



HAL
open science

Développement et validation d'un analyseur de surface d'onde en plan focal pour un instrument multi-pupilles

Sébastien Vievard

► **To cite this version:**

Sébastien Vievard. Développement et validation d'un analyseur de surface d'onde en plan focal pour un instrument multi-pupilles. Optique [physics.optics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066327 . tel-01725155

HAL Id: tel-01725155

<https://theses.hal.science/tel-01725155>

Submitted on 7 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale de Physique en Ile-De-France (EDPIF 564)

Développement et validation d'un analyseur de surface d'onde en plan focal pour instruments multi-pupilles

THÈSE

soutenue publiquement le 28 Septembre 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie
(Spécialité Physique)

par

Sébastien Vievard

Composition du jury :

Président du jury :	Gérard ROUSSET
Directeur de thèse :	Nicolas TREPS
Rapporteurs :	Marc FERRARI Maud LANGLOIS
Examineur :	Baptiste PAUL
Invités :	Frédéric CASSAING Laurent MUGNIER

Remerciements

La vie est faite de rencontres et d'interactions permettant de se façonner, d'évoluer et de traverser différentes expériences ou épreuves. Je souhaite commencer ce manuscrit par remercier toutes les personnes que j'ai pu avoir autour de moi, ayant permis de près ou de loin le bon déroulement de cette thèse.

Je commence donc par remercier Frédéric Cassaing pour son encadrement, sa patience et ses conseils durant ces trois années, qui ont contribué à faire de moi une personne plus mûre dans le travail, et plus rigoureuse. Ses idées brillantes parsemées dans la thèse ont permis son aboutissement positif. Son esprit toujours joyeux et plein d'humour m'ont également aidé dans l'achèvement, en trois ans, d'une belle thèse.

Je souhaite ensuite remercier Laurent Mugnier, mon second encadrant. Son intelligence, son ouverture d'esprit mais également son pragmatisme ont grandement aidé à guider la thèse sur de bon rails, surtout au cours de la dernière année. Je souhaite également le remercier pour ses bons conseils, sa bonne humeur, et ses commentaires de relectures pertinents et parfois plein d'humour ;) .

Je remercie Nicolas Treps, mon directeur de thèse, pour sa confiance dans cette aventure. Malgré le peu de contact que nous avons pu avoir, il a pris le temps de suivre la thèse et donner son point de vue et des conseils utiles pour la bonne progression de mon travail.

Je n'oublie pas également Gérard Rousset, qui m'a aiguillé vers Frédéric Cassaing lorsque j'étais au chômage, et à la recherche d'un projet intéressant dans lequel m'impliquer. Sur ce point, j'ai eu ce que je voulais. Merci également pour son implication dans mon comité de suivi de thèse, puis à la présidence de mon jury de thèse. C'était un honneur et un plaisir pour moi. Je souhaite également remercier Jean-Michel Reess, mon parrain de thèse dans le cadre du suivi de comité de thèse. Merci pour nos discussions qui m'ont aidé dans la compréhension (et l'appréhension) de mon sujet. Ces moments passés à l'observatoire de Meudon m'ont aussi permis de sortir des habitudes quotidiennes, afin de retrouver un lieu et une équipe qui sont pour moi une source d'inspiration.

Je remercie Thales Alenia Space (TAS) en la personne de Frédéric Falzon pour le financement de cette thèse. Je remercie aussi Baptiste Paul, de TAS, pour son suivi de la thèse, ses bons aiguillages et sa participation au jury de thèse en tant qu'examina-

teur. Merci également à Maud Langlois et Marc Ferrari, mes deux rapporteurs, pour leur lecture de mon manuscrit et leurs questions pertinentes.

Je remercie l'équipe des permanents du DOTA/HRA de Châtillon pour ces moments passés avec eux qui m'ont aidé sur un plan personnel mais également professionnel. Je remercie tout particulièrement Joseph Montri, avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sur l'interface du banc BRISE. Sans la disponibilité et la bonne humeur de Joseph, maître incontesté et incontestable de LabView, je n'aurais pas eu l'occasion d'avoir des résultats expérimentaux aussi aboutis dans ma thèse. Je remercie ensuite Nicolas Vedrenne pour sa disponibilité, ses bons conseils, sa bonne humeur et son accueil chaleureux au sein de l'équipe. Je remercie aussi Vincent Michau pour ces discussions qui ont eu pour avantage de me remettre en question de manière pertinente. Merci à Marie-Thérèse également pour son accueil chaleureux et sa bonne humeur ! Merci aussi à Aurelie, Serge, Leo, Jeff, Thierry, Cyril, Clelia, Jean-Marc, Bruno et Francis qui ont permis au travers de divers discussions (scientifiques, footballistiques, cinématographiques ou autres...) ou de sparing (de boxe, mention spéciale pour Cyril ;)) de faire en sorte que l'ambiance soit toujours au beau fixe au sein de l'équipe. Ils seront peut-être maintenant contents que ma musique (Hakuna Matata, Renaud, Pink Floyd...) ne retentisse plus dans les couloirs de l'ONERA :).

Je souhaite adresser ensuite un immense merci et toute ma gratitude à l'Ecole Traditionnelle de Vo Dan Toc. Mon implication dans cet art martial m'a permis de surmonter beaucoup de difficultés et conflits intérieurs. Un grand merci à mes maîtres Kamel et Thierry pour leur patience, leur écoute et leurs bons conseils. Merci à Narsou pour son soutien sans faille dans les moments difficiles. Merci également à toute l'équipe, Elodie, Jacques, Christophe, Kevin, Claire, Marie-Charlotte, Hantaso, Lucile, Paul, Lionel, Stéphane et j'en passe, pour leur bonne humeur et leur soutien.

Merci ensuite à tous mes amis qui ont su m'entourer durant la thèse. Tout d'abord mes amis rencontrés à l'ONERA, dont Faustine Cantalloube qui a été là pour me guider, m'écouter, me conseiller et qui a pour moi été une grande source d'inspiration. Merci à Joel Teixeira pour son soutien surtout dans la dernière ligne droite, et à ses discussions de séries ou de foot qui ont largement contribué à me changer les idées quand il le fallait. Désolé pour les raclées que j'ai pu te mettre à FIFA ;). Merci à mon co-bureau furtif, Sylvain Egron, qui m'a beaucoup aidé au milieu et à la fin de ma thèse à mettre en relief mon sujet. Il m'a aussi bien aidé à me canaliser lors de la rédaction, grâce à des pauses clopes qui étaient providentielles et toujours animées de discussions très intéressantes. Merci à mon autre co-bureau (moins furtif) Adrien, avec qui j'ai eu l'occasion de mêler travail et bonne humeur grâce à son humour et nos goûts musicaux partagés (et imposés au reste de l'équipe ;)). Merci au reste des doctorants avec qui j'ai eu de très bons contacts, Elena, Kassem, Olivier, Elena, Pedro, Khanh Linh, Silvère, Cedric, Clément, Jessica, Lucien, Anais (Bernard et Pruvot), Lucie, Rémi et à toute l'équipe des stagiaires (trop nombreux pour tous les citer) qui ont fait en sorte que l'ambiance quotidienne soit bonne dans et en dehors de l'ONERA ! Un grand merci aussi à Elsa Huby et Garima Singh, qui par des conversations enrichissantes m'ont permis de me motiver pour ma thèse et de me guider pour les perspectives après la

thèse. Merci aussi à Clément Perrot qui a travaillé sur les début de ce projet durant son stage de Master, et qui était normalement le candidat numéro 1 pour cette thèse. Son refus et son départ vers d'autres horizons m'ont permis de pouvoir m'épanouir dans ce domaine qui me passionne. Je remercie Laetitia Foulon pour le soutien qu'elle a pu m'apporter durant la thèse, et la motivation que j'ai pu trouver en moi grâce à elle pour mener à bien mon travail. Je remercie enfin mes amis de longue date pour leur soutien moral et les bons moments passés avec eux. Merci à Vincent et ses frères pour leur dynamisme, leur enthousiasme et leur bonne humeur qui m'ont accompagné, merci à Samantha et Cannelle pour leur soutien et ces discussions toujours très riches, merci à Estefania pour ses conseils et sa bonne humeur. Je n'oublie pas Charlie, Tristan, Jean-Marc, John, Alioune, Chris, Sergio, Alfred, Bayram qui ont chacun amené de la folie, et de la bonne humeur dans ma vie.

Je remercie enfin toute ma famille pour leur soutien inconditionnel pendant la thèse et durant la soutenance. Le fait de les avoir à mes côtés m'a donné des ailes et m'a donné encore plus de motivation pour achever ce travail de thèse. Merci à tous mes cousins, Albane, Agnès, Ibrahim, Jérémie, Faustine pour nos discussions et leur présence à mes côtés. Un grand merci à mes grands parents qui ont pu faire le déplacement, et une pensée émue à Suzanne et Jojo qui ne sont malheureusement plus là, mais qui m'ont accompagné spirituellement tout au long de mon parcours.

Je souhaite maintenant mentionner des personnes très importantes qui m'ont permis, lorsque j'étais un petit collégien de troisième, de savoir ce que je voulais faire de ma vie grâce à un simple stage en entreprise à l'observatoire de Meudon : un immense merci à Alain et Françoise Semery qui m'ont donné l'occasion d'éveiller en moi l'intérêt pour l'astrophysique. C'est en effet à leurs côtés, mais également aux côtés de Jérôme Parisot et Jean-Michel Reess que j'ai été fasciné par ce domaine, grâce à leur intérêt et leur ouverture d'esprit. Sans eux, je n'aurais probablement pas eu l'étincelle qui a amené à la passion et l'investissement que j'ai aujourd'hui pour ce domaine.

Merci également à Catherine Larue, ma très chère marraine, qui a su me donner d'excellents conseils et un soutien sans failles au cours de mes études et durant ma thèse. Un grand merci à mon adorable sœur, Gwenaëlle, pour son soutien et la bonne humeur apportée par elle-même, Cyril, Solène et Maxence lors des épreuves. Merci à Mika, mon frère de cœur, qui me suit, m'aide et me soutien depuis tout petit. Merci également à Jean-Raymond, Martine, Isabelle et Gégé qui ont su aussi m'apporter beaucoup de soutien, de conseils et une présence précieuse.

Enfin, je termine par remercier mes parents. Ils ont toujours été là pour moi, et ont toujours soutenu mes choix. Ils ont su me tendre des perches pour ne pas que je sois perdu. Aujourd'hui je vis mon rêve, et je ne sais pas de quoi sera fait demain. Cependant je sais qu'en hauteur ils m'élèvent, je n'ai donc pas peur de m'écarter du chemin.

Table des matières

1	Imagerie à haute résolution angulaire par instruments multi-pupilles	23
1.1	L'instrumentation multi-pupille	24
1.2	Les différents instruments multi-pupilles	26
1.2.1	Les réseaux de télescopes	26
1.2.2	Les télescopes segmentés	26
1.3	L'optique de Fourier en SOO	29
1.3.1	Formation d'image	29
1.3.2	Caractéristiques des configurations pupillaires	31
1.3.3	Modélisation de la phase	33
1.3.4	Effets des aberrations sur un instrument multi-pupille	36
1.4	Budget d'erreur de l'instrument	37
1.5	L'optique active	38
1.6	L'analyse de front d'onde	39
1.6.1	L'analyse de surface d'onde en plan pupille : l'analyseur de Shack Hartmann	39
1.6.2	L'analyse de surface d'onde en plan focal	41
1.7	L'alignement des instruments multi-pupilles	45
1.7.1	L'alignement géométrique	45
1.7.2	L'alignement interférométrique	48
1.7.3	L'alignement fin	50
1.8	Conclusion du chapitre	50
2	Méthodes pour le cophasage	53
2.1	L'algorithme de cophasage fin LAPD	54
2.1.1	Nouvelle expression du critère dans le cas faible phase	54
2.1.2	Estimation des aberrations	55
2.2	Outils numériques de simulation d'instruments multi-pupilles	55
2.2.1	Caractéristiques géométriques de la pupille : <i>pup</i>	56
2.2.2	Caractéristiques physiques de la pupille : <i>pep</i>	56
2.2.3	Génération d'images d'instruments multi-pupilles : <i>pep_opt</i>	56
2.2.4	Modélisation du bruit	57
2.3	Caractérisation numérique des algorithmes de cophasage	58
2.3.1	Simulation d'instruments multi-pupilles	58
2.3.2	L'optimisation des paramètres	59
2.3.3	La linéarité	59

2.3.4	La propagation de bruit	59
2.3.5	Influence des erreurs d'étalonnage	60
2.3.6	Influence des aberrations de hauts ordres	60
2.4	Le banc BRISE	61
2.4.1	Le module source	61
2.4.2	Le module de perturbation	62
2.4.3	Le module de diversité	63
2.4.4	Le module de contrôle	63
2.5	Conclusion du chapitre	63
I	ALIGNEMENT D'INSTRUMENTS MULTI-PUPILLES	65
3	Alignement géométrique sur point source : ELASTIC	67
3.1	Modélisation des images	68
3.1.1	La pseudo-défocalisation : diversité de phase géométrique	68
3.1.2	Modèle de fonction pupillaire	70
3.1.3	Modèle de Fonction de Transfert Optique	71
3.2	Principe de l'estimateur : définition de l'Interspectre Décalé en Fréquence	73
3.2.1	Philosophie de l'algorithme	73
3.2.2	Développement de l'estimateur analytique : l'Interspectre Décalé en Fréquence des images	76
3.3	Exploitation des auto-pics de l'interspectre décalé en fréquence : ELASTIC-1	79
3.3.1	Définition du domaine de validité de ELASTIC-1	80
3.3.2	Solution du problème inverse	81
3.3.3	Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-1	81
3.4	Exploitation de la totalité l'Interspectre Décalé en Fréquence : ELASTIC-2	98
3.4.1	La linéarisation des inter-pics	98
3.4.2	Solution du problème inverse	100
3.4.3	Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-2	103
3.5	Conclusion du chapitre	106
4	Alignement interférométrique sur point source : SPRING	109
5	Cophasage interférométrique : LAPD	115
5.1	Inversion des modes pour LAPD	116
5.1.1	Nirta6, cas compact	116
5.1.2	Nirta6, cas dilué	118
5.2	Caractérisation de l'algorithme faible phase sur point source	119
5.2.1	Optimisation de la diversité de phase	119
5.2.2	Linéarité	121
5.2.3	Performances en fonction du bruit	127
5.2.4	Erreur sur la défocalisation	132
5.2.5	Influence des modes supérieurs	133
5.3	Caractérisation de l'algorithme faible phase sur objet étendu	135

TABLE DES MATIÈRES

5.3.1	Scène étudiée	135
5.3.2	Optimisation de la diversité	136
5.3.3	Performances en fonction du bruit	138
5.4	Conclusion du chapitre	143
6	Validation expérimentale : alignement d'un miroir segmenté	145
6.1	Étalonnage du banc BRISE	146
6.1.1	Alignement du banc	146
6.1.2	Conformité modèle expérimental/modèle numérique	147
6.2	Validation expérimentale de ELASTIC-1	150
6.2.1	Implantation sur le banc	150
6.2.2	Boucle fermée	151
6.2.3	Résistance au bruit	153
6.2.4	Superposition des sous-FEPs	154
6.3	Validation expérimentale de ELASTIC-2	155
6.3.1	Implantation sur le banc	155
6.3.2	Boucle fermée	155
6.4	Validation expérimentale de LAPD	156
6.4.1	Implantation sur le banc	156
6.4.2	Boucle fermée	157
6.4.3	Résistance au bruit	159
6.5	Conclusion du chapitre	160
A	Outils mathématique : la décomposition en valeurs singulières d'une matrice	167
B	Décomposition de la défocalisation pour un instrument multi-pupille	169
C	Conversion des coefficients de tip-tilt	171
D	Amplitude de diversité pour la séparation des auto-taches pour ELASTIC	173
E	Publication pour le Journal of Optical Society of America A : Large amplitude tip/tilt estimation by geometric diversity for multiple-aperture telescopes	175
F	Papier de conférence SPIE 2016 : Real time alignment and co-phasing of multi-aperture systems using phase diversity	189

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures

1	Zoologie des projets de télescopes passés et futurs	19
1.1	Évolution du diamètre des instruments imageurs.	25
1.2	Very Large Telescope Interferometer	26
1.3	Schéma d'un télescope segmenté	27
1.4	Observatoire W.M.Keck	27
1.5	James Webb Space Telescope	28
1.6	HOASIS	28
1.7	Relations d'imagerie	31
1.8	Caractéristiques des configurations pupillaires	32
1.9	Les 21 premiers polynômes de Zernike.	34
1.10	Calcul des premiers modes Z_k^\pm . Ligne 1 : Illustration des modes de Zernike "classiques". Lignes 2 et 3 : illustration des modes Z_k^+ et Z_k^-	35
1.11	Impact de la phase sur la fonction pupille, la FEP, la FTM et la FTP.	36
1.12	Budget d'erreur d'un ISOO	38
1.13	Support d'un segment composé d'un timon de 27 points et trois actuateurs. Source : [Dimmler et al., 2008].	39
1.14	Schéma de principe de l'analyseur Shack-Hartmann.	40
1.15	Schéma de principe de l'analyseur Shack-Hartmann modifié pour instrument multi-pupille.	40
1.16	Principe de la diversité de phase	42
1.17	Schéma de systèmes télécentrique ou non	43
1.18	Procédure d'alignement du télescope James Webb	46
1.19	Simulation d'image plan focal d'un télescope désaligné	47
1.20	Principe du <i>Geometrical Phase Retrieval</i>	48
1.21	Simulation d'image plan focal d'un télescope désaligné, cohérent	49
1.22	<i>Dispersed Hartmann Sensors</i>	49
1.23	Simulation d'image plan focal d'un télescope aligné	50
2.1	Simulation du plan pupille d'un télescope segmenté de 6 sous-pupilles	58
2.2	Simulation du plan pupille d'un télescope segmenté de 18 sous-pupilles	59
2.3	Le banc BRISE	61
2.4	Module de perturbation NIRTA	62
3.1	Illustration plans de diversités d'un télescope segmenté désaligné	69
3.2	Schéma explicatif de la pseudo-défocalisation	70
3.3	Comparaison entre la défocalisation et la pseudo-défocalisation	70

3.4	Illustrations plan pupille, Fonction d'Étalement de Point, Fonction de Transfert Optique	72
3.5	Superposition de deux images de diversité simulées	73
3.6	Simulations d'images de diversité et de corrélations d'images	74
3.7	Simulation de corrélations d'images pour des amplitudes de pseudo-défocalisation différentes, dans le cas à 3 sous-pupilles.	75
3.8	Explication de l'Interspectre Décalé en Fréquence	77
3.9	Position de parking dans le cas NIRTA6 compact et dilué et corrélation des images de diversité	82
3.10	Position de parking dans le cas d'un télescope à 18 sous-pupilles et corrélation des images de diversité	83
3.11	Positions successives d'une sous-pupille mobile pour l'étude de linéarité de ELASTIC-1.	84
3.12	Linéarité de ELASTIC-1 dans le cas à 6 sous-pupilles pour un décalage fréquentiel de 1	84
3.13	Linéarité de ELASTIC-1 dans le cas à 18 sous-pupilles compactes.	85
3.14	Linéarité de ELASTIC-1 dans le cas à 6 sous-pupilles pour un décalage fréquentiel de 2	86
3.15	Dynamique de ELASTIC en fonction du décalage fréquentiel	86
3.16	Évolution de l'écart totale de l'estimation de ELASTIC-1 en fonction de l'amplitude de la pseudo-défocalisation et du décalage fréquentiel, dans les cas Nirta6 compact (gauche) et dilué (droite).	88
3.17	NIRTA18 : Performances en fonction de la pseudo-défocalisation.	89
3.18	Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 compacte.	90
3.19	Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 diluée.	91
3.20	Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA18.	93
3.21	NIRTA6 et NIRTA18 en présence d'aberrations de hauts ordres	94
3.22	Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en fonction d'une erreur de calibration de la pseudo-défocalisation.	94
3.23	Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en fonction d'une erreur de calibration de la pseudo-défocalisation, dans le cas NIRTA18.	95
3.24	Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en présence d'aberrations de hauts ordres.	96
3.25	Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en présence d'aberrations de hauts ordres dans le cas Nirta18.	97
3.26	Illustration de la matrice C'_m	101
3.27	Illustration de la matrice V	102
3.28	Positions successives des sous-FEPs pour l'étude de linéarité de ELASTIC-2.	104
3.29	Étude de la linéarité de l'estimation de tilt fournie par ELASTIC-2.	105
3.30	Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-2 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 compacte.	106

TABLE DES FIGURES

5.1	Valeurs singulières et derniers modes associés de la matrice A dans le cas Nirta6 compact sans aberrations. Imagettes de gauche à droite : Tip, Tilt et Piston globaux.	117
5.2	Valeurs singulières et derniers modes associés de la matrice A dans le cas Nirta6 compact sans aberrations.	118
5.3	Valeurs singulières associées à la matrice A dans le cas Nirta6 dilué sans aberration.	119
5.4	Optimisation de la défocalisation pour les algorithmes LAPD et itératif.	120
5.5	Optimisation de la diversité de phase.	121
5.6	Étude de la linéarité en Piston dans le cas NIRTA6. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.	122
5.7	Étude de la linéarité en Tip dans le cas de NIRTA6. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.	122
5.8	Étude de la linéarité en Piston dans le cas NIRTA18. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.	123
5.9	Étude de la linéarité en Tip dans le cas NIRTA18. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.	124
5.10	Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA6.	125
5.11	Étude de la linéarité en Tip de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA6.	125
5.12	Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA18.	126
5.13	Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA18.	126
5.14	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta6 sans aberration.	127
5.15	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par NIRTA6, avec perturbations en piston tip tilt avec une dispersion de 0.2 rad RMS.	129
5.16	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta18, sans aberrations.	130
5.17	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta18, avec aberrations.	131
5.18	Erreur sur la défocalisation.	132
5.19	Erreur sur la défocalisation.	133
5.20	Erreur sur la défocalisation.	133
5.21	Erreur sur la défocalisation.	134
5.22	Vue aérienne de Toulouse faite dans le cadre de la mission PELICAN.	135
5.23	Partie de la scène de Toulouse vue par un télescope avec une résolution spatiale de 1 mètre	136

5.24	Optimisation de la diversité de phase dans le cas de l'imagerie d'une scène étendue par la pupille NIRT6.	137
5.25	Optimisation de la diversité de phase dans le cas de l'imagerie d'une scène étendue par la pupille NIRT6.	137
5.26	Scène vue par un instrument type Nirta6.	138
5.27	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un objet étendu par Nirta6, sans aberration.	139
5.28	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un objet étendu par Nirta6, avec aberrations.	140
5.29	Scène vue par un instrument type Nirta18.	141
5.30	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas de l'observation d'une scène étendue, sans aberrations.	142
5.31	Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un objet étendu par Nirta18, avec aberrations.	143
6.1	Vue de face du miroir NIRTA, comme Fig. 2.4.	148
6.2	Figures d'interférences entre différents segment du miroir NIRTA.	148
6.3	Identification des segments du miroir Nirta vus par la caméra.	148
6.4	Rotation différentielle entre Nirta et la camera.	149
6.5	Graphe de la FTM expérimentale selon deux coupes transversales et FTM simulée avec un sur-échantillonnage de 8,05.	149
6.6	Gauche : simulation du plan pupille adapté au banc BRISE. Droite : position de parking, objectif de ELASTIC-1.	150
6.7	Principe de la boucle fermée avec ELASTIC-1 au cours du temps.	151
6.8	Boucle fermée ELASTIC-1.	152
6.9	Graphe de $\hat{a}'_{k,n}$ fonction de la trame.	153
6.10	Répétabilité ELASTIC-1.	154
6.11	Superposition des sous-FEPs, image focale (gauche) et pseudo-défocalisée (droite).	154
6.12	Boucle fermée ELASTIC-2.	155
6.13	Évolution de l'estimation des tip/tilt $\hat{a}'_{k,n}$ en fonction de la trame.	156
6.14	Gauche : pupille simulée adaptée au banc BRISE. Droite : simulation de l'image par l'instrument simulé cophasé.	157
6.15	Principe de la boucle fermée avec LAPD.	157
6.16	Échantillonnage de quelques images acquises lors de la boucle fermée LAPD. Haut : image focale. Bas : image défocalisée.	158
6.17	Graphe de l'estimation fournie par LAPD en fonction de la trame.	158
6.18	Répétabilité LAPD.	159
B.1	Schéma de configuration multi-pupille	169
C.1	Schéma d'une erreur de basculement (tip ou tilt)	171
D.1	Schéma explicatif pour la séparation des auto-taches	173

Acronymes

Acronyme	Description
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
BRISE	Banc Reconfigurable d'Interférométrie sur Sources Étendues
ELASTIC	Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation
E-ELT	European-Extremely Large Telescope
FEP	Fonction d'Étalement de Point
FTM	Fonction de Transfert de Modulation
FTO	Fonction de Transfert Optique
FTP	Fonction de Transfert de Phase
GMT	Giant Magellan Telescope
HDA	Hybrid Diversity Algorithm
IHM	Interface Homme-Machine
JWST	James Webb Space Telescope
LAPD	Linearized Analytic Phase Diversity
LUVOIR	Large UV/Optical/Infrared Surveyor
MASTIC	Multiple Aperture Software for Telescope Imaging and Cophasing
NIRTA	Numerically-corrected Imaging and Reduced-length Telescope Array
OHANA	Optical Hawaiian Array for Nanoradian Astrometry
RMS	Root Mean Square
RSB	Read-Out-Noise
SVD	Singular Value Decomposition
TF	Transformée de Fourier
TMT	Thirty Meter Telescope
VLT	Very Large Telescope Interferometer

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION

INTRODUCTION

En imagerie optique, en particulier pour l'astronomie ou pour l'observation de la Terre, la résolution spatiale d'un télescope est inversement proportionnelle au diamètre du miroir primaire du télescope imageur. Le diamètre d'un miroir monolithique est actuellement limité à une dizaine de mètres pour les télescopes au sol, quelques mètres dans l'espace (voir Fig. 1). Une solution proposée pour repousser ces limites est la segmentation du miroir primaire, ou l'association de plusieurs télescopes indépendants. Ce type d'instruments, que l'on qualifiera de multi-pupilles, permet d'associer plusieurs « sous-pupilles » qui, ensemble, se comportent comme un seul télescope de diamètre beaucoup plus important. L'association de sous-pupilles est donc incontournable afin de construire des instruments imageurs plus puissants, en terme de résolution spatiale. C'est pourquoi le nombre de projets d'instruments multi-pupilles ne cesse d'augmenter avec par exemple l'*European-Extremely Large Telescope* (European Southern Observatory) ou le *Thirty Meter Telescope* au sol, le *James Webb Space Telescope* (NASA), HOASIS (Thales Alenia Space) ou encore LUNAR (NASA) dans l'espace.

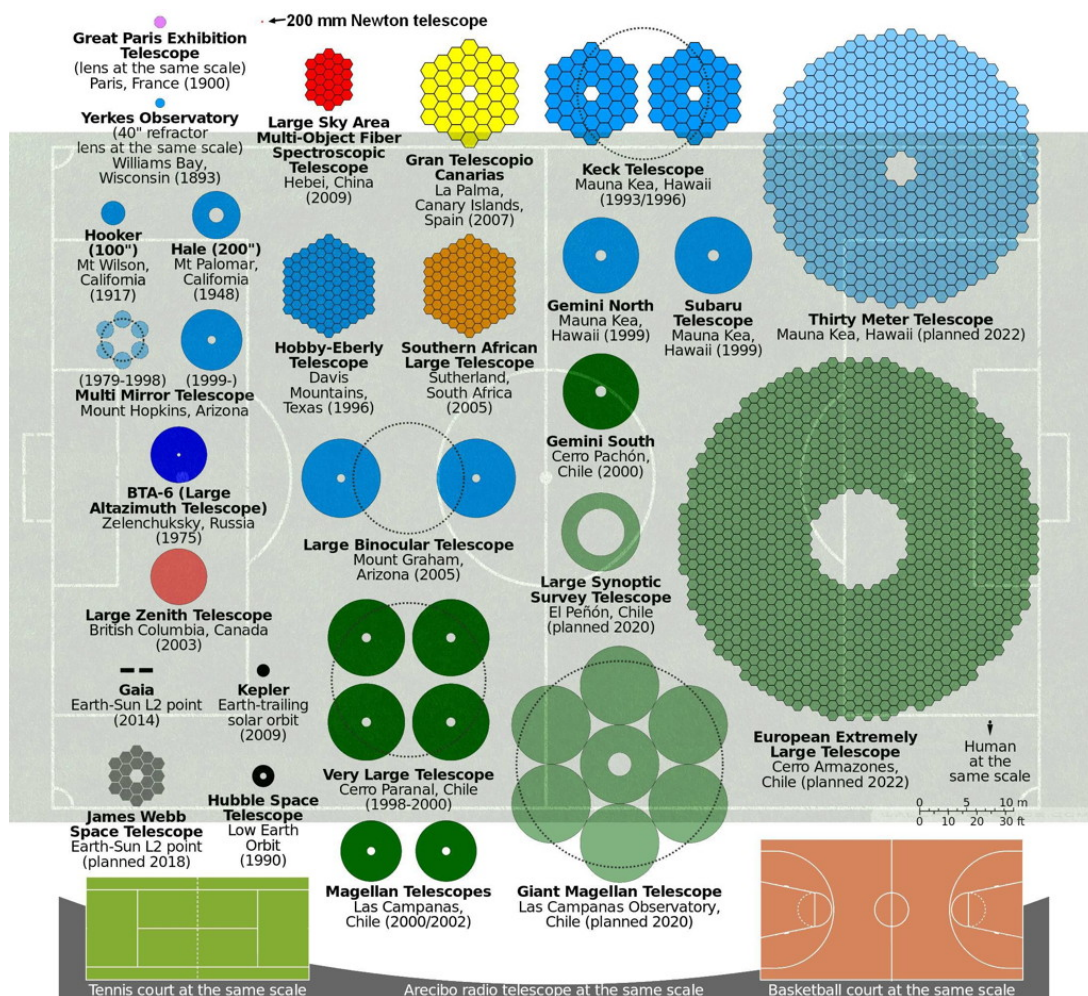


FIGURE 1 – Zoologie des projets de télescopes passés et futurs, à l'échelle. *xjubier.free.fr*.

Afin d'atteindre la limite de résolution angulaire des instruments multi-pupilles, il faut mesurer et corriger les aberrations jusqu'à une fraction de longueur d'onde. Dans le cas multi-pupille, ces aberrations sont spécifiquement le piston (différence de marche entre les sous-pupilles), le tip et le tilt (basculements différentiels entre les sous-pupilles), et peuvent être la conséquence de diverses perturbations sur le positionnement des sous-pupilles (précision d'usinage mécanique ou déploiement, changement de segment, dérives thermo-élastiques...).

L'objectif de cette thèse est de développer les outils nécessaires pour réaliser l'alignement complet d'un instrument multi-pupille : depuis un état fortement perturbé jusqu'à la limite de résolution. L'idée directrice est d'effectuer cet alignement au moyen d'outils simples d'implantation, à bas coût calculatoire et donc potentiellement exploitables en temps réel.

Les Analyseurs de Surface d'Onde (ASO) sont utilisés pour la mesure des aberrations. Les ASOs de type plan focal reposent sur l'analyse des déformations induites par les aberrations dans un plan d'imagerie (qui peut être le détecteur scientifique). De fait, ce type d'ASO présente l'avantage d'une implantation aisée, évitant d'une part l'ajout d'un dispositif auxiliaire dédié, et d'autre part de potentielles erreurs dites « non communes » entre le détecteur scientifique et ledit dispositif. L'analyse d'une seule image n'est cependant pas suffisante pour retrouver les erreurs de piston, tip et tilt dans le cas d'instruments multi-pupilles sauf dans certains cas spécifiques comme ceux étudiés par [Baron et al., 2008]. L'idée formulée par [Gonsalves, 1982], à l'origine pour les instruments monolithiques, a été d'utiliser en plus d'une image focale, une image défocalisée afin de lever toute ambiguïté sur la phase estimée : c'est la diversité de phase. Cette technique a alors été exploitée dans le cadre d'instruments multi-pupilles tout d'abord par [Paxman and Fienup, 1988], puis largement reprise par la suite (voir par exemple [Mugnier et al., 2006] pour une revue de cette technique). Les algorithmes de diversité de phase développés permettent la mesure et la correction des erreurs de piston, tip et tilt à une fraction de longueur d'onde ; il s'agit de ce qu'on appellera par la suite l'alignement fin ou le cophasage. Ils souffrent cependant de deux limitations :

- Ils ne peuvent opérer si les erreurs de tip/tilts sont supérieures à une fraction de longueur d'onde, ou si les erreurs de pistons sont supérieures à la longueur de cohérence de la source observée,
- ils reposent généralement sur des algorithmes à fort coût calculatoire, empêchant une correction en temps réel.

Le premier point énoncé soulève la question de la correction des grandes aberrations de piston, tip et tilt. Un alignement que l'on appellera *géométrique* doit être opéré en premier lieu, permettant de réduire les erreurs de tip et de tilt à une fraction de longueur d'onde, valeur au-delà de laquelle les différentes sous-pupilles ne peuvent guère interférer entre elles. Ceci permet alors d'abord la correction des grandes erreurs de piston puis l'entrée dans la zone d'accrochage des ASOs de correction fine. Des algorithmes ont été développés pour la correction des grandes erreurs de tip/tilt par exemple dans le cadre de la mission JWST mais requièrent un grand nombre de prises d'images, qui croît avec le nombre de segments [Perrin et al., 2016]. En ce qui concerne l'estimation des grands pistons, la technique utilisée pour le JWST repose sur l'ajout de matériel optique supplémentaire [Shi et al., 2004].

Le second point énoncé soulève la question d'une correction fine, l'alignement fin ou cophasage, à bas coût calculatoire donc potentiellement réalisable en temps réel. À ce jour en effet, très peu d'algorithmes de diversité de phase analytiques ont été validés expérimentalement pour la correction simple et rapide des petites erreurs de piston, tip et tilt ([Mocœur et al., 2009], [Denolle et al., 2013]).

Ce manuscrit est organisé en 2 parties. La première partie, qui contient 2 chapitres, remet la problématique de l'alignement d'un instrument multi-pupille dans son contexte, puis expose les outils qui ont été utiles pour y répondre.

La seconde partie traite des travaux réalisés dans le cadre de la thèse. Le chapitre 3 propose un algorithme original permettant l'estimation des grandes erreurs de tip-tilt : ELASTIC (Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation). Reposant sur l'analyse de la corrélation entre deux images seulement, il offre une solution analytique pour la mesure de tip-tilt sur chaque sous-pupille dans tout le champ du détecteur. Cet algorithme est tout d'abord établi, puis nous effectuons une évaluation de ses performances. Le chapitre 4 présente le principe d'une méthode simple pour la réduction des grandes erreurs de piston : SPRING (Sub-aperture Piston Reduction by Interferences in Non-redundant Groups). Grâce à une extension de l'algorithme ELASTIC, cette méthode permet de corriger les grandes erreurs de piston à une fraction de longueur de cohérence, en utilisant seulement le détecteur et les actionneurs des sous-pupilles. Le chapitre 5 traite la l'évaluation de performances d'un algorithme proposé par une doctorante précédente [Mocœur et al., 2009] pour l'estimation fine des petites erreurs de piston, tip et tilt, que nous avons baptisé LAPD (Linearized Analytical Phase Diversity) [Vievard et al., 2016]. C'est un algorithme de diversité de phase, analytique, qui se fonde sur une linéarisation de la fonction de transfert de l'instrument. Enfin, le chapitre 6 est dédié à la validation expérimentale de la chaîne globale d'alignement et cophasage, sur une source ponctuelle à bande spectrale étroite. Après avoir présenté et étalonné un banc de test comprenant un télescope segmenté, nous en effectuons l'alignement total depuis un état déréglé, avec de grandes aberrations, jusqu'à un état cophasé à la fraction de longueur d'onde.

TABLE DES FIGURES

Chapitre 1

Imagerie à haute résolution angulaire par instruments multi-pupilles

Contents

1.1	L'instrumentation multi-pupille	24
1.2	Les différents instruments multi-pupilles	26
1.2.1	Les réseaux de télescopes	26
1.2.2	Les télescopes segmentés	26
1.3	L'optique de Fourier en SOO	29
1.3.1	Formation d'image	29
1.3.2	Caractéristiques des configurations pupillaires	31
1.3.3	Modélisation de la phase	33
1.3.4	Effets des aberrations sur un instrument multi-pupille	36
1.4	Budget d'erreur de l'instrument	37
1.5	L'optique active	38
1.6	L'analyse de front d'onde	39
1.6.1	L'analyse de surface d'onde en plan pupille : l'analyseur de Shack Hartmann	39
1.6.2	L'analyse de surface d'onde en plan focal	41
1.7	L'alignement des instruments multi-pupilles	45
1.7.1	L'alignement géométrique	45
1.7.2	L'alignement interférométrique	48
1.7.3	L'alignement fin	50
1.8	Conclusion du chapitre	50

1.1 L'instrumentation multi-pupille

*Le monde n'est pas un rêve
et la lumière est son messenger*
Trinh Xuan Thuan

Dans son ouvrage *Le Cosmos et le Lotus*, Trinh Xuan Thuan nous informe que la science se nourrit d'observations et d'informations via des expériences ou des instruments d'observation, et que l'astronomie se trouve être la seule science où il n'est pas possible de faire des expériences. En effet, le *Big Bang*, les étoiles ou les exoplanètes ne peuvent pas être recréés en laboratoire. Notre étude du cosmos passe donc par son plus fidèle messenger : la lumière. D'une part, sa propagation à une vitesse finie nous permet d'obtenir des informations qui viennent du passé. D'autre part, l'analyse spatiale de la matière, via la lumière, renseigne sur la structure de l'Univers. Par ailleurs, son interaction avec la matière permet d'obtenir des informations sur la composition chimique des éléments qu'elle a traversés, ou dont elle provient. Enfin, elle nous donne des informations sur les mouvements cosmiques, de par la variation de sa couleur lorsque la source émettrice est en mouvement par rapport à un observateur. Collecter la lumière provenant du ciel nous permet donc d'étudier l'univers, pour tenter de mieux le comprendre. La raison d'être des télescopes est donc de collecter de plus en plus de lumière, pour obtenir de plus en plus d'informations de qualité croissante.

C'est en 1610 que Galilée décide d'exploiter la lunette, initialement utilisée pour l'observation longue distance sur Terre, à des fins astronomiques en la tournant vers le ciel, plus particulièrement vers la Lune. Au moyen de cet instrument composé d'une lentille de 26 mm de diamètre, il augmente ainsi la finesse de détection des observables d'un facteur $(26/6) \simeq 4$ et le flux reçu des cieux d'un facteur $(26/6)^2 \simeq 19$ par rapport à un oeil de diamètre environ égal à 6 mm. Grâce à cette amplification de performances, il découvre notamment les irrégularités sur la Lune, les phases de Vénus, les satellites de Jupiter. Ce "simple" instrument a permis de faire un bon considérable en avant dans la compréhension de l'univers puisqu'il a confirmé la théorie Copernicienne de l'héliocentrisme, mettant à mal la théorie Aristotélicienne affirmant que la Terre était au centre de l'univers. C'est en 1672 que Isaac Newton présente à la Royal Society un nouveau concept d'instrument pour l'observation astronomique. Il remplace la lentille (optique réfractive) par un miroir concave (optique reflective) permettant de concentrer la lumière. Ceci lui permet d'accroître le diamètre des optiques, et d'obtenir des images plus nettes en s'affranchissant d'effets chromatiques propres aux optiques réfractives. C'est ainsi qu'est né le concept de télescope. Dès lors, les diamètres des instruments imageurs ont pu être augmentés au fil des années (Fig. 1.1).

Est alors survenu un premier problème lié à la taille du miroir. En effet, plus les miroirs étaient de grande taille, plus la structure nécessaire au maintien et à la stabilisation de l'instrument était importante. Ainsi, si le télescope de 2.5 mètres du Mont Wilson est resté le plus grand entre les années 1920 et 1940, il a fallu par la suite

1.1. L'INSTRUMENTATION MULTI-PUPILLE

développer une nouvelle technique pour augmenter les diamètres des miroirs, sans que la structure ne soit trop importante (pouvant entraîner un affaissement du télescope). C'est ainsi qu'est née l'optique que l'on peut qualifier de "passive" : des déformations locales sur la structure supportant l'instrument permettent une stabilisation des optiques, comme dans le cas du télescope du Mont Palomar de 5 mètres de diamètre, construit dans la fin des années 1940. Seulement, lorsqu'il a été question de construire des télescopes de 8 mètres (par exemple, le Very Large Telescope au Chili), il a fallu réduire les coûts de construction et optimiser la stabilisation des optiques. Les miroirs devaient alors être de grand diamètre mais, dans certains cas, très minces. Le problème qui s'est posé résidait dans la déformation du miroir primaire lors du mouvement du télescope autour de ses axes pour pointer différentes zones dans le ciel. C'est ainsi qu'est née l'optique active, consistant à compenser les déformations du miroir primaire au moyen d'actuateurs agissant directement sur la forme de ce dernier. Cependant, les limitations technologiques empêchent de construire des miroirs monolithiques de plus de 8 mètres de diamètre sur Terre. En effet, rien que le transport d'un miroir de quelques dizaines de mètres est difficilement envisageable. En ce qui concerne les télescopes envoyés dans l'espace, on peut facilement imaginer une limite liée à la taille des lanceurs, mais également liée à des aspects de fragilité lors du décollage.

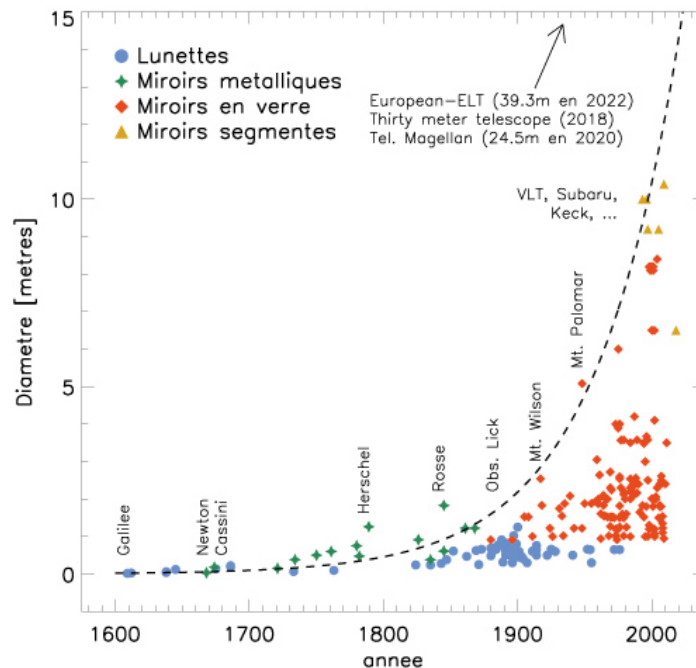


FIGURE 1.1 – Évolution du diamètre des instruments imageurs.

L'idée d'associer plusieurs sous-pupilles fut d'abord décrite par Hippolyte Fizeau dans les années 1850, baptisée comme interférométrie. En effet, cette association permet d'obtenir une résolution équivalente à celle d'un instrument dont le diamètre serait égal à la distance entre les sous-pupilles. Cette méthode fut mise en œuvre au début

des années 1920 par Albert Michelson et Francis Pease ([[Michelson and Pease, 1921](#)]), avant d'être développée par Antoine Labeyrie ([[Labeyrie, 1978](#)]) dans les années 1970. Jerry Nelson a de son côté imaginé dans les années 1970 la segmentation du miroir primaire. Il était à l'origine de la conception des télescopes Keck. C'est ainsi que la course au gigantisme des télescopes continue, grâce à l'association de plusieurs sous-pupilles pour construire des instruments multi-pupilles. Comme nous allons le voir dans la section suivante, plusieurs méthodes existent ou sont en cours de développement pour construire des instruments toujours plus performants.

1.2 Les différents instruments multi-pupilles

Nous avons introduit l'intérêt et le principe du multi-pupille. Présentons maintenant différents types d'instruments s'appuyant sur ce principe, en fonction de leur implantation optique.

1.2.1 Les réseaux de télescopes

L'idée d'associer plusieurs télescopes a été utilisée par exemple pour le VLTI (pour *Very Large Telescope Interferometer*). Cela consiste en l'exploitation de la lumière de plusieurs grands télescopes individuels séparés de plusieurs mètres (voir [Fig.1.2](#)). Cette idée de recombinaison de plusieurs télescopes distants a également été exploitée dans le cadre du projet OHANA (pour *Optical Hawaiian Array for Nanoradian Astrometry*), au moyen cette fois-ci de fibres optiques qui véhiculaient la lumière provenant de grands télescopes [[Perrin et al., 2004](#)].

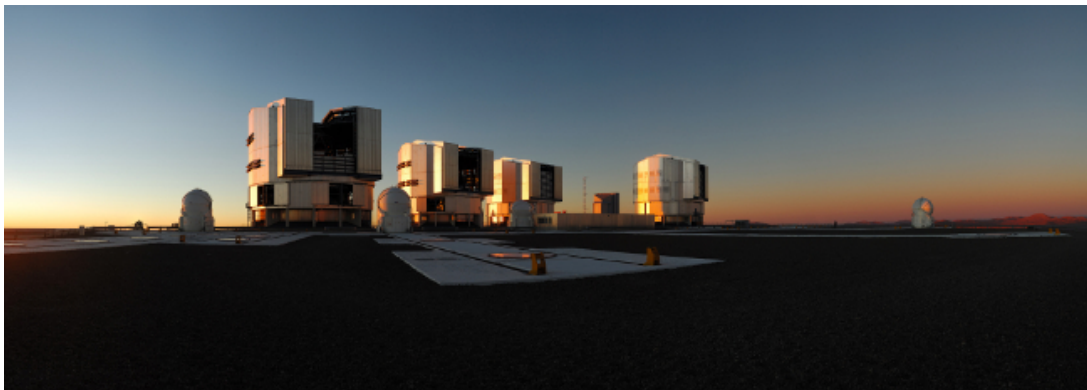


FIGURE 1.2 – Very Large Telescope Interferometer. *Crédits : ESO.*

1.2.2 Les télescopes segmentés

Les télescopes segmentés sont analogues aux télescopes monopupilles à la différence que leur miroir primaire est segmenté. Tous les segments renvoient alors la lumière vers un seul miroir (le miroir secondaire) comme illustré sur la [Fig. 1.3](#), et reposent sur une monture commune.

1.2. LES DIFFÉRENTS INSTRUMENTS MULTI-PUPILLES

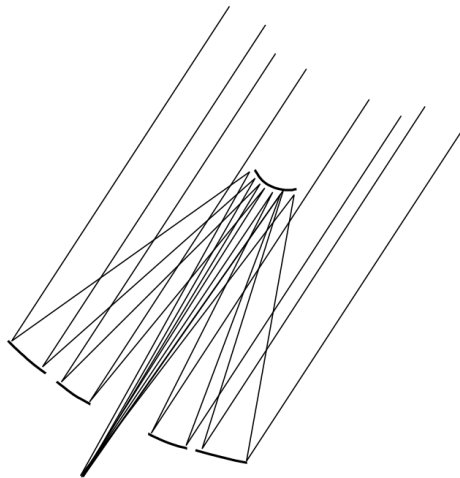


FIGURE 1.3 – Schéma de principe d'un télescope segmenté : les segments réfléchissent la lumière vers un seul miroir.

Parmi les instruments segmentés on peut compter le Keck, à Hawaïi, composé de deux télescopes (Keck1 et Keck2) dont les miroirs primaires sont chacun composés de 36 segments hexagonaux leur permettant d'atteindre 10 mètres de diamètre (voir Fig. 1.4). Deux projets concurrents reposant sur le même principe sont en cours de réalisation : l'E-ELT (pour *European-Extremely Large Telescope*) et le TMT (pour *Thirty Meter Telescope*) visant à atteindre respectivement 39 et 30 mètres de diamètre au moyen de centaines de segments jointifs. Citons également le GMT (pour *Giant Magellan Telescope*) consistant en l'association de 7 miroirs de 8,4 mètres de diamètre, chacun associé à un miroir secondaire qui lui est propre.

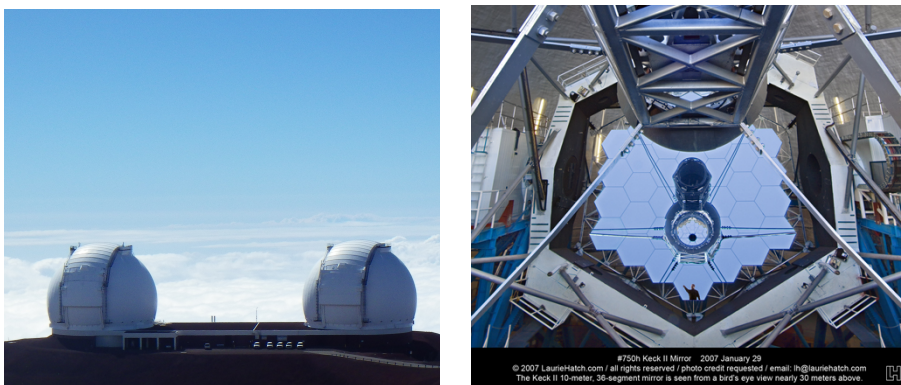


FIGURE 1.4 – Gauche : Observatoire W.M.Keck au sommet du Mauna Kea. Droite : Miroir primaire du Keck2, composé de 36 segments (Crédits : LaurieHatch.com).

Ce principe est également utilisé dans le spatial, pour construire des télescopes déployables dont le diamètre est supérieur à celui de la coiffe de la fusée. C'est notamment le cas du JWST (pour *James Webb Space Telescope*), dont le diamètre atteindra

6,2 mètres après déploiement (voir Fig. 1.5). Il s'agira du premier télescope segmenté envoyé dans l'espace. Cette nouveauté combinée au fait que le télescope sera positionné au point de Lagrange 2 (donc trop éloigné pour envisager une réparation *in-situ*) rend la problématique de l'alignement et du cophasage primordiale.



FIGURE 1.5 – Gauche : James Webb Space Telescope, vue d'artiste. Droite : Miroir primaire du James Webb Space Telescope, en salle d'intégration, replié. *Crédits : NASA*

Si des projets comme le JWST ont vu le jour pour le domaine de l'astrophysique, il en est de même pour le domaine de l'observation terrestre. Ainsi, le projet HOASIS (pour *High Orbit optical Aperture Synthesis Instrument for Surveillance*) de Thales Alenia Space vise à construire un télescope capable d'observer la Terre depuis une orbite géosynchrone. Ce type d'orbite étant relativement éloigné, un télescope se doit en effet d'avoir un grand diamètre (environ 10 mètres) afin d'espérer observer des détails de l'ordre du mètre. C'est ainsi que le projet HOASIS devrait viser à envoyer un télescope muni de 6 sous-pupilles comme présenté Fig. 1.6.

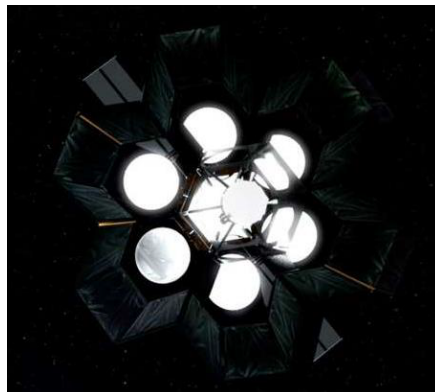


FIGURE 1.6 – Projet HOASIS, vue d'artiste. *Crédits : Thales Alenia Space.*

En conclusion, on voit que beaucoup de projets reposent sur le multi-pupille, que les sous-pupilles soient en nombre réduit mais de grand diamètre ou plus petites mais en

grand nombre, circulaires ou hexagonales, jointives ou non. L'étude que nous suivons dans ce manuscrit peut s'appliquer à tous ces types d'instruments multi-pupilles. Nous allons maintenant présenter le formalisme mathématique de formation d'image par des instruments multi-pupilles, afin de dégager la problématique à laquelle nous tâchons de répondre.

1.3 L'optique de Fourier en SOO

Nous proposons maintenant la mise en place du formalisme mathématique utile dans ce manuscrit, à savoir la théorie de formation d'image par un instrument multi-pupille.

1.3.1 Formation d'image

Considérons un objet observé à la longueur d'onde λ . Le champ émis par chaque point source de cet objet se propage sous forme d'ondes sphériques. Si l'objet est situé suffisamment loin de l'instrument imageur, ces ondes sont considérées comme étant planes. Si la source d'observation est naturelle, l'éclairage est spatialement incohérent et les ondes émises par des points voisins sont décorréelées. D'après le théorème de Fraunhofer, l'amplitude du champ en chaque point de l'objet est liée à l'amplitude dans le plan pupille par une Transformée de Fourier (TF). Pour l'illustrer, considérons un repère (X, Y, Z) , avec Z l'axe de propagation de l'onde et :

- un point (X, Y, Z) de l'objet est décrit par ses cosinus directeurs $x = X/Z$ et $y = Y/Z$,
- en utilisant les coordonnées pupillaires réduites, un point (X', Y') de la pupille placée en $Z = 0$ est décrit par X'/λ et Y'/λ .

En notant respectivement les amplitudes complexes des champs objet et pupille Ψ_Z et Ψ_0 , le théorème de Fraunhofer s'écrit :

$$\Psi_0 = \text{TF} [\Psi_Z] \quad (1.1)$$

où TF désigne la transformée de Fourier, et sera également notée $\tilde{\cdot}$. Une conséquence est que les coordonnées (x, y) et $(X'/\lambda, Y'/\lambda)$ sont conjuguées. Les coordonnées (u, v) peuvent s'interpréter comme des dimensions pupillaires exprimées en nombre de longueurs d'onde, ou encore en fréquences spatiales de l'objet. Ainsi, afin de retrouver le champ de l'objet il suffirait théoriquement d'effectuer une TF inverse (notée TF^{-1}) du champ collecté dans la pupille. Cependant, en pratique, ce champ est filtré par la transmittance (notée p) de la pupille et les détecteurs optiques ne sont pas sensibles au champ mais à sa moyenne quadratique ou intensité. Ainsi, on a :

$$\Psi_Z \xrightarrow{\text{propagation}} \widetilde{\Psi}_Z \xrightarrow{\text{filtrage}} p\widetilde{\Psi}_Z \xrightarrow{\text{imagerie}} \text{TF}^{-1} [p\widetilde{\Psi}_Z] \xrightarrow{\text{detection}} \langle \left| \text{TF}^{-1} [p\widetilde{\Psi}_Z] \right|^2 \rangle_t \quad (1.2)$$

Il apparaît une limitation fondamentale aux observations : la pupille étant de dimension finie, il n'est pas possible d'accéder à la totalité du spectre Ψ_Z de l'objet. En effet, la fréquence de coupure f_c donne la fréquence maximale accessible au moyen

d'un instrument imageur. Dans le cas d'un instrument monolithique de diamètre D observant à la longueur d'onde λ , on a

$$f_c = \frac{D}{\lambda}. \quad (1.3)$$

Ainsi, on retrouve l'intérêt d'avoir des télescopes de plus en plus grands : augmenter le diamètre des instruments imageurs donne une accessibilité à des fréquences plus hautes de l'objet, donc des détails plus fins. Dans le cas d'un instrument multi-pupille de diamètre B circonscrit aux sous-pupilles, la fréquence de coupure s'écrit donc

$$f_c = \frac{B}{\lambda}. \quad (1.4)$$

Lorsqu'un instrument multi-pupille vérifie des propriétés de linéarité et d'invariance par translation, cet instrument peut alors être caractérisé par sa Réponse Impulsionnelle \mathbf{h} , aussi appelée Fonction d'Étalement de Point (FEP), correspondant à sa réponse à une impulsion de Dirac ($\Psi_Z = \delta$) :

$$\mathbf{h} = |\text{TF}^{-1}(\mathbf{p})|^2 \quad (1.5)$$

Il suffit donc de connaître la FEP d'un instrument afin de calculer l'image d'un objet quelconque par l'instrument. L'image \mathbf{i} d'un objet \mathbf{o} est en effet donnée par la convolution de cet objet avec la FEP :

$$\mathbf{i} = \mathbf{o} \star \mathbf{h}, \quad (1.6)$$

avec \star le produit de convolution. Bien sûr, dans le cas expérimental, du bruit s'ajoute à cette image théorique. On s'intéresse maintenant à la réponse fréquentielle de l'instrument : la Fonction de Transfert Optique (FTO) définie comme la TF de la FEP. La FTO est complexe, son module est appelé Fonction de Transfert de Modulation (FTM) et sa phase est appelée la Fonction de Transfert de Phase (FTP) telle que :

$$\text{FTO} = \widetilde{\text{FEP}} = \text{FTM} \times \exp [j \text{FTP}], \quad (1.7)$$

avec $j^2 = -1$. D'après l'Eq. (1.6) :

$$\widetilde{\mathbf{i}} = \widetilde{\mathbf{o}} \times \widetilde{\mathbf{h}}, \quad (1.8)$$

ainsi les fréquences spatiales de l'image contiennent les fréquences spatiales de l'objet, filtrées par la FTO de l'instrument. D'après l'Eq. (1.5), la FTO s'exprime comme l'autocorrélation de la transmittance de la pupille :

$$\text{FTO} = \widetilde{\mathbf{h}} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \quad (1.9)$$

Le support de l'autocorrélation est donc le double du support de la pupille, et est donc fini et limité par la fréquence de coupure f_c au-delà de laquelle la transmission est nulle. On peut en conclure que la forme de la pupille est primordiale pour les observations, déterminant la géométrie de la couverture fréquentielle. Les relations liant le plan pupille, la FTO et la FEP sont résumées dans la Fig. 1.7, dans le cas d'un télescope monolithique.

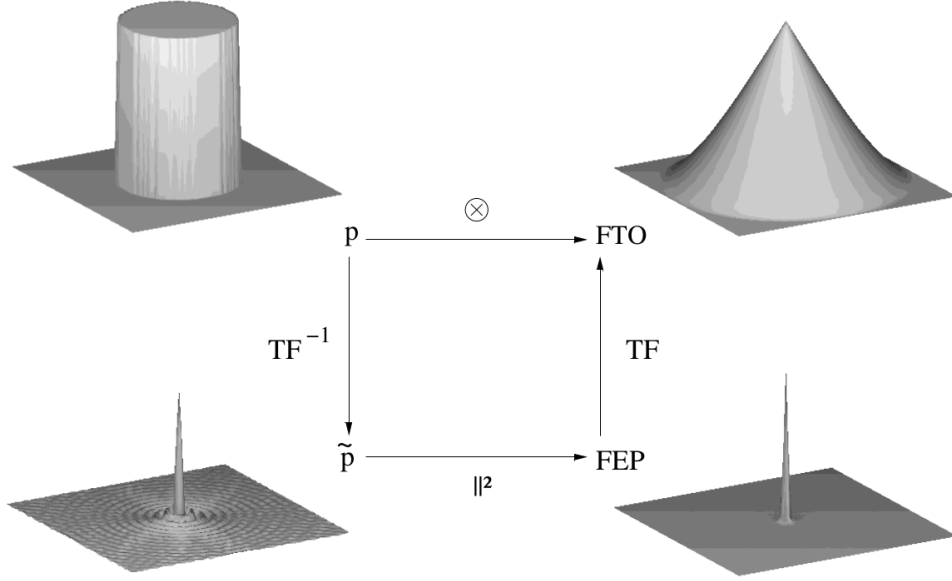


FIGURE 1.7 – Relations entre le plan pupille, la Fonction d'Étalement du Point et la Fonction de Transfert Optique.

1.3.2 Caractéristiques des configurations pupillaires

Considérons maintenant un instrument multi-pupille dont la configuration pupillaire est composée de \mathcal{N}_a sous-pupilles identiques, de forme circulaire avec un diamètre D et de coordonnées réduites par le rayon $\mathbf{u} = (u, v)$. Chacune d'entre elle correspond à l'un des miroirs primaires de l'instrument (dans le cas d'un réseau de télescopes) ou bien à l'un des segments de l'instrument (dans le cas d'un télescope segmenté). On note \mathbf{p} la transmission complexe de la pupille et \mathbf{p}_n celle associée à la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille placée à la coordonnée, réduite par le rayon d'une sous-pupille, \mathbf{c}_n . On a donc :

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} [\mathbf{p}_n \star \delta_{\mathbf{c}_n}](\mathbf{u}). \quad (1.10)$$

Appelons Φ_a une phase aberrante affectant la pupille totale, $\Phi_{a,n}$ la phase sur la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille, et ρ_n son coefficient de transmission, avec :

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{u}) = \rho_n \Pi(\mathbf{u}) \exp [j\Phi_{a,n}(\mathbf{u})], \quad (1.11)$$

où Π représente la fonction disque unitaire :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\mathbf{u}| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

La FTO, notée \mathbf{s} , est elle définie comme l'autocorrélation de \mathbf{p} , qui fait intervenir une intégrale sur la zone commune entre la sous-pupille n placée en \mathbf{c}_n et la sous-pupille

n' placée en $\mathbf{c}_{n'}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \quad (1.13)$$

$$= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} [(\mathbf{p}_n \otimes \mathbf{p}_{n'}) \star \delta_{(\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n'})}] \quad (1.14)$$

$$= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} (\mathbf{p}_n \otimes \mathbf{p}_n) \star \delta_0 + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} [(\mathbf{p}_n \otimes \mathbf{p}_{n'}) \star \delta_{(\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n'})}] \quad (1.15)$$

Dans le cas d'un cophasage parfait, soit $\Phi_{a,n} = 0$ pour tout n , la FTO s'écrit alors :

$$\mathbf{s} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 (\Pi \otimes \Pi) \star \delta_0}_{\text{Pic photométrique}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n \rho_{n'} [(\Pi \otimes \Pi) \star \delta_{(\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n'})}]}_{\text{Pics interférométriques}} \quad (1.16)$$

La fonction $\Pi \otimes \Pi$ est la fonction "chapeau chinois", notée Λ , de support 2D. La FTM de la FTO à phase nulle est donc sous la forme d'un pic central, appelé pic photométrique et résultant de la somme des \mathcal{N}_a autocorrélations des sous-pupilles, entouré de $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ pics satellites, appelés pics interférométriques et résultant de l'intercorrélations entre deux sous-pupilles différentes (Fig. 1.8). Une conséquence est qu'à deux sous-pupilles n et n' sont associés deux pics satellites en $(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n'})$ et $(\mathbf{u}_{n'} - \mathbf{u}_n)$. Ainsi la FTM présente une symétrie centrale.

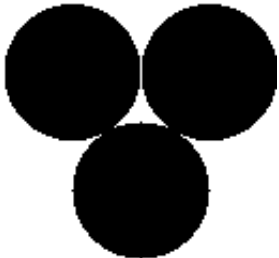

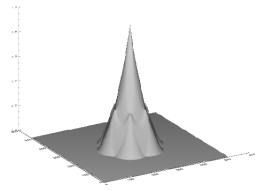
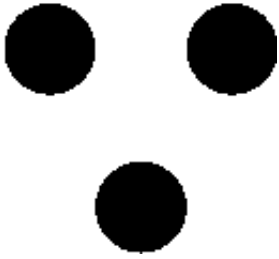
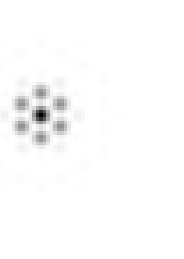
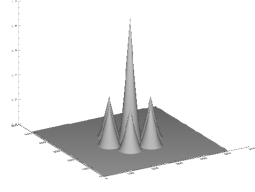
	Pupille	FEP	FTM
Cas compact			
Cas dilué			

FIGURE 1.8 – Plan pupille, FEP et FTM de pupilles compacte et diluée.

Définissons la dilution, notée dil , comme le rapport de la distance entre le centre de sous-pupilles voisines (que l'on va noter pas) et le diamètre D de ces dernières : $dil = pas/D$. Ainsi, nous qualifions de compact un instrument multi-pupille lorsque la

FEP ne présente pas de valeur égale à 0 pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure (typiquement une dilution de 1, comme sur la première ligne de la Fig. 1.8), et de diluée lorsque la FEP s'annule avant la fréquence de coupure (par exemple une dilution de 2 comme sur la ligne du bas de la Fig.1.8). Par la suite, nous étudierons ces deux cas de dilution afin de voir leur impact sur notre solution apportée à la problématique soulevée au cours de ce manuscrit. Cette dernière concerne des erreurs présentes sur les sous-pupilles des instruments. Ces erreurs s'expriment comme un terme de phase venant perturber la fonction pupille des instruments, et donc venant perturber les images formées par ces derniers. Nous allons donc maintenant présenter une modélisation de ces erreurs de phase appelées les aberrations.

1.3.3 Modélisation de la phase

La phase aberrante d'une pupille sans obstruction centrale est décomposée sur une base modale. La base orthonormée des polynômes de Zernike, telle que définie par Noll [Noll, 1976], est particulièrement bien adaptée à notre problème puisqu'elle permet une décomposition de la phase sur un support circulaire. Les polynômes Z_k sont exprimés comme le produit d'une fonction trigonométrique par une fonction polynomiale, avec k l'indice du polynôme. À chaque polynôme Z_k est associé un degré radial n et un degré azimutal m avec n et m de même parité, $k = (n(n+2) + m)/2$, et $0 \leq m \leq n$:

$$Z_k(\mathbf{r}) = R_n^m(r)\Theta_n^m(\theta), \quad (1.17)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires du point situé en \mathbf{r} dans le disque unité. La fonction trigonométrique est définie par :

$$\Theta_n^m(\theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} & \text{si } m = 0, \\ \sqrt{2(n+1)} \cos(m\theta) & \text{si } m \neq 0 \text{ et si } n \text{ pair,} \\ \sqrt{2(n+1)} \sin(m\theta) & \text{si } m \neq 0 \text{ et si } n \text{ impair,} \end{cases} \quad (1.18)$$

et la fonction polynomiale est développée selon les polynômes de Jacobi :

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[\frac{n+m}{2} - s\right]! \left[\frac{n-m}{2} - s\right]!} r^{n-2s} \quad (1.19)$$

Les premiers 21 modes sont représentés en Fig. 1.9. Cette base présente plusieurs avantages :

- Il s'agit d'une base orthonormée sur la pupille,
- les bas ordres radiaux correspondent aux aberrations optiques classiques (basculements, défocalisation, astigmatisme, comas, aberration sphérique),
- cette expression ainsi que ses dérivées sont analytiques.

La phase $\Phi_{a,n}$ sur une sous-pupille circulaire se décompose sur la base de Zernike selon :

$$\Phi_{a,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} Z_k, \quad (1.20)$$

avec $a_{k,n}$ le coefficient pondérant le polynôme Z_k sur la sous-pupille n .

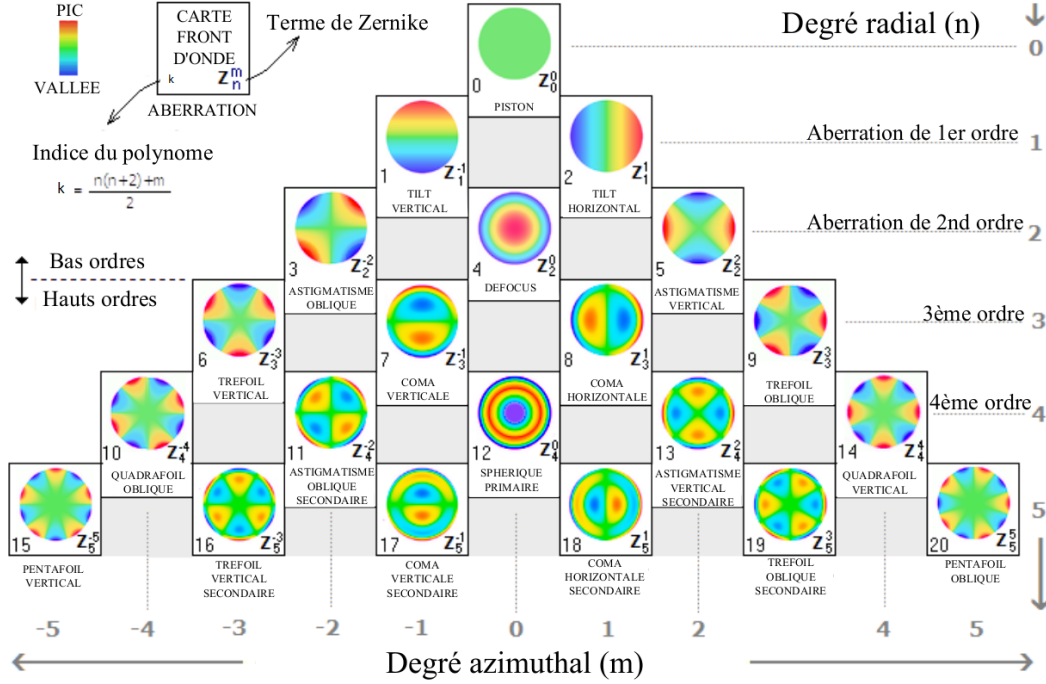


FIGURE 1.9 – Les 21 premiers polynômes de Zernike.

Comme mentionné dans l'introduction, les aberrations d'intérêt dans le cas d'un instrument multi-pupilles sont les aberrations de piston, tip et tilt. Elles correspondent aux trois premiers polynômes de Zernike. Au cours de ce manuscrit, on utilisera également le 4^{ème} polynôme de Zernike, la défocalisation. Décrivons chacun de ces polynômes au moyen des coordonnées $\mathbf{u} = (u, v)$, avec $|\mathbf{u}| \leq 1$:

$$Z_1(\mathbf{u}) = 1, \quad (\text{piston}) \quad (1.21)$$

$$Z_2(\mathbf{u}) = 2u, \quad (\text{tip}) \quad (1.22)$$

$$Z_3(\mathbf{u}) = 2v, \quad (\text{tilt}) \quad (1.23)$$

$$Z_4(\mathbf{u}) = \sqrt{3}(2u^2 - 1). \quad (\text{défocalisation}) \quad (1.24)$$

Ainsi, d'après les Eq. (1.10, 1.11 et 1.20), la transmittance pupillaire s'écrit :

$$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{N_a} \left[\rho_n \Pi \exp \left(\sum_k^{+\infty} a_{k,n} Z_k \right) \right] \star \delta_{c_n} \quad (1.25)$$

L'Eq. (1.16) a fournit l'expression de la FTO sans aberration, la FTM. Cherchons maintenant à exprimer la FTP.

Basé sur les travaux de [Cassaing, 1998] et [Ruilier and Cassaing, 2001], [Baron et al., 2008] montre que la FTP $\Phi_{nn'}$ entre deux sous-pupilles n et n' peut s'écrire :

$$\Phi_{nn'}(\mathbf{u}) = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} [a_{k,n} Z_k(\mathbf{u}') - a_{k,n'} Z_k(\mathbf{u}' + \mathbf{u})] d\mathbf{u}', \quad (1.26)$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\Phi_{nn'}(\mathbf{u}) = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{a_{k,n} - a_{k,n'}}{2} [Z_k(\mathbf{u}') + Z_k(\mathbf{u}' + \mathbf{u})] + \frac{a_{k,n} + a_{k,n'}}{2} [Z_k(\mathbf{u}') - Z_k(\mathbf{u}' + \mathbf{u})] \right] d\mathbf{u}'. \quad (1.27)$$

Sous une écriture plus simple, on a :

$$\Phi_{nn'}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_{nn'}^{k+} \mathcal{Z}_k^- + \alpha_{nn'}^{k-} \mathcal{Z}_k^+ \right), \quad (1.28)$$

avec :

$$\alpha_{nn'}^{k\pm} = a_{k,n} \pm a_{k,n'}, \quad (1.29)$$

et

$$\mathcal{Z}_k^\pm = \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [Z_k(\mathbf{u}') \pm Z_k(\mathbf{u}' + \mathbf{u})] d\mathbf{u}'. \quad (1.30)$$

La Fig.1.10 illustre les nouveaux modes \mathcal{Z}_k^\pm .

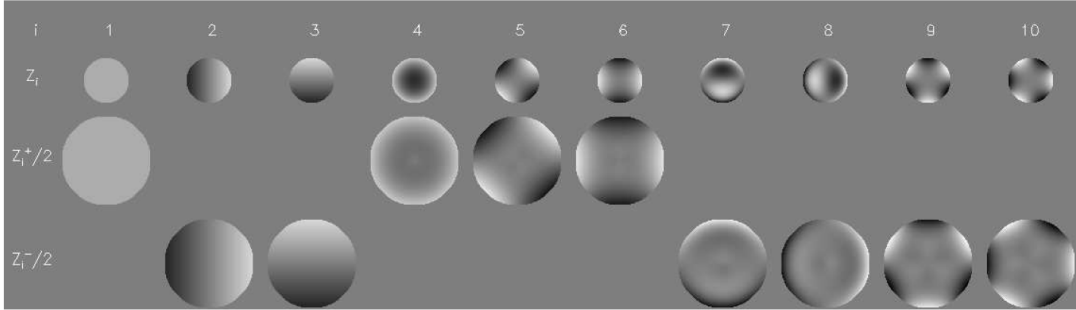


FIGURE 1.10 – Calcul des premiers modes \mathcal{Z}_k^\pm . Ligne 1 : Illustration des modes de Zernike "classiques". Lignes 2 et 3 : illustration des modes \mathcal{Z}_k^+ et \mathcal{Z}_k^- .

Les 3 premiers modes non-nuls de \mathcal{Z}_k^\pm sont égaux, à une homothétie de support de facteur 2 près, aux modes de Zernike : $\mathcal{Z}_1^+ = 2Z_1$, $\mathcal{Z}_2^- = 2Z_2$ et $\mathcal{Z}_3^- = 2Z_3$. On remarque ensuite que pour tous les modes de Zernike d'ordre radial pair $\mathcal{Z}_k^- = 0$, et pour tous les modes impairs $\mathcal{Z}_k^+ = 0$. Ainsi, si Z_k est pair, $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k^+$ et $\alpha_{nn'}^k = \alpha_{nn'}^{k-}$. Si Z_k est impair, $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k^-$ et $\alpha_{nn'}^k = \alpha_{nn'}^{k+}$. On peut donc réécrire l'Eq. 1.16 :

$$\mathbf{s} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 (\Pi \otimes \Pi) \exp \left(j \sum_{k=2}^3 a_{k,n} \mathcal{Z}_k \right) \star \delta_0 \quad (1.31)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1, n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n \rho_{n'} \left[(\Pi \otimes \Pi) \exp \left(j \sum_{k=2}^3 \alpha_{n,n'}^k \mathcal{Z}_k \right) \star \delta_{(c_n - c_{n'})} \right] \quad (1.32)$$

Sur le pic photométrique, le plan de phase présente la même pente que dans le plan pupille, cependant le piston est annulé. Sur les pics d'interférences, il y a les combinaisons des différents modes.

On va maintenant illustrer les dégradations induites à la fois sur les images et sur la fonction de transfert des instruments multi-pupilles.

1.3.4 Effets des aberrations sur un instrument multi-pupille

Intéressons-nous maintenant aux conséquences de ces aberrations sur la pupille, sur la FEP et la FTO de l'instrument. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas d'un instrument dilué à 3 sous-pupilles (Fig. 1.11) car les pics interférométriques sont mieux séparés du pic photométrique que dans le cas compact. Il sera donc plus aisé de voir l'effet des aberrations sur la FTO. À phase incidente nulle, on retrouve le résultat présenté Fig. 1.8.

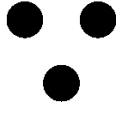

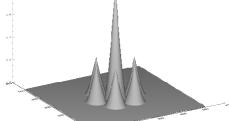
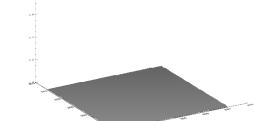


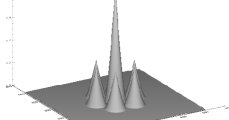
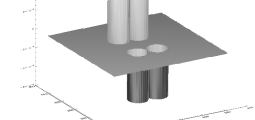
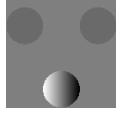

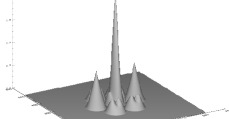
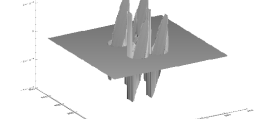
Aberration	Pupille	FEP	FTM	FTP
Aucune				
Piston				
Basculement				

FIGURE 1.11 – Impact de la phase sur la fonction pupille, la FEP, la FTM et la FTP.

Lorsque nous appliquons un piston ($a_{1,n}$) sur une sous-pupille, on observe sur la FEP un décalage des franges d'interférences, qui dépend de la pupille pistonnée. La FTM n'est visiblement pas affectée par une erreur de piston, cependant on peut voir que les pics satellites des bases concernées présentent une phase constante dans la FTP.

En appliquant un tip ou un tilt ($a_{2,n}$ ou $a_{3,n}$) sur l'une des sous-pupilles, on observe que la sous-FEP correspondante est alors déplacée dans la FEP globale de l'instrument (erreur de tip dans le cas de la dernière ligne de la Fig. 1.11). Les autres sous-FEPs restent superposées et forment des interférences perpendiculaires à la base des sous-

pupilles associées. Contrairement au cas de l'erreur de piston, la FTM est affectée par une erreur de tip. Les pics satellites de la FTM sont en effet atténués, en raison de l'amointrissement des interférences entre les sous-pupilles des bases concernées. Dans le cas de la FTP, les pics satellites des bases concernées portent alors un plan de phase.

Maintenant que nous avons décrit qualitativement l'effet des aberrations de piston, tip et tilt sur un instrument, nous allons voir comment les quantifier. L'outil permettant de quantifier les défauts de front d'onde est l'écart-type des coefficients de Zernike. Cette grandeur est aussi appelée le WFE (pour *WaveFront Error*) et s'écrit comme :

$$\text{WFE} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_a} \sum_{k,n} a_{k,n}^2}. \quad (1.33)$$

Cette grandeur est en général exprimée en nm RMS ou bien en λ . On cherche donc à minimiser le WFE à une fraction de λ lors de l'alignement d'un instrument multi-pupille. La section suivante propose une valeur limite fixée pour les erreurs d'alignement, les replaçant dans un sous-ensemble d'erreurs potentiellement présentes sur un instrument multi-pupille.

1.4 Budget d'erreur de l'instrument

Plusieurs facteurs sont susceptibles de dégrader les performances d'un système d'observation multi-pupille, en plus des erreurs d'alignement. En effet, la grande quantité de sous-systèmes et de degrés de liberté est source d'aberrations. Pour chacun de ces défauts, la perte en qualité optique occasionnée est exprimée en racine de la variance spatiale (ou temporelle) σ_T de l'onde incidente, présentée section 1.3.4. Les différentes sources d'erreurs dans le cas d'un instrument multi-pupille ont été identifiées [Harvey and Ftaclas, 1990] à l'aide d'une démarche systémique : un budget d'erreur global est attribué à un instrument en fonction des spécifications de la mission, fixant le niveau de performance à atteindre. Ce budget est alors réparti (figure 1.12) entre les différentes sources d'erreur. En supposant dans un premier temps que les erreurs sont décorréelées ou orthogonales, alors la variance totale peut être obtenue en sommant quadratiquement les différents contributeurs. Ainsi, dans l'exemple présenté ici, le budget d'erreur globale est de $\lambda/13$ RMS. Cette erreur globale est répartie en quatre groupes de défauts : la conception optique, la réalisation des surfaces, les erreurs d'assemblage et les erreurs dues à l'environnement. Le groupe qui nous intéresse est celui des erreurs d'assemblage. Ce dernier peut également être divisé en sous-groupes, où l'on peut retrouver l'erreur attribuée au cophasage.

D'après la Fig. 1.12, la spécification sur l'erreur de cophasage est de $\lambda/37$. Considérant que les défauts qui engendrent le déphasage sont uniquement les erreurs de piston, tip et tilt, on peut donc écrire :

$$\sigma_{piston}^2 + \sigma_{tip}^2 + \sigma_{tilt}^2 = \left(\frac{\lambda}{37}\right)^2. \quad (1.34)$$

Nous décidons, pour la suite du manuscrit, d'attribuer la même variance aux trois contributeurs de l'Eq. (1.34). Ainsi, la mesure de chaque type d'aberration devra être

effectuée avec une précision au moins égale à $\lambda/64$ (après cophasage fin). Considérons donc le cas idéal où le contrôle effectué sur les sous-pupilles est parfait. La section suivante présente les actionneurs nécessaires pour contrôler le mouvement de chaque sous-pupille et donc permettre l’alignement d’un instrument multi-pupille.

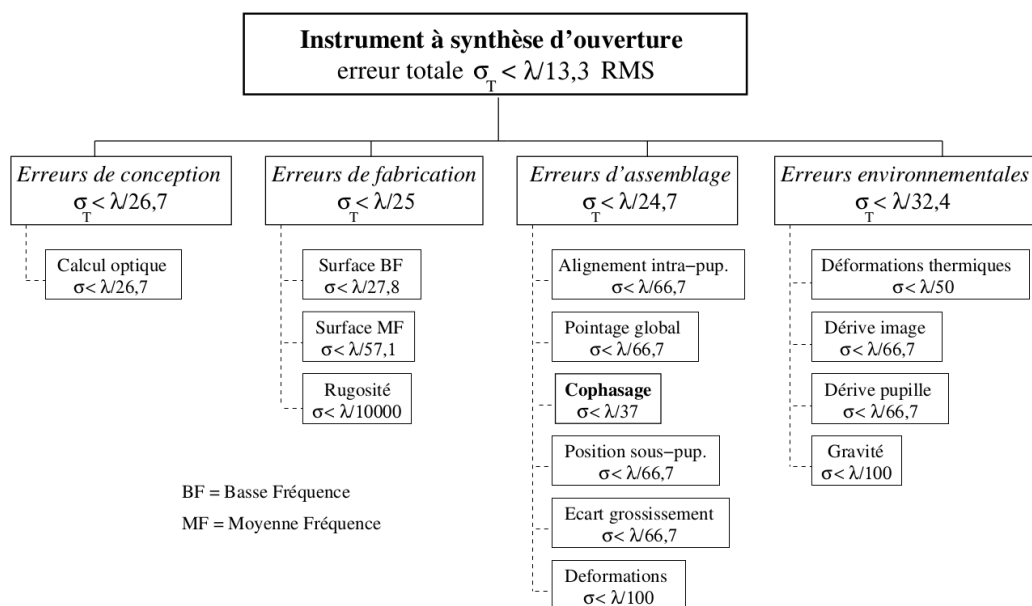


FIGURE 1.12 – Budget de qualité d’un instrument multi-pupille.

1.5 L’optique active

On a pu voir dans les sections précédentes que l’alignement d’un instrument multi-pupille requiert un contrôle sur le mouvement de chaque sous-pupille. Si ces sous-pupilles ne sont pas activement contrôlées, elles auront un comportement aléatoire et il ne sera pas possible de les mettre en phase. Elles seront affectées à haute fréquence par le vent ou bien des vibrations de la structure, et à basse fréquence par des variations thermiques et, bien sûr, par un désalignement.

Ainsi, si l’on prend l’exemple du télescope Keck, chacun des 36 miroirs est contrôlé et maintenu en position par un ensemble de pistons/actuateurs de l’autre côté de sa surface, afin que la surface totale soit maintenue dans sa forme idéale. Les segments de l’E-ELT ou encore du TMT bénéficieront de la même technologie. La Fig. 1.13 présente ainsi le support de chaque segment, composé d’un timon à 27 points et de 3 actuateurs pour la correction du piston/tip/tilt.

Des senseurs de position installés sur les bords des segments du Keck permettent de mesurer les erreurs d’alignement entre les segments. Cependant, ces senseurs sont fortement sensibles à l’humidité, la poussière et la condensation. Cela entraîne un besoin de calibration à intervalles réguliers. De plus, plus le nombre de segment augmente, plus il faut de senseurs, donc de calibration et de matériel. Il est donc préférable d’utiliser

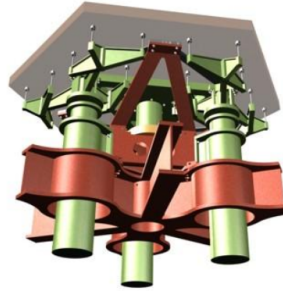


FIGURE 1.13 – Support d'un segment composé d'un timon de 27 points et trois actuateurs. Source : [Dimmler et al., 2008].

un senseur de front d'onde, en effectuant une mesure optique qui mène à des précisions plus fines.

1.6 L'analyse de front d'onde

Nous allons maintenant détailler différentes techniques existantes servant à la mesure des dégradations du front d'onde. Ces Analyseurs de Surface d'Onde (ASO) peuvent être classés en deux catégories : les analyseurs plan pupille et les analyseurs plan focal.

1.6.1 L'analyse de surface d'onde en plan pupille : l'analyseur de Shack Hartmann

L'analyseur de Shack-Hartmann est utilisé pour mesurer le gradient de la phase aberrante du front d'onde ([Shack and Platt, 1971]). Nous proposons d'en expliquer le principe tout d'abord dans le cas d'un télescope monolithique. Le principe du Shack-Hartmann est d'échantillonner le front d'onde au moyen d'un réseau de micro-lentilles placé dans un plan conjugué de la pupille du télescope (Fig. 1.14). Chacune de ces micro-lentilles va faire une image sur un détecteur placé en leur foyer. Les déformations du front d'onde induisent un déplacement de chaque imagerie sur le détecteur, relativement à une position de référence correspondant à un front d'onde parfait.

Utilisé dans le cas d'un objet ponctuel, le déplacement de l'imagerie générée par une micro-lentille est estimé par mesure du centre de gravité. C'est à partir de ces mesures que la phase peut être reconstruite (à un piston global près). Dans le cas d'une scène étendue, chaque micro-lentille forme l'image de l'objet dans le plan focal. Les déplacements de ces images peuvent être estimés par corrélation avec une imagerie de référence sous certaines conditions décrites dans [Michau et al., 1993].

On considère maintenant l'utilisation de l'analyseur Shack-Hartmann dans le cas d'un instrument multi-pupille, pour la correction des erreurs de pistons différentiels entre les segments. Les micro-lentilles sont alors placées au niveau des interstices entre deux segments (Fig. 1.15). L'image formée par chaque micro-lentille va dépendre de l'erreur de phase entre les segments. Des modèles théoriques prédisent la forme de ces images en fonction de l'erreur de phase. Les images réelles sont alors comparées à

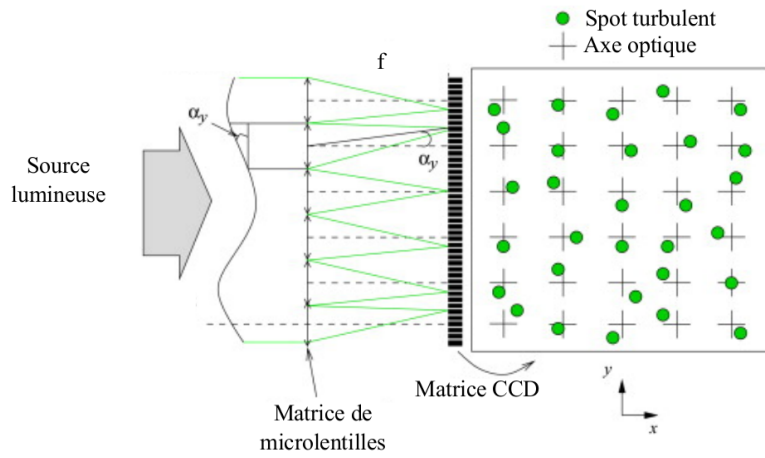


FIGURE 1.14 – Schéma de principe de l'analyseur Shack-Hartmann.

ces modèles théorique par corrélation, comme expliqué dans [Chanan et al., 2000]. Si cette technique est efficace et utilisée pour le cophasage du télescope Keck, son intérêt décroît avec le nombre de sous-pupilles et la distance entre elles, son implantation devenant plus complexe.

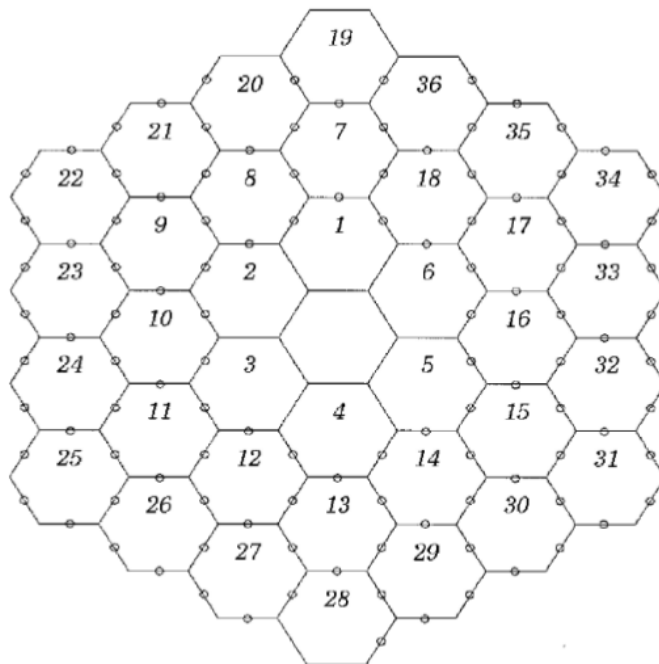


FIGURE 1.15 – Schéma de principe de l'analyseur Shack-Hartmann modifié pour instrument multi-pupille.

Pour plus de détails et pour offrir un éventail plus large au lecteur à propos des analyseurs de pupille en plan pupille, le lecteur est invité à se référer à [Rousset, 1999].

1.6.2 L'analyse de surface d'onde en plan focal

Les techniques présentées ci-dessus permettent une estimation des aberrations dans un système optique. Cependant, elles sont d'implantation assez complexe, puisqu'elles nécessitent des systèmes optiques annexes à la voie d'imagerie scientifique. Ainsi, en plus d'un encombrement supplémentaire, le risque d'erreurs non communes (entre la voie d'analyse et la voie scientifique) est potentiellement problématique dans le cadre de la restauration du front d'onde. Nous allons maintenant présenter deux techniques d'analyse de surface d'onde dites en plan focal : le *phase retrieval* et la *diversité de phase*. Ces dernières ont le bon goût d'exploiter les distorsions présentes au voisinage du plan focal de l'instrument, donc directement sur le détecteur principal. Elles sont faciles d'implantation, et évitent les erreurs non communes mais peuvent également présenter certains défauts comme certaines dégénérescences ou encore des temps de calcul relativement élevés.

1.6.2.1 Phase retrieval

La technique du *phase retrieval* permet d'estimer les aberrations de phase d'un champ complexe à partir de mesures d'intensité en plan focal. Tout d'abord utilisée dans le domaine de la microscopie électronique ([Gerchberg, 1972]), elle a ensuite été redécouverte dans le cadre de l'optique par Gonsalves [Gonsalves, 1982]. Il s'agit d'estimer la phase au moyen d'un algorithme d'optimisation non-linéaire qui mesure l'écart entre des données mesurées et un modèle. On veut donc inverser l'Eq. (1.6) en cherchant à minimiser l'erreur quadratique \mathcal{L} sur les données :

$$\mathcal{L}(\phi_a) = \|\mathbf{i} - \mathbf{o} \star \mathbf{h}(\phi_a)\|^2, \quad (1.35)$$

avec ϕ_a l'erreur à estimer. Si cette technique présente l'avantage d'être facile à implémenter, elle souffre néanmoins d'ambiguïté de signe sur la partie paire de la phase à estimer : ainsi la solution n'est pas unique sauf dans certains cas particuliers [Baron et al., 2008]. De plus, cette méthode n'est valable que lorsque l'objet observé est connu, donc principalement dans le cadre de sources ponctuelles avec $\mathbf{o} = \delta$.

1.6.2.2 La diversité de phase

Afin de lever l'ambiguïté sur l'estimation et d'opérer sur des scènes étendues, il a été proposé par Gonsalves [Gonsalves, 1982] d'utiliser une seconde image dans laquelle un défaut de phase connu ϕ_d est introduit : c'est la technique de la diversité de phase. Ainsi, cette image supplémentaire permet de coder l'information de phase de manière différente et donc de lever les indéterminations existantes. On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \mathbf{i}_f = (\mathbf{o} \star \mathbf{h}_f + b_f) & \text{avec } \mathbf{h}_f = |TF^{-1}(\Pi \exp j\phi_a)|^2, \\ \mathbf{i}_d = (\mathbf{o} \star \mathbf{h}_d + b_d) & \text{avec } \mathbf{h}_d = |TF^{-1}(\Pi \exp j(\phi_a + \phi_d))|^2. \end{cases} \quad (1.36)$$

La phase ϕ_d sera à partir de maintenant qualifiée de phase de diversité. Il est à noter que cette méthode peut s'appliquer à plus de deux images.

Il est possible d'engendrer la phase de diversité de manière temporelle, si tant est que l'évolution de la phase dans le plan pupille est supérieure au temps d'acquisition des deux images. Il est cependant plus répandu d'acquérir ces deux images de manière simultanée, en introduisant un déphasage avec un élément optique (lame séparatrice, masque de phase, prisme etc.). Le plus souvent la perturbation introduite est une défocalisation globale, de par sa simplicité d'implantation. Comme illustré en figure 1.16, une lame séparatrice divise le faisceau incident en deux et permet de former simultanément une image focale et une image défocalisée sur un (ou deux) détecteur(s).

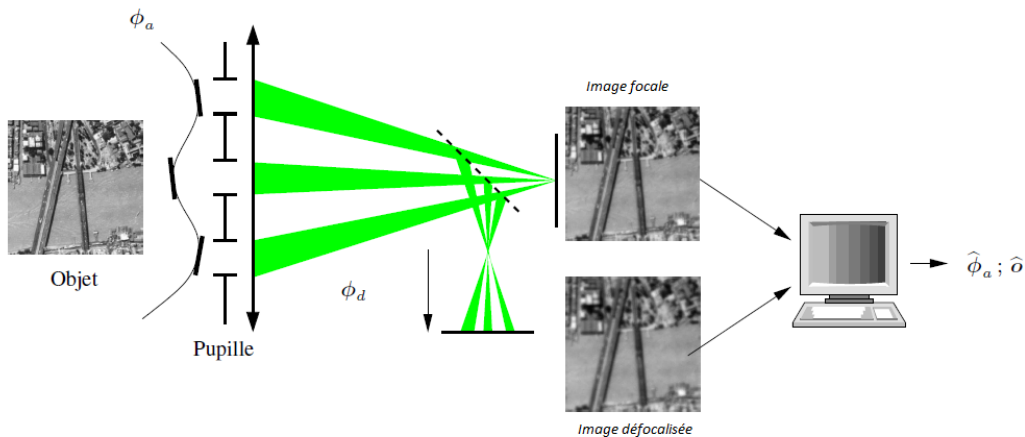


FIGURE 1.16 – Principe de la diversité de phase : Acquisition d'une image en plan focal et d'une image dans laquelle on introduit une aberration connue, ici ϕ_d une défocalisation.

L'utilisation de la technique de diversité de phase pour des instruments à synthèse d'ouverture optique a commencé très tôt à des fins de co-phasage [Paxman and Fienup, 1988]. Elle a été ensuite développée dans le cadre de projets comme le JWST [Redding et al., 1998, Carrara et al., 2000, Lee et al., 2003, Dean et al., 2006a], Darwin [Mocœur et al., 2006], ou encore l'E-ELT [Meimon et al., 2008].

Une notion importante à introduire avant de continuer est la télécentricité. Un système optique est dit télécentrique lorsque le plan pupille est situé dans le plan focal objet du système imageur. Si un système optique n'est pas télécentrique, alors une aberration sera "vue" différemment d'un plan focal image à un plan image défocalisé à cause d'un changement d'échelle. Si l'on prend l'exemple d'un basculement, celui-ci ne sera pas strictement identique d'un plan focal à un plan défocalisé si le système n'est pas télécentrique (voir Fig.1.17). En pratique, on considère que pour des petites défocalisations les aberrations sont inchangées d'un plan à un autre dans le cas d'un système non-télécentrique. Dans le cas d'une défocalisation plus grande, et de non-télécentricité, il faut appliquer un changement d'échelle sur les images (ou prendre en compte dans la modélisation de l'instrument ce changement d'échelle).

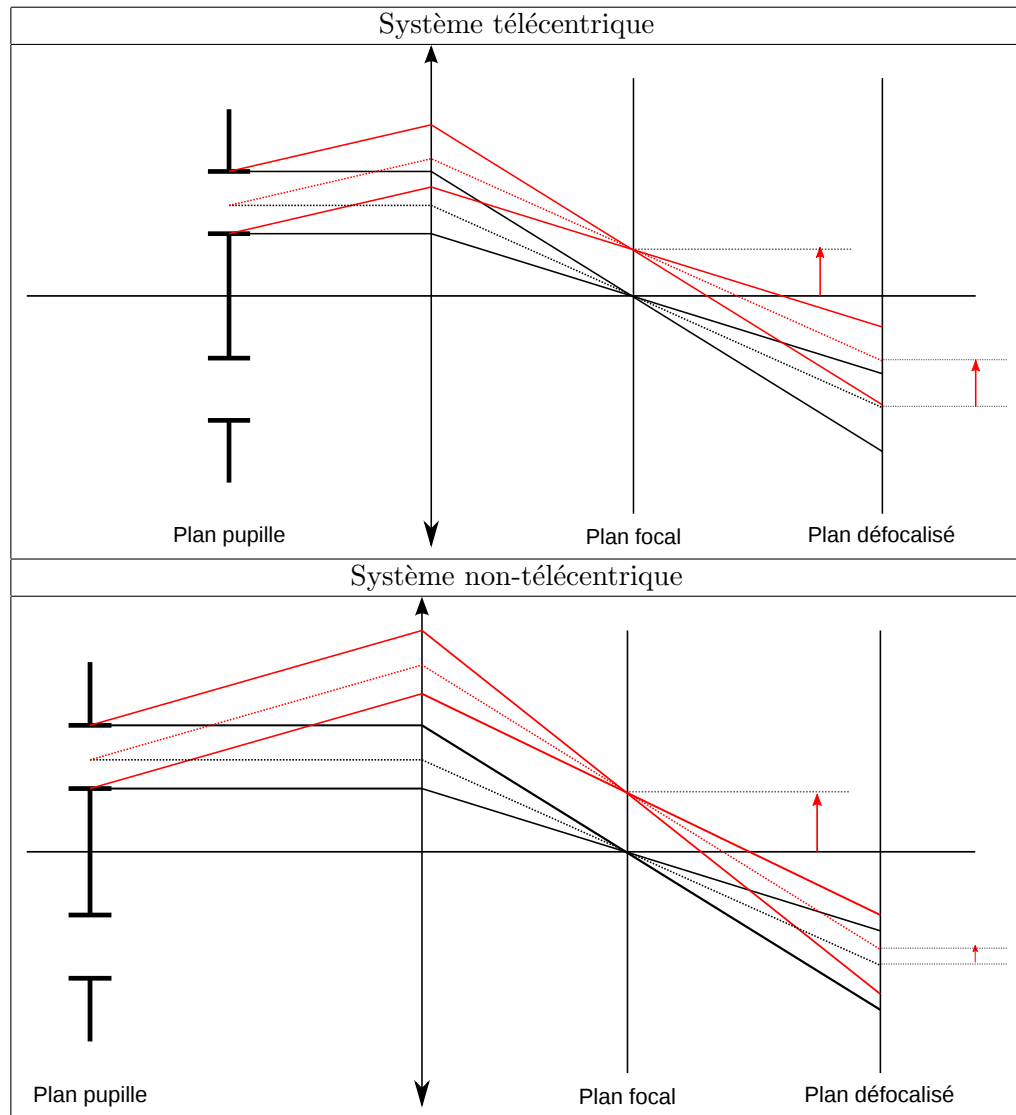


FIGURE 1.17 – Haut : Schéma système télécentrique ; le plan pupille (ou conjugué à la pupille) est situé dans le plan focal objet de la lentille. Une erreur de tip (ou tilt) sur une sous-pupille induit un déplacement identique de la sous-FEP correspondante dans le plan focal et dans le plan défocalisé. Ce déplacement entre position idéale (en noir) et position aberrée (rouge) est matérialisé par la flèche rouge. Bas : Schéma système non-télécentrique ; le plan pupille (ou conjugué à la pupille) n'est pas dans le plan focal objet de la lentille. Une erreur de tip (ou tilt) n'induit pas un déplacement identique de la sous-FEP dans le plan focal et dans le plan défocalisé. Ce déplacement entre position idéale (en noir) et position aberrée (rouge) est matérialisé par la flèche rouge.

1.6.2.2.1 L'estimation jointe Si la recherche de la phase est ce qui nous intéresse pour la problématique du cophasage, la diversité permet également d'estimer l'objet observé. Ainsi, l'estimation de la phase aberrante ϕ_a et de l'objet \mathbf{o} peut se faire de manière conjointe grâce à une approche de type moindres carrés [Gonsalves, 1982] qui

revient à minimiser le critère :

$$\mathcal{L}(\phi_a, \mathbf{o}) = \frac{1}{2\sigma_1^2} \|\mathbf{i}_1 - \mathbf{h}(\phi_a) \star \mathbf{o}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \|\mathbf{i}_2 - \mathbf{h}(\phi_a + \phi_{div}) \star \mathbf{o}\|^2, \quad (1.37)$$

avec σ_1^2 et σ_2^2 les variances de bruit associées aux images \mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_2 . Une estimation au sens du Maximum de Vraisemblance a ensuite été développée par Paxman [Paxman et al., 1992] dans le cas d'un bruit Gaussien (conduisant à l'expression 1.37) ou Poissonnien. Enfin, Mugnier et Blanc ont proposé une interprétation probabiliste de la reconstruction conjointe de l'objet et de la phase, basée sur la recherche du Maximum A Posteriori Joint (MAPJ) [Blanc, 2002], que nous utiliserons dans le chapitre 5 sous le nom d'« algorithme itératif ». Cette interprétation consiste à choisir l'objet et la phase qui maximisent la densité de probabilité jointe des données (\mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_2), de l'objet et de la phase. Cependant la présence de bruit, même faible, sur les images peut impacter de manière négative l'estimation des inconnues recherchées. Ainsi, on peut introduire des *a priori* sur les inconnues, par exemple en essayant d'ajuster des modèles paramétriques sur celles-ci. On parle alors de régularisation [Bucci et al., 1999] sur l'objet et la phase, et les paramètres (moyenne, écart-type, etc.) des modèles sont appelés hyperparamètres, rangés dans un vecteur $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_b; \mathcal{H}_\phi; \mathcal{H}_o)$. Ainsi, le critère à minimiser s'écrit comme la maximisation de la densité de probabilité f :

$$(\hat{o}, \hat{\phi})_{MAPJ} = \underset{o, \phi}{\operatorname{argmax}} f(i_1, i_2, o, \phi; \mathcal{H}) \quad (1.38)$$

L'approche Bayésienne exprime la densité de probabilité f comme :

$$f(i_1, i_2, o, \phi; \mathcal{H}) = \underbrace{f(i_1|o, \phi; \mathcal{H}_b) \times f(i_2|o, \phi; \mathcal{H}_b)}_{\text{terme d'attache aux données}} \times \underbrace{f(\phi; \mathcal{H}_\phi)}_{a \text{ priori sur la phase}} \times \underbrace{f(o; \mathcal{H}_o)}_{a \text{ priori sur l'objet}}. \quad (1.39)$$

Il a été explicité par Mugnier [Mugnier et al., 2006] que la majorité des estimateurs utilisés pour résoudre le problème inverse peuvent être décrits par l'Eq. (1.38), même s'ils ne sont initialement pas en place dans un modèle bayésien. Dans le cas où l'on ne régularise ni la phase ni l'objet, alors on a $f(\phi; \mathcal{H}_\phi) = f(o; \mathcal{H}_o) = 1$ et on fait appel à la méthode de Maximum de vraisemblance joint présentée par Paxman [Paxman et al., 1992]. En introduisant une régularisation sur la phase ($f(\phi; \mathcal{H}_\phi) \neq 1$) Vogel et Thelen ont proposé une estimation en faisant appel à ce qu'ils ont baptisé Maximum de vraisemblance général [Vogel et al., 1998, Thelen et al., 1999]. L'estimateur de MAPJ est enfin utilisé dans le cas où l'on introduit une régularisation sur la phase et sur l'objet. On va maintenant expliciter les différents termes de l'Eq. (1.39), en se basant sur la description fournie par le chapitre de Mugnier [Mugnier et al., 2006].

- Dans le cas où l'on ne régularise ni la phase ni l'objet, $f(\phi; \mathcal{H}_\phi) = f(o; \mathcal{H}_o) = 1$ et on réécrit donc $f(i_k, o, \phi; \mathcal{H})$ tel que :

$$f(i_k, o, \phi; \mathcal{H}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N^2/2}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{i}_k - H_k \mathbf{o})^t (\mathbf{i}_k - H_k \mathbf{o})\right)}, \quad k = 1, 2. \quad (1.40)$$

avec H_k la matrice de convolution discrète de la réponse impulsionnelle \mathbf{h} .

- Le terme de régularisation sur l'objet dépend d'*a priori* sur la scène observée. En choisissant d'associer à l'objet \mathbf{o} une loi de probabilité Gaussienne de moyenne o_m et de matrice de covariance R_o , on a :

$$f(o; \mathcal{H}_o) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N^2/2} \det(R_o)^{1/2}} e^{(-\frac{1}{2}(o-o_m)^t R_o^{-1} (o-o_m))} \quad (1.41)$$

- En s'appuyant sur la décomposition de la phase sur la base de Zernike, l'*a priori* sur la phase peut s'écrire :

$$f(\phi(a); \mathcal{H}_\phi) = \frac{1}{(2\pi)^{(N_z-3)/2} \det(R_a)^{1/2}} e^{(-\frac{1}{2} \mathbf{a}^t R_a^{-1} \mathbf{a})}, \quad (1.42)$$

avec \mathbf{a} le vecteur d'aberrations de Zernike utilisé pour décomposer la phase sur N_z modes. L'hyperparamètre en rapport avec la phase contient la matrice de covariance R_a .

L'approche de MAPJ consiste donc à maximiser $f(i_1, i_2, o, \phi; \mathcal{H})$, ce qui revient à minimiser le critère :

$$\mathcal{L}_{\text{MAPJ}}(o, a, \theta) = -\ln f(i_1, i_2, o, a; \theta). \quad (1.43)$$

On cherche tout d'abord à annuler la dérivée de ce critère par rapport à l'objet afin d'obtenir une estimation sur ce dernier. Cette estimation est alors réinjectée dans le critère afin que celui-ci ne dépende plus que de la phase cherchée. Le nouveau critère est alors minimisé, fournissant ainsi une estimation de la phase. Pour plus de précisions sur la diversité de phase, le lecteur est invité à lire le chapitre de Mugnier [Mugnier et al., 2006].

1.7 L'alignement des instruments multi-pupilles

Comme présenté précédemment, un instrument multi-pupille doit être aligné à une fraction de longueur d'onde afin qu'il soit exploité de manière optimale. Les erreurs à corriger pouvant être potentiellement grandes (plusieurs longueurs d'onde) dans un premier temps, une procédure est à suivre afin d'amener, étape par étape, l'instrument dans un état aligné. Nous présentons ces différentes étapes maintenant, les mettant en parallèle avec un cas concret : l'alignement du James Webb Space Telescope. Nous nous appuyerons donc constamment sur la Fig. 1.18 présentant la procédure d'alignement du JWST.

1.7.1 L'alignement géométrique

Le principe La première étape de la procédure d'alignement d'un instrument multi-pupille est la correction des grandes erreurs de tip/tilt sur les sous-pupilles : l'alignement préliminaire ou alignement géométrique. Dans le cas de l'imagerie d'un point source, à savoir un objet non résolu par les sous-pupilles d'un télescope, ces grands tip/tilts se traduisent sur le détecteur comme une collection d'images éparpillées, chacune provenant d'une sous-pupille (Fig. 1.19).

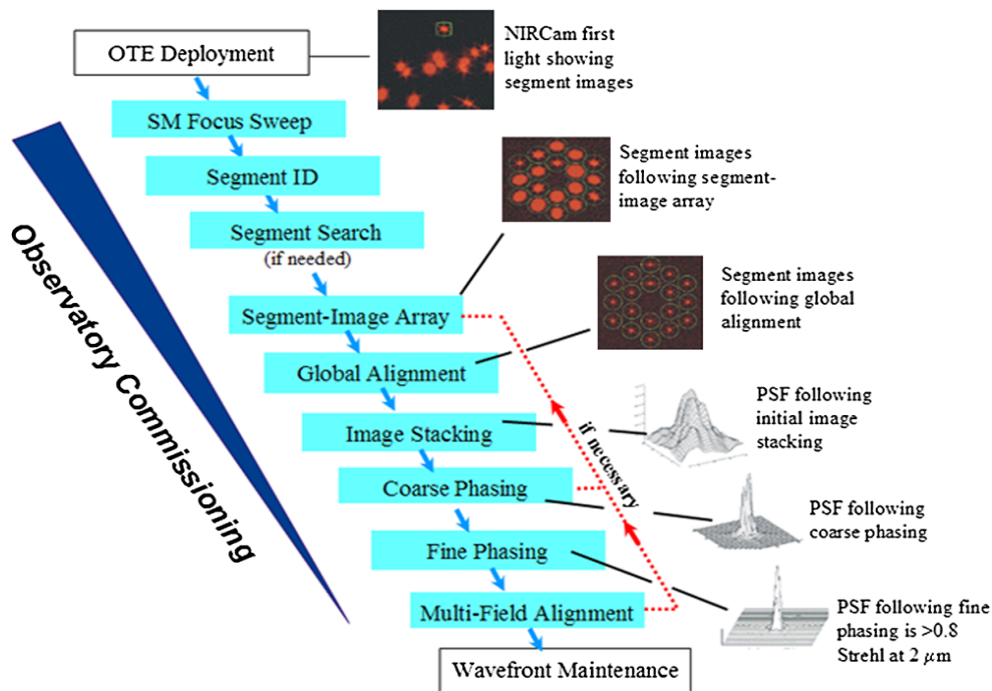


FIGURE 1.18 – Diagramme des étapes d'alignement du JWST [Feinberg et al., 2007].

Chaque imagerie correspond à la FEP d'une sous-pupille, et sera nommée sous-FEP par la suite. Ces erreurs d'alignement peuvent typiquement être présentes dans plusieurs cas de figures, que nous allons détailler maintenant.

Dans le cas des télescopes spatiaux, le déploiement mécanique des segments n'assure pas leur positionnement parfait en tip/tilt. Une correction optique et mécanique en aval du déploiement est donc nécessaire. Dans le cas des télescopes terrestres, l'alignement mécanique des segments avant la première lumière n'est pas assuré, et demande par la suite une correction d'erreurs de tip/tilt potentiellement de grande amplitude. D'autre part, la maintenance de ces télescopes terrestres peut nécessiter le remplacement de segments et/ou le prélèvement de ceux-ci pour une durée déterminée (pour traitement de surface par exemple) avant remise en place. Le repositionnement ou le remplacement d'un segment n'assure encore une fois pas son alignement parfait avec les autres segments. Ainsi, si l'alignement préliminaire ne devrait être opéré qu'une seule fois pour un télescope spatial, il pourrait potentiellement être répété avant chaque nuit d'observation pour les télescopes terrestres, voire durant la nuit si besoin est (dérive importante des segments, problème technique).

Enfin, il est nécessaire de maîtriser la superposition des images provenant de chaque sous-pupille (dans le cas de l'observation d'un objet non résolu) afin de pouvoir passer à l'étape suivante de la procédure d'alignement, à savoir la recherche de franges d'interférence entre les imageries pour corriger les grandes erreurs de piston.

Le cas du JWST Dans le cadre du JWST, l'alignement géométrique est découpé en plusieurs étapes : depuis l'étape de *segment ID* (pour *identification des segments*) jusqu'à *Image stacking* (pour *superposition des images*).

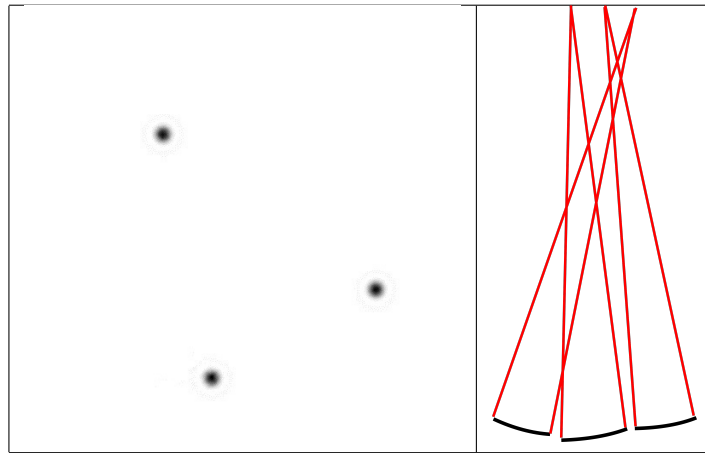


FIGURE 1.19 – Gauche : Simulation de l'image d'un point source par un télescope désaligné, composé de 3 sous-pupilles. Les erreurs de tip/tilt sur chaque sous-pupille sont matérialisées par un éparpillement de l'image de chacune d'elles dans le champ de la caméra. Droite : Schématisation des erreurs d'orientation relatives entre les sous-pupilles.

Après une étape de refocalisation du miroir secondaire (Secondary Mirror SM) appelée *SM Focus Sweep*, l'étape de *segment ID* consiste à identifier une à une les images des segments présentes dans le champ de la caméra. Pour se faire, une pile de 19 images est acquise, avec une perturbation appliquée successivement à chacun des segments afin de localiser leur position après déploiement. Si une sous-FEP venait à manquer, il s'agirait de la retrouver en appliquant des perturbations sur son segment d'origine jusqu'à ce qu'elle réapparaisse lors de l'acquisition d'image (c'est alors l'étape de *Segment Search*, pour *recherche de segment*).

Une fois l'identification terminée, chaque sous-FEP est déplacée depuis sa position aléatoire jusqu'à une position prédéfinie, par exemple les sommets d'un polygone, lors de l'étape de *Segment-image array* (que l'on pourrait traduire par *Arrangement de l'image des segments*). Cette étape permet de séparer les sous-FEPs afin d'y appliquer, localement, un algorithme de phase retrieval [Dean et al., 2006b] qui corrige des aberrations de hauts ordres.

Enfin, l'ultime étape est la superposition des sous-FEPs (*Image stacking*). La méthode utilisée est de bouger les segments uns à uns afin de rapprocher les sous-FEP correspondantes au point de superposition. Ainsi, l'ultime commande appliquée sur les miroir est effectuée "à l'aveugle" car les sous-FEP sont alors indiscernables lorsqu'elles sont superposées. Ce processus est répété plusieurs fois afin d'assurer la superposition des sous-FEPs.

Une méthode appelée *Geometrical Phase Retrieval* (GPR) a été récemment proposée [Thurman, 2011, Jurling and Fienup, 2014, Carlisle and Acton, 2015] et implantée pour cette dernière étape. Elle se base sur l'analyse de plusieurs images autour du plan focal (voir Fig.1.20), acquises au moyen de lentilles de distances focales différentes situées dans une roue à filtres en amont du détecteur. Le principe repose sur l'analyse géométrique de la propagation lumineuse au travers de ces différentes images.

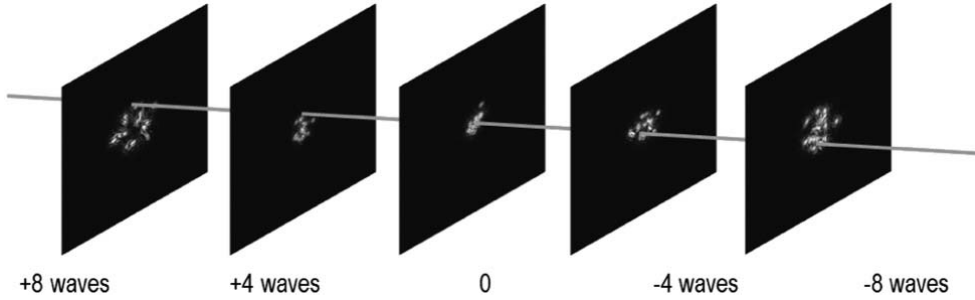


FIGURE 1.20 – Principe du GPR. Le rayon principal d’un segment, ou rayon passant par le centre du segment, va théoriquement passer par des pixels bien définis dans le cas aligné. Si le segment est désaligné, il s’agit de mesurer la distance entre le point d’impact théorique et le point d’impact effectif du rayon principal de chaque segment.

Si l’on considère le rayon lumineux principal d’un segment, à savoir le rayon issu du centre du segment, il va impacter le détecteur à un pixel bien défini dans les différents plans. Une erreur de tip/tilt se traduira donc par un décalage du point d’impact effectif par rapport au point d’impact théorique. Si le système est télécentrique, le décalage induit par l’erreur sera le même dans chaque plan d’acquisition. Il s’agit donc d’identifier les sous-FEPs au moyen d’une perturbation appliquée successivement sur chaque segment, et de calculer le décalage par rapport au point d’impact théorique. Cette technique permet donc une estimation de l’erreur de tip/tilt sur chaque segment, et peut servir d’estimation initiale pour l’algorithme fin [Dean et al., 2006b] du télescope James Webb et ainsi augmenter sa dynamique d’estimation.

1.7.2 L’alignement interférométrique

Le principe Cette seconde étape consiste à corriger les grandes erreurs de piston. En effet, pour atteindre la limite de diffraction, il est nécessaire que la recombinaison des rayons lumineux issus de chaque sous-pupille soit cohérente. Afin que ces rayons lumineux puissent interférer (Fig. 1.21), leur différence de marche doit être inférieure à la longueur de cohérence de la source d’émission. La longueur de cohérence est définie comme étant le rapport :

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}, \quad (1.44)$$

avec λ la longueur d’onde d’observation et $\Delta \lambda$ la largeur spectrale de la source. La conséquence est qu’il sera plus difficile de faire interférer des faisceaux en lumière blanche car la longueur de cohérence sera plus faible que pour une source quasi-monochromatique dont la longueur de cohérence est quasi-infinie. Faisant directement suite à l’alignement géométrique, les grandes erreurs de piston pourront également être présentes à la première lumière d’un instrument multi-pupille, ou bien en cas de remplacement d’un segment. Avoir un contrôle relativement correct des deux étapes de correction des erreurs de grandes amplitudes (piston/tip/tilt) permet ensuite d’effectuer les corrections plus fines, nécessaires pour atteindre une précision de l’ordre de la dizaine de nanomètres.

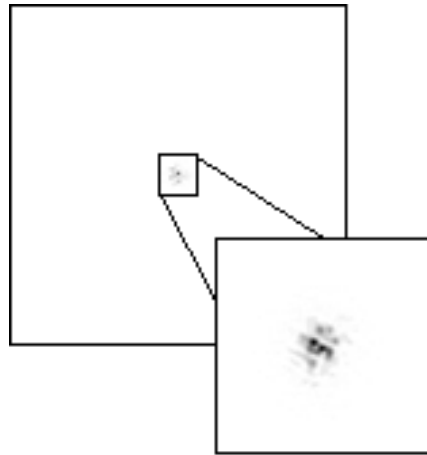


FIGURE 1.21 – Simulation de l'image cohérente d'un point source par un télescope composé de 6 sous-pupilles, présentant des erreurs d'alignement de petite amplitude après l'alignement interférométrique.

Le cas du JWST Dans la procédure d'alignement du JWST, le *Coarse Phasing* (traduit comme cophasage grossier) correspond à la correction des grandes erreurs de piston entre les sous-pupilles. Ces dernières sont mesurées au moyen d'une technique de senseur de franges dispersées [Shi et al., 2004]. Le principe repose sur l'analyse d'interférences entre groupes de deux sous-pupilles au moyen d'une lumière polychromatique. Pour se faire, deux *Dispersed Hartmann Sensors* (DHS) sont utilisés (Fig. 1.22) [Wirth, 2003]. Positionnés dans un plan pupille, ils permettent chacun de former des images de paires de sous-ouvertures. Ayant une rotation différentielle de 60 degrés entre eux, ils permettent de combiner différentiellement les segments. Un prisme positionné en aval permet de disperser la recombinaisons des différentes paires et ainsi effectuer la mesure des erreurs de piston entre les différentes paires de sous-ouverture. L'orientation différentielle entre les deux DHS permet d'estimer les erreurs de piston entre chaque segment et ainsi cophaser l'ensemble des sous-pupilles entre elles.

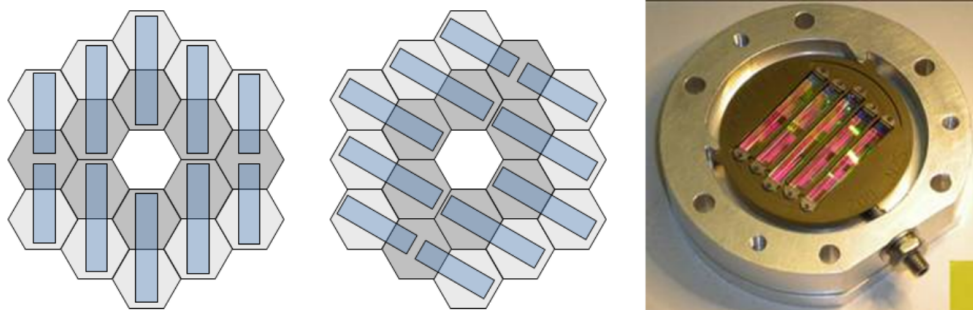


FIGURE 1.22 – Gauche et milieu : Principe des Dispersed Hartmann Sensors (DHS), recombinaison de paires de sous-pupilles avec un angle différentiel de 60 degrés entre les DHS. Droite : Photo d'un DHS.

1.7.3 L’alignement fin

Le principe L’alignement fin permet de corriger les résidus d’erreur après correction ”grossière” des perturbations de grande amplitude. Il permet donc d’exploiter les images d’un instrument multi-pupille à sa limite de diffraction (figure 1.23). Étant donnée la petitesse de ces résidus d’erreur, il est possible que l’alignement fin doive être opéré plusieurs fois lors des observations scientifiques.

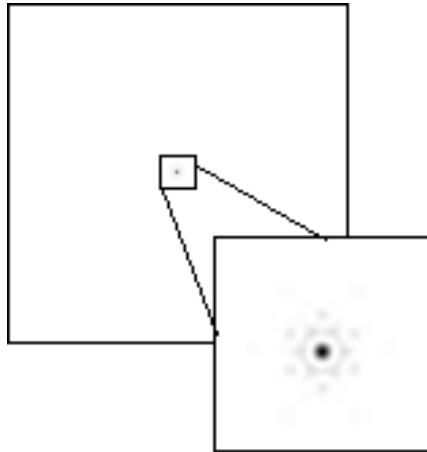


FIGURE 1.23 – Simulation de l’image cohérente d’un point source par un télescope composé de 6 sous-pupilles après l’étape d’alignement fin.

Le cas du JWST La correction des erreurs résiduelles est opérée lors de l’étape *Fine Phasing* (pour cophasage fin). Cette dernière consiste en l’acquisition de plusieurs images défocalisées (au même titre que la procédure GPR), sur lesquelles est appliqué un algorithme de diversité de phase HDA (pour *Hybrid Diversity Algorithm*) [Dean et al., 2006b].

1.8 Conclusion du chapitre

Nous avons pu voir dans ce chapitre le besoin d’instruments multi-pupilles, permettant d’atteindre des diamètres de télescopes équivalents de plus en plus grands, sur Terre comme dans l’espace. Le nouveau problème qui surgit alors repose sur l’alignement des sous-pupilles d’un tel instrument. Nous avons exposé des solutions existantes pour mesurer les erreurs d’alignement entre les sous-pupilles, et certaines seront exploitées très prochainement dans le cadre du JWST. Cependant ces méthodes, bien qu’efficaces, reposent sur une mise en œuvre complexe tant d’un point de vue matériel, avec des ajouts de roues à filtres ou encore d’éléments comme les DHS, que calculatoire, avec des algorithmes itératifs ou dont l’implantation dépend du nombre de sous-pupilles.

Ceci justifie le positionnement de ce manuscrit dans la problématique générale de l’alignement d’instruments multi-pupilles. On souhaite, au travers du travail effectué au

1.8. CONCLUSION DU CHAPITRE

cours de la thèse, proposer une procédure complète, simple, autonome et indépendante du nombre de sous-pupilles pour la mesure d'aberrations de systèmes multi-pupilles.

*CHAPITRE 1. IMAGERIE À HAUTE RÉOLUTION ANGULAIRE PAR
INSTRUMENTS MULTI-PUPILLES*

Chapitre 2

Méthodes pour le cophasage

Contents

2.1	L'algorithme de cophasage fin LAPD	54
2.1.1	Nouvelle expression du critère dans le cas faible phase	54
2.1.2	Estimation des aberrations	55
2.2	Outils numériques de simulation d'instruments multi-pupilles	55
2.2.1	Caractéristiques géométriques de la pupille : <i>pup</i>	56
2.2.2	Caractéristiques physiques de la pupille : <i>pep</i>	56
2.2.3	Génération d'images d'instruments multi-pupilles : <i>pep_opt</i>	56
2.2.4	Modélisation du bruit	57
2.3	Caractérisation numérique des algorithmes de cophasage	58
2.3.1	Simulation d'instruments multi-pupilles	58
2.3.2	L'optimisation des paramètres	59
2.3.3	La linéarité	59
2.3.4	La propagation de bruit	59
2.3.5	Influence des erreurs d'étalonnage	60
2.3.6	Influence des aberrations de hauts ordres	60
2.4	Le banc BRISE	61
2.4.1	Le module source	61
2.4.2	Le module de perturbation	62
2.4.3	Le module de diversité	63
2.4.4	Le module de contrôle	63
2.5	Conclusion du chapitre	63

2.1 L'algorithme de cophasage fin LAPD

Comme on a pu le voir dans le chapitre précédent, la diversité de phase est une méthode proposée pour corriger les défauts de front d'onde, notamment dans le cadre des instruments multi-pupilles. Cependant les algorithmes développés en ce sens sont généralement lourds en temps de calcul et par conséquent empêchent une correction temps-réel. Dans le but de réduire le temps de calcul de l'estimation de phase par la diversité de phase, I. Mocoœur a développé une méthode temps-réel [Mocoœur et al., 2009]. Cette méthode repose sur une hypothèse de faible phase à corriger, permettant une linéarisation de cette dernière, autour d'un point de fonctionnement. En suivant l'approche proposée par I. Mocoœur, l'algorithme LAPD (Linearized Analytical Phase Diversity) a été développé par A. Bonnefois (dans [Vievard et al., 2016]). Nous proposons dans cette section d'en présenter le principe, les validations numériques et expérimentales seront présentées dans la seconde partie de ce manuscrit.

2.1.1 Nouvelle expression du critère dans le cas faible phase

Rappelons que la FEP, notée \mathbf{h} , d'un instrument est le module carré de la TF inverse de la transmittance complexe de la pupille :

$$\mathbf{h} = |\text{TF}^{-1}(\mathbf{p})|^2. \quad (2.1)$$

Dans l'hypothèse de faibles perturbations (définies plus en détail lors de la validation numérique de la méthode) autour du point de fonctionnement que l'on nomme \mathbf{a}_f , le vecteur d'aberrations \mathbf{a} (avec $\mathbf{a} = (a_{0,0}, a_{0,1} \dots a_{k,n})$, k et n étant respectivement le mode de Zernike et l'indice de sous-pupille) est petit. On peut alors linéariser la FEP et en donner le développement de Taylor au premier ordre suivant :

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{h}(\mathbf{a}_f) + \mathbf{a} \cdot \text{grad}(\mathbf{h}) + o(\mathbf{a}) \quad (2.2)$$

Avec $\text{grad}(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{0,0}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{0,1}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{k,n}}, \dots \right)$ la matrice Jacobienne de \mathbf{h} .

Ainsi, Mocoœur a montré que le critère joint de diversité de phase de deux images i_1 et i_2 (donné Eq.1.37), pouvait s'écrire dans le domaine de Fourier, dans le cas d'un objet moyen nul :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu} |\mathbf{A}(\nu)\mathbf{a} - \mathbf{B}(\nu)|^2 + \text{Cste}, \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\nu) &= \frac{1}{\mathbf{C}(\nu)} [\tilde{\mathbf{i}}_2(\nu)\boldsymbol{\alpha}_1(\nu) - \tilde{\mathbf{i}}_1(\nu)\boldsymbol{\alpha}_2(\nu)] \\ \mathbf{B}(\nu) &= \frac{1}{\mathbf{C}(\nu)} [\tilde{\mathbf{i}}_1\beta_2(\nu) - \tilde{\mathbf{i}}_2(\nu)\beta_1(\nu)] \\ \mathbf{C}(\nu) &= \sqrt{|\beta_1(\nu)|^2 + |\beta_2(\nu)|^2 + \epsilon} \end{aligned} \quad (2.4)$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= TF[\mathbf{grad}(\mathbf{h}_{1,2}(\mathbf{a} = \mathbf{a}_f))] \\ \beta_{1,2} &= TF[\mathbf{h}_{1,2}(\mathbf{a} = \mathbf{a}_f)]\end{aligned}\tag{2.5}$$

$\mathbf{A}(\nu)$ est un vecteur de dimension $(k_{max}\mathcal{N}_a)$ défini pour chaque valeur de ν . On peut concaténer ces vecteurs pour obtenir la matrice \mathbf{A} de dimensions $(\mathcal{N}_f, k_{max}\mathcal{N}_a)$, avec \mathcal{N}_f est le nombre de fréquences sur lesquelles est défini le critère, à savoir le nombre de pixels. $\mathbf{B}(\nu)$ et $\mathbf{C}(\nu)$ sont des scalaires. Le terme ϵ , dont l'origine est détaillée dans [Mocœur et al., 2009], est fixé à 10^{-6} afin que l'expression du critère ne diverge pas à haute fréquence. Cette nouvelle expression du critère joint étant quadratique en \mathbf{a} , il ne présente pas de minima locaux et la solution est unique.

2.1.2 Estimation des aberrations

Étant donnée la dépendance quadratique en \mathbf{a} du critère linéarisé, l'annulation du gradient de ce dernier permet de trouver les aberrations recherchées sans avoir besoin d'un algorithme de minimisation. Il s'agit donc de calculer :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \right]^\dagger \cdot \left[\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{B}) \right],\tag{2.6}$$

avec \Re la partie réelle, H l'opérateur de symétrie hermitienne et † l'inverse généralisée d'une matrice, calculée au moyen de la Décomposition en Valeur Singulière (voir annexe A). On note que la matrice $\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ est carrée symétrique, donc on pourrait faire une décomposition en modes propres. Cependant on effectuera une SVD (pour s'adapter aux outils de calcul informatiques disponibles), on gardera donc les terminologies de valeurs singulières (au lieu de valeurs propres) et modes singuliers (au lieu de modes propres). L'estimateur analytique repose sur le calcul des transformées de Fourier de chacun de deux plans de diversité, et donc a un coût de calcul bien inférieur à un estimateur itératif. Quant à l'inversion de la matrice $\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$, elle n'est pas dimensionnante puisque carrée de taille $(k_{max}\mathcal{N}_a, k_{max}\mathcal{N}_a)$.

2.2 Outils numériques de simulation d'instruments multi-pupilles

Dans le but de tester et caractériser des algorithmes de cophasage, un environnement de simulation a été créé à l'ONERA : MASTIC (*Multiple Aperture Software for Telescope Imaging and Cophasing*). Il permet à un utilisateur de définir, manipuler différentes configurations multi-pupilles, et de générer des images avec ou sans ajout d'aberrations. La première étape consiste à définir la géométrie de la pupille, afin de l'habiller de caractéristiques physiques. Enfin, on peut simuler des images en y introduisant des défauts de phase que l'on souhaite estimer, pour un objet ponctuel ou bien étendu.

2.2.1 Caractéristiques géométriques de la pupille : *pup*

La structure *pup* contient les données géométriques de l'instrument. Elle est créée à partir d'une librairie de pupilles prédéfinies : *pup_lib*. Le tableau 2.1 répertorie les données d'intérêt de la structure *pup*.

Nom de la variable	Description
NA	Nombre de sous-pupilles
X	Coordonnée cartésienne en X du centre de chaque sous-pupille
Y	Coordonnée cartésienne en Y du centre de chaque sous-pupille
R	Rayon de chaque sous-pupille
NAME	Nom de la pupille

TABLE 2.1 – Variables de la structure *pup*.

2.2.2 Caractéristiques physiques de la pupille : *pep*

La structure *pep* numérise la pupille précédemment définie dans le *pup*. L'utilisateur choisit une taille d'image $[N_{image}; N_{image}]$ voulue, ainsi qu'un facteur d'échantillonnage f_{ech} afin de numériser la pupille sur une grille de $[N_{pupille}; N_{pupille}]$, sachant que $f_{ech} = N_{image}/N_{pupille}$. Il est possible de définir le facteur d'échantillonnage sur la pupille globale ou bien sur une sous-pupille, au moyen d'un mot clé spécifique lors de l'appel de la fonction qui crée le *pep*. Ce facteur d'échantillonnage va fixer la taille de la FEP (respectivement d'une sous-FEP dans le cas d'une sous-pupille) en pixels sur l'image. Un système échantillonné à Shannon voit son facteur d'échantillonnage égal à 2, c'est-à-dire une FEP (ou une sous-FEP) de taille de 2 pixels sur l'image. Dans le cadre des simulations effectuées pour ce manuscrit, on travaillera avec un facteur d'échantillonnage de 2 défini sur la pupille globale, afin de respecter le critère de Shannon lorsque le télescope est cophasé. Une conséquence de ceci est le sur-échantillonnage de chacune des sous-pupilles. Le facteur d'échantillonnage de chaque sous-pupille sera noté n_s par la suite.

La structure *pep* contient également les informations sur la phase de diversité, ici la défocalisation. Cette défocalisation est décomposée comme une somme de Zernike 1 à 4 (piston, tip, tilt, défocalisation) au moyen de l'Eq. (B.5). Ces coefficients sont stockés dans le champs *pep.div_array*. On peut également trouver dans la structure *pep* une description des polynômes de Zernike souhaités sur chacune des sous-pupilles dans le champs *pep.ss_modearr*.

Le reste des champs disponibles sont répertoriés et décrits succinctement dans le tableau 2.2.

2.2.3 Génération d'images d'instruments multi-pupilles : *pep_opt*

L'outil *pep_opt* permet, à partir de la structure *pep* et d'un jeu de coefficients d'aberrations par sous-pupille, de générer ND images de diversité. Ces images sont générées dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer, à savoir comme le module carré de la Transformée de Fourier Inverse de l'amplitude complexe pupillaire (habillée

2.2. OUTILS NUMÉRIQUES DE SIMULATION D'INSTRUMENTS MULTI-PUPILLES

Nom de la variable	Description
NZ	Nombre de polynomes de Zerike considérés
NA	Nombre de sous-pupilles
ND	Nombre de plans de diversité
NP	Nombre de pixels dans le plan pupille
SIZE_P	Nombre de pixels sur chaque sous-pupille
SS_MODEARR	Coefficient de chaque polynome de zernike sur chaque sous-pupille
AIND	Matrice contenant les coefficients de diversité dans chaque plan
NS	Échantillonnage d'une sous-pupille
PMASK	Carte de transmission globale de la pupille
SS_MASK	Transmission de chaque sous-pupille
NH	Dimension en pixels de l'image (appelée N_{image} précédemment)
PUP	Structure <i>pup</i>

TABLE 2.2 – Variables de la structure *pep*.

préalablement des coefficients d'aberration et de diversité dans chaque plan). Il est possible de générer des image incohérentes, en additionnant les images de chaque sous-pupille au lieu de faire le calcul sur toute la pupille.

2.2.4 Modélisation du bruit

Une fois les images générées par *pep_opt*, on peut choisir d'y ajouter du bruit :

- du bruit de photons, dont la statistique est poissonnienne, généré sur l'image par la fonction *poidev*,
- du bruit de lecture, qui reproduit le bruit que l'on aurait expérimentalement avec une camera, généré comme une distribution gaussienne aléatoire avec pour moyenne 0 et pour écart-type la valeur choisie du bruit de lecture (ou RON pour *Read-Out-Noise*).

Le calcul du Rapport Signal-à-Bruit (RSB) *par pixel* sur une image de dimensions $[N_{image}; N_{image}]$, dans laquelle il y a \mathcal{N}_{ph} photo-électrons avec du bruit de photons et du bruit de lecture est défini comme :

$$RSB = \frac{\mathcal{N}_{ph}/N_{image}^2}{\sqrt{\mathcal{N}_{ph}/N_{image}^2 + RON^2}}, \quad (2.7)$$

avec N_{image}^2 le nombre total de pixels dans l'image. Ainsi, RSB_T le RSB total associé à des images de scènes étendue est simplement :

$$RSB_T = \frac{\mathcal{N}_{ph}}{\sqrt{\mathcal{N}_{ph} + RON^2 \times N_{image}^2}} \quad (2.8)$$

Dans le cas de l'imagerie d'un point source, on remplace N_{image}^2 dans l'équation 2.7 par le nombre total de pixels éclairés (soit environ $NA \times (2NS)^2$ en reprenant les données du tableau 2.2) afin de calculer le RSB sur le signal d'intérêt.

2.3 Caractérisation numérique des algorithmes de cophasage

Cette section a tout d’abord pour but de décrire les différentes pupilles qui seront simulées pour la caractérisation des algorithmes d’estimation de phase. On présente ensuite les tests à effectuer dans le cadre de cette validation numérique, et les résultats ou tendances attendues.

2.3.1 Simulation d’instruments multi-pupilles

On a vu en conclusion de la section 1.2 que plusieurs configurations sont exploitées pour la conception d’instruments multi-pupilles : peu de sous-pupilles compactes ou diluées, et plusieurs sous-pupilles compactes. Suivant ces conceptions, nous proposerons au cours de ce manuscrit de valider des algorithmes d’alignement sur ces trois types d’instruments multi-pupilles présentés dans les sections suivantes.

2.3.1.1 NIRTA6

Nous présenterons dans la section 2.4 le miroir segmenté NIRTA (pour *Numerically-corrected Imaging and Reduced-length Telescope Array*), composé de 19 sous-pupilles, qui nous sera utile pour la validation expérimentale de nos algorithmes. Nous choisissons de dériver le nom de ce miroir en fonction du nombre de sous-pupilles de notre système simulé. Ici, le télescope segmenté simulé à 6 sous-pupilles est appelé NIRTA6. La pupille NIRTA6 est donc constituée de 6 sous-pupilles de formes circulaires (Fig. 2.1). Nous simulerons au cours de ce manuscrit une pupille compacte, avec une dilution de 1 et une pupille plus diluée, avec une dilution égale à 2. Le facteur d’échantillonnage étant fixé à 2, comme précédemment mentionné, il est à noter que les sous-FEP sont donc largement sur-échantillonnées. Le facteur d’échantillonnage des sous-pupilles est de $n_s = 6$ pour le cas compact, et $n_s = 10$ pour le cas dilué. La pupille compacte peut être assimilée à un instrument comme le GMT (sans sous-pupille centrale) et la pupille diluée peut être assimilée à un instrument de type VLTI.

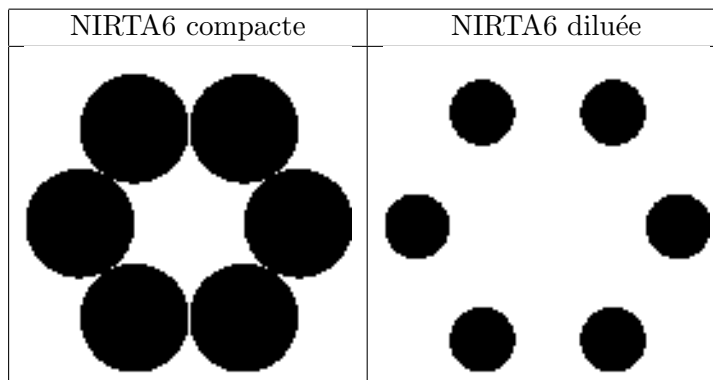


FIGURE 2.1 – Simulation d’une pupille à 6 sous-pupilles compacte (gauche) et diluée (droite).

2.3.1.2 Simulation de la pupille NIRTA 18

La pupille NIRTA18 est constituée de 18 sous-pupilles de formes circulaires (Fig. 2.2). La dilution choisie est de 1, afin que les sous-pupilles soient jointives. Chaque sous-pupille ayant un diamètre de $1/5$ fois le diamètre total, les sous-FEPs sont sur-échantillonnées et $n_s = 10$. On assimile NIRTA18 à la pupille du JWST, malgré la différence de géométrie des segments.

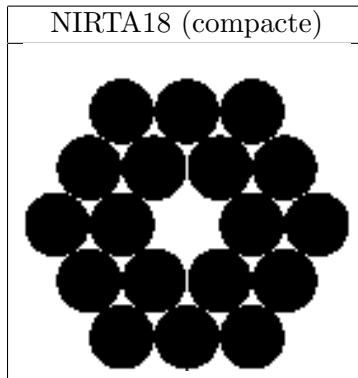


FIGURE 2.2 – Les 18 sous-pupilles simulées, échantillonnées sur une grille de 512 par 512 pixels.

2.3.2 L'optimisation des paramètres

Les différents ASOs reposent sur des algorithmes dont les paramètres principaux peuvent être modifiés, influant directement sur la pertinence de l'estimation de phase effectuée. Par exemple, on a présenté l'ASO de diversité de phase, reposant sur l'analyse d'une image focale et d'une image présentant un défaut de phase connu Φ_d . Dans ce cadre, il s'agit d'étudier la phase Φ_d la plus adaptée pour que l'estimation de phase soit la meilleure possible. Si la phase de diversité est une défocalisation, on va donc estimer quelle est la distance optimale entre les deux plans d'acquisition afin d'obtenir la meilleure estimation de phase.

2.3.3 La linéarité

L'étude de la linéarité des ASOs permet de quantifier l'amplitude de phase maximale estimable de manière linéaire. Ainsi, l'algorithme d'estimation de phase peut être sélectionné et utilisé en fonction du besoin. Par exemple, on propose dans ce manuscrit différents algorithmes en fonction de l'amplitude des erreurs d'alignement.

2.3.4 La propagation de bruit

Cette étude permet d'évaluer les performances des ASOs en fonction de la quantité de photo-électrons dans les images. Ainsi, il sera possible de déterminer quel rapport signal-à-bruit est nécessaire pour atteindre une performance attendue. Cette étude consiste en une série de tirages indépendants d'estimations d'aberration pour des flux donnés. Une étude statistique sur ces \mathcal{N}_T tirages est alors effectuée :

- le calcul du biais consiste à évaluer l'écart absolu entre l'estimation fournie par l'algorithme (\hat{a}) et l'aberration effectivement introduite (a) :

$$\text{biais} = \frac{1}{\mathcal{N}_T} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} (\hat{a}_i - a), \quad (2.9)$$

- le calcul de l'écart-type permet d'évaluer la répétabilité de l'estimateur, à savoir la dispersion de l'estimation. Elle se calcule de la manière suivante :

$$\sigma = \sqrt{\left[\frac{1}{\mathcal{N}_T} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} \hat{a}_i^2 \right] - \left[\frac{1}{\mathcal{N}_T} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} \hat{a}_i \right]^2} \quad (2.10)$$

Il est à noter que lors de l'étude de l'évolution de l'écart-type en fonction du flux, plusieurs régimes peuvent être observés. Tout d'abord, à moyen et fort flux, le bruit de photon domine. Ainsi, l'écart-type suit une loi proportionnelle à $1/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$, avec \mathcal{N}_{ph} le nombre de photo-électrons dans une image. Nous nommerons α le coefficient de proportionnalité, dépendant de l'estimateur. C'est dans ce régime que l'on cherche habituellement à se placer pour avoir des conditions photométriques optimales. Pour des valeurs de flux relativement faible, le bruit de lecture de la caméra domine par rapport au bruit de photons. L'écart-type suit alors une loi en α/\mathcal{N}_{ph} . Si le bruit de lecture est insignifiant, alors ce régime est quasi-inexistant (ce sera le cas pour nos simulations). Enfin, si le nombre de photo-électrons est très faible, la distribution de l'estimation fournie se comporte comme une loi uniforme entre $-\pi$ et π . L'écart-type théorique d'une telle distribution est alors $\pi/\sqrt{3}$. Ainsi, à faible flux, l'écart-type suit un régime constant.

- Afin de quantifier l'erreur totale de notre estimateur, nous allons utiliser la racine de l'erreur quadratique moyenne (EQM) sur les tirages. L'EQM peut être calculée comme la somme quadratique de l'écart-type (encore appelée variance) et du biais. On écrit l'erreur totale :

$$\sqrt{\text{EQM}} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_T} \frac{1}{\mathcal{N}_a} \sum_{k,n,t} (\hat{a}_{k,n,t} - a_{k,n,t})^2}. \quad (2.11)$$

2.3.5 Influence des erreurs d'étalonnage

Pour un fonctionnement optimal, les paramètres des algorithmes se doivent d'être optimisés, comme la distance de défocalisation dans le cas de la diversité de phase. On va chercher à quantifier une erreur sur l'étalonnage de cette défocalisation par exemple. Ceci permet d'évaluer la précision requise pour que l'estimateur fournisse des résultats qui restent dans les spécifications de l'instrument.

2.3.6 Influence des aberrations de hauts ordres

Les trois premiers polynômes de Zernike sont concernés par la problématique d'alignement des instruments multi-pupilles. On va chercher à tester la stabilité de la performance des estimateurs face à des erreurs de polynômes plus élevés (que nous

qualifierons de « hauts ordres »), principalement dues aux défauts d'alignements intrapupillaires ainsi qu'aux aberrations et défauts de surface présents sur les optiques de l'instrument. Les hauts ordres sélectionnés iront de la défocalisation (Polynôme numéro 4) à l'aberration sphérique (Polynôme numéro 11).

2.4 Le banc BRISE

Dans le but de valider des ASOs plan focal, l'ONERA dispose d'un banc expérimental : BRISE (Banc Reconfigurable d'Interférométrie sur Sources Étendues)[Cassaing et al., 2006]. Dans le cadre de cette thèse, les algorithmes d'alignement et cophasage ont pu être testés sur ce banc, comme nous pourrions le voir dans le chapitre 6. Le but de la section actuelle est d'en présenter les différents modules.

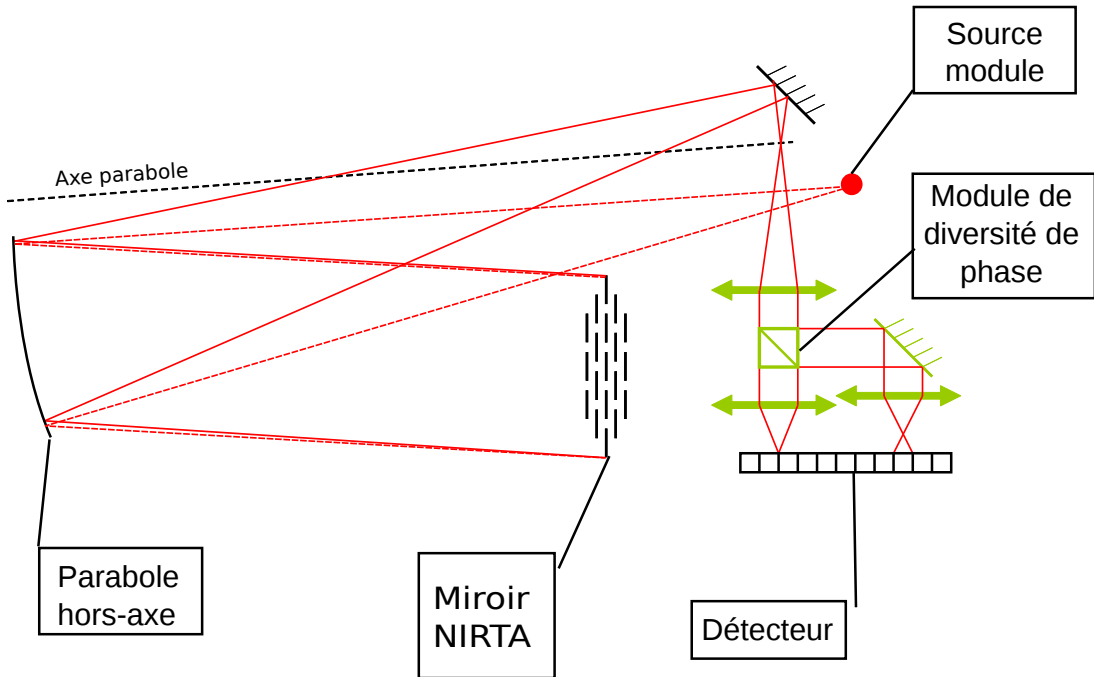


FIGURE 2.3 – Schéma optique du banc utile à la validation d'algorithmes de cophasage d'instruments multi-pupilles.

2.4.1 Le module source

Une diode laser à 635 nm couplée à une fibre optique monomode est utilisée comme une source ponctuelle. Le courant appliqué aux bornes de la diode est contrôlé au moyen d'un boîtier Thorlabs. La largeur spectrale de cette source est suffisamment faible (mais n'a pas été mesurée précisément), afin qu'elle soit considérée comme quasi-monochromatique, comme nous pourrions l'apprécier.

2.4.2 Le module de perturbation

Le module de perturbation est composé d'une parabole hors axe et du miroir NIRTA. La sortie de fibre est placée au plan focal de la parabole hors axe de diamètre 165 mm, et de distance focale 1250 mm. Ainsi l'image de la source par la parabole est à l'infini. La source est légèrement décalée par rapport à l'axe optique de la parabole, afin que l'image du miroir segmenté se forme de l'autre côté de la source par rapport à cet axe optique.

Illustré Fig. 2.4, le miroir segmenté est composé de 19 sous-pupilles circulaires, séparées de 20 mm. Un masque pupillaire est apposé sur le miroir et fait passer le diamètre apparent des sous-pupilles de 19 mm à 16 mm chacune. Dans le cadre de notre validation expérimentale, le masque est présent ainsi la dilution est fixée, par définition, à $20/16 = 1.25$. Chaque segment est piloté par 3 actionneurs piézoélectriques (à droite sur la figure 2.4), disposés de manière équilatérale, dépourvus jauges de contraintes. Ces jauges de contraintes auraient permis d'asservir la position des actionneurs piézoélectriques pour un contrôle en boucle ouverte. Ainsi, dans notre cas, leur absence entraîne une forte hystérésis, et il est donc indispensable d'avoir un contrôle en boucle fermée lors de la correction des erreurs d'alignement.

Les trois tensions appliquées sur les piézoélectriques sont comprises dans l'intervalle $[-20, 120]$ Volts (ces derniers ont une mauvaise tolérance aux tensions trop négatives). La panne de certains piézoélectriques nous limite au contrôle des segments de la première couronne. Le segment central ne sera pas considéré dans les tests expérimentaux, étant absent dans la plupart des instruments multi-pupilles.

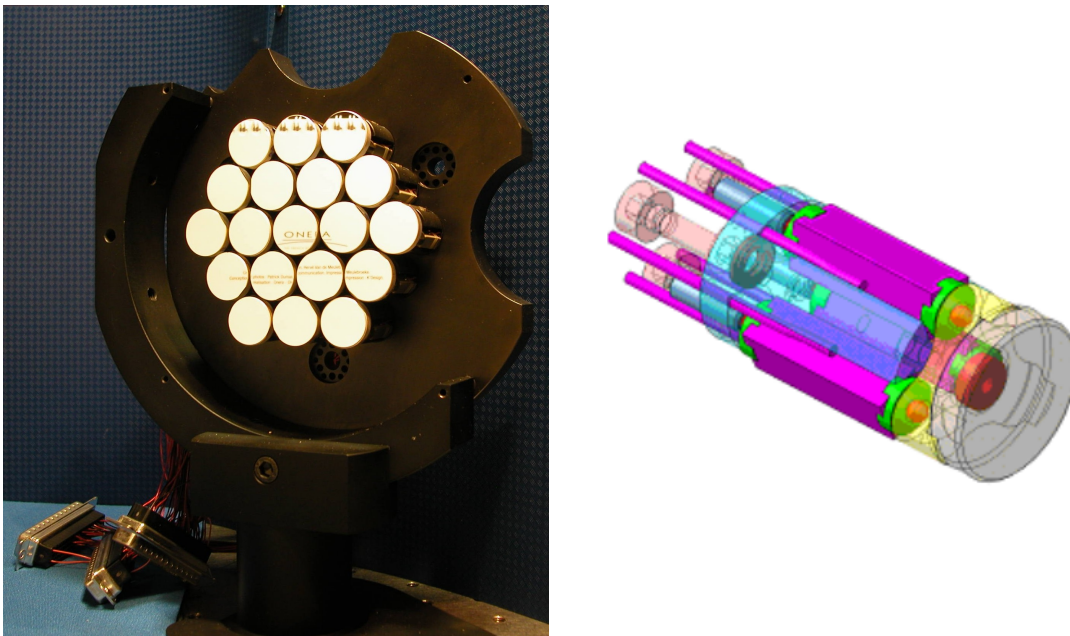


FIGURE 2.4 – Gauche : Miroir segmenté NIRTA. Droite : Dessin mécanique d'un actionneur piézoélectrique.

2.4.3 Le module de diversité

Une fois que le faisceau collimaté est passé par le miroir multi-pupille, il revient en convergent vers le module source et est dévié par un miroir plan. Le point focal est dans le plan focal objet d'une lentille de focale $f_1 = 38\text{mm}$ qui recollimate le faisceau. Une fois le faisceau recollimaté, il est divisé en deux voies par un cube séparateur. L'une des voies forme une image focale sur le détecteur, et l'autre forme une image légèrement défocalisée. Les deux lentilles pour la formation d'image sont identiques, de focale $f_2 = 76\text{mm}$. Le grandissement du module de diversité est donc de $f_2/f_1 = 2$.

Le détecteur est une caméra CCD de 1200 par 1400 pixels carrés de $6.45\mu\text{m}$. Son champ est assez grand pour avoir en simultanément les deux images focale et défocalisée en même temps sur deux parties différentes du détecteur. La dynamique du détecteur est de $2^{14} = 16384$ ADU, et son gain est de 1. Le constructeur annonce un bruit de détection avec un écart-type d'environ 5 ADU RMS.

2.4.4 Le module de contrôle

Le module de contrôle, ou Interface Homme-Machine (IHM), est gérée par le logiciel Labview. Ce dernier assure l'acquisition des images, l'appel au calculateur IDL (donc les algorithmes développés) et les envois de commande de tension. Différents modes sont disponibles sur l'IHM :

- Le mode mesure consiste à appliquer une série de tensions ou coefficients d'aberration de Zernike aux miroirs, et acquérir les images les unes après les autres. Ce mode est utilisé notamment pour établir la matrice d'interaction des miroirs, puis la matrice de commande nécessaire pour convertir un coefficient de Zernike (en nanomètres) en une tension appliquée sur les miroirs (en Volts). L'acquisition de la matrice de commande n'est pas développée dans ce manuscrit, nous sommes appuyés sur les travaux de [Denolle, 2013].
- Le mode boucle fermée permet de faire l'acquisition d'image(s), l'analyse de surface d'onde en faisant appel à IDL, puis l'application de la correction sur les miroirs de manière indéfinie et contrôlée par un gain. Lorsque le gain est de 0, nous dirons que nous sommes dans le cas de la boucle ouverte.

Des éléments sur l'étalonnage et l'alignement du banc seront fournis dans le chapitre 6.

2.5 Conclusion du chapitre

Le chapitre 1 a présenté la problématique à laquelle nous tentons de répondre durant la thèse : la validation d'une procédure complète d'alignement et de cophasage pour un instrument multi-pupille. Nous avons présenté dans le chapitre 2 les différents outils et méthodes disponibles pour le développement, le test et l'évaluation de performances d'estimateurs de phase.

La seconde partie du manuscrit présente le travail effectué au cours de la thèse pour répondre à la problématique, au moyen des outils qui ont été mis à disposition.

Première partie

**ALIGNEMENT
D'INSTRUMENTS
MULTI-PUPILLES**

Chapitre 3

Alignement géométrique sur point source : ELASTIC

Contents

3.1	Modélisation des images	68
3.1.1	La pseudo-défocalisation : diversité de phase géométrique . . .	68
3.1.2	Modèle de fonction pupillaire	70
3.1.3	Modèle de Fonction de Transfert Optique	71
3.2	Principe de l'estimateur : définition de l'Interspectre Décalé en Fréquence	73
3.2.1	Philosophie de l'algorithme	73
3.2.2	Développement de l'estimateur analytique : l'Interspectre Décalé en Fréquence des images	76
3.3	Exploitation des auto-pics de l'interspectre décalé en fréquence : ELASTIC-1	79
3.3.1	Définition du domaine de validité de ELASTIC-1	80
3.3.2	Solution du problème inverse	81
3.3.3	Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-1	81
3.4	Exploitation de la totalité l'Interspectre Décalé en Fréquence : ELASTIC-2	98
3.4.1	La linéarisation des inter-pics	98
3.4.2	Solution du problème inverse	100
3.4.3	Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-2	103
3.5	Conclusion du chapitre	106

La première partie de ce manuscrit a exposé la problématique de l’alignement géométrique d’un instrument multi-pupilles, qui consiste à effectuer la superposition des sous-FEPs de chacune des sous-pupilles. En effet, avant de pouvoir effectuer l’alignement interférométrique puis l’alignement fin, il y a nécessité de réduire les erreurs de tip/tilt à moins de $\lambda/8$, qui correspond à un décalage d’une moitié de sous-FEP.

Des méthodes pour l’alignement géométrique fondées sur l’exploitation d’images proches du plan focal ont notamment été présentées dans le cadre du futur télescope spatial James Webb (section 1.7). Ces méthodes ont une implantation qui dépend directement du nombre de sous-pupilles de l’instrument. Il n’existe actuellement pas, à notre connaissance, de méthode simple et rapide qui permette d’identifier les images de chaque segment, dans le cas de l’observation d’une source ponctuelle, sans avoir à appliquer de modulation sur chaque segment un à un.

Nous souhaitons réduire le nombre d’images acquises pour l’alignement géométrique, et ainsi simplifier les coûts calculatoires ou l’implantation de la méthode afin d’obtenir un algorithme qui soit autonome, simple et potentiellement utilisable en temps-réel. En ce sens, nous présentons dans ce chapitre un algorithme qui exploite deux images au voisinage du plan focal : ELASTIC (pour Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation). Afin de présenter ce nouvel algorithme, nous commençons par établir dans la section 3.1 la modélisation des images qui nous seront utiles. Nous présentons ensuite dans la section 3.2 le problème inverse que nous proposons de résoudre, afin d’avoir une expression analytique de l’erreur de tip/tilt associée à chaque sous-pupille. Ce problème inverse est ensuite résolu dans la section 3.3, qui présente l’algorithme ELASTIC-1, proposant une résolution simple mais partielle du problème inverse, permettant néanmoins de répondre à la problématique de ce chapitre. Cet algorithme a notamment fait l’objet de la publication [Vievard et al., 2017], disponible en annexe E. Enfin, nous présentons une amélioration de la résolution du problème inverse dans la section 3.4, en proposant une solution plus générale, permettant l’estimation des tip/tilt dans plus de conditions en comparaison à ELASTIC-1.

3.1 Modélisation des images

3.1.1 La pseudo-défocalisation : diversité de phase géométrique

De manière classique, les algorithmes de diversité de phase sont fondés sur une image focale et sur une image légèrement défocalisée (section 1.6.2.2). Si l’on considère une défocalisation plus importante, dans le cas de l’imagerie d’un point source par un instrument multi-pupille fortement désaligné en tip/tilt, les images de chaque sous-pupille auront subi un décalage entre le plan focal et le plan défocalisé (matérialisé par une flèche sur la figure 3.1).

C’est ce décalage différentiel entre les sous-FEPs associées à chaque sous-pupille qui va nous servir de diversité de phase. Nous proposons de remplacer la défocalisation globale sur la grande pupille par des tip/tilts locaux, directement appliqués sur les sous-pupilles, que nous baptisons pseudo-défocalisation (figure 3.2). Ainsi, nous considérons une modulation temporelle consistant à appliquer directement sur les sous-pupilles les tip/tilts qui seraient induits par une défocalisation.

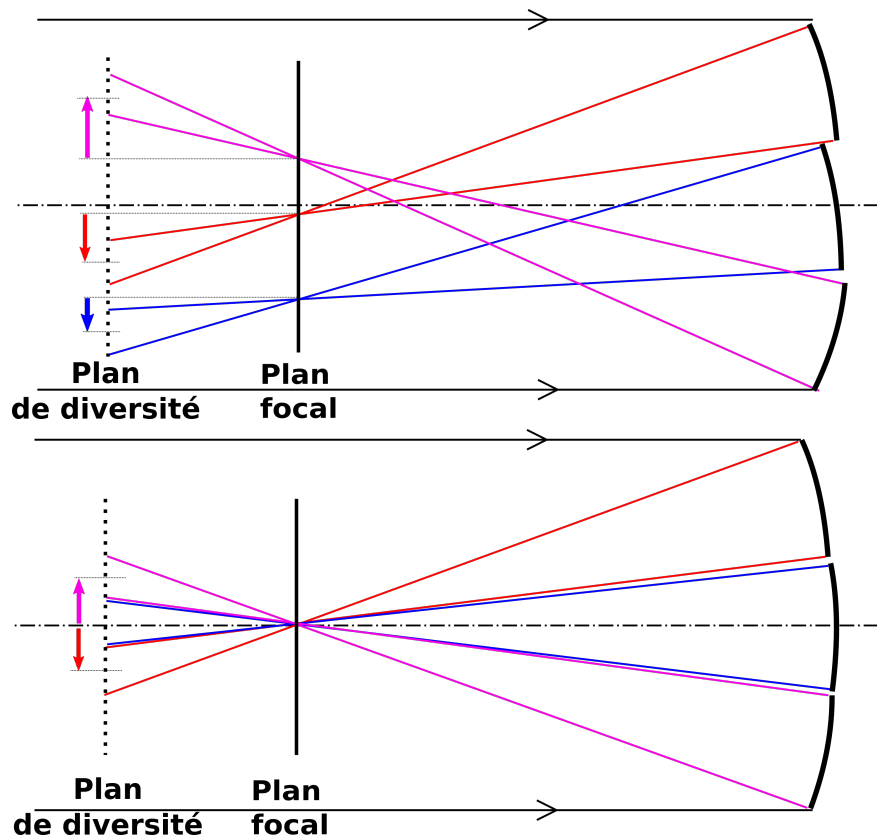


FIGURE 3.1 – Illustration de la diversité de phase géométrique sur un télescope segmenté désaligné (en haut). La défocalisation entre le plan focal et le plan de diversité étant suffisamment grande, les sous-FEPs sont animées d’un décalage d’un plan à l’autre, matérialisé par une flèche. En bas, illustration d’un télescope aligné : les sous-FEPs sont superposées dans le plan focal, et sont animées uniquement du décalage induit par la diversité dans le plan de diversité.

Cette nouvelle diversité présente des avantages considérables en comparaison à une défocalisation globale :

- La défocalisation introduite étant potentiellement grande, le fait de l’approximer uniquement par des tip/tilts locaux permet de s’affranchir de la défocalisation introduite localement sur les segments. Ainsi un élargissement de l’image de chaque sous-pupille est évité (Fig. 3.3).
- Les deux images exploitées étant situées dans le plan focal, il n’y a pas de besoin que le système soit télécentrique.
- Le matériel utile à l’acquisition des deux images se limite à la caméra scientifique et aux actionneurs de correction en tip/tilt des segments eux-mêmes.

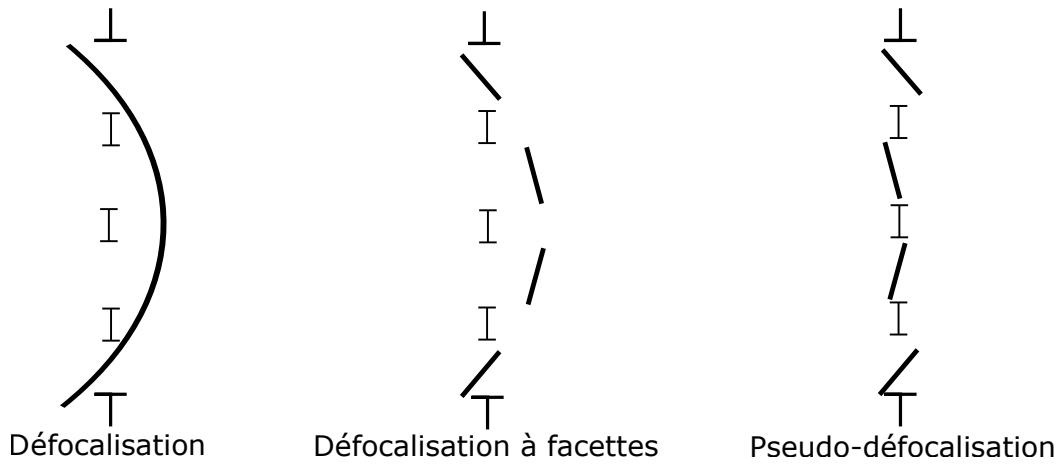


FIGURE 3.2 – Schéma explicatif de la pseudo-défocalisation. De droite à gauche : défocalisation sur la grande pupille; défocalisation projeté en Piston-Tip-Tilt sur chaque sous-pupille (baptisée défocalisation à facettes); défocalisation projetée sur le Tip-Tilt sur chaque sous-pupille (appelée pseudo-défocalisation).

Amplitude	Vraie défocalisation	Pseudo-défocalisation équivalente
6 rad RMS		
10 rad RMS		

FIGURE 3.3 – Comparaison entre la défocalisation et la pseudo-défocalisation.

3.1.2 Modèle de fonction pupillaire

L'Eq. (1.25) décrit la fonction pupillaire en présence d'aberrations. Prenant en considération que ces aberrations sont limitées aux piston/tip/tilt, et que les coefficients

3.1. MODÉLISATION DES IMAGES

d'aberration $a_{k,n}$ sont exprimés en nombre de longueur d'onde (λ), l'Eq. (1.25) s'écrit :

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \left\{ \left[\rho_n \Pi \exp \left(j \sum_{k=1}^3 2\pi a_{k,n} Z_k \right) \right] \star \delta_{\mathbf{c}_n} \right\} (\mathbf{u}). \quad (3.1)$$

Ensuite, notons $\Psi_{n,d}$ la diversité de phase sur la n-ième sous-pupille dans le d-ième plan de diversité. La transmittance dans le d-ième plan de diversité s'écrit alors :

$$\mathbf{p}_d(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \left\{ \left[\rho_n \Pi \exp \left(j \Psi_{n,d} + j \sum_{k=1}^3 2\pi a_{k,n} Z_k \right) \right] \star \delta_{\mathbf{c}_n} \right\} (\mathbf{u}). \quad (3.2)$$

En prenant $\Pi_{n,d} = \Pi \exp j \Psi_{n,d}$ on a finalement :

$$\mathbf{p}_d(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \left\{ \left[\rho_n \Pi_{n,d} \exp \left(j \sum_{k=1}^3 2\pi a_{k,n} Z_k \right) \right] \star \delta_{\mathbf{c}_n} \right\} (\mathbf{u}). \quad (3.3)$$

Ainsi, en plan focal la diversité de phase Ψ est nulle.

3.1.3 Modèle de Fonction de Transfert Optique

Comme on a pu le voir section 1.3.2, la FTO est la somme de \mathcal{N}_a termes photométriques (pic central donc basse fréquence, visible sur la ligne 1, troisième colonne de la Fig. 3.4, correspondant à la FTO d'une sous-pupille) et de $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ termes interférométriques (pics satellites, visibles sur la ligne 1, troisième colonne de la Fig. 3.4, correspondant aux interférences entre sous-pupilles).

Dans le cadre de la recherche des erreurs de tip/tilt de grande amplitude, les termes interférométriques de la FTO ne présentent pas d'utilité pour plusieurs raisons :

- On a vu dans la section 1.3.4 qu'une erreur de tip ou de tilt habille la FTO d'une rampe de phase. Cette information de phase est présente sur le pic photométrique et les pics interférométriques de la FTO. Nous souhaitons un algorithme qui soit efficace avec ou sans présence de pics interférométriques. C'est pourquoi nous ne voulons exploiter que l'information contenue dans le pic photométrique.
- Il est fort probable que des erreurs de piston de grande amplitude soient présentes lors de l'étape d'alignement géométrique. Aussi, si ces pistons sont plus importants que la longueur de cohérence de la source observée, les termes interférométriques sont inexistantes (Fig. 3.4 ligne 2 colonne de droite). Nous appellerons ce cas de figure le *mode incohérent*.
- En présence d'erreurs de tip/tilt significatives, les termes interférométriques sont fortement atténués (Fig. 3.4 ligne 3 colonne de droite).
- Si les filtres naturels précédemment mentionnés ne sont pas suffisants, nous pouvons appliquer un filtre passe-bas aux deux images pour isoler les termes photométriques.

On a également vu que la FTO était définie sur un support double par rapport à la transmittance pupillaire. Afin de garder les mêmes polynômes de Zernike 2 et 3, définis

en détail dans la section 1.3.4, nous les réécrivons, en considérant un support double mais toujours la même pente : $2Z_k(\mathbf{u}/2)$. Ainsi, l'équation (1.32) de la FTO devient :

$$\mathbf{s}_d(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Lambda_{n,d}(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} \mathbf{Z}_k \left(\frac{\mathbf{u}}{2} \right) \right], \quad (3.4)$$

$$\text{avec } \Lambda_{n,d} = (\Pi \exp [j\Psi_{n,d}]) \otimes (\Pi \exp [j\Psi_{n,d}]). \quad (3.5)$$

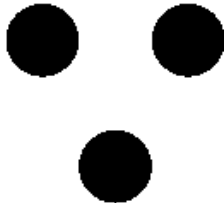
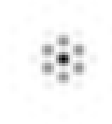
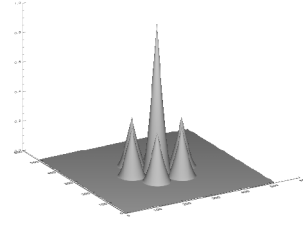
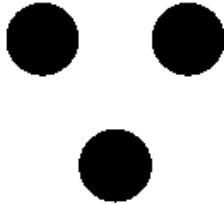
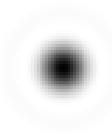
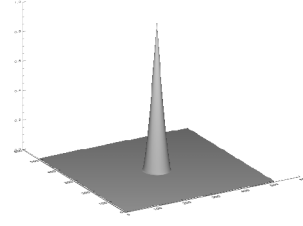
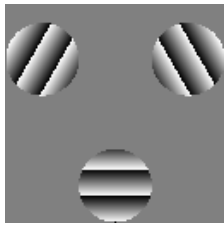
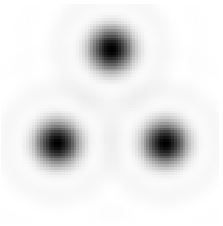
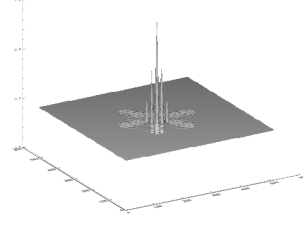
	Phase du plan pupille	Fonction d'Étalement de Point	Module de la Fonction de Transfert Optique
Cas cohérent			
Cas incohérent			
Cas incohérent avec tip-tilts			

FIGURE 3.4 – Illustrations plan pupille, Fonction d'Étalement de Point, Fonction de Transfert Optique dans des cas cohérent, incohérents, avec ou sans aberrations de tip/tilt.

3.2 Principe de l'estimateur : définition de l'Interspectre Décalé en Fréquence

3.2.1 Philosophie de l'algorithme

La Fig. 3.5 montre que dans l'image focale, chaque sous-FEP est décalée selon l'erreur de tip/tilt associée (en rouge). Dans l'image défocalisée (en vert), un décalage supplémentaire (matérialisé par une flèche), induit par la diversité, est ajouté à l'erreur de tip/tilt. Si le système est télécentrique ou si on est dans le cas de la pseudo-défocalisation, le décalage supplémentaire ne dépend pas de l'erreur de tip/tilt, mais uniquement de la diversité. Si les décalages supplémentaires sur chaque sous-FEP sont suffisamment différents, ils permettent d'effectuer une différenciation et d'associer chaque sous-FEP à sa sous-pupille d'origine. Ainsi, la combinaison des informations contenues dans les deux images peut permettre d'associer chaque sous-pupille avec son erreur de tip/tilt. L'objectif est maintenant de convertir cette description qualitative en un estimateur linéaire bas coût. Les informations pertinentes étant situées dans la phase de la FTO (Eq. 3.4), nous proposons de construire l'estimateur à partir de la corrélation des images dans le domaine de Fourier : c'est l'Interspectre. Comme nous allons l'expliquer, nous ajouterons une petite subtilité qui permettra d'en extraire l'information intéressante. Décrivons maintenant pas à pas comment cet estimateur est construit, à partir des deux images de diversité.

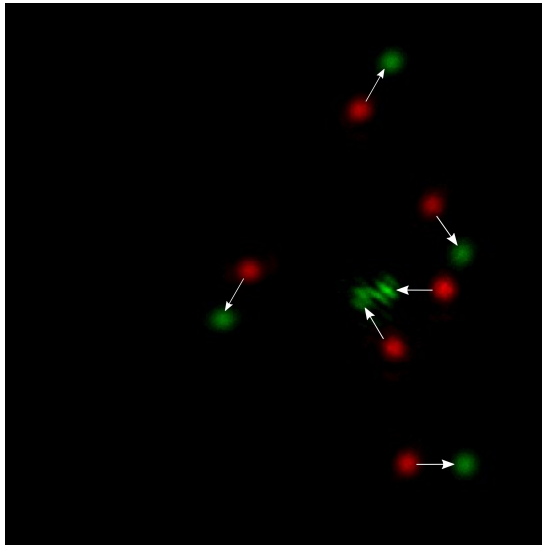


FIGURE 3.5 – Images focale (rouge) et pseudo-défocalisée (vert) superposées. Les flèches matérialisent le décalage déterministe ajouté à l'erreur de tip/tilt par la diversité.

Tout d'abord si l'on calcule la corrélation entre les deux images de diversité, elle contient \mathcal{N}_a^2 termes : \mathcal{N}_a termes qui proviennent de la corrélation entre les sous-FEPs provenant de la même sous-pupille, que nous appellerons par la suite auto-taches, et $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ termes qui proviennent de la corrélation de sous-FEPs provenant de sous-pupilles différentes. Ils seront appelés inter-taches par la suite.

Images de diversité				
Corrélation				
Interspectre (Module et phase)				
	Exemple 1		Exemple 2	

FIGURE 3.6 – Illustration de la corrélation de deux images de diversité : Ligne 1 : Deux images de diversité (gauche : image focale, droite : image pseudo-défocalisée) d'un instrument à trois sous-pupilles présentant des aberrations de tip/tilt. Ligne 2 : Corrélation des deux images de diversité. Les trois auto-taches sont encadrées dans le cercle tandis que les six inter-taches sont à l'extérieur du cercle. Ligne 3 : Module (gauche) et phase (droite) de leur interspectre. Il est à noter qu'une différence de brillance sur une sous-FEP est retrouvée sur les termes de la corrélation d'image.

La Fig. 3.6 présente la corrélation de deux images d'un télescope à 3 sous-pupilles, présentant des erreurs de tip/tilt. Ces erreurs de tip-tilt étant relativement plus importantes que les tip-tilts de la diversité, on retrouve les auto-taches plus proches du centre (à l'intérieur du cercle superposé sur l'image de corrélation) et les inter-taches éparpillées autour (à l'extérieur du cercle). En comparant les images de corrélation des deux exemples, on vérifie que les auto-taches ont des positions fixes alors que les inter-taches ont une position qui varie avec l'erreur de tip/tilt sur les sous-pupilles. Ainsi, leur position dépend respectivement de la diversité introduite et des erreurs de tip/tilt en présence.

Par ailleurs, l'amplitude des auto-taches est proportionnelle au carré du flux sur chaque sous-FEP. De fait, l'information en module sur l'image est accessible au moyen du seul calcul de la corrélation. La position des auto-taches étant déterminée par la phase de diversité introduite, elle permet de discriminer chaque sous-pupille.

Nous souhaitons maintenant rendre les différents termes de la corrélation identifiables et séparables. Si la pseudo-défocalisation a une amplitude suffisante, les auto-taches sont séparables (Fig. 3.7).

3.2. PRINCIPE DE L'ESTIMATEUR : DÉFINITION DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE




Amplitude de pseudo-défocalisation	Corrélation
0 rad RMS	
2 rad RMS	
4 rad RMS	

FIGURE 3.7 – Simulation de corrélations d’images pour des amplitudes de pseudo-défocalisation différentes, dans le cas à 3 sous-pupilles.

Si l’erreur de tip/tilt sur chaque sous-pupille est suffisamment grande, les inter-taches ne chevauchent pas les auto-taches. Bien sûr, ce non-recouvrement n’est rigoureusement pas respecté si l’extension infinie des anneaux de diffraction est considérée, mais nous faisons l’hypothèse préliminaire que leur impact n’est pas significatif. Donc si l’amplitude de la pseudo-défocalisation est suffisamment grande et si les tip/tilts sont relativement grands, chaque auto-tache est globalement isolée. L’amplitude de chaque auto-tache dépend du flux sur chaque sous-pupille, qui peut donc être estimé.

Afin d’accélérer le calcul, nous calculons cette corrélation dans le domaine de Fourier. Ceci correspond au calcul de l’interspectre des deux images. Cet interspectre contient les mêmes informations que la corrélation, mais sous une forme différente (Fig. 3.6 lignes 2 et 3). De plus, son calcul est effectivement plus rapide puisqu’il cor-

respond à une simple multiplication de deux Transformées de Fourier (avec conjugaison de l'une des deux). Appelons *auto-pics* la Transformée de Fourier des auto-taches, et *inter-pics* la Transformée de Fourier des inter-taches. On peut voir sur la Fig. 3.6 que si les auto-taches sont visiblement séparées dans l'espace direct, ce n'est pas le cas dans l'espace de Fourier ; les auto- et inter-pics sont superposés. Cependant, une des propriétés de la TF est de conserver l'orthogonalité. Ainsi, si les auto-taches sont clairement isolables dans l'espace direct, leur TF (les auto-pics) le sont aussi dans l'espace de Fourier (*via* leur phase qui les différencie).

Enfin, l'idée est maintenant d'extraire la phase recherchée dans les auto-pics (figure 3.8). Si l'on considère un auto-pic issu de l'interspectre classique, à savoir la multiplication d'un pic de FTO par lui-même conjugué, l'information de phase cherchée (en trait pointillé épais) disparaît. Il ne reste que l'information sur la diversité (trait pointillé fin), d'où le fait que la diversité détermine la phase sur les auto-pics, donc leur position dans le domaine réel.

Nous introduisons maintenant un décalage Δu de la FTO conjuguée selon un des deux axes. L'Eq. (3.4) devient alors :

$$s_d^*(u + \Delta u) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Lambda_{n,d}^*(u + \Delta u) \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} \mathbf{Z}_k \left(\frac{u + \Delta u}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

Parce que \mathbf{Z}_k est linéaire pour $k=2$ ou 3 , nous réécrivons :

$$a_{k,n} \mathbf{Z}_k \left(\frac{\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}}{2} \right) = a_{k,n} \left(\mathbf{Z}_k \left(\frac{\mathbf{u}}{2} \right) + \mathbf{Z}_k \left(\frac{\Delta \mathbf{u}}{2} \right) \right). \quad (3.7)$$

On voit donc que le décalage fréquentiel introduit crée une rampe (qui est la même que dans l'Eq. (3.4)) plus un terme constant : un piston $\mathbf{Z}_k \left(\frac{\Delta \mathbf{u}}{2} \right)$.

Ainsi, lors de la multiplication du pic de FTO par lui-même conjugué et décalé, la phase de l'auto-pic obtenu est composé de la phase de diversité plus ce piston. L'amplitude de ce dernier dépend directement du coefficient d'aberration $a_{k,n}$ recherché et de l'amplitude du décalage Δu . L'idée est donc d'exploiter la valeur de ce piston, connaissant le décalage, afin de remonter à la valeur du coefficient de la rampe de phase, et donc de l'aberration de Tip ou de Tilt (selon la direction du décalage).

Nous définirons cette opération, par la suite, Interspectre Décalé en Fréquence (IDF).

Ce raisonnement a conduit à l'établissement de l'algorithme ELASTIC (Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation) détaillé dans la section suivante.

3.2.2 Développement de l'estimateur analytique : l'Interspectre Décalé en Fréquence des images

Les entrées de l'algorithme ELASTIC (définies sections 2.2 et 2.4) sont des images de diversité discrétisées sur un détecteur (simulé ou réel) de dimensions $\mathcal{N}_p \times \mathcal{N}_p$ pixels, avec un facteur d'échantillonnage n_s (défini en section 2.2.2). Afin de calculer l>IDF sans risque de repliement du signal, car nous allons multiplier deux spectres, les images acquises sont préalablement projetées sur un support de $2\mathcal{N}_p \times 2\mathcal{N}_p$ avant d'en calculer

3.2. PRINCIPE DE L'ESTIMATEUR : DÉFINITION DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE

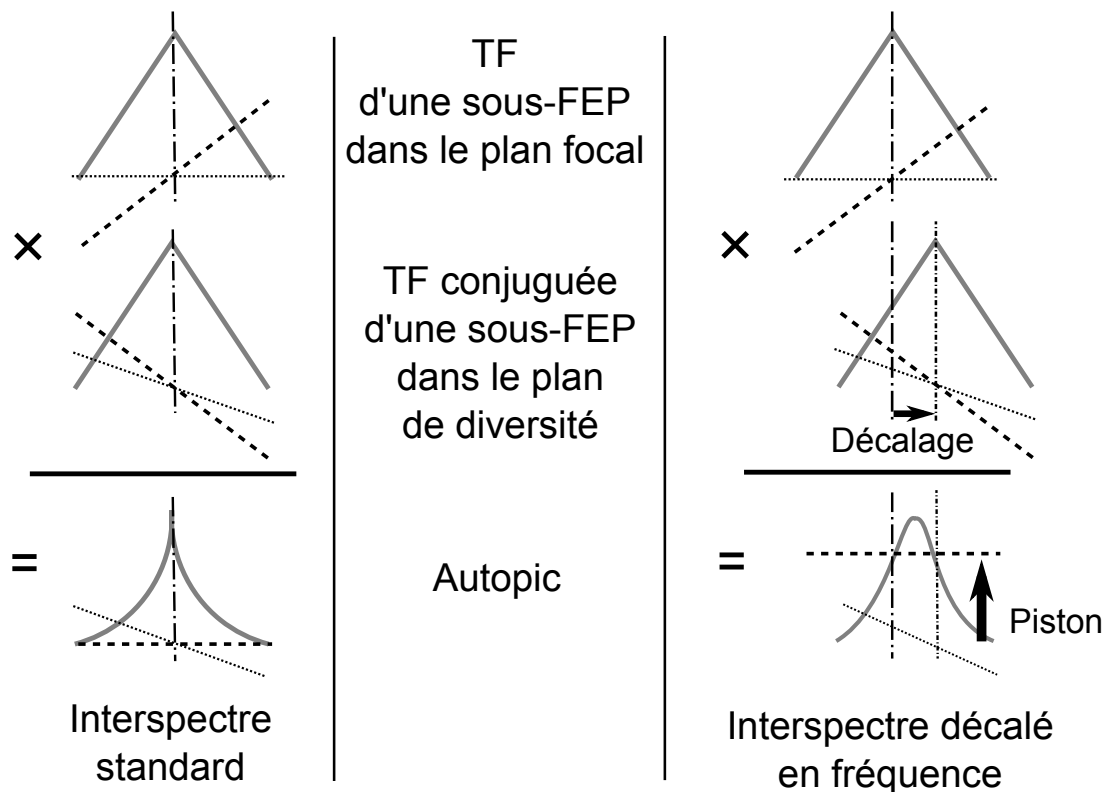


FIGURE 3.8 – Explication de l'Interspectre Décalé en Fréquence. Colonne de gauche : Interspectre standard (ligne du bas) comme étant le résultat de la multiplication de la TF d'une sous-FEP du plan focal (ligne 1) par la TF conjuguée d'une sous-FEP du plan de diversité (ligne 2), pour une sous-ouverture donnée. Colonne de droite : Interspectre décalé en fréquence (ligne du bas) comme étant le résultat de la multiplication de la TF d'une sous-FEP du plan focal (ligne 1) par la TF conjuguée décalée d'une sous-FEP du plan de diversité (ligne 2), pour une sous-ouverture donnée. Chaque terme complexe a un module (trait plein), et une phase qui comprend deux composantes : le tip/tilt (trait pointillé épais) et la diversité (pseudo-défocalisation, trait pointillé fin).

la Transformée de Fourier Discrète (TFD). La taille du support de cette dernière est donc $4\mathcal{N}_p/n_s$ pixels. Cette TFD est alors approximée par une version discrète du modèle de FTO continu s_d (équation 3.4), avec pour composantes $\mathbf{s}_{d,\mathbf{q}}$. Le lien entre l'indice à deux dimensions \mathbf{q} et la coordonnée réduite continue \mathbf{u} est $\mathbf{u} = \mathbf{q} n_s / \mathcal{N}_p$, puisque la taille du demi-support de s_d est $|u_{max}| = 2$. On a donc :

$$\mathbf{s}_{d,\mathbf{q}} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Lambda_{n,d} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{kn} \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Définissons maintenant Δ_m^\pm l'opérateur qui introduit un décalage δ_m ($m = 2$ ou 3), d'amplitude $\pm\delta$ pixels. Dans la présentation et l'explication de ELASTIC dans [Vievard et al., 2017] en annexe E nous avons choisi de décaler une seule des FTOs lors de l'établissement de l'IDF. Nous proposons ici une approche différente qui consiste à effectuer un décalage différentiel sur les deux images. Nous justifions ceci en se basant sur un résultat de la publication qui indique une dynamique inchangée de l'estimation en tip-tilt par ELASTIC suivant que l'amplitude du décalage en fréquence est de 1 ou de 2. Ainsi, lorsque l'on parlera d'un décalage de q pixel, il s'agira de manière absolue d'un décalage différentiel de $2q$ pixels.

L'IDF est donc défini comme le vecteur $\mathbf{j}_{m\mathbf{q}}$, pour chaque valeur de m (2 ou 3) et pour chaque pixel \mathbf{q} :

$$\mathbf{j}_{m\mathbf{q}} = \Delta_m^- [\mathbf{s}_{1\mathbf{q}}] \times \Delta_m^+ [\mathbf{s}_{2\mathbf{q}}^*]. \quad (3.9)$$

A partir des Eq. (3.8) et (3.9) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Delta_m^- \left[\Lambda_{n,1} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} \Delta_m^- \left[\mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right] \right] \\ &\times \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_{n'}^2 \Delta_m^+ \left[\Lambda_{n',2}^* \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[-j \sum_{k'=2}^3 4\pi a_{k,n'} \Delta_m^+ \left[\mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Or, d'après les équations des polynômes de Zernike 2 et 3 (tip et tilt) Eq. (1.22) et (1.23) :

$$(\Delta_m^\pm [\mathbf{Z}_k]) \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) = \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \pm \frac{n_s \delta}{\mathcal{N}_p} \delta_{k,m}, \quad (3.11)$$

avec $\delta_{k,m}$ le symbole de Kronecker. En injectant l'Eq. (3.11) dans l'Eq. (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Delta_m^- \left[\Lambda_{n,1} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \\ &\times \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_{n'}^2 \Delta_m^+ \left[\Lambda_{n',2}^* \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n'} \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n'} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

Regroupons maintenant les termes constants devant chaque terme :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \Delta_m^- \left[\Lambda_{n,1} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right] \\
 &\times \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n'} \right] \Delta_m^+ \left[\Lambda_{n',2}^* \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \right] \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n'} \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ensuite, on factorise afin de faire apparaître le terme de piston recherché pondérant les pics :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} (a_{m,n} + a_{m,n'}) \right] \\
 &\Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n',2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi (a_{k,n} - a_{k,n'}) \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

La double somme de l'Eq. (3.14) peut alors être séparée mettant en évidence les deux familles de pics mentionnées dans la section 3.2.1 :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n,2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} (a_{m,n} + a_{m,n'}) \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n',2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &\times \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi (a_{k,n} - a_{k,n'}) \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

L'Eq. (3.15) montre bien que l'IDF, $j_{m\mathbf{q}}$, est une somme de \mathcal{N}_a^2 termes : les \mathcal{N}_a auto-pics et les $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ inter-pics. Cependant on voit que cette équation n'est pas linéaire en les $a_{m,n}$. Nous tâchons alors de rechercher des cas où l'inversion est simple. Nous voyons tout d'abord qu'en considérant uniquement les auto-pics ($n = n'$), l'équation devient alors linéaire en les $\exp(\mathcal{K}a_{m,n})$ avec \mathcal{K} constante. Nous proposons donc par la suite une première approche qui vise à ne considérer que ces auto-pics afin de faciliter l'inversion de l'Eq. (3.15) : cet algorithme sera baptisé ELASTIC-1.

3.3 Exploitation des auto-pics de l'interspectre décalé en fréquence : ELASTIC-1

ELASTIC-1 repose sur l'exploitation des auto-pics de l'Eq. (3.15), en négligeant les termes pour $n \neq n'$.

3.3.1 Définition du domaine de validité de ELASTIC-1

Comme développé dans la section 3.2, si les erreurs de tip-tilt sont suffisamment grandes, les inter-taches ne recouvrent pas les auto-taches. Cette condition n'est remplie que si la distance entre deux sous-FEPs, exprimée en aberration de tip ou de tilt, est plus grande que la séparation maximale entre deux auto-taches (des sous-ouvertures diamétralement opposées, dans le cas d'une couronne simple et d'une pseudo-défocalisation comme diversité). Cette séparation entre deux auto-taches, dans le cas d'une pseudo-défocalisation d'amplitude A_4 est :

$$\Delta a_m = 2\sqrt{3}\frac{4R^2}{B^2}(B-2R)A_4, \quad (3.16)$$

d'après l'Eq. (B.6). La largeur à mi-hauteur d'une sous-FEP convertie en coefficient de tip/tilt étant de 1/4 de longueur d'onde (comme montré dans l'annexe C), la séparation minimale entre deux sous-FEPs qui satisfait le non-recouvrement des inter-taches sur les auto-taches est donc, en terme de coefficient de tip ou de tilt :

$$\Delta a_m = 2\sqrt{3}\frac{4R^2}{B^2}(B-2R)A_4 + \frac{1}{4}. \quad (3.17)$$

On a donc deux conditions à respecter pour que les auto-taches soient 1-séparables entre elles, 2-séparables des inter-taches :

1. La diversité est suffisamment grande,
2. les sous-FEPs sont à séparation minimale comme défini à l'Eq.(3.17).

Dans la suite du manuscrit, nous appellerons la configuration dans laquelle les sous-FEPs sont à distance minimale la *position de parking*. Ainsi, par conservation de l'orthogonalité nous pouvons isoler les auto-pics dans l'Eq. (3.15). En ne gardant que ces derniers, l'expression de $j_{m\mathbf{q}}$ (Eq. (3.15)) devient alors :

$$j_{m\mathbf{q}} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp\left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n}\right] \mathcal{L}_{n,m}\left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p}\right), \quad (3.18)$$

avec $\mathcal{L}_{n,m} = \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n,2}^*]$. Dans le domaine de l'image, $\mathcal{L}_{n,m}$ est la corrélation deux sous-FEPs du plan focal et du plan pseudo-défocalisé, provenant de la même sous-pupille. La position dans le plan image de $\mathcal{L}_{n,m}$ dépend de la diversité sur la n -ième sous-pupille. On choisit maintenant de concaténer les valeurs de la matrice $j_{m\mathbf{q}}$ dans un vecteur \mathbf{j}_m . Sachant que nos inconnues sont les coefficients $a_{m,n}$ et potentiellement les flux ρ_n , nous les groupons dans un vecteur complexe d'inconnues :

$$\mathbf{x}_m = [x_{m,1}, \dots, x_{m,\mathcal{N}_a}]^T, \quad m \in \{2, 3\}, \quad (3.19)$$

$$\text{avec } x_{m,n} \triangleq \rho_n^4 \exp\left[-j\frac{8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n}\right], \quad n \in \{1, \dots, \mathcal{N}_a\}. \quad (3.20)$$

Nous pouvons alors dire que $j_{m\mathbf{q}}$ est linéaire en \mathbf{x}_m (Eqs. (3.20) et (3.18)). Ceci nous permet d'écrire le modèle direct de l>IDF sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m, \quad (3.21)$$

où C_m est une matrice de dimension $\mathcal{N}_a \times (2\mathcal{N}_p)^2$, selon l'Eq. (3.18). Cette matrice contient les auto-pics $\mathcal{A}_{n,m}$ de chaque sous-pupille.

3.3.2 Solution du problème inverse

La matrice C_m étant rectangulaire, elle n'est pas directement inversible. Cependant, son inverse généralisée peut être calculée au moyen de la décomposition en valeurs singulières (présentée en annexe A). Ainsi, en notant C_m^\dagger l'inverse généralisée de C_m , on peut calculer la solution $\hat{\mathbf{x}}_m$ au problème inverse :

$$\hat{\mathbf{x}}_m = C_m^\dagger \mathbf{j}_m. \quad (3.22)$$

Dans l'Eq. (3.22), $\hat{\mathbf{x}}_m$ est donc le résultat de la projection de \mathbf{j}_m sur les modes contenus dans C_m (auto-pics $\mathcal{A}_{n,m}$). On en déduit les flux et les erreurs de tip/tilt en calculant :

$$\begin{cases} \hat{a}_{m,n} = \frac{-\mathcal{N}_p}{8\pi n_s \delta} \text{Arg}(\hat{\mathbf{x}}_{m,n}), \\ \hat{\rho}_{m,n} = |\hat{\mathbf{x}}_{m,n}|^{1/4}. \end{cases} \quad (3.23)$$

L'opération la plus longue de la méthode présentée est le calcul de la matrice C_m^\dagger (pour les deux valeurs de m). Cependant, pour une pupille et des paramètres (amplitude de la phase de diversité, amplitude du décalage...) fixés, elle peut être pré-calculée. L'algorithme temps-réel ne repose donc que sur le calcul de deux ($m = 2$ et 3) interspectres décalés en fréquence à partir de deux images de diversité, et de deux projections (Eq. (3.22)) pour obtenir les coefficients d'aberration de tip/tilt et les flux sur chaque sous-pupille.

Cette procédure peut donc être utilisée dans le cadre d'une boucle d'asservissement pour amener les sous-FEPs d'une position aléatoire à la position de parking. Cette dernière position peut d'ailleurs être assimilée à celle obtenue à l'issue de l'étape *global alignment* (voir section 1.7.1) du télescope James Webb ([Feinberg et al., 2007]). Depuis ce parking, une commande prédéfinie en boucle ouverte sur les segments permettra de superposer les sous-FEPs dans le plan focal.

3.3.3 Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-1

Dans cette section on cherche à caractériser l'estimateur ELASTIC-1 pour plusieurs cas de pupilles : Nirta6 compacte et diluée et Nirta18 compacte (définies en section 2.2). Nous cherchons en effet à voir s'il y a une différence significative sur les performances de l'algorithme en fonction du nombre de sous-pupilles et/ou de la dilution.

3.3.3.1 Simulation des pupilles

NIRTA 6 Nous choisissons de traiter deux cas de télescopes à 6 sous-pupilles, comme vu section 2.3.1, afin d'évaluer les différences de performances qui peuvent exister en modifiant la dilution de la pupille. Chaque image de dimensions 512×512 est simulée avec un nombre total de 1×10^6 photo-électrons, avec un bruit de photons Poissonien et un bruit de lecture gaussien de 5 électrons par pixel. L'amplitude de la pseudo-défocalisation est tout d'abord fixée à 0.7λ (d'après l'Eq. (D.1)).

La position de parking dans le cas d'un instrument à 6 sous-pupilles est choisie au moyen de l'Eq. (3.17). La Fig. 3.9 présente les images de diversité dans le cas de la position de parking pour Nirta6 dans les deux cas de dilution. On peut également voir un zoom sur la corrélation de ces deux images, prouvant que les auto-taches sont bien isolées (dans le cercle vert superposé) entre elles et par rapport aux inter-taches. Rappelons que l'échantillonnage d'une sous-pupille $n_s = 6$ pour le cas compact et 10 pour le cas dilué (montré section 2.2). Ce qui explique les différences de tailles de sous-FEPs et donc des auto-pics dans l'image de corrélation.

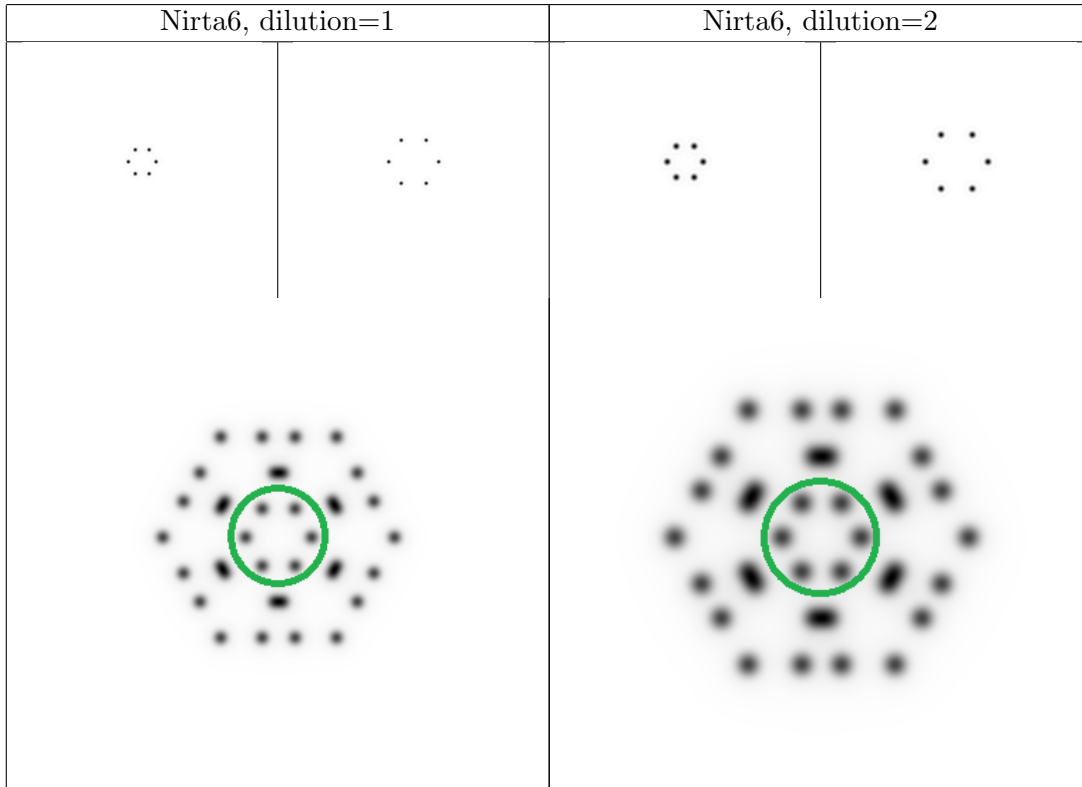


FIGURE 3.9 – Gauche : Cas Nirta6 compact. Haut : Simulation d'images focale (gauche) et pseudo-défocalisée (droite) en position de parking. Bas : Corrélation des deux images de diversité. Les auto-taches sont à l'intérieur d'un cercle superposé. Droite : Cas Nirta6 dilué. Haut : Simulation d'images focale (gauche) et pseudo-défocalisée (droite) en position de parking. Bas : Corrélation des deux images de diversité. Les auto-taches sont à l'intérieur d'un cercle superposé.

NIRTA18 Le cas de télescope à 18 sous-pupilles est maintenant étudié, comme défini section 2.3.1.2 avec une dilution de 1, donc une pupille compacte. Les images simulées grâce à MASTIC ont une taille de 1024 par 1024 pixels, et le facteur d'échantillonnage sur la pleine pupille est de 2. On a donc $n_s = 10$ pour chaque sous-pupille, comme les sous-pupilles dans le cas NIRTA6 avec une dilution de 2. Chaque image est simulée avec un nombre total de 1×10^6 photo-électrons, avec un bruit de photons Poissonien et un bruit de lecture gaussien de 5 électrons par pixel. L'amplitude de la pseudo-

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

défocalisation est tout d'abord fixée à 0.9λ (d'après l'Eq. (D.1)).

La position de parking des sous-pupilles appartenant à la couronne interne de notre imageur a été choisie au moyen de l'Eq. (3.17). En ce qui concerne les sous-FEPs de la couronne externe, elles ont été placées de manière à ce que l'on garde l'orthogonalité entre les auto-pics et les inter-pics lors du calcul de l'IDF. Cela signifie également une absence de recouvrement entre les auto-taches et les inter-taches lors de la corrélation des deux images (Fig. 3.10).

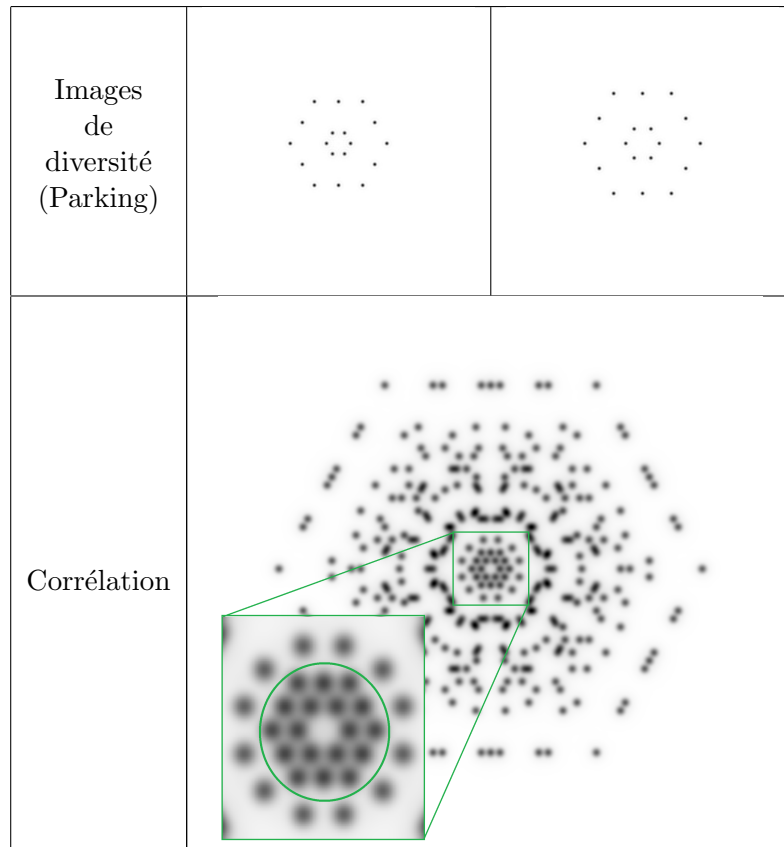


FIGURE 3.10 – Ligne 1 : Simulation d'images focale (gauche) et pseudo-défocalisée (droite) dans le cas où les sous-FEPs sont en position de parking. Ligne 2 : Corrélation des deux images de diversité dans le cas du parking. Les auto-taches sont à l'intérieur d'un cercle superposé, isolées des inter-taches.

3.3.3.2 Linéarité

Étudions tout d'abord la linéarité de l'estimateur afin de quantifier sa dynamique. Pour ce faire, une sous-FEP est positionnée successivement à 30 positions à intervalles réguliers d'un coin à l'autre de l'image (exemple dans le cas à 6 sous-pupilles sur la Fig. 3.11).

Pour chaque position, nous effectuons 50 tirages de bruit, les autres sous-pupilles étant à des positions fixes. L'aberration maximale (notée a_{champ}) à appliquer pour

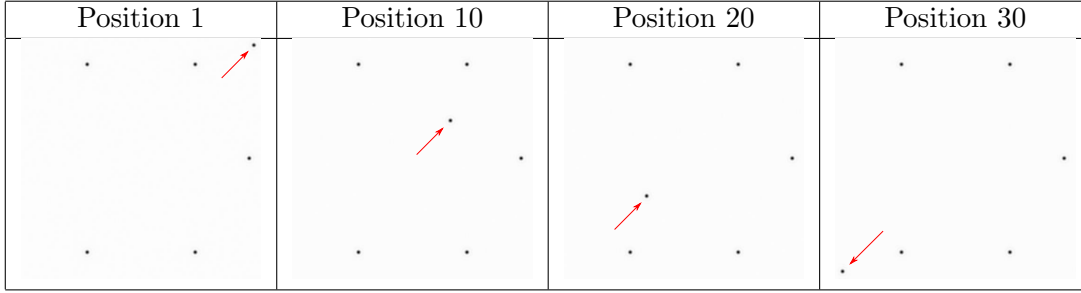


FIGURE 3.11 – Positions successives d’une sous-pupille mobile pour l’étude de linéarité de ELASTIC-1.

rester dans le champ de la caméra se calcule simplement :

$$a_{champ} = \frac{\mathcal{N}_p}{8n_s}. \quad (3.24)$$

NIRTA6 Selon nos paramètres de simulation, $a_{champ} = 512/(8 \times 6) \simeq 10\lambda$ dans le cas d’une dilution de 1, et $a_{champ} = 512/(8 \times 10) \simeq 6\lambda$ pour une dilution de 2. Le champ couvert dans le cas de dilution égale à 2 est donc moins important. Nous choisissons ici le plus petit décalage possible, à savoir 1 pixel de fréquence sur chaque TF d’image. On trace la moyenne de l’estimation sur les 50 tirages en fonction de l’aberration introduite sur la Fig. 3.12. Le tracé de la moyenne de l’estimation en fonction de l’aberration introduite correspond à une droite de pente 1. L’estimateur ELASTIC-1 fournit donc bien une estimation sur la totalité du détecteur ($[-a_{champ}; +a_{champ}]$) dans les deux cas de dilution.

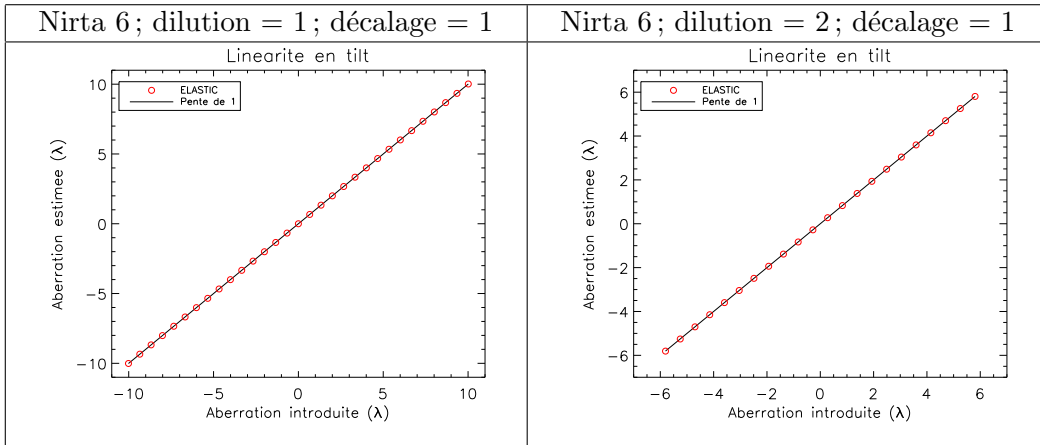


FIGURE 3.12 – Linéarité de ELASTIC-1 pour un instrument composé de 6 sous-pupilles, dans des cas compact (gauche) et dilué (droite), pour un décalage fréquentiel de 1 pixel.

NIRTA18 Commençons par calculer la limite théorique a_{champ} : selon nos paramètres de simulation, $a_{champ} = 1024/(8 \times 10) \simeq 13\lambda$. De manière similaire aux

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

cas d'étude à 6 sous-pupilles, traçons la moyenne de l'estimation sur 50 tirages indépendants en fonction de l'aberration introduite sur la Fig. 3.13. L'estimateur est linéaire sur la totalité du détecteur, les points de simulation étant confondus avec la droite de pente égale à 1. Ainsi, ELASTIC-1 permet une estimation de manière linéaire sur tout le champ comme pour le cas à 6 sous-pupilles.

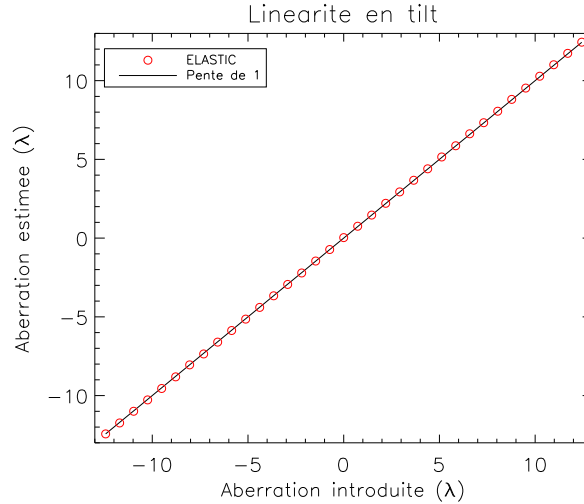


FIGURE 3.13 – Linéarité de ELASTIC-1 dans le cas à 18 sous-pupilles compactes.

Étudions l'impact de l'amplitude du décalage en pixels sur la dynamique de ELASTIC-1.

3.3.3.3 Amplitude du décalage fréquentiel

L'étude de linéarité est ensuite effectuée pour plusieurs valeurs de décalage fréquentiel dans l>IDF afin d'étudier son impact sur la dynamique de l'estimateur. L'Eq. (3.23) suggère en effet une limitation du champ lors de l'augmentation du décalage, à \mathcal{N}_p et n_s fixés. Du fait que l'estimateur repose sur l'opérateur Arg (argument) dont la dynamique est $]-\pi; \pi]$, la valeur maximale de l'estimation non repliée a_{max} est :

$$a_{max}(\delta) = \frac{\mathcal{N}_p}{8n_s\delta} = \frac{a_{champ}}{\delta}. \quad (3.25)$$

NIRTA6 Les conditions étant identiques à celles de la section précédente, on trace la moyenne de l'estimation en fonction de l'aberration introduite pour un décalage fréquentiel de 2 pixels sur la Fig. 3.14.

On retrouve une couverture du champ qui est 2 fois moindre lorsqu'on double le décalage. En effet, avec un décalage de 2, on observe un repliement de l'estimation pour des valeurs plus grandes que la moitié du champ total de la camera. Un décalage de 1 pixel est nécessaire pour avoir une estimation dans tout le champ de la camera. L'erreur initiale d'alignement doit donc être estimée en utilisant un décalage de 1.

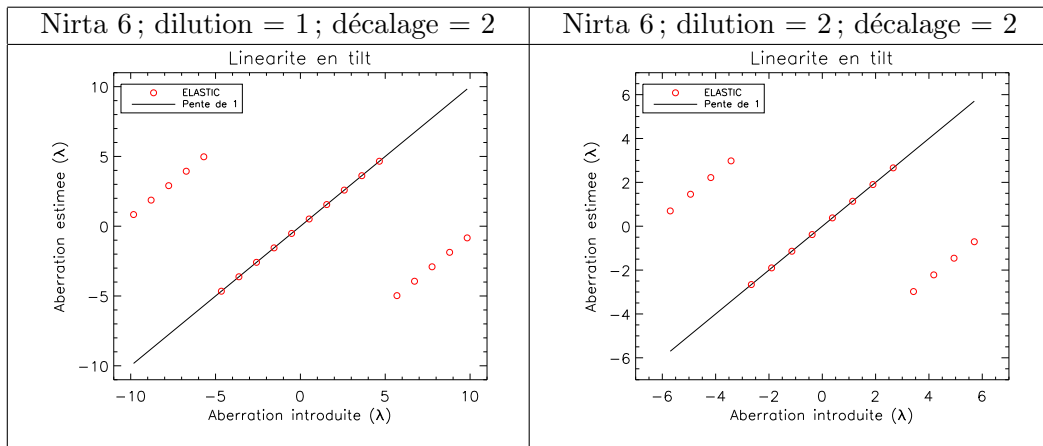


FIGURE 3.14 – Linéarité de ELASTIC-1 pour un instrument composé de 6 sous-pupilles, dans des cas compact (gauche) et dilué (droite), pour un décalage fréquentiel de 2 pixels.

NIRTA18 Les conditions étant similaires à celles du paragraphe précédent, on trace maintenant la moyenne de l'estimation, sur 50 tirages indépendants, en fonction de l'aberration introduite pour un décalage fréquentiel de 2 pixels. Le résultat des mesures est tracé sur le graphe de la Fig. 3.15.

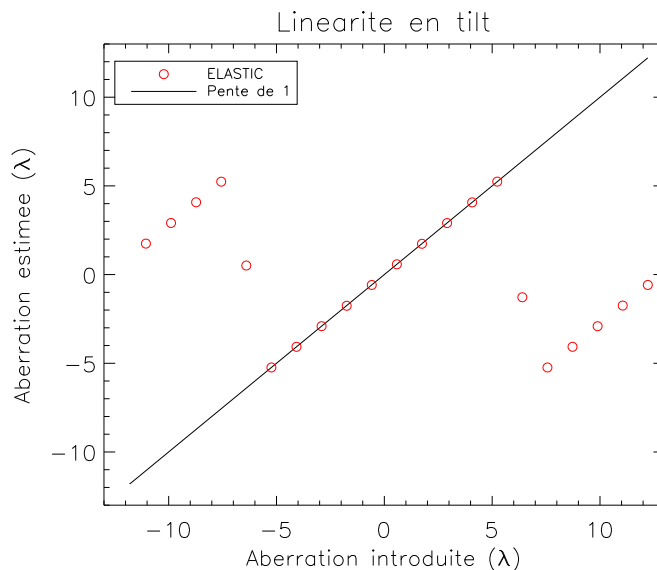


FIGURE 3.15 – Réponse linéaire de ELASTIC-1 dans le cas NIRTA18, pour une décalage fréquentiel de 2 pixels.

On retrouve bien le fait que la dynamique de notre estimateur est divisée par 2. Ainsi, comme pour le cas d'un instrument à 6 sous-pupilles, un décalage fréquentiel de 1 est impératif afin d'assurer une estimation sur tout le champ de la caméra.

Nous étudions maintenant l'impact conjoint, sur l'estimation, d'une variation de

l'amplitude de la pseudo-défocalisation et du décalage fréquentiel.

3.3.3.4 Amplitude de pseudo-défocalisation

Nous souhaitons optimiser l'amplitude de la pseudo-défocalisation et le décalage. L'effet de la diversité de phase sur l'isolement des auto-pics a été discuté (section 3.2), et nous avons pu voir que le décalage fréquentiel dans l>IDF avait un impact sur la dynamique de l'estimateur ELASTIC-1. Cependant, un second impact sur la précision de l'estimation peut être discuté. Considérant les Eq. (3.20) à (3.22), chaque valeur d'estimation $\hat{x}_{m,n}$ peut être écrite comme $x_{m,n}(1 + \epsilon_n/x_{m,n})$, ϵ_n étant un bruit faible sur l'estimateur. L'Eq. (3.23) devient alors :

$$\hat{a}_{m,n} \simeq a_{m,n} + \frac{\mathcal{N}_p}{8n_s\delta} \operatorname{Im} \left(\frac{\epsilon_n}{x_{m,n}} \right), \quad (3.26)$$

avec $\operatorname{Im}(\cdot)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe. Du fait que ϵ_n est indépendant de δ , on peut intuitivement voir qu'augmenter δ va contribuer à réduire l'erreur sur l'estimation, pour \mathcal{N}_p et n_s fixés.

Nous nous plaçons dans la configuration de parking, et effectuons 50 tirages indépendants avec ELASTIC-1 afin d'étudier l'erreur totale sur l'estimateur pour différentes valeurs de l'amplitude de pseudo-défocalisation, et pour différentes valeurs d'amplitude de décalage fréquentiel.

NIRTA6 Présentons l'évolution de l'erreur totale de ELASTIC-1 en fonction de l'amplitude de pseudo-défocalisation sur la Fig. 3.16, pour des amplitudes de décalage en fréquence de 1, 2 et 3. On peut voir que cette erreur décroît avec l'amplitude de la pseudo-défocalisation jusqu'à atteindre un palier à environ $\lambda/3000$ dans les deux cas de dilution. La section 3.2 montre que l'amplitude de la diversité avait pour effet de changer la distance entre les auto-taches lors de la corrélation des images. L'estimateur est donc plus performant à mesure que les auto-taches s'éloignent, car elles seront mieux isolées.

En comparant les courbes pour les deux cas de dilution, on remarque que le palier est atteint plus rapidement dans le cas où la pupille est compacte (dilution de 1). La Fig. 3.9 a montré que les auto-taches sont plus larges dans le cas NIRTA6 dilué que dans le cas compact. Ainsi, ceci peut expliquer que l'amplitude de pseudo-défocalisation doit être plus importante dans le cas dilué pour que les auto-taches soient bien séparées.

L'erreur totale est toujours inférieure à $\lambda/8$ pour les valeurs de pseudo-défocalisation testées. L'information sur les auto-taches est donc aisément exploitable dans le cas à 6 sous-pupilles, même pour des petites valeurs de pseudo-défocalisation. Dans le cas où la pseudo-défocalisation est augmentée, il faut faire attention à ce que cela n'entraîne pas la sortie des sous-FEPs de la dynamique de ELASTIC-1 fixée par le décalage fréquentiel introduit dans l>IDF. C'est par exemple ce qu'il se passe Fig. 3.9 pour un décalage fréquentiel de 3, et une pseudo-défocalisation de 2λ et 1.5λ dans les cas respectifs de dilution égale à 1 et 2 : l'erreur totale augmente fortement, les positions de parking, la pseudo-défocalisation et le décalage fréquentiel introduit dans

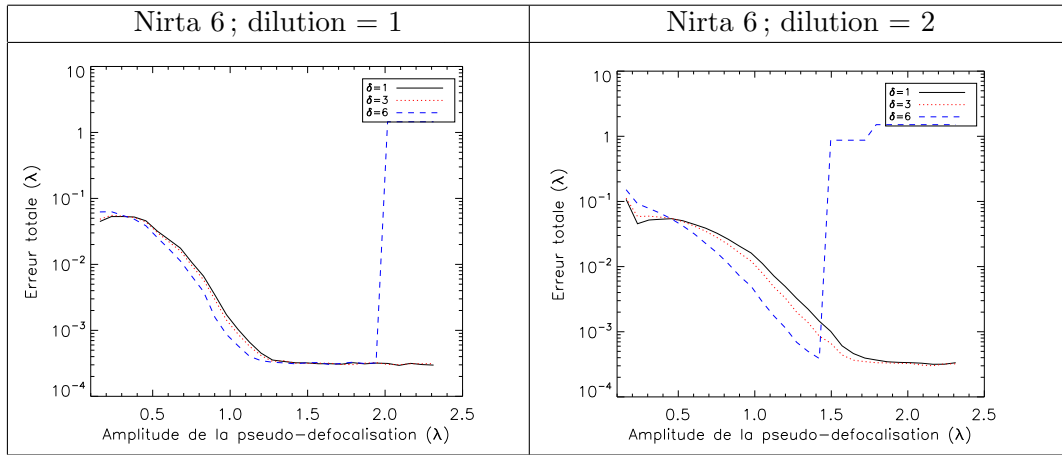


FIGURE 3.16 – Évolution de l'écart totale de l'estimation de ELASTIC-1 en fonction de l'amplitude de la pseudo-défocalisation et du décalage fréquentiel, dans les cas Nirta6 compact (gauche) et dilué (droite).

l'IDF ne sont pas compatibles. Il y a donc un compromis à faire entre le choix de la diversité et le décalage.

NIRTA18 Présentons l'évolution de l'erreur totale de l'estimateur en fonction de l'amplitude de la pseudo-défocalisation (Fig. 3.17), pour un décalage de 1 et de 2. Cette erreur totale décroît lorsque l'amplitude de la pseudo-défocalisation et le décalage fréquentiel augmentent. L'erreur sur l'estimation est inférieure à $\lambda/8$ à partir d'une amplitude de la pseudo-défocalisation d'environ 0.9λ . Lorsque l'amplitude de la pseudo-défocalisation augmente encore, l'erreur totale décroît jusqu'à moins de $\lambda/1000$ pour un décalage de 1, où l'on atteint un palier. L'évolution de l'erreur en fonction de l'amplitude de la pseudo-défocalisation est similaire à celle dans le cas NIRTA6. Cependant, on note que le palier atteint ici pour un décalage de 1 est plus important que dans le cas à 6 sous-pupilles, qui était à $\lambda/3000$. Ceci peut être expliqué par la présence d'un plus grand nombre d'inter-taches pouvant potentiellement polluer d'avantage le signal sur les auto-taches à cause des anneaux de diffraction. Plus on augmente le nombre de sous-pupilles, plus on pollue le signal sur les auto-taches de la corrélation.

On retrouve également une augmentation de l'erreur totale à partir d'une certaine valeur de la pseudo-défocalisation pour $\delta = 2$. Ceci est dû au sortir des sous-FEPs de la dynamique réduite de l'estimateur avec l'augmentation de la pseudo-défocalisation. Il y a donc toujours un compromis à faire entre le choix de la diversité et le décalage.

La suite de l'étude s'effectue dans le cas de la position de parking. On va chercher à ce que celle-ci soit la plus serrée possible pour plusieurs raisons. Premièrement, avoir une position de parking serrée permettra de réduire le champ occupé par les sous-FEPs, et donc d'augmenter le décalage pour avoir un estimateur plus précis. Deuxièmement, dans le cas où une forte hystérésis est présente sur les segments, il est préférable que les sous-FEPs soient le plus proche possible du point de superposition afin que l'amplitude du déplacement des segments soit minimisée.

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

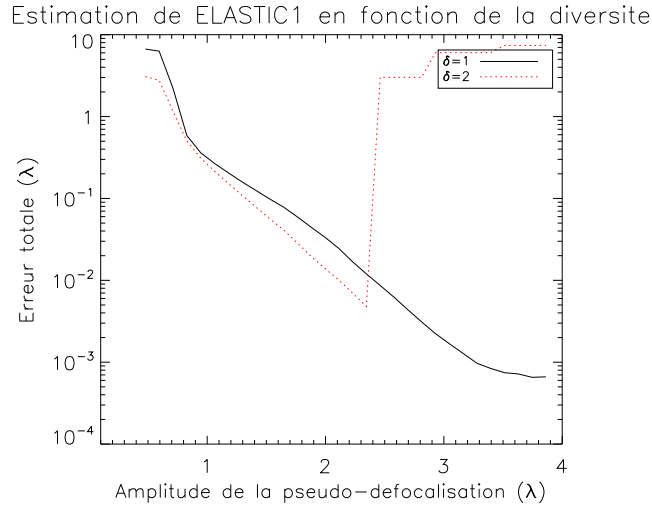


FIGURE 3.17 – NIRTA18 : Performances en fonction de la pseudo-défocalisation.

Ces considérations faites, se refondant sur les résultats de la Fig. 3.9, choisissons pour la suite de fixer le décalage fréquentiel à 6 pixels et l’amplitude de pseudo-défocalisation à 1.3λ pour les deux cas de dilution de NIRTA6.

En ce qui concerne la pupille NIRTA18, nous choisissons pour la suite de fixer le décalage fréquentiel à 2, et la pseudo-défocalisation à 2.2λ . On va donc étudier les performances de ELASTIC-1, dans le cas d’un instrument à 18 sous-pupilles compactes, lors de variations du flux dans les images.

Nous allons donc pouvoir étudier et comparer les performances de ELASTIC-1 dans les deux cas de dilution, lors de variations de flux dans les images ou lors de la présence d’aberrations de hauts ordres.

3.3.3.5 Performances en fonction du flux

Une fois que les amplitudes de la pseudo-défocalisation et du décalage fréquentiel dans l’IDF ont été optimisées, nous figeons ces valeurs et étudions l’estimation de ELASTIC-1 dans le cas de la position de parking (soit, juste avant la superposition des sous-FEP). Étudions la réponse de l’algorithme d’abord pour différentes valeurs de flux dans les images, et dans le cas où des aberrations autres que les erreurs d’alignement sont présentes sur les sous-pupilles. Pour ce faire, nous étudions l’erreur de notre estimateur sur 50 mesures indépendantes.

La section 2.3.4 décrit plusieurs régimes pour l’évolution de l’écart-type en fonction du flux. Attardons-nous sur le régime à faible flux où l’on rappelle qu’un estimateur de phase se comporte comme une loi uniforme entre $-\Pi$ et Π , dont l’écart-type est constant et de valeur $\pi/\sqrt{3}$, soit $\lambda/2\sqrt{3}$. Sachant que la valeur maximale non repliée de notre estimateur est a_{max} , et d’après l’Eq. (3.23) de la solution, on calcule l’écart-type

de la distribution de notre estimateur à faible flux :

$$\frac{a_{max}}{\sqrt{3}} = \frac{\mathcal{N}_p}{8 n_s \delta \sqrt{3}}. \quad (3.27)$$

Nous nous attendons donc à un régime constant (de l'écart-type en fonction du flux) égal à $a_{max}/\sqrt{3}$ à flux faible. À moyen ou fort flux, le bruit de photons domine, et l'écart-type devrait alors suivre une loi en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$, α étant une constante qui sera déterminée.

NIRTA6 Traçons l'évolution de l'écart-type, du biais et de l'erreur totale de l'estimation en fonction du nombre de photo-électrons par image, dans les deux cas de dilution (Figs. 3.18 et 3.19). Chaque point de mesure est issu de 50 tirages de bruit indépendants, dans le cas où les sous-FEPs sont en position de parking.

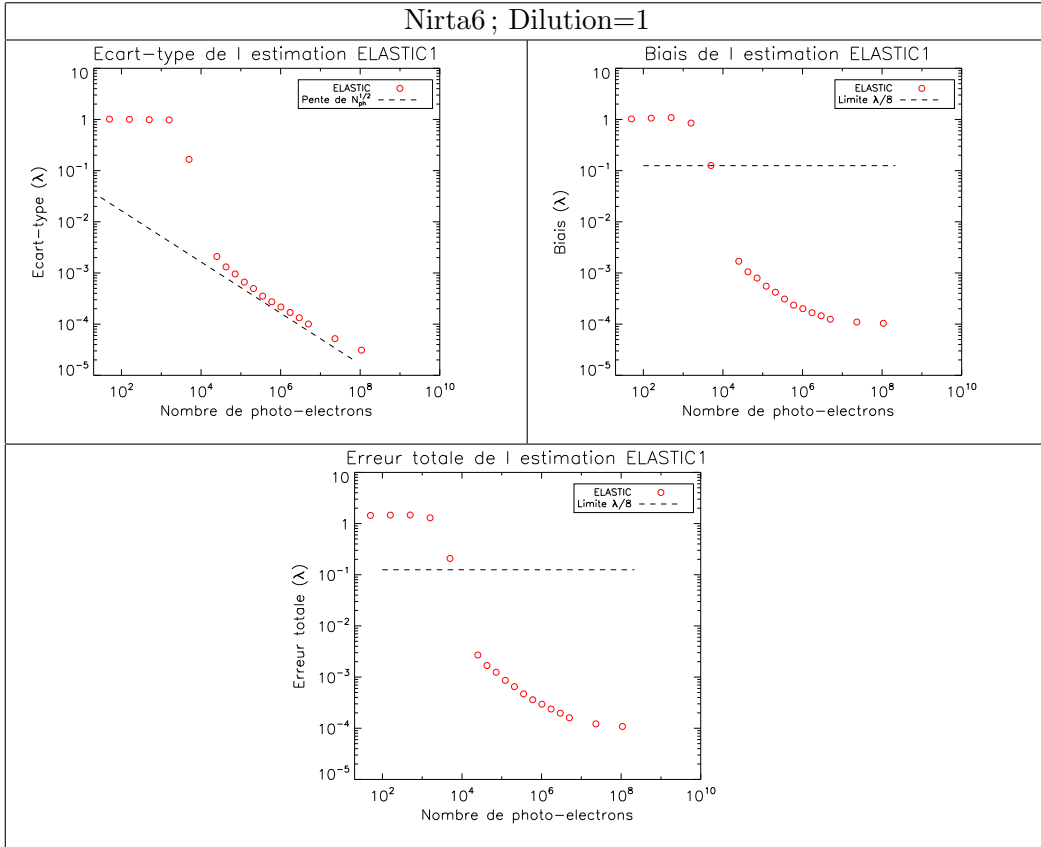


FIGURE 3.18 – Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 compacte.

En ce qui concerne l'écart-type de l'estimation, on remarque tout d'abord le régime constant à faible flux. La valeur de l'écart-type est alors de 1λ et 0.6λ respectivement pour une dilution de 1 et 2. Une application numérique de l'Eq. (3.27) conforte ces valeurs dans les deux cas de dilution. On retrouve ensuite un comportement en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$ à partir d'un flux un peu plus grand que 5×10^4 photo-électrons dans le cas compact

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

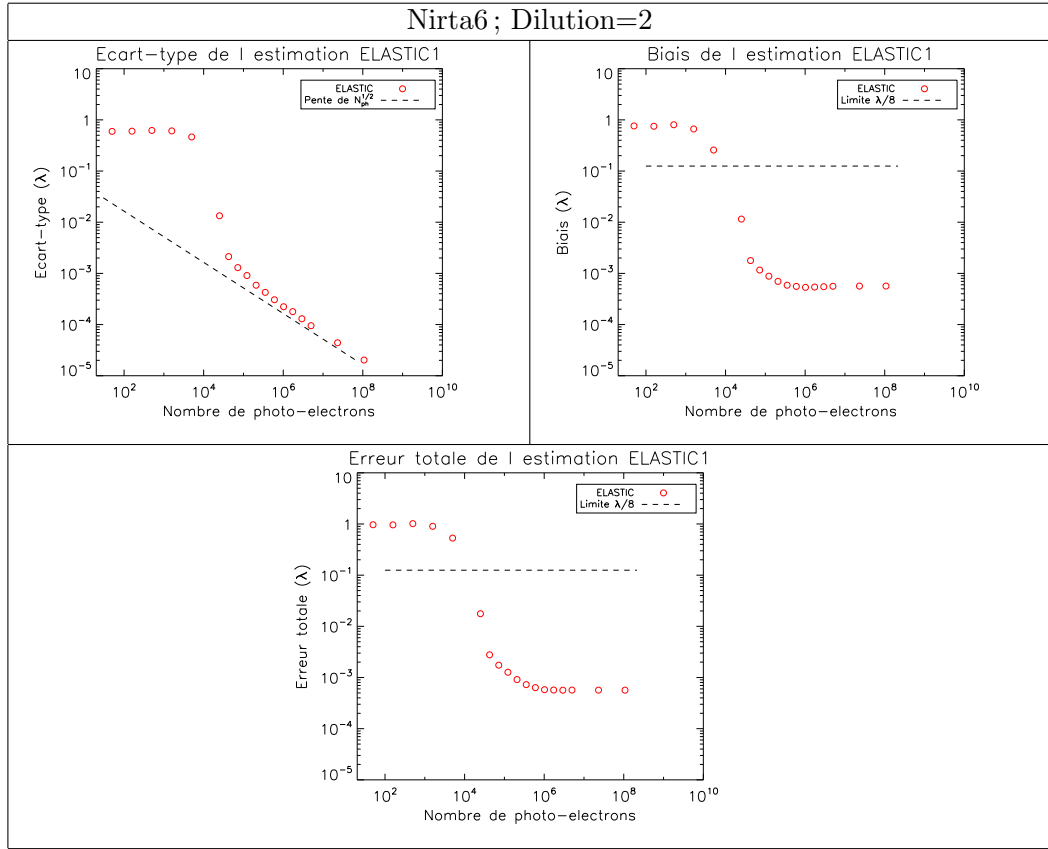


FIGURE 3.19 – Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 diluée.

(soit un RSB¹ d'environ 7), et un peu plus grand que 1×10^5 dans le cas dilué (soit un RSB d'environ 6). On voit alors que l'estimation atteint le régime de bruit de détecteur pour des RSB similaires d'une configuration à l'autre. Les valeurs de α sont fournies dans le tableau 3.1. On remarque qu'elles sont égales, et sont donc indépendantes de la dilution de la pupille. Entre ces deux régimes, on n'identifie pas de régime spécifique, l'estimateur passant de manière abrupte de l'un à l'autre. L'écart-type de l'estimateur est inférieur à $10^{-3}\lambda$ à partir d'un flux environ égal à 5×10^4 photo-électrons, ce qui traduit une bonne répétabilité (comme mentionné lors de l'étude de la linéarité de l'algorithme) de ELASTIC-1.

Pupille	Valeur de α
Nirta6 compacte	0.3
Nirta6 diluée	0.3

TABLE 3.1 – Valeur du coefficient α , obtenu par ajustement de α/\mathcal{N}_{ph} sur l'écart-type des estimateurs.

1. On définit le RSB par pixel. On reprend l'Eq. (2.7) et on remplace N_{image} par le nombre de pixels éclairés estimé comme $2 \times n_s \times \mathcal{N}_a$

En ce qui concerne le biais, il est également constant à flux faible, et décroît ensuite pour atteindre un palier à fort flux. Pour la pupille compacte, le biais est inférieur à la limite d'accroche des algorithmes fins ($\lambda/8$) à partir d'un flux environ égal à 8×10^3 photo-électrons, soit un RSB d'environ 2,5. Pour la configuration diluée, le biais passe sous la barre de ($\lambda/8$) pour un flux supérieur à environ 1×10^4 , soit un RSB d'environ 1,5. Encore une fois, l'algorithme présente des performances similaires selon les deux cas de dilution. Le biais atteint ensuite un palier à fort flux, d'environ $\lambda/10000$ dans le cas d'une configuration compacte de pupilles, contre un peu plus de $\lambda/2000$ dans le cas d'une pupille plus diluée. Ceci indique que l'estimateur fournit une meilleure estimation lorsque la pupille est compacte avec les paramètres actuels.

Le biais présent est contributeur majoritaire dans l'erreur totale (à fort flux), et peut être expliqué principalement par le recouvrement qui peut exister entre les auto-taches et les inter-taches de l'image de corrélation via les anneaux de diffraction. Par ailleurs, on a vu précédemment que l'échantillonnage étant plus important pour la pupille diluée, les auto-taches de l'image de corrélation s'en retrouvent plus étalées. En comparaison avec le cas compact, les auto-taches sont moins bien séparables dans le cas dilué à cause de cet étalement. Une solution pour obtenir des résultats similaires au cas compact serait d'augmenter l'amplitude de pseudo-défocalisation afin d'avoir une meilleure séparation des auto-taches.

NIRTA18 Cherchons maintenant à étudier l'écart-type et le biais de l'estimation de ELASTIC-1 en fonction du flux sur les images, pour la pupille NIRTA18. Pour chaque illumination, traçons l'écart type et le biais de 50 tirages indépendants sur la Fig. 3.20.

En dessous de 10^4 photo-électrons par image (faible flux), l'écart-type a un régime constant, avec pour valeur 4λ environ. Cette valeur est en adéquation avec l'Eq. 3.27. Pour des grandes valeurs de flux, nous nous attendons à retrouver un régime en $1/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$. Cependant, on peut voir sur le graphe que ce régime est atteint mais que l'on n'y reste pas, et que le régime transite rapidement vers un palier. Il semblerait, comme on va le voir pour le biais, que le nombre de sous-pupilles important par rapport au cas NIRTA6 ait un impact également sur l'écart-type. Cet écart-type est inférieur à $\lambda/10$ à partir d'un flux de 10^5 photo-électrons par image, soit un RSB de 6 environ, et diminue jusqu'à atteindre moins de $\lambda/1000$, ce qui traduit une bonne répétabilité de ELASTIC-1.

En ce qui concerne le biais, il est tout d'abord constant à faible flux, puis il diminue jusqu'à atteindre un palier, comme dans le cas NIRTA6. On voit sur le graphe que le biais est inférieur à $\lambda/8$, la limite d'accrochage de algorithmes de cophasage fin, à partir d'un flux d'environ 10^5 photo-électrons par image, soit un RSB de 6. Ces performances sont un peu en deçà de celle présentées pour NIRTA6, ainsi il semble que le nombre de sous-pupilles ait un impact sur le biais de l'algorithme. Toutefois, le palier atteint à fort flux est de $\lambda/200$, ce qui est largement inférieur à la limite d'accrochage précédemment mentionnée.

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

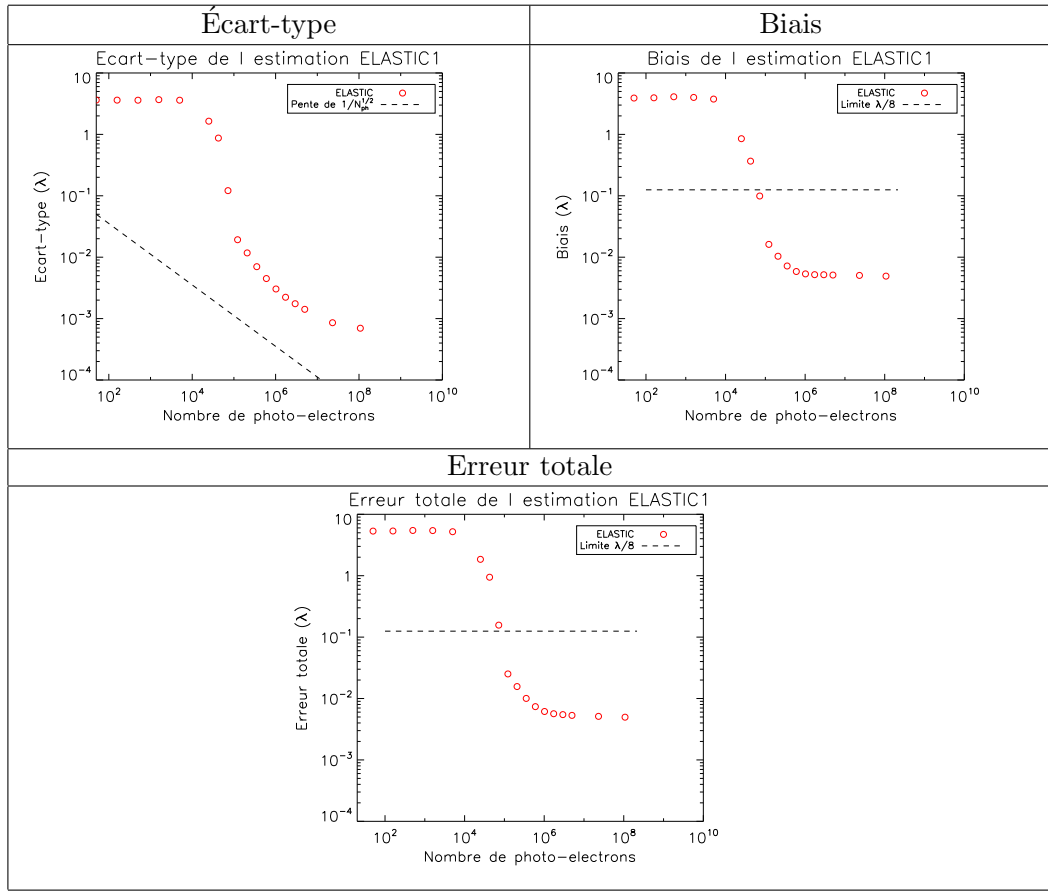


FIGURE 3.20 – Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-1 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA18.

3.3.3.6 Aberrations d'ordre supérieurs

En ce qui concerne les tests en présence d'aberrations d'ordre supérieur au piston, tip et tilt, nous faisons le choix d'étudier différents facteurs :

- L'effet, sur l'estimation de ELASTIC-1, d'une erreur sur l'amplitude de pseudo-défocalisation (défini comme A_4) dans le modèle. Pour ce faire, nous proposons d'étudier l'évolution de l'erreur d'estimation à mesure que l'erreur sur A_4 pseudo-défocalisation augmente.
- Nous souhaitons voir l'effet de la présence d'aberrations qui seront qualifiées de hauts ordres sur chaque sous-pupille : de la défocalisation ($Z=4$) à l'aberration sphérique ($Z=11$). Nous étudions donc l'erreur sur l'estimation à mesure que l'amplitude des erreurs (également distribuées sur tous les polynômes de Zernike) augmente (Figure 3.21).

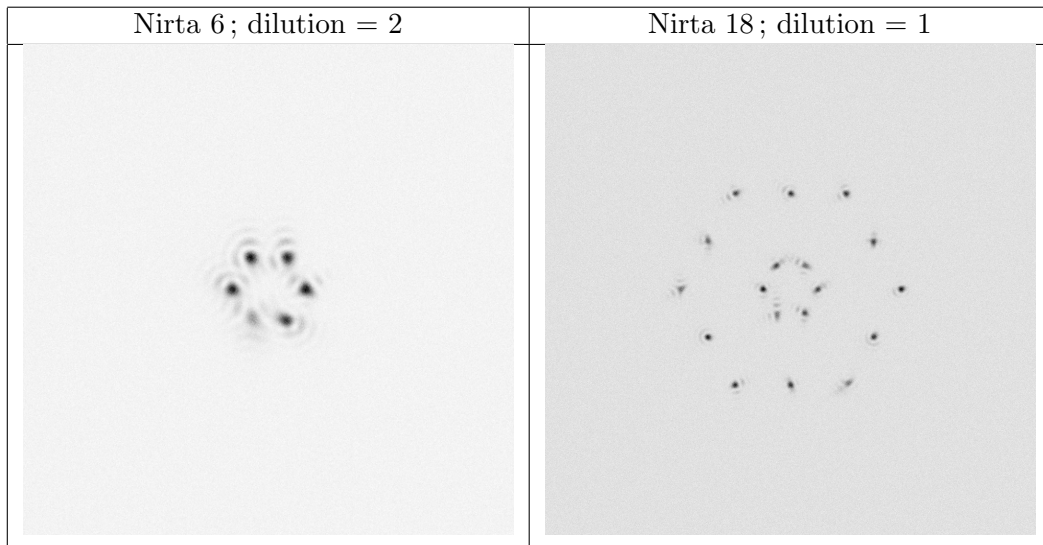


FIGURE 3.21 – Sous-FEPs en position de parking dans les cas NIRTA6 (dilution=2) et NIRTA18 (dilution=1) en présence d’erreurs d’ordres de Zernike supérieurs : Zernike 4 à 11, WFE de $\lambda/8$ sur chaque sous-pupille ici.

Erreur sur la pseudo-défocalisation

NIRTA6 On montre ici l’impact de potentielles erreurs de calibration de pseudo-défocalisation du système. Traçons l’évolution de l’erreur sur l’estimation en fonction de l’erreur sur la pseudo-défocalisation sur la Fig. 3.22.

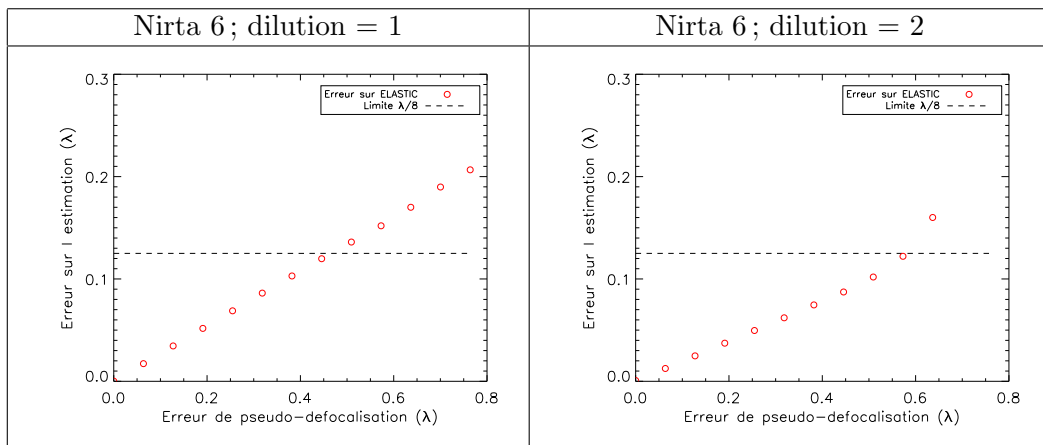


FIGURE 3.22 – Étude de l’erreur de ELASTIC-1 en fonction d’une erreur de calibration de la pseudo-défocalisation.

Nous pouvons remarquer dans les deux cas de dilution que l’erreur sur l’estimation croît avec l’erreur sur l’amplitude A_4 . La pseudo-défocalisation détermine la position des auto-taches dans le domaine direct de la corrélation des images de diversité. Ainsi,

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

cette erreur de calibration va entraîner des positions différentes des auto-taches dans la corrélation des images par rapport au modèle direct numérique (qui sert à calculer C_m^\dagger). Ainsi le recouvrement des auto-taches « réelles » (aberrées) et théoriques va décroître, lors de la projection de l'Eq. (3.22), à mesure que l'erreur sur la pseudo-défocalisation augmente.

Comparons maintenant les deux cas de dilution. Dans le cas compact (à gauche sur la Fig. 3.22), tant que l'erreur sur l'amplitude de la pseudo-défocalisation est inférieure à environ $\lambda/2$ l'erreur sur l'estimation reste inférieure à $\lambda/8$. L'Eq. (B.6) permet de convertir l'erreur de l'amplitude du A_4 en erreur de tip-tilt sur l'image de diversité : $\pm\lambda/5$ sur chaque sous-pupille. Dans le cas où la pupille est plus diluée, l'erreur de l'estimation reste inférieure à $\lambda/8$ pour une erreur sur l'amplitude de la pseudo-défocalisation inférieure à $\lambda/1.6$, soit une erreur de tip-tilt d'environ $\lambda/6$ sur l'image de diversité. La robustesse des deux cas de dilution est donc comparable.

NIRTA18 Étudions maintenant l'influence d'erreur sur l'amplitude de la pseudo-défocalisation (A_4) dans le cas NIRTA18. Traçons l'évolution de l'erreur sur 50 tirages indépendants de ELASTIC-1 en fonction de l'erreur sur la pseudo-défocalisation sur la Fig. 3.23.

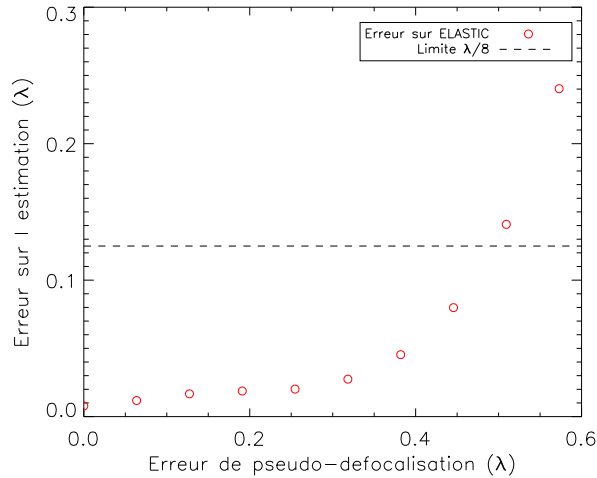


FIGURE 3.23 – Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en fonction d'une erreur de calibration de la pseudo-défocalisation, dans le cas NIRTA18.

Comme dans le cas NIRTA6, l'erreur sur l'estimation augmente avec l'erreur sur l'amplitude de la pseudo-défocalisation. Pour une erreur sur A_4 inférieure à $\lambda/2$, l'erreur sur l'estimation est inférieure à $\lambda/8$, défini comme la limite d'accrochage en tip-tilt des algorithmes d'alignement fin. Nous pouvons convertir cette erreur sur A_4 en erreur de tip/tilt grâce à l'Eq. (B.6) ; nous obtenons une erreur de $\pm\lambda/5$ sur chaque sous-pupille. Comme discuté pour le cas NIRTA6, l'erreur sur la pseudo-défocalisation entraîne une erreur sur le positionnement des auto-taches dans l'image de corrélation en comparaison au modèle théorique, entraînant une erreur sur l'estimation. En comparaison avec le cas NIRTA6, on remarque que l'erreur sur l'estimation dépasse

la limite théorique fixée pour une erreur sur l'amplitude de pseudo-défocalisation du même ordre de grandeur.

En conclusion, l'erreur sur l'estimation est inférieure à l'erreur introduite sur la phase de diversité (ici donc, la pseudo-défocalisation). ELASTIC-1 est donc relativement robuste face à une potentielle erreur sur la pseudo-défocalisation pouvant provenir du mauvais étalonnage des actionneurs des sous-pupilles par exemple.

Influence d'aberrations de hauts ordres

NIRTA6 Nous étudions maintenant la robustesse de ELASTIC-1 en présence d'aberrations de hauts ordres. La Fig. 3.24 présente l'évolution de l'erreur totale en fonction de l'amplitude des erreurs appliquées sur chacune des sous-pupilles. L'erreur sur l'estimation croît avec l'amplitude des perturbations. Dans le cas NIRTA6 compact ou dilué, pour une distribution de perturbations supérieure à environ $\lambda/8$ sur les sous-pupilles, l'erreur sur l'estimation est supérieure à $\lambda/8$. En effet, une déformation trop grande des sous-FEPs biaise l'estimation fournie par ELASTIC-1 car les auto-pics s'en retrouvent affectés (déformés).

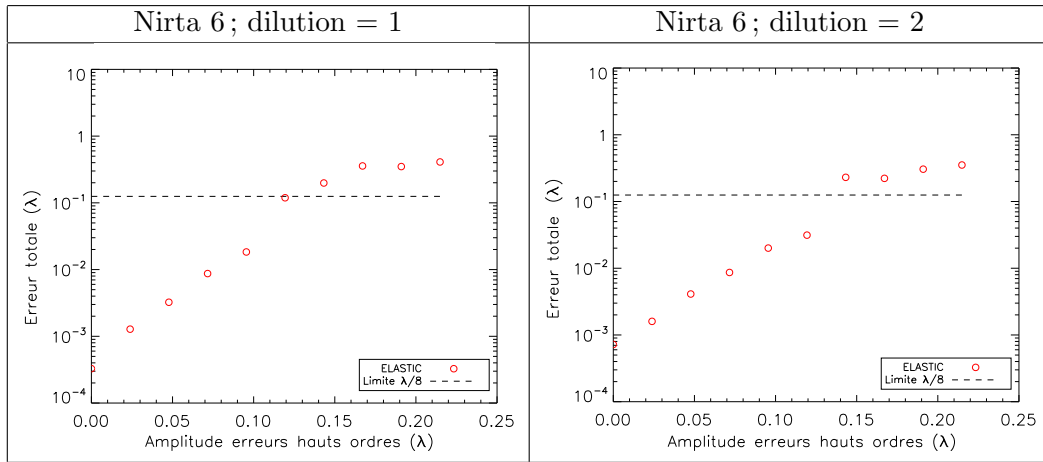


FIGURE 3.24 – Étude de l'erreur de ELASTIC-1 en présence d'aberrations de hauts ordres.

NIRTA18 Intéressons-nous maintenant au cas NIRTA18. La figure 3.25 présente l'évolution de l'erreur totale en fonction de l'amplitude des erreurs sur chacune des sous-pupilles. Comme attendu, l'estimation est dégradée à mesure que les erreurs sur les sous-pupilles augmentent. L'estimation reste dans la limite d'accrochage de $\lambda/8$ des algorithmes quand la distribution des perturbations est inférieure à environ $\lambda/10$ sur les sous-pupilles.

En effet, comme pour le cas à 6 sous-pupilles, une déformation trop grande des sous-FEPs biaise l'estimation fournie par ELASTIC-1 car les auto-pics s'en retrouvent affectés, déformés. La limite mise en évidence ici est pratiquement du même ordre de

3.3. EXPLOITATION DES AUTO-PICS DE L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-1

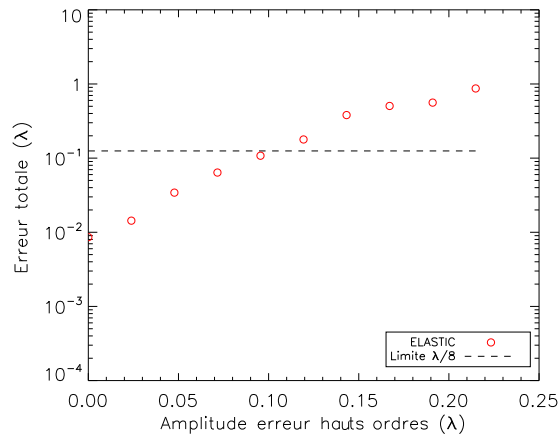


FIGURE 3.25 – Étude de l’erreur de ELASTIC-1 en présence d’aberrations de hauts ordres dans le cas Nirta18.

grandeur que pour les cas de Nirta6.

Pour conclure, ici encore ELASTIC-1 se présente comme un estimateur relativement robuste face aux erreurs d’aberrations supérieures. En effet afin que l’estimateur fournisse une estimation qui permette de rentrer dans la limite d’accrochage des algorithmes fins, il suffit que les aberrations de hauts ordres soient inférieures à environ $\lambda/8$.

3.4 Exploitation de la totalité l'Interspectre Décalé en Fréquence : ELASTIC-2

L'algorithme ELASTIC-1 repose sur l'exploitation unique des auto-pics de l>IDF, en négligeant les termes pour $n \neq n'$ dans l'Eq. (3.15). En effet, on a vu que les termes en $n \neq n'$, les inter-pics, étaient suffisamment orthogonaux aux auto-pics lorsque les sous-FEPs sont suffisamment dispersées dans le champs (par exemple : en position de parking). Nous souhaitons maintenant exploiter la totalité des termes de l'Eq. 3.15, afin de permettre l'estimation des tip/tilts même en deça de la position de parking. Le principe repose toujours sur l'exploitation de l'information sous forme de piston contenue dans les auto-pics, mais nous devons prendre en compte l'influence des inter-pics à mesure que les sous-FEPs se rapprochent.

3.4.1 La linéarisation des inter-pics

Reprenons l'Eq. (3.15) :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n,2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} (a_{m,n} + a_{m,n'}) \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n',2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &\times \underbrace{\exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi (a_{k,n} - a_{k,n'}) \mathbf{Z}_k \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]}_{\mathcal{A}}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Le terme \mathcal{A} n'est pas linéaire en $(a_{k,n} - a_{k,n'})$, ce qui pose alors problème pour l'inversion de l'Eq. (3.28). Lorsque les sous-FEPs sont proches du point de superposition, nous considérons que $(a_{k,n} - a_{k,n'})$ est petit. Ainsi nous linéarisons le terme \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n,2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} (a_{m,n} + a_{m,n'}) \right] \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n',2}^*] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 &\times \left(1 + j4\pi (a_{2,n} - a_{2,n'}) \mathbf{Z}_2 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) + j4\pi (a_{3,n} - a_{3,n'}) \mathbf{Z}_3 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \right), \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

3.4. EXPLOITATION DE LA TOTALITÉ L'INTERSPECTRE DÉCALÉ EN FRÉQUENCE : ELASTIC-2

Nous réécrivons l'Eq. (3.29) pour faire ressortir les 4 différents termes :

$$\begin{aligned}
j_{m\mathbf{q}} = & \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \mathcal{L}_{n,m} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \mathcal{L}_{n,n',m} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{2,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \mathcal{L}_{n,n',m} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \mathbf{Z}_2 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n' \neq n}^{\mathcal{N}_a} 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{3,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \mathcal{L}_{n,n',m} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \mathbf{Z}_3 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

avec :

$$\mathcal{L}_{n,m} = \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n,2}^*], \tag{3.31}$$

$$\mathcal{L}_{n,n',m} = \Delta_m^- [\Lambda_{n,1}] \Delta_m^+ [\Lambda_{n',2}^*], \tag{3.32}$$

$$a_{m,n,n'}^+ = a_{m,n} + a_{m,n'}, \tag{3.33}$$

$$a_{m,n,n'}^- = a_{m,n} - a_{m,n'}, \tag{3.34}$$

avec $m \in \{2, 3\}$, et $n \in \{1, \dots, \mathcal{N}_a\}$. Afin de simplifier l'écriture de l'Eq. (3.30) nous faisons remarquer les égalités suivantes, lorsque nous intervertissons les indices n et n' :

$$\rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] = \rho_{n'}^2 \rho_n^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n',n}^+ \right] \tag{3.35}$$

$$4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{m,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] = -4\pi \rho_{n'}^2 \rho_n^2 a_{m,n',n}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n',n}^+ \right]. \tag{3.36}$$

Nous pouvons alors réécrire l'Eq. (3.30) telle que :

$$\begin{aligned}
 j_{m\mathbf{q}} = & \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[\frac{-j8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \mathcal{L}_{n,m} \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'>n}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \left[\mathcal{L}_{n,n',m} + \mathcal{L}_{n',n,m} \right] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'>n}^{\mathcal{N}_a} 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{2,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \left[\mathcal{L}_{n,n',m} - \mathcal{L}_{n',n,m} \right] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \mathbf{Z}_2 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'>n}^{\mathcal{N}_a} 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{3,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] j \left[\mathcal{L}_{n,n',m} - \mathcal{L}_{n',n,m} \right] \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{\mathcal{N}_p} \right) \mathbf{Z}_3 \left(\frac{n_s \mathbf{q}}{2\mathcal{N}_p} \right).
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Sachant que nos inconnues sont les coefficients $a_{m,n}$ et potentiellement les flux ρ_n , nous les groupons dans un vecteur complexe d'inconnues :

$$\mathbf{x}'_m = \left[x_{m,1}, \dots, x_{m,\mathcal{N}_a}, x'_{m,0,1}, \dots, x'_{m,\mathcal{N}_a-1,\mathcal{N}_a}, x''_{m,0,1}, \dots, x''_{m,\mathcal{N}_a-1,\mathcal{N}_a}, x'''_{m,0,1}, \dots, x'''_{m,\mathcal{N}_a-1,\mathcal{N}_a} \right]^T, \tag{3.38}$$

$$\text{avec } x_{m,n} \triangleq \rho_n^4 \exp \left[-j \frac{8\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right], \tag{3.39}$$

$$x'_{m,n,n'} \triangleq \rho_n^2 \rho_{n'}^2 \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right] \tag{3.40}$$

$$x''_{m,n,n'} \triangleq 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{2,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right], \tag{3.41}$$

$$x'''_{m,n,n'} \triangleq 4\pi \rho_n^2 \rho_{n'}^2 a_{3,n,n'}^- \exp \left[\frac{-j4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n,n'}^+ \right], \tag{3.42}$$

où $m \in \{2, 3\}$, et $n \in \{1, \dots, \mathcal{N}_a\}$. Nous définissons également la matrice \mathbf{C}'_m de dimensions $\left(\mathcal{N}_a + 3 \frac{\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a-1)}{2} \right)$ par le nombre de pixels. La Fig. 3.26 illustre la matrice \mathbf{C}'_m et la position des différents modes. On retrouve en première position (premières colonnes sur la gauche) les \mathcal{N}_a auto-pics de chaque sous-pupille.

Nous pouvons ainsi dire que $j_{m\mathbf{q}}$ est linéaire en \mathbf{x}'_m d'après les Eq. (3.37) et (3.39), nous permettant d'écrire l'Eq. (3.37) sous la forme :

$$j_m = \mathbf{C}'_m \mathbf{x}'_m \tag{3.43}$$

La matrice \mathbf{C}'_m décrite ci-avant contient donc les auto-pics et les inter-pics linéarisés.

3.4.2 Solution du problème inverse

De manière analogue à \mathbf{C}_m pour ELASTIC-1, la matrice \mathbf{C}'_m est rectangulaire, donc pas directement inversible, et on va utiliser la SVD pour calculer son inverse généralisée. En plus de cela, la SVD va nous aider à filtrer les modes qui ne nous intéressent pas

l'inverse généralisée de C'_m qui s'écrit :

$$C'_m{}^\dagger = VS^{-1}U^H, \quad (3.44)$$

avec V la matrice de changement de base dans l'espace des modes de l'instrument, de dimensions $\left[\left(\mathcal{N}_a + 3 \frac{\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a-1)}{2} \right), \left(\mathcal{N}_a + 3 \frac{\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a-1)}{2} \right) \right]$. C'est dans cette matrice que l'on peut voir la correspondance des modes singuliers (selon une dimension) avec leur valeur singulière (selon l'autre dimension) contenue dans la matrice S . Cette matrice S a les mêmes dimensions que V et contient toutes les valeurs singulières sur sa diagonale (elle est nulle ailleurs). Enfin, la matrice U^H est de dimensions $\left[\left(\mathcal{N}_a + 3 \frac{\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a-1)}{2} \right), 2\mathcal{N}_p \right]$ et est la matrice de changement de base dans l'espace des pixels, soit l'espace d'arrivée. Pour illustrer nos propos, la Fig. 3.27 présente la matrice V obtenue dans le cas d'une pupille NIRTA6 compacte, avec une pseudo-défocalisation d'amplitude² $1,5\lambda$ et un décalage fréquentiel de 1.

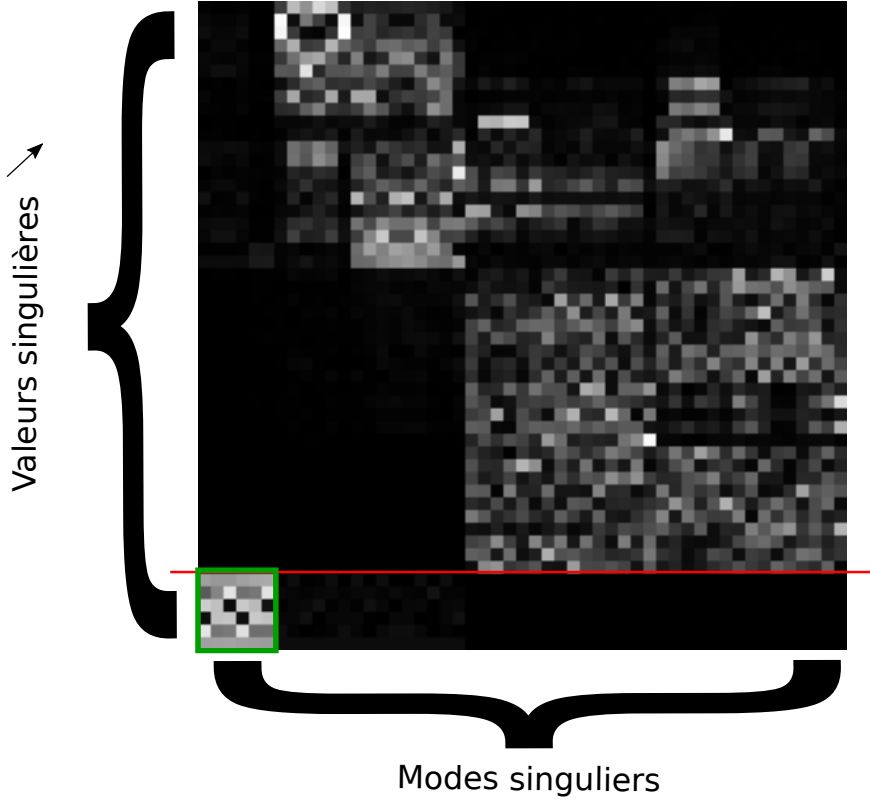


FIGURE 3.27 – Illustration de la matrice V .

On retrouve les deux dimensions, à savoir les modes singuliers et les valeurs singulières dans l'ordre décroissant du bas vers le haut. Ainsi les modes les mieux vus

² L'amplitude de défocalisation a été choisie à partir de la Fig. 3.16, en considérant que l'algorithme ELASTIC-2 présente des résultats similaires à ELASTIC-1 en ce qui concerne l'optimisation de l'amplitude de la pseudo-défocalisation. Rappelons que l'amplitude de la pseudo-défocalisation influe sur la séparation des auto-taches lors de la corrélation des deux images de diversité, donc l'orthogonalité approchée des auto-pics entre eux.

sont associés aux valeurs singulières les plus forte (donc en bas). Selon l'autre dimension, les modes sont rangés dans le même ordre que précédemment sur la Fig. 3.26. En vert, on a entouré les modes correspondants aux auto-pics. On a tracé une ligne rouge pour distinguer les valeurs singulières associées aux auto-pics par rapport aux valeurs singulières associées aux inter-pics linéarisés. Il s'agit donc de filtrer ces modes d'inter-pics linéarisés en mettant à 0 l'inverse des valeurs singulières associées (dans la matrice S^{-1}). Ainsi notre nouvelle matrice C_m^{\dagger} contient uniquement les modes des auto-pics fournis par la SVD. La différence avec ELASTIC-1 repose sur le fait que les modes singuliers des auto-pics ont été ici calculés par SVD en prenant en compte la présence des modes des inter-pics (linéarisés).

Nous pouvons alors calculer :

$$\hat{\mathbf{x}}'_m = C_m^{\dagger} \mathbf{j}_m, \quad (3.45)$$

qui n'est pas sans rappeler la projection de l'Eq. (3.22). La différence réside ici sur la prise en compte de la présence des inter-pics lorsque les tip/tilt deviennent petits. En ne sélectionnant que les \mathcal{N}_a premiers termes de \mathbf{x}'_m , soit les termes de l'Eq. 3.39, on déduit les flux et erreurs de tip/tilt en calculant :

$$\begin{cases} \hat{a}_{m,n} = \frac{-\mathcal{N}_p}{8\pi n_s \delta} \text{Arg}(\hat{\mathbf{x}}'_{m,n}), \\ \hat{\rho}_{m,n} = |\hat{\mathbf{x}}'_{m,n}|^{1/4}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Cet algorithme peut donc être utilisé dans le cadre d'une boucle d'asservissement pour amener les sous-FEPs d'une position aléatoire dans le champs, jusqu'à leur superposition. Cela permet d'englober la procédure ELASTIC-1 (en parking) avec ensuite la commande en boucle ouverte. Cela permet également, et surtout, de permettre un maintien du système en boucle fermée lors de la superposition des sous-FEPs.

3.4.3 Caractérisation de l'estimateur ELASTIC-2

Dans cette section nous allons chercher à caractériser ELASTIC-2. Reposant sur le même principe que ELASTIC-1, nous ne présenteront pas ici toute la batterie de tests effectués pour différents cas de pupilles. Nous allons surtout nous attacher ici à étudier d'une part la linéarité de ELASTIC-2 depuis l'état de grandes perturbations jusqu'à superposition. Ensuite, nous étudierons les performances de ELASTIC-2 dans le cas où les sous-FEPs sont superposées, pour différentes valeurs de flux sur les images. Les différents tests sont effectués pour la configuration de pupille NIRTA6 compacte. Les images simulées sont de dimensions 512×512 , l'amplitude de pseudo-défocalisation est de $1,5\lambda$ et le décalage fréquentiel pour l>IDF est de 1.

3.4.3.1 Linéarité

Nous souhaitons étudier tout d'abord la linéarité de ELASTIC-2. Nous voulons montrer que ELASTIC-2 permet une estimation des tip/tilt entre la position de parking, définie pour ELASTIC-1, et le point de superposition des sous-FEPs. Pour ce faire, nous positionnons les sous-FEPs successivement aux positions montrées sur la Fig. 3.28 (nous ne montrons ici que l'image focale). Ainsi, les sous-FEPs sont d'abord

éloignées (position 1), puis se rapprochent jusqu'à la position de parking (positions 1 à 10), puis jusqu'à la position de superposition (position 30) et inversement (positions 30 à 60). Pour chaque position, 50 tirages d'estimation de tip et de tilt sont effectués. Nous traçons sur la Fig. 3.29 l'évolution de la moyenne de l'estimation en fonction de l'erreur introduite.


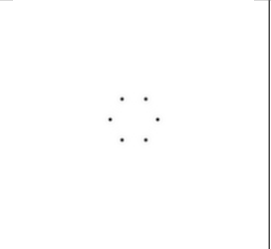
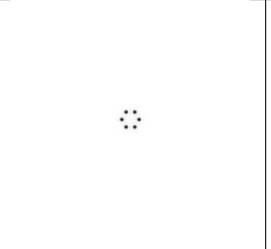
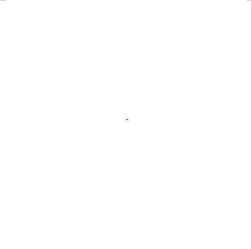

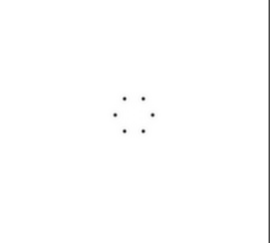


Position 1	Position 10	Position 20	Position 30
			
Position 35	Position 40	Position 50	Position 60
			

FIGURE 3.28 – Positions successives des sous-FEPs pour l'étude de linéarité de ELASTIC-2.

Nous pouvons voir que pour des très grandes erreurs (3λ) jusqu'à la position de parking qui correspond à une erreur d'environ λ , l'estimateur est linéaire, comme ELASTIC-1. En fait, lorsque les sous-FEPs sont éloignées avant la position de parking, ELASTIC-2 est équivalent à ELASTIC-1. Pour des erreurs de tip-tilt plus petites, on voit que ELASTIC-2 reste linéaire jusqu'à la superposition. ELASTIC-2 permet donc une estimation des erreurs de tip-tilt quelle que soit la position des sous-FEPs sur le détecteur, et quelle que soit la position relative entre ces sous-FEPs.

Étudions maintenant les performances de ELASTIC-2 lorsque les sous-FEPs sont superposées.

3.4.3.2 Performances en fonction du flux

Notre étude de performance en fonction du flux est similaire à celle menée pour ELASTIC-1 (section 3.3.3.5), à la différence que nous nous plaçons ici dans le cas où les sous-FEPs sont superposées dans le plan focal.

Nous traçons donc l'évolution de l'écart-type, du biais et de l'erreur totale sur les 50 tirages d'estimation de tip-tilt au moyen d'ELASTIC-2, en fonction du nombre de photo-électrons par image (Fig. 3.30).

L'écart-type sur les tirages présente plusieurs régimes. L'écart-type est tout d'abord constant pour des valeurs de flux comprises entre 50 et 10^2 photo-électrons par image. Ce régime à faible flux est expliqué dans la section 3.3.3.5. Une application numérique

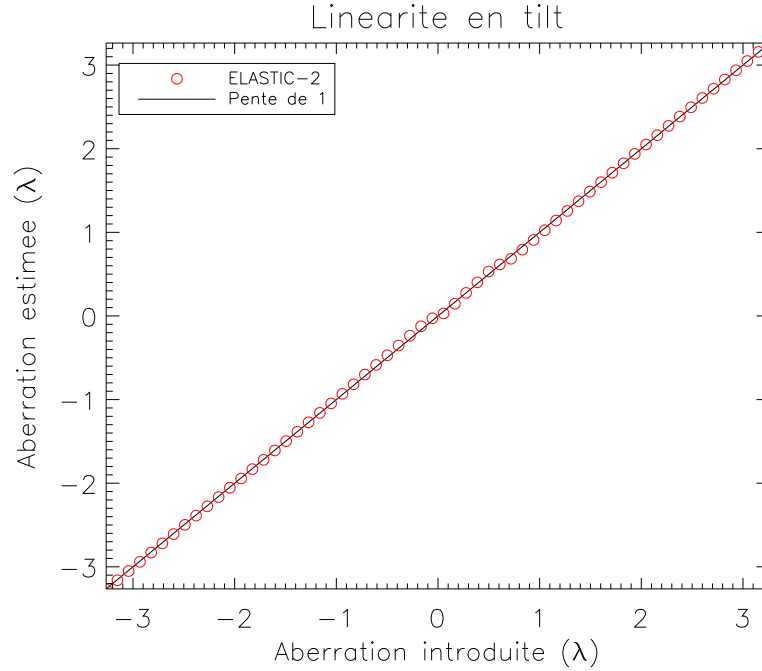


FIGURE 3.29 – Étude de la linéarité de l'estimation de tilt fournie par ELASTIC-2.

de l'Eq. (3.27) nous permet de confirmer la valeur de l'écart-type à faible flux présentée sur le graphe, à savoir environ 6λ . À partir d'une valeur de flux d'environ 10^4 photo-électrons par image, l'écart-type évolue proportionnellement à $1/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$, où le bruit de photons domine. Le coefficient de proportionnalité (noté α dans la section 3.3.3.5) est égal à 0,3, soit la même valeur que pour l'écart-type de l'estimation fournie par ELASTIC-1 en régime de bruit de photons. Entre ces deux régimes, l'écart-type décroît en $1/\mathcal{N}_{ph}$, caractéristique d'une domination du bruit de détecteur par rapport au bruit de photons.

Le biais quant à lui est également constant pour des valeurs faibles de flux de photo-électrons. Ainsi ce biais est constant pour des valeurs de 50 à environ 10^2 photo-électrons par image, puis décroît ensuite pour atteindre un nouveau régime constant, prenant la valeur d'environ $5 \times 10^{-4}\lambda$ un flux supérieur à environ 10^5 photo-électrons.

Ce biais est le contributeur majoritaire dans l'erreur totale, à fort flux. Cette erreur totale est ainsi tout d'abord constante à faible flux, puis décroît pour atteindre un régime constant, avec une valeur d'environ 5×10^{-4} à partir d'un flux égal à environ 10^5 photo-électrons. L'erreur totale devient inférieure à $\lambda/8$, la limite d'accrochage des algorithmes fins que nous avons fixé, à partir d'un flux environ égal à 10^3 photo-électrons soit un RSB pixel³ d'environ 2.

3. Pour le calcul du RSB pixel ici, nous reprenons l'Eq.(2.7) et remplaçons N_{image} par le nombre de pixels éclairés, estimé à $2 \times n_s$ dans le cas où toutes les sous-FEPs sont superposées

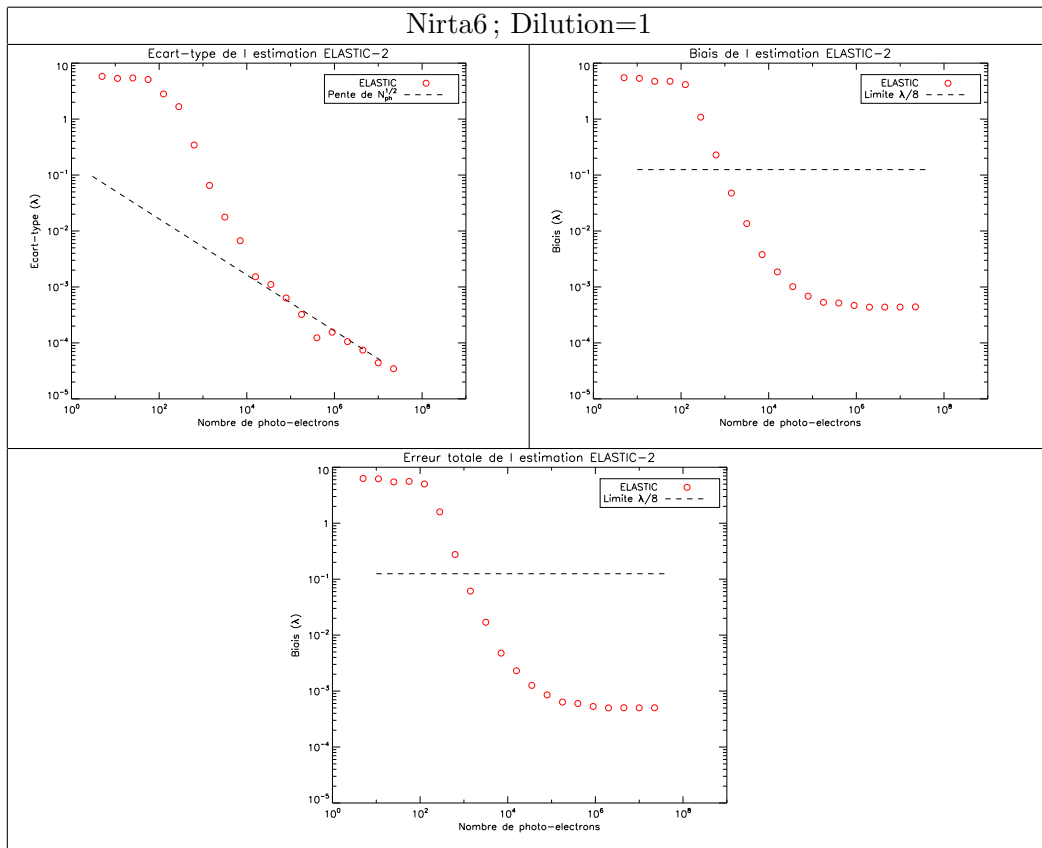


FIGURE 3.30 – Écart-type, biais et erreur totale de ELASTIC-2 en fonction du flux, pour la configuration NIRTA6 compacte.

3.5 Conclusion du chapitre

Nous avons présenté une méthode permettant l'estimation des grandes erreurs de tip-tilt dans le cas d'un instrument multi-pupille. L'algorithme ELASTIC permet en effet d'effectuer l'alignement géométrique d'un instrument multi-pupille sur point source. ELASTIC est un algorithme qui repose sur l'exploitation de deux images acquises dans un plan focal de manière successive avec une perturbation connue, la pseudo-défocalisation, sur la seconde image. Son implantation reste donc simple et repose sur un calcul relativement simple (deux transformées de Fourier sur les images acquises) et non supervisé.

Tout d'abord, nous avons présenté ELASTIC-1 qui permet une estimation des erreurs de tip/tilt sur les sous-pupilles d'un instrument multi-pupille tant que les sous-FEPs de ces sous-pupilles sont relativement éloignées. ELASTIC-1 permet donc d'amener le système d'un état désaligné et désordonné à un état connu que l'on a défini comme la position de parking. Une commande prédéfinie en boucle ouverte permettrait ensuite la superposition de toutes les sous-FEPs (en considérant des actionneurs parfaitement étalonnés). Les résidus d'erreurs de tip/tilt présentés lors de l'évaluation des performances sont inférieurs à $\lambda/8$.

3.5. CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons ensuite présenté ELASTIC-2 comme étant une amélioration de ELASTIC-1, et permettant l'estimation des erreurs de tip/tilt quelles que soient les positions relatives des sous-FEPs de chaque sous-pupille. ELASTIC-2 permet donc d'amener le système d'un état désaligné à un état où les sous-FEPs de chaque sous-pupille peuvent être superposées dans le plan focal. Une évaluation des performances de ELASTIC-2 montre que la précision de l'estimation, quand les sous-FEPs sont superposées, est meilleure que $\lambda/8$, la limite d'accrochage des algorithmes fins, pour un RSB pixel supérieur à 2.

ELASTIC-2 peut donc être utilisé pour l'alignement géométrique, première étape de la procédure complète d'alignement d'un instrument multi-pupille, en vue d'effectuer l'alignement interférométrique entre les sous-pupilles. D'autre part, ELASTIC-2 peut permettre de maintenir le système dans un état où les sous-FEPs sont superposées pendant la correction des grandes erreurs de piston, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant. Dans la suite du manuscrit, nous ferons référence à l'algorithme ELASTIC pour parler de la procédure permettant la superposition des sous-FEPs dans le plan focal (ELASTIC-1 étant une « sous-partie » de ELASTIC-2).

Chapitre 4

Alignement interférométrique sur point source : SPRING

Le chapitre précédent a présenté une solution, l'algorithme ELASTIC, pour effectuer l'alignement géométrique des instruments multi-pupilles, soit la première étape nécessaire à l'alignement total de ces instruments (voir section 1.7). Les sous-FEPs étant alors superposées, il s'agit maintenant de corriger les grandes erreurs de piston qui peuvent être présentes afin de faire interférer les sous-pupilles.

Nous avons présenté dans la section 1.7.2 la méthode retenue pour l'alignement interférométrique du JWST. Cette méthode requiert la présence d'un dispositif optique supplémentaire, donc une implantation relativement complexe.

Nous souhaitons présenter une solution simple permettant l'alignement interférométrique au moyen des actionneurs des segments et de la caméra dans le plan focal seuls, donc sans ajout de matériel supplémentaire. Pour ce faire, nous allons proposer une lettre présentant le principe de notre méthode. Cette méthode exploite la possibilité offerte par ELASTIC de superposer les sous-FEPs dans le plan focal, et de maintenir cette superposition. Cela nous permet d'appliquer une rampe de piston de grande amplitude tout en maintenant un contrôle sur les tip/tilts des sous-pupilles.

Nous proposons la version préliminaire de cette lettre en guise de chapitre pour cette thèse. Nous rappelons tout d'abord et remettons dans son contexte la problématique de l'alignement interférométrique dans le cadre des instruments multi-pupilles. Nous exposons ensuite le principe de notre méthode. Enfin, nous proposons une démonstration expérimentale du contrôle en tip/tilt permettant de maintenir l'alignement géométrique tout en appliquant une rampe de piston, dans le but de corriger les grandes erreurs de piston.

Large amplitude piston alignment for multiple aperture imagers

F. CASSAING^{1,*2,3} AND S. VIEVARD^{1,2}

¹Onera – The French Aerospace Lab, F-92322, Châtillon, France

²ONERA / Thales Alenia Space collaboration

*Corresponding author: Frederic.Cassaing@onera.fr

Compiled August 8, 2017

todo © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: 110.6770 Telescopes, 220.1140 Alignment, (110.5100) Phased-array imaging systems, (220.1080) Active or adaptive optics, (010.7350) Wave-front sensing, (110.4155) Multiframe image processing.

<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

1. INTRODUCTION

Following the same evolution as in the radio-frequency domain, multiple-aperture systems are increasingly used or considered in optics to increase the total power with distributed laser chains, to increase the resolution with long-baseline interferometers [1–3], to manufacture the primary mirror of large ground-based segmented telescopes [4–7] or the foldable mirror for space-based segmented telescopes [8, 9], to provide simple piston/tilt correction for aiming systems or to reduce telescope thickness.

Among these systems are what we will call MAIT (Multiple-Aperture Imaging Telescope), where the observable is a focal-plane image similar the one which would have been obtained by a “classical” telescope. MAITs include the segmented telescopes and the telescope arrays in the so-called “Fizeau” mode.

An important feature of optical systems is the strong directivity. As soon as the sub-apertures diameter is larger than a decimeter, their angular resolution in the visible is better than an arc-second, which is the order of magnitude of a typical mechanical stability. Therefore, it is mandatory to include actuators in the MAIT to correctly align the sub-apertures before (or even during) their joint operation (Fig. 1).

Three alignment steps are usually distinguished. During the *geometric alignment*, the sub-aperture axis are made coincident with an accuracy which is typically their diffraction limit. Another issue is *interferometric alignment*, mandatory to enable the coherent combination of the sub-apertures, which makes the differential pistons smaller than the coherence length. Only when these two steps are completed can one consider the *fine alignment* which gives the ultimate performance, the diffraction limit over

the full-aperture.

Several methods exist for geometric alignment. In the framework of JWST [10], the Geometrical Phase Retrieval (GPR) method was developed [11], refined [12] and experimentally demonstrated [13] using typically four to six defocused images per segment. The alternate method ELASTIC recently proposed uses only two near-focus images [14] and can be implemented without any other hardware than the main focal-plane imaging detector and the sub-aperture actuators.

For the fine alignment, several methods based on the focal-plane data exist. Among them are Phase Retrieval and Phase Diversity [15, 16], based on respectively 1 and 2 focal-

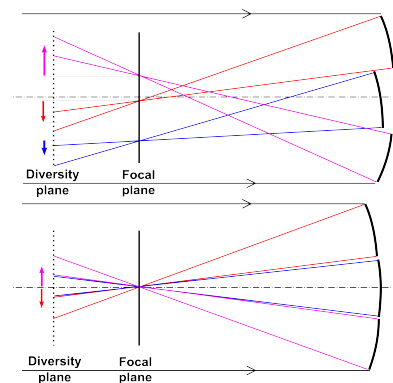


Fig. 1. Principle of ELASTIC: the focal plane sub-PSF positions give the sub-apertures tip/tilts, whereas the additional shift in a diversity plane identifies them.

plane image(s) and where an additional known phase modulation with small amplitude (typically around λ) is inserted in the second image of phase diversity.

For the interferometric alignment, several methods have been developed for long-baseline stellar interferometry [17] or for optical shop testing. Two main kinds of solutions are possible. The first one is to scan the incertitude area (for example, the actuator full stroke) and to locate where the visibility of interference fringes is maximal. From the position of these maxima for a sufficient number of baselines, the pistons to be applied on the sub-apertures can be derived. The second solution is to use a large amplitude OPD (Optical Path Difference) sensor which directly indicates the direction and distance of the ZOPD (Zero OPD). To solve for classical coherence length and 2π ambiguity issues, this measurement necessarily implies several thin spectral channels, typically by the analysis of dispersed fringes. The solution selected by JWST uses dispersed fringes with a dedicated hardware: two pupil masks with dispersion prisms covering pupil pairs [18].

In this paper, a new method for interferometric alignment of a MAIT is proposed, based on an extension of ELASTIC [14]. Nicknamed SPRING, it can perform piston alignment to a fraction of the coherence length using only the focal plane sensor and the sub-aperture actuators. The principle is given in section 2 and a first experimental demonstration is reported in section 3.

2. LARGE AMPLITUDE PISTON ALIGNMENT

In general, piston alignment is considered only once all the sub-apertures have already been coaligned. Then, one can use classical techniques developed for two-beam interferometry, such as visibility maximization or dispersed fringes analysis. However, there are a number of specific issues to be considered when dealing with MAITs and ZOPD search.

First, for a large number of sub-apertures, pairwise pupil-plane beam combination with beam-splitters (aka amplitude splitting or combining [19]) leads to bulky optical setup whose complexity scales with the number of sub-apertures \mathcal{N}_a . On the other hand, focal-plane beam combination (aka as wavefront combining [19]) is naturally present in a MAIT and can accommodate any number of sub-apertures, up to 800 with E-ELT in construction.

Second, MAITs have *a priori* compact pupils, ie such that the MTF is non null up to a large cut-off frequency. This generally leads to redundant pupils, ie where several sub-aperture pairs (baselines) contribute to the same frequency in the image plane, notably for segmented telescopes. In this case, it is more difficult to link focal-plane observations (such as fringes at a given frequency) to pupil-plane properties (such as OPD for a given baseline) without ambiguities.

Third, telescope pointing may be poor for this preliminary alignment as the fine pointing sensor is most likely supposed to operate on the cophased focal-plane image, which is not yet available.

Last, as sub-aperture pistons are corrected or scanned by the large-amplitude actuators, it is likely that tip/tilt errors with amplitude comparable to or larger than the diffraction limit λ/D occur, ruining the contrast of fringes in the focal plane. It is then mandatory to maintain an efficient tip/tilt control during this large-amplitude piston alignment.

Our goal here is to derive a procedure to perform a large-amplitude piston alignment on a MAIT with the minimal material and processing power. Assuming that this alignment

is seldomly performed, it is supposed that time is not critical. The OPD scan method is selected over the dispersed fringes approach because it does not require any additional hardware, in a dedicated channel or temporary inserted in the main channel. Interference between the sub-apertures is naturally recorded from their superimposition on the focal plane detector. But instead of superimposing all the sub-PSFs at the same location, it is much simpler for fringe analysis to split the aperture in *several groups of non-redundant sub-apertures* and to superimpose these groups at different known positions in the field. For a simple illustration, we assume here that \mathcal{N}_g groups of \mathcal{N}_n sub-apertures are made, such that $\mathcal{N}_g \times \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_a$ and \mathcal{N}_n is sufficiently small (typically 2, 3, 4 or 6) to form simple non-redundant groups [20]. These groups can be made of nearby sub-apertures to minimize baselines (and thus the frequencies of interest in the focal plane, hence the required pointing accuracy) and to minimize the number of pixels to process by pixel binning. Additionally, for dense pupils, these groups can exclude adjacent sub-apertures to form diluted sub-apertures, where OTF peaks do not overlap. It is then easy to split the detector data in \mathcal{N}_g regions of interest where a single group is located and co-aligned, and analyse these \mathcal{N}_g multi-aperture PSFs with classical focal-plane algorithms such as [21]. From the estimated visibility over the $\mathcal{N}_n(\mathcal{N}_n - 1)$ fringe peaks, and even ultimately their phase, the OPD positions leading to the maximum visibility can be derived. In case of imperfect tip/tilt superimposition, the tip/tilt of each sub-aperture can be estimated with [21] as soon as the visibility is sufficient (partial superimposition and OPD close to 0); the estimated visibility over each peak can then be unbiased by multiplying by $\exp(WFE^2/2)$ where WFE^2 is the variance of the differential tip/tilt over the peak.

But this simple scheme has an important drawback: each group can only provide $\mathcal{N}_n - 1$ independent piston estimates since a global piston is not seen. The total number of relevant measurements is thus only $\mathcal{N}_g(\mathcal{N}_n - 1)$, smaller than the expected number $\mathcal{N}_a - 1$. Additional measurements are required to link these groups. A simple solution is to record two focal-plane images for each piston configuration, with different tip/tilt values in order to change the PSF positions in the focal-plane and hence to change the composition of the groups. This can be seen as a form of phase diversity, where the additional image solves for ambiguities in the first image. The estimation of $2\mathcal{N}_g(\mathcal{N}_n - 1)$ pistons is then sufficient to provide not only all the requested values, but also to provide an error estimate through the available phase closures.

The last and decisive trick is to choose the free parameters (group positions and compositions, for both planes) so that this tip/tilt diversity can be simultaneously used to provide on one hand with the ELASTIC method the required closed-loop tip/tilt control all over the scan and on the other hand with group configuration all the requested $\mathcal{N}_a - 1$ independent pistons. This procedure has been named SPRING for Sub-aperture Piston Reduction by Interferences in Non-redundant Groups.

The only hypothesis used here is the ability of the ELASTIC method to measure sub-PSF positions when some of them are superimposed, whereas a minimum distance between the sub-PSF was assumed in previous work [14]. But it must be emphasised that in [14], this minimum distance is only a sufficient condition to simply make use of the autopeaks phase. Current work shows that the ELASTIC algorithm can be refined to allow tip/tilt measurements in a wider range of conditions, up to the final state when all PSFs are superimposed.

The analysis of the performance of the SPRING method are

closely linked to the performance of the extended ELASTIC algorithm, and will be the core of the next paper [22]. To demonstrate the validity of the method, we present in section 3 an experimental validation of SPRING.

3. EXPERIMENTAL VALIDATION OF THE ALGORITHM

The experimental validation of SPRING is performed on a dedicated bench presented in [14], on 6 sub-apertures (numbered from 0 to 5 on central image of Fig. 2) of a segmented mirror. The used source wavelength is 850 nm, with a 30 nm bandwidth. Hence a 24 μm coherence length in order to acquire visibility maximum from sub-aperture interferences.

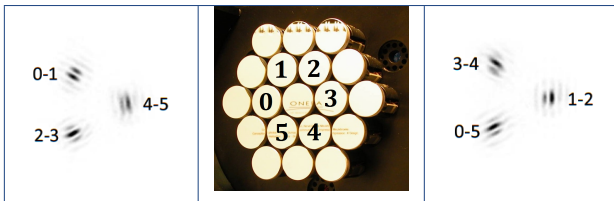


Fig. 2. NIRTA segmented mirror (middle). Diversity images (left and right), with superimposition groups and corresponding baselines.

A. Validation of tip/tilt control

We validate here ELASTIC ability to maintain the sub-PSFs non-redundant group superimposition during piston scan and visibility extraction. Tip/tilt diversity modulation for ELASTIC algorithm is chosen such as each sub-PSF has a different movement from one diversity image to the other. We can see on Fig. 2 left and right the \mathcal{N}_g groups, with $\mathcal{N}_g = 3$ here. Interference fringes can be seen, whose orientation matches with the sub-aperture relative positioning.

As from this state, we change the OPDs between sub-apertures by applying step by step a +200 nm piston over sub-aperture 0, 2 and 4, -200 nm over sub-aperture 1, 3 and 5 (as can be on Figs. 4 and 5). Fig. 3 shows several iterations (0, 5, 10 and 20) of one diversity image during the piston scan with (right column) and without (left column) the tip/tilt control performed by ELASTIC. Starting point is the first line, as we can see it corresponds to group superimpositions as explained on Fig. 2. As the piston scan is performed we can see two different behaviours between the two columns:

- As the piston scan is performed without the ELASTIC tip/tilt control, we can see from line 1 to line 4 of Fig. 3 that the sub-PSFs from different groups do not stay superimposed. This is mainly due to temporal modulation over each aperture. The diversity offset needed to superimpose different sub-PSFs groups from one diversity image to the other is changed before each image acquisition. Because of strong hysteresis, the sub-PSFs do not go back to the exact position they had before the temporal modulation. Plus the ± 200 nm piston is not a perfect piston due to hysteresis, hence the sub-PSFs can be drifted away as the piston ramp is applied. We can see this phenomenon on the graph of Fig. 4. This graph presents the evolution of tip/tilt estimation by ELASTIC during iterations, and the ± 200 nm piston applied every 2 iteration. Because there is no tip/tilt

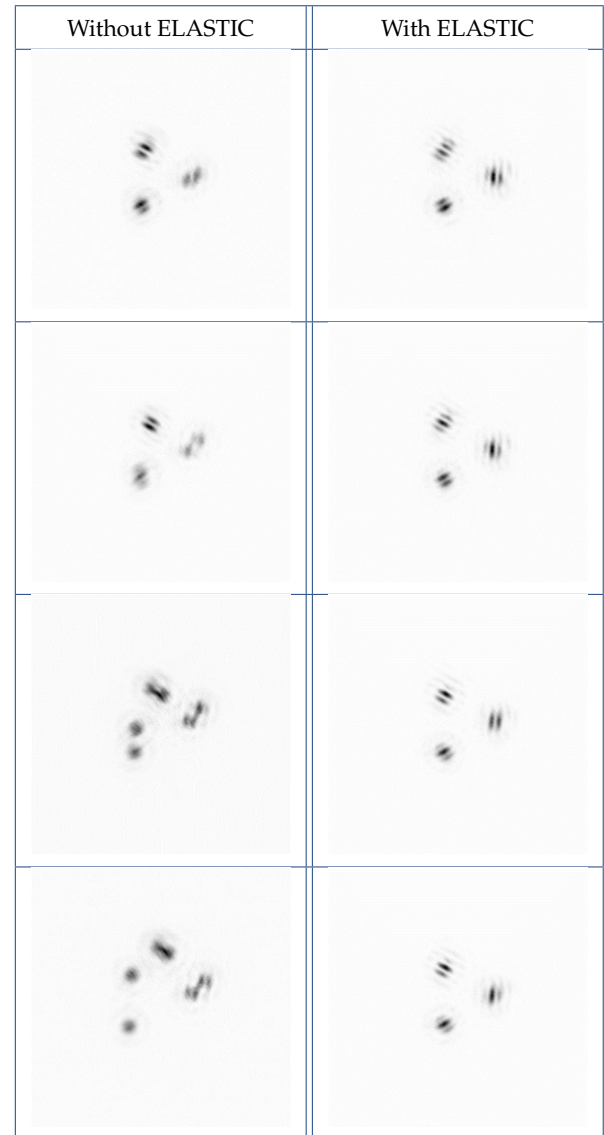


Fig. 3. Loop closure with (right) and without (left) the ELASTIC algorithm tip/tilt control applying a piston ramp.

control, the tip/tilt error increases as the piston ramp is applied. We can see that at the first iteration, tip/tilt error is close to 0 nm, and at the 25th iteration, tip/tilt error is up to 900 nm.

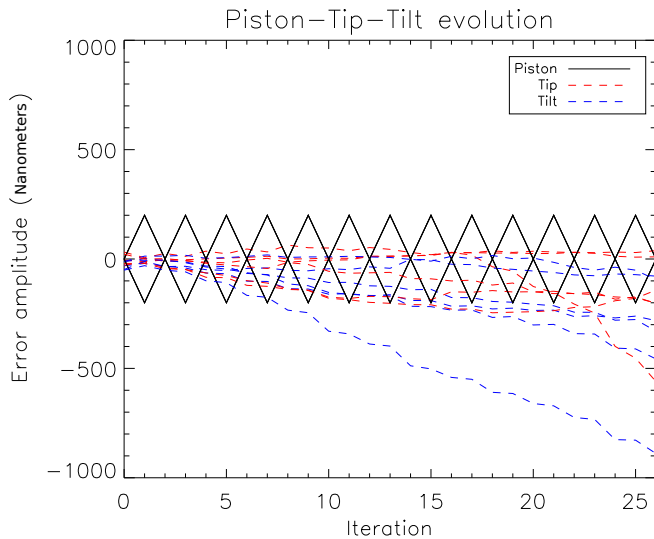


Fig. 4. Tip/tilt estimation (dashed lines) provided by ELASTIC during piston (solid lines) scan, without tip/tilt control.

- When the piston scan is performed with the ELASTIC tip/tilt control, we can see from line 1 to line 4 of Fig. 3 that the sub-PSFs stay superimposed in each group. ELASTIC then helps to corrected the previous hysteresis error during the temporal modulation and the piston scan. We can see that the fringe pattern changes as the piston scan is performed. The evolution of ELASTIC tip/tilt estimation during iteration is plotted on Fig. 5. We see that the tip/tilt error is close to 0 nm as the piston scan is performed. This confirms the ability of ELASTIC to maintain the superimposition groups as the piston scan is performed. Then one can extract the visibilities and therefore estimate the direction and distance of the ZOPD.

4. CONCLUSION

This paper has shown a new method to perform the large amplitude piston alignment of a multiple-aperture imaging telescope. Instead of first supersimposing all the sub-PSF and then search for piston, a partial superimposition is preferred. This has two operationnal adavantages: on one hand, it is more simple to analyse interferometric focal-plane data in non-redundant sub-groups; on the other hand, it allows simultaneous unambiguous tip/tilt control that would be impossible with the sole tip/tilt-aligned focal plane image.

This method should thus be useful for segment telescopes, in which piston actuation is performed by the segment actuators which may introduce parasitic tip/tilt errors, unlike long-baseline stellar interferometers which include dedicated delay-lines. Other features are self-calibration through the closure phases and the absence of any additional hardware.

REFERENCES

1. <http://www.eso.org/sci/facilities/paranal/telescopes/vlti.html>.

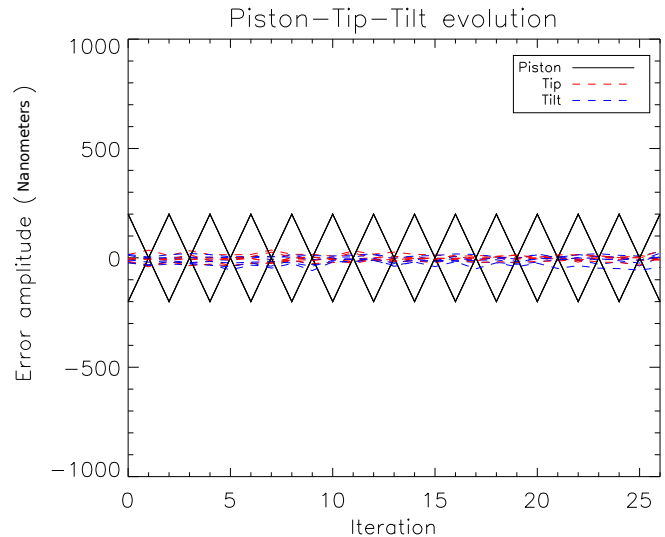


Fig. 5. Tip/tilt estimation (dashed lines) provided by ELASTIC during piston (solid lines) scan, with tip/tilt control.

2. <http://www2.lowell.edu/npoi/>.
3. <http://www.lbto.org/>.
4. <http://www.gmto.org/>.
5. <http://www.tmt.org/>.
6. <https://www.eso.org/sci/facilities/eelt/>.
7. G. Pareschi, G. Agnetta, L. Antonelli, D. Bastieri, G. Bellassai, M. Belluso, C. Bigongiari, S. Billotta, B. Biondo, G. Bonanno *et al.*, arXiv preprint arXiv:1307.4962 (2013).
8. www.jwst.nasa.gov/.
9. <https://asd.gsfc.nasa.gov/luvoir/>.
10. M. D. Perrin, D. S. Acton, C.-P. Lajoie, J. S. Knight, M. D. Lallo, M. Allen, W. Baggett, E. Barker, T. Comeau, E. Coppock, B. H. Dean, G. Hartig, W. L. Hayden, M. Jordan, A. Jurling, T. Kulp, J. Long, M. W. McElwain, L. Meza, E. P. Nelan, R. Soummer, J. Stansberry, C. Stark, R. Telfer, A. L. Welsh, T. P. Zielinski, and N. T. Zimmerman, "Preparing for JWST wavefront sensing and control operations," (2016), vol. 9904, pp. 99040F–99040F–19.
11. S. T. Thurman, *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 1 (2011).
12. A. S. Jurling and J. R. Fienup, *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 1348 (2014).
13. R. E. Carlisle and D. S. Acton, *Appl. Opt.* **54**, 6454 (2015).
14. S. Vievard, F. Cassaing, and L. Mugnier, *JOSA A* **34**, 1272 (2017).
15. R. A. Gonsalves, *Optical Engineering* **21**, 215829 (1982).
16. L. M. Mugnier, A. Blanc, and J. Idier, *Advances in Imaging and Electron Physics* **141**, 1 (2006).
17. P. Lawson, *Principles of long baseline stellar interferometry* (JPL, 2000).
18. A. Wirth, "Dispersed hartmann sensor and method for mirror segment alignment and phasing," (2003). US Patent 6,649,895.
19. M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Elsevier, 2013).
20. M. J. Golay, *JOSA* **61**, 272 (1971).
21. F. Baron, I. Mocoer, F. Cassaing, and L. M. Mugnier, *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1000 (2008).
22. S. Vievard, F. Cassaing, and L. Mugnier, In preparation .

Conclusion du chapitre

Nous avons montré que ELASTIC pouvait être utilisé afin de maintenir les sous-FEPs superposées en sous-groupes pendant l'application d'une rampe de piston. À terme, l'extraction des visibilitées de chaque sous-groupe permettra de repérer la position, sur la rampe appliquée par sous-pupille, pour laquelle les visibilitées sont maximales.

SPRING peut donc être utilisé pour effectuer l'alignement interférométrique, par sous-groupes. L'avantage de cet algorithme est qu'il ne requiert pas de dispositif supplémentaire, donc présente une implantation aisée. Une fois que les grandes erreurs de piston sont corrigées par sous-groupe, ELASTIC peut être utilisé pour superposer toutes les sous-FEPs dans le plan focal.

Une fois que les grandes erreurs de piston sont corrigées, donc que les sous-pupilles interfèrent entre elles, et que les grandes erreurs de tip/tilt sont diminuée jusqu'à moins de $\lambda/8$, soit la limite d'accrochage des algorithmes fins, il est alors possible d'effectuer l'étape ultime de la procédure d'alignement : le cophasage interférométrique.

Chapitre 5

Cophasage interférométrique : LAPD

Contents

5.1	Inversion des modes pour LAPD	116
5.1.1	Nirta6, cas compact	116
5.1.2	Nirta6, cas dilué	118
5.2	Caractérisation de l'algorithme faible phase sur point source	119
5.2.1	Optimisation de la diversité de phase	119
5.2.2	Linéarité	121
5.2.3	Performances en fonction du bruit	127
5.2.4	Erreur sur la défocalisation	132
5.2.5	Influence des modes supérieurs	133
5.3	Caractérisation de l'algorithme faible phase sur objet étendu	135
5.3.1	Scène étudiée	135
5.3.2	Optimisation de la diversité	136
5.3.3	Performances en fonction du bruit	138
5.4	Conclusion du chapitre	143

Les chapitres précédents ont présenté des algorithmes permettant l'estimation simple des grandes aberrations de piston/tip/tilt, de manière non supervisée et potentiellement exploitables en temps réel. Une fois l'amplitude des erreurs de piston/tip/tilt largement réduite, il faut effectuer une correction fine des résidus afin d'atteindre les performances optimales de l'instrument. Comme indiqué dans la première partie, des techniques utilisant la diversité de phase ont été développées en ce sens. Seulement, rappelons que ces techniques sont basées sur des algorithmes itératifs donc lourds en coût calculatoire. Nous avons présenté dans le chapitre 2 l'algorithme LAPD, qui permet une estimation temps réel des faibles aberrations de Piston/Tip/Tilt. Nous proposons dans ce chapitre une étude comparative entre un algorithme classique de diversité de phase comme présenté section 1.6.2.2, qui sera qualifié d'algorithme itératif, et l'algorithme LAPD. Au cours de la section 5.2 nous étudions les performances de ces deux algorithmes dans le cas de l'observation d'un point source, pour deux cas d'instruments multi-pupilles. La section 5.3 traite elle le cas de l'observation d'un objet étendu.

5.1 Inversion des modes pour LAPD

On a vu dans la présentation de l'algorithme LAPD que les aberrations étaient estimées après inversion de la matrice \mathbf{A} par SVD. Cette matrice \mathbf{A} , on le rappelle, est construite à partir du modèle théorique et des images courantes à corriger. On propose ici d'analyser les valeurs singulières retournées par la SVD. On rappelle que la valeur singulière associée à chaque mode correspond au poids de chaque mode. Ainsi, des modes à valeur singulière faible sont des modes "non vus" par le système, et doivent être filtrés lors de l'inversion car mal inversible en présence de bruit. Ainsi, on pourra alors avoir un conditionnement meilleur, donc un problème mieux posé.

Dans un souci de simplicité, nous allons présenter les valeurs singulières associées aux modes propres dans les cas compact et dilué de Nirta6 (on supposera des résultats similaires pour Nirta18). Nous choisissons le cas d'observation d'un point source, à savoir un objet non résolu par le télescope. Chaque image simulée est de dimensions 128×128 pixels, les tests sont effectués à fort flux, à savoir 5×10^5 photo-électrons par image, avec un RON de 5. En estimant que le signal est concentré dans une zone de 15 par 15 pixels, le RSB est donc de 35 environ.

5.1.1 Nirta6, cas compact

La figure 5.1 présente les valeurs singulières lors de la décomposition en éléments singuliers de \mathbf{A} dans le cas de Nirta6 compact, sans aberration. Ces valeurs singulières sont normalisées par rapport à la première.

On observe bien la présence de 18 modes : les trois premiers modes de polynômes de Zernike multipliés par le nombre de sous-pupilles. Les trois derniers modes de \mathbf{A} sont clairement associés à une valeur singulière extrêmement faible (inférieure à 10^{-5} en comparaison à la première valeur singulière). Ces trois modes sont affichés sous le graphe, et on s'aperçoit qu'ils correspondent aux modes de piston, tip et tilt globaux. En effet, de manière intrinsèque à tout ASO, le piston global ne peut être vu. En ce qui concerne le tip/tilt global, il ne peut pas être vu non plus dans notre cas car il disparaît

5.1. INVERSION DES MODES POUR LAPD

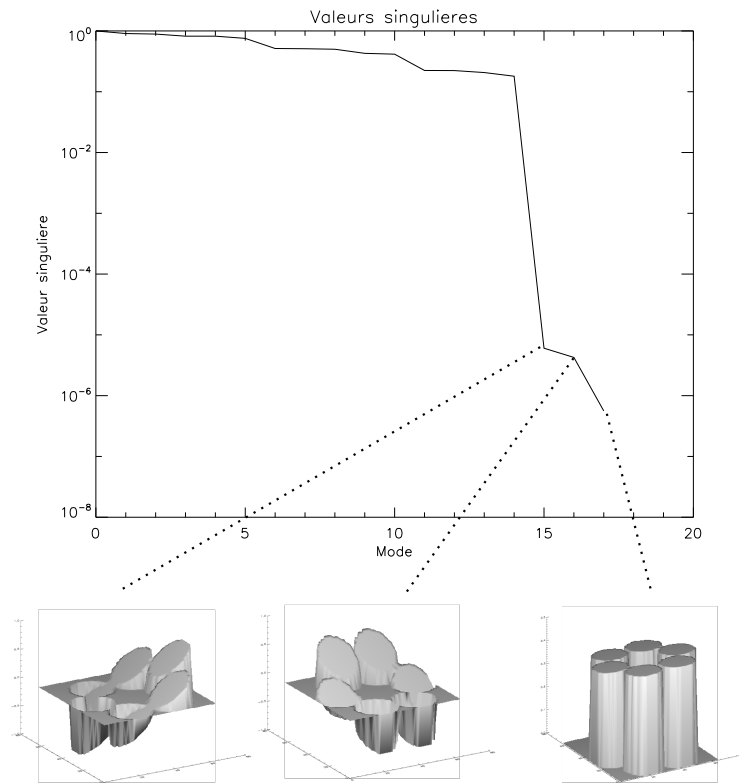


FIGURE 5.1 – Valeurs singulières et derniers modes associés de la matrice \mathbf{A} dans le cas Nirta6 compact sans aberrations. Imagettes de gauche à droite : Tip, Tilt et Piston globaux.

théoriquement lors du calcul de $\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$. Lors de l'inversion, ces trois modes doivent donc être filtrés, par exemple en mettant à 0 les trois valeurs singulières associées à ces modes (après inversion de la matrice des valeurs singulières).

Présentons maintenant les valeurs singulières lors de la décomposition en éléments singuliers de \mathbf{A} dans le cas de Nirta6 compact, avec aberrations. On génère des images présentant des aberrations de piston, tip et tilt avec une WFE de 0,1 radians sur chaque sous-pupille. Les valeurs singulières sont normalisées par la première et sont présentées Fig. 5.2.

On observe toujours les trois modes globaux associés aux plus petites valeurs singulières. Le mode de piston global est toujours associé à une valeur singulière inférieure à 10^{-6} , cependant on voit que les modes de tip et tilt globaux sont associés à des valeurs singulières plus importantes que dans le cas sans aberrations (comprises entre 10^{-2} et 10^{-3} ici). Le piston global n'est toujours pas vu intrinsèquement à LAPD, mais les tip/tilt globaux sont vus *via* la linéarisation. Cependant, même si les valeurs singulières associées aux tip/tilt globaux ne sont pas si faibles (de l'ordre de 10^{-3}), ces modes doivent tout de même être filtrés. On fera donc attention lors de l'estimation à filtrer les 3 derniers modes, comme décrit précédemment dans le cas sans aberrations. Dans un souci de rigueur, on ajoutera un test sur la valeur singulière précédent ces trois dernières afin de vérifier qu'elle n'est pas trop faible.

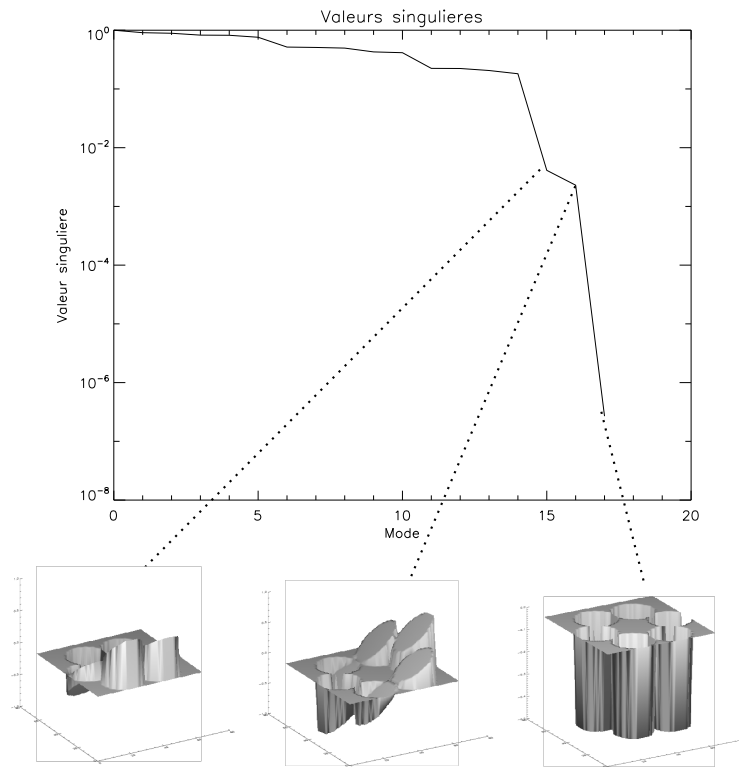


FIGURE 5.2 – Valeurs singulières et derniers modes associés de la matrice \mathbf{A} dans le cas Nirta6 compact sans aberrations.

5.1.2 Nirta6, cas dilué

Intéressons-nous maintenant au cas de Nirta6 dilué. La figure 5.3 présente les valeurs singulières lors de la décomposition en éléments singuliers de \mathbf{A} dans le cas de Nirta6 dilué, sans aberration. Ces valeurs singulières sont normalisées par la première.

On observe toujours les 18 modes, et on remarque que le mode de piston global est toujours associé à la plus petite valeur singulière (10^{-7} environ). En comparaison avec la pupille compacte, on voit que plusieurs modes (13 à 17) sont "mal vus" par le système, car leur valeur singulière associée est de l'ordre de 10^{-2} . On retrouve d'ailleurs les modes de tip et tilt globaux (14 et 16 sur la Fig. 5.3). On peut donc conclure que l'inversion de \mathbf{A} va mal se passer, et on n'aura pas assez de 12 modes pour estimer les piston-tip-tilt sur les sous-pupilles. [Baron et al., 2003] ont également montré qu'il y avait non-unicité de la solution à un problème de diversité de phase dans le cas d'une pupille diluée. Ainsi, on ne fera pas de simulations sur des pupilles diluées. Par ailleurs, dans le cadre de la validation de l'algorithme LAPD sur scène étendue, il ne paraît pas pertinent de construire un télescope dilué dans le cas de l'imagerie (d'une scène sur Terre par exemple, comme on va le faire), prenant en considération la perte de fréquences spatiales entraînée par la dilution du système.

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

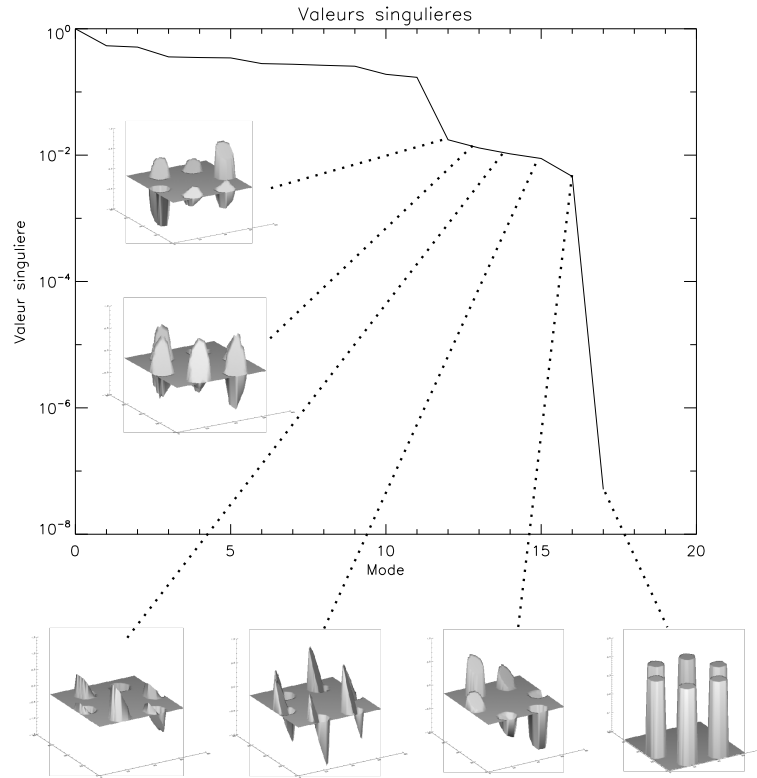


FIGURE 5.3 – Valeurs singulières associées à la matrice \mathbf{A} dans le cas Nirta6 dilué sans aberration.

5.2 Caractérisation de l'algorithme faible phase sur point source

Cette section est dédiée à la caractérisation de l'estimateur LAPD pour deux cas d'instruments multi-pupilles compactes : NIRTA6 et NIRTA18, définies dans le chapitre 2.2. Les images simulées sont ici de 128 par 128 pixel, avec un bruit de photons Poissonien et un bruit de lecture gaussien de 5 électrons par pixel.

5.2.1 Optimisation de la diversité de phase

Nous commençons par l'optimisation de la diversité de phase introduite entre les deux plans d'acquisition, à savoir l'amplitude de la défocalisation entre le plan focal et le plan de diversité. En effet les algorithmes de diversité de phase, utilisés sur point source ou bien sur objet étendu, exploitent la différence entre les deux images acquises. Cependant, si les images sont trop similaires (petite défocalisation) ou bien trop différentes (grande défocalisation), il y a dégradation des performances. Un juste milieu doit alors être trouvé. Afin de déterminer la distance optimale entre les deux plans de diversité, nous faisons le choix de fixer une perturbation piston tip tilt, avec un écart-type de 0.1 rad et d'effectuer des tests de tirages d'estimation pour une amplitude de défocalisation comprise entre 0.01λ et λ .

NIRTA6 Le graphe de la Fig. 5.4 présente l'évolution de l'erreur totale (en λ) de l'estimation de tous les modes (piston/tip/tilt) par LAPD et par l'algorithme itératif, en fonction de l'amplitude de la défocalisation (en λ également).

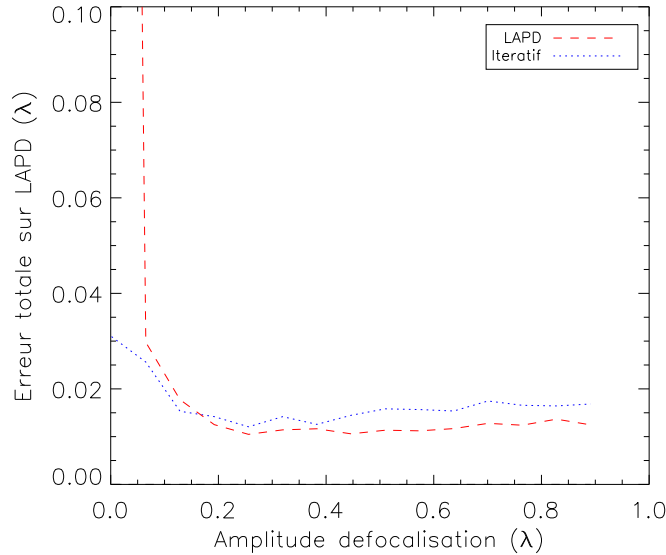


FIGURE 5.4 – Optimisation de la défocalisation pour les algorithmes LAPD et itératif.

On peut voir pour les deux algorithmes que l'erreur décroît quand la défocalisation augmente, jusqu'à atteindre un minimum. L'erreur est ensuite légèrement croissante avec la défocalisation. La valeur optimale de l'erreur, environ $\lambda.100$, est atteinte pour une défocalisation comprise entre environ $0,2$ et $0,4\lambda$. Ce résultat est en adéquation avec des études d'optimisation par [Meynadier et al., 1999] et [Lee et al., 1999] de la défocalisation optimale dans le cadre d'algorithmes de diversité de phase (pour un télescope monolithique). Ces études prévoient une défocalisation optimale aux alentours de $0,3\lambda$. En effet si la défocalisation est très petite, les images sont très proches donc il est plus compliqué de lever l'indétermination de signe sur l'erreur. Par la suite, si les images sont trop différentes l'erreur augmente. On voit peu cet effet dans le cadre d'un point source, qui est un cas relativement idéal (par rapport à une scène étendue, comme on le verra par la suite dans ce manuscrit). Nous gardons donc pour la suite une défocalisation de $0,3\lambda$ pour les deux algorithmes.

NIRTA18 Suivons le même mode opératoire que pour le cas à 6 sous-pupilles pour établir la défocalisation optimale pour la configuration de pupille NIRTA18. Le résultat illustré figure 5.5 présente l'évolution de l'erreur totale (en λ) sur l'estimation de tous les modes (piston/tip/tilt) en fonction de l'amplitude de la pseudo-défocalisation (en λ également).

Comme pour le cas NIRTA6, l'erreur sur l'estimation décroît quand la défocalisation augmente, jusqu'à atteindre un minimum. Le minimum de l'erreur d'environ $\lambda.50$ est atteint pour une défocalisation comprise entre $0,2\lambda$ et $0,5\lambda$. Si cette erreur est plus importante d'un facteur 2 que dans le cas NIRTA6 (pour une même quantité

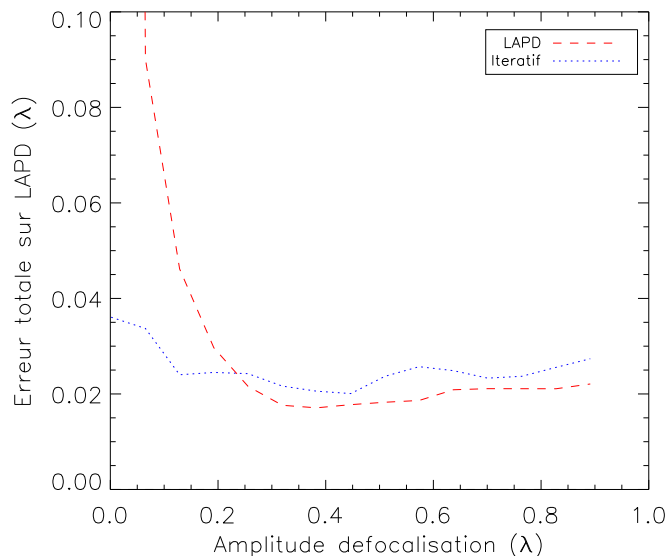


FIGURE 5.5 – Optimisation de la diversité de phase.

de flux mais pour un nombre de sous-pupilles qui a triplé), elle est atteinte pour une défocalisation du même ordre de grandeur. Une nouvelle fois, nous gardons donc $0,3\lambda$ comme valeur de défocalisation.

5.2.2 Linéarité

5.2.2.1 Le cas faibles phases

L'algorithme LAPD, on l'a vu section 2.1, repose sur l'hypothèse des faibles phases. On souhaite tester sa linéarité dans le cas de petites phases et vérifier qu'il a le même comportement que l'algorithme classique itératif. Pour ce faire, on fixe les perturbations sur toutes les sous-pupilles à 0, et on applique d'abord une rampe de piston allant d'environ -0.16λ à 0.16λ (correspondant à un intervalle de $[-1,1]$ en rad RMS) sur une sous-pupille seule. On réitère cette procédure pour l'étude de la linéarité en tilt, sur le même intervalle. Pour chaque position, nous calculons l'estimation moyenne sur la sous-pupille, pour le mode estimé sur 50 tirages, fournie par l'algorithme itératif et LAPD. Nous traçons ensuite cette estimation moyenne en fonction de la rampe de phase, que l'on superpose à une rampe de coefficient directeur 1 pour comparer.

5.2.2.1.1 NIRTA6 Le graphe de gauche de la Fig. 5.6 présente l'évolution de l'estimation en fonction de l'erreur de piston introduite. On voit que l'estimateur itératif est linéaire sur tout l'intervalle testé. En ce qui concerne LAPD, on voit que proche des bornes de l'intervalle testé, l'estimation n'est plus linéaire. Étudions le biais sur l'estimation en fonction de l'aberration introduite, sur le graphe de droite de la Fig. 5.6. Nous pouvons confirmer que l'algorithme itératif est bien linéaire, le biais étant inférieur à $10^{-3}\lambda$ sur tout l'intervalle (courbe à peine visible sur le graphe). Le

biais de l'estimation fournie par LAPD augmente avec l'aberration introduite, à cause de la linéarisation de la phase. On peut cependant voir que sur notre intervalle de test, le biais de l'estimation de piston ne dépasse pas les $\lambda/64$, limite théorique que nous avons fixée pour quantifier l'erreur minimale acceptable de l'algorithme fin sur un mode ; elle atteint cette limite pour une erreur de $0,15\lambda$.

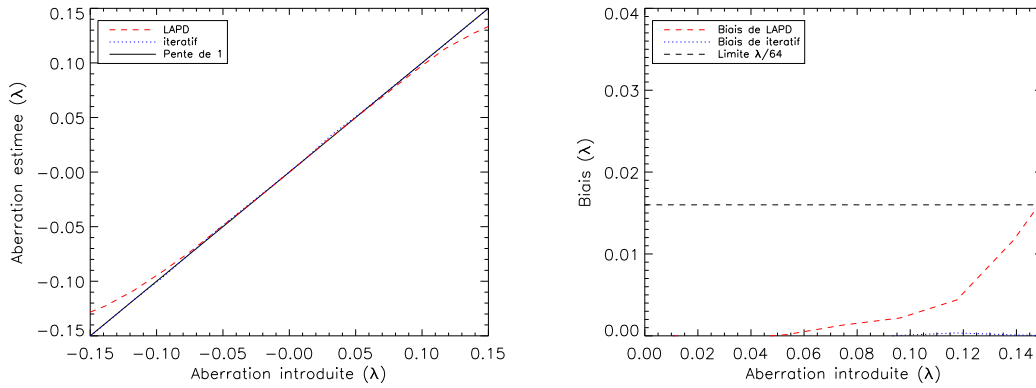


FIGURE 5.6 – Étude de la linéarité en Piston dans le cas NIRTA6. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.

Considérons maintenant la Fig. 5.7 pour l'étude de la linéarité des deux algorithmes pour l'estimation du Tip. Le graphe de gauche présente l'évolution de l'estimation de tip en fonction de l'aberration introduite. Si nous pouvons constater que l'algorithme itératif est linéaire sur tout l'intervalle testé, il n'en est pas de même pour l'algorithme LAPD. L'étude du biais de l'estimation de Tip par LAPD en fonction de l'aberration introduite montre que pour une aberration de Tip supérieure à environ $0,11\lambda$, le biais de l'estimateur est supérieur à $\lambda/64$.

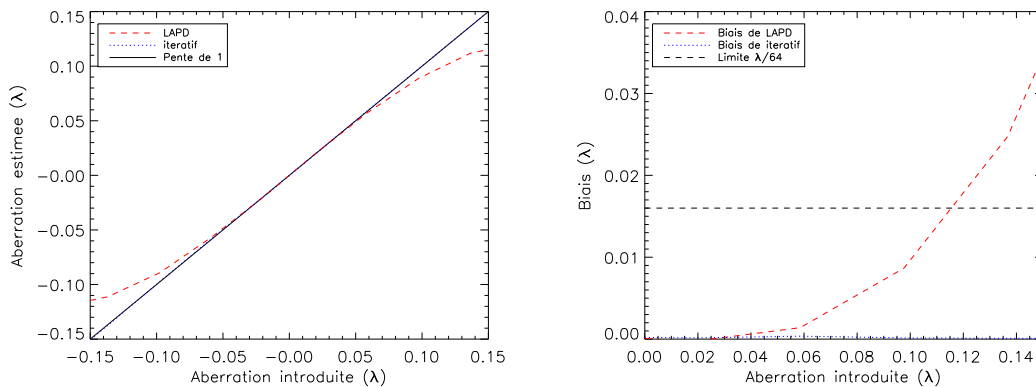


FIGURE 5.7 – Étude de la linéarité en Tip dans le cas de NIRTA6. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.

5.2.2.1.2 NIRTA18 Présentons maintenant l'étude de linéarité des algorithmes pour la configuration pupillaire NIRTA18. La Fig. 5.8 présente l'étude de linéarité pour l'estimation du Piston. Le graphe de gauche est le tracé de l'évolution de l'estimation en fonction de l'aberration introduite. Quant au graphe de droite, il présente l'évolution du biais en fonction de l'aberration introduite. On peut voir que l'estimation de l'algorithme est linéaire sur tout l'intervalle testé, comme pour le cas NIRTA6. La courbe du biais est à peine visible sur le graphe, traduisant un biais au moins inférieur à $10^{-3}\lambda$. En ce qui concerne l'algorithme LAPD, on remarque comme dans le NIRTA6 que l'estimation n'est pas linéaire sur tout l'intervalle testé. En étudiant la courbe de l'évolution du biais en fonction de l'aberration introduite, on voit que ce biais dépasse la limite de $\lambda/64$ à partir d'une erreur de piston égale à environ $0,12\lambda$.

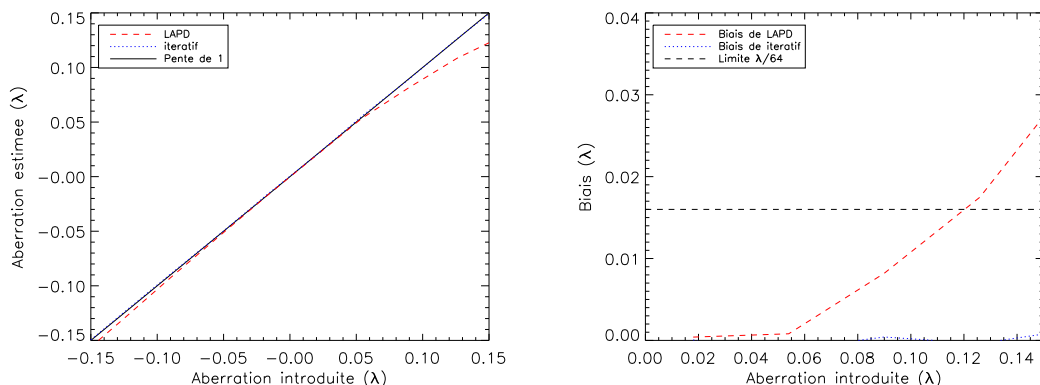


FIGURE 5.8 – Étude de la linéarité en Piston dans le cas NIRTA18. Gauche : Aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Droite : Biais de l'estimateur en fonction de l'aberration introduite.

Intéressons-nous maintenant à la linéarité de l'estimation de tip présentée Fig. 5.9. On peut voir grâce aux deux graphes, que comme précédemment l'algorithme itératif présente une estimation globalement linéaire, malgré un biais plus important relativement au cas NIRTA6. Concernant l'algorithme LAPD, on a également un résultat similaire au cas NIRTA6. L'estimation de tip n'est pas linéaire sur tout l'intervalle testé, et le biais augmente avec l'aberration introduite jusqu'à dépasser la limite de $\lambda/64$ pour un tip introduit d'environ $0,11\lambda$.

Nous avons constaté que l'estimation fournie par LAPD reste en dessous de la limite que nous avons fixée tant que l'aberration introduite est inférieure à environ $0,11\lambda$ (soit $\lambda/9$) dans le pire des cas. Ce résultat est d'une part en accord avec l'objectif affiché d'effectuer un alignement en tip/tilt avec une précision inférieure à $\lambda/8$ avec l'algorithme d'estimation des grandes erreurs de tip/tilt ELASTIC (voir Chapitre 3). D'autre part, les simulations de ELASTIC-1 montrent qu'une précision bien inférieure à $\lambda/8$ peut théoriquement être atteinte, ce qui nous conforte dans la possibilité d'interfacer les algorithmes ELASTIC-1 et LAPD pour l'alignement d'un télescope.

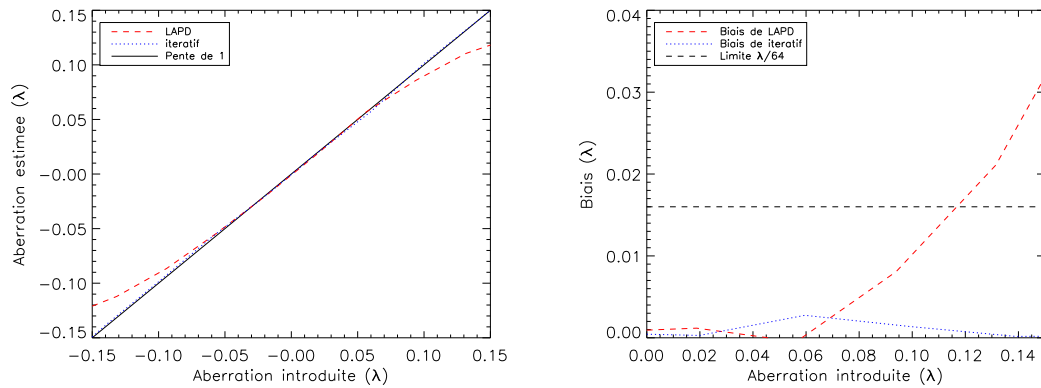


FIGURE 5.9 – Étude de la linéarité en Tip dans le cas NIRTA18. Gauche : Aberration estimée en fonction de l’aberration introduite. Droite : Biais de l’estimateur en fonction de l’aberration introduite.

5.2.2.2 Le cas grandes phases

L’algorithme LAPD peut également être utilisé de manière itérative. Une première estimation des aberrations est effectuée, puis cette estimation est utilisée comme point de départ pour une nouvelle estimation, c’est-à-dire que le développement limité est effectué au voisinage de ce nouveau point. Ceci devrait permettre d’étendre la dynamique d’estimation de l’estimateur. Afin de vérifier ceci, on effectue une étude de linéarité en piston et en tip, pour plusieurs valeurs d’itérations de LAPD. Le principe est le même que lors de l’étude de linéarité de LAPD, à la différence que les rampes de piston et tip ont une plus grande amplitude : d’environ -0.6λ à 0.6λ .

NIRTA6 La Fig. 5.10 présente l’étude de linéarité de LAPD avec plusieurs itérations dans le cas de l’estimation de piston. On remarque que l’estimateur itératif est linéaire entre un peu plus de -0.5λ et un peu moins de 0.5λ sur le graphe de gauche. Le graphe de droite, présentant le biais de l’estimation en fonction de l’aberration introduite confirme que le biais est très faible jusqu’à environ $0,45\lambda$. On retrouve la dynamique de linéarité de LAPD sans itération. On voit que lorsque le nombre d’itérations de LAPD augmente, l’estimateur tend à se rapprocher de la gamme de linéarité de l’algorithme itératif. Ceci est confirmé avec le graphe de droite : plus le nombre d’itérations augmente, plus l’aberration estimable avec un biais inférieur à $\lambda/64$ augmente. Ceci conforte l’idée d’une extension de la plage de linéarité de LAPD, lorsque ce dernier est utilisé de manière itérative. On voit que 1 voire 2 itérations suffisent pour doubler voire tripler la plage de linéarité de l’estimateur.

En ce qui concerne l’estimation du tip, la Fig. 5.11 présente à gauche l’estimation fournie par les deux algorithmes en fonction de l’aberration de tip introduite. Le graphe de droite présente l’évolution du biais de l’estimateur en fonction de l’aberration de tip introduite. On voit que l’estimateur itératif est linéaire entre environ -0.4λ et 0.4λ . On retrouve le fait que la linéarité de LAPD augmente avec le nombre d’itérations sans toutefois atteindre la même amplitude que l’algorithme itératif. Les résultats

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

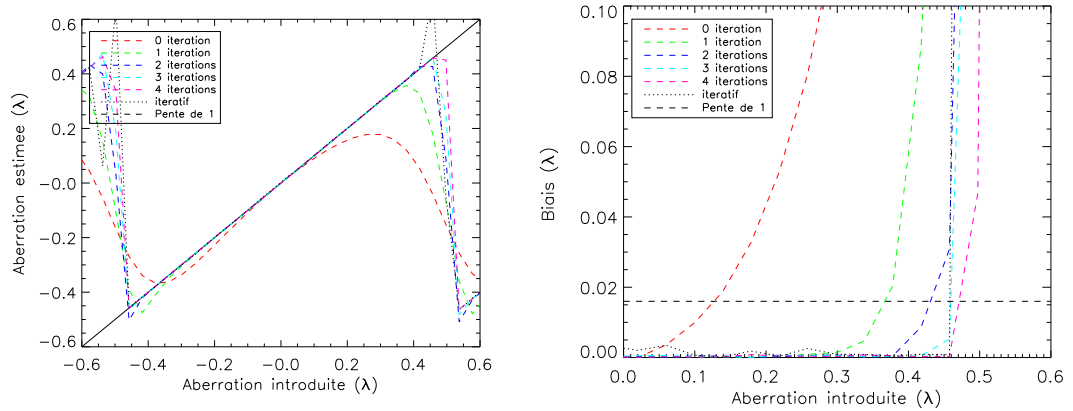


FIGURE 5.10 – Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA6.

sont identiques à partir de 3 itérations de LAPD. En conclusion, nous avons confirmé qu'utiliser LAPD de manière itérative augmentait la dynamique d'accroche de cet estimateur. Au-delà de 2 itérations les résultats sont similaires et permettent d'utiliser LAPD dans des cas d'aberrations plus importantes.

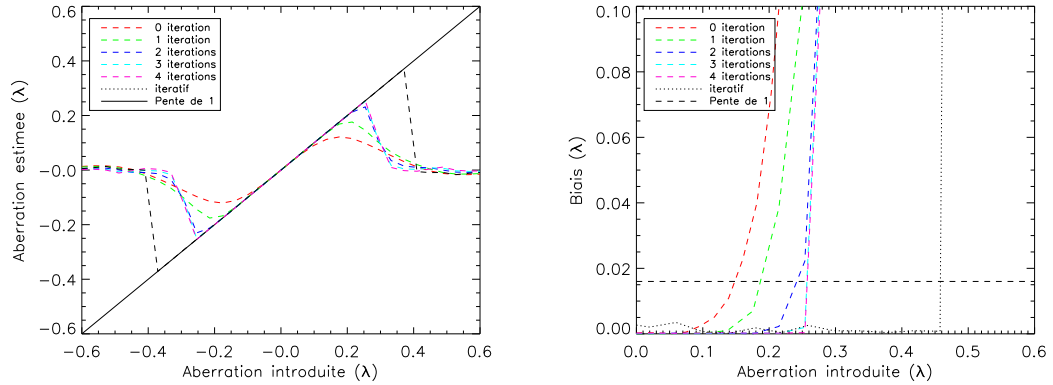


FIGURE 5.11 – Étude de la linéarité en Tip de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA6.

NIRTA18 Vérifions dans le cas à 18 sous-pupilles la dynamique de LAPD pour plusieurs itérations. Pour ce faire, nous nous plaçons dans les mêmes conditions que pour 6 sous-pupilles. La Fig. 5.12 présente les tests de linéarité pour l'estimation de piston. Sur le graphe de gauche, on peut voir le tracé de l'aberration estimée en fonction de l'aberration introduite. Le graphe de droite présente l'évolution du biais de l'estimation en fonction de l'aberration introduite. La plage de linéarité de l'algorithme itératif s'étale d'environ $-0,4\lambda$ à $0,4\lambda$, soit un intervalle plus faible que pour le cas NIRTA6. En ce qui concerne l'algorithme LAPD, on retrouve les courbes correspondant à 0 itération

sur les deux graphes. Lorsque nous augmentons le nombre d'itérations, nous constatons que l'estimation devient linéaire sur le même intervalle que l'algorithme itératif.

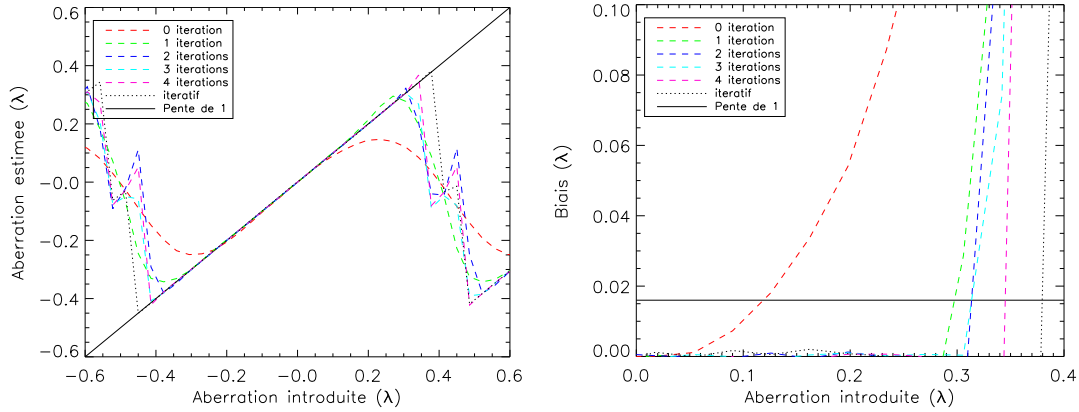


FIGURE 5.12 – Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA18.

Intéressons-nous maintenant à la linéarité de l'estimation de LAPD utilisé de manière itérative, dans le cas de l'estimation de tip. Pour cela, le graphe de droite de la Fig. 5.13 présente l'aberration estimée en fonction de l'aberration introduite et le graphe de gauche présente le biais sur l'estimation en fonction de l'aberration introduite. De la même manière que précédemment, on observe une augmentation de l'intervalle de linéarité de LAPD lorsqu'on augmente le nombre d'itérations, jusqu'à atteindre la même plage que l'algorithme itératif.

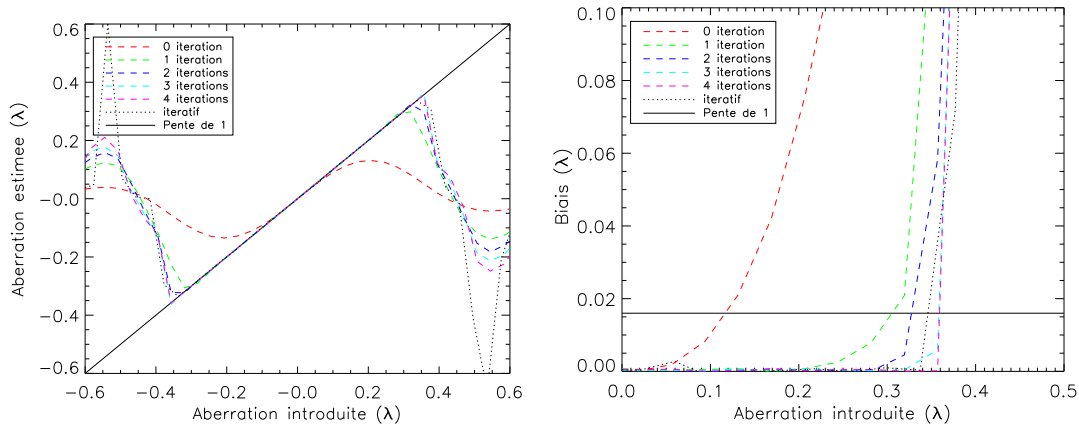


FIGURE 5.13 – Étude de la linéarité en Piston de l'estimateur LAPD avec itérations comparé à l'estimateur itératif, dans le cas NIRTA18.

Cette étude nous a confirmé que l'utilisation de LAPD de manière itérative permettait d'augmenter sa zone d'accrochage en terme d'amplitude d'aberrations à estimer. Dans ce cas, la dernière itération correspond à une estimation proche du cas faible phase vu précédemment. Dans la suite de notre étude, nous faisons donc le choix de nous mettre dans le cas d'aberrations faibles pour l'étude de performances en fonction

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

du flux dans les images.

5.2.3 Performances en fonction du bruit

Nous cherchons maintenant à étudier les performances de LAPD et de l'algorithme itératif en fonction du flux sur les images. Pour chaque illumination, quantifiée par le nombre de photo-électrons \mathcal{N}_{ph} dans une image, on effectue 50 tirages de bruit indépendants, en estimant piston, tip et tilt. On calcule alors l'écart-type, le biais et l'erreur totale sur ces 50 tirages. Deux cas des perturbations sont étudiés : un cas sans aberration et un cas où les perturbations du front d'onde sont faibles, donc dans la dynamique de LAPD ; l'écart-type des aberrations de piston/tip/tilt est de 0.2 rad soit $\lambda/30$. Pour le calcul du RSB (RSB par pixel), on considère que le signal est confiné dans une zone carrée de 15 pixels de côté.

NIRTA6 Traçons, en fonction de l'illumination, l'écart-type, le biais et l'erreur totale dans le cas sans aberration sur la Fig. 5.14.

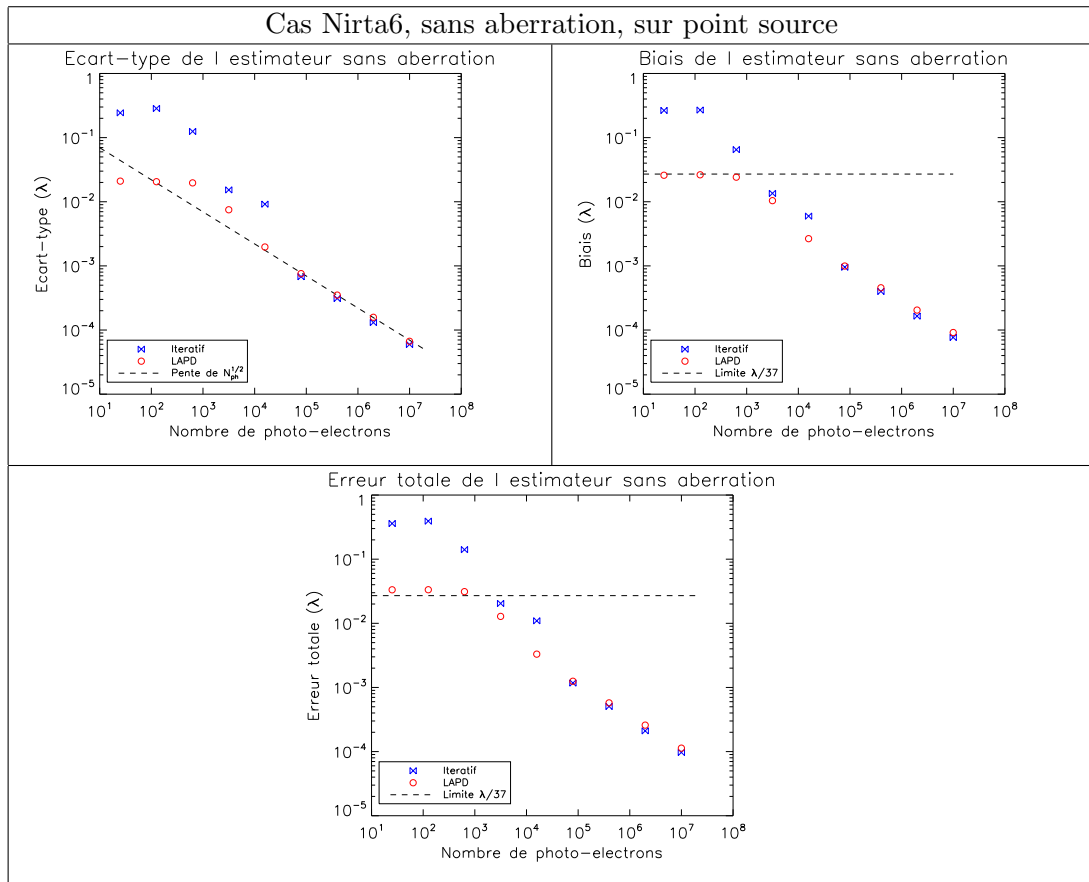


FIGURE 5.14 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta6 sans aberration.

Algorithme	Valeur de α
Itératif	0.22
LAPD	0.22

TABLE 5.1 – Valeur du coefficient α , obtenu par ajustement de α/\mathcal{N}_{ph} sur l'écart-type des estimateurs, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta6.

On observe que pour LAPD et l'algorithme itératif, l'écart-type suit un régime constant à faible flux (inférieur à 10^3 photo-électrons, soit un RSB de 1 environ), avec un palier à environ $\lambda/50$ pour LAPD, $\lambda/5$ pour l'algorithme itératif. À flux plus important (à partir de 10^4 photo-électrons soit un RSB de 5 environ), on est en régime de bruit de photons, les deux algorithmes suivent une loi en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$. Les valeurs de α sont reportées dans le tableau 5.1. Nous constatons que les deux algorithmes présentent des performances similaires en régime de bruit de photons car le coefficient α est égal pour les deux algorithmes.

Concernant le biais, il est d'abord constant pour les deux algorithmes puis décroît quand le flux augmente. Dans le cas de LAPD, le biais devient inférieur à la limite de cophasage fixée pour un flux d'environ 10^3 photo-électrons, soit un RSB de 1. Le biais de l'algorithme itératif devient inférieur à cette limite de cophasage pour un flux d'environ 3×10^3 , soit un RSB de 3 environ, et il décroît jusqu'à moins de $\lambda/10^4$ pour un flux égal à 10^7 photo-électrons par image.

Le biais et l'écart-type ont une contribution similaire sur l'erreur totale. L'erreur totale sur l'estimation de LAPD et de l'algorithme itératif devient globalement inférieure à la limite de cophasage fixée pour un flux d'environ 5×10^3 , soit un RSB de 4 environ.

Les deux algorithmes présentent donc des comportements similaires sur point source, lorsque le système est dans un état sans aberration, et fournissent une estimation répondant à nos attentes (limite fixée pour le cophasage à une erreur de $\lambda/37$) pour un RSB supérieur à 5 environ.

Intéressons-nous maintenant à l'étude du comportement des algorithmes en présence de faibles aberrations. On trace l'écart-type, le biais et l'erreur totale associée à l'estimation sur la Fig. 5.15.

On observe que pour les deux algorithmes, l'écart-type suit des régimes similaires au cas sans aberration, avec un palier à faible flux et une décroissance en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$ en régime de bruit de photons. Les valeurs des coefficients α sont les mêmes que dans le cas sans aberration.

Le biais suit tout d'abord un régime constant à faible flux, comme dans le cas sans aberration, et pour les mêmes valeurs de RSB. Cependant, si le biais de l'algorithme itératif diminue de la même manière que dans le cas sans aberrations en régime de bruit photons, on observe que le biais de l'algorithme LAPD atteint un seuil d'environ $\lambda/300$ pour un flux égal à 10^5 photo-électrons, correspondant à un RSB d'environ 20.

Le biais a alors une influence prépondérante sur l'erreur totale, et la limite en régime de bruit de photons au seuil d'environ $\lambda/300$. L'erreur totale devient inférieure à la

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

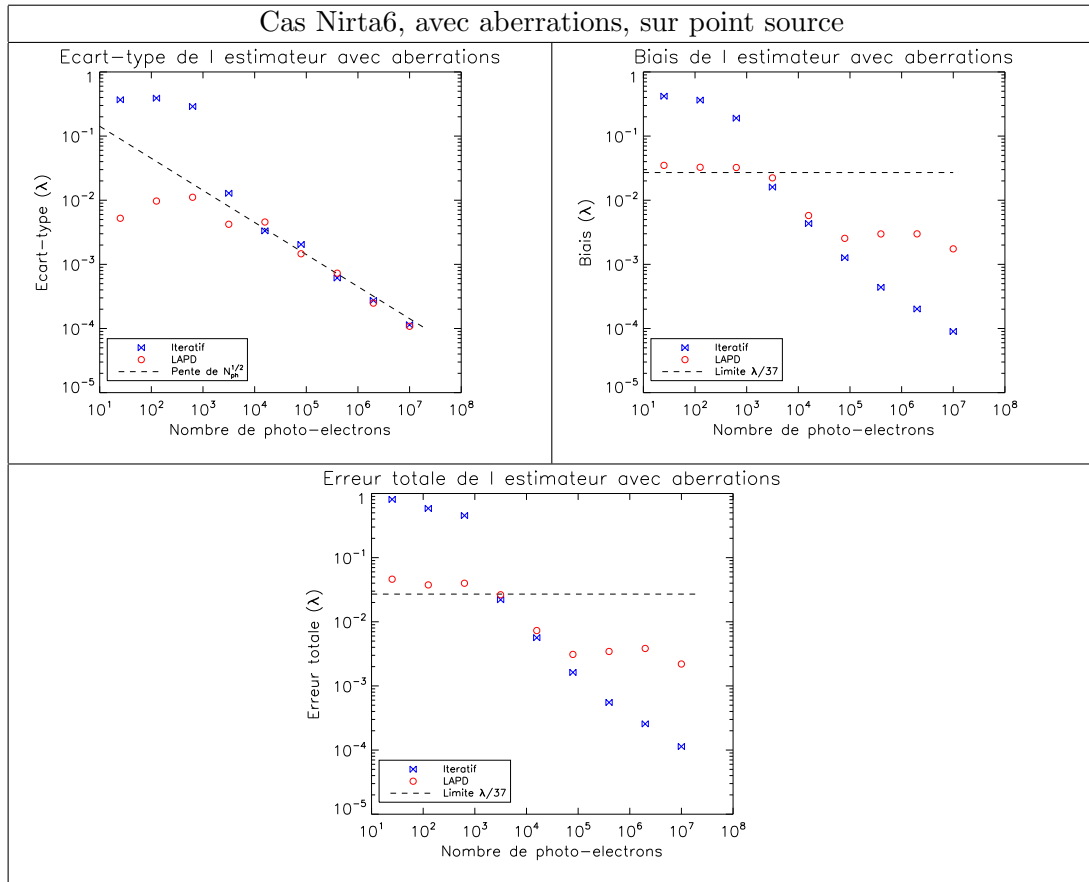


FIGURE 5.15 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par NIRTA6, avec perturbations en piston tip tilt avec une dispersion de 0.2 rad RMS.

limite théorique fixée pour un flux de 5×10^3 photo-électrons par images, correspondant à un RSB de 4.

NIRTA18 Évaluons les performances des algorithmes dans la configuration pupillaire NIRTA18. La démarche ne diffère pas du cas NIRTA6, et on trace l'écart-type, le biais et l'erreur totale, en fonction de l'illumination, dans le cas sans aberration sur la Fig. 5.16.

L'écart-type suit toujours un régime constant à faible flux (inférieur à 10^3 photo-électrons, soit un RSB de 1 environ), avec un palier à environ $\lambda/50$ pour LAPD, $\lambda/5$ pour l'algorithme itératif. Lorsque l'on rentre en régime de bruit de photons, à partir de 10^4 photo-électrons soit un RSB de 5 environ, les deux algorithmes suivent une loi en $\alpha/\sqrt{N_{ph}}$. Les valeurs de α sont reportées dans le tableau 5.2. Comme pour le cas NIRTA6, nous pouvons voir que les coefficients α pour les deux algorithmes sont égaux, traduisant un comportement similaire de ces derniers, même si on remarque que l'écart-type de l'algorithme itératif est légèrement supérieur à celui de LAPD jusqu'à un flux d'environ 10^6 .

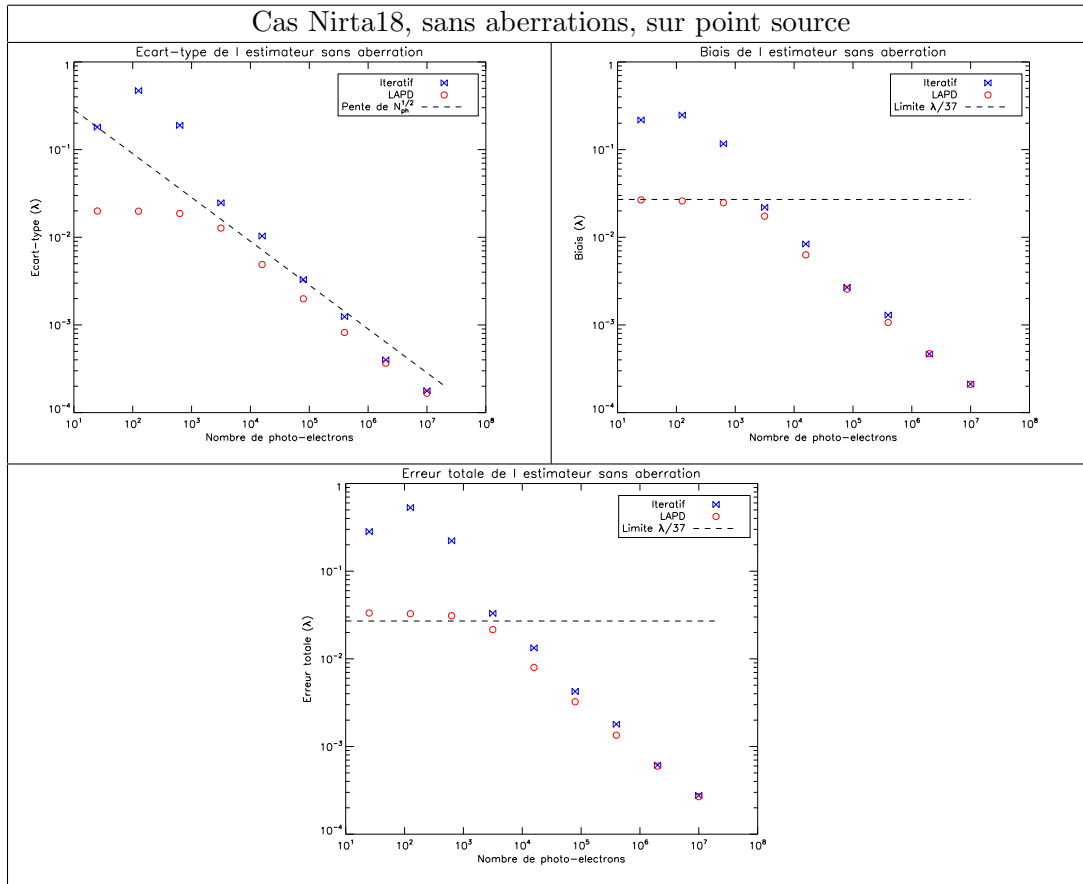


FIGURE 5.16 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta18, sans aberrations.

Le biais est d'abord constant pour des petites valeurs de flux (entre 10^1 et 10^3 photo-électrons). Le biais de l'estimateur LAPD devient inférieur à la limite de cophasage fixée ($\lambda/37$) pour un flux d'environ 10^3 photo-électrons, soit un RSB d'environ 1. Le biais de l'algorithme itératif devient inférieur à cette limite de cophasage pour un flux d'environ 3×10^3 , soit un RSB de 2 environ, et il décroît jusqu'à moins de $\lambda/10^3$ pour un flux supérieur à 5×10^5 photo-électrons par image, soit un RSB d'environ 45.

Le biais et l'écart-type ont une contribution similaire sur l'erreur totale, qui devient globalement inférieure à $\lambda/37$ pour un flux d'environ 5×10^3 , soit un RSB de 4.

Intéressons-nous maintenant, au moyen de la Fig. 5.17, aux performances des deux algorithmes en fonction du flux, en présence de faibles aberrations.

Algorithme	Valeur de α
Itératif	0.9
LAPD	0.9

TABLE 5.2 – Valeur du coefficient α , obtenu par ajustement de α/\mathcal{N}_{ph} sur l'écart-type des estimateurs.

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

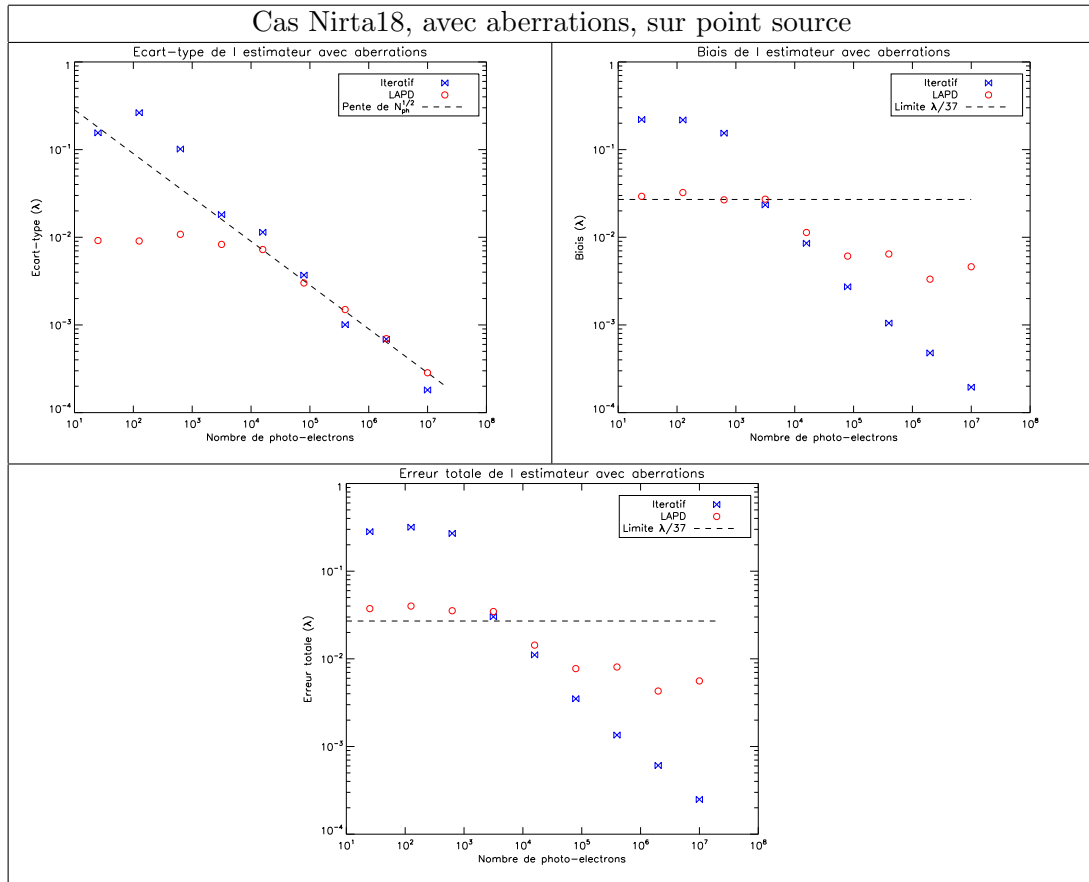


FIGURE 5.17 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un point source par Nirta18, avec aberrations.

L'écart-type en fonction du flux a le même comportement, pour les deux algorithmes, que dans le cas sans aberration précédemment décrit. En ce qui concerne le biais, il suit d'abord un régime constant comme dans le cas sans aberration. Cependant, si le biais de l'algorithme itératif diminue de la même manière que dans le cas sans aberration en régime de bruit de photons, on observe que le biais de l'algorithme LAPD atteint un seuil d'environ $\lambda/300$ pour un flux égal à 10^5 photo-électrons, correspondant à un RSB d'environ 20. Le biais a alors une influence prépondérante sur l'erreur totale, qui atteint un seuil d'environ $\lambda/150$. L'erreur totale devient inférieure à la limite théorique fixée pour un flux d'environ 5×10^3 photo-électrons par images, correspondant à un RSB de 3.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les performances de LAPD sont en accord avec nos attentes, dans ce cas à 6 sous-pupilles. Un cophasage en présence d'aberrations faibles (qui pourraient correspondre au résidus de ELASTIC-1 en ce qui concerne les tip-tilt) peut être envisagé dans le cas d'observation un objet ponctuel à partir d'un RSB de 3.

5.2.4 Erreur sur la défocalisation

La modélisation de la formation des images utilisée pour résoudre le problème reposant directement sur la phase de diversité introduite, il est primordial d'évaluer l'impact d'une méconnaissance de cette dernière sur l'estimation de phase. En effet, si la phase de diversité entre les deux plans est mal connue, le problème inverse n'est plus adapté au modèle direct et l'estimation précise de la phase est alors dégradée.

Nous choisissons donc de nous placer dans le cas sans aberration (déjà cophasé) et effectuons 50 tirages de bruit indépendants pour différentes amplitudes d'erreur de défocalisation.

NIRTA6 Traçons l'erreur totale sur l'estimation piston, tip et tilt en fonction de l'erreur de défocalisation introduite sur le graphe de la Fig. 5.18. Cette étude est réalisée uniquement dans le cadre de LAPD.

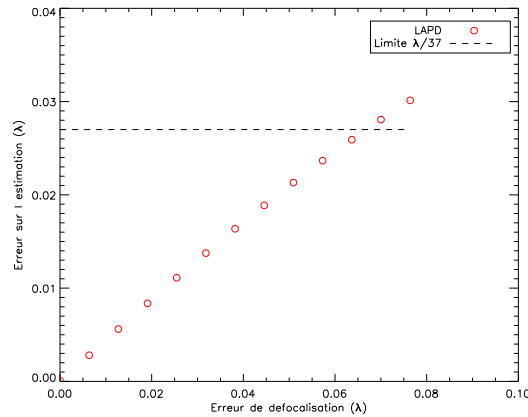


FIGURE 5.18 – Erreur sur la défocalisation.

On observe que l'erreur sur l'estimation augmente avec l'erreur sur la défocalisation. En ajustant un modèle de fonction linéaire, nous trouvons un coefficient de proportionnalité de 0.4. L'erreur sur l'estimation dépasse $\lambda/37$ lorsque l'erreur sur la défocalisation est supérieure à $\lambda/15$ environ. Il sera donc primordial d'étalonner la défocalisation lors des tests expérimentaux.

NIRTA18 Étudions maintenant l'influence d'une erreur sur l'étalonnage de la défocalisation entre les deux plans de diversité dans le cas NIRTA18. L'erreur totale de l'estimation en fonction de l'erreur de défocalisation est tracée sur la Fig. 5.19).

On observe que l'erreur totale sur l'estimation des 3 modes de piston tip et tilt augmente avec l'erreur sur la défocalisation. En ajustant un modèle linéaire, on estime un coefficient de proportionnalité environ égal à 0,45 entre l'erreur totale et l'erreur sur la défocalisation. Ce résultat est légèrement supérieur au cas à 6 sous-pupilles, en conséquence de l'augmentation du nombre de sous-pupilles et donc de modes à estimer. La limite théorique au cophasage que l'on a fixé est atteinte à partir d'une erreur sur la défocalisation d'environ $\lambda/17$, soit une valeur légèrement inférieure au cas à 6 sous-pupilles.

5.2. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR POINT SOURCE

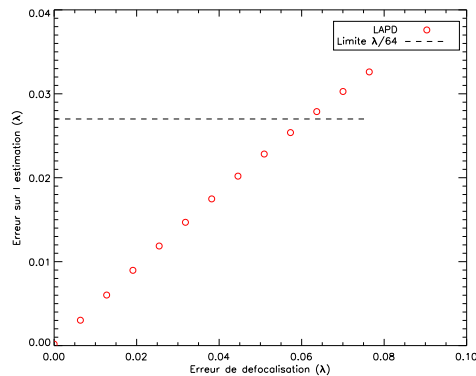


FIGURE 5.19 – Erreur sur la défocalisation.

5.2.5 Influence des modes supérieurs

Nous souhaitons maintenant étudier la robustesse de LAPD en présence d'aberrations de hauts ordres sur chaque sous-pupille. Nous modélisons donc de la défocalisation ($Z=4$) à l'aberration sphérique ($Z=11$). Étudions donc l'erreur sur l'estimation de LAPD à mesure que l'amplitude des erreurs (également distribuées sur tous les polynômes de Zernike) augmente.

NIRTA6 La figure 5.20 présente l'erreur totale sur l'estimation des piston, tip et tilt en fonction de l'erreur appliquée à chaque sous-pupille. On observe que l'erreur croît avec l'amplitude des défauts. Un modèle de fonction linéaire nous permet d'estimer le coefficient de proportionnalité à 0,25 entre les erreurs de hauts ordres sur les sous-pupilles et l'erreur totale sur l'estimation. Ainsi, afin d'obtenir une erreur d'estimation qui soit inférieure à $\lambda/37$, il faut que les défauts sur chaque sous-pupille soient inférieurs à $\lambda/10$.

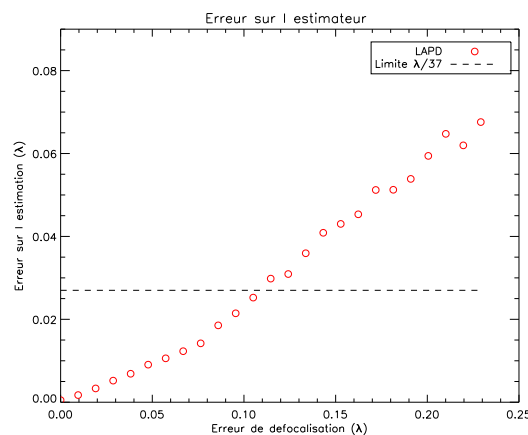


FIGURE 5.20 – Erreur sur la défocalisation.

NIRTA18 Nous souhaitons maintenant étudier la robustesse de LAPD en présence d'aberrations de hauts ordres, pour le cas à 18 sous-pupilles. La figure 5.20 présente l'erreur totale sur l'estimation en fonction de l'erreur appliquée à chaque sous-pupille. L'erreur sur l'estimation augmente avec l'amplitude des défauts. La dispersion des aberrations de hauts ordres sur chaque sous-pupille doit être inférieure à $\lambda/37$ afin que l'estimation ait une précision d'au moins $\lambda/8$.

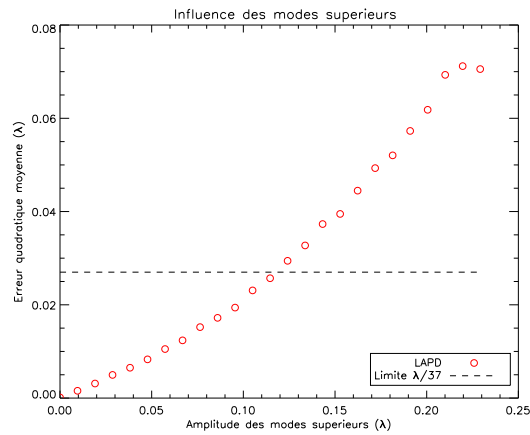


FIGURE 5.21 – Erreur sur la défocalisation.

5.3 Caractérisation de l'algorithme faible phase sur objet étendu

Nous avons caractérisé l'algorithme LAPD dans le cas d'un point source, ce qui a permis de confirmer que la linéarisation de la phase permettait d'estimer des aberrations de faible amplitude. Étudions maintenant le comportement de LAPD dans le cadre de l'observation d'une scène étendue. Dans une première section on présente la scène étudiée, ensuite on propose d'étudier le comportement de LAPD pour différentes valeurs de flux, en le comparant à l'algorithme itératif, pour un cas à 6 sous-pupilles et un cas à 18 sous-pupilles.

5.3.1 Scène étudiée

La scène choisie est une prise de vue de la ville de Toulouse (Fig. 5.22), faite dans le cadre de la mission PELICAN, par un avion. Ses caractéristiques sont les suivantes :

- Dimensions 4046 par 4096 pixels,
- Résolution spatiale : 10 cm par pixel.

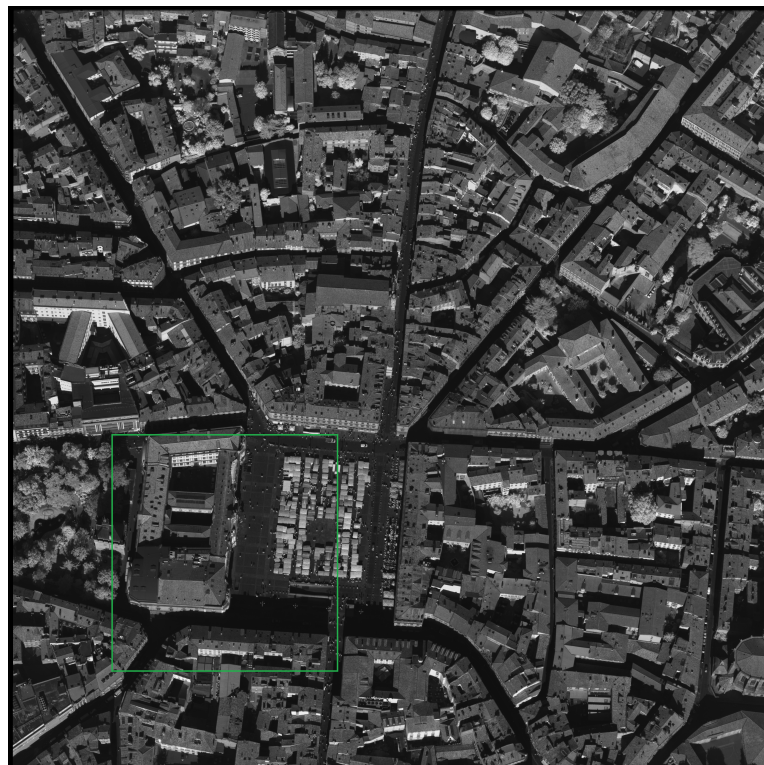


FIGURE 5.22 – Vue aérienne de Toulouse faite dans le cadre de la mission PELICAN.

On adapte la scène observée à un cas d'observation par un satellite géostationnaire avec une résolution spatiale de 1 mètre. Pour ce faire, on redimensionne l'image prise par PELICAN, puis on va sélectionner une zone de 128 par 128 pixels. La zone correspondante est encadrée en vert sur la prise de vue PELICAN, et on présente l'image après redimensionnement Fig. 5.23.



FIGURE 5.23 – Partie de la scène de Toulouse vue par un télescope avec une résolution spatiale de 1 mètre

5.3.2 Optimisation de la diversité

Comme nous avons pu le voir pour le cas de l'imagerie d'un point source, les algorithmes de diversité de phase exploitent la différence entre deux images acquises. Cette différence, dans notre cas une défocalisation, peut être optimisée afin d'obtenir des performances optimales de l'estimation. On choisit comme dans le cas du point source de fixer des aberrations de piston, tip et tilt avec une dispersion de 0,1 rad. Ensuite on choisit ici d'effectuer des tirages d'estimation pour une amplitude de défocalisation comprise entre $0,01\lambda$ et 2λ .

NIRTA6 Commençons par étudier le cas à 6 sous-pupilles. Le graphe de la Fig. 5.24 présente l'évolution de l'erreur sur l'estimation des trois modes de piston, tip et tilt en fonction de la défocalisation introduite entre les deux images.

L'erreur sur l'estimation décroît tout d'abord avec l'augmentation de l'amplitude de défocalisation, jusqu'à atteindre un minimum pour une valeur de défocalisation comprise entre $0,2\lambda$ et $0,6\lambda$. Ensuite, l'erreur augmente à mesure que l'amplitude de la défocalisation augmente. Ce résultat est en adéquation avec les résultats montrés pour l'étude de la défocalisation optimale dans le cadre de l'imagerie d'un point source.

5.3. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR OBJET ÉTENDU

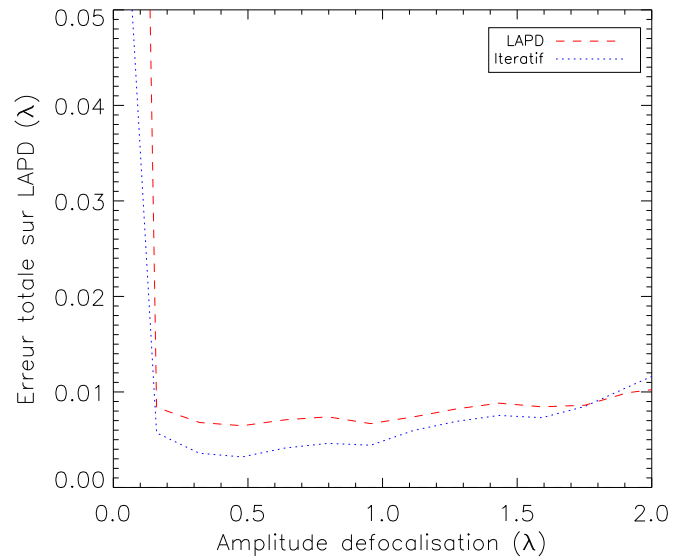


FIGURE 5.24 – Optimisation de la diversité de phase dans le cas de l'imagerie d'une scène étendue par la pupille NIRT6.

NIRTA18 Étudions maintenant la défocalisation optimale dans le cas NIRTA18. La Fig.5.25 présente la courbe d'optimisation de l'amplitude de défocalisation.

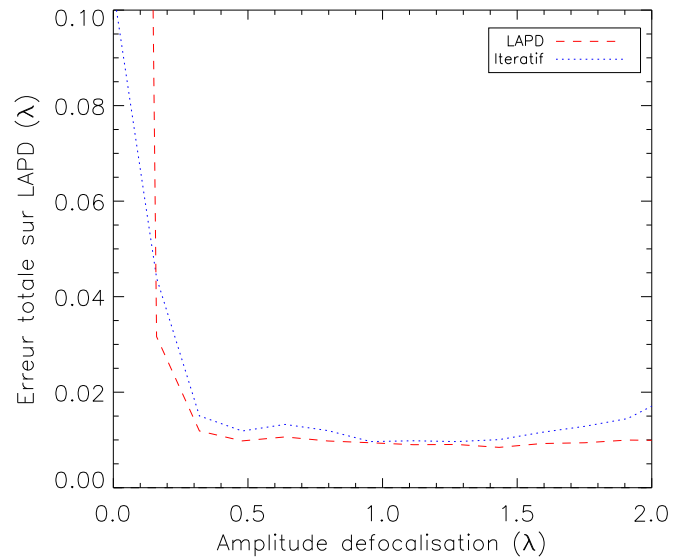


FIGURE 5.25 – Optimisation de la diversité de phase dans le cas de l'imagerie d'une scène étendue par la pupille NIRT6.

Similairement au cas à 6 sous-pupilles, l'erreur décroît tout d'abord quand l'amplitude de défocalisation augmente, pour atteindre une valeur stable minimale

entre $0,3\lambda$ et $1,5\lambda$ environ. L'erreur augmente ensuite pour des valeurs d'amplitude de défocalisation plus grande que $1,5\lambda$.

Pour conclure, on peut voir que les résultats d'optimisation de l'amplitude de défocalisation sont similaires à ceux dans le cas du point source. En conséquence, nous garderons comme valeur d'amplitude de défocalisation $0,3\lambda$ pour les tests qui suivent.

5.3.3 Performances en fonction du bruit

NIRTA6 Effectuons l'étude de performances de LAPD et de l'algorithme itératif en fonction du flux pour la configuration pupillaire de NIRTA6. Pour ce faire, nous effectuons les mêmes tests que dans le cas du point source. La Fig. 5.26 présente la simulation de l'image focale et de l'image défocalisée de $0,3\lambda$, de la scène de Toulouse, par l'instrument NIRTA6, sans aberration. Ces images sont de taille 128 par 128 pixels.

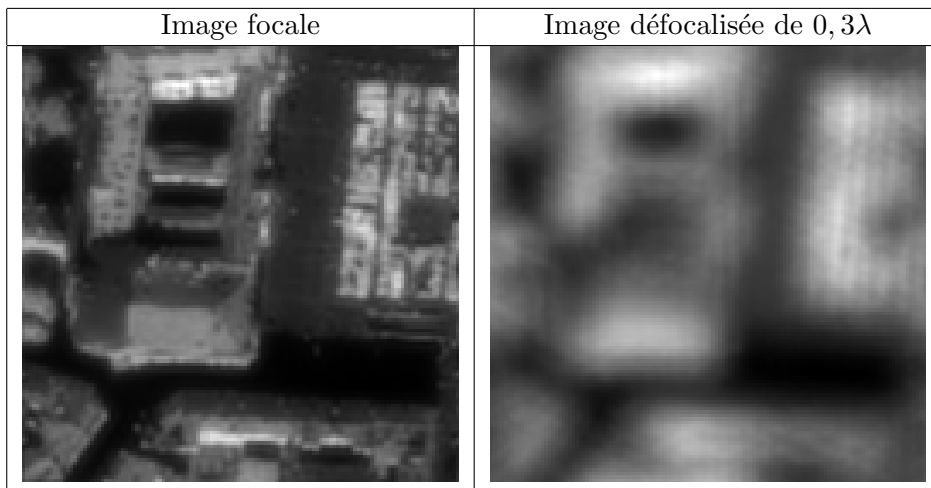


FIGURE 5.26 – Scène vue par un instrument type Nirta6.

Traçons tout d'abord Fig. 5.27 l'évolution de l'écart-type, du biais et de l'erreur total en fonction du flux, sans aberration.

On observe que l'écart-type de LAPD suit un régime constant à faible flux (inférieur à 6×10^4 photo-électrons, soit un RSB légèrement inférieur à 1), avec un palier à environ $\lambda/50$, alors que l'écart-type de l'algorithme itératif est globalement supérieur à $\lambda/10$ pour un flux inférieur à 10^5 , soit un RSB de 1. À flux plus important, on est en régime de bruit de photon, les deux algorithmes suivent une loi en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$. Les valeurs de α sont reportées dans le tableau 5.3. Les deux algorithmes présentent des performances similaires en régime de bruit de photons car le coefficient α est égal pour les deux algorithmes. En comparant avec les valeurs de α dans le cas de l'imagerie du point source (où $\alpha = 0,22$), on voit que les algorithmes présentent des performances moindres dans le cadre de l'observation d'une scène étendue.

Concernant le biais, il est d'abord constant pour les deux algorithmes puis décroît

5.3. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR OBJET ÉTENDU

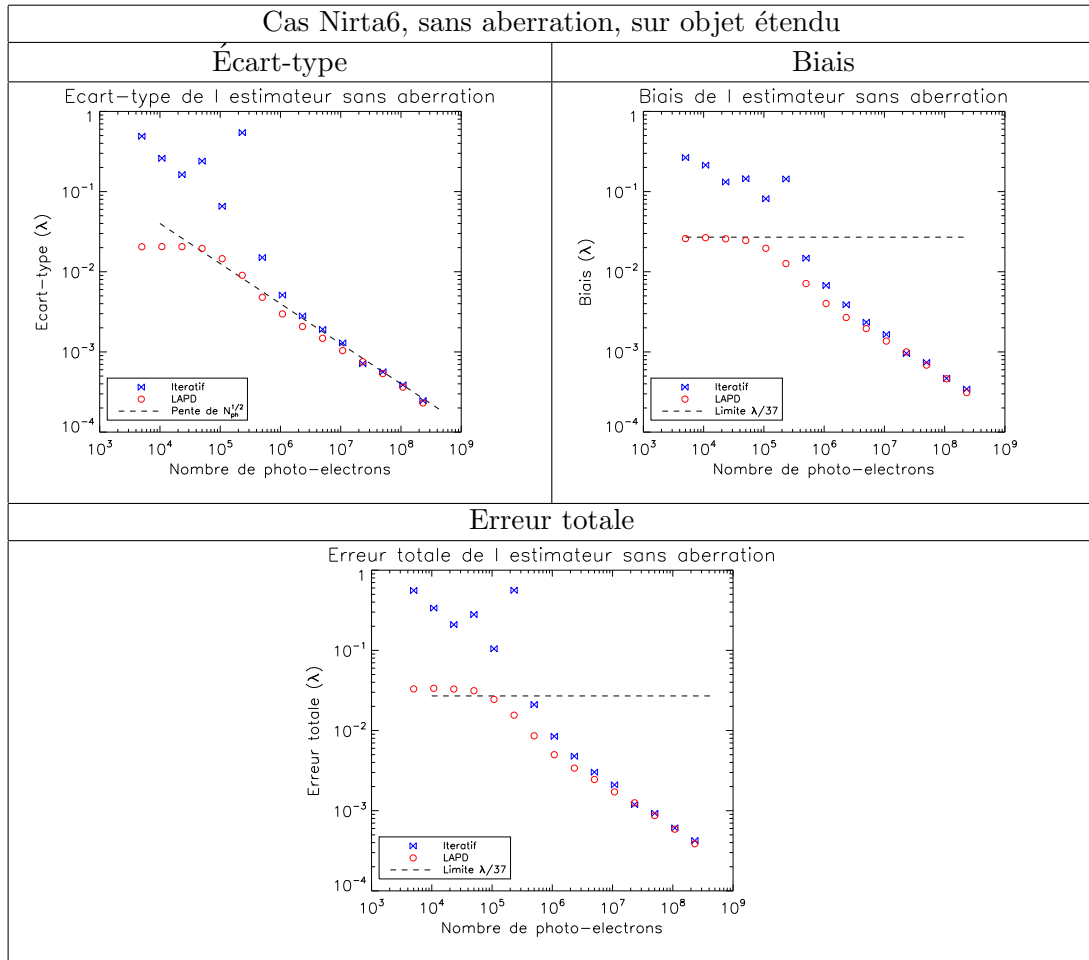


FIGURE 5.27 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un objet étendu par Nirta6, sans aberration.

Algorithme	Valeur de α
Itératif	5
LAPD	5

TABLE 5.3 – Valeur du coefficient α , obtenu par ajustement de α/\mathcal{N}_{ph} sur l'écart-type des estimateurs.

quand le flux augmente. Dans le cas de LAPD, le biais devient inférieur à la limite de cophasage fixée pour un flux d'environ 10^5 photo-électrons, soit un RSB de 1. Le biais de l'algorithme itératif devient inférieur à cette limite de cophasage pour un flux d'environ 3×10^5 , soit un RSB de 3 environ.

Le biais et l'écart-type ont une contribution similaire sur l'erreur totale. L'erreur totale sur l'estimation de LAPD devient inférieure à la limite de cophasage fixée pour un flux d'environ 10^5 , soit un RSB d'environ 1. L'erreur totale sur l'estimation de l'algorithme itératif devient inférieure à la limite de cophasage fixée à partir d'un flux

égal à 5×10^5 soit un RSB de 4.

Étudions les performances des deux algorithmes en présence de faibles aberrations (distribution de 0,2 rad RMS sur les sous-pupilles). La Fig. 5.28 présente l'évolution de l'écart-type, du biais et de l'erreur totale en fonction du flux en photo-électrons.

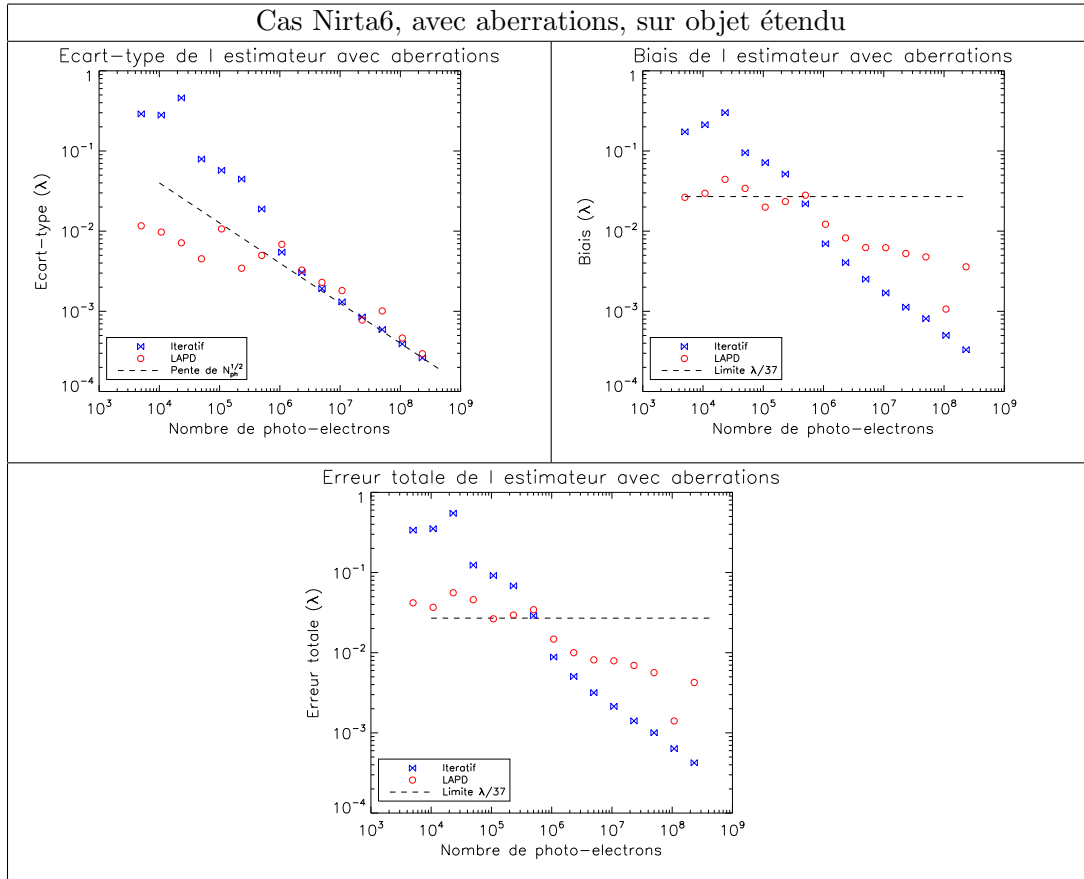


FIGURE 5.28 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d'imagerie d'un objet étendu par Nirta6, avec aberrations.

L'écart-type suit des régimes similaires (même si le régime à faible flux est plus perturbé) au cas sans aberration, avec un palier à faible flux et une décroissance en $\alpha/\sqrt{N_{ph}}$ en régime de bruit de photons. Les valeurs des coefficient α sont les mêmes que dans le cas sans aberration (tableau 5.4).

Concernant le biais, il suit tout d'abord un régime constant à faible flux, comme dans le cas sans aberration, et pour les mêmes valeurs de RSB. Cependant, si le biais de l'algorithme itératif diminue de la même manière que dans le cas sans aberration en régime de bruit photons, on observe que le biais de l'algorithme LAPD atteint un seuil d'environ $\lambda/150$ pour un flux égal à 10^5 photo-électrons, correspondant à un RSB d'environ 20.

Le biais a alors une influence prépondérante sur l'erreur totale, et la limite en régime de bruit de photons au seuil d'environ $\lambda/150$. L'erreur totale devient inférieure à la limite théorique fixée pour un flux de 5×10^5 photo-électrons par images, correspondant

5.3. CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME FAIBLE PHASE SUR OBJET ÉTENDU

à un RSB de 4.

On voit donc qu'en présence de faibles aberrations, l'algorithme itératif permet une meilleure correction en régime de bruit de photons. Cependant, LAPD permet un cophasage avec une précision de $\lambda/150$ au mieux.

NIRTA18 Intéressons-nous maintenant au cas d'un instrument à 18 sous-pupilles. La Fig. 5.29 présente la simulation des images focale et défocalisée de $0,3\lambda$, de la scène de Toulouse, par l'instrument NIRTA18, sans aberration. Ces images sont de taille 128 par 128 pixels.

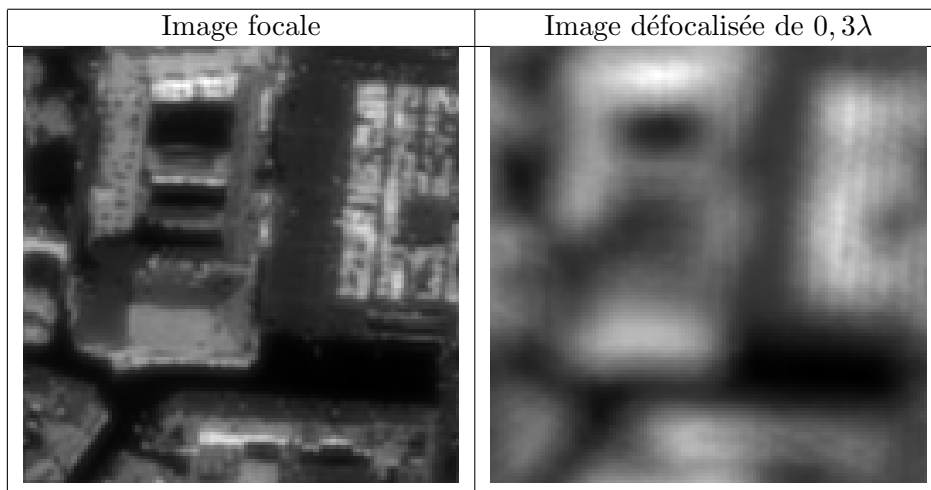


FIGURE 5.29 – Scène vue par un instrument type Nirta18.

Nous étudions les performances des algorithmes LAPD et itératif en fonction du flux. Commençons par le cas sans aberration. L'écart-type, du biais et de l'erreur totale de l'estimation des trois modes de piston tip tilt en fonction du flux en photo-électrons sont présentés Fig. 5.30.

Lorsque le flux est inférieur à 10^6 photo-électrons, soit un RSB de 7 environ, l'écart-type de LAPD suit un régime constant, avec un palier à environ $\lambda/50$, alors que l'écart-type de l'algorithme itératif décroît tout d'abord avant d'atteindre un régime constant à environ $\lambda/12$ entre environ 10^5 et 10^6 . À flux plus important, on est en régime de bruit de photon, les deux algorithmes suivent une loi en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$. Les valeurs de α sont reportées dans le tableau 5.4. On observe que les deux algorithmes présentent des performances similaires en régime de bruit de photons car le coefficient α est égal pour les deux algorithmes. Les performances sur l'instrument à 18 sous-pupilles sont moindre comparées aux performances à 6 sous-pupilles lorsque l'on compare les valeurs des coefficient α des tableaux 5.3 et 5.4. Concernant le biais, il est d'abord constant pour les deux algorithmes puis décroît quand le flux augmente. Dans le cas de LAPD, le biais devient inférieur à la limite de cophasage fixée pour un flux d'environ 10^5 photo-électrons, soit un RSB de 1. Le biais de l'algorithme itératif devient inférieur à cette limite de cophasage pour un flux d'environ 3×10^6 , soit un RSB de 13 environ. Les contributions de l'écart-type et de biais sont équivalentes dans le calcul de l'er-

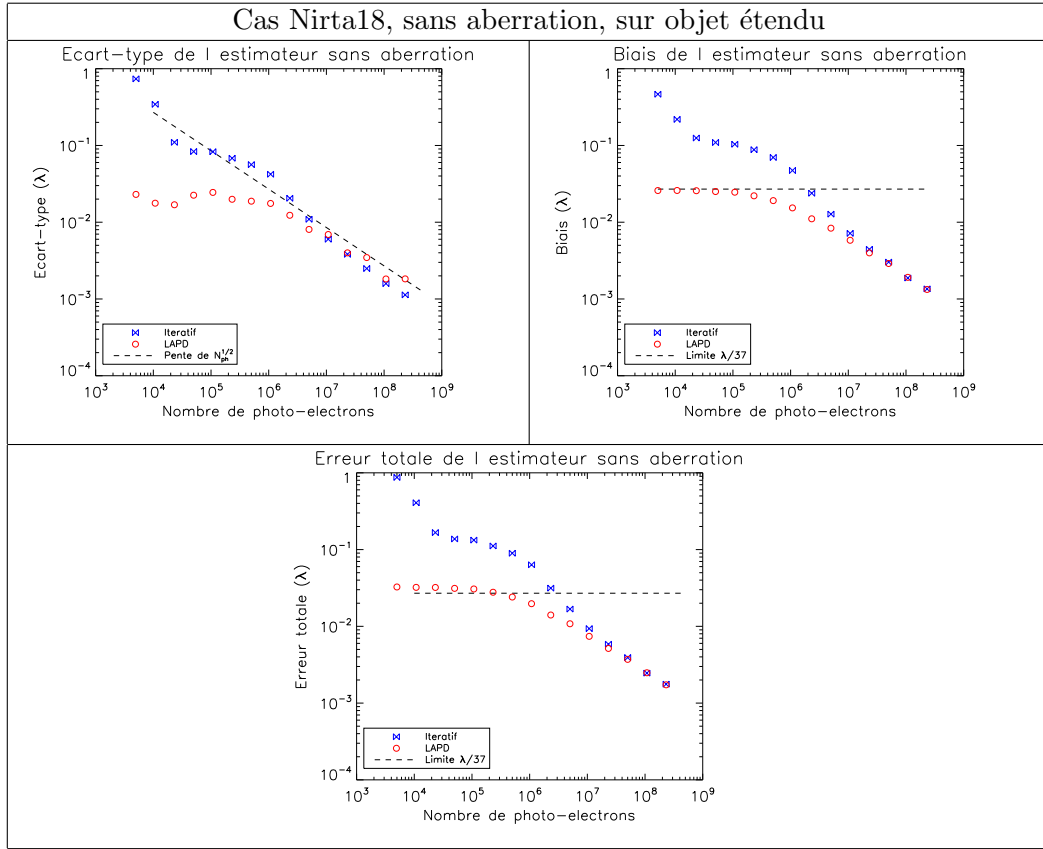


FIGURE 5.30 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas de l’observation d’une scène étendue, sans aberrations.

Algorithme	Valeur de α
Itératif	27
LAPD	27

TABLE 5.4 – Valeurs du coefficient α , obtenu par ajustement de α/\mathcal{N}_{ph} sur l’écart-type des estimateurs.

reur totale. L’erreur totale sur l’estimation de LAPD devient inférieure à la limite de cophasage fixée pour un flux d’environ 5×10^5 , soit un RSB de 4. L’erreur totale sur l’estimation de l’algorithme itératif devient inférieure à la limite de cophasage fixée à partir d’un flux égal à 2×10^6 soit un RSB de 10.

Considérons maintenant toujours le cas d’un instrument à 18 sous-pupilles, mais en présence de faibles aberrations. La Fig. 5.31 présente l’évolution de l’écart-type, du biais et de l’erreur totale de l’estimation des trois modes de piston tip tilt en fonction du flux en photo-électrons.

L’écart-type des deux algorithmes suit des régimes similaires au cas sans aberration, avec un palier à faible flux et une décroissance en $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$ en régime de bruit de photons. Les valeurs des coefficient α sont les mêmes que dans le cas sans aberration.

5.4. CONCLUSION DU CHAPITRE

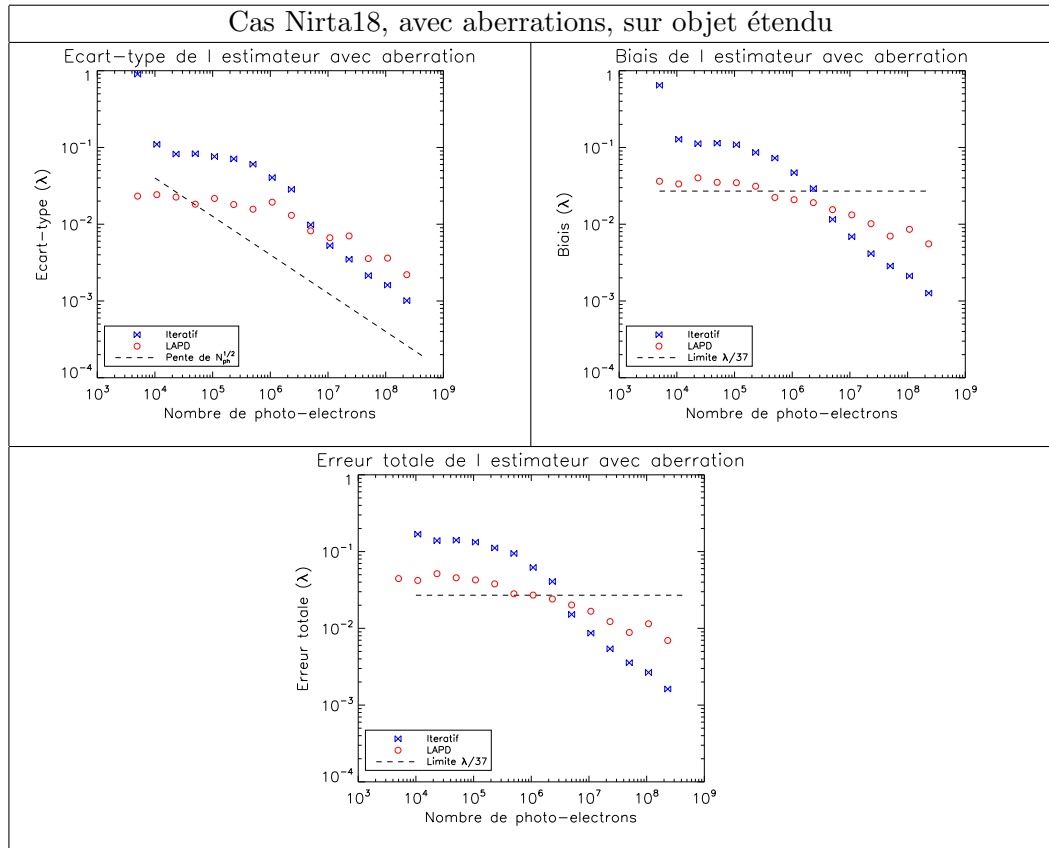


FIGURE 5.31 – Propagation du bruit de LAPD, dans le cas d’imagerie d’un objet étendu par Nirta18, avec aberrations.

Le biais est d’abord constant en fonction du flux, comme dans le cas sans aberration, et pour les mêmes valeurs de RSB. Cependant, on observe que le biais de l’algorithme LAPD atteint un seuil d’environ $\lambda/100$ quand le flux augmente et que l’on est dans le régime de bruit de photons.

Le biais a alors une influence prépondérante sur l’erreur totale, et la limite en régime de bruit de photons au seuil d’environ $\lambda/100$. L’erreur totale devient inférieure à la limite théorique fixée pour un flux de 5×10^6 photo-électrons par images, correspondant à un RSB de 16.

5.4 Conclusion du chapitre

Nous avons évalué les performances de l’algorithme LAPD. Les algorithmes classiques de diversité de phase sont lourds en calculs et ne permettent pas de potentielle utilisation dans une boucle fermée en temps-réel. La linéarisation de la FTO dans le cadre de LAPD permet d’obtenir une solution analytique et à coût calculatoire bas (deux TF et une inversion matricelle).

On a pu voir que cet estimateur présente un biais (dû à la linéarisation) inférieur à $\lambda/64$ (par mode de Zernike estimé) tant que l’erreur introduite reste inférieure à

$0,11\lambda$ pour un RSB pixel d'environ 4 dans le cadre de l'imagerie d'un point source. Cette amplitude d'accrochage correspond théoriquement au résidu (en tip/tilt) offert par l'algorithme ELASTIC présenté dans le chapitre 3, ce qui assure théoriquement un interfaçage efficace entre les deux algorithmes. Par ailleurs, on a pu voir que LAPD pouvait être utilisé de manière itérative, ce qui permet de doubler voire tripler l'amplitude d'accrochage de l'estimateur.

Dans le cadre de l'imagerie d'une scène étendue, on a vu que LAPD était théoriquement capable de fournir une estimation dont l'erreur est inférieure à $\lambda/37$ (en prenant en considération l'estimation des trois premiers modes de Zernike) pour un RSB pixel supérieur à 4 en présence d'aberrations pour une configuration à 6 sous-pupilles. Les performances dans le cas à 18 sous-pupilles sont un peu en deçà, à savoir que la l'erreur de l'estimation est inférieure à $\lambda/37$ pour un RSB pixel de l'ordre de 16 en présence d'aberrations. On voit donc que le nombre de sous pupilles a une influence sur l'erreur de l'estimation dans le cas de l'imagerie d'une scène étendue.

Nous voulons maintenant valider expérimentalement l'algorithme LAPD, et tâcher de l'interfacer avec l'algorithme ELASTIC afin de valider une chaîne d'alignement géométrique et alignement fin sur point source sur le miroir segmenté du banc BRISE.

Chapitre 6

Validation expérimentale : alignement d'un miroir segmenté

Contents

6.1	Étalonnage du banc BRISE	146
6.1.1	Alignement du banc	146
6.1.2	Conformité modèle expérimental/modèle numérique	147
6.2	Validation expérimentale de ELASTIC-1	150
6.2.1	Implantation sur le banc	150
6.2.2	Boucle fermée	151
6.2.3	Résistance au bruit	153
6.2.4	Superposition des sous-FEPs	154
6.3	Validation expérimentale de ELASTIC-2	155
6.3.1	Implantation sur le banc	155
6.3.2	Boucle fermée	155
6.4	Validation expérimentale de LAPD	156
6.4.1	Implantation sur le banc	156
6.4.2	Boucle fermée	157
6.4.3	Résistance au bruit	159
6.5	Conclusion du chapitre	160

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté des algorithmes permettant l'estimation des erreurs de piston, tip et tilt pouvant affecter des systèmes multi-pupilles puis nous avons analysé leurs performances. Ces différents algorithmes ont pour but d'être interfacés au cours des différentes étapes d'alignement d'un instrument multi-pupille. Dans la section 2.4 nous avons présenté le banc BRISE, muni d'un miroir segmenté permettant la validation d'algorithmes de cophasage. Le but de ce chapitre est de proposer une validation expérimentale de chacun des algorithmes présentés précédemment, et surtout de valider leur enchaînement les uns avec les autres. Pour ce faire, nous commençons dans la section 6.1 par proposer un étalonnage du banc BRISE, afin de fixer les paramètres utiles à sa modélisation numérique, au moyen de MASTIC, pour les différents algorithmes. Les sections 6.2 et 6.3 proposent respectivement la validation expérimentale des algorithmes ELASTIC-1 et ELASTIC-2, utiles à l'estimation et la correction des grandes erreurs de tip/tilt. La section 6.4 propose l'analyse de performances de l'algorithme LAPD, utile à l'estimation et la correction fine des erreurs de piston/tip/tilt de petite amplitude.

6.1 Étalonnage du banc BRISE

Nous avons présenté les différentes parties du banc dans la section 2.4. La configuration optique ayant déjà été fixée, la marge de manœuvre sur les différents éléments optiques du banc était très limitée. Nous proposons ici un réaligement des voies focale et défocalisée du module de diversité, avant d'étalonner les différents paramètres du banc qui seront utiles pour avoir un modèle numérique en adéquation avec la réalité.

6.1.1 Alignement du banc

Sur les deux lentilles en sortie du module de diversité, seule l'une d'elles possède une monture équipée d'une vis micro-métrique. Le but ici va être de faire en sorte de former deux images focales sur la camera, puis la lentille équipée de la vis micro-métrique sera chariotée pour introduire la défocalisation voulue. La lentille utilisée pour la voie focale sera notée \mathcal{L}_f , la lentille utilisée pour la voie défocalisée sera notée \mathcal{L}_d .

6.1.1.1 Alignement plan focal des deux lentilles

Afin de placer la caméra dans le plan focal image des deux lentilles, nous avons utilisé un miroir plan de diamètre 100 mm. En effet, comme on va le voir, nous avons pris comme indicateur le maximum d'intensité pour trouver le plan focal image des lentilles. Utiliser un miroir de plus grand diamètre que les segments de NIRTA permet entre autres de concentrer plus d'énergie dans un espace plus confiné. Afin de ne pas déplacer le miroir multi-pupille, le montage effectué est le suivant :

- Une lame semi-réfléchissante à 45 degrés est ajoutée devant le miroir segmenté,
- un miroir plan de 100 mm est placé en réflexion de la lame semi-réfléchissante.

Le faisceau ayant été collimaté par la parabole hors-axe, nous plaçons le miroir plan à n'importe quelle distance de la lame semi-réfléchissante. Une fois le miroir plan aligné sur la source, le miroir segmenté est caché afin de n'avoir sur le détecteur que

les deux images provenant du miroir plan. Nous chariotons ensuite la caméra sur son rail afin d'obtenir un maximum d'intensité sur l'image par la lentille \mathcal{L}_f . Une fois que ceci est fait, la voie focale est alors alignée, nous chariotons la lentille \mathcal{L}_d afin d'obtenir, encore une fois, un maximum d'intensité. Ainsi, on a deux plans focaux sur la caméra. Nous pouvons maintenant définir la distance à introduire sur la vis micro-métrique de la lentille \mathcal{L}_d afin d'obtenir la défocalisation souhaitée.

6.1.1.2 Alignement du plan défocalisé

Nous souhaitons maintenant introduire une défocalisation sur la voie de la lentille \mathcal{L}_d . Nous faisons le choix de sélectionner la défocalisation déterminée dans le chapitre 5 pour un instrument à 6 sous-pupilles, à savoir de $0,3\lambda$ RMS. On peut relier la distance de défocalisation dF , en mm, et l'amplitude du coefficient de défocalisation sur la grande pupille A_4 , en radians RMS comme tel :

$$dF = 8\sqrt{3} \left(\frac{F}{D} \right)^2 \frac{\lambda}{\pi} a_4 \quad (6.1)$$

Calculons dF avec les paramètres suivants :

- $F = F_{parabole} \times f_2/f_1 = 1250 \times 2 = 2500$ mm
- $D = 56$ mm
- $\lambda = 635$ nm
- $A_4 = 0,3 \times 2\pi = 1,88$ rad

L'application numérique de l'Eq. (6.1) nous donne 10,19 mm. On introduit donc sur la monture micro-métrique +10,19 mm.

6.1.2 Conformité modèle expérimental/modèle numérique

Une fois le banc aligné, nous voulons adapter notre modélisation numérique (faite au moyen de MASTIC) au banc. Nous retirons alors le miroir plan et la lame séparatrice afin d'imager le miroir NIRTA sur la caméra. Vérifions alors la définition, ou l'identification, des segments et l'orientation du miroir.

6.1.2.1 Pupille et orientation

Comme nous avons pu le voir dans la section 2.4, la dilution du miroir segmenté est de 1,25. Les segments sont numérotés comme illustré sur la Fig. 6.1.

Nous vérifions l'orientation des bases par rapport aux axes de la caméra, en cas de symétries engendrées par réflexion, en faisant interférer successivement différentes paires de segments (Fig.6.2). En effet la direction des franges d'interférences entre les sous-FEPs nous indique l'orientation des bases formées par les segments concernés.

Observons tout d'abord les franges formées par la paire de segment 1 et 2 (la base 1-2). Elles n'ont pas l'orientation attendue, si nous considérons l'orientation des bases de la Fig. 6.1. Il en est de même pour les bases 3-4, 1-6 et 4-5. La base 5-6 étant horizontale, on obtient bien des franges verticales. L'explication à ceci est un retournement de la pupille due aux multiples réflexions dans le système optique. En

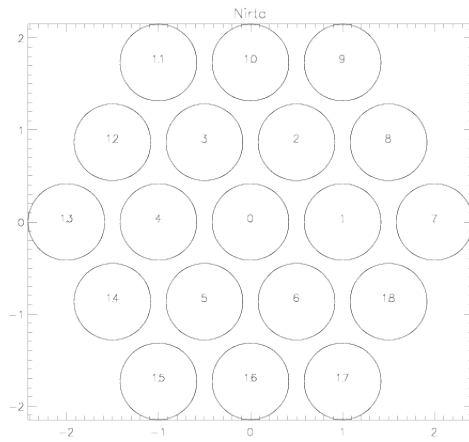


FIGURE 6.1 – Vue de face du miroir NIRTA, comme Fig. 2.4.

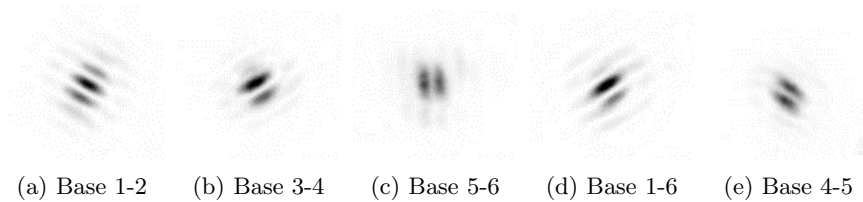


FIGURE 6.2 – Figures d'interférences entre différents segment du miroir NIRTA.

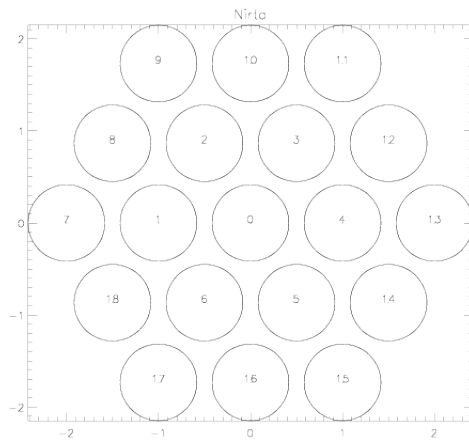


FIGURE 6.3 – Identification des segments du miroir Nirta vus par la caméra.

effet, la pupille vue par la caméra est symétrique à la pupille réelle selon un axe vertical. La Fig. 6.3 montre l'agencement des segments vu par la caméra.

La pupille de la Fig. 6.3 est celle modélisée dans la structure *pup*, définie dans la section 2.2.1. Il a été montré dans les travaux de [Denolle, 2013] que la pupille globale présente une rotation différentielle par rapport à la caméra comme illustré Fig.6.4 matérialisée par l'angle θ . Cet angle a été estimé à $\pi/120$ rad, c'est donc cette valeur que nous retiendrons lors de la modélisation de la pupille.

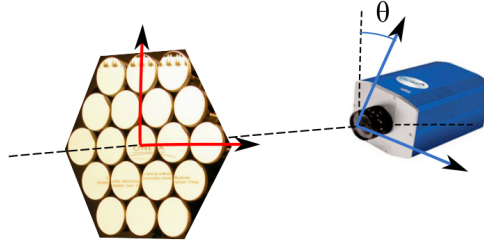


FIGURE 6.4 – Rotation différentielle entre Nirta et la camera.

6.1.2.2 Étalonage de l'échantillonnage

Cherchons maintenant à évaluer l'échantillonnage de chaque segment sur la caméra. Pour ce faire, nous faisons le choix d'étudier la FTM d'un segment, et tracer la FTM d'un segment issue du modèle pour des valeurs d'échantillonnage différentes. Le graphe 6.5 présente la coupe transverse selon les deux axes de la FTM expérimentale et la coupe transverse de la FTM modélisée. La FTM modélisée qui correspond le plus à la réalité est celle avec un sur-échantillonnage de 8,05 soit un échantillonnage de 16,1. C'est donc la valeur que nous retiendrons pour n_s dans la structure *pep*.

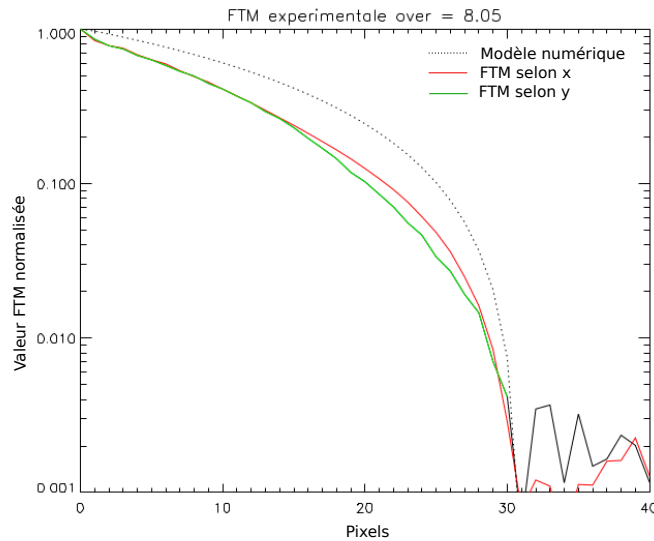


FIGURE 6.5 – Graphe de la FTM expérimentale selon deux coupes transversales et FTM simulée avec un sur-échantillonnage de 8,05.

6.1.2.3 Étalonage du bruit de lecture et du bruit de fond

Nous souhaitons maintenant évaluer le bruit de lecture expérimental. On rappelle que le constructeur indique un bruit de lecture avec un écart-type de 5 ADU RMS. Afin d'évaluer en même temps ce bruit de lecture et le bruit de fond de la caméra, nous moyennons une centaine d'images sur le banc, sans source lumineuse, pour le temps de pose de 10 ms. On obtient le bruit de fond en moyennant la valeur de chaque

pixel ; on trouve environ 270 ADU. En ce qui concerne le bruit de lecture, on calcule l'écart-type des valeurs des pixels. On trouve environ 0,5 ADU, soit un bruit de lecture de $0,5 \times \sqrt{100}=5$ ADU. Ce résultat est bien en accord avec les données constructeur. La moyenne des 100 images est acquise au début de chaque session de mesures sur le banc, et sont retranchées aux images acquises et envoyées à l'algorithme d'estimation par le logiciel Labview.

6.2 Validation expérimentale de ELASTIC-1

Nous interfaçons maintenant l'algorithme ELASTIC-1 avec le logiciel de contrôle du banc (LabView), afin de le valider et évaluer ses performances en fonction du flux.

6.2.1 Implantation sur le banc

Tout d'abord, précisons que les segments 7 à 18 (couronne extérieure) ne sont pas exploitables à cause de problèmes sur les amplificateurs haute-tension qui pilotent les actionneurs d'une part, et certains actionneurs d'autre part qui n'ont pas eu l'occasion d'être changés durant la thèse. Par ailleurs, les systèmes segmentés que nous avons présentés section 1.2 étaient dépourvus de segment central. Aussi, nous effectuons la validation expérimentale sur les segments 1 à 6, soit la couronne centrale. La Fig. 6.6 présente à gauche la pupille simulée pour la validation expérimentale de ELASTIC-1, et à droite la simulation du point d'arrivée attendu, la position de parking.

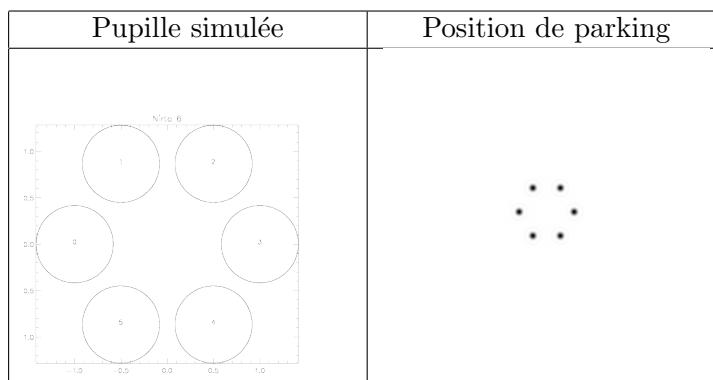


FIGURE 6.6 – Gauche : simulation du plan pupille adapté au banc BRISE. Droite : position de parking, objectif de ELASTIC-1.

Nous avons discuté de la défocalisation à introduire sur le module de diversité dans la section 6.1.1.2. Un problème auquel nous avons été confronté était la faible amplitude de la vis micro-métrique de la monture de la lentille \mathcal{L}_d . Nous avons exposé dans le chapitre 3 que ELASTIC-1 avait besoin d'une grande diversité afin de pouvoir séparer les auto-taches dans l'image de corrélation. Une défocalisation d'une grande amplitude ne pouvant pas pratiquement être introduite entre les deux plans, nous avons eu l'idée de la pseudo-défocalisation, qui présente les avantages discutés section 3.1.1 mais qui nous a surtout permis d'implanter ELASTIC-1 sur

6.2. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE ELASTIC-1

le banc. Rappelons que la pseudo-défocalisation consiste en l'application de tip/tilt sur chaque segment, imitant une défocalisation globale. On aura donc juste besoin de la voie focale pour nos acquisitions d'images qui se feront de la manière suivante : acquisition d'une première image que l'on qualifera de focale, puis application de la pseudo-défocalisation sur les segments et acquisition de l'image qui sera qualifiée d'image pseudo-défocalisée. Ces deux images, de dimensions 512 par 512 pixels chacune, sont alors fournies à l'algorithme grâce à l'IHM qui effectue un appel à IDL. Les aberrations estimées sont alors rendues à l'IHM (en nanomètres), qui convertit en tensions à appliquer sur les segments grâce à la matrice de commande des segments. L'amplitude de la pseudo-défocalisation choisie est de $1,3\lambda$ comme expliqué section 3.3.3.4, et le décalage fréquentiel est de 1 pour permettre une estimation sur tout le détecteur.

6.2.2 Boucle fermée

On asservit le miroir segmenté NIRTA au moyen d'une boucle fermée. Le principe de l'asservissement sur les miroirs est résumé sur la Fig. 6.7, présentant les différents vecteurs d'aberrations a et les différentes étapes de la boucle fermée. On part donc d'une aberration $a_{k,n}^0$ à $t = 0$ avec :

$$a_{k,n}^0 = a_{k,n}^0 - a_{k,n}^{park}, \quad (6.2)$$

où $a_{k,n}^0$ est le vecteur d'aberration absolue et $a_{k,n}^{park}$ contient les valeurs de tip/tilt associées aux positions de parking des différentes sous-pupilles. $a_{k,n}^0$ est donc l'erreur en tip/tilt relative aux positions de parking. On cherche à faire tendre $a_{k,n}^0$ vers 0. Les deux images acquises sont ensuite envoyées à ELASTIC-1 qui rend un vecteur d'estimées $\hat{a}_{k,n}^0$. On réinjecte alors $\hat{a}_{k,n}^0$ dans le miroir avec un gain ici égal à 0,5. On corrige donc au fur et à mesure l'erreur de départ jusqu'à atteindre un point stable, qui pour nous ici est donc le parking. L'écart par rapport à la position attendue nous donne alors la précision à laquelle ELASTIC-1 asservit le système.

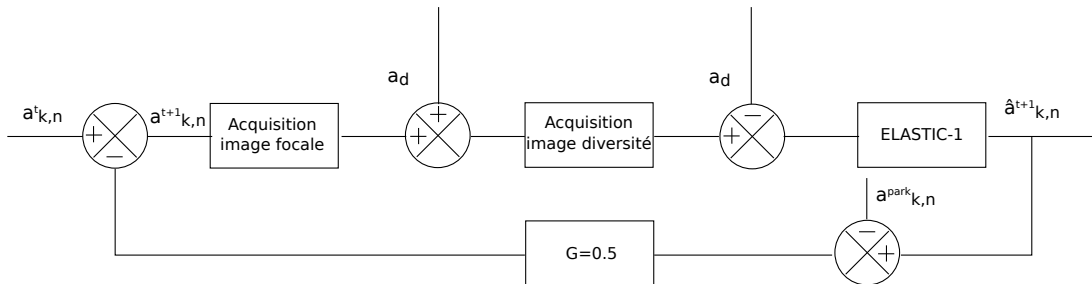


FIGURE 6.7 – Principe de la boucle fermée avec ELASTIC-1 au cours du temps.

Ainsi, on part de deux images focale et pseudo-défocalisée Fig. 6.8 à l'itération 0. On observe dans l'image focale (image du haut) la dispersion des sous-FEPs provenant

chacun des segments, traduction de la présence d'aberrations de tip/tilt de grande amplitude. L'image pseudo-défocalisée (dessous) présente ces mêmes sous-FEPs animées d'un tip/tilt supplémentaire, introduit par la pseudo-défocalisation appliquée sur les segments. Le but d'ELASTIC-1 est donc d'organiser les sous-FEPs en position de parking comme présentée sur la droite de la Fig. 6.6. Nous présentons certaines itérations au cours de la boucle fermée Fig. 6.8. On peut voir qu'en 5 itérations de la boucle d'asservissement les sous-FEPs se retrouvent dans la position attendue.

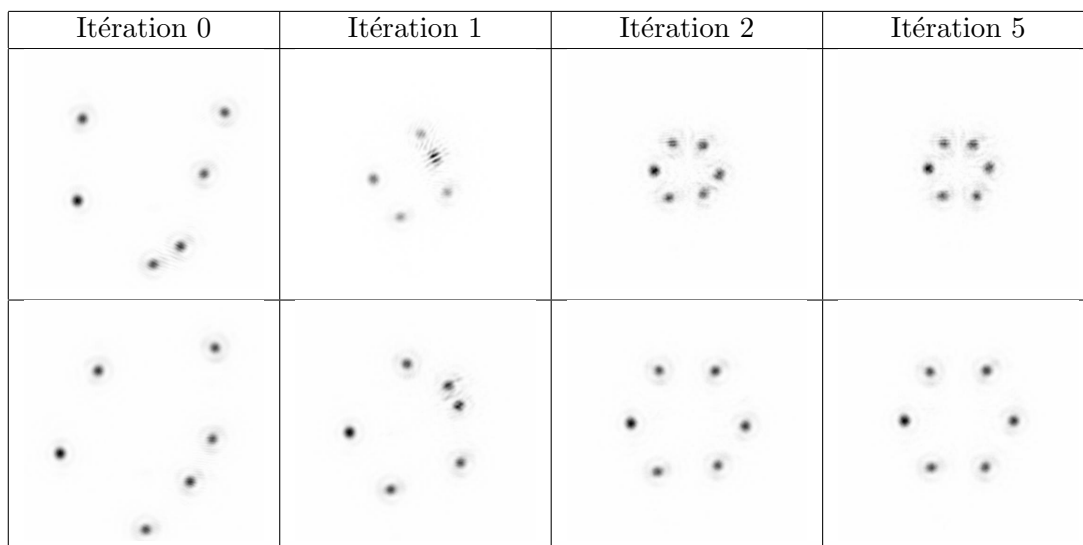
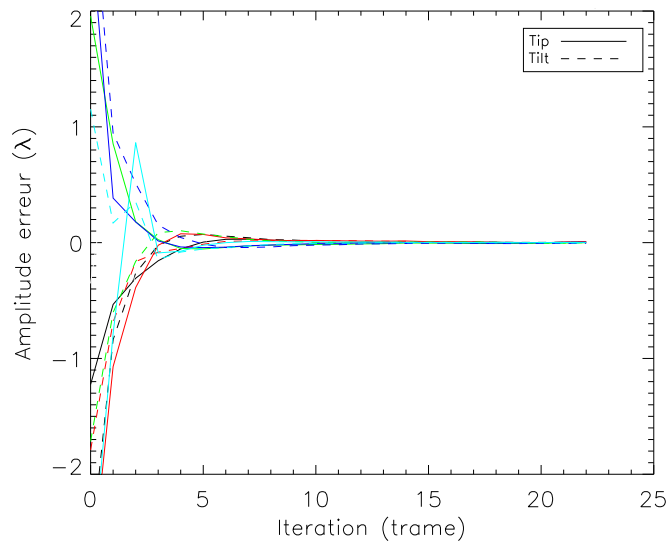


FIGURE 6.8 – Boucle fermée ELASTIC-1.

Afin de connaître la précision du contrôle en boucle fermée, on doit regarder l'évolution des coefficients $\hat{a}'_{k,n}$ au cours du temps. Nous présentons l'évolution de ces coefficients en fonction de la trame sur la Fig. 6.9.

Le graphe de la Fig. 6.9 montre que l'on part d'une position fortement perturbée en tip/tilt, avec des erreurs allant au-delà de 2λ . On observe une décroissance rapide de l'erreur, pour arriver dans un état stable autour de 0, donc autour de la position de parking. Nous calculons la dispersion des erreurs, à savoir l'écart-type tel que définit Eq. (2.10) moyenné entre les itérations 10 et 20. Cette dispersion est alors d'environ $\lambda/150$; le flux est de 7×10^6 photo-électrons par image soit un RSB de 36 environ (nous considérons environ 30 pixels éclairés par sous-FEP). Comparons avec les performances atteintes en simulation dans la section 3.18. Les résultats entre NIRTA6 diluée et NIRTA6 compacte étant similaires, nous présumons qu'ils doivent théoriquement l'être également avec le cas de dilution de 1,25. Ces simulations indiquaient une erreur théorique de l'ordre de $\lambda/10^4$ pour un flux de 7×10^6 et un RON de 5. On note donc une dégradation de la performance entre les résultats théoriques et expérimentaux.

La section 3.3.3.6 indique qu'une erreur sur l'adéquation entre la pseudo-défocalisation réelle et celle modélisée numériquement entraînait une dégradation des performances de ELASTIC-1. Prenant en compte la présence d'hystérésis sur

FIGURE 6.9 – Graphe de $\hat{a}_{k,n}^t$ fonction de la trame.

les actionneurs et le fait que la pseudo-défocalisation est appliquée puis ôtée lors de chaque acquisition d'image, on s'attend donc à avoir une petite erreur (non constante) sur la pseudo-défocalisation à chaque trame. Ceci combiné à d'autres potentielles erreurs sur la modélisation numérique du banc expliquent alors la perte de performances observée. Néanmoins, une précision à moins de $\lambda/100$ est largement suffisante pour l'application que l'on souhaite, à savoir l'estimation des grands tip/tilt avec une précision inférieure à $\lambda/8$.

Effectuons maintenant un test de résistance au bruit, afin de quantifier la répétabilité de ELASTIC-1 sur le banc pour différentes valeurs de flux.

6.2.3 Résistance au bruit

Évaluons les performances en terme de répétabilité de ELASTIC-1 sur le banc BRISE, pour différentes valeurs de flux. Pour ce faire, on reprend le même protocole que dans la section 3.3.3.5, à savoir on se place dans la configuration de parking, et on effectue 50 tirages indépendants d'estimation de tip/tilt sans bouger les actionneurs (sauf pour la modulation). Nous traçons la répétabilité de l'estimation en fonction de l'illumination sur la Fig. 6.10.

On voit que pour un flux égal à 2×10^5 , soit un RSB d'environ 6, la répétabilité est déjà de $\lambda/25$. Elle diminue ensuite en suivant une loi proportionnelle à $\alpha/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$, avec $\alpha \approx 22$, pour atteindre $\lambda/100$ pour une illumination de 6×10^6 , soit un RSB d'environ 33. En prolongeant la loi en $22/\sqrt{\mathcal{N}_{ph}}$, on constate qu'elle recoupe la limite $\lambda/8$ pour un flux d'environ 3×10^4 correspondant à un RSB d'environ 2. Ainsi, dans les conditions expérimentales nous estimons que la limite de précision est atteinte à partir d'un RSB d'environ 2. Comme expliqué précédemment, l'erreur sur la pseudo-défocalisation due à l'hystérésis et les erreurs potentielles sur le modèle numérique peuvent dégrader les

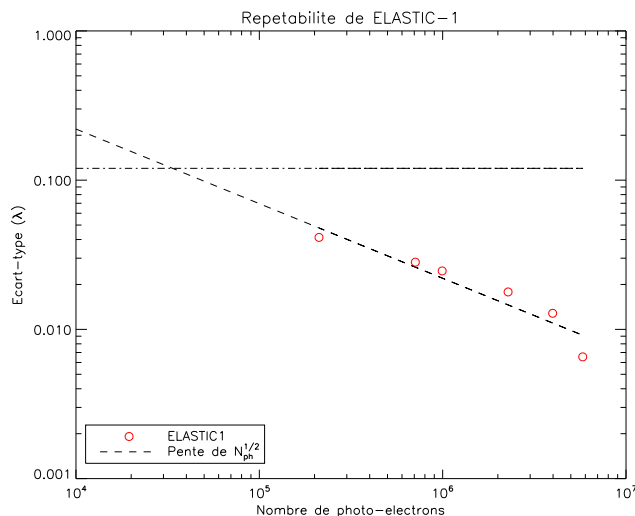


FIGURE 6.10 – Répétabilité ELASTIC-1.

performances de ELASTIC-1, ce qui explique la raison pour laquelle on ne retrouve pas des résultats similaires à ceux de la section 3.3.3.5. Néanmoins, cette précision suffit théoriquement pour permettre de rentrer dans le mode fin.

6.2.4 Superposition des sous-FEPs

Les sous-FEPs étant maintenant à des positions connues (jeux d’aberrations de tip/tilt correspondant à $a_{k,n}^{park}$), on peut appliquer aux miroirs des tensions correspondant à $-a_{k,n}^{park}$ afin de superposer les sous-FEPs. La Fig. 6.11 montre le résultat de cette superposition.

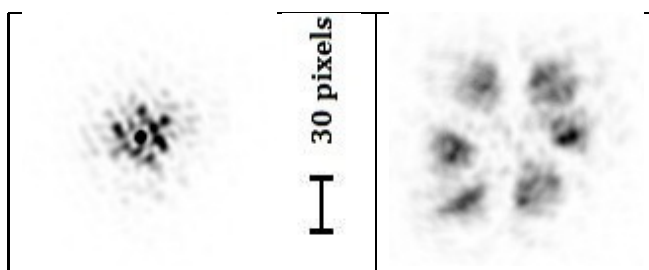


FIGURE 6.11 – Superposition des sous-FEPs, image focale (gauche) et pseudo-défocalisée (droite).

On observe sur l’image focale (gauche Fig. 6.11) que les sous-FEPs sont superposées, et qu’il y a présence d’interférences. En effet, la longueur de cohérence de la source est bien supérieure aux erreurs de piston entre les segments. Nous pouvons estimer, grâce à l’échelle en pixels, que les sous-FEPs sont confinées dans ± 7 pixels autour du centre. Converti en tip/tilt cela correspond à une erreur plus petite que $\lambda/8$ RMS, étant donné que la taille d’une sous-FEP est de 16 pixels (correspondant à un tip/tilt

de $\lambda/4$). Cette configuration peut donc servir de point de départ pour les algorithmes de correction des résidus d'erreurs.

6.3 Validation expérimentale de ELASTIC-2

Nous souhaitons maintenant valider expérimentalement l'algorithme ELASTIC-2, présenté section 3.4 comme une *extension* de ELASTIC-1.

6.3.1 Implantation sur le banc

L'implantation de ELASTIC-2 est similaire à celle de ELASTIC-1, présentée section 6.2.1, à la différence que l'amplitude de pseudo-défocalisation est de $1,5\lambda$. Nous testons donc ELASTIC-2 sur 6 segments du miroir NIRTA. La pupille simulée est présentée sur la Fig. 6.6 à gauche. ELASTIC-2 a été présenté comme étant capable d'amener l'instrument d'un état présentant de grandes erreurs de tip/tilt (similaire à l'itération 0 de la Fig. 6.7) à un état où les images d'un point par chaque segment se superposent (similaire à la Fig. 6.11 à gauche).

6.3.2 Boucle fermée

Une nouvelle fois, nous asservissons le miroir NIRTA au moyen d'une boucle fermée, dont le principe est le même que celui présenté pour ELASTIC-1 section 6.2.2. La différence réside dans le fait que, n'ayant plus besoin d'amener le système en position de parking, $a_{k,n}^{park} = 0$.

Nous partons ainsi des deux images focale et pseudo-défocalisée respectivement à la ligne du haut et du bas sur la Fig. 6.12, à l'itération 0. Les sous-FEPs sont donc dispersées à l'itération 0, et on peut voir qu'au fil des itérations elles se rapprochent jusqu'à superposition dans le plan focal à l'itération 10.

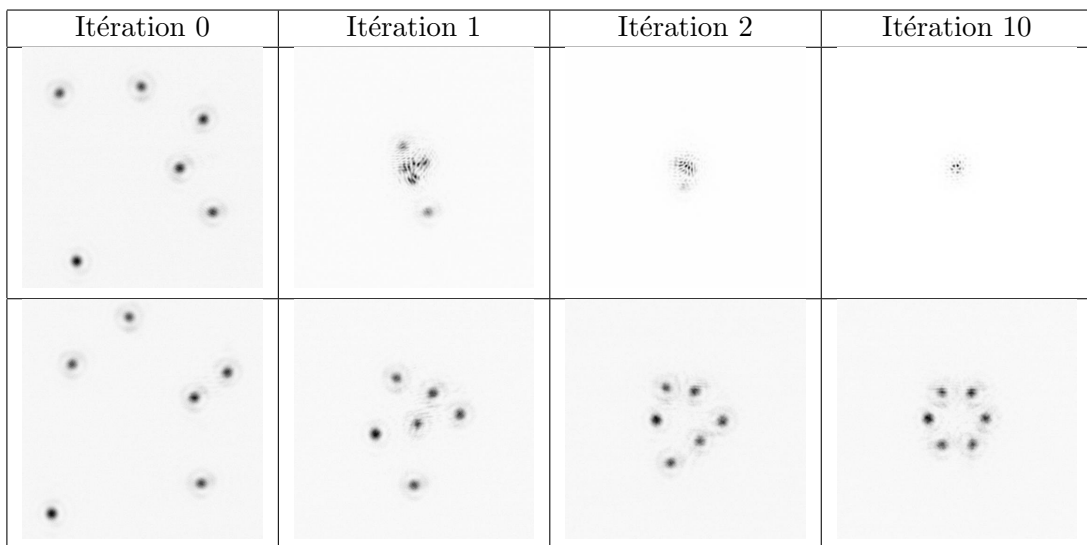


FIGURE 6.12 – Boucle fermée ELASTIC-2.

Nous étudions l'évolution de l'estimation $\hat{a}_{k,n}^t$ par ELASTIC-2 en fonction de la trame sur la Fig. 6.13. On peut voir que l'erreur en tip/tilt décroît rapidement avec les itérations pour atteindre un état stable autour d'une erreur de 0λ , soit la superposition. Nous calculons l'écart-type tel que définit Eq. (2.10), moyenné entre les itérations 9 et 19 où l'estimation est stable, et trouvons environ $\lambda/25$, ce qui est largement suffisant pour atteindre la limite d'accrochage des algorithmes fins.

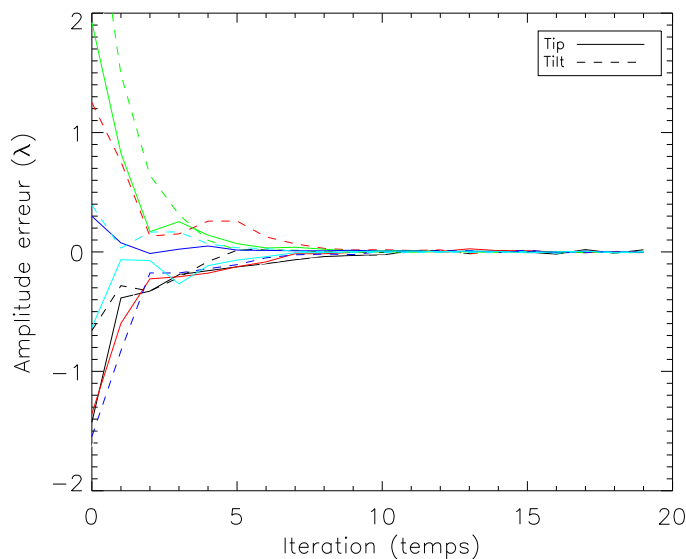


FIGURE 6.13 – Évolution de l'estimation des tip/tilt $\hat{a}_{k,n}^t$ en fonction de la trame.

6.4 Validation expérimentale de LAPD

Nous allons maintenant valider expérimentalement LAPD, et quantifier ses performances en fonction du flux sur le banc BRISE.

6.4.1 Implantation sur le banc

La validation expérimentale s'effectue, comme dans le cas de ELASTIC, sur les 6 segments de la couronne intérieure du miroir segmenté NIRTA. Nous présentons sur la gauche de la Fig. 6.14 la pupille simulée, et à droite le point d'arrivée visé, à savoir l'image de l'instrument cophasé, avec une erreur totale à moins de $\lambda/37$.

Rappelons que la phase de diversité à utiliser pour LAPD est une petite défocalisation. Nous exploitons la défocalisation mise en œuvre sur le banc, d'amplitude $0,3\lambda$ RMS. Ainsi, contrairement à ELASTIC, la diversité est spatiale ; les deux images utiles à l'algorithme sont acquises en même temps sur les deux parties du capteur. L'image globale est fournie à LAPD, via l'IHM, qui se charge de sélectionner les deux images focale et défocalisée de dimensions 128 par 128 pixels chacune. Ces deux images sont recentrées l'une par rapport à l'autre grâce à un calcul de centre de

6.4. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LAPD

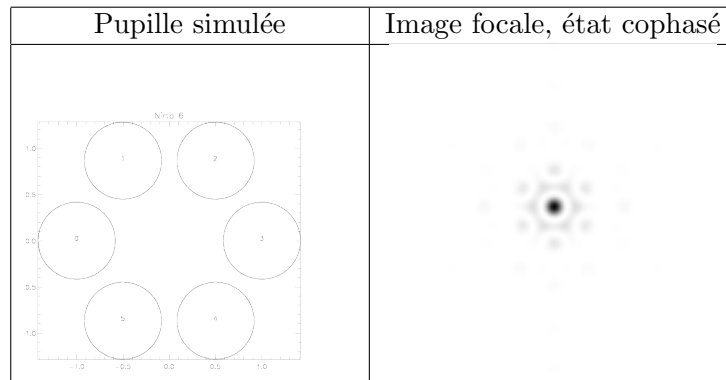


FIGURE 6.14 – Gauche : pupille simulée adaptée au banc BRISE. Droite : simulation de l'image par l'instrument simulé cophasé.

gravité. Les aberrations de piston, tip et tilt sont alors estimées par LAPD et données à l'IHM, qui comme précédemment convertit ces aberrations en tensions à appliquer sur les segments grâce à la matrice de commande des segments.

6.4.2 Boucle fermée

Comme dans le cas d'ELASTIC, les miroirs sont asservis au moyen d'une boucle de contrôle, dont la Fig. 6.15 décrit le fonctionnement.

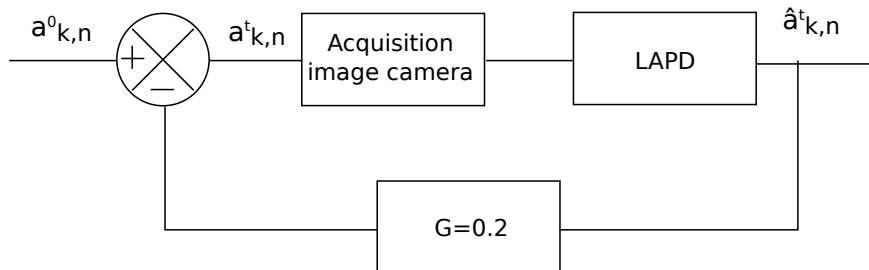


FIGURE 6.15 – Principe de la boucle fermée avec LAPD.

Nous partons d'une aberration $a_{k,n}^0$ à $t=0$, correspondant à un point d'arrivée après superposition grâce à ELASTIC. Les deux images sont alors simultanément acquises et envoyées à LAPD. L'estimation fournie au module de contrôle par LAPD est alors soustraite au miroir avec un gain de 0,2. On corrige petit à petit l'erreur de départ jusqu'à atteindre le point de stabilité visé, à savoir l'état cophasé du système. L'écart par rapport à la position nulle nous donne la précision à laquelle LAPD asservit le système. Certaines itérations de la boucle fermée sont présentées sur la Fig. 6.16.

Nous retrouvons à l'itération 0 un état où l'instrument présente principalement des erreurs de piston, mais également des résidus d'erreurs de tip et tilt. On peut voir qu'après plusieurs itérations, le motif attendu illustré Fig.6.14 est retrouvé. Nous avons donc réussi, à partir du point d'arrivée de la procédure ELASTIC, à cophaser le miroir segmenté NIRTA.

Étudions la précision du contrôle en boucle fermée. Pour cela, regardons l'évolution

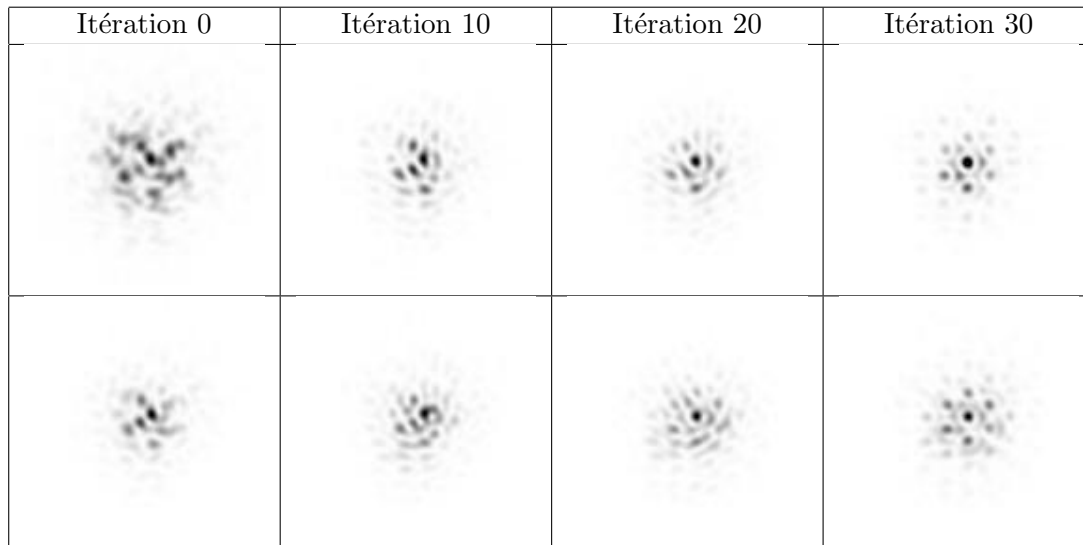


FIGURE 6.16 – Échantillonnage de quelques images acquises lors de la boucle fermée LAPD. Haut : image focale. Bas : image défocalisée.

des coefficients $\hat{a}_{k,n}^t$ au cours du temps. Le graphe de la Fig. 6.17 présente l'évolution de la phase résiduelle en fonction du temps (en trames). Nous pouvons constater qu'à l'itération 0, les erreurs sont déjà très faibles (globalement inférieures à $\lambda/10$). Elle décroissent ensuite et la distribution atteint un écart-type, calculé entre les itérations 20 et 55 de la même manière que pour ELASTIC-1, d'environ $\lambda/75$ pour un flux de 10^6 photo-électrons, soit un RSB de 33 environ (en considérant que le flux est concentré dans un carré de 30 par 30 pixels). Comme nous avons pu le voir sur l'image de l'itération 30, le système atteint l'état cophasé.

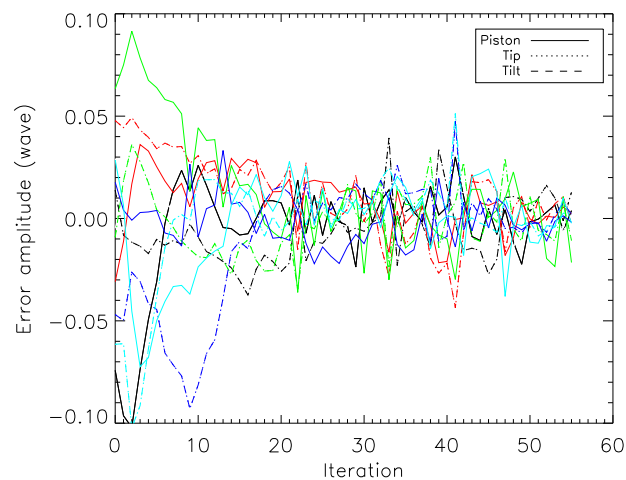


FIGURE 6.17 – Graphe de l'estimation fournie par LAPD en fonction de la trame.

6.4. VALIDATION EXPÉRIMENTALE DE LAPD

Effectuons maintenant une quantification des performances sur le banc, de LAPD, pour différentes valeurs de flux.

6.4.3 Résistance au bruit

Le protocole pour évaluer les performances en répétabilité reste le même que pour la section 5.2.3; nous amenons le système dans un état cophasé, puis effectuons 50 estimations indépendantes de piston, tip et tilt pour plusieurs valeurs d'illumination. La Fig. 6.18 présente l'écart-type sur les tirages en fonction du flux en photo-électrons.

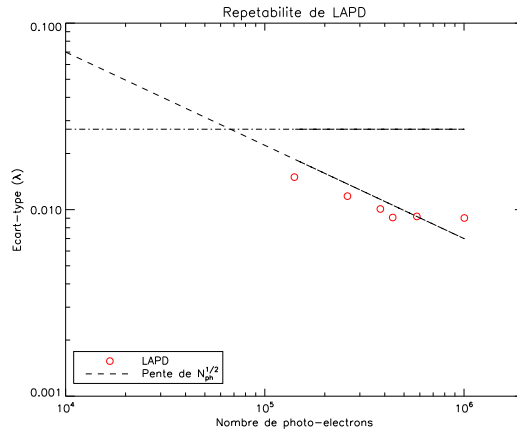


FIGURE 6.18 – Répétabilité LAPD.

Dès $1,5 \times 10^5$ photo-électrons, l'écart-type est légèrement inférieur à $\lambda/50$, et diminue ensuite en suivant une loi proportionnelle à $\alpha/\sqrt{N_{ph}}$, avec α estimé à environ 7. L'écart-type atteint une valeur légèrement inférieure à $\lambda/100$ pour un nombre de photo-électrons de 10^6 , soit un RSB d'environ 33. Dans un premier temps, nous remarquons une différence entre les écart-types calculés en boucle ouverte et en boucle fermée pour un flux similaire (10^6 photo-électrons). En effet, en boucle fermée le calcul donnait un écart-type d'environ $\lambda/75$. La différence est causée par l'erreur introduite par les actionneurs qui reçoivent une tension non nulle durant la boucle fermée. Sachant que les variances des erreurs de l'estimation et des actionneurs s'additionnent, nous estimons l'erreur due aux actionneurs à environ $\lambda/110$.

Dans un second temps, des erreurs sur l'adéquation entre le modèle numérique et le banc peuvent être à l'origine de la dégradation de performances par rapport au cas théorique qui prédisait un écart-type de l'ordre de $10^{-4}\lambda$ pour un même flux. En prolongeant la loi en $7/\sqrt{N_{ph}}$, on voit que cette dernière recoupe la limite à $\lambda/37$ pour un flux d'environ 7×10^4 photo-électrons, soit un RSB d'environ 8,5. Nous estimons donc que la limite fixée pour considérer notre système expérimental comme cophasé est atteinte à partir d'un RSB d'environ 8,5.

6.5 Conclusion du chapitre

Nous avons effectué l'interfaçage des algorithmes ELASTIC et LAPD sur le banc, afin d'en tester les performances sur le miroir segmenté NIRTA. L'algorithme ELASTIC (dans ses deux dérivations ELASTIC-1 et ELASTIC-2) exploite deux images qui sont situées en plan focal, la diversité souhaitée, la pseudo-défocalisation, étant appliquée directement sur les segments. Quant à LAPD, il exploite deux images simultanément acquises : une image focale et une image défocalisée spatialement.

ELASTIC-1 a prouvé qu'il était capable d'amener le système d'un état présentant de grandes erreurs de tip/tilt aléatoires et inconnues, à un état dit de "parking" où les images de chaque segment sont placées dans le plan focal de manière ordonnée et connue. Nous avons pu voir que la répétabilité de l'algorithme était inférieure à $\lambda/25$ pour un RSB pixel supérieur 6, ce qui est largement satisfaisant si l'on prend en compte que les actionneurs présentent de l'hystérésis, donc une erreur à chaque mouvement (et donc un mauvais étalonnage/contrôle de la pseudo-défocalisation entraînant un biais de l'estimation). Par ailleurs, nous avons pu montrer qu'il était possible, à partir de cette position de parking connue, de superposer les images de chaque segment au moyen d'une seule commande sur les actionneurs. Nous avons estimé visuellement un résidu d'erreur inférieur à $\lambda/8$, la limite d'accrochage des algorithmes fins en tip/tilt.

ELASTIC-2 a pour sa part prouvé qu'il était capable de d'amener le système d'un état fortement désaligné à un état où les sous-FEPs sont superposées dans le plan focal. La dispersion expérimentale des estimations de tip/tilt était d'environ $\lambda/25$ lors de la superposition, ce qui est théoriquement suffisant pour rentrer dans le mode d'alignement fin.

Nous avons prouvé que le résidu d'erreur après ELASTIC-2 était suffisamment petit pour que LAPD puisse prendre le relais et effectuer l'alignement fin. En effet la superposition après ELASTIC-2 a servi de point de départ à LAPD, et l'algorithme a pu corriger les erreurs résiduelles avec une répétabilité de $\lambda/100$, ce qui est largement en dessous de $\lambda/37$ visé. L'objet étendu du banc n'a pas pu être installé à temps lors de l'écriture de ce manuscrit et n'a donc pas pu être effectuée.

Nous avons donc validé la chaîne d'alignement et cophasage du miroir NIRTA, dans des conditions similaires à un système réel, au moyen d'outils permettant l'alignement géométrique (ELASTIC-1 et ELASTIC-2) puis l'alignement fin (LAPD) en temps réel, sur un point source à très grande longueur de cohérence.

CONCLUSION

CONCLUSION

La segmentation du miroir primaire ou bien l'association de plusieurs télescopes en un interféromètre sont des techniques incontournables afin de construire des instruments imageurs toujours plus puissants, en terme de résolution spatiale. C'est pourquoi ces techniques sont actuellement en plein essor, et de nombreuses pistes sont explorées pour l'alignement des instruments au sol ou encore dans l'espace. Notre travail durant cette thèse a été de développer, tester et assembler des outils pour l'alignement et le cophasage d'un instrument multi-pupille en temps-réel.

Nous avons tout d'abord proposé la méthode ELASTIC (Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation), permettant de retrouver l'erreur de tip-tilt associée à chacune des sous-pupilles quelle que soit la position de son image d'un point source sur le détecteur : l'alignement géométrique. Cet algorithme présente l'intérêt d'une implantation simple car il ne repose que sur l'acquisition de deux images dans le plan focal, avec une diversité de phase appliquée directement sur les sous-pupilles entre l'acquisition des deux images. La caractérisation numérique de ELASTIC sur différentes configurations de pupilles segmentées a montré qu'il était possible d'estimer les tip/tilts de grande amplitude avec une précision meilleure que $\lambda/8$. Cette précision permet d'une part la superposition de l'image d'un point source par chacune des sous-pupilles dans le plan focal afin de les faire interférer, et alors corriger les erreurs de piston. D'autre part, un résidu de $\lambda/8$ correspond à la zone d'accrochage typique des algorithmes d'alignement fin.

Nous avons ensuite présenté la méthode de SPRING (Sub-aperture Piston Reduction y Interferences in Non-redundant Groups) qui exploite la possibilité d'ELASTIC de superposer différents groupes de sous-pupilles non redondants, dans les deux images de diversité. Ainsi, nous avons montré qu'il était possible d'appliquer une rampe de piston sur les sous-pupilles, tout en gardant le contrôle de la superposition, pour trouver le maximum de visibilité des groupes superposés. Ceci devrait permettre une correction des grandes erreurs de piston, l'étape d'alignement interférométrique, à coût calculatoire faible et sans besoin de matériel supplémentaire.

Nous avons par la suite présenté une évaluation de performances de l'algorithme LAPD (Linearized Analytic Phase Diversity), permettant la mesure fine des erreurs de piston, tip et tilt : l'alignement fin ou cophasage. LAPD est un algorithme de diversité de phase et permet, grâce à une linéarisation de la FTO, de fournir une solution analytique comparé aux algorithmes de diversité de phase dit « classique », dont le coût calculatoire est important. Nous avons également conduit l'évaluation de performances dans le cas de l'observation d'un point source, pour les applications astrophysiques, et dans le cas d'objet étendu, pour les applications d'observation de scènes étendues sur Terre. Nous avons pu voir dans les deux cas que la mesure est précise à moins de $\lambda/30$ dès lors que l'erreur introduite est inférieure à $\lambda/8$.

Pour finir, nous avons présenté la validation expérimentale de ELASTIC (sans ses deux dérivations) et LAPD sur un instrument segmenté à 6 sous-pupilles, dans le cas de l'observation d'un point source (à bande étroite). L'idée était de valider leur enchaînement afin de démontrer la possibilité de les interfacer dans une procédure d'alignement d'instruments multi-pupilles. Ainsi, nous avons prouvé

expérimentalement que ELASTIC était capable d'amener l'instrument d'un état présentant de grandes erreurs de tip/tilt aléatoires et inconnues, à une superposition avec une précision inférieure à $\lambda/8$. On a pu voir que le résidu d'erreur après ELASTIC était suffisamment petit pour que LAPD prenne le relais et exploite les images après l'alignement géométrique pour effectuer l'alignement fin. Nous avons donc démontré expérimentalement l'ensemble de la chaîne d'alignement sur bande étroite.

Ces travaux ont donc proposé des solutions simples, sans besoin de matériel supplémentaire (en plus des actionneurs des segments et du détecteur), et à bas coût calculatoire pour la problématique de l'alignement d'instruments multi-pupilles. Nous avons présenté des algorithmes qui peuvent fonctionner de manière complètement autonome, donc idéale pour un système embarqué, et avec la possibilité d'être exploités en temps réel pour la mesure des erreurs d'alignement sur les instruments multi-pupilles.

Dans un avenir proche, il s'agirait de valider expérimentalement la méthode SPRING en boucle fermée, puis toute la chaîne d'alignement en bande large et co-phasage sur objet étendu. À plus long terme, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Tout d'abord la caractérisation des différents algorithmes pour un plus grand nombre de sous-pupilles, comme dans le cas de l'E-ELT, du TMT ou encore de LUVOIR.

Dans le cadre d'observation au sol, il faudra également étudier leurs performances en présence de turbulence atmosphérique. L'algorithme ELASTIC devrait pouvoir effectuer l'alignement géométrique sans besoin d'une boucle adaptative, donc avec une précision à λ/r_0 , avec r_0 le paramètre de Fried. Quand au co-phasage avec LAPD, il faudra étudier ses performances en présence de résidus d'erreurs d'une boucle d'optique adaptative.

D'autres évaluations de performances, dans le cadre d'observations spatiales, pourraient être menées. Ces évaluations pourraient en prenant en compte les problématiques liées au spatial comme le sous-échantillonnage de la FEP de l'instrument ou bien dans un cas d'observation d'objets polychromatiques.

ANNEXES

Annexe A

Outils mathématique : la décomposition en valeurs singulières d'une matrice

Au cours de ce manuscrit, l'inversion de matrices de modes sera une étape indispensable pour la résolution de problèmes inverses. S'il est relativement aisé d'inverser une matrice carrée inversible au moyen du Pivot de Gauss ou de la recherche d'éléments propres, cela devient plus compliqué lorsque la matrice est rectangulaire. L'outil utile à l'inversion d'une matrice rectangulaire est la SVD (pour *Singular Value Decomposition*).

Faire une SVD, c'est rechercher les éléments singuliers selon les deux dimensions de la matrice, ainsi que ses valeurs singulières. La SVD repose sur le postulat que pour chaque matrice M de dimension (I,J) , il existe au moins une factorisation de la forme :

$$M = USV^H, \quad (\text{A.1})$$

avec V^H la matrice transposée (et conjuguée si V est complexe) de V , et :

- La matrice est U une matrice de changement de base dans l'espace d'arrivée, de dimension $[I,I]$. Elle contient les vecteurs singuliers dits de sortie. Cette matrice peut être complexe.
- La matrice S est une matrice rectangulaire de dimension $[I,J]$. Sur sa diagonale principale, elle contient les valeurs singulières, réelles, classées par ordre décroissant. Chaque valeur singulière indique le poids de chaque mode associé dans l'application linéaire de M . Plus cette valeur est élevée, plus le mode est "vu". Le reste de la matrice est composé de zéros.
- La matrice V est une matrice de changement de base de l'espace de départ, de dimension $[J,J]$. Elle contient les vecteurs singuliers dits d'entrée. Cette matrice peut être complexe.

Le calcul de ce qu'on appelle l'inverse généralisée ou pseudo-inverse de la matrice M se calcule de la manière suivante :

$$M^\dagger = (M^H M)^{-1} M^H, \quad (\text{A.2})$$

La SVD permet de calculer cette matrice pseudo-inverse en écrivant

$$M^\dagger = VS^{-1}U^H, \quad (\text{A.3})$$

avec

$$S^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{S_{i,j}} & \text{quand } S_{i,j} \neq 0, \\ 0 & \text{quand } S_{i,j} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En ce qui concerne les valeurs singulières, on voit que si l'une d'elle est très faible, lors du calcul de S^{-1} elle va alors avoir un poids prépondérant. En présence de bruit dans les mesures, l'estimation est alors faussée. Afin d'éviter un tel phénomène, on fait le choix de filtrer les valeurs singulières. En effet, lorsque le problème inverse est surdimensionné, c'est-à-dire qu'il y a plus de mesures que d'inconnues, on peut réduire le nombre de valeurs singulières à au moins le nombre d'inconnues.

Une grandeur importante, garante de la qualité de l'inversion, est le conditionnement. Il est défini comme le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière utilisées lors de l'inversion. En conséquence, le problème est qualifié de « bien posé » lorsque ce rapport est proche de 1. Inversement, un problème est mal posé lorsque le conditionnement est de l'ordre de quelques puissances de 10. De fait, le filtrage des valeurs singulières permet de « purifier » les modes d'intérêts en s'affranchissant des modes qui pourraient amener des erreurs ou qui feraient augmenter considérablement le conditionnement.

Annexe B

Décomposition de la défocalisation pour un instrument multi-pupille

Considérons un instrument à 6 sous-pupilles identiques de rayon R , indexées par n . Le diamètre circonscrit de la pupille globale est noté B , et la distance entre les centres des sous-pupilles est notée P comme illustré Fig. B.1.

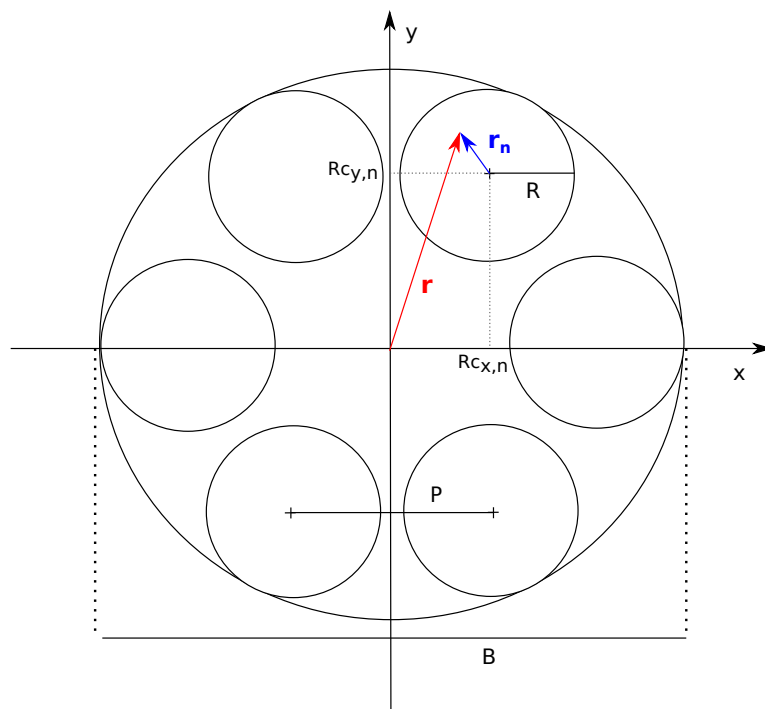


FIGURE B.1 – Schéma de configuration multi-pupille.

La position \mathbf{r} d'un point dans la pupille est liée à la position locale, \mathbf{r}_n , dans une sous-pupille par :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + R\mathbf{c}_n, \quad (\text{B.1})$$

ANNEXE B. DÉCOMPOSITION DE LA DÉFOCALISATION POUR UN
INSTRUMENT MULTI-PUPILLE

avec $\mathbf{c}_n = (c_{x,n}, c_{y,n})$ les coordonnées, réduites par le rayon pupillaire, de la sous-pupille n . On définit les coordonnées réduites :

$$\mathbf{u}_n \triangleq \frac{\mathbf{r}_n}{R}, \quad \mathbf{u}' \triangleq \frac{\mathbf{r}}{B/2}, \quad (\text{B.2})$$

avec \mathbf{u}_n la coordonnée réduite par le rayon dans chaque sous-pupille et \mathbf{u}' les coordonnées réduites dans la pupille globale. Ainsi, on a :

$$\mathbf{u}' = \frac{2R}{B} (\mathbf{u}_n + \mathbf{c}_n). \quad (\text{B.3})$$

Ainsi en remplaçant B.3 dans l'équation (1.24), la défocalisation globale peut s'écrire :

$$Z_4(\mathbf{u}') = \sqrt{3} \left[2 \frac{4R^2}{B^2} (\mathbf{u}_n^2 + 2 \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{c}_n + \mathbf{c}_n^2) - 1 \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4R^2}{B^2} Z_4(\mathbf{u}_n) + 2\sqrt{3} \frac{2R^2}{B} \left[\frac{c_{x,n}}{B/2} Z_2(\mathbf{u}_n) + \frac{c_{y,n}}{B/2} Z_3(\mathbf{u}_n) \right] \\ &+ \sqrt{3} \left[\frac{2R^2}{B^2/4} \mathbf{c}_n^2 + \frac{4R^2}{B^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Le tip (ou tilt), induit par une défocalisation globale, sur une sous-pupille s'écrit :

$$a_{2,n} = 2\sqrt{3} \frac{4R^2}{B^2} c_{x,n} A_4. \quad (\text{B.6})$$

Annexe C

Conversion des coefficients de tip-tilt

Considérons une sous-pupille de rayon R . Nous allons chercher à exprimer une erreur de basculement, tip ou tilt sur la sous-pupille comme illustré sur la Fig. C.1.

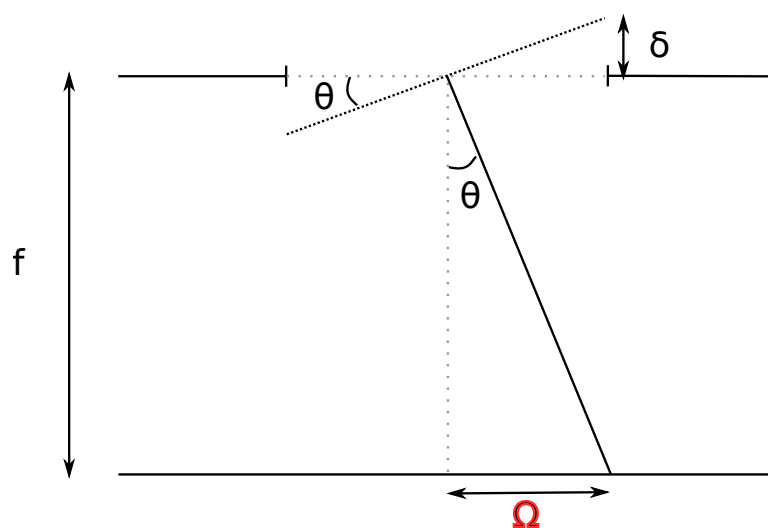


FIGURE C.1 – Schéma d'une erreur de basculement (tip ou tilt).

Une erreur de tip ou de tilt peut être exprimée de plusieurs manières :

- Comme un angle θ dans l'espace objet,
- comme un coefficient de Zernike a_2 ou a_3 en longueur d'onde,
- comme un déplacement (noté Ω sur la Fig. C.1) en quantité de k_p pixels (avec un pas de pixel noté p_{pix}), donc $\Omega = k_p \times p_{pix}$.

Les Eqs. (1.22) et (1.23) nous indiquent qu'en bord de pupille, la distance notée δ sur la Fig. C.1 vaut $\delta = 2a_m$ avec a_m le coefficient de tip ou de tilt exprimé en nanomètres ($m = 2$ ou 3). Nous rappelons que le coefficient a_m peut être exprimé en radians, en nanomètre ou bien en longueur d'onde (λ ou encore écrit *wave*). La

ANNEXE C. CONVERSION DES COEFFICIENTS DE TIP-TILT

correspondance entre les différentes unités est rappelée ici :

$$a_m \text{ (nm)} = \frac{a_m \text{ (rad)}}{2\pi} \times \lambda = a_m \text{ (wave)} \lambda \quad (\text{C.1})$$

Pour la suite, nous exprimerons a_m exclusivement en *wave*. Par construction géométrique, nous pouvons calculer θ (en radians) :

$$\theta = \frac{2a_m\lambda}{R}, \quad (\text{C.2})$$

ou encore :

$$\theta = \frac{\Omega}{F}, \quad (\text{C.3})$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$a_m = \frac{R\theta}{2\lambda} = \frac{R\Omega}{2\lambda F} = \frac{k_p}{4n_s} \quad (\text{C.4})$$

avec $n_s = \frac{\lambda F}{2R_{ppix}}$ le coefficient d'échantillonnage d'une sous-pupille, qui correspond bien à la largeur à mi-hauteur d'une sous-FEP sur le détecteur, en pixels. Il vient que la largeur à mi-hauteur (ou FWHM pour *Full Width at Half Maximum*) exprimée en coefficient de tip ou tilt est $\Delta a_m = 1/4$.

Annexe D

Amplitude de diversité pour la séparation des auto-taches pour ELASTIC

Considérons un zoom de l'image de corrélation de la Fig.3.7 de la ligne 2, soit pour une pseudo-défocalisation de 2 rad.

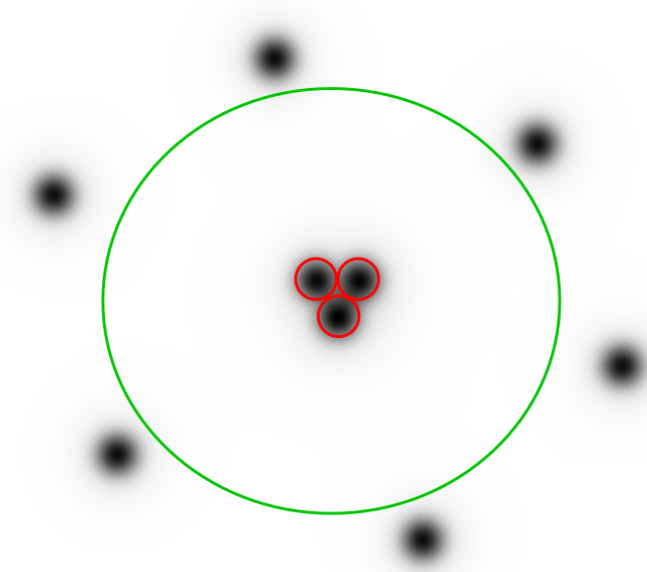


FIGURE D.1 – Schéma explicatif pour la séparation des auto-taches.

Les auto-taches sont contenues dans le cercle vert. On considère les auto-taches comme séparables lorsque la distance entre deux est juste égale à leur diamètre. Par exemple, sur la Fig.3.7 on a dessiné le contour de ces auto-taches, on voit qu'elles sont jointives.

La largeur à mi-hauteur d'une auto-tache peut être estimée numériquement en

ANNEXE D. AMPLITUDE DE DIVERSITÉ POUR LA SÉPARATION DES
AUTO-TACHES POUR ELASTIC

étudiant l'auto-corrélation d'une tâche d'Airy de largeur à mi-hauteur de $\theta = \lambda/2R$, correspondant à un tip ou un tilt de $1/4$ de longueur d'onde (d'après l'annexe C). On trouve alors une largeur à mi-hauteur de $\theta = (2\lambda)/(3R)$ rad pour une auto-tache. Converti en amplitude de tip ou de tilt, d'après l'Eq. C.4, on obtient $1/3$ de longueur d'onde. Le tip (ou tilt) induit par la diversité doit donc au minimum être égal à $1/3$. On reprend donc l'Eq. (B.6), avec $c_{x,n} = P$ (avec P la distance entre le centre de deux sous-pupilles voisines), et en l'égalisant à $1/3$. On obtient donc une amplitude de A_4 (en longueur d'onde) pour laquelle les auto-taches sont séparables entre elles :

$$A_4 = \frac{1}{6\sqrt{3}} \frac{B^2}{4R^2} \frac{1}{P}. \quad (\text{D.1})$$

Annexe E

Publication pour le Journal of
Optical Society of America A :
Large amplitude tip/tilt
estimation by geometric diversity
for multiple-aperture telescopes

Large amplitude tip/tilt estimation by geometric diversity for multiple-aperture telescopes

S. VIEVARD¹, F. CASSAING^{1,*}, AND L. M. MUGNIER¹

¹Onera – The French Aerospace Lab, F-92322, Châtillon, France

*Corresponding author: frederic.cassaing@onera.fr

Compiled July 10, 2017

A novel method nicknamed ELASTIC is proposed for the alignment of multiple-aperture telescopes, in particular segmented telescopes. It only needs the acquisition of two diversity images of an unresolved source, and is based on the computation of a modified, frequency-shifted, cross-spectrum. It provides a polychromatic large range tip/tilt estimation with the existing hardware and an inexpensive noniterative unsupervised algorithm. Its performance is studied and optimized by means of simulations. They show that with 5000 photo-electrons/sub-aperture/frame and 1024×1024 pixel images, residues are within the capture range of interferometric phasing algorithms such as phase diversity. The closed-loop alignment of a 6 sub-aperture mirror provides an experimental demonstration of the effectiveness of the method. © 2017

OCIS codes: (070.0070) Fourier optics and signal processing, (220.1080) Active or adaptive optics, (010.7350) Wave-front sensing, (100.5070) Phase retrieval, (110.5100) Phased-array imaging systems, (220.1140) Alignment.

<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

1. INTRODUCTION

The resolution of a telescope is ultimately limited by its aperture diameter, but the size of mirrors is bounded by current technology to about 10 m on the ground and to a few meters in space. To overcome this limitation, interferometry consists in making an array of sub-apertures interfere; the resulting instrument is called an interferometer or a multi-aperture telescope.

The sub-apertures can either be telescopes per se, as in current ground-based interferometers [1–3], or segments of a common primary mirror, such as in the Keck telescopes, the future extremely large telescopes [4–7]) or large ground collectors (Cherenkov Telescope Array [8]).

So far, this technique has been operational only on ground-based telescopes, but interferometers have long been forecast for high-resolution spaceborne astronomy, for the soon-to-be-launched James Webb Space Telescope (JWST) [9] or other projects [10–13], and for Earth observation [14, 15].

To reach the diffraction limit, all the sub-apertures of such a telescope must be phased to within a small fraction of the wavelength. A critical sub-system of interferometers is thus the Cophasing Sensor (CS), whose goal is to measure with this kind of precision the relative positioning errors between the sub-apertures (differential piston and tip/tilt), which are the specific low-order aberrations of an interferometer and the main sources of wave-front degradation (Fig. 1).

Focal-plane wavefront sensing is an elegant solution to mea-

sure the wavefront degradation. Since the near-focal images of any source taken by a 2D camera show distortions when the telescope is not aligned (Fig. 1), these misalignments can be retrieved by solving the associated inverse problem. The phase retrieval technique, based on the analysis of the sole focal-plane image, is generally not sufficient to retrieve piston and tip/tilt without ambiguity except in specific cases [16]. The phase diversity technique [17, 18], typically based on a focal and a slightly defocused images, removes all ambiguities and operates even on unknown extended sources.

The fact that phase diversity can be used as a CS on a segmented aperture telescope was recognized very early [19], and extensively studied for the JWST [20–23], for Darwin [24], and for the European Extremely Large Telescope (E-ELT) [25] in particular. Additionally, in contrast with most pupil-plane-based devices, phase diversity enjoys three appealing characteristics: firstly, it is appropriate for a large number of sub-apertures, because the hardware complexity remains essentially independent of the number of sub-apertures. Secondly, the CS is included in the main imaging detector, simplifying the hardware and minimizing differential paths. Thirdly, it can be used on very extended objects. These properties are strong motivations for the choice of phase diversity as a CS, even when looking at an unresolved source.

The measurement and correction described above of piston-tip-tilt by means of a CS to within a small fraction of λ is hereafter called the *fine phasing mode*. This mode assumes that the tip/tilts

are smaller than typically $\lambda/8$ (see Eq.A36) and the differential pistons are within the coherence length (cf [16]). However, during the first alignment steps (after integration or deployment), the disturbances are much larger than a few micrometers.

A preliminary *geometrical alignment mode* is thus mandatory, to efficiently drive the telescope into the reduced capture range of an interferometric CS. This mode consists in an incoherent superimposition of the focal plane images from each sub-aperture. Only then can the relative piston errors between sub-apertures be measured and corrected for the fine phasing to operate. Using only one image, such as the common focal image of an unresolved source, the geometrical alignment is impossible at least when all sub-apertures are identical since their Point Spread Functions (or sub-PSFs) all have the same shape. Even if these sub-PSFs are well separated in the field with clearly identifiable positions, it is impossible to associate them with their respective sub-apertures.

The solution selected by JWST to identify the sub-PSFs is temporal modulation [26], but the measurement time scales with the number of sub-apertures. A method called Geometrical Phase Retrieval (GPR), with the ability to increase the JWST fine algorithm capture range, was developed [27], refined [28], experimentally demonstrated [29] and should be implemented in the JWST [30]. Based on geometrical optics, it uses typically four to six defocused images per segment. The JWST geometrical alignment mode, called image-stacking operation [31], was originally forecast to last around 1 week of commissioning time, but the GPR should provide substantial time savings [29].

In this paper, a novel method for the geometrical alignment of the subapertures is proposed. The alignment error is encoded by each sub-PSF's shift in the focal plane image. As can be seen on Figure 1, a defocus induces an additional shift of the sub-PSFs in the diversity plane with respect to the focal plane. Each of

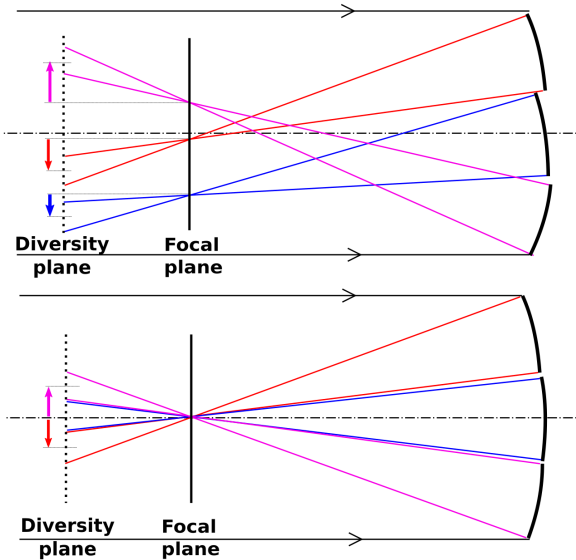


Fig. 1. [color on-line] Up: Misaligned telescope: the segment tip/tilts induce sub-PSF shifts in the focal plane. An additional shift, specific to each sub-aperture, due to the diversity, and denoted by an arrow on the diagram, appears in the defocused plane. Down: Aligned telescope. All the sub-PSFs are superimposed in the focal plane. In the defocused plane the additional diversity-induced shift remains.

these additional shifts is given by the defocus, and is different for each sub-aperture. Using these two images jointly, our method extracts the position and identifies the sub-aperture sub-PSF, thanks to a modified cross-correlation. Based on geometrical optics similarly to GPR, it thus only needs two images of an unresolved source and a simple data processing. Additionally, its capture range is only limited by the imaging sensor field of view.

In Section 2, a closed-form model of the multi-aperture Optical Transfer Function (OTF) is derived. Section 3 provides a solution for large amplitude tip/tilt measurement from a modified cross-spectrum of two diversity images. The method is then validated and optimized by simulation in Section 4. Finally, in Section 5, an experimental validation is performed on a segmented mirror.

2. CLOSED-FORM MODEL FOR THE MULTI-APERTURE OTF WITH GEOMETRIC DIVERSITY

Throughout this paper, the considered multiple-aperture telescope is based either on a segmented telescope or on a telescope array, all feeding a common focal-plane image detector and operates at a central wavelength λ with a focal length F . We assume the object is a point source at infinity. In this section, the telescope's pupil, its disturbances and its OTF are successively introduced.

A. Model of the multiple aperture

The pupil of the telescope is assumed for simplicity to be made of a set of N_a circular sub-apertures (of index n ranging from 1 to N_a) with identical radius R . In the following we use the reduced coordinate \mathbf{u} , defined as the usual coordinate \mathbf{r} in the pupil plane divided by R ($\mathbf{u} = \mathbf{r}/R$). Similarly we define c_n as the reduced coordinates of the center of each sub-aperture. In each of the two so-called diversity planes (of index $d \in \{1, 2\}$), each sub-aperture is characterized by its complex amplitude transmittance $p_{n,d}$ whose shape is described by the disk function Π ,

$$\Pi(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\mathbf{u}| \leq 1, \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (1)$$

and the pupil transmission is constant over each sub-aperture, equal to ρ_n . The phase of $p_{n,d}$ is the sum of unknown (and sought) phases plus known diversity phases $\Psi_{n,d}(\mathbf{u})$, and is expanded on a local orthonormal basis of Zernike polynomials [32]. A description of the first 4 modes is given in Appendix A1. The amplitude, in wave unit, of the k^{th} mode over the n^{th} sub-aperture is defined as $a_{k,n}$. Since the specific aberrations of a multi-aperture telescope are piston ($k = 1$), tip and tilt ($k = 2$ and $k = 3$), the maximal value of k considered here is 3. Each sub-aperture transmittance in the d^{th} diversity plane can then be written as:

$$p_{n,d} = \left[\rho_n \Pi_{n,d} \exp \left(j \sum_{k=1}^3 2\pi a_{k,n} Z_k \right) \right] * \delta_{c_n}, \quad (2)$$

$$\text{with } \Pi_{n,d} = \Pi \exp [j\Psi_{n,d}] \text{ and } j^2 = -1. \quad (3)$$

where $*\delta_{c_n}$ denotes the shift operator by vector c_n . The total pupil transmittance in the d^{th} diversity plane is then :

$$p_d = \sum_{n=1}^{N_a} p_{n,d}. \quad (4)$$

There are several ways to acquire these diversity images. A first solution is global temporal modulation: a known full-aperture aberration is applied prior to image acquisition; a usual example is the use of the focal image (no aberration) and a defocused image (by a longitudinal shift of the detector or of a mirror, or by lens insertion through a filter wheel [29]). A second solution is spatial modulation: the beam is split in two parts, routed to simultaneously form two distinct images with different aberrations (e.g. focus, astigmatism) on two different (parts of the) detector(s) [33]. A third solution is local temporal modulation (Fig. 2): a global defocus is approximated by its piston/tip/tilt projection on the sub-apertures, or even to the sole tip/tilt part: the latter will be called *pseudo-defocus* from now on. This pseudo-defocus can be introduced simply, either by moving the actuators intended to correct for the sub-aperture misalignment, or by an array of (achromatic) prisms in the filter wheel. This provides the sub-PSF's sprawl induced by the global defocus, and allows to exclusively acquire focal plane images.

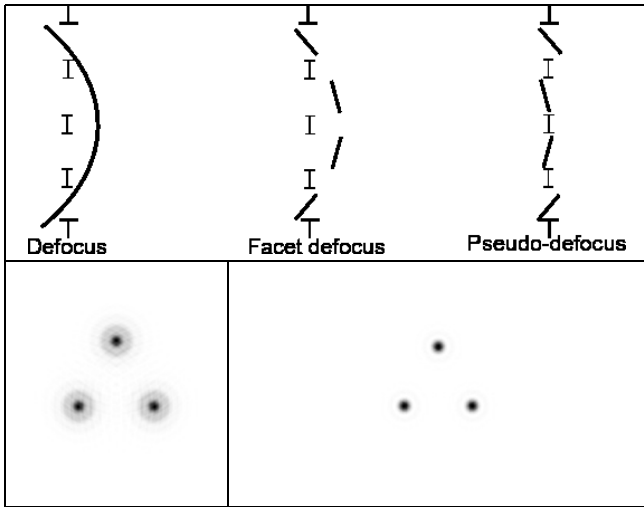


Fig. 2. Up: From left to right: global defocus over the full aperture ; facet defocus as piston/tip/tilt over each sub-aperture, pseudo-defocus as tip/tilt over each sub-aperture. Down: Left: Defocused image with a 10 rad amplitude. The sub-PSFs are sprawled. Right: Pseudo-defocus or facet defocus with a 10 rad amplitude. The sub-PSFs sprawling is prevented because the facets are planar.

B. Closed-form model of the OTF

We define the reduced OTF s_d of the d^{th} diversity plane as the autocorrelation (\otimes) of the reduced pupil transmittance p_d :

$$s_d(\mathbf{u}) = (p_d \otimes p_d)(\mathbf{u}) = \int p_d(\mathbf{u}') p_d^*(\mathbf{u} + \mathbf{u}') d\mathbf{u}'. \quad (5)$$

Because the support width is doubled by autocorrelation, $|\mathbf{u}|$ ranges between 0 and 2 in the OTF planes. The OTF with the usual spatial frequency f in rad^{-1} units in the object frequency space is thus $s_d(f\lambda/R)$. Merging Eqs. (2) and (5), the global OTF s_d in the d^{th} diversity plane is then written as:

$$s_d(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \sum_{n'=1}^{\mathcal{N}_a} \left[(p_{n,d} \otimes p_{n',d}) \star \delta_{(c_n - c_{n'})} \right](\mathbf{u}). \quad (6)$$

The telescope's PSF can be obtained by computing the Inverse Fourier Transform of the OTF. Eq. (6) shows that the OTF is the sum of \mathcal{N}_a^2 terms: \mathcal{N}_a so-called photometric terms (when $n = n'$, centered at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$), and $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ interferometric terms (when $n \neq n'$, centered at $\mathbf{u}_{n,n'} = (c_n - c_{n'})$). The photometric terms are the autocorrelations of each sub-aperture, and the interferometric terms are the correlations of two different sub-apertures. In this paper dealing with large amplitude alignment, the interferometric terms will be discarded for 4 reasons. Firstly, when large tip/tilt errors are present, it is very likely that large piston errors are also present. When their amplitude is larger than the coherence length (a few micrometers for broadband observations), interferometric terms are dimmed by the coherence envelope. Secondly, interferometric terms are also dimmed by significant differential tip/tilts. Thirdly, at this stage of operation, there is no need to see the high frequency contents of the image, only the sub-PSF positions are of interest; the detector can thus be rebinned to reduce the number of pixels to process. And lastly, if all these natural filters are not sufficient, an explicit low-pass filter can be used to isolate the superimposed photometric terms (in the center of the Fourier plane) from the fringe peaks.

An important result is that in presence of tip/tilt errors, the photometric terms from each sub-aperture are affected by a phase ramp, with the same slope than their associated pupil transmittance $p_{n,d}$ [16]. This can be simply understood by the fact that the Fourier Transform (FT) of the two gives the focal signal (in intensity or amplitude) at the same location. The Zernike polynomials were previously used over sub-apertures with a unit radius. In order to use the same modes (Appendix A1), Zernike polynomials 2 and 3 with a doubled support (but same slope) will be written $2Z_k(\mathbf{u}/2)$. Keeping only incoherent terms, the d^{th} diversity plane OTF writes:

$$s_d(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Lambda_{n,d}(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{k,n} Z_k \left(\frac{\mathbf{u}}{2} \right) \right], \quad (7)$$

$$\text{with } \Lambda_{n,d} = (\Pi \exp [j\Psi_{n,d}]) \otimes (\Pi \exp [j\Psi_{n,d}]). \quad (8)$$

To illustrate the previous derivations, Fig. 3 presents the pupil, the PSF, the OTF modulus and the OTF phase of a 3 sub-aperture telescope. Line 1 is the no-aberration coherent case. All sub-PSFs are superimposed in the focal plane, and the OTF modulus is the sum of 9 terms: 6 interferometric terms (two for each baseline) with a chinese-hat peak shape (hence the symbol $\Lambda = \Pi \otimes \Pi$) and 3 superimposed photometric terms which form a stronger central peak. In line 2 the impact of tip/tilt aberrations on the sub-apertures is highlighted. The sub-PSFs are pulled apart in the focal plane. Although some weak fringes remain present in the image, the OTF interferometric peaks are strongly attenuated, as previously mentioned. Line 3 illustrates the effect of the same previous aberration in an incoherent case, cancelling all interferometric terms. The information in the photometric peak of the OTF is not modified with respect to the coherent case.

In conclusion, the sum of all superimposed photometric peaks in Eq. (7) creates an intricate pattern (Fig. 3 lines 2 and 3), with a different value in each diversity plane, from which the sought unknown tip/tilts of each sub-aperture must be estimated. Such an estimator is derived in the next section.

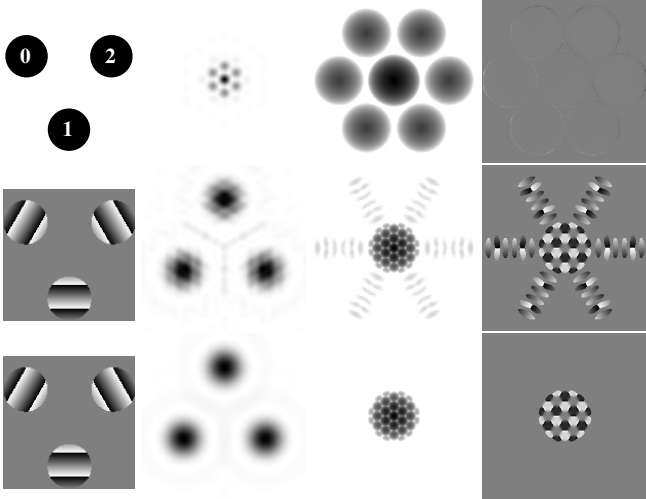


Fig. 3. From left to right column: pupil, PSF, OTF modulus (logarithmic scale) and phase for a 3 sub-aperture configuration (see text and appendix for more details): 1) No aberration, coherent sub-PSFs; 2) Tip/Tilt aberrations on pupil 0, 1 and 2, coherent sub-PSFs; 3) Tip/Tilt aberrations on pupil 0, 1 and 2, incoherent sub-PSFs.

3. ELASTIC, A SUB-APERTURE TIP-TILT ESTIMATOR

Before the quantitative mathematical derivation in subsection 3B, the physical origin of this large amplitude tip-tilt estimator is explained in subsection 3A.

A. Principle of the estimator

Figure 1 shows that the focal image is only sensitive to the tip/tilt from each sub-aperture, whereas in the diversity image the sought tip/tilt is combined with an additional shift resulting from the diversity (here a defocus obtained by longitudinal shift of the detector). If the diversity image is telecentric, then this additional shift does not depend on the sub-aperture tip/tilt, but only on the introduced diversity. The same holds for a temporal diversity induced by the sub-aperture actuators, such as a pseudo-defocus. If these diversity-induced shifts over all the sub-apertures are sufficiently different, then this differential information between the two diversity images enables the association of the sub-PSFs to their sub-aperture index. The goal is now to convert this qualitative visual process to an unsupervised quantitative measurement, using a simple algorithm that can be operated whatever the number of sub-apertures is or their relative positions are.

A first ingredient is to compute the correlation between the two diversity images to access this differential tip/tilt. Since each diversity image is composed by \mathcal{N}_a sub-PSFs (Fig. 4 line 1), the image correlation (Fig. 4 line 2) contains \mathcal{N}_a^2 terms: \mathcal{N}_a terms that will be called *autospots* in the following, obtained by the correlation of the sub-PSF from sub-aperture n in one diversity image by the sub-PSF from the same aperture n but in the other diversity image. These autospots lie in the central circled area in Fig. 4 line 2. Outside this circle are $\mathcal{N}_a(\mathcal{N}_a - 1)$ so-called *interspots*, obtained by the correlation of the sub-PSF from sub-aperture n in one diversity image by the sub-PSF from sub-aperture $n' \neq n$ from the other diversity image. Those two kinds of correlation terms are clearly distinguishable by their positions. Indeed, the interspots result from the differential

tip/tilt between the two involved sub-apertures, which can be large during the first alignment steps. The autospots positions, near the origin, are not affected by the tip/tilt of their related aperture, but only by the deterministic diversity-induced tip/tilt. Fig. 4 line 2 shows that the autospots, whose amplitude scales with ρ_n^4 according to Eq. (7), allow the simple estimation of the intensity of each sub-PSF.

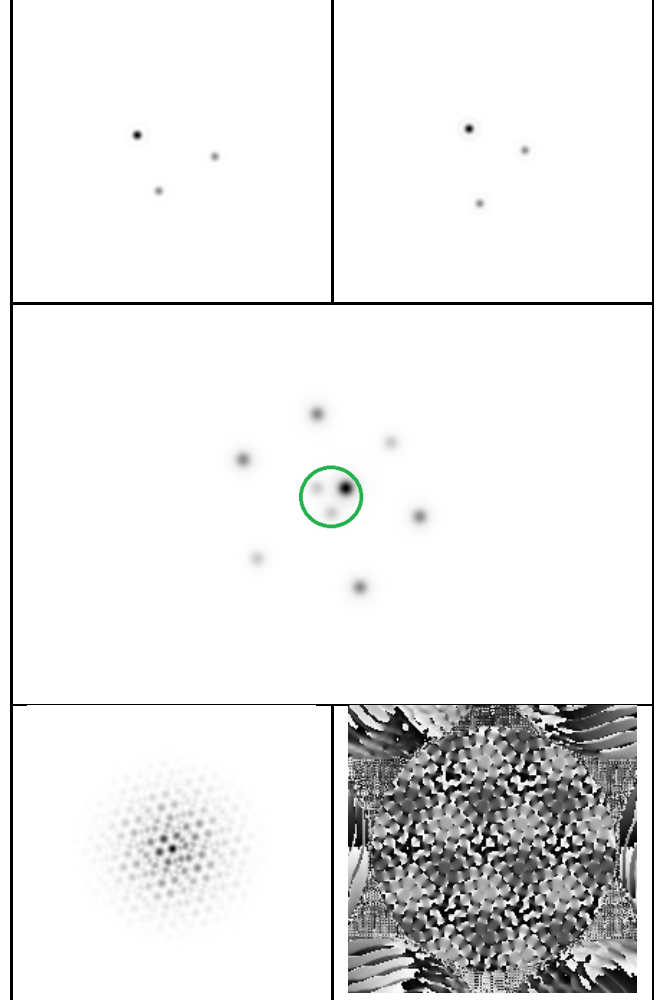


Fig. 4. Illustration of ELASTIC. Line 1: two diversity images with a 3-aperture interferometer (left: focal plane with tip/tilt errors, right: with an added pseudo-defocus). Line 2: Image correlation. The 3 autospots are inside the overplotted circle in the center while the 6 interspots are scattered around. Line 3: Modulus (left) and phase (right) of their cross-spectrum. Note: A sub-PSF 50% brighter in line 1 has a 225% brighter autospot in line 2.

The second ingredient is to make these autospots essentially not overlapping. Firstly, using a sufficiently large diversity (Appendix A4), so that the sub-PSFs are shifted from one diversity plane to the other, it is possible to have all the autospots' cores separated. The small overlapping via the diffraction rings creates a slight deterministic coupling, which decreases as the separation increases, but does not prevent the autospots to form a nearly orthogonal family. Secondly, if the relative tip/tilts between sub-apertures are large enough with respect to the di-

versity, autospots are only slightly affected by the diffraction rings of the interspots. Indeed, the interspots are outside the circle overlotted on Fig. 4 line 2 as soon as the distance (derived as a tip/tilt value in Appendix A5) between two spots is larger than the diversity-induced shift from one plane to the other. If these two conditions are fulfilled, each of these autospots can be isolated by projecting the correlation on a predefined filter matching each autospot. From now on, the configuration in which the sub-PSFs have the minimal distance between each other to satisfy the second condition is called *parking position*.

The third ingredient is to rather compute the FT of this correlation, also called cross-spectrum, which contains the same information (under a different form). This cross-spectrum can be computed as the simple product between the first diversity image FT (s_1 from subsection 2B) and the second diversity image conjugated FT (s_2^*). The autospot and interspot FTs will be respectively called *autopeaks* and *interpeaks*. Although all the peaks are superimposed in the center of the Fourier plane (Fig. 4, bottom line), the auto/inter peaks inherit the (near) orthogonality properties of the autospots and interspots by the Parseval-Plancherel theorem.

The fourth ingredient of the method is to code the sought tip-tilts in the autopeaks. In the basic cross-spectrum computation (Fig. 5, left) the contribution of the sought tip-tilt, in the autopeaks, is cancelled by the phase conjugation. The idea is to realize that (1) the sought tilt is a phase ramp in the FT of the sub-PSF, and (2) if we perform a slight shift of the FT of one sub-PSF, this phase ramp is transformed into itself plus a piston, whose amplitude is proportional to the input tilt coefficient and the shift offset (Fig. 5, right). The nice feature of this piston factor is that it is constant all over the autopeak, and thus can be factored as a global weighting coefficient, like its amplitude ρ_n^4 . The used operator, detailed in appendix A6, is hereafter called the Frequency Shifted Cross-Spectrum (FSCS).

The last ingredient, in the context of a closed-loop control, is to bring the sub-PSFs from a random scattered state to the parking position. From this parking position, an open-loop predefined offset can then superimpose all the sub-PSFs in the focal plane.

This has led to the ELASTIC (Estimation of Large Amplitude Sub-aperture Tip/tilt from Image Correlation) algorithm, which we now explain with all the technical details.

B. Derivation of the algorithm

In practice, the inputs of the algorithm are the diversity images from a $\mathcal{N}_p \times \mathcal{N}_p$ pixel detector. The typical width (in pixels) of a sub-PSF is thus equal to the sampling factor n_s defined from the pixel pitch p_{pix} by:

$$n_s = \frac{\lambda F}{2R p_{pix}}. \quad (9)$$

Note that $n_s = 2$ if the sub-PSFs are Shannon-sampled; n_s is greater in practice for the interferometric PSF to be at least Shannon sampled. To compute the FSCS without wrapping, images are zero-padded to a width of $2\mathcal{N}_p$ pixels before the computation of the discrete OTFs $s_{d,q}$ by a Discrete Fourier Transform (DFT). The support width of $s_{d,q}$ is thus $4\mathcal{N}_p/n_s$ pixels. Then, we approximate the discrete OTFs $s_{d,q}$ to a sampled version of their continuous OTF model s_d derived in Eq. (7). The link between the 2D index q of $s_{d,q}$ and the continuous reduced coordinates u of Eq. (7) is thus $u = qn_s/\mathcal{N}_p$ since the support half width of s_d

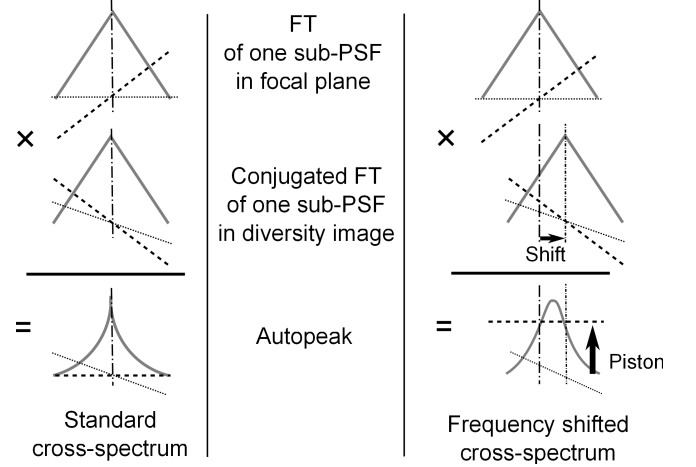


Fig. 5. Left column: Standard cross-spectrum (bottom line) as the result of the product between one sub-PSF FT from one sub-aperture in the first diversity plane (line 1) with the conjugated sub-PSF FT of the same sub-aperture in the second diversity plane (line 2). Right column: Frequency shifted cross-spectrum (bottom line) as the result of the product between one sub-PSF FT from one sub-aperture in the first diversity plane (line 1) with the shifted and conjugated sub-PSF FT of the same (line 2). Each complex term has a modulus (thick line) and a phase that includes two components: the input tip-tilt (dashed line) and the diversity (here a pseudo-defocus, in dotted line).

is $|u_{max}| = 2$. Therefore:

$$s_{d,q} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^2 \Lambda_{n,d} \left(\frac{n_s q}{\mathcal{N}_p} \right) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{kn} Z_k \left(\frac{n_s q}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]. \quad (10)$$

Let Δ_m the operator that performs a shift δ_m ($m = 2, 3$), with an amplitude of δ pixel(s):

$$\delta_2 = (\delta, 0), \quad \delta_3 = (0, \delta). \quad (11)$$

We define the FSCS vector $j_{m,q}$ for each value of m (2 or 3) and pixel q as:

$$j_{m,q} = s_{1,q} \times \Delta_m \left[s_{2,q}^* \right], \quad (12)$$

where $*$ denotes complex conjugation. This computation is illustrated on the right part of Fig. 5. Inserting Eq. (10), and keeping only the \mathcal{N}_a autopeaks as explained in section 3A, Eq. (12) becomes:

$$j_{m,q} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \left(\Lambda_n \times \Delta_m \left[\Lambda_n^* \right] \right) \left(\frac{n_s q}{\mathcal{N}_p} \right) \times \exp \left[j \sum_{k=2}^3 4\pi a_{kn} (Z_k - \Delta_m [Z_k]) \left(\frac{n_s q}{2\mathcal{N}_p} \right) \right]. \quad (13)$$

According to Eqs. (A26)-(A28) from Appendix A1:

$$(Z_k - \Delta_m [Z_k]) \left(\frac{n_s q}{2\mathcal{N}_p} \right) = -\frac{n_s \delta}{\mathcal{N}_p} \delta_{k,m}, \quad (14)$$

with $\delta_{k,m}$ the Kronecker delta.

Thus Eq. (13) becomes:

$$j_{m,q} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_a} \rho_n^4 \exp \left[-j \frac{4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right] \Lambda_{n,m} \left(\frac{n_s q}{\mathcal{N}_p} \right), \quad (15)$$

$$\text{with } \Lambda_{n,m} = \Lambda_n \times \Delta_m [\Lambda_n^*]. \quad (16)$$

Figs. 3 and 4 suggest that the FSCS computation can be limited to a predefined reduced set of indexes, the OTF central part, where the autopeaks values are significant. So let us concatenate the corresponding values of $j_{m,q}$ into a vector j_m . Besides, our unknowns of interest are the tilts $a_{m,n}$, and possibly the transmittances ρ_n . So we group them into a new vector of complex unknowns :

$$x_m = [x_{m,1}, \dots, x_{m,\mathcal{N}_a}]^T, \quad m \in \{2,3\}, \quad (17)$$

$$\text{with } x_{m,n} \triangleq \rho_n^4 \exp \left[-j \frac{4\pi n_s \delta}{\mathcal{N}_p} a_{m,n} \right], \quad n \in \{1, \dots, \mathcal{N}_a\}. \quad (18)$$

Lastly, Eq. (15) is obviously linear in x_m , so it can be rewritten in the final matrix form of the direct model:

$$j_m = C_m x_m, \quad (19)$$

where C_m is a matrix with $2 \times \mathcal{N}_a$ columns, a number of lines equal to the number of indices kept in j_m and the elements of C_m are made with the appropriate sampled values of $\Lambda_{n,m}$.

The generalized inverse C_m^\dagger of C_m can easily be computed by Singular Value Decomposition. Thus the resolution of the inverse problem yields the solution \hat{x}_m :

$$\hat{x}_m = C_m^\dagger j_m. \quad (20)$$

The sought tip/tilts and pupil amplitudes are then simply computed as:

$$\begin{cases} \hat{a}_{m,n} = \frac{-\mathcal{N}_p}{4\pi n_s \delta} \text{Arg}(\hat{x}_{m,n}), \\ \hat{\rho}_{m,n} = |\hat{x}_{m,n}|^{1/4}. \end{cases} \quad (21)$$

A self-consistency test can check that both amplitude estimations agree: $\forall n, \rho_{2,n} \simeq \rho_{3,n}$. It must be noted that C_m^\dagger can be pre-computed, so that the only real-time operations are the computation the two (tip and tilt) frequency shifted cross-spectra from the two (possibly undersampled) diversity images (Eq. (15)), then the two projections (Eq. (20)) and arguments of Eq. (21). Moreover, for a given sub-aperture tip/tilt, the sub-PSF shifts (and thus the OTF slopes) are the same for all wavelengths. The ELASTIC algorithm can thus operate with broadband illumination, as long as the sub-OTFs $\Lambda_{n,d}$ considered in the direct model are the polychromatic OTF obtained by averaging over the spectral band the monochromatic sub-OTFs weighted by the source amplitude and the detector efficiency.

4. ALGORITHM OPTIMIZATION AND PERFORMANCE

The optimization and performance evaluation performed in this section by numerical simulations are based on a compact 18 sub-aperture pupil chosen to mimick the JWST pupil (Fig. 6), with circular sub-apertures for compatibility with our software.

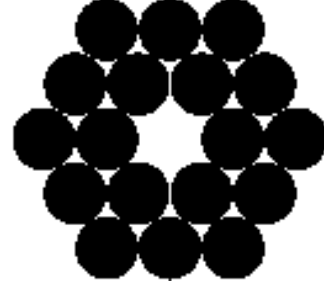


Fig. 6. The 18 sub-apertures pupil considered for simulations, sampled on a 512×512 pixel grid.

A. Definition of the simulation parameters

Quasi-monochromatic images of size $\mathcal{N}_p^2 = 1024 \times 1024$ pixels are simulated from an unresolved object. The focal-plane detector is assumed to be sampled at the Nyquist frequency in the fine phasing mode. Since each sub-aperture diameter is 1/5 of the full aperture, the sub-PSFs are oversampled and the sub-aperture sampling ratio, n_s , is 10. An amplitude of $A_4 = 0.9$ wave (Eq. (A37)) is chosen for starters but will be detailed later.

Images are simulated with a total of 3×10^5 photo-electrons, Poissonian photon noise and a 5 electrons per pixel read-out noise. Algorithm performance is quantified with the estimation of the Root Mean Square Error (RMSE) of \mathcal{N}_o outcomes (with $\mathcal{N}_o = 50$) defined as:

$$RMSE = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_a} \sum_{m,n} (\hat{a}_{m,n} - a_{m,n})^2 \right\rangle}, \quad (22)$$

where $\hat{a}_{m,n}$ and $a_{m,n}$ are respectively the estimated and introduced aberration coefficients in waves. $\langle \cdot \rangle$ is the average over the \mathcal{N}_o outcomes.

B. Tilt dynamic range and choice of δ

The maximum tilt that can be measured is ultimately limited by the detector field. This maximum tilt, noted a_{field} , is given by Eq. (A36) assuming a $\pm \mathcal{N}_p/2$ shift from the central origin.

$$a_{field} = \frac{\mathcal{N}_p}{8n_s}. \quad (23)$$

Here, $a_{field} = 1024/(8 \times 10) \simeq 13$ waves. According to Eq. (21), the phase of the $x_{m,n}$ coefficients is proportional to the sought aberration coefficients $a_{m,n}$ and to the shift amplitude δ chosen for the computation of the FSCS. Because the dynamic range of the Arg function is only $(-\pi; \pi]$, increasing the shift amplitude reduces the range since from Eqs. (21) and (23), the maximal unwrapped estimation is:

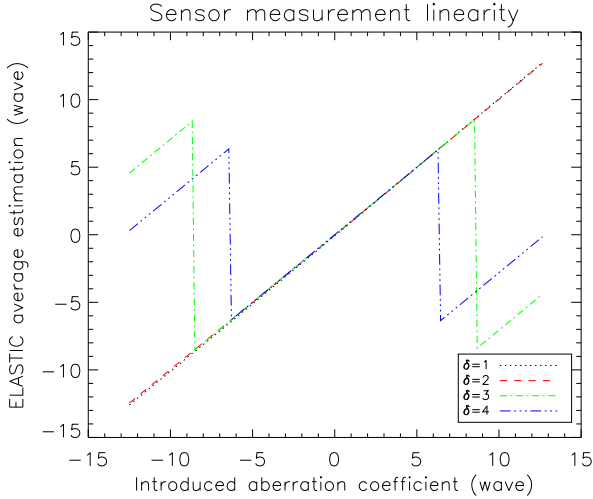
$$a_{max}(\delta) = \frac{2a_{field}}{\delta} = \frac{\mathcal{N}_p}{4n_s\delta}. \quad (24)$$

Eq. (24) highlights that the algorithm does not limit the field when $\delta \leq 2$.

These limits, given in Table 1, are confirmed by simulation. Fig. 7 presents the ELASTIC estimation versus the introduced tip aberration for different values of the shift amplitude δ . A tip slope is applied over one sub-aperture, the other sub-apertures being randomly scattered in the field. Each point on the graph

Table 1. Variation of field coverage with δ , and corresponding maximum aberration coefficient a_{max} in our simulated case.

Shift amplitude (δ)	1	2	3	4
Image field coverage (%)	100	100	66,6	50
$a_{max}(wave)$	25,6	12,8	8,5	6,4

**Fig. 7.** Sensor linearity for various shift amplitudes.

is the average of \mathcal{N}_o noise outcomes. A full-field linear response is obtained for a 1 and 2 pixel shifts. The curves corresponding to 3 and 4 pixel shifts confirm the previously mentioned phase wrapping, with the theoretical boundaries around 66% or 50% field coverage, respectively for a 3 or 4 pixel shift.

A 1 or 2 pixel shift are necessary for a maximum field coverage, hence can be chosen for initial error estimation. Then, as the field covered by the sub-PSFs decreases, the pixel shift amplitude can be increased to improve the estimation accuracy as seen in next section.

C. Optimization of the algorithm's parameters

The ELASTIC algorithm has two free parameters: the introduced diversity and the frequency shift amplitude δ . As mentioned in the previous subsection, it is required to start the alignment with $\delta = 2$ if the sub-PSFs are spread over the whole detector field. The goal here is to optimize and quantify performance in the ultimate step, when the sub-PSFs are close to the parking position. Considering Eqs. (18-20), each $\hat{x}_{m,n}$ value can be written as $x_{m,n}(1 + \epsilon_n/x_{m,n})$, with ϵ_n the small noise. Eq. (21) becomes:

$$\hat{a}_{m,n} \simeq a_{m,n} + \frac{\mathcal{N}_p}{4\pi n_s \delta} \text{Im} \left(\frac{\epsilon_n}{x_{m,n}} \right), \quad (25)$$

with $\text{Im}(\cdot)$ the imaginary part of a complex number. Because ϵ_n is roughly independant of δ , it comes that increasing δ reduces the error on the estimation (if \mathcal{N}_p and n_s are fixed). Therefore the parking position (depending on the pseudo-defocus amplitude) needs to be tightly packed for two reasons. Firstly, it allows to increase δ hence to improve the estimation accuracy. Secondly, it will minimize errors due to the uncertainty of segment displacements (for the open loop superimposition after ELASTIC). Fig. 8

presents the parking position chosen for the sub-PSFs. The positions of the sub-PSFs from the central corona were determined thanks to Appendix A5. Then, the sub-PSFs from the external corona were positioned so that the interspots do not overlap the autospots after image correlation (Fig. 8, line 2).

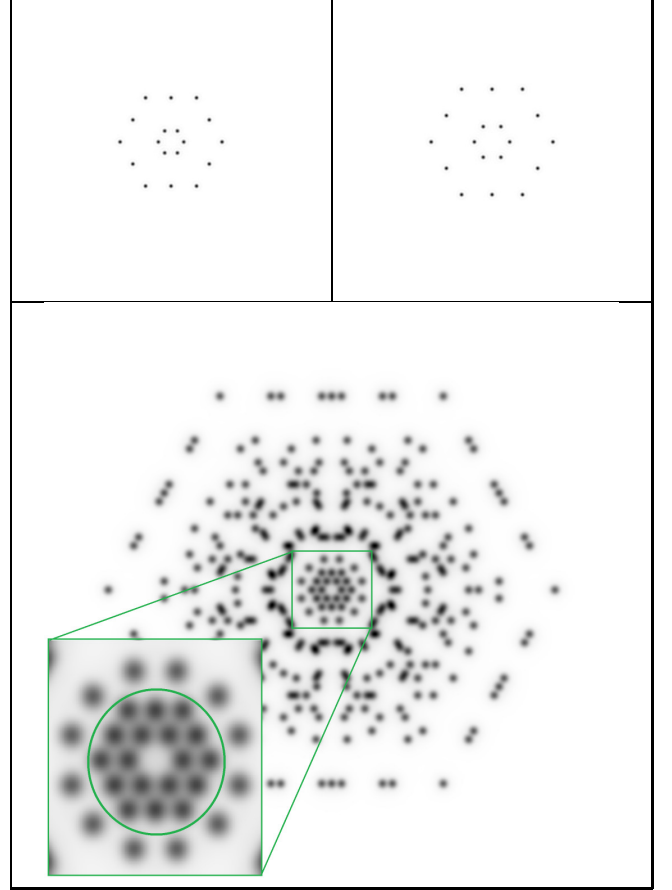
**Fig. 8.** Line 1: Image simulation with sub-PSFs in parking positions in the focal image (Left) and in the pseudo defocused image (Right). Line 2: Image correlation. Autospots in the circle are separated and isolated from the interspots.

Fig. 9 presents the evolution of the ELASTIC estimation RMSE versus the pseudo-defocus amplitude A_4 , for different values of the shift amplitude δ . It is clearly evidenced that ELASTIC estimation RMSE decreases when the pseudo-defocus amplitude and the pixel shift amplitude are increased. The algorithm performance is better than $\lambda/8$ for a pseudo-defocus larger than 0.8 to 1 wave. This is in agreement with the typical value of 0.9 wave given by Eq. (A37). For a larger diversity amplitude the RMSE estimation goes down to less than $\lambda/500$ for a 2 or 3 pixel shift. Indeed, when the diversity amplitude increases, the interspots are shifted further from the autospots. Hence their influence on the autospots decreases then the estimation's accuracy is better. The limit to these performances is that the diversity amplitude must be chosen so that the sub-PSFs do not slip out of the unwrapped field (settled by δ). This limitation is not fulfilled when the pseudo defocus amplitude is larger than 2.3 waves and 3.3 waves for respectively a 4 and 3 pixel shift amplitude: the RMSE increases. There is then a trade off between the choice of δ and the pseudo-defocus amplitude. The evolution of the

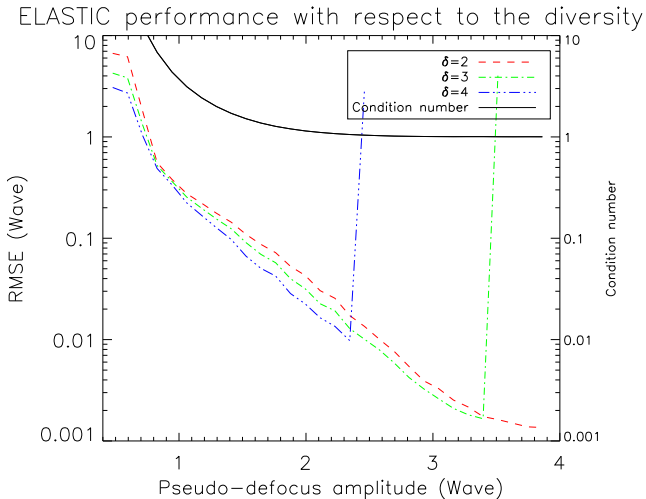


Fig. 9. Estimation RMSE vs diversity for various shifts δ .

condition number of C_m is also plotted. We see that it is indeed a good indicator of the matrix inversion's sensitivity to noise. As the ratio between the highest and the smallest singular values, it can help one qualify the ability to separate autospots as a function of the pseudo-defocus amplitude. The condition number decreases when the pseudo-defocus amplitude increases, and reaches an asymptote at 1. Indeed a large diversity improves the autospots separation. Therefore, the singular modes are well distinguishable for the matrix inversion. The condition number is the same for each shift amplitude case. Indeed the autospot separation in the correlation only depends on the diversity, not on the introduced frequency shift. Hence, increasing the latter makes the estimation more accurate.

D. Robustness to noise

In order to have the best accuracy with the largest frequency shift amplitude and a relatively small defocus amplitude, considering the sub-PSFs in parking position, a 2.2 waves pseudo-defocus and a 4 pixel shift amplitude are chosen for the evaluation of noise propagation. \mathcal{N}_o noise outcomes are simulated for different image brightnesses, quantified by \mathcal{N}_{ph} , the total number of photo-electrons. Fig. 10 presents the estimation's RMSE as a function of the flux.

Several regimes are to be noticed on Fig. 10. Below 10^4 photo-electrons (low illumination), the estimated RMSE is constant. In this case, the distribution of $\text{Arg}(\hat{x}_{m,n})$ behaves as a uniform noise between $-\pi$ and π . Such a distribution has a theoretical standard deviation of $\pi/\sqrt{3}$. Using Eq. (21), we deduce that the theoretical saturation of the RMSE is $\mathcal{N}_p/(4 n_s \delta \sqrt{3}) = a_{max}/\sqrt{3}$. The numerical value of the saturation for our setup is around 4 waves, and matches with the saturation observed in the simulation.

A second regime is for a total image flux greater than 10^5 photo-electrons: the estimation RMSE is saturated. This last limitation is the algorithm's bias. The bias can be explained by the small influence of the interpeaks on the autopeaks. However, the RMSE is down to less than $\lambda/100$, which is already much better than needed to enter the fine phasing mode.

These results confirm the capacity of ELASTIC to bring a misaligned multi-aperture telescope to a configuration state where the wavefront errors are $\lambda/100$ allowing the fine phasing algo-

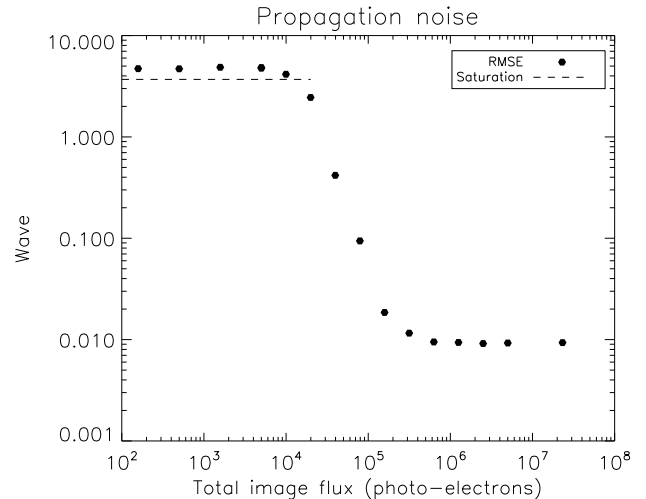


Fig. 10. Wavefront error in waves as a function of the image flux for $\delta = 4$, and for a 18 sub-aperture instrument.

rithms to operate.

E. Robustness to phase diversity error

An interesting feature of the ELASTIC algorithm is its small sensitivity to the diversity error. This can be understood in the focal domain: if the diversity used in the numerical model does not match exactly the actual optical diversity, then the autospots in the frequency-shifted cross-correlation (cf appendix A6) do not perfectly overlap the associated data in the FT of the C_m^\dagger vectors. The estimated intensity will be affected by the partial overlap. But since the piston information induced by the sought tip/tilt is constant and not degraded over the autospot, its extraction is not much affected (neglecting the overlapping of the spots associated to different sub-apertures). This is confirmed by simulations: the estimation error is less than $\lambda/8$ as long as the diversity-induced tip or tilt error is less than $\lambda/2.5$ on each sub-aperture [41].

F. Adaptation to atmospheric turbulence

In the case of a ground-based telescope, the atmospheric turbulence induces (among others) tip-tilt disturbances on the sub-PSFs. A solution to average the random atmospheric tip/tilt is to record long-exposure images, leading to sub-PSFs of size λ/r_0 (instead of λ/D) with r_0 the Fried parameter [38]. Thus, the ELASTIC algorithm can be adapted by changing the photometric peaks $\Lambda_{n,d}$ by narrowed versions because frequencies above r_0/λ (instead of D/λ) are lost. All the remaining processing can be performed, leading to a fraction of λ/r_0 precision (instead of a fraction of λ/D). This accuracy should ensure that we enter the capture range of usual wavefront sensors over all the sub-apertures simultaneously, in order to operate an adaptive optics system.

5. EXPERIMENTAL VALIDATION

In the following, sub-PSFs of a multi-aperture telescope are brought to the parking position thanks to the ELASTIC algorithm, and then superimposed.

A. Implementation of ELASTIC

In order to test focal plane wavefront sensors, Onera built a dedicated bench called BRISE [33].



Fig. 11. Left: the active segmented mirror with 19 sub-apertures. Right: Simulation of the parking position in the focal plane with the 6 sub-apertures used (first corona).

A fibered single-mode laser diode operating near 635 nm is used as an unresolved source. It is collimated and provides an object at infinity to a plane segmented mirror with nineteen sub-apertures (Fig. 11 left). To introduce and correct piston/tip/tilt perturbations, each of these mirrors is supported by three piezoelectric actuators. These have no internal feedback control and suffer from hysteresis. In addition, the external corona is currently not fully functional, thus the validation is performed over the 6 sub-apertures of the first corona. Downstream, a phase diversity module is used to simultaneously form a focused and a defocused image of the object on a 1300×1000 pixels camera, from which we extract two 512×512 images.

Because the active mounts are not perfectly deterministic, it is not possible to perform a single-step good correction from a randomly misaligned state. Therefore, a closed-loop sequence is performed to align the mirror. According to Eq. (A37), the minimal required diversity for ELASTIC is 0.94λ . Measurements are then performed with a 1λ pseudo-defocus temporally applied on the 512×512 pixel focal image. To have a full-field tip/tilt estimation, the FSCS is computed with a 2 pixel shift.

B. Loop closure on an unresolved source

The focal and pseudo-defocused images of an unresolved source are shown on Fig. 12 line 1. They include random tip/tilt errors on each sub-aperture. The aim is to obtain in the focal plane the same simulated parking position as Fig. 11 right. For the closed loop, we use an integrator with a gain control of 0.5. Lines 2 and 3 of Fig. 12 show iterations 2 and 4 of the loop. Line 4 is the position obtained at iteration 20, close to the expected parking.

Fig. 13 presents the experimental evolution of the estimated tip/tilt errors during the closed-loop, for each iteration. The error is defined as the relative distance to the parking position. At first iteration, some tip/tilt errors are larger than 2λ . As from iteration 5, the estimated error is mainly less than $\lambda/2$. Moreover, the closed-loop control is stable as from around iteration 7 and keeps the sub-PSFs in the parking position until the end with an estimated error less than $\lambda/10$. It is to be noted that the estimation can be biased if two sub-PSFs come too close (iteration 2), but the error always converge to zero thanks to the closed-loop control.

It can be seen on iteration 20 that the sub-PSFs are not perfectly placed (they do not form the exact pre-defined parking).

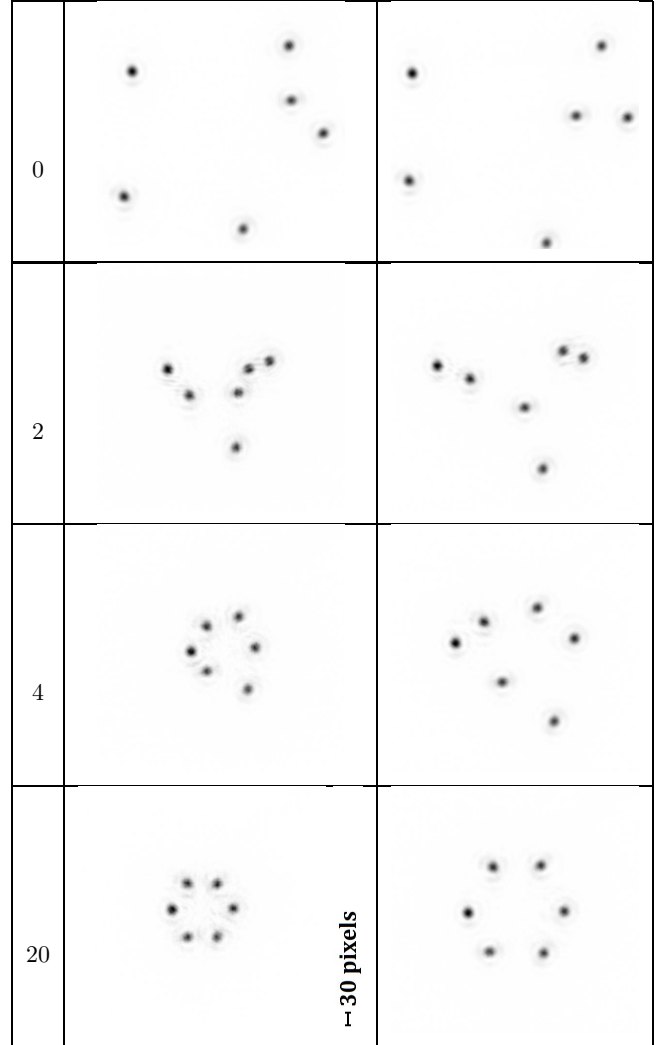


Fig. 12. Closed-loop sequence up to the parking position with a δ amplitude of 2, and a total flux of $3e7$ photo-electrons per image. Columns are iteration number, focal and pseudo-defocused images.

This is mainly due to the temporal modulation over each sub-aperture. Indeed, in open loop, if the diversity offset is consecutively switched on and off, the sub-PSFs do not go back to the exact same position they had before the offset. Hence, the instrumental limitations (plus a possible error in the telescope modeling and environment potential perturbations) can explain this visible positioning error on iteration 20. Nevertheless we can conclude that ELASTIC was successfully implemented on BRISE bench, and was able to bring the telescope from a randomly misaligned configuration to a stable parking position. The error of the estimation, due to the above mentioned limitations, is now to be quantified.

C. Noise evaluation

To experimentally evaluate the estimation standard deviation for several illumination conditions, the sub-PSFs are set in a fixed configuration (e.g. the previously mentioned parking position) and \mathcal{N}_o open-loop diversity pairs of images are taken to estimate tip/tilt. Fig. 14 plots the estimated standard deviation for

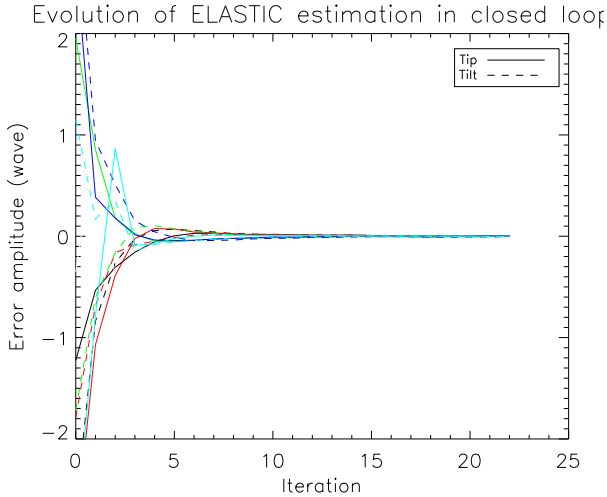


Fig. 13. Evolution of Tip/tilt estimation versus the iteration number during the loop.

various illumination values (defined as the total flux in each image).

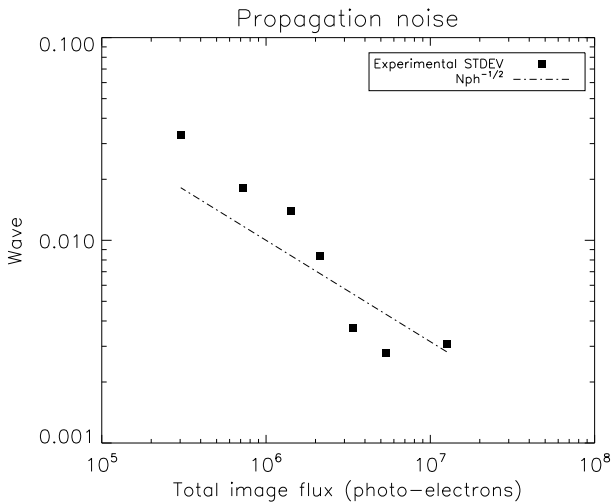


Fig. 14. Experimental estimation root mean square error for different illumination conditions. Each point is computed with 50 outcomes.

Results show that the estimation's standard deviation is less than $\lambda/100$ as from a 10^6 photo-electrons illumination, and decreases following a $1/\sqrt{N_{ph}}$ slope. This highlights the stability of the estimation for reasonable flux conditions.

Despite the instrumental limitations (turbulence from the camera fan, hysteresis, possible calibration errors) that remain, the stability of the estimation is better than the capture range of the fine algorithms.

D. Final superimposition

After the closed-loop organisation of the sub-PSFs in parking position, an open-loop offset command is applied to finish the alignment (Fig. 15). In the focal plane, interference fringes

are distinguishable. Eventhough the large piston errors were not corrected, they are smaller than the coherence length of the single-mode laser used as an unresolved source. Without hysteresis or calibrations errors, simulations showed in Section 4D that a $\lambda/100$ precision could be reached for high illumination, in the case of a 18 sub-aperture instrument. Experimentally, the result presented on Figure 15 shows that in the case of a 6 sub-aperture instrument, the open-loop offset command confines all sub-PSFs in an area which is less than 30 pixels FWHM. Thus the sub-PSFs dispersion after superimposition is ± 7 pixels peak-valley around the center, leading to an estimation of residual tip/tilt error smaller than $\lambda/8$ RMS, according to Appendix A3 since the FWHM of a single sub-PSF is 16 pixels ($n_s = 16$ on our bench).

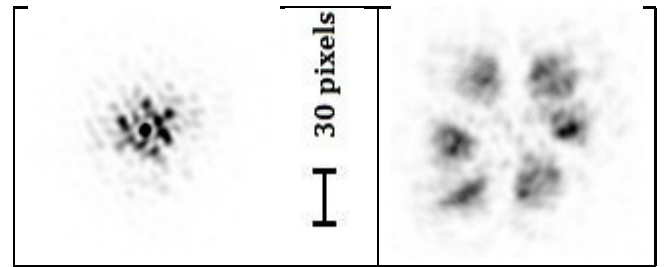


Fig. 15. Zoom of focal (left) and pseudo-defocused (right) PSF after final superimposition (128×128 pixel images).

This is confirmed by Fig. 16, which shows the result of a cophasing by phase diversity [17, 18] after superimposition by ELASTIC. Not only the sub-PSFs are all in the capture range of the fine phasing algorithm, but the width of the cophased pattern (2 pixel central core but around 30 pixel envelope) is comparable to the width of the aligned state after ELASTIC.

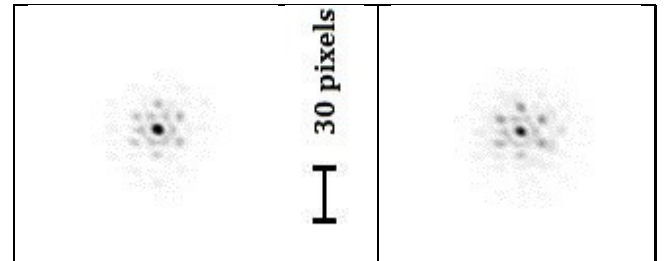


Fig. 16. Focal (left) and defocused (right) PSFs after phase diversity fine phasing algorithm (128×128 pixel images).

6. CONCLUSION

To estimate the tip/tilts (and pupil transmission amplitude) over each sub-aperture of a multi-aperture telescope, we introduced the ELASTIC method whose main features are to provide a polychromatic large amplitude estimation (up to the full camera field) with a simple hardware (only two images of a point source near the focal plane) and a closed-form unsupervised computation with small computing cost. Its typical use is to bring the sub-apertures from any distorted state up to a sufficiently aligned state (with residues much smaller than half the sub-PSF width, to enable their interference) to scan for pistons and ultimately enter the fine-phasing mode. Such a source (unresolved by each sub-aperture) can easily be found in a stellar field. For

applications such as Earth observation from space, the ELASTIC algorithm may be extended to be insensitive to the object phase; however, it can be expected that large amplitude alignment is not frequent and can be operated by pointing the telescope at a star to operate ELASTIC with an unresolved source.

The main requirement of ELASTIC is to acquire two images, including known local tip/tilts offsets over the sub-apertures, so that each sub-PSF is uniquely identified by its position shift. These offsets need to be large enough to allow a clear separation between the sub-PSFs, hence are larger than those required by *phase diversity* in the fine phasing mode, which needs the sub-PSFs to remain superimposed in all diversity planes to interfere. This *geometric diversity* can be implemented by inserting a global aberration between the images (e.g. focal/defocused images) or by introducing a temporal modulation with the sub-aperture correction actuators themselves. This is also simpler since telecentricity is not required, and more efficient as only the tip-tilt part of the defocus is used by the algorithm, whereas higher-order modes only degrade the sub-PSFs.

ELASTIC is based on the computation of a frequency-shifted cross-spectrum, an operator detailed in appendix A6 introduced to simply invert the diversity process. We showed by means of numerical simulations with a JWST-like pupil how to optimize the free parameters (the diversity and the frequency shift) and estimated the limiting magnitude around 5×10^3 photo-electrons/sub-aperture/frame with 1024×1024 pixels images. Lastly, we performed an experimental validation that demonstrated the closed-loop alignment of a 6 aperture segmented mirror using a tip/tilt temporal diversity on the segments and 16×10^4 photo-electrons/sub-ap/frame with 512×512 pixels images.

Experience shows that the ELASTIC procedure is robust and is now regularly used to drive BRISE into the fine phasing mode. A short-term perspective is then to interface ELASTIC with a real-time fine phasing algorithm such as the one proposed in [34, 35].

Fundings This research was partly funded by ONERA's internal research project VASCO ; Thales Alenia Space co-funded S. Vievard's PhD thesis; the BRISE bench was funded by French DGA

Acknowledgements The authors would like to thank B. Denolle, A. Grabowski and C. Perrot for their early work on the algorithm and the experiments; J. Montri for the BRISE computer interface; and J.-P. Amans from GEPI (Galaxies, Etoiles, Physique et Instrumentation) of Observatoire de Paris-Meudon, for the design and manufacturing of the segmented mirror.

A. APPENDIX

1. Definition of the Zernike modes

This appendix recalls the Zernike polynomials [32]: a basis of orthonormal modes Z_k with normalized coordinates $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n)$, where $|\mathbf{u}_n| \leq 1$. The first 4 modes we will use are:

$$Z_1(\mathbf{u}_n) = 1, \quad (\text{piston}) \quad (\text{A26})$$

$$Z_2(\mathbf{u}_n) = 2u_n, \quad (\text{tip}) \quad (\text{A27})$$

$$Z_3(\mathbf{u}_n) = 2v_n, \quad (\text{tilt}) \quad (\text{A28})$$

$$Z_4(\mathbf{u}_n) = \sqrt{3}(2u_n^2 - 1). \quad (\text{defocus}) \quad (\text{A29})$$

2. From global to local aberrations

The global position \mathbf{r} of any point in the pupil can be linked to a local coordinates \mathbf{r}_n attached to each sub-aperture:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + R\mathbf{c}_n. \quad (\text{A30})$$

with $\mathbf{c}_n = (c_{x,n}, c_{y,n})$ the n^{th} sub-aperture center normalized by R . We define B as the global aperture diameter, and:

$$\mathbf{u}_n \triangleq \frac{\mathbf{r}_n}{R}, \quad \mathbf{u}' \triangleq \frac{\mathbf{r}}{B/2}, \quad (\text{A31})$$

with \mathbf{u}_n the reduced coordinates over the sub-aperture and \mathbf{u}' the reduced coordinates over the global aperture. Therefore:

$$\mathbf{u}' = \frac{2R}{B} (\mathbf{u}_n + \mathbf{c}_n). \quad (\text{A32})$$

Then, inserting in Eq. (A29), a defocus can be decomposed as:

$$Z_4(\mathbf{u}') = \sqrt{3} \left[2 \frac{4R^2}{B^2} (\mathbf{u}_n^2 + 2\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{c}_n + c_n^2) - 1 \right] \quad (\text{A33})$$

$$= \frac{4R^2}{B^2} Z_4(\mathbf{u}_n) + 2\sqrt{3} \frac{2R^2}{B} \left[\frac{c_{x,n}}{B/2} Z_2(\mathbf{u}_n) + \frac{c_{y,n}}{B/2} Z_3(\mathbf{u}_n) \right] + \sqrt{3} \left[\frac{2R^2}{B^2/4} c_n^2 + \frac{4R^2}{B^2} - 1 \right]. \quad (\text{A34})$$

Therefore, the tip (or tilt) induced by a defocus on the n^{th} -subaperture is:

$$a_{2,n} = 2\sqrt{3} \frac{4R^2}{B^2} c_{x,n} A_4. \quad (\text{A35})$$

3. Computation of the tip/tilt coefficients

A tilt disturbance can be expressed either by an angle θ in the object space, by a k_p pixel shift over the detector (with a p_{pix} pixel pitch) or by a a_m coefficient, in waves, linked by:

$$\theta = \frac{k_p p_{pix}}{F} = \frac{2a_m \lambda}{R} \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{R\theta}{2\lambda} = k_p \frac{R p_{pix}}{2\lambda F} = \frac{k_p}{4n_s}, \quad (\text{A36})$$

since from Eq. (A27) the peak-to-valley amplitude of Z_2 is 4. A consequence from Eq.(A36) is that the FWHM of a sub-PSF corresponds to as tilt variation of $\Delta a_2 = 1/4$ since the sub-PSF's angular FWHM is $\Delta\theta = \lambda/2R$.

4. Typical diversity for ELASTIC

The goal of this appendix is to compute the amount of defocus to have the distance between the autospots just equal to their diameter. P is defined as the distance between two aperture centers. It can be computed that the autocorrelation of an Airy pattern (which has an angular FWHM of $\lambda/(2R)$ rad) has an angular FWHM of $(2\lambda)/(3R)$ rad or 1/3 of wave from Eq. (A36). In addition, the separation between two adjacent sub-apertures with a defocus of amplitude A_4 (RMS value over the global full aperture) is from Eq. (A35) $\Delta a_m = 2\sqrt{3} \frac{4R^2}{B^2} P A_4$. Equalizing this last expression with 1/3 gives the typical defocus value:

$$A_4 = \frac{1}{6\sqrt{3}} \frac{B^2}{4R^2} \frac{1}{P}. \quad (\text{A37})$$

5. Minimal distance between the sub-PSFs

The minimal distance between the sub-PSFs for the interspots not to pollute the signal is now defined, in the case of a single corona aperture. The separation between autospots from extremal apertures with a defocus of amplitude A_4 (RMS value over the full aperture) is $\Delta a_m = 2\sqrt{3}\frac{4R^2}{B^2}(B-2R)A_4$ from Eq. (A35). Since the sub-PSF FWHM corresponds to a 1/4 tilt from App. (A3), the minimal separation is:

$$\Delta a_m = 2\sqrt{3}\frac{4R^2}{B^2}(B-2R)A_4 + \frac{1}{4}. \quad (\text{A38})$$

6. The Frequency Shifted Cross-Spectrum (FSCS)

This appendix considers the various ways to correlate two signals i_1 and i_2 , which here would stand for the two diversity PSFs.

Authors agree to define their cross-correlation or inter-correlation as $i_{1,2} = i_1 \otimes i_2$ (cf. Eq. 5) [36].

The cross-spectrum is sometimes defined as the FT (\mathcal{F}) of the cross-correlation: $\mathcal{F}[i_{1,2}] = \mathcal{F}[i_1] \times \mathcal{F}[i_2]^* = s_1 \times s_2^*$ and, in imaging through turbulence [37–39], as $s_{1,1\delta} = \langle s_1 \Delta_m s_1^* \rangle$ where the average is performed over turbulent phase outcomes and Δ_m is the shift operator by a small increment δ defined in Eq. (11), used by the Knox-Thompson method to estimate the object phase from turbulence-degraded images [40]. This cross-spectrum only holds for a stack of single images.

The product used by Eq. (12), defined as $s_{1,2\delta} = s_1 \Delta_m s_2^*$, is a combination of these two products: it is performed in the spectral domain, between two different signals, with a small shift introduced to access some phase information as detailed by Fig. 5. To the best of our knowledge, it has not been introduced before so we name it the Frequency Shifted Cross-Spectrum (FSCS).

The FSCS can be equivalently understood in the direct domain from Fig. 4: the spectral shift of s_2 is equivalent to the multiplication of i_2 by a phase slope. In the real image of Fig. 4, line 1, right, each sub-PSF would inherit a phase, proportional to its x -coordinate. After what can be called a frequency-shifted cross-correlation (the FT of the FSCS), the *positions* of the autospots are still given by the *differential positions* of their related sub-PSFs in the two images as illustrated by Fig. 4, line 2, but their *value* would have a phase given by the associated phase (thus *absolute position*) in the sole i_2 image.

REFERENCES

1. <http://www.eso.org/sci/facilities/paranal/telescopes/vlti.html>.
2. <http://www2.lowell.edu/npoi/>.
3. <http://www.lbt.org/>.
4. <http://www.gmto.org/>.
5. <http://www.tmt.org/>.
6. <https://www.eso.org/sci/facilities/eelt/>.
7. G. Moretto, J. R. Kuhn, E. Thiébaud, M. Langlois, S. V. Berdyugina, C. Harlinton, and D. Halliday, "New strategies for an extremely large telescope dedicated to extremely high contrast: the Colossus project," (2014).
8. G. Pareschi, G. Agnetta, L. Antonelli, D. Bastieri, G. Bellassai, M. Belluso, C. Bigongiari, S. Billotta, B. Biondo, G. Bonanno *et al.*, "The dual-mirror small size telescope for the Cherenkov Telescope Array," arXiv preprint arXiv:1307.4962 (2013).
9. www.jwst.nasa.gov/.
10. <http://www.esa.int/OurActivities/SpaceScience/Darwinoverview>.
11. M. R. Bolcar, K. Balasubramanian, M. Clampin, J. Crooke, L. Feinberg, M. Postman, M. Quijada, B. Rauscher, D. Redding, N. Rioux, S. Shaklan, H. P. Stahl, C. Stahle, and H. Thronson, "Technology development for

the Advanced Technology Large Aperture Space Telescope (ATLAST) as a candidate Large UV-Optical-Infrared (luvoir) surveyor," (2015), vol. 9602, pp. 960209–960209–14.

12. M. Sauvage, J. Amiaux, J. Austin, M. Bello, G. Bianucci, S. Chesné, O. Citterio, C. Collette, S. Correia, G. A. Durand, S. Molinari, G. Pareschi, Y. Penfornis, G. Sironi, G. Valsecchi, S. Verpoort, and U. Wittrock, "A development roadmap for critical technologies needed for TALC: a deployable 20m annular space telescope," (2016), vol. 9904, pp. 99041L–99041L–8.
13. J. T. Pitman, A. Duncan, D. Stubbs, R. D. Sigler, R. L. Kendrick, E. H. Smith, J. E. Mason, G. Delory, J. H. Lipps, M. Manga *et al.*, "Remote sensing space science enabled by the multiple instrument distributed aperture sensor (midas) concept," in "Optical Science and Technology, the SPIE 49th Annual Meeting," (International Society for Optics and Photonics, 2004), pp. 301–310.
14. L. Mugnier, F. Cassaing, B. Sorrente, F. Baron, M.-T. Velluet, V. Michau, and G. Rousset, "Multiple-Aperture Optical Telescopes: some key issues for Earth observation from a GEO orbit," in "5th International Conference On Space Optics," , vol. SP-554CNES/ESA (ESA, Toulouse, France, 2004), vol. SP-554, pp. 181–187.
15. M. Mesrine, E. Thomas, S. Garin, P. Blanc, C. Alis, F. Cassaing, and D. Laubier, "High resolution Earth observation from Geostationary orbit by optical aperture synthesis," in "Sixth International Conference on Space Optics," (ESA-CNES, ESA/ESTEC Noordwijk, The Netherlands, 2006).
16. F. Baron, I. Mocoëur, F. Cassaing, and L. M. Mugnier, "Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes: derivation of an analytical estimator," J. Opt. Soc. Am. A **25**, 1000–1015 (2008).
17. R. A. Gonsalves, "Phase retrieval and diversity in adaptive optics," Optical Engineering **21**, 215829–215829– (1982).
18. L. M. Mugnier, A. Blanc, and J. Idier, "Phase diversity: A technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging," (Elsevier, 2006), pp. 1 – 76.
19. R. G. Paxman and J. R. Fienup, "Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity," J. Opt. Soc. Am. A **5**, 914–923 (1988).
20. D. C. Redding, S. A. Basinger, A. E. Lowman, A. Kissil, P. Y. Bely, R. Burg, R. G. Lyon, G. E. Mosier, M. Femiano, M. E. Wilson, R. G. Schunk, L. D. Craig, D. N. Jacobson, J. M. Rakoczy, and J. B. Hadaway, "Wavefront sensing and control for a Next Generation Space Telescope," in "Space Telescopes and Instruments V," , vol. 3356 (2) P. Y. Bely and J. B. Breckinridge, eds. (spie, 1998), vol. 3356 (2), pp. 758–772.
21. D. A. Carrara, B. J. Thelen, and R. G. Paxman, "Aberration correction of segmented-aperture telescopes by using phase diversity," in "Image reconstruction from incomplete data," , vol. 4123 M. A. Fiddy and R. P. Millane, eds. (spie, 2000), vol. 4123, pp. 56–63.
22. L. H. Lee, G. Vasudevan, and E. H. Smith, "Point-by-point approach to phase-diverse phase retrieval," in "IR space telescopes and Instruments," , vol. 4850 J. C. Mather, ed. (spie, 2003), vol. 4850, pp. 441–452.
23. B. H. Dean, D. L. Aronstein, J. S. Smith, R. Shiri, and D. S. Acton, "Phase retrieval algorithm for JWST Flight and Testbed Telescope," (Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2006), vol. 6265, pp. 626511–626511–17.
24. I. Mocoëur, F. Cassaing, F. Baron, L. Mugnier, S. Hofer, and H. Thiele, "Darwin fringe sensor: experimental results on the BRISE bench," in "Advances in stellar interferometry," , vol. 6268 J. D. Monnier, M. Schöller, and W. C. Danchi, eds. (Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 2006), vol. 6268.
25. S. Meimon, E. Delavaquerie, F. Cassaing, T. Fusco, L. M. Mugnier, and V. Michau, "Phasing segmented telescopes with long-exposure phase diversity images," in "Ground-based and Airborne Telescopes II," , vol. 7012 of *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference* L. M. Stepp and R. Gilmozzi, eds. (2008), vol. 7012 of *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*.
26. D. S. Acton, T. Towell, J. Schwenker, J. Swensen, D. Shields, E. Sabatke, L. Klingemann, A. R. Contos, B. Bauer, K. Hansen, P. D.

- Atcheson, D. Redding, F. Shi, S. Basinger, B. Dean, and L. Burns, "Demonstration of the James Webb Space Telescope commissioning on the JWST testbed telescope," (2006), vol. 6265, pp. 62650R–62650R–8.
27. S. T. Thurman, "Method of obtaining wavefront slope data from through-focus point spread function measurements," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 1–7 (2011).
 28. A. S. Jurling and J. R. Fienup, "Applications of algorithmic differentiation to phase retrieval algorithms," *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 1348–1359 (2014).
 29. R. E. Carlisle and D. S. Acton, "Demonstration of extended capture range for James Webb Space Telescope phase retrieval," *Appl. Opt.* **54**, 6454–6460 (2015).
 30. M. D. Perrin, D. S. Acton, C.-P. Lajoie, J. S. Knight, M. D. Lallo, M. Allen, W. Baggett, E. Barker, T. Comeau, E. Coppock, B. H. Dean, G. Hartig, W. L. Hayden, M. Jordan, A. Jurling, T. Kulp, J. Long, M. W. McElwain, L. Meza, E. P. Nelan, R. Soummer, J. Stansberry, C. Stark, R. Telfer, A. L. Welsh, T. P. Zielinski, and N. T. Zimmerman, "Preparing for JWST wavefront sensing and control operations," (2016), vol. 9904, pp. 99040F–99040F–19.
 31. D. S. Acton, J. S. Knight, A. Contos, S. Grimaldi, J. Terry, P. Lightsey, A. Barto, B. League, B. Dean, J. S. Smith *et al.*, "Wavefront sensing and controls for the James Webb Space Telescope," (*Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 2012), vol. 8442, p. 84422H.
 32. R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 207–211 (1976).
 33. F. Cassaing, B. Sorrente, L. Mugnier, G. Rousset, V. Michau, I. Mocœur, and F. Baron, "BRISE: a multipurpose bench for cophasing sensors," in "Advances in stellar interferometry," vol. 6268 J. D. Monnier and M. Schöller, eds. (*Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 2006), vol. 6268.
 34. I. Mocœur, L. M. Mugnier, and F. Cassaing, "Analytical solution to the phase-diversity problem for real-time wavefront sensing," *Opt. Lett.* **34**, 3487–3489 (2009).
 35. S. Vievard, F. Cassaing, A. Bonnefois, L. Mugnier, and J. Montri, "Real-time alignment and co-phasing of multi-aperture systems using phase diversity," in "SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation," (*International Society for Optics and Photonics*, 2016), pp. 99062Q–99062Q.
 36. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics* (Roberts and Company Publishers, 2005).
 37. J. C. Fontanella and A. Sève, "Reconstruction of turbulence-degraded images using the Knox–Thompson algorithm," *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 438–448 (1987).
 38. F. Roddier, "Interferometric imaging in optical astronomy," *Physics Reports* **170**, 99–166 (1988).
 39. M. C. Roggemann, B. M. Welsh, and B. R. Hunt, *Imaging through turbulence* (CRC press, 1996).
 40. K. T. Knox and B. J. Thompson, "Recovery of images from atmospherically degraded short-exposure photographs," *Astrophys. J.* **193**, L45–L48 (1974).
 41. S. Vievard, "Développement et validation d'un analyseur de surface d'onde en plan focal pour un instrument multi-pupille," Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (To be published in 2017).

Annexe F

**Papier de conférence SPIE 2016 :
Real time alignment and
co-phasing of multi-aperture
systems using phase diversity**

Real-time alignment and co-phasing of multi-aperture systems using phase diversity

Vievard S.^{a,b}, Cassaing F.^a, Bonnefois A.^a, Mugnier L. M.^a, and Montri J.^a

^aONERA, The French Aerospace Lab, F-92240, Chatillon, France

^bThales Alenia Space, 5 Allée des Gabians, 06150 Cannes, France

ABSTRACT

The alignment of the subapertures is a major challenge for future segmented telescopes and telescope arrays. We show here that a phase diversity sensor using two near-focus images can fully and efficiently align a multiple aperture system, both for the alignment (large amplitude tip/tilt aberrations correction) and phasing (piston and small amplitude tip/tilt aberrations correction) modes. We derive a new algorithm for the alignment of the subapertures : ELASTIC. We quantify the novel algorithm performance by numerical simulations and we demonstrate it experimentally on a test bench. We also study the performance of LAPD, a recent real-time algorithm for the phasing of the sub-apertures. This work should simplify the design of future multiple aperture systems.

Keywords: Multi-aperture systems, Phase diversity, Phasing system, Segmented mirror, Wavefront sensing

1. CONTEXT AND MOTIVATION

The resolution of a telescope is ultimately limited by its aperture diameter. The latter is limited by current technology to about 10 meters for ground-based telescopes and a few meters for space-based telescopes because of volume and mass considerations. Multi-aperture telescopes (interferometers) have the potential to remove these limitations. Space segmented telescope projects aim at astronomical (the JWST, TALC,¹ WFIRST-AFTA²) or Earth (HOASIS³) observations. Ground-based segmented telescopes already exist (Kecks) or are planned in a close future (E-ELT, TMT).

In order to reach the diffraction limit, a precise control of the sub-apertures is necessary. This so-called control consists in the measurement and correction of misalignments between sub-apertures, which are the specific aberrations of interferometry and can be described on each sub-aperture by the first three Zernike polynomials, called piston and tip-tilt. The alignment of the sub-apertures from a possible large-amplitude perturbation case (defined as follow as the coarse alignment mode) up to a fine small-amplitude perturbation case (defined as follow as the phasing mode) is a difficult task. Phase measurements are indeed difficult with quadratic optical detectors.

Focal-plane wavefront sensing is an elegant solution to measure the misalignments. Since the focal (and near-focal) image(s) of any source taken by a 2D camera shows distortions when the system is not perfectly aligned, the system misalignments can be retrieved by solving the associated problem. The main interest of this technique is that this wavefront sensor is included in the main imaging detector, simplifying the hardware and minimizing differential paths. The phase retrieval technique, based on the sole focal-plane image, is generally not sufficient to retrieve piston and tip/tilt without ambiguity except in specific cases.⁴ The phase diversity technique⁵⁶, typically based on a focal and a slightly defocused images, removes all ambiguities and operate even on unknown extended sources. Usually used for small-amplitude errors, the associated algorithms are iterative and consequently time-consuming.

The aim of this paper is to present a method to efficiently align a multi-aperture telescope with low computing cost. First, we present in section 2 a new method for large amplitude errors estimation based on the sole use of two images, quite similar to the Phase Diversity technique : ELASTIC (Estimation of Large Amplitude Subaperture

Further author information: (Send correspondence to Sebastien VIEVARD)

S. Vievard: E-mail: sebastien.vievard@onera.fr, Telephone: +33 (0)1 46 73 49 23

Tip-tilt by Image Correlation) algorithm. We describe this algorithm, quantify its performance by numerical simulations and experimentally demonstrate its capability. Then, in section 3, we study the performance of a recent analytical (and potentially real-time) estimator nicknamed LAPD for Linearized Alogorithm using Phase Diversity⁷.

2. LARGE AMPLITUDE TIP/TILT ALIGNMENT WITH GEOMETRIC DIVERSITY

The first step to reach the diffraction limit for a multi-aperture instrument is the measurement and correction of large amplitude tip/tilt errors between the sub-apertures. The use of classical phase diversity algorithms is impossible in these conditions. Indeed, these algorithms require that the beams from the different sub-apertures already interfere in order to work, and in particular that they are superimposed. Future multi-aperture systems will face the alignment problem and will need an efficient method to measure and correct large amplitude errors at a low computing cost.

In the context of JWST large amplitude alignment, Thurman proposed a geometric technique⁸ permitting to extend the normal phase retrieval capture range. This method, refined by Alden,⁹ provides an estimation of the error thanks to intensity measurements in multiple planes up to the focal plane. This estimation is then used as a starting guess. Series of defocused images will be acquired thanks to a lens wheel, and will be sent to Earth for estimation feedback. This should be iteratively processed until the complete phasing, and should take nearly a week of commissioning time.¹⁰

We propose in this section a new geometric diversity technique that can provide a simple and non-supervised estimation of full-field tip/tilt errors, using only two near-focus planes, so that the correction can be performed in full autonomy by the instrument itself in a closed-loop sequence with a limited hardware.

2.1 Optical Transfer Function (OTF) of a multi-aperture instrument in alignment mode

As it will be used in the next section to detail the algorithm, we derive here the OTF of a strongly misaligned multi-aperture instrument. We assume that sub-apertures have the same shape and the complex transmission \mathbf{p}_n :

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{u}) = \left[\Pi(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=1}^{k_{max}} a_{kn} \mathbf{Z}_k(\mathbf{u}) \right] \right] \star \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \quad (1)$$

where \mathbf{u}_n is the center of the n^{th} subaperture and the modulus is described by the disk function Π ,

$$\Pi(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq |\mathbf{u}| \leq R \quad \text{with } R \text{ the pupil radius} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

In Eq.(1), the phase of \mathbf{p}_n is expanded on k_{max} scaled Zernike polynomials \mathbf{Z}_k . a_{kn} is the rms amplitude of the k^{th} mode over the n^{th} sub-aperture and $j^2 = -1$. Note that in our case, $k_{max} = 3$ (1: piston, 2-3: tip-tilt).

The OTF of a N -aperture instrument (with for example 3 apertures, cf Fig.1a), defined as the pupil auto-correlation, is the sum of N^2 peaks : N superimposed photometric peaks (central peak of the OTF, cf Fig.1b) and $N(N - 1)$ interferometric peaks (peaks around the central peak, cf Fig.1b).

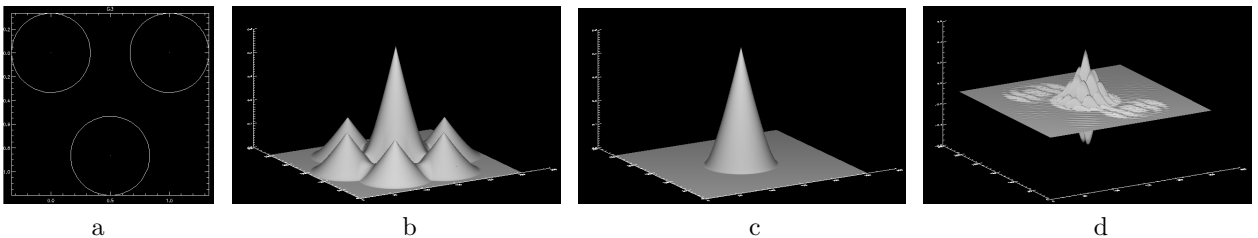


Figure 1. a. Goly 3 pupil configuration ; b. Goly 3 coherent OTF (aligned) ; c. Goly 3 incoherent OTF (aligned) ; d. Goly 3 coherent OTF (large differential tip/tilts between sub-apertures).

In the alignment case, the interferometric peaks can be neglected because of the large amplitude tip/tilt errors (cf the difference between Fig.1b and d) and the *a priori* large piston error with respect to the coherence length, which puts the instrument in an incoherent mode (cf Fig.1c-). The information we are looking for has thus to be found in the central photometric peaks (cf the large sinusoidal modulation in Fig.1d). The algorithm proposed in next section relies only on those photometric peaks. If necessary, interferometric peaks can also be removed with a low-pass filter. It comes that the OTF of a N -aperture misaligned instrument can be written as the sum of the OTFs of each sub-aperture:

$$OTF(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{p}_n \star \mathbf{p}_n)(\mathbf{u}) \quad (2)$$

The autocorrelation of the pupil "kills" the piston information introduced in the pupil, but retains the tip/tilt information. We then have :

$$OTF(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N \Lambda_n(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 a_{kn} \mathbf{Z}_k(\mathbf{u}) \right] \quad (3)$$

with $\Lambda_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{p}_n \star \mathbf{p}_n)(\mathbf{u})$ and a_{kn} the aberration coefficient we want to estimate.

2.2 Principle of the algorithm

The information we want to obtain are the a_{kn} coefficients in Eq.(3). The key to retrieve this information is to compute the intercorrelation between the focal and the defocused images. This correlation is easier to compute in the Fourier domain where it results in a simple termwise multiplication of the OTFs. In addition, we conjugate and shift one OTF along one direction (u_x or u_y) by Δ pixels. Because our study is limited to the point source observation of the instrument, we name OTF the Fourier Transform of the images (PSFs : Point Spread Functions). Therefore, we compute $T = OTF^f * \overline{OTF^d}^\Delta$ where OTF^f is the focal image Fourier Transform and $\overline{OTF^d}^\Delta$ is the shifted conjugated Fourier Transform of the defocused image :

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N \Lambda_n^f(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 a_{kn} \mathbf{Z}_k(\mathbf{u}) \right] \sum_{n'=1}^N \Lambda_{n'}^d(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \exp \left[-j \sum_{k'=2}^3 a_{k'n'} \mathbf{Z}_{k'}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \right] \quad (4)$$

With $C_{n,n'}$ the multiplication of both OTF (in the focal plane, $\Lambda_n^f(\mathbf{u})$, and in the defocused plane, $\Lambda_{n'}^d(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$), and because the Z_2 and Z_3 polynomials are linear, we can develop :

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N C_{n,n'}(\mathbf{u}) \exp \left[j \sum_{k=2}^3 a_{kn} \mathbf{Z}_k(\mathbf{u}) \right] \exp \left[-j \sum_{k'=2}^3 a_{k'n'} (\mathbf{Z}_{k'}(\mathbf{u}) + \mathbf{Z}_{k'}(\Delta \mathbf{u})) \right] \quad (5)$$

$$T(\mathbf{u}) = \underbrace{\sum_{n=1}^N C_{n,n}(\mathbf{u}) \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 a_{kn} \mathbf{Z}_k(\Delta \mathbf{u}) \right]}_{\text{Auto-term}} + \underbrace{\sum_{n \neq n'}^N C_{n,n'}(\mathbf{u}) \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 (a_{kn} - a_{k'n'}) \mathbf{Z}_k(\mathbf{u}) + a_{k'n'} \mathbf{Z}_k(\Delta \mathbf{u}) \right]}_{\text{Inter-term}} \quad (6)$$

Eq.(6) shows that we have two terms : the "auto-terms" and the "inter-terms". The "auto-terms" are the correlation between the OTF of the n^{th} pupil in the focal plane with the shifted conjugated OTF of the same n^{th} pupil in the defocused plane. The "inter-terms" are the correlation between the OTF of each pupil in the focal plane, with the shifted conjugated OTF of each other pupil in the defocused plane. Eq.(6) also shows the interest of the shift : the tip/tilt information that would have disappeared without shifting the conjugated OTF is converted into a piston. Indeed with $k = 2$ or 3 , $Z_k(\Delta \mathbf{u})$ is a constant depending on the direction and the amplitude of the pixel shift. This piston is alone on the auto-terms, and is added to the tip/tilt in the inter-terms.

To illustrate this, we simulate the focal and the defocused images of an unresolved object with a strongly misaligned 7 sub-aperture instrument (Fig.2a and b). The effect of the defocus on the images can be seen on Fig.2b. For convenience, we show the correlation of the focal image with itself (Fig.2c), and the correlation of the focal image with the defocused image (Fig.2d). In the two cases, we can see the "auto-terms" in the circle, and the "inter-terms" all around. We see that all the "auto-terms" are superimposed in the case of the correlation between the focal plane and itself : we cannot extract any information from these "auto-terms". However, we see that the "auto-terms" of the focal plane and defocused plane correlation are separated. The defocus helps us to separate each sub-aperture information. The "auto-terms" positions are determined by the introduced defocus and the "inter-term" positions depend on the image spots separation : when the amplitude error is large (in our case), the "inter-terms" are well separated from the "auto-terms" (as we can see Fig.2d).

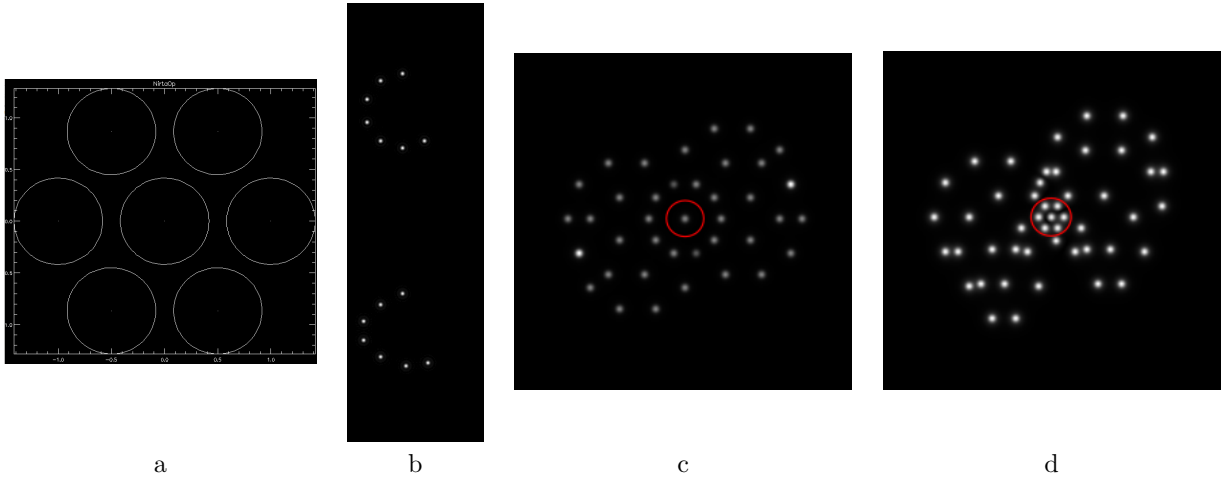


Figure 2. a. 7 sub-aperture configuration ; b. Focal (up) and 5 rad RMS defocused (down) images of an unresolved object from the misaligned instrument. Each spot is the image (PSF) of one subaperture ; c. Correlation of the focal image with itself (auto-terms of the correlation in the red circle) ; d. Correlation of the focal image and the defocused image (auto-terms of the correlation in the red circle)

Assuming that the sub-aperture PSFs are sufficiently separated, the "inter-terms" outside the circle can be filtered and Eq.(6) then becomes, with $n = n'$:

$$T(\mathbf{u}) = \sum_n C_{n,n}(\mathbf{u}) \exp \left[-j \sum_{k=2}^3 a_{kn} \mathbf{Z}_k(\Delta \mathbf{u}) \right] \quad (7)$$

For each direction (u_x or u_y) corresponding to tip or tilt search, we can write Eq.(7) as :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_x = \mathbf{C}_x \gamma_x & \text{for the tip search, with a shift along } u_x \\ \mathbf{T}_y = \mathbf{C}_y \gamma_y & \text{for the tilt search, with a shift along } u_y \end{cases} \quad (8)$$

With \mathbf{T}_x and \mathbf{T}_y the images correlation values with a shift along one direction and the other, \mathbf{C}_x and \mathbf{C}_y the pupil's reference modes (with a shift along one direction and the other) without aberration and γ_x and γ_y the aberrations amplitudes. Since Eq.(8) are linear systems, they can easily be inverted (in a least-square sense since they are *a priori* rectangular). In this goal, we compute the Singular Value Decomposition (SVD) of (for example) \mathbf{C}_x :

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{U}_x \Delta_x \mathbf{V}_x^H \quad (9)$$

where \mathbf{U}_x and \mathbf{V}_x^H are regular change-of-basis matrices and Δ_x a diagonal decreasing matrix of positive singular values. We can then compute the pseudo-inverse of \mathbf{C}_x :

$$\mathbf{C}_x^\dagger = \mathbf{V}_x \Delta_x^\dagger \mathbf{U}_x^H \quad (10)$$

where each term of the diagonal matrix Δ_x^\dagger is the inverse of corresponding term in Δ_x except for nul values. Once C_x and C_x^\dagger are computed, phase estimation can be performed by :

$$\widehat{\mathbf{a}}_2 = \arg(\gamma_{x,estim}) \quad (11)$$

where $\widehat{\mathbf{a}}_2$ is the estimated tip coefficient vector, and $\gamma_{x,estim} = C_x^\dagger T_x$. Here, we retrieve the global tip as expected. Eq.(11) is well suited to a real-time system since C_x^\dagger , which only depends on the instrumental setup, can be pre-computed once for all. The same operations are performed for the other direction.

This algorithm can be used to align the sub-apertures, in open loop if absolute calibration is sufficient or in close-loop otherwise. In this case, the non-overlapping hypothesis is no longer valid at the end. To solve for this, an extension of this algorithm has been derived.¹¹ In the next section, we present global results of the coarse alignment using ELASTIC algorithm plus its refinement.

2.3 Performance evaluation

We present in this section the sensor response to a tip-tilt error. The following simulations were performed with the seven subaperture configuration as shown in Fig.2. The object is an unresolved source and the quasi-monochromatic images of size 256x256 pixels are simulated with photon noise, a 10 electrons per pixel read-out-noise with a maximum value of 1000 photon per pixel. They are sampled at the Shannon rate.

Fig.3 shows the estimation bias regarding the tip-tilt perturbation. The amplitude of the perturbations was chosen from 0 to 25 rad RMS, corresponding to the image boundaries (with more than 25 rad RMS, the spot is out of the field). We can see that the algorithm bias is less than 0.2 rad RMS in 20% of the cases, and less than 2 to 4 rad RMS in 100% of the cases. More important, the estimation bias decreases with the perturbation amplitude. Indeed, the bias is less than 0.2 rad RMS for 100% of the cases when the perturbation amplitude becomes lower than 1 rad RMS.

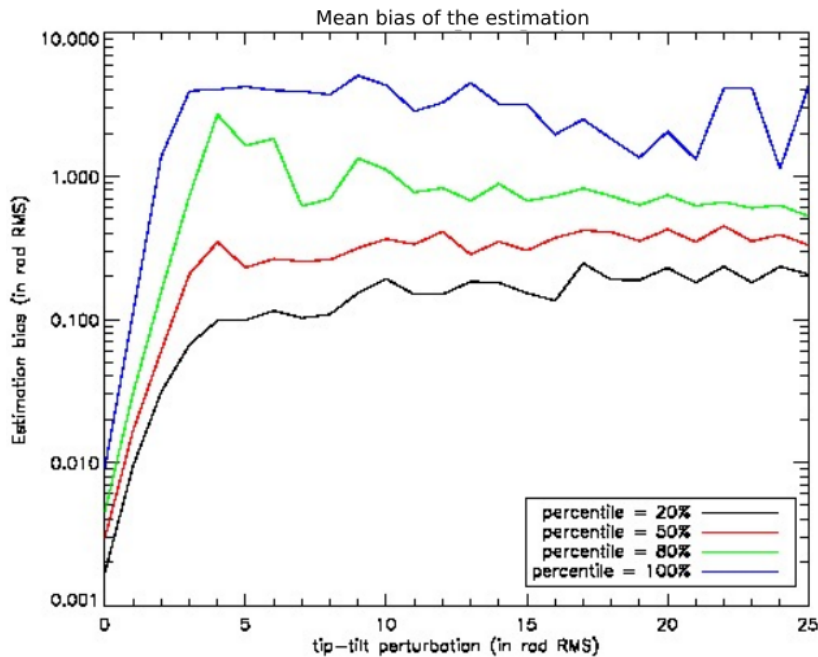


Figure 3. Estimation bias regarding the amplitude perturbation. The graph shows the distribution of the bias over 100 random outcomes of tip-tilt aberrations in a HEXA7 pupil configuration. Photometry used in this example was: Maximum of the image at 1000 photo-electrons and a 10 electrons RON.

We can thus claim that the system can be brought in a less than 0.2 rad RMS amplitude tip-tilt perturbation, by using ELASTIC in a closed loop. As we will see in the following sections, it corresponds to the input range of the small amplitude error estimation algorithm.

2.4 Experimental results

2.4.1 A dedicated bench for multiple-aperture cophasing

In order to test and validate the algorithm, we have a dedicated experimental bench.¹² Figure 5 illustrates the optical bench, the following paragraphs will present different important parts of the bench : the source module, the multiple-aperture mirror and the detection module.

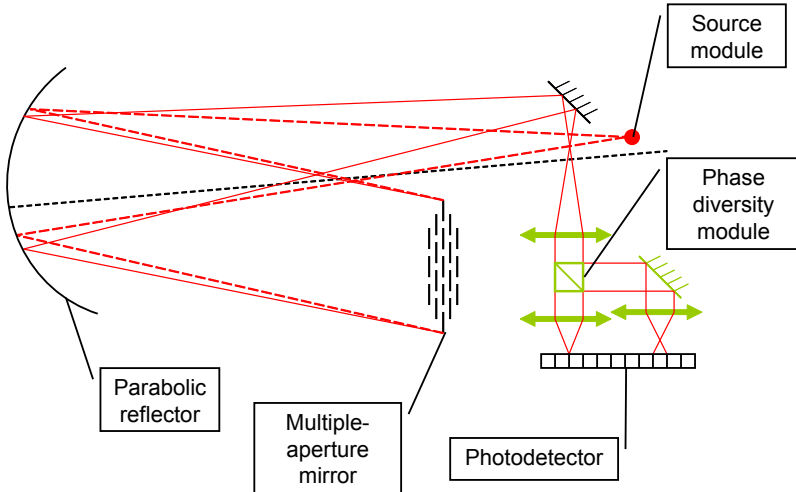


Figure 4. Scheme of the optical bench used for the experimental validation of the sensor.¹³



Figure 5. Multi-aperture mirror, manufactured by GEPI

The source module We can select 2 different types of source. A Thorlabs fibered laser diode emitting at 635 nm is used as an unresolved source. The other is an Oled device, emitting at 550 nm, with a resolution of 852x600 pixels, used as a resolved source.

The multiple-aperture mirror This module is a multiple-aperture mirror manufactured by GEPI (Galaxies, Etoiles, Physique et Instrumentation) laboratory of Observatoire de Paris. As we can see on Figure 6, it is composed by nineteen mirrors. In order to introduce perturbations in the pupil plane, each mirror is held by three piezoelectric components. These have no control loop and they suffer from hysteresis. Thus each displacement is not perfectly deterministic.

The detection module As we can see on Figure 5, the detection module is used to obtain the two images on the detector. A first lens collimates the diverging incoming beam, then a cube splits the beam in two, and the two other lenses refocus the image on two different areas of the camera. One is at the focal distance of the lense, the other can be translated to choose the desired defocus.

2.4.2 Loop closure on an unresolved source

To validate the algorithm, we succeeded in aligning a strongly misaligned multi-aperture instrument. We present the alignment of a HEXA 7 pupil configuration, as we can see Fig.2 and Fig.5 (center part of the mirror), on an unresolved object. Unfortunately, the phase-diversity sensor was not designed with the requirement of large-amplitude diversity required by the ELASTIC algorithm. We thus replaced the spatial diversity by a temporal diversity, applying on each segment tip/tilt offsets similar to thoses that the global defocus would have introduced.

As we can see Fig.6, we managed to align the instrument from a large amplitude to a small amplitude error case (where the small-amplitude algorithm can then take over and perform the fine corrections). The introduced

gain of the loop closure has been on purpose chosen low (gain = 0.05) in order to have a precised control over each sub-aperture. This alignment test took less than a minute. We are currently working on an optimization to reduce this duration. We can notice fringes when two spots are close or superimposed. They are due to the interferences between two sub-apertures and occur even without piston correction because of the long coherence length of the source.

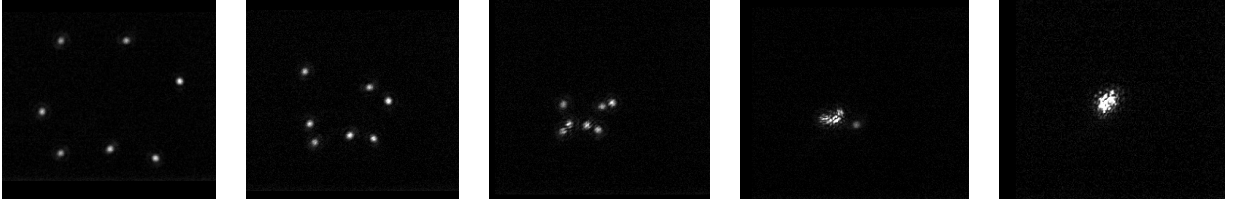


Figure 6. Loop closure with the ELASTIC algorithm estimating tip/tilt aberrations. Iterations are 0, 10, 20, 25 and 30. We only show here the focal image.

3. SMALL AMPLITUDE PISTON-TIP-TILT ALIGNMENT BY PHASE DIVERSITY

Phase Diversity is now routinely used for the calibration of optical instruments, and is particularly suited for the calibration of multi-aperture instruments. However, the corresponding algorithms are most often time-consuming.

However, when residual aberrations are in a small range, as it is the case after the ELASTIC algorithm alignment, quick, linearized algorithms can be used. We therefore followed Mocoer's⁷ approach to write the LAPD (Linearized Analytical Phase Diversity) algorithm, which allows a precise piston and tip-tilt measurement over about one radian range.

3.1 The LAPD Algorithm

The algorithm supposes that the perturbations are small enough to allow a 1^{rst} order Taylor developpment of the PSF \mathbf{h} versus the aberration vector \mathbf{a} (Eq.12):

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{h}) + o(\mathbf{a}) \quad (12)$$

where $\mathbf{a} = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{k,n}, \dots)$ is the vector of the Zernike coefficients of the residual perturbations we want to measure, k the Zernike mode, n the index of the sub-aperture, and $\mathbf{grad}(\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{0,0}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{0,1}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial a_{k,n}}, \dots \right)$ the (k, n) Jacobian matrix of \mathbf{h} .

Doing so, Mocoer showed that the Phase Diversity criterion of two images $\tilde{\mathbf{i}}_1$ and $\tilde{\mathbf{i}}_2$ whose PSFs are \mathbf{h}_1 and \mathbf{h}_2 could be simply written :

$$J(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu} |\mathbf{A}(\nu)\mathbf{a} - \mathbf{B}(\nu)|^2 + \text{Cst} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\nu) &= \frac{1}{\mathbf{C}(\nu)} [\tilde{\mathbf{i}}_2(\nu)\boldsymbol{\alpha}_1(\nu) - \tilde{\mathbf{i}}_1(\nu)\boldsymbol{\alpha}_2(\nu)] \\ \mathbf{B}(\nu) &= \frac{1}{\mathbf{C}(\nu)} [\tilde{\mathbf{i}}_1\boldsymbol{\beta}_2(\nu) - \tilde{\mathbf{i}}_2(\nu)\boldsymbol{\beta}_1(\nu)] \\ \mathbf{C}(\nu) &= \sqrt{|\boldsymbol{\beta}_1(\nu)|^2 + |\boldsymbol{\beta}_2(\nu)|^2 + \epsilon} \end{aligned} \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= FT[\mathbf{grad}(\mathbf{h}_{1,2}(\mathbf{a} = \mathbf{0}))] \\ \beta_{1,2} &= FT[\mathbf{h}_{1,2}(\mathbf{a} = \mathbf{0})]\end{aligned}\quad (15)$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} and \mathbf{C} are matrices that can be easily computed from the image formation model.

Then \mathbf{a} can be estimated analytically by a simple matrix inversion because $J(\mathbf{a})$ in Eq. 13 is quadratic in \mathbf{a} :

$$\hat{\mathbf{a}} = [\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})]^\dagger \cdot [\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{B})] \quad (16)$$

3.2 Numerical experiments

Numerical experiments were performed on a very wide set of random tip-tilt-piston aberrations, in several configurations including realistic noise, in order to estimate the accuracy and the range of the LAPD algorithm. An example of result is shown on Fig.7 :

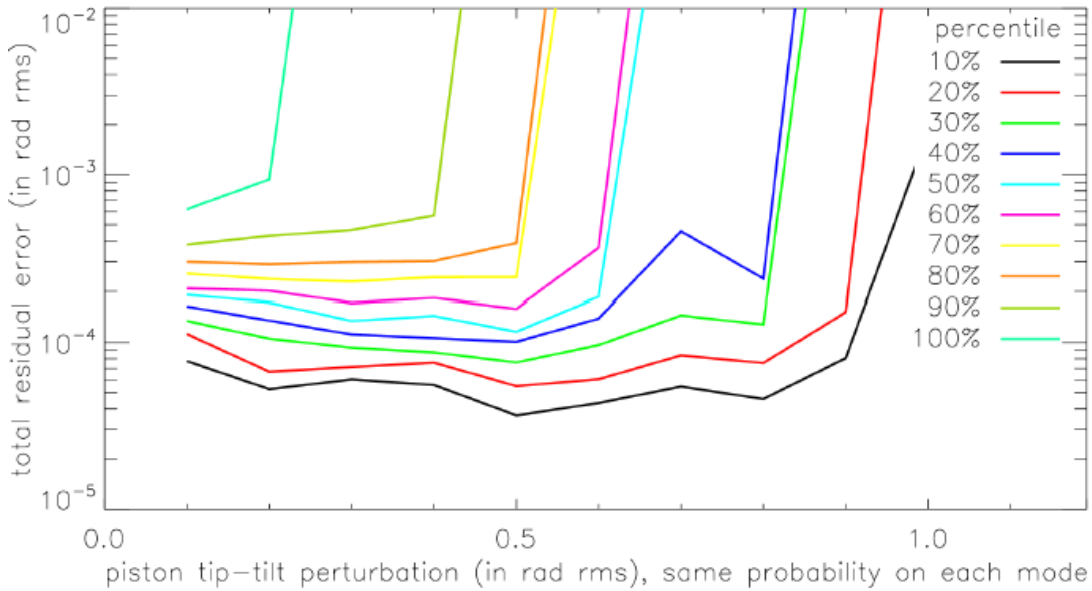


Figure 7. Example of simulation results, showing the distribution of the errors over 1000 random trials of piston tip-tilt aberrations in a 3-apertures configuration. Similar results were obtained with more subapertures. NB : the photometry used in this example was: maximum of the image at 20000 photo-electrons and a 10 electron RON.

The results are very promising :

- better than 0.01 rad rms to 0.05 rad rms accuracy (depending on the number of the subapertures) is obtained in 100 % of the cases over a 0.35 rad rms perturbation, and in more than 50 % of the cases over a 1 rad rms perturbation.
- if tip-tilt perturbations are limited to 0.1 rad rms, which is a reasonable assumption, then the same accuracy is obtained in 100 % of the cases over a larger than 1 rad rms piston range.
- less than 0.3 seconds, with IDL and an average laptop, where needed in order to compute pistons in a 19 aperture configuration.

Now these results have to be confirmed by experimentations on the BRISE test bench.

4. CONCLUSION

We introduced a new algorithm, ELASTIC, based on a "geometric diversity" of larger amplitude and a simple and non-supervised algorithm, to perform the initial step of large amplitude tip-tilt error estimation. As experimentally demonstrated, this algorithm can bring a strongly misaligned segmented instrument in a coarsely aligned state. Then a large amplitude piston alignment can be operated (by a simple 1D scan of the segments, with active tip/tilt control by ELASTIC) until all conditions are met to start the fine phasing. We then have demonstrated here that a linearized fast version can be used on a 3 or more sub-aperture pupil.

This procedure has an impact on the hardware : indeed the diversity amplitude needs to be relatively large for the initial alignment, and relatively small for the fine phasing. The solution we demonstrated on our bench is to use a fixed spatial diversity for the fine phasing during observation and a temporal modulation (a "pseudo-defocus" obtained by applying best-fit piston/tip/tilt on the segments themselves) for the large diversity required by ELASTIC during the initial alignment. Therefore, ELASTIC can be implemented without any additional hardware.

Our short-term perspective is to confirm the LAPD algorithm simulation results by experimentations on the BRISE test bench. We then aim at extending ELASTIC to the case of extended objects.

REFERENCES

- [1] Sauvage, M. et al., "A development roadmap for critical technologies needed for talc: a deployable 20m annular space telescope," *Proc. SPIE* (9904-51) (2016).
- [2] Spergel, D. et al., "Wide-Field InfraRed Survey Telescope-Astrophysics Focused Telescope Assets WFIRST-AFTA Final Report," *ArXiv e-prints* (May 2013).
- [3] Mesrine, M., Thomas, E., Garin, S., Blanc, P., Alis, C., Cassaing, F., and Laubier, D., "High resolution Earth observation from geostationary orbit by optical aperture synthesis," in [*Sixth International Conference on Space Optics*], ESA-CNES (June 2006).
- [4] Baron, F., Mocoœur, I., Cassaing, F., and Mugnier, L. M., "Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1000–1015 (May 2008).
- [5] Gonsalves, R. A., "Phase retrieval and diversity in adaptive optics," *Optical Engineering* **21**(5), 215829–215829– (1982).
- [6] Mugnier, L. M., Blanc, A., and Idier, J., "Phase diversity: a technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging," *Advances in Imaging and Electron Physics* **141**, 1–76 (2006).
- [7] Mocoœur, I., Mugnier, L. M., and Cassaing, F., "Analytical solution to the phase-diversity problem for real-time wavefront sensing," *Optics letters* **34**(22), 3487–3489 (2009).
- [8] Thurman, S. T., "Method of obtaining wavefront slope data from through-focus point spread function measurements," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 1–7 (Jan 2011).
- [9] Jurling, A. S. and Fienup, J. R., "Extended capture range for focus-diverse phase retrieval in segmented aperture systems using geometrical optics," *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 661–666 (Mar 2014).
- [10] Carlisle, R. E. and Acton, D. S., "Demonstration of extended capture range for james webb space telescope phase retrieval," *Appl. Opt.* **54**, 6454–6460 (Jul 2015).
- [11] Cassaing, F. and Vievard, S., "Large amplitude fast estimation of tip/tilt for multiple-aperture systems by geometric diversity," *to be submitted* (2016).
- [12] Cassaing, F., Sorrente, B., Mugnier, L., Rousset, G., Michau, V., Mocoœur, I., and Baron, F., "Brise: a multipurpose bench for cophasing sensors," in [*Advances in stellar interferometry*], Monnier, J. D. and Schöller, M., eds., **6268** (2006).
- [13] Denolle, B., Cassaing, F., Montri, J., Lisowski, J., and Amans, J. P., "Real-time focal-plane wavefront sensing for compact imaging phased-array telescopes: numerical and experimental demonstration," *Proc. SPIE* **8713**, 87130J–87130J–10 (2013).

Bibliographie

- [Baron et al., 2003] Baron, F., Cassaing, F., Blanc, A., and Laubier, D. (2003). Cophasing a wide field multi-aperture array by phase diversity : influence of aperture redundancy and dilution. *OFFICE NATIONAL D ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES ONERA-PUBLICATIONS-TP*, (29).
- [Baron et al., 2008] Baron, F., Mocoœur, I., Cassaing, F., and Mugnier, L. M. (2008). Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes : derivation of an analytical estimator. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(5) :1000–1015.
- [Blanc, 2002] Blanc, A. (2002). *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apport de la diversité de phase*. PhD thesis, Paris 11, Orsay.
- [Bucci et al., 1999] Bucci, O., Capozzoli, A., and D'Elia, G. (1999). Regularizing strategy for image restoration and wave-front sensing by phase diversity. *JOSA A*, 16(7) :1759–1768.
- [Carlisle and Acton, 2015] Carlisle, R. E. and Acton, D. S. (2015). Demonstration of extended capture range for James Webb Space Telescope phase retrieval. *Appl. Opt.*, 54(21) :6454–6460.
- [Carrara et al., 2000] Carrara, D. A., Thelen, B. J., and Paxman, R. G. (2000). Aberration correction of segmented-aperture telescopes by using phase diversity. In Fiddy, M. A. and Millane, R. P., editors, *Image reconstruction from incomplete data*, volume 4123, pages 56–63. spie.
- [Cassaing, 1998] Cassaing, F. (1998). *Analyse d'un instrument à synthèse d'ouverture optique : méthodes de cophasage et imagerie à haute résolution angulaire*. PhD thesis.
- [Cassaing et al., 2006] Cassaing, F., Sorrente, B., Mugnier, L., Rousset, G., Michau, V., Mocoœur, I., and Baron, F. (2006). BRISE : a multipurpose bench for cophasing sensors. In Monnier, J. D. and Schöller, M., editors, *Advances in stellar interferometry*, volume 6268. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Chanan et al., 2000] Chanan, G., Ohara, C., and Troy, M. (2000). Phasing the mirror segments of the keck telescopes ii : the narrow-band phasing algorithm. *Applied Optics*, 39(25) :4706–4714.
- [Dean et al., 2006a] Dean, B. H., Aronstein, D. L., Smith, J. S., Shiri, R., and Acton, D. S. (2006a). Phase retrieval algorithm for JWST Flight and Testbed Telescope. volume 6265, pages 626511–626511–17. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Dean et al., 2006b] Dean, B. H., Aronstein, D. L., Smith, J. S., Shiri, R., and Acton, D. S. (2006b). Phase retrieval algorithm for jwst flight and testbed telescope.

- [Denolle, 2013] Denolle, B. (2013). *Définition et caractérisation d'un nouvel analyseur de front d'onde plan focal temps réel*. PhD thesis, Paris 6.
- [Denolle et al., 2013] Denolle, B., Cassaing, F., Montri, J., Lisowski, J., and Amans, J. P. (2013). Real-time focal-plane wavefront sensing for compact imaging phased-array telescopes : numerical and experimental demonstration. volume 8713, pages 87130J–87130J–10.
- [Dimmler et al., 2008] Dimmler, M., Erm, T., Bauvir, B., Sedghi, B., Bonnet, H., Müller, M., and Wallander, A. (2008). E-elt primary mirror control system. In *Proc. SPIE Vol*, volume 7012.
- [Feinberg et al., 2007] Feinberg, L. D., Dean, B. H., Aronstein, D. L., Bowers, C. W., Hayden, W., Lyon, R. G., Shiri, R., Smith, J. S., Acton, D. S., Carey, L., et al. (2007). Trl-6 for jwst wavefront sensing and control. In *Optical Engineering+ Applications*, pages 668708–668708. International Society for Optics and Photonics.
- [Gerchberg, 1972] Gerchberg, R. W. (1972). A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35(2) :237–246.
- [Gonsalves, 1982] Gonsalves, R. A. (1982). Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, 21(5) :215829–215829–.
- [Harvey and Ftaclas, 1990] Harvey, J. E. and Ftaclas, C. (1990). Fundamental limitations on off-axis performance of phased telescope arrays.
- [Jurling and Fienup, 2014] Jurling, A. S. and Fienup, J. R. (2014). Applications of algorithmic differentiation to phase retrieval algorithms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(7) :1348–1359.
- [Labeyrie, 1978] Labeyrie, A. (1978). Stellar interferometry methods. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 16(1) :77–102.
- [Lee et al., 1999] Lee, D. J., Roggemann, M. C., and Welsh, B. M. (1999). Cramer-rao analysis of phase-diverse wave-front sensing. *JOSA A*, 16(5) :1005–1015.
- [Lee et al., 2003] Lee, L. H., Vasudevan, G., and Smith, E. H. (2003). Point-by-point approach to phase-diverse phase retrieval. In Mather, J. C., editor, *IR space telescopes and Instruments*, volume 4850, pages 441–452. spie.
- [Meimon et al., 2008] Meimon, S., Delavaquerie, E., Cassaing, F., Fusco, T., Mugnier, L. M., and Michau, V. (2008). Phasing segmented telescopes with long-exposure phase diversity images. In Stepp, L. M. and Gilmozzi, R., editors, *Ground-based and Airborne Telescopes II*, volume 7012 of *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*.
- [Meynadier et al., 1999] Meynadier, L., Michau, V., Velluet, M.-T., Conan, J.-M., Mugnier, L. M., and Rousset, G. (1999). Noise propagation in wave-front sensing with phase diversity. *Applied optics*, 38(23) :4967–4979.
- [Michau et al., 1993] Michau, V., Rousset, G., and Fontanella, J. (1993). Wavefront sensing from extended sources. In *Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, page 124.
- [Michelson and Pease, 1921] Michelson, A. A. and Pease, F. G. (1921). Measurement of the diameter of alpha-orionis by the interferometer. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7(5) :143–146.

BIBLIOGRAPHIE

- [Mocœur et al., 2006] Mocœur, I., Cassaing, F., Baron, F., Mugnier, L., Hofer, S., and Thiele, H. (2006). Darwin fringe sensor : experimental results on the BRISE bench. In Monnier, J. D., Schöller, M., and Danchi, W. C., editors, *Advances in stellar interferometry*, volume 6268. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Mocœur et al., 2009] Mocœur, I., Mugnier, L. M., and Cassaing, F. (2009). Analytical solution to the phase-diversity problem for real-time wavefront sensing. *Opt. Lett.*, 34(22) :3487–3489.
- [Mugnier et al., 2006] Mugnier, L. M., Blanc, A., and Idier, J. (2006). Phase diversity : a technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 141 :1–76.
- [Noll, 1976] Noll, R. J. (1976). Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3) :207–211.
- [Paxman and Fienup, 1988] Paxman, R. G. and Fienup, J. R. (1988). Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A*, 5(6) :914–923.
- [Paxman et al., 1992] Paxman, R. G., Schulz, T. J., and Fienup, J. R. (1992). Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(7) :1072–1085.
- [Perrin et al., 2004] Perrin, G. S., Lai, O., Woillez, J. M., Guerin, J., Kotani, T., Vergnole, S., Adamson, A. J., Ftaclas, C., Guyon, O., Lena, P. J., et al. (2004). 'ohana. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 391–404. International Society for Optics and Photonics.
- [Perrin et al., 2016] Perrin, M. D., Acton, D. S., Lajoie, C.-P., Knight, J. S., Lallo, M. D., Allen, M., Baggett, W., Barker, E., Comeau, T., Coppock, E., Dean, B. H., Hartig, G., Hayden, W. L., Jordan, M., Jurling, A., Kulp, T., Long, J., McElwain, M. W., Meza, L., Nelan, E. P., Soummer, R., Stansberry, J., Stark, C., Telfer, R., Welsh, A. L., Zielinski, T. P., and Zimmerman, N. T. (2016). Preparing for JWST wavefront sensing and control operations. volume 9904, pages 99040F–99040F–19.
- [Redding et al., 1998] Redding, D. et al. (1998). Wavefront sensing and control for a Next Generation Space Telescope. In Bely, P. Y. and Breckinridge, J. B., editors, *Space Telescopes and Instruments V*, volume 3356 (2), pages 758–772. spie.
- [Rousset, 1999] Rousset, G. (1999). Wave-front sensors. *Adaptive optics in astronomy*, 1 :91.
- [Ruilier and Cassaing, 2001] Ruilier, C. and Cassaing, F. (2001). Coupling of large telescopes and single-mode waveguides : application to stellar interferometry. *JOSA A*, 18(1) :143–149.
- [Shack and Platt, 1971] Shack, R. V. and Platt, B. (1971). Production and use of a lenticular hartmann screen. In *Journal of the Optical Society of America*, volume 61, page 656. AMER INST PHYSICS CIRCULATION FULFILLMENT DIV, 500 SUNNYSIDE BLVD, WOODBURY, NY 11797-2999.
- [Shi et al., 2004] Shi, F., Chanan, G., Ohara, C., Troy, M., and Redding, D. C. (2004). Experimental verification of dispersed fringe sensing as a segment phasing technique using the keck telescope. *Applied optics*, 43(23) :4474–4481.

- [Thelen et al., 1999] Thelen, B. J., Paxman, R. G., Carrara, D. A., and Seldin, J. H. (1999). Maximum a posteriori estimation of fixed aberrations, dynamic aberrations, and the object from phase-diverse speckle data. *JOSA A*, 16(5) :1016–1025.
- [Thurman, 2011] Thurman, S. T. (2011). Method of obtaining wavefront slope data from through-focus point spread function measurements. *J. Opt. Soc. Am. A*, 28(1) :1–7.
- [Vievard et al., 2016] Vievard, S., Cassaing, F., Bonnefois, A., Mugnier, L., and Montri, J. (2016). Real-time alignment and co-phasing of multi-aperture systems using phase diversity. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 99062Q–99062Q. International Society for Optics and Photonics.
- [Vievard et al., 2017] Vievard, S., Cassaing, F., and Mugnier, L. M. (2017). Large amplitude tip/tilt estimation by geometric diversity for multiple-aperture telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 34(8) :1272–1284.
- [Vogel et al., 1998] Vogel, C. R., Chan, T. F., and Plemmons, R. J. (1998). Fast algorithms for phase-diversity-based blind deconvolution.
- [Wirth, 2003] Wirth, A. (2003). Dispersed hartmann sensor and method for mirror segment alignment and phasing. US Patent 6,649,895.

Développement et validation d'un analyseur de surface d'onde en plan focal pour un instrument multi-pupille

L'instrumentation multi-pupille permet de repousser les limitations actuelles des diamètres des télescopes monolithiques. L'alignement des sous-pupilles est donc une problématique incontournable pour les futurs projets de télescopes au sol comme dans l'espace. Un Analyseur de Surface d'Onde (ASO) est alors nécessaire pour mesurer les aberrations spécifiques au cas multi-pupille que sont le piston différentiel (différence de marche entre les sous-pupilles), le tip et le tilt (basculements différentiels entre les sous-pupilles).

Nous nous attachons à réaliser des ASOs non supervisés et simples d'implantation, permettant l'alignement total d'un instrument multi-pupille. L'algorithme ELASTIC repose sur l'analyse de la corrélation entre deux images focales prises successivement, différant par une perturbation maîtrisée et appliquée directement sur les sous-pupilles. ELASTIC permet d'une part d'estimer les grandes erreurs de tip/tilt, pour effectuer un alignement géométrique et d'autre part de stabiliser le tip/tilt pendant la minimisation des grandes erreurs de piston, pour l'alignement interférométrique. Enfin, un second algorithme appelé LAPD permet, au moyen de deux images prises simultanément dans un plan focal et dans un plan légèrement défocalisé, d'estimer les petites erreurs de piston/tip/tilt pour le cophasage fin.

Ces différents algorithmes sont caractérisés au moyen de simulations numériques, pour différents types de télescopes multi-pupilles. Nous démontrons expérimentalement les briques de la chaîne d'alignement sur un instrument à 6 sous-pupilles. Ces ASOs permettent de simplifier le dimensionnement des futurs télescopes.

Mots clés :

OPTIQUE DE FOURIER ; SENSEUR DE FRONT D'ONDE ; DIVERSITE DE PHASE ; MULTI-PUPILLE ; ALIGNEMENT ; COPHASAGE

Development and validation of a focal plane wavefront sensor for multiple aperture systems

The resolution of a telescope is ultimately limited by its aperture diameter, but the size of mirrors is bounded by current technology to about 10m on the ground and to a few meters in space. To overcome this limitation, interferometry consists in making an array of sub-apertures interfere; the resulting instrument is called an interferometer or a multi-aperture telescope. To reach the diffraction limit of such instruments, all sub-apertures must be phased to within a small fraction of wavelength. A critical sub-system of interferometers is the Cophasing Sensor (CS), whose goal is to measure the relative positioning errors between the sub-apertures (differential piston, tip and tilt), which are the specific low-order aberration of an interferometer and the main source of wave-front degradation.

We aim to develop unsupervised and easy-to-implement CSs for the global multi-aperture telescope alignment. ELASTIC algorithm provides a solution for large amplitude tip/tilt error measurement from a modified cross-spectrum of two diversity images, allowing the geometrical alignment. ELASTIC also provides tip/tilt stability for the large amplitude piston error minimization, called the interferometric alignment. Finally a second algorithm called LAPD uses focal and slightly defocused images for the small amplitude piston/tip/tilt error measurement, allowing the fine phasing.

Numerical simulations of several types of multi-aperture telescopes are performed in order to test our algorithms. We experimentally demonstrate the efficiency of the different algorithms on a 6-sub-aperture instrument. These algorithms should simplify the design of the future telescopes.

Keywords :

FOURIER OPTICS ; WAVE-FRONT SENSOR ; PHASE DIVERSITY ; MULTI-APERTURE ; ALIGNMENT ; PHASING