemannienne de classe \mathcal{C}^∞ , compacte et sans bord, et soit Δ un opérateur de Laplace sur les fonctions définies sur \mathcal{M} . Pour chaque opérateur différentiel linéaire X sur \mathcal{M} la fonction zeta $\zeta_{X,\Delta} : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^z)$ est holomorphe sur un demi-plan à gauche inclus dans \mathbb{C} et admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier. Ce résultat fut d'abord observé par Minakshisundaram et Pleijel [21] in 1949, et prouvé en totalité par Seeley dans [27] en 1967. En 2006, Nigel Higson présente dans l'article [13] une nouvelle preuve de l'existence de ce prolongement méromorphe. Dans l'introduction de cet article, il écrit "it would be interesting to see whether or not the basic method can be adapted to other more complicated situations". Cette invitation à généraliser sa démarche est à l'origine de ce mémoire de thèse.

Ce mémoire se compose de cinq parties principales. Dans la première on expose une méthode générale pour étudier le prolongement méromorphe de certaines fonctions zeta. Dans la deuxième, on reformule les résultats de la partie I dans le cadre et avec le vocabulaire des triplets spectraux. Dans la troisième, on revient sur le cas connu des variétés. On traite aussi celui du tore non commutatif, répondant ainsi positivement à une question de N.Higson, quant à la possibilité de généraliser sa démarche. La quatrième partie est un peu à part, on y propose une construction de triplets spectraux associés à des algèbres de Lie nilpotentes. Dans la cinquième et dernière partie, on applique la méthode proposée dans la partie I pour une classe particulière d'algèbres de Lie nilpotentes. Il s'agit d'une bonne illustration de la méthode proposée dans la partie I.

Nous allons maintenant regarder plus en détail chacune de ces parties. Dans ce mémoire, on désigne par \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe qui est séparable, par Δ un opérateur linéaire sur \mathcal{H} auto-adjoint, positif, inversible et à résolvante compacte. On note $\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}(\Delta^n)$, c'est un sous-espace vectoriel dense de \mathcal{H} (voir [30, page 3]).

Partie I : Dans un premier temps on rappelle des résultats connus à propos des espaces de Sobolev associés à Δ et du calcul pseudo-différentiel généralisé qui leur est associé. La plupart de ces notions sont présentes dans l'article [30] et dans le livre [25]. On définit ensuite (1.10) les algèbres d'opérateurs différentiels généralisés. Ces dernières correspondent au cadre dans lequel la méthode d'étude du prolongement méromorphe qui sera exposée ultérieurement s'applique. Un outil important est la formule de développement de Taylor pour un commutateur du type $[X, \Delta^z]$ où z est un nombre complexe (Lemme 2.13), sous forme d'une famille holomorphe (Définition 2.2). Ces développements ont d'abord été établis par A.Connes et H.Moscovici [4, Appendix B]. Dans son article [13], N.Higson utilise cette formule avec des applications linéaires du type

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ W & \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i [-Q_i, P_i W] + \sum_{i=1}^n b_i [P_i, Q_i W], \end{cases}$$

où \mathcal{D} est une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés, a_i, b_i des nombres complexes, P_i et Q_i des opérateurs dans \mathcal{D} . Dans [13] les opérateurs P_i et Q_i doivent satisfaire la condition supplémentaire

$$\sum_i [P_i, Q_i] = \rho \text{Id}, \quad (0.1)$$

où ρ est la dimension de la variété. Une condition similaire,

$$\sum_i (a_i + b_i) [P_i, Q_i] = \rho \text{Id} \quad (0.2)$$

devant être satisfaite pour un certain nombre complexe ρ sera requise. Pour aborder des situations plus "non-commutatives" que celle des opérateurs sur une variété, on a besoin de composer de telles applications et donc de proposer des développements de Taylor relatifs à de telles compositions, voir les Lemmes 2.17, 2.18 et 2.19.

Pour tout $X \in \mathcal{D}$ on considère la fonction zeta $\zeta_{X,\Delta} : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^z)$. L'objectif est de donner une méthode permettant de montrer que $\zeta_{X,\Delta}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier. Pour cela, on fait l'hypothèse que Δ^z est un opérateur à trace pour tout nombre complexe de partie réelle suffisamment petite. Par suite, il existe $\alpha > 0$ fixé, tel que pour chaque entier naturel k , une famille holomorphe de type k définisse une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\text{Re}(z) < k\alpha$. L'idée de base consiste à démontrer qu'une famille holomorphe de type k , peut être considérée comme un vecteur propre modulo une famille holomorphe de type $k-1$, pour des opérateurs construits à partir de commutateurs. Pour y parvenir, on procède en deux temps. Dans un premier temps, on effectue une réduction au niveau de l'algèbre différentielle \mathcal{D} ou d'une extension de celle-ci $\mathcal{D}[\Delta]$ (1.4), pour cela on utilise l'outil principal de ce mémoire, appelé suite de réduction (3.1). La construction d'une suite de réduction est un problème essentiellement algébrique, pour y parvenir une bonne connaissance de l'algèbre \mathcal{D} est nécessaire. Par exemple, dans le cas des variétés \mathcal{D} est une algèbre de Weyl [7]. Dans un deuxième temps, on étend cette réduction à toutes les familles holomorphes grâce à l'important Théorème 3.1. Le Théorème 3.3 montre l'existence d'un prolongement méromorphe pour des fonctions zeta spectrales du type $\zeta_{X,\Delta} : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^z)$, et dans le même temps il précise la localisation des pôles et il donne un majorant de leur ordre de multiplicité.

Partie II : Dans cette partie, on propose une reformulation des résultats obtenus dans la partie I, dans le cadre des triplets spectraux. Pour cela, on commence par rappeler la définition d'un triplet spectral (paragraphe 4.1) ainsi que ses propriétés éventuelles (paragraphe 4.2). Pour un triplet spectral, il existe plusieurs notions de dimensions, la dimension métrique 4.8 et le spectre des dimensions 4.4. Ce dernier permet d'encoder des propriétés géométriques du

triplet spectral. Suivant l'article [13] de N.Higson, on construit une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés associée à un triplet spectral voir (paragraphe (5)). On propose ensuite une reformulation du théorème 3.3 avec le vocabulaire des triplets spectraux voir (paragraphe (6)).

Partie III : Cette partie se décompose en deux sous-parties. Dans la première voir (7), on retrouve les résultats de Minakshisundaram, Pleijel [21] et Seeley [27] portant sur les variétés. Il s'agit d'une simple reformulation de la démarche de N.Higson dans [13], avec le vocabulaire de la partie I. De manière un peu anecdotique, on retrouve dans le paragraphe 7.4, la fonction zeta de Riemann. Dans la deuxième, on rappelle la définition du tore non commutatif 8 et la construction du triplet spectral qui lui est associé. On répond ensuite positivement à une question posée par N.Higson. Pour cela, on montre que la méthode développée dans la partie I permet, avec de légères adaptations, d'obtenir le prolongement méromorphe des fonctions zétas spectrales associées au tore non commutatif. On retrouve en passant des résultats connus sur les séries d'Eisenstein (voir 8.3).

Partie IV : Cette partie est un peu à part dans le mémoire, il n'est pas ici question d'étudier l'existence d'un prolongement méromorphe. On propose une construction d'un triplet spectral associé à un groupe de Lie nilpotent quelconque. Il ne semble pas que dans la littérature mathématique une telle construction soit proposée. Pourtant, on obtient ainsi de nombreux triplets spectraux. Le travail au niveau de la thèse pour cette partie n'a pas consisté à trouver de nouveaux outils ou de nouvelles idées, tous les résultats nécessaires existaient déjà. Il s'agit donc principalement d'une mise en forme dans l'objectif de construire des triplets spectraux. On considère G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, ainsi que π une représentation unitaire irréductible de ce groupe. Dans la section 11.3 on note $\mathcal{T}_{G,\pi} = (\mathcal{A}_G, \mathcal{H}_\pi, D)$ le triplet spectral associé à (G, π) . Pour parvenir à ce triplet, on commence par faire des rappels sur la théorie de la représentation des groupes de Lie nilpotents (paragraphe 9) et plus particulièrement sur la méthode des orbites de Kirillov (paragraphe 9.2) ainsi que sur la représentation dérivée de l'algèbre enveloppante qui en découle (paragraphe 9.3). On note π une représentation unitaire et irréductible du groupe G et $\rho = d\pi$ la représentation dérivée de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Dans sa thèse de doctorat [17], D.Manchon a développé un calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents, voir aussi [18]. On rappelle le principe de ce calcul ainsi que certains résultats utiles dans la section 10. L'algèbre du triplet spectral $(\mathcal{A}_G, +, \#) = (S^0(\mathfrak{g}^*), +, \#)$ est définie dans la section 11.1 à partir d'une certaine classe de symboles et d'opérations sur ces derniers. L'opérateur de Dirac correspond à la racine carrée de $\Delta_1 = \rho(1 + \Delta_G)$ où Δ_G est le laplacien algébrique de Goodman (voir 10.5). On montre dans la section que le triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$ est régulier 4.6 et finiment sommable 4.7. On propose en complément une construction de triplets spectraux non compacts (paragraphe 11.5).

Partie V : Comme illustration et application de la méthode d'étude de prolongement méromorphe 3.3 développés dans la partie I, on établit dans cette partie l'existence d'un prolongement méromorphe pour des fonctions zeta as-

sociées à une classe particulière d'algèbres de Lie nilpotentes. Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Dans son article [15, Theorem 7.1] Kirillov prouve que chaque représentation unitaire et irréductible π du groupe G donne par dérivation une représentation surjective ρ de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur une algèbre de Weyl. Étant donnée une base (X_1, \dots, X_n) de \mathfrak{g} , on considère le laplacien de Goodman [11] qui est défini par $\Delta = 1 + \rho(-X_1^2 - \dots - X_n^2)$. L'algèbre de Weyl $\mathcal{D} = \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ peut alors être considérée comme une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés dans laquelle $\rho(\Delta)$ est un laplacien généralisé d'ordre 2. On peut alors définir les fonctions zeta $\zeta_{X,\Delta} : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^z)$ où X est un opérateur de \mathcal{D} . Le noyau de ρ est un idéal bilatère non trivial de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un n -uplet $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^n$. On note \mathcal{I} une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Dans le paragraphe 14, on associe à α et \mathcal{I} une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}}$. Le centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}})$ est un espace vectoriel de dimension un engendré par $Y^{(0,\dots,0)}$. On considère la représentation particulière ρ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}})$, associée à la forme linéaire $f = (Y^{(0,\dots,0)})^*$ par la méthode des orbites de Kirillov [15]. L'algèbre \mathcal{D} est composée d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, et $\rho(\Delta)$ est un opérateur de Schrödinger.

Étant donné un opérateur de \mathcal{D} , nous avons besoin d'en déterminer un antécédent pour ρ d'ordre minimal dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, afin de trouver une suite de réduction. Pour ce faire, on utilise la théorie des bases de Gröbner pour les idéaux, mais aucune connaissance de cette théorie autre que la Proposition 13.2 n'est nécessaire dans cette partie. Les générateurs de l'idéal $\text{Ker}(\rho)$ exhibés par C. Godfrey [10] sont rappelés dans la Proposition 15.2, et après un certain nombre de transformations une base de Gröbner de $\text{Ker}(\rho)$ est donnée dans le Corollaire 15.4. A partir de cette base de Gröbner, on détermine pour chaque élément de \mathcal{D} un antécédent particulier (pour ρ) de degré minimal, ainsi qu'une information sur le terme dominant de cet antécédent. Cette information est essentielle pour obtenir des résultats sur la réduction dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}})$ (voir Lemme 16.1 et Proposition 16.2), et pour la construction d'une suite de réduction $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ (17). On prouve ensuite l'existence d'un prolongement méromorphe pour les fonctions zeta $\zeta_{X,\Delta}$ dans le contexte des algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathcal{I}}$ (Théorème 17.3), par application du Théorème 3.3.

On applique ensuite ce théorème à quelques exemples particuliers. Les algèbres de Heisenberg (paragraphe 18.2) très proches des variétés, les algèbres filiformes (paragraphe 19) où l'on retrouve par exemple un opérateur de Schrödinger quartique. Une attention particulière est portée à l'algèbre de dimension 6, $\mathfrak{g}_{(1,1),(\{1,2\})}$. Dans l'histoire de cette thèse, étudier cette algèbre a été le premier objectif proposé par mes directeurs de thèse. Il existe deux raisons principales pour lesquelles $\mathfrak{g}_{(1,1),(\{1,2\})}$ présente un intérêt particulier. Smagin montre dès les années 70 (voir [28]) que la fonction zeta d'un opérateur hypoelliptique sur une variété compacte \mathcal{M} admet un prolongement méromorphe avec des pôles éventuellement multiples. En adaptant un peu, on pourrait montrer qu'il en est de même pour un opérateur globalement hypoelliptique [29] sur \mathbb{R}^n . On montre que l'opérateur $\rho(\Delta)$ obtenu pour $\mathfrak{g}_{(1,1),(\{1,2\})}$ n'est pas globalement hypoelliptique et donc ne rentre pas dans le cadre de l'étude

de Smagin. D'autre part les fonctions zeta spectrales associées à $\mathfrak{g}_{(1,1),(\{1,2\})}$ possèdent (potentiellement) des pôles doubles. Ceci permet, par exemple, de construire un triplet spectral dont la multiplicité du spectre des dimensions est (potentiellement) deux. D'une manière plus générale, on propose dans la section 21 une construction conjecturale de triplets spectraux dont la multiplicité du spectre n peut être choisie de manière arbitraire à partir des algèbres $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ où $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ et $\mathcal{I} = (\{1, \dots, n\})$.

La question se pose de savoir si la démarche initiée avec les algèbres $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ s'applique ou se généralise à d'autres algèbres de Lie nilpotentes. Dans la section 22, on essaie de la reproduire pour une algèbre de dimension 7. On aboutit au fait que la réduction algébrique dans l'algèbre enveloppante demande de composer autant d'opérateurs que le degré de l'élément à réduire, ceci semble une obstruction pour l'utilisation du théorème de prolongement méromorphe.

D'une manière générale les opérateurs de réduction sont construits à partir d'opérateurs du type

$$H_{a,b} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \\ W \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i [-Q_i, P_i W] + \sum_{i=1}^n b_i [P_i, Q_i W], \end{array} \right.$$

avec un condition supplémentaire du type :

$$\sum_i (a_i + b_i) [P_i, Q_i] = \rho \text{Id}, \quad (0.3)$$

pour un certain nombre complexe ρ . Dans la section 23, on considère une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{g} de dimension n arbitraire. En s'appuyant sur le livre de Dixmier [8] et en reprenant l'article de Gelfand et Kirillov [9], on propose une construction de deux familles (P_1, \dots, P_d) et (Q_1, \dots, Q_d) d'éléments de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui vérifient pour tout i et j , $[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = [P_i, Q_j] = 0$ si $i \neq j$ et $[P_i, Q_i] = c$ où c est dans le centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ces familles pourraient servir à construire les opérateurs $H_{a,b}$ dans un cadre général.

Nous proposons maintenant un certains nombre de remarques, suggestions ou questions ouvertes :

- Suivant les techniques initiées par A.A. Kirillov, il est naturel pour déterminer la suite de réduction de procéder par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Les recherches et calculs réalisés au cours de cette thèse dans cette voie n'ont pas abouti. L'existence d'une suite de réduction pour l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre de codimension 1 de \mathfrak{g} , ne permettant pas d'obtenir une telle suite pour $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

- La classe d'algèbres de Lie étudiée, permet d'obtenir des pôles d'ordre arbitraire, en tout cas potentiellement. Il peut exister effectivement des pôles dont l'ordre de multiplicité est plus faible que celui prévu par le théorème de prolongement. On peut cependant conjecturer qu'il existe au moins un pôle de multiplicité l'ordre maximal prévu par la méthode.

- Le résidu dominant d'ordre maximal, pressenti comme un important invariant géométrique, pourrait faire l'objet de recherches ultérieures.

- On peut se demander si la méthode fonctionne dans le cas général des algèbres de Lie nilpotentes. Le contre-exemple développé en 22 montre que dans l'état actuel, le théorème de prolongement méromorphe ne s'applique pas. Est-il possible de le généraliser à des opérateurs de réduction obtenus en composant un nombre d'applications du type $H_{a,b}$, qui varie avec le degré dans l'algèbre enveloppante ?

- Des calculs non présentés dans ce mémoire de thèse, ont montré que la méthode s'appliquait pour certaines algèbres de Lie de la classification de Magnin [16] qui n'entrent pas dans une classe $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. Par exemple les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}$, $\mathfrak{g}_{5,6}$ et celle de type 15. Par contre, ils n'ont pas abouti par exemple pour l'algèbre de dimension 6, référencée de type 12.

- Durant ce travail de thèse, la méthode n'a pas été testée sur des algèbres de Lie non nilpotentes. On peut se demander si elle peut s'appliquer à de telles algèbres et en premier lieu à certaines algèbres résolubles.

Première partie

Prolongement méromorphe dans les algèbres d'opérateurs différentiels généralisés

1 Espaces de Sobolev et opérateurs différentiels généralisés

Dans tout le mémoire \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe séparable.

1.1 Opérateurs compacts, trace et idéaux

On rappelle quelques définitions et résultats classiques portant sur les opérateurs linéaires.

Définition 1.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit compact si l'image de la boule unité fermée de \mathcal{H} est relativement compacte dans \mathcal{H} .*

On note $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts. Cette définition est équivalente à dire que l'image d'une suite bornée de vecteurs de \mathcal{H} admet une sous-suite convergente. Tout opérateur de rang fini est bien sûr compact et on a la caractérisation suivante.

Proposition 1.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est compact si et seulement si c'est la limite (en norme) d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 1.2. *$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère et fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. C'est un idéal propre si et seulement si \mathcal{H} est de dimension infinie.*

Proposition 1.3. *Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$. Soient $(e_n), (f_n)$ deux familles orthonormées de \mathcal{H} , la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (f_n | \cdot) e_n$ converge en norme dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Réciproquement, tout opérateur compact a une écriture de ce type :

Proposition 1.4. *Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Si T est autoadjoint, il existe une base hilbertienne (e_n) et une suite $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T e_n = \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (e_n | \cdot) e_n.$$

Si T est positif les λ_n aussi. En particulier, si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ il existe une base hilbertienne (e_n) et une suite $(\mu_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro telles que $|T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n (e_n | \cdot) e_n$. En utilisant la décomposition polaire, on obtient la forme normale d'un opérateur compact.

Théorème 1.5. *Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Il existe un unique $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et une unique famille $(\mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ décroissante pour lesquels il existe des familles orthonormées $(e_n)_{1 \leq n \leq N}$ et $(f_n)_{1 \leq n \leq N}$ telles que*

$$T = \sum_{n=0}^N \mu_n (f_n | \cdot) e_n. \quad (1.1)$$

La convergence de cette série étant en norme si $N = +\infty$.

On appelle $\mu_n = \mu_n(T)$ la n -ième valeur singulière de T et $\mu(T) = (\mu_0(T), \mu_1(T), \dots)$ s'appelle la suite caractéristique de T .

Dans la Proposition suivante on énonce quelques propriétés des valeurs singulières qui sont utiles pour obtenir des résultats sur la trace.

Proposition 1.6. *Soient $(S, T) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^2$, $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a :*

1. $\mu_0(T) = \|T\|$,
2. $|\mu_n(T) - \mu_n(S)| \leq \|T - S\|$,
3. $\mu_{m+n}(S + T) \leq \mu_m(S) + \mu_n(T)$,
4. $\mu_{m+n}(ST) \leq \mu_m(S) \mu_n(T)$,
5. $\mu_n(MT) \leq \|M\| \mu_n(T)$ et $\mu_n(TM) \leq \|M\| \mu_n(T)$.

On définit maintenant la trace d'un opérateur.

Définition 1.2. *Soit (e_n) une base hilbertienne de \mathcal{H} . Pour tout opérateur positif $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on définit la trace de T par*

$$\text{Trace}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n | T e_n). \quad (1.2)$$

Dans cette définition on a éventuellement $\text{Trace}(T) = +\infty$. On montre que la valeur de $\text{Trace}(T)$ est indépendante du choix de la base hilbertienne de \mathcal{H} .

Définition 1.3. On dit que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur à trace si $\text{Trace}(|T|) < +\infty$.

Tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre opérateurs positifs. On dira que T est un opérateur à trace si ces quatre opérateurs positifs le sont et on étend la définition de la trace par linéarité. On note $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs à trace. On a $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ qui est contenu dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, et plus précisément :

Proposition 1.7. L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est un idéal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dense dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

En particulier $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est contenu dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Pour tout $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ on a

$$\text{Trace}|T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T). \quad (1.3)$$

On rappelle quelques résultats sur la trace d'un opérateur.

Proposition 1.8. Soit $(S, T) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

1. $\text{Trace}(S + T) = \text{Trace}(S) + \text{Trace}(T)$,
2. $\text{Trace}(\alpha S) = \alpha \text{Trace}(S)$,
3. $\text{Trace}(USU^{-1}) = \text{Trace}(S)$, pour tout opérateur unitaire U ,
4. si $0 \leq S \leq T$ alors $0 \leq \text{Trace}(S) \leq \text{Trace}(T)$,
5. $\text{Trace}(TS) = \text{Trace}(ST)$.

On a un résultat plus fin que ce dernier point.

Lemme 1.9. Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $TS \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ alors $ST \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et $\text{Trace}(ST) = \text{Trace}(TS)$.

Le lemme suivant sera utile dans des preuves ultérieures.

Lemme 1.10. Soit $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a l'inégalité

$$|\text{Trace}(TS)| \leq |\text{trace}(T)| \|S\|. \quad (1.4)$$

On va maintenant définir les idéaux de Schatten et de Dixmier. Soit un réel $p \geq 1$, on définit deux ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) &= \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} \\ \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H}) &= \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), \left(\sum_{n=0}^N \mu_n(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{O}(\ln(N)) \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Proposition 1.11. Pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ et $\mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$ sont des idéaux bilatères de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denses dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Définition 1.4. Pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ s'appelle l'idéal p -Schatten et $\mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$ l'idéal p -Dixmier.

1.2 Espaces de Sobolev généralisés

Commençons par rappeler quelques notions de base sur les opérateurs non bornés.

- Soit T un opérateur défini sur \mathcal{H} . Si T est autoadjoint, alors $\text{Dom}(T)$ muni du produit scalaire

$$(u|v)_{gr(T)} = (u|v) + (Tu|Tv) \quad (1.6)$$

est un espace de Hilbert. Si T est borné, la norme $\|\cdot\|_{gr(T)}$ est équivalente à celle de \mathcal{H} et on a $\text{Dom}(T) = \mathcal{H}$.

- Lorsque T est de plus positif et inversible, le calcul fonctionnel (voir par exemple [25]) permet de définir des opérateurs T^s , $s \in \mathbb{R}$ qui coïncident avec les puissances de T définies au sens usuel lorsque $s \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il est naturel de chercher une chaîne d'espaces de Hilbert $(\mathcal{H}^s)_{s \in \mathbb{R}}$ fabriquée à partir des espaces $\text{Dom}(T^s)$ et

$$\mathcal{H}^s = (\text{Dom}(T^s), \|\cdot\|_{gr(T^s)}) \quad (1.7)$$

convient parfaitement pour $s \geq 0$.

- La situation n'est pas symétrique en s (par rapport à l'origine) et pour éviter que la chaîne stationne à \mathcal{H} pour $s \leq 0$, on remplace la norme $\|\cdot\|_{gr(T^s)}$ par

$$\|u\|_s = \|T^s u\|, \quad u \in \text{Dom}(T^s). \quad (1.8)$$

Cette norme est équivalente à $\|\cdot\|_{gr(T^s)}$ lorsque $s \geq 0$ et moins fine quand $s < 0$.

Dans toute la suite, lorsque cela n'est pas précisé, Δ désigne un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné.

Définition 1.5. *Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.*

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev (généralisé) associé à Δ , noté $\mathcal{H}^s(\Delta)$ ou plus simplement \mathcal{H}^s , est la complétion de $\text{Dom}(\Delta^{\frac{s}{r}})$ pour la norme $\|\cdot\|_s$ associée au produit scalaire

$$\forall u, v \in \text{Dom}(\Delta^{\frac{s}{r}}), \quad (u|v)_s = (\Delta^{\frac{s}{r}} u, \Delta^{\frac{s}{r}} v)_{\mathcal{H}}. \quad (1.9)$$

Une notation plus précise serait $\mathcal{H}_r^s(\Delta)$ à la place de $\mathcal{H}^s(\Delta)$, dans la mesure où ces espaces sont différents selon le choix de r . Cependant par la suite, voir la définition (1.10), on associera à Δ un entier strictement positif r qui correspondra à son ordre. Les espaces de Sobolev généralisés considérés seront alors les $\mathcal{H}_r^s(\Delta)$ où r est l'ordre de Δ , ce qui justifie la notation allégée $\mathcal{H}^s(\Delta)$.

L'inversibilité de Δ garantit que $\|\cdot\|_s$ est une norme (et pas seulement une semi-norme).

Par définition, l'opérateur $\Delta^{\frac{m}{r}} : \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^{s-m}$ est un opérateur unitaire pour tous réels s et m .

Lemme 1.12. *Pour tout couple de réels (s, t) tels que $s \geq t$, l'inclusion $\mathcal{H}^s \subseteq \mathcal{H}^t$ est continue. De plus, si $s \geq 0$, $\text{Dom}(\Delta^{\frac{s}{r}})$ est complet et donc $\mathcal{H}^s = \text{Dom}(\Delta^{\frac{s}{r}})$.*

Exemples 1.

1. Si Δ est borné, pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}$.
2. Si Δ est à résolvante compacte, il existe alors une base hilbertienne $\mathcal{B} = (e_n)$ de vecteurs propres telle que $\Delta e_n = \lambda_n e_n$ avec $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty$ et on a

$$\mathcal{H}^s = \left\{ (a_n)_{\mathcal{B}}, \sum_n |a_n|^2 \lambda_n^{\frac{2s}{r}} < +\infty \right\}. \quad (1.10)$$

3. Si M une variété compacte de classe \mathcal{C}^∞ et Δ un opérateur différentiel strictement positif d'ordre $r = 2$ et elliptique de domaine $\mathcal{C}^\infty(M)$, l'opérateur Δ est inversible, essentiellement autoadjoint et a une résolvante compacte. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(M)$ est l'espace de Sobolev d'ordre s sur la variété M .

Définition 1.6. Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné. On définit un sous-espace de \mathcal{H}

$$\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s. \quad (1.11)$$

La décroissance de l'application $s \mapsto \mathcal{H}^s$ permet d'écrire

$$\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{rn} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}(\Delta^n). \quad (1.12)$$

L'espace \mathcal{H}^∞ est dense dans \mathcal{H} , et de manière plus précise on a le lemme suivant.

Lemme 1.13. Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et à résolvante compacte. L'espace \mathcal{H}^∞ est dense dans $\text{Dom}(\Delta^z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier \mathcal{H}^∞ est dense dans \mathcal{H}^s pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe une base hilbertienne de \mathcal{H} formée de vecteurs propres. Chacun de ces vecteurs est un élément de \mathcal{H}^∞ , par suite le sous-espace vectoriel de \mathcal{H}^∞ engendré par ses vecteurs qui est dense dans \mathcal{H} l'est aussi dans $\text{Dom}(\Delta^z)$. \square

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, les opérateurs Δ^z , que l'on peut définir par le calcul spectral, sont des endomorphismes de \mathcal{H}^∞ . Le lemme suivant précise un peu les choses.

Lemme 1.14. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $\Delta|_{\mathcal{H}^\infty}^z : \mathcal{H}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^\infty$ se prolonge en un opérateur unitaire $\Delta^z : \mathcal{H}^{s+r\text{Re}(z)}(\Delta) \rightarrow \mathcal{H}^s(\Delta)$.

Démonstration. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, $\Delta^{i\text{Im}(z)}$ est un opérateur unitaire de \mathcal{H}^s , comme le prouve le calcul spectral. Il s'en suit que pour tout $u \in \mathcal{H}^\infty$, $\|\Delta^z u\|_s = \|\Delta^{i\text{Im}(z)} \Delta^{\text{Re}(z)} u\|_s = \|\Delta^{\text{Re}(z)} u\|_s = \|u\|_{s+r\text{Re}(z)}$. \square

1.3 Ordre analytique d'un opérateur

Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné.

On va considérer différentes classes d'opérateurs linéaires sur \mathcal{H} dont les domaines contiennent \mathcal{H}^∞ . On désigne par $\text{End}(\mathcal{H}^\infty)$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel \mathcal{H}^∞ . Par exemple, si un opérateur T non borné est tel que $\mathcal{H}^\infty \subseteq \text{Dom}(T)$ et si \mathcal{H}^∞ est stable par T alors $T|_{\mathcal{H}^\infty} \in \text{End}(\mathcal{H}^\infty)$, on le notera encore T à la place de $T|_{\mathcal{H}^\infty}$.

On commence par des rappels de définition sur les algèbres filtrées.

Définition 1.7. Soit \mathcal{A} une algèbre associative. Soit $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou \mathbb{R} un ensemble d'indices. Une famille $(\mathcal{A}^i)_{i \in I}$ de sous ensembles de \mathcal{A} est une filtration croissante de l'algèbre \mathcal{A} si :

1. Pour tout $(i, j) \in I^2 : i \leq j \Rightarrow \mathcal{A}^i \subset \mathcal{A}^j$.
2. On a l'égalité : $\mathcal{A} = \cup_{i \in I} \mathcal{A}^i$.
3. Pour tout $(i, j) \in I^2 : \mathcal{A}^i \mathcal{A}^j \subset \mathcal{A}^{i+j}$.

Soit $i \in I$, un élément $a \in \mathcal{A}$ est dit d'ordre inférieur ou égal à i si $a \in \mathcal{A}^i$. On appellera filtration d'un élément $a \in \mathcal{A}$ la borne inférieure des indices $i \in I$ tels que $a \in \mathcal{A}^i$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, la filtration d'un élément est un minimum et c'est un entier naturel. Si $I = \mathbb{Z}$ ou si $I = \mathbb{R}$ la filtration peut être égale à $-\infty$.

Dans la suite de ce document, les algèbres \mathcal{A} seront toutes associatives. Si elles sont munies d'une filtration $(\mathcal{A}^i)_{i \in I}$, on écrira de manière abrégée, "Soit $a \in \mathcal{A}^{i_a}$ ", pour dire que $a \in \mathcal{A}$ et que l'ordre de a est inférieur ou égal à i_a .

Lemme et Définition 1.15. Soit \mathcal{A} une algèbre associative munie d'une filtration croissante $(\mathcal{A}^i)_{i \in I}$. Soit \mathcal{B} une sous algèbre de \mathcal{A} . La famille $(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^i)_{i \in I}$ est une filtration croissante de \mathcal{B} appelée filtration induite sur \mathcal{B} par \mathcal{A} .

De manière un peu plus générale, on définit la notion de sous-algèbre filtrée.

Définition 1.8. Soit \mathcal{A} une algèbre munie d'une filtration croissante $(\mathcal{A}^i)_{i \in I}$ et \mathcal{B} une sous-algèbre de \mathcal{A} . On dit que \mathcal{B} est une sous-algèbre filtrée de \mathcal{A} si elle est munie d'une filtration croissante $(\mathcal{B}^i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $\mathcal{B}^i \subset \mathcal{A}^i$.

Définition 1.9. Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné. Pour tout nombre réel t , on note $\text{Op}^t(\Delta)$ ou plus simplement Op^t le sous-espace vectoriel de $\text{End}(\mathcal{H}^\infty)$ formé des éléments qui se prolongent continûment de \mathcal{H}^{s+t} vers \mathcal{H}^s pour tout $s \in \mathbb{R}$. On dit que $T \in \text{Op} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{Op}^t$ est d'ordre analytique inférieur ou égal à t si $T \in \text{Op}^t$.

On pose

$$\text{Op}^{-\infty} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \text{Op}^t. \quad (1.13)$$

Par analogie avec le cadre des variétés, un opérateur de $\text{Op}^{-\infty}$ sera dit régularisant. Un tel opérateur se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dont l'image est incluse dans \mathcal{H}^∞ .

Lemme 1.16.

1. Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} et positif. La famille $(\text{Op}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration croissante de $\text{Op} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Op}^n$

2. Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné. La famille $(Op^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une filtration croissante de $Op := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} Op^t$.

Si Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné, on déduit de ce lemme que Op^0 est une sous-algèbre de Op et que $Op^{-\infty}$ est un idéal bilatère de Op . On a aussi pour tout $t \leq 0$, Op^t est un idéal bilatère de Op^0 .

Comme corollaire du Lemme (1.14) on a la Proposition suivante.

Proposition 1.17. *Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné.*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Delta^z \in Op^{r\operatorname{Re}(z)}. \quad (1.14)$$

Le lemme suivant donne des précisions sur les sous-algèbres filtrées de Op .

Lemme 1.18. *Soit Δ un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , positif, inversible et d'inverse borné. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si $\Psi = (\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une sous-algèbre filtrée de Op telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\frac{t}{r}} \in \Psi^t$, alors Ψ^0 est unitaire et :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Psi^t = \Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0 = \Psi^0 \Delta^{\frac{t}{r}}.$$

Réciproquement, soit une sous-algèbre unitaire $\Psi^0 \subset Op^0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0 = \Psi^0 \Delta^{\frac{t}{r}}$. En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Psi^t := \Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0$, on définit une sous-algèbre filtrée $\Psi = (\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de Op , telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\frac{t}{r}} \in \Psi^t$.

Démonstration. Pour le sens direct : comme $\Delta^0 = 1$, Ψ^0 est unitaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^t = \Delta^{\frac{t}{r}} \Delta^{-\frac{t}{r}} \Psi^t \subseteq \Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^{-t} \Psi^t \subseteq \Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0 \subseteq \Psi^t \Psi^0 \subseteq \Psi^t.$$

Ainsi $\Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0 = \Psi^t$. On montre de la même manière que $\Psi^0 \Delta^{\frac{t}{r}} = \Psi^t$.

Pour le sens réciproque : puisque Ψ^0 est unitaire, on a $\Psi^0 \Psi^0 = \Psi^0$ et par suite

$$\Psi^t \Psi^s = \Delta^{\frac{t}{r}} \Psi^0 \Delta^{\frac{s}{r}} \Psi^0 = \Delta^{\frac{t}{r}} \Delta^{\frac{s}{r}} \Psi^0 \Psi^0 = \Psi^{s+t}. \quad (1.15)$$

On a aussi, toujours puisque Ψ^0 est unitaire $\Delta^{\frac{t}{r}} \in \Psi^t$. □

Le corollaire suivant permet de caractériser les opérateurs d'ordre analytique inférieur ou égal à t , à partir de l'opérateur $\Delta^{\frac{t}{r}}$.

Corollaire 1.19. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$Op^t = \Delta^{\frac{t}{r}} Op^0 = Op^0 \Delta^{\frac{t}{r}}.$$

Supposons que pour un certain entier naturel non nul r , l'opérateur $\Delta^{-\frac{1}{r}}$ soit dans l'idéal des opérateurs compacts (resp. un idéal de Schatten, resp. un idéal de Dixmier). Alors on peut montrer que, moyennant certaines conditions sur l'ordre analytique t , Op^{-t} est aussi inclus dans l'idéal des opérateurs compacts (resp. un idéal de Schatten, resp. un idéal de Dixmier). Le corollaire suivant précise ce point.

Corollaire 1.20. *Soit Δ un opérateur autoadjoint, positif et inversible défini sur \mathcal{H} .*

1. *Si $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ alors pour tout réel $t > 0$ on a $Op^{-t} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$;*

2. Si $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ avec $p \geq 1$, alors pour tout réel $0 < t \leq p$ on a $\text{Op}^{-t} \subset \mathcal{L}^{\frac{p}{t}}(\mathcal{H})$;
3. Si $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$ avec $p \geq 1$, alors pour tout réel $0 < t \leq p$ on a $\text{Op}^{-t} \subset \mathcal{L}^{\frac{p}{t},\infty}(\mathcal{H})$.

Démonstration. D'après le Corollaire (1.19), pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{Op}^{-t} \subseteq \Delta^{-\frac{t}{r}} \text{Op}^0 \subset \Delta^{-\frac{t}{r}} \mathcal{B}(\mathcal{H})$, les inclusions voulues viennent alors de la définition d'un idéal, voir les Propositions (1.2) et (1.11). \square

1.4 Algèbre d'opérateurs différentiels généralisés

Définition 1.10. Soit Δ un opérateur autoadjoint, positif. On note \mathcal{H}^∞ l'intersection des domaines des puissances entières positives de Δ . Soit \mathcal{D} une sous-algèbre de Op . Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que (\mathcal{D}, Δ, r) est une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés associée au laplacien généralisé Δ d'ordre r lorsque :

1. L'algèbre \mathcal{D} est munie d'une filtration croissante $(\mathcal{D}^q)_{q \in \mathbb{N}}$.
2. L'unité de l'algèbre (si elle existe) est d'ordre nul.
3. Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ on a $[\Delta, X] \in \mathcal{D}^{q_X+r-1}$.
4. Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta^{\frac{q_X}{r}} v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|Xv\| \quad (\text{Inégalité de Gårding généralisée}). \quad (1.16)$$

Dans la définition ci-dessus, $[\Delta, X] = \Delta X - X\Delta$, et de manière générale dans toute la première partie de ce mémoire $[\cdot, \cdot]$ désignera l'opérateur de commutation.

Lemme 1.21. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. L'algèbre \mathcal{D} est une sous algèbre filtrée de Op . C'est à dire que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion :

$$\mathcal{D}^q \subseteq \text{Op}^q.$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{D}^q$ et $s \in \mathbb{R}$. Comme $s \leq q + s$ l'inclusion de \mathcal{H}^{s+q} dans \mathcal{H}^s est continue d'après le Lemme (1.12), d'autre part $\Delta^{\frac{q}{r}}$ est continue H^{s+q} dans H^s . D'après l'inégalité de Gårding généralisée (4), on en déduit que X se prolonge en un opérateur borné de H^{s+q} dans H^s , par suite $X \in \text{Op}^q$. \square

On considère une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés (\mathcal{D}, Δ, r) . On note $\mathcal{D}[\Delta]$ l'espace vectoriel des polynômes en Δ à coefficients dans \mathcal{D} . Nous allons munir de manière naturelle $\mathcal{D}[\Delta]$ d'une structure d'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés, pour laquelle Δ sera aussi un laplacien d'ordre r . L'algèbre (\mathcal{D}, Δ, r) apparaissant alors comme une sous-algèbre filtrée de $(\mathcal{D}[\Delta], \Delta, r)$.

On commence par préciser une notation.

Lemme 1.22. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $X \in \text{End}(\mathcal{H}^\infty)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $X^{(k)}$ de manière récursive en posant :

$$X^{(0)} = X \text{ et } X^{(k)} = [\Delta, X^{(k-1)}] \text{ pour } k \geq 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $X \mapsto X^{(k)}$ se restreint à un endomorphisme de \mathcal{D} , respectivement de $\mathcal{D}[\Delta]$.

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } X \in \mathcal{D}^{q_X}, \text{ alors } X^{(k)} \in \mathcal{D}^{q_X+k(r-1)}.$$

Démonstration. La stabilité de \mathcal{D} par la dérivation $[\Delta, \cdot]$ assure pour tout $k \in \mathbb{N}$ que l'opérateur $X \mapsto X^{(k)}$ est un endomorphisme de \mathcal{D} et $\mathcal{D}[\Delta]$.

Comme Δ est un laplacien d'ordre r , on a (par définition) pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, $X^{(1)} \in \mathcal{D}^{q_X+r-1}$. Le résultat sur l'ordre de $X^{(k)}$ s'obtient alors par récurrence. \square

Lemme 1.23. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Pour tout $X \in \mathcal{D}$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$[\Delta^i, X] = \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} X^{(k)} \Delta^{i-k}. \quad (1.17)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur i .

Si $i = 1$, $\Delta X = X\Delta + [\Delta, X]$ est vraie. Pour l'hérédité on écrit :

$$\begin{aligned} [\Delta^{i+1}, X] &= \Delta^i[\Delta, X] + [\Delta^i, X]\Delta \\ &= [\Delta^i, [\Delta, X]] + [\Delta^i, X]\Delta + [\Delta, X]\Delta^i \\ &= \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} X^{(k+1)} \Delta^{i-k} + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} X^{(k)} \Delta^{i+1-k} + [\Delta, X]\Delta^i \\ &= X^{(i+1)} + \sum_{k=2}^i \left(\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} \right) X^{(k)} \Delta^{i+1-k} + iX^{(1)} \Delta^i + [\Delta, X]\Delta^i \\ &= \sum_{k=1}^{i+1} \binom{i+1}{k} X^{(k)} \Delta^{i+1-k}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

\square

Lemme 1.24. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. L'espace vectoriel $\mathcal{D}[\Delta]$ est une sous-algèbre de Op .

Démonstration. La seule chose à vérifier est que pour tout $X \in \mathcal{D}$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\Delta^i X \in \mathcal{D}[\Delta]$. Mais grâce au Lemme 1.23, on peut écrire $\Delta^i X = X\Delta^i + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} X^{(k)} \Delta^{i-k} \in \mathcal{D}[\Delta]$. \square

On définit maintenant une filtration (croissante) de $\mathcal{D}(\Delta)$ qui est une extension naturelle de celle de \mathcal{D} et où on donne à Δ l'ordre r , en posant pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}[\Delta]^q = \sum_{\substack{q' + rq'' = q \\ q', q'' \in \mathbb{N}}} \mathcal{D}_{q'}^{q''}[\Delta]. \quad (1.19)$$

De manière usuelle, $\mathcal{A}_p[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à p et à coefficients dans \mathcal{A} . Ainsi $\mathcal{D}_{q''}^{q'}[\Delta]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathcal{D}^{q'}$ et de degré inférieur ou égal à q'' en Δ .

Lemme 1.25. *Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. L'algèbre $\mathcal{D}(\Delta)$ est une algèbre filtrée par $(\mathcal{D}[\Delta]^q)_{q \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{D}[\Delta]^{q_1} \subset \mathcal{D}[\Delta]^{q_2}$ si $q_1 \leq q_2$ et l'égalité $\cup_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{D}[\Delta]^q = \mathcal{D}[\Delta]$ sont immédiates. Soit $(q, q') \in \mathbb{N}^2$, $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ et $Y \in \mathcal{D}^{q_Y}$, on suppose $X\Delta^i \in \mathcal{D}[\Delta]^q$ et $Y\Delta^j \in \mathcal{D}[\Delta]^{q'}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y^{(k)} \in \mathcal{D}^{q_Y+k(r-1)}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$,

$$XY^k \Delta^{i+j-k} \in \mathcal{D}_{i+j-k}^{q_X+q_Y+k(r-1)}[\Delta] \subset \mathcal{D}[\Delta]^{q_X+ri+q_Y+rj-k} \underset{\text{def}}{\subset} \mathcal{D}[\Delta]^{q+q'}. \quad (1.20)$$

Le produit $X\Delta^i Y\Delta^j = XY\Delta^{i+j} + \sum_{k=1}^j \binom{j}{k} XY^{(k)}\Delta^{i+j-k}$ est alors un élément de $\mathcal{D}[\Delta]^{q+q'}$, il s'en suit l'inclusion $\mathcal{D}[\Delta]^q \mathcal{D}[\Delta]^{q'} \subset \mathcal{D}[\Delta]^{q+q'}$. \square

Proposition 1.26. *Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. L'algèbre $(\mathcal{D}[\Delta], \Delta, r)$ est aussi une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés.*

Démonstration. Par le Lemme 1.24, $\mathcal{D}[\Delta]$ est déjà une sous-algèbre de Op . On prouve chaque point de la définition 1.10.

1. L'algèbre $\mathcal{D}[\Delta]$ est unitaire si \mathcal{D} l'est et dans ce cas $1 \in \mathcal{D}[\Delta]^0$
2. Soit $X\Delta^i \in \mathcal{D}[\Delta]^q$ avec $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, alors $[\Delta, X\Delta^i] = [\Delta, X]\Delta^i \in \mathcal{D}[\Delta]^{q_X+r-1+ri} = \mathcal{D}[\Delta]^{q+r-1}$.
3. Montrons l'inégalité de Gårding généralisée. Soit $X\Delta^i \in \mathcal{D}[\Delta]$ avec $\text{ordre}(X) \leq q$. On va montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in \mathcal{H}^\infty$ on ait

$$\|\Delta^{\frac{q+ri}{r}} v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|X\Delta^i v\|.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in \mathcal{H}^\infty(\Delta)$ on ait $\|\Delta^{\frac{q+ri}{r}} v\| + \|\Delta^i v\| \geq \varepsilon \|X\Delta^i v\|$ d'après l'inégalité de Gårding (4) appliquée à $\Delta^i v \in \mathcal{H}^\infty$. Si $i = 0$, on a l'inégalité cherchée. Sinon $\frac{q+ri}{r} \geq i$ et le plongement de $H^{\frac{q+ri}{r}}$ dans H^i est continu, il existe donc une constante $K > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{H}^\infty(\Delta)$ on ait $\|\Delta^i v\| \leq K \|\Delta^{\frac{q+ri}{r}} v\|$. On obtient alors pour $v \in \mathcal{H}^\infty(\Delta)$, $\|\Delta^{\frac{q+ri}{r}} v\| \geq \frac{\varepsilon}{1+K} \|X\Delta^i v\|$ et bien sûr $\|\Delta^{\frac{q+ri}{r}} v\| + \|v\| \geq \frac{\varepsilon}{1+K} \|X\Delta^i v\|$.

Les deux derniers points permettent de dire que Δ est un laplacien généralisé d'ordre r . \square

On pourra noter que Δ n'est pas nécessairement dans \mathcal{D} , ni d'ailleurs dans $\mathcal{D}[\Delta]$. Dans le cas où Δ est dans \mathcal{D} , alors les deux algèbres \mathcal{D} et $\mathcal{D}[\Delta]$ coïncident, ainsi que les deux filtrations. Si Δ n'est pas un élément de \mathcal{D} , ce sera un élément de $\mathcal{D}[\Delta]$ dans le seul cas où l'algèbre \mathcal{D} est unitaire.

2 Holomorphie et traces associées à un laplacien généralisé

Dans toute cette section, \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe séparable et Δ est un opérateur autoadjoint, positif inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} .

Définition 2.1. *Soit E un espace de Banach et Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : \Omega \rightarrow E$ est dite holomorphe en $z_0 \in \Omega$ si elle est \mathbb{C} -dérivable en z_0 .*

Comme nous l'avons fait dans la section précédente et afin de rendre ce document le plus auto-contenu possible, on rappelle quelques résultats classiques d'analyse complexe. L'ensemble des théorèmes suivants se trouvent dans le livre de W.Rudin [26]. Ils sont encore valables si on remplace mutatis-mutandis f à valeurs dans \mathbb{C} par f à valeurs dans un espace de Banach E .

Proposition 2.1. *(Th 10.7 page 244,[26]) Soit μ une mesure complexe (finie) sur un ensemble mesurable X , ϕ une fonction complexe mesurable sur X et Ω un ouvert du plan qui ne rencontre pas $\phi(X)$. On pose*

$$\forall z \in \Omega, f(z) = \int_X \frac{d\mu(\xi)}{\phi(\xi) - z}. \quad (2.1)$$

La fonction f est développable en série entière dans Ω .

Proposition 2.2. *(Th 10.10 page 247,[26]) Soit γ un chemin fermé, Ω le complémentaire de γ^* (support de γ) dans \mathbb{C} . On définit*

$$\forall z \in \Omega, \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}. \quad (2.2)$$

La fonction Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω , constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante non bornée de Ω .

Proposition 2.3. *(Th 10.11 page 248,[26]) Si γ est le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r , on a*

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r, \\ 0 & \text{si } |z - a| > r. \end{cases} \quad (2.3)$$

Proposition 2.4. *(Th 10.15 page 250,[26]) Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω . Si $z \in \Omega$ et $z \notin \gamma^*$ on a*

$$f(z) \cdot \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2.4)$$

Proposition 2.5. *(Th 10.16 page 250,[26]) Pour tout ouvert Ω du plan, si f est une fonction holomorphe sur Ω alors f est développable en série entière sur Ω .*

2.1 Formules de Cauchy

Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} .

On peut alors visualiser son spectre comme une suite croissante de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$:

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit par calcul spectral l'opérateur Δ^z dont le domaine contient \mathcal{H}^∞ .

On établit dans le lemme suivant une formule de Cauchy qui est un analogue de la formule classique (2.4).

Lemme 2.6. (*Formule de Cauchy*) *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit Γ une droite verticale du plan complexe, orientée vers le bas et séparant 0 du spectre de Δ . Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) < 0$, on a la formule de Cauchy*

$$\Delta^z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} d\lambda.$$

Cette intégrale impropre de Riemann converge pour la topologie des opérateurs de Op^0 (c'est à dire qu'elle converge pour la norme des opérateurs bornés de \mathcal{H}^s vers \mathcal{H}^s , pour tout $s \in \mathbb{R}$).

Démonstration. Les valeurs spectrales de Δ se rangent dans une suite croissante $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

On considère la droite verticale Γ d'équation

$$\Gamma : x = c \text{ avec } 0 < c < \lambda_0, \quad (2.5)$$

que l'on suppose orientée vers le bas. Montrons que l'intégrale converge pour la topologie des opérateurs de Op^0 . Soit un réel s . Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spectre}(\Delta)$, on a $(\lambda - \Delta)^{-1} \in Op^0$. On en déduit que si $\lambda \in \Gamma$, l'opérateur $(\lambda - \Delta)^{-1}$ est borné sur l'espace de Sobolev \mathcal{H}^s . Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\lambda \in \Gamma$, on a

$$\|\lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1}\|_s = \frac{|\lambda|^{\operatorname{Re}(z)}}{|\lambda - \lambda_0|}.$$

Il s'en suit que si $\operatorname{Re}(z) < 0$ l'intégrale converge normalement, donc converge vers un opérateur borné de \mathcal{H}^s .

La preuve consiste maintenant à établir que cet opérateur est Δ^z .

D'après le calcul spectral, il suffit de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda_k^z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit un chemin $C_R = \Gamma_R \cup \gamma_R$ où Γ_R est le segment

$\Gamma_R = \{(c, y), -R \leq y \leq R\}$ parcouru de haut en bas et γ_R est le demi-cercle $\gamma_R = \{c + Re^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ parcouru dans le sens trigonométrique, R étant choisi suffisamment grand pour que $|\lambda_k| < R - c$.

Par le théorème des résidus on a

$$\lambda_k^z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda.$$

Observons la deuxième intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(c + Re^{i\theta})^z}{c + Re^{i\theta} - \lambda_k} R d\theta$$

et

$$\left| \frac{(c + Re^{i\theta})^z}{c + Re^{i\theta} - \lambda_k} R \right| = \frac{|c + Re^{i\theta}|^{\operatorname{Re}(z)+1}}{|c + Re^{i\theta} - \lambda_k|} = \mathcal{O}_{R \rightarrow +\infty}(R^{\operatorname{Re}(z)}).$$

On a donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = 0$$

et ainsi

$$\lambda_k^z = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \lambda_k)^{-1} d\lambda.$$

□

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) < 0$. De manière générale (en conservant les notations de la preuve précédente) pour tout réel $a \geq c$ on a

$$a^z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - a)^{-1} d\lambda.$$

La fonction $a \mapsto a^z$ est de classe \mathcal{C}^∞ et les conditions pour pouvoir dériver sous le signe intégrale sont vérifiées. Étant donné un entier naturel p , en dérivant p fois cette application on obtient par calcul spectral et unicité du prolongement méromorphe le lemme suivant.

Lemme 2.7. (*Formules de Cauchy généralisées*) Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit Γ une droite verticale du plan complexe, orientée vers le bas et séparant 0 du spectre de Δ . Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) < p$, on a la formule de Cauchy

$$\binom{z}{p} \Delta^{z-p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-p-1} d\lambda,$$

où l'intégrale converge pour la topologie des opérateurs de Op^p (c'est à dire qu'elle converge pour la norme des opérateurs bornés de \mathcal{H}^{s+p} vers \mathcal{H}^s , pour tout $s \in \mathbb{R}$).

Les opérateurs définis par ces deux formules se restreignent à des endomorphismes de \mathcal{H}^∞ .

2.2 Holomorphie de la trace

Soit a un réel, $\mathbb{C}_{>a}$ (resp. $\mathbb{C}_{<a}$) désigne le demi-plan à droite (resp. à gauche) ouvert, composé des nombres complexes dont la partie réelle est strictement supérieure (resp. inférieure) à a , ainsi

$$\mathbb{C}_{>a} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > a\}, \quad (2.6)$$

$$\mathbb{C}_{<a} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < a\}. \quad (2.7)$$

Proposition 2.8. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . La fonction $z \mapsto \Delta^{-z}$ de $\mathbb{C}_{>0}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est holomorphe.*

Démonstration. Les valeurs spectrales de Δ se rangent dans une suite croissante $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}_{>0}$. On considère Γ une droite verticale orientée vers le bas, d'équation $\Gamma : x = c$ avec $0 < c < \min(\lambda_0, \operatorname{Re}(z_0))$. Grâce à la formule de Cauchy (2.6), on a

$$\Delta^{-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-z} (\Delta - \lambda)^{-1} d\lambda.$$

La fonction $z \mapsto \lambda^{-z}$ est dérivable sur $\mathbb{C}_{>c}$ avec $(\lambda^{-z})' = -\log(\lambda)\lambda^{-z}$. L'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} -\log(\lambda)\lambda^{-z} (\Delta - \lambda)^{-1} d\lambda$ est une intégrale de Bertrand qui converge normalement dans $\mathbb{C}_{>c}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, l'application $z \mapsto \Delta^{-z}$ est dérivable sur $\mathbb{C}_{>c}$ donc en z_0 , et par suite est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\mathbb{C}_{>0}$. \square

Proposition 2.9. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit X un opérateur sur \mathcal{H} . Si pour un réel a , $X\Delta^{-a}$ est un opérateur à trace alors la fonction $z \mapsto \operatorname{Trace}(X\Delta^{-z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>a}$.*

On propose deux démonstrations différentes de ce résultat.

Voici une première démonstration s'inspirant de [24, Remarque 1, page 5] qui s'appuie sur un développement analytique de $z \mapsto \operatorname{Trace}(X\Delta^{-z})$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, de la Proposition (2.8), on déduit que $z \mapsto \Delta^{-z+a+\varepsilon}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>a+\varepsilon}$ et à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Par le Lemme (2.5), l'holomorphicité de cette fonction implique son analyticité. Il existe alors une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés telle que $\Delta^{-z+a+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$, cette série convergeant uniformément sur tout compact inclus dans $\mathbb{C}_{>a+\varepsilon}$.

L'opérateur $X\Delta^{-a-\varepsilon} = X\Delta^{-a}\Delta^{-\varepsilon}$ est à trace car $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est un idéal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pour les mêmes raisons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les opérateurs $X\Delta^{-a-\varepsilon}B_n$ sont à trace .

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}_{>a+\varepsilon}, X\Delta^{-z} = X\Delta^{-a-\varepsilon}\Delta^{-z+a+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} (X\Delta^{-a-\varepsilon}B_n)z^n.$$

$$\text{Par suite } \operatorname{Trace}(X\Delta^{-z}) = \operatorname{Trace} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (X\Delta^{-a-\varepsilon}B_n)z^n \right).$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose $S_q = \sum_{n=0}^q \operatorname{Trace}(X\Delta^{-a-\varepsilon}B_n)z^n$. On a alors

$$\operatorname{Trace}(X\Delta^{-z}) - S_q = \operatorname{Trace} \left(\sum_{n=q+1}^{\infty} (X\Delta^{-a-\varepsilon}B_n)z^n \right).$$

Or d'après le Lemme (1.10) on a :

$$\left| \text{Trace} \left(\sum_{n=q+1}^{\infty} (X\Delta^{-a-\varepsilon} B_n) z^n \right) \right| \leq \|X\Delta^{-a-\varepsilon}\|_1 \left\| \sum_{n=q+1}^{\infty} B_n z^n \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Ainsi la suite de fonctions $(z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z}) - S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_{>a+\varepsilon}$.

Sur $\mathbb{C}_{>a+\varepsilon}$ on a donc le développement analytique $\text{Trace}(X\Delta^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Trace}(X\Delta^{-a-\varepsilon} B_n) z^n$,

par suite $z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>a+\varepsilon}$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et l'holomorphie étant une propriété locale, on a $z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z})$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>a}$. \square

Voici une deuxième démonstration qui s'appuie sur le calcul spectral.

Démonstration. On note $\zeta : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z})$. Pour $\text{Re}(z) > a$, par calcul spectral on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$\Delta^{-z-h} = \Delta^{-z} - h \ln(\Delta) \Delta^{-z} + \Delta^{-z} \underset{h \rightarrow 0}{o}(h), \quad (2.8)$$

où $\underset{h \rightarrow 0}{o}(h)$ désigne un opérateur borné dont la norme tend vers 0 quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned} \text{Trace}(X\Delta^{-z-h}) - \text{Trace}(X\Delta^{-z}) &= \text{Trace}(X\Delta^{-z-h} - X\Delta^{-z}) \\ &= h \text{Trace}(X \ln(\Delta) \Delta^{-z}) + \text{Trace}(X\Delta^{-z} \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)) \\ &= h \text{Trace}(X \ln(\Delta) \Delta^{-z}) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ce petit o étant obtenu via le Lemme (1.10) :

$$\left| \text{Trace}(X\Delta^{-z}) \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \right| \leq \left| \text{Trace}(X\Delta^{-z}) \right| \left\| \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \right\|. \quad (2.10)$$

L'application $\zeta : z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z})$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C}_{>a}$ et on a pour tout $z \in \mathbb{C}_{>a}$ on a $\zeta'(z) = \text{Trace}(X \ln(\Delta) \Delta^{-z})$. \square

Proposition 2.10. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Si l'opérateur $\Delta^{-\frac{1}{r}}$ appartient à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour un certain $p \geq 1$ et si $X \in Op^{-t}$, alors la fonction zeta spectrale $z \mapsto \text{Trace}(X\Delta^{-z})$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\mathbb{C}_{>\frac{p-t}{r}}$.*

Démonstration. L'opérateur $X\Delta^{-z}$ appartient à $Op^{-t-r\text{Re}(z)}$, et pour $0 < t + r\text{Re}(z) \leq p$ on a d'après le Lemme 2 $Op^{-t-r\text{Re}(z)}(\Delta) \subset \mathcal{L}^{\frac{p}{t+r\text{Re}(z)}}(\mathcal{H})$. En particulier pour $\text{Re}(z) = \frac{p-t}{r}$ on obtient $X\Delta^{-z} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. \square

Nous aurons dans la suite besoin d'évoquer la nullité de la trace de certains commutateurs construits à partir d'opérateurs non bornés, par exemple dans la preuve du théorème central (3.3). La Proposition suivante précise cette situation.

Proposition 2.11. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour un certain réel $p \geq 1$. Pour tout triplet $(X, Y, T) \in (Op)^3$, l'application $z \mapsto \text{Trace}([X, Y\Delta^{-z}T])$ est nulle pour $\text{Re}(z)$ suffisamment grande, et se prolonge donc analytiquement en la fonction nulle sur \mathbb{C} .*

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire :

$$[X, Y\Delta^{-z}T] = [XY\Delta^{-N}, \Delta^{-z+N}T] + [\Delta^{-z+N}TX, Y\Delta^{-N}]$$

Pour un choix de N assez grand les opérateurs $XY\Delta^{-N}$ et $Y\Delta^{-N}$ sont bornés. Une fois ce choix réalisé pour un nombre complexe de partie réelle suffisamment grande, les opérateurs $\Delta^{-z+N}T$ et $\Delta^{-z+N}TX$ sont à trace, ce qui assure le résultat. \square

2.3 Familles holomorphes

On rappelle que Δ est un opérateur autoadjoint, positif inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} .

Définition 2.2. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

1. La famille $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe élémentaire de type k s'il existe une fonction polynomiale p , un entier $n \in \mathbb{N}$ et un opérateur $X \in \mathcal{D}^{n+k}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $T_z = p(z)X\Delta^{z-n}$.
2. La famille $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type k si pour tous réels a et m , il existe un entier naturel q et q familles holomorphes élémentaires de type k , $(T_z^j)_{z \in \mathbb{C}}$ pour $1 \leq j \leq q$, telles que dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) < a$ on ait la décomposition suivante, appelée développement de Taylor à l'ordre m et de frontière a :

$$T_z = T_z^1 + \cdots + T_z^p + R_z. \quad (2.11)$$

où le reste $z \mapsto R_z$, est holomorphe du demi-plan $\operatorname{Re}(z) < a$ dans Op^m .

Si $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type k alors $T_z \in Op^{k+r\operatorname{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Une famille holomorphe de type k est aussi une famille holomorphe de type $k+1$. Parfois nous écrirons $(T_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \operatorname{Hol}(k)$ à la place de $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type k . Contrairement aux familles holomorphes élémentaires, les familles holomorphes sont stables par crochet avec un élément de \mathcal{D} , comme nous allons le montrer plus tard.

Le choix de la nomination "développement de Taylor", un peu artificiel à ce stade, s'appuie sur le développement du Lemme (2.13). Dans cette formule, les différents termes de la somme sont rangés de manière décroissante pour leur ordre dans \mathcal{D} , et le reste $z \mapsto R_z$ est d'ordre inférieur au dernier terme de cette somme. La formule définissant ce reste étant de plus très proche du reste intégral de Lagrange pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 2.12. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ une famille holomorphe de type k . Supposons que l'opérateur $\Delta^{-\frac{1}{r}}$ appartient à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour un certain $p \geq 1$, alors la fonction zeta spectrale $z \mapsto \operatorname{Trace}(T_z)$ est holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{C}_{< \frac{-p-k}{r}}$.

Démonstration. On considère un développement de Taylor à l'ordre $-p$ et de frontière $a = \frac{-p-k}{r}$ de la famille $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$, de la forme $T_z = T_z^1 + \cdots + T_z^p + R_z$. Chaque $(T_z^j)_{z \in \mathbb{C}}$ pour $1 \leq j \leq p$ est une famille holomorphe élémentaire de type k . Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe un entier naturel n et un opérateur $X_j \in \mathcal{D}^{n+k}$ tel que $T_z^j = X_j\Delta^{z-n}$. D'après la Proposition (2.10), la fonction

zeta spectrale $z \mapsto \text{Trace}(X_j \Delta^{z-n})$ est holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{C}_{<a}$. La fonction définie sur le demi-plan $\mathbb{C}_{<a}$ par $z \mapsto R_z$ est par définition à valeurs dans $Op^{-p} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et holomorphe. On en déduit que $z \mapsto \text{Trace}(R_z)$ est holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{C}_{<a}$ \square

2.4 Développements de Taylor

Le développement suivant est dû à A.Connes et H.Moscovici [[4], Appendice B]. On l'appellera développement de Taylor, en accord avec la Définition 2.2

Lemme 2.13. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit Γ une droite verticale du plan complexe, orientée vers le bas et séparant 0 du spectre de Δ . Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ et $z \in \mathbb{C}$.*

Pour tout entier naturel non nul N tel que $N + 1 > \text{Re}(z)$ on a l'identité :

$$[X, \Delta^z] = - \sum_{k=1}^N \binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} + R_N(z, X),$$

$$\text{où } R_N(z, X) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-N-1} d\lambda.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $X^{(k)} \Delta^{z-k} \in Op^{r\text{Re}(z)+q_X-k}$ et $R_N(z, X) \in Op^{r\text{Re}(z)+q_X-N-1}$.

Démonstration. Les valeurs spectrales de Δ se rangent dans une suite croissante $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \rightarrow +\infty$. On choisit une droite Γ verticale orientée vers le bas d'équation $x = c$ avec $0 < c < \lambda_0$. On suppose dans un premier temps $\text{Re}(z) < 0$.

Les formules de Cauchy (2.7) donnent pour chaque entier naturel k inférieur ou égal à N ,

$$\binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^z X^{(k)} (\lambda - \Delta)^{-k-1} d\lambda. \quad (2.12)$$

Un petit calcul montre que

$$X^{(k)} (\lambda - \Delta)^{-1} = (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(k)} - (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(k+1)} (\lambda - \Delta)^{-1}, \quad (2.13)$$

et par suite

$$\binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} = \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^z [(\lambda - \Delta)^{-1} X^{(k)} (\lambda - \Delta)^{-k} - (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(k+1)} (\lambda - \Delta)^{-k-1}] d\lambda. \quad (2.14)$$

En sommant de $k = 0$ jusqu'à N , on obtient :

$$\sum_{k=0}^N \binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} = \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(0)} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-N-1} d\lambda. \quad (2.15)$$

Il s'en suit que

$$[X, \Delta^z] = \sum_{k=1}^N \binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} - \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-N-1} d\lambda. \quad (2.16)$$

On pose $R_N(z, X) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-1} X^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-N-1} d\lambda$. Cette intégrale impropre de Riemann converge pour la topologie des opérateurs de $Op^{q_X - N - 1}$ et elle définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{C}_{<N+1}$.

Comme $z \mapsto [X, \Delta^z] = \sum_{k=1}^N \binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{<0}$, on en déduit

que la formule est valable sur $\mathbb{C}_{<N+1}$ par unicité du prolongement analytique. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $X^{(k)} \in \mathcal{D}^{q_X + k(r-1)} \subset Op^{q_X + k(r-1)}$ et $\Delta^{z-k} \in Op^{r(\operatorname{Re}(z)-k)}$, alors $X^{(k)} \Delta^{z-k} \in Op^{r\operatorname{Re}(z) + q_X - k}$. Pour $l \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la formule précé-

dente à l'ordre $N+l$, on obtient $R_N(z, X) = -\sum_{k=N+1}^{N+l} \binom{z}{k} X^{(k)} \Delta^{z-k} + R_{N+l}(z, X)$,

où $R_{N+l}(z, X)$ converge pour la topologie de $Op^{q_X - N - l - 1}$. Par un choix de l grand $q_X - N - 1 - l$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, ce qui prouve que $R_N(z, X) \in Op^{r\operatorname{Re}(z) + q_X - N - 1}$. \square

On reprend les notations du Lemme 2.13. Soit a un réel, dans le demi-plan $\mathbb{C}_{<a}$, on a $R_N(z, X) \in Op^{q_X + r\operatorname{Re}(z) - N - 1} \subset Op^{q_X + ra - N - 1}$ et $z \mapsto R_N(z, X)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{<N+1}$. Les quantités $q_X + ra - N - 1$ (resp. $N + 1$) peuvent être rendues arbitrairement petites (resp. grandes) par un choix suffisamment grand de N . On en déduit que $([X, \Delta^z])_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type $q_X - 1$. Pour $N \geq a$, la relation (2.13) est un développement de Taylor de $[X, \Delta^z]$ à l'ordre $q_X + ra - N - 1$ et de frontière a . De ce développement on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.14. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$. Si $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type k , alors $(XT_z)_{z \in \mathbb{C}}$ et $(T_z X)_{z \in \mathbb{C}}$ sont des familles holomorphes de type $k + q_X$ et $([X, T_z])_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type $k + q_X - 1$.*

Il existe une deuxième formule de développement, dans laquelle on permute la place des facteurs Δ^{z-k} et $X^{(k)}$.

Lemme 2.15. *Soit un opérateur Δ autoadjoint, positif, inversible et à résolvante compacte sur \mathcal{H} . Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $X \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul N tel que $N + 1 > \operatorname{Re}(z)$ on a l'identité :*

$$[X, \Delta^z] = \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{z}{k} \Delta^{z-k} X^{(k)} + R_N(z, X)$$

$$\text{où } R_N(z, X) = \frac{(-1)^{N+1}}{2i\pi} \int \lambda^z (\lambda - \Delta)^{-N-1} X^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-1} d\lambda$$

Démonstration. La preuve est similaire à la précédente. \square

2.5 Développements de Taylor généralisés

Dans toute cette section et jusqu'à la fin de cette première partie *I* du mémoire, on considère (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés et deux familles fixées d'opérateurs :

$$\mathcal{P} = (P_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}^n, \quad \mathcal{Q} = (Q_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}^n.$$

A chaque couple $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$ on associe l'opérateur :

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ W & \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i [-Q_i, P_i W] + \sum_{i=1}^n b_i [P_i, Q_i W]. \end{cases} \quad (2.17)$$

Le lemme suivant est un corollaire immédiat de la formule de Taylor (2.13).

Lemme 2.16. *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, et tout $q \in \mathbb{Z}$, $H_{a,b}(\text{Hol}(q)) \in \text{Hol}(M+q)$, où $M = \max_{1 \leq i \leq n} (\text{ordre}(P_i) + \text{ordre}(Q_i))$.*

Une famille de $\text{Hol}(q)$ sera donc transformée en une famille de $\text{Hol}(pM+q)$ par l'image de la composée de p opérateurs de type $H_{a,b}$. Nous allons maintenant généraliser les formules de Taylor.

Lemme 2.17. *Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$. Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N+1 > \text{Re}(z)$ on a*

$$H_{a,b}(X\Delta^z) = H_{a,b}(X)\Delta^z + \sum_{k=1}^N \binom{z}{k} A_{a,b}^{(k)}(X)\Delta^{z-k} + R_{N,H_{a,b}}(z, X),$$

avec pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $A_{a,b}^{(k)}(X) = \sum_{i=1}^n a_i P_i X (Q_i)^{(k)} - b_i Q_i X (P_i)^{(k)}$, et

$$R_{N,H_{a,b}}(z, X) = \sum_{i=1}^n a_i P_i X R_N(z, -Q_i) + b_i Q_i X R_N(z, P_i). \quad (2.18)$$

Posons $M = \max_{1 \leq i \leq n} (\text{ordre}(P_i) + \text{ordre}(Q_i))$, on a

1. $H_{a,b}(X)\Delta^z \in \mathcal{O}p^{r\text{Re}(z)+q_X+M}$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $A_{a,b}^{(k)}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+M+(r-1)k}$.
3. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $A_{a,b}^{(k)}(X)\Delta^{z-k} \in \mathcal{O}p^{r\text{Re}(z)+q_X+M-k}$.
4. $R_{N,H_{a,b}}(z, X) \in \mathcal{O}p^{r\text{Re}(z)+q_X+M-N-1}$.

Démonstration. On a

$$H_{a,b}(X\Delta^z) = H_{a,b}(X)\Delta^z + \sum_{i=1}^n (a_i P_i X [-Q_i, \Delta^z] + b_i Q_i X [P_i, \Delta^z]).$$

On applique la formule de Taylor (2.13) à chaque crochet, on obtient

$$\begin{aligned} H_{a,b}(X\Delta^z) &= H_{a,b}(X)\Delta^z \\ &+ \sum_{k=1}^N \binom{z}{k} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i X(Q_i)^{(k)} - b_i Q_i X(P_i)^{(k)} \right) \Delta^{z-k} \\ &+ \sum_{i=1}^n a_i P_i X R_N(z, -Q_i) + b_i Q_i X R_N(z, P_i). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on pose $A_{a,b}^{(k)}(X) = \sum_{i=1}^n a_i P_i X(Q_i)^{(k)} - b_i Q_i X(P_i)^{(k)}$ et $R_{N,H_{a,b}}(z, X) = \sum_{i=1}^n a_i P_i X R_N(z, -Q_i) + b_i Q_i X R_N(z, P_i)$.

1. On a $H_{a,b}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+M} \subset \mathcal{O}p^{q_X+M}$ et $\Delta^z \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)}$ et alors $H_{a,b}(X)\Delta^z \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)+\operatorname{ordre}(X)+M}$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i X(Q_i)^{(k)} \in \mathcal{D}^{q_X+M+(r-1)k}$ et $Q_i X(P_i)^{(k)} \in \mathcal{D}^{q_X+M+(r-1)k}$, alors $A_{a,b}^{(k)}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+M+(r-1)k}$.
3. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $A_{a,b}^{(k)}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+M+(r-1)k} \subset \mathcal{O}p^{q_X+M+(r-1)k}$ et $\Delta^{z-k} \in \mathcal{O}p^{r(\operatorname{Re}(z)-k)}$, alors $A_{a,b}^{(k)}(X)\Delta^{z-k} \in \mathcal{O}p^{r(\operatorname{Re}(z)-k)+q_X+M}$.
4. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a directement $a_i P_i X R_N(z, -Q_i) + b_i Q_i X R_N(z, P_i) \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)+q_X+M-N-1}$ d'après le Lemme 2.13, par suite $R_{N,H_{a,b}}(z) \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)+q_X+M-N-1}$.

□

On va maintenant généraliser la formule de Taylor du Lemme (2.17) en composant p opérateurs de type $H_{a,b}$.

Lemme 2.18. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\Lambda_p = (a^m, b^m)_{m \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)^p$. Posons*

$$H_{\Lambda_p} = H_{a^p, b^p} \circ \dots \circ H_{a^1, b^1}.$$

Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^$ tel que $N+1 > \operatorname{Re}(z)$ on a le développement de Taylor :*

$$H_{\Lambda_p}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} C_{k, \Lambda_p}(X) \Delta^{z-k} + R_{\Lambda_p, N}(z, X),$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $C_{k, \Lambda_p}(X) \in \mathcal{D}$ et $R_{\Lambda_p, N}(z, X) \in \mathcal{O}p$. De plus

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $C_{k, \Lambda_p}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+pM+(r-1)k}$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $C_{k, \Lambda_p}(X)\Delta^{z-k} \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)+q_X+pM-k}$.
3. On a $R_{\Lambda_p, N}(z, X) \in \mathcal{O}p^{r\operatorname{Re}(z)+q_X+pM-N-1}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur p . Le cas $p=1$ fait l'objet du Lemme (2.17). Supposons l'existence d'un développement de Taylor pour une composée de p opérateurs. Pour $\Lambda_p = ((a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p))$ on note H_{Λ_p} le produit $\prod_{m=1}^p H_{a^m, b^m}$. Nous pouvons écrire

$$H_{\Lambda_p}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} C_{k, \Lambda_p}(X) \Delta^{z-k} + R_{\Lambda_p, N}(z, X).$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$, on pose $\Lambda_{p+1} = ((a, b), \Lambda_p)$ $H_{\Lambda_{p+1}} = H_{a,b} \circ H_{\Lambda_p}$. Par linéarité de $H_{a,b}$,

$$H_{\Lambda_{p+1}}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} H_{a,b}(C_{k,\Lambda_p}(X)\Delta^{z-k}) + H_{a,b}(R_{\Lambda_p,N}(z, X)).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on développe $H_{a,b}(C_{k,\Lambda_p}(X)\Delta^{z-k})$ à l'ordre $N - k$ en utilisant le Lemme (2.17), on obtient :

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_{p+1}}(X\Delta^z) &= \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} H_{a,b}(C_{k,\Lambda_p}(X))\Delta^{z-k} \\ &+ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{t=0}^{k-1} \binom{z}{t} \binom{z-t}{k-t} A_{a,b}^{(k-t)}(C_{t,\Lambda_p}(X)) \right) \Delta^{z-k} \\ &+ \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} R_{N-k, H_{a,b}}(z-k, C_{k,\Lambda_p}(X)) \\ &+ \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} \left(\sum_{i=1}^n a_i [P_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, -Q_i) + b_i [Q_i, C_{k,\Lambda_p}] R_{N-k}(z-k, P_i) \right) \\ &+ H_{a,b}(R_{N,\Lambda_p}(z, X)). \end{aligned} \tag{2.19}$$

On regroupe les trois dernières lignes du développement ci-dessus pour former un reste, on le note $R_{\Lambda_{p+1},N}(z, X)$. On obtient alors

$$H_{\Lambda_{p+1}}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} C_{k,\Lambda_{p+1}}(X)\Delta^{z-k} + R_{\Lambda_{p+1},N}(z, X), \tag{2.20}$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$C_{k,\Lambda_{p+1}}(X) = H_{a,b}(C_{k,\Lambda_p}(X)) + \left(\sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} A_{a,b}^{(k-t)}(C_{t,\Lambda_p}(X)) \right). \tag{2.21}$$

Majorons les ordres.

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_p : \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad C_{k,\Lambda_p}(X) \in \mathcal{D}^{pM+(r-1)k}. \tag{2.22}$$

On va démontrer que P_p est vraie pour tout $p \geq 1$ par récurrence sur p . Pour $p = 1$. Si $k = 0$, $C_{0,\Lambda_1}(X) = |a| + |b| \in \mathcal{D}^{qX+M}$. Si $k \geq 1$, $C_{k,\Lambda_1}(X) = A_{a,b}^{(k)}(X) \in \mathcal{D}^{qX+1.M+(r-1)k}$ par le Lemme (2.17).

Supposons P_p vraie. Si $k = 0$, $C_{0,\Lambda_{p+1}}(X) = H_{a,b}(C_{0,\Lambda_p}(X)) \in \mathcal{D}^{qX+(p+1)M+0}$. Si $k \geq 1$, pour tout $t \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ on a $A_{a,b}^{(k-t)} \in \mathcal{D}^{M+(r-1)(k-t)}$ d'après le Lemme (2.17) et $C_{t,\Lambda_{p+1}}(X) \in \mathcal{D}^{qX+pM+(r-1)t}$ par hypothèse de récurrence. Alors

$$A_{a,b}^{(k-t)}(C_{t,\Lambda_p}(X)) \in \mathcal{D}^{qX+M+pM+(r-1)t+(r-1)(k-t)} = \mathcal{D}^{(p+1)M+(r-1)k}.$$

Par suite

$$\sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} A_{a,b}^{(k-t)}(C_{t,\Lambda_{p+1}}(X)) \in \mathcal{D}^{q_X+(p+1)M+(r-1)k}. \quad (2.23)$$

D'autre part $H_{a,b}(C_{k,\Lambda_p}(X)) \in \mathcal{D}^{M+q_X+pM+(r-1)k} = \mathcal{D}^{q_X+(p+1)M+(r-1)k}$.
Nous avons prouvé que P_{p+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

2. C'est une conséquence immédiate du résultat précédent.
3. Nous allons montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $R_{\Lambda_p,N}(z, X) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+pM-N-1}$, par récurrence sur p . Pour $p = 1$ c'est le Lemme (2.17). Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} R_{\Lambda_{p+1},N}(z, X) &= \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} R_{N-k,H_{a,b}}(z-k, C_{k,\Lambda_p}(X)) \\ &+ \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} \left(\sum_{i=1}^n a_i [P_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, -Q_i) + b_i [Q_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, P_i) \right) \\ &+ H_{a,b}(R_{N,\Lambda_p}(z, X)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et tout $1 \leq i \leq n$ on a $C_{k,\Lambda_p}(X) \in \mathcal{D}^{q_X+(p+1)M+(r-1)k}$, et alors

$$R_{N-k,H_{a,b}}(z-k, C_{k,\Lambda_p}(X)) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1},$$

$$[P_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, -Q_i) \in Op^{q_X+pM+k+M+r\text{Re}z-(N-k)-1},$$

et

$$\sum_{k=0}^N \binom{z}{k} R_{N-k,H_{a,b}}(z-k, C_{k,\Lambda_p}(X)) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1}.$$

Pour tout $0 \leq k \leq N$ et tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$[P_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, -Q_i) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1},$$

et

$$[Q_i, C_{k,\Lambda_p}(X)] R_{N-k}(z-k, P_i) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1}.$$

Par hypothèse de récurrence $R_{N,\Lambda_p}(z) \in Op^{q_X+r\text{Re}(z)+pM-N-1}$, hence $H_{a,b}(R_{N,\Lambda_p}(z, X)) \in Op^{r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1}$. Ainsi $R_{\Lambda_{p+1},N}(z) \in Op^{r\text{Re}(z)+(p+1)M-N-1}$, et le Lemme 2.18 est prouvé. \square

A $\Lambda_p = (a^m, b^m)_{m \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^p$ et $\Gamma_p = (\alpha_m, \beta_m)_{m \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{R}^2)^p$ on associe une suite $(T_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ et une famille $(T_{z'})_{z' \in \mathbb{C}}$ d'opérateurs de $\text{End}(\mathcal{H}^\infty)$ définies par :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad T_s = \prod_{m=1}^p (H_{a^m, b^m} - (\alpha_m s + \beta_m) Id_{Op}).$$

$$\forall z' \in \mathbb{C}, \quad T_{z'} = \prod_{m=1}^p (H_{a^m, b^m} - (\alpha_m z' + \beta_m) Id_{O_p}).$$

Par b on désigne la fonction polynomiale suivante :

$$\forall z' \in \mathbb{C}, \quad b(z') = (-1)^{p+1} \prod_{m=1}^p (\alpha_m z' + \beta_m),$$

et par $H_{z'}$ l'opérateur de $\text{End}(\mathcal{H}^\infty)$:

$$\forall z' \in \mathbb{C}, \quad H_{z'} = b(z') Id_{O_p} + T_{z'}.$$

On peut noter que $H_{z'}$ est une composée de commutateurs.

Lemme 2.19. *Soit $X \in \mathcal{D}_q$. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N + 1 > \text{Re}(z)$ on a :*

$$H_{z'}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} D_k(z', X) \Delta^{z-k} + R_N(z, z', X), \quad (2.25)$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ le facteur $D_k(z', X) \in \mathcal{D}_p[z']$ (polynôme en z' de degré inférieur ou égal à p et à coefficients dans \mathcal{D}). Les ordres étant :

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $D_k(z', X) \in \mathcal{D}^{q_X + pM + (r-1)k}$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $D_k(z', X) \Delta^{z-k} \in \mathcal{O}p^{r\text{Re}(z) + q_X + pM - k}$.
3. On a $R_N(z, z', X) \in \mathcal{O}p^{r\text{Re}(z) + q_X + pM - N - 1}$.

Démonstration. Soit I l'ensemble des parties de $\llbracket 1, p \rrbracket$. Pour $u \in I$, on note \bar{u} le complémentaire $\llbracket 1, p \rrbracket \setminus u$. Pour $u \in I$, $|u|$ est la longueur de u . Si $u \neq \emptyset$ on écrit $H_{\Lambda_u} = \prod_{i=1}^{|u|} H_{a^{u_i}, b^{u_i}}$ où les éléments u_i de u sont rangés dans l'ordre croissant de leur valeur, et $b^u(z') = (-1)^{|u|} \prod_{i=1}^{|u|} (\alpha_{u_i} z' + \beta_{u_i})$. Par convention $H_{\Lambda_\emptyset} = Id_{\mathcal{D}}$, et $b^\emptyset(z) = 1$. Avec ces notations, on peut exprimer $T_{z'}$ et $H_{z'}$ comme suit :

$$T_{z'} = \sum_{u \in I} b^{\bar{u}}(z') H^u \quad \text{and} \quad H_{z'} = \sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') H^u.$$

Pour $u \in I, |u| \geq 1$, H_{Λ_u} est un opérateur de type H_{Λ_p} , avec $p = |u|$. Le Lemme 2.18 implique

$$H_{\Lambda_u}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} C_{k, \Lambda_u}(X) \Delta^{z-k} + R_{\Lambda_u, N}(z, X).$$

On en déduit

$$H_{z'}(X\Delta^z) = \sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') \left(\sum_{k=0}^N \binom{z}{k} C_{k, \Lambda_u}(X) \Delta^{z-k} + R_{\Lambda_u, N}(z, X) \right),$$

et en permutant les sommes

$$H_{z'}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') C_{k, \Lambda_u}(X) \right) \Delta^{z-k} + \sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') R_{\Lambda_u, N}(z, X).$$

Posons

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad D_k(z', X) = \sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') C_{k, \Lambda_u}$$

et

$$R_N(z, z', X) = \sum_{u \in I, |u| \geq 1} b^{\bar{u}}(z') R_{\Lambda_u, N}(z, X).$$

Nous obtenons

$$H_{z'}(\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} D_k(z', X) \Delta^{z-k} + R_N(z, z', X).$$

Le calcul des ordres est une conséquence directe du Lemme 2.18. \square

3 Prolongement méromorphe

3.1 Suites de réduction

Définition 3.1. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. On garde les notations du paragraphe précédent, voir (2.5). La suite $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de réduction s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $\Lambda_p = (a^m, b^m)_{m \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^p$ et une famille non nulle $\Gamma_p = (\alpha_m, \beta_m)_{m \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in (\mathbb{R}^2)^p$ tels que :

1. pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $T_s = \prod_{m=1}^p (H_{a^m, b^m} - (\alpha_m s + \beta_m) Id_{O_p})$.
2. Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ et tout $i \in \mathbb{N}$, $T_{q_X + ri}(X\Delta^i) \in \mathcal{D}[\Delta]^{q_X + ri - 1}$.

A une suite de réduction $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus, on associe une fonction polynomiale b et deux familles $(T_{z'})_{z' \in \mathbb{C}}$ et $(H_{z'})_{z' \in \mathbb{C}}$ d'opérateurs définis par :

$$\begin{aligned} \forall z' \in \mathbb{C}, \quad b(z') &= (-1)^{p+1} \prod_{m=1}^p (\alpha_m z' + \beta_m), \\ \forall z' \in \mathbb{C}, \quad T_{z'} &= \prod_{m=1}^p (H_{a^m, b^m} - (\alpha_m z' + \beta_m) Id_{O_p}) \\ \forall z' \in \mathbb{C}, \quad H_{z'} &= T_{z'} + b(z') Id_{O_p} \end{aligned}$$

3.2 Le théorème d'interpolation

Le théorème suivant joue un rôle central. Il permet d'étendre une suite de réduction en une famille de réduction indexée sur \mathbb{C} .

Théorème 3.1. *Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ une suite de réduction, et une famille $(H_{z'})_{z' \in \mathbb{C}}$ définie comme en (2.5). Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$ on a*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad H_{rz+q_X}(X\Delta^z) = b(rz + q_X)X\Delta^z + R_z,$$

avec $(R_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q_X - 1)$.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $N + 1 > \text{Re}(z)$. Grâce au Lemme 2.19, on a :

$$H_{rz+q_X}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \binom{z}{k} D_k(X, rz + q_X) \Delta^{z-k} + R_N(X, z).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\binom{z}{k} D_k(X, rz + q_X)$ est un polynôme en z de degré inférieur ou égal à $k + p - 1$, et ainsi inférieur ou égal à $N + p - 1$ et à coefficients dans \mathcal{D} . On note $(L_i)_{i \in \llbracket 0, N+p-1 \rrbracket}$ la famille de polynômes interpolateurs de Lagrange définis par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, N + p - 1 \rrbracket^2, L_i(j) = \delta_i^j.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \binom{z}{k} D_k(rz + q_X) = \sum_{i=0}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri + q_X) L_i(z),$$

et par suite

$$H_{rz+q_X}(X\Delta^z) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=0}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri + q_X) L_i(z) \right) \Delta^{z-k} + R_N(X, z).$$

En permutant les deux sommes, on obtient

$$H_{rz+q_X}(X\Delta^z) = \sum_{i=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=0}^N \binom{i}{k} D_k(X, ri + q_X) \Delta^{i-k} \right) L_i(z) \Delta^{z-i} + R_N(X, z),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} H_{rz+q_X}(X\Delta^z) &= \sum_{i=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=0}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri + q_X) \Delta^{i-k} \right) L_i(z) \Delta^{z-i} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=N+1}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri + q_X) \Delta^{i-k} \right) L_i(z) \Delta^{z-i} \\ &\quad + R_N(X, z). \end{aligned}$$

Pour chaque $i \in \llbracket 0, N + p - 1 \rrbracket$ on a la formule suivante :

$$H_{ri+q_X}(X\Delta^i) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} D_k(X, ri+q_X) \Delta^{i-k} = \sum_{k=0}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri+q_X) \Delta^{i-k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} H_{rz+q_X}(X\Delta^z) &= \sum_{i=0}^{N+p-1} H_{ri+q_X}(X\Delta^i) L_i(z) \Delta^{z-i} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{N+p-1} \left(\sum_{k=N+1}^{N+p-1} \binom{i}{k} D_k(X, ri+q_X) \Delta^{i-k} \right) L_i(z) \Delta^{z-i} \\ &\quad + R_N(X, z). \end{aligned}$$

Par définition des opérateurs H et T , on obtient pour chaque $i \in \llbracket 0, N+p-1 \rrbracket$

$$H_{ri+q_X}(X\Delta^i) = b(ri+q_X)X\Delta^i + T_{ri+q_X}(X\Delta^i),$$

d'où

$$\begin{aligned} H_{rz+q_X}(X\Delta^z) &= \left(\sum_{i=0}^{N+p-1} b_{ri+q_X} L_i(z) \right) X\Delta^z \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N+p-1} L_i(z) T_{ri+q_X}(X\Delta^i) \Delta^{z-i} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{N+p-1} \sum_{k=N+1}^{N+p-1} \binom{i}{k} L_i(z) D_k(X, ri+q_X) \Delta^{z-k} \\ &\quad + R_N(X, z). \end{aligned}$$

Par définition d'une suite de réduction, on a $T_{ri+q_X}(X\Delta^i) \in \mathcal{D}[\Delta]^{q_X+ri-1}$ pour chaque $i \in \llbracket 0, N+p-1 \rrbracket$. Ainsi on obtient

$$\left(\sum_{i=0}^{N+p-1} L_i(z) T_{2i+q_X}(X\Delta^i) \Delta^{z-i} \right)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q-1).$$

Soit N tel que $N \geq Mp$, pour chaque $i \in \llbracket 0, N+p-1 \rrbracket$ et chaque $k \in \llbracket N+1, N+p-1 \rrbracket$, $(D_k(X, ri+q) \Delta^{z-k})_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q-1)$ d'après le Lemme 2.19. Comme b est polynomiale de degré p avec $p \leq N+p-1$, la formule

d'interpolation de Lagrange donne $\sum_{i=0}^{N+p-1} b_{ri+q} L_i(z) = b(rz+q)$. On a prouvé $H_{rz+q}(X\Delta^z) = b(rz+q)X\Delta^z + R_z$, where $(R_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q-1)$. \square

Corollaire 3.2. *Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathcal{D}$.*

1. *Soit $(X\Delta^{z-l})_{z \in \mathbb{C}}$ une famille holomorphe élémentaire de type q alors*

$$H_{rz+q}(X\Delta^{z-l}) = b(rz+q)X\Delta^{z-l} + S_z$$

où $(S_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q-1)$.

2. Soit $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ une famille holomorphe de type q alors $H_{rz+q}(T_z) = b(rz + q)T_z + S_z$ où $(S_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q - 1)$.

Démonstration. 1. On a $X \in \mathcal{D}^{r+l+k}$, ainsi :

$$H_{rz+q}(X\Delta^{z-l}) = H_{r(z-l)+rl+k}(X\Delta^{z-l}) = b(r(z-l)+rl+q)X\Delta^{z-l} + R_z = b(rz+q)X\Delta^{z-l} + S_z,$$

avec $(S_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q - 1)$.

2. Let $(T_z)_{z \in \mathbb{C}}$ une famille holomorphe de type q . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on peut écrire $T_z = T_z^1 + \dots + T_z^q + R_z$, où T_z^j est une famille holomorphe élémentaire de type q pour chaque $1 \leq j \leq q$ et le reste $z \mapsto R_z$ est holomorphe du demi-plan $\text{Re}(z) < a$ dans Op^{m-Mp} . Pour chaque $z \in \mathbb{C}$, on a par linéarité $H_{rz+q}(T_z) = H_{rz+q}(T_z^1) + \dots + H_{rz+q}(T_z^q) + H_{rz+q}(R_z)$. Pour chaque $1 \leq j \leq q$, $H_{rz+q}(T_z^j) = b(rz + q)T_z^j + S_z^j$ où $(S_z^j)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q - 1)$ par le point précédent. Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, l'opérateur H_{rz+q} à des coefficients qui sont des polynômes en z et il envoie Op^t dans Op^{t+Mp} , et ainsi le reste $z \mapsto H_{rz+q}(R_z)$ est holomorphe du demi-plan $\text{Re}(z) < a$ dans Op^m . Nous avons prouvé que $H_{rz+q}(T_z) = b(rz + q)T_z + S_z$, where $(S_z)_{z \in \mathbb{C}} \in \text{Hol}(q - 1)$. □

3.3 Le théorème de prolongement méromorphe

Théorème 3.3. Soit (\mathcal{D}, Δ, r) une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. On suppose qu'il existe une suite de réduction. On note b la fonction polynomiale associée à cette suite et $\text{Rac}(b)$ l'ensemble des racines complexes de b . On suppose que l'opérateur $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour un certain réel $p \geq 1$. Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$. La fonction zeta spectrale

$$\zeta_{X,\Delta} : \begin{cases} \mathbb{C}_{<-\frac{p+q_X}{r}} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \text{Trace}(X\Delta^z) \end{cases}$$

est holomorphe et admet un prolongement méromorphe, encore noté $\zeta_{X,\Delta}$, à tout le plan complexe \mathbb{C} . Les pôles de $\zeta_{X,\Delta}$ sont localisés dans une réunion finie de supports de suites arithmétiques, plus précisément :

$$\text{Poles}(\zeta_{X,\Delta}) \subset \bigcup_{\alpha \in \text{Rac}(b)} R_\alpha,$$

où $R_\alpha = \left\{ \frac{\alpha - q_X}{r} + \frac{l}{r} \mid l \in \mathbb{Z} \text{ et } l \geq -p - \alpha \right\}$. Soit $\omega \in \text{Poles}(\zeta_{X,\Delta})$, on note $m(\omega)$ son ordre de multiplicité, on a :

$$m(\omega) \leq \sum_{\alpha \in \text{Rac}(b)} m(\alpha) \mathbf{1}_{R_\alpha}(\omega),$$

où $m(\alpha)$ est l'ordre de multiplicité de la racine α .

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, soit (T_z) une famille holomorphe de type q_X et p un réel supérieur ou égal à 1 tel que $\Delta^{-\frac{1}{r}} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$. D'après la Proposition 2.12, l'application $z \mapsto \text{Trace}(T_z)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\mathbb{C}_{<-\frac{p+q_X}{r}}$. Du Corollaire 3.2, on déduit que $H_{rz+q_X}(T_z) = b(rz + q_X)T_z + S_z$, avec $(S_z) \in$

$\text{Hol}(q_X - 1)$. Pour $\text{Re}(z) \ll 0$, les opérateurs $H_{rz+q_X}(T_z), T_z$ et S_z sont à trace et de plus on a $\text{Trace}(H_{rz+q_X}(T_z)) = 0$ par la Proposition 2.11. Pour $\text{Re}(z) \ll 0$, on obtient $b(rz + q_X)\text{Trace}(T_z) = \text{Trace}(-S_z)$. Pour $l \in \mathbb{N}$, répétant $l + 1$ fois l'opération ci-dessus, on obtient

$$b(rz + q_X - l) \dots b(rz + q_X - 1)b(rz + q_X)\text{Trace}(T_z) = \text{Trace}(U_z),$$

avec $(U_z) \in \text{Hol}(q_X - l - 1)$. La fonction $z \mapsto \text{Trace}(U_z)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\mathbb{C}_{<-\frac{p+q}{r} + \frac{l+1}{r}}$ comme conséquence de la Proposition 2.12. Nous pouvons donc conclure que $z \mapsto \text{Trace}(T_z)$ admet un prolongement méromorphe au plan \mathbb{C} tout entier. La localisation et la majoration de l'ordre de multiplicité des pôles est une conséquence directe de la formule

$$\text{Trace}(T_z) = \frac{1}{b(rz + q_X - l) \dots b(rz + q_X - 1)b(rz + q_X)} \text{Trace}(U_z). \quad \square$$

Deuxième partie

Prolongement méromorphe dans le cadre des triplets spectraux

Nous allons définir dans le cadre des triplets spectraux une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés. On reformule dans ce cadre et avec le vocabulaire adapté le théorème de prolongement méromorphe.

4 Triplets spectraux

4.1 Triplets spectraux compacts et non compacts

Il existe suivant les sources, des petites nuances dans les données et les axiomes nécessaires à la définition d'un triplet spectral. On peut par exemple voir [4] et [6]. Dans cette section, la présentation des triplets spectraux et de leurs propriétés éventuelles s'inspirent notamment de l'article [1, §2.1].

Définition 4.1. *Un triplet $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral compact si :*

1. \mathcal{A} est une pré- C^* algèbre unitaire ;
2. Une représentation $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de \mathcal{A} dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} est donnée.
3. D est un opérateur autoadjoint (non nécessairement borné) sur \mathcal{H} , appelé opérateur de Dirac qui satisfait aux propriétés suivantes :
 - (a) pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la résolvante $(D - \lambda)^{-1}$ est un opérateur compact ;
 - (b) pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[D, \rho(a)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lorsque l'algèbre \mathcal{A} n'est pas unitaire, on définit une notion de triplet spectral non compact. La condition [3.a] portant sur la résolvante est renforcée, voir [3, page 6200].

Définition 4.2. *Un triplet $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral non compact si :*

1. \mathcal{A} est une pré- C^* algèbre non unitaire ;
2. Une représentation $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de \mathcal{A} dans l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} est donnée.
3. D est un opérateur autoadjoint (non nécessairement borné) sur \mathcal{H} , appelé opérateur de Dirac qui satisfait aux propriétés suivantes :
 - (a) pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'opérateur $\rho(a)(D - \lambda)^{-1}$ est compact ;
 - (b) pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[D, \rho(a)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

4.2 Propriétés

Définition 4.3. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est dit commutatif si l'algèbre \mathcal{A} est commutative.

Définition 4.4. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est pair s'il est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gradué, c'est à dire s'il existe un opérateur borné autoadjoint $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que :

1. $\Gamma^2 = Id_{\mathcal{H}}$;
2. pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[\Gamma, \rho(a)] = 0$.
3. $\Gamma D + D\Gamma = 0$.

Un triplet spectral qui n'est pas pair est dit impair.

Définition 4.5. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est réel s'il existe un opérateur anti-unitaire $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que :

1. $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $[\rho(a), J\rho(b^*)J^{-1}] = 0$;
2. $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $[[D, \rho(a)]_-, J\rho(b^*)J^{-1}] = 0$, (condition d'ordre 1) ;
3. $J^2 = \pm Id_{\mathcal{H}}$;
4. $[J, D]_{\pm} = 0$;
5. $[J, \Gamma]_{\pm} = 0$. seulement dans le cas pair.

Le choix du \pm dans les trois formules précédentes se fait modulo 8 sur la dimension n du triplet spectral.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$J^2 = \pm Id_{\mathcal{H}}$	+	+	-	-	-	-	+	+
$[J, D]_{\pm} = 0$	-	+	-	-	-	+	-	-
$[J, \Gamma]_{\pm} = 0$	-		+		-		+	

On pose $\Delta = D^2$ et $|D|$ la racine carrée positive de Δ .

Définition 4.6. Le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est régulier si et seulement si

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \rho(a) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{Dom}(\delta^k) \quad \text{et} \quad [D, \rho(a)] \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{Dom}(\delta^k),$$

où δ est la dérivation $[[D], \cdot]$ définie sur les opérateurs de \mathcal{H} .

4.3 Dimension métrique d'un triplet spectral

Définition 4.7. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est finiment sommable si et seulement s'il existe un réel d tel que la trace de Dixmier de $|D|^{-d}$ est finie et non nulle.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral finiment sommable et un réel d tel que la trace de Dixmier de $|D|^{-d}$ soit finie et non nulle. On a par définition de la trace de Dixmier :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{\lambda \in \text{Spectre}(D)} m(\lambda) |\lambda|^{-s} < +\infty \right) \Rightarrow (s > d). \quad (4.1)$$

Définition 4.8. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral finiment sommable. La borne inférieure des réels d tels que $\sum_{\lambda \in \text{Spectre}(D)} m(\lambda) |\lambda|^{-d} < +\infty$ s'appelle la dimension métrique du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

4.4 Spectre des dimensions d'un triplet spectral

Pour un triplet spectral, la bonne notion de dimension n'est pas un réel (la dimension métrique) mais une partie Σ du plan complexe. On associe à un triplet finiment sommable $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ la fonction zeta spectrale :

$$\zeta_D : z \mapsto \text{Trace}(|D|^{-z}) = \sum_{\lambda} \text{Trace}(p(\lambda, |D|))\lambda^{-z},$$

où $p(\lambda, |D|)$ désigne la projection orthogonale sur l'espace propre $E(\lambda, |D|)$. Avec les notations précédentes $\text{Trace}(p(\lambda, |D|)) = m(\lambda)$ est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .

Il existe sur un triplet spectral finiment sommable une famille de fonctions zeta spectrales dont ζ_D fait partie. On l'obtient en posant

$$\forall a \in \mathcal{A}, \zeta_{a,D} : z \mapsto \text{Trace}(a|D|^{-z}) = \sum_{\lambda} \text{Trace}(ap(\lambda, |D|))\lambda^{-z}.$$

Définition 4.9. *On suppose que pour tout $a \in \mathcal{A}$, la fonction spectrale $\zeta_{a,D}$ s'étend de façon méromorphe à \mathbb{C} tout entier. On note Σ_a l'ensemble des pôles de ce prolongement.*

L'ensemble $\mathcal{S}_d = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \Sigma_a$ s'appelle le spectre des dimensions du triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

L'ensemble \mathcal{S}_d est constitué de l'ensemble des pôles des prolongements méromorphes des fonctions $\zeta_{a,D}$ lorsque a décrit \mathcal{A} .

Définition 4.10. *La borne supérieure des multiplicités des pôles est appelée multiplicité du spectre des dimensions.*

5 Algèbres d'opérateurs différentiels généralisés associées à un triplet spectral

Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral avec D un opérateur non borné. On pose $\Delta = D^2$, c'est un opérateur positif, non borné et à résolvante compacte. On pose $\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}(\Delta^n)$.

Définition 5.1. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral avec D un opérateur non borné.*

On associe au triplet spectral \mathcal{T} , une algèbre notée $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ qui est définie de la manière suivante. L'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ est la plus petite algèbre d'opérateurs sur \mathcal{H}^∞ contenant \mathcal{A} et $[D, \mathcal{A}]$ et qui est fermée pour l'opération $T \mapsto [\Delta, T]$.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on définit de manière récursive :

1. $\mathcal{D}(\mathcal{T})^0 =$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{A} + [D, \mathcal{A}]$.
2. $\mathcal{D}(\mathcal{T})^1 = [\Delta, \mathcal{D}(\mathcal{T})^0] + \mathcal{D}(\mathcal{T})^0[\Delta, \mathcal{D}(\mathcal{T})^0]$.
3. $\mathcal{D}(\mathcal{T})^q = \sum_{j=1}^{q-1} \mathcal{D}(\mathcal{T})^j \mathcal{D}(\mathcal{T})^k + [\Delta, \mathcal{D}(\mathcal{T})^{k-1}] + \mathcal{D}(\mathcal{T})^0[\Delta, \mathcal{D}(\mathcal{T})^{k-1}]$

Par définition de l'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{T})$, on a :

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(\mathcal{T})^q. \quad (5.1)$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathcal{T})^q \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q+1}$. Il est aussi facile de vérifier que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on a l'inclusion $\mathcal{D}(\mathcal{T})^p \mathcal{D}(\mathcal{T})^q \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})^{p+q}$. On peut alors énoncer le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral avec D un opérateur non borné.*

La suite $(\mathcal{D}(\mathcal{T})^q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une filtration croissante de l'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{T})$.

Par construction, les opérateurs de A et $[D, A]$ sont d'ordre 0, et l'opération de commutation avec Δ n'augmente l'ordre que de 1.

Définition 5.2. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral. On dit que le triplet \mathcal{T} vérifie l'inégalité de Gårding généralisée si pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q_X}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta^{\frac{q_X}{2}} v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|Xv\|.$$

Dans son article [12], N.Higson caractérise la régularité d'un triplet spectral.

Théorème 5.2. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral tel que pour tout $a \in A$, $a.\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$. Ce triplet est régulier si et seulement s'il vérifie l'inégalité de Gårding généralisée.*

Les différents éléments ci-dessus permettent de voir $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ comme une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés, au sens de la définition (7.1), associée au triplet spectral \mathcal{T} . Plus précisément on a la proposition suivante.

Proposition 5.3. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral pour lequel D est un opérateur non borné. Soit $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ l'algèbre associée à \mathcal{T} définie dans la Définition 5.1. On suppose que \mathcal{T} est un triplet spectral régulier tel que pour tout $a \in A$, $a.\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$. On pose $\Delta = D^2$. On a alors $(\mathcal{D}(\mathcal{T}), \Delta, 2)$ qui est une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés et Δ est un laplacien généralisé d'ordre 2. C'est à dire :*

1. *L'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ est filtrée et*

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \mathcal{D}(\mathcal{T})^q \quad (\text{réunion croissante}).$$

2. *L'unité de l'algèbre si elle existe est d'ordre nul.*

3. *Pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q_X}$, on a $[\Delta, X] \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q_X+1}$*

4. *Pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q_X}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta^{\frac{q_X}{2}} v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|Xv\| \quad (\text{Inégalité de Gårding généralisée}) \quad (5.2)$$

Si $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral vérifiant les hypothèses de la proposition précédente, on dira que $(\mathcal{D}(\mathcal{T}), \Delta, 2)$ est l'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés associée au triplet spectral \mathcal{T} .

6 Prolongement méromorphe dans le cadre des triplets spectraux

Il est possible de reformuler le théorème de prolongement méromorphe (3.3) dans le contexte des triplets spectraux et avec le vocabulaire propre à ces objets.

Théorème 6.1. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral régulier tel que $a.\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Soit $(\mathcal{D}(\mathcal{T}), \Delta, 2)$ l'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés associée à \mathcal{T} . On suppose qu'il existe une suite de réduction de Higgs pour cette algèbre. On note b la fonction polynomiale qui lui est associée et $\text{Rac}(b)$ l'ensemble de ses racines dans \mathbb{C} . On suppose que \mathcal{T} est finiment sommable et l'on note d sa dimension métrique. Pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^{q_X}$.*

La fonction zeta spectrale :

$$\zeta_{X,D} : \begin{cases} \mathbb{C}_{>d+q_X} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \text{Trace}(X|D|^{-z}) \end{cases} \quad (6.1)$$

est holomorphe et se prolonge de façon méromorphe au plan \mathbb{C} tout entier. Le spectre des dimensions \mathcal{S}_d du triplet spectral \mathcal{T} vérifie l'inclusion

$$\mathcal{S}_d \subset \bigcup_{\alpha \in \text{Rac}(b)} \{-\alpha - l \mid l \in \mathbb{N}\}. \quad (6.2)$$

Soit $\alpha \in \text{Rac}(b)$, $m(\alpha)$ son ordre de multiplicité et $R_\alpha = \{-\alpha - l \mid l \in \mathbb{N}\}$. On a

$$m(\mathcal{S}_d) \leq \max_{\omega \in \mathcal{S}_d} \left(\sum_{\alpha \in \text{Rac}(b)} m(\alpha) \mathbf{1}_{R_\alpha}(\omega) \right), \quad (6.3)$$

où $m(\mathcal{S}_d)$ est la multiplicité du spectre des dimensions de \mathcal{T} .

Démonstration. On voit qu'il s'agit d'un corollaire direct du théorème (3.3) formulé dans l'algèbre d'opérateurs généralisés $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ pour laquelle $\Delta = D^2$ est un laplacien d'ordre $r = 2$, après avoir écrit que :

$$\forall z \in \mathbb{C}_{>d+q_X}, \quad \zeta_{X,D}(z) = \zeta_{X,\Delta}\left(-\frac{z}{2}\right). \quad (6.4)$$

□

Troisième partie

Applications aux Variétés et au Tore non commutatif

Dans cette partie on illustre sur deux exemples la méthode développée dans la partie précédente. On retrouve dans la section (7) les résultats de Minakshisundaram, Pleijel [21] et Seeley [27] portant sur les variétés. Dans la section (8) on répond positivement à une question de N.Higson, en montrant que la méthode permet d'obtenir le prolongement méromorphe des fonctions zétas spectrales associées au tore non commutatif.

7 Variétés riemanniennes compactes

Dans toute cette section, on désigne par \mathcal{M} une variété riemannienne orientée, de classe \mathcal{C}^∞ , de dimension n , compacte et sans bord.

7.1 Algèbre d'opérateurs différentiels

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M})$ l'espace de Hilbert des fonctions L^2 sur \mathcal{M} et $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires sur \mathcal{M} de domaine $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, de longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Localement, un opérateur T de $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ peut s'écrire comme une somme finie du type $T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$, où $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = (-i \frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (-i \frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

L'ordre habituel sur $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ consiste à définir $\text{ordre}(T) = \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$. Pour $q \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{D}(\mathcal{M})^q$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ d'ordre inférieur à q . La famille $(\mathcal{D}(\mathcal{M})^q)_{q \in \mathbb{N}}$ est alors une filtration croissante de l'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Soit Δ un opérateur différentiel linéaire, elliptique du second ordre, positif de domaine $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Cet opérateur est alors essentiellement autoadjoint, il existe une base hilbertienne $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} et une famille de réels positifs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ telle que pour tout k , $\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$. Chaque valeur propre a un ordre de multiplicité fini et on peut choisir chaque φ_k dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. En particulier, Δ a un noyau de dimension finie. Si nécessaire, on modifie légèrement Δ en lui ajoutant la projection orthogonale P sur son noyau, $\Delta_1 = \Delta + P$. En pratique cela revient à garder la même base hilbertienne de vecteurs propres et à changer les valeurs propres nulles en 1. L'opérateur Δ_1 a alors les mêmes propriétés de positivité, d'ellipticité et le même ordre que Δ , mais devient inversible. Si la variété est munie d'une carte globale, alors le laplacien géométrique classique $\Delta_1 = 1 - \sum_{k=1}^N (\frac{\partial}{\partial x_k})^2$ est un exemple de tel opérateur. On associe à Δ_1 les espaces de Sobolev (généralisés) au sens de la définition (1.5), il s'agit des espaces de Sobolev classiques de l'analyse et en particulier on a $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Proposition 7.1. *L'algèbre $(\mathcal{D}(\mathcal{M}), \Delta_1, 2)$ est une algèbre d'opérateurs différentiels (généralisés) et Δ_1 est un laplacien (généralisé) d'ordre 2. On vérifie*

en effet que :

1. L'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ est filtrée et

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \mathcal{D}(\mathcal{M})^q \quad (\text{réunion croissante})$$

2. L'unité de l'algèbre est d'ordre nul.

3. Pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{q_X}$, on a $[\Delta_1, X] \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ et $[\Delta_1, X] \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{q_X+1}$.

4. Pour tout $X \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{q_X}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \phi \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta_1^{\frac{q_X}{2}} \phi\| + \|\phi\| \geq \varepsilon \|X\phi\| \quad (\text{Inégalité de Gårding généralisée}). \quad (7.1)$$

Démonstration. Le premier et le troisième point résultent d'un calcul algébrique. Le deuxième point est clair. Pour le dernier point, d'après l'inégalité de Gårding, il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta_1^{\frac{q_X}{2}} \phi\| + \|\phi\| \geq k \|\phi\|_q. \quad (7.2)$$

L'opérateur X qui est d'ordre inférieur ou égal à q_X se prolonge en un opérateur continu de \mathcal{H}^q dans $\mathcal{H}^0 = L^2(\mathcal{M})$. Il existe donc une constante $k' > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{H}^\infty$, $\|X\phi\|_0 \leq k' \|\phi\|_{q_X}$, il suffit alors de poser $\varepsilon = \frac{k}{k'}$. \square

7.2 Suites de réduction

Pour montrer l'existence du prolongement méromorphe des fonctions zeta associées au laplacien Δ_1 , il suffit d'exhiber une suite de réduction. On va construire une telle suite.

On peut remarquer que dans le cas particulier où \mathcal{M} admet des coordonnées globales x_1, \dots, x_n , en posant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Q_i = x_i \quad (7.3)$$

on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $P_i, Q_j \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ les relations de Weyl $[P_i, Q_j] = \delta_i^j$ et par suite :

$$\sum_{i=1}^n [P_i, Q_i] = n \text{Id}_{O_p} \quad (7.4)$$

Dans le cas général, on utilise une partition de l'unité associée à un atlas fini sur la variété \mathcal{M} . Voici le détail de cette construction. On considère $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement fini de \mathcal{M} par des cartes locales et $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, telle que pour chaque λ , le support de ψ_λ soit contenu dans U_λ et $\theta_\lambda \psi_\lambda = \theta_\lambda$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on note $x_i = x_i^* \circ \varphi_\lambda$ les coordonnées locales et $\frac{\partial}{\partial x_i}$ les dérivées partielles locales, on pose $Q_{i,\lambda} = \psi_\lambda \cdot x_i$

et $P_{i,\lambda} = \theta_\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit $N = n \times \text{Card}(\Lambda)$, on dispose des familles d'opérateurs $(P_{i,\lambda})_{(1,\dots,n) \times \Lambda}$ et $(Q_{i,\lambda})_{(1,\dots,n) \times \Lambda}$. On a

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} [P_{i,\lambda}, Q_{i,\lambda}] = n \text{Id}_{Op} \quad (7.5)$$

Etant données deux familles $a = (a_{i,\lambda})_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} \in \mathbb{C}^N$ et $b = (b_{i,\lambda})_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} \in \mathbb{C}^N$, on définit comme en (2.5), l'opérateur

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{M}) & \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ T & \longmapsto \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} a_{i,\lambda} [-Q_{i,\lambda}, P_{i,\lambda} T] + b_{i,\lambda} [P_{i,\lambda}, Q_{i,\lambda} T] \end{cases}, \quad (7.6)$$

et aussi l'opérateur

$$G_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{M}) & \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ T & \longmapsto \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} a_{i,\lambda} P_{i,\lambda} [-Q_{i,\lambda}, T] + b_{i,\lambda} Q_{i,\lambda} [P_{i,\lambda}, T] \end{cases}. \quad (7.7)$$

Afin de construire une suite de réduction, nous allons choisir deux familles a et b particulières qui conviendront. Pour tout couple $(i, \lambda) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \Lambda$, on pose $a_{i,\lambda} = 1$ et $b_{i,\lambda} = 0$. On obtient alors les deux opérateurs

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{M}) & \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ T & \longmapsto \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} [-Q_{i,\lambda}, P_{i,\lambda} T] \end{cases}, \quad (7.8)$$

et

$$G_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{M}) & \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}) \\ T & \longmapsto \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} P_{i,\lambda} [-Q_{i,\lambda}, T] \end{cases}. \quad (7.9)$$

Compte tenu du fait que les crochets sont des dérivations et de la relation (7.2), on a une relation liant les opérateurs $H_{a,b}$ et $G_{a,b}$:

$$H_{a,b} = n \text{Id}_{Op} + G_{a,b} \quad (7.10)$$

En gardant les notations ci-dessus, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 7.2. *Pour tout entier naturel s , on pose*

$$T_s = H_{a,b} - (s + n) \text{Id}_{Op}. \quad (7.11)$$

La suite $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite de réduction de Higson.

Démonstration. On a $H_{a,b} : T \mapsto \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} [-Q_{i,\lambda}, P_{i,\lambda} T]$. D'après la relation

$$(7.2), \text{ on a pour tout } T \in \mathcal{D}(\mathcal{M}), H_{a,b}(T) = nT + \sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} P_{i,\lambda} [-Q_{i,\lambda}, T].$$

Comme Δ_1 est déjà dans l'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, il suffit de prouver que pour tout $T \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{qT}$, on a $\sum_{i \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in \Lambda} P_{i,\lambda} [-Q_{i,\lambda}, T] = qT + R$ avec $R \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{qT-1}$.

Soit $T \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ d'ordre $q \geq 0$.

Le cas particulier où $q = 0$ donne $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in \Lambda} P_{i, \lambda}[-Q_{i, \lambda}, T] = 0$, car T

commute avec chaque Q_i , et on peut décider que $\mathcal{D}_{-1}(\mathcal{M}) = \{0\}$ pour conserver la conclusion.

Supposons maintenant $q > 0$. Fixons $\lambda \in \Lambda$ et notons x^1, \dots, x^n les fonctions coordonnées locales associées.

Dans la carte locale considérée : $T = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha}$.

Remarquons que $\theta_{\lambda} \psi_{\lambda} = \theta_{\lambda}$ entraîne $\theta_{\lambda} \partial_{x^i}(\psi_{\lambda}) = 0$ et par suite

$$\theta_{\lambda} \partial_{x^i}([\psi_{\lambda}, T]) \equiv 0 \pmod{\text{Diff}^{q-2}}$$

($\equiv \dots \text{Diff}^{q-2}$ à remplacer par $= \dots$ si $q = 1$). Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{\lambda}[Q_{\lambda}^i, T] &= \sum_{i=1}^n \theta_{\lambda} \partial_{x^i}[\psi_{\lambda} x^i, T] \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_{\lambda} \partial_{x^i}(\psi_{\lambda} [x^i, T] + [\psi_{\lambda}, T] x^i) \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \theta_{\lambda} \partial_{x^i}([x^i, T]) + n \theta_{\lambda} [\psi_{\lambda}, T] \pmod{\text{Diff}^{q-2}} \\ &\equiv q \theta_{\lambda} T \pmod{\text{Diff}^{q-1}} \end{aligned}$$

et donc en sommant maintenant sur λ :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^n P_{\lambda}[Q_{\lambda}^i, T] &\equiv q \sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_{\lambda} T \pmod{\text{Diff}^{q-1}} \\ &\equiv q T \pmod{\text{Diff}^{q-1}} \end{aligned}$$

□

7.3 Théorème de prolongement méromorphe pour les variétés

Soit $X \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{q_X}$, comme conséquence du lemme de Rellich, la fonction spectrale $\zeta_{X, \Delta} : z \mapsto \text{Trace}(X \Delta_1^z)$ est définie si la partie réelle de z est suffisamment petite. Plus précisément, il est bien connu que $\zeta_{X, \Delta}$ est définie pour $\text{Re}(z) < -\frac{q_X + n}{2}$.

On peut appliquer le théorème de prolongement méromorphe (3.3).

Théorème 7.3. *Soit \mathcal{M} une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n . Soit Δ_1 un opérateur elliptique du deuxième ordre et inversible de domaine $\mathcal{C}^{\infty}(M)$. Soit $(\mathcal{D}(\mathcal{M}), \Delta_1, 2)$ l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires sur M . Soit $X \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{q_X}$. La fonction zeta spectrale :*

$$\zeta_{X, \Delta_1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_{< -\frac{n+q_X}{2}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \text{Trace}(X \Delta_1^z) \end{array} \right. \quad (7.12)$$

est holomorphe et se prolonge de façon méromorphe au plan \mathbb{C} tout entier. Les pôles de ce prolongement sont simples et :

$$\text{Poles}(\zeta_{X, \Delta_1}) \subset \left\{ \frac{-n - q_X}{2} + \frac{l}{2} \mid l \in \mathbb{N} \right\}. \quad (7.13)$$

Démonstration. Il existe d'après la Proposition (7.2) une suite de réduction de fonction polynomiale associée $b(z) = z + n$. L'existence du prolongement méromorphe, la localisation des pôles et leur ordre de multiplicité découle alors directement du théorème (3.3). \square

7.4 Exemple de la sphère S^1 , la série de Riemann

L'exemple développé permet de retrouver grâce à un laplacien la célèbre fonction zeta de Riemann. Il permet aussi d'illustrer que dans la méthode de prolongement méromorphe, certains pôles prévus par la théorie sont fictifs. On considère la sphère S^1 munie de sa structure de variété riemannienne usuelle. Pour l'opérateur différentiel $D = i\frac{\partial}{\partial\theta}$, la famille $(e_n : \theta \mapsto e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ est une base hilbertienne de vecteurs propres. On en déduit que $\text{Sp}(D) = \mathbb{Z}$. On pose $\Delta_1 = D^2$ on a $\text{Sp}(\Delta_1) = \{k^2, k \in \mathbb{Z}\}$. Chaque carré d'entier naturel non nul est alors valeur propre d'ordre 2 tandis que zéro est valeur propre d'ordre 1.

On ajoute à l'opérateur Δ_1 la projection sur l'espace des fonctions constantes, on obtient :

$$\text{Sp}(\Delta) = (1, 1, 1, 4, 4, 9, 9, 16, 16, \dots).$$

Par calcul spectral on a pour $\text{Re}(z) > \frac{1}{2}$:

$$\text{Trace}(\Delta^{-z}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2z}} = 1 + 2\zeta(2z),$$

où $z \mapsto \zeta(z)$ est la fonction ζ de Riemann, identité qui s'écrit aussi :

$$\zeta(z) = \frac{\text{Trace}(\Delta^{-\frac{z}{2}}) - 1}{2}.$$

Grâce au théorème (7.3) on obtient que la fonction zéta de Riemann est prolongeable de façon méromorphe à \mathbb{C} tout entier avec des pôles simples situés dans la suite $1, 0, -1, -2, \dots$. Il est bien connu que le seul pôle de la fonction zéta de Riemann est 1, on note ainsi le nombre important de pôles fictifs. On complète cet exemple en montrant que l'on peut retrouver de façon "spectrale" le résultat classique d'analyse suivant :

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s - 1)\zeta(s) = 1.$$

On a $\text{Sp}(\Delta^{-\frac{1}{2}}) = \{1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\}$. On pose $\sigma_n(\Delta^{-\frac{1}{2}}) = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_n(\Delta^{-\frac{1}{2}})}{\log(n)} = 2$. Comme $\Delta^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{C}^\infty(S^1))$, un théorème Taubérien de Hardy-Littlewood affirme qu'alors

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s - 1)\text{Trace}(\Delta^{-\frac{s}{2}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_n(\Delta^{-\frac{1}{2}})}{\log(n)},$$

ce qui conduit au résultat.

8 Le tore non commutatif (T.N.C)

Nous allons dans cette section montrer un théorème de prolongement méromorphe pour les fonctions zeta associées au triplet spectral du tore non commutatif. On commence d'abord par redéfinir le tore non commutatif, et on rappelle la construction du triplet spectral qui lui est usuellement associé.

8.1 Définition et calculs

Définition 8.1. Soit un nombre réel θ , on pose $\lambda = e^{2i\pi\theta}$. On note A_θ la C^* -algèbre engendrée par deux éléments u et v soumis aux relations :

$$\begin{cases} uu^* = u^*u = 1 \\ vv^* = v^*v = 1 \\ vu = \lambda uv \end{cases}$$

Si l'on note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, il est possible de donner une représentation concrète de A_θ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, l'opérateur U étant la multiplication $(U\psi)(z) = z\psi(z)$ et V la rotation $(V\psi)(z) = \psi(\lambda z)$.

On note $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ l'ensemble des suites doublement indexées $\underline{a} = (a_{rs})_{(r,s) \in \mathbb{Z}^2}$ d'éléments de \mathbb{C} à décroissance rapide, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(a)^2 = \sup_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^k |a_{rs}|^2 < \infty.$$

Définition 8.2. L'algèbre non commutative du tore, notée \mathcal{A}_θ est définie par :

$$\mathcal{A}_\theta = \left\{ a = \sum_{r,s} a_{rs} u^r v^s, \quad \underline{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \right\}.$$

Lemme 8.1. On a

1. $\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2, \quad [u, v^s] = (1 - \lambda^s)uv^s$ et $[u^r, v] = (1 - \lambda^r)u^r v$.
2. $\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad v^s = \frac{1}{1-\lambda^s} [u, u^*v^s]$.
3. $\forall s \in \mathbb{Z}_-, \quad v^s = \frac{1}{1-\lambda^s} [v^s u, u^*]$.

Démonstration. 1. Par récurrence à partir des formules $[u, v^{s+1}] = v[u, v^s] + [u, v]v^s$ et $[u^{r+1}, v] = u^r[u, v] + [u^r, v]u$.

2. Soit $s \in \mathbb{N}^*$, $[u, u^*v^s] = [u, u^*]v^s + u^*[u, v^s] = (1 - \lambda^s)v^s$ d'après ce qui précède.

3. Soit $s \in \mathbb{Z}_-$,

$$v^s = (v^{-s})^* = \left(\frac{1}{1-\lambda^{-s}} [u, u^*v^{-s}] \right)^* = \frac{1}{1-\lambda^{-s}} [(v^{-s})^*u, u^*] = \frac{1}{1-\lambda^s} [v^s u, u^*].$$

□

Lemme 8.2. L'application $\tau : \mathcal{A}_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tau(a) = a_{00}$ est une trace fidèle et normalisée.

Démonstration. La linéarité de τ est claire.

Soit $a = \sum a_{rs}u^r v^s \in \mathcal{A}_\theta$ et $b = \sum b_{rs}u^r v^s \in \mathcal{A}_\theta$, on peut expliciter le produit

$ab = \sum_{r,s} \sum_{m,n} a_{r-n,m} \lambda^{mn} b_{n,s-m} u^r v^s$. Alors $\tau(ab) = \sum_{m,n} a_{-n,m} \lambda^{mn} b_{n,-m}$ et en changeant les indices en leur opposé on trouve $\tau(ab) = \tau(ba)$, τ est donc une trace.

Comme $a^* = \sum \lambda^{rs} \bar{a}_{-r,-s} u^r v^s$, on a si $a \neq 0$, $\tau(a^*a) = \sum_{r,s} |a_{r,s}|^2 > 0$, ce qui montre que c'est une trace fidèle. \square

Remarque 1. On définit ainsi un produit scalaire $(a|b) = \tau(a^*b)$ et une norme sur \mathcal{A}_θ . On note \mathcal{H} l'espace de Hilbert obtenu par complétion de \mathcal{A}_θ pour ce produit scalaire. On a une représentation $\rho : \mathcal{A}_\theta \rightarrow B(\mathcal{H})$, par multiplication $\rho(a)b = ab$. On reconnaît dans ce qui précède la construction GNS pour l'algèbre involutive \mathcal{A}_θ .

Pour la suite, on a besoin de décomposer notre algèbre \mathcal{A}_θ en somme de deux sous-espaces particuliers. Pour pouvoir le faire, on va faire une hypothèse supplémentaire sur le paramètre θ .

Définition 8.3. Soit θ un nombre réel. On dira que θ est diophantien, si c'est un nombre irrationnel et s'il existe un réel strictement positif C et un entier naturel k tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{1}{|e^{in\theta} - 1|} \leq Cn^k.$$

Cette hypothèse est nécessaire pour la convergence de certaines séries, elle n'est pas trop restrictive. Il a été démontré que le complémentaire de l'ensemble des nombres diophantiens dans $[0, 1]$ est de mesure nulle.

Lemme 8.3. Si θ est diophantien, on peut écrire

$$\mathcal{A}_\theta = \mathbb{C} + [\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta].$$

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{A}_\theta$, on peut écrire

$$\begin{aligned} a &= a_{00} + \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} a_{0s} v^s + \sum_{r \neq 0, s} a_{rs} u^r v^s \\ &= a_{00} + \sum_{s \in \mathbb{N}^*} \frac{a_{0s}}{1 - \lambda^s} [u, u^* v^s] + \sum_{s \in \mathbb{Z}_-^*} \frac{a_{0s}}{1 - \lambda^s} [v^s u, u^*] + \sum_{r \neq 0, s} \frac{a_{rs}}{1 - \lambda^r} [u^r v^{s-1}, v]. \end{aligned}$$

Le réel θ étant diophantien les trois sommes ci-dessus sont dans \mathcal{A}_θ . Les opérateurs linéaires $[u, \cdot]$, $[\cdot, u^*]$, $[\cdot, v]$ étant bornés sur \mathcal{A}_θ (on peut les voir comme la différence de deux isométries), on obtient

$$a = a_{00} + \left[\sum_{s \in \mathbb{N}^*} \frac{a_{0s}}{1 - \lambda^s} u, u^* v^s \right] + \left[\sum_{s \in \mathbb{Z}_-^*} \frac{a_{0s}}{1 - \lambda^s} v^s u, u^* \right] + \left[\sum_{r \neq 0, s} \frac{a_{rs}}{1 - \lambda^r} u^r v^{s-1}, v \right].$$

\square

8.2 Dérivations

De manière générale, on rappelle qu'une dérivation sur une \mathbb{C} -algèbre \mathcal{A} est un endomorphisme linéaire δ qui satisfait la formule de Leibniz :

$$\forall(a, b) \in \mathcal{A}^2, \quad \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b). \quad (8.1)$$

On va définir deux dérivations canoniques $\delta_1, \delta_2 : \mathcal{A}_\theta \rightarrow \mathcal{A}_\theta$. On définit d'abord deux dérivations $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ sur l'algèbre libre engendrée par u et v en posant $\widehat{\delta}_1(u) = iu$, $\widehat{\delta}_1(v) = 0$, $\widehat{\delta}_2(u) = 0$, $\widehat{\delta}_2(v) = iv$ et en étendant cette définition par linéarité et par la formule de Leibniz à l'algèbre tout entière. On vérifie immédiatement que l'idéal J engendré par $vu - \lambda uv$ est stable par $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$, ce qui permet de définir δ_1 et δ_2 sur \mathcal{A}_θ par passage au quotient, puis par continuité.

On a donc,

$$\delta_1(u) = iu, \quad \delta_1(v) = 0, \quad \delta_2(u) = 0, \quad \delta_2(v) = iv.$$

Des calculs simples mènent à

$$\delta_1(a_{rs}u^r v^s) = ira_{rs}u^r v^s,$$

$$\delta_2(a_{rs}u^r v^s) = isa_{rs}u^r v^s.$$

On en déduit que δ_1 et δ_2 commutent.

D'autre part pour $j = 1, 2$ on a :

$$\delta_j(a^*) = (\delta_j(a))^*,$$

$$\delta_1(u^*) = -iu^*,$$

$$\delta_2(v^*) = -iv^*.$$

On peut ajouter que

$$\tau(\delta_1 a) = \tau(\delta_2 a) = 0,$$

$$(\delta_j a|b) = -(a|\delta_j b).$$

8.3 Triplet spectral associé au T.N.C

On va construire un triplet spectral relatif au tore non commutatif.

Dans la suite τ désigne un nombre complexe non réel. On peut si l'on veut considérer que $\tau = i$, les calculs en sont facilités sans réelle perte de généralité.

On note $\partial = \delta_1 + \tau\delta_2$, les calculs précédents montrent qu'alors $\partial^* = -\delta_1 - \bar{\tau}\delta_2$. Pour construire un opérateur autoadjoint, on se place dans l'espace hilbertien $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. L'opérateur $D = -i \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \bar{\tau}\delta_2 \\ \delta_1 + \tau\delta_2 & 0 \end{pmatrix}$ est non borné sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, autoadjoint et de domaine $\mathcal{A}_\theta \oplus \mathcal{A}_\theta$.

On considère la représentation $\rho : \mathcal{A}_\theta \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}), a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Si $(x, y) \in \text{dom}(D)$, on note simplement $a.(x, y)$ pour $\rho(a)(x, y)$. On vérifie que $a.(\mathcal{A}_\theta \oplus \mathcal{A}_\theta) \subset \text{dom}(D)$ et que $[D, a]$ est borné sur $\text{dom}(D)$, ceci pour tout $a \in \mathcal{A}_\theta$.

On a $D^2 = \begin{pmatrix} |\delta_1 + \tau\delta_2|^2 & 0 \\ 0 & |\delta_1 + \tau\delta_2|^2 \end{pmatrix}$, où $|\delta_1 + \tau\delta_2|^2 = \delta_1^2 + 2\text{Re}(\tau)\delta_1\delta_2 + |\tau|^2\delta_2^2$. Pour tout $r, s \in \mathbb{Z}$, $|\delta_1 + \tau\delta_2|^2(u^r v^s) = |r + \tau s|^2 u^r v^s$, la famille $(u^r v^s)_{r, s \in \mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de \mathcal{H} , il s'en suit que

$$\text{Spectre}(|\delta_1 + \tau\delta_2|^2) = \{|r + \tau s|^2, r, s \in \mathbb{Z}\}.$$

On a $\text{Spectre}(D^2 + 1)^{-1} = \left\{ \frac{1}{1+|r+\tau s|^2}, r, s \in \mathbb{Z} \right\}$, ainsi $(D^2 + 1)^{-1}$ est un opérateur compact sur \mathcal{H} et donc aussi $(D \pm i)^{-1}$.

Définition 8.4. *Le triplet $\mathcal{T} = (\mathcal{A}_\theta, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, D)$ est le triplet spectral du tore non commutatif.*

On note $\Delta_1 = D^2$ et $\Delta = D^2 + K$, où K est la projection orthogonale sur $\text{vect}(1)$.

On a une formule explicite de la fonction zeta associée à Δ . Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\text{Trace}(\Delta_1^{-z}) = 1 + \sum'_{r,s} \frac{1}{|r + \tau s|^{2z}},$$

où $\sum'_{r,s}$ indique que l'on somme sur les couples différents de $(0, 0)$.

La série d'Eisenstein $G_{2k}(\tau) = \sum'_{r,s} \frac{1}{(r+\tau s)^{2k}}$ converge absolument si $k > 1$ et sous certaines conditions si $k = 1$. On prouve que la série $\sum'_{r,s} \frac{1}{|r+\tau s|^{2k}}$ diverge de façon logarithmique si $k = 1$, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 8.4. *Le triplet $\mathcal{T} = (\mathcal{A}_\theta, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, D)$ du tore non commutatif est de dimension métrique 2.*

8.4 Algèbre d'opérateurs différentiels généralisés du T.N.C

On considère l'algèbre associative $\mathcal{D} = \mathcal{A}_\theta[\delta_1, \delta_2]$, filtrée par le degré.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}^q = \left\{ \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2, k+l \leq q} a_{k,l} \delta_1^k \delta_2^l \mid a_{(k,l)} \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (8.2)$$

Lemme 8.5. *On pose*

$$\mathcal{P} = \mathbb{C}[\delta_1, \delta_2] \quad , \quad \mathcal{C} = [\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta][\delta_1, \delta_2].$$

Si θ est diophantien on a :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} + \mathcal{C}.$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}^q = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}^q$ respectivement $\mathcal{C}^q = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}^q$.

Lemme 8.6. *Pour tout $X \in \mathcal{P}^{q_X}$, tout $Y \in \mathcal{D}^{q_Y}$ on a :*

$$[X, Y] \in \mathcal{D}^{q_X + q_Y - 1}. \quad (8.3)$$

Démonstration. Comme $[\cdot, Y]$ est une dérivation, il suffit de le vérifier pour $X = \delta_1$ et $X = \delta_2$. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour les monômes de la forme $Y = a\delta_1^k \delta_2^{q-k}$, où $a \in \mathcal{A}_\theta$, $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$, on a alors $q_X + q_Y = 1 + q$.

$$\begin{aligned} [\delta_1, a\delta_1^k \delta_2^{q-k}] &= \delta_1(a\delta_1^k \delta_2^{q-k}) - a\delta_1^{k+1} \delta_2^{q-k} \\ &= \delta_1(a)\delta_1^k \delta_2^{q-k} + a\delta_1^{k+1} \delta_2^{q-k} - a\delta_1^{k+1} \delta_2^{q-k} \\ &= \delta_1(a)\delta_1^k \delta_2^{q-k} \in \mathcal{D}^{q_X + q_Y - 1} \end{aligned}$$

De manière similaire on a :

$$\begin{aligned}
[\delta_2, a\delta_1^k\delta_2^{q-k}] &= \delta_2(a\delta_1^k\delta_2^{q-k}) - a\delta_1^k\delta_2^{q-k+1} \\
&= \delta_2(a)\delta_1^k\delta_2^{q-k} + a\delta_1^k\delta_2^{q-k+1} - a\delta_1^{k+1}\delta_2^{q-k} \\
&= \delta_2(a)\delta_1^k\delta_2^{q-k} \in \mathcal{D}^{q_X+q_Y-1}
\end{aligned}$$

□

On établit maintenant que Δ est un Laplacien généralisé au sens de la définition (7.1).

Lemme 8.7. *On a*

1. Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, $[\Delta, X] \in \mathcal{D}^{q_X+1}$.
2. Pour tout $X \in \mathcal{D}^{q_X}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall a \in \mathcal{A}_\theta, \quad \|\Delta^{\frac{q_X}{2}} a\| + \|a\| \geq \varepsilon \|Xa\|$$

Démonstration. 1. C'est une conséquence du Lemme (8.6).

2. On effectue la preuve dans le cas particulier $\tau = i$. Grâce à l'inégalité triangulaire, il suffit de l'établir pour $X = b\delta_1^k\delta_2^{q-k}$ avec $b \in \mathcal{A}_\theta, q \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$. Comme la norme est sous multiplicative on peut se limiter à $X = \delta_1^k\delta_2^{q-k}$. Soit $a = \sum a_{rs}u^r v^s \in \mathcal{A}_\theta$, on a $Xa = (i)^q \sum a_{rs}r^k s^{q-k} u^r v^s$ et par suite $\|Xa\|^2 = \sum \|a_{rs}\|^2 r^{2k} s^{2(q-k)}$. D'autre part $\|\Delta^{\frac{q}{2}} a\|^2 = \sum \|a_{rs}\|^2 (r^2 + s^2)^q$. Comme $0 \leq k \leq q$, on a $(r^2 + s^2)^q \geq r^{2k} s^{2(q-k)}$. On en déduit $\|\Delta^{\frac{q}{2}} a\| \geq \|Xa\|$.

□

De manière générale, on vérifie que si $X = \sum_{k=0}^q (\sum_{j=0}^k b_{k,j} \delta_1^j \delta_2^{k-j})$ est un opérateur non nul, en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{\sum_{k=0}^q (\sum_{j=0}^k \|b_{k,j}\|)} \text{ on a l'inégalité } \|\Delta^{\frac{q}{2}} a\| + \|a\| \geq \varepsilon \|Xa\|.$$

8.5 Suite de réduction

On définit deux opérateurs d'ordre 1 :

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\delta_1^2, u] & 0 \\ 0 & [\delta_1^2, u] \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\delta_2^2, v] & 0 \\ 0 & [\delta_2^2, v] \end{pmatrix}.$$

On définit deux opérateurs d'ordre 0 :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} v^* & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix}.$$

Lemme 8.8. *Pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, on a $[P_i, Q_j] = \delta_i^j Id$.*

Démonstration.

Deux petits calculs mènent à $[\delta_1^2, u] = -u + 2iu\delta_1$ et $[\delta_2^2, v] = -v + 2iv\delta_2$.

$$\begin{aligned} [[\delta_1^2, u], u^*] &= (-u + 2iu\delta_1)u^* - u^*(-u + 2iu\delta_1) \\ &= -Id + 2iu(-iu^* + u^*\delta_1) + Id - 2i\delta_1 \\ &= 2Id. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[\delta_1^2, v], v^*] &= (-v + 2iv\delta_1)v^* - v^*(-v + 2iv\delta_1) \\ &= -Id + 2iv(-iv^* + v^*\delta_1) + Id - 2i\delta_1 \\ &= 2Id. \end{aligned}$$

On en déduit $[P_1, Q_1] = [P_2, Q_2] = Id$. Comme v^* commute avec δ_1 et u on a $[P_1, Q_2] = 0$, et de même $[P_2, Q_1] = 0$. \square

Avant de donner une suite de réduction on établit un lemme.

Lemme 8.9.

1. Pour tout opérateur $X \in \mathcal{P}^{q \times}$, on a :

$$[X, Q_i] \in \mathcal{P}^{q \times -1} \quad \text{et} \quad [X, P_i] \in \mathcal{P}^{q \times}.$$

2. Pour tout opérateur $X \in \mathcal{P}^{q \times}$, on a :

$$\sum_{i=1}^2 [X, Q_i]P_i = q_X X + R, \quad \text{où} \quad R \in \mathcal{P}^{q \times -1}.$$

Démonstration. 1. C'est une conséquence du Lemme 8.6.

2. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $X = \delta_1^k \delta_2^{q-k}$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$.

$$\begin{aligned} [\delta_1^k \delta_2^{q-k}, u^*][\delta_1^2, u] &= (\delta_1^k \delta_2^{q-k} u^* - u^* \delta_1^k \delta_2^{q-k})(-u + 2iu\delta_1) \\ &= -\delta_1^k \delta_2^{q-k} + (-i + \delta_1)^k \delta_2^{q-k} + 2i(\delta_1^{k+1} \delta_2^{q-k} - (-i + \delta_1)^k \delta_1 \delta_2^{q-k}) \\ &= 2k\delta_1^k \delta_2^{q-k} + R_1 \quad \text{où} \quad R_1 \in \mathcal{P}^{q-1}. \end{aligned}$$

Un calcul analogue mène à

$$[\delta_1^k \delta_2^{q-k}, v^*][\delta_2^2, v] = 2(q-k)\delta_1^k \delta_2^{q-k} + R_2 \quad \text{où} \quad R_2 \in \mathcal{P}^{q-1}.$$

Par suite

$$\sum_{i=1}^2 [X, Q_i]P_i = qX + R, \quad \text{où} \quad R \in \mathcal{P}^{q-1}.$$

\square

La suite de réduction de Higson proposée ci-après n'est effective que pour les opérateurs de \mathcal{P} , c'est à dire pour une sous-algèbre filtrée stricte de \mathcal{D} . On verra dans la section suivante que ceci n'est pas un écueil pour conclure sur le prolongement méromorphe.

A tout couple (a, b) tel que $a \in \mathbb{C}^2$ et $b \in \mathbb{C}^2$, on associe les deux opérateurs :

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ T & \longmapsto \sum_{i=1}^2 a_i[-Q_i, P_i T] + b_i[P_i, Q_i T] \end{cases}, \quad (8.4)$$

$$G_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ T & \longmapsto \sum_{i=1}^2 a_i P_i[-Q_i, T] + b_i Q_i[P_i, T] \end{cases}. \quad (8.5)$$

Pour construire la suite de réduction, on pose $a = (1, 1)$ et $b = (0, 0)$, ce qui donne :

$$H_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ T & \longmapsto [P_1 T, Q_1] + [P_2 T, Q_2] \end{cases} \quad (8.6)$$

$$G_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ T & \longmapsto P_1[T, Q_1] + P_2[T, Q_2] \end{cases}. \quad (8.7)$$

Proposition 8.10. *Soit $a = (1, 1)$, $b = (0, 0)$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on pose*

$$T_s = H_{a,b} - (s + 2)Id. \quad (8.8)$$

La suite (T_s) est une suite de réduction de Higson pour les opérateurs de \mathcal{P} .

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{P}^{q_X}$. Le cas particulier où $q_X = 0$ donne $T_0(X) = 0$ car T commute avec chaque Q_i , et on peut décider que $\mathcal{P}_{-1} = \{0\}$ pour conserver la conclusion. Supposons que $q_X \geq 1$. Le deuxième point du Lemme 8.9 donne $G_{a,b}(X) = q_X X + R$ où $R \in \mathcal{P}^{q_X-1}$, et d'après le Lemme 8.8 $H_{a,b}(X) = (q_X + 2)X + R$. \square

8.6 Prolongement méromorphe pour le T.N.C

Comme on possède une suite de réduction partielle, on précise ce qu'il advient pour un opérateur du type $X\Delta^{-z-l}$ où $X \in \mathcal{C}$.

Lemme 8.11. *Soit $(q, l) \in \mathbb{Z}^2$. Soit un opérateur de $T \in \mathcal{C}^{q+2l}$, il peut s'écrire comme une somme finie $T = \sum_j [a_j, b_j]X_j$ où $X_j \in \mathcal{P}^{q+2l}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$*

On a

$$T\Delta^{-z-l} = \sum_j [a_j X_j \Delta^{-z-l}, b_j] + R_z,$$

où $(R_z)_{z \in \mathbb{C}}$ est une famille holomorphe de type $q - 1$.

Démonstration. Par linéarité, il suffit de le prouver pour $T = [a, b]X$, où $a, b \in \mathcal{A}_\theta$ et $X \in \mathcal{P}^{q+2l}$. Les familles $(aX[\Delta^{-z-l}, b])_{z \in \mathbb{C}}$ et $(a[X, b]\Delta^{-z-l})_{z \in \mathbb{C}}$ sont deux familles holomorphes de type $q - 1$. On a

$$\begin{aligned} [a, b]X\Delta^{-z-l} &= [aX\Delta^{-z-l}, b] - a[X\Delta^{-z-l}, b] \\ &= [aX\Delta^{-z-l}, b] - aX[\Delta^{-z-l}, b] - a[X, b]\Delta^{-z-l} \\ &= [aX\Delta^{-z-l}, b] + R_z \end{aligned}$$

avec $(R_z)_{z \in \mathbb{C}}$ famille holomorphe de type $q - 1$ \square

Voici maintenant le théorème de prolongement méromorphe relatif au tore.

Théorème 8.12. *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{A}_\theta, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, D)$ un tore non commutatif associé à un réel diophantien θ . Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour tout opérateur $X \in \mathcal{D}^q$, l'application*

$$\zeta_{X,\Delta} : \begin{cases} \mathbb{C}_{<-\frac{2+q}{2}} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \text{Trace}(X\Delta^z) \end{cases} \quad (8.9)$$

est holomorphe et se prolonge de façon méromorphe au plan \mathbb{C} tout entier. Les pôles de ce prolongement sont simples et

$$\text{Poles}(\zeta_{X,\Delta}) \subset \left\{ \frac{-2-q}{2} + \frac{l}{2} \mid l \in \mathbb{N} \right\}. \quad (8.10)$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{D}^q$. La dimension métrique de \mathcal{T} est égale à 2, $\zeta_{X,\Delta}$ est donc holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{C}_{<-\frac{2+q}{2}}$. Posons $X = U + V$ avec $U \in \mathcal{P}^q$ et $V \in \mathcal{C}^q$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $H_{2z+q}(U\Delta^z) = (2z+q)U\Delta^z + \text{Hol}(q-1)$ grâce à la suite de réduction, et donc $H_{2z+q}(U\Delta^z) + (2z+q)V\Delta^z = (2z+q)X\Delta^z + \text{Hol}(q-1)$. D'après le Lemme 8.11, modulo une famille holomorphe de type $q-1$, on a $(2z+q)V\Delta^z$ qui est une combinaison linéaire de commutateurs dont les traces sont nulles (Lemme 2.11). La suite de la preuve est identique à celle du Théorème 3.3. \square

Quatrième partie

Triplets spectraux associés à des groupes de Lie nilpotents

L'objectif dans cette partie est de construire des triplets spectraux associés à des algèbres de Lie nilpotentes. Dans la suite, on désigne par G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe de dimension n . On note \mathfrak{g} son algèbre de Lie associée et \mathfrak{g}^* l'espace dual de \mathfrak{g} . On rappelle qu'on dispose d'une fonction exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ qui est un difféomorphisme, on note $\log : G \rightarrow \mathfrak{g}$ sa bijection réciproque.

9 Représentations des groupes de Lie nilpotents

Dans les trois sous-sections suivantes, on rappelle les notions de base sur les représentations des algèbres de Lie nilpotentes. Notamment, sur la méthode des orbites de Kirillov.

9.1 Représentations adjointes et coadjointes d'un groupe de Lie

Soit $x \in G$. L'application $\text{int}(x) : y \mapsto xyx^{-1}$ désigne l'automorphisme intérieur de G associé à x . Sa différentielle en l'unité de G , notée $\text{Ad}(x)$, est un automorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} ,

$$\forall x \in G, \forall X \in \mathfrak{g} \quad \text{Ad}(x)X = \left. \frac{d}{dt} (x \exp(tX) x^{-1}) \right|_{t=0}.$$

L'application $\text{Ad} : x \mapsto \text{Ad}(x)$ est un morphisme de groupe de Lie de G dans le groupe linéaire $GL(\mathfrak{g})$, qu'on appelle la représentation adjointe du groupe G . On a la formule :

$$\forall x \in G, \forall Y \in \mathfrak{g}, \exp(\text{Ad}(x)Y) = x \exp(Y) x^{-1},$$

illustrée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{int}(x)} & G \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(x)} & \mathfrak{g} \end{array}$$

On note $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la différentielle en l'unité de G du morphisme Ad . Le morphisme d'algèbres de Lie ad s'appelle la représentation adjointe de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On a la formule :

$$\forall (X, Y) \in \mathfrak{g}^2, \quad \text{ad}(X)(Y) = [X, Y],$$

et aussi l'identité

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(\exp(X)) = \exp(\text{ad}(X)),$$

traduite par ce diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

où $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre de Lie du groupe de Lie $GL(\mathfrak{g})$.

On obtient donc

$$Ad(\exp(X)) = \exp(ad(x)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (ad(X))^n.$$

Pour chaque x appartenant à G , on désigne par $Ad^*(x) : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$ l'application linéaire transposée de $Ad(x^{-1}) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$. Par définition on a

$$\forall f \in \mathfrak{g}^*, \forall x \in G, \forall Y \in \mathfrak{g}, \quad \langle Ad^*(x)f, Y \rangle = \langle f, Ad(x^{-1})Y \rangle$$

L'application $Ad^* : G \mapsto GL(\mathfrak{g}^*)$ est un morphisme du groupe de Lie G dans le groupe de Lie $GL(\mathfrak{g}^*)$, on l'appelle la représentation coadjointe de G . Il s'agit de la représentation contragrédiente de la représentation adjointe de G .

Soit ad^* la différentielle du morphisme Ad^* . On a par définition

$$\forall f \in \mathfrak{g}^*, \forall (X, Y) \in \mathfrak{g}^2, \quad \langle ad^*(X)f, Y \rangle = \frac{d}{dt} \langle Ad^*(e^{tX})f, Y \rangle_{|t=0}.$$

Le morphisme d'algèbres de Lie $ad^* : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ s'appelle la représentation coadjointe de \mathfrak{g} . On a l'expression plus explicite de ad^* suivante :

$$\forall f \in \mathfrak{g}^*, \forall (X, Y) \in \mathfrak{g}^2, \quad \langle ad^*(X)f, Y \rangle = \langle f, [Y, X] \rangle = \langle f, -ad(X)(Y) \rangle.$$

9.2 Méthode des orbites de Kirillov

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. L'image de l'application $\Phi_f : \begin{cases} G & \longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ x & \longmapsto Ad^*(x)f \end{cases}$, notée Ω_f , s'appelle l'orbite de f sous l'action coadjointe de G . On associe de manière canonique à f une forme bilinéaire notée B_f , définie par

$$B_f : \begin{cases} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto \langle f, [X, Y] \rangle \end{cases}.$$

Cette forme bilinéaire est alternée et elle est toujours dégénérée dans le cas nilpotent. On considère \mathfrak{h} une polarisation en f , c'est à dire une sous-algèbre de \mathfrak{g} qui est un espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire alternée B_f . L'existence d'une polarisation en f est assurée mais pas l'unicité, la notion de polarisation canonique associée à f n'existe pas. On peut associer à cette polarisation \mathfrak{h} , le sous-groupe H fermé connexe de G défini par $H = \exp(\mathfrak{h})$. On définit sur H , le caractère χ_f par la formule :

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \quad \chi_f(\exp(X)) = e^{-i\langle f, X \rangle}.$$

On note $\pi(f, \mathfrak{h})$ la représentation induite de G par le caractère χ_f de H :

$$\pi(f, \mathfrak{h}) = \text{Ind}_{H \uparrow G} \chi_f,$$

c'est une représentation unitaire irréductible du groupe G .

On rappelle la construction de cette représentation induite. On pose $\mathcal{K}(G, \chi_f)$ l'ensemble des fonctions $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$, continues, à support compact modulo H , qui vérifient l'identité suivante :

$$\forall x \in G, \forall h \in H, \quad \Phi(xh) = \chi_f(h)^{-1} \Phi(x). \quad (9.1)$$

Cette condition permet de munir naturellement $\mathcal{K}(G, \chi_f)$ d'une structure d'espace préhilbertien réel. On complète $\mathcal{K}(G, \chi_f)$ en un espace de Hilbert \mathcal{H}_π . On définit ensuite $\pi(f, \mathfrak{h})$ par :

$$\forall x \in G, \forall \Phi \in \mathcal{K}(G, \chi_f), \forall y \in G, \quad \pi(f, \mathfrak{h})(x)\Phi(y) = \Phi(x^{-1}y). \quad (9.2)$$

On montre que si \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 sont deux polarisations en f , alors $\pi(f, \mathfrak{h}_1)$ et $\pi(f, \mathfrak{h}_2)$ sont des représentations unitairement équivalentes, voir par exemple [15, Lemme 5.1] ou [2, section 5.6.h]. On notera dans la suite simplement $\pi(f)$ un représentant de cette classe d'équivalence.

On note \widehat{G} l'ensemble (quotient modulo la relation d'équivalence des représentations unitaires) des représentations unitaires irréductibles de G . La méthode des orbites de Kirillov, voir l'article initial [15] établit que l'application $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}^* \longrightarrow \widehat{G} \\ f \longmapsto \pi(f) \end{array} \right.$ est une surjection, et que de plus, pour un couple $(f_1, f_2) \in (\mathfrak{g}^*)^2$, on a $\pi(f_1) = \pi(f_2)$ si et seulement si f_1 et f_2 sont dans la même orbite pour l'action coadjointe de G . On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des orbites de la représentation coadjointe de G et \widehat{G} , illustrée par le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\pi} & \widehat{G} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ \mathfrak{g}^*/G & & \end{array}$$

9.3 Représentation dérivée de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Dans toute la suite π désigne une représentation unitaire irréductible du groupe G . Un vecteur $v \in \mathcal{H}_\pi$ est dit différentiable pour la représentation π si l'application vectorielle $f_v : \left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathcal{H}_\pi \\ x \longmapsto \pi(x).v \end{array} \right.$ est différentiable, c'est à dire que le coefficient $C_\pi^{v,w}$ défini par $C_\pi^{v,w}(x) := \langle \pi(x)v, w \rangle$ est différentiable pour tout $w \in \mathcal{H}_\pi$. De la même manière pour $k \in \mathbb{N}$, on dira que le vecteur $v \in \mathcal{H}_\pi$ est de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞) si l'application f_v est de classe \mathcal{C}^k (resp. \mathcal{C}^∞). On montre que l'espace \mathcal{H}_π^∞ des vecteurs \mathcal{C}^∞ pour la représentation π est dense dans \mathcal{H}_π . Pour une synthèse assez complète sur la notion de vecteurs \mathcal{C}^∞ d'une représentation d'un groupe de Lie G , on peut regarder [5, Appendice A].

L'application $\pi : G \rightarrow L(\mathcal{H}_\pi^\infty)$ est fortement différentiable. Sa différentielle $d\pi$ s'appelle représentation dérivée de π . Il est aisé de vérifier que $X \mapsto d\pi(X)$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans \mathcal{H}_π , c'est à dire que pour tout $(X, Y) \in \mathfrak{g}^2$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a $d\pi(aX + bY) = ad\pi(X) + bd\pi(Y)$ et $d\pi([X, Y]) = d\pi(X)d\pi(Y) - d\pi(Y)d\pi(X)$. Les représentations π et $d\pi$ sont liées par la formule $\pi(\exp(X)) = \exp(d\pi(X))$, traduite par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & U(\mathcal{H}_\pi) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\pi} & L(\mathcal{H}_\pi) \end{array}$$

La représentation $d\pi$ s'étend de manière naturelle en une représentation, encore notée $d\pi$, de l'algèbre (associative) enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre (associative) des opérateurs linéaires sur \mathcal{H}_π . Le noyau de cette représentation $\text{Ker}(d\pi)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

On propose dans la suite une réalisation concrète de $d\pi$. On suppose que la représentation π est associée à la forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ et à la polarisation \mathfrak{h} , ce que l'on note $\pi = \pi(f, \mathfrak{h})$, par la méthode de Kirillov. On note comme précédemment, $H = \exp(\mathfrak{h})$ le sous-groupe de G associé à \mathfrak{h} .

Le noyau de la représentation, $\text{Ker}(d\pi(f, \mathfrak{h}))$, est alors un idéal indépendant du choix de la polarisation \mathfrak{h} en f voir [8, prop 6.1.4 et 6.1.5]. Dans la suite du mémoire on notera $I(f)$ l'idéal $\text{Ker}(d\pi(f, \mathfrak{h}))$.

On pose $m = \dim(\mathfrak{h})$ et $k = \text{codim}(\mathfrak{h})$. On peut démontrer que $k = \frac{1}{2} \dim(\Omega_f)$ ($\dim(\Omega_f)$ dimension de l'orbite en tant que variété). On considère une base de Malcev faible $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n)$ de \mathfrak{g} à travers \mathfrak{h} , c'est à dire une base \mathfrak{g} telle que (X_1, \dots, X_m) est une base de \mathfrak{h} et pour tout entier $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, l'espace vectoriel engendré par la famille (X_1, \dots, X_i) est une sous algèbre de \mathfrak{g} . Ici $n - m = k$, l'application

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^k & \longrightarrow G \\ t = (t_1, \dots, t_k) & \longmapsto \exp(t_1 X_{m+1}) \dots \exp(t_k X_n) \end{cases}$$

composée avec la projection canonique $p : G \mapsto G/H$ est un difféomorphisme qui transporte la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^k en une mesure G -invariante sur l'espace homogène G/H voir [5, Théorème 1.2.12]. L'application

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^k \times H & \longrightarrow G \\ (t, h) & \longmapsto \gamma(t)h \end{cases}$$

est un homéomorphisme, qui permet de définir une isométrie naturelle $J : L^2(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ en posant $\langle J(f), \gamma(t).h \rangle = \chi_f(h)f(t)$ pour tout $h \in H$ et tout $t \in \mathbb{R}^k$. Il est maintenant possible grâce à J de transporter l'action de G sur \mathcal{H}_π vers $L^2(\mathbb{R}^k)$. De cette manière on obtient une représentation de G équivalente à π . On notera encore π cette représentation, et dans toute la suite on identifiera l'espace de la représentation \mathcal{H}_π avec $L^2(\mathbb{R}^k)$. On peut montrer que l'espace \mathcal{H}_π^∞ des vecteurs \mathcal{C}^∞ de la représentation est l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$, voir [5, section 4.1, Appendice A.1]. Chaque élément $X \in \mathfrak{g}$, se représente par un opérateur différentiel linéaire d'ordre 0 ou 1 et à coefficient polynomial (polynomial en les coordonnées de X dans la base \mathcal{B}). On note $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$, l'espace des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ de domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. Le théorème de surjection de Ki-

rillov énonce que la représentation dérivée $d\pi$ est une surjection de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$, voir [15, Théorème 7.1].

Dans la suite du mémoire, notre attention se portera notamment sur un opérateur particulier, le laplacien de Goodman. On appelle laplacien algébrique, l'élément de l'algèbre enveloppante défini par $\Delta_G = -X_1^2 - \dots - X_n^2$. Le laplacien de Goodman est l'opérateur différentiel $\Delta = d\pi(\Delta_G)$. Dans des cas particuliers simples, on peut retrouver les opérateurs de Schrödinger harmonique (algèbre de Heisenberg) ou quartique (Filiforme de dimension 4). De manière générale, cet opérateur est positif, à résolvante compacte mais pas nécessairement hypoelliptique. On montrera que la fonction zéta spectrale complexe $z \mapsto \text{Trace}(\Delta^z)$ est holomorphe sur un demi-plan à gauche. Pour une certaine classe d'algèbres de Lie on prouvera, en utilisant la méthode de Higson généralisée, qu'elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe \mathbb{C} tout entier.

10 Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents

10.1 Symboles

On munit \mathfrak{g}^* d'une structure euclidienne. On définit

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \Lambda(\xi) = \sqrt{1 + \|\xi\|^2}. \quad (10.1)$$

D'une manière générale, un symbole est une application de classe \mathcal{C}^∞ défini sur \mathfrak{g}^* avec un contrôle de la croissance à l'infini de toutes les dérivées. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers naturels, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ sa longueur et D^α l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}}$.

Définition 10.1. Soit $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S^m(\mathfrak{g}^*)$ des symboles de poids m est défini par :

$$S^m(\mathfrak{g}^*) = \left\{ p \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, |D^\alpha p(\xi)| \leq C_\alpha \Lambda^{m-|\alpha|}(\xi) \right\}. \quad (10.2)$$

L'ensemble $S^m(\mathfrak{g}^*)$ est indépendant du choix de la structure euclidienne de \mathfrak{g}^* .

Définition 10.2. L'ensemble $S(\mathfrak{g}^*)$ des symboles de Schwartz est composé des symboles qui sont de poids m pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a

$$S(\mathfrak{g}^*) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(\mathfrak{g}^*). \quad (10.3)$$

10.2 Quantification de Weyl

La quantification de Weyl permet d'associer à tout symbole de Schwartz p un opérateur $p^{W,\pi}$ sur \mathcal{H}_π . Plus précisément, $p^{W,\pi}$ est l'opérateur de domaine \mathcal{H}_π^∞ défini par :

$$\forall u \in \mathcal{H}_\pi^\infty, p^{W,\pi} u = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1} p(x) \pi(\exp x) u dx. \quad (10.4)$$

Il est possible d'étendre cette quantification à la classe des symboles de poids m , voir [17]. On peut préciser en fonction du symbole et de son poids des propriétés de l'opérateur $p^{W,\pi}$. On trouve [17, Proposition II.1.1], la proposition suivante.

Proposition 10.1. *Soit $p \in S(\mathfrak{g}^*)$. L'opérateur $p^{W,\pi}$ se prolonge en un opérateur borné de \mathcal{H}_π dans \mathcal{H}_π . De plus l'opérateur $p^{W,\pi}$ est régularisant, c'est à dire que si $u \in \mathcal{H}_\pi$, alors $p^{W,\pi}u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$.*

On a aussi [17, Proposition II.1.6]

Proposition 10.2. *Pour tout symbole p appartenant à $S^m(\mathfrak{g}^*)$, les opérateurs de symboles conjugués $p^{W,\pi}$ et $\bar{p}^{W,\pi}$ sont formellement adjoints l'un de l'autre.*

On en déduit aisément le corollaire suivant.

Corollaire 10.3. *Si p est un symbole à valeurs réelles, l'opérateur $p^{W,\pi}$ est formellement autoadjoint.*

10.3 Produit de symboles

Étant donné $p \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ on a $p^{W,\pi} = \int_G (\mathcal{F}^{-1}p \circ \log)\pi(g)dg$ soit aussi $p^{W,\pi} = \pi(\tilde{p})$ où $\tilde{p} = \mathcal{F}^{-1}p \circ \log$. Si $(p, q) \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)^2$, on a la formule de composition $p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi} = \pi(\tilde{p} * \tilde{q})$ (voir [17, page 12], $*$ désigne le produit de convolution).

On pose alors

$$p\#q = \mathcal{F}(\tilde{p} * \tilde{q}) \circ \exp. \quad (10.5)$$

On vérifie que $p\#q \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, et par définition on a la formule de composition

$$(p\#q)^{W,\pi} = p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi}. \quad (10.6)$$

Le produit $\#$ s'étend pour des symboles à poids $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ en $\# : S^{m_1}(\mathfrak{g}^*) \times S^{m_2}(\mathfrak{g}^*) \rightarrow S^{m_1+m_2}(\mathfrak{g}^*)$ voir [17, Théorème I.3.2].

D'après [17, Proposition II.1.5], cette opération $\#$ correspond à la composition des opérateurs.

Proposition 10.4. *Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour $p \in S^{m_1}(\mathfrak{g}^*)$ et $q \in S^{m_2}(\mathfrak{g}^*)$ on a :*

$$\forall u \in \mathcal{H}_\pi^\infty, (p\#q)^{W,\pi}u = (p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi})u. \quad (10.7)$$

10.4 Calcul pseudo-différentiel

On définit une notion de symbole hypoelliptique et elliptique.

Définition 10.3. *Soit $(m, m_0) \in \mathbb{R}^2$. On désigne par HS^{m, m_0} l'ensemble des symboles $a \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ tels qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 et un réel positif R tels que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$:*

$$(\|\xi\| \geq R) \Rightarrow (C_1\Lambda(\xi)^{m_0} \leq |a(\xi)| \leq C_2\Lambda(\xi)^m),$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, |D^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha |a(\xi)| \Lambda(\xi)^{-|\alpha|}.$$

Un tel symbole est dit hypoelliptique. Un symbole appartenant à $HS^{m, m}$ est dit elliptique.

Les propositions suivantes précisent en fonction des propriétés du symbole p celles de l'opérateur $p^{W,\pi}$. Les définitions ci-dessus, ainsi que l'ensemble des propositions qui suivent se trouvent dans ([17], partie II).

Proposition 10.5. *Si p est un symbole de poids 0 (c'est à dire si $p \in S^0(\mathfrak{g}^*)$), l'opérateur $p^{W,\pi}$ se prolonge en un opérateur borné de \mathcal{H}_π dans \mathcal{H}_π .*

Proposition 10.6. *Si p est un symbole hypoelliptique réel, l'opérateur $p^{W,\pi}$ de domaine \mathcal{H}_π^∞ est essentiellement autoadjoint.*

Proposition 10.7. *Si $p \in S^m(\mathfrak{g}^*)$ avec $m < 0$, alors $p^{W,\pi}$ est un opérateur compact sur \mathcal{H}_π .*

Proposition 10.8. *Si $p \in HS^{m,m_0}$ avec $m_0 > 0$, et si p est à valeurs réelles, alors l'opérateur (non borné) $p^{W,\pi}$ a un spectre discret réel, qui se confond avec l'ensemble de ses valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, et on a $\lim_{j \rightarrow +\infty} |\lambda_j| = +\infty$.*

10.5 Espaces de Sobolev-Goodman

On considère (X_1, \dots, X_n) une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Les symboles qui interviennent dans la suite sont exprimés dans la base duale de (X_1, \dots, X_n) . On définit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un laplacien algébrique en posant :

$$\Delta_G = -X_1^2 - \dots - X_k^2 - \dots - X_n^2.$$

Auquel on associe, l'opérateur :

$$\Delta_1 = d\pi(1 + \Delta_G). \quad (10.8)$$

Par la quantification de Weyl on a :

$$\Delta_1 = \delta^{W,\pi} \text{ avec } \delta = 1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2. \quad (10.9)$$

L'opérateur $1 + \Delta_G$ est elliptique et positif sur le groupe G . E.Nelson ([23]) a démontré que $\Delta_1 = d\pi(1 + \Delta_G)$ est essentiellement auto-adjoint et positif. De plus, G étant nilpotent et π une représentation unitaire irréductible de G , l'opérateur Δ_1 est à résolvante compacte, cela vient du fait que toute représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie nilpotent est fortement traçable (voir proposition 11.8 infra). Le spectre de Δ_1 est discret, il se confond avec l'ensemble de ses valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et on a $1 \leq \lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$. On peut associer à l'opérateur Δ_1 la chaîne $(H^s(\Delta_1))_{s \in \mathbb{R}}$ d'espaces de Sobolev généralisés au sens de la Définition 1.5). Historiquement ces espaces de Sobolev ont été introduits et étudiés par R.Goodman dans l'article [11]. Dans la suite pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\Delta_1)$ sera appelé espace de Sobolev-Goodman. On a [20, Lemme II.2.2], le lemme suivant.

Lemme 10.9. *Pour tout symbole p de poids 0 et tout réel s l'opérateur $p^{W,\pi}$ est continu de $H^s(\Delta_1)$ dans $H^s(\Delta_1)$.*

On note

$$\mathcal{H}^\infty(\Delta_1) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s(\Delta_1). \quad (10.10)$$

On peut préciser qui est l'espace $\mathcal{H}^\infty(\Delta_1)$ voir [11, Théorème 1.1].

Lemme 10.10. *On a $\mathcal{H}^\infty(\Delta_1) = \mathcal{H}_\pi^\infty$.*

11 Construction des triplets spectraux

11.1 Algèbre du triplet

Lemme 11.1. *Soit $(\mathcal{A}_G, +, \#) = (S^0(\mathfrak{g}^*), +, \#)$, munie de l'addition et du produit $\#$ des symboles. Il s'agit d'une algèbre unitaire. Elle devient une algèbre unitaire involutive si l'on considère la conjugaison des symboles.*

Démonstration. Les lois $+$ et $\#$ sont internes sur $S^0(\mathfrak{g}^*)$ (pour $\#$ c'est une conséquence de la Proposition 10.4). On vérifie que $(\mathcal{A}_G, +, \#)$ est une algèbre grâce aux propriétés combinées du produit de convolution (associativité, distributivité) et de la transformée de Fourier. Le symbole égal à 1 est l'unité. Le fait que $\overline{p + \lambda q} = \overline{p} + \overline{\lambda q}$ et $\overline{\overline{p}} = p$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p, q \in S^0(\mathfrak{g}^*)$ est évident. Il reste à vérifier que pour tout $p, q \in S^0(\mathfrak{g}^*)$ on a $\overline{p\#q} = \overline{q}\#\overline{p}$. Pour tout $(X, Y) \in \mathfrak{g}^2$ on pose $X.Y = \log(\exp X \exp Y)$. On trouve dans [17] (preuve du point b) de la Proposition I.2.1) la formule

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, p\#q(\xi) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(X)\mathcal{F}^{-1}q(Y)e^{-i\langle X.Y, \xi \rangle} dXdY. \quad (11.1)$$

D'où

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \overline{p\#q}(\xi) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} \overline{\mathcal{F}^{-1}p(X)\mathcal{F}^{-1}q(Y)} e^{i\langle X.Y, \xi \rangle} dXdY. \quad (11.2)$$

Or pour tout $Z \in \mathfrak{g}$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}p(Z)} = \mathcal{F}^{-1}\overline{p}(-Z)$, on a donc

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \overline{p\#q}(\xi) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}\overline{p}(-X)\mathcal{F}^{-1}\overline{q}(-Y)e^{i\langle X.Y, \xi \rangle} dXdY. \quad (11.3)$$

On effectue le changement de variable $X' = -X$ et $Y' = -Y$, on obtient

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \overline{p\#q}(\xi) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}\overline{p}(X')\mathcal{F}^{-1}\overline{q}(Y')e^{i\langle (-X').(-Y'), \xi \rangle} dX'dY'. \quad (11.4)$$

On vérifie par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff que $(-X').(-Y') = -Y'.X'$. Alors

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \overline{p\#q}(\xi) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}\overline{p}(X')\mathcal{F}^{-1}\overline{q}(Y')e^{-i\langle (Y').(X'), \xi \rangle} dX'dY' = \overline{q}\#\overline{p}(\xi). \quad (11.5)$$

□

On considère la quantification de Weyl

$$\rho : \begin{cases} S^0(\mathfrak{g}^*) & \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) \\ p & \longmapsto \rho(p) := p^{W, \pi} \end{cases} \quad (11.6)$$

Par la Proposition 10.4, il s'agit d'une représentation de $S^0(\mathfrak{g}^*)$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

Lemme 11.2. *On a*

1. $\rho(\mathcal{A}_G) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$;

2. $\rho(\mathcal{A}_G) \cdot \mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$.

Démonstration. 1. Voir Proposition 10.5.

2. Si p est un symbole de poids nul, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\rho(p) = p^{W,\pi} : \mathcal{H}^s(\Delta_1) \rightarrow \mathcal{H}^s(\Delta_1)$ est un opérateur borné. En particulier $\rho(p)(\mathcal{H}^\infty(\Delta_1)) \subset \mathcal{H}^\infty(\Delta_1)$. On verra plus loin que $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty(\Delta_1)$. \square

11.2 Opérateur de Dirac

L'opérateur $D = \sqrt{\Delta_1}$ a pour symbole $\sigma = \sqrt{\delta} + \varepsilon$ qui appartient à $HS^{1,1}$ et où $\varepsilon \in S^0(\mathfrak{g}^*)$. Il s'agit d'un opérateur non borné, positif et essentiellement autoadjoint.

Lemme 11.3. *On a*

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la résolvante $(D - \lambda)^{-1}$ est un opérateur compact ;
2. pour tout $p \in \mathcal{A}_G$, $[D, \rho(p)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

Démonstration. 1. Un symbole de Weyl de $(D - \lambda)$ est elliptique de poids 1. Un symbole de l'opérateur $(D - \lambda)^{-1}$ est donc un élément de $S^{-1}(\mathfrak{g}^*)$, ce qui par la Proposition 10.7 prouve sa compacité.

2. On a $[D, \rho(p)]$ qui admet pour symbole de Weyl $q = (\sqrt{\delta} + \varepsilon)\#p - p\#(\sqrt{\delta} + \varepsilon) = \sqrt{\delta}\#p - p\#\sqrt{\delta} + \varepsilon\#p - p\#\varepsilon$, qui est de poids nul. On conclut avec la Proposition 10.5. \square

11.3 Triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$

Résumons les résultats obtenus. On dispose

1. d'une pré- C^* algèbre unitaire \mathcal{A}_G ;
2. d'une représentation $\rho : \begin{array}{l} \mathcal{A}_G \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) \\ p \longmapsto p^{W,\pi} \end{array}$ de \mathcal{A} sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_π ;
3. d'un opérateur autoadjoint D non borné sur \mathcal{H}_π . Avec les propriétés que
 - (a) pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la résolvante $(D - \lambda)^{-1}$ est un opérateur compact ;
 - (b) pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[D, \rho(a)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ce qui permet d'énoncer la proposition qui suit.

Proposition 11.4. *Le triplet $\mathcal{T}_{G,\pi} = (\mathcal{A}_G, \mathcal{H}_\pi, D)$ est un triplet spectral impair.*

Le triplet est impair car l'opérateur de Dirac est positif. Ce triplet n'est pas commutatif car le produit $\#$ des symboles n'est pas commutatif dans $S^0(\mathfrak{g}^*)$. Pour ce triplet spectral on a

$$\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty(\Delta_1) = \mathcal{H}_\pi^\infty. \quad (11.7)$$

La première égalité est triviale puisque $\text{Dom}(D^{2n}) \subset \text{Dom}(\Delta^n)$ pour tout entier n . La deuxième égalité fait l'objet du Lemme (10.10).

11.4 Régularité et sommabilité du triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$

On note $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{G,\pi})$ l'algèbre associée à ce triplet spectral, voir (5.1). La Proposition [11, Proposition 2.1] énonce que le triplet $\mathcal{T}_{G,\pi}$ vérifie l'inégalité de Gårding généralisée.

Lemme 11.5. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, et tout $X \in \mathcal{D}^q(\mathcal{T}_{G,\pi})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|D^q v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|Xv\|.$$

Par le Lemme 11.2, on a la condition $\rho(\mathcal{A}_G).\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$ qui est vérifiée. La caractérisation (Théorème 5.2) de la régularité pour un triplet spectral permet d'énoncer :

Proposition 11.6. *Le triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi} = (\mathcal{A}_G, \mathcal{H}_\pi, D)$ est régulier.*

D'après la Proposition 5.3, $(\mathcal{D}(\mathcal{T}_{G,\pi}), \Delta_1, 2)$ est une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés.

Définition 11.1. *Une représentation unitaire irréductible π de G est dite fortement traçable s'il existe un élément $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tel que $d\pi(u)$ soit inversible sur \mathcal{H}_π^∞ et d'inverse à trace.*

Il existe une caractérisation des représentations fortement traçables, voir [19, Proposition I.1], donnée ci-dessous.

Proposition 11.7. *Soit π une représentation unitaire d'un groupe de Lie G . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. π est fortement traçable ;
2. il existe un entier s_0 tel que pour tout entier $s \geq s_0$ l'opérateur $\Delta_1^{-s} = d\pi(1 + \Delta_G)^{-s}$ est à trace.

D'autre part une conséquence de la formule des caractères de Kirillov est la proposition suivante, on en trouvera dans [19, Proposition IV.1] une démonstration dans le cadre des groupes de Lie résolubles, qui généralise celui des groupes de Lie nilpotents.

Proposition 11.8. *Toute représentation π unitaire et irréductible d'un groupe de Lie nilpotent est fortement traçable.*

Comme conséquence des deux propositions précédentes on obtient une nouvelle propriété du triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$:

Proposition 11.9. *Le triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi} = (\mathcal{A}_G, \mathcal{H}_\pi, D)$ est finiment sommable.*

En conclusion, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 11.10. *Le triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi} = (\mathcal{A}_G, \mathcal{H}_\pi, D)$ est un triplet spectral compact impair, régulier et finiment sommable.*

11.5 Triplets spectraux non compacts

Pour tout $s \leq 0$, on note $\mathcal{S}^{<s}(\mathfrak{g}^*)$ l'espace des symboles de poids strictement inférieurs à s . Pour tout $s \leq 0$, d'après la Proposition 10.4 on peut dire que $\mathcal{S}^{<s}(\mathfrak{g}^*)$ est stable pour le produit $\#$ et qu'il s'agit d'un idéal de $\mathcal{S}^{<0}(\mathfrak{g}^*)$. Du point de vue structurel, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 11.11. *Pour tout $s \leq 0$, $(\mathcal{A}_{s,G}, +, \#) = (\mathcal{S}^{<s}(\mathfrak{g}^*), +, \#)$, munie de l'addition, du produit $\#$ et de la conjugaison des symboles est une algèbre non unitaire.*

L'espace \mathcal{H}_π est de dimension infinie. Par la Proposition (10.7), tout symbole de $\mathcal{S}^{<0}(\mathfrak{g}^*)$ se représente en un opérateur compact, donc différent de l'identité. Ceci prouve le caractère non unitaire de $(\mathcal{A}_{s,G}, +, \#) = (\mathcal{S}^{<0}(\mathfrak{g}^*), +, \#)$. On montre alors, de la même manière que dans la section précédente que :

Théorème 11.12. *Pour tout $s \leq 0$, Le triplet $\mathcal{T}'_{s,G} = (\mathcal{A}_{s,G}, \mathcal{H}_\pi, D)$ est un triplet spectral non compact, impair, régulier, finiment sommable.*

Cinquième partie

Prolongement méromorphe pour une classe d'algèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie réel, nilpotent, connexe et simplement connexe de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie associée à G , (X_1, \dots, X_n) une base de \mathfrak{g} et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Soit π une représentation unitaire et irréductible du groupe G . Cette représentation peut-être obtenue via la méthode de Dixmier-Kirillov par le choix d'une forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ et d'une polarisation \mathfrak{h} associée à f . On note $d\pi$ la représentation de \mathfrak{g} dérivée de π . Cette représentation s'étend de manière naturelle en une représentation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, on notera encore $d\pi$ ce prolongement. Si \mathfrak{h} est de dimension k , on peut identifier l'espace de la représentation \mathcal{H}_π avec l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^k)$ voir 9.3. Le théorème de surjection de Kirillov affirme que $d\pi$ réalise une surjection de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux de domaine l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. Le noyau de $d\pi$ noté $I(f)$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$.

Soit $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on note $\tilde{X} = d\pi(X)$. Soit $\Delta_G = -X_1^2 - \dots - X_n^2$ et $\Delta_1 = d\pi(1 + \Delta_G)$ le laplacien de Goodman. On définit la fonction zéta spectrale

$$\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1} : \begin{cases} \mathbb{C}_{<d} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \text{Trace}(\tilde{X} \Delta_1^z) \end{cases} \quad (11.8)$$

D'après les Propositions (11.9) et 2.10 cette fonction est définie et holomorphe sur un demi-plan à gauche délimité par un certain réel d . Les questions de l'existence d'un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et par incidence de la connaissance du spectre des dimensions et de sa multiplicité pour le triplet spectral $\mathcal{T}_{G,\pi}$ se posent.

12 Calcul pratique de la représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Soit G un groupe de Lie réel nilpotent et simplement connexe d'algèbre de Lie associée \mathfrak{g} . L'objectif est de se munir d'un algorithme de calcul pratique et efficace pour déterminer la représentation $d\pi$ de \mathfrak{g} dérivée d'une représentation de Kirillov π du groupe G .

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et Ω l'orbite coadjointe qui lui correspond. On considère \mathfrak{h} une polarisation pour f et on note $H = \exp(\mathfrak{h})$ le sous groupe de G qui lui est associé.

On note (X_1, \dots, X_d) une base coexponentielle d'un supplémentaire de \mathfrak{h} , et l'on complète cette base en une base $(X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, \dots, X_n)$ de \mathfrak{g} .

Soit π la représentation irréductible de G obtenue par la méthode de Kirillov et associée à f et \mathfrak{h} . On note H_π l'espace de la représentation.

Soit $\Theta : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_d) \longmapsto \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_d X_d) \end{array}$. L'application Θ définit par $\underline{\Theta}(\varphi) = \varphi \circ \Theta$ est une isométrie H_π vers $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui permet d'identifier ces deux espaces, ce que nous ferons dans la suite.

On montre alors que les éléments de la base $(X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, \dots, X_n)$ se représentent via la représentation dérivées $d\pi$ par des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément on trouve dans [18], Corollaire I.20 et Proposition I.21 l'algorithme suivant, très pratique pour le calcul de $d\pi$.

Proposition 12.1. *Soit G un groupe de Lie réel nilpotent et simplement connexe d'algèbre de Lie associée \mathfrak{g} .*

Soit $f \in \mathfrak{g}^$ et Ω l'orbite coadjointe qui lui correspond.*

On considère \mathfrak{h} une polarisation pour f . Soit (X_1, \dots, X_d) une base coexponentielle d'un supplémentaire de \mathfrak{h} , complétée en une base $(X_1, \dots, X_d, X_{d+1}, \dots, X_n)$ de \mathfrak{g} .

Soit π la représentation irréductible de G obtenue par la méthode de Kirillov et associée à f et \mathfrak{h} et $d\pi$ la représentation dérivée.

Soit $\Theta : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_d) \longmapsto \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_d X_d) \end{array}$.

On définit de manière récursive et à reculons une famille de coefficients $(c_j)_{1 \leq j \leq d}$ par :

$$c_d = \langle f, X_d \rangle,$$

$$\text{et pour tout } j \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket, c_j = \langle \text{Ad}^* \Theta(x) \cdot (f + \sum_{k=j+1}^d (\xi_k - c_k) X_k^*), X_j \rangle.$$

Alors :

1. $q(x, \xi) = \text{Ad}^* \Theta(x) \cdot (f + \sum_{k=1}^d (\xi_k - c_k) X_k^*)$ est une paramétrisation de l'orbite Ω .

2. $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d\pi(X_k) = -i(\xi_k \circ q)^L(x, D)$,

où à tout monôme $x^\alpha \xi^\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d)^2$, correspond l'opérateur différentiel $(x^\alpha \xi^\beta)^L(x, D) = i^{|\beta|} x^\alpha \partial^\beta$.

13 Les ensembles $O(I)$ et $T(I)$

Les notations et les résultats énoncés dans cette section proviennent pour une large partie de l'article[22]. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de base (X_1, \dots, X_n) .

on note \mathcal{S} l'ensemble de monômes $\mathcal{S} = \{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt établit que \mathcal{S} est une base sur \mathbb{C} de l'espace vectoriel $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Le degré de $U = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \in \mathcal{S}$ est défini par $\deg(U) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On note par le symbole $<$ la relation d'ordre de degré total sur \mathcal{S} qui est définie par :

$$U_1 := X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} < X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} =: U_2$$

si et seulement si

$$[\deg(U_1) < \deg(U_2)]$$

ou

$$[\deg(U_1) = \deg(U_2) \text{ et } \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } \alpha_i = \beta_i \text{ si } i < j, \text{ et } \alpha_j < \beta_j].$$

La relation de degré total sur \mathcal{S} est un bon ordre. Soit $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ un élément non nul. Il existe une unique décomposition du type :

$$U = \sum_{i=1}^s c_i U_i, \quad s \in \mathbb{N}^*, \quad c_i \in \mathbb{C}^*, \quad U_i \in \mathcal{S} \text{ et } U_1 > U_2 > \dots > U_s.$$

Ce qui permet de définir $T(U) = U_1$ le terme maximal, et $cd(U) = c_1$ le coefficient dominant de U . Soit I un idéal de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On pose

$$\begin{aligned} T(I) &= \{T(U) \mid U \in I\}, \\ O(I) &= \mathcal{S} \setminus T(I). \end{aligned}$$

Ainsi $T(I)$ est l'ensemble des termes dominants des éléments de l'idéal I et $O(I)$ est son complémentaire dans \mathcal{S} . On définit aussi sur \mathcal{S} une relation d'ordre partiel, notée \preceq , par :

$$X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \preceq X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} \text{ si et seulement si } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i \leq \beta_i.$$

Lemme 13.1. *Soit I un idéal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. L'ensemble $T(I)$ est une section finissante pour \preceq . Ce qui signifie que pour chaque $V \in T(I)$ et $W \in \mathcal{S}$ si $V \preceq W$ alors $W \in T(I)$.*

Démonstration. Soit $V = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \in T(I)$ et $W = X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n} \in \mathcal{S}$. Il existe $U \in I$ tel que $T(U) = V$. Si $V \preceq W$, alors $X_1^{\beta_1 - \alpha_1} \dots X_n^{\beta_n - \alpha_n} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Comme I est un idéal $X_1^{\beta_1 - \alpha_1} \dots X_n^{\beta_n - \alpha_n} U \in I$, et $T(X_1^{\beta_1 - \alpha_1} \dots X_n^{\beta_n - \alpha_n} U) = W$ ainsi $W \in T(I)$. \square

La proposition suivante correspond au Théorème [22, Theorem 1.3].

Proposition 13.2. *Soit I un idéal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On a la décomposition*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = I \oplus \text{Vect}(O(I)).$$

Ainsi, pour chaque $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ il existe un et un seul $V = \text{Can}(U, I) \in \text{Vect}(O(I))$ tel que $U - V \in I$.

Démonstration. Si $U \neq 0$ est un élément de $I \cap Vect(O(I))$ alors $T(U)$ appartient à $T(I) \cap O(I)$, ce qui est absurde, donc $I \cap Vect(O(I)) = \{0\}$. Nous allons montrer que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = I + Vect(O(I))$ à l'aide d'un algorithme.

$U_0 := U, \Phi_0 := 0, H_0 := O, i := 0.$

Tant que $U_i \neq 0$ faire:

Si $T(U_i) \notin T(I)$ alors

$\Phi_{i+1} := \Phi_i, H_{i+1} := H_i + lc(U_i)T(U_i), U_{i+1} := U_i - cd(U_i)T(U_i)$

Sinon

Choisir $G \in I$ tel que $T(G) = T(U_i)$ et $cd(G) = 1$

$\Phi_{i+1} := \Phi_i + cd(U_i)G, H_{i+1} := H_i, U_{i+1} := U_i - cd(U_i)G$

$i := i + 1$

$\Phi := \Phi_i, H = H_i.$

Pour chaque $i, \Phi_i \in I, H_i \in Vect(O(I))$ et $U_i + \Phi_i + H_i = f$ (c'est un invariant de boucle). D'une boucle à la suivante, on a $T(U_{i+1}) < T(U_i)$, et comme $<$ est un bon ordre, on est assuré que l'algorithme se termine. Ainsi, il existe i tel que $U_i = 0$, et alors $\Phi_i + H_i = f$. \square

Proposition 13.3. Soit I un idéal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Si $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\Phi \in I$ alors $T(\Phi + Can(U, I)) \geq T(Can(U, I))$.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. S'il existe $\Phi \in I$ tel que $T(\Phi + Can(U, I)) < T(Can(U, I))$ alors $cd(\Phi) = -cd(Can(U, I))$ et $T(\Phi) = T(Can(U, I)) \neq 0 \in T(I) \cap O(I)$, ce qui est une contradiction. \square

14 Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$

Soit $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$. On définit la relation d'ordre $\gamma \preceq \beta$ par $\gamma_i \leq \beta_i$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $|\gamma| = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \gamma! = \prod_{i=1}^n \gamma_i!$ et si $\gamma \preceq \beta, \binom{\beta}{\gamma} = \frac{\beta!}{\gamma!(\beta - \gamma)!}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\delta^i = (\delta_k^i)_{1 \leq k \leq n}$, où δ_k^i est le symbole de Kronecker, c'est à dire le n -uplet de composantes nulles, exceptée la i -ème qui vaut 1. On définit maintenant la classe des algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{N}^*)^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{I} = \{I_j | 1 \leq j \leq p\}$ une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en p sous-ensembles. Par convention, les sous-ensembles I_j sont rangés dans l'ordre de leur plus petit élément, on a $j < j'$ si et seulement si $\min(I_j) < \min(I_{j'})$. Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $A^j = \{\beta \in \mathbb{N}^n | \beta \preceq \sum_{i \in I_j} \alpha_i \delta^i\}$ et

$A^{\mathcal{I}} = \bigcup_{j=1}^p A^j$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ est définie par :

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}} = \langle X_1, \dots, X_n, Y^\beta | \beta \in A^{\mathcal{I}} \rangle_{\mathbb{C}\text{-ev}},$$

avec comme seuls crochets non nuls :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \beta \in A^{\mathcal{I}}, [X_i, Y^\beta] = Y^{\beta - \delta^i} \text{ si } \beta_i \geq 1.$$

Quelques exemples :

1. Pour $\alpha = (1)$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\})$, on obtient :

$$\mathfrak{g}_{(1),(\{1\})} = \langle X_1, Y^{(1)}, Y^{(0)} \rangle. \quad (14.1)$$

Avec comme crochet non trivial : $[X_1, Y^{(1)}] = Y^{(0)}$. Il s'agit de l'algèbre de Heisenberg de dimension 3.

2. Pour $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$, on obtient :

$$\mathfrak{g}_{(1,1,\dots,1),(\{1\},\{2\},\dots,\{n\})} = \langle X_1, \dots, X_n, Y^{(1,0,\dots,0)}, Y^{(0,1,\dots,0)}, Y^{(0,\dots,0,1)}, Y^{(0,\dots,0)} \rangle. \quad (14.2)$$

Avec comme crochets non triviaux : $[X_i, Y^{\delta^i}] = Y^{(0,\dots,0)}$. Il s'agit de l'algèbre de Heisenberg de dimension $2n + 1$.

3. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha = (q)$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\})$, on obtient :

$$\mathfrak{g}_{(q),(\{1\})} = \langle X_1, Y^{(q)}, Y^{(q-1)}, \dots, Y^{(1)}, Y^{(0)} \rangle. \quad (14.3)$$

Avec comme crochets non triviaux : $[X_1, Y^k] = Y^{(k-1)}$, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Il s'agit de l'algèbre de filiforme de dimension $q + 2$.

4. On associe à $\alpha = (1, 2)$ deux algèbres de Lie distinctes en fonction du choix de la partition de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$.

Si $\mathcal{I} = (\{1\}, \{2\})$, on obtient l'algèbre de Lie de dimension 6 :

$$\mathfrak{g}_{(1,2),(\{1\},\{2\})} = \langle X_1, X_2, Y^{(1,0)}, Y^{(0,2)}, Y^{(0,1)}, Y^{(0,0)} \rangle. \quad (14.4)$$

Avec comme crochets non triviaux : $[X_1, Y^{(1,0)}] = Y^{(0,0)}$, $[X_2, Y^{(0,2)}] = Y^{(0,1)}$ et $[X_2, Y^{(0,1)}] = Y^{(0,0)}$.

Si $\mathcal{I}_1 = (\{1, 2\})$, on obtient l'algèbre de Lie dimension 8 :

$$\mathfrak{g}_{(1,2),(\{1,2\})} = \langle X_1, X_2, Y^{(1,2)}, Y^{(1,1)}, Y^{(1,0)}, Y^{(0,2)}, Y^{(0,1)}, Y^{(0,0)} \rangle \quad (14.5)$$

avec comme crochets non triviaux :

$$[X_1, Y^{(1,2)}] = Y^{(0,2)}, [X_1, Y^{(1,1)}] = Y^{(0,1)}, [X_1, Y^{(1,0)}] = Y^{(0,0)}, [X_2, Y^{(1,2)}] = Y^{(1,1)}, [X_2, Y^{(1,1)}] = Y^{(1,0)}, [X_2, Y^{(0,2)}] = Y^{(0,1)} \text{ et } [X_2, Y^{(0,1)}] = Y^{(0,0)}.$$

On prouve aisément que $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ est une algèbre de Lie nilpotente. La famille

$$\mathcal{S} = \left\{ X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \mid p_i \in \mathbb{N}, q_\beta \in \mathbb{N} \right\}$$

est une base $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$. Pour écrire les monomes de cette base, on utilise l'ordre lexicographique $X_1 < \dots < X_n < Y^\beta$ pour chaque β , les éléments Y^β étant eux même triés avec l'ordre lexicographique naturel des n -uplets β de \mathbb{N}^n . Cette base est ensuite ordonnée par la relation d'ordre du degré total (13).

15 Générateurs de l'idéal $I(f)$

Soit $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}} = \langle X_1, \dots, X_n, Y^\beta \mid \beta \in A^{\mathcal{I}} \rangle$ une algèbre de Lie (14). On note ρ la représentation infinitésimale de $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ associée à la forme linéaire $f = (Y^{(0,\dots,0)})^*$ et à la polarisation $\langle Y^\beta \mid \beta \in A^{\mathcal{I}} \rangle$ via la méthode des orbites de Kirillov. Soit

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires, dont les coefficients sont des polynômes de \mathbb{R}^n et qui agissent sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n et à support compact). Pour chaque $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$, on pose $x^\gamma := x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$. On peut expliciter la représentation ρ , sous la forme d'un morphisme d'algèbre de $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (voir [14, section 1]) :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \rho(X_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \forall \beta \in A^{\mathcal{I}}, \rho(Y^\beta) = i \frac{(-1)^{|\beta|} x^\beta}{\beta!}. \quad (15.1)$$

Ici $\rho(Y^\beta)$ est l'opérateur de multiplication $i \frac{(-1)^{|\beta|} x^\beta}{\beta!}$. L'algèbre isotrope de $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ associée à f est définie par

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}^f = \{X \in \mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}} \mid \forall Y \in \mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}, f([X, Y]) = 0\}.$$

Lemme 15.1. *Soit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$, alors*

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}^f = \langle Y^{(0, \dots, 0)}, Y^\beta \mid \beta \in A^{\mathcal{I}}, |\beta| \geq 2 \rangle_{\mathbb{C}\text{-ev}}.$$

Démonstration. Soit $X = \sum_{j=1}^n a_j X_j + \sum_{\beta \in \alpha^{\mathcal{I}}} b_\beta Y^{(\beta)} \in \mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}^f$. Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f([X, Y^{\delta_j}]) = 0$ (resp. $f([X, X_j]) = 0$) alors $a_j = 0$ (resp. $b_{\delta_j} = 0$) et par suite $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}^f \subset \langle Y^{(0, \dots, 0)}, Y^\beta \mid \beta \in A^{\mathcal{I}}, |\beta| \geq 2 \rangle_{\text{ev}}$. L'autre inclusion est immédiate. \square

Le lemme suivant est une application des résultats de l'article [10, page 304], il nous permet d'obtenir une base de l'idéal $I(f)$.

Lemme 15.2. *Soit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. On note $\Gamma_j = \sum_{k \geq 0} \frac{(i)^k}{k!} (Y^{\delta_j})^k (ad X_j)^k$*

pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et par $\Gamma = \prod_{j=1}^n \Gamma_j$. Alors $I(f)$ est l'idéal de $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ engendré par

$$\{Y^{(0, \dots, 0)} - i, \Gamma(iY^\beta) \mid \beta \in A^{\mathcal{I}}, |\beta| \geq 2\}$$

Les opérateurs Γ_j commutent deux à deux, en effet la formule de Leibniz permet d'établir que $(Y^{\delta_j})^k (ad X_j)^k (Y^{\delta_i})^l (ad X_i)^l = Y^{\delta_j})^k (Y^{\delta_i})^l (ad X_j)^k (ad X_i)^l$. L'ordre des facteurs dans Γ est donc sans importance. Nous proposerons dans le Corollaire 15.4 une autre base de $I(f)$, qui sera plus intéressante pour l'étude $T(I(f))$.

Pour chaque $\gamma \in \alpha^{\mathcal{I}}$, on pose $Y_*^\gamma = (i)^{1-|\gamma|} \prod_{k=1}^n (Y^{\delta^k})^{\gamma_k}$. Par exemple, si $\gamma = (2, 3) \in \alpha^{\mathcal{I}}$, $Y^\gamma = Y^{(2,3)} \in \mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$, tandis que $Y_*^\gamma = (Y^{(1,0)})^2 Y^{(0,1)}{}^3 U \in U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$.

Lemme 15.3. *Soit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. Les notations sont celles du Lemme 15.2.*

1. *Pour chaque $\beta \in A^{\mathcal{I}}$ et chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,*

$$\Gamma_j(Y^\beta) = \sum_{k=0}^{\beta_j} \frac{i^k}{k!} (Y^{\delta^j})^k Y^{\beta - k\delta^j} \quad \text{et} \quad \Gamma(iY^\beta) = \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} Y_*^\gamma Y^{\beta - \gamma}.$$

2. Pour chaque $\beta \in A^{\mathcal{I}} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, $\Gamma(iY^\beta) = \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} Y_*^\gamma \left(Y^{\beta-\gamma} - \frac{1}{(\beta-\gamma)!} Y_*^{\beta-\gamma} \right)$.

3. Pour chaque $\beta \in A^{\mathcal{I}}$, $Y^\beta - \frac{1}{\beta!} Y_*^\beta = Y_*^\beta (Y^{(0, \dots, 0)} - i) + \sum_{\gamma \leq \beta, \gamma \neq (0, \dots, 0)} \frac{1}{(\beta-\gamma)!} Y_*^{\beta-\gamma} \Gamma(iY^\gamma)$.

Démonstration. 1. Soit $\beta \in A^{\mathcal{I}}$. Si $0 \leq k \leq \beta_j$ alors $ad^k X_j(Y^\beta) = Y^{\beta-k\delta^j}$, si $k > \beta_j$ alors $ad^k X_j(Y^\beta) = 0$, ce qui prouve la formule (1). Soit $(j, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $k \in \mathbb{N}$, si $j \neq l$ alors $ad X_j((Y^{\delta^j})^k) = 0$. On utilise pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(iY^\beta) &= \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \prod_{j=1}^n \llbracket 0, \beta_j \rrbracket} i \frac{i^{\gamma_n}}{\gamma_n!} \frac{i^{\gamma_{n-1}}}{\gamma_{n-1}!} \dots \frac{i^{\gamma_1}}{\gamma_1!} (Y^{\delta^n})^{\gamma_n} (Y^{\delta^{n-1}})^{\gamma_{n-1}} \dots (Y^{\delta^1})^{\gamma_1} Y^{\beta - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta^i} \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} Y_*^\gamma Y^{\beta-\gamma}. \end{aligned}$$

2. Soit $\beta \in A^{\mathcal{I}} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Avec la formule précédente, on a

$$\Gamma(iY^\beta) = \sum_{\gamma \leq \beta} \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\gamma!} Y_*^\gamma \left(Y^{\beta-\gamma} - \frac{1}{(\beta-\gamma)!} Y_*^{\beta-\gamma} \right) + \frac{iY_*^\beta}{\beta!} \left(\sum_{\gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|} \binom{\beta}{\gamma} \right),$$

et $\sum_{\gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|} \binom{\beta}{\gamma} = 0$ et la formule demandée est établie.

3. Soit $\beta \in A^{\mathcal{I}}$. On pose $Z_{(0, \dots, 0)} = Y^{(0, \dots, 0)} - i$ et $Z_\beta = \beta! \Gamma(iY^\beta) = \sum_{\gamma \leq \beta} (-1)^{|\gamma|} \binom{\beta}{\gamma} Y_*^\gamma ((\beta-\gamma)! Y^{\beta-\gamma} - Y_*^{\beta-\gamma})$. La formule d'inversion de Pascal permet d'écrire $\beta! Y^\beta - Y_*^\beta = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} Y_*^{\beta-\gamma} Z_\gamma$. □

Avec le Lemme 15.2 et les formules (2) et (3), on prouve aisément le corollaire suivant.

Corollaire 15.4. *On a $I(f) = \langle Y_*^\beta - \beta! Y^\beta \mid \beta \in A^{\mathcal{I}} \rangle_{ideal}$.*

A partir de maintenant, pour chaque $(U, V) \in U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^2$, on notera

$$U \equiv V \pmod{I(f)} \quad \text{si et seulement si} \quad U - V \in I(f).$$

Lemme 15.5.

1. On a $Y^{(0, \dots, 0)} \in T(I(f))$.
2. Soit $\beta, \gamma \in A^{\mathcal{I}}$. S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $1 \leq \beta_i < \alpha_i$ et $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$ alors $Y^\beta Y^\gamma \in T(I(f))$

Démonstration. 1. Comme $Y^{(0, \dots, 0)} - i \in I(f)$ alors $Y^{(0, \dots, 0)} \in T(I(f))$.

2. Soit $\beta, \gamma \in A^{\mathcal{I}}$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $1 \leq \beta_i < \alpha_i$ et $1 \leq \gamma_i < \alpha_i$. Le calcul

$$\begin{aligned} Y^\beta Y^\gamma - \frac{\gamma_i + 1}{\beta_i} Y^{\beta-\delta^i} Y^{\gamma+\delta^i} &\equiv \frac{1}{\beta!} Y_*^\beta \frac{1}{\gamma!} Y_*^\gamma - \frac{\gamma_i + 1}{\beta_i} \frac{1}{(\beta-\delta^i)!} Y_*^{\beta-\delta^i} \frac{1}{(\gamma+\delta^i)!} Y_*^{\gamma+\delta^i} \pmod{I(f)} \\ &\equiv 0 \pmod{I(f)}, \end{aligned}$$

et le fait que $Y^{\beta-\delta^i} Y^{\gamma+\delta^i} < Y^\beta Y^\gamma$ montre que $Y^\beta Y^\gamma \in T(I(f))$. □

Lemme 15.6. Soit $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in \mathcal{S}$. Alors,

1. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k[T, Y^{\delta^k}] \equiv p_k T \pmod{I(f)}$.
2. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[X_k, T]Y^{\delta^k} \equiv (\sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} q_\beta \beta_k) T \pmod{I(f)}$.

Démonstration. 1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} X_k[T, Y^{\delta^k}] &= X_k \left(p_k X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k-1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} Y^{(0, \dots, 0)} \right) \\ &= p_k T + i p_k X_1^{p_1} \dots X_k^{p_k} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} (Y^{(0, \dots, 0)} - i), \end{aligned}$$

comme $Y^{(0, \dots, 0)} - i \in I(f)$ on peut conclure.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} [X_k, T]Y^{\delta^k} &= X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}, \beta_k \geq 1} q_\beta \left(\prod_{\beta' \in A^{\mathcal{I}}, \beta' \neq \beta} (Y^{\beta'})^{q_{\beta'}} \right) Y^{\beta - \delta^k} Y^{\delta^k} \\ &\equiv \left(\sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} q_\beta \beta_k \right) T \pmod{I(f)}, \end{aligned}$$

car $Y^{\beta - \delta^k} Y^{\delta^k} - i \beta_k Y^\beta$ est un élément de $I(f)$. □

16 Réduction dans l'algèbre $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$

Pour chaque $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $b = (b_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on définit les opérateurs :

$$G_{a,b} : \begin{cases} U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) & \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) \\ T & \longmapsto \sum_{k=1}^n a_k X_k[T, Y^{\delta^k}] + b_k [X_k, T]Y^{\delta^k}. \end{cases}$$

Il est important d'observer que tous les idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$, et donc en particulier l'idéal $I(f)$, sont stables par les opérateurs $G_{a,b}$.

Lemme 16.1. Soit $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in O(I(f))$. Il existe un p -uplet $((i_1, r_{i_1}) \dots, (i_p, r_{i_p})) \in \prod_{j=1}^p (I_j \times \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket)$ tel que :

$$G_{a,b}(T) \equiv \left(s + \sum_{j=1}^p \left(\frac{r_{i_j}}{\alpha_{i_j}} - 1 \right) \right) T \pmod{I(f)},$$

où $a = (1, \dots, 1)$, $b = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_{i_j}} \delta^{i_j}$ et $s = \deg(T)$.

Démonstration. Soit $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in O(I(f))$ et $s = \deg(T)$. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous allons construire $(i_j, r_{i_j}) \in I_j \times \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket$ par disjonction de

cas.

Cas 1 : Il existe $\beta \in A^j$ tel que $q_\beta \neq 0$. On note par β le minimum de ces n -uplets. Comme $T \in O(I(f))$, des Lemmes 13.1 et 15.5 on déduit que $\beta \neq (0, \dots, 0)$. Ainsi, il existe $i_j \in I_j$ tel que $\beta_{i_j} \neq 0$. Pour chaque $\beta' \in A^j$ tel que $q_{\beta'} \neq 0$, alors $\beta'_{i_j} = \alpha_{i_j}$, c'est une conséquence du Lemme 15.5. A partir du Lemme 15.6, $[X_{i_j}, T]Y^{\delta^{i_j}} \equiv q_\beta \beta_{i_j} T + (\sum_{\beta' \in A^j, \beta' \neq \beta} q_{\beta'} \alpha_{i_j}) T \pmod{I(f)}$. On pose $r_{i_j} = \beta_{i_j} \in \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket$, la formule :

$$\frac{1}{\alpha_{i_j}} [X_{i_j}, T]Y^{\delta^{i_j}} \equiv \left(\sum_{\beta' \in A^j} q_{\beta'} + \left(\frac{r_{i_j}}{\alpha_{i_j}} - 1 \right) \right) T \pmod{I(f)}$$

est vraie si $r_{i_j} = \alpha_{i_j}$, et aussi si $1 \leq r_{i_j} < \alpha_{i_j}$ puisque dans ce cas d'après le Lemme 15.5, on a $q_\beta = 1$.

Cas 2 : Pour chaque $\beta \in A^j$, on a $q_\beta = 0$. On peut faire un choix arbitraire d'un élément i_j de I_j , et ensuite poser $r_{i_j} = \alpha_{i_j}$. L'égalité $\frac{1}{\alpha_{i_j}} [X_{i_j}, T]Y^{\delta^{i_j}} \equiv \left(\sum_{\beta' \in A^j} q_{\beta'} + \left(\frac{r_{i_j}}{\alpha_{i_j}} - 1 \right) \right) T \pmod{I(f)}$ est vérifiée, car les deux membres sont nuls. Par sommation, on obtient

$$\sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{\alpha_{i_j}} [X_{i_j}, T]Y^{\delta^{i_j}} \right) \equiv \left(\sum_{j=1}^p \left(\sum_{\beta' \in A^j} q_{\beta'} T + \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_{i_j}}{r_{i_j}} - 1 \right) \right) T \pmod{I(f)} \right).$$

Comme la famille $(A^j)_{1 \leq j \leq p}$ est une partition de $A^{\mathcal{I}}$, on a $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{\beta' \in A^j} q_{\beta'} \right) = \sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} q_\beta$. De plus $\sum_{i=1}^n X_i [T, Y^{\delta^i}] \equiv (\sum_{i=1}^n p_i) T \pmod{I(f)}$ d'après le Lemme 15.6. Par définition $s = \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} q_\beta$, et ainsi

$$G_{(1, \dots, 1), \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_{i_j}} \delta^{i_j}}(T) \equiv \left(s + \sum_{j=1}^p \left(\frac{r_{i_j}}{\alpha_{i_j}} - 1 \right) \right) T \pmod{I(f)}.$$

□

Proposition 16.2. *Soit $s \in \mathbb{N}$. On définit l'opérateur :*

$$G_s = \prod_{i=(i_1, \dots, i_p) \in \prod_{j=1}^p I_j} \left(\prod_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_p}) \in \prod_{j=1}^p \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket} G_{a, b_i} - \left(s + \sum_{j=1}^p \left(\frac{r_{i_j}}{\alpha_{i_j}} - 1 \right) \right) \right),$$

avec $a = (1, \dots, 1)$ et $b_i = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_{i_j}} \delta^{i_j}$. Pour chaque $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in O(I(f))$ tel que $\deg(T) = s$ on a

$$G_s(T) \equiv 0 \pmod{I(f)}.$$

Démonstration. Soit $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in O(I(f))$, on note $s = \deg(T)$. Pour le calcul de $G_s(T)$ modulo $I(f)$, on peut commuter les facteurs (voir Lemme 15.6) qui définissent G_s . Il existe un facteur de G_s qui annule T modulo $I(f)$ (voir Lemme 16.1), quitte à commuter on fait opérer ce facteur en premier. Comme l'idéal $I(f)$ est stable pour chaque facteur de G_s , on obtient alors $G_s(T) \equiv 0 \pmod{I(f)}$. □

On définit maintenant les opérateurs :

$$H_{a,b} : \begin{cases} U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) & \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) \\ T & \longmapsto \sum_{k=1}^n a_k [X_k T, Y^{\delta^k}] + b_k [X_k, T Y^{\delta^k}]. \end{cases}$$

Pour $a \in \mathbb{C}^n$, on pose $|a| = \sum_{k=1}^n a_k$.

Lemme 16.3. *Pour chaque élément T appartenant à $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ on a $H_{a,b}(T) \equiv G_{a,b}(T) + (|a| + |b|)T \pmod{I(f)}$.*

Démonstration. Soit $T \in U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$,

$$\begin{aligned} H_{a,b}(T) &= G_{a,b}(T) + \sum_{k=1}^n a_k [T_k, Y^{\delta^k}] T + b_k T [X_k, Y^{\delta^k}] \\ &= G_{a,b}(T) + (|a| + |b|)T + (|a| + |b|)(Y^{(0, \dots, 0)} - 1)T \\ &\equiv G_{a,b}(T) + (|a| + |b|)T \pmod{I(f)}. \end{aligned}$$

□

On reformule la proposition 16.2 avec les opérateurs H_s à la place de G_s .

Proposition 16.4. *Soit $s \in \mathbb{N}$. On définit l'opérateur*

$$H_s = \prod_{i=(i_1, \dots, i_p) \in \prod_{j=1}^p I_j} \left(\prod_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_j}) \in \prod_{j=1}^p [1, \alpha_{i_j}]} H_{a, b_i} - (s + n - p + \sum_{j=1}^p \frac{r_{i_j} + 1}{\alpha_{i_j}}) \right),$$

$$\text{avec } a = (1, \dots, 1) \text{ et } b_i = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_{i_j}} \delta^{i_j}.$$

Pour chaque $T = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \prod_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^{q_\beta} \in O(I(f))$ tel que $s = \deg(T)$ on a

$$H_s(T) \equiv 0 \pmod{I(f)}.$$

La prochaine proposition est essentielle, elle nous dit que les opérateurs H_s réduisent le degré dans l'algèbre $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ modulo l'idéal $I(f)$. On pose $U_{-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) = \{0\}$ comme convention.

Proposition 16.5. *Pour chaque entier naturel s , $H_s(U_s(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})) \subset U_{s-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) + I(f)$.*

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{N}$ et $U \in U_s(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$. Il existe une et une seule décomposition $U = \Phi + \text{Can}(U, I(f))$ avec $\Phi \in I(f)$ et $\text{Can}(U, I(f)) \in \text{Vect}(O(I(f)))$, voir la Proposition 13.2. De la Proposition 13.3, $T(\text{Can}(U, I(f))) \preceq T(U)$ et ainsi $\text{Can}(U, I(f)) \in U_s(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$. Soit $\text{Can}(U, I(f)) = V_s + V_{s-1}$, où V_s est la partie homogène de degré s de $\text{Can}(U, I(f))$ pour le degré usuel dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$. Par linéarité $H_s(U) = H_s(\Phi) + H_s(V_s) + H_s(V_{s-1})$. On a $H_s(\Phi) \in I(f)$ puisque tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ est stable par H_s , $H_s(V_s) \in I(f)$ d'après la Proposition 16.4 et $H_s(V_{s-1}) \in U_{s-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) + I(f)$ d'après le Lemme 15.6. Par suite, on a $H_s(U) \in U_{s-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) + I(f)$.

□

17 Prolongement méromorphe

On note $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ l'algèbre $\rho(U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}))$ et pour chaque $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^q = \rho(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}))$. Soit Δ_1 le laplacien de Goodman défini par $\Delta_1 = \rho(1 + \Delta_G)$ où $\Delta_G = -\left(\sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{\beta \in A^{\mathcal{I}}} (Y^\beta)^2\right)$ (voir [11]).

Proposition 17.1. *Le triplet $(\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}), \Delta_1, 2)$ est une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés, et en particulier Δ_1 est un laplacien généralisé d'ordre 2 (voir Définition 1.10), ce qui se traduit exactement par :*

1. $(\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^q = \rho(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})))_{q \in \mathbb{N}}$ est une filtration croissante de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$.
2. L'unité est un élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^0$.
3. Pour chaque $\tilde{X} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{q\tilde{x}}$, $[\Delta_1, \tilde{X}] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{q\tilde{x}+1}$.
4. Pour chaque $\tilde{X} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{q\tilde{x}}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty, \quad \|\Delta_1^{\frac{q}{2}} v\| + \|v\| \geq \varepsilon \|\tilde{X} v\|, \quad (\text{inégalité de Gårding généralisée}).$$

Démonstration. La filtration sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ est obtenue par transport de la filtration standard de $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ par le morphisme d'algèbre ρ , et ainsi les deux premiers points sont vérifiés. Le troisième aussi, en regard de $\deg(\Delta_G) = 2$. L'inégalité de Gårding généralisée est une conséquence de la Proposition [11, Proposition 2.1]. \square

Pour une preuve de la proposition suivante, on peut regarder les Propositions [19, Proposition I.1] et [19, Proposition IV.1].

Proposition 17.2. *Il existe un réel $s_0 \geq 1$ tel que $\Delta_1^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^{s_0}(\mathcal{H})$.*

Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$ et $s \in \mathbb{N}$. Aux endomorphismes $H_{a,b}$ et H_s sur $U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ (voir (16) et (16.4)), on associe les endomorphismes $\tilde{H}_{a,b}$ et T_s sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$:

$$\tilde{H}_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) \\ \tilde{T} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n a_k [\rho(X_k) \tilde{T}, \rho(Y^{\delta^k})] + b_k [\rho(X_k), \tilde{T} \rho(Y^{\delta^k})], \end{cases}$$

$$T_s = \prod_{(i_1, \dots, i_p) \in \prod_{j=1}^p I_j} \left(\prod_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_p}) \in \prod_{j=1}^p \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket} \tilde{H}_{(1, \dots, 1), \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_{i_j}} \delta^{i_j}} - (s + n - p + \sum_{j=1}^p \frac{r_{i_j} + 1}{\alpha_{i_j}}) \right).$$

Comme ρ est un morphisme d'algèbres, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) & \xrightarrow{H_s} & U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) & \xrightarrow{T_s} & \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}). \end{array}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de prolongement méromorphe relatif aux fonctions zétas spectrales associées aux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$.

Théorème 17.3. Soit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. Soit un réel $s_0 \geq 1$ tel que $\Delta_1^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^{s_0}(\mathcal{H})$. Pour chaque $\tilde{X} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{q_{\tilde{X}}}$, la fonction zéta spectrale :

$$\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_{<-\frac{s_0+q}{2}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \text{Trace}(\tilde{X}\Delta_1^z) \end{array} \right. .$$

est holomorphe et admet un prolongement méromorphe au plan complexe \mathbb{C} . Les pôles sont localisés dans une famille $\Omega_{\alpha, \mathcal{I}} = (\omega_{i, r, l})$ où

$$\omega_{i, r, l} = \frac{p - n - q}{2} - \sum_{j=1}^p \frac{r_{i_j} + 1}{2\alpha_{i_j}} + \frac{l}{2},$$

pour chaque $i = (i_1, \dots, i_p) \in \prod_{j=1}^p I_j$, $r = (r_{i_1}, \dots, r_{i_p}) \in \prod_{j=1}^p \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket$ et $l \in \mathbb{Z}$ tel que $l \geq \sum_{j=1}^p \frac{r_{i_j} + 1}{\alpha_{i_j}} + n - p - s_0$. L'ordre de multiplicité de chaque pôle est inférieur ou égal à son nombre d'apparitions dans la famille $\Omega_{\alpha, \mathcal{I}}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^n)^2$. On prouve que $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite de réduction de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ (voir Définition 3.1). Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $P_k = \rho(X_k)$ et $Q_k = \rho(Y^{\delta^k})$, en particulier on a $[P_k, Q_k] = 1$. Ici Δ_1 est déjà un élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ et par suite les algèbres $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})[\Delta_1]$ sont égales. Pour chaque $s \in \mathbb{N}$ et chaque $\tilde{X} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^s$ on doit prouver que $T_s(\tilde{X}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{s-1}$.

Soit $\tilde{X} \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^s$ et $X \in U_s(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ tel que $\rho(X) = \tilde{X}$. D'après le diagramme commutatif précédent on a $T_s(\tilde{X}) = \rho(H_s(X))$. De par la Proposition 16.5, on a $H_s(X) \in U_{s-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}) + I(f)$ et alors $T_s(\tilde{X}) \in \rho(U_{s-1}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}))$ puisque $I(f)$ est le noyau de ρ . Ainsi, on a prouvé $T_s(\tilde{X}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})^{s-1}$. La fonction polynomiale associée à cette suite de réduction $(T_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall z' \in \mathbb{C}, b(z') = \prod_{(i_1, \dots, i_p) \in \prod_{j=1}^p I_j} \left(\prod_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_p}) \in \prod_{j=1}^p \llbracket 1, \alpha_{i_j} \rrbracket} \left(p - n - \sum_{j=1}^p \frac{r_{i_j} + 1}{\alpha_{i_j}} - z' \right) \right).$$

On conclut avec le Théorème 3.3. \square

18 Les algèbres de Heisenberg

Dans cette section et dans les deux suivantes, nous allons traiter d'exemples qui sont des cas particuliers d'algèbres du type $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$. Le format de présentation sera le même. On commence par rappeler la définition de l'algèbre considérée, base et crochets non triviaux. La représentation considérée est toujours celle de Kirillov associée à la forme linéaire $f = (Y^{(0, \dots, 0)})^*$ et à la polarisation $\mathfrak{h} = \langle (Y^\beta)_{\beta \in \alpha \mathcal{I}} \rangle$. On précise l'espace de représentation \mathcal{H}_π , une expression de l'opérateur de Schrödinger Δ_1 . On donne ensuite l'expression de l'opérateur de réduction T_s et de la fonction polynomiale associée $z' \mapsto b(z')$. Par \tilde{X} , on désignera un élément de l'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés $\mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$, d'ordre inférieur ou égal à q . On note s_0 un entier naturel non nul tel

que $\Delta_1^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^{s_0}(\mathcal{H})$. On désigne par $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_{<-\frac{s_0+q}{2}} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \text{Trace}(\tilde{X}\Delta_1^z) \end{array} \right|$, la

fonction zeta spectrale holomorphe sur un demi-plan ouvert à gauche associée à Δ_1 et \tilde{X} . On précise la localisation des pôles du prolongement méromorphe de cette fonction zeta, dont l'ensemble est noté $\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1})$. On rapprochera parfois les résultats obtenus avec d'autres déjà connus et qui s'accordent.

18.1 L'algèbre de Heisenberg de dimension 3

L'algèbre de Lie de Heisenberg (de dimension 3) est obtenue pour $\alpha = (1)$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\})$ de $\llbracket 1, 1 \rrbracket$.

$$\mathfrak{g}_{(1),(\{1\})} = \langle X_1, Y^{(1)}, Y^{(0)} \rangle. \quad (18.1)$$

Avec comme seul crochet non trivial $[X_1, Y^{(1)}] = Y^{(0)}$. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\Delta_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + 2 + x^2. \quad (18.2)$$

On reconnaît l'opérateur de Schrödinger harmonique de dimension 1. Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = \tilde{H}_{(1),(1)} - (2 + s)Id, \quad (18.3)$$

et la fonction polynomiale associée est

$$b : z' \mapsto -(2 + z'). \quad (18.4)$$

La fonction zeta spectrale $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et on a

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0 + l}{2} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (18.5)$$

Les pôles sont donc simples et localisés dans une suite arithmétique de premier terme $\frac{-q-s_0}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

18.2 L'algèbre de Heisenberg de dimension $2n + 1$

L'algèbre de Heisenberg de dimension $2n+1$ est obtenue Pour $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\mathfrak{g}_{(1,1,\dots,1),(\{1\},\{2\},\dots,\{n\})} = \langle X_1, \dots, X_n, Y^{(1,0,\dots,0)}, Y^{(0,1,\dots,0)}, Y^{(0,\dots,0,1)}, Y^{(0,\dots,0)} \rangle. \quad (18.6)$$

Avec comme crochets non triviaux : $[X_i, Y^{\delta^i}] = Y^{(0,\dots,0)}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\Delta_1 = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + 2 + \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad (18.7)$$

On reconnaît un opérateur de Schrödinger harmonique de dimension n . Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = \tilde{H}_{(1,\dots,1),(1,\dots,1)} - (2n + s)Id, \quad (18.8)$$

et la fonction polynomiale associée est

$$b : z' \mapsto -(2n + z'). \quad (18.9)$$

La fonction zeta spectrale $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et on a

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0 + l}{2} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (18.10)$$

Les pôles sont donc simples et localisés dans une suite arithmétique de premier terme $\frac{-q-s_0}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

19 Les algèbres Filiformes

19.1 Opérateurs de Schrödinger Homogènes en dimension 1

Avant de traiter des exemples, nous proposons un très bref aperçu de résultats connus. On ne rentrera pas dans le détail des méthodes utilisées. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter [32], ou pour l'oscillateur quartique plus précisément [31].

On considère un opérateur de Schrödinger homogène agissant sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 + x^{2q} \quad (19.1)$$

avec q un entier strictement positif.

Dans le cas général, il est possible de faire un développement asymptotique de la trace de l'opérateur de la chaleur $\theta(t) = \exp(-t\hat{H})$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, et ceci de manière explicite :

$$\theta(t) = \sum_k e^{-t\lambda_k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{i_n} t^{i_n} \quad (19.2)$$

où

$$i_n = \frac{p+1}{2p}(2n-1) \quad (19.3)$$

On peut alors en déduire, via la transformation de Mellin, un résultat sur la fonction zeta spectrale associée à \hat{H} . On pose $s_0 = \frac{q+1}{q}$, la fonction

$$\zeta_{\hat{H}} : \begin{cases} \mathbb{C}_{<-\frac{s_0}{2}} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \text{Trace}(\hat{H}^z) \end{cases} \text{ est définie et holomorphe pour } \text{Re}(z) < -\frac{s_0}{2}$$

et elle admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier avec des pôles simples, tous situés dans la suite arithmétique

$$\left(-\frac{s_0}{2} + l\frac{q+1}{2q} \right)_{l \in \mathbb{N}} \quad (19.4)$$

19.2 Opérateurs de Schrödinger quartique

Pour $\alpha = (2)$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\})$ de $\llbracket 1, 1 \rrbracket$. On obtient

$$\mathfrak{g}_{(2),(\{1\})} = \langle X_1, Y^{(2)}, Y^{(1)}, Y^{(0)} \rangle. \quad (19.5)$$

Avec comme crochets non triviaux, $[X_1, Y^{(2)}] = Y^{(1)}$ et $[X_1, Y^{(1)}] = Y^{(0)}$. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\Delta_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^4}{4} + x^2 + 2 \quad (19.6)$$

On reconnaît un opérateur de Schrödinger quartique. Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = \prod_{r=1}^2 \tilde{H}_{(1),(1)} - (s + \frac{r+1}{2})Id, \quad (19.7)$$

et la fonction polynomiale associée est

$$b : z' \mapsto (z' + 1)(z' + \frac{3}{2}). \quad (19.8)$$

La fonction zeta spectrale $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et on a :

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0}{2} + \frac{l}{4} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (19.9)$$

Les pôles sont donc simples et localisés dans une suite arithmétique de premier terme $\frac{-q-s_0}{2}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

19.3 Algèbre filiforme de dimension $q + 2$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre de filiforme de dimension $q + 2$ s'obtient pour $\alpha = (q)$ et la partition $\mathcal{I} = (\{1\})$ de $\llbracket 1, 1 \rrbracket$.

$$\mathfrak{g}_{(q),(\{1\})} = \langle X_1, Y^{(q)}, Y^{(q-1)}, \dots, Y^{(1)}, Y^{(0)} \rangle. \quad (19.10)$$

Avec comme crochets non triviaux, $[X_1, Y^k] = Y^{(k-1)}$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\Delta_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \sum_{k=0}^q \frac{x^{2k}}{(k!)^2}. \quad (19.11)$$

Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = \prod_{r=1}^q \tilde{H}_{(1),(1)} - (s + \frac{r+1}{q})Id \quad (19.12)$$

et la fonction polynomiale associée est

$$b : z' \mapsto (-1)^q \prod_{r=1}^q (z' + \frac{r+1}{q}). \quad (19.13)$$

La fonction zeta spectrale $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et on a :

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0}{2} + \frac{l}{2q} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (19.14)$$

Les pôles sont donc simples et localisés dans une suite arithmétique de premier terme $\frac{-q-s_0}{2}$ et de raison $\frac{1}{2q}$.

20 Une algèbre particulière de dimension 6

On considère $\alpha = (1, 1)$ et $\mathcal{I} = (\{1, 2\})$ de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$. L'algèbre associée est

$$\mathfrak{g}_{(1,1),(\{1,2\})} = \langle X_1, X_2, Y^{(1,1)}, Y^{(0,1)}, Y^{(1,0)}, Y^{(0,0)} \rangle. \quad (20.1)$$

Avec comme crochets non triviaux : $[X_1, Y^{(1,1)}] = Y^{(0,1)}$, $[X_1, Y^{(1,0)}] = Y^{(0,0)}$, $[X_2, Y^{(1,1)}] = Y^{(1,0)}$ et $[X_2, Y^{(0,1)}] = Y^{(0,0)}$. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R}^2)$ et on a

$$\Delta_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 + x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 \quad (20.2)$$

Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = (\tilde{H}_{(1,1),(1,0)} - (s+2)Id)(\tilde{H}_{(1,1),(0,1)} - (s+2)Id), \quad (20.3)$$

et la fonction polynomiale associée est :

$$b : z' \mapsto (z' + 2)^2. \quad (20.4)$$

La fonction zeta spectrale $\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} et on a :

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0}{2} + \frac{l}{2} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (20.5)$$

Les pôles sont (potentiellement) doubles et localisés dans une suite arithmétique de premier terme $\frac{-q-s_0}{2}$ et de raison $\frac{1}{2q}$.

Smagin [28] montre dès les années 70 que la fonction zeta d'un opérateur elliptique sur une variété compacte \mathcal{M} admet un prolongement méromorphe avec des pôles éventuellement multiples. En adaptant un peu, on pourrait montrer qu'il en est de même pour un opérateur globalement hypoelliptique [29] sur \mathbb{R}^n . On va établir que l'opérateur Δ_1 obtenu ci dessus n'est pas globalement hypoelliptique et donc ne rentre pas dans le cadre de l'étude de Smagin.

Définition 20.1. *Un symbole $p(x, \xi)$ défini sur \mathbb{R}^{2n} est globalement hypoelliptique s'il existe un couple $(m, m_0) \in \mathbb{R}^2$, deux constantes réelles positives C_1 et C_2 et un réel positif R tels que :*

$$\langle x, \xi \rangle \geq R \Rightarrow (C_1 \langle x, \xi \rangle^{m_0} \leq |p(x, \xi)| \leq C_2 \langle x, \xi \rangle^m),$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, |D^\alpha p(x, \xi)| \leq C_\alpha \langle x, \xi \rangle^{-|\alpha|} |p(x, \xi)|.$$

avec $\langle x, \xi \rangle = \sqrt{1 + \|x\|^2 + \|\xi\|^2}$.

L'opérateur Δ_1 a pour symbole :

$$p(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

On a manifestement :

$$\langle x, \xi \rangle^2 \leq |p(x, \xi)| \leq \langle x, \xi \rangle^4,$$

pour $\langle x, \xi \rangle$ suffisamment grand.

Mais $\frac{\partial^2 p(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_2^2} = 2(x_1^2 + 1)$ et $p(x_1, 0, 0, 0) = x_1^2 + 1$, ainsi

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} / p \right) (x_1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2},$$

ce qui contredit le deuxième point de la définition précédente. Le symbole p n'est donc pas globalement hypoelliptique.

21 Construction conjecturale de triplets spectraux de multiplicité du spectre des dimensions arbitraire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ et la partition grossière $\mathcal{I} = (\{1, \dots, n\})$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons l'algèbre $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$ correspondante,

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}} = \langle X_1, \dots, X_n, Y^{(1, \dots, 1)}, Y^{(1, \dots, 1, 0)}, \dots, Y^{(0, \dots, 0, 1)}, Y^{(0, \dots, 0)} \rangle. \quad (21.1)$$

Avec comme crochets non triviaux $[X_k, Y^\beta] = Y^{\beta - \delta^k}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $\beta \leq \alpha$ tels que $\beta_k = 1$.

L'espace de la représentation est $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'opérateur de Schrödinger correspondant au laplacien généralisé Δ_1 est défini par

$$\Delta_1 = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + 1 + \sum_{\beta \leq \alpha} (x^\beta)^2. \quad (21.2)$$

Les opérateurs de réduction s'écrivent pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T_s = \prod_{i=1}^n \left(\tilde{H}_{(1, \dots, 1), \delta^i} - (s + n + 1) Id \right) \quad (21.3)$$

et la fonction polynomiale associée est

$$z' \mapsto b(z') = (z' + n + 1)^n. \quad (21.4)$$

L'ensemble des pôles de la fonctions zeta spectrale vérifient donc l'inclusion :

$$\text{Poles}(\zeta_{\tilde{X}, \Delta_1}) \subset \left(\frac{-q - s_0}{2} + \frac{l}{2} \right)_{l \in \mathbb{N}}. \quad (21.5)$$

Chaque pôle étant d'ordre de multiplicité inférieur ou égal à n .

On propose la conjecture suivante, il existe au moins un pôle d'ordre de multiplicité exactement n . Dans la section (11.3), on a construit un triplet spectral associé à un groupe de Lie G . L'opérateur de Dirac de ce triplet spectral est la racine carrée de Δ_1 . On peut donc formuler la conjecture.

Conjecture 21.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ et la partition grossière $\mathcal{I} = (\{1, \dots, n\})$. Soit $G_{\alpha, \mathcal{I}} = \exp(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$ le groupe de Lie associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}}$.

La multiplicité du spectre des dimensions du triplet spectral $\mathcal{T}_{G_{\alpha, \mathcal{I}}, \pi}$ est égale à n .

22 Une algèbre de Lie de dimension 7. Obstacle à une généralisation directe de la méthode ?

22.1 Algèbres de Lie \mathfrak{g}_7

L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_7 est définie par :

$$\mathfrak{g}_7 = \langle X_1, X_2, Y^{(3,2)}, Y^{(2,0)}, Y^{(1,0)}, Y^{(0,1)}, Y^{(0,0)} \rangle_{\mathbb{C}-ev} \quad (22.1)$$

et les crochets non triviaux :

$$[X_1, Y^{(3,2)}] = Y^{(2,0)}, [X_1, Y^{(2,0)}] = Y^{(1,0)}, [X_1, Y^{(1,0)}] = Y^{(0,0)}, [X_2, Y^{(3,2)}] = Y^{(0,1)}, [X_2, Y^{(0,1)}] = Y^{(0,0)}$$

On établit facilement le lemme suivant.

Lemme 22.1. L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_7 est nilpotente.

22.2 Générateurs de l'idéal $I(f)$

On considère pour la suite la forme linéaire particulière $f \in Y^{(0,0)*}$.

Lemme 22.2. On a

$$\mathfrak{g}_7^f = \langle Y^{(0,0)}, Y^{(3,2)}, Y^{(2,0)} \rangle_{ev} \quad (22.2)$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère les opérateurs

$$\Gamma_1 = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} Y^{(1,0)^k} ad^k X_1, \quad (22.3)$$

$$\Gamma_2 = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} Y^{(0,1)^k} ad^k X_2, \quad (22.4)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2. \quad (22.5)$$

On a

$$I(f) = \langle Y^{(0,0)} - 1, \Gamma(Y^{(3,2)}), \Gamma(Y^{(2,0)}) \rangle_{Ideal \text{ de } U(\mathfrak{g}_7)},$$

et après calcul on obtient :

$$I(f) = \langle Y^{(0,0)} - 1, Y^{(1,0)}Y^{(2,0)} + \frac{3}{2}Y^{(0,1)^2} - 3Y^{(3,2)}, Y^{(1,0)^2} - 2Y^{(2,0)} \rangle_{Ideal \text{ de } U(\mathfrak{g}_7)}.$$

22.3 Une base de Gröbner de l'idéal $I(f)$

On munit $U(\mathfrak{g}_7)$ de la relation d'ordre "deg-lex", induite des comparaisons suivantes :

$$Y^{(0,0)} < Y^{(0,1)} < Y^{(1,0)} < Y^{(2,0)} < Y^{(3,2)} < X_2 < X_1$$

On va éliminer les ambiguïtés de manière à construire une base de Gröbner de $I(f)$. Tout calcul fait on obtient que la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_7 = & (Y^{(0,0)} - 1, Y^{(1,0)}Y^{(2,0)} + \frac{3}{2}Y^{(0,1)^2} - 3Y^{(3,2)}, Y^{(1,0)^2} - 2Y^{(2,0)}, \\ & Y^{(0,1)^2}Y^{(1,0)} - 2Y^{(1,0)}Y^{(3,2)} + \frac{4}{3}Y^{(2,0)^2}, \\ & Y^{(0,1)^4} - \frac{8}{9}Y^{(2,0)^3} + \frac{4}{3}Y^{(1,0)}Y^{(2,0)}Y^{(3,2)} - 2Y^{(0,1)^2}Y^{(3,2)}) \end{aligned} \quad (22.6)$$

est une base de Gröbner de l'idéal $I(f)$.

22.4 Base monomiale de l'algèbre quotient $U(\mathfrak{g}_7)/I(f)$

Une base monomiale de $U(\mathfrak{g}_7)/I(f)$, composée de monômes irréductibles s'obtient en cherchant parmi les monômes du type $Y^{(0,0)^{q_0}}Y^{(0,1)^{q_1}}Y^{(1,0)^{q_2}}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}$ ceux qui ne sont pas divisibles par au moins un monôme dominant de la base de Gröbner \mathcal{S}_7 . Ces conditions mènent au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = 0 \\ q_2q_3 = 0 \\ q_2(q_2 - 1) = 0 \\ q_1(q_1 - 1)q_2 = 0 \\ q_1(q_1 - 1)(q_1 - 2)(q_1 - 3) = 0 \end{array} \right. \quad (22.7)$$

On obtient pour chaque degré d , six types de monômes irréductibles, dont voici la liste dans l'ordre lexicographique décroissant :

$$\begin{aligned} T_{1,d} &= Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = q_3 + q_4 + p_1 + p_2 \\ T_{2,d} &= Y^{(1,0)}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = 1 + q_4 + p_1 + p_2 \\ T_{3,d} &= Y^{(0,1)}Y^{(2,0)}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = 2 + q_4 + p_1 + p_2 \\ T_{4,d} &= Y^{(0,1)}Y^{(1,0)}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = 2 + q_4 + p_1 + p_2 \\ T_{5,d} &= Y^{(0,1)^2}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = 2 + q_3 + q_4 + p_1 + p_2 \\ T_{6,d} &= Y^{(0,1)^3}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}, \quad d = 3 + q_3 + q_4 + p_1 + p_2 \end{aligned}$$

Lemme 22.3. *La famille $\mathcal{B}_7 = (1, T_{i,d})_{1 \leq i \leq 6, d \in \mathbb{N}^*}$ forme une base monomiale de l'algèbre quotient $U(\mathfrak{g}_7)/I(f)$.*

22.5 Un opérateur de réduction

Soit $T \in U(\mathfrak{g}_{\alpha, \mathcal{I}})$, on peut écrire de manière unique $T = T_1 + N_1$ avec $T_1 \in \text{Vect}(\mathcal{B}_7)$ et $N_1 \in I(f)$. On appellera degré relatif de T modulo $I(f)$, noté $\text{deg}_f(T)$, le degré de T_1 dans $U(\mathfrak{g}_7)$. Ce degré relatif est le degré minimum d'un représentant de la classe de T modulo $I(f)$.

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, on définit l'opérateur

$$L_{a,b,c,d} : \begin{cases} U(\mathfrak{g}_7) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}_7) \\ T & \longmapsto & a[T, Y^{(1,0)}]X_1 + b[T, Y^{(0,1)}]X_2 + cY^{(1,0)}[X_1, T] + dY^{(0,1)}[X_2, T] \end{cases} \quad (22.8)$$

Nous allons suivre la stratégie suivante : On construit, si possible, des opérateurs $L_{a,b,c,d} - \alpha Id$ qui sont décroissants pour la relation d'ordre "deg-lex" en déterminant un quadruplet (a, b, c, d) et un réel α qui conviennent. Pour cela on commence par calculer $L_{a,b,c,d}(T_{1,d})$ en exprimant le résultat comme combinaison linéaire de monômes de \mathcal{B}_7 modulo $I(f)$. Ce résultat, on le sait, sera d'ordre relatif minimal pour "deg-lex".

On obtient après calcul des crochets et réduction modulo $I(f)$,

$$\begin{aligned} L_{(a,b,c,d)}(T_{1,d}) &= ap_1T_{1,d} \\ &+ bp_2T_{1,d} \\ &+ c(3q_4T_{1,d} + 2q_3T_{1,d} - \frac{3}{2}q_4Y^{(0,1)^2}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4-1}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}) \\ &+ dq_4Y^{(0,1)^2}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4-1}}X_2^{p_2}X_1^{p_1} \text{ mod}(I(f)) \end{aligned} \quad (22.9)$$

Le monôme de $Y^{(0,1)^2}Y^{(2,0)^{q_3}}Y^{(3,2)^{q_4-1}}X_2^{p_2}X_1^{p_1}$ est strictement plus grand que $T_{1,d}$ pour "deg-lex" puisque son degré est plus grand. La condition de décroissance impose donc $-\frac{3}{2}c + d = 0$.

On pose par exemple $a = b = 4, c = 2$ et $d = 3$ (ce choix s'effectue à un coefficient de proportionnalité près) :

$$L_{4,4,2,3}(T_{1,d}) = (4d + 2q_4)T_{1,d} \text{ mod}(I(f)) \quad (22.10)$$

On pose $\alpha = (4d + 2q_4)$.

Des calculs tout à fait similaires mènent à :

$$\begin{aligned} L_{4,4,2,3}(T_{6,d}) &= (4d + 2q_4)T_{6,d} \text{ mod}(I(f)) \\ L_{4,4,2,3}(T_{5,d}) &= (4d + 2q_4 - 2)T_{5,d} \text{ mod}(I(f)) \\ L_{4,4,2,3}(T_{4,d}) &= (4d + 2q_4 - 1)T_{4,d} \text{ mod}(I(f)) \\ L_{4,4,2,3}(T_{3,d}) &= (4d + 2q_4 - 3)T_{3,d} \text{ mod}(I(f)) \\ L_{4,4,2,3}(T_{2,d}) &= (4d + 2q_4 - 2)T_{2,d} \text{ mod}(I(f)) \\ L_{4,4,2,3}(T_{1,d}) &= (4d + 2q_4 - 3)T_{1,d} \text{ mod}(I(f)) \end{aligned}$$

On en déduit la proposition

Proposition 22.4. *Soit $d \in \mathbb{N}$, posons*

$$L_d = \prod_{q_4=0}^d \left(\prod_{k=0}^3 (L_{4,4,2,3} - (4d + 2q_4 - k)) \right) \quad (22.11)$$

Soit $T \in U(\mathfrak{g}_7)$.

Si $d = \deg_f(T) = 0$, alors $L_d(T) = 0$.

Si $d = \deg_f(T) \geq 1$ alors $\deg_f(L_d(T)) \leq \deg_f(T) - 1$.

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, on définit l'opérateur

$$H_{a,b,c,d} : \begin{cases} U(\mathfrak{g}_7) & \longrightarrow U(\mathfrak{g}_7) \\ T & \longmapsto a[TX_1, Y^{(1,0)}] + b[TX_2, Y^{(0,1)}] + c[X_1, Y^{(1,0)}T] + d[X_2, Y^{(0,1)}T] \end{cases} \quad (22.12)$$

Proposition 22.5. *Soit $d \in \mathbb{N}$, posons*

$$H_d = \prod_{q_4=0}^d \left(\prod_{k=0}^3 (H_{4,4,2,3} - (4d + 2q_4 - k - 13)) \right) \quad (22.13)$$

Soit $T \in U(\mathfrak{g}_\alpha)$.

Si $d = \deg_f(T) = 0$, alors $H_d(T) = 0$.

Si $d = \deg_f(T) \geq 1$ alors $\deg_f(H_d(T)) \leq \deg_f(T) - 1$.

Il ressort de cet exemple que le nombre d'opérateurs que l'on doit composer pour construire H_d varie en fonction de d . Il n'est alors pas possible d'appliquer le théorème de prolongement méromorphe, dans sa version actuelle.

23 Une construction générale des paires de Gelfand-Kirillov

Dans les exemples précédents les opérateurs $H_{a,b}$ se construisaient facilement, car les algèbres de Lie \mathfrak{g} étudiées se comportaient un peu comme des algèbres de Weyl. Il était alors facile de déterminer les éléments P_i et Q_i dans \mathfrak{g} vérifiant $[P_i, Q_j] = \delta_i^j Z$, où Z était un élément non nul dans le centre de l'algèbre enveloppante. Dans le cadre général, il faudra choisir P_i et Q_i dans l'algèbre enveloppante. On se propose de donner une construction des P_i et Q_i . Cela pourra être utile pour tester la méthode sur de nouvelles algèbres de Lie.

Dans les deux premières parties, \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente, $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} de codimension 1 et x est un élément de \mathfrak{g} tel que $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{R}x$.

23.1 Quelques résultats d'algèbre

Lemme 23.1. *La sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal de \mathfrak{g} .*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $y \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $[x, y] \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Procédons par l'absurde en supposant que $[x, y] = \lambda x + t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $t \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Par itération, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(adx)^k \cdot y = \lambda^k x + t_k$ avec $t_k \in \tilde{\mathfrak{g}}$, ce qui contredit la nilpotence de \mathfrak{g} . \square

Lemme 23.2. *Le centre de $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ est stable par adx .*

Démonstration. On veut montrer que pour tout $y \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$, on a $adx \cdot y \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$. Il suffit pour cela de prouver que $adx \cdot y$ commute avec chaque élément $v \in \tilde{\mathfrak{g}}$. D'après la formule de Jacobi, $[[x, y], v] = [y, [v, x]] + [x, [y, v]]$, d'une part $[v, x] \in \tilde{\mathfrak{g}}$ car $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal d'où $[y, [v, x]] = 0$, d'autre part $[y, v] = 0$ donc $[x, [y, v]] = 0$, ainsi $[[x, y], v] = 0$. \square

Pour le lemme suivant, voir [8].

Lemme 23.3. *Il existe seulement deux alternatives $ZU(\mathfrak{g}) \subsetneq ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$ ou $ZU(\tilde{\mathfrak{g}}) \subsetneq ZU(\mathfrak{g})$.*

Lemme 23.4. *On suppose que $ZU(\mathfrak{g}) \subsetneq ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$. Alors il existe un couple $(y, z) \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}}) \times ZU(\mathfrak{g})$ avec $z \neq 0$ tel que $[x, y] = z$.*

Démonstration. Soit $y \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}}) \setminus ZU(\mathfrak{g})$, on a alors $[x, y] \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ maximal tel que $(adx)^k.y \neq 0$. Comme $ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$ est stable par adx , on peut supposer $k = 1$ quitte à changer y par $(adx)^{k-1}.y$. Posons alors $[x, y] = z \neq 0$, on a $z \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$ et par construction $[x, z] = 0$ d'où $z \in ZU(\mathfrak{g})$. \square

23.2 Opérateurs Γ

Lemme 23.5. *On suppose que $ZU(\mathfrak{g}) \subsetneq ZU(\tilde{\mathfrak{g}})$.*

Soit alors un couple $(y, z) \in ZU(\tilde{\mathfrak{g}}) \times ZU(\mathfrak{g})$ avec $z \neq 0$ tel que $[x, y] = z$. On pose :

$$\Gamma = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k \quad (23.1)$$

1. *L'opérateur Γ est un homomorphisme de l'algèbre $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ dans l'algèbre localisée $U(\tilde{\mathfrak{g}})_z$.*
2. *$\forall a \in U(\tilde{\mathfrak{g}}), [x, \Gamma(a)] = 0$*

Démonstration. 1. Soit $(a, b) \in U(\tilde{\mathfrak{g}})^2$,

$$\begin{aligned} \Gamma(ab) &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k.(ab) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (adx)^i.a(adx)^j.b \\ &= \sum_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \left(\frac{y}{z}\right)^{i+j} (adx)^i.a(adx)^j.b \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b) \end{aligned} \quad (23.2)$$

Cette dernière égalité se justifiant par l'inclusion $ad^i(U(\tilde{\mathfrak{g}})) \subset U(\tilde{\mathfrak{g}})$ d'où $\left(\frac{y}{z}\right)^{i+j} (adx)^i.a(adx)^j.b = \left(\frac{y}{z}\right)^i (adx)^i.a \left(\frac{y}{z}\right)^j (adx)^j.b$.

2. Soit $a \in U(\tilde{\mathfrak{g}})$.

$$\begin{aligned} [x, \Gamma(a)] &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} [x, \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^k.a] \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(k \left(\frac{y}{z}\right)^{k-1} (adx)^k.a + \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^{k+1}.a \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \left(\frac{y}{z}\right)^{k-1} (adx)^k.a + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (adx)^{k+1}.a \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23.3)$$

\square

23.3 Algorithme de construction

La démonstration de la proposition suivante suit de près celle du Lemme 9 de l'article [9]

Proposition 23.6. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension n ,*

$$\mathfrak{g}_0 \subsetneq \mathfrak{g}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{g}_n \quad (23.4)$$

Une suite de Jordan-Hölder, et

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (23.5)$$

Une base (de Malcev forte) associée à cette suite.

Un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est un indice de saut local si $ZU(\mathfrak{g}_k) \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{k-1})$, on note

$$\mathcal{R} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_d\} \quad (23.6)$$

l'ensemble des indices de sauts locaux, que l'on suppose non vide.

Il existe des coefficients :

$$(P_1, P_2, \dots, P_d) \in U(\mathfrak{g})^d, \quad (Q_1, Q_2, \dots, Q_d) \in U(\mathfrak{g})^d, \quad c \in ZU(\mathfrak{g}) \setminus \{0\} \quad (23.7)$$

avec plus précisément

$$\forall p \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad P_p \in U(\mathfrak{g}_{i_p}) \setminus U(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}), \quad Q_p \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}) \quad (23.8)$$

qui vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \quad \begin{cases} [P_i, P_j] & = 0 \\ [Q_i, Q_j] & = 0 \\ [P_i, Q_j] & = \delta_i^j c \end{cases} \quad (23.9)$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence.

On a $ZU(\mathfrak{g}_{i_1}) \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{i_1-1})$, par le Lemme (23.4), il existe donc un couple $(y, z) \in ZU(\mathfrak{g}_{i_1-1}) \times ZU(\mathfrak{g}_{i_1}) \setminus \{0\}$ tel que $[X_{i_1}, y] = z$. On pose $P_1 = X_{i_1}$, $Q_1 = y$ et $c = z$.

Pour un certain $p \in \llbracket 2, d \rrbracket$, on suppose construit $(P_1, \dots, P_{p-1}), (Q_1, \dots, Q_{p-1}), c$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad P_k \in U(\mathfrak{g}_{i_k}) \setminus U(\mathfrak{g}_{i_{k-1}}), \quad Q_k \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{k-1}}), \quad c \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}) \setminus \{0\} \quad (23.10)$$

qui vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket^2, \quad \begin{cases} [P_i, P_j] & = 0 \\ [Q_i, Q_j] & = 0 \\ [P_i, Q_j] & = \delta_i^j c \end{cases} \quad (23.11)$$

On a $ZU(\mathfrak{g}_{i_p}) \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}})$, par le Lemme (23.4), il existe $(y, z) \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}) \times ZU(\mathfrak{g}_{i_p}) \setminus \{0\}$ tel que $[X_{i_p}, y] = z$.

Considérons alors l'opérateur $\Gamma = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y}{z}\right)^k (ad X_{i_p})^k$ et désignons pour le moment par N un entier naturel quelconque.

On pose d'abord pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\tilde{P}_i = z^N \Gamma(P_i)$ et $\tilde{Q}_i = z^N \Gamma(Q_i)$.
On alors d'après le Lemme (23.5) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket^2, \quad \begin{cases} [\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] & = 0 \\ [\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_j] & = 0 \\ [\tilde{P}_i, \tilde{Q}_j] & = \delta_i^j z^{2N} \Gamma(c) \end{cases} \quad (23.12)$$

On pose maintenant $\tilde{P}_p = X_{i_p}$ et $\tilde{Q}_p = z^{2N-1} y \Gamma(c)$, on a $[\tilde{P}_p, \tilde{Q}_p] = z^{2N} \Gamma(c)$.
On a par le Lemme (23.5) et par construction :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \begin{cases} [\tilde{P}_p, \tilde{P}_i] & = 0 \\ [\tilde{Q}_p, \tilde{Q}_i] & = 0 \\ [\tilde{P}_p, \tilde{Q}_p] & = z^{2N} \Gamma(c) \end{cases} \quad (23.13)$$

Un calcul à partir de la formule de Γ et le Lemme (23.5) permet d'obtenir

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \tilde{P}_k \in U(\mathfrak{g}_{i_k}) \setminus U(\mathfrak{g}_{i_{k-1}}), \quad \tilde{Q}_k \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{k-1}}) \quad (23.14)$$

On a $c \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}})$ et la chaine d'inclusions $ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}) \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}} + 1) \subsetneq \dots \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{i_p} - 1)$, donc $c \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}})$. Comme $\Gamma(c) \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}})$ d'après (23.2) et comme $[X_{i_p}, \Gamma(c)] = 0$ par le Lemme (23.5), on en déduit que $\Gamma(c) \in ZU(\mathfrak{g}_{i_p})$.

Nous allons montrer que, quitte à modifier y , on peut obtenir $\Gamma(c) \neq 0$.

Si l'on regarde les conditions imposées à y , force est de constater que l'on peut changer y par $y + tz$ avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

Soit $t \in \mathbb{R}$, posons $\Gamma_t = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y+tz}{z}\right)^k (adX_{i_p})^k$. On a

$$\begin{aligned} \Gamma_t(c) &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{y+tz}{z}\right)^k (adX_{i_p})^k .c \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{y}{z}\right)^{k-j} t^j \right) (adX_{i_p})^k .c \\ &= \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \geq j} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} \left(\frac{y}{z}\right)^{k-j} (adX_{i_p})^k .c \right) \frac{(-1)^j}{j!} t^j \\ &= \sum_{j \geq 0} \Gamma((adX_{i_p})^j .c) \frac{(-1)^j}{j!} t^j \end{aligned} \quad (23.15)$$

Soit $j_0 \in \mathbb{N}$ l'entier maximal pour lequel $(adX_{i_p})^j .c$ est non nul (il existe car $c \neq 0$), alors $(adX_{i_p})^{j_0} .c \in ZU(\mathfrak{g}_{i_p})$. Or Γ restreint à $ZU(\mathfrak{g}_{i_p})$ est l'identité, ce qui prouve la non nullité du coefficient de t^{j_0} . Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_t(c) \neq 0$.

On suppose donc que y est choisi de sorte que $\Gamma(c) \neq 0$.

On choisit maintenant l'entier N suffisamment grand pour que $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{p-1}$ et $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{p-1}$ soient dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{i_p})$, ce qui est possible grâce à la nilpotence de l'algèbre \mathfrak{g} .

On pose alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P_i = \tilde{P}_i$, $Q_i = \tilde{Q}_i$ et on effectue le remplacement $c \leftarrow Z^{2N} \Gamma(c)$.

Par récurrence on construit :

$$(P_1, P_2, \dots, P_d) \in U(\mathfrak{g})^d, \quad (Q_1, Q_2, \dots, Q_d) \in U(\mathfrak{g})^d, \quad c \in ZU(\mathfrak{g}_{i_d}) \setminus \{0\} \quad (23.16)$$

avec

$$\forall p \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad P_p \in U(\mathfrak{g}_{i_p}) \setminus U(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}), \quad Q_p \in ZU(\mathfrak{g}_{i_{p-1}}) \quad (23.17)$$

qui vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \quad \begin{cases} [P_i, P_j] & = 0 \\ [Q_i, Q_j] & = 0 \\ [P_i, Q_j] & = \delta_i^j c \end{cases} \quad (23.18)$$

Et comme on a la chaîne d'inclusions $ZU(\mathfrak{g}_{i_d}) \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_{i_{d+1}}) \subsetneq \dots \subsetneq ZU(\mathfrak{g}_n)$, on a bien $c \in ZU(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$. □

Références

- [1] P. Bertozzoni, R. Conti, and W. Lewkeeratiyutkul. *A category of Spectral Triples and Discrete Groups with Length Function*. *Preprint*, (2005).
- [2] J.L. Clerc, P. Eymard, J. Faraut, M. Rais, and R. Takahashi. Représentations des groupes de lie nilpotents et méthode des orbites. In *Analyse harmonique*, Les cours du C.I.M.P.A., pages 447–708. C.I.M.P.A, Nice, (1983).
- [3] A. Connes. *Non commutative geometry and reality*. *J.Math.Phys.*, Volume **36**, 41-144,6194-6231, (1995).
- [4] A. Connes and H. Moscovici. *The local index formula in noncommutative geometry*. *Geom. Funct. Anal*, **5**, No 2 :174–243, (1995).
- [5] L. Corwin and F.P. Greenleaf. *Representations of Lie groups and their applications. Part 1 : Basic theory and examples*. Cambridge studies in advanced mathematics, (1990).
- [6] C.Varilly, Joseph . *An introduction to noncommutative geometry*. Eur.Math.Soc, 2006.
- [7] J. Dixmier. *Sur les algèbres de Weyl*. *Bull. S.M.F*, **96** :209–242, (1968).
- [8] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes*. Gauthier-Villars,Paris, (1974).
- [9] I.M. Gelfand and A.A. Kirillov. *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S*, tome **31**, 5-19, (1966).
- [10] C. Godfrey. *Ideals of coadjoint orbits of nilpotent Lie algebra*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **233** :295–307, (1977).
- [11] R. Goodman. *Elliptic and subelliptic estimates for operators in a enveloping algebra*. *Duke Math. J.*, **47** :819–833, (1980).
- [12] N. Higson. *A note on regular spectral triples*. (2003).

- [13] N. Higson. *Meromorphic continuation of zeta functions associated to elliptic operators*. In *Operator algebras, quantization and noncommutative geometry*, volume **365** of *Contemp. Math.*, pages 129–142, Providence, RI., (2004). Amer. Math. Soc.
- [14] A. Hulanicki and J.W.W Jenkins. *Nilpotent Lie groups and eigenfunction expansions of Schrodinger operators*. *Studia Math.*, **87** :239–252, (1987).
- [15] A. A. Kirillov. *Unitary representations of nilpotent Lie groups*. *Uspehi Mat. Nauk.*, **17** :57–110, (1962).
- [16] L. Magnin. *Sur les algèbres de lie de dimension ≤ 7* . *J. Geom. Phys.*, **3** :119–144, (1986).
- [17] D. Manchon. *Calcul symbolique et formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*. *Thèse de l'université de Paris 7*.
- [18] D. Manchon. *Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents et applications*. *J.Funct.Anal*, No 102, 206-251, (1991).
- [19] D. Manchon. *Distributions à support compact et représentations unitaires*. *Journal of Lie Theory*, **9** :403–424, (1999).
- [20] D. Manchon. *Front d'onde et propagation des singularités pour un vecteur distribution*. *Colloquium Mathematicum*, Volume **81**, No 2, (1999).
- [21] S. Minakshisundaram and A. Pleijel. *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemann manifolds*. *Canadian J. Math*, **1** :242–246, (1949).
- [22] Mora, Teo. *An introduction to commutative and noncommutative Gröbner Bases*, volume Volume 10. Theor.comp.sci, 1994.
- [23] E. Nelson. *Analytic vectors*. *Ann. of Math*, Numero 70, 572-615, (1959).
- [24] S. Paycha. *A canonical trace associated with certain Spectral triples*. *SIGMA*, No 6, (2010).
- [25] M. Reed and B. Simon. *Functional analysis*. Elsevier, (1980).
- [26] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, (2009).
- [27] R.T. Seeley. *Complex powers of an elliptic operator*. *Proc. Symp. Pure Math.*, **10** :288–307, (1967).
- [28] S.A. Smagin. *Fractional powers of an hypoelliptic operator in \mathbb{R}^n* . *Soviet Math.Dokl.14*, Volme **2**, 585-588, (1973).
- [29] V.M. Tuloskii and M.A. Shubin. *On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators on \mathbb{R}^n* . *Math.USSR Sbornik*, Volume **21**, 565-583, (1973).
- [30] O. Uuye. *Pseudo-differential operators and regularity of spectral triples*. *Fields Institute Communications*, **61** :153–163, (2011).
- [31] A. Voros. Séminaire Goulaouic-Schwartz. Exposé **VI**, (1979-1980).
- [32] A. Voros. *Spectral zeta functions*. *Advanced studies in Pure Mathematics*, **21** :327–358, (1992).