



HAL
open science

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes : preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux transferts thermiques

Christophe Spiesser

► To cite this version:

Christophe Spiesser. Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes : preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux transferts thermiques. Modélisation et simulation. Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, 2017. Français. NNT : 2017EMAC0005 . tel-01725768

HAL Id: tel-01725768

<https://theses.hal.science/tel-01725768>

Submitted on 7 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *IMT - École Nationale Supérieure des Mines d'Albi-Carmaux*

Présentée et soutenue le *20 juin 2017* par :
CHRISTOPHE SPIESSER

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes :
preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux
transferts thermiques

JURY

BERNARD BAUDOIN	<i>Professeur,</i> IMT Lille Douai	Président
CHRISTOPHE MÉNÉZO	<i>Professeur,</i> Université Savoie Mont Blanc	Rapporteur
CYRIL CALIOT	<i>Chargé de Recherche CNRS,</i> Laboratoire PROMES	Rapporteur
BELKACEM ZEGHMATI	<i>Professeur,</i> Université de Perpignan Via Domitia	Examineur
BÉRANGÈRE LARTIGUE	<i>Maître de Conférences,</i> Université Paul Sabatier	Examinatrice
JEAN-JACQUES BÉZIAN	<i>Ingénieur de Recherche,</i> IMT Mines Albi-Carmaux	Directeur

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Énergétique et transferts

Unité de Recherche :

Centre RAPSODEE, CNRS - UMR 5302, École des Mines d'Albi-Carmaux

Directeur(s) de Thèse :

Jean-Jacques BÉZIAN

Rapporteurs :

Christophe MÉNÉZO et Cyril CALIOT

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes :
preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux
transferts thermiques

Christophe SPIESSER

Sous la direction de
Jean-Jacques BEZIAN

Thèse de doctorat soutenue le 20 juin 2017

IMT - ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES D'ALBI-CARMAUX

Résumé grand public / Popularized abstract

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes : preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux transferts thermiques

Résumé :

Les systèmes complexes sont "des ensembles constitués d'un grand nombre d'entités en interaction" (d'après Wikipédia, l'encyclopédie libre [1]). Ceci rend particulièrement difficile la prévision de leur comportement par un observateur. Or les ingénieurs et designers ont justement besoin de telles prévisions pour optimiser la conception de ces systèmes. Actuellement, ils les obtiennent par des méthodes informatiques dont le temps de calcul augmente très rapidement avec le nombre d'éléments à prendre en compte. Pour atténuer ce défaut, l'une des stratégies utilisées consiste à essayer d'obtenir ces prévisions à partir des seules parties influentes du système. Cependant, plus le système est complexe et plus les concepteurs éprouvent des difficultés à identifier, avec certitude, ces parties parmi celles qui peuvent être négligées. Par conséquent, l'application de cette stratégie atteint ses limites, d'autant plus que les systèmes qui nous entourent tendent à devenir de plus en plus complexes.

C'est ainsi pour surmonter cette limitation qu'une nouvelle méthode de prévision a été développée au cours de ces travaux. Dans le but d'en démontrer les capacités, un outil informatique a été créé à partir de cette dernière. En guise de première étape, cet outil se focalise sur la prédiction de températures à l'intérieur de systèmes complexes. Une application à l'échelle industrielle de la méthode proposée a été illustrée à travers deux exemples : un ensemble de bâtiments et un système de chauffage solaire pour l'industrie. La méthode mise au point utilise une approche modulaire, en deux temps, pour s'adapter efficacement à la grande variété des systèmes complexes. Tout d'abord, elle propose d'assembler des composants de trois types (volumes solides, volumes fluides et des interfaces) pour créer simplement un modèle. Il s'agit d'une représentation, la plus fidèle possible, du système que l'on souhaite étudier. Ensuite, la principale innovation de l'approche proposée est mise en œuvre. Elle consiste, pour l'utilisateur, à positionner une sonde à

l'emplacement où il recherche une estimation de la température. En partant de cette sonde, l'outil réalise alors une exploration du modèle précédemment obtenu. Pour ce faire, un grand nombre de chemins d'exploration sont construits et guidés, de composant en composant, par un processus basé sur des probabilités. On peut prendre l'exemple d'un élément qui possède une probabilité de 50% d'orienter le chemin vers le composant au dessus de lui, de 35% vers celui à droite et de 15% en face. Alors, en moyenne, sur 100 chemins d'exploration qui arrivent dans celui-ci, 50 vont se poursuivre vers le haut, 35 vers la droite et 15 en face. Les probabilités étant propres à chaque composant, chacun des chemins créés est unique et permet ainsi d'explorer une partie distincte du modèle. En rassemblant les informations collectées par l'ensemble de ces chemins, l'outil acquiert alors une connaissance approfondie du système qui entoure la sonde. Ceci lui permet enfin de proposer une estimation de la température au niveau de celle-ci. De manière assez intuitive, plus le nombre de chemins sera grand et meilleure sera la connaissance acquise du système et, par conséquent, plus précise sera l'estimation obtenue.

Cette approche présente un comportement particulièrement avantageux : son temps de calcul ne dépend que des parties physiquement influentes du système. De plus, elles sont automatiquement identifiées, même en présence de géométries étendues ou compliquées, ce qui rend les simulations auto-adaptatives. Ceci s'explique par les probabilités d'exploration qui ont été choisies pour représenter le plus fidèlement possible les phénomènes physiques à l'œuvre. Appliqué à la thermique, cela revient à définir les probabilités de manière proportionnelle à la capacité d'échange de chaleur existant entre chaque composant. Ainsi, les chemins d'exploration se dirigent "naturellement" vers ces parties influentes dont la connaissance est déterminante pour obtenir une estimation de qualité. En parallèle de l'estimation d'une température, l'outil analyse aussi statistiquement les chemins d'exploration utilisés. Cette analyse lui permet de générer un modèle simplifié de prédiction de cette température, procurant ainsi une capacité d'auto-apprentissage à la simulation. Son utilisation peut améliorer les processus d'optimisation et de régulation, ou faciliter les mesures indirectes. Ces atouts en font une méthode considérablement efficace pour prévoir le comportement de systèmes complexes et étendus, entre autres dans le cadre de leur optimisation.

Suitable method for complex systems simulation: self-adaptive and self-learning proof-of-concept applied to coupled heat transfer

Abstract:

Complex systems are sets "composed of many components which may interact with each other" (Wikipedia, The Free Encyclopedia [2]). Thus, predictions are especially difficult to be casted by an observer. Yet, in order to be able to optimize these system designs, engineers and designers need precisely these predictions. Currently, they are computed by a method whose computation time increases sharply with the number of elements to be taken into account. In order to reduce this shortcoming, one of the used strategies consists in computing these predictions from the only influential parts of the system. However, the more complex the system, the more difficult identify these parts with certainty among the negligible ones. Moreover, systems surrounding us tend to be more and more complex. Consequently, this bypassing strategy reaches its limit.

In this work, a new prediction method has been developed with the aim of overcoming this limitation. In order to show its capabilities, a method-based computational tool has been created. As a first step, this tool focuses on temperature prediction inside complex systems. Industrial scale application of the proposed method has been illustrated with two examples: an urban block and a solar heating system for industrial processes. The developed method is founded on a two-time modular approach to be effectively adaptable to all the complex system diversity. Firstly, components of three kinds (solid volumes, fluid volumes and interfaces) are assembled to easily create a model. This is a representation, as faithful as possible, of the system to be analysed. Secondly, the main innovation of the proposed approach is deployed. A probe is placed by the user at the location where a temperature estimation is desired. Then, starting from this probe, an exploration of this model is performed by the tool. To do this, a great number of exploration paths are created and guided among components by a probability-based process. As an example, a component is taken with 50% probability of steering the path towards the above component, 35% towards the right and 15% of going straight. Consequently, on average, on 100 exploration paths arriving at this component, 50 will continue upward, 35 will turn right and 15 will go straight. As the probabilities are specific to each component, each created path is unique and, therefore, allows to explore a distinct part of the model. The tool acquires a deep knowledge of the system around the probe by gathering the collected exploration data. Finally, a temperature estimation can be proposed at this location. Rather intuitively, the higher the number of the exploration paths, the better the acquired system knowledge and, consequently, the more accurate the estimation.

This approach presents a major beneficial behavior: the computation time depends on the only physically influential parts of the system. Moreover, these parts are automatically identified, even in complicated or extensive geometries, which makes the simulation self-adaptive. This is a consequence of the probabilities which have been chosen in order to represent the physical phenomena at stake as accurately as possible. Applied in the heat transfer field, it means that the probabilities

are defined proportionally to the heat exchange capacity between components. Thus, the exploration is "naturally" directed towards these influential parts whose knowledge is crucial to compute a high-quality estimation. At the same time as the temperature is estimated by exploration paths, the latter are statistically analyzed. Thus, a simplified model can be generated to predict this temperature, which produces a self-learning simulation. Its use can significantly improve optimization and control processes, or make indirect measurements easier. These advantages make it a particularly efficient method to predict large and complex system behaviors.

Résumé scientifique / Scientific abstract

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes : preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux transferts thermiques

Résumé :

L'augmentation de la puissance informatique disponible permet aux ingénieurs et designers d'aborder par simulation des problèmes de plus en plus complexes (multi-physiques, multi-échelles, géométries intriquées ...). Dans ce contexte, les quadratures à base de discrétisation (FDM, FEM, FVM) montrent leur limite : le besoin d'un grand nombre de sous-domaines qui implique des coûts RAM et CPU prohibitifs. La méthode de Monte-Carlo apparaît plus appropriée, mais son utilisation est verrouillée par la difficulté de générer des modèles probabilistes de systèmes complexes. Pour surpasser ceci, une approche systémique est proposée et implémentée pour créer une preuve de concept appliquée à la simulation des transferts thermiques couplés. Après une étape de validation vis-à-vis de solutions analytiques, l'outil est employé sur des cas d'illustration (transferts thermiques au sein de bâtiments et dans une centrale solaire) pour étudier ses capacités.

L'approche mise en œuvre présente un comportement particulièrement avantageux pour la simulation de systèmes complexes : son temps de calcul ne dépend que des parties influentes du problème. De plus, elles sont automatiquement identifiées, même en présence de géométries étendues ou intriquées, ce qui rend les simulations auto-adaptatives. Par ailleurs, ses performances de calcul ne sont pas corrélées avec le rapport d'échelle caractérisant le système simulé. Ceci en fait une approche douée d'une remarquable capacité à traiter les problèmes à la fois multi-physiques et multi-échelles. En parallèle de l'estimation d'une observable par des chemins d'exploration, l'outil analyse également ces derniers de manière statistique. Ceci lui permet de générer un modèle prédictif réduit de l'observable, procurant ainsi une capacité d'auto-apprentissage à la simulation. Son utilisation peut améliorer les processus d'optimisation et de contrôle-commande, ou simplifier les mesures par méthodes inverses. De plus, elle a aussi permis de mener une analyse par propagation d'incertitudes, affectant les conditions aux frontières, vers l'observable. Enfin,

une démonstration d'optimisation, utilisant des modèles réduits générés, a été réalisée.

Mots-clés : Transferts thermiques couplés, Méthode Monte-Carlo, Modélisation probabiliste, Systèmes complexes, Multi-échelle, Multi-physique.

Suitable method for complex systems simulation: self-adaptive and self-learning proof-of-concept applied to coupled heat transfer

Abstract:

As computing power increases, engineers and designers tackle increasingly complex problems using simulation (multiphysics, multiscale, intricate geometries ...). In this context, discretization-based quadratures (FDM, FEM, FVM) show their limit: the need of a great number of sub-domains which induces prohibitive consumption of RAM and CPU power. The Monte Carlo method appears to be more appropriate, but the difficulty to build probabilistic models of complex systems forms a bottleneck. A systemic approach is proposed to alleviate it and is implemented to create a proof-of-concept dedicated to the coupled heat transfer simulation. After a successful validation step against analytical solutions, this tool is applied to illustrative cases (emulating heat transfer in buildings and in solar heating systems) in order to study its simulation capabilities.

This approach presents a major beneficial behavior for complex systems simulation: the computation time only depends on the influential parts of the problem. These parts are automatically identified, even in intricate or extensive geometries, which makes the simulation self-adaptive. In addition, the computational performance and the system scale ratio are completely uncorrelated. Consequently, this approach shows an exceptional capacity to tackle multiphysics and multiscale problems. Each temperature is estimated using exploration paths. By statistically analyzing these paths during the process, the tool is able to generate a reduced predictive model of this physical quantity, which is bringing a self-learning capacity to the simulation. Its use can significantly improve optimization and control of processes, or simplify inverse measurements. Furthermore, based on this model, an uncertainty propagation analysis has been performed. It quantifies the effect of uncertainties affecting boundary conditions on the temperature. Finally a Particle Swarm Optimization (PSO) process, based on simulations done by the framework, is successfully carried out.

Keywords: Coupled heat transfer, Monte Carlo method, Probabilistic modeling, Complex systems, Multiscale, Multiphysics.

Table des matières

Résumé grand public / Popularized abstract	iii
Résumé scientifique / Scientific abstract	vii
Table des matières	xiii
Nomenclature	xv
Introduction	1
1 Méthodes de simulation	5
Introduction	6
1.1 Quadratures déterministes à base de discrétisation	8
1.1.1 Différences Finies (FDM)	8
1.1.2 Eléments Finis (FEM)	11
1.1.3 Volumes Finis (FVM)	14
1.1.4 Ordonnées Discrètes (DOM)	18
1.1.5 Méthode de BOLTZMANN sur réseau	21
1.1.6 Limites de l'approche par discrétisation	23
1.2 Quadratures stochastiques : méthode de Monte-Carlo	27
1.2.1 Principes mathématiques	28
1.2.2 Algorithme d'estimation	33
1.2.3 Mise en œuvre avancée	36
1.2.4 Variantes	38
1.2.5 Limites de l'approche stochastique	41
1.3 Couplage de méthodes de simulation	43
1.3.1 Couplage homogène de méthodes déterministes à base de discrétisation	44
1.3.2 Couplage hétérogène de méthodes	46
1.3.3 Couplage homogène de méthodes stochastiques sans discrétisation	48
Conclusion	50
2 Conception systémique de la modélisation et de l'évaluation	51
Introduction	52

2.1	Modélisation modulaire	53
2.1.1	Modèle descriptif du système : la <i>scène</i>	53
2.1.2	Modèles prédictifs de champs physiques	53
2.1.3	Conditions aux limites : la connaissance explicite des champs	53
2.2	Évaluation souple par exploration stochastique	54
2.2.1	Nécessité d'une évaluation souple	54
2.2.2	Approche systémique de l'évaluation	55
2.2.3	Illustration : évaluation d'un modèle probabiliste élémentaire	55
2.2.4	Illustration : évaluation récursive d'une observable dans une scène	56
2.2.5	Mise en œuvre de l'approche	58
	Conclusion	59
3	Modélisation probabiliste des champs de grandeur physique par composant	63
	Introduction	64
3.1	Température dans un volume solide	65
3.1.1	Modèle déterministe	65
3.1.2	Modèle probabiliste	65
3.2	Température dans un volume fluide	68
3.2.1	Modèle déterministe	68
3.2.2	Modèle probabiliste	69
3.3	Température à une interface	72
3.3.1	Modèle déterministe	72
3.3.2	Modèle probabiliste	75
3.4	Luminance totale directionnelle incidente à une interface	79
3.4.1	Modèle déterministe	79
3.4.2	Modèle probabiliste	80
3.5	Luminance totale directionnelle quittant une interface	80
3.5.1	Modèle déterministe	80
3.5.2	Modèle probabiliste	84
	Conclusion	85
4	Validation de l'approche	89
	Introduction	90
4.1	Méthode	90
4.1.1	Conditions aux frontières	90
4.1.2	Mise en œuvre informatique	92
4.1.3	Recherche de biais dans l'estimateur construit	92
4.1.4	Chiffres significatifs	92
4.2	Conduction	93
4.2.1	<i>Cd1</i> : barreau avec des températures imposées	93
4.2.2	<i>Cd2</i> : barreau avec une densité de flux imposée	95
4.3	Convection	97
4.3.1	<i>Cv1</i> : enceinte convective avec des températures imposées	97
4.3.2	<i>Cv2</i> : enceinte convective avec une densité de flux imposée	98
4.4	Transport de chaleur	100

4.4.1	<i>Tp1</i> : ventilation mécanique contrôlée	100
4.5	Rayonnement	101
4.5.1	<i>R1</i> : cavité rayonnante avec une densité de flux imposée	101
4.5.2	<i>R2</i> : cavité rayonnante avec des parois réfléchissantes	103
4.5.3	<i>R3</i> : cavité rayonnante avec des parois transparentes	105
4.6	Transferts thermiques couplés	107
4.6.1	<i>Cpl1</i> : conduction et convection couplées	107
4.6.2	<i>Cpl2</i> : conduction et rayonnement couplés	109
4.6.3	<i>Cpl3</i> : convection et rayonnement couplés	112
4.6.4	<i>Cpl4</i> : conduction, convection, transport de chaleur et rayonnement couplés	114
	Conclusion	116
5	Illustration des capacités de l'approche	119
	Introduction	120
5.1	Capacités intrinsèques de la démarche	120
5.1.1	Outil d'illustration : le <i>Module de Bâtiment</i>	120
5.1.2	Capacité multi-physique	122
5.1.3	Auto-adaptativité : influence de l'étendue de la scène sur le temps de calcul	126
5.1.4	Auto-adaptativité : impact de la finesse de description de la zone d'influence sur le temps de calcul	133
5.1.5	Outil d'illustration : le <i>Module d'Echangeur</i> à plaques	139
5.1.6	Outil d'illustration : le <i>Collecteur solaire</i>	144
5.1.7	Capacité multi-échelle	147
5.1.8	Auto-apprentissage : génération de modèles prédictifs réduits	153
5.2	Utilisations avancées permises par l'auto-apprentissage	160
5.2.1	Propagation d'incertitudes	160
5.2.2	Optimisation basée sur la génération de modèles réduits	164
	Conclusion	172
	Conclusion	173
	Bibliographie	177
	Table des figures	196
	Liste des tableaux	198

Nomenclature

Caractères latins

$A_{\partial\Omega}$	Aire de l'interface $\partial\Omega$ [m^2]
Bi	Nombre adimensionnel de BIOT
c	Coefficient de pondération
c_p	Capacité thermique massique du domaine Ω [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]
C	Fonction coût à minimiser au cours d'un processus d'optimisation
$\mathbf{d}_{i,j}$	Vecteur direction défini au point $\mathbf{r}_{i,j}$ [m]
D_{hyd}	Diamètre hydraulique du domaine fluide Ω [m]
e_Ω	Épaisseur du domaine Ω [m]
δ	Coefficient de dissipation thermique [$W.m^{-2}.K^{-1}$]
G	Champ de grandeur quelconque utilisé à titre d'exemple
$\mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{x})$	Hémisphère des directions incidentes depuis le domaine Ω au point \mathbf{x} (identifiant)
$\mathcal{H}^{\Omega-}(\mathbf{x})$	Hémisphère des directions quittant le point \mathbf{x} vers le domaine Ω (identifiant)
h	Indice d'une histoire de Monte-Carlo
h_{max}	Nombre total d'histoires de Monte-Carlo pour réaliser l'estimation
$h_{\partial\Omega}^\Omega$	Coefficient de convection à l'interface $\partial\Omega$, du côté du domaine fluide Ω [$W.m^{-2}.K^{-1}$]
$\langle i + j \rangle$	Taille moyenne du chemin d'exploration calculée en nombre d'interactions/positions
$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$	Champ de luminance totale directionnelle au point \mathbf{x} dans la direction $\boldsymbol{\omega}$ [$W.m_{\perp}^{-2}.sr^{-1}$]
la_{sol}	Largeur de l'absorbeur du collecteur solaire [m]
lo_{sol}	Longueur de l'absorbeur du collecteur solaire [m]
$\dot{m}_{\Omega+}$	Débit massique total quittant le domaine fluide Ω (défini positif) [$kg.s^{-1}$]
$\dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e)$	Débit massique entrant dans le domaine fluide Ω depuis le domaine Ω_e (défini positif) [$kg.s^{-1}$]
\mathbf{n}_{cond}	Vecteur direction le long duquel le transfert par conduction a lieu (modèle 1D plan) [m]
n_{ech}	Nombre de modules d'échangeur constituant l'échangeur à plaques
n_{sol}	Nombre de collecteurs solaires constituant le champ

$\mathbf{n}_{\partial\Omega}^{\Omega+}$	Vecteur normal à l'interface $\partial\Omega$ quittant le domaine Ω [m]
Nu	Nombre adimensionnel de NUSSELT
$P(event)$	Probabilité que l'évènement <i>event</i> ait lieu
p_{VA}	Fonction densité de probabilité décrivant la distribution de probabilités de la variable aléatoire VA sur son intervalle
Pr	Nombre adimensionnel de PRANDTL
\dot{Q}	Puissance solaire perdue par le champ de collecteurs [W]
$\dot{q}^{\Omega+}$	Densité de flux net sortant du domaine Ω [$W.m^{-2}$]
$\dot{Q}_{mode}^{\Omega+}$	Flux net sortant du domaine Ω par un <i>mode</i> de transfert thermique (<i>conduction</i> , <i>convection</i> , <i>radiation</i> ou transport de chaleur <i>tp</i>) [W]
$\dot{q}_{mode}^{\Omega+}$	Densité de flux net sortant du domaine Ω par un <i>mode</i> de transfert thermique (<i>conduction</i> , <i>convection</i> , <i>radiation</i> ou transport de chaleur <i>tp</i>) [$W.m^{-2}$]
\dot{q}_{src}^{2D}	Densité de flux caractéristique d'une source de chaleur surfacique au niveau d'une interface [$W.m^{-2}$]
$\mathbf{r}_{i,j}$	Vecteur de la j -ème position du chemin d'exploration dédié à l'évaluation de la luminance totale directionnelle incidente au point \mathbf{x}_i [m]
R_{config}	Résistance thermique associée à la configuration <i>config</i> [$K.W^{-1}$]
R^2	Coefficient de détermination d'une régression linéaire
Ra	Nombre adimensionnel de RAYLEIGH
Re	Nombre adimensionnel de REYNOLDS
$s_{\partial\Omega}^{\Omega}$	Ratio de spécularité de la réflexion au niveau de l'interface $\partial\Omega$, du côté du domaine Ω
$T(\mathbf{x})$	Champ de température au point \mathbf{x} [K]
T_{ref}	Température de référence autour de laquelle le modèle de transfert radiatif a été linéarisé [K]
T_{an}	Température calculée de manière analytique, assurant le rôle de résultat de référence dans les étapes de validation [K]
v_{Ω}	Vitesse moyenne de l'écoulement dans le domaine fluide Ω [$m.s^{-1}$]
\dot{W}	Puissance électrique consommée pour le pompage du Therminol dans le circuit [W]
\hat{w}_{event}	Poids de Monte-Carlo associé à l'occurrence de l'évènement <i>event</i>
\mathbf{X}_i	Variable aléatoire caractéristique du vecteur de la i -ème position du chemin d'exploration \mathbf{x}_i [m]
\mathbf{x}_i	Vecteur de la i -ème position du chemin d'exploration [m]
$\mathbf{x}_i^{\in\Omega}$	$:= \mathbf{x}_i \in \Omega$ [m]
$\mathbf{x}_i^{\in\partial\Omega}$	$:= \mathbf{x}_i \in \partial\Omega$ [m]

Caractères grecs

$\alpha_{\partial\Omega}^{\Omega}$	Absorptivité totale hémisphérique de l'interface $\partial\Omega$, du côté du domaine Ω
ΔP_{lin}	Pertes de charge linéiques [$kg.m^{-1}.s^{-2}$]
ΔP_{tot}	Pertes de charge totales (linéiques + singulières) [$kg.m^{-1}.s^{-2}$]
$\epsilon_{\partial\Omega}^{\Omega}$	Emissivité totale hémisphérique de l'interface $\partial\Omega$, du côté du domaine Ω

η_{sol}	Rendement d'un collecteur solaire
$\eta_{sol,car}$	Rendement caractéristique du champ de collecteurs solaires
$\eta_{Th \rightarrow El}$	Efficacité de conversion d'une source primaire d'énergie en électricité, par le biais d'un cycle thermodynamique
Λ	Coefficient de perte de charge dans l'équation de DARCY-WEISBACH
λ_{Ω}	Conductivité thermique du domaine Ω [$W.m^{-1}.K^{-1}$]
μ_{Ω}	Viscosité dynamique du domaine Ω [$kg.m^{-1}.s^{-1}$]
π	Constante Pi = 3.141592 (seulement sept chiffres significatifs pour les nombres à virgule flottante en simple précision)
ρ_{Ω}	Masse volumique du domaine Ω [$kg.m^{-3}$]
$\rho_{\partial\Omega}^{\Omega}$	Réfectivité totale hémisphérique de l'interface $\partial\Omega$, du côté du domaine Ω
σ	Constante de STEFAN-BOLTZMANN : 5.67×10^{-8} [$W.m^{-2}.K^{-4}$]
$\sigma_{\{G_h\}}$	Ecart-type de la population des éléments G_h
$\sigma_{\tilde{G}}$	Erreur-type de l'estimation de la grandeur G
$\tau_{\partial\Omega}$	Transmittivité totale directionnelle au travers de l'interface $\partial\Omega$
Ω	Domaine volumique (identifiant)
$\partial\Omega$	Interface(s) définissant la frontière du domaine Ω (identifiant)

Opérateurs

$x \in y$	Appartenance : l'élément x appartient au domaine y
$x := y$	Définition : x est défini comme un nouveau nom de y
∂x	Différentiel : opérateur différentiel appliqué à x
$\{x\}$	Ensemble : ensemble des éléments x
$x \Leftrightarrow y$	Équivalence : x est vrai si y est vrai et x est faux si y est faux
$\mathbb{E}[X]$	Espérance : espérance mathématique de la variable aléatoire X
\tilde{x}	Estimation : estimation de la grandeur x
$\exists x$	Existence : il existe un élément x
$\int_{\Omega} f(x) dx$	Intégration : intégration de la fonction $f(x)$, <i>l'intégrande</i> , pour x appartenant au domaine Ω
$\langle x \rangle$	Moyenne : moyenne des valeurs de la grandeur x
$x \times y$	Multiplication : x est multiplié par y
$x.y$	Multiplication : x est multiplié par y (dans l'expression des unités)
$\nexists x$	Non-Existence : il existe pas d'élément x
$\ x\ $	Norme euclidienne : norme euclidienne du vecteur x [m]
$\forall x$	Pour tout : pour tout élément x
x_{\vdash}	Prédiction : prédiction de la grandeur x à l'aide d'un modèle réduit
$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$	Produit scalaire : produit scalaire des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y}
$\sum_{h=1}^{h_{max}} x_h$	Somme : somme des éléments x_h , pour h allant 1 à h_{max}
$x \setminus y$	Soustraction d'ensembles : ensemble du domaine x privé du domaine y
$x \mid y$	Tel que : soit x tel que la condition y soit vraie
$ x $	Valeur absolue : valeur absolue de la quantité x [m]

Introduction

Depuis que l'Homme a découvert l'avantage sélectif que procure l'utilisation des outils, il n'a jamais cessé de tenter d'améliorer leurs performances. Cette recherche continue d'efficience permet, en effet, d'accroître la capacité du groupe à s'adapter à l'évolution et aux limites de son environnement et donc, *in fine*, amplifie son aptitude à survivre. D'une certaine façon, il s'agit d'un corollaire technologique du mécanisme de sélection naturelle énoncé par DARWIN. Cette lutte pour la survie de notre espèce semble avoir disparue de nos préoccupations ; d'un point de vue occidental au moins. Pourtant, elle demeure, en grande partie, le moteur de notre évolution technologique comme en témoigne la course à l'innovation actuellement à l'œuvre pour surmonter le double défi du réchauffement global et de la raréfaction des ressources.

Ce processus d'amélioration continue des systèmes qui nous entourent a, tout d'abord, été réalisé à partir d'une démarche d'essais-erreurs reposant sur des prototypes matériels. Au milieu du XX^e siècle, l'introduction de l'outil informatique permit alors d'accélérer cette démarche par l'utilisation de "prototypes virtuels", les modèles numériques, dont le comportement est évalué par simulation. Les ingénieurs et designers utilisent ensuite les tests réalisés sur ces prototypes — virtuels et/ou matériels — pour alimenter une procédure d'optimisation du système, qui peut être de nature cognitive ou menée de manière entièrement automatique.

L'émergence et l'expansion du recours à la simulation numérique ont eu lieu de concert avec celles de l'ordinateur. Au commencement, les ressources informatiques disponibles étaient alors rares et chères. Elles ne permettaient donc d'envisager que la simulation de modèles extrêmement simplifiés des systèmes à concevoir. Or, les quadratures¹ déterministes à base de discrétisation possèdent un taux de convergence avantageux lorsqu'il est possible de représenter le problème par un nombre raisonnable de sous-domaines lors de l'étape de discrétisation [3–5] ; comme c'est le cas en présence de modèles "simples". Par conséquent, ce type de quadratures s'est naturellement imposé comme standard des méthodes de simulation en raison de son efficience dans ce contexte initial.

1. Quadrature : "Méthode de calcul d'une intégrale définie ou de détermination d'une aire." (Dictionnaire Larousse)

Néanmoins, l'augmentation de la complexité des systèmes à concevoir, du fait du progrès technologique à l'œuvre, et l'accroissement exponentiel des ressources informatiques à disposition² qui ont lieu depuis des décennies change ce contexte. En effet, ces deux phénomènes amplifient significativement la complexité des modèles mis en œuvre dorénavant. Ainsi, pour simuler de tels systèmes complexes, les méthodes doivent désormais être en capacité de traiter des problèmes qui peuvent être à la fois multi-physiques et/ou multi-échelles et qui se déroulent au sein de domaines étendus et/ou possédant une géométrie intriquée.

Pour aborder de tels problèmes avec les méthodes "classiques" de quadrature déterministe à base de discrétisation, il est nécessaire d'utiliser un nombre très important de sous-domaines pour décrire le système. Pour tenter de limiter leur quantité et ainsi modérer le besoin en ressources informatiques, de nombreuses stratégies, spécialisées pour aborder chaque type de problème, ont été développées au fil du temps. Cependant, elles ne constituent que des tentatives d'adaptation *a posteriori* de la méthode aux difficultés rencontrées et leur implémentation est souvent très gourmande en travail humain. La problématique de notre travail s'est donc portée sur **la recherche d'une autre méthode de simulation qui s'avèrerait plus appropriée et efficiente dans ce nouveau contexte de complexité croissante des modèles à résoudre.**

Pour ce faire, une fois qu'une méthode aura été identifiée comme prometteuse dans ce nouveau contexte, le travail s'orientera vers le développement d'une preuve de concept. Celle-ci permettra d'évaluer ses capacités à aborder des problèmes multi-physiques et multi-échelles au sein de géométries étendues et intriquées par sa mise en œuvre sur des cas d'illustration. Par ailleurs, ces travaux de recherche se déroulent au laboratoire RAPSODEE, UMR 5302 entre le CNRS et MINES ALBI, qui est structuré en deux groupes experts des domaines de l'énergie et de l'environnement d'une part, et du génie particulier d'autre part. Les procédés thermiques occupent un rôle central dans les recherches menées au sein du premier de ces groupes. Or, les problèmes de thermique ne comportent pas d'originalités notables par rapport aux problèmes d'ingénierie en général. Par conséquent, ceci en fait un exemple adéquat pour réaliser de la preuve de concept souhaitée.

Structure du manuscrit

Le chapitre 1 a pour objectif d'identifier une méthode de simulation pertinente dans ce contexte de complexification croissante ainsi que les verrous technologiques à lever pour la mettre en œuvre. Pour cela, un tableau des catégories de méthodes de simulation existantes est dressé. Après avoir identifié les limitations des quadratures

2. Cette augmentation exponentielle est connue sous le nom de *Loi de MOORE*. Elle fut énoncée en 1965 par Gordon E. MOORE, un ingénieur américain qui sera à l'origine trois ans plus tard de la société *Intel*. Il pronostiqua le doublement du nombre de transistors contenus dans les microprocesseurs à prix constant, et donc le doublement de leur puissance de calcul, tous les deux ans. Depuis, cette prédiction s'est avérée étonnamment vérifiée par les progrès réalisés dans le domaine.

déterministes à base de discrétisation face à ce nouveau contexte, les méthodes alternatives et leurs implications sont étudiées. Dans un troisième temps, les stratégies de couplage employées pour traiter les problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles sont analysées. Au final, l'ensemble des développements de cet état de l'art permet de mettre en lumière l'intérêt d'étudier la méthode de Monte-Carlo pour aborder ce nouveau contexte.

Le chapitre 2 présente la démarche systémique envisagée pour lever le verrou technologique découvert et ainsi permettre l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo pour la simulation de systèmes complexes. La première partie applique cette approche à l'étape de modélisation au cours de laquelle les modèles probabilistes nécessaires sont obtenus. La seconde fait de même pour l'étape de simulation, en appliquant cette démarche à l'algorithme d'évaluation des modèles probabilistes construits.

Le chapitre 3 met en œuvre l'approche présentée dans le chapitre précédent pour construire la preuve de concept désirée pour la simulation des transferts thermiques couplés. L'application de la démarche systémique amène à présenter ce travail de modélisation sous l'angle d'une série de problèmes élémentaires. Ceux-ci serviront de composants génériques à assembler par la suite pour modéliser les systèmes complexes.

Le chapitre 4 a pour objectif de valider les différents composants obtenus précédemment. Pour ce faire, l'environnement de modélisation développé est appliqué au traitement de douze cas académiques de sorte à pouvoir comparer ses résultats avec des références calculées analytiquement.

Enfin, le chapitre 5 met en œuvre l'outil proposé sur des cas d'illustration de complexité croissante, provenant des domaines de la thermique du bâtiment et de l'énergie solaire thermique. Ces illustrations ont pour objectif d'étudier les capacités de simulation du comportement de systèmes complexes dont fait preuve l'outil réalisé. En particulier, son aptitude à traiter des problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles, en géométrie étendue ou intriquée est examinée.

CHAPITRE 1

Méthodes de simulation

Introduction	6
1.1 Quadratures déterministes à base de discrétisation . . .	8
1.1.1 Différences Finies (FDM)	8
1.1.2 Eléments Finis (FEM)	11
1.1.3 Volumes Finis (FVM)	14
1.1.4 Ordonnées Discrètes (DOM)	18
1.1.5 Méthode de BOLTZMANN sur réseau	21
1.1.6 Limites de l'approche par discrétisation	23
1.2 Quadratures stochastiques : méthode de Monte-Carlo .	27
1.2.1 Principes mathématiques	28
1.2.2 Algorithme d'estimation	33
1.2.3 Mise en œuvre avancée	36
1.2.4 Variantes	38
1.2.5 Limites de l'approche stochastique	41
1.3 Couplage de méthodes de simulation	43
1.3.1 Couplage homogène de méthodes déterministes à base de discrétisation	44
1.3.2 Couplage hétérogène de méthodes	46
1.3.3 Couplage homogène de méthodes stochastiques sans dis- crétisation	48
Conclusion	50

Introduction

L'étape préalable à toute simulation d'un problème d'ingénierie est sa modélisation mathématique. Celle-ci aboutit à un système d'équations qui sont souvent des équations aux dérivées partielles, ou des équations différentielles ordinaires dans le cas de problèmes mono-dimensionnels en régime permanent. Dans le premier cas — le plus général —, la plupart du temps, ces équations couplent des dérivées temporelles d'une grandeur, à l'ordre un ou deux, avec des dérivées spatiales de cette même grandeur.

Qualitativement, les équations obtenues peuvent être catégorisées dans la famille des équations hyperboliques, c'est-à-dire qu'elles satisfont à un problème de CAUCHY bien posé pour les $n - 1$ premières dérivées. Par exemple, dans le cas d'une équation d'ordre n :

$$G^{(n)} = f(G^{(n-1)}, G^{(n-2)}, \dots, G, s) \quad (1.1)$$

Avec $G^{(i,s_0)} = G_{0i}$ connu pour i allant de 0 à $n - 1$

Les implications mathématiques de ces équations hyperboliques, ainsi que leur caractérisation précise, se situent hors du champ de cette étude. Du point de vue de l'ingénieur ayant à traiter un problème, l'étape qui suit alors naturellement celle de l'obtention de telles équations (la modélisation) est celle de leur résolution (la simulation).

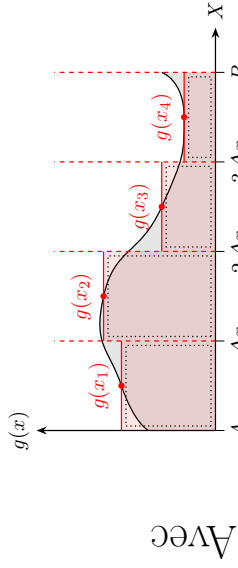
Les solutions de telles équations différentielles peuvent être écrites sous une forme intégrale. Ainsi, la résolution de ces équations revient communément à calculer la valeur de l'intégrale solution. Pour ce faire, on peut classer ces méthodes en quatre catégories, selon qu'elles sont de nature déterministe ou stochastique et qu'elles reposent sur une discrétisation du domaine ou non (Fig. 1.1).

Dans certains cas, il est possible de mener cette résolution de manière analytique. Des méthodes mathématiques ont été développées, par exemple celle des caractéristiques, ou bien la résolution de problème de STURM-LIOUVILLE par des séries ou des fonctions de BESSEL. Cependant, les cas dans lesquels ces démarches de résolution sont applicables sont rares et souvent limités à des problèmes en géométrie simple : planes, radiales ou sphériques entre autres. Ces approches sont souvent enseignées aux étudiants de niveau Master sur des exemples tels que la résolution analytique de la diffusion de la chaleur ou du transport d'onde.

Aujourd'hui, par conséquent, il y a trois grandes catégories de méthodes numériques qui sont utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles au sein de géométries compliquées. Elles vont être abordées dans ce chapitre en illustrant leur présentation à l'aide d'exemples provenant du domaine de la thermique.

Dans un premier temps, les méthodes plus couramment employées et leurs implications vont être exposées. Il s'agit des quadratures déterministes qui reposent

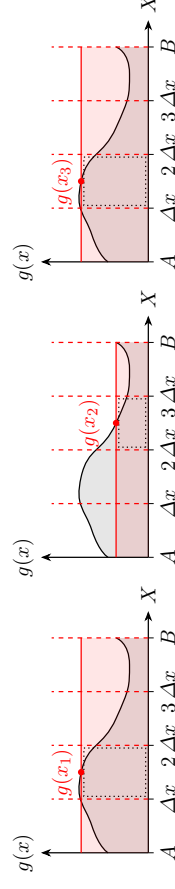
Déterministe



→ Somme d'évaluations sur N sous-domaines :

$$G \approx \sum_{n=1}^N \Delta x g(x_n) = \frac{B-A}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n)$$

Stochastique (MONTE-CARLO)

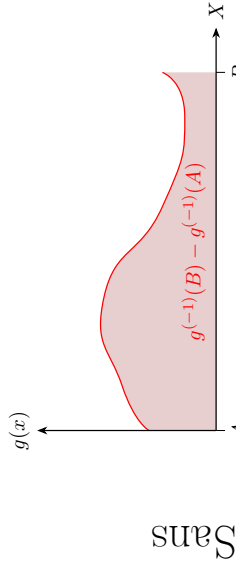


→ Moyenne de h_{max} évaluations réalisées en des points échantillonnés parmi $\{x_n\}$ suivant les probabilités $P(x_h = x_n)$:

$$G \approx \frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \Delta x g(x_h)$$

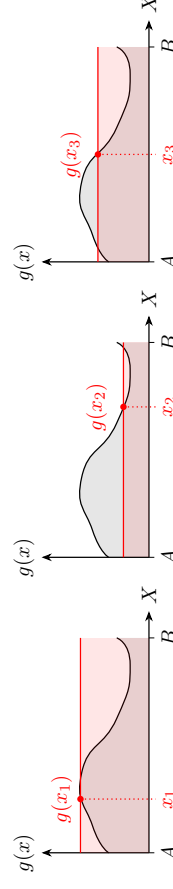
Avec une équi-probabilité de chaque sous-domaine, $P(x_h = x_n) = 1/N$, l'équation prend la forme :

$$G \approx \frac{B-A}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} g(x_h)$$



→ Résolution analytique par calcul formel de la primitive :

$$G = \int_A^B g(x) dx = g^{(-1)}(B) - g^{(-1)}(A)$$



→ Moyenne de h_{max} évaluations réalisées en des points échantillonnés sur $[A, B]$ suivant une fonction densité de probabilité ("pdf") $p_X(x_h)$:

$$G \approx \frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \frac{g(x_h)}{p_X(x_h)}$$

Avec une "pdf" uniforme sur le domaine, $p_X(x_h) = 1/(B-A)$, l'équation prend la forme :

$$G \approx \frac{B-A}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} g(x_h)$$

FIGURE 1.1 – Matrice des catégories de quadratures.

sur une discrétisation des domaines du problème.

Puis, les quadratures stochastiques, qui s'affranchissent ou non de discrétiser les domaines à traiter, seront abordées simultanément du fait de leurs nombreux points communs. Leur utilisation est encore cantonnée à certaines communautés scientifiques.

Dans un dernier temps, les méthodes de couplage de ces quadratures vont être exposées. Elles sont généralement utilisées pour traiter des problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles. Ceci en fait un point fondamental de la simulation de systèmes complexes.

1.1 Quadratures déterministes à base de discrétisation

Ces méthodes ont deux grands points communs. Tout d'abord, elles décomposent l'espace, et éventuellement le temps, en de nombreux petits éléments : il s'agit de l'étape de discrétisation. Ensuite, pour chacun de ces éléments, l'équation qui gouverne le problème est résolue de manière déterministe. La solution ainsi obtenue n'est donc pas continue — comme l'est une solution analytique — mais elle est connue en un grand nombre de positions spatiales, et temporelles le cas échéant. Pour ce faire, les dérivées sont estimées à l'aide de formules approchées : les schémas numériques [6, 7]. Ce processus de résolution est alors répété jusqu'à convergence de la solution dans chacun des éléments de l'espace, et le cas échéant à chaque instant donné. Dans le cas d'un problème instationnaire, l'ensemble de cette procédure peut alors à nouveau être exécutée pour l'instant suivant, jusqu'à atteindre la date finale — en partant de l'instant initial —.

1.1.1 Différences Finies (FDM)

Historiquement, cette méthode est la première à avoir été utilisée. Elle consiste à approximer directement les dérivées présentes dans l'équation à résoudre par leur développement en série de TAYLOR (Eq. 1.2).

$$G(x_0 + \Delta x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Delta x^i}{i!} G^{(i)}(x_0) + r(n+1) \quad (1.2a)$$

$$r(n+1) = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} G^{(n+1)}(\xi) \text{ avec } x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x \quad (1.2b)$$

1.1.1.1 Schéma numérique d'ordre un

A l'ordre un, on peut ainsi écrire :

$$G(x_0 + \Delta x) = G(x_0) + \Delta x G^{(1)}(x_0) + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{2!} G^{(2)}(\xi)}_{O(\Delta x^2)} \quad (1.3)$$

Ceci peut alors être mis sous la forme :

$$\frac{G(x_0 + \Delta x) - G(x_0)}{\Delta x} = G^{(1)}(x_0) + O(\Delta x) \quad (1.4)$$

Une formule de différence finie progressive d'ordre un vient ainsi d'être obtenue. Il est de ce fait possible de remplacer les dérivées partielles d'une équation par ce schéma numérique.

1.1.1.2 Schéma numérique d'ordre deux

On peut noter que, malgré l'exemple présenté, cette méthode n'est pas limitée à un schéma numérique d'ordre un [8, 9]. En guise de second exemple, on peut ainsi soustraire à un développement progressif d'ordre trois (Eq. 1.5) son homologue rétrograde (Eq. 1.6) pour obtenir de ce manière un schéma centré d'ordre 2 (Eq. 1.7).

$$G(x_0 + \Delta x) = G(x_0) + \Delta x G^{(1)}(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} G^{(2)}(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} G^{(3)}(x_0) + O(\Delta x^4) \quad (1.5)$$

$$G(x_0 - \Delta x) = G(x_0) - \Delta x G^{(1)}(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} G^{(2)}(x_0) - \frac{\Delta x^3}{3!} G^{(3)}(x_0) + O(\Delta x^4) \quad (1.6)$$

$$G(x_0 + \Delta x) - G(x_0 - \Delta x) = 2 \Delta x G^{(1)}(x_0) + \frac{2 \Delta x^3}{3!} G^{(3)}(x_0) + O(\Delta x^4) \quad (1.7a)$$

$$\frac{G(x_0 + \Delta x) - G(x_0 - \Delta x)}{2 \Delta x} = G^{(1)}(x_0) + O(\Delta x^2) \quad (1.7b)$$

1.1.1.3 Discrétisation

Ces formulations font apparaître Δx , qui est un *pas d'espace* reliant chaque point de coordonnées x_0 à ses voisins. Dans le cas du régime instationnaire, un *pas de temps*, Δt , est également introduit de manière similaire. Le plus souvent, la géométrie est alors divisée selon une grille régulière de pas Δx (Fig. 1.2). Les valeurs de la solution sont donc obtenues au niveau de chacun des *nœuds* de la grille. En connaissant les conditions aux limites du problème — conditions aux frontières du domaine spatial et, le cas échéant, valeur du champ G à l'instant initial — il est ainsi possible d'estimer le champ G , voire son évolution temporelle.

Le lecteur pourra noter que le prix de la simplicité de la méthode est qu'elle devient lourde à mettre en œuvre quand la géométrie du domaine se complique. En effet, ces domaines se discrétisent alors difficilement sous la forme de grille à motif simple [6].

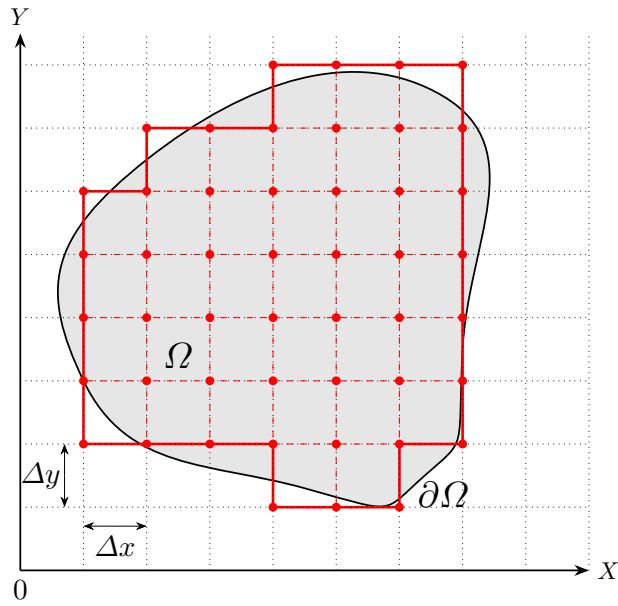


FIGURE 1.2 – Grille résultant de la discrétisation du domaine 2D Ω , avec des pas Δx et Δy , pour y appliquer la méthode des différences finies. Le champ de grandeur est obtenu aux nœuds de la grille.

1.1.1.4 Exemple : cas de l'advection pure

Cette méthode peut être illustrée avec un cas d'advection pure mono-dimensionnel, au sein d'un milieu incompressible en régime instationnaire. Ce problème est régi par l'équation 1.8, en prenant T , le champ de température et \mathbf{v} celui de la vitesse (Fig. 1.3).

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \text{div}(\mathbf{v}(x, t) T(x, t)) = 0 \quad (1.8a)$$

$$\text{Avec } T(x, t = 0) = 273 \text{ K et } T(x = 0, t) = 300 \text{ K} \quad (1.8b)$$

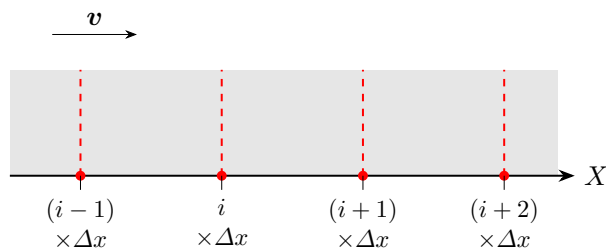


FIGURE 1.3 – Schéma des nœuds résultant de la discrétisation d'un domaine 1D, avec des pas Δx , pour y appliquer la méthode des différences finies. Le champ de température est obtenu au niveau des nœuds de la grille.

Par ailleurs, la divergence de la densité de flux transportée par advection peut se reformuler sous la forme de l'équation 1.9.

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(x, t) T(x, t)) = \mathbf{v}(x, t) \mathbf{grad}(T(x, t)) + T(x, t) \operatorname{div}(\mathbf{v}(x, t)) \quad (1.9)$$

Or, en milieu incompressible, la divergence du vecteur vitesse est nulle en tout point du domaine. Ainsi, l'équation gouvernant l'advection dans le domaine s'écrit alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \mathbf{grad}(T(x, t)) = 0 \quad (1.10)$$

Le problème étudié ne possédant qu'une seule dimension spatiale, son équation de conservation peut être reformulée à l'aide d'opérateurs différentiels telle que :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (1.11)$$

Pour résoudre ce problème de manière explicite, il suffit de remplacer directement les dérivées, au sein de l'équation 1.11, par le schéma numérique choisi pour les estimer. Ainsi, en prenant un schéma progressif d'ordre un, en temps et en espace, on obtient :

$$\frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} + \mathbf{v}(x, t) \frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} = 0 \quad (1.12)$$

En réarrangeant l'équation 1.12, on peut alors obtenir une formule d'estimation de la valeur du champ T , au point x et à l'instant suivant $t + \Delta t$, en fonction des valeurs du champ T à l'instant présent, t (Eq. 1.15).

$$T(x, t + \Delta t) = T(x, t) - \mathbf{v}(x, t) \Delta t \frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} \quad (1.13)$$

Si un schéma d'ordre un, progressif en temps, mais rétrograde en espace, avait été adopté à la place, la formule suivante aurait ainsi été obtenue :

$$\frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} + \mathbf{v}(x, t) \frac{T(x, t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = 0 \quad (1.14)$$

$$T(x, t + \Delta t) = T(x, t) - \mathbf{v}(x, t) \Delta t \frac{T(x, t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (1.15)$$

Une illustration des résultats obtenus avec ce dernier schéma numérique est présenté en figure 1.4. Les températures y sont calculées en chacun des nœuds de la grille et interpolées entre deux nœuds consécutifs. On peut y voir l'avancée du front de chaleur depuis la frontière gauche, sous l'effet du vecteur vitesse.

1.1.2 Eléments Finis (FEM)

Cette méthode est historiquement liée au domaine de la mécanique du solide et à son besoin inhérent de résoudre des équations aux dérivées partielles non-linéaires [10]. Une description précise, voire une illustration de cette approche, nécessite

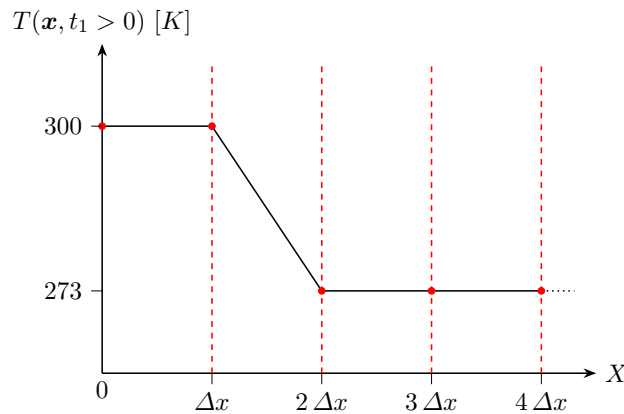


FIGURE 1.4 – Champ de température à un instant $t_1 > 0$, au sein d'un domaine 1D, calculé par la méthode des différences finies avec un schéma numérique progressif en temps et rétrograde en espace.

un temps important au vu de sa complexité mathématique et de son caractère peu intuitif. Par conséquent, cette partie s'attachera à décrire la seule philosophie générale de la méthode.

Tout d'abord, on considère un système régi par des lois de comportement : les équations à résoudre. Ce système est contraint par des conditions aux limites, imposées par l'utilisateur, qui vont guider son évolution. La démarche peut être divisée en six étapes successives [11] :

1. discrétisation du domaine en de nombreux *éléments*
2. construction de l'approximation nodale par *élément*
3. détermination des matrices élémentaires
4. assemblage des matrices élémentaires en une matrice globale
5. prise en compte des conditions aux limites
6. résolution du système d'équations obtenu

1.1.2.1 Discrétisation

Le domaine du système à modéliser est discrétisé en sous-domaines contigus de géométrie simple, et le plus souvent de frontière rectiligne : les *éléments*. Pour ce faire, les éléments les plus classiquement utilisés sont les triangles et les quadrangles, pour les domaines en deux dimensions, ainsi que les tétraèdres et hexaèdres lorsqu'il s'agit de problèmes tri-dimensionnels. Cependant, en pratique, il est souvent plus difficile de générer des maillages à base d'éléments quadrangulaires — et encore plus hexaédriques — que triangulaires ou tétraédriques [12]. D'ailleurs, l'amélioration des méthodes de construction de tels maillages (quadrangulaires et hexaédriques) est encore un sujet de recherche très actif [13–17].

1.1.2.2 Approximation nodale

L'idée générale est ensuite, sur chaque élément, d'établir une approximation de la fonction solution recherchée. Cette approximation est construite à partir de la valeur du champ solution en un certain nombre de nœuds. Ceux-ci sont disposés à la frontière de l'élément selon un schéma régulier et symétrique quand cela est possible : ils sont alors partagés avec l'élément jouxtant. De plus, ils peuvent être parfois complétés par l'ajout de nœuds internes pour chercher à améliorer la qualité de l'approximation. Cependant, dans la pratique, le nombre de nœuds internes est généralement à minimiser pour éviter d'alourdir la procédure de résolution par leur absence de connexion avec les éléments environnants. L'interpolation des valeurs entre ces nœuds utilise ensuite une base de fonctions de forme, de type polynomial. Leurs coefficients sont calculés par inversion, en fonction de la géométrie de l'élément et de la position de ses nœuds, de sorte à obtenir une fonction d'approximation reliant l'ensemble des nœuds de l'élément. Intuitivement, plus la base polynomiale est riche et meilleure sera l'approximation pouvant être obtenue pour le champ solution. Par ailleurs, la forme simple de cette approximation polynomiale du champ permet de pouvoir approximer, aussi aisément, l'ensemble des quantités différentielles qui peuvent être nécessaires aux équations de comportement [18]. L'approximation nodale peut ainsi apparaître comme une sorte de généralisation des schémas numériques de dérivations utilisés dans la méthode des différences finies.

1.1.2.3 Equation matricielle de comportement

Pour chacun des éléments, il est alors possible d'écrire les équations de son comportement en remplaçant le champ solution recherché, et ses grandeurs différentielles, par leurs approximations nodales. De ce fait, chaque équation régissant le comportement de l'élément est décrite sous forme matricielle puisque l'approximation est construite en fonction des valeurs aux nœuds. Or, la valeur de chacun des nœuds à la frontière de l'élément dépend aussi du comportement des éléments connexes. Ceci ne permet donc pas au système local d'être résolu de manière isolée. Néanmoins, cette difficulté est contournée par l'assemblage des matrices élémentaires pour construire la matrice globale qui régit, de ce fait, le comportement du système dans son ensemble.

1.1.2.4 Résolution

Ainsi, la valeur des nœud à la frontière du système peut être calculée en multipliant cette matrice globale de comportement avec celle rassemblant la valeur du champ solution en chaque nœuds. Cependant, généralement, les problèmes d'ingénierie sont définis par leur comportement global et des conditions à la frontière du système. C'est pourquoi, la résolution d'un tel problème se réalise alors en inversant la matrice globale du comportement, puis en l'appliquant au vecteur qui rassemble les conditions aux frontières. Une estimation de la valeur du champ solution en chaque nœud du domaine est ainsi obtenue.

Dans le cas d'un problème tri-dimensionnel en régime instationnaire, il y a quatre dimensions à prendre en compte. Ceci pourrait parfaitement être traité dans son

intégralité avec la méthode des éléments finis. Néanmoins, la plupart des outils procède généralement différemment. En effet, ils recourent à une méthode mixte : la méthode des éléments finis pour l'intégration sur le domaine spatial, couplée à celle des différences finies pour la prise en charge du domaine temporel.

1.1.3 Volumes Finis (FVM)

Cette méthode est historiquement liée, quant à elle, au domaine de la mécanique des fluides [19]. Elle se base sur l'établissement d'équations de conservation. En considérant une grandeur physique conservative, G , sa conservation s'écrit alors mathématiquement (Eq. 1.16) avec son vecteur densité de flux net, $\boldsymbol{\varphi}$, et son terme source volumique, \dot{G} .

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t) = -\text{div } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \dot{G}(\mathbf{x}, t) \quad (1.16)$$

1.1.3.1 Densité de flux net

Les flux nets matérialisent la manière dont la grandeur physique se propage dans l'espace. Cette propagation a pour moteur des phénomènes physiques parmi lesquels les plus courants sont le transport sous l'effet d'un champ de vitesse, ainsi que le transfert par diffusion. La densité de flux liée au premier s'écrit alors à l'aide du vecteur vitesse, \mathbf{v} (Eq. 1.17).

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

En considérant que la matière se diffusent selon la loi de FICK, la chaleur selon celle de FOURIER, et la quantité de mouvement selon celle de NEWTON, alors ces trois densités de flux diffusif prennent la même forme (Eq. 1.18).

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = -D \mathbf{grad} G(\mathbf{x}, t) \quad (1.18)$$

Avec D le coefficient de diffusion, en $m^2.s^{-1}$

1.1.3.2 Conservation sur le volume de contrôle

L'équation de conservation est valable en tout point de l'espace. Ainsi, en considérant un volume de contrôle fixe et homogène, Ω , de frontière $\partial\Omega$, il est possible d'établir la conservation globale de la grandeur physique sur l'ensemble de ce volume par intégration (Eq. 1.19 et Fig. 1.5).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \dot{G}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.19)$$

Par ailleurs, l'intégrale volumique de la divergence d'un vecteur peut être reformulée sous la forme d'une intégrale sur la frontière du domaine, à l'aide de la formule de GREEN-OSTROGRADSKI (Eq. 1.20). Son sens physique est simple, mais d'une grande force. Cette équation montre que l'intégrale de la divergence du vecteur densité de flux net, au sein du volume considéré, est égale au flux net traversant sa frontière.

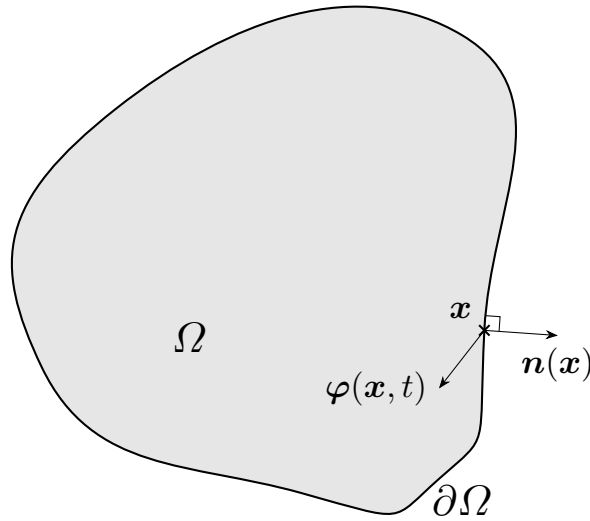


FIGURE 1.5 – Schéma d'un volume de contrôle Ω , de frontière $\partial\Omega$.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \bullet \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (1.20)$$

Avec $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la normale sortante de Ω en $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

Ainsi, l'équation de conservation sur un volume de contrôle peut prendre la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \bullet \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \dot{G}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \quad (1.21)$$

1.1.3.3 Équivalence bilan sur la cellule

Or cette équation 1.21 s'exprime, de manière plus intuitive, comme un simple bilan d'entrée-sortie sur le volume de contrôle (Eq. 1.1.3.3). Cette formulation est très utilisée pour transformer une équation de conservation sur un volume de contrôle, avec un opérateur de divergence, en un bilan local d'entrée-sortie de flux sur ce volume.

$$\text{Accumulation} = \underbrace{\text{entrée} - \text{sortie}}_{\text{Flux net}} + \underbrace{\text{création} - \text{destruction}}_{\text{Source nette}}$$

1.1.3.4 Discrétisation

Ainsi, pour résoudre un problème par la méthode des volumes finis, la première étape est de décomposer le domaine en de nombreux petits volumes de contrôle, supposés homogènes, appelés des *cellules*. Ces volumes échangent alors entre eux, ou avec la frontière du système, des flux de la grandeur d'intérêt. Ensuite des équations

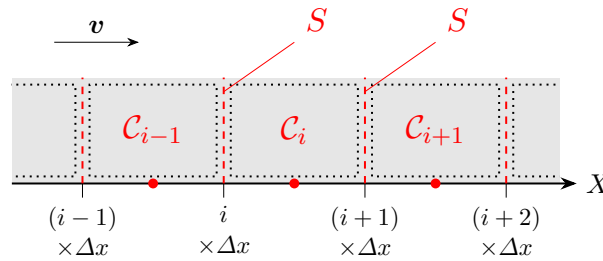


FIGURE 1.6 – Schéma des cellules résultant de la discrétisation d'un domaine 1D, avec des pas Δx , pour y appliquer la méthode des volumes finis. Le champ de température est obtenu au niveau des cellules et non des nœuds de la grille.

bilans sont posées et résolues, sur chacune des *cellules* du domaine, à chaque pas de temps du problème [20].

Les problèmes instationnaires pourrait parfaitement être abordés dans leur intégralité par la méthode des volumes finis, en traitant le domaine temporel de manière similaire au domaine spatial. Néanmoins dans la pratique, de manière similaire à ce qui a été exposé à propos de la méthode des éléments finis, une méthode mixte est généralement préférée. Celle-ci met en œuvre la méthode des volumes finis pour la partie spatiale du problème, associée à la méthode des différences finies pour résoudre son évolution temporelle. Cette association est illustrée à travers l'exemple suivant d'advection pure.

1.1.3.5 Exemple : cas de l'advection pure

Reprenons le cas de l'advection pure, en régime instationnaire au sein d'un domaine mono-dimensionnel, pour illustrer l'utilisation de cette méthode. L'équation 1.22 gouverne ce problème en introduisant le champ de température, T , et une vitesse d'advection constante, \mathbf{v} (Fig. 1.6).

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \text{div}(\mathbf{v} T(x, t)) = 0 \quad (1.22a)$$

$$\text{Avec } T(x, t = 0) = 273 \text{ et } T(x = 0, t) = 300 \quad (1.22b)$$

Par ailleurs, nommons x_0 , la coordonnée de la frontière du domaine à gauche et i l'indice de la cellule \mathcal{C}_i comprise entre les coordonnées $i \times \Delta x$ et $(i + 1) \times \Delta x$. La forme intégrale de l'équation de comportement, sur la cellule \mathcal{C}_i s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}_i} T(x, t) dx = - \int_{\partial \mathcal{C}_i} (\mathbf{v} T(x, t)) \bullet \mathbf{n}(x) dx \quad (1.23)$$

De plus, les cellules sont des sous-domaines homogènes, ce qui permet d'intégrer analytiquement la température et d'obtenir :

$$V_{\mathcal{C}_i} \frac{T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t + \Delta t) - T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t)}{\Delta t} = S \mathbf{v} T(i \Delta x, t) - S \mathbf{v} T((i + 1) \Delta x, t) \quad (1.24)$$

En réarrangeant l'équation 1.24, on peut alors obtenir une expression de la température au sein de la cellule, au pas de temps suivant (Eq. 1.25).

$$T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t + \Delta t) = T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t) + \mathbf{v} \Delta t \underbrace{\frac{S}{V_{\mathcal{C}_i}}}_{\frac{1}{\Delta x}} \left[T(i \Delta x, t) - T((i + 1) \Delta x, t) \right] \quad (1.25)$$

Cependant, à l'intérieur du domaine, seules les températures au sein des cellules — $T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t)$ — sont connues mais pas celles aux nœuds — $T(i \Delta x, t)$ et $T((i + 1) \Delta x, t)$ — alors qu'elles sont aussi nécessaires. Pour contourner ce problème, ces dernières sont approximées à l'aide d'une interpolation, qui peut être linéaire par exemple (Eq. 1.26).

$$T(i \Delta x, t) = \frac{T(x^{\in \mathcal{C}_{i-1}}, t) + T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t)}{2} \quad (1.26a)$$

$$T((i + 1) \Delta x, t) = \frac{T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t) + T(x^{\in \mathcal{C}_{i+1}}, t)}{2} \quad (1.26b)$$

En intégrant ces approximations à l'intérieur de l'équation 1.25, un schéma centré d'ordre deux apparaît dans l'expression du champ de température au pas de temps suivant (Eq. 1.27).

$$T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t + \Delta t) = T(x^{\in \mathcal{C}_i}, t) + \mathbf{v} \Delta t \frac{T(x^{\in \mathcal{C}_{i-1}}, t) - T(x^{\in \mathcal{C}_{i+1}}, t)}{2 \Delta x} \quad (1.27)$$

Résolution progressive A partir des conditions aux limites — champ de température à l'instant initial et conditions aux frontières —, il est ainsi possible de calculer progressivement la valeur du champ de température dans l'ensemble des cellules au pas de temps suivant. A partir du champ de température calculé pour le premier pas de temps, il est alors possible de le calculer pour le deuxième pas de temps de manière identique. Ce processus est poursuivi jusqu'à atteindre l'instant physique final. Finalement, une estimation du champ de température dans l'ensemble des cellules discrétisant le domaine, et à l'ensemble des pas de temps est obtenue.

Comparaison avec les différences finies On peut remarquer que cette formulation (Eq. 1.27) est identique à celle qui aurait été obtenue par la méthode des différences finie, en utilisant un schéma centré d'ordre deux pour le terme d'espace. Néanmoins, la différence d'approche qui a permis de construire cette formulation est évidente.

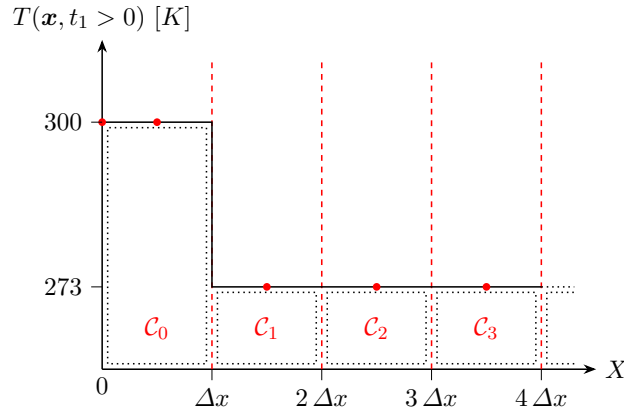


FIGURE 1.7 – Champ de température à un instant $t_1 > 0$, au sein d'un domaine 1D, calculé par la méthode des volumes finis.

Stabilité du schéma numérique De plus, il faut noter que le schéma qui en résulte est intrinsèquement instable. En effet, les schémas centrés sont classiquement connus pour être plus instables que leurs homologues décentrés [9, 19]. Pour y remédier, il est possible de favoriser l'information transportée par la vitesse en utilisant un schéma dit *décentré amont* ou *upwind* [21]. Pour ce faire, une approximation différente de la température aux interfaces est utilisée. En effet, à la place d'avoir recours à une interpolation, celle-ci est approximée en la considérant égale à la température de la cellule en amont du courant d'advection : la cellule précédente pour le flux entrant et la cellule courante pour le flux sortant. Avec ce type de schéma, une formulation différente est obtenue pour la température au pas de temps suivant (Eq. 1.28).

$$V_{C_i} \frac{T(x^{\in C_i}, t + \Delta t) - T(x^{\in C_i}, t)}{\Delta t} = S \mathbf{v} T(x^{\in C_{i-1}}, t) - S \mathbf{v} T(x^{\in C_i}, t) \quad (1.28a)$$

$$T(x^{\in C_i}, t + \Delta t) = T(x^{\in C_i}, t) + \frac{\mathbf{v} \Delta t}{\Delta x} [T(x^{\in C_{i-1}}, t) - T(x^{\in C_i}, t)] \quad (1.28b)$$

On peut une nouvelle fois remarquer que cette formulation est identique à celle qui a été obtenue par la méthode des différences finies, avec un schéma progressif en temps et rétrograde en espace (Eq. 1.14). Une illustration des résultats obtenus est présentée dans la figure 1.7. L'avancée du front de chaleur partant de la frontière gauche est visible de manière similaire avec les résultats obtenus par différences finies (Fig. 1.4). Néanmoins, la différence d'approche est visible car le champ de température est approximé dans le cas de la méthode des volumes finis sous la forme de cellules de température uniforme.

1.1.4 Ordonnées Discrètes (DOM)

La méthode des ordonnées discrètes est utilisée pour résoudre des problèmes gouvernés par des équations possédant une dépendance directionnelle, en plus de leur

dépendance spatiale et, éventuellement, temporelle. Dans le contexte des échanges de chaleur, le transfert radiatif est un parfait exemple de ce type de problème. C'est d'ailleurs l'objectif de sa simulation qui a amené CHANDRASEKHAR à proposer cette méthode en 1950 [22]. Dans les années 1960, cette méthode a été développée par KELLER et WENDROFF, au travers de leurs travaux sur l'extension de son domaine de convergence [23–25], puis par CARLSON et LATHROP [26]. Les années 1990 ont ensuite été l'occasion d'étendre la méthode vers des domaines tri-dimensionnels avec les contributions de TRUELOVE, FIVELAND et JAMALUDDIN [27–31]. Plus récemment, COELHO a réalisé un résumé très complet des dernières avancées de la méthode dans le contexte de la simulation du transfert radiatif au sein des milieux semi-transparents [32].

Comme l'a montré RAITHY, la méthode des ordonnées discrètes correspond à une extension de la méthode des volumes finis par la discrétisation du domaine directionnel supplémentaire [33]. En effet, elle repose sur le principe qu'il est possible d'approximer l'intégrale d'une grandeur G sur ce domaine — \mathcal{S} , la sphère des directions —, par une somme pondérée de ses évaluations en un nombre fini de directions choisies (Eq. 1.29).

$$\int_{\mathcal{S}=4\pi} G(\mathbf{x}, \mathbf{d}, t) d\mathbf{d} = \sum_{m=1}^M w_m G(\mathbf{x}, \mathbf{d}_m, t) \quad (1.29)$$

Avec w_m le poids associé à la direction \mathbf{d}_m

L'approche est constituée de trois étapes majeures :

1. Application d'un schéma de discrétisation angulaire pour déterminer l'ensemble des directions \mathbf{d}_m à étudier ;
2. Pour chacune de ces directions, la résolution de l'équation de conservation régissant le problème est menée, selon la méthode des volumes finis, sur l'ensemble des cellules du domaine spatial pour obtenir l'évaluation de $G(\mathbf{x}, \mathbf{d}_m, t)$;
3. Au sein de chacune des cellules, ces évaluations pondérées de l'ensemble des directions sont enfin sommées pour obtenir l'approximation de la grandeur intégrée désirée.

1.1.4.1 Discrétisation du domaine directionnel

Elle suit un schéma déterministe pour sélectionner un nombre fini de directions à prendre en compte, en leur associant à chacune un poids propre, réel et strictement positif. La principale condition nécessaire à remplir est d'obtenir des poids dont la somme vaut 4π . Celle-ci est une conséquence directe de l'équation 1.29 en considérant G comme la fonction unité. Trois schémas sont couramment utilisés pour réaliser cette discrétisation : la quadrature S_N [26, 34–39], la quadrature T_N [38, 40] et la quadrature des angles polaires [41–43]. L'efficacité de l'emploi de plusieurs de ces schémas a été examinée par KOCH et BECKER [44].

Schéma S_N À l'ordre N , ce schéma permet alors de construire un ensemble de $M = N(N+2)$ directions réparties pour ne favoriser aucun sens de propagation. Pour

ce faire, il obéit à un grand nombre de règles de symétrie. Il doit par exemple être invariant aux rotations de $\pi/2$ autour de chacun des axes du repère cartésien. En 1987, TRUELOVE a ajouté une série de contraintes supplémentaires — portant entre autres sur la conservation du demi-moment et des moments d'ordre pair — pour améliorer l'adéquation du schéma dans le contexte de la modélisation du transfert radiatif [45]. L'ensemble des directions et de leur poids est ensuite déterminé numériquement, à partir d'une direction initiale, par la méthode de NEWTON-RAPHSON de manière à respecter les contraintes édictées. Dans ces conditions, le schéma possède un ordre maximal de 12 — soit 168 directions au sein de la sphère — car au delà des poids négatifs apparaissent. En cas de nécessité, ce schéma peut toutefois être étendu jusqu'à l'ordre 22 — 528 directions — à condition de renoncer à certaines contraintes de symétrie. Il y a de ce fait un compromis à trouver entre l'adéquation du schéma à la physique du rayonnement et le nombre pertinent de directions à considérer.

Schéma T_N Intuitivement, on comprend que plus le nombre de directions utilisées par la quadrature est grand et meilleur est l'approximation obtenue. Ainsi, THURGOOD a mis au point en 1995 un nouveau schéma de discrétisation pour s'affranchir de la limite maximale présente dans le schéma S_N [40]. Pour ce faire, il propose de le construire uniquement de manière géométrique, à l'aide de triangles équilatéraux. Ceci permet, de plus, de déterminer les directions de manière analytique. En effet, sur chaque octant¹ de la sphère unité des directions, un triangle de support entre les points d'intersections de la sphère unité avec les axes du repère cartésien placé en son centre. Ensuite, ce triangle support peut être subdivisé en N^2 triangles équilatéraux (à l'ordre N). Les directions sont alors simplement définies comme celles partant du centre de la sphère vers celui de chacun des triangles. Ainsi, au total, ce sont donc $8 N^2$ directions qui sont obtenues par cette méthode. Le poids de chacune des directions correspond alors à l'aire de la projection de son triangle sur la sphère unité. Toutefois, il est important de noter qu'à nombre égal de directions, ce schéma reste moins précis que le schéma S_N .

Schéma polaire/azimutal La difficulté de construction du schéma S_N , ainsi que sa limite maximale, a stimulé l'émergence d'autres schémas de discrétisation tels que le précédent (T_N) mais aussi le schéma polaire/azimutal. Ce dernier, issu de la communauté des volumes finis a été appliqué pour la première fois à la méthode des ordonnées discrètes par LIU en 2000 [43]. Pour discrétiser un octant des directions, cette approche consiste simplement à discrétiser, avec un pas constant, chacun des deux domaines angulaires qui permettent de le décrire : l'angle polaire et l'azimut. Pour des raisons de calcul des flux aux parois, il faut toutefois veiller à éviter de générer des directions dites *singulières*, c'est-à-dire parallèles à l'un des axes du repère cartésien. Comme dans le schéma T_N , les poids correspondent alors aux angles solides entourant chaque direction générée. Avec cette approche, il est ainsi possible de construire autant de directions que nécessaire avec une formulation analytique. Une autre variante de cette démarche est aussi utilisée. Elle consiste à discrétiser le cosinus de l'angle polaire, à la place de l'angle lui-même, de sorte à obtenir une

1. En considérant une sphère centrée en l'origine d'un repère cartésien, un octant est un huitième de cette sphère défini par les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

pondération identique pour chacune des directions. A nombre égal de directions, ce schéma présente moins d'*effet de rayon* que le schéma S_N , c'est-à-dire moins d'erreur numérique résultant de l'approximation de l'intégration sur le domaine angulaire par l'approche de discrétisation. Cette différence est d'autant plus à l'avantage du schéma polaire quand l'*effet de rayon* provient d'une mauvaise restitution directionnelle du rayonnement provenant des parois [46, 47].

1.1.4.2 Résolution sur le domaine spatial

Pour chaque direction discrète, une équation différentielle régissant le problème est alors obtenue et doit être résolue numériquement. Pour ce faire, la méthode des volumes finis est mise en œuvre en approximant les opérateurs différentiels à l'aide de schémas numériques. Les cellules du maillage spatial sont alors parcourues dans le sens de la direction supportant l'équation différentielle à résoudre. Ceci permet d'utiliser le schéma décentré amont, réputé pour sa stabilité, qui est connu sous le nom de schéma *step* dans la communauté du transfert radiatif² [43]. De ce fait, l'ensemble du domaine spatial discrétisé est ainsi arpenté autant de fois qu'il y a de directions à prendre en compte, et à chaque pas de temps dans le cas d'un problème en régime instationnaire.

Ce parcours des cellules — et donc la méthode — est plus simple à implémenter sur un maillage spatial structuré, utilisant des quadrangles ou des hexaèdres comme cellules. Toutefois, la méthode a été par la suite étendue aux maillages non-structurés, à base de triangles ou de tétraèdres, car ils sont plus répandus, notamment dans le domaine de la mécanique des fluides [48–51]. Ceci s'explique car les problématiques de combustion — demandant la prise en compte à la fois des phénomènes de mécanique des fluides et de transfert radiatif — ont été très tôt un moteur du développement de la méthode DOM [28, 52, 53] et de sa convergence vers celles provenant de la communauté de la mécanique des fluides (FVM).

Par ailleurs, il a été vu précédemment que cinq cents directions — et donc autant d'équations à résoudre sur l'ensemble du domaine — n'étaient pas toujours suffisantes pour décrire correctement un problème. Ainsi, cela permet de percevoir l'ampleur des calculs supplémentaires que nécessite la prise en compte du transfert radiatif, par la méthode des ordonnées discrètes, dans le cadre d'un couplage avec d'autres modèles de phénomènes, par exemple pour étudier une problématique de combustion.

1.1.5 Méthode de Boltzmann sur réseau

Les méthodes précédentes sont couramment utilisées dans les domaines de l'ingénierie mais d'autres méthodes commencent à émerger des laboratoires de recherche. Parmi ces dernières, la méthode de BOLTZMANN sur réseau est probablement l'une des plus populaire et prometteuse. Ses racines remontent jusqu'en 1872 lorsque que BOLTZMANN propose l'équation qui portera son nom. Cependant, la méthode proprement dite a été introduite par MCNAMARA et ZANETTI en 1988 [54] mais

2. Il s'agit aussi du schéma *upwind* de la communauté de la mécanique des fluides.

ce n'est qu'en 1997 que HE et LUO apporteront le cadre théorique faisant le lien avec l'équation de BOLTZMANN continue [55]. La méthode a ensuite pris sa forme actuelle dans les années 1990, avec les premières utilisations de l'opérateur BGK pour modéliser le processus de collision [56, 57]. Son domaine d'utilisation a ensuite rapidement été étendu à la thermique, en commençant par la convection naturelle de RAYLEIGH-BÉNARD [58–60] puis pour la simulation de la conduction [61–63].

Elle est issue du domaine de la dynamique des fluides comme la méthode des volumes finis par exemple. Cependant, à la différence de cette dernière — et de l'ensemble des méthodes présentées jusqu'ici — qui repose sur une description eulérienne du problème, la méthode de BOLTZMANN sur réseau utilise une description lagrangienne. Appliquée à la dynamique des fluides, cette description propose ainsi de décrire un écoulement par l'étude des trajectoires de nombreuses particules de fluides en mouvement dans le domaine plutôt que d'étudier les fluctuations d'un champ de vitesse qui associe à chaque point de l'espace un vecteur vitesse décrivant le mouvement local du fluide.

1.1.5.1 Etapes

Ainsi, l'idée de la méthode est de suivre un grand nombre de particules, de masse identique, se déplaçant sur un réseau de nœuds sous l'effet des collisions qu'elles peuvent subir ou de forces extérieures — la gravité par exemple en mécanique des fluides —. Après une étape préliminaire de construction du maillage du domaine et de discrétisation du domaine des vitesses de propagation, l'ensemble des particules sont initialisées avec une position et un vecteur vitesse. Ensuite, l'algorithme qui est répété à chaque itération temporelle prend place. Il est composé de quatre étapes :

1. Collision : le vecteur vitesse de chaque particule est mis à jour, à l'aide d'un modèle de collision, pour tenir compte de leur éventuelle collision avec une ou plusieurs autres particules au nœud auquel elles se trouvent.
2. Propagation : les particules sont déplacées vers un autre nœud du réseau sous l'effet de leur vitesse durant le pas de temps.
3. Calcul des champs de variable macroscopique tels que la densité ou la quantité de mouvement par intégration sur le domaine des vitesses de la fonction de distribution des particules. Cette intégration est alors réalisée par une quadrature déterministe basée sur les vitesses discrètes retenues.
4. Calcul de la nouvelle fonction de distribution des particules, à l'équilibre thermodynamique.

1.1.5.2 Avantage

De cette manière, les problèmes de collision et les calculs des variables macroscopiques sont indépendants en chaque nœud, tandis que la propagation l'est pour chaque particule. Ainsi, le principal avantage de la méthode est sa facilité de paral-

lélisation puisque que durant chaque étape, aucune information n'a besoin d'être échangée entre les processus.

1.1.6 Limites de l'approche par discrétisation

Ces méthodes partagent le recours à l'approche par discrétisation pour mener deux approximations : celle de l'intégration sur les domaines et celle des opérateurs différentiels par l'utilisation de schémas numériques tronqués. Ceci les amènent à faire face à des limites communes.

1.1.6.1 Discrétisation des domaines

La décomposition d'un domaine en éléments de petite taille n'est pas faite au hasard. En effet, elle est guidée par plusieurs impératifs :

- tout d'abord, un maillage de mauvaise qualité peut rendre instable un schéma numérique par les erreurs qu'il introduit³ ;
- les zones d'intérêt doivent être maillées finement pour y capturer correctement le comportement de la grandeur étudiée ;
- la taille maximale des pas de discrétisation (espace, temps, direction) est contraint par la plus petite taille — ou durée — caractéristique des phénomènes physiques à prendre en compte.

Coût informatique Cela induit des implications négatives fortes. Lorsque la zone d'intérêt est très étendue, que la géométrie du problème est compliquée ou qu'elle possède un rapport d'échelle important, son maillage doit alors comporter un très grand nombre de sous-domaines pour réussir à capter le phénomène physique avec pertinence. Ceci engendre, par conséquent, une très forte consommation de ressources informatiques : mémoire vive pour stocker les données et puissance de calcul pour réaliser les opérations mathématiques sur l'ensemble des sous-domaines. L'exemple typique de ce cas dans le domaine de la mécanique des fluides est l'étude de couches limites qui se développe le long d'un profil.

Cette importante consommation rend ces quadratures peu efficaces pour la simulation de systèmes complexes, c'est-à-dire des ensembles constitués de nombreux éléments en interaction. L'une des stratégies utilisées pour contourner ce problème est de tenter de ne simuler que les seules parties influentes du système. Néanmoins, plus le système est complexe, et plus il est difficile pour un observateur d'identifier, a priori, ces parties parmi celles qui peuvent être négligées avec certitude. Ainsi, cette stratégie atteint d'autant plus ses limites que les systèmes tendent à devenir de plus en plus complexes.

D'autre part, lorsque la zone d'intérêt est susceptible de se déplacer, il faudrait alors mailler finement l'ensemble du domaine ce qui est loin d'être économe en

3. Dans la communauté de la méthode des ordonnées discrètes (DOM), ce phénomène, appliqué à la discrétisation du domaine directionnel, est connu sous le terme d'*effet de rayon*.

ressources informatiques. Pour éviter cela, il est possible de raffiner uniquement localement le maillage et d'introduire un dispositif algorithmique de suivi du déplacement de la zone d'intérêt par la zone raffinée [64]. Cependant, cette technique nécessite un coût humain important lors du développement des outils et ajoute une difficulté supplémentaire lors de leur utilisation.

Parallélisation Par ailleurs, le recours à une discrétisation pour réaliser les quadratures contraint les possibilités de parallélisation des calculs. La méthode communément utilisée consiste à décomposer le maillage en plusieurs sous-domaines, chacun étant alors traité par un processeur différent. Toutefois, pour ce faire, les processeurs doivent échanger des informations, au niveau des interfaces séparant chaque sous-domaine, par un processus lent. Pour que cette approche soit efficace, il faut donc que l'interface entre les sous-domaines — et donc entre les processeurs — soit de taille faible par rapport à leur volume d'éléments contenus. Dans le cas contraire, les processeurs passeraient plus de temps à s'échanger les informations qu'à résoudre les équations sur leur sous-domaine. La conséquence directe de cette approche est qu'elle limite l'utilisation de la parallélisation des calculs à des maillages volumineux. Qualitativement, on considère communément qu'il faut au moins cinquante mille éléments à traiter par processeur pour que cette approche soit pertinente ; ce chiffre étant toutefois très dépendant de la physique modélisée. Avec cette technique, il n'est pas avantageux de tenter de résoudre de manière parallèle une physique très complexe et couplée, mais sur un maillage de taille réduite. De plus, cette démarche de décomposition du domaine oriente fortement le développement de codes vers le recours à des schémas d'intégration temporelle explicites, qui possèdent cependant une vitesse de convergence plus faible.

Problèmes multi-échelles Ce type de problèmes présente des phénomènes physiques — ou des parties du système — de tailles caractéristiques très différentes. Un grand nombre de sous-domaines (spatiaux, temporels ou directionnels) devient alors nécessaire pour modéliser correctement le problème, ce qui induit de ce fait une "explosion" du besoin en ressources informatiques pour mener la simulation. Deux stratégies d'atténuation de cette limitation peuvent être mises en place :

1. L'utilisation d'un maillage adaptatif — *Automatic Mesh Refinement* en anglais — lorsque les différences d'échelles sont "raisonnables" et que les contraintes les plus fines sont cantonnées à une portion du système [64].
2. Le couplage de plusieurs codes ; chacun étant dédié à la simulation d'un phénomène à son échelle. Cela consiste alors à utiliser les résultats des codes aux échelles inférieures comme paramètres d'entrée des codes aux échelles supérieures. Les stratégies de couplage et leurs implications sont abordées à la section 1.3.

Erreurs de discrétisation Il faut aussi garder à l'esprit que la discrétisation n'a aucun sens physique. Sa seule raison d'être est la simplification de l'étape d'intégration numérique qui est nécessaire à la résolution d'équations différentielles. Par conséquent, une fois les résultats obtenus, il faut vérifier qu'ils ne dépendent

pas significativement du maillage utilisé. Pour ce faire, la procédure communément employée consiste à simuler le même problème physique, une nouvelle fois, à l'aide d'une discrétisation en sous-domaines plus fins et à comparer ensuite les résultats. Cette étape supplémentaire, appelée *convergence en maillage* ou *indépendance en maillage*, représente un coût informatique souvent important mais est nécessaire pour améliorer la confiance à accorder aux résultats obtenus par une quadrature à base de discrétisation.

Toutefois, le fait de parvenir à des résultats proches, voire même identiques, permet seulement de conclure que les erreurs sont équivalentes dans les deux cas mais aucunement de quantifier leur intensité. Ainsi, il est tout à fait envisageable d'observer une convergence des résultats en maillage mais que les erreurs dues à la discrétisation restent importantes. Pour avoir parfaitement confiance dans les résultats, les solutions théoriques seraient de faire ce test de convergence avec un très grand nombre de maillages — à défaut de pouvoir le faire avec une infinité — ou d'être en capacité d'évaluer cette erreur de manière absolue et ainsi pouvoir se placer dans une situation où elle est jugée acceptable. En pratique pour compléter l'étude de la convergence en maillage, l'observateur peut mettre à profit ses connaissances des phénomènes physiques à l'œuvre pour identifier les éventuelles incohérences des résultats obtenus avec le comportement qui pouvait être attendu et ainsi contrôler la qualité de ces derniers. Cependant, cette stratégie atteint ses limites quand l'étude concerne des systèmes complexes. En effet, par définition, ils possèdent alors un comportement très difficile à prévoir, voire localement particulièrement contre-intuitif, et cela même pour un expert.

Temps de mise en œuvre Enfin, qualitativement, il est communément admis que, lors d'une étude numérique, l'étape de production du maillage représente environ la moitié du temps humain investi et un tiers du temps de calcul nécessaire [65]. Ainsi, à l'échelle du processus de simulation, le coût de cette opération est particulièrement élevé.

1.1.6.2 Discrétisation des opérateurs différentiels : les schémas numériques

La nécessité de discrétiser les équations résolues, à la fois dans le temps et dans l'espace, ainsi que les techniques utilisées pour le faire ont un impact sur les résultats obtenus.

Opérateurs différentiels temporels Deux méthodes alternatives de résolution sont possibles. L'une, dite *explicite*, dans laquelle l'état du système au pas de temps suivant ne dépend que de son état présent (Eq. 1.30). Cette méthode est facile à mettre en œuvre mais pose des problèmes de stabilité qui peuvent imposer de choisir des pas de temps très faibles.

$$G(t + \Delta t) = f(G(t)) \tag{1.30}$$

La seconde, dite *implicite*, doit résoudre une équation entremêlant, le plus souvent de manière non-linéaire, les états courants et au prochain pas de temps du système pour déterminer la valeur de ce dernier (Eq. 1.31). Cette approche est plus délicate à implémenter et consomme indubitablement plus de ressources informatiques que la précédente pour calculer l'état du système au pas de temps suivant. Néanmoins, elle est aussi plus stable et admet donc l'utilisation de pas de temps plus larges que la méthode explicite. Ainsi, en présence d'équation différentielle *raide* qui imposerait l'utilisation de pas de temps particulièrement faibles avec la méthode explicite, il devient alors plus économique informatiquement d'opter pour la méthode implicite permettant d'avancer par pas de temps plus large.

$$f(G(t + \Delta t), G(t)) = 0 \quad (1.31)$$

Opérateurs différentiels spatiaux La conservation des variations brutales de variable — telle que l'avancée d'un front de chaleur par exemple — est un problème délicat pour les schémas numériques d'approximation des opérateurs différentiels spatiaux.

En ce qui concerne les schémas d'ordre un, ils ont tendance à lisser ces discontinuités par un phénomène de *diffusion numérique* qui n'a aucune cause physique. Ces parasites proviennent en réalité de l'erreur de troncature engendrée par ce schéma numérique qui possède une forme similaire à celle d'un modèle de diffusion physique (Eq. 1.32).

$$\frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{O(\Delta x^3)}{\Delta x} \quad (1.32)$$

De plus, dans un contexte de modélisation d'un phénomène d'advection, la multiplication par la vitesse de cette erreur de troncature permet de construire un coefficient de *diffusion numérique*, D_{num} (Eq. 1.33).

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} = \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta x}{2}}_{D_{num}(\mathbf{x}, t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{O(\Delta x^3)}{\Delta x} \quad (1.33)$$

Les schémas d'ordre deux, quant à eux, ajoutent des oscillations non physiques au résultat : ce phénomène parasite s'appelle de la *dispersion numérique*.

Pour améliorer la conservation de ces discontinuités, des schémas numériques spécifiques ont été développés : les schémas *Normal / Total Variation Diminishing* (NVD/TVD). Pour ce faire, ils proposent de limiter les flux à des valeurs ayant un sens physique, ce qui explique qu'ils soient aussi connus sous le terme de *schémas à limiteurs de flux* [66–68]. Cependant, leur implémentation augmente substantiellement le nombre d'opérations nécessaires et donc le temps de calcul associé.

Conclusion

Cette section a présenté cinq quadratures déterministes à base de discrétisation couramment utilisées pour la simulation de phénomènes physiques : FDM, FEM, FVM, DOM et BOLTZMANN sur réseau. Ces méthodes de résolution présentent toutes un avantage de taille : elles permettent d'obtenir des solutions approchées, sous la forme d'un champ couvrant l'ensemble du domaine étudié, à d'équations aux dérivées partielles autrement difficilement accessibles. Cependant, leurs inconvénients mentionnés précédemment les rendent peu efficaces pour simuler le comportement de systèmes complexes alors que ces derniers sont de plus en plus répandus.

1.2 Quadratures stochastiques : méthode de Monte-Carlo (MCM)

Néanmoins, une autre catégorie de quadratures, recourant à un processus stochastique d'estimation, existe : il s'agit de la méthode de Monte-Carlo⁴. Elle propose d'estimer une quantité d'intérêt formulée comme une intégrale — ou une somme d'éléments — de façon stochastique, c'est-à-dire à partir d'un grand nombre d'évaluations obtenues par échantillonnage d'un modèle probabiliste. De plus, cette approche rend possible la quantification de la précision avec laquelle cette estimation est obtenue. Un intervalle de confiance statistique associé à l'estimation peut alors être construit.

Historique Elle a été formalisée pour la première fois par METROPOLIS et ULAM, en 1949, pour le domaine de la neutronique [69, 70]. Quinze années plus tard, HAMMERSLEY et HANDSCOMB ont ensuite mis en lumière l'opportunité de l'utiliser dans une grande variété de domaines parmi lesquels : l'estimation de solutions d'équations d'opérateurs linéaires, la mécanique statistique ou encore la science des polymères [71]. Parmi les nombreux livres consacrés à cette méthode, l'ouvrage de DUNN et SHULTIS représente une excellente introduction par sa pédagogie et fut une aide précieuse durant les travaux présentés dans ce manuscrit [72].

Sans discrétisation nécessaire On a vu que le recours à une approche par discrétisation est source de limitations qui sont de plus en plus prégnantes avec la complexification croissante des systèmes à étudier. Dans ce contexte, l'une des principales forces de la méthode de Monte-Carlo est de pouvoir s'affranchir de la discrétisation, et ce, même dans des cas non-académiques, à la différence de la résolution analytique.

Pour autant, même si cette méthode ne nécessite aucune discrétisation, elle est cependant utilisable dans le cadre d'une approche qui y recourt — en partageant alors certains inconvénients —. L'une des premières méthodes appartenant aux quadratures stochastiques à base de discrétisation est la marche aléatoire, qui sera plus tard dite "fixe". Elle a été introduite par FELLER, en 1964, dans son traité sur la théorie des

4. Elle tire son nom du quartier de Monte-Carlo, à Monaco, qui est le lieu de nombreux jeux de hasard avec son célèbre casino.

probabilités [73]. Le principe repose sur la discrétisation du domaine en un réseau de nœuds dont on se sert ensuite pour mener une marche aléatoire de proche en proche jusqu'à la frontière. En l'absence de source volumique dans le domaine, le processus de marche aléatoire constitue simplement une méthode itérative d'échantillonnage des nœuds à la frontière du domaine. Dès 1966, HAJI-SHEIKH et SPARROW avec leur marche aléatoire flottante [74], ont fait évoluer cette méthode pour ce passer du réseau de nœuds, et donc de l'étape de discrétisation. De nos jours, les quadratures stochastiques à base de discrétisations sont, à notre connaissance, peu répandues et ne seront donc pas plus détaillées dans la suite de ce document.

Formulation intégrale de la solution Par ailleurs, appliquer la méthode de Monte-Carlo à la résolution d'une équation — différentielle ou non — nécessite, toutefois au préalable, de connaître une formulation intégrale de sa solution, ou sous forme d'une somme. L'obtention de telles solutions peut être réalisée par différentes voies mathématiques, parmi lesquelles la théorie des fonctions de GREEN et celle des opérateurs adjoints occupent une place de choix. Le lecteur voulant approfondir l'utilisation de ces deux derniers outils mathématiques pour obtenir des solutions pourra se reporter au livre de GERLACH qui est très complet à ce sujet [75]. Cependant, dans le cadre des travaux dont ce manuscrit fait l'objet, cette étape constitue un pré-requis et, par conséquent, seule la méthode d'estimation de la solution sera présentée.

Taux de convergence D'autre part, le taux de convergence de la méthode, qui est réputé assez faible, est cependant indépendant de la dimension du problème. Par conséquent, plus le problème à résoudre possède un nombre élevé de dimensions et plus la méthode de Monte-Carlo est compétitive comparée aux quadratures déterministes à base de discrétisation. En effet, ces dernières suivent une vitesse de convergence qui décroît fortement avec le nombre de dimension à prendre en compte [3–5]. Ceci explique pourquoi, aujourd'hui encore, l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo est essentiellement restreinte aux problèmes décrits par plus de trois dimensions tels que la physique du transport (transfert radiatif, physique des particules ou acoustique par exemple), la finance ou les modèles cosmologiques [72, 76].

1.2.1 Principes mathématiques

1.2.1.1 Estimation d'une intégrale

On souhaite estimer une grandeur G , définie sous la forme d'une intégrale de la fonction $g(\mathbf{x})$ sur le domaine Ω (Eq. 1.34).

$$G = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (1.34)$$

Si l'on considère une fonction $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, non nulle sur le domaine Ω , il est alors possible de reformuler G pour faire apparaître cette fonction (Eq. 1.35).

$$G = \int_{\Omega} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \frac{g(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (1.35)$$

Avec $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$

Or, si de plus cette fonction $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (1.36a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (1.36b)$$

Alors, la fonction $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ définit une densité de probabilité associée à la variable aléatoire \mathbf{X} . Celle-ci permet alors de se représenter l'intégrale comme un modèle probabiliste de l'espérance mathématique ($\mathbb{E}[\cdot]$) des poids de Monte-Carlo associés, \hat{w} (Eq. 1.37).

$$G = \int_{\Omega} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \underbrace{\frac{g(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}}_{\hat{w}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \mathbb{E}[\hat{w}(\mathbf{X})] \quad (1.37)$$

La fonction densité de probabilité utilisée ne dépend d'aucune façon de la grandeur G et sa seule contrainte locale est d'être positive. Ainsi, il est donc possible de recourir à une infinité de ces fonctions — possédant chacune une forme propre — pour construire autant de modèles probabilistes de la même grandeur G . Si tous ces modèles permettent bien d'estimer la même grandeur, ils ne le réussissent toutefois pas tous avec la même précision.

Loi des grands nombres Par conséquent, estimer la grandeur que l'on recherche G est équivalent à estimer l'espérance mathématique du poids de Monte-Carlo. Or, la loi des grands nombres établit que la moyenne arithmétique d'un nombre important, h_{max} , d'échantillons indépendants \mathbf{x}_h d'une variable aléatoire \mathbf{X} , converge presque sûrement vers l'espérance mathématique de cette variable aléatoire (Eq. 1.38).

$$\lim_{h_{max} \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \mathbf{x}_h \right) = \mathbb{E}[\mathbf{X}] \quad (1.38)$$

Ainsi, cette loi suggère que la moyenne empirique d'un grand nombre d'échantillons indépendants d'une variable aléatoire constitue un estimateur non-biaisé de l'espérance de cette variable aléatoire (Eq. 1.39). Par ailleurs, plus le nombre d'échantillons étudiés — que l'on appellera des *histoires de Monte-Carlo* —, h_{max} , est élevé et plus cet estimateur sera précis.

$$\frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \mathbf{x}_h \approx \mathbb{E}[\mathbf{X}] \quad (1.39)$$

En appliquant la loi des grands nombres, il est ainsi possible de formuler une estimation de la grandeur G , notée \tilde{G} , à partir d'un nombre h_{max} de points \mathbf{x}_h

échantillonnés indépendamment sur le domaine Ω , en suivant la fonction densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (Eq. 1.40).

$$\tilde{G} = \frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \hat{w}(\mathbf{x}_h) \approx \mathbb{E}[\hat{w}(\mathbf{X})] = G \quad (1.40)$$

En pratique, l'estimation par la méthode de Monte-Carlo de la grandeur G consiste alors simplement à réaliser une moyenne arithmétique d'échantillons du poids. L'algorithme de mise en œuvre sera détaillé dans la section 1.2.2. Par ailleurs, si l'on se réfère à la figure 1.1, on peut remarquer qu'en réalité chacun des échantillons de poids peut être vu comme une évaluation de l'ensemble de l'intégrale G , à partir d'une information récoltée en \mathbf{x}_h . C'est pourquoi, lorsque cette image sera plus appropriée, on fera référence à ces évaluations de d'une grandeur G au cours de l'histoire h , sous le symbole G_h — avec $\{G_h\}$ qui fait référence à l'ensemble de ces évaluations —.

1.2.1.2 Estimation d'une somme

Les intégrales peuvent être vues comme des sommes continues. Ainsi la méthode de Monte-Carlo est aussi capable d'estimer, de manière similaire, des grandeurs formulées sous la forme de sommes discrètes. Considérons une grandeur G , définie sous la forme d'une somme de N valeurs, $g(\mathbf{x}_n)$ (Eq. 1.41).

$$G = \sum_{n=1}^N g(\mathbf{x}_n) \quad (1.41)$$

Sans changer la valeur de cette somme, il est possible d'y introduire des grandeurs non nulles, $P(\mathbf{x}_n)$ (Eq. 1.42).

$$G = \sum_{n=1}^N P(\mathbf{x}_n) \frac{g(\mathbf{x}_n)}{P(\mathbf{x}_n)} \quad (1.42)$$

Si ces grandeurs sont, en plus, strictement positives et que leur somme vaut l'unité, elles peuvent alors être vues comme des probabilités d'échantillonner \mathbf{x}_n parmi l'ensemble des $\{\mathbf{x}_n\}$ (Eq. 1.43).

$$\sum_{n=1}^N P(\mathbf{x}_n) = 1 \quad (1.43a)$$

$$P(\mathbf{x}_n) > 0, \forall \mathbf{x}_n \in \{\mathbf{x}_n\} \quad (1.43b)$$

Un modèle probabiliste de la somme vient alors d'être construit. Celui-ci établit que cette grandeur G est égale à l'espérance mathématique des poids de Monte-Carlo associés (Eq. 1.44).

$$G = \sum_{n=1}^N P(\mathbf{x}_n) \underbrace{\frac{g(\mathbf{x}_n)}{P(\mathbf{x}_n)}}_{\hat{w}(\mathbf{x}_n)} = \mathbb{E}[\hat{w}(\mathbf{X})] \quad (1.44)$$

Dans le cas de sommes discrètes, il est aussi possible d'aboutir à une infinité de modèles probabilistes de la même grandeur, produisant chacun des évaluations avec une quantité de variance propre.

Il est donc possible d'appliquer la loi des grands nombres pour construire une estimation \tilde{G} de cette grandeur sous la forme d'une moyenne arithmétique de poids évalués, au cours de h_{max} histoires de Monte-Carlo (Eq. 1.45).

$$\tilde{G} = \frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} \hat{w}(\mathbf{x}_h) \approx \mathbb{E}[\hat{w}(\mathbf{X})] = G \quad (1.45)$$

Pour ce faire, chaque point \mathbf{x}_h est échantillonné indépendamment suivant les probabilités qu'il soit l'un des \mathbf{x}_n : $P(\mathbf{x}_h := \mathbf{x}_n) = P(\mathbf{x}_n)$.

1.2.1.3 Estimation de l'erreur-type d'une estimation

L'un des principaux avantages de la méthode de Monte-Carlo est sa possibilité de pouvoir quantifier la précision de l'estimation obtenue en utilisant le Théorème central limite.

Théorème central limite Celui-ci énonce que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge vers une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire distribuée selon la loi normale. Or, il vient d'être établi que les estimateurs construits par la méthode de Monte-Carlo se formulent comme des moyennes arithmétiques — et par conséquent des sommes — de variables aléatoires indépendantes. De plus, ces dernières sont également identiquement distribuées puisque elles sont échantillonnées depuis le même modèle probabiliste. Ainsi, ce théorème implique que l'estimation est obtenue sous la forme d'une variable aléatoire dont la distribution tend vers la loi normale quand le nombre d'histoires de Monte-Carlo utilisées augmente.

L'importance de l'écart statistique qui peut exister entre la vraie valeur et son estimation par une méthode stochastique est quantifiée par l'erreur-type de cette méthode d'estimation, $\tilde{\sigma}_{\tilde{G}}$. Elle se calcule comme l'estimation de l'écart-type de l'estimateur utilisé. En pratique, cela s'obtient en divisant l'écart-type de l'échantillon des évaluations, $\tilde{\sigma}_{\{G_h\}}$, par la racine carrée du nombre d'histoires, h_{max} (Eq. 1.46 et 1.47).

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{G}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\{G_h\}}}{\sqrt{h_{max}}} \quad (1.46)$$

Où

$$\tilde{\sigma}_{\{G_h\}} = \sqrt{\frac{1}{h_{max}} \sum_{h=1}^{h_{max}} (G_h - \tilde{G})^2} \quad (1.47a)$$

TABLE 1.1 – Intervalles de confiance et leur indice de confiance en considérant une distribution suivant la loi normale.

Intervalle de confiance	Indice de confiance
$[\tilde{G} - 1 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}; \tilde{G} + 1 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}]$	68.27%
$[\tilde{G} - 2 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}; \tilde{G} + 2 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}]$	95.45%
$[\tilde{G} - 3 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}; \tilde{G} + 3 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}]$	99.73%
$[\tilde{G} - 5 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}; \tilde{G} + 5 \tilde{\sigma}_{\tilde{G}}]$	99.99994%

$$\tilde{\sigma}_{\{G_h\}} = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} G_h^2}{h_{max}} - (\tilde{G})^2} \quad (1.47b)$$

Le lecteur voulant approfondir l'origine de cette formule pourra se référer aux livres de HAMMERSLEY et HANDSCOMB [71], et plus récemment de DUNN et SHULTIS [72], qui proposent des démonstrations.

L'expression 1.46 de l'erreur-type met en évidence qu'il est possible de la diminuer — et donc augmenter la précision de l'estimation — en augmentant le nombre d'histoires de Monte-Carlo utilisées. Néanmoins, celle-ci s'atténue avec la racine carrée du nombre d'histoires. Ainsi, il faut mener quatre fois plus d'évaluations pour diviser par un facteur deux les incertitudes statistiques de l'estimation obtenue. En outre, l'erreur-type est aussi proportionnelle à l'écart-type de l'échantillon des évaluations, c'est-à-dire la racine carrée de leur variance provenant du modèle probabiliste utilisé. Or, il est possible de construire une infinité de modèles probabilistes d'une même grandeur qui produisent chacun des évaluations avec une variance propre, qui peut être plus ou moins élevée. Ainsi, un levier encore plus puissant pour améliorer la précision d'un estimateur est d'améliorer son modèle probabiliste pour qu'il produise moins de variance parmi ses évaluations [72, 77, 78]. Deux exemples de techniques permettant de réduire cette variance sont présentés dans la section 1.2.3 qui aborde les mises en œuvre avancées de la méthode.

D'autre part, d'après le théorème central limite, on sait que l'estimation est une variable aléatoire distribuée selon la loi normale. Par conséquent, la valeur de son erreur-type permet de déterminer des intervalles de confiance autour de sa moyenne — qui estime la grandeur —. Il est possible d'associer à chaque largeur d'intervalle de confiance, un *un indice de confiance*, c'est-à-dire une probabilité d'y trouver la vraie valeur de la grandeur estimée (Tab. 1.1).

Enfin, une formulation alternative de l'erreur-type est généralement préférée lors de l'implémentation car elle est plus efficiente numériquement (Eq. 1.48).

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{G}} = \frac{1}{h_{max}} \sqrt{\left(\sum_{h=1}^{h_{max}} G_h^2\right) - \frac{\left(\sum_{h=1}^{h_{max}} G_h\right)^2}{h_{max}}} \quad (1.48)$$

Avec celle-ci, l'estimation des incertitudes peut être calculée, de manière absolue,

en parallèle de l'estimation de la grandeur d'intérêt. En effet, il suffit simplement d'analyser statistiquement l'échantillon des évaluations utilisées. Ainsi, à la différence des études de convergence en maillage, il n'est donc pas nécessaire de réaliser plusieurs estimations de la grandeur d'intérêt, qui sont des calculs qui peuvent être très coûteux informatiquement, pour pouvoir évaluer la précision du résultat.

1.2.2 Algorithme d'estimation

Une fois le modèle probabiliste construit, l'algorithme d'estimation par la méthode de Monte-Carlo est relativement simple et peut être découpé en trois parties : le pre-processing, les histoires de Monte-Carlo et le post-processing. Il est présenté sous la forme d'un logigramme qui présente les principales étapes en utilisant les symboles prévus dans la norme ISO 5807 (Fig. 1.8).

1.2.2.1 Pre-processing

Il s'agit de préparer toutes les étapes nécessaires à la réalisation des histoires de Monte-Carlo.

1. récupérer les informations concernant le problème à simuler ;
2. fixer le nombre d'histoires de Monte-Carlo qui sont souhaitées ;
3. calculer les probabilités et densités de probabilité présentes dans le modèle probabiliste ;
4. initialiser le compteur des histoires.

1.2.2.2 Histoires : calcul des évaluations

Il s'ensuit un ensemble d'étapes, répété pour chaque histoire, qui permet de générer une évaluation de la grandeur à estimer.

1. échantillonner⁵ le domaine à l'aide des probabilités ;
2. évaluer le poids de Monte-Carlo associé au point ;
3. stocker la valeur du poids et son carré ;
4. et enfin, incrémenter le compteur des histoires.

Par ailleurs, chaque histoire de Monte-Carlo étant complètement indépendante des autres, leur réalisation peut aisément s'effectuer en parallèle. De cette manière, cette méthode permet de profiter au mieux des capacités de calcul des architectures distribuées des super-calculateurs et des processeurs multi-cœurs modernes. Ceci est d'autant plus intéressant que ces étapes consomment, en pratique, l'essentiel des ressources informatiques nécessaires à la totalité de l'algorithme. La seule condition est de garantir l'indépendance des tirages aléatoires entre les différents processus.

5. La procédure d'échantillonnage, et en particulier celle d'un domaine suivant une fonction densité de probabilité, est présentée en détails dans le chapitre 4 du livre de DUNN et SHULTIS [72]. Généralement, elle consiste à transformer une variable aléatoire, échantillonnée uniformément sur $[0, 1]$ par un générateur de nombres aléatoires, en lui appliquant la fonction inverse de la densité de probabilité cumulée que l'on souhaite.

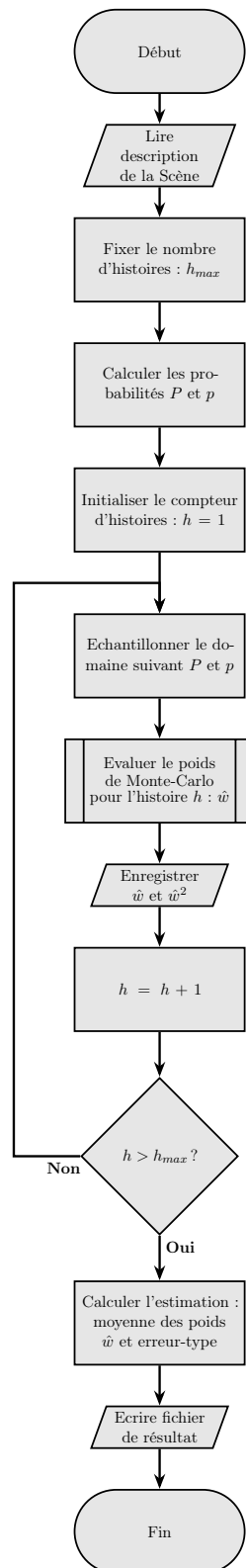


FIGURE 1.8 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation par la méthode de Monte-Carlo.

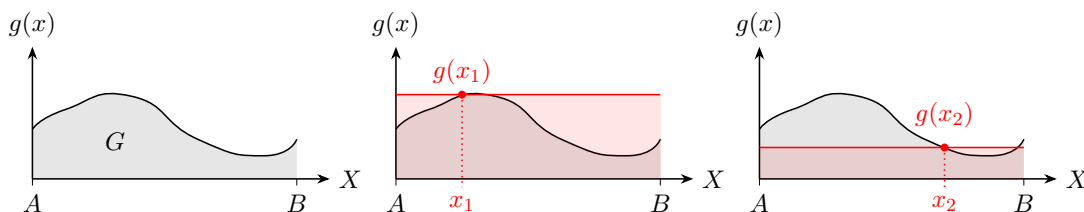


FIGURE 1.9 – Diagramme de l'estimation par la méthode de Monte-Carlo de l'intégrale G : histoires un et deux.

Pour ce faire, il est recommandé de baser les générateurs aléatoires sur des germes pré-calculés plutôt que sur l'horloge de l'ordinateur — qui est le germe habituellement utilisé — qui est commune à tous les processus. Ce champ de la littérature est résumé avec pédagogie dans le chapitre deux du livre de DUNN et SHULTIS [72].

1.2.2.3 Post-processing

Enfin, il reste à calculer les résultats et les mettre en forme.

1. calculer l'estimation de la grandeur, ainsi que son erreur-type, à l'aide des valeurs stockées des poids et de leurs carrés ;
2. pour finir, écrire le fichier de sortie avec les résultats.

1.2.2.4 Exemple d'illustration

Dans le but d'essayer de rendre plus concret l'utilisation de cette méthode, un exemple est proposé : l'estimation d'une grandeur intégrale G (Eq. 1.49 et Fig. 1.9).

$$G = \int_A^B \underbrace{\frac{1}{B-A}}_{p_X(x)} \times \underbrace{(B-A)g(x)}_{\hat{w}(x)} dx \quad (1.49a)$$

Avec une fonction densité de probabilité uniforme :

$$p_X(x) = \frac{1}{B-A} \quad (1.49b)$$

Pour éviter de surcharger inutilement l'exemple, seul le cœur de l'algorithme — le calcul de l'évaluation — est détaillé pour les deux premières histoires.

Histoire 1

1. Échantillonnage uniforme de $[A; B]$ suivant $p_X(x)$: x_1 obtenu ;
2. Évaluation du poids associé : $G_1 = \hat{w}(x_1) = (B-A) \times g(x_1)$;
3. Stockage de $\hat{w}(x_1)$ et de $\hat{w}(x_1) \times \hat{w}(x_1)$
4. $h = 2$

Histoire 2

1. Echantillonnage uniforme de $[A; B]$ suivant $p_X(x)$: x_2 obtenu ;
2. Evaluation du poids associé : $G_2 = \hat{w}(x_2) = (B - A) \times g(x_2)$;
3. Stockage de $\hat{w}(x_2)$ et de $\hat{w}(x_2) \times \hat{w}(x_2)$
4. $h = 3$

Après avoir obtenu un grand nombre de ces évaluations du poids, la grandeur intégrale G est estimée en faisant leur moyenne. En complément, l'erreur-type associée à l'estimation est quantifiée en utilisant l'équation 1.48 et les stocks des poids et de leurs carrés.

1.2.3 Mise en œuvre avancée

L'algorithme de cette méthode est assez simple dans sa version de base. Néanmoins, au fil du temps, plusieurs techniques ont été mises au point pour améliorer son efficacité ou ses capacités d'estimation. Elles peuvent être classées suivant trois objectifs : la réduction de la variance du modèle probabiliste, l'échantillonnage de domaines compliqués et les utilisations avancées.

1.2.3.1 Réduire la variance du modèle probabiliste

L'un des enjeux d'amélioration important de la méthode est de réduire la variance du modèle probabiliste utilisé en tant qu'estimateur. Pour cela, plusieurs approches ont été développées parmi lesquelles les plus courantes sont : l'échantillonnage préférentiel (*importance sampling* en anglais) et l'utilisation de variables de contrôle (*control variates* en anglais).

La première consiste à échantillonner les zones selon l'importance de la fonction à intégrer. Ceci permet alors de diminuer la variance de la population des poids générés par le phénomène de compensation de la fonction densité de probabilité : $\hat{w}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})/p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ [72, 77, 78].

La seconde consiste à créer, à partir de l'estimateur dont on souhaite diminuer la variance, un autre estimateur de variance plus faible en lui soustrayant une variable aléatoire corrélée au premier estimateur : la variable de contrôle [79]. Toutefois, pour ne pas modifier la valeur de la grandeur estimée, cette variable doit posséder une intégrale de valeur nulle sur le domaine. En pratique, il est possible de construire cette variable de contrôle à partir d'une variable aléatoire corrélée à laquelle on soustrait la valeur de son intégrale sur le domaine.

1.2.3.2 Echantillonner les domaines compliqués

L'échantillonnage est une étape cruciale de la méthode de Monte-Carlo. Elle peut être délicate à réaliser lorsque la fonction densité de probabilité est compliquée ou non-intégrable analytiquement par exemple. Pour cela une méthode a été très tôt développée : la méthode de rejet (*rejection method* en anglais) [72]. Elle consiste alors à réaliser l'échantillonnage en deux étapes :

1. un point est échantillonné à partir d'une fonction densité de probabilité simple ;
2. ce point est ensuite accepté, ou rejeté, par l'échantillonnage d'une probabilité de compensation.

Pour ce faire, cette probabilité est construite comme le rapport de la fonction densité de probabilité souhaitée sur celle effectivement utilisée pour l'échantillonnage, qui a été préalablement multipliée par un facteur pour lui assurer de majorer la première en tout point du domaine. En appelant la fonction densité de probabilité souhaitée, $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, celle qui sert de support d'échantillonnage, $p_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})$ et le facteur de majoration, $\hat{m}(\mathbf{x})$, on obtient un modèle probabiliste pour l'estimation de la grandeur intégrale G de la forme :

$$\begin{aligned}
 G &= \int_{\Omega} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \underbrace{\frac{g(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}}_{\hat{w}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} p_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \underbrace{\frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\hat{m}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})}}_{P_{\text{accept}}(\mathbf{x})} \underbrace{\frac{\hat{m}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}}_{\hat{w}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Une approche s'inspirant de cette méthode d'échantillonnage a été développée récemment, les algorithmes à collisions nulles (*null-collision algorithm* en anglais), pour permettre de calculer efficacement les transferts radiatifs au sein des milieux participants hétérogènes [80–82]. Elle s'appuie sur un champ estimateur connu — constant dans son application la plus simple — des propriétés radiatives du milieu pour permettre d'échantillonner facilement le domaine. La probabilité d'acceptation est alors le rapport local du coefficient d'extinction réel sur la valeur de son champ estimateur, dans le cas où celui-ci est majorant. De plus, GALTIER a montré qu'il n'était en réalité nécessaire que le champ estimateur soit majorant pour que l'approche soit valable mais, néanmoins, que cela permettait d'éviter une forte hausse de la variance des évaluations générées [82].

D'autre part, l'échantillonnage statistique permet aussi de prendre en compte de manière particulièrement efficace l'intégration d'un domaine, continu ou discret, de très grande taille. En effet, un échantillon d'informations statistiquement représentatives peut permettre de produire un résultat satisfaisant à un coût bien moindre que ne le pourrait une méthode déterministe à base de discrétisation. Cela a été récemment appliqué de manière convaincante pour le calcul d'échanges par transfert radiatif au sein de milieux participants, en prenant en compte la dépendance spectrale de leurs propriétés radiatives par échantillonnage de bases de données spectroscopiques de très grande taille [82, 83].

1.2.3.3 Etendre les utilisations

En outre, les méthodes de Monte-Carlo ont connues des avancées récentes qui permettent d'approfondir l'analyse de systèmes complexes. Tout d'abord, il a été mis en évidence que cette méthode est apte à estimer, en plus de grandeurs physiques,

leurs sensibilités à des paramètres du problème [84–87]. De plus, cette méthode a aussi montré des capacités d'estimation de fonctions objectifs compliquées, au sein de processus d'optimisation stochastique tels que les algorithmes d'optimisation par essaim de particules [87, 88]. Enfin, de récentes avancées ont mis en lumière la possibilité d'estimer des grandeurs définies par des intégrandes non-linéaires de variables intégrées en recourant à une processus d'estimation branchant [89, 90]. Cette approche émergente ne permet pas encore d'envisager de traiter des problèmes d'ingénierie présentant des phénomènes physiques non-linéaires [90, 91]. Néanmoins, elle autorise déjà l'estimation de quantités non-linéaires de variables — localisées ou de champs entiers — d'un système telles que peuvent être des fonctions objectifs d'un processus d'optimisation [87].

1.2.4 Variantes

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés avec la méthode de Monte-Carlo dans son format "classique". Celui-ci n'apporte pas d'avantages significatifs par rapport aux variantes, mis à part une plus grande liberté de construction des modèles probabilistes utilisés. Cette liberté va nous permettre d'essayer d'obtenir des modèles probabilistes qui soient les plus proches possible des phénomènes physiques représentés. Toutefois, la raison principale de ce choix est l'existence d'un savoir-faire reconnu, sur cette forme "classique" de la méthode, de l'équipe du laboratoire RAPSODEE qui a accompagné ces travaux de recherche et qui participe à la collaboration STARWEST⁶ sur le sujet.

Néanmoins, depuis la création de cette méthode, plusieurs variantes qui reprennent le même processus d'estimation stochastique sans discrétisations ont été développées. Quelques exemples, parmi les variantes les plus courantes, sont brièvement présentés dans cette section.

1.2.4.1 *Markov Chain Monte Carlo* et Marches aléatoires

Les méthodes *Markov Chain Monte Carlo* permettent d'échantillonner une fonction densité de probabilité compliquée en construisant une chaîne de MARKOV de manière récursive. Celle-ci converge alors, en loi stationnaire, vers cette fonction densité de probabilité ayant pour support la classe des positions finales⁷ de la chaîne construite. Ainsi, les échantillons sont obtenus parmi les positions, appartenant à

6. Collaboration transdisciplinaire menant des recherches méthodologiques pour développer la méthode de Monte-Carlo dans sa forme "classique". Elle est structurée autour d'équipes issues de plusieurs laboratoires de recherche du Sud-Ouest de la France : LAPLACE (Toulouse), RAPSODEE (Albi), CNRS-PROMES (Odeillo), CRCA (Toulouse) et l'Institut Pascal (Clermont-Ferrand). <http://www.starwest.ups-tlse.fr/>

7. Une classe de positions est *finale* lorsqu'elle ne conduit la chaîne de MARKOV vers aucun autre ensemble de positions. Il y a alors deux possibilités. Soit des positions du domaine "piègent" la construction de la chaîne de MARKOV et elles appartiennent de fait à sa classe finale. Soit il n'y a aucune positions "pièges" et alors l'ensemble du domaine constitue une unique classe. Par conséquent, ses positions ne peuvent alors conduire que vers d'autres positions de cette même classe ce qui en fait également une classe *finale*.

la classe finale de la chaîne de MARKOV, et qui ont été parcourues au cours de la construction de cette dernière.

Chaîne de Markov Une telle chaîne de positions se construit, position après position, à l'aide d'un processus "sans mémoire", dit de MARKOV. En pratique, il s'agit d'échantillonner une *probabilité de transition* — ou une fonction densité de probabilité dans le cas continu —, pour se déplacer d'une position présente à une prochaine. La condition d'absence de "mémoire" du processus impliquant que cette probabilité de transition ne dépende que de la position présente, et donc aucunement des positions passées.

De plus, la chaîne est *irréductible* si toutes les positions du domaine sont accessibles — par une ou plusieurs transitions — à partir de n'importe quel point de départ. Dans ce cas là, elle possède alors une propriété de MARKOV forte qui énonce que sa classe des positions finales est constituée de l'ensemble du domaine. L'échantillon de ce dernier se compose ainsi des positions d'une unique chaîne de MARKOV, après avoir éliminé ses premières positions pour neutraliser sa dépendance au point de départ. Ce procédé a l'avantage de ne nécessiter de construire qu'une seule chaîne pour l'échantillonnage. Néanmoins, ceci se fait au prix de la perte d'indépendance entre les échantillons et donc de la perte de la possibilité de quantifier l'erreur-type de l'estimation. En effet, chaque échantillon est construit par transition à partir du précédent, ce qui induit une corrélation entre eux et ne permet donc pas d'appliquer le théorème central limite.

Quand le domaine possède des positions dans lesquelles la chaîne se retrouve piégée, celle-ci n'est pas *irréductible*. Elle converge alors vers ces positions "pièges" qui constituent, de ce fait, sa classe de positions finales. Il s'agit d'une propriété de MARKOV faible. Ceci à deux conséquences. La première est que ce type de chaînes ne permet d'échantillonner que des fonctions densité de probabilité définies sur ces positions "pièges", et pas sur l'ensemble du domaine. La seconde est qu'il faut alors construire autant de chaînes de MARKOV que l'on souhaite d'échantillons puisqu'elles se retrouvent piégées par leur premier échantillon fourni. Néanmoins, l'avantage de cette contrainte est que les échantillons ainsi générés sont alors indépendants.

Marches Aléatoires Un grand nombre de méthodes appartiennent à la classe des méthodes *Markov Chain Monte Carlo*. Parmi celles-ci, les marches aléatoires en sont une sous-classe importante [72, 92].

Certaines marches recourent à la construction d'une chaîne avec une propriété de MARKOV forte. C'est le cas, par exemple, de l'un des algorithmes les plus courants : celui de METROPOLIS-HASTINGS. Pour ce faire, ce dernier utilise une probabilité de transition qui est obtenue par une méthode de rejet s'appuyant sur l'échantillonnage d'une fonction densité de probabilité gaussienne, centrée sur la position présente [3].

D'autres, telles que les marches aléatoires flottantes (*floating random walk* en anglais), se basent sur des chaînes possédant une propriété de MARKOV faible pour

échantillonner les frontières qui contraignent un problème [74, 93, 94]. Pour ce faire, la classe finale de la chaîne est constituée des frontières possédant une condition de type DIRICHLET. D'autre part, dans cette méthode, la transition d'une position à la suivante est réalisée en échantillonnant uniformément la plus grande sphère — ou le cercle pour les domaines en deux dimensions —, à la fois centrée sur la position présente et contenue dans le domaine. Le rayon de cette sphère est alors égal à la plus courte distance séparant la position présente de la frontière du domaine. Bien que la détermination de cette distance soit une tâche relativement simple à réaliser graphiquement pour un humain, elle est cependant bien plus délicate pour un algorithme, ce qui complique son implémentation [95]. De plus, cette procédure d'échantillonnage seule ne permet pas, en pratique, de pouvoir conduire la chaîne jusqu'à la frontière. En effet, les sphères étant, sauf cas exceptionnel, simplement tangentes à la frontière, la probabilité d'en échantillonner un point est ainsi de support nul. Il est donc nécessaire de compléter cette démarche en assimilant la frontière à une couche périphérique d'épaisseur non nulle. Ceci permet alors aux sphères échantillonnées de posséder une partie d'aire non-nulle, et donc de probabilité non-nulle, appartenant à cette approximation de frontière qui devient, de ce fait, échantillonnable. On notera cependant que cette approximation salvatrice se fait au prix de l'introduction d'un biais, proportionnel à l'épaisseur de la couche, dans l'estimateur ainsi construit. La place centrale de ces sphères dans les marches aléatoires flottantes font que ces dernières sont aussi connues dans la littérature sous les noms *Walk-On-Circles*, lorsque la marche a lieu sur un domaine bi-dimensionnel, et *Walk-On-Spheres* en présence de domaines spatiaux tri-dimensionnels [72].

1.2.4.2 *Direct Simulation Monte Carlo (DSMC)*

La méthode *Direct Simulation Monte Carlo* provient du domaine de la dynamique des gaz raréfiés. Elle adopte une démarche de résolution très différente des méthodes précédentes par le recours à une description lagrangienne des problèmes. Elle apparaît ainsi comme le pendant stochastique, et affranchie de la nécessité de discrétisation des domaines spatiaux et directionnels, de la méthode de BOLTZMANN sur réseau. En effet, elle propose de résoudre une équation de BOLTZMANN en suivant une population de particules — de masse identique — qui se déplacent dans le domaine et entrent en collision mutuellement à chaque pas de temps.

Etape 1 : mouvement Lors de l'étape de mouvement, les particules se déplacent librement — sans le carcan d'un réseau — et leur nouvelle position sont calculées de manière déterministe à partir de leur vitesse et de la durée du pas de temps [96].

Etape 2 : collision L'étape de collision est quant à elle entièrement stochastique. Pour ce faire, elle est réalisée par échantillonnage de fonctions densité de probabilité construites à partir de la théorie cinétique. Or, plus les particules sont proches et plus elles doivent avoir une probabilité importante de rentrer en collision. Par conséquent, ces fonctions densité de probabilité doivent prendre en compte la proximité des particules. Une manière simplifiée d'approcher ce comportement consiste à diviser l'espace en sous-domaines. Ensuite, la simplification réside dans le fait que les

particules au sein d'une même *cellule* sont alors susceptibles de rentrer en collision, et ce, peu importe leur position exacte au sein de celle-ci [96].

Avantage : possibilité d'estimation de champ d'inconnue De plus, ce maillage peut ensuite servir à estimer les champs d'inconnues souhaités par analyse de la population des particules contenues dans chaque cellule [96]. Pour construire un estimateur stochastique pour chaque cellule, il est nécessaire de pouvoir y appliquer la loi des grands nombres et le théorème central limite. Pour ce faire, un grand nombre de simulations DSMC indépendantes du même problème — et avec des paramètres identiques — sont réalisées. Ainsi, une population d'évaluations stochastiques du champ d'inconnue — comportant autant d'individus que de simulations réalisées — est obtenu au sein de chaque cellule. Il apparaît ainsi de manière assez évidente que cette variante est particulièrement gourmande en ressources informatiques.

Par ailleurs, il est important de rappeler que l'utilisation de ce maillage de l'espace permet seulement de simplifier la mise en œuvre de l'approche mais ne lui est aucunement nécessaire : il s'agit donc bien d'une méthode sans discrétisation.

Inconvénient : limitation similaire à une discrétisation À côté de l'avantage de pouvoir estimer un champ d'inconnue, cette variante éprouve aussi une limitation par rapport à la méthode "classique" de Monte-Carlo. En effet, sa précision est directement corrélée avec le nombre de particules dispersées dans le système à simuler. Ainsi, pour qu'elle soit suffisante, il est généralement conseillé d'utiliser au moins vingt particules par cube d'un libre parcours moyen de côté, pour un problème tri-dimensionnel [96–98]. Ainsi, le nombre de particules — et donc le besoin en ressources informatiques — est proportionnel au nombre de dimensions du problème à traiter et à son étendue. On retrouve par conséquent des limitations similaires à celles des approches par discrétisation lorsque la complexité des systèmes croît. De plus, on perd par la même occasion l'avantage de compétitivité du taux de convergence de la méthode de Monte-Carlo pour les problèmes comportant plus de trois dimensions.

1.2.5 Limites de l'approche stochastique

1.2.5.1 Savoir-faire nécessaire

Tout d'abord, on a vu que les incertitudes de l'estimation décroissent avec la racine carrée du nombre d'histoires, mais sont aussi proportionnelles à l'écart-type de la population des évaluations utilisées. Ceci implique que pour augmenter la précision d'un estimateur, il est plus efficace d'essayer de diminuer la création de variance du modèle probabiliste utilisé plutôt que de recourir à la force brute informatique par un plus grand nombre d'histoires. Ceci est d'autant plus vrai quand on souhaite obtenir un calcul avec une précision très importante, par exemple dans le cadre d'un calcul de référence. En effet, si le modèle probabiliste utilisé crée une variance importante parmi les évaluations, il faudra alors investir énormément de ressources informatiques pour obtenir une estimation avec une précision faible. À titre d'exemple, si l'on

souhaite diviser par cent l'incertitude d'une estimation, il faut alors multiplier par dix mille le nombre d'histoires nécessaires. En pratique, cela fera passer la durée d'un calcul d'une minute à une semaine et d'une heure à plus d'une année. Néanmoins, tenter de diminuer la création de variance en changeant de modèle probabiliste demande beaucoup plus de savoir-faire que la simple augmentation du nombre d'histoires utilisées. Ainsi, le levier le plus efficace pour obtenir une estimation de qualité est difficilement accessible pour un utilisateur lambda d'une méthode de simulation [72].

Ceci explique l'une des motivations de ces travaux : réaliser méthodologie de modélisation utilisant une bibliothèque de modèles probabiliste dont la création de variance a préalablement été travaillée. Ceci permettra de mettre à disposition les possibilités de ces méthodes auprès des utilisateurs souhaitant s'investir peu dans le développement de la méthode.

1.2.5.2 Une seule grandeur estimée à la fois

D'autre part, l'estimateur ne permet d'obtenir qu'une seule valeur à la fois (et son erreur-type). Celle-ci peut être une fonction évaluée localement, ou intégrée sur un domaine telle que la moyenne d'un champ sur une surface ou un volume par exemple. Par conséquent, il s'agit d'un inconvénient qui peut être très limitant dans le cas où la totalité d'un champ de grandeur est recherchée au cours de la simulation. La solution serait alors de construire autant d'estimateurs que de points auxquels le champ doit être estimé, ce qui peut être très coûteux informatiquement.

Toutefois, dans le contexte de l'optimisation de systèmes, ce handicap disparaît puisque seule la fonction objectif a alors besoin d'être estimée — et peut l'être en une seule estimation de Monte-Carlo — et non explicitement l'ensemble d'un champ d'inconnue.

1.2.5.3 Estimer des fonctions non-linéaires d'intégrales

En outre, le *Los Alamos National Laboratory* identifie aussi comme l'une des principales limites à la diffusion de la méthode de Monte-Carlo sont l'incapacité à estimer des fonctions non-linéaires d'intégrale ou d'estimateur au sens large [99].

On a vu que des travaux récents ouvrent des perspectives pour surpasser cette difficulté, par la construction d'estimateurs branchants [89–91]. Néanmoins, cette approche n'est applicable que dans certains cas seulement. Ainsi, les problèmes d'ingénierie qui présentent un phénomène physique non-linéaire — tel que le transfert radiatif formulé en température estimée — semblent poser des problèmes "d'explosion" du nombre de branches de l'arbre des évaluations nécessaires, notamment sous l'effet du besoin récursif d'utiliser des estimateurs branchants.

1.2.5.4 Problématique de couplage

Enfin, une autre limite identifiée par le *Los Alamos National Laboratory* est la problématique du couplage de plusieurs phénomènes physiques pour réaliser des simulations multi-physiques [99]. Au delà de la difficulté technique de coupler plusieurs modèles ou outils informatiques, de telles simulations peuvent aussi présenter des contraintes de surconsommation de ressources informatiques, d'autant plus quand l'étude se situe à l'échelle du système. Les travaux présentés dans ce manuscrit se sont focalisés sur cette dernière problématique. Les stratégies de mise en œuvre couramment utilisées sont détaillées dans la section suivante.

Conclusion

Cette section a présenté les quadratures stochastiques, connues aussi sous le nom de méthodes de Monte-Carlo. Elles permettent d'estimer une solution, locale ou intégrée, d'équations aux dérivées partielles, sans nécessiter de discrétiser les domaines. En s'affranchissant des limites de la discrétisation, et avec un taux de convergence compétitif pour traiter des problèmes au delà de trois dimensions, ces quadratures semblent prometteuses pour la simulation au sein de domaines étendus et/ou intriqués. De plus, leur caractère stochastique permet de pouvoir quantifier de manière absolue l'erreur-type avec laquelle l'estimation est obtenue.

1.3 Couplage de méthodes de simulation

Le couplage est une stratégie qui peut être mise en place pour traiter des problèmes multi-physiques et/ou des problèmes multi-échelles. Son principe général est assez simple : utiliser plusieurs méthodes de simulation pour résoudre le problème de sorte à ce que chacune de ses parties soit traitée avec une méthode adaptée. Ce qui semble relever du bon sens peut néanmoins rapidement s'avérer délicat à implémenter.

L'ensemble des méthodes de simulation, qu'elles soient basées sur une discrétisation des domaines ou non, peuvent être utilisées. Parfois, la mise en œuvre peut consister à coupler plusieurs codes de simulation, chacun étant dédié à l'un des phénomènes physiques, à la place de plusieurs modèles. On parle alors préférentiellement de *chaînage* de codes plutôt que de couplage. La difficulté majeure consiste de ce fait à assurer la cohérence entre des résultats provenant d'outils différents, qui reposent sur leurs hypothèses propres et même parfois sur des stratégies de résolution éloignées.

Avec les deux catégories de méthodes de simulation les plus utilisées, il est alors possible de construire trois types de couplage :

1. le couplage homogène de méthodes déterministes à base de discrétisation ;
2. le couplage hétérogène de méthodes ;
3. le couplage homogène de méthodes stochastiques sans discrétisation.

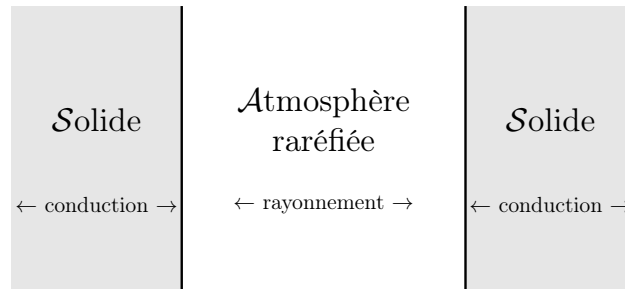


FIGURE 1.10 – Schéma du cas d'illustration "thermos de café" d'un problème de thermique couplée, présentant une double paroi qui enferme une couche d'atmosphère raréfiée immobile.

Les implications de ces stratégies de couplage sont globalement similaires qu'elles soient employées pour traiter des problèmes multi-physiques ou multi-échelles. Le choix a été fait de présenter ces approches en s'appuyant uniquement sur la problématique multi-physique. En effet, cette thématique est un objet de recherches dans une grande variété de domaines d'application de l'astrophysique jusqu'à la biochimie, en passant par les milieux raréfiés ou l'ingénierie des réacteurs nucléaires par exemple [100–104]. De plus, les images physiques qu'elle permet devraient favoriser la pédagogie du discours.

Pour ce faire, chacune des approches va être abordée en se basant sur le cas simple et illustratif d'un problème nécessitant le couplage de la conduction thermique avec du transfert radiatif : la simulation d'un "thermos de café" (Fig. 1.10). Ce problème est décrit sous la forme d'une double paroi, présentant un transfert conductif, et dont chacune échange par rayonnement au travers d'une couche d'atmosphère raréfiée immobile.

1.3.1 Couplage homogène de méthodes déterministes à base de discrétisation

Parmi les trois approches présentées, celle-ci est probablement la plus répandue aujourd'hui. Son caractère homogène, par l'utilisation de méthodes aux philosophies proches, simplifie en partie son implémentation et le respect de la cohérence entre les résultats obtenus.

1.3.1.1 Echange d'information

Dans cette approche, le couplage se matérialise en pratique par des échanges d'information entre les modèles résolus. Ainsi, la méthode "finie" (F*M⁸) détermine les champs de température, de propriétés physiques et, éventuellement, de concentration des espèces chimiques. De son côté, la méthode des ordonnées discrètes calcule la densité de flux échangée par transfert radiatif entre les sous-domaines. Cette densité

8. On désigne ici par F*M, la classe générique des méthodes "finies" : les différences finies (FDM), les éléments finis (FEM) ou les volumes finis (FVM).

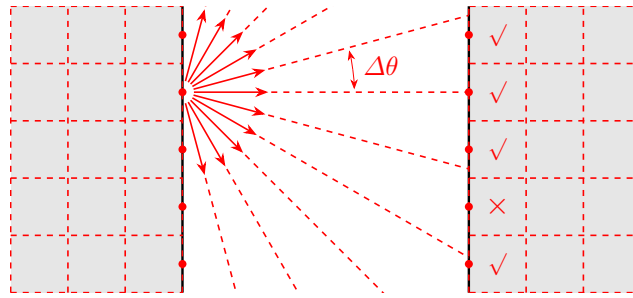


FIGURE 1.11 – Schéma d’une approche par couplage homogène de méthodes à base de discrétisation pour traiter le cas d’illustration "thermos de café". Illustration d’un *effet de rayon* : la valeur d’un des sous-domaines n’est pas prise en compte par manque d’intersection avec l’une des directions discrètes utilisées par la méthode DOM.

de flux est ensuite prise en compte, dans le modèle résolu par la méthode F*M, sous la forme d’un terme source volumique ou d’une densité de flux à la paroi.

1.3.1.2 Couplage implicite

Comme dans le cas des schémas numériques, il existe deux approches possibles de résolution d’un problème multi-physique. Le premier est un couplage *implicite* dans lequel chaque sous-domaine dépend de la valeur des autres au même instant. Dans ce cas la résolution consiste principalement à inverser une matrice représentant ces dépendances mutuelles. Bien que théoriquement possible, cette démarche peut rapidement se révéler très délicate à mettre en œuvre, en particulier dans le cas de la simulation de systèmes complexes.

1.3.1.3 Couplage explicite

Ainsi, le plus souvent, la seconde approche, dite *explicite* lui est préférée. Il s’agit d’une résolution itérative dans laquelle le modèle de chaque sous-domaine dépend de la valeur des autres à l’itération précédente — mais relatif au même instant —. Ainsi, après une initialisation des champs, les méthodes de résolution sont effectuées, chacune à leur tour et en boucle, à partir des résultats de la précédente, jusqu’à ce que les valeurs calculées convergent suffisamment d’une itération à l’autre. Dans le cas d’un problème en régime instationnaire, une fois que cette convergence a eu lieu, l’ensemble de la procédure itérative est ensuite répétée pour le pas de temps suivant.

Exemple d’illustration Appliquée au cas d’illustration, l’approche du couplage explicite met en œuvre une méthode F*M pour la conduction au sein des parois et la méthode DOM pour le transfert radiatif à l’intérieur de l’atmosphère raréfiée (Fig. 1.11). La résolution se déroule alors pour chaque pas de temps comme suit. Après une initialisation des champs d’inconnue, la première itération utilise la méthode F*M sur l’ensemble du domaine pour calculer le champ de température, puis la méthode DOM pour déterminer le champ de luminance. Pour ce faire, cette dernière procède à un calcul par la méthode des volumes finis sur l’ensemble du domaine, pour

chacune des directions discrètes retenues. Le champ de luminance calculé permet ensuite d’obtenir, par intégration directionnelle, les termes de densité de flux échangé par rayonnement. Ensuite, ces opérations de résolution sont renouvelées, à partir des résultats obtenus par la première itération, au cours de la suivante. Et ainsi de suite jusqu’à validation d’un critère de convergence des résultats. Les champs d’inconnues — température et luminance — sont alors obtenus pour le premier pas de temps et l’algorithme peut continuer la résolution au pas de temps suivant. Par ailleurs, sur la paroi en face de celle d’où partent les directions discrètes illustrant l’utilisation de la méthode DOM, on notera que l’un des sous-domaines n’est pas intersecté. Par conséquent sa valeur ne sera pas prise en compte pour calculer la densité de flux source par rayonnement à la paroi du point de départ : il s’agit d’un *effet de rayon*.

Par sa démarche itérative, l’utilisation de cette approche de couplage rend alors la résolution de problèmes multi-physiques particulièrement gourmande en ressources informatiques. L’une des stratégies pour diminuer cette inconvénient consiste à espacer les résolutions les plus consommatrices, telle que celles par la méthode DOM, de plusieurs itérations de méthodes F*M [105].

1.3.2 Couplage hétérogène de méthodes

Les méthodes sans discrétisation ont montré qu’elles sont plus adaptées au caractère directionnel du transfert radiatif, entre autres grâce à leur absence d’*effets de rayon*. Ceci explique que des couplages hétérogènes d’une méthode F*M avec une méthode de Monte-Carlo, pour résoudre l’équation du transfert radiatif en lieu et place d’une méthode aux ordonnées discrètes, aient été mis au point [106].

1.3.2.1 Echange d’information

Pour ce faire, les deux méthodes de résolution échangent des information de manière identique au cas précédent. Ainsi, la méthode F*M fournit les champs de température, de propriétés et de concentration d’espèces chimiques à la méthode de Monte-Carlo. Tandis que cette dernière estime le champ de luminance permettant de calculer les densités de flux échangé par rayonnement. Ces dernières sont ensuite intégrées à l’équation de conservation de l’énergie.

1.3.2.2 Couplage explicite

L’hétérogénéité des méthodes utilisées impose le recours à un couplage de type *explicite*. Ainsi, à chaque pas de temps, une résolution itérative est menée jusqu’à convergence des résultats obtenus à l’aide d’une méthode F*M pour les champs d’inconnue et d’une simulation de Monte-Carlo par terme source radiatif à estimer — que ce soit un terme source volumique ou une densité de flux à une paroi —.

Exemple d’illustration Dans le cadre de notre illustration, après une initialisation des champs d’inconnue, la méthode F*M permet de calculer le champ de température à l’intérieur des parois. Puis, le transfert radiatif n’ayant lieu qu’au travers de la couche d’atmosphère raréfiée, on a alors simplement besoin de calculer les densités

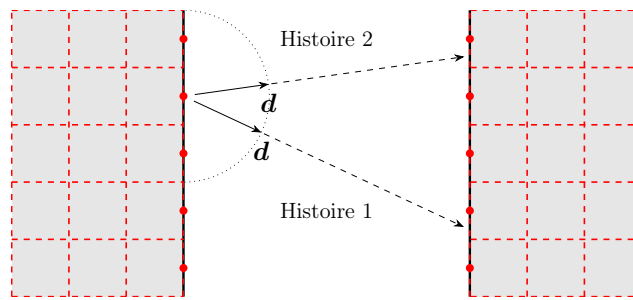


FIGURE 1.12 – Schéma d'une approche par couplage hétérogène de méthodes pour traiter le cas d'illustration "thermos de café" (histoires un et deux).

de flux aux parois — à condition de négliger la participation du gaz —. Pour ce faire, une estimation de Monte-Carlo est menée depuis chaque interface des sous-domaines de la paroi connectés avec la couche de gaz, à l'aide d'un grand nombre d'histoires. Chacune de ces histoires utilise alors une direction d'incidence à l'interface du transfert radiatif qui a été échantillonnée aléatoirement dans l'hémisphère (Fig. 1.12). Ces deux résolutions sont alors renouvelées pour les itérations suivantes jusqu'à ce que le résultat soit obtenu pour le pas de temps en cours.

1.3.2.3 Avantage

Le caractère itératif de cette procédure de couplage possède un atout puisqu'il permet d'utiliser aisément un modèle non-linéaire pour décrire le transfert radiatif à estimer par la méthode de Monte-Carlo. En effet, ceci est rendu possible car l'ensemble du champ de température est connu explicitement grâce à la méthode F*M.

1.3.2.4 Inconvénients

La nature stochastique de l'échantillonnage permet d'éviter les erreurs systématiques qui peuvent apparaître par effet de rayon avec la méthode DOM. Néanmoins, ceci est obtenu au prix d'une consommation encore plus importante de ressources informatiques; notamment car une estimation par la méthode de Monte-Carlo est alors nécessaire pour chaque sous-domaine et à chaque itération. Or il s'agit souvent de l'une des étapes les plus consommatrices. Pour réduire ce besoin, la même stratégie qu'avec la méthode DOM peut être utilisée : ne pas réaliser l'étape de simulation Monte-Carlo à chaque itération [105].

Par ailleurs, l'hétérogénéité du couplage d'une méthode stochastique avec une autre déterministe demande de trouver un compromis sur la précision à cibler pour la première. En effet, si l'erreur-type des simulations Monte-Carlo est trop élevée, leurs estimations vont présenter une variabilité stochastique substantielle. Cela peut avoir deux effets négatifs. Le premier est que l'énergie risque de ne plus être parfaitement conservée du fait, par exemple, d'une somme des facteurs de forme estimés qui ne vaut pas exactement l'unité. L'autre problème concerne la variation stochastique

de l'estimation d'une même grandeur qui peut apparaître d'une itération à l'autre. Si celle-ci est trop importante, elle peut alors fortement perturber la convergence de la procédure itérative au cœur du couplage explicite. Néanmoins, la méthode de Monte-Carlo peut faire payer au prix fort un besoin de précision importante puisque cette dernière augmente suivant la racine carré du nombre d'histoires utilisées. Dans certains cas, ceci peut engendrer des temps de calcul qui deviennent difficilement compatibles avec une résolution itérative, telle que le demande un couplage explicite [105].

Ces deux inconvénients, énoncés par TENCER et HOWELL [105], nuancent beaucoup l'intérêt de recourir à la méthode de Monte-Carlo pour la simulation du transfert radiatif, en association avec une méthode F*M.

1.3.3 Couplage homogène de méthodes stochastiques sans discrétisation

Néanmoins, une troisième approche de couplage peut être envisagée : utiliser des méthodes de Monte-Carlo pour résoudre le modèle probabiliste de l'ensemble du problème multi-physiques. Elle devrait permettre de s'affranchir des deux limitations de la démarche précédente.

1.3.3.1 Homogénéité du couplage

Tout d'abord, s'agissant d'une procédure homogène, la totalité de la résolution est alors stochastique. La variabilité inhérente à l'aspect stochastique deviendrait alors naturellement prise en compte. De plus, cela permettrait même de pouvoir quantifier la précision avec laquelle l'estimation est obtenue au final, alors que ceci était bloqué par la nature déterministe des méthodes F*M associées précédemment.

1.3.3.2 Couplage par continuité de l'histoire

D'autre part, avec cette procédure, une seule simulation Monte-Carlo — d'un grand nombre d'histoires/évaluations — deviendrait alors nécessaire pour estimer chaque grandeur désirée, à la place d'une procédure itérative de telles simulations. De ce fait, ce couplage ne serait ainsi ni explicite, ni véritablement implicite, mais s'obtiendrait par continuité de l'histoire de Monte-Carlo. Dans le cas d'illustration, les histoires réalisées avec ce principe se propagent aussi bien dans les zones gouvernées par le transfert radiatif que celles où se trouve la conduction (Fig. 1.13).

1.3.3.3 Approche peu étudiée

Cette procédure de résolution des problèmes multi-physiques semble n'avoir été que très peu étudiée.

En effet, le seul exemple identifié à notre connaissance a été récemment proposé par VIGNOLES en 2016 [107]. Dans celui-ci, il propose de simuler un problème où la conduction est associée à du transfert radiatif au sein d'un milieu poreux. Pour ce faire, il procède en couplant deux marches aléatoires — chacune étant dédiée à l'un

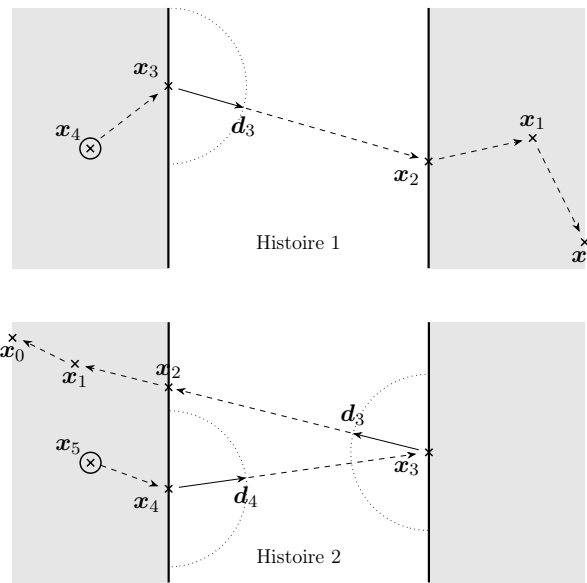


FIGURE 1.13 – Schémas d'une approche par couplage homogène de méthodes sans discrétisation pour traiter le cas d'illustration "thermos de café" (histoires un et deux).

des modes de transfert — au sein d'une procédure qui s'apparente à la variante *Direct Simulation Monte Carlo*. VIGNOLES ne fait jamais référence nommément à cette méthode *Direct Simulation Monte Carlo* au sein de son article scientifique, toutefois, l'approche qu'il y expose présente de nombreuses similitudes avec celle-ci. En effet, sa démarche consiste à suivre une population de "marcheurs" qui transportent chacun un "quantum d'excès d'enthalpie". Ils se propagent dans le milieu poreux sous l'effet de chaque marche aléatoire. A la fin de la simulation, l'estimation du champ de perturbation de la température est obtenue en sommant le nombre de "marcheurs" présent dans chacun des sous-domaines issus d'une discrétisation du volume. Cet exemple semble ainsi présenter exactement les mêmes inconvénients que la variante *Direct Simulation Monte Carlo*.

Les travaux présentés dans ce manuscrit vont ainsi s'attacher à étudier la faisabilité et les capacités de la réalisation ce type de couplage avec une méthode de Monte-Carlo "classique". L'objectif de ce couplage a été annoncé par la présentation d'une première ébauche, en collaboration avec la start-up Méso-Star, durant la conférence CTRPM-V [108].

1.3.3.4 Verrou technologique

Le fait que cette possibilité n'est pas été explorée avec une méthode de Monte-Carlo "classique", s'explique probablement par la difficulté que représente la construction d'un modèle probabiliste de l'ensemble d'un problème multi-physiques et/ou multi-échelles. De plus, cette étape risque d'être d'autant plus délicate que le système à étudier est complexe.

Conclusion

Cette section a exposé les différentes méthodes de couplage qu'il est généralement nécessaire de mettre en œuvre pour traiter les problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles qui caractérisent le comportement des systèmes complexes. Les couplages homogènes de méthodes apparaissent comme des stratégies plus harmonieuses et, par conséquent, semblent être à privilégier. Toutefois, bien que prometteur, le couplage entre méthodes stochastiques n'a été que très peu étudié. Cela paraît être dû à une difficulté identifiée : la construction préalable du modèle probabiliste de tels problèmes.

Conclusion

Ce chapitre a présenté un panel des méthodes de simulation existantes. Les plus couramment utilisées sont les quadratures déterministes à base de discrétisation, telles que la méthode des éléments ou des volumes finis pour ne citer que les deux plus connues. Le besoin de discrétiser les domaines à intégrer engendre des limitations fortes, notamment en terme de ressources informatiques à mobiliser, pour la simulation de systèmes complexes.

Une autre classe de quadratures regroupe des méthodes stochastiques qui permettent de s'affranchir de la discrétisation : les méthodes de Monte-Carlo. Elles sont aujourd'hui essentiellement restreintes à quelques domaines dans lesquels leur habilité intrinsèque à traiter les problèmes avec de nombreuses dimensions est mise à profit (images de synthèse, transfert radiatif, finance). Même si elles ne permettent d'obtenir qu'une seule estimation à la fois, elles apparaissent prometteuses pour traiter des problèmes avec des géométries étendues et/ou intriquées, d'autant plus lorsque seulement une partie du champ d'inconnue est désirée.

Dans un dernier temps, les méthodes de couplage ont été abordées. Elles sont souvent nécessaires pour simuler les problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles. L'utilisation de couplages homogènes semble le plus cohérent et efficient. Par conséquent, celui exploitant les méthodes de Monte-Carlo apparaît comme l'approche la plus pertinente pour la simulation des systèmes complexes. Néanmoins, la difficulté d'élaborer des modèles probabilistes pour représenter le comportement de systèmes complexes semble avoir empêché l'étude de cette option. Nous nous proposons de lever ce verrou technologique à l'aide d'une approche systémique dont la "philosophie" et les détails sont l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 2

Conception systémique de la modélisation et de l'évaluation

Introduction	52
2.1 Modélisation modulaire	53
2.1.1 Modèle descriptif du système : la <i>scène</i>	53
2.1.2 Modèles prédictifs de champs physiques	53
2.1.3 Conditions aux limites : la connaissance explicite des champs	53
2.2 Évaluation souple par exploration stochastique	54
2.2.1 Nécessité d'une évaluation souple	54
2.2.2 Approche systémique de l'évaluation	55
2.2.3 Illustration : évaluation d'un modèle probabiliste élémentaire	55
2.2.4 Illustration : évaluation récursive d'une observable dans une scène	56
2.2.5 Mise en œuvre de l'approche	58
Conclusion	59

Introduction

Le couplage de méthodes de Monte-Carlo est intéressant à étudier pour mener la simulation de systèmes complexes. Or, sa mise en œuvre se montre verrouillée par la difficulté de construire des modèles probabilistes pour décrire des systèmes complexes.

Pour lever ce verrou, l'adoption d'un point de vue systémique¹ est proposée. Celui-ci permet d'aborder ces systèmes avec efficacité en se les représentant comme un assemblage de composants élémentaires en interaction. Le modèle probabiliste global peut ainsi se construire par assemblage des modèles probabilistes élémentaires décrivant le problème au sein de chaque composant.

Le recours à ce type d'approche, dans un but de modélisation, a été proposée à plusieurs reprises, à partir des années 1990. On peut par exemple citer le projet ALMETH qui développa le cadre conceptuel du *Formalisme d'Evolution par Transfert* [109–111]. D'autre part, on trouve aussi trace de la *Synthèse de Modèles* qui a été introduite en 1993 par EBERT et NATAF [112–114], et fut ensuite enrichie notamment sous l'impulsion des travaux menés par LEFEBVRE [115–117]. Néanmoins, ces propositions n'ont été élaborées que dans le cadre d'une mise en œuvre avec des quadratures déterministes, le plus souvent à base de discrétisation comme en témoigne leur travail important sur l'assemblage de modèles matriciels. Pour notre part, nous proposons d'étudier l'emploi de cette approche dans le contexte des méthodes de Monte-Carlo.

Pour adopter cette démarche systémique, il apparaît ainsi que le caractère modulaire de l'outil de modélisation est un enjeu central. De plus, le processus d'évaluation doit par conséquent faire preuve d'agilité pour pouvoir s'adapter à la diversité des modèles construits sans peser sur l'efficacité globale. Le chapitre suivant s'attache à développer, en deux temps, les partis pris qui ont été adoptés pour atteindre cet objectif.

La première partie présente l'application de l'approche systémique à notre contexte de modélisation des transferts thermiques couplés. Ceci permet d'obtenir la modularité recherchée pour l'étape modélisation.

La seconde partie traite pour sa part de l'étape de simulation. La construction de chemins d'exploration stochastique y est proposée pour garantir l'agilité souhaitée pour l'évaluation de ces modèles modulaires.

1. Systémique : "Se dit d'une approche scientifique des systèmes [...] qui s'oppose à la démarche rationaliste en abordant tout problème comme un ensemble d'éléments en relations mutuelles." (Dictionnaire Larousse)

2.1 Modélisation modulaire

2.1.1 Modèle descriptif du système : la *scène*

Une démarche systémique a été mise en œuvre pour réaliser notre environnement de modélisation modulaire. Ainsi, les systèmes complexes sont modélisés en assemblant des composants 3D qui appartiennent à l'une des trois classes suivantes : les domaines solides, les domaines fluides ou les interfaces. Un assemblage de ces composants pour représenter un problème sous la forme d'un modèle descriptif s'appelle une *scène*.

2.1.2 Modèles prédictifs de champs physiques

Ensuite, les phénomènes physiques en interaction au sein de cette géométrie doivent être pris en compte. Pour cela, on a recours aux champs de grandeurs physiques sur lesquelles ces phénomènes exercent une influence. Dans notre cas, pour décrire des transferts thermiques couplés, deux champs physiques distincts ont été représentés : la température et la luminance totale directionnelle. Pour chaque classe de composants, un modèle prédictif de chacun des champs physiques est réalisé à partir des contributions provenant de son environnement immédiat. Ces contributions traduisent les effets des phénomènes physiques sur la valeur de la grandeur modélisée. Elles peuvent être, par exemple, fonction de la valeur du champ considéré en une position interne au composant ou en un point appartenant à un composant connexe raccordé au premier. En outre, elles peuvent aussi être exprimées à partir d'un champ physique différent. Par exemple, dans le domaine thermique, la fraction absorbée du champ de luminance va contribuer au modèle de champ de température. Et réciproquement, le champ de température contribue à celui de la luminance totale directionnelle via une contribution traduisant l'émission thermique de rayonnement.

Principe de généralité des modèles prédictifs La présentation détaillée de ces modèles est l'objet du chapitre suivant. Pour obtenir la plus importante modularité possible, des modèles généraux ont été développés. Ainsi, par exemple, un seul modèle prédictif de température au niveau d'une interface a été réalisé. Il doit par conséquent être valable quel que soit le contexte d'utilisation du composant. C'est-à-dire que cette interface serve de séparation entre deux domaines, quel que soit leur type respectif, ou qu'elle soit utilisée en guise de frontière du problème. Cette généralité permet donc de réaliser cette étape de modélisation des phénomènes physiques lors de la conception de l'outil. Les utilisateurs ont ainsi uniquement à assembler des composants tri-dimensionnels puis à indiquer la valeur de paramètres et propriétés physiques pour modéliser leur problème.

2.1.3 Conditions aux limites : la connaissance explicite des champs

Enfin, pour *fermer* un problème, il est nécessaire de spécifier un certain nombre de conditions aux limites. Pour cela, l'utilisateur déclare simplement une connaissance explicite de la valeur des champs de grandeurs physiques en un certain nombre

de positions. Cette connaissance explicite peut avoir plusieurs formes : une valeur numérique, une fonction mais aussi, par exemple, une distribution statistique. Ceci permet alors de pouvoir représenter une large variété de situations par des conditions aux limites de premier ou de troisième type. De plus, cette connaissance explicite peut aussi être imposée en des positions internes au problème. D'autre part, il est possible d'obtenir une condition aux limites de type NEUMANN en imposant cette connaissance explicite sur un terme source surfacique en une interface servant de frontière.

2.2 Évaluation souple par exploration stochastique

L'application de cette procédure modulaire permet de produire une grande diversité de scènes et donc de modèles prédictifs globaux. Par conséquent, il devient nécessaire d'obtenir un algorithme de Monte-Carlo qui puisse s'adapter simplement à cette diversité².

2.2.1 Nécessité d'une évaluation souple

En effet, dans la démarche traditionnelle, après avoir obtenu un modèle prédictif probabiliste du problème, son algorithme d'évaluation — exécuté pour chaque histoire de Monte-Carlo — doit être mis au point. Pour pouvoir obtenir une estimation non-biaisée, ce dernier doit tenir compte de l'influence de l'ensemble des conditions aux limites du système sur l'observable. Cette étape devient, par conséquent, rapidement délicate lorsque la complexité du problème à simuler augmente.

Convergence de l'évaluation En outre, obtenir un estimateur présentant une convergence de qualité demande la mise en œuvre d'un savoir-faire pointu pour adapter l'algorithme aux spécificités du problème considéré. Pour cela, il est particulièrement utile de se reporter au livre *Exploring Monte Carlo Methods* de DUNN et SHULTIS [72] et aux travaux publiés par DE LA TORRE en 2013 [86]. Ces derniers mettent en valeur l'équivalence qui existe entre, d'une part, la formulation intégrale d'un modèle prédictif probabiliste de l'observable et, d'autre part, son algorithme d'évaluation associé.

Difficulté dans un environnement modulaire Il semble donc que la proposition d'un outil modulaire de modélisation ne fasse que repousser la difficulté liée à la complexité à l'étape suivante : la conception de l'algorithme d'évaluation associé. Pour que l'utilisateur puisse bénéficier pleinement de l'apport de cet environnement de modélisation, il apparaît nécessaire de pouvoir le libérer de cette étape algorithmique.

2. Souplesse : "Facilité, habileté à se plier aux circonstances, à s'adapter [aux changements]." (Dictionnaire Larousse)

2.2.2 Approche systémique de l'évaluation

Ainsi, l'objectif est d'obtenir une procédure d'évaluation souple qui soit capable de s'adapter automatiquement à la scène dans laquelle elle est mise en œuvre. Précédemment, nous avons pu mettre en évidence que l'adoption d'une démarche systémique lors de l'étape de modélisation a permis de la simplifier dans les cas complexes. Puisque nous sommes dans un cas similaire en voulant faciliter la construction d'un algorithme complexe, il apparaît logique de tenter de recourir à cette même approche.

Adoption de la structure de modélisation Nous avons précédemment vu qu'il existe un lien étroit entre un modèle probabiliste et son algorithme d'évaluation au sein de la méthode de Monte-Carlo. Or les modèles prédictifs sont déjà structurés sous la forme d'un assemblage de composants. Il semble donc pertinent d'emprunter cette structure pour construire l'algorithme global d'évaluation en assemblant des algorithmes d'évaluation de chaque modèle prédictif élémentaire.

2.2.3 Illustration : évaluation d'un modèle probabiliste élémentaire

Modèle probabiliste élémentaire Pour illustrer notre propos, considérons, par exemple, le modèle probabiliste d'un champ physique, G , en un point \mathbf{x}_i au sein d'un composant. De plus, posons que ce modèle ne dépende que des contributions de ce même champ physique provenant de deux points de sa frontière, \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_2 . Celui-ci peut ainsi s'écrire comme la somme de ces contributions, chacune commençant par une probabilité — puisqu'il s'agit d'un modèle probabiliste — (Eq. 2.1).

$$G(\mathbf{x}_i) = P(\mathbf{y}_1) \times G(\mathbf{y}_1) + P(\mathbf{y}_2) \times G(\mathbf{y}_2) \quad (2.1a)$$

Où

$$P(\mathbf{y}_2) = 1 - P(\mathbf{y}_1) \quad (2.1b)$$

Algorithme d'évaluation Evaluer ce modèle prédictif probabiliste se réalise alors en deux étapes principales :

1. Tirer aléatoirement l'une des deux contributions, proportionnellement à la valeur de leur probabilité respective, P
2. Evaluer le poids associé à cette contribution qui est ici simplement la valeur du champ G au point échantillonné

Ainsi, l'algorithme d'évaluation du modèle prédictif élémentaire de chaque champ physique, pour chacun des composants pris séparément, est relativement simple. Il reste maintenant à assembler ces algorithmes pour pouvoir évaluer une observable au sein d'une scène. Pour cela, une démarche d'évaluation récursive est employée.

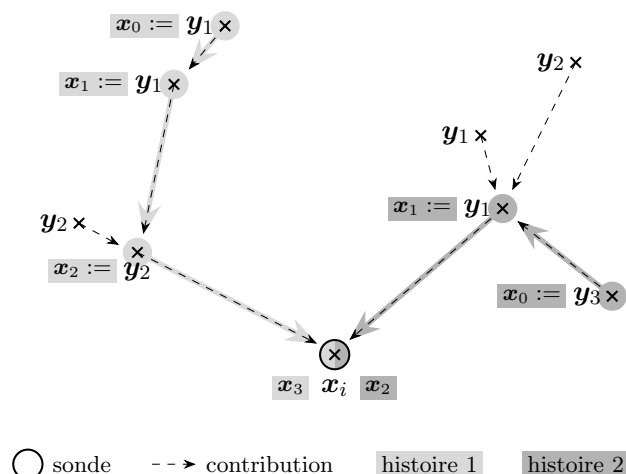


FIGURE 2.1 – Schéma représentant la construction de chemins d'exploration pour évaluer la valeur en x_i d'un champ physique.

2.2.4 Illustration : évaluation récursive d'une observable dans une scène

Reprenons l'exemple précédent en considérant que ce composant est assemblé avec d'autres pour former une scène. De plus, prenons pour observable la valeur du champ physique G au point x_i en y plaçant une *sonde* (Fig. 2.1). Pour l'évaluer, nous allons suivre récursivement l'algorithme qui vient d'être décrit.

Etape 1 : tirer aléatoirement une contribution du modèle de $G(x_i)$ La contribution provenant de y_2 est sélectionnée aléatoirement, parmi les contributions possibles du modèle élémentaire du champ physique G au point $x_i : y_1$ et y_2 .

Etape 2 : évaluer le poids de cette contribution Ensuite, il est donc nécessaire de calculer le poids de cette contribution. En l'occurrence, dans ce cas précis, il s'agit simplement d'évaluer la valeur du champ G au point y_2 . Pour matérialiser la récursivité de la démarche, y_2 est rebaptisé x_{i-1} . En ce point, l'algorithme fait face à deux possibilités : soit cette valeur est connue explicitement — si, par exemple, x_{i-1} appartient à une frontière du problème —, soit elle l'est sous la forme d'un modèle — dans le cas où x_{i-1} est un point interne de la scène ; appartenant potentiellement à un composant connexe —. Pour notre exemple, considérons que nous nous trouvons dans le second cas de figure et que son modèle prédictif dépend à son tour de la valeur de G en deux nouveaux points, y_1 et y_2 . Ainsi, pour évaluer la valeur du champ en ce point x_{i-1} , le même algorithme est réutilisé, mais avec des probabilités et des poids propres au modèle en cette nouvelle position.

Etape 3 : tirer aléatoirement une contribution du modèle de $G(x_{i-1})$ Ainsi, au cours de cette troisième étape, la procédure stochastique tire au sort la contribution provenant de y_1 .

Étape 4 : évaluer le poids de cette contribution On renomme donc ce point en \mathbf{x}_{i-2} et l'on cherche à y évaluer la valeur du champ G . A nouveau, il y a deux possibilités pour la connaissance de cette valeur. Considérons, cette fois-ci, qu'elle soit connue sous la forme d'un modèle d'une seule contribution \mathbf{y}_1 .

Étape 5 : tirer aléatoirement une contribution du modèle de $G(\mathbf{x}_{i-2})$ Une probabilité unité est associée à cette unique contribution. Par conséquent, la procédure stochastique d'échantillonnage n'a pas d'autre choix que de continuer vers $\mathbf{x}_{i-3} := \mathbf{y}_1$. Toutefois, une probabilité présentant une valeur inférieure à l'unité aurait pu être présente. Dans ce cas, la procédure stochastique aurait été amenée à choisir entre cet évènement et un autre, de valeur nulle, possédant une probabilité complémentaire d'avoir lieu.

Étape 6 : évaluer le poids de cette contribution Reprenons le fil de notre exemple. Il est maintenant nécessaire d'évaluer le champ G au point \mathbf{x}_{i-3} où l'on retrouve les deux possibilités de connaissance. Or, ce point appartient à la frontière de la scène et donc sa valeur est connue explicitement. Ainsi la suite des positions n'est pas étendue au delà. Pour marquer la fin de l'extension de cette suite, la valeur de l'indice i est choisie de sorte à obtenir \mathbf{x}_0 comme position terminale : dans ce cas-ci $i = 3$.

Exploration stochastique du problème Ce processus récursif vient alors de créer, de manière complètement automatique, un chemin d'exploration stochastique du problème jusqu'à trouver une information explicite. La plupart du temps, il s'agit d'une condition à la limite. C'est-à-dire une condition à la frontière en régime stationnaire, tandis qu'en régime instationnaire, il pourra aussi s'agir d'une condition initiale — l'exploration parcourant alors le temps en plus de l'espace —. Ce chemin d'exploration possède une taille, qui peut être calculée en terme de nombre de positions d'interaction avec la scène. On notera, de plus, que cette taille varie d'un chemin à l'autre car le seul critère d'arrêt de sa construction est la collecte d'une information explicite au sein de la scène.

D'un point de vue plus conceptuel, chaque modèle élémentaire est évalué à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo "classique". Cependant, la résolution d'un problème complexe par l'exploration stochastique d'une scène de composants revient à construire une chaîne de MARKOV — le chemin d'exploration — pour échantillonner les sources d'informations explicites qui contraignent le problème. Dans ce contexte, les contributions du modèle probabiliste de chaque composant de la scène tiennent alors le rôle des probabilités de transition du processus de MARKOV. De ce fait, bien qu'une méthode de Monte-Carlo "classique" soit utilisée au sein de chaque composant, l'approche systémique adoptée fait de l'exploration stochastique développée une méthode membre des marches aléatoires — exploitant la construction d'une chaîne qui possède une propriété de MARKOV faible —.

Convergence de l'algorithme récursif d'exploration De plus, l'utilisation de ce processus d'échantillonnage pour sélectionner une unique contribution pour étendre

le chemin d'exploration, au sein de chaque modèle prédictif, permet de garantir un comportement convergent à cet algorithme récursif.

Histoire de Monte-Carlo : évaluation numérique de la cascade de poids imbriqués grâce à l'information collectée Par ailleurs, à chacune de ces positions, un poids de Monte-Carlo est en attente d'information explicite — collectée en aval du chemin — pour être évalué. C'est pourquoi, ce chemin d'exploration est équivalent à une cascade de poids imbriqués dont le dernier dépend de l'information explicite trouvée. Ainsi, une fois cette information explicite obtenue ($G(\mathbf{x}_0)$), celle-ci va permettre de pouvoir calculer la valeur numérique du champ au point amont du chemin, \mathbf{x}_1 . Puis, la valeur en \mathbf{x}_1 rend possible l'évaluation en \mathbf{x}_2 , et ainsi de suite en remontant le chemin de manière successive jusqu'à obtenir une évaluation pour notre observable, qui se situe en \mathbf{x}_3 dans notre cas. Cette évaluation correspond à une première histoire pour la méthode de Monte-Carlo.

Améliorer l'estimation de l'observable Enfin, l'évaluation de cette même observable, au cours d'une nouvelle histoire, a toutes les chances de construire un chemin qui va explorer une partie différente de la scène, en vertu de son caractère stochastique. C'est pourquoi, la seconde histoire présentée sur la figure 2.1 s'est dirigée, aléatoirement, vers la partie "droite" de la scène pour l'explorer. Ainsi, en multipliant les histoires, et donc les chemins, une exploration stochastique de la scène est menée pour collecter les informations explicites — souvent les conditions aux limites du problème — qui influencent l'observable au point de départ. De cette manière, plus ces chemins seront nombreux pour réaliser une estimation et plus celle-ci reposera sur une grande quantité d'informations explicites, c'est-à-dire sur une connaissance de plus en plus fine et fidèle des influences portant sur l'observable. Ceci permet de comprendre plus intuitivement pourquoi, avec la méthode de Monte-Carlo, augmenter le nombre d'histoires permet de réduire l'incertitude qui affecte l'estimation réalisée.

2.2.5 Mise en œuvre de l'approche

Un algorithme d'évaluation permettant de s'adapter à n'importe quelle combinaison possible de composant vient d'être obtenu. Il repose sur cette dualité de connaissance des champs de grandeurs physiques pour chaque composant. En pratique, à chaque composant de la bibliothèque est alors associé son algorithme d'évaluation des champs physiques décrits. Ainsi, l'utilisateur en assemblant des composants tri-dimensionnels pour modéliser son problème, assemblera dans le même temps, et de manière tout à fait transparente pour lui, les fonctions élémentaires qui composent l'algorithme d'évaluation global. Une fois cette scène construite, il ne lui reste plus qu'à définir son observable en plaçant une, ou plusieurs, *sonde(s)* au sein de cette assemblage. Chacune de ces sondes définit alors un point de départ d'une série de chemins d'exploration.

Application à la thermique Dans le cas des transferts thermiques couplés, la température et la luminance totale directionnelle sont les deux champs de grandeurs

physiques qui ont été modélisés dans notre outil. Les Figures 2.2 et 2.3 représentent les logigrammes décrivant les algorithmes de décision de l'arrêt ou de l'extension du chemin d'exploration pour chacun des champs physiques. Dans le but d'identifier les portions de chemin correspondant à l'évaluation des modèles de chacun de ces champs, leurs positions ont été dénommées de manière distincte. Ainsi, les points \mathbf{x}_i seront utilisés pour le champ de température tandis que les points $\mathbf{r}_{i,j}$ le seront pour le champ de luminance. Le caractère récursif du processus d'exploration a été traduit algorithmiquement sous la forme d'appels imbriqués de fonction (représentée par le symbole normalisé à double barre verticale). Ceux-ci ont été implémentés au sein de l'outil en recourant au paradigme de programmation fonctionnelle.

En résumé, les algorithmes d'évaluation du champ (Fig. 2.2 et 2.3) permettent de prendre la décision d'arrêter ou d'étendre le chemin d'exploration. Lorsque la poursuite de cette exploration est sélectionnée, l'algorithme d'évaluation du modèle prédictif approprié est alors exécuté. Le rôle de celui-ci est de désigner quelle contribution va permettre de réaliser cette extension. Ceci revient à définir le prochain point appartenant au chemin d'exploration, auquel un algorithme d'évaluation de champ sera exécuté à son tour. Ce processus est ensuite répété jusqu'à ce que le chemin puisse être stoppé, c'est-à-dire jusqu'à trouver une information explicite. Celle-ci permet alors, en évaluant les modèles successivement imbriqués au cours de l'exploration, de pouvoir évaluer le champ désiré à l'emplacement de la sonde d'où le chemin est parti. Finalement, l'estimation de ce champ, au niveau de la sonde, est obtenue en faisant la moyenne d'un grand nombre d'histoires de Monte-Carlo, c'est-à-dire d'un grand nombre de ces évaluations réalisées au même point-sonde. Ainsi chaque histoire de Monte-Carlo retrace la construction du chemin d'exploration stochastique qui a permis l'évaluation correspondante du champ, au niveau de la sonde. Par conséquent, l'outil construit autant de chemins d'exploration stochastique — au départ de chacune des sondes — que le nombre d'histoires utilisé par l'algorithme de Monte-Carlo.

Conclusion

Ce chapitre a présenté les implications de l'adoption d'une démarche systémique pour les étapes de modélisation et de simulation des systèmes complexes. La première est le choix d'une approche systémique pour construire un environnement de modélisation modulaire. En s'appuyant sur une bibliothèque de composants tridimensionnels élémentaires, il sera ainsi plus aisé pour les utilisateurs de modéliser leurs problèmes. La seconde, en appliquant la même logique, permet de découper l'algorithme d'évaluation et de relier chaque partie au composant correspondant. Ainsi, en assemblant des composants pour créer une scène, l'utilisateur structurera par la même occasion les algorithmes d'évaluation associés. Ces derniers basent leur agilité sur une procédure de construction récursive de chemins d'exploration de la scène. Cette exploration a lieu jusqu'à atteindre une source d'information explicite, qui est généralement une condition à la limite. Ainsi, cette démarche systémique permet d'envisager une mise en œuvre simplifiée de simulations de Monte-Carlo

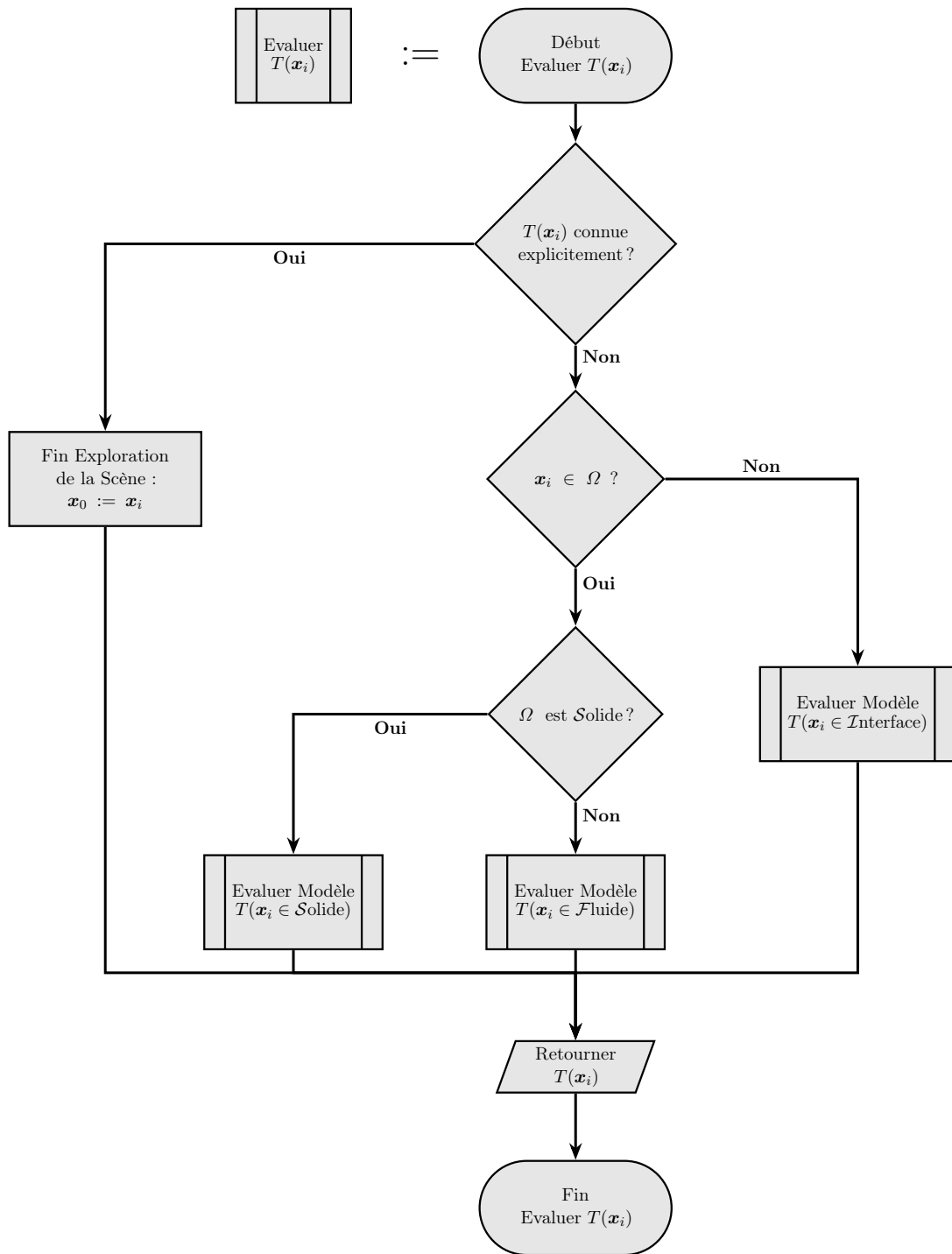


FIGURE 2.2 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation de la température (en régime stationnaire), au cours duquel la décision d’arrêt ou d’extension du chemin d’exploration est prise.

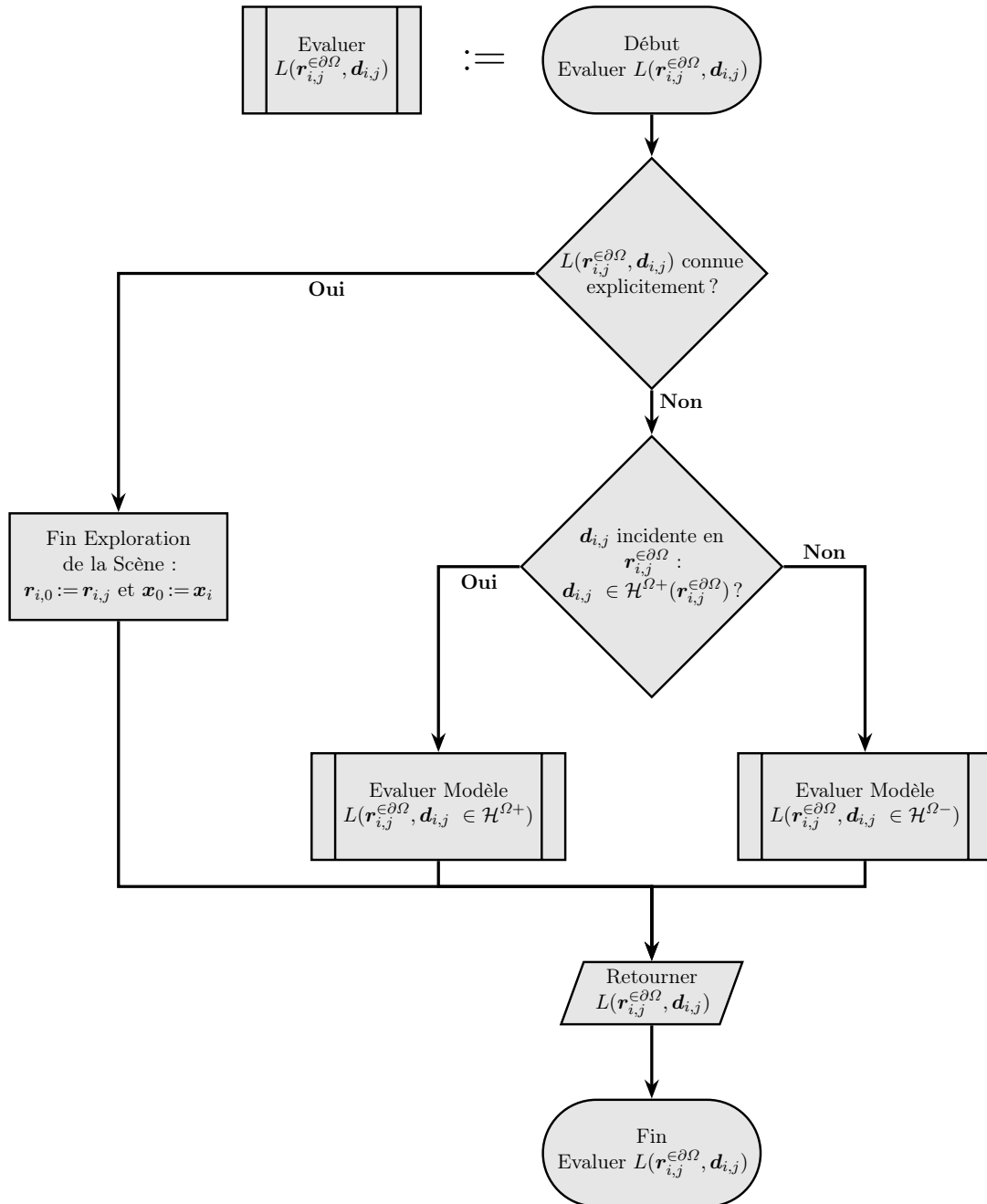


FIGURE 2.3 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation de la luminance totale directionnelle au niveau d’une surface (en régime stationnaire), au cours duquel la décision d’arrêt ou d’extension du chemin d’exploration est prise.

pour traiter des problèmes multi-physiques et/ou multi-échelles qui définissent le comportement des systèmes complexes.

CHAPITRE 3

Modélisation probabiliste des champs de grandeur physique par composant

Introduction	64
3.1 Température dans un volume solide	65
3.1.1 Modèle déterministe	65
3.1.2 Modèle probabiliste	65
3.2 Température dans un volume fluide	68
3.2.1 Modèle déterministe	68
3.2.2 Modèle probabiliste	69
3.3 Température à une interface	72
3.3.1 Modèle déterministe	72
3.3.2 Modèle probabiliste	75
3.4 Luminance totale directionnelle incidente à une interface 79	
3.4.1 Modèle déterministe	79
3.4.2 Modèle probabiliste	80
3.5 Luminance totale directionnelle quittant une interface . 80	
3.5.1 Modèle déterministe	80
3.5.2 Modèle probabiliste	84
Conclusion	85

Introduction

L'utilisation d'une démarche systémique a permis de créer un environnement modulaire de modélisation de problèmes thermiques complexes. Dans cette approche, les scènes de problème sont obtenues par assemblage de composants (domaines solides, fluides ou interfaces). Néanmoins, y émuler des phénomènes de transfert thermique requiert d'avoir modélisé les champs de grandeurs physiques à l'intérieur de chaque classe de composants. Ce chapitre va, par conséquent, s'attacher à développer la construction de ces modèles prédictifs. En outre, pour rester fidèle au point de vue systémique adopté, la plus grande généralité possible est recherchée pour ces derniers.

Les modèles suivants ont été réalisés par l'application de deux lois physiques : la conservation de l'énergie à l'intérieur des domaines — qu'ils soient solides ou fluides — et le principe de continuité des champs physiques, ainsi que de leurs densités de flux associées, au niveau des interfaces. En outre, quatre hypothèses générales ont été prises en compte :

- les phénomènes sont en régime stationnaire ;
- les modes d'échange d'énergie thermique peuvent être décrits par des modèles linéaires ;
- les domaines sont considérés soit opaques, soit totalement transparents ;
- les paramètres et propriétés physiques sont constants.

Ainsi, le champ de température à l'intérieur des domaines solides est régi par les transferts de chaleur par conduction. La première partie de ce chapitre est dédiée à l'établissement du modèle probabiliste de ce cas de figure.

Dans la deuxième partie, le modèle probabiliste du champ de température au sein des domaines fluides est développé. Ce dernier est gouverné par les phénomènes de convection du fluide avec les parois et l'éventuelle présence de transports de chaleur par un flux de matière¹ provenant d'autre(s) domaine(s) fluide(s).

La troisième partie traite de la modélisation du champ de température aux interfaces. Ces dernières peuvent potentiellement échanger de l'énergie par conduction au travers des domaines solides environnants, par convection avec les domaines fluides qui la jouxtent ou, enfin, par transfert radiatif avec d'autres interfaces via des milieux transparents.

Enfin, les deux dernières parties concernent le champ de luminance totale directionnelle qui permet de décrire le transfert radiatif entre les interfaces. Ainsi, dans la quatrième partie, un modèle de champ de luminance dans les directions incidentes aux parois est présenté. Alors que celui concernant les directions quittant une interface est l'objet de la section finale.

1. Dans la suite de ce manuscrit, il y sera fait référence par l'expression "transport de chaleur" pour conserver plus de concision.

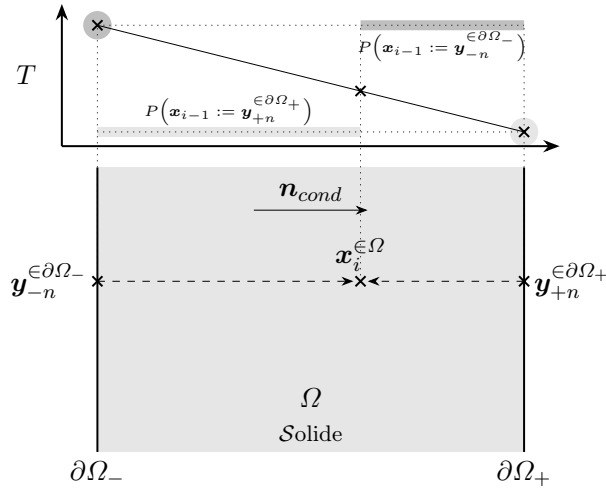


FIGURE 3.1 – Schéma représentant les notations du modèle de température au sein d'un solide (en régime stationnaire).

3.1 Température dans un volume solide

3.1.1 Modèle déterministe

Soit Ω , un domaine solide homogène ne présentant aucune source volumique d'énergie. Il est délimité par deux plans parallèles ($\partial\Omega_-$ et $\partial\Omega_+$) auxquels la température est connue — explicitement ou sous la forme d'un modèle —. Au sein de celui-ci, la chaleur se transmet par conduction le long du vecteur normal \mathbf{n}_{cond} .

L'application de la loi de conservation de l'énergie dans ce volume permet d'obtenir un résultat bien connu (Eq. 3.1 and Fig. 3.1) : le champ de température suit une expression affine reliant les valeurs de température à chacune des frontières ($T(\mathbf{y}_{-n}^{\in\partial\Omega_-})$ et $T(\mathbf{y}_{+n}^{\in\partial\Omega_+})$). Il s'agit du modèle déterministe de ce champ physique à l'intérieur des domaines solides.

$$T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) = T(\mathbf{y}_{-n}^{\in\partial\Omega_-}) + \frac{\left\| \mathbf{x}_i^{\in\Omega} - \mathbf{y}_{-n}^{\in\partial\Omega_-} \right\|}{\left\| \mathbf{y}_{+n}^{\in\partial\Omega_+} - \mathbf{y}_{-n}^{\in\partial\Omega_-} \right\|} \left(T(\mathbf{y}_{+n}^{\in\partial\Omega_+}) - T(\mathbf{y}_{-n}^{\in\partial\Omega_-}) \right) \quad (3.1)$$

3.1.2 Modèle probabiliste

L'équation 3.1 est un modèle déterministe du champ de température dans les milieux solides. Néanmoins, pour pouvoir l'évaluer par une méthode stochastique, telle que la méthode de Monte-Carlo, il est nécessaire de le transformer en une expression probabiliste.

Dans cette équation, deux contributions peuvent être identifiées : l'influence du champ de température à chacune des frontières. En réarrangeant ce modèle, il est possible de faire apparaître une pondération barycentrique qui précède chaque évaluation du champ de température. Ces facteurs, dont la valeur est comprise entre zéro et un, sont complémentaires. Ainsi, ils peuvent être utilisés en tant que probabilités d'étendre le chemin d'exploration en direction de leur frontière associée. Chacune de ces probabilités est formalisée comme la probabilité que l'évènement "le prochain point du chemin d'exploration, \mathbf{x}_{i-1} , soit le point $\mathbf{y}^{\in \partial \Omega}$ de l'interface $\partial \Omega$ " ait lieu. Ceci s'écrit mathématiquement : $P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}^{\in \partial \Omega})$. La partie restante de la contribution, qui va être évaluée explicitement, est le *poids* de Monte-Carlo associé qui s'écrit $\hat{w}(\mathbf{x}_{i-1})$ (Section 1.2).

Finalement, le modèle probabiliste suivant (Eq. 3.2) est ainsi obtenu. Il est parfaitement équivalent au modèle déterministe qui lui a servi de base (Eq. 3.1).

$$T(\mathbf{x}_i^{\in \Omega}) = \begin{cases} P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{-n}^{\in \partial \Omega_-}) \times \hat{w}_{\partial \Omega_-}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_-}) \\ + P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{+n}^{\in \partial \Omega_+}) \times \hat{w}_{\partial \Omega_+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_+}) \end{cases} \quad (3.2a)$$

Où

$$\begin{cases} \exists e_- \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{y}_{-n} = \mathbf{x}_i^{\in \Omega} - e_- \times \mathbf{n}_{cond} \ \& \ \mathbf{y}_{-n} \in \partial \Omega_- \\ P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{-n}^{\in \partial \Omega_-}) = \frac{\|\mathbf{y}_{+n}^{\in \partial \Omega_+} - \mathbf{x}_i^{\in \Omega}\|}{\|\mathbf{y}_{+n}^{\in \partial \Omega_+} - \mathbf{y}_{-n}^{\in \partial \Omega_-}\|} \\ \hat{w}_{\partial \Omega_-}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_-}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_-}) \end{cases} \quad (3.2b)$$

$$\begin{cases} \exists e_+ \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{y}_{+n} = \mathbf{x}_i^{\in \Omega} + e_+ \times \mathbf{n}_{cond} \ \& \ \mathbf{y}_{+n} \in \partial \Omega_+ \\ P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{+n}^{\in \partial \Omega_+}) = \frac{\|\mathbf{x}_i^{\in \Omega} - \mathbf{y}_{-n}^{\in \partial \Omega_-}\|}{\|\mathbf{y}_{+n}^{\in \partial \Omega_+} - \mathbf{y}_{-n}^{\in \partial \Omega_-}\|} \\ \hat{w}_{\partial \Omega_+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_+}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega_+}) \end{cases} \quad (3.2c)$$

Comme mentionné au chapitre précédent (Section 2.2), il a été choisi d'établir des algorithmes d'évaluation élémentaires pour chaque modèle probabiliste réalisé dans le but d'aboutir à une procédure d'évaluation souple. Cet algorithme dédié au modèle de température dans les domaines solides (Fig. 3.2) présente un enchaînement de huit étapes majeures. L'une d'elles est un test matérialisant la procédure de choix stochastique de l'une des deux contributions à explorer. Il est réalisé en échantillonnant une variable aléatoire de manière uniforme, entre zéro et un, qui est ensuite comparée avec la probabilité associée au test. Si l'échantillon présente une valeur inférieure au seuil de cette probabilité, le test est vrai. De cette manière, un test algorithmique, qui présente une probabilité d'être vrai égale à la valeur du seuil fixé, est obtenu.

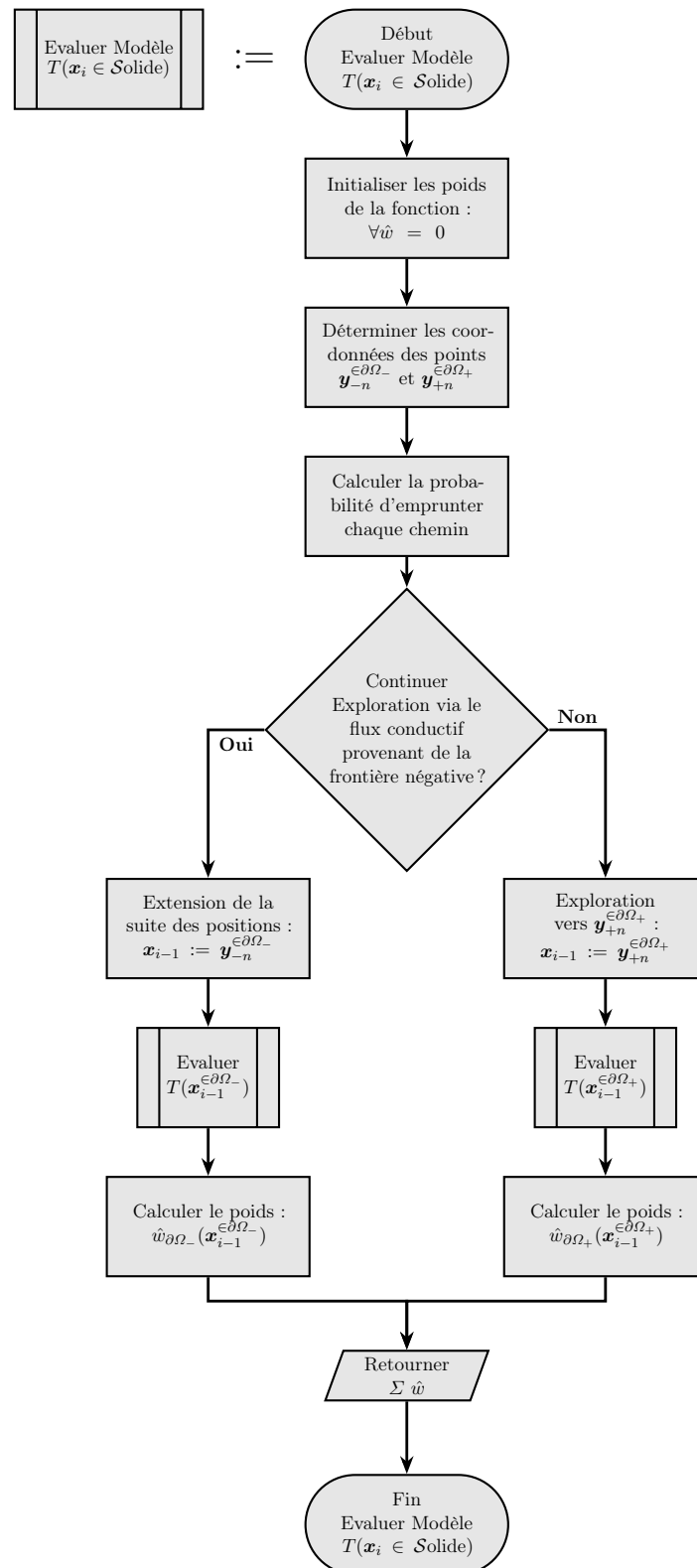


FIGURE 3.2 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation du modèle de température au sein d’un solide (en régime stationnaire).

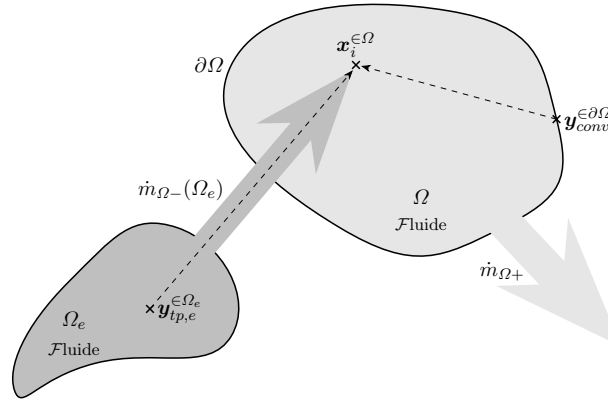


FIGURE 3.3 – Schéma représentant les notations du modèle de température au sein d'un fluide (en régime stationnaire).

Dans le chapitre précédent, il a été constaté que l'évaluation du champ de température (Fig. 2.2) fait appel à l'évaluation de modèles de température, dans les cas où aucune condition explicite n'est connue. Lorsque le point se trouve dans un domaine solide, c'est ainsi l'algorithme (Fig. 3.2) développé dans la présente section qui est exécuté. Or, on peut remarquer que chacune des deux branches de celui-ci appelle l'algorithme d'évaluation du champ de température (Fig. 2.2), en tant que sous-programme, au point suivant de l'exploration \mathbf{x}_{i-1} . On retrouve par conséquent, mais ici de manière plus explicite, les exécutions imbriquées d'algorithmes qui traduisent la récursivité de construction du chemin d'exploration dont il était fait mention au chapitre précédent (Section 2.2).

3.2 Température dans un volume fluide

3.2.1 Modèle déterministe

La simulation, de manière détaillée, de la dynamique des fluides est un sujet délicat à développer et un objet d'études à part entière. Ainsi, dans le but de s'en affranchir pour l'instant, des hypothèses spécifiques ont été posées pour modéliser le champ de température à l'intérieur des milieux fluides. Premièrement, chacun de ces derniers est considéré parfaitement agité de sorte qu'il présente un champ de température uniforme. En outre, la convection est vue comme un phénomène macroscopique. Elle est, de ce fait, modélisée à l'aide d'un coefficient de convection, $h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega})$ (Eq. 3.3).

Dans le cas des domaines fluides, deux types de flux d'énergie sont considérés : la convection entre le fluide et ses frontières et les transports de chaleur consécutifs aux échanges de matière entre plusieurs volumes de fluide.

D'une part, le flux d'énergie quittant un domaine Ω par convection est obtenu par

intégration de la densité de flux convectif sur l'ensemble de la frontière du domaine $\partial\Omega$ (Fig. 3.3 et Eq. 3.4).

$$\dot{q}_{conv}^{\Omega+}(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) = h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) \times \left(T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) - T(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) \right) \quad (3.3)$$

$$\dot{Q}_{conv}^{\Omega+}(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) = \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) \times \left(T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) - T(\mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) \right) d\mathbf{y}_{conv} \quad (3.4)$$

D'autre part, le flux net de chaleur transportée hors du domaine fluide Ω s'exprime comme la différence entre le flux d'enthalpie total sortant et la somme des flux d'enthalpie entrants en provenance des n autre(s) domaine(s) fluide(s) Ω_e (Eq. 3.5).

$$\dot{Q}_{tp}^{\Omega+}(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) = \dot{m}_{\Omega+} c_{p\Omega} \times T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) - \sum_{e=1}^n \dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e) c_{p\Omega_e} \times T(\mathbf{y}_{tp,e}^{\in\Omega_e}) \quad (3.5)$$

Dans cette équation 3.5, $c_{p\Omega}$ est la capacité thermique massique associée à Ω , $\dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e)$ représente le débit massique arrivant depuis le domaine Ω_e dans Ω — défini positivement — et, enfin, $\dot{m}_{\Omega+}$ symbolise le débit massique total sortant de Ω — défini positivement —. De plus, les lois de conservation de la masse et de l'énergie stipulent, qu'en régime stationnaire, qu'il ne peut y avoir aucune accumulation de matière (Eq. 3.6) ni d'énergie (Eq. 3.7) au sein des domaines, d'où :

$$\dot{m}_{\Omega+} = \sum_{e=1}^n \dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e) \quad (3.6)$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}_{conv}) \times \left(T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) - T(\mathbf{y}_{conv}) \right) d\mathbf{y}_{conv} + \dot{m}_{\Omega+} c_{p\Omega} \times T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) - \sum_{e=1}^n \dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e) c_{p\Omega_e} \times T(\mathbf{y}_{tp,e}^{\in\Omega_e}) \quad (3.7)$$

Les équations 3.6 et 3.7 peuvent ensuite être recombinaées pour obtenir le modèle déterministe gouvernant le champ de température dans les milieux fluides (Eq. 3.8) :

$$T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) = \frac{1}{\dot{m}_{\Omega+} c_{p\Omega} + \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}} \times \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}_{conv}) \times T(\mathbf{y}_{conv}) d\mathbf{y}_{conv} + \sum_{e=1}^n \frac{\dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e) c_{p\Omega_e}}{\dot{m}_{\Omega+} c_{p\Omega} + \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}} \times T(\mathbf{y}_{tp,e}^{\in\Omega_e}) \quad (3.8)$$

3.2.2 Modèle probabiliste

On peut identifier, sur la première ligne du modèle déterministe (Eq. 3.8), la contribution de la convection avec les frontières. D'autre part, en dessous de celle-ci, se trouve la somme des contributions via les transports de chaleur qui proviennent des domaines Ω_e .

Ce modèle peut donc être ré-écrit d'une façon probabiliste par l'introduction de probabilités et de poids associés. Dans ce cas précis, cela demande essentiellement

d'introduire un facteur unité — pour maintenir l'équivalence des modèles — dans la première contribution sous la forme (Eq. 3.9) :

$$\frac{\int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}{\int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}} \quad (3.9)$$

Son numérateur permet alors de compléter le facteur précédant l'intégrale dans la première contribution pour construire une probabilité. De plus, l'injection du dénominateur restant au sein de l'intégrale sur la frontière permet de faire apparaître une fonction densité de probabilité. Cette dernière propose d'échantillonner des points sur la frontière $\partial\Omega$ dans le but d'évaluer l'intégrale des densités de flux par la méthode de Monte-Carlo. Une telle fonction s'écrit $p_{\mathbf{x}_{i-1}}(\mathbf{x}_{i-1})$ lorsqu'elle est relative à la variable aléatoire \mathbf{X}_{i-1} . Concernant les contributions des transports de chaleur, un autre facteur unité est introduit sous la forme d'un rapport de la capacité thermique massique associée au domaine Ω ($c_{p,\Omega}$) sur elle-même. Celui-ci permet de pouvoir substituer $c_{p,\Omega}$ à c_{p,Ω_e} au numérateur des fractions de pondération de sorte à permettre de les transformer en probabilités complémentaires. Le modèle probabiliste recherché est ainsi obtenu (Eq. 3.10).

$$T(\mathbf{x}_i^{\in\Omega}) = \begin{cases} P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) \times \int_{\partial\Omega} p_{\mathbf{x}_{i-1}}(\mathbf{x}_{i-1}) \, d\mathbf{x}_{i-1} \times \hat{w}_{conv}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\partial\Omega}) \\ + \sum_{e=1}^n P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{tp,e}^{\in\Omega_e}) \times \hat{w}_{tp,e}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\Omega_e}) \end{cases} \quad (3.10a)$$

Où

$$\begin{cases} \exists \mathbf{y}_{conv} \in \partial\Omega \\ P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv}^{\in\partial\Omega}) = \frac{\int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}{\dot{m}_{\Omega+} c_{p,\Omega} + \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}} \\ p_{\mathbf{x}_{i-1}}(\mathbf{x}_{i-1}) = \frac{h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{x}_{i-1})}{\int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}} \\ \hat{w}_{conv}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\partial\Omega}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\partial\Omega}) \end{cases} \quad (3.10b)$$

$$\begin{cases} \exists \mathbf{y}_{tp,e} \in \Omega_e \\ P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{tp,e}^{\in\Omega_e}) = \frac{\dot{m}_{\Omega-}(\Omega_e) c_{p,\Omega}}{\dot{m}_{\Omega+} c_{p,\Omega} + \int_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega}^{\Omega}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}} \\ \hat{w}_{tp,e}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\Omega_e}) = \frac{c_{p,\Omega_e}}{c_{p,\Omega}} \times T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in\Omega_e}) \end{cases} \quad (3.10c)$$

La Figure 3.4 expose le logigramme de l'algorithme d'évaluation du modèle probabiliste qui vient d'être développé. Cet algorithme présente une structure similaire à celui relatif aux domaines solides (Fig. 3.2). La principale différence est la présence ici, non pas d'un unique test, mais d'une cascade de tests. Celle-ci permet ainsi de tirer aléatoirement la branche du chemin à emprunter parmi l'ensemble des possibilités. Le premier de ces tests propose de prendre en compte la contribution de la frontière tandis que les suivants passent en revue l'ensemble des transports de chaleur qui entrent dans le domaine considéré. En effet, la flèche en pointillés

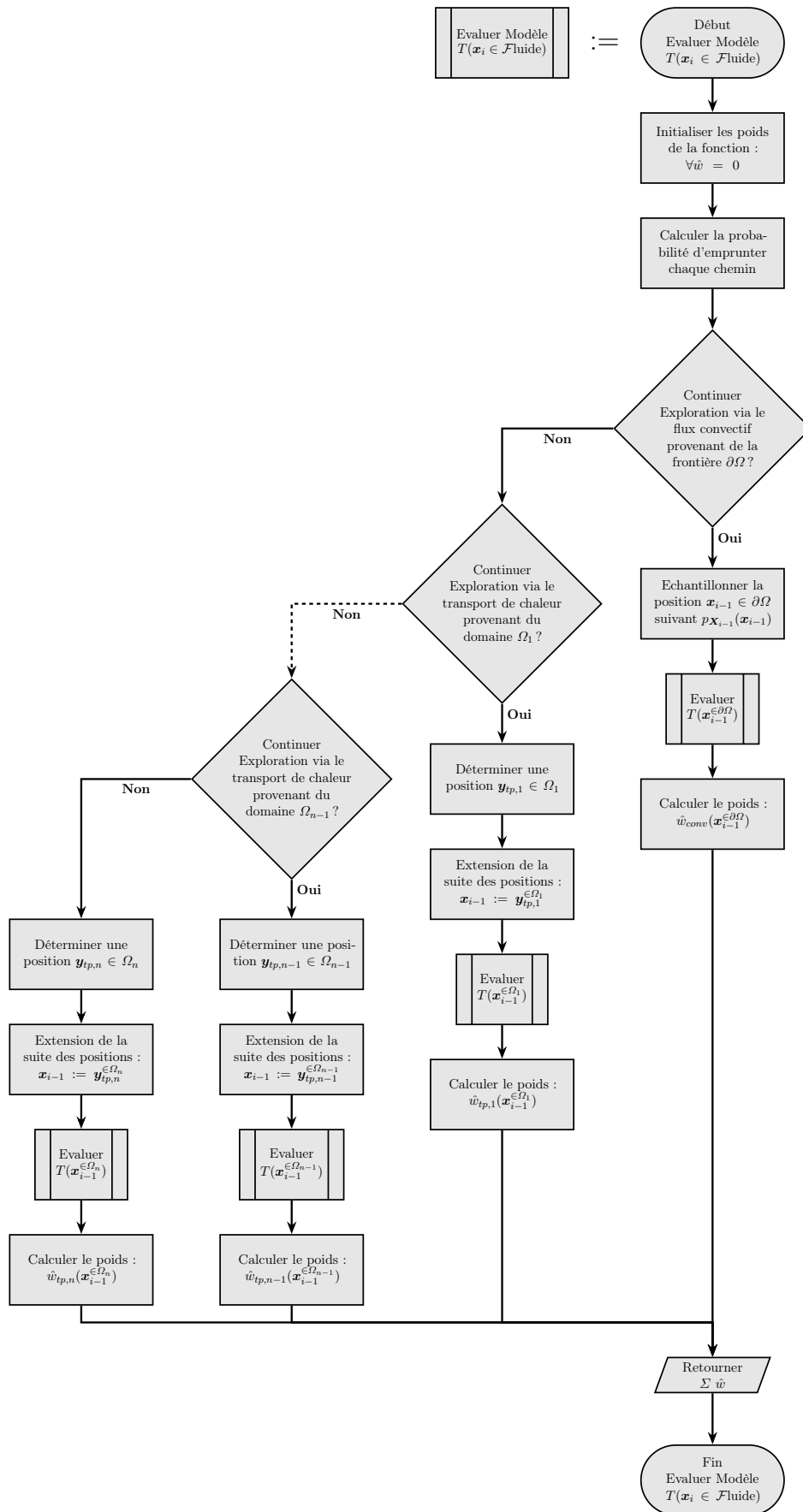


FIGURE 3.4 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation du modèle de température au sein d’un fluide (en régime stationnaire).

symbolise l'extension de la taille de cette cascade, autant que la configuration locale des flux de matière présents le nécessite.

3.3 Température à une interface

3.3.1 Modèle déterministe

Une interface peut, éventuellement, délimiter deux domaines différents qui sont nommés de manière générique Ω_1 et Ω_2 , pour concevoir ce modèle. Dans ce cas, cette surface est une frontière partagée ($\mathcal{I} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$) entre ces deux milieux. En outre, l'interface \mathcal{I} peut aussi circonscrire un seul domaine. Dans ce cas, elle tient lieu de frontière globale pour la scène. Par conséquent, dans le but de rester fidèle à l'approche systémique et générale qui a été adoptée, un unique modèle est développé pour couvrir l'ensemble de ces cas de figure.

Comme mentionné précédemment, les lois de continuité des champs de grandeurs physiques (en l'occurrence la température) et de la densité de flux d'énergie entre les deux côtés d'une interface ont été utilisées. L'application de ces principes permet d'établir l'équation 3.11, qui peut être développée sous la forme de l'équation 3.12.

$$0 = \dot{q}^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{q}_{cond}^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}_{conv}^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}_{rad}^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) \\ & + \dot{q}_{cond}^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}_{conv}^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) + \dot{q}_{rad}^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) \\ & + \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

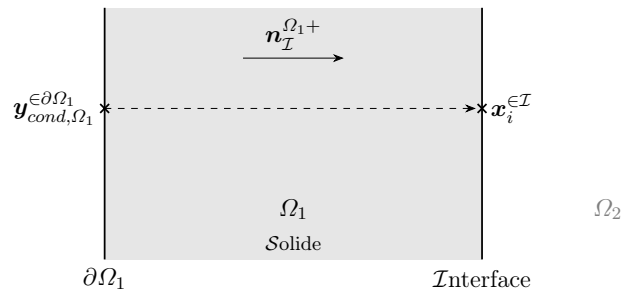
Avec la densité de flux sortant d'un domaine Ω_n par conduction qui est fonction de la valeur de la température à l'autre plan frontière de ce domaine, $\partial\Omega_n$ (Eq. 3.13 et Fig. 3.5a).

$$\dot{q}_{cond}^{\Omega_n+}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) = -\lambda_{\Omega_n} \frac{T(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) - T(\mathbf{y}_{cond,\Omega_n}^{\in\partial\Omega_n})}{\|\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_n}^{\in\partial\Omega_n}\|} \quad (3.13)$$

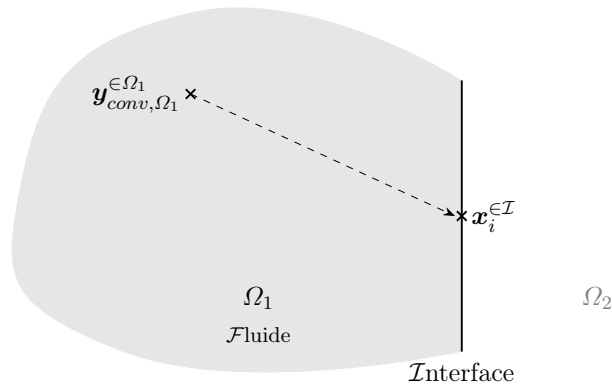
De son côté, la densité de flux sortant d'un domaine par convection a déjà été introduite dans la section précédente 3.2 (Eq. 3.3) et dépend de la température du fluide (Fig. 3.5b).

Enfin, la densité de flux quittant un domaine, Ω_n , par transfert radiatif doit être modélisée. Pour cela, quelques hypothèses complémentaires sont posées. Les interfaces sont modélisées en tant que surfaces grises et sont considérées à l'équilibre thermodynamique local. Dans ces conditions, la loi du rayonnement thermique de KIRCHHOFF stipule l'égalité des absorptivités et émissivités totales hémisphériques (Eq. 3.14).

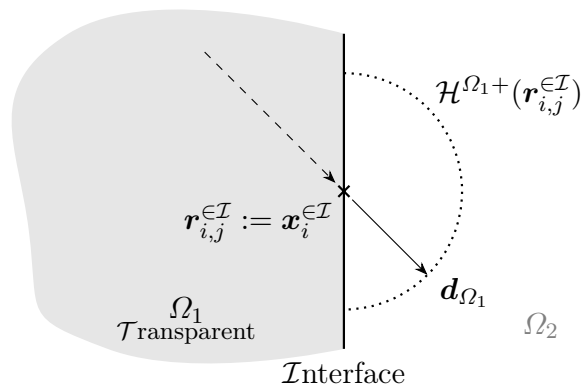
$$\alpha_{\mathcal{I}}^{\Omega_n}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) = \epsilon_{\mathcal{I}}^{\Omega_n}(\mathbf{x}_i^{\in\mathcal{I}}) \quad (3.14)$$



(A) Interface soumise à un flux conductif.



(B) Interface soumise à un flux convectif.



(C) Interface soumise à un flux radiatif.

FIGURE 3.5 – Schémas présentant les notations du modèle de température au niveau d'une interface (en régime stationnaire).

De plus, un modèle linéaire a été construit pour l'émittance totale du corps noir. Pour cela, la puissance quatrième du champ de température a été développée en série de TAYLOR, au voisinage d'une température de référence, T_{ref} , jusqu'au terme d'ordre un compris. Cette linéarisation implique, pour être valide, un contraste maximal de 100 K parmi les éléments de la scène. On obtient ainsi une expression de cette densité de flux qui dépend du champ de luminance totale directionnelle incidente au point de l'interface (Eq. 3.15 et Fig. 3.5c).

$$\dot{q}_{rad}^{\Omega_n+}(\mathbf{x}_i^{\in I}) = \epsilon_I^{\Omega_n}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \times \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{H}^{\Omega_n+}(\mathbf{x}_i^{\in I})} (\mathbf{d}_{\Omega_n} \bullet \mathbf{n}_I^{\Omega_n+}(\mathbf{x}_i^{\in I})) L(\mathbf{x}_i^{\in I}, \mathbf{d}_{\Omega_n}) d\mathbf{d}_{\Omega_n} \\ -\sigma \times (4T_{ref}^3 T(\mathbf{x}_i^{\in I}) - 3T_{ref}^4) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Enfin, pour obtenir une expression plus compacte du modèle déterministe (Eq. 3.17), un *coefficient de dissipation thermique*, noté $\delta(\mathbf{x}_i^{\in I})$ ², est introduit (Eq. 3.16).

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}_i^{\in I}) = & \frac{\lambda_{\Omega_1}}{\|\mathbf{x}_i^{\in I} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1}\|} + \frac{\lambda_{\Omega_2}}{\|\mathbf{x}_i^{\in I} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2}\|} \\ & + h_I^{\Omega_1}(\mathbf{x}_i^{\in I}) + h_I^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \\ & + 4\sigma T_{ref}^3 (\epsilon_I^{\Omega_1}(\mathbf{x}_i^{\in I}) + \epsilon_I^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in I})) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}_i^{\in I}) = & \left(\frac{\lambda_{\Omega_1}}{\|\mathbf{x}_i^{\in I} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1}\|} \times T(\mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1}) \right. \\ & + h_I^{\Omega_1}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \times T(\mathbf{y}_{conv,\Omega_1}^{\in \Omega_1}) \\ & + \epsilon_I^{\Omega_1}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \times \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in I})} (\mathbf{d}_{\Omega_1} \bullet \mathbf{n}_I^{\Omega_1+}(\mathbf{x}_i^{\in I})) L(\mathbf{x}_i^{\in I}, \mathbf{d}_{\Omega_1}) d\mathbf{d}_{\Omega_1} \\ + 3\sigma T_{ref}^4 \end{array} \right. \\ & + \frac{\lambda_{\Omega_2}}{\|\mathbf{x}_i^{\in I} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2}\|} \times T(\mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2}) \\ & + h_I^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \times T(\mathbf{y}_{conv,\Omega_2}^{\in \Omega_2}) \\ & + \epsilon_I^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \times \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in I})} (\mathbf{d}_{\Omega_2} \bullet \mathbf{n}_I^{\Omega_2+}(\mathbf{x}_i^{\in I})) L(\mathbf{x}_i^{\in I}, \mathbf{d}_{\Omega_2}) d\mathbf{d}_{\Omega_2} \\ + 3\sigma T_{ref}^4 \end{array} \right. \\ & \left. + \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in I}) \right) / \delta(\mathbf{x}_i^{\in I}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

2. Il s'agit de la lettre *eth*, prononcée $/\varepsilon\delta/$. Elle permet de transcrire la consonne fricative dentale voisée, c'est-à-dire le "th" dans les mots anglais tels que *thermal*.

3.3.2 Modèle probabiliste

Le modèle probabiliste équivalent (Eq. 3.18) est obtenu en suivant une procédure similaire aux précédentes. Afin de rester le plus général possible, les probabilités associées aux contributions localement absentes deviennent nulles en prenant zéro comme valeur par défaut pour les paramètres et les propriétés physiques. Par exemple, considérons que le domaine Ω_2 soit un solide. Dans ce cas là, il n'y a pas de transfert par convection avec ce domaine. L'utilisateur ne spécifie alors aucune valeur pour le coefficient de convection associé, $h_{\mathcal{I}}^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})$. Au moment du calcul de la probabilité correspondant à cette contribution, la valeur par défaut du coefficient de convection est alors utilisée. De cette manière, une probabilité nulle d'explorer le domaine Ω_2 via un flux convectif est obtenue. Ainsi, cette convention permet au modèle général de s'adapter automatiquement à toutes les configurations dans lesquelles il peut se trouver.

$$T(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}}) = \begin{cases} P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1}\right) \times \hat{w}_{cond,\Omega_1+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_1}) \\ + P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv,\Omega_1}^{\in \Omega_1}\right) \times \hat{w}_{conv,\Omega_1+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_1}) \\ + P\left(\mathbf{d}_{i,j} := \mathbf{d}_{\Omega_1} \ \& \ \mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,0}\right) \\ \times \int_{\mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} p_{\mathcal{D}_{i,j}}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}}(\mathbf{d}_{i,j}) \, d\mathbf{d}_{i,j} \times \hat{w}_{rad,\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) \\ + P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2}\right) \times \hat{w}_{cond,\Omega_2+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_2}) \\ + P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv,\Omega_2}^{\in \Omega_2}\right) \times \hat{w}_{conv,\Omega_2+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_2}) \\ + P\left(\mathbf{d}_{i,j} := \mathbf{d}_{\Omega_2} \ \& \ \mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,0}\right) \\ \times \int_{\mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} p_{\mathcal{D}_{i,j}}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}}(\mathbf{d}_{i,j}) \, d\mathbf{d}_{i,j} \times \hat{w}_{rad,\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) \end{cases} \quad (3.18a)$$

Où

$$\begin{cases} \exists e_{\Omega_1} \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{y}_{cond,\Omega_1} = \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} - e_{\Omega_1} \times \mathbf{n}_{\mathcal{I}}^{\Omega_1+} \ \& \ \mathbf{y}_{cond,\Omega_1} \in \partial\Omega_1 \\ P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1}\right) = \frac{\lambda_{\Omega_1}}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}}) \times \left\| \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_1}^{\in \partial\Omega_1} \right\|} \\ \hat{w}_{cond,\Omega_1+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_1}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_1}) + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \end{cases} \quad (3.18b)$$

$$\begin{cases} \exists \mathbf{y}_{conv,\Omega_1} \in \Omega_1 \\ P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv,\Omega_1}^{\in \Omega_1}\right) = \frac{h_{\mathcal{I}}^{\Omega_1}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \\ \hat{w}_{conv,\Omega_1+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_1}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_1}) + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \end{cases} \quad (3.18c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{i,j} := \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} \\ \exists \mathbf{d}_{\Omega_1} \in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}) \\ P\left(\mathbf{d}_{i,j} := \mathbf{d}_{\Omega_1} \ \& \ \mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,0}\right) = \frac{4\epsilon_{\mathcal{I}}^{\Omega_1}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})\sigma T_{ref}^3}{\delta(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \\ p_{\mathcal{D}_{i,j}}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}}(\mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) = \frac{\mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \bullet \mathbf{n}_{\mathcal{I}}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}{\pi} \\ \hat{w}_{rad,\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) = \frac{\pi L\left(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_1+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}\right) + 3\sigma T_{ref}^4}{4\sigma T_{ref}^3} + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \end{array} \right. \quad (3.18d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists e_{\Omega_2} \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{y}_{cond,\Omega_2} = \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} - e_{\Omega_2} \times \mathbf{n}_{\mathcal{I}}^{\Omega_2+} \ \& \ \mathbf{y}_{cond,\Omega_2} \in \partial\Omega_2 \\ P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2}\right) = \frac{\lambda_{\Omega_2}}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}}) \times \left\| \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}_{cond,\Omega_2}^{\in \partial\Omega_2} \right\|} \\ \hat{w}_{cond,\Omega_2+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_2}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial\Omega_2}) + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \end{array} \right. \quad (3.18e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \mathbf{y}_{conv,\Omega_2} \in \Omega_2 \\ P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{y}_{conv,\Omega_2}^{\in \Omega_2}\right) = \frac{h_{\mathcal{I}}^{\Omega_2}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \\ \hat{w}_{conv,\Omega_2+}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_2}) = T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \Omega_2}) + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}})} \end{array} \right. \quad (3.18f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{i,j} := \mathbf{x}_i^{\in \mathcal{I}} \\ \exists \mathbf{d}_{\Omega_2} \in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}) \\ P\left(\mathbf{d}_{i,j} := \mathbf{d}_{\Omega_2} \ \& \ \mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,0}\right) = \frac{4\epsilon_{\mathcal{I}}^{\Omega_2}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})\sigma T_{ref}^3}{\delta(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \\ p_{\mathcal{D}_{i,j}}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}}(\mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) = \frac{\mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \bullet \mathbf{n}_{\mathcal{I}}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}{\pi} \\ \hat{w}_{rad,\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}) = \frac{\pi L\left(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega_2+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}\right) + 3\sigma T_{ref}^4}{4\sigma T_{ref}^3} + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})}{\delta(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \mathcal{I}})} \end{array} \right. \quad (3.18g)$$

Le logigramme de cet algorithme d'évaluation élémentaire a été divisé en deux figures. Le premier logigramme (Fig. 3.6) représente l'algorithme "*maître*" — puisqu'il appelle le second en guise de sous-programme de préparation — au cours duquel le choix d'exploration et l'évaluation des poids de Monte-Carlo sont réalisés. D'autre part, le modèle probabiliste (Eq. 3.18) dispose d'une symétrie de ses contributions de part la présence potentielle de deux domaines connexes. Ainsi, l'algorithme d'évaluation élémentaire présente lui aussi cette symétrie dans les étapes à effectuer. Pour des raisons de présentation, la partie correspondant au domaine Ω_2 — qui regroupe les mêmes étapes que pour le domaine Ω_1 — a été suggérée à l'aide des pointillés sur les deux logigrammes.

Le second logigramme (Fig. 3.7) représente, pour sa part, les étapes de prépa-

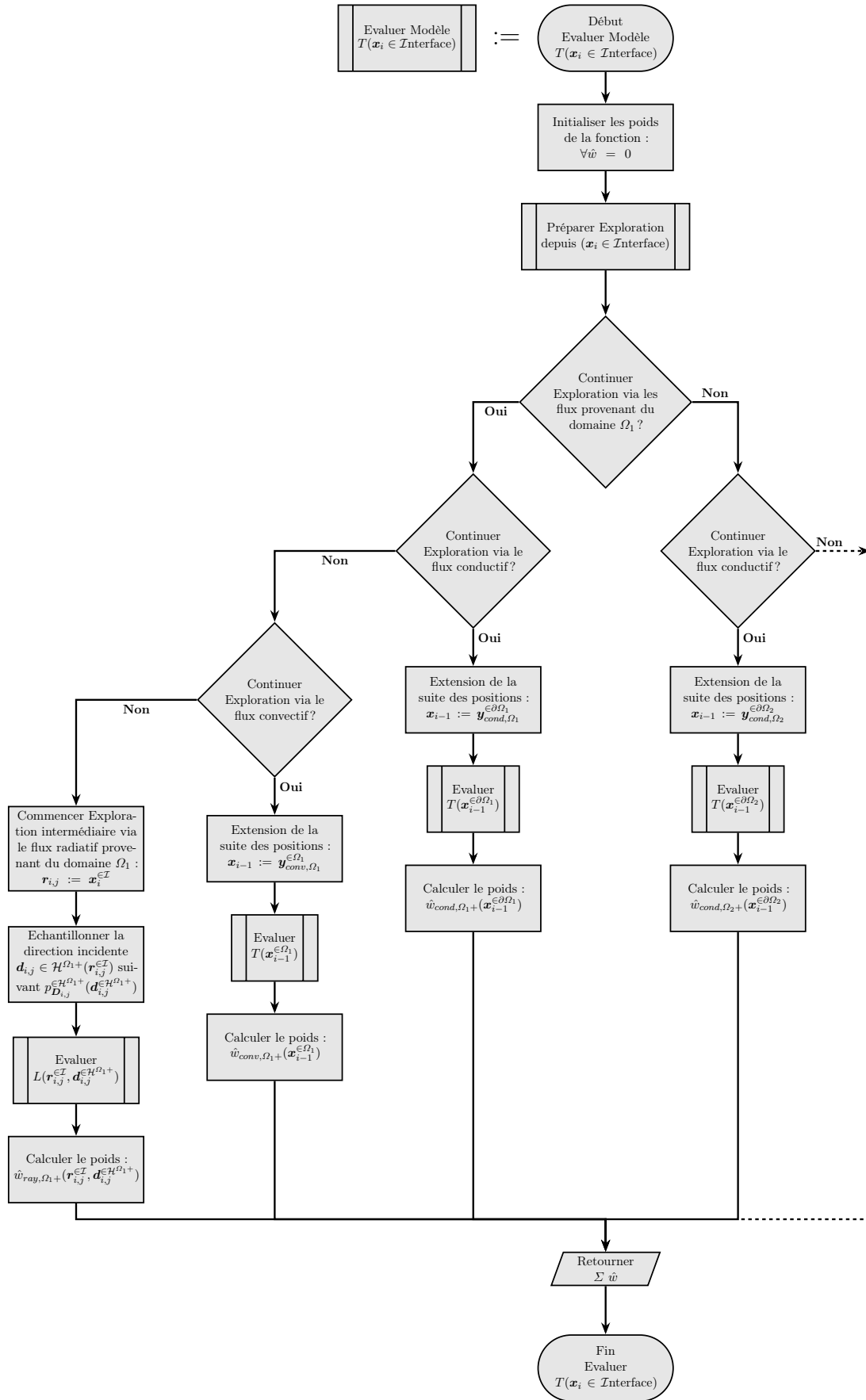


FIGURE 3.6 – Logigramme de l’algorithme "maître" d’évaluation du modèle de température au niveau d’une interface (en régime stationnaire).

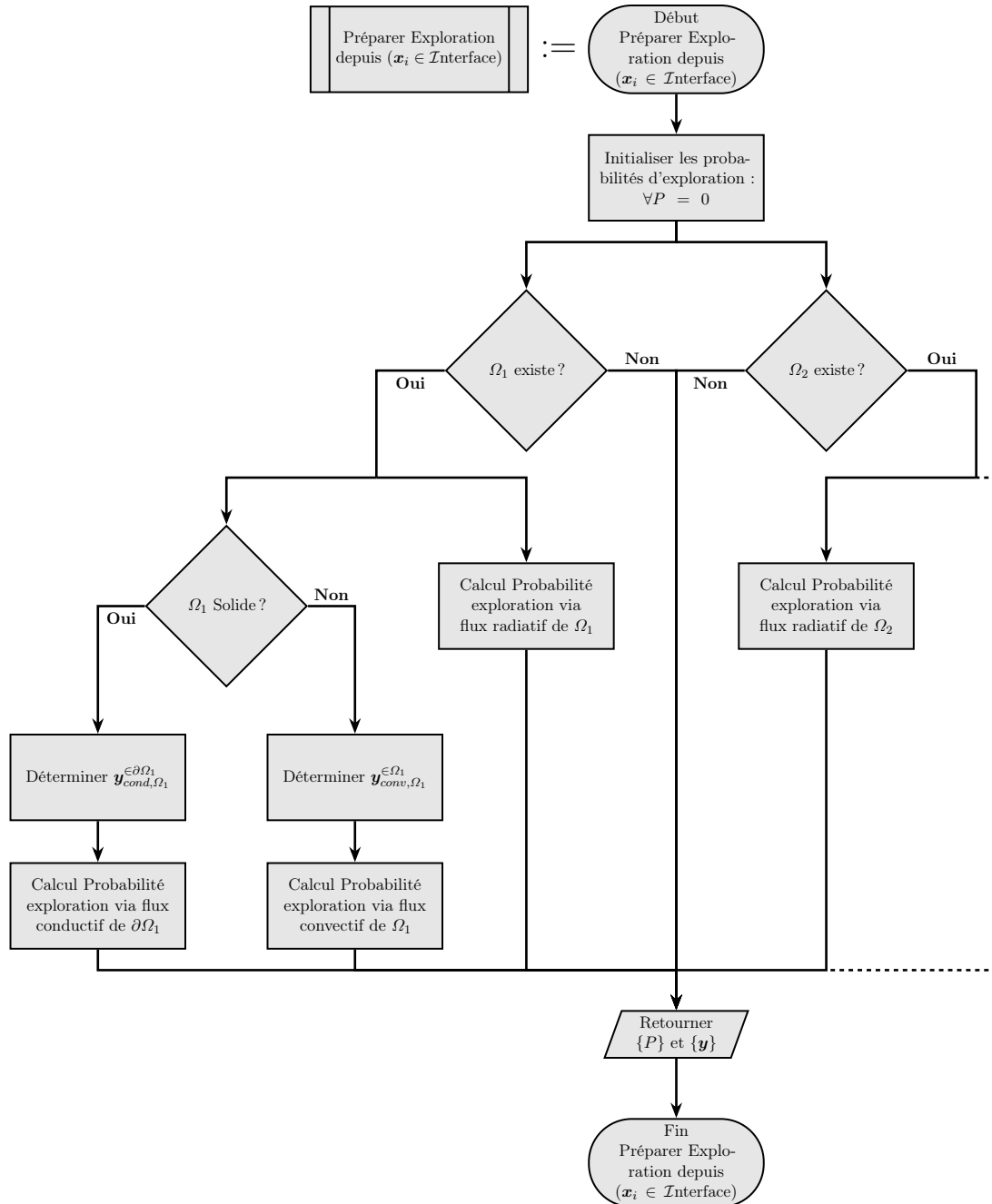


FIGURE 3.7 – Logigramme de l’algorithme de préparation de l’exploration au niveau d’une interface (en régime stationnaire).

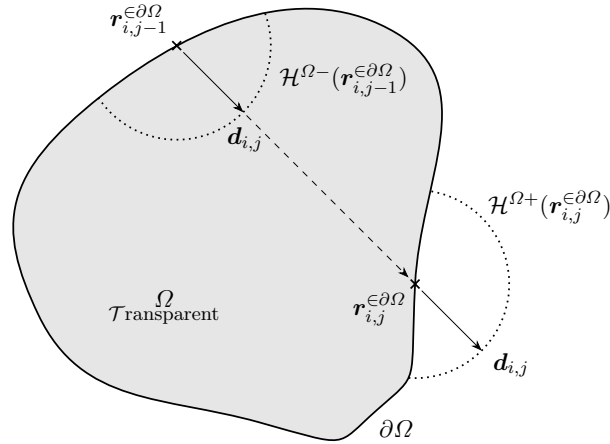


FIGURE 3.8 – Schéma représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction incidente à une interface (en régime stationnaire).

ration de l'exploration au niveau de l'interface. Elles permettent de déterminer la configuration dans laquelle se trouve l'interface et de calculer, en conséquence, les probabilités et les coordonnées des points candidats à l'extension du chemin.

3.4 Luminance totale directionnelle incidente à une interface

3.4.1 Modèle déterministe

La luminance — la précision du caractère total et directionnel de la luminance pourra être omise pour des raisons de concision du discours — est définie comme incidente, au point $\mathbf{r}_{i,j}$ de la frontière, lorsque sa direction appartient à l'hémisphère sortant le domaine Ω , $\mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in\partial\Omega})$ (Fig. 3.8). Les domaines peuvent être soit opaques, soit totalement transparents.

Dans le premier cas, aucune lumière n'est transmise au travers de celui-ci. Par conséquent, la valeur du champ de luminance incidente est constante et nulle.

Dans le second cas, le rayonnement est transmis sans aucune interaction avec le milieu. La luminance totale directionnelle est alors constante le long de sa direction à l'intérieur du domaine. C'est pourquoi, dans ces conditions, seules les interfaces peuvent échanger entre elles par le biais du transfert radiatif. Ainsi, en définissant $\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in\partial\Omega}$ comme le point d'intersection d'un rayon, partant du point $\mathbf{r}_{i,j}^{\in\partial\Omega}$ dans la direction $-\mathbf{d}_{i,j}^{\in\mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in\partial\Omega})}$, avec la frontière du domaine $\partial\Omega$, on obtient le modèle déterministe suivant (Eq. 3.19) :

$$L(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega})}) = L(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) \quad (3.19a)$$

Où

$$\exists e_j \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{r}_{i,j-1} = \mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega} - e_j \times \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega})} \ \& \ \mathbf{r}_{i,j-1} \in \partial \Omega \quad (3.19b)$$

3.4.2 Modèle probabiliste

Le modèle déterministe (Eq. 3.19) présente une contribution unique. Il est ainsi possible de voir cette équation d'une manière probabiliste (Eq. 3.20) en injectant une probabilité unité de continuer le chemin d'exploration par cette seule contribution.

$$L(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega})}) = P(\mathbf{r}_{i,j-1} := \mathbf{y}_{intersect}^{\in \partial \Omega}) \times \hat{w}_{intersect}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \quad (3.20a)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists e_j \in \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbf{y}_{intersect} = \mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega} - e_j \times \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega})} \ \& \ \mathbf{y}_{intersect} \in \partial \Omega \\ \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} := \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j}^{\in \partial \Omega})} \\ P(\mathbf{r}_{i,j-1} := \mathbf{y}_{intersect}^{\in \partial \Omega}) = 1 \\ \hat{w}_{intersect}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) = L(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) \end{array} \right. \quad (3.20b)$$

L'algorithme d'évaluation est le reflet de son modèle probabiliste associé. Ainsi, c'est tout naturellement que celui correspondant au modèle de luminance incidente à l'interface (Fig. 3.9) est lui aussi particulièrement court, avec seulement trois étapes. De plus, le test de la probabilité est vrai à chaque fois — puisque sa valeur est un — et n'apporte de cette manière aucune valeur ajoutée à la procédure. Par conséquent ce dernier n'a pas été implémenté dans cet algorithme.

3.5 Luminance totale directionnelle quittant une interface

3.5.1 Modèle déterministe

La luminance totale directionnelle quittant le point $\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}$ dans la direction $\mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}$ s'écrit comme la somme de potentiellement trois phénomènes (Eq. 3.21). Premièrement, l'émission de rayonnement sous l'effet d'une température non-nulle de l'interface (Fig. 3.10a). Ensuite, la réflexion par cette surface d'un rayonnement incident en ce point. Elle peut avoir lieu suivant une combinaison de réflexion spéculaire (Fig. 3.11a) et diffuse (Fig. 3.11b). Cette répartition est réalisée en fixant localement la valeur de la fraction spéculaire de la réflexion, $s_{\partial \Omega}^{\Omega}$. Enfin, une partie

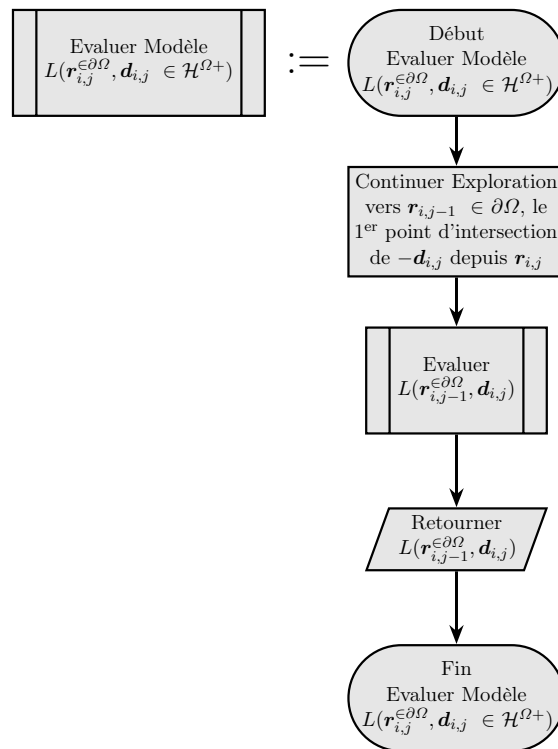
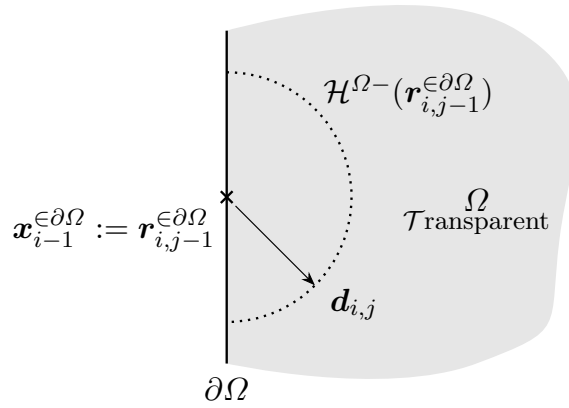
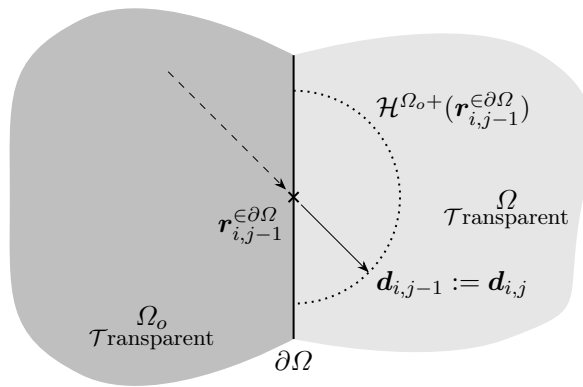


FIGURE 3.9 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction incidente à une interface (en régime stationnaire).

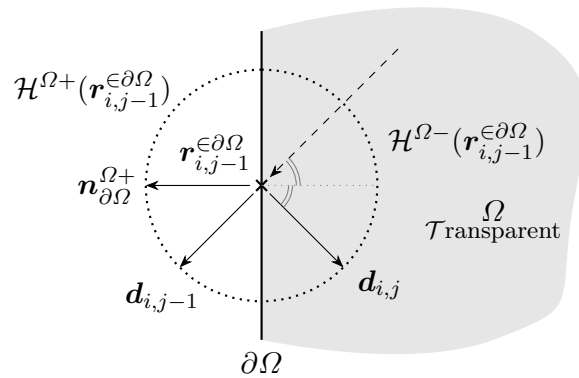


(A) Sous l'effet d'une émission par l'interface.

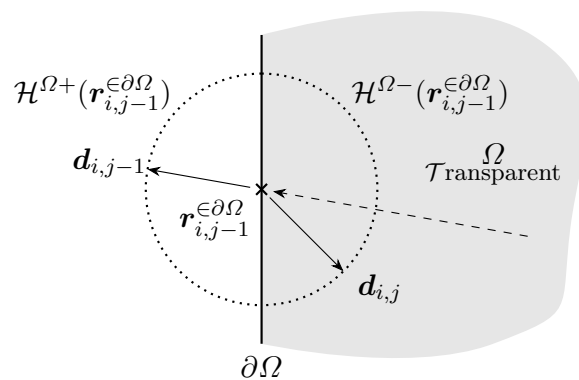


(B) Sous l'effet d'une transmission à travers l'interface.

FIGURE 3.10 – Schémas représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface (en régime stationnaire).



(A) Réflexion spéculaire par l'interface.



(B) Réflexion diffuse par l'interface.

FIGURE 3.11 – Schémas représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface, sous l'effet d'une réflexion par cette dernière (en régime stationnaire).

peut provenir de la transmission au travers de l'interface d'un rayonnement sortant du domaine opposé Ω_o , dans la direction considérée (Fig. 3.10b).

$$\begin{aligned}
 L\left(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) &= \epsilon_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \times \frac{\sigma \times \left(4T_{ref}^3 T(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) - 3T_{ref}^4\right)}{\pi} \\
 &+ \rho_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) s_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \times L\left(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{\rho s}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \\
 &+ \rho_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \left(1 - s_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})\right) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} \frac{\mathbf{d}_{\rho d} \bullet \mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}{\pi} \times L\left(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{\rho d}\right) d\mathbf{d}_{\rho d} \\
 &+ \tau_{\partial \Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \times L\left(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{\tau}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dans le modèle déterministe (Eq. 3.21), deux directions précédant le phénomène de réflexion à la paroi sont visibles. La première, $\mathbf{d}_{\rho s}$, concerne la réflexion de type spéculaire. Elle est déterminée en appliquant la loi de SNELL-DESCARTES (Eq. 3.22). Quant à la seconde, $\mathbf{d}_{\rho d}$, elle se rapporte à la réflexion diffuse et peut provenir de l'ensemble de l'hémisphère des directions incidentes au point, $\mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})$.

$$\mathbf{d}_{\rho s}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} = \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} - 2 \left(\mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \bullet \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} \right) \mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \tag{3.22}$$

3.5.2 Modèle probabiliste

En utilisant la loi du rayonnement thermique de KIRCHHOFF (Eq. 3.14), la complémentarité des propriétés radiatives totales hémisphériques — conséquence de la conservation de l'énergie — peut alors s'écrire sous la forme (Eq. 3.23) :

$$\epsilon_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) + \rho_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) + \tau_{\partial \Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) = 1 \tag{3.23}$$

Ainsi, chacune des propriétés radiatives peuvent ainsi être vue comme une probabilité d'étendre le chemin d'exploration via le phénomène physique qui lui est associé. Ainsi, comme précédemment, l'expression déterministe (Eq. 3.21) a pu être travaillée pour faire apparaître un modèle probabiliste équivalent (Eq. 3.24).

$$L\left(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) = \begin{cases} P\left(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}\right) \times \hat{w}_{\epsilon}\left(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega}\right) \\ + P\left(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\rho s}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \times \hat{w}_{\rho s}\left(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \\ + P\left(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\rho d}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \\ \times \int_{\mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} p_{D_{i,j-1}}\left(\mathbf{d}_{i,j-1}\right) d\mathbf{d}_{i,j-1} \times \hat{w}_{\rho d}\left(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \\ + P\left(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\tau}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \times \hat{w}_{\tau}\left(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega^+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}\right) \end{cases} \tag{3.24a}$$

Où

$$\begin{cases} P(\mathbf{x}_{i-1} := \mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) = \epsilon_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \\ \hat{w}_{\epsilon}(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega}) = \frac{\sigma \times (4T_{ref}^3 T(\mathbf{x}_{i-1}^{\in \partial \Omega}) - 3T_{ref}^4)}{\pi} \end{cases} \quad (3.24b)$$

$$\begin{cases} \exists \mathbf{d}_{\rho s}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} = \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} - 2 \left(\mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \bullet \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega-}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} \right) \mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \\ P(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\rho s}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = \rho_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) s_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \\ \hat{w}_{\rho s}(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = L(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) \end{cases} \quad (3.24c)$$

$$\begin{cases} \exists \mathbf{d}_{\rho d} \in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \\ P(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\rho d}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = \rho_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) (1 - s_{\partial \Omega}^{\Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})) \\ p_{\mathcal{D}_{i,j-1}}(\mathbf{d}_{i,j-1}) = \frac{\mathbf{d}_{i,j-1} \bullet \mathbf{n}_{\partial \Omega}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}{\pi} \\ \hat{w}_{\rho d}(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = L(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) \end{cases} \quad (3.24d)$$

$$\begin{cases} \exists \mathbf{d}_{\tau}^{\in \mathcal{H}^{\Omega o+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} = \mathbf{d}_{i,j}^{\in \mathcal{H}^{\Omega o+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})} \\ P(\mathbf{d}_{i,j-1} := \mathbf{d}_{\tau}^{\in \mathcal{H}^{\Omega o+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = \tau_{\partial \Omega}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}) \\ \hat{w}_{\tau}(\mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega o+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) = L(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega}, \mathbf{d}_{i,j-1}^{\in \mathcal{H}^{\Omega o+}(\mathbf{r}_{i,j-1}^{\in \partial \Omega})}) \end{cases} \quad (3.24e)$$

L'algorithme d'évaluation de ce modèle présente en toute logique quatre branches distinctes (Fig. 3.12); c'est-à-dire une par contribution présente dans le modèle probabiliste associé.

Conclusion

Ce chapitre a présenté les modèles prédictifs de champs physiques qui ont été développés, ainsi que leurs algorithmes d'évaluation associés. Les trois premiers concernent le champ de température, tandis que les deux derniers sont relatifs à la luminance totale directionnelle. Dans chacun de ces modèles, il a été mis en évidence que les branches proposées pour poursuivre l'exploration correspondaient à l'influence, sur la grandeur physique étudiée, de chaque phénomène physique présent.

De plus, les évaluations des modèles de luminance ont montré qu'elles s'appelaient alternativement jusqu'à ce que l'exploration complémentaire trouve une condition explicite sur ce champ ou, plus généralement, la position d'émission du rayonnement. Cette dernière permet alors de poursuivre l'exploration du champ de température au sein de la scène. Ainsi, cette exploration complémentaire peut être vue comme une fonction d'échantillonnage complexe — dans le sens systémique du terme — du prochain point d'exploration du champ de température. De cette manière, grâce à notre point de vue systémique, le transfert radiatif retrouve un rôle tout à fait similaire aux autres phénomènes de transferts thermiques dans l'exploration du

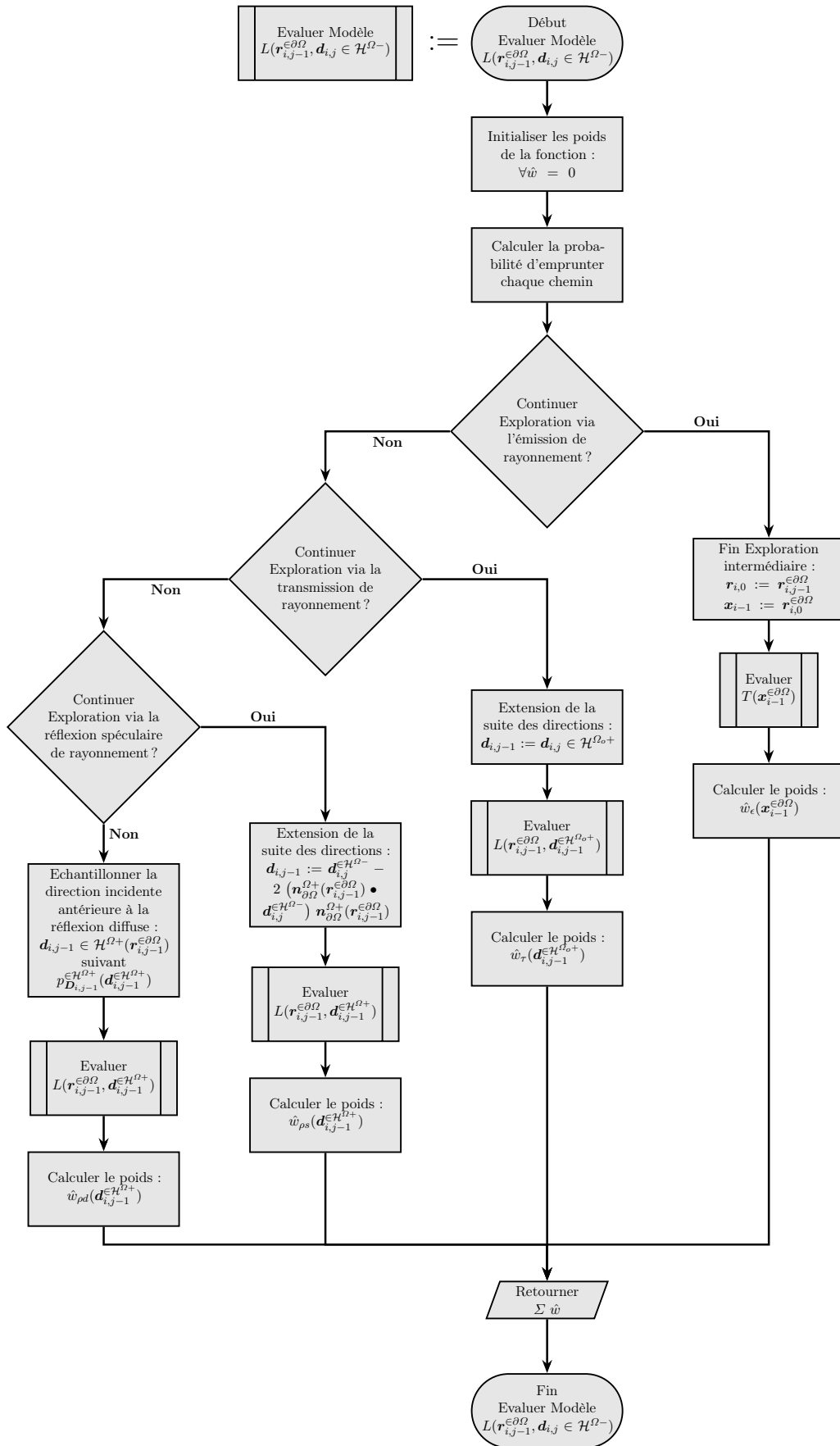


FIGURE 3.12 – Logigramme de l’algorithme d’évaluation du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface (en régime stationnaire).

champ de température au sein de la scène.

Enfin, ce chapitre a fait la part belle à la modularité de l'approche utilisée. En effet, chacun des modèles prédictifs a été obtenu après avoir fait le minimum d'hypothèses sur les domaines avoisinants. Ainsi, l'évolution de cet environnement de modélisation pourra par la suite être réalisée, graduellement et de manière aisée, pour l'adapter aux problèmes désirés.

CHAPITRE 4

Validation de l'approche

Introduction	90
4.1 Méthode	90
4.1.1 Conditions aux frontières	90
4.1.2 Mise en œuvre informatique	92
4.1.3 Recherche de biais dans l'estimateur construit	92
4.1.4 Chiffres significatifs	92
4.2 Conduction	93
4.2.1 $Cd1$: barreau avec des températures imposées	93
4.2.2 $Cd2$: barreau avec une densité de flux imposée	95
4.3 Convection	97
4.3.1 $Cv1$: enceinte convective avec des températures imposées	97
4.3.2 $Cv2$: enceinte convective avec une densité de flux imposée	98
4.4 Transport de chaleur	100
4.4.1 $Tp1$: ventilation mécanique contrôlée	100
4.5 Rayonnement	101
4.5.1 $R1$: cavité rayonnante avec une densité de flux imposée	101
4.5.2 $R2$: cavité rayonnante avec des parois réfléchissantes	103
4.5.3 $R3$: cavité rayonnante avec des parois transparentes	105
4.6 Transferts thermiques couplés	107
4.6.1 $Cpl1$: conduction et convection couplées	107
4.6.2 $Cpl2$: conduction et rayonnement couplés	109
4.6.3 $Cpl3$: convection et rayonnement couplés	112
4.6.4 $Cpl4$: conduction, convection, transport de chaleur et rayonnement couplés	114
Conclusion	116

Introduction

Un environnement de modélisation probabiliste a été développé pour permettre la simulation Monte-Carlo des transferts thermiques couplés au sein de systèmes complexes. Il est constitué de plusieurs classes de composants. Pour chacune d'elles, des modèles prédictifs des champs de température et de luminance totale directionnelle ont été établis. La plupart de ces modèles sont divisés en plusieurs contributions qui correspondent chacune à un phénomène physique distinct. Pour que cet outil puisse être appliqué, avec confiance, à des problèmes complexes, il doit au préalable franchir une phase de validation.

Dans un premier temps, une section expose les choix méthodologiques qui ont été pris pour cette étape. Ils concernent aussi bien l'implémentation des cas de validation, que l'estimation de leurs résultats ainsi que la procédure de validation vis-à-vis de valeurs de référence.

Dans un deuxième temps, l'environnement est appliqué à huit cas académiques qui mettent en œuvre un unique mode de transfert thermique. Ils présentent une ou plusieurs sondes auxquelles le champ de température est estimé. En complément, l'utilisation de configurations relativement simples permet de pouvoir y déterminer les expressions analytiques du champ de température. Ainsi, ces dernières serviront d'étalons de comparaison pour les estimations de notre outil afin de mener la validation de l'implémentation de chaque contribution (Tab. 4.1). Les quatre parties, qui suivent celle consacrée à la méthode, abordent cette étape pour chacun des modes de transfert thermique — conduction, convection et transfert radiatif — ainsi que pour le transport de chaleur.

Et dans un troisième temps, la dernière section rassemble quatre cas qui présentent des phénomènes couplés, au sein de plusieurs composants. L'examen de la continuité des densités de flux, au passage d'un composant à l'autre, servira d'indicateur en complément de celui du champ de température. Dans cette partie aussi, le recours à des configurations qui permettent de disposer de résultats de référence — obtenus par une résolution analytique ou par un outil de calcul formel — a été privilégié pour élaborer une validation la plus qualitative possible. Cette section permettra de valider la prise en compte des couplages par la procédure d'exploration stochastique à l'intérieur d'une scène de plusieurs composants (Tab. 4.1).

4.1 Méthode

4.1.1 Conditions aux frontières

Les problèmes sont fermés par des conditions aux frontières de DIRICHLET et/ou de NEUMANN. Les premières sont obtenues simplement en fixant une connaissance explicite du champ considéré à la frontière. Pour obtenir les secondes, la procédure consiste à spécifier une source surfacique (q_{src}^{2D}) au niveau de la frontière, qui soit égale à la valeur de la densité de flux entrant dans le domaine, que l'on souhaite

TABLE 4.1 – Récapitulatif des contributions de modèle prédictif validées au cours de chacun des cas de validation.

<i>Champ</i> ∈ Composant <i>Contribution (mode)</i>	<i>T</i> ∈ Solide		<i>T</i> ∈ \mathcal{F} luide		<i>T</i> ∈ Interface			<i>L</i> ∈ Interface			
	<i>Cond.</i>	<i>Cond.</i>	<i>Conv.</i>	<i> Tp.</i>	<i>Cond.</i>	<i>Conv.</i>	<i>Rad.</i>	ϵ (<i>Rad.</i>)	ρs (<i>Rad.</i>)	ρd (<i>Rad.</i>)	τ (<i>Rad.</i>)
<i>Ex1</i> : cas-test [CF ^a imposées]	✓										
<i>Cd1</i> : barreau [<i>T</i>]	✓										
<i>Cd2</i> : barreau [<i>T</i> & \dot{q}]	✓				✓						
<i>Cv1</i> : enceinte convective [<i>T</i>]			✓								
<i>Cv2</i> : enceinte convective [<i>T</i> & \dot{q}]			✓			✓					
<i>Tp1</i> : VMC [<i>T</i>]				✓							
<i>R1</i> : cavité rayonnante [<i>T</i> & \dot{q}]						✓		✓			
<i>R2</i> : cavité avec miroirs [<i>T</i> & \dot{q}]						✓		✓		✓	
<i>R3</i> : cavité avec vitres [<i>T</i> & \dot{q}]						✓		✓			✓
<i>Cpl1</i> : Cond-Conv [<i>T</i>]	✓		✓			✓					
<i>Cpl2</i> : Cond-Rad [<i>T</i>]	✓					✓			✓		
<i>Cpl3</i> : Conv-Rad [<i>T</i>]			✓			✓			✓		
<i>Cpl4</i> : Cond-Conv+Tp+Rad [<i>T</i>]	✓		✓	✓		✓			✓		

a. Conditions aux Frontières : *T* = température imposée, \dot{q} = densité de flux imposée

fixer. En effet, par définition, les interfaces utilisées en guise de frontières ne peuvent échanger de l'énergie qu'avec l'intérieur du problème. Ainsi, la totalité d'une source qui lui est imposée sera dissipée vers la scène sous la forme d'un flux entrant. C'est pour cette raison que, dans la suite, les conditions de NEUMANN seront indiquées à l'aide d'un terme source surfacique aux frontières.

4.1.2 Mise en œuvre informatique

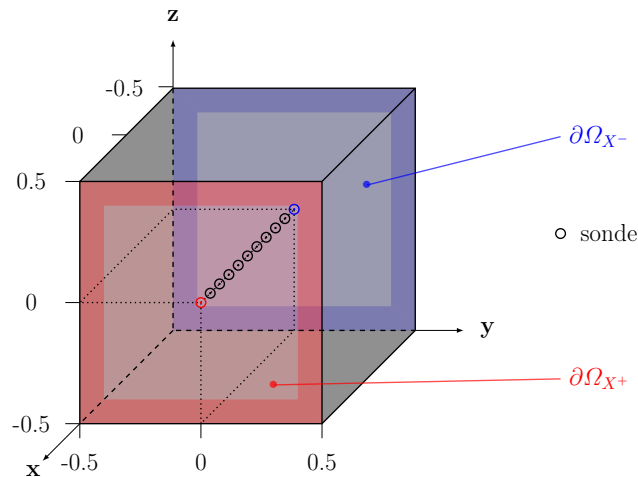
Les tests de ce chapitre ont été réalisés en implémentant notre outil dans l'environnement de développement open source EDSTAR. Ce dernier est dédié à la construction et à l'exécution d'algorithmes de Monte-Carlo au sein de systèmes complexes [86, 118]. Au cours de ces tests, chacun des résultats est obtenu par simulation Monte-Carlo d'un million d'histoires ($h_{max} = 10^6$). Durant chacune de ces dernières, un nouveau chemin d'exploration stochastique est construit, au départ d'une sonde placée au sein d'un cas-test, pour réaliser l'évaluation.

4.1.3 Recherche de biais dans l'estimateur construit

L'étude de la distribution des écarts entre les estimations et leur référence, rapportée à leur erreur type associée est utilisée pour vérifier que l'estimateur construit ne présente aucun biais. En effet, on a vu dans la section 1.2.1 que l'application du théorème central limite permet de définir des intervalles de confiance autour des estimations obtenus. De ce fait, en présence d'un estimateur non-biaisé, chaque estimation possède 68% de chance d'être distant de moins d'une erreur-type de la référence, 95% de moins de deux erreurs-types et ainsi de suite en suivant les valeurs des indices de confiance associés à chaque intervalle (Tab. 1.1). Ainsi, par exemple, identifier une "grande" proportion d'estimations distantes de plus de trois erreurs types de leur référence, possède une très faible probabilité de se produire. Cet événement entrainerait, par conséquent, une suspicion de présence de biais au sein de l'estimateur qu'il faudrait éclaircir.

4.1.4 Chiffres significatifs

Les données utilisées dans les cas suivants sont connues avec trois chiffres significatifs; la convention voudrait alors que le résultat soit donné avec la même précision. Néanmoins, il a été choisi de présenter les résultats avec jusqu'à six chiffres pour mieux pouvoir analyser l'écart séparant la référence de l'estimation avec son erreur type calculée. Ce choix d'afficher les résultats avec plus de chiffres que nécessaires est présent dans l'ensemble de ce manuscrit. Pour autant, seuls leurs trois premiers chiffres ont un sens physique et doivent ainsi être pris en compte pour en tirer des conclusions sur le comportement du système simulé.

FIGURE 4.1 – Schéma du cas de validation *Cd1*.TABLE 4.2 – Conditions aux frontières du cas de validation *Cd1*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_{X-}$	$\partial\Omega_{X+}$
$T(\mathbf{y} \in \partial\Omega)$ [K]	270	300

4.2 Conduction

4.2.1 *Cd1* : barreau avec des températures imposées

4.2.1.1 Objectif

Valider les contributions des frontières dans le modèle de température au sein des domaines solides.

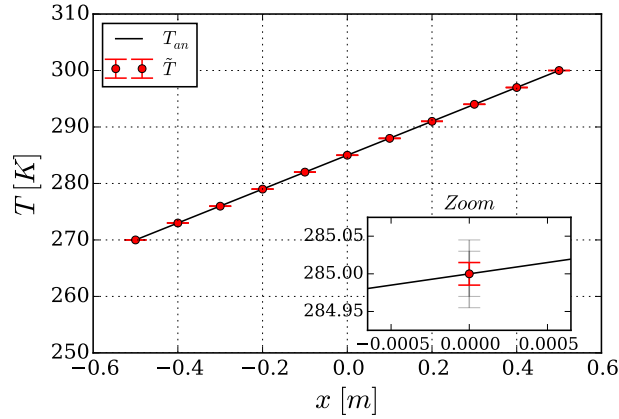
4.2.1.2 Cas de validation

Il est formé d'un composant solide, de la forme d'un cube unité (Fig. 4.1), avec une conductivité thermique de $0.150 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Au sein de celui-ci, les échanges par conduction ont lieu le long de l'axe x . Les deux frontières $\partial\Omega_{X-}$ et $\partial\Omega_{X+}$ de ce composant présentent une condition de connaissance explicite du champ de température (Tab. 4.2). Pour finir, onze points-sondes ont été positionnés, à intervalle régulier entre ces deux plans, pour y estimer le profil de température.

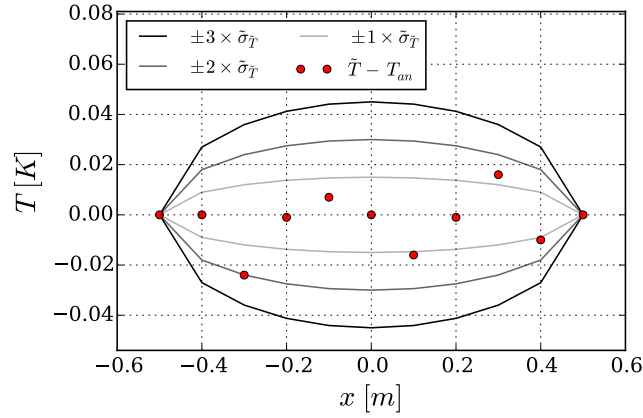
4.2.1.3 Référence analytique

Le champ de température présente un profil affine, le long de l'axe x , qui relie les températures de chacune des parois (Eq. 4.1).

1. Dans le but de faciliter la lecture du document, les nombres y seront mentionnés dans un format décimal dans l'intervalle $]10^{-3}, 10^3[$ et dans un format scientifique en-dehors.



(A) Comparaison entre les températures estimées et analytiques.



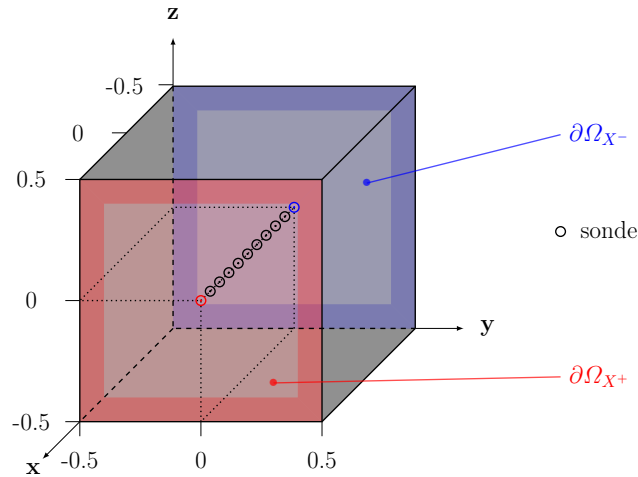
(B) Différences entre les températures estimées et analytiques, comparées à l'erreur type de l'estimation.

FIGURE 4.2 – Graphiques présentant les résultats du cas de validation *Cd1*.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\Omega}) = T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^-}}) + \frac{\mathbf{x}^{\in\Omega} - \mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^-}}}{\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^+}} - \mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^-}}} \left(T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^+}}) - T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^-}}) \right) \quad (4.1)$$

4.2.1.4 Résultats

Les estimations de température montrent un accord remarquable avec la référence analytique attendue (Fig. 4.2a). De plus, les écarts — entre cette référence et les estimations recueillies — sont tous localisés dans l'intervalle de confiance de deux erreurs types de chaque estimation (Fig. 4.2b). Ainsi, cette distribution des écarts permet de conclure que l'estimateur de ce modèle, construit par notre algorithme stochastique, ne présente aucun biais d'évaluation.

FIGURE 4.3 – Schéma du cas de validation *Cd2*.TABLE 4.3 – Conditions aux frontières du cas de validation *Cd2*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_{X-}$	$\partial\Omega_{X+}$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	\sim	300
$\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [W.m^{-2}]$	-5.00	0.00

4.2.2 *Cd2* : barreau avec une densité de flux imposée

4.2.2.1 Objectif

La validation de la contribution relative au transfert conductif, au sein du modèle de température à l'interface.

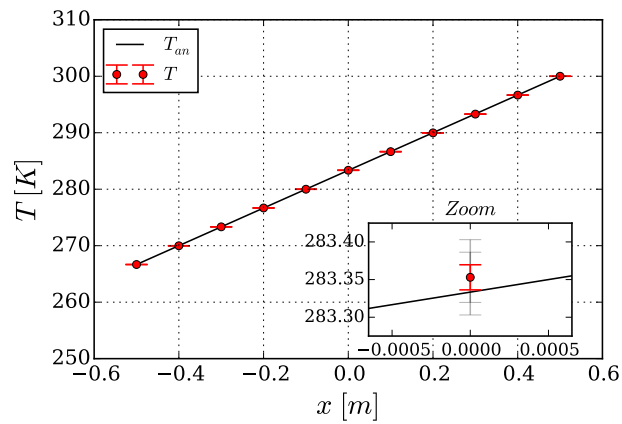
4.2.2.2 Cas de validation

Il est constitué d'un domaine solide de géométrie cubique — de 1.00 *m* de côté —, assemblé avec une interface en guise de frontière $\partial\Omega_{X-}$ (Fig. 4.3). Le milieu possède une conductivité thermique de $0.150 W.m^{-1}.K^{-1}$. Le transfert par conduction *y* a lieu le long de l'axe *x*, entre les deux plans frontières ($\partial\Omega_{X-}$ et $\partial\Omega_{X+}$). Onze points-sondes ont été répartis le long de cet axe dans le but de capturer le profil de température. Enfin, ce problème est fermé par une condition de DIRICHLET en $\partial\Omega_{X+}$ et de NEUMANN à l'interface $\partial\Omega_{X-}$ (Tab. 4.3).

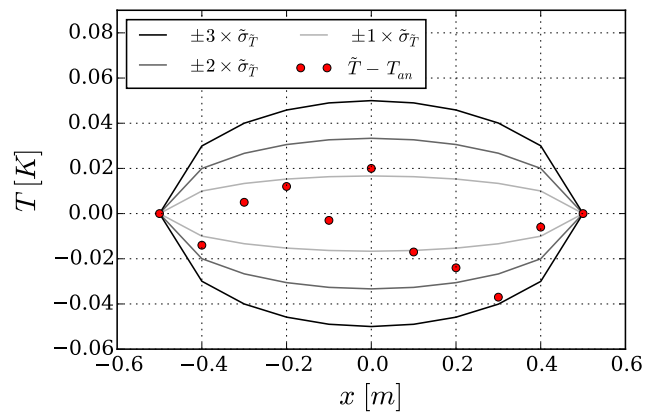
4.2.2.3 Référence analytique

Le champ de température, qui peut être déterminé analytiquement dans ces conditions, suit l'expression donnée dans l'équation 4.2, le long de l'axe *x*.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\Omega}) = T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{X+}}) + \left(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{X+}} - \mathbf{x}^{\in\Omega} \right) \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{X-}})}{\lambda_{\Omega}} \quad (4.2)$$

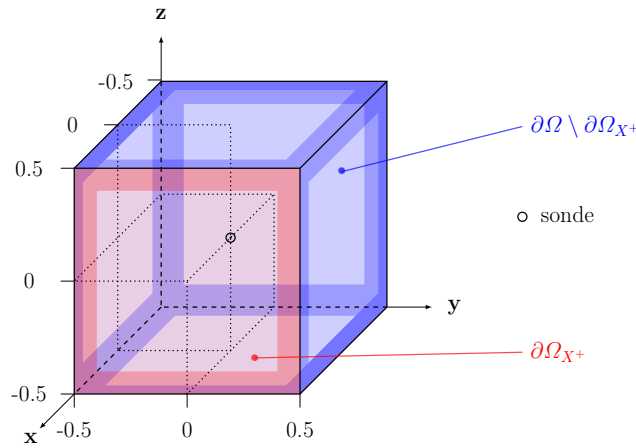


(A) Comparaison entre les températures estimées et analytiques.



(B) Différences entre les températures estimées et analytiques, comparées à l'erreur type de l'estimation.

FIGURE 4.4 – Graphiques présentant les résultats du cas de validation *Cd2*.

FIGURE 4.5 – Schéma du cas de validation *Cv1*.TABLE 4.4 – Conditions aux frontières du cas de validation *Cv1*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{X+}$	$\partial\Omega_{X+}$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	270	300
$h_{\partial\Omega}^{\Omega} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	1.00	5.00

4.2.2.4 Résultats

Les estimations des températures aux points-sondes présentent une adéquation quasi-parfaite avec le profil analytique attendu (Fig. 4.4a). En outre, 89% des différences apparues sont comprises dans l'intervalle de confiance de deux erreurs types (Fig. 4.4b). L'écart restant est quant à lui inférieur à trois de ces erreurs types. Ainsi cette distribution constitue un bon indicateur du comportement non-biaisé de l'estimateur réalisé.

4.3 Convection

4.3.1 *Cv1* : enceinte convective avec des températures imposées

4.3.1.1 Objectif

La validation de la contribution de convection qui compose le modèle de température dans les domaines fluides.

4.3.1.2 Cas de validation

Il est constitué d'un unique cube unité de fluide (Fig. 4.5). Une sonde a été positionnée au centre du domaine de fluide Ω pour y estimer la température. Les températures des frontières, ainsi que leurs coefficients de convection, sont fixés

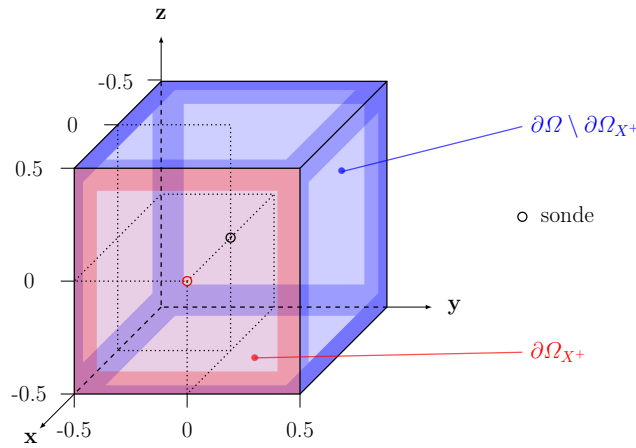


FIGURE 4.6 – Schéma du cas de validation *Cv2*.

à chacun des plans frontières (Tab. 4.4). Les propriétés physique de l'air ont été implémentées pour ce domaine fluide bien qu'elles n'aient aucune influence sur le champ de température dans ce cas précis.

4.3.1.3 Référence

Le recours à des conditions aux frontières uniformes permet d'établir aisément, par conservation de l'énergie, que la température du fluide est une moyenne pondérée de la température aux frontières (Eq. 4.3). Dans l'équation 4.3, $A_{\partial\Omega_{x+}}$ représente l'aire de la frontière $\partial\Omega_{x+}$.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\Omega}) = \frac{A_{\partial\Omega_{x+}} h_{\partial\Omega_{x+}}^{\Omega} T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x+}}) + A_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x+}} h_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x+}}^{\Omega} T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x+}})}{A_{\partial\Omega_{x+}} h_{\partial\Omega_{x+}}^{\Omega} + A_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x+}} h_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x+}}^{\Omega}} \quad (4.3)$$

4.3.1.4 Résultats

La température du fluide a été estimée par l'outil développé à 284.997 K — avec une erreur type de 0.0150 K —, alors que la référence analytique est de 285.000 K . Une telle concordance des données procure une validation de qualité de la contribution de convection du modèle de température dans les fluides.

4.3.2 *Cv2* : enceinte convective avec une densité de flux imposée

4.3.2.1 Objectif

Valider la contribution qui correspond à la convection avec un domaine fluide connexe, au sein du modèle de température à l'interface.

TABLE 4.5 – Conditions aux frontières du cas de validation *Cv2*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}$	$\partial\Omega_{x^+}$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	270	\sim
$\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [W.m^{-2}]$	0.00	100
$h_{\partial\Omega}^{\Omega} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	1.00	5.00

4.3.2.2 Cas de validation

Il se compose d'un cube unité de fluide — de l'air est pris en pratique — assemblé avec une interface $\partial\Omega_+$ (Fig. 4.6). Le champ de température a été fixé sur l'ensemble des frontières du domaine fluide, à l'exception du composant interface qui présente une condition de NEUMANN (Tab. 4.5). Le champ de température est estimé au sein de cette scène en deux positions distinctes. Pour cela, une sonde est placée à l'intérieur du fluide tandis qu'une seconde se trouve à l'interface $\partial\Omega_+$.

4.3.2.3 Référence

Pour chacune de ces sondes, il est possible d'obtenir une expression analytique du champ de température. L'équation 4.4 est obtenue à partir de la loi de conservation de l'énergie. Elle établit que le champ de température au sein du fluide est égal à la température fixée à sa frontière, complétée par le flux d'énergie thermique émanant de l'interface $\partial\Omega_+$ puis dissipé par convection du fluide avec les autres frontières du domaine.

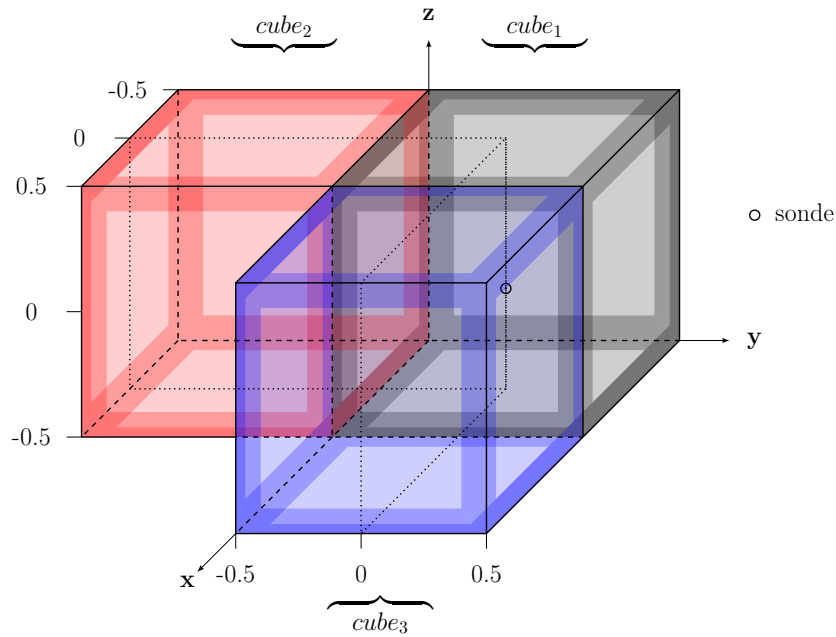
$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\Omega}) = T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}}) + \frac{A_{\partial\Omega_{x^+}} \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^+}})}{A_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}} h_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}}^{\Omega}} \quad (4.4)$$

De plus, l'insertion de cette équation 4.4 dans l'expression de la continuité du flux à l'interface $\partial\Omega_+$ permet d'y obtenir l'équation analytique 4.5 du champ de température.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\partial\Omega_{x^+}}) = T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}}) + \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_{x^+}}) \frac{A_{\partial\Omega_{x^+}} h_{\partial\Omega_{x^+}}^{\Omega} + A_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}} h_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}}^{\Omega}}{A_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}} h_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{x^+}}^{\Omega} h_{\partial\Omega_{x^+}}^{\Omega}} \quad (4.5)$$

4.3.2.4 Résultats

La température du fluide a été estimée à 289.982 K — avec une erreur type de 0.0283 K —. Une valeur de 290.000 K est attendue d'après son expression analytique. C'est par conséquent une estimation de très bonne qualité qui a été obtenue, avec un écart constaté qui est inférieur à une seule erreur type. De plus, l'estimation de la température à l'interface est de 310.028 K soit exactement à une erreur type du résultat analytique espéré. En effet, ce dernier est de 310.000 K , alors que l'erreur type acquise vaut également 0.0283 K . La concordance de ces résultats avec leur référence analytique permet de conclure à la validité de la contribution étudiée.

FIGURE 4.7 – Schéma du cas de validation *Tp1*.TABLE 4.6 – Conditions aux frontières du cas de validation *Tp1*.

Ω	$cube_1$	$cube_2$	$cube_3$
$T(\mathbf{y}^{\in\Omega}) [K]$	\sim	300	270
$\dot{m}_{cube_1-}(\Omega) [kg.s^{-1}]$	—	0.0100	0.0100
$\dot{m}_{\Omega+} [kg.s^{-1}]$	0.0200	0.0100	0.0100

4.4 Transport de chaleur

4.4.1 *Tp1* : ventilation mécanique contrôlée

4.4.1.1 Objectif

Valider les contributions correspondant à la prise en compte des transports de chaleur au sein du modèle de température dans les fluides.

4.4.1.2 Cas de validation

Il se compose de trois domaines fluides cubiques, nommés $cube_1$, $cube_2$ et $cube_3$, qui sont tous constitués du même fluide (Fig. 4.7). Ce dernier présente des propriétés physiques identiques — notamment sa capacité thermique massique — dans l'ensemble des domaines. Bien que la nature du fluide n'influence pas le résultat, de l'air a été considéré dans le cas présent. Dans cette scène, deux flux internes de matière — de 0.0100 kg.s^{-1} chacun — prennent place depuis le $cube_2$ et le $cube_3$ vers le $cube_1$ dans lequel ils se mélangent. Une sonde est placée dans ce dernier pour permettre

TABLE 4.7 – Conditions aux frontières du cas de validation *R1*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	$\partial\Omega_2$	$\partial\Omega_3$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	300	270	\sim
$\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [W.m^{-2}]$	0.00	0.00	100
$\epsilon_{\partial\Omega}^{\Omega}$	1.00	1.00	0.700
$\rho_{\partial\Omega}^{\Omega}$	0.00	0.00	0.300

à notre outil d'estimer la température du mélange tandis que les températures des deux domaines d'origine sont fixées pour fermer le problème (Tab. 4.6).

4.4.1.3 Référence

La conservation de l'énergie permet de prévoir analytiquement que la température du *cube*₁ s'exprime sous la forme d'une moyenne, pondérée par les débits massiques incidents, des températures des volumes de provenance (Eq. 4.6).

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\text{cube}_1}) = \frac{\dot{m}_{\text{cube}_1-(\text{cube}_2)} \times T(\mathbf{y}^{\in\text{cube}_2}) + \dot{m}_{\text{cube}_1-(\text{cube}_3)} \times T(\mathbf{y}^{\in\text{cube}_3})}{\dot{m}_{\text{cube}_1+}} \quad (4.6)$$

4.4.1.4 Résultats

La température au sein du *cube*₁ a été estimée à 284.989 *K*, avec une erreur type de 0.0150 *K*. Une température de 285.000 *K* était attendue d'après l'application numérique de son expression analytique. Il y a donc un écart inférieur à une erreur type avec cette référence, ce qui constitue une estimation de bonne qualité.

4.5 Rayonnement

4.5.1 *R1* : cavité rayonnante avec une densité de flux imposée

4.5.1.1 Objectif

Vérifier la contribution d'absorption du rayonnement — au sein du modèle de température — ainsi que celle d'émission de la luminance totale directionnelle quittant l'interface. De plus, le modèle de luminance incidente, avec son unique contribution, est aussi mis en œuvre dans ce test.

4.5.1.2 Cas de validation

La scène est composée de six interfaces planes identiques, de forme carrée et d'un mètre de côté. Elles sont assemblées pour former un cube au sein duquel elles échangent de l'énergie par rayonnement (Fig. 4.8). La face inférieure de ce cube rassemble neuf sondes — auxquelles le champ de température est estimé — qui sont réparties le long de la diagonale d'équation $x = y$. Cette paroi est partiellement

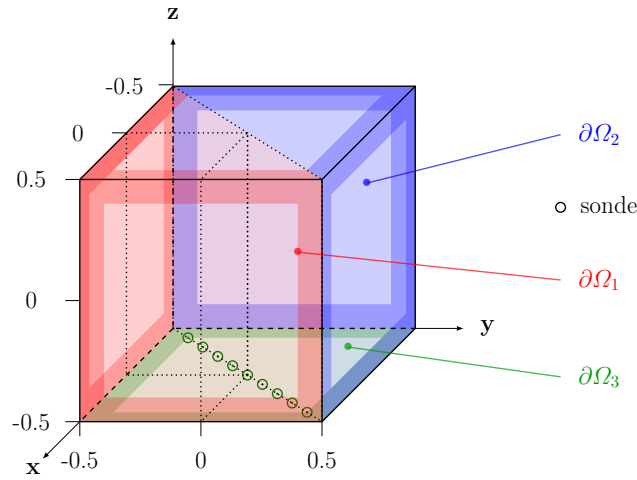


FIGURE 4.8 – Schéma du cas de validation *R1*.

réfléchissante, avec une réflectivité de 0.300, tandis que les autres interfaces sont noires. La surface qui présente les sondes possède une densité de flux entrante de 100 W.m^{-2} en tant que condition à la frontière (Tab. 4.7). D'autre part, deux conditions de température explicite sont fixées aux autres interfaces. Elles sont réparties de sorte à séparer les hémisphères des directions incidentes à chaque sonde, en deux zones uniformes, symétriques et de même taille. Enfin, une température de référence pour l'étape de linéarisation a été fixée à 290 K .

4.5.1.3 Référence

La configuration symétrique de cette scène permet d'obtenir une équation analytique de la température qui est identique pour tous les points de la diagonale sondée (Eq. 4.7). Cette équation est valable uniquement dans le cas d'une expression linéarisée de l'émittance.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in \partial\Omega_3}) = \frac{T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{2} + \frac{T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2})}{2} + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}^{\in \partial\Omega_3})}{4 \sigma \epsilon_{\partial\Omega_3}^{\Omega} T_{ref}^3} \quad (4.7)$$

En l'absence de cette hypothèse de linéarisation, la référence serait l'expression non-linéaire 4.8.

$$T_{an,NL}(\mathbf{x}^{\in \partial\Omega_3}) = \left(\frac{T^4(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{2} + \frac{T^4(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2})}{2} + \frac{\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x}^{\in \partial\Omega_3})}{\sigma \epsilon_{\partial\Omega_3}^{\Omega}} \right)^{1/4} \quad (4.8)$$

4.5.1.4 Résultats

Les estimations de température présentent une bonne concordance avec la référence analytique de valeur 310.826 K (Fig. 4.8). De plus, tous les écarts présents sont compris dans un intervalle de confiance de deux erreurs types de large. Ceci permet de conclure que l'estimateur construit pour les échanges par transferts radiatif

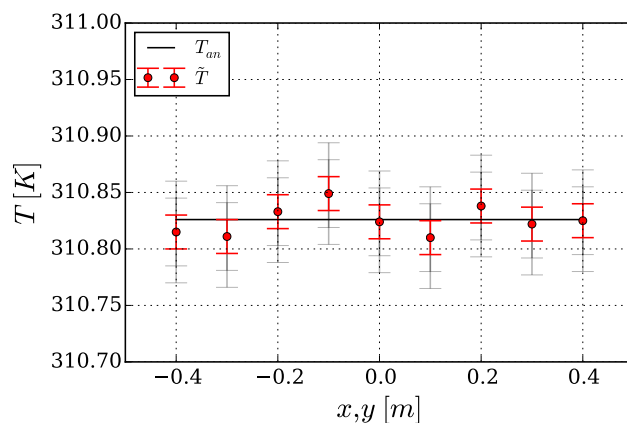


FIGURE 4.9 – Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation *R1*.

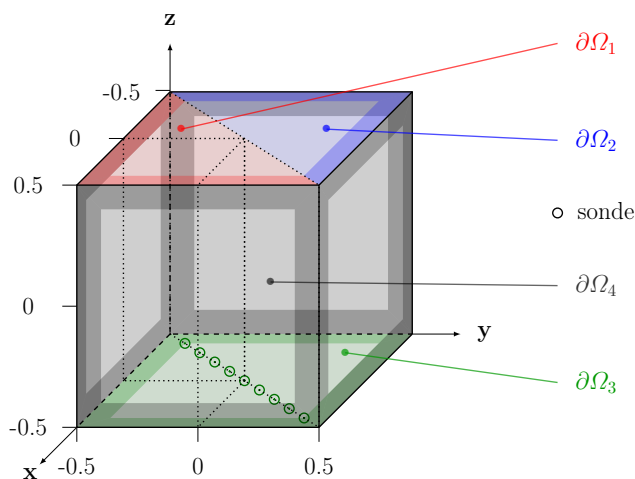


FIGURE 4.10 – Schéma du cas de validation *R2*.

ne présente aucun biais. Enfin, sans linéarisation de l'émittance, les températures auraient du valoir 309.929 K , soit une différence de seulement 0.3% . Ainsi, cette linéarisation engendre un écart qui reste maîtrisé.

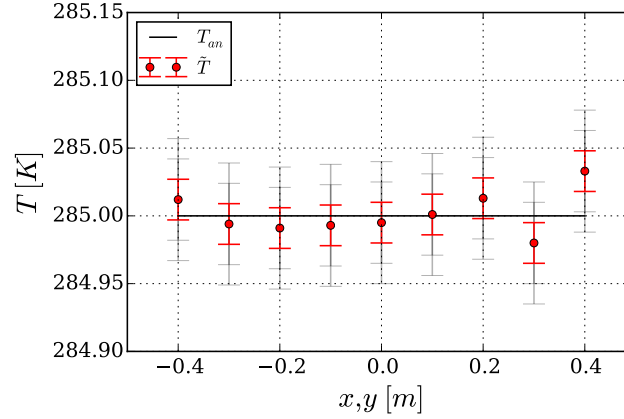
4.5.2 *R2* : cavité rayonnante avec des parois réfléchissantes

4.5.2.1 Objectif

La validation des contributions liées à la réflexion de la luminance incidente, aussi bien de manière spéculaire que Lambertienne, dans le modèle de luminance quittant une interface.

TABLE 4.8 – Conditions aux frontières du cas de validation *R2*.

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	$\partial\Omega_2$	$\partial\Omega_3$	$\partial\Omega_4$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	300	270	\sim	\sim
$\epsilon_{\partial\Omega}^{\Omega}$	1.00	1.00	1.00	0.00
$\rho_{\partial\Omega}^{\Omega}$	0.00	0.00	0.00	1.00
$s_{\partial\Omega}^{\Omega}$	0.00	0.00	0.00	0.700

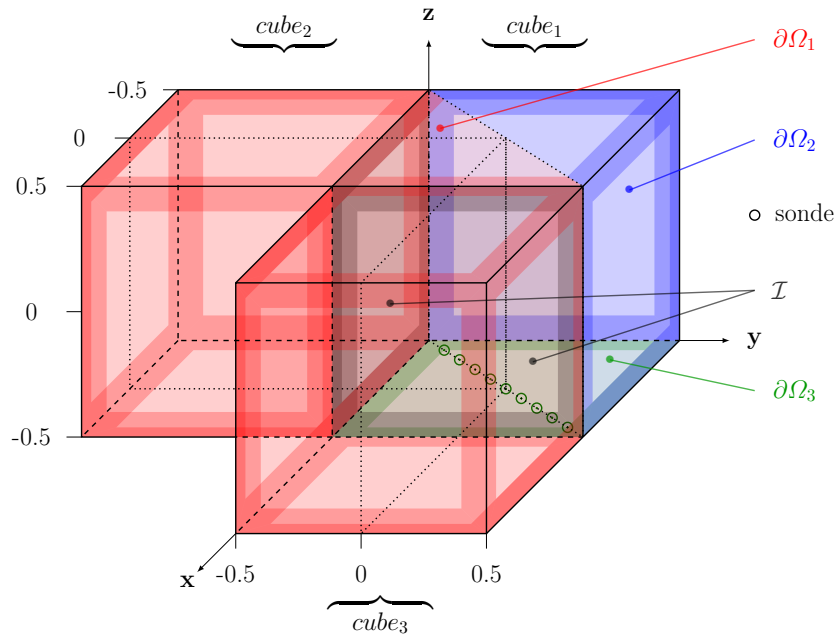
FIGURE 4.11 – Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation *R2*.

4.5.2.2 Cas de validation

Il est constitué d'un assemblage de six interfaces planes et carrées d'un mètre de côté pour former une cavité cubique (Fig. 4.10). Les parois latérales du cube sont parfaitement réfléchissantes, à 70% de façon spéculaire et 30% de manière diffuse (Tab. 4.8). De plus, comme ces parois n'échangent aucune énergie avec la cavité — puisqu'elles n'émettent, ni absorbent, aucun rayonnement —, aucune condition sur leur température ou leur densité de flux n'est nécessaire pour fermer ce problème. D'autre part, les deux faces restantes, orthogonales à l'axe z , sont noires. La face supérieure est découpée en deux triangles dont la température est imposée à 270 K et 300 K . Quant à la face inférieure en regard, il s'agit d'une paroi adiabatique sur laquelle neuf sondes sont réparties. Ces dernières le sont le long de la diagonale issue de l'intersection du plan orthogonal de séparation des conditions à la frontière du plan supérieur, avec la face inférieure.

4.5.2.3 Référence

La condition de symétrie des directions incidentes au niveau des sondes est maintenue. De cette manière, l'utilisation de parois réfléchissantes ne change pas l'équilibre entre les deux conditions de DIRICHLET sur la température. Par conséquent, les équations analytiques 4.7 et 4.8 du cas *R1* restent tout à fait pertinentes pour cette configuration.

FIGURE 4.12 – Schéma du cas de validation $R3$.TABLE 4.9 – Conditions aux frontières, et propriétés des interfaces internes, du cas de validation $R3$.

	$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	$\partial\Omega_2$	$\partial\Omega_3$	\mathcal{I}
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$		300	270	\sim	\sim
$\epsilon_{\partial\Omega}^{\Omega}$	$\Omega = \text{cube}_1$	1.00	1.00	1.00	0.00
	$\Omega = \text{cube}_2$	1.00	—	—	0.00
	$\Omega = \text{cube}_3$	1.00	—	—	0.00
$\tau_{\partial\Omega}$		0.00	0.00	0.00	1.00

4.5.2.4 Résultats

Les températures estimées apparaissent en bonne adéquation avec la référence analytique attendue (Fig. 4.10). De plus, à l'exception de la dernière estimation qui en sort très légèrement, elles sont toutes distantes de moins de deux erreurs types de la valeur de référence. Ainsi près de 89% des estimations sont présentes à l'intérieur d'un intervalle qui doit statistiquement en contenir 95%. Avec une granularité d'un neuvième — soit 11% —, ce résultat est très satisfaisant et est révélateur du caractère non-biaisé de l'estimateur obtenu.

4.5.3 $R3$: cavité rayonnante avec des parois transparentes

4.5.3.1 Objectif

Valider, dans le modèle de la luminance totale directionnelle quittant l'interface, la contribution de la luminance ayant été transmise à travers la paroi.

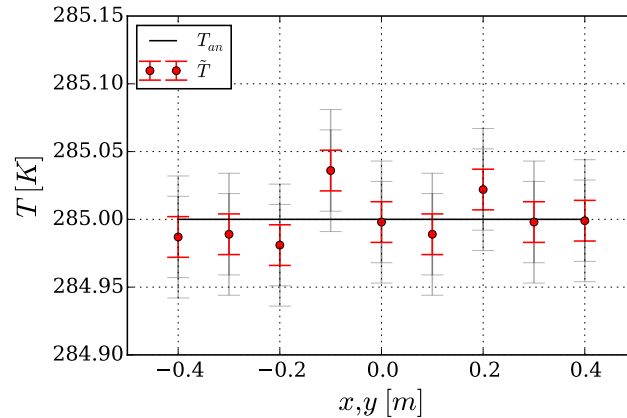


FIGURE 4.13 – Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation $R3$.

4.5.3.2 Cas de validation

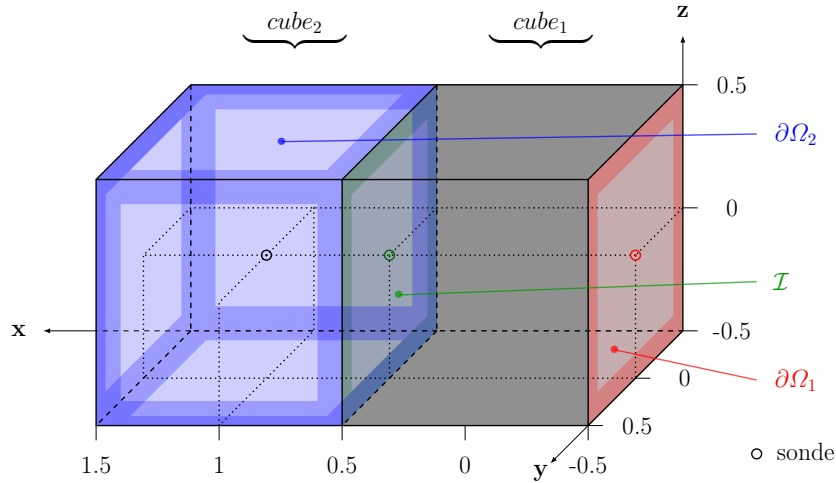
Il s'agit de ce qu'il est souvent appelé un *tri-cube* (Fig. 4.12). Pour commencer, six interfaces carrées sont assemblées pour former le cube principal ($cube_1$). C'est-à-dire celui dans lequel les neuf sondes sont placées sur la diagonale de la face inférieure. Cette dernière, noire et adiabatique, échange par transfert radiatif avec les autres interfaces composant la cavité. A la différence du cas $R1$, où la température de ces dernières était fixée par condition à la frontière, ici deux de ces faces latérales, \mathcal{I} , sont parfaitement transparentes — $\tau_{\mathcal{I}} = 1.00$ —. Elles donnent chacune sur une cavité connexe noire qui est isotherme. Les conditions à la frontière fixant la température, auparavant au niveau de ces deux vitres, sont alors repoussées aux faces de ces cavités connexes (Tab. 4.9).

4.5.3.3 Référence

Par rapport au cas $R1$, deux des parois latérales sont devenues transparentes et deux cavités noires connexes ont été ajoutées derrière. Ainsi, ces changements induisent que chacune des sondes échange dorénavant, au travers des parois transparentes, avec les cavités noires. Néanmoins, comme ces parois n'ont aucune interaction sur le rayonnement qui les traverse et que les cavités sont à la même température que les parois du cas $R1$, les sondes perçoivent une distribution de la luminance incidente qui est identique aux cas $R1$ et $R2$. Par conséquent, les deux expressions analytiques énoncées précédemment (Eq. 4.7 et 4.8) sont aussi valables dans le cas présent.

4.5.3.4 Résultats

Les estimations des températures aux neuf points-sondes présentent un bon accord avec la référence analytique de valeur 285.000 K (Fig. 4.13). De plus, sur les neuf estimations, six — soit 67% — se trouvent à moins d'une erreur type de la température analytique attendue. Ceci montre une bonne adéquation puisque un intervalle de confiance d'une erreur type de large est censé couvrir statistiquement

FIGURE 4.14 – Schéma du cas de validation *Cpl1*.TABLE 4.10 – Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation *Cpl1*

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	\mathcal{I}	$\partial\Omega_2$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	300	\sim	270
$h_{\partial\Omega}^{cube_2} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	—	5.00	1.00

68% de la population des estimations. En outre les trois autres températures estimées sont comprises dans l'intervalle de confiance à trois erreurs types. Cette distribution constitue ainsi un bon témoignage de l'absence de biais au sein de l'estimateur.

4.6 Transferts thermiques couplés

4.6.1 *Cpl1* : conduction et convection couplées

4.6.1.1 Objectif

Vérifier la simulation du couplage des transferts conductif et convectif par la procédure d'évaluation par exploration stochastique.

4.6.1.2 Cas de validation

La scène est composée de deux domaines cubiques qui sont séparés par une interface (Fig. 4.14). Le premier d'entre eux — *cube₁* — est un cube de solide qui présente une conductivité thermique $\lambda_{cube_1} = 10.0 W.m^{-1}.K^{-1}$. Au sein de celui-ci, des échanges par conduction ont lieu le long de l'axe *x*, entre l'interface \mathcal{I} et la frontière $\partial\Omega_1$, dont la température est fixée (Tab. 4.10). De son côté, le *cube₂* est un volume d'air en convection avec sa frontière $\partial\Omega_2$ — dont la température est connue — et avec l'interface \mathcal{I} qui le sépare du domaine solide. Trois sondes ont été disposées

TABLE 4.11 – Comparaison des températures estimées avec leur référence analytique, dans le cas de validation *Cpl1*

<i>Composant</i>	\mathcal{I}	<i>cube₂</i>
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$ [K]	293.988	281.976
$T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$ [K]	294.000	282.000
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}$ [K]	0.0120	0.0147
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}}) - T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$	-1.00	-1.63
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}$		

au sein de cette scène dans le but de calculer, à partir des températures qui y sont estimées, les densités de flux total sortant de chacun des cubes au niveau du centre de l'interface \mathcal{I} .

4.6.1.3 Référence

L'application de la conservation de l'énergie au sein du domaine fluide *cube₂* et de la continuité des densités de flux à l'interface \mathcal{I} permet d'établir un système de deux équations à deux inconnues qui a été résolu de façon analytique. Ceci permet de construire une expression de référence pour la température à l'interface (Eq. 4.9).

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}}) = \frac{A_{\partial\Omega_2} h_{\partial\Omega_2}^{cube_2} Bi \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2}) + (A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_2} + A_{\partial\Omega_2} h_{\partial\Omega_2}^{cube_2}) \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{A_{\partial\Omega_2} h_{\partial\Omega_2}^{cube_2} (Bi + 1) + A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_2}} \quad (4.9a)$$

Où

$$Bi = \frac{\|\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}\| h_{\mathcal{I}}^{cube_2}}{\lambda_{cube_1}} \quad (4.9b)$$

Par conséquent, une expression analytique de la valeur absolue des densités de flux au niveau de l'interface \mathcal{I} a pu être obtenue à partir de cette dernière (Eq. 4.10).

$$|\dot{q}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}})|_{an} = \left| -\lambda_{cube_1} \frac{T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}}) - T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{\|\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}\|} \right| \quad (4.10)$$

De plus, il apparaît que la température au sein du fluide suit l'expression analytique 4.11.

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in cube_2}) = \frac{A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_2} \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}) + A_{\partial\Omega_2} h_{\partial\Omega_2}^{cube_2} (Bi + 1) \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2})}{A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_2} + A_{\partial\Omega_2} h_{\partial\Omega_2}^{cube_2} (Bi + 1)} \quad (4.11)$$

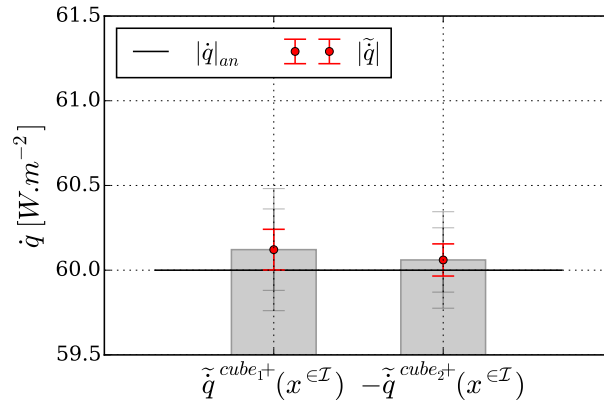


FIGURE 4.15 – Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l’interface du cas de validation *Cpl1*.

4.6.1.4 Résultats

Au centre de l’interface, les densités de flux sortant, respectivement, du *cube₁* et du *cube₂*, ont été estimées à $60.121 W.m^{-2}$ et $-60.060 W.m^{-2}$ (Fig. 4.15). Tout d’abord, on remarque que le flux d’énergie estimé est orienté du *cube₁* vers le *cube₂*. Ceci est totalement cohérent avec ce qui pouvait être attendu des conditions aux frontières qui présentent un gradient de température opposé au sein du problème. Ainsi, le deuxième principe de la thermodynamique est respecté par notre évaluation par exploration stochastique puisque l’énergie est bien transférée des zones "chaudes" du problème vers ses zones "froides". De plus, la valeur absolue de référence attendue est de $60.000 W.m^{-2}$. Ainsi, les estimations n’en sont distantes que de, respectivement, 1.01 et 0.635 erreurs types — avec des erreurs types de $0.120 W.m^{-2}$ et $0.0949 W.m^{-2}$ —, ce qui est une bonne performance.

D’autre part, les températures au niveau des sondes ont elles aussi été estimées de manière efficace (Tab. 4.11). En effet, les écarts constatés ne sont que 1.00 et 1.63 erreurs types en valeur absolue.

Il est donc possible d’en conclure que le couplage de la conduction et de la convection est pris en compte de manière satisfaisante par l’exploration stochastique proposée.

4.6.2 *Cpl2* : conduction et rayonnement couplés

4.6.2.1 Objectif

La validation de l’utilisation de l’exploration stochastique pour coupler la conduction et le transfert radiatif.

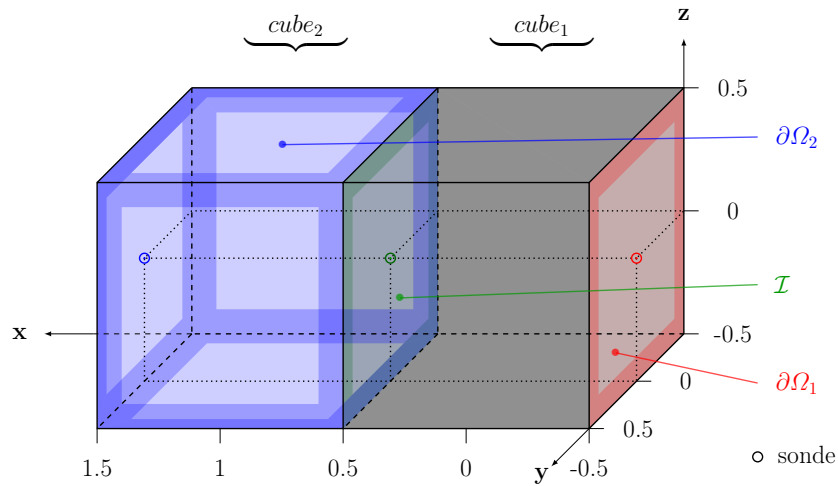


FIGURE 4.16 – Schéma du cas de validation *Cpl2*.

TABLE 4.12 – Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation *Cpl2*

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	\mathcal{I}	$\partial\Omega_2$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	300	\sim	270
$\epsilon_{\partial\Omega}^{cube_2}$	—	1.00	1.00

4.6.2.2 Cas de validation

Il se compose d'un domaine solide, $cube_1$, ainsi que de six interfaces qui forment une cavité noire, $cube_2$ (Fig. 4.16). Au sein de celle-ci, les transferts d'énergie ont lieu sous la forme de rayonnement. L'une de ses interfaces permet de raccorder cette cavité avec le domaine solide contigu. Ce dernier, dont la température est gouvernée par la conduction, présente une conductivité thermique de $10.0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Le problème est enfin fermé par des conditions aux frontières de DIRICHLET (Tab. 4.12). Cette scène dispose de trois sondes pour pouvoir calculer les densités de flux recherchées, ainsi que leur somme, à partir d'information sur le champ de température modélisé.

4.6.2.3 Référence

L'équation de la continuité des flux à la l'interface \mathcal{I} permet d'obtenir directement l'expression analytique de sa température (Eq. 4.12).

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\mathcal{I}}) = \frac{T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_1}) + Bi \times T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega_2})}{1 + Bi} \quad (4.12a)$$

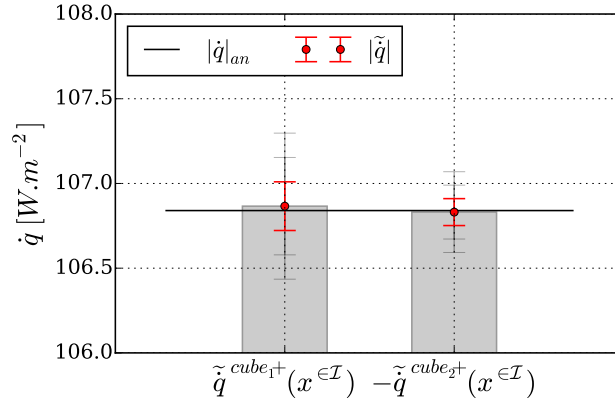


FIGURE 4.17 – Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l'interface du cas de validation *Cpl2*.

Où

$$Bi = \frac{\|\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}\| \times 4\sigma T_{ref}^3}{\lambda_{cube_1}} \quad (4.12b)$$

La valeur absolue des densités de flux qui traversent cette interface \mathcal{I} s'exprime alors analytiquement par l'équation 4.13.

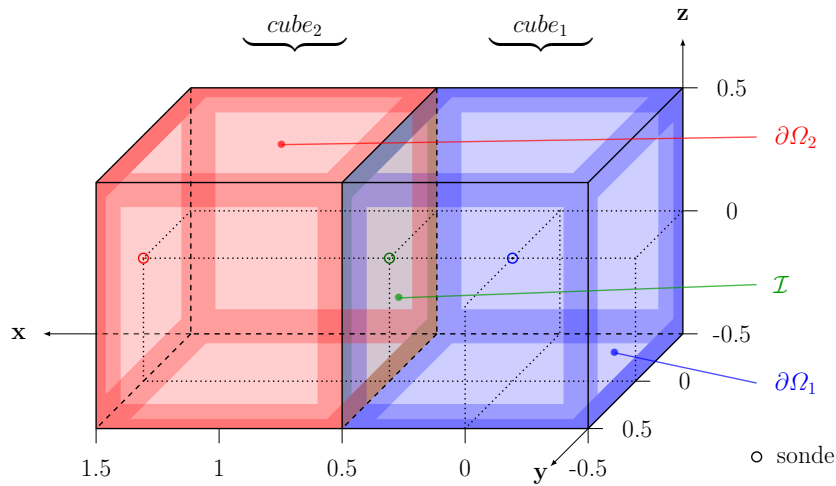
$$|\dot{q}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}})|_{an} = \left| -\lambda_{cube_1} \frac{T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}}) - T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{\|\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}} - \mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}\|} \right| \quad (4.13)$$

4.6.2.4 Résultats

La densité de flux sortant du domaine solide, à l'interface, est estimée à 106.866 W.m^{-2} tandis que l'estimation de celle quittant la cavité radiative est de $-106.831 \text{ W.m}^{-2}$ (Fig. 4.17). Tout d'abord, ces valeurs sont bien cohérente avec la physique puisque le transfert est bien estimé de la frontière "chaude" $\partial\Omega_1$ vers la frontière "froide" $\partial\Omega_2$. Ensuite, l'outil a fournit une estimation de la quantité d'énergie échangée, par unité de surface, de grande qualité puisque sa valeur analytique est de 106.840 W.m^{-2} . En effet, les estimations ressortent distantes, respectivement, de 0.181 ($\tilde{\sigma}_{\tilde{q}^{cube_1+}} = 0.144 \text{ W.m}^{-2}$) et de 0.113 erreur type ($\tilde{\sigma}_{\tilde{q}^{cube_2+}} = 0.0795 \text{ W.m}^{-2}$).

En outre, la température à l'interface \mathcal{I} a aussi été calculée. Une estimation de 289.313 K , avec une erreur type de 0.0144 K , a été obtenue tandis que sa valeur attendue analytiquement était de 289.316 K . On observe donc un écart de seulement 0.208 erreur type.

Ceci permet de pouvoir avoir confiance en la capacité de cette procédure à simuler un tel couplage avec précision.

FIGURE 4.18 – Schéma du cas de validation *Cpl3*.TABLE 4.13 – Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation *Cpl3*

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	\mathcal{I}	$\partial\Omega_2$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	270	\sim	300
$h_{\partial\Omega}^{cube_1} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	1.00	5.00	—
$\epsilon_{\partial\Omega}^{cube_2}$	—	1.00	1.00

4.6.3 *Cpl3* : convection et rayonnement couplés

4.6.3.1 Objectif

Valider les capacités de l'exploration stochastique pour traiter des cas qui mettent en jeu des phénomènes convectifs et radiatifs.

4.6.3.2 Cas de validation

Ce test se compose du raccordement d'un domaine fluide ($cube_1$) avec une cavité rayonnante cubique ($cube_2$), réalisée à l'aide de six interfaces (Fig. 4.18). Trois points-sondes ont été placés dans la scène : une à l'intérieur du fluide, une à l'interface et enfin la dernière sur la frontière de la cavité radiative. Il s'agit ici d'un problème avec des conditions aux frontières de premier type. En effet, les frontières de $cube_2$ ont une température fixée à 300 K alors que celles qui circonscrivent le domaine fluide sont à 270 K (Tab. 4.13).

4.6.3.3 Référence

Un système à deux équations et deux inconnues peut être construit en exprimant la continuité des flux à l'interface \mathcal{I} , complétée par la conservation de l'énergie au sein du fluide $cube_1$. Sa résolution analytique permet alors d'obtenir des références

TABLE 4.14 – Comparaison des températures estimées avec leur référence analytique, dans le cas de validation *Cpl3*

Composant	$cube_1$	\mathcal{I}
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$ [K]	280.314	290.664
$T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$ [K]	280.331	290.662
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}$ [K]	0.0142	0.0139
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}}) - T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{C}})$	-1.20	0.144
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}$		

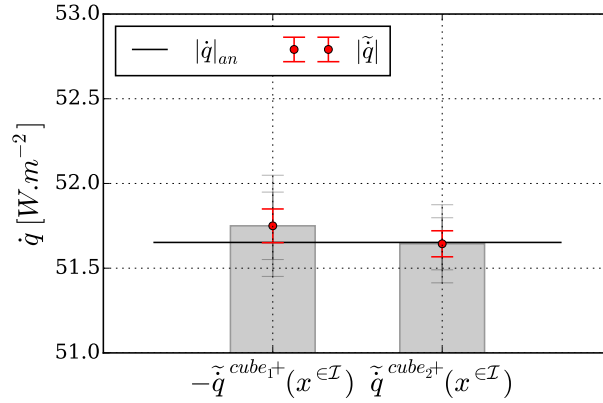


FIGURE 4.19 – Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l'interface du cas de validation *Cpl3*.

analytiques pour la température à l'interface \mathcal{I} (Eq. 4.14) puis pour la valeur quantitative des densités de flux qui la franchissent (Eq. 4.15).

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}}) = \frac{A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1}) + 4\sigma T_{ref}^3 (A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1}) \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2})}{A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + 4\sigma T_{ref}^3 (A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1})} \quad (4.14)$$

$$|\dot{q}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}})|_{an} = \left| 4\sigma T_{ref}^3 (T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2}) - T_{an}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}})) \right| \quad (4.15)$$

De plus, le même processus permet aussi d'élaborer l'expression analytique correspondant à la température du fluide (Eq. 4.16).

$$T_{an}(\mathbf{x}^{\in cube_1}) = \frac{4\sigma T_{ref}^3 A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_2}) + A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1} (h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + 4\sigma T_{ref}^3) \times T(\mathbf{y}^{\in \partial\Omega_1})}{4\sigma T_{ref}^3 A_{\mathcal{I}} h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + A_{\partial\Omega_1} h_{\partial\Omega_1}^{cube_1} (h_{\mathcal{I}}^{cube_1} + 4\sigma T_{ref}^3)} \quad (4.16)$$

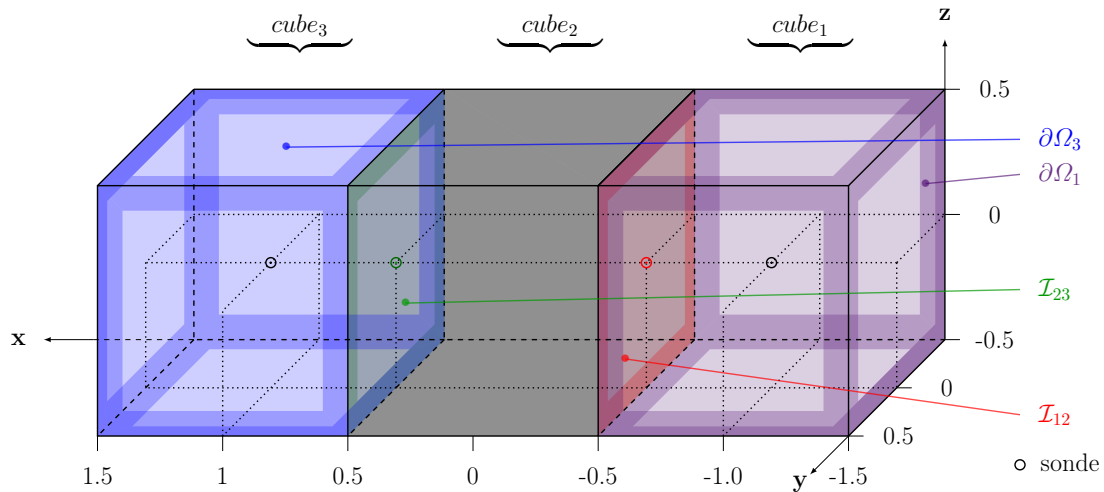


FIGURE 4.20 – Schéma du cas de validation *Cpl4*.

4.6.3.4 Résultats

Les densités de flux total sortant de chacun des cubes ont été estimées ainsi que les températures aux points-sondes. Les premières sont ressorties à -51.750 W.m^{-2} pour celle sortant du domaine fluide et respectivement à 51.644 W.m^{-2} pour la cavité radiative (Fig. 4.19). Le signe de ces résultats est cohérent avec le deuxième principe de la thermodynamique. Quant à leurs valeurs absolues, elles sont en accord avec la référence attendue (51.652 W.m^{-2}). En effet, ces estimations ne sont distantes que de 1.01 ($\tilde{\sigma}_{\dot{q}^{cube_1+}} = 0.0995 \text{ W.m}^{-2}$) et de 0.104 erreurs types ($\tilde{\sigma}_{\dot{q}^{cube_2+}} = 0.0768 \text{ W.m}^{-2}$).

D'autre part, les estimations sont aussi de bonne qualité pour les températures, que ce soit à l'interface \mathcal{I} ou au sein du fluide du *cube1* (Tab. 4.14). Ainsi, l'exploration stochastique est tout à fait capable de traiter le couplage de transferts convectif et radiatif.

4.6.4 *Cpl4* : conduction, convection, transport de chaleur et rayonnement couplés

4.6.4.1 Objectif

Vérifier la validité de la procédure d'exploration stochastique dans une scène présentant l'interaction de l'ensemble des modes de transfert thermique.

4.6.4.2 Cas de validation

Un ensemble de trois cubes unités compose cette scène (Fig. 4.20). Le premier est un domaine fluide — de l'air, avec une capacité thermique massique de $1.01 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ —, en convection avec ses frontières $\partial\Omega_1$ et \mathcal{I}_{12} . Le deuxième est un domaine solide, de conductivité thermique $\lambda_{cube_2} = 10.0 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, qui relie le premier avec le troisième cube. Son champ de température est gouverné par

TABLE 4.15 – Conditions aux frontières, et propriétés des interfaces internes, du cas de validation *Cpl4*

$\partial\Omega$	$\partial\Omega_1$	\mathcal{I}_{12}	\mathcal{I}_{23}	$\partial\Omega_3$
$T(\mathbf{y}^{\in\partial\Omega}) [K]$	300	\sim	\sim	270
$\epsilon_{\partial\Omega}^{cube_3}$	—	—	1.00	1.00
$h_{\partial\Omega}^{cube_3} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	—	—	5.00	1.00
$h_{\partial\Omega}^{cube_1} [W.m^{-2}.K^{-1}]$	2.00	5.00	—	—

TABLE 4.16 – Comparaison des températures estimées avec celles de référence obtenues par calcul symbolique, dans le cas de validation *Cpl4*

<i>Composant</i>	<i>cube₁</i>	\mathcal{I}_{12}	\mathcal{I}_{23}	<i>cube₃</i>
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in\mathcal{C}}) [K]$	289.164	282.303	278.868	281.825
$T_{an}(\mathbf{x}^{\in\mathcal{C}}) [K]$	289.176	282.309	278.876	281.829
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	0.0144	0.0148	0.0137	0.0147
$\frac{\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in\mathcal{C}}) - T_{an}(\mathbf{x}^{\in\mathcal{C}})}{\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}}$	-0.833	-0.405	-0.584	-0.272

un transfert conductif le long de l'axe x . Enfin, le dernier cube est composé d'un domaine fluide transparent — de propriétés identiques au premier — circonscrit par des interfaces. Ces dernières sont noires et échangent entre elles par l'intermédiaire d'un transfert radiatif. De plus, un phénomène de convection est aussi présent entre le fluide et ses interfaces frontières. En outre, une boucle de flux de matière est présente entre les deux domaines fluides, avec un débit massique de 0.0100 kg.s^{-1} . Ces mouvements de matière induisent deux flux de chaleur entre le *cube₁* et le *cube₃*. Pour fermer ce problème, des conditions de connaissance explicite du champ de température aux frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_3$ ont été introduites (Tab. 4.15). Enfin, cinq sondes ont été disséminées au sein des composants de cette scène.

4.6.4.3 Référence

En posant la continuité des flux au niveau des deux interfaces (\mathcal{I}_{12} et \mathcal{I}_{23}) accompagnée par la conservation de l'énergie et de la masse dans les deux volumes fluides (*cube₁* et *cube₃*), un système de quatre équations à quatre inconnues est obtenu. Au vu de nombre des éléments composants ce système, sa résolution a été confiée à un logiciel de calcul formel — la bibliothèque SymPy en langage Python a été utilisée — pour garantir la meilleure fiabilité de résolution.

4.6.4.4 Résultats

A partir de ces sondes, il a ainsi été possible d'estimer les densités de flux quittant les *cube₂* et *cube₃*, à l'interface \mathcal{I}_{23} (Fig. 4.21). Celle sortant du domaine solide est ressortie à 34.353 W.m^{-2} — avec une erreur type de 0.201 W.m^{-2} —, tandis que celle quittant le fluide a été établie à -34.268 W.m^{-2} — avec une erreur type de 0.162 W.m^{-2} —. Les signes de ces densités de flux sont alors parfaitement cohérent avec le direction "naturelle" du transfert d'énergie depuis les frontières "chaudes"

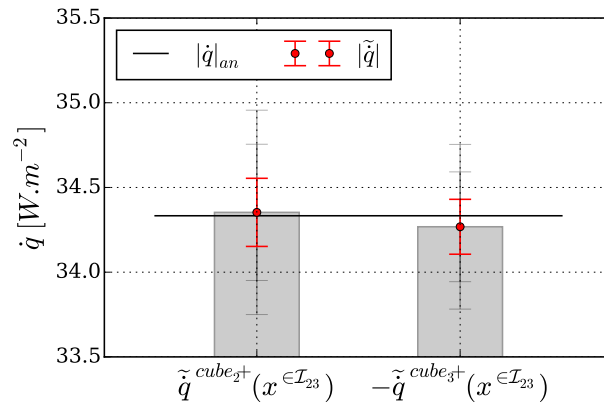


FIGURE 4.21 – Comparaison des estimations des densités de flux total quittant les domaines $cube_2$ et $cube_3$, au même point de l'interface \mathcal{I}_{23} du cas de validation $Cpl4$.

($\partial\Omega_1$) vers les "froides" ($\partial\Omega_3$). Quant à leur valeur absolue, elle était attendue à $34.333 W.m^{-2}$ par la résolution formelle. Ainsi, les estimations n'en sont éloignées que de 0.100 pour la première et de 0.408 erreur type pour la seconde.

De plus, l'outil a aussi réussi à estimer les températures au niveau des sondes positionnées dans la scène avec précision, puisqu'elles présentent toutes un écart par rapport à leur référence qui est inférieur à une erreur type d'estimation (Tab. 4.16).

Ainsi, le processus d'exploration stochastique proposé a réalisé des estimations de qualité, même en présence de l'ensemble des modes de transfert d'énergie au sein de cette scène.

Conclusion

Ce chapitre a présenté la campagne de test qui a été menée pour valider l'environnement de modélisation et de simulation proposé. Deux catégories de test ont été mises en œuvre dans cette objectif.

La première regroupe des tests visant à valider l'implémentation de chaque contribution, de manière isolée autant que possible, au sein des modèles prédictifs de température et de luminance qui ont été construits. Pour cela, l'outil a été appliqué sur huit cas académiques dont le champ de température n'était gouverné que par un seul mode d'échange thermique parmi la conduction, la convection, le transfert radiatif ou le transport de chaleur. Les estimations obtenues ont alors pu être confrontées aux résultats analytiques attendus pour réaliser une validation exigeante. L'obtention de ces derniers est facilité par le caractère académique des problèmes. L'ensemble de ces tests a été couronné de succès. En complément, l'étude de la distribution des écarts entre les estimations et leur référence analytique a permis de

faire apparaître le caractère non-biaisé des estimateurs construits par notre outil.

Le second groupe a rassemblé quatre tests mettant en œuvre un couplage progressif de plusieurs modes d'échange thermique. Ils ont été réalisés dans le but de valider le recours à l'exploration récursive pour traiter, de manière stochastique, ce phénomène de couplage. Au sein de ces problèmes, la vérification de la continuité des flux, au niveau d'une interface soumise à plusieurs modes de transferts, a servi d'indicateur principal. Lors de chacun de ces quatre tests, cet indicateur a pu montrer la qualité de la procédure proposée pour la simulation de plusieurs phénomènes physiques qui interagissent.

L'outil proposé a passé avec succès l'ensemble des douze étapes de validation qui lui étaient assignées, sans qu'aucune suspicion de présence de biais ne soit apparue. En effet, à chaque fois, il a fourni des estimations de bonne qualité des références analytiques attendues. Par conséquent, il peut dorénavant être appliqué avec confiance à des cas concrets.

CHAPITRE 5

Illustration des capacités de l'approche

Introduction	120
5.1 Capacités intrinsèques de la démarche	120
5.1.1 Outil d'illustration : le <i>Module de Bâtiment</i>	120
5.1.2 Capacité multi-physique	122
5.1.3 Auto-adaptativité : influence de l'étendue de la scène sur le temps de calcul	126
5.1.4 Auto-adaptativité : impact de la finesse de description de la zone d'influence sur le temps de calcul	133
5.1.5 Outil d'illustration : le <i>Module d'Echangeur</i> à plaques	139
5.1.6 Outil d'illustration : le <i>Collecteur solaire</i>	144
5.1.7 Capacité multi-échelle	147
5.1.8 Auto-apprentissage : génération de modèles prédictifs réduits	153
5.2 Utilisations avancées permises par l'auto-apprentissage 160	
5.2.1 Propagation d'incertitudes	160
5.2.2 Optimisation basée sur la génération de modèles réduits	164
Conclusion	172

Introduction

L'approche développée a été mise en œuvre pour construire un outil de simulation des transferts thermiques couplés au sein de systèmes complexes. Les contributions de ses modèles prédictifs ont été validées en les confrontant à des références analytiques, sur des cas dédiés. Par la suite, le couplage de ces composantes a lui aussi passé avec succès une étape de validation garantie par des résultats analytiques. Il est ainsi possible d'avoir confiance dans les résultats de l'outil.

La présence de plusieurs phénomènes physiques en interaction et de nombreux éléments, qui peuvent posséder des tailles très différentes, sont à l'origine de la complexité des systèmes. Ceci rend particulièrement difficile pour les concepteur d'identifier, *a priori*, quelles parties du problème sont déterminantes et lesquelles peuvent être négligées lors de leur modélisation. Dans ce contexte, l'outil va maintenant être appliqué à des problèmes réellement complexes pour identifier les capacités intrinsèques de l'approche à modéliser de tels systèmes. Pour ce faire, cette étape va reposer sur trois outils d'illustration qui seront assemblés pour créer des systèmes complexes : un *Module de Bâtiment*, un *Module d'Echangeur* à plaques et un *Collecteur solaire*.

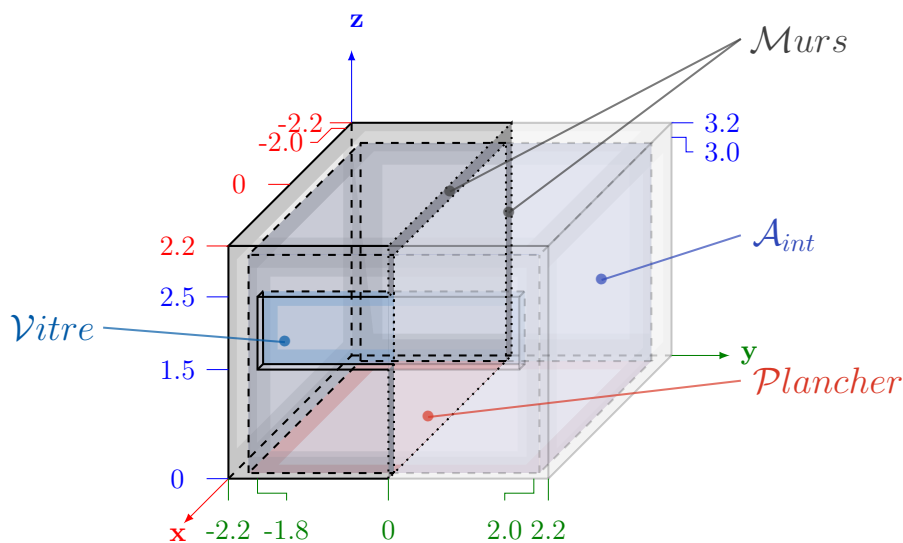
La première partie de ce chapitre aura pour rôle d'illustrer l'habileté de l'approche à traiter chacun des caractères des systèmes complexes. En premier lieu, la simulation de problèmes multi-physiques sera abordée. Ensuite, une observation de l'évolution des performances de l'approche, lorsque l'étendue et le degré de détails du modèle augmentent, sera réalisée. Par la suite, le comportement du processus de simulation sera étudié au regard du rapport d'échelle qui caractérise la scène. Dans un dernier temps, on montrera que l'analyse de l'exploration menée pour estimer la valeur d'une observable procure une connaissance approfondie du problème traité.

La seconde partie du chapitre permettra de mettre en valeur les utilisations avancées permises par cette connaissance approfondie obtenue. Pour ce faire, une analyse par propagation d'incertitude sera réalisée. Elle sera ensuite complétée par l'optimisation de la consommation d'énergie primaire d'un échangeur à plaques.

5.1 Capacités intrinsèques de la démarche

5.1.1 Outil d'illustration : le *Module de Bâtiment*

Les premiers cas d'illustration, ayant pour contexte la simulation thermique de bâtiments, ont tous été construits à l'aide d'un sous-système : le *Module de Bâtiment* (Fig. 5.1). Celui-ci est composé de sept domaines : cinq domaines solides tenant lieu de murs — et de plafond, mais pas de plancher car ce dernier est modélisé par une simple interface —, un autre qui modélise la vitre et enfin un domaine fluide qui représente l'air intérieur. Tous ces domaines sont séparés par des interfaces. Les *Modules de Bâtiment* sont assemblés à l'intérieur d'un domaine fluide supplémentaire — circonscrit lui aussi par des interfaces — qui permet de prendre

FIGURE 5.1 – Schéma en coupe d'un *Module de Bâtiment*.

en compte l'environnement extérieur dont la température est de 273 K ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$). En outre, c'est cette dernière qui a été prise en tant que référence pour la linéarisation du transfert radiatif.

5.1.1.1 Murs (\mathcal{M}_{urs} , \mathcal{M}_{int} et \mathcal{M}_{ext})

Les murs mesurent 0.200 m de large et possèdent une conductivité thermique de $0.120\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ — dans le but de modéliser l'utilisation de béton cellulaire [119] —. Les interfaces des murs avec l'intérieur et l'extérieur ont une émissivité de 0.500 qui est complétée avec une réflexion totalement diffuse.

On peut noter que les enveloppes de bâtiment présentent, la plupart du temps, une succession de couches aux propriétés et fonctions différentes. Si dans le passé, ces enveloppes étaient modélisées sous la forme de murs mono-couches aux propriétés homogènes équivalentes, leur modélisation est aujourd'hui réalisée sous la forme de murs multi-couches [120–127]. Bien que, dans le cas présenté, les murs soient modélisés avec une unique couche de matériau (béton cellulaire), aucune contrainte liée à l'approche ou aux modèles développés n'a guidé ce choix. Ainsi, des murs multi-couches auraient tout aussi aisément pu être pris en compte.

5.1.1.2 Plancher ($\mathcal{P}lancher$)

Un plancher chauffant est pris en compte et représente l'unique source d'énergie du *Module de Bâtiment* : $\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x} \in \mathcal{P}lancher) = 80.0\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Ceci produit une puissance de chauffage de $1.28 \times 10^3\text{ W}$ compte tenu des 16.0 m^2 de surface au sol. De plus, le plancher est considéré adiabatique lorsqu'il se trouve au niveau du sol ; il n'y a donc aucun échange entre ce dernier et le plancher.

5.1.1.3 Vitre (\mathcal{V}_{itre} , \mathcal{V}_{int} et \mathcal{V}_{ext})

La vitre est modélisée par un parallélépipède rectangle de verre de 5.00 mm d'épaisseur, de 3.60 m de long pour 1.00 m de hauteur. Le verre possède une conductivité thermique de $1.20\text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$. La vitre est considérée parfaitement opaque au rayonnement infrarouge au-delà de $5\text{ }\mu\text{m}$ de longueur d'onde [128, 129]. Or la quasi-totalité du rayonnement émis aux niveaux de température attendus se trouve dans cette partie du spectre — au minimum, 98.5% du rayonnement total émis à 300 K ($27\text{ }^\circ\text{C}$) [130] —. Par conséquent, les deux interfaces qui séparent la vitre de l'intérieur et de l'environnement extérieur ont, en première approximation, une émissivité de 1.00.

5.1.1.4 Air intérieur (\mathcal{A}_{int})

L'air intérieur a une capacité thermique massique de $1.01 \times 10^3\text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ (à 300 K et à pression atmosphérique). D'une part, ce domaine échange par transport de chaleur avec l'environnement sous l'effet du renouvellement d'air réglementaire de 0.500 masse totale d'air par heure, ce qui représente un débit massique de $8.00 \times 10^{-3}\text{ kg.s}^{-1}$. D'autre part, l'air intérieur présente un flux convectif naturel avec les parois intérieures des murs, du plancher et de la vitre, modélisé par un coefficient de convection d'une valeur de $5.00\text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$.

5.1.1.5 Environnement (\mathcal{I}_{env} et \mathcal{A}_{env})

L'environnement possède une température constante (273 K), aussi bien pour son domaine fluide qui modélise l'air extérieur (\mathcal{A}_{env}) qu'au niveau des parois de l'environnement radiatif (\mathcal{I}_{env}). Ces dernières, qui permettent de prendre en compte le sol et l'horizon, sont considérées être des surfaces noires. De plus, pour modéliser la présence de vent, l'air extérieur est considéré en convection forcée avec les interfaces extérieures des murs et de la vitre. Dans ce contexte, un coefficient de convection de $40.0\text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$ a été choisi pour régir ce transfert.

5.1.2 Capacité multi-physique

5.1.2.1 Objectif

Montrer que les résultats obtenus avec l'outil proposé, sur un problème multi-physique, sont en accord avec une analyse par mode de transfert limitant.

5.1.2.2 Contexte d'ingénierie

Etudier l'impact du choix des matériaux de construction des murs sur la température de l'air intérieur.

5.1.2.3 Scène

Elle se compose d'un unique *Module de Bâtiment* disposé au sein d'un environnement à 273 K (Fig. 5.2). Au sein de ce module, huit valeurs de conductivité

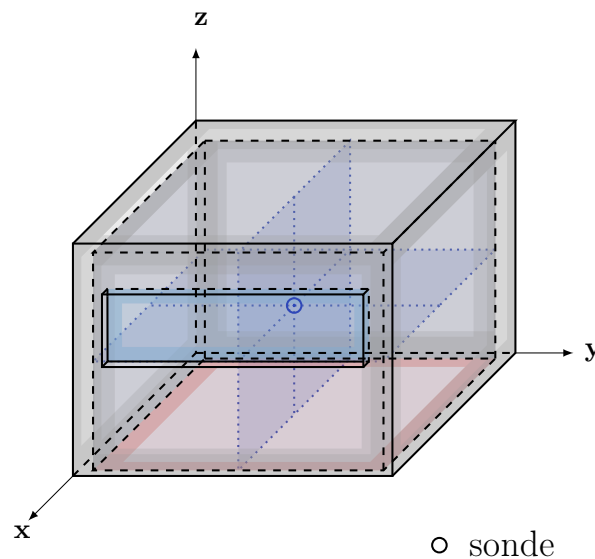


FIGURE 5.2 – Schéma d'un *Module de Bâtiment*, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

thermique pour les murs vont être envisagées : cinq entre $0.0400 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$ et $1.20 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$ puis trois supplémentaires jusqu'à $10.0 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$ (Tab. 5.1). Cela va permettre de pouvoir observer la transition du régime des pertes thermiques, d'un fonctionnement limité par un mode de transfert à un autre.

5.1.2.4 Méthode d'étude

Au cours de cette série de simulations, la température de l'air intérieur est estimée pour les différentes valeurs de conductivité thermique. Chacune de ces simulations est menée à l'aide d'un million d'histoires de Monte-Carlo. Les estimations sont ensuite comparées aux températures correspondant à deux comportements limites de transfert d'énergie au niveau des murs du *Module de Bâtiment*.

Conduction limitante Le premier ($T_{Lim=Cd \text{ Murs}}$) est obtenu lorsque la conduction est le phénomène de transfert qui restreint la dissipation de la source d'énergie vers l'environnement, au travers des murs. Il s'agit du comportement dont l'observation est attendue dans les cas où les murs présentent un nombre de BIOT¹ suffisamment "élevé", c'est-à-dire lorsque leur conductivité thermique est suffisamment "faible" — puisque c'est l'unique variable dans ce cas-ci —. Dans les faits, les matériaux de construction utilisés assurent à la plupart des bâtiments un comportement proche de ce cas limite. C'est pourquoi, pour diminuer la consommation énergétique d'une construction, l'une des premières recommandations est d'améliorer l'isolation thermique de son enveloppe extérieure. En effet, cela permet de créer

1. Nombre de BIOT des murs intérieurs : $Bi = \frac{(h_{\mathcal{M}_{int}}^{A_{int}} + 4 \epsilon_{\mathcal{M}_{int}}^{A_{int}} \sigma T_{ref}^3) \|\mathbf{y}^{\in \mathcal{M}_{ext}} - \mathbf{y}^{\in \mathcal{M}_{int}}\|}{\lambda_{\mathcal{M}}}$

un goulot d'étranglement sur les pertes thermiques en agissant précisément sur le mode de transfert qui les limite. Une modélisation simplifiée à l'aide d'un réseau de résistances équivalentes a été réalisée. Il présente la dissipation de l'énergie apportée par le plancher chauffant au travers quatre résistances en parallèle : la conduction dans les murs, la convection de la vitre avec l'air intérieur, le transfert radiatif de celle-ci avec la cavité intérieure et enfin le transport de chaleur du renouvellement d'air. Ceci a permis d'établir l'expression 5.1 de la température de l'air intérieur dans ce cas.

$$T_{Lim=Cd \ \mathcal{M}urs} = T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}}) + \frac{A_{\mathcal{P}} \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{P}})}{\frac{1}{R_{Cd \ \mathcal{M}}} + \frac{1}{R_{Cv \ \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{R \ \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{En \ \mathcal{A}_{env}}}} \quad (5.1a)$$

Où

$$R_{Cd \ \mathcal{M}} = \frac{\|\mathbf{y}^{\in \mathcal{M}_{ext}} - \mathbf{y}^{\in \mathcal{M}_{int}}\|}{\lambda_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}_{int}}} \quad (5.1b)$$

$$R_{Cv \ \nu_{int}} = \frac{1}{h_{\nu_{int}}^{\mathcal{A}_{int}} A_{\nu_{int}}} \quad (5.1c)$$

$$R_{R \ \nu_{int}} = \frac{1}{4 \sigma \epsilon_{\nu_{int}}^{\mathcal{A}_{int}} T_{ref}^3 A_{\nu_{int}}} \quad (5.1d)$$

$$R_{En \ \mathcal{A}_{env}} = \frac{1}{\dot{m}_{\mathcal{A}_{int}-(\mathcal{A}_{ext})} c_p \mathcal{A}_{env}} \quad (5.1e)$$

Convection et rayonnement limitants Le second ($T_{Lim=(Cv//R) \ int}$) comportement limite considéré est celui dans lequel les transferts par convection et rayonnement au niveau de la face intérieure des murs (\mathcal{M}_{int}) sont les phénomènes limitants. Il est attendu pour lorsque le nombre de BIOT des murs intérieurs sera suffisamment "faible", ce qui correspond donc aux conductivités des murs "élevées". Une modélisation similaire à la précédente a permis d'obtenir une expression de la température de l'air intérieur dans ces conditions (Eq. 5.2).

$$T_{Lim=(Cv//R) \ int} = T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}}) + \frac{A_{\mathcal{P}} \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{P}})}{\frac{1}{R_{Cv \ \mathcal{M}}} + \frac{1}{R_{R \ \mathcal{M}}} + \frac{1}{R_{Cv \ \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{R \ \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{En \ \mathcal{A}_{env}}}} \quad (5.2a)$$

Où

$$R_{Cv \ \mathcal{M}} = \frac{1}{h_{\mathcal{M}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}} A_{\mathcal{M}_{int}}} \quad (5.2b)$$

$$R_{R \ \mathcal{M}} = \frac{1}{4 \sigma \epsilon_{\mathcal{M}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}} T_{ref}^3 A_{\mathcal{M}_{int}}} \quad (5.2c)$$

TABLE 5.1 – Estimations de la température de l'air intérieur au sein d'un unique *Module de Bâtiment*, en fonction de la conductivité thermique de ses murs.

$\lambda_{Murs} [W.m^{-1}.K^{-1}]$	0.0400	0.120	0.400	0.800
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{int}) [K]$	300.105	291.694	283.063	279.970
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	0.0318	0.0232	0.0143	0.0110
$\lambda_{Murs} [W.m^{-1}.K^{-1}]$	1.20	3.00	5.00	10.0
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{int}) [K]$	278.767	277.168	276.720	276.384
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	9.62×10^{-3}	7.77×10^{-3}	7.22×10^{-3}	6.79×10^{-3}

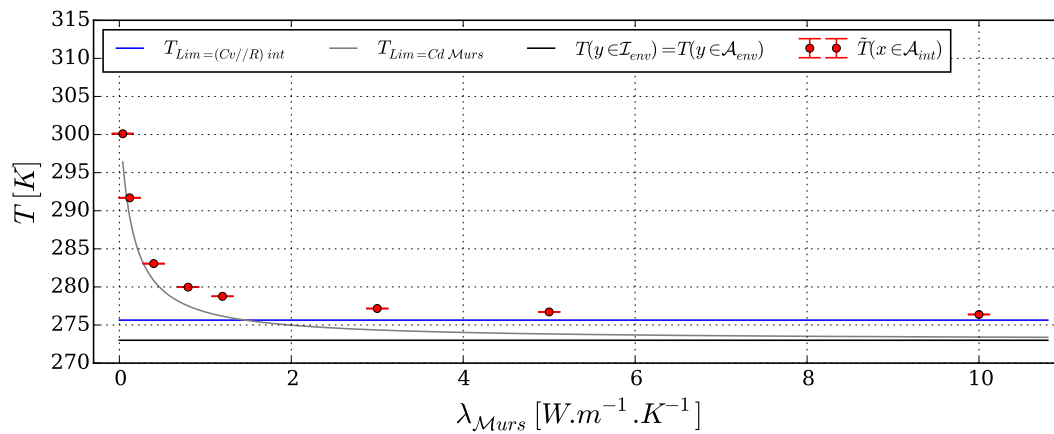


FIGURE 5.3 – Evolution de la température estimée de l'air intérieur au sein d'un unique *Module de Bâtiment*, en fonction de la conductivité thermique de ses murs.

5.1.2.5 Résultats

Température Tout d'abord, les estimations de la température de l'air intérieur chutent rapidement de 300.105 K (26.955 °C) — pour une conductivité thermique de $0.0400\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ — jusqu'à 283.063 K (9.913 °C) — pour $0.400\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ —. Ensuite la baisse de la température ralentit progressivement jusqu'à converger vers une asymptote.

Cohérence avec l'analyse par transfert limitant Sur la figure 5.3, il apparaît très nettement que le modèle construit avec notre outil montre un comportement très proche du cas où la conduction est la phénomène limitant pour les trois valeurs de conductivité les plus faibles. Ensuite, après une période de transition (0.800 et $1.20\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$), celui-ci présente une évolution très proche du cas limité par la convection et le transfert radiatif intérieur (à partir de $3.00\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Le fait que la conduction au travers des murs ne soit plus le phénomène limitant explique pourquoi l'augmentation de la conductivité du murs au-delà de $3.00\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ne provoque qu'un effet très limité sur la température estimée. Comme énoncé lors de la présentation de la méthode d'étude, ce comportement pouvait être attendu à partir du savoir-faire usuel de l'ingénierie thermique. Pour autant, le fait que notre outil réussisse aussi bien à capter cette transition d'un mode de transfert limitant à un autre constitue un nouvel indicateur de la qualité de ces résultats, en présence d'un problème multi-physique.

5.1.3 Auto-adaptativité : influence de l'étendue de la scène sur le temps de calcul

5.1.3.1 Objectif

Evaluer comment la taille et la complexité de la scène simulée influence le temps de calcul nécessaire à une estimation.

5.1.3.2 Contexte d'ingénierie

Examiner l'impact de l'augmentation du nombre de *Modules de Bâtiment* sur la température estimée au niveau de la sonde.

5.1.3.3 Scène

Une série de problèmes possédant une complexité géométrique croissante a été réalisée en assemblant des *Modules de Bâtiment*, en tant que sous-système constitutif. Ces scènes mettent en œuvre d'un seul (Fig. 5.2) jusqu'à cinquante de ceux-ci dans un ensemble de bâtiments (Fig. 5.7), en passant par des assemblages de quatre, dix et trente modules (Fig. 5.4, 5.5 et 5.6).

5.1.3.4 Méthode d'étude

Au sein de ces scènes, la température de l'air intérieur du *Module de Bâtiment*, situé le plus proche de l'origine du repère des coordonnées, est estimée. Chacune de

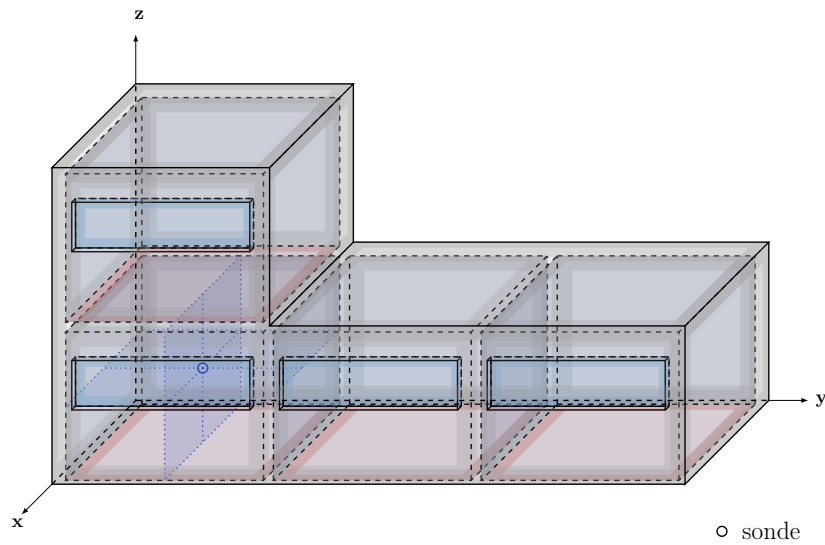


FIGURE 5.4 – Schéma d'un assemblage de quatre *Modules de Bâtiment*, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

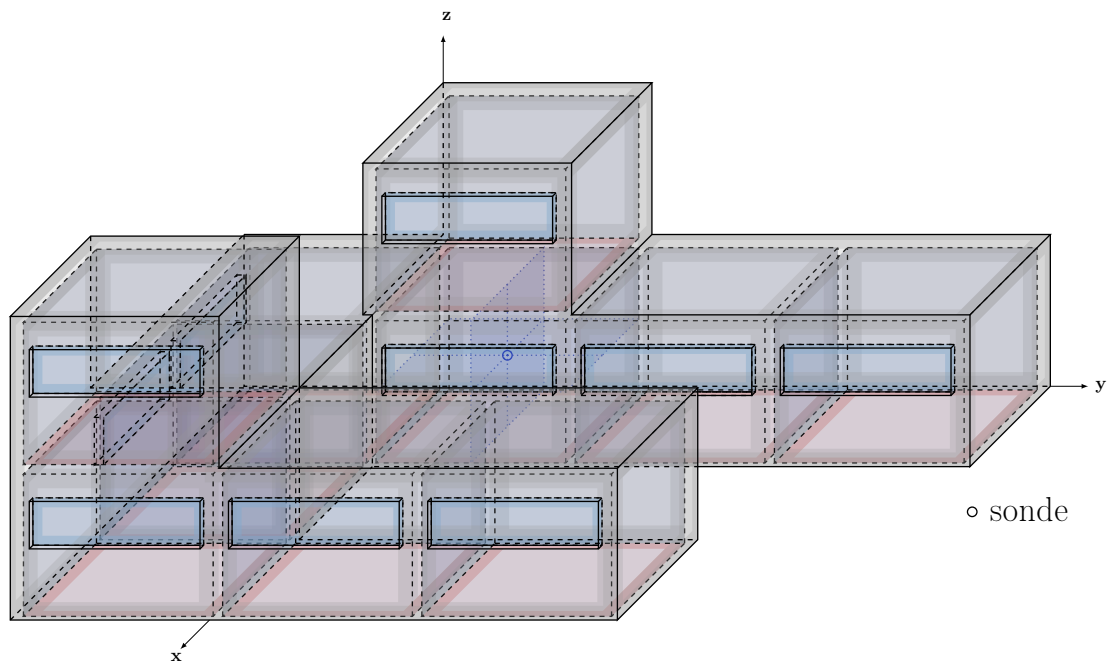


FIGURE 5.5 – Schéma d'un assemblage de dix *Modules de Bâtiment*, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

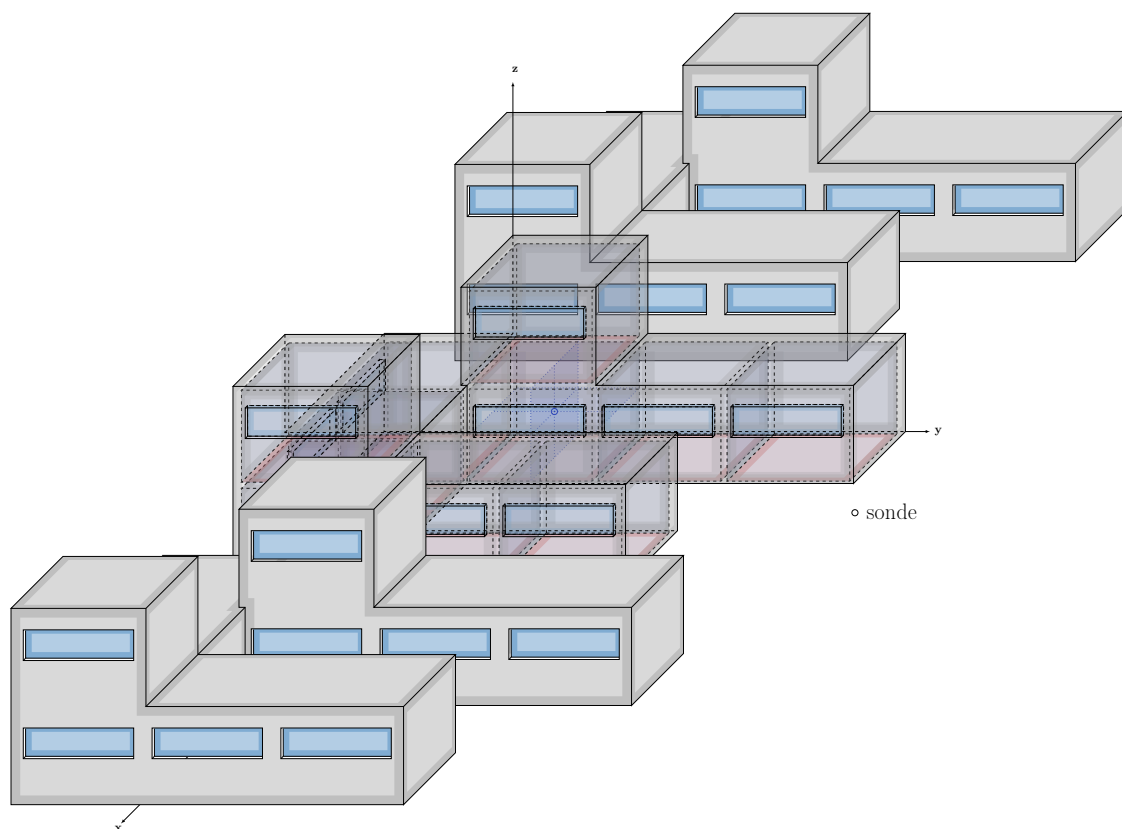


FIGURE 5.6 – Schéma d'un assemblage de trente *Modules de Bâtiment*, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

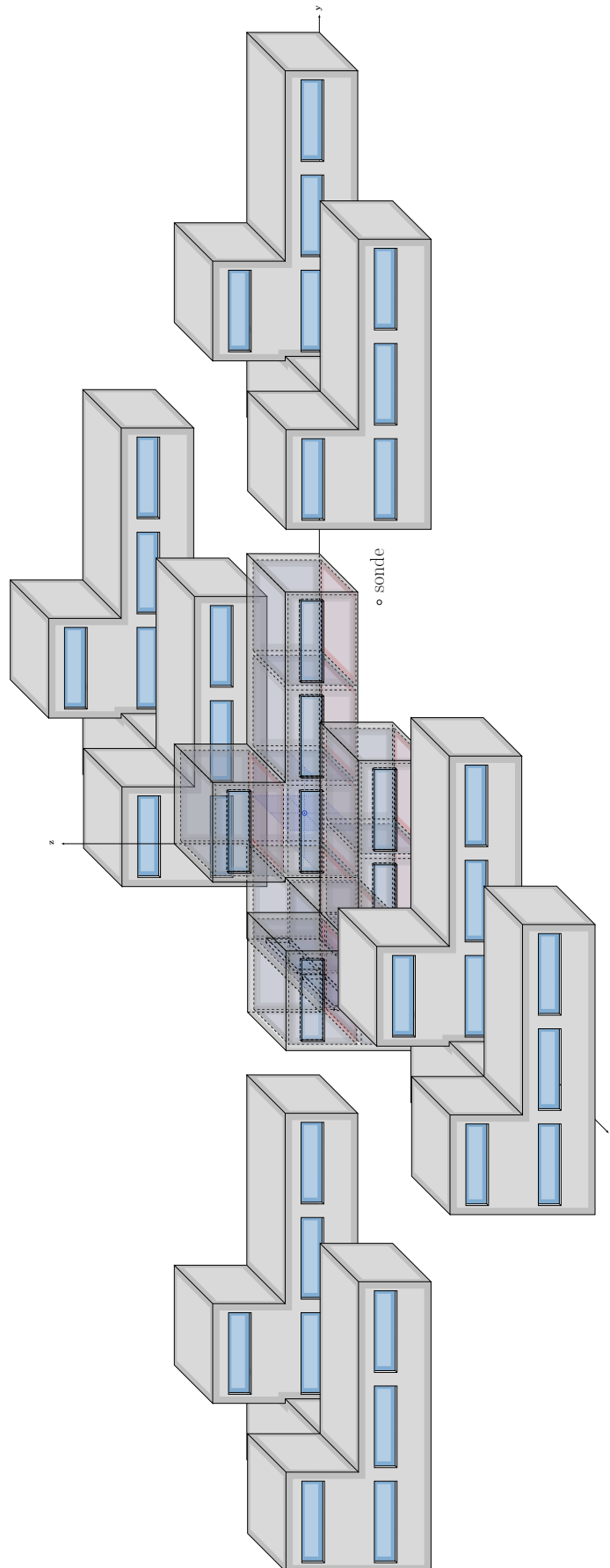


FIGURE 5.7 – Schéma d'un assemblage de cinquante *Modules de Bâtiment*, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

ces estimations est calculée à partir d'un million d'histoires de Monte-Carlo afin de les obtenir avec une forte précision, qui nous a paru satisfaisante.

Temps de calcul L'étude du temps de calcul nécessaire à chaque estimation est réalisée sans avoir recourt à la parallélisation, bien que les algorithmes de Monte-Carlo y soient adaptés. Ainsi, les histoires ont été évaluées sur un unique *thread* d'un processeur Intel Core i5-2435M (Sandy Bridge) cadencé à 2.4 GHz, développant jusqu'à 48 Gflops de puissance de calcul délivrée par cœur [131], et couplé à 4 Go de mémoire vive (DDR3 à 1333 MHz). D'autre part, dans la méthode de Monte-Carlo, le nombre d'histoires utilisées — et donc le temps de calcul nécessaire — est relié à l'erreur type obtenue pour l'estimation. C'est pourquoi, dans le but de comparer le temps nécessaire à des estimations de qualité identique, il a été choisi de se référer au temps de calcul permettant d'obtenir une erreur type fixée. La valeur de cet indicateur a été déterminée en prenant comme référence la tolérance standard dont dispose les thermocouples de type T — les plus pertinents dans la gamme de températures des cas présentés — : $\pm 1 K$ [132]. Or cette tolérance standard correspond à un intervalle de confiance à 95.4%, c'est-à-dire un intervalle avec une demi-largeur de deux erreurs types [133, 134]. Ainsi, un critère de 0.5 K d'erreur type cible a été adopté pour être au plus près de l'exigence disponible avec les méthodes expérimentales. Ce temps de calcul cible est alors obtenu par correction du temps de calcul effectivement mesuré pour un million d'histoires à l'aide de l'équation 5.3. Cette dernière a été construite en se basant sur la propriété de diminution de l'erreur type suivant la racine carrée du nombre d'histoires nécessaires (Eq. 1.46), complétée par l'hypothèse que le temps de calcul est proportionnel à la quantité de ces dernières.

$$t_{\tilde{\sigma}_T=0.5K} = t \times \left(\frac{\tilde{\sigma}_T}{0.5} \right)^2 \quad (5.3)$$

En outre, pour présenter des temps de calcul plus fiables, une série de douze exécutions de chaque estimation de température est employée. L'estimation du temps de calcul à 0.5 K d'erreur type — sur l'estimation de la température —, dans chaque configuration, est ensuite réalisée en se basant sur cet échantillon d'exécutions. Elle est complétée par une estimation de l'erreur type qui lui est associée.

Taille du chemin D'autre part, la taille moyenne du chemin d'exploration utilisé pour parcourir chaque configuration est aussi déterminée ($\langle i+j \rangle$). Celle-ci est calculée en sommant l'indice i de la position du point-sonde dans le chemin avec l'indice j de la taille des chemins d'exploration complémentaire du champ de luminance incidente. Cet élément pourra être comparé aux temps de calcul obtenus par la suite pour approfondir l'analyse du comportement des algorithmes construits par notre outil.

5.1.3.5 Résultats

Température Tout d'abord, regardons brièvement les estimations de température de l'air intérieur (Tab. 5.2). Celle-ci est de 291.694 K (18.544 °C) pour un unique module, puis croît à 297.448 K (24.298 °C) lorsque trois modules lui sont ajoutés. Ensuite, les températures estimées suivent une tendance asymptotique aux alentours

TABLE 5.2 – Taille moyenne des chemins d’exploration et estimations des températures intérieures et du temps de calcul, en fonction du nombre de *Modules de Bâtiment* présents dans la scène.

n	1	4	10	30	50
$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{A}_{int}}) [K]$	291.694	297.448	299.819	299.817	299.821
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	0.0232	0.0283	0.0302	0.0302	0.0302
$\langle i + j \rangle$	22.360	27.898	30.749	30.756	30.763
$\tilde{t}_{\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}=0.5 K} [s]$	0.0901	0.173	0.223	0.235	0.235
$\tilde{\sigma}_{\tilde{t}} [s]$	1.40×10^{-3}	2.64×10^{-3}	3.92×10^{-3}	4.06×10^{-3}	4.38×10^{-3}

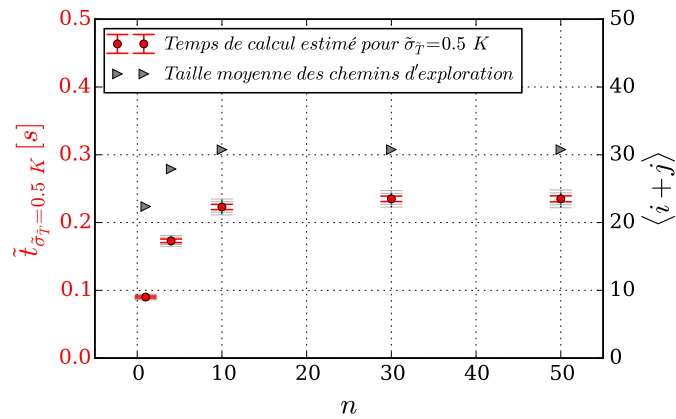


FIGURE 5.8 – Evolution du temps de calcul et de la taille moyenne des chemins d’exploration, en fonction du nombre de *Modules de Bâtiment* présents dans la scène.

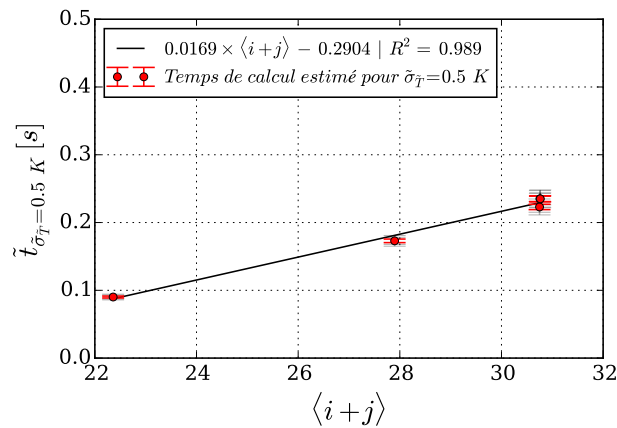


FIGURE 5.9 – Evolution du temps de calcul, en fonction de la taille moyenne des chemins d’exploration.

de 300 K (27 °C) pour les assemblages de dix à cinquante *Modules de Bâtiment*. Cette première augmentation est probablement due à l'augmentation d'isolation thermique que procure l'ajout de modules supplémentaires entre l'emplacement de la sonde et l'environnement qui joue ici le rôle de *puits* d'énergie. Cependant, les *Modules de Bâtiment* supplémentaires sont de plus en plus distants de la sonde au fur et à mesure que leur nombre augmente. Par conséquent, ils ont de moins en moins d'influence sur la température estimée au niveau de la sonde ce qui est tout à fait cohérent avec l'évolution asymptotique observée.

Temps de calcul Ensuite, les temps de calcul permettant d'obtenir une estimation à 0.5 K d'erreur type sont tous très inférieurs à la seconde. De plus, ils augmentent globalement avec le nombre de *Modules de Bâtiment* présents dans la scène, comme il était possible de s'y attendre. En effet, le temps de calcul est de 0.0901 s pour un seul module, puis double à 0.173 s pour une scène de quatre modules et croît à 0.223 s lorsqu'il y en a dix assemblés. Néanmoins, à partir de dix modules, le temps de calcul converge vers une asymptote (Fig. 5.8) autour de 0.240 s. Ainsi, en d'autres termes, au-delà d'un seuil, l'ajout de *Modules de Bâtiment* n'augmente pas significativement le temps de calcul nécessaire à une estimation bien que le problème devienne quant à lui de plus en plus complexe et étendu. Ainsi, à la différence du comportement d'un algorithme utilisant une quadrature basée sur un maillage, il apparaît clairement que le temps de calcul nécessaire n'est pas directement proportionnel à la complexité ou à la dimension du problème traité.

Taille du chemin D'autre part, la taille du chemin d'exploration semble suivre une tendance asymptotique similaire à celle du temps de calcul (Fig. 5.8). En effet, la taille moyenne des chemins d'exploration débute autour de 22 positions — dans le cas d'un seul module — puis converge vers une suite d'un peu moins de 31 termes. De plus, le tracé du temps de calcul en fonction de la longueur moyenne du chemin d'exploration (Fig. 5.9) met en évidence une corrélation très claire entre les deux variables. D'ailleurs, il était possible de s'y attendre au vu du fonctionnement de l'algorithme d'évaluation utilisé. Ainsi, l'évolution asymptotique du temps de calcul est une conséquence directe de celle de la taille du chemin d'exploration.

Comportement auto-adaptatif² Ce comportement particulièrement avantageux du chemin d'exploration s'explique par les probabilités d'exploration qui ont été choisies pour représenter le plus fidèlement possible les phénomènes physiques à l'œuvre³. Appliqué à la thermique, cela revient à définir les probabilités de manière proportionnelle à la capacité d'échange de chaleur existant entre les différentes positions environnantes. Or, le rôle de ces probabilités est "d'orienter" la construction des chemins d'exploration à travers la scène. Ainsi, ces choix de probabilités "physiques" permettent de guider préférentiellement — et de manière totalement

2. Adaptabilité : "Capacité à s'adapter [c'est-à-dire être ajusté, approprié, convenir] à de nouveaux milieux ou à de nouvelles situations." (Dictionnaire Larousse)

3. D'autre part, cette approche explique aussi pourquoi les poids de Monte-Carlo associés à chaque contribution sont généralement une simple expression du champ physique à un autre emplacement.

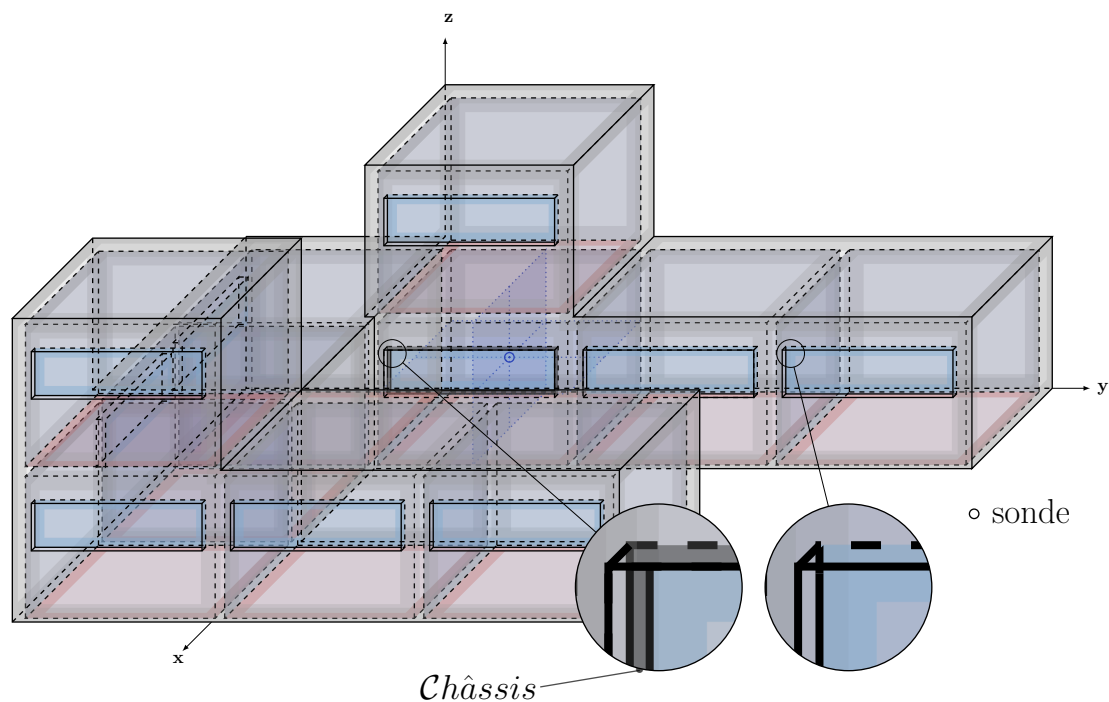


FIGURE 5.10 – Schéma d'un assemblage de dix *Modules de Bâtiment*, dont l'un d'eux présente un châssis de fenêtre, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.

automatique — les chemins d'exploration vers les zones qui exercent une réelle influence sur l'observable évaluée. Ceci explique pourquoi l'ajout des *Modules de Bâtiment* ne présentant qu'une très faible influence au niveau de la sonde n'a quasiment aucun impact en terme de temps de calcul. Ces derniers ne possèdent, en effet, qu'une très faible probabilité d'être "visités" par l'exploration stochastique mis en œuvre.

En résumé, cela signifie que le temps de calcul ne dépend que des zones influençant l'observable, mais pas de la complexité ou de l'étendue du problème dans sa globalité. De plus, ces zones sont automatiquement identifiées par l'exploration stochastique.

5.1.4 Auto-adaptativité : impact de la finesse de description de la zone d'influence sur le temps de calcul

5.1.4.1 Objectif

Evaluer l'effet du degré de détails présent dans la zone d'influence de l'observable sur le temps de calcul nécessaire à son estimation.

5.1.4.2 Contexte d'ingénierie

Analyser l'impact de la présence d'un châssis de fenêtre et du matériau le constituant.

TABLE 5.3 – Description des différentes configurations étudiées pour le châssis de fenêtre.

<i>Châssis</i>	<i>sans</i>	<i>Vitre\Leftrightarrow</i>	<i>bois</i>
$\ \mathbf{y}^{\in \mathcal{C}_{ext}} - \mathbf{y}^{\in \mathcal{C}_{int}}\ [m]$	5.00×10^{-3}	0.0600	0.0600
$\lambda_{\mathcal{C}} [W.m^{-1}.K^{-1}]$	1.20	14.4	0.150
$\epsilon_{\mathcal{C}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}}$	1.00	1.00	0.890
$\rho_{\mathcal{C}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}}$	0.00	0.00	0.110
$R_{Cv//R} c_{int} [K.W^{-1}]$	0.167	0.167	0.176
$R_{Cd} c [K.W^{-1}]$	6.67×10^{-3}	6.67×10^{-3}	0.641
$T_{Lim}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{A}_{int}}) [K]$	296.315	296.315	298.368
<i>Châssis</i>	<i>acier inox</i>	<i>aluminium</i>	
$\ \mathbf{y}^{\in \mathcal{C}_{ext}} - \mathbf{y}^{\in \mathcal{C}_{int}}\ [m]$	0.0600	0.0600	
$\lambda_{\mathcal{C}} [W.m^{-1}.K^{-1}]$	26.0	237	
$\epsilon_{\mathcal{C}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}}$	0.830	0.0900	
$\rho_{\mathcal{C}_{int}}^{\mathcal{A}_{int}}$	0.170	0.910	
$R_{Cv//R} c_{int} [K.W^{-1}]$	0.181	0.296	
$R_{Cd} c [K.W^{-1}]$	3.70×10^{-3}	4.05×10^{-4}	
$T_{Lim}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{A}_{int}}) [K]$	296.525	297.484	

5.1.4.3 Scène

Géométrie La scène reprend l'assemblage de dix *Modules de Bâtiment* dont celui placé à l'origine du repère possède une sonde pour y estimer la température de l'air intérieur. De plus, pour accroître la finesse de description de cette configuration, la simple vitre de ce module est remplacée par un châssis vitré de fenêtre (Fig. 5.10). Celui-ci mesure 0.0700 m de large et 0.0600 m d'épaisseur. Son épaisseur est considérée pleine, bien que cela ne soit pas forcément représentatif de la réalité d'un tel dispositif. Il encadre une vitre dont la superficie a été réduite d'autant — 0.860 m × 3.46 m —. Son ajout augmente ainsi le nombre d'éléments à prendre en compte dans cette portion de la scène et diminue mécaniquement leur dimension caractéristique.

Matériaux Trois matériaux "réalistes" sont étudiés pour ce châssis (Tab. 5.3) : le bois, l'acier inoxydable et l'aluminium. Les propriétés radiatives de ceux-ci proviennent du livre de référence de SIEGEL et HOWELL, *Thermal Radiation Heat Transfer* [130]. En complément de ces trois-ci, un quatrième matériau "théorique" (*Vitre \Leftrightarrow*) est analysé. Ses propriétés ont été sélectionnées pour obtenir des probabilités d'exploration — et des résistances thermiques — identiques à celles de la vitre, malgré la différence d'épaisseur du châssis. L'utilisation de ce matériau "théorique" permettra de pouvoir examiner les seules implications de la présence du châssis de fenêtre, en particulier en terme de temps de calcul et de taille de chemin d'exploration, en éliminant les interférences possibles dues à l'utilisation de matériaux différents.

5.1.4.4 Méthode d'étude

L'étude consiste, pour chacun des scénarios retenus, à estimer la température au niveau de la sonde, la taille moyenne du chemin d'exploration ainsi que le temps de calcul nécessaire pour avoir une estimation à $0.5 K$ d'erreur type. Pour cette dernière, un procédé identique à celui utilisé dans la section 5.1.3 précédente est employé. Ces valeurs ainsi obtenues par un million d'histoires pour les différents scénarios seront alors comparées avec le cas similaire ne possédant qu'une simple vitre.

Analyse par transfert limitant En complément, des estimations de température de l'air intérieur sont réalisées par une démarche de réseau de résistances thermiques limitantes. Elles permettront d'évaluer la cohérence des résultats obtenus avec l'outil proposé.

Comme on a pu le voir à la section 5.1.2 précédente, avec une conductivité thermique de $0.120 W.m^{-1}.K^{-1}$, c'est le transfert conductif au travers des murs qui limite les pertes thermiques par ces derniers (Fig. 5.3). Toutefois, il faut noter qu'il y a ici une différence avec ce cas précédent puisque le *Module de Bâtiment* "sondé" dans la configuration présente est isolé avec d'autres modules sur trois de ces faces. Ainsi, en première approximation, nous allons considérer que l'énergie transmise du module "sondé" au travers de ces parois communes est exactement compensée par celle provenant des *Modules de Bâtiment* qui le jouxtent. C'est pourquoi la résistance de conduction à travers les murs du module ne prendra en compte que les surfaces donnant directement sur l'environnement extérieur ($A_{\mathcal{M}_{int}} = 24.0 - 3.60 = 21.4 m^2$).

D'autre part, en ce qui concerne la vitre, les transferts convectif et radiatif vers l'intérieur sont toujours les phénomènes qui limitent l'échange. Seule l'aire de la vitre a diminuée pour laisser place au châssis de fenêtre ($A_{\mathcal{V}_{int}} = 2.98 m^2$).

De plus, en complément de la résistance correspondant au renouvellement d'air — qui est inchangée —, il est nécessaire d'étudier l'impact du châssis. En fonction des propriétés des matériaux envisagés, le mode de transfert limitant sera amené à changer (Tab. 5.3). En effet, dans le cas de l'utilisation de bois, il s'agit de la conduction alors que pour l'acier inoxydable, l'aluminium et le matériau équivalent à la vitre ce sont les transferts convectif et radiatif vers l'intérieur qui restreignent la dissipation de la source interne vers l'extérieur. Ceci explique que, de manière plutôt contre-intuitive, le châssis en aluminium se trouve être plus isolant dans la simulation que son homologue en acier inoxydable (+64%) alors qu'il possède, pourtant, une conductivité thermique presque dix fois supérieure. Ce sont en réalité leurs propriétés radiatives qui sont déterminantes dans cette configuration. Or, l'aluminium est beaucoup moins émissif que l'acier inoxydable. Ainsi, en fonction du matériaux pris en compte, il est nécessaire d'utiliser la résistance limitante adéquate pour le châssis dans l'expression 5.4 de la température limite de l'air intérieur.

TABLE 5.4 – Comparaison des résultats obtenus pour différents matériaux constituant le châssis de fenêtre ou en l'absence de ce dernier.

Châssis	sans	Vitre \Leftrightarrow	bois	acier inox	aluminium
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{int})$ [K]	299.819	299.809	301.334	299.897	300.479
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}$ [K]	0.0302	0.0302	0.0314	0.0303	0.0307
$\langle i + j \rangle$	30.749	30.745	31.598	31.425	40.184
$\tilde{t}_{\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}=0.5 K}$ [s]	0.223	0.219	0.241	0.229	0.275
$\tilde{\sigma}_{\tilde{t}}$ [s]	3.92×10^{-3}	3.04×10^{-3}	3.72×10^{-3}	2.74×10^{-3}	4.45×10^{-3}

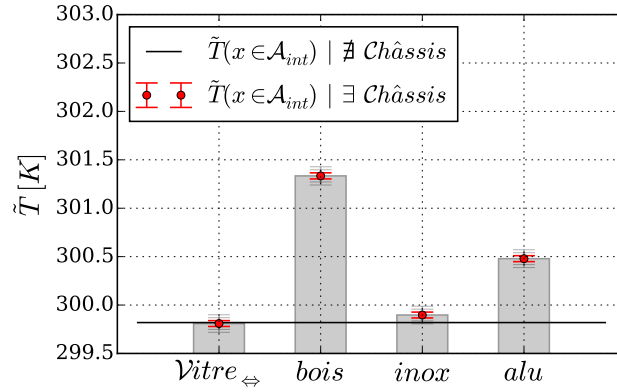


FIGURE 5.11 – Comparaison des estimations de température de l'air intérieur, en fonction du matériau du châssis de fenêtre, avec la température estimée en l'absence de ce dernier.

$$T_{Lim}(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{int}) = T(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{env}) + \frac{A_{\mathcal{P}} \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y} \in \mathcal{P})}{\frac{1}{R_{Cd \mathcal{M}}} + \frac{1}{R_{Cv \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{R \nu_{int}}} + \frac{1}{R_{Lim c}} + \frac{1}{R_{En \mathcal{A}_{env}}}} \quad (5.4a)$$

Où

$$R_{Cd \mathcal{M}} = \frac{\|\mathbf{y} \in \mathcal{M}_{ext} - \mathbf{y} \in \mathcal{M}_{int}\|}{\lambda_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}_{int}}} \quad (5.4b)$$

$$R_{Cv \nu_{int}} = \frac{1}{h_{\nu_{int}}^{A_{int}} A_{\nu_{int}}} \quad (5.4c)$$

$$R_{R \nu_{int}} = \frac{1}{4 \sigma_{\nu_{int}}^{A_{int}} T_{ref}^3 A_{\nu_{int}}} \quad (5.4d)$$

$$R_{En \mathcal{A}_{env}} = \frac{1}{\dot{m}_{\mathcal{A}_{int} - (\mathcal{A}_{ext})} c_p \mathcal{A}_{env}} \quad (5.4e)$$

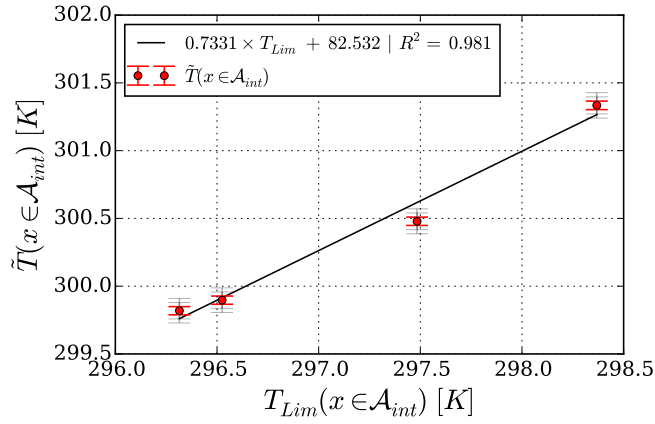


FIGURE 5.12 – Evolution des températures estimées par l'outil, en fonction de leur température obtenue par une modélisation par transferts limitants.

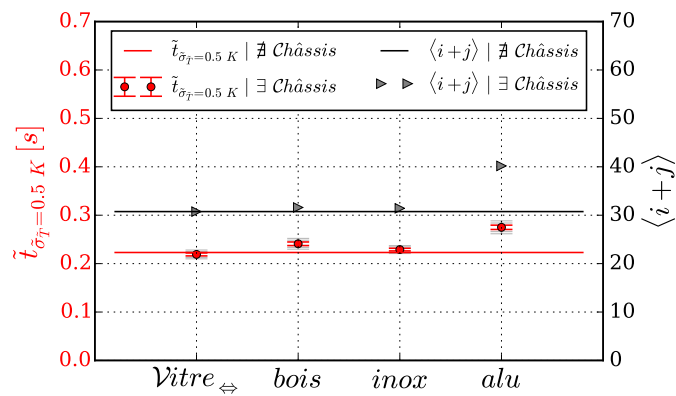


FIGURE 5.13 – Comparaison des estimations de temps de calcul et des tailles moyennes des chemins d'exploration, en fonction du matériau du châssis de fenêtre, avec ceux estimés en l'absence de ce dernier.

5.1.4.5 Résultats

Température La température de l'air intérieur est sensiblement supérieure en présence du châssis et varie en fonction de la nature de la composition de ce dernier. Le matériau "théorique" procure une température estimée à 299.809 K (26.659 °C) ce qui est équivalent, à l'erreur type près, au cas sans châssis (Fig. 5.11 et Tab. 5.4). Ceci permet de s'assurer que ce matériau joue bien le rôle que l'on attendait de lui. Parmi les matériaux "réalistes", comme cela pouvait être espéré, c'est le châssis en bois qui assure la meilleure isolation en permettant à l'air intérieur d'être à 301.334 K (28.184 °C), ce qui représente environ 1.5 K supplémentaire au cas sans celui-ci. L'acier inoxydable, avec une température de 299.897 K (26.747 °C), ne montre qu'une différence très limitée avec le cas de référence. Enfin, l'aluminium — avec une température estimée à 300.479 K (27.329 °C) — est nettement plus efficace que l'acier inoxydable comme l'étude des résistances thermiques limitantes nous avait permis de le pressentir. En tout état de cause, l'effet de la présence du châssis, pourtant de taille réduite, est manifeste sur la température estimée. Ainsi, il ne fait aucun doute qu'il fasse partie de la zone d'influence de la sonde utilisée.

Cohérence avec l'analyse par transfert limitant En outre, ces estimations de température ont été tracées en fonction des températures qui résultent du réseau de résistances limitantes. Ceci fait apparaître une très nette corrélation linéaire entre les deux variables (Fig. 5.12). Ainsi, les écarts observés par les estimations de l'outil apparaissent cohérents avec l'étude préliminaire par mode de transfert limitant.

Qualité de l'estimation De plus, l'examen de l'erreur-type obtenue montre que cette dernière est identique lorsque le châssis est constitué du matériaux "théorique" et fluctue légèrement en fonction des matériaux retenus, aux alentours de 0.03 K . Ainsi, l'augmentation du nombre d'éléments par l'ajout du châssis n'a aucune influence sur la qualité de l'estimation réalisée par l'approche.

Temps de calcul D'autre part, le temps de calcul nécessaire pour obtenir une estimation avec 0.5 K d'erreur type dans cette configuration est de 0.219 s pour le matériau "théorique", 0.241 s pour le bois, 0.229 s pour l'acier inoxydable et 0.275 s pour l'aluminium (Tab. 5.4 et Fig. 5.13). On peut remarquer que l'ajout du châssis ne provoque aucun accroissement du temps de calcul avec le matériau "théorique", à l'incertitude d'estimation près. Ainsi, les faibles augmentations constatées dans les cas du bois et de l'acier inoxydable, et un peu plus marquée dans le cas de l'aluminium, sont uniquement l'effet de l'utilisation de propriétés thermiques différentes. Ces dernières modifient en conséquence les probabilités d'extension des chemins d'exploration ce qui influence la longueur de leur parcours nécessaire pour atteindre les sources d'information explicite — dans ce cas-ci, les conditions aux frontières —. Ceci est de plus corroboré par l'analyse de la taille moyenne des chemins d'exploration. En effet, celle-ci est identique au cas sans châssis pour le matériau "théorique" et suit l'ordre de grandeur des variations du temps de calcul pour les matériaux "réalistes".

Influence des matériaux Il apparaît aussi qu'un effet est à surveiller : l'augmentation de la taille du chemin dans le cas de l'utilisation de l'aluminium. En effet, au cours de celui-ci, le chemin a pu être amené à faire des aller-retours dans l'épaisseur du châssis sous l'effet des probabilités d'étendre le chemin via la conduction, au niveau de ces deux interfaces : $P_{cond}(\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{int}) = 0.999$ et $P_{cond}(\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{ext}) = 0.990$. Il peut alors être comme piégé, momentanément, dans de nombreux aller-retours via ce mode de transfert qui est exceptionnellement dominant sur les autres. Cet effet ne semble pas cantonné aux échanges par conduction. Il s'agit ainsi du prix à payer — par ailleurs, qui semble tout à fait raisonnable dans ce cas de figure — pour avoir choisi des probabilités au plus proche de la physique et qui sont aussi à l'origine de nombreux atouts. Deux solutions sont envisageables quand il semble souhaitable de contourner ce comportement. Premièrement, pour les solides très conducteurs de faible épaisseur, il s'agit de les modéliser par une simple interface sous l'hypothèse qu'il s'agit de corps thermiquement minces. Deuxièmement, il est toujours possible de choisir, pour les éléments qui posent problème, un autre jeu de probabilités d'exploration plus favorables au temps de calcul ; quitte à s'éloigner un peu de la physique, localement.

Comportement auto-adaptatif En résumé, il apparaît donc que le temps de calcul — de même que la qualité de l'estimation — ne dépend pas significativement du nombre d'éléments présents dans la zone d'influence, ou de leur taille. Cette approche permet ainsi à l'utilisateur de pouvoir décrire avec la plus grande fidélité possible les systèmes complexes à étudier, sans avoir à subir de surcoût prohibitif de temps de calcul pour prendre en compte les détails. En effet, la taille du chemin d'exploration — et donc le temps de calcul — ne semble être fonction que de la capacité des éléments à influencer sur l'observable comme l'a mis en évidence le changement de matériau du châssis. Ce lien de dépendance paraît aussi s'appliquer à la qualité de l'estimation qui varie cependant dans une moindre mesure, dans le cas présent.

Ainsi, l'exploration stochastique récursive est une méthode de simulation qui s'adapte automatiquement à l'étendue, la complexité et au degré de détails du modèle, en ne considérant que les éléments nécessaires à l'estimation souhaitée. Cette caractéristique est d'autant plus utile lors de simulations ou d'optimisations de systèmes complexes. En effet, par définition, il est particulièrement difficile pour un utilisateur de différencier *a priori*, au sein de ces derniers, les éléments qui ont une influence significative sur la sonde — ou la fonction objectif — de ceux qui peuvent être négligés.

5.1.5 Outil d'illustration : le *Module d'Echangeur* à plaques

Dans la suite de ce manuscrit, les cas d'illustration ont pour contexte d'ingénierie les échangeurs de chaleur à plaques. Ils sont réalisés par assemblage en série de *Modules d'Echangeur* entre deux flasques aux extrémités (Fig. 5.14). Ainsi, l'échangeur obtenu comporte autant de passes qu'il y a de modules.

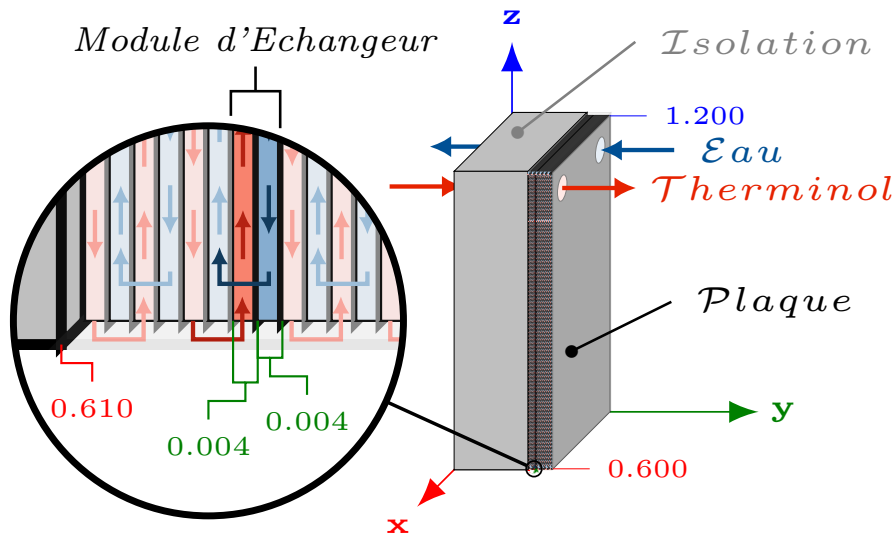


FIGURE 5.14 – Schéma en coupe d'un *Module d'Echangeur* assemblé avec d'autres — en couleurs pâles — pour former un échangeur à plaques contre-courant à n passes.

Les modules sont composés chacun de trois domaines distincts parmi lesquels deux modélisent les fluides caloporteurs à l'œuvre : de l'eau et une huile thermique, le Therminol VP-1. Ces deux fluides circulent en sens inverse pour modéliser la configuration "contre-courant" de l'échangeur. Le dernier domaine — appartenant à la classe des domaines solides — modélise quant à lui une enveloppe d'isolation thermique entourant l'échangeur à plaques. Le caractère de simple illustration des cas construits permet de s'affranchir des corrugations, qui caractérisent le plus souvent les plaques d'échangeur. Ces dernières sont ainsi modélisées comme parfaitement planes. De plus, en faisant les hypothèses qu'elles constituent des corps thermiquement minces⁴ et que leur épaisseur est négligeable dans le problème thermique, il a été possible de les modéliser sous la forme d'interfaces séparant les domaines fluides plutôt que comme des domaines solides à part entière. Par ailleurs, les flasques permettent, dans la pratique, d'assurer la rigidité et la compression de l'empilement. Elles ont été modélisées de manière identique aux plaques de l'échangeur, à la différence de leur épaisseur (0.0100 m).

5.1.5.1 Eau (\mathcal{E})

L'eau a été choisie en tant que fluide caloporteur à destination des procédés industriels. Celle-ci est prise à une pression de 5.00 bar, ce qui lui permet d'être utilisable sous forme liquide jusqu'à 423 K (150 °C).

Propriétés En première approximation, ses propriétés thermiques sont considérées constantes et évaluées à une température de 373 K (100 °C) à l'aide des

4. La validité de cette hypothèse, qui nécessite que le nombre de BIOT (Bi) à leurs parois soit inférieur à 0.1, sera démontrée dans le paragraphe relatif aux plaques d'échangeur.

données publiées par l'IAPWS (The International Association for the Properties of Water and Steam) [135–138]. Ainsi, sa masse volumique est de 961 kg.m^{-3} , sa conductivité thermique de $0.682 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, sa capacité thermique massique de $4.21 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ et sa viscosité dynamique de $2.83 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$. De plus, les travaux de RUBENS et CURCIO permettent de considérer que l'eau est totalement opaque au rayonnement infrarouge [139, 140]. Elle circule à l'intérieur d'un canal rectangulaire de $4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ d'épaisseur, 0.600 m de large et 1.20 m de long. Ainsi, le diamètre hydraulique de celui-ci, $D_{hyd\varepsilon}$, a une valeur de $7.95 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Coefficients de convection (h_p^ε et h_{Tsoint}^ε) Le coefficient de convection est ensuite déterminé à l'aide d'une corrélation provenant de la littérature. Pour réaliser un exemple d'évaluation numérique de ce coefficient, nous considérons qu'un débit massique de 1.20 kg.s^{-1} d'eau circule à travers le *Module d'Echangeur*. Ceci induit une vitesse moyenne du fluide ($v_\varepsilon = 0.520 \text{ m.s}^{-1}$) qui se situe parfaitement dans la gamme de fonctionnement de ce type d'échangeur : 0.1 à 2 m.s^{-1} [141]. Avec un nombre de REYNOLDS supérieur à 5.00×10^3 (Eq. 5.5), l'eau circule en régime turbulent [142].

$$Re_\varepsilon = \frac{\rho_\varepsilon v_\varepsilon D_{hyd\varepsilon}}{\mu_\varepsilon} = 1.40 \times 10^4 \quad (5.5)$$

En complément de ceci, l'écoulement de fluide remplit les critères autres de validité de la corrélation de DITTUS et BOELTER [143]. Ceux-ci sont relatifs :

- au nombre de PRANDTL (Eq. 5.6) : $0.7 < Pr < 160$
- à une distance parcourue suffisante pour que le profil des vitesses soit totalement établi : $L/D_{hyd} \geq 10$

$$Pr_\varepsilon = \frac{\mu_\varepsilon c_{p\varepsilon}}{\lambda_\varepsilon} = 1.75 \quad (5.6)$$

Par conséquent, le nombre de NUSSELT associé (Nu) est calculé avec cette corrélation (Eq. 5.7). Dans celle-ci, une puissance de 0.4 est appliquée au nombre de PRANDTL, car l'eau est chauffée au contact de la paroi — elle aurait été de 0.3 en cas de refroidissement —.

$$Nu_\varepsilon = 0.023 Re_\varepsilon^{0.8} Pr_\varepsilon^{0.4} = 59.7 \quad (5.7)$$

Un nombre de NUSSELT de 59.7 est obtenu, ce qui permet d'évaluer les coefficients de convection — h_p^ε et h_{Tsoint}^ε qui sont de même valeur — entre l'eau et les parois du canal aux travers duquel elle s'écoule (Eq. 5.8).

$$h_p^\varepsilon = \frac{Nu_\varepsilon \lambda_\varepsilon}{D_{hyd\varepsilon}} = 5.12 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1} \quad (5.8)$$

Bien que ce coefficient de convection puisse paraître singulièrement élevé, il est tout à fait cohérent avec la gamme des valeurs décrite dans la littérature [141, 144, 145].

5.1.5.2 Therminol VP-1 – huile thermique (\mathcal{T})

Le Therminol VP-1 a été choisi car c'est l'une des huiles de référence dans les applications solaires — en particulier dans les technologies à concentration linéique — avec une gamme de températures d'exploitation comprise entre 285 et 673 K (entre 12 $^{\circ}C$ et 400 $^{\circ}C$). De plus, ses propriétés thermiques sont connues et accessibles [146–148].

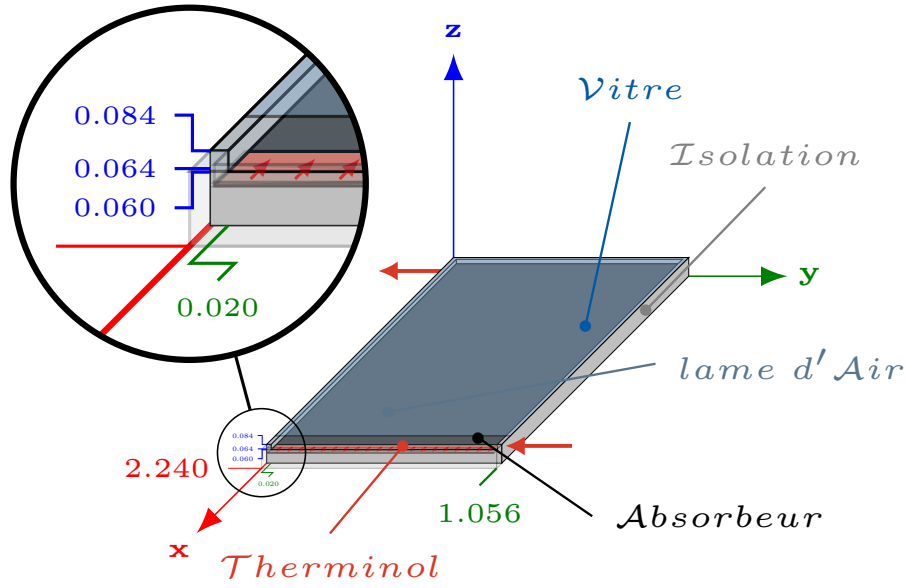
Propriétés Comme dans le cas de l'eau, les propriétés de cette huile sont considérées constantes et évaluées à une température de 378 K (105 $^{\circ}C$). Le Therminol est décrit comme ayant une masse volumique de 998 $kg.m^{-3}$, une conductivité thermique de 0.168 $W.m^{-1}.K^{-1}$, une capacité thermique massique de $1.78 \times 10^3 J.kg^{-1}.K^{-1}$ et une viscosité dynamique de $9.28 \times 10^{-4} kg.m^{-1}.s^{-1}$. Au vu de sa forte transmittance dans le proche infrarouge [149], le Therminol VP-1 a été considéré parfaitement transparent, à la différence de l'eau. Ainsi, le transfert radiatif est pris en compte entre les plaques, au travers des domaines rectangulaires de Therminol. Pour ce faire, l'émissivité au parois de ces domaines est linéarisée autour de la température d'évaluation des propriétés du Therminol (378 K).

Coefficients de convection ($h_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}}$ et $h_{\mathcal{I}soint}^{\mathcal{T}}$) Enfin, le coefficient de convection du Therminol VP-1 avec les parois est évalué par le même processus que celui utilisé pour l'eau. Les domaines possèdent des dimensions identiques à ceux de l'eau. En considérant un débit massique de 3.00 $kg.s^{-1}$ — ce qui lui procure une vitesse moyenne de 1.25 $m.s^{-1}$ —, on obtient ainsi un coefficient de convection qui vaut $1.61 \times 10^3 W.m^{-2}.K^{-1}$. Celui-ci s'applique aussi bien au niveau des plaques de l'échangeur qu'à celui des parois latérales du canal.

5.1.5.3 Plaques (\mathcal{P})

Les plaques d'échangeur que l'on souhaite modéliser font 0.600 m de large pour 1.20 m de long et $5.00 \times 10^{-4} m$ d'épaisseur ($e_{\mathcal{P}}$). Celles-ci étant constituées d'aluminium, elles présentent une conductivité thermique de 237 $W.m^{-1}.K^{-1}$, une émissivité $\epsilon_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}} = 0.0900$ et une réflectivité $\rho_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}} = 0.910$.

Corps thermiquement minces Dans le but de vérifier l'hypothèse de petit corps, il est nécessaire d'évaluer les nombres de BIOT associés aux plaques (Eq. 5.9). En prenant les valeurs numériques calculées à l'aide des exemples précédents, ces nombres adimensionnels sont bien inférieurs à la limite maximale de validité (0.1). De plus, il apparaît recevable de maintenir cette hypothèse simplificatrice jusqu'à des débits massiques de 19.2 $kg.s^{-1}$ pour l'eau et de 206 $kg.s^{-1}$ de Therminol VP-1. Ces débits représenteraient des vitesses moyennes bien supérieures au maximum communément recommandé : 2 $m.s^{-1}$ [141]. Par conséquent, l'hypothèse de plaques thermiquement minces semble toujours adaptée pour des conditions d'utilisation raisonnable du *Module d'Echangeur* proposé.

FIGURE 5.15 – Schéma en coupe d'un *Collecteur Solaire*.

$$Bi_{\mathcal{P}}^{\varepsilon} = \frac{h_{\mathcal{P}}^{\varepsilon} \times e_{\mathcal{P}}}{\lambda_{\mathcal{P}}} = 1.08 \times 10^{-2} \quad (5.9a)$$

$$Bi_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}} = \frac{(h_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}} + 4\sigma\epsilon_{\mathcal{P}}^{\mathcal{T}}T_{ref}^3\tau) \times e_{\mathcal{P}}}{\lambda_{\mathcal{P}}} = 3.40 \times 10^{-3} \quad (5.9b)$$

5.1.5.4 Isolation (\mathcal{I}_{so} , $\mathcal{I}_{so_{int}}$ et $\mathcal{I}_{so_{ext}}$)

Une couche d'isolation de 0.0100 m d'épaisseur entoure les *modules d'Echangeur* et recouvre les deux flasques aux extrémités. Un isolant de type laine de roche a été pris comme exemple ($\lambda_{\mathcal{I}_{so}} = 0.0450 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). De plus, ses interfaces internes et externes sont considérées être des corps noirs.

5.1.5.5 Environnement (\mathcal{I}_{env} et \mathcal{A}_{env})

L'environnement est composé de deux éléments : un domaine fluide (\mathcal{A}_{env}) qui représente l'air extérieur et une interface noire (\mathcal{I}_{env}) modélisant le sol et l'horizon "radiatif". La convection naturelle de l'ensemble des interfaces en contact avec l'air extérieur est modélisée par des coefficients de convection de valeur $10.0 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Enfin, ces deux éléments, \mathcal{I}_{env} et \mathcal{A}_{env} , ont une température constante de 293 K ($20 \text{ }^{\circ}\text{C}$) et une température de linéarisation du transfert radiatif de 330 K ($57 \text{ }^{\circ}\text{C}$). Cette dernière a été choisie de sorte à être globalement équidistante de la température de l'environnement et de celle des fluides caloporteurs.

5.1.6 Outil d'illustration : le *Collecteur solaire*

Pour développer des cas d'illustration dans le contexte de l'énergie solaire, un *Collecteur solaire* type a été modélisé (Fig. 5.15) et sa description est l'objet de cette section. Pour cela, nous nous sommes librement inspiré des caractéristiques techniques du modèle *Vitosol 200-F* proposé par l'entreprise Viessmann [150]. Celui-ci, utilisé avec une inclinaison à 45 degrés (ϕ_{sol}), pourra par la suite être assemblé avec plusieurs autres pour former un champ solaire.

Ce *Collecteur solaire* est composé de trois domaines et des interfaces les séparant. En plus du domaine solide modélisant la couche d'isolant thermique, il y a deux domaines fluides : le fluide caloporteur (ici, une huile thermique, le Therminol VP-1) et la couche d'air piégé entre l'absorbeur et le vitrage.

5.1.6.1 Environnement (\mathcal{I}_{env} et \mathcal{A}_{env})

Pour maintenir une cohérence, l'environnement est modélisé de manière tout à fait identique à l'environnement du *Module d'Echangeur* présenté précédemment.

5.1.6.2 lame d'air (\mathcal{A}_{sol})

Ce domaine fluide représente l'air contenu entre le vitrage, l'absorbeur et l'isolation sur le pourtour de la cavité. C'est ainsi un parallélépipède rectangle de 0.0200 m de hauteur, 1.016 m de largeur pour 2.20 m de longueur. Il est considéré parfaitement transparent au rayonnement infrarouge. De plus, une température de référence de 370 K (97 °C) a été prise en considérant que l'absorbeur sera à environ 393 K (120 °C) et que la vitre aura une température moyenne entre celles de ce dernier et celle de l'environnement.

Propriétés A 370 K (97 °C) et à pression atmosphérique, l'air possède une conductivité thermique de $0.0311 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, une masse volumique de 0.954 kg.m^{-3} , une capacité thermique massique de $1.01 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et une viscosité dynamique de $2.17 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ [151–153].

Coefficients de convection ($h_{\mathcal{V}}^{A_{sol}}$, $h_{Abs}^{A_{sol}}$ et $h_{\mathcal{I}_{sol_{int}}}^{A_{sol}}$) En complétant ces données avec l'accélération de la pesanteur (g) et le coefficient de dilatation thermique de l'air à cette température ($\beta_{A_{sol}}$) [151], il est alors possible d'évaluer le nombre de RAYLEIGH (Ra) pour une épaisseur de 0.0200 m et une différence de 50.0 K au sein de la lame d'air (Eq. 5.10).

$$Ra_{A_{sol}} = \frac{g\beta_{A_{sol}}\rho_{A_{sol}}^2 c_{pA_{sol}}}{\mu_{A_{sol}}\lambda_{A_{sol}}} \times \Delta T \times e_{A_{sol}}^3 = 1.45 \times 10^4 \quad (5.10)$$

Le nombre de RAYLEIGH étant supérieur à 2.00×10^3 , le transfert de chaleur au sein de cette lame d'air est gouverné par un régime de convection naturelle. Le nombre de NUSSELT est alors évalué à l'aide de la corrélation de HOLLANDS qui est dévolue aux cellules fermées rectangulaires et inclinées (Eq. 5.11). Celle-ci a été créée par HOLLANDS, en 1976, dans l'objectif d'améliorer la modélisation des collecteurs

solaires plans [154]. Assez logiquement, la configuration en présence entre donc pleinement dans son domaine de validité avec son nombre de RAYLEIGH inférieur à 10^5 .

$$\begin{aligned}
 Nu_{A_{sol}} &= 1 + 1.44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_{A_{sol}} \cos(\phi_{sol})} \right]^{>0} \left(1 - \frac{1708 \sin(1.8\phi_{sol})^{1.6}}{Ra_{A_{sol}} \cos(\phi_{sol})} \right) \\
 &\quad + \left[\left(\frac{Ra_{A_{sol}}}{5830} \right)^{1/3} \cos(\phi_{sol}) - 1 \right]^{>0} \\
 &= 2.21
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Où $[]^{>0}$ vaut 0 lorsque le contenu est négatif

Ainsi, le coefficient de convection naturelle pour l'ensemble des parois de la lame d'air ($h_{\mathcal{V}}^{A_{sol}}$, $h_{Abs}^{A_{sol}}$ et $h_{Iso_{int}}^{A_{sol}}$) vaut $3.40 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

5.1.6.3 Therminol VP-1 (\mathcal{T})

Au sein du *Collecteur solaire*, cette huile thermique s'écoule dans un canal rectangulaire de $4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ d'épaisseur, présent sous la totalité de l'absorbeur. La température de référence du fluide est de 378 K ($105 \text{ }^\circ\text{C}$), par conséquent ses propriétés sont considérées parfaitement identiques à celles décrites dans le cadre du *Module d'Echangeur*.

Coefficients de convection ($h_{Abs}^{\mathcal{T}}$ et $h_{Iso_{int}}^{\mathcal{T}}$) De plus, c'est aussi la corrélation de DITTUS et BOELTER qui a été implémentée pour déterminer son coefficient de convection à l'intérieur du *Collecteur solaire*. Ainsi, en prenant le même exemple d'un débit massique de 3.00 kg.s^{-1} , on obtient cette fois-ci une vitesse moyenne du fluide de 0.740 m.s^{-1} du fait de la largeur plus importante du canal. Cette diminution se répercute en toute logique sur le coefficient de convection qui vaut alors $1.33 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

5.1.6.4 Isolation (\mathcal{I}_{so} , $\mathcal{I}_{so_{int}}$ et $\mathcal{I}_{so_{ext}}$)

Cette isolation est constituée d'une couche d'isolant de type laine de roche ($\lambda_{\mathcal{I}_{so}} = 0.0450 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) sur cinq des six faces du *Collecteur solaire*. Ses interfaces ($\mathcal{I}_{so_{int}}$ et $\mathcal{I}_{so_{ext}}$) présentent des émissivités de 1.00, comme dans le cas de l'échangeur à plaques. Par conséquent, seule sa géométrie diffère. Elle présente une épaisseur de 0.0200 m sur le pourtour du panneau et de 0.0600 m au niveau de la face arrière (Fig 5.15).

5.1.6.5 Vitre (\mathcal{V})

La vitre recouvre la totalité du *Collecteur solaire*. Ainsi, elle mesure 1.056 m de large, 2.240 m de long pour $3.20 \times 10^{-3} \text{ m}$ d'épaisseur ($e_{\mathcal{V}}$).

Propriétés Le verre peut être considéré parfaitement opaque pour les longueurs d'onde supérieures à $5 \mu m$, comme mentionné précédemment. Or, le rayonnement émis jusqu'à $400 K$ ($127^\circ C$) se trouve, à au moins 93%, dans ce domaine opaque. Ainsi, il semble raisonnable, en première approximation, de considérer la vitre comme un corps noir vis-à-vis du rayonnement infrarouge. Néanmoins, en considérant la distribution spectrale du rayonnement solaire, le comportement du verre, et par conséquent celui de la vitre, est différent. En effet, il est possible de considérer qu'elle en transmet 90%, en absorbe 5% et réfléchit les 5% restants [128].

Terme source solaire ($\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x} \in \mathcal{V})$) Par conséquent, un léger terme source surfacique va être introduit au niveau de la vitre, en fonction de l'éclairement solaire incident ($\dot{q}_{Solaire}$), tel que $0.0500 \times \dot{q}_{Solaire}$.

Corps thermiquement mince Enfin, l'hypothèse qu'elle constitue un corps thermiquement mince est aussi vérifiée puisque la vitre présente un nombre de BIOT maximal de 0.0484 (Eq. 5.12). Ainsi, la vitre peut être modélisée sous la forme d'une simple interface.

$$Bi_{\mathcal{V}}^{A_{env}} = \frac{(h_{\mathcal{V}}^{A_{env}} + 4\sigma\epsilon_{\mathcal{V}}^{A_{env}}T_{ref}^3) \times e_{\mathcal{V}}}{\lambda_{\mathcal{V}}} = 0.0484 \quad (5.12a)$$

$$Bi_{\mathcal{V}}^{A_{sol}} = \frac{(h_{\mathcal{V}}^{A_{sol}} + 4\sigma\epsilon_{\mathcal{V}}^{A_{sol}}T_{ref}^3) \times e_{\mathcal{V}}}{\lambda_{\mathcal{V}}} = 0.0397 \quad (5.12b)$$

5.1.6.6 Absorbteur (\mathcal{Abs})

L'absorbteur est une plaque de cuivre de $1.00 \times 10^{-3} m$ d'épaisseur — pour $1.016 m$ de large (la_{sol}) et $2.200 m$ de long (lo_{sol}) — recouverte de peinture sélective sur sa partie supérieure. L'absorbteur possède, de ces deux côtés, une émissivité, dans l'infrarouge, de 0.150 et une réflectivité complémentaire de 0.850.

Terme source solaire ($\dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{x} \in \mathcal{Abs})$) Par ailleurs, sa peinture sélective lui confère une absorptivité de l'énergie solaire incidente de 90%. Ainsi, la part absorbée de l'énergie solaire incidente est modélisée sous la forme d'un terme source surfacique au niveau de l'absorbteur qui vaut : $0.900 \times 0.900 \times \dot{q}_{Solaire}$.

Corps thermiquement mince Il a été décidé représenter l'absorbteur comme une simple interface en faisant, ici aussi, l'hypothèse qu'il est thermiquement mince. Pour s'assurer de la validité de cette dernière, les deux nombres de BIOT ont été calculés avec les valeurs de l'exemple numérique (Eq. 5.13). Ils apparaissent très inférieurs à la limite de 0.1 nécessaire. Celle-ci serait atteinte pour un débit de Therminol VP-1 de $205 kg.s^{-1}$, ce qui représenterait une vitesse moyenne d'écoulement du fluide de $50.6 m.s^{-1}$, soit bien plus que ce qui est raisonnablement mis en œuvre. Ainsi, on peut considérer que cette hypothèse est valable dans toute la gamme d'utilisation du *Collecteur solaire*.

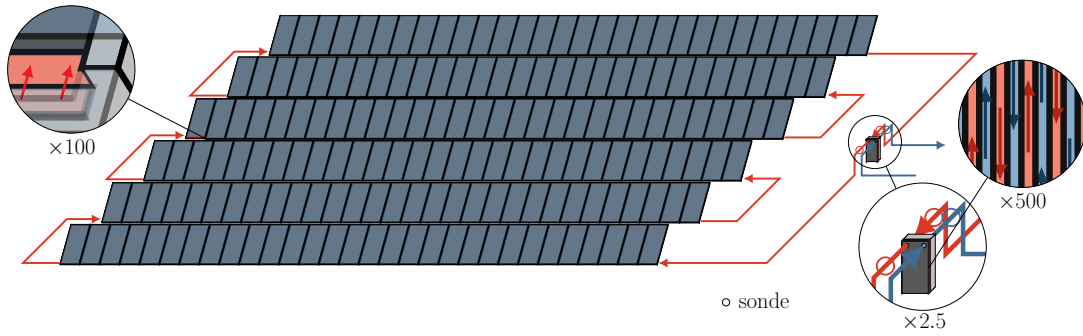


FIGURE 5.16 – Schéma d'un assemblage de vingt-et-un *Modules d'Echangeur*, couplé avec cent-quatre-vingt *Collecteurs Solaires* reliés en série.

$$Bi_{Abs}^{\mathcal{T}} = \frac{(h_{Abs}^{\mathcal{T}} + 4\sigma\epsilon_{Abs}^{\mathcal{T}}T_{ref}^3)\tau \times e_{Abs}}{\lambda_{Abs}} = 3.41 \times 10^{-3} \quad (5.13a)$$

$$Bi_{Abs}^{A_{sol}} = \frac{(h_{Abs}^{A_{sol}} + 4\sigma\epsilon_{Abs}^{A_{sol}}T_{ref}^3)A_{sol} \times e_{Abs}}{\lambda_{Abs}} = 1.31 \times 10^{-5} \quad (5.13b)$$

5.1.7 Capacité multi-échelle

5.1.7.1 Objectif

Evaluer la capacité de l'outil à traiter des problèmes multi-échelles, c'est-à-dire présentant un rapport d'échelle important.

5.1.7.2 Contexte d'ingénierie

Analyser les performances d'un système de production de chaleur solaire pour l'industrie constitué d'un champ de collecteurs solaires couplés à un échangeur de chaleur à plaques.

5.1.7.3 Scène

Cette centrale de production de chaleur solaire pour un procédé industriel est composée de deux sous-systèmes en interaction : un champ de 180 *Collecteurs solaires* et un échangeur à plaques constitué de 21 *Modules d'échangeur* (Fig. 5.16). Ainsi, cette scène présente un rapport d'échelle de 1.28×10^4 entre sa taille et celle des plus petits éléments modélisés — les canaux de fluide —. Il s'agit, par conséquent, d'un problème multi-échelle de premier ordre, en plus d'être multi-physique.

Champ solaire L'ensemble des *Collecteurs solaires*, connectés en série, forment un circuit fermé avec l'échangeur à plaques. Cette boucle est parcourue par un débit massique de 3.00 kg.s^{-1} de Therminol VP-1. De plus, le champ solaire est éclairé par une densité de flux solaire incident de 800 W.m^{-2} .

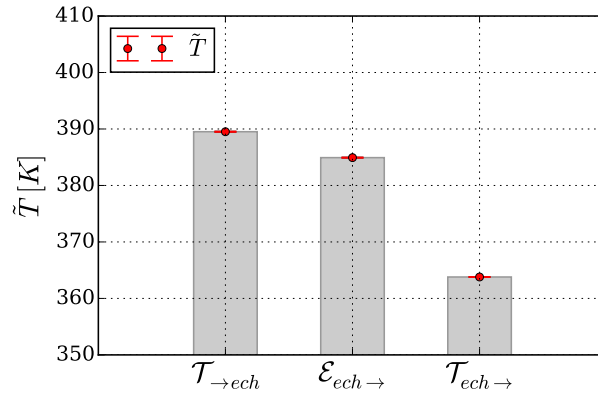


FIGURE 5.17 – Comparaison des estimations de température du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.

Echangeur L'échangeur présente, en plus, un flux contre-courant de 1.20 kg.s^{-1} d'eau à 5.00 bar destinée à être chauffée pour transmettre l'énergie solaire collectée vers des procédés industriels. Le fonctionnement de ces derniers est pris en compte de manière globale par un objectif de température de sortie de l'échangeur à 383 K ($110 \text{ }^\circ\text{C}$) et par une condition limite sur la température d'entrée de l'eau à 358 K ($85 \text{ }^\circ\text{C}$).

Environnement En outre, les dernières conditions aux frontières imposées concernent les températures de l'environnement, convectif et radiatif, qui sont toutes les deux fixées à 293 K ($20 \text{ }^\circ\text{C}$). Ainsi, l'ensemble des éléments de la scène fonctionne dans les conditions qui ont servi d'exemple lors de la présentation de chacun des modules. Par conséquent, les coefficients de convection utilisés ont les valeurs calculées précédemment.

5.1.7.4 Méthode d'étude

Au sein de cette scène, trois sondes ont été disposées pour y réaliser des estimations de température. Elles sont présentes sur le flux de Therminol en entrée de l'échangeur ($\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$), et sur les deux fluides caloporteurs en sortie ($\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$ et $\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$). Chacune de ces estimations a été obtenue à l'aide d'un million d'évaluations. De plus, une série de douze simulations permettra de réaliser une estimation des temps de calcul, associés à l'estimation avec 0.5 K d'erreur type au niveau de chaque sonde, en suivant le protocole décrit à la section 5.1.3, en début de ce chapitre.

Cette scène permet, par l'absence de *Modules de Bâtiment*, de s'affranchir de la corrélation implicite qui liait le nombre d'éléments et le rapport d'échelle dans les cas précédents. Ainsi, par la suite, ses performances seront analysées, en complément des précédentes, dans l'objectif d'évaluer les capacités de l'outil à traiter des problèmes multi-échelles.

TABLE 5.5 – Taille moyenne des chemins d’exploration et estimations des températures et du temps de calcul, en fonction de la position de la sonde dans la scène.

<i>Sonde</i>	$\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$	$\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$	$\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) [K]$	389.515	384.926	363.794
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	0.0461	0.0442	0.0234
$\langle i + j \rangle$	658.079	631.913	190.589
$\tilde{t}_{\tilde{\sigma}_{\tilde{T}}=0.5 K} [s]$	5.69	5.31	1.61
$\tilde{\sigma}_{\tilde{t}} [s]$	0.0771	0.0722	0.0218

5.1.7.5 Résultats

Température Les résultats font apparaître un flux de Therminol VP-1 qui entre dans l’échangeur à 389.515 K (116.365 °C) et en ressort à 363.794 K (90.644 °C). Celui-ci permet d’élever la température de l’eau, entrant à 358 K (85 °C), jusqu’à 384.926 K (111.776 °C) en dépassant de seulement 2 K l’objectif d’ingénierie que nous nous étions donné (Fig. 5.17). On peut noter que les estimations reflètent le comportement caractéristique attendu d’un échangeur à contre-courant : les fluides sortent à une température proche de celle à laquelle entre l’autre fluide caloporteur.

Performances de l’échangeur En complément, des grandeurs plus pertinentes pour évaluer les performances du système peuvent être calculées, telles que le pincement de l’échangeur, son efficacité et le rendement du champ solaire. Dans le cas présent, son pincement est peu important, avec une valeur autour de 5 K, et son efficacité vaut 85.4%.

Performances du champ solaire En outre, le champ de collecteurs transfère l’énergie solaire incidente au Therminol avec un rendement moyen de 42.7%. À titre de comparaison, la documentation technique du collecteur [150] permet de calculer, à l’aide des *coefficients de déperditions calorifiques* réglementaires, un rendement de fonctionnement de 30.0% à 389.515 K (116.365 °C) et de 52.8% à 363.794 K (90.644 °C) pour le collecteur. La moyenne de ces rendements (41.4%) apparaît alors tout à fait cohérente avec celui estimé par notre simulation. De plus, on remarque que le fait de ne pas avoir recouru, au moins pour une partie du champ, à une technologie de concentration solaire pour obtenir un tel niveau de température en sortie amène les *Collecteurs solaires* à fonctionner avec un rendement peu élevé. Néanmoins, dans le cadre d’un véritable projet d’ingénierie, la dimension économique du problème devra être considérée afin de prendre une décision sur la technologie la plus pertinente à adopter.

Temps de calcul et taille du chemin D’autre part, les temps de calcul — quelques secondes — et la taille moyenne des chemins d’exploration — quelques centaines d’interactions — ont tous les deux gagnés un ordre de grandeur par rapport aux cas d’illustration construits avec les *Modules de Bâtiment* (Tab. 5.5). Ceci met bien en évidence la complexité plus importante de cette scène par rapport aux précédentes. En effet, la présence du circuit fermé de Therminol introduit une boucle

TABLE 5.6 – Performances des cas d'illustration : $\mathcal{B}1$ à $\mathcal{B}50$ pour ceux utilisant les *Modules de Bâtiment*, Ch_{\Leftrightarrow} pour le châssis équivalent à la vitre et \mathcal{S} pour la centrale solaire.

Cas	$\mathcal{B}1$	$\mathcal{B}4$	$\mathcal{B}10$	$\mathcal{B}30$	$\mathcal{B}50$
Eléments	33	115	281	839	1.40×10^3
Rapport d'Echelle	1.28×10^3	2.80×10^3	4.18×10^3	1.15×10^4	1.43×10^4
RAM nécessaire [Mo]	10.9	11.2	11.4	12.7	14.2
$\langle i + j \rangle$	22.360	27.898	30.749	30.756	30.763
Cas	Ch_{\Leftrightarrow}	$\mathcal{T}_{\rightarrow ech} \in \mathcal{S}$	$\mathcal{E}_{ech \rightarrow} \in \mathcal{S}$	$\mathcal{T}_{ech \rightarrow} \in \mathcal{S}$	
Eléments	297	3.85×10^3	3.85×10^3	3.85×10^3	
Rapport d'Echelle	4.18×10^3	1.28×10^4	1.28×10^4	1.28×10^4	
RAM nécessaire [Mo]	11.4	20.9	20.9	20.9	
$\langle i + j \rangle$	30.745	658.079	631.913	190.589	

de rétroaction dans ce problème, ce qui le rend singulièrement complexe. Il est alors intéressant de noter la différence de stratégie pour traiter cette difficulté qu'apporte l'approche proposée par rapport aux méthodes de simulation plus répandues. Pour obtenir une estimation dans ce cas de figure, ces dernières requièrent généralement la mise en œuvre de résolutions itératives, jusqu'à atteindre une convergence de leurs résultats. A contrario, l'utilisation de l'exploration stochastique pour résoudre le problème par la méthode de Monte-Carlo permet d'obtenir la même estimation à partir d'une seule simulation.

Hétérogénéité spatiale de l'effort de calcul nécessaire De plus, on remarque que d'une sonde à une autre, le temps de calcul nécessaire à une estimation varie du simple au triple — entre 1.6 et 5.7 s —, tout comme la taille moyenne de son chemin d'exploration — entre 190 et 660 interactions —. En effet, celle-ci est proportionnelle à l'intensité de l'effet de la rétroaction sur l'observable et non à la simple présence de cette rétroaction au sein du problème. Ainsi, dans le cas d'une température peu affectée par une rétroaction, son estimation ne nécessitera pas un temps de calcul significativement plus important qu'en l'absence de cette dernière. Par exemple, si le débit d'eau augmente fortement, sa température en sortie dépendra alors beaucoup plus de celle à laquelle elle entre plutôt que de celle du Therminol. L'exploration se dirigera alors préférentiellement vers l'entrée de l'écoulement de l'eau plutôt que vers celui de Therminol — et donc moins vers la boucle de rétroaction qu'est le champ solaire —, réduisant par la même occasion la taille moyenne des chemins nécessaires, et ainsi le temps de calcul.

Capacité à traiter des problèmes multi-échelles Il est apparu que l'outil a pu traiter ce problème possédant un caractère multi-échelle indéniable. Néanmoins, sa simulation a nécessité la construction de chemins d'exploration bien plus longs que précédemment, et donc un temps de calcul en proportion. Nous allons alors tenter de déterminer si cette augmentation est le fruit de ce rapport d'échelle élevé et, plus globalement, comment le caractère multi-échelle impacte les performances de

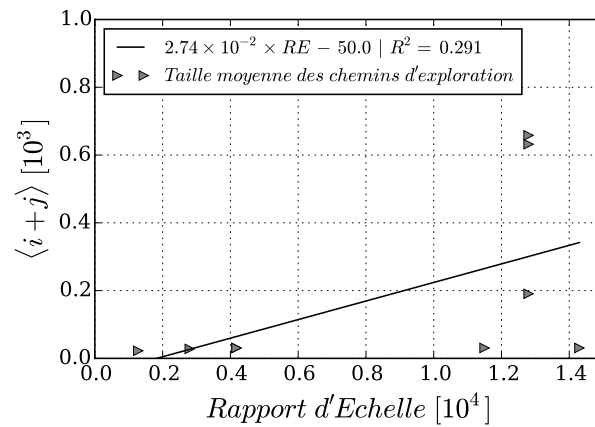


FIGURE 5.18 – Représentation des tailles moyennes des chemins d’exploration pour les cas d’illustration, en fonction de leur rapport d’échelle.

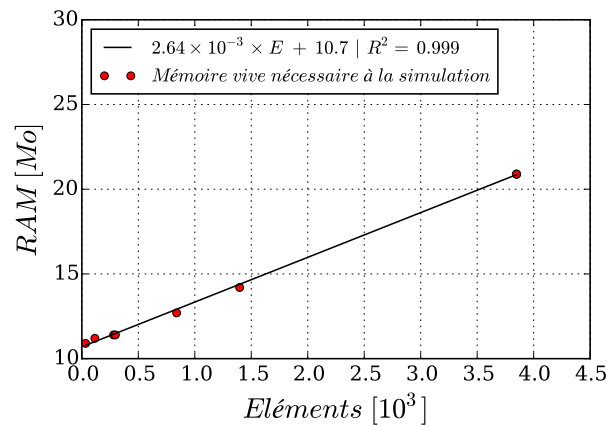


FIGURE 5.19 – Représentation de la mémoire vive nécessaire à la simulation des cas d’illustration, en fonction du nombre d’éléments qui constituent leur scène.

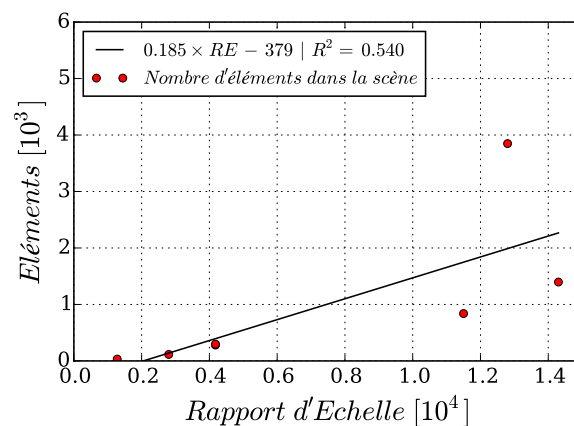


FIGURE 5.20 – Représentation du nombre d’éléments qui constituent les cas d’illustration, en fonction du nombre de leur rapport d’échelle.

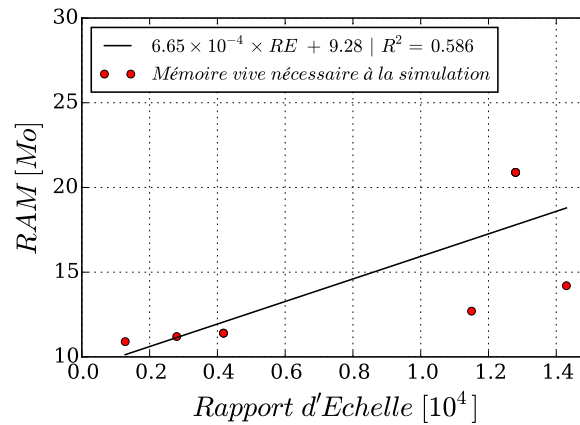


FIGURE 5.21 – Représentation de la mémoire vive nécessaire à la simulation des cas d'illustration, en fonction de leur rapport d'échelle.

l'approche développée. Pour ce faire, les performances de plusieurs cas d'illustration présentés auparavant sont comparées (Tab. 5.6).

Dépendance du temps de calcul Tout d'abord, la représentation de la taille moyenne des chemins d'exploration constatés, en fonction du rapport d'échelle de chaque problème, ne permet pas de faire apparaître une corrélation entre les deux (Fig. 5.18). Ceci pouvait être quelque peu anticipé par les observations sur le cas d'illustration de la centrale solaire. En effet, la longueur du chemin varie de manière très importante d'une sonde à une autre, au sein de la même scène possédant par nature un rapport d'échelle fixé. D'ailleurs, en positionnant une sonde pour estimer la température de l'eau juste après son entrée dans l'échangeur — qui serait donc très proche de la condition à la frontière —, des chemins de quelques interactions de long auraient probablement été obtenus. C'est-à-dire des chemins de taille similaire à ceux du cas avec un seul *Module de Bâtiment*, qui présente pourtant un rapport d'échelle dix fois plus faible. Ainsi, le temps de calcul plus important de ce cas ne semble dû qu'à sa complexité plus importante et pas à la valeur de son rapport d'échelle. Tout ceci nous montre que le temps de calcul des simulations, réalisées avec l'approche développée, paraît non corrélé avec le rapport d'échelle du problème abordé.

Dépendance du besoin en mémoire vive Par ailleurs, le besoin en mémoire vive des simulations est souvent un aspect à maîtriser dans les approches utilisant un maillage, pour pouvoir traiter des problèmes multi-échelles. Il est donc important d'analyser comment le caractère multi-échelle affecte cette indicateur dans notre cas. De manière tout à fait logique, l'outil mobilise une quantité de mémoire vive qui est corrélée au nombre d'éléments décrivant la scène qu'il simule (Fig. 5.19). Cette consommation de mémoire vive n'a pas été particulièrement optimisée lors de son développement. A titre indicatif, la corrélation affine mis en évidence — avec un coefficient de détermination de 0.999 — permet d'envisager de pouvoir traiter des

scènes comportant jusqu'à 10^5 à 10^6 éléments avec un ordinateur grand public. Or, à la différence des méthodes utilisant un maillage, la taille de chaque élément est parfaitement libre avec la méthode de Monte-Carlo. Ainsi, le nombre d'éléments constituant une scène n'est en aucun cas une conséquence du rapport d'échelle de celle-ci (Fig. 5.20). Ceci explique donc que l'espace mémoire nécessaire ne soit pas non plus fonction du rapport d'échelle du problème à traiter (Fig. 5.21).

En résumé, les performances de l'outil — temps de calcul et mémoire vive nécessaires — sont indépendantes du rapport d'échelle caractérisant le système simulé. Ainsi, ce comportement fait de l'approche mise au point une méthode disposant d'une habileté intrinsèque à traiter les problèmes multi-échelles qui est remarquable.

5.1.8 Auto-apprentissage : génération de modèles prédictifs réduits

5.1.8.1 Objectif

Présenter l'aptitude de l'outil à générer un modèle prédictif réduit d'une observable — telle que la température au niveau d'une sonde — en fonction de la valeur des conditions aux frontières du problème.

5.1.8.2 Contexte d'ingénierie

L'utilisation de ces modèles réduits permet d'améliorer les processus d'optimisation et de contrôle-commande, ou de simplifier les mesures par méthodes inverses et les analyses par propagation d'incertitudes.

5.1.8.3 Scène

Le problème précédent de la centrale solaire pour l'industrie est réutilisé, à l'identique, en tant qu'exemple de démonstration.

5.1.8.4 Méthode d'étude

Des modèles prédictifs réduits de la température du Therminol, en entrée et en sortie de l'échangeur, ainsi que celle de l'eau alimentant les procédés industriels vont être construits. Les trois sont obtenus à partir du même processus.

Estimation par la méthode de Monte-Carlo Tout d'abord, chaque estimation est calculée en faisant la moyenne des poids de Monte-Carlo, \hat{w}_h (Eq. 5.14).

$$\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} \hat{w}_h(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \quad (5.14)$$

Dépendance des poids aux informations explicites Or, le modèle du problème est un assemblage de modèles linéaires associés aux composants de la scène. Ainsi, chaque chemin d'exploration évalue son poids de Monte-Carlo sous la forme d'une combinaison linéaire des informations explicites à recueillir (Eq. 5.15).

$$\begin{aligned}
\hat{w}_h(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) &= c_{\mathcal{V},h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{V}}) \\
&\quad + c_{\mathcal{A}bs,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}bs}) \\
&\quad + c_{\mathcal{I}env,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}env}) \\
&\quad + c_{\mathcal{A}env,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}env}) \\
&\quad + c_{\mathcal{E} \rightarrow ech,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})
\end{aligned} \tag{5.15}$$

On peut introduire cette expression du poids dans celle de l'estimation de la température au niveau de la sonde. Ainsi, cette dernière peut s'écrire sous la forme d'une somme de moyennes des coefficients, chacune multipliant l'information explicite qui lui est associée (Eq. 5.16).

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) &= \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} c_{\mathcal{V},h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{V}}) + \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} c_{\mathcal{A}bs,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}bs}) \\
&\quad + \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} c_{\mathcal{I}env,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}env}) + \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} c_{\mathcal{A}env,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}env}) \\
&\quad + \frac{\sum_{h=1}^{h_{max}} c_{\mathcal{E} \rightarrow ech,h}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})}{h_{max}} \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Modèle prédictif réduit de l'observable Cette expression n'est rien d'autre qu'une somme d'estimation des coefficients d'un modèle prédictif réduit de l'estimation de l'observable (Eq. 5.17).

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) &= \tilde{c}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{V}}) \\
&\quad + \tilde{c}_{\mathcal{A}bs}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times \dot{q}_{src}^{2D}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}bs}) \\
&\quad + \tilde{c}_{\mathcal{I}env}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}env}) \\
&\quad + \tilde{c}_{\mathcal{A}env}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}env}) \\
&\quad + \tilde{c}_{\mathcal{E} \rightarrow ech}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Ainsi, à la place de réaliser directement l'estimation de la température au niveau de la sonde, il est possible de décomposer l'information collectée par les chemins d'exploration pour estimer chacun des coefficients d'un modèle réduit. Ceci revient en réalité à résoudre la classe entière des problèmes similaires à celui qui a été modélisé. En effet, ce modèle réduit permet alors d'estimer directement la température au niveau de la sonde pour des conditions aux frontières différentes, sans nécessiter de simulation supplémentaire. Cependant, l'utilisation de ce modèle prédictif réduit reste soumis au domaine de validité avec lequel il a été obtenu. En particulier, l'écart

maximal par rapport à la température de référence de la linéarisation du transfert radiatif doit être respecté.

Simulation Monte-Carlo Symbolique Cette méthode de résolution, se focalisant sur l'estimation de la dépendance de l'observable aux sources d'informations explicites plutôt que sur celle de sa valeur, est connue sous le nom de simulation Monte-Carlo Symbolique — *Symbolic Monte Carlo*, en anglais —. Elle fut initialement introduite sous le terme *Inverse Monte Carlo*, par DUNN en 1981 [155], car elle revient à résoudre l'ensemble d'une classe de problèmes inverses, en une seule fois. Sa dénomination a ensuite évolué pour mieux la différencier de l'utilisation itérative de simulations Monte-Carlo d'un modèle direct, dans le but de son inversion [156], dont la simulation Monte-Carlo Symbolique est une généralisation [72]. Après une première illustration appliquée à la mesure sans contact [155], la méthode s'est répandue dans des domaines essentiellement en lien avec la physique du rayonnement : le transfert radiatif en milieu participant [157–160], l'imagerie médicale par tomographie [161], la fluorescence X [162, 163] ou encore en physique des particules [164]. Un chapitre lui est consacré dans l'ouvrage de référence sur la méthode de Monte-Carlo, écrit par DUNN et SHULTIS [72].

Mise en œuvre pratique En pratique, l'estimation de ces coefficients revient à une analyse statistique des chemins d'exploration utilisés pour collecter les informations explicites, ainsi que du facteur appliqué au cours de la remontée d'information jusqu'à la sonde. Par conséquent, ceci ne demande que très peu d'opérations supplémentaires par rapport à une simple estimation de la valeur numérique d'une observable. De plus, cette analyse est réalisable au fur et à mesure que les chemins sont construits. Il n'est donc pas nécessaire de garder en mémoire l'ensemble des positions constituant l'ensemble des chemins pour mener l'analyse *a posteriori*. L'estimation d'un tel modèle réduit peut alors être obtenu en parallèle de celle de la valeur numérique de l'observable, et cela sans détérioration significative des performances de calcul. De plus, ceci évite aussi les difficultés d'avoir à stocker et gérer une quantité très importante de données. Dans le cadre de la présente illustration, les calculs sont réalisés avec un million d'histoires, de manière identique aux estimations précédentes.

Dépendance à l'ensoleillement Par ailleurs, les sources de chaleur surfaciques au niveau de la vitre (\mathcal{V}) et de l'absorbeur (\mathcal{Abs}) des collecteurs solaires s'expriment en fonction de la densité de flux solaire incidente. Il est alors possible de simplifier un peu l'expression en rassemblant ces deux composantes. On obtient ainsi un modèle qui est fonction de la densité de flux solaire incidente plutôt que de ces deux fractions absorbées (Eq. 5.18). Par exemple, dans le cadre d'une utilisation au coeur d'un procédé de contrôle-commande, il est ainsi plus intéressant d'avoir ce modèle prédictif réduit qui dépende directement de la densité de flux solaire incidente. En effet, celle-ci est bien plus aisée à mesurer que ces fractions absorbées.

TABLE 5.7 – Estimations des coefficients de chacun des modèles prédictifs réduits de la température au niveau des sondes.

<i>Sonde</i>	$\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$	$\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$	$\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$
$\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{S}}) / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}})$	0.126	0.109	0.0237
$\tilde{\sigma}_{\partial \tilde{\mathbf{T}} / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}})}$	3.32×10^{-4}	3.11×10^{-4}	1.52×10^{-4}
$\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{S}}) / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})$	0.156	0.134	0.0296
$\tilde{\sigma}_{\partial \tilde{\mathbf{T}} / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})}$	3.63×10^{-4}	3.41×10^{-4}	1.69×10^{-4}
$\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{S}}) / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})$	0.718	0.757	0.947
$\tilde{\sigma}_{\partial \tilde{\mathbf{T}} / \partial \mathbf{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})}$	4.50×10^{-4}	4.29×10^{-4}	2.25×10^{-4}
$\partial \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{S}}) / \partial \dot{\mathbf{q}}_{\text{Solaire}} [\text{K.W}^{-1}.\text{m}^2]$	0.0623	0.0534	0.0116
$\tilde{\sigma}_{\partial \tilde{\mathbf{T}} / \partial \dot{\mathbf{q}}_{\text{Solaire}}} [\text{K.W}^{-1}.\text{m}^2]$	3.20×10^{-5}	3.68×10^{-5}	2.79×10^{-5}

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) &= \tilde{c}_{\text{Solaire}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times \dot{q}_{\text{Solaire}} \\
&+ \tilde{c}_{\mathcal{I}_{env}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}}) \\
&+ \tilde{c}_{\mathcal{A}_{env}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}}) \\
&+ \tilde{c}_{\mathcal{E} \rightarrow ech}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\text{Où } \tilde{c}_{\text{Solaire}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = 0.0500 \times \tilde{c}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) + 0.810 \times \tilde{c}_{\text{Abs}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}})$$

Equivalence sensibilités aux sources d'information explicite D'autre part, ces coefficients sont indépendants des conditions aux frontières. Ainsi, mathématiquement, ils peuvent être assimilés aux sensibilités de l'observable par rapport à chaque source d'information explicite au sein du problème (Eq. 5.19). D'un point de vue physique, ces sensibilités donne ainsi à l'utilisateur la possibilité de classer objectivement les contributions en fonction de leur importance. Dorénavant, c'est sous cette forme de sensibilités qu'il sera fait référence à ces coefficients.

$$\tilde{c}_{\text{Solaire}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_{\text{Solaire}}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \tag{5.19a}$$

$$\tilde{c}_{\mathcal{I}_{env}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \tag{5.19b}$$

$$\tilde{c}_{\mathcal{A}_{env}}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \tag{5.19c}$$

$$\tilde{c}_{\mathcal{E} \rightarrow ech}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})}(\mathbf{x}^{\in \text{Sonde}}) \tag{5.19d}$$

5.1.8.5 Résultats

Il apparaît que les trois températures dépendent principalement de celle l'eau en entrée de l'échangeur avec des sensibilités allant de 0.718, pour le Therminol sortant du champs solaire, jusqu'à 0.947 pour l'huile thermique en sortie de l'échangeur

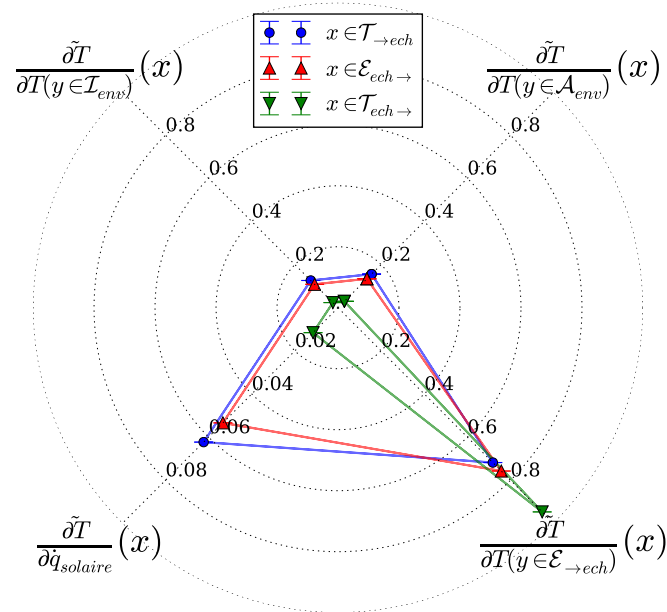


FIGURE 5.22 – Comparaison des estimations des coefficients composants les modèles prédictifs réduits de la température du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.

(Tab. 5.7). D'autre part, les observables possèdent des sensibilités à la densité de flux solaire incidente qui sont inférieures, jusqu'à environ un ordre de grandeur pour les deux premières sondes, par rapport à celles relatives aux températures. De plus, la figure 5.22 fait apparaître, de manière très claire, la forte similitude qui existe entre les modèles prédictifs réduits du Therminol en entrée de l'échangeur et de l'eau à sa sortie. Ceci témoigne de l'efficacité de fonctionnement de l'échangeur à contre courant qui a été modélisé.

Probabilités d'influence des conditions aux frontières Par ailleurs, on peut remarquer que, pour chaque observable, la somme des sensibilités aux températures est égale à l'unité. Cela signifie que les sensibilités de l'observable aux valeurs à la frontière de son propre champ correspondent à leur probabilité qu'un chemin d'exploration, fidèle à la physique, s'y arrête en partant de la sonde. Ainsi, en l'absence de source de chaleur, l'utilisation de modèles linéaires d'échange d'énergie permet d'établir que la valeur du champ de température n'est en fait qu'une moyenne barycentrique des températures à la frontière du problème. Les coefficients ne sont alors pas forcément fonction de la proximité géométrique de la sonde avec la frontière mais plutôt de leur capacité d'échange. Il apparaît tout aussi clairement, qu'en l'absence de source de chaleur, si toutes les frontières sont à une unique température, alors les sondes seront bien, elles aussi, à cette même température.

Analogie propagation par fonctions de Green Avec ce point de vue, les sources de chaleur potentielles deviennent alors des décalages du champ de tempéra-

TABLE 5.8 – Comparaison des températures prédites à l'aide des modèles réduits générés (T_{\downarrow}) avec celles estimées par une nouvelle exploration de la scène (\tilde{T}).

<i>Sonde</i>	$\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$	$\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$	$\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$
$T_{\downarrow}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) [K]$	374.794	372.301	361.177
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) [K]$	374.797	372.307	361.054
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	0.0444	0.0416	0.0203

ture, par rapport à sa valeur barycentrique. L'intensité de chacun de ces décalages étant comme "diffusé" dans le champ, au gré de la proximité d'échange qui existe entre les différents points et la position du terme source. Il est ainsi possible de se représenter le champ de température au sein d'un système comme la superposition du champ barycentrique, reliant les valeurs connues du champ — le plus souvent au niveau de frontières —, avec autant de champs de décalage qu'il y a de termes sources dans le système. Cette image se rapproche fortement de celle à l'origine de la modélisation de la conduction de la chaleur par des fonctions de GREEN [165, 166]. La principale différence est que l'on se situe, dans notre cas, à l'échelle d'un système entier et que plusieurs phénomènes d'échange de chaleur y interagissent.

Application : prédiction dans des problèmes similaires Pour résumer, l'exploration stochastique récursive peut auto-analyser son processus d'estimation d'une observable — c'est-à-dire les chemins d'exploration construits pour collecter l'information nécessaire — pour en générer un modèle réduit. En utilisant celui-ci, la valeur que prendrait cette observable peut alors être prédite dans un problème similaire — c'est-à-dire présentant des conditions aux frontières de valeur différente — sans recourir à une nouvelle exploration. Considérons le cas d'un passage d'une brume sur la centrale engendrant une baisse d'ensoleillement ($600 W.m^2$) et de la température de l'environnement — convectif et radiatif — à $285 K$ ($12 ^\circ C$). Dans ces conditions, par exemple, il est ainsi possible de prédire que l'eau devrait sortir de l'échangeur à $372.301 K$ ($99.151 ^\circ C$). A titre de comparaison, une simulation d'un million d'histoires de Monte-Carlo, avec ces dernières conditions aux frontières, estime cette température à $372.307 K$ ($99.157 ^\circ C$), avec une erreur-type de $0.0416 K$. Ceci met en lumière la très bonne qualité de la prédiction réalisée puisque celle-ci n'est distante de l'estimation que de 0.144 erreur-type. Cette adéquation entre les observables prédites et estimées se retrouve également pour les deux autres températures du Therminol (Tab. 5.8), d'autant plus en gardant à l'esprit que seuls les trois premiers chiffres sont significatifs d'un point de vue physique.

Application : loi de contrôle-commande Une autre application possible est celle dans le domaine du contrôle-commande. Considérons qu'un modèle réduit de la température intérieure d'un bâtiment ait été obtenu en présence de deux conditions aux frontières : la température extérieure et celle de l'eau délivrée par la chaudière au réseau de chauffage. Il deviendrait ainsi possible de déterminer facilement la température de consigne à demander à la chaudière pour obtenir la température désirée à l'intérieur, en fonction de celle mesurée par une sonde extérieure ou prédite par un service météo. Et ceci est alors réalisable à partir d'une seule d'estimation

détaillée de l'observable, qui a été potentiellement obtenu pour d'autres valeurs des conditions aux frontières. Toutefois, cet exemple serait encore plus pertinent en ayant appliqué l'approche en régime instationnaire.

Application : mesure par méthodes inverses En outre, cette capacité pourrait aussi bénéficier aux réalisations de mesures indirectes par méthodes inverses. En effet, en générant automatiquement le modèle réduit de l'observable mesurée ceci simplifie radicalement l'une des difficultés principales de la méthode : obtenir le modèle direct dans une configuration complexe [167–169].

Modèle d'une fonction de plusieurs observables Par ailleurs, un modèle prédictif réduit d'une grandeur, qui soit fonction d'une ou plusieurs observables, aurait aussi pu être directement généré. Ceci est particulièrement pratique car ce qui motive les ingénieurs à réaliser une simulation peut souvent être l'estimation d'une grandeur plus élaborée qu'une simple température locale. En considérant l'exemple d'illustration présent, on aurait ainsi pu obtenir un modèle réduit de la puissance collectée par le champ solaire, en fonction de l'ensoleillement, des températures de l'environnement et de celle de retour du circuit d'eau. De manière similaire, on aurait aussi pu construire un modèle du rendement de ce champ solaire ou de la température moyenne des absorbeurs des collecteurs solaires qui le composent. Dans les cas de bâtiment, le modèle d'un indice de confort thermique dans une pièce ou celui du flux total perdu au travers de l'enveloppe par conduction auraient pu être envisagés par exemple.

Enfin, il n'existe pas de véritable consensus sur la définition de l'apprentissage statistique au sein de la communauté scientifique. Toutefois, en compilant des travaux réalisés à Cambridge, Stanford et Princeton [170–172], il est possible de le définir comme une généralisation (un modèle), résultant d'une inférence inductive menée sur des données récoltées, qui permet de prédire le résultat de problèmes similaires inédits. Le comportement identifié fait de notre approche développée une méthode de simulation douée d'une capacité d'auto-apprentissage. Des possibilités offertes par l'obtention de ces modèles prédictifs réduits seront illustrées dans les deux sections suivantes. Dans un premier temps, ces modèles sont utilisés pour réaliser une analyse par propagation d'incertitudes. Par la suite, cette capacité à générer des modèles réduits sera mise en œuvre au sein d'une procédure d'optimisation.

TABLE 5.9 – Distributions gaussiennes modélisant les incertitudes présent dans la scène.

<i>Distribution</i>	$T(\mathbf{x}^{\in \mathcal{A}_{env}})$	$T(\mathbf{x}^{\in \mathcal{I}_{env}})$	$T(\mathbf{x}^{\in \mathcal{E} \rightarrow ech})$	$\dot{q}_{Solaire} [W.m^{-2}]$
$\langle \mathcal{D} \rangle$	293 [K]	293 [K]	358 [K]	800 [W.m ⁻²]
$\sigma_{\{\mathcal{D}\}}^2$	4.00 [K ²]	25.0 [K ²]	1.00 [K ²]	900 [W ² .m ⁻⁴]
$\langle \mathcal{D} \rangle - 2 \sigma_{\{\mathcal{D}\}}$	289 [K]	283 [K]	356 [K]	740 [W.m ⁻²]
$\langle \mathcal{D} \rangle + 2 \sigma_{\{\mathcal{D}\}}$	297 [K]	303 [K]	360 [K]	860 [W.m ⁻²]

5.2 Utilisations avancées permises par l'auto-apprentissage

5.2.1 Propagation d'incertitudes

5.2.1.1 Objectif

Montrer la capacité de l'outil à réaliser un calcul de propagation d'incertitudes depuis les conditions aux frontières, à partir d'un modèle prédictif réduit généré.

5.2.1.2 Contexte d'ingénierie

Seule une connaissance approximative de la réalité physique qui nous entoure est accessible. Ainsi, les ingénieurs ont souvent recours à des coefficients de sécurité forfaitaires pour assurer la longévité des systèmes. Néanmoins, cela entraîne leur sur-dimensionnement, ce qui les rend plus coûteux que nécessaire. Pour réaliser une conception plus efficiente, des méthodes probabilistes ont été mises au point pour étudier l'impact de ces incertitudes sur le comportement final du système. Cette analyse par propagation d'incertitudes permet de remplacer les coefficients de sécurité par une estimation d'un intervalle de confiance autour de l'observable. En outre, des travaux récents proposent d'utiliser les résultats de ce type d'analyse, directement au sein de processus d'optimisation, afin d'obtenir une méthode de conception dite robuste [173, 174].

5.2.1.3 Scène

Le modèle prédictif réduit du problème de la centrale solaire pour l'industrie est utilisé en tant qu'exemple de démonstration. Pour introduire des incertitudes, les conditions aux frontières sont redéfinies sous la forme d'une distribution gaussienne, centrée autour de leur valeur précédente.

Incertainces sur l'environnement Ainsi, la température de l'air extérieur (\mathcal{A}_{env}) est définie comme une distribution centrée autour de 293 K (20 °C) et avec une variance de 4.00 K². L'environnement radiatif (\mathcal{I}_{env}) nous semble plus sujet à variation, d'un endroit à l'autre de la scène, et sa connaissance plus incertaine que celle de l'environnement convectif. Pour refléter ceci, une distribution plus large a été considérée — avec une variance de 25.0 K² — autour de la même valeur moyenne que celle de l'air extérieur.

Incertitude sur la température du retour d'eau De plus, nous avons fait l'hypothèse que l'eau, au retour du procédé industriel ($\mathcal{E}_{\rightarrow ech}$), faisait état d'une température globalement stable. Ceci se traduit par une distribution resserrée — avec une variance de seulement $1.00 K^2$ — autour de $358 K$ ($85\text{ }^\circ C$).

Incertitude sur l'ensoleillement Enfin, la densité de flux solaire incidente ($\dot{q}_{Solaire}$) est une grandeur particulièrement variable par nature, notamment à cause de l'effet des conditions atmosphériques. Ainsi, celle-ci a été modélisée sous la forme d'une distribution centrée en $800 W.m^{-2}$ et présentant une variance de $900 W^2.m^{-4}$. Ceci signifie alors qu'environ 95% des mesures se situeront entre $740 W.m^{-2}$ et $860 W.m^{-2}$.

Les bornes des autres intervalles de confiance à 95% sont rassemblées dans la table 5.9.

5.2.1.4 Méthode d'étude

La méthode de Monte-Carlo, grâce à son caractère stochastique, est particulièrement adaptée pour réaliser ce type d'étude. D'ailleurs, le nombre important d'articles récents, qui la mettent en œuvre, en témoigne. Ils ont des domaines d'application aussi variés que la mécanique, l'acoustique, le nucléaire, l'aéronautique ou la gestion des risques entre autres [175–181]. En France, elle a été popularisée au travers d'un supplément dédié au guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM), rédigé en 2007, par le LNE et le CETIAT [182].

Propagation d'incertitudes par méthode de Monte-Carlo Cette méthode repose sur l'utilisation d'un modèle, exprimant la valeur de l'observable en fonction des sources d'incertitudes, qui doit être fourni par l'utilisateur. Les incertitudes sont quant à elles modélisées par des distributions, qui peuvent être empiriques. En effet, ces dernières, obtenues par une série de mesures, ne peuvent parfois pas être représentées correctement par une loi de probabilité théorique. C'est ainsi l'un des principaux avantages d'utiliser la méthode de Monte-Carlo dans ce contexte. En pratique, chaque histoire de Monte-Carlo consiste à évaluer la valeur de l'observable en échantillonnant aléatoirement chacune des distributions puis en les propageant dans le modèle. Ensuite, l'ensemble de ces histoires permettent d'estimer la distribution gaussienne — d'après le Théorème Central Limite — engendrée au niveau de l'observable et caractérisée par une moyenne et une variance. Dans le cas d'une température, la moyenne estimée sera notée \tilde{T} et l'estimation de sa variance $\tilde{\sigma}^2_{\{T_h\}}$. Néanmoins, plus le problème est complexe et plus il devient difficile pour l'utilisateur d'en construire le modèle nécessaire à l'étude.

L'approche développée, en générant un modèle réduit de l'observable, permet alors à l'utilisateur de s'affranchir de l'étape de construction du modèle. Ceci permet de simplifier considérablement la réalisation de ce type d'étude au sein de systèmes complexes.

TABLE 5.10 – Estimations des températures, des variances propagées et du temps de calcul, en fonction de la position de la sonde dans la scène.

<i>Sonde</i>	$\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$	$\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$	$\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$
$\tilde{T}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) [K]$	389.515	384.926	363.795
$\tilde{\sigma}_{\tilde{T}} [K]$	2.12×10^{-3}	1.87×10^{-3}	1.02×10^{-3}
$\langle T_h(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \rangle_{an} [K]$	389.515	384.926	363.794
$\tilde{\sigma}_{\{T_h\}}^2 [K^2]$	4.503	3.503	1.034
$\tilde{\sigma}_{\tilde{\sigma}^2} [K^2]$	6.35×10^{-3}	4.94×10^{-3}	1.46×10^{-3}
$\sigma_{\{T_h\} an}^2 [K^2]$	4.503	3.508	1.035
$\tilde{T} - 2\tilde{\sigma}_{\{T_h\}} [K]$	385.272	381.184	361.765
$\tilde{T} + 2\tilde{\sigma}_{\{T_h\}} [K]$	393.758	388.668	365.825
$\tilde{t}_{\tilde{\sigma}_{\sigma^2=1\%}} [s]$	0.0677	0.0677	0.0683
$\tilde{\sigma}_{\tilde{t}} [s]$	2.00×10^{-3}	2.00×10^{-3}	2.01×10^{-3}

Résolution analytique Par ailleurs, dans le cas d'illustration présent, les incertitudes suivent des distributions probabilistes exactes. Cela permet de pouvoir également résoudre le problème présent de manière analytique (Eq. 5.20 et 5.21). Ainsi, ces résultats analytiques serviront de références pour valider les distributions estimées.

$$\begin{aligned}
\langle T_h(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \rangle_{an} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_{\text{Solaire}}}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \times \langle \dot{q}_{\text{Solaire}} \rangle \\
&+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{I}_{env})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \times \langle T(\mathbf{y} \in \mathcal{I}_{env}) \rangle \\
&+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{env})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \times \langle T(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{env}) \rangle \\
&+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{E}_{\rightarrow ech})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \times \langle T(\mathbf{y} \in \mathcal{E}_{\rightarrow ech}) \rangle
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\{T_h\} an}^2(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) &= \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_{\text{Solaire}}}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \right)^2 \times \sigma_{\{\dot{q}_{\text{Solaire}}\}}^2 \\
&+ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{I}_{env})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \right)^2 \times \sigma_{\{T(\mathbf{y} \in \mathcal{I}_{env})\}}^2 \\
&+ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{env})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \right)^2 \times \sigma_{\{T(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{env})\}}^2 \\
&+ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y} \in \mathcal{E}_{\rightarrow ech})}(\mathbf{x} \in \text{Sonde}) \right)^2 \times \sigma_{\{T(\mathbf{y} \in \mathcal{E}_{\rightarrow ech})\}}^2
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Temps de calcul Enfin, le temps de calcul de cette analyse est évalué en prenant comme indicateur de qualité, l'obtention d'une estimation de la variance avec 1% d'erreur-type. A l'aide de douze de ces évaluations, une estimation de ce temps est ensuite déterminée.

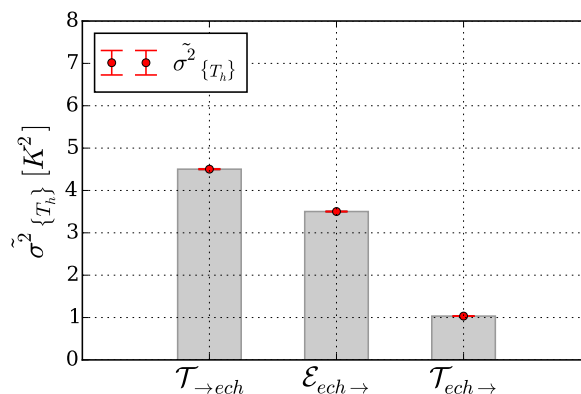


FIGURE 5.23 – Comparaison des estimations des variances de la température — propagées depuis les conditions aux frontières — du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.

5.2.1.5 Résultats

Température Les incertitudes propagées ont induit des estimations de température qui prennent la forme de distributions gaussiennes. Celle au niveau de la sonde "mesurant" le Therminol en entrée de l'échangeur ($\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$) est centrée en 389.515 K (116.365 °C) et possède une variance de 4.50 K^2 . En sortie de l'échangeur, la température estimée du Therminol ($\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$) possède une valeur moyenne de 363.795 K (90.645 °C) et une variance de 1.03 K^2 . Quant à la température de l'eau délivrée par l'échangeur ($\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$), elle présente des valeurs dispersées autour de 384.926 K (111.776 °C) avec une variance de 3.50 K^2 (Tab. 5.10).

Qualité des estimations D'autre part, les estimations de la valeur moyenne, ainsi que de la variance propagée, sont toutes distantes de leur référence analytique, d'une seule erreur-type au maximum. Cette bonne performance permet par conséquent de pouvoir avoir confiance dans la procédure utilisée.

Temps de calcul Par ailleurs, la réalisation de cette étude a nécessité un temps de calcul qui apparaît négligeable : quelques centièmes de secondes. De plus, la majeure partie de cette durée est dévolue à échantillonner chacune des distributions des conditions aux frontières. Or, le même lot d'échantillons peut être utilisé pour évaluer l'ensemble des observables souhaitées, au cours de chaque histoire de Monte-Carlo. Ceci réduit alors fortement la puissance de calcul nécessaire par observable, lorsque leur nombre augmente. Par conséquent, réaliser cette analyse ne nécessite pas d'effort informatique supplémentaire significatif, une fois le modèle réduit de l'observable obtenu ; c'est-à-dire une fois une estimation de l'observable réalisée puisque son modèle réduit peut être généré en parallèle de cette dernière.

Ainsi, cette capacité de l'outil à générer simplement un modèle réduit a permis de lever l'une des principales difficultés de la propagation d'incertitudes, au sein

de systèmes complexes. Cependant, ce modèle obtenu ne permet pour le moment d'étudier que des incertitudes portant sur les conditions aux frontières. Des travaux complémentaires seront à mener pour tenter d'étendre cette méthode aux paramètres internes du modèle probabiliste tels que les propriétés physiques, qui peuvent aussi être à l'origine d'incertitudes.

5.2.2 Optimisation basée sur la génération de modèles réduits

5.2.2.1 Objectif

Illustrer l'utilisation d'un modèle prédictif réduit, généré par l'outil, au sein d'une procédure d'optimisation.

5.2.2.2 Contexte d'ingénierie

Nous considérons le scénario suivant. L'installation décrite précédemment d'une centrale solaire, reliée à un échangeur, qui chauffe un réseau d'eau pour alimenter un procédé industriel est opérationnelle. Suite à une évolution de son procédé, l'industriel a dorénavant besoin d'obtenir un débit massique de 3.00 kg.s^{-1} d'eau à 383 K ($110 \text{ }^\circ\text{C}$). Ceci représente une augmentation de 150% du débit enthalpique avec lequel l'installation fonctionnait jusqu'à présent. Par conséquent, les fluides devraient circuler dans l'échangeur à environ 1.3 m.s^{-1} pour l'eau et le Therminol à 3.1 m.s^{-1} , ce qui dépasse la limite communément admise de 2 m.s^{-1} . Néanmoins, pour limiter le plus possible les coûts de la mise à niveau de l'installation, l'industriel souhaite modifier au minimum l'échangeur existant.

Paramètres à optimiser Ainsi, les paramètres qui feront l'objet d'une optimisation sont seulement le débit massique de Therminol (\dot{m}_τ) et l'épaisseur du canal de Therminol au sein de l'échangeur ($e_{\mathcal{T}_{ech}}$). En effet, cette dernière est due à la taille du joint utilisé entre les plaques [141]. Ainsi, il est possible de modifier ce paramètre, à moindre frais, en installant simplement des joints d'une épaisseur différente.

5.2.2.3 Scène

Pour ce faire, la scène se compose uniquement de l'échangeur à optimiser. Celui-ci se trouve identique à celui décrit dans la section 5.1.7; la valeur des paramètres à optimiser mise à part. L'autre principale différence se trouve dans le fait que le Therminol, en entrée de l'échangeur ($\mathcal{T}_{\rightarrow ech}$), est dorénavant une condition aux frontières puisqu'il la boucle de panneaux solaires n'est plus modélisée explicitement. Ainsi, le flux de Therminol alimentant l'échangeur va être considéré à une température proche de l'estimation obtenue en présence de la centrale solaire (393 K). De plus, les coefficients de convection des fluides traversant l'échangeur doivent être recalculés. On obtient ainsi, pour l'eau un coefficient de $1.06 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Celui du Therminol devra quant à lui être mis à jour pour chaque couple testé de débit et d'épaisseur du canal.

5.2.2.4 Méthode d'étude

Cette étude d'optimisation nécessite la mise en œuvre de plusieurs processus. Le premier est la méthode d'optimisation proprement dite dont l'objectif est d'identifier la valeur de chacun des paramètres permettant de minimiser une fonction coût qui en dépend. Pour cela, un deuxième processus entre en jeu. Son rôle est d'évaluer cette fonction pour un jeu de valeurs des paramètres à tester. Dans le cas présent, ce processus d'évaluation se base en partie sur des modèles réduits générés à partir d'une simulation Monte-Carlo, qui tient lieu de troisième processus. Cette dernière sert alors à estimer le comportement de l'échangeur dans les conditions envisagées. Chacun de ces processus va être détaillé dans la suite.

Les méthodes d'optimisation Elles peuvent être classées en deux catégories distinctes : les méthodes déterministes classiques et les méta-heuristiques. Les premières, dont la plus connue est probablement la méthode de descente de gradient, garantissent de trouver une solution optimale. Néanmoins, cet optimum peut n'être que local lorsqu'il en existe plusieurs. De plus ces méthodes sont souvent cantonnées à des problèmes d'optimisation de taille réduite à cause de l'effort important de calcul que représente l'obtention du gradient. Les secondes méthodes sont stochastiques, souvent inspirées de la nature, et combinent deux concepts pour explorer l'espace des solutions : l'intensification et la diversification. Comme l'a reporté BIANCHI en 2009, dans un état de l'art très complet à ce sujet [183], ces méta-heuristiques sont particulièrement recommandées pour l'optimisation de problèmes en présence d'incertitudes. Or, la simulation Monte-Carlo, du fait de son caractère stochastique, procure des estimations qui présentent de telles incertitudes. Ainsi, pour réaliser une optimisation basée sur ces simulations, il semble pertinent de recourir à une méthode appartenant à cette seconde catégorie.

Les méta-heuristiques Elles rassemblent un grand nombre d'algorithmes qui sont souvent inspirés de l'intelligence collective présente dans la nature. On y trouve par exemple les colonies de fourmis ou d'abeilles, les bancs de krills [184], les araignées sociales [185], les essaims de particules [186–188], les eco-systèmes insulaires [189], les systèmes immunitaires artificiels ou les microbiotes intestinaux [190–193].

L'optimisation par essaim de particules Parmi ceux-ci, l'optimisation par essaim de particules — *Particle Swarm Optimization* (PSO), en anglais — a souvent été utilisée en coopération avec des simulations Monte-Carlo dans de nombreux domaines, et notamment dans celui de l'énergie solaire [88, 194–198]. C'est pourquoi, ce type d'algorithme a été choisi pour réaliser la présente illustration d'optimisation.

Les algorithmes d'optimisation par essaim de particules ont été mis au point, au milieu des années 1990 par EBERHART et KENNEDY [199, 200]. Initialement conçus pour mener l'apprentissage de réseaux de neurones artificiels, leur capacité d'optimisation de problèmes complexes les ont rapidement amenés à être employés pour de nombreuses autres applications [201]. Cette méthode est basée sur l'idée de reproduire le vol des oiseaux en nuée recherchant leur nourriture. Pour ce faire, un

ensemble de particules sont positionnées aléatoirement dans l'espace du problème d'optimisation à explorer. Chaque paramètre à optimiser définissant une dimension de cet espace. Ainsi, les coordonnées de chaque particule représentent un jeu de valeurs — pour les paramètres — à tester par l'évaluation de la fonction coût choisie. A chaque itération, les particules se déplacent sous l'effet de l'attraction de deux points : la meilleure position de l'essaim — le comportement social — et leur meilleure position individuelle — le comportement cognitif —. La meilleure position correspondant au jeu de paramètres qui procure la plus faible valeur de la fonction coût. Cette exploration a alors une grande probabilité de trouver un optimum local. En outre, la multitude des particules lui procure autant de chances de ne pas rester piégé dans le premier optimum local trouvé.

Mise en œuvre de l'algorithme dans notre illustration Dans notre cas, des optimisations avec trois tailles d'essaim sont mises en œuvre : vingt-cinq, soixante-quinze et cent cinquante particules. De plus, une importance équivalente a été donnée aux composantes sociales et cognitives du déplacement en attribuant la valeur unité à leur paramètre respectif. Quant à leur inertie, elle a été fixée à 0.6. Par ailleurs, l'algorithme arrêtera son exploration soit après cinquante itérations de déplacement, soit à la suite de dix déplacements consécutifs sans amélioration de la meilleure position de l'essaim.

Fonction coût Cette fonction ($C(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}})$), dont le processus recherche le minimum, vise à estimer la puissance primaire "consommée" par l'utilisation de la configuration testée. Elle est constituée de deux quantités d'origine différente (Eq. 5.22) : la puissance solaire perdue par le champ de collecteurs ($\dot{Q}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}})$) et la puissance électrique consommée pour le pompage du Therminol dans le circuit ($\dot{W}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}})$). Alors que l'énergie solaire fait partie des sources primaires d'énergie, l'énergie électrique est, quant à elle, un vecteur énergétique. La production de ce vecteur a nécessité la transformation d'une quantité supérieure d'énergie primaire qu'il faut déterminer. Pour ce faire, on a recourt à l'efficacité de conversion d'une source primaire en électricité par le biais d'un cycle thermodynamique ($\eta_{Th \rightarrow El}$). En effet, en 2014 à l'échelle mondiale, l'électricité a été obtenue à plus de 77% par ce processus, d'après l'IEA [202]. De plus, cette efficacité de conversion est estimée à 33%, par la même agence dans l'édition 2016 de son rapport *Key world energy statistics* [202]. La puissance électrique consommée pour le pompage peut alors être convertie en puissance primaire équivalente.

$$C(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}}) = \frac{\dot{W}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}})}{\eta_{Th \rightarrow El}} + \dot{Q}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}}) \quad (5.22)$$

Chaleur solaire perdue La puissance primaire perdue par le champ de collecteurs solaires, sous forme de chaleur dans l'environnement, s'exprime en fonction de deux variables : le nombre de *collecteurs* présents (n_{sol}) et le rendement caractéristique du champ ($\eta_{sol,car}$) (Eq. 5.23).

$$\dot{Q}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}}) = n_{sol} \times (1 - \eta_{sol,car}) \times \dot{q}_{Solaire} l_{a_{sol}} l_{o_{sol}} \quad (5.23)$$

Puissance de pompage du Therminol D'autre part, l'évaluation de la fonction coût demande aussi d'estimer la puissance consommée pour les besoins de pompage du Therminol à travers le circuit. Celle-ci est fonction des pertes de charge totales présentes dans le réseau qui ont deux origines distinctes. Les premières sont les pertes de charge linéiques qui dépendent de la distance parcourue par le fluide et de son régime d'écoulement. Elles sont calculés par l'équation de DARCY-WEISBACH (Eq. 5.25). Les secondes sont les pertes de charge singulières qui traduisent l'énergie dissipée par des changements localisés de la géométrie de la canalisation. Ceux-ci peuvent être dûs à la présence de vannes, de robinets ou d'appareils de mesure par exemple. Néanmoins, lors d'une étape préliminaire de conception telle que celle dont il est question ici, aucun plan du réseau, permettant de répertorier ces éléments, n'est disponible. Ainsi, ces éléments vont être pris en compte de manière globale. Pour cela, les pertes de charge singulières sont considérées de valeur identique aux pertes de charge linéiques (Eq. 5.24).

$$\begin{aligned} \dot{W}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}}) &= \Delta P_{tot,circuit} \times \frac{\dot{m}_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \\ &= 2 \times \Delta P_{lin,circuit} \times \frac{\dot{m}_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\Delta P_{lin} = \Lambda \times \frac{l_{o_{parcours}}}{D_{hyd}} \times \frac{\rho_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T}}^2}{2} \quad (5.25)$$

L'équation de DARCY-WEISBACH (Eq. 5.25) fait intervenir le coefficient de perte de charge, Λ . Celui-ci s'obtient en utilisant la corrélation de BLASIUS puisque le Therminol s'écoule en régime turbulent au sein du circuit (Eq. 5.26).

$$\Lambda = 0.3164 \times Re^{-0.25} \quad (5.26)$$

Or les conditions d'écoulement (vitesse, diamètre hydraulique, longueur parcourue) étant différentes à travers le champ solaire et l'échangeur, il est nécessaire d'évaluer les pertes de charge dans chaque sous-système, de manière séparée. La perte de charge sur l'ensemble du circuit est alors la somme de celles dans ces deux portions (Eq. 5.27).

$$\Delta P_{lin,circuit} = \Delta P_{lin,sol} + \Delta P_{lin,ech} \quad (5.27)$$

La perte de charge linéique dans le champ solaire est ainsi gouvernée par l'équation 5.28 qui dépend du nombre de *collecteurs*, tandis que celle dans l'échangeur suit l'équation 5.29.

$$\Delta P_{lin,sol} = \Lambda(Re_{\mathcal{T},sol}) \times \frac{n_{sol} l_{o_{sol}}}{D_{hyd,sol}} \times \frac{\rho_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T},sol}^2}{2} \quad (5.28a)$$

Avec

$$v_{\mathcal{T},sol} = \frac{\dot{m}_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \times la_{sol} e_{\mathcal{T},sol} \quad (5.28b)$$

$$Re_{\mathcal{T},sol} = \frac{\rho_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T},sol} D_{hyd,sol}}{\mu_{\mathcal{T}}} \quad (5.28c)$$

$$\Delta P_{lin,ech} = \Lambda(Re_{\mathcal{T},ech}) \times \frac{n_{ech} lo_{ech}}{D_{hyd,ech}} \times \frac{\rho_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T},ech}^2}{2} \quad (5.29a)$$

Avec

$$v_{\mathcal{T},ech} = \frac{\dot{m}_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \times la_{ech} e_{\mathcal{T},ech} \quad (5.29b)$$

$$Re_{\mathcal{T},ech} = \frac{\rho_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T},ech} D_{hyd,ech}}{\mu_{\mathcal{T}}} \quad (5.29c)$$

$$n_{ech} = 21 \quad (5.29d)$$

Variabes à estimer par la méthode de Monte-Carlo Pour pouvoir obtenir les composantes de la fonction coût pour chaque configuration, il est nécessaire d'évaluer les deux variables dont elle dépend : le nombre de *collecteurs* du champ et son rendement caractéristique. Or, le nombre de *collecteurs* nécessaire pour chauffer le Therminol, depuis sa température de sortie de l'échangeur jusqu'à celle en entrée, dépend du rendement du champ (Eq. 5.30).

$$n_{sol} = \frac{\dot{m}_{\mathcal{T}} c_{p\mathcal{T}} \times (T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T} \rightarrow ech}) - T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T} ech \rightarrow}))}{\dot{q}_{Solaire} \eta_{sol,car} la_{sol} lo_{sol}} \quad (5.30)$$

Par conséquent, son rendement est la seule inconnue restant à estimer. Pour simplifier celle-ci, il est considéré que la moyenne des rendements du premier et du dernier *collecteur* est représentative du fonctionnement du champ dans son ensemble (Eq. 5.31).

$$\eta_{sol,car} = \eta_{sol}(T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T} \rightarrow ech})) + \eta_{sol}(T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T} ech \rightarrow})) \quad (5.31)$$

Pour estimer ce rendement, un modèle du *collecteur* a été construit à partir d'une analyse par transfert limitant (Eq. 5.32). Cette analyse met en évidence que la conduction à travers l'isolant thermique est limitante, au niveau de la face arrière et sur l'épaisseur du collecteur. Quant à la face avant, les échanges limitants sont ceux de l'absorbeur avec son environnement direct : la lame d'air — par convection — et la vitre — par rayonnement —.

$$\eta_{sol}(T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{F}})) = 1 - \frac{1}{\dot{q}_{Solaire} l_{a_{sol}} l_{o_{sol}}} \times \left\{ \begin{array}{l} h_{Abs}^{A_{sol}} (T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{F}}) - T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})) \\ + \epsilon_{Abs}^{A_{sol}} \sigma (T^4(\mathbf{y}^{\in \mathcal{F}}) - T^4(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})) \\ - \alpha_{V,Solaire} \dot{q}_{Solaire} l_{a_{sol}} l_{o_{sol}} \\ + \lambda_{Iso} (T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{F}}) - T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_{a_{sol}} l_{o_{sol}}}{e_{\mathcal{I}_{so},ar}} \\ + \frac{e_{\mathcal{T}_{sol}}}{e_{\mathcal{I}_{so},cotes}} \times 2 (l_{a_{sol}} + l_{o_{sol}}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Utilisation de modèles prédictifs réduits Pour résumer, l'estimation de la fonction coût d'une configuration envisagée nécessite donc de pouvoir connaître deux températures au niveau de l'échangeur : la température du Therminol en entrée de l'échangeur, et celle à sa sortie. Cependant, le fonctionnement de l'échangeur est caractérisé par un lien de "cause à effet" de la température d'introduction du Therminol — tout comme celle de l'eau, mais celle-ci est fixe — sur celles de sortie des fluides. Or, le système présente une contrainte puisqu'il faut s'assurer que l'eau aura atteint sa température de consigne en sortie (383 K). Ainsi, en possédant le modèle réduit de la température de sortie de l'eau il sera possible de déterminer celle qui est nécessaire au Therminol en entrée pour satisfaire la contrainte présente (Eq. 5.33). Ensuite, la température de sortie du Therminol pourra être estimée en connaissant son propre modèle réduit (Eq. 5.34). C'est pourquoi, une sonde a été placée à la sortie de chaque fluide pour en estimer leur modèle réduit ($\mathcal{E}_{ech \rightarrow}$ et $\mathcal{T}_{ech \rightarrow}$).

$$\tilde{T}(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T}_{\rightarrow ech}}) = \frac{1}{\frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T}_{\rightarrow ech}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{E}_{ech \rightarrow}})} \times \left\{ \begin{array}{l} T(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{\rightarrow ech}}) \\ - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{E}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}}) \\ - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{E}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}}) \\ - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E}_{\rightarrow ech}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{E}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E}_{\rightarrow ech}}) \end{array} \right. \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{ech \rightarrow}}) &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T}_{\rightarrow ech}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{T}_{\rightarrow ech}}) \\ &+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{I}_{env}}) \\ &+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{A}_{env}}) \\ &+ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E}_{\rightarrow ech}})}(\mathbf{x}^{\in \mathcal{T}_{ech \rightarrow}}) \times T(\mathbf{y}^{\in \mathcal{E}_{\rightarrow ech}}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

TABLE 5.11 – Comparaison des résultats obtenus par les optimisations et la solution "naïve".

<i>cas</i>	<i>naïf</i>	<i>ref</i>	25	75	150
<i>particules</i>	–	150	25	75	150
h_{max}	4.00×10^4	4.00×10^4	2.50×10^3	2.50×10^3	2.50×10^3
<i>iteration finale</i>	–	33	41	43	20
Σ estimations	–	4.95×10^3	1.03×10^3	3.23×10^3	3.00×10^3
Σ histoires	–	1.98×10^8	2.56×10^6	8.06×10^6	7.50×10^6
$\dot{m}_{\mathcal{T}}$ [$kg.s^{-1}$]	7.50	4.63	4.65	4.62	4.63
$e_{\mathcal{T}_{ech}}$ [m]	4.00×10^{-3}	3.69×10^{-3}	3.64×10^{-3}	3.64×10^{-3}	3.64×10^{-3}
$\tilde{C}(\dot{m}_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}_{ech}})$ [W]	5.84×10^5	4.52×10^5	4.43×10^5	4.42×10^5	4.43×10^5

Simplification induite par l'auto-apprentissage Le fait d'avoir accès à ces estimation de modèle réduit, plutôt qu'aux seules estimations numériques de température, permet de ramener le problème d'optimisation de trois à deux dimensions. En effet, en l'absence du modèle réduit de la température de l'eau en sortie de l'échangeur, une partie du problème d'optimisation aurait consisté à déterminer la température d'introduction adéquate du Therminol pour s'approcher, au plus près, de la consigne sur l'eau. Ainsi, cette température d'introduction du Therminol aurait constitué le troisième paramètre à optimiser. Les modèles réduits permettent de s'en affranchir, ce qui simplifie d'autant sa résolution pour l'essaim de particules. Cette simplification émerge de la capacité d'auto-apprentissage de l'approche et ne demande pas de surcoût significatif de calcul, par rapport à une simple estimation de température.

Mise en œuvre des simulations Les estimations de ces deux modèles réduits sont réalisées à partir de deux mille cinq cents histoires de Monte-Carlo. Ceci permet d'obtenir des modèles réduits procurant une estimation de la température avec une erreur-type inférieure à $0.500 K$. De plus, chacune des sensibilités peut être estimée avec une erreur-type inférieure à 0.0100 .

Optimisation de référence Enfin, les résultats seront comparés à une optimisation de référence réalisée avec cent cinquante particules, recourant chacune à quarante mille histoires de Monte-Carlo. Cette multiplication par un facteur seize du nombre d'histoires permet de produire des estimations présentant une erreur-type quatre fois plus faible.

Détermination du gain obtenu par l'optimisation Par ailleurs, les résultats des optimisations seront aussi comparés à la solution "naïve" du problème d'ingénierie proposé qui consiste simplement à augmenter le débit de Therminol proportionnellement à celui de l'eau — c'est-à-dire $+150\%$ —, sans rien changer par ailleurs.

5.2.2.5 Résultats

Optima identifiés Tout d'abord, les quatre optimisations réalisées se sont terminées suite à la stagnation de l'exploration puisqu'aucune n'a atteint la cinquantième itération. Elles ont ainsi toutes réussi à identifier un optimum dans l'espace.

Résultats de référence L'optimisation de référence a ainsi retenu un débit massique de Therminol de 4.63 kg.s^{-1} associé à un espace entre les plaques de l'échangeur de $3.69 \times 10^{-3} \text{ m}$. Cette configuration permet ainsi de diminuer de près de 23% l'énergie primaire nécessaire par rapport à la solution "naïve".

Cohérence des résultats D'autre part, les trois autres optimisations, réalisées avec seulement deux mille cinq cent histoires de Monte-Carlo, ont toutes permis d'identifier le même optimum. De plus, celui-ci est identique à celui de l'optimisation de référence. On peut néanmoins noter que la fonction coût possède une valeur inférieure (-2.21%) pour les optima identifiés avec deux mille cinq cent histoires de Monte-Carlo, par rapport à l'optimum de référence. Ceci peut s'expliquer par l'erreur-type plus importante — jusqu'à 2.5% — avec laquelle les estimations des composantes du modèle réduit ont été obtenues dans le cas le plus économe en histoires.

Efficacité de l'optimisation menée On peut donc en conclure que cette méthode est particulièrement efficace puisqu'il a suffi d'un essaim constitué de seulement vingt-cinq particules pour identifier l'optimum de ce problème. Toutefois, cette valeur est à mettre en regard du faible nombre de dimensions que comporte l'espace des solutions à explorer. En effet, la taille suffisante de l'essaim dépend fortement du nombre de paramètres à optimiser. Par ailleurs, cette méthode s'associe particulièrement bien avec notre approche puisqu'elle ne semble aucunement perturber par l'incertitude stochastique entourant les estimations produites. Avec sa configuration la plus économe, l'optimum a ainsi pu être identifié avec peu de ressources. En effet, seulement deux millions cinq cent mille histoires de Monte-Carlo ont été réalisées, c'est-à-dire environ cent fois moins que pour le cas de référence.

Configuration optimale identifiée Enfin, d'un point de vue ingénierie, on peut remarquer que l'optimum trouvé a une tendance à diminuer l'épaisseur du canal de l'échangeur alors que le débit massique a quant à lui augmenté. Le Therminol s'écoule alors à une vitesse de 2.10 m.s^{-1} à travers l'échangeur dans le cas optimal identifié. Il se trouve ainsi à la limite maximale de la gamme des vitesses communément recommandées pour cette technologie [141]. La position de cet optimum s'explique certainement par l'opportunité que représente l'augmentation du coefficient d'échange convectif du Therminol avec les plaques pour permettre de diminuer le nombre de collecteurs nécessaires en baissant la température d'entrée requise — 398 K (125 °C) dans la configuration optimale —. Et ceci même au prix d'un accroissement des pertes de charge au passage de l'échangeur.

Perspectives d'ingénierie Par conséquent, il semblerait opportun de ré-étudier ce problème d'ingénierie en prenant en considération les corrugations des plaques dont le rôle est d'intensifier l'échange convectif. En outre, l'utilisation d'une technologie de concentration solaire devrait aussi être envisagée car elle produirait un double effet positif : augmenter le rendement de fonctionnement du champ solaire et probablement diminuer la distance à parcourir pour le Therminol et donc sa puissance de pompage nécessaire.

Conclusion

Ce chapitre a présenté la résolution par l'approche développée de plusieurs problèmes complexes dans les domaines du bâtiment et de la chaleur solaire pour des procédés. Les analyses de ces simulations ont permis de mettre en valeur les potentialités de l'outil.

Dans la première partie, des combinaisons de *Modules de Bâtiment* ont permis d'illustrer la capacité multi-physique de l'approche, puis, dans un deuxième temps, sa faculté à s'adapter à la complexité des problèmes. En effet, le processus récursif de simulation dirige automatiquement l'exploration des systèmes vers leurs zones influentes. Ensuite, une centrale solaire thermique, couplée à un échangeur à plaques, a été considérée. Son étude a montré la remarquable capacité multi-échelle de l'outil puisque ses performances n'apparaissent pas corrélées au rapport d'échelle du problème. De plus, cette scène a aussi servi à mettre en lumière la possibilité de générer facilement des modèles réduits des observables, procurant de ce fait une capacité d'auto-apprentissage au processus de simulation.

La seconde partie du chapitre était, quant à elle, consacrée à l'illustration de deux utilisations avancées que cet auto-apprentissage permet. Pour cela, le cas de la centrale solaire thermique, assemblée avec son échangeur à plaques, a servi de contexte d'ingénierie. La première illustration a exposé la possibilité de réaliser des analyses par propagation d'incertitudes, à partir d'un modèle réduit généré automatiquement. Ceci simplifie grandement ce type d'analyse au sein de systèmes complexes puisque l'une de ces étapes les plus délicates est précisément la construction d'un modèle adéquat. La seconde utilisation consistait à mener une procédure d'optimisation en évaluant la fonction coût à partir de deux modèles réduits. L'un servait à déterminer la température d'introduction du Therminol permettant de satisfaire une contrainte portant sur celle de l'eau en sortie de l'échangeur. Le recours à ce modèle réduit a ainsi permis de prendre en compte cette contrainte en réduisant le nombre de paramètres à optimiser par le processus. Quant à l'autre, il permettait de prédire la température du Therminol, en sortie de l'échangeur, lorsque celui-ci rentrait à la température satisfaisant la contrainte précédente. Ceci a ainsi permis de s'affranchir de réaliser une seconde simulation pour obtenir cette température de sortie, à chaque évaluation de la fonction coût.

L'approche développée a ainsi montré qu'elle possédait des aptitudes particulièrement avantageuses pour simuler le comportement physique des systèmes complexes.

Conclusion

Les travaux méthodologiques menés lors de cette thèse de doctorat ont tenté de proposer une alternative plus appropriée que les quadratures à base discrétisation pour simuler les systèmes complexes. Ceci est parti du constat qu'alors que les ingénieurs et designers recourent à la simulation pour concevoir des systèmes de plus en plus complexes, ce type de quadratures montre ses limites par un coût informatique exorbitant pour traiter le grand nombre de sous-domaines nécessaires. En effet, ces méthodes se sont imposées il y a plusieurs décennies, dans un contexte de simulation de modèles extrêmement simplifiés qui étaient de fait dictés par la rareté des ressources informatiques disponibles. Pour constituer une alternative pertinente, la méthode doit faire preuve de capacités à traiter de manière efficiente les quatre types de problèmes caractéristiques des systèmes complexes :

- les problèmes multi-physiques ;
- les problèmes multi-échelles ;
- les problèmes au sein de domaines étendus ;
- les problèmes au sein de géométries intriquées.

Une approche classique a été choisie pour développer une solution à la problématique identifiée. Pour débiter, une recherche bibliographique sur les méthodes de simulation a été menée. Après avoir sélectionné la méthode la plus prometteuse, i.e. la méthode de Monte-Carlo, une réponse a été proposée pour lever le verrou technologique restreignant son utilisation dans notre contexte. Ensuite, dans l'objectif d'étudier les aptitudes de la méthode développée, il avait été choisi dès le début de l'implémenter dans une preuve de concept dédiée à la simulation des transferts thermiques couplés. Pour ce faire, l'étape préalable de modélisation des phénomènes de transfert thermique a été réalisée. Ensuite, les modèles obtenus ont été validés à l'aide de références analytiques. Dans un dernier temps, l'outil mis au point a été appliqué à des cas d'ingénierie reflétant les quatre types de problèmes ciblés pour analyser sa capacité à les aborder.

L'état de l'art sur les méthodes de simulation a montré que les quadratures stochastiques sans discrétisation, appelées aussi méthode de Monte-Carlo, étaient prometteuses pour notre contexte. En effet, elles présentent un taux de convergence avantageux pour résoudre les problèmes avec plus de trois dimensions. De plus, elles

sont connues pour être adaptées aux simulations en géométries compliquées. Cette étude bibliographique a mis aussi en évidence l'intérêt du couplage homogène de méthodes pour traiter les problèmes multi-physiques et multi-échelles. Néanmoins, il est apparu que l'utilisation de ce type de couplage avec des méthodes de Monte-Carlo était restreinte par la difficulté d'obtention du modèle probabiliste du problème à aborder.

Pour lever ce verrou technologique, une démarche systémique a ensuite été adoptée pour la modélisation probabiliste du problème. Celle-ci consiste à modéliser séparément des problèmes élémentaires qui servent ensuite de composants à assembler pour représenter le système complexe. Cette modularité obtenue a eu pour conséquence de compliquer l'étape suivante de simulation. Par conséquent, il a été choisi d'étendre l'utilisation de cette même approche pour construire l'algorithme d'évaluation de l'assemblage des modèles qui est au cœur de la méthode de Monte-Carlo. Le résultat ainsi obtenu est la réalisation de l'évaluation par une exploration stochastique des composants assemblés jusqu'à atteindre une condition limite.

L'élaboration de la preuve de concept dédiée aux transferts thermiques couplés a alors pris la forme de la création d'un environnement de modélisation et de simulation. Pour ce faire, les modèles probabilistes des champs de température et de luminance totale directionnelle ont été construits pour chacune des trois classes de composants : les volumes solides, les volumes fluides et les interfaces. Ensuite, l'algorithme d'évaluation de chaque modèle élémentaire a été implémenté et associé à sa classe de composant.

Par la suite, ces composants ont été validés pour permettre de bâtir la confiance nécessaire dans les résultats proposés par l'outil développé. Pour ce faire, chaque modèle de phénomène physique a tout d'abord été validé séparément, puis de manière conjuguée, sur douze problèmes académiques dont les résultats analytiques servaient de référence.

La preuve de concept a enfin été appliquée sur des cas d'illustration du domaine de la thermique du bâtiment et de l'énergie solaire thermique. Dans un premier temps, sa capacité à aborder les problèmes multi-physiques a été mise en lumière en identifiant la transition d'un mode de transfert limitant à un autre au sein d'un problème couplant la conduction, la convection, le rayonnement et le transport de chaleur. Ensuite, elle a fait preuve d'une aptitude remarquable à gérer les problèmes au sein de domaines étendus et/ou compliqués. En effet, son coût informatique de mise en œuvre ne dépend pas du problème global mais seulement de la zone influençant l'observable estimée. En outre, ce coût n'apparaît que peu corrélé avec la finesse de description de cette zone. Comme de plus la zone est automatiquement identifiée, ceci en fait un l'outil de simulation auto-adaptative ce qui est très avantageux lorsque la complexité du système empêche le concepteur de la discerner *a priori*. Enfin, la méthode de simulation proposée a fait état d'une capacité multi-échelle d'intérêt avec un coût informatique qui ne semble que peu dépendant du rapport d'échelle du problème. L'ensemble de ces aptitudes font de l'approche développée une alternative

qui apparaît très prometteuse pour prendre le relais des quadratures à base de discrétisation pour la simulation des systèmes complexes.

En complément de ceci, cette méthode a manifesté un comportement pouvant s'apparenter à de l'auto-apprentissage. Elle a en effet été capable de généraliser le résultat d'une simulation au travers de la génération d'un modèle réduit permettant de prédire efficacement la valeur de l'observable pour des problèmes similaires. Les possibilités de ce résultat ont été illustrées, de manière non exhaustive, à travers deux exemples : un calcul de propagation d'incertitudes et un procédure d'optimisation. Les applications potentielles de cette fonctionnalité nous paraissent particulièrement prometteuses pour l'ingénierie et mériteraient donc d'être explorées plus en profondeur ; de même que les moyens de la perfectionner. A cet effet, les très récents travaux de GALTIER [160] suggèrent qu'il pourrait être possible de générer des modèles réduits qui dépendent aussi de paramètres internes au problème : conductivité thermique, coefficient de convection ou débit massique par exemple.

L'outil, développé en tant que preuve de concept, est dès à présent exploitable pour mener des études numériques d'ingénierie dans le champ des transferts thermiques. Toutefois, son domaine de validité demeure, pour autant, assez restreint et pourrait être étendu en complétant ces travaux dans plusieurs directions.

A court terme, celle qui apparaît la plus accessible est l'ajout de la dimension temporelle pour traiter les problèmes en régime instationnaire. Cette nouvelle dimension sera alors traitée de manière analogue aux autres dimensions, comme FARGES l'a montré dans le domaine du transfert radiatif [87, 88]. Pour ce faire, l'exploration stochastique parcourra alors les instants antérieurs, en plus de l'espace, à la recherche des informations explicites disponibles aux limites : les conditions à la frontière et les conditions initiales. Une autre extension qui semble atteignable est la prise en compte de la conduction thermique comme phénomène tri-dimensionnel, en géométrie réelle. Pour ce faire, en guise de point de départ, on pourra se référer à la littérature disponible car la méthode de Monte-Carlo a déjà été utilisée pour résoudre des problèmes de conduction pure. Néanmoins, dans le domaine de la thermique, le cœur d'application de cette méthode demeure la modélisation du transfert radiatif, notamment en milieu participant. Ainsi, de très nombreuses références sont accessibles pour lever l'hypothèse de totale opacité ou transparence des domaines. D'autre part, il a été considéré que les propriétés physiques et les paramètres étaient constants par composant élémentaire pour réaliser cette preuve de concept. Afin de prendre en compte des hétérogénéités, il est déjà possible de modéliser le composant qui les comporterait comme un assemblage de composants du même type possédant chacun une propriété constante de valeur différente. Cela revient dans les faits à modéliser les hétérogénéités par morceaux. Si l'on veut obtenir une modélisation plus fine, il pourrait être pertinent d'étudier une adaptation des Algorithmes à Collisions Nulles. En effet, ils ont été proposés récemment par GALTIER et EYMET pour modéliser le transfert radiatif en présence de propriétés hétérogènes des milieux semi-transparents [80–82]. En outre, il apparaît aussi envisageable d'étendre cet environnement à

d'autres phénomènes physiques, à condition que leurs modèles soient linéaires, ou puissent être linéarisés.

Enfin, à plus long terme, une prise en compte de phénomènes non-linéaires au sein des systèmes apparaît souhaitable pour véritablement ouvrir le domaine de validité de l'utilisation de l'approche. Ces dernières années, DAUCHET et TERRÉE ont réalisé quelques premières avancées dans ce sens, néanmoins l'horizon d'une mise en œuvre pour simuler des problèmes d'ingénierie semble encore lointain. En effet, la solution identifiée est aujourd'hui fortement limitée par un phénomène "d'explosion" de la taille des arbres d'exploration nécessaires [89–91].

Bibliographie

- [1] l'encyclopédie libre Wikipédia. Système complexe. In *Wikipédia, l'encyclopédie Libr.* 2016. http://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_complexe.
- [2] The Free Encyclopedia Wikipedia. Complex system. In *Wikipedia, Free Encycl.* 2016. http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_system.
- [3] W K Hastings. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109, 1970.
- [4] Russel E Caflisch. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. In *Acta Numer.*, volume 7, page 1. 1998.
- [5] Klaus Mosegaard and Malcolm Sambridge. Monte Carlo analysis of inverse problems. *Inverse Probl.*, 18(3) :R29–R54, 2002.
- [6] Eric Goncalvès da Silva. *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering School, Institut Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [7] Nicolas Champagnat, Nicolas Champagnat, and Nicolas Champagnat. *Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en IMAFA*. INRIA, 2010.
- [8] Pierre Spiteri. Méthode des différences finies pour les EDP stationnaires. In *Tech. l'ingénieur*, volume AF 501, pages 1–11. 2002.
- [9] Pierre Spiteri. Méthode des différences finies pour les EDP d'évolution. In *Tech. l'ingénieur*, volume AF 501, pages 1–11. 2002.
- [10] Franck Pourroy. Apport des éléments finis à la conception mécanique. In *Tech. l'ingénieur*, pages 1–13. 1999.
- [11] Hervé Oudin. Méthode des éléments finis. Technical report, Engineering school Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [12] Vincent Manet. *Méthode des éléments finis*. Creative Commons 3.0 France, 2013.

- [13] Shuchu Han, Jiazhi Xia, and Ying He. Hexahedral shell mesh construction via volumetric polycub map. In *14th ACM Symp. Solid Phys. Model.*, pages 127–136, Haifa, Israel, 2010.
- [14] Tristan Baudouin, Jean-François Remacle, Émilie Marchandise, François Henrotte, and Christophe Geuzaine. A frontal approach to hex-dominant mesh generation. *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.*, 1(1) :8, 2014.
- [15] James Gregson, Alla Sheffer, and Eugene Zhang. All-hex mesh generation via volumetric PolyCube deformation. *Comput. Graph. Forum*, 30(5) :1407–1416, 2014.
- [16] David Bommès, Bruno Levy, Nico Pietroni, Enrico Puppo, Claudio Silva, Marco Tarini, and Denis Zorin. Quad-mesh generation and processing : A survey. *Comput. Graph. Forum*, 32(6) :51–76, 2013.
- [17] David Bommès, Marcel Campen, Hans-Christian Ebke, Pierre Alliez, and Leif Kobbelt. Integer-grid maps for reliable quad meshing. *ACM Trans. Graph.*, 32(4) :1, 2013.
- [18] S Gounand. *Introduction à la méthode des éléments finis en mécanique des fluides incompressibles*. Commissariat à l’Energie Atomique et aux Energies Alternatives, 2012.
- [19] Bruno Despres and Nicolas Seguin. Schémas numériques de volumes finis Sche de volumes finis. In *Tech. l’ingénieur*, pages 1–14. 2012.
- [20] Alexei Stoukov. *Introduction a la Mecanique des Fluides Numerique : Methode Volumes Finis*. ENSEEIHT, 2012.
- [21] G Allaire. *Transport et diffusion : Méthodes numériques*. Number 5. Ecole Polytechnique. Département de Mathématiques Appliquées, 2016.
- [22] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Clarendon Press, 1950.
- [23] Herbert B. Keller. Approximate Solutions of Transport Problems. II. Convergence and Applications of the Discrete Ordinate Method. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8(1) :43–73, 1960.
- [24] Burton Wendroff. On the Convergence of the Discrete Ordinate Method. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8(3) :508–513, 1960.
- [25] Herbert B. Keller. On the Pointwise Convergence of the Discrete-Ordinate Method. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 8(4) :560–567, 1960.
- [26] B. G. Carlson and K. D. Lathrop. Transport theory - The Method of Discrete Ordinates. In *Comput. React. Phys.* Ed. gordon edition, 1968.
- [27] W A Fiveland. Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 2(4) :309–316, 1988.

- [28] J. S. Truelove. Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 39(1) :27–31, 1988.
- [29] W A Fiveland and A S Jamaluddin. Three-dimensional spectral radiative heat transfer solutions by the discrete-ordinates method. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 5(3) :335–339, 1991.
- [30] A S Jamaluddin and P J Smith. Discrete-ordinates solution of radiative transfer equation in nonaxisymmetric cylindrical enclosures. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 6(2) :242–245, 1992.
- [31] W A Fiveland and J P Jessee. Comparison of Discrete Ordinates Formulation for Radiative Heat Transfer in Multidimensional Geometries. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 9(1) :47–54, 1995.
- [32] Pedro J. Coelho. Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 145 :121–146, 2014.
- [33] G. D. Raithby. Discussion of the finite-volume method for radiation, and its application using 3D unstructured meshes. *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, 35(4) :389–405, 1999.
- [34] K D Lathrop and B G Carlson. Discrete Ordinates Angular Quadrature of the Neutron Transport Equation. Technical Report 3186, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1964.
- [35] B. G. Carlson. Tables of equal weight quadrature eqn over the unit sphere. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1971.
- [36] W. A. Fiveland. Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures. *J. Heat Transfer*, 106(4) :699, 1984.
- [37] W. A. Fiveland. Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. *J. Heat Transfer*, 109 :809–812, 1987.
- [38] C. P. Thurgood. *A critical evaluation of the discrete ordinates method using HEART and Tn quadrature*. PhD thesis, Canada : Queen’s University., 1992.
- [39] M. Modest. *Radiative Heat Transfer*, volume 76. 2013.
- [40] C. P. Thurgood, a. Pollard, and H. a. Becker. The TN Quadrature Set for the Discrete Ordinates Method. *J. Heat Transfer*, 117(4) :1068, 1995.
- [41] G. D. Raithby and E. H. Chui. A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer in Enclosures With Participating Media. *J. Heat Transfer*, 112(May 1990) :415, 1990.

- [42] J Y Murthy and S R Mathur. A finite volume method for radiative heat transfer using unstructured meshes. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 12(12) :313–321, 1998.
- [43] J. Liu, H. M. Shang, and Y. S. Chen. Development of an unstructured radiation model applicable for two-dimensional planar, axisymmetric, and three-dimensional geometries. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 66(1) :17–33, 2000.
- [44] Rainer Koch and Ralf Becker. Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 84(4) :423–435, 2004.
- [45] J. S. Truelove. Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation. *J. Heat Transfer*, 109 :1048–1051, 1987.
- [46] Denis Lemonnier, Richard Fournier, and Cyril Caliot. Introduction aux méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif. Technical report, Ecole Thématique CNRS Rayonnement thermique en milieux semi-transparents, 2014.
- [47] Brian Hunter and Zhixiong Guo. Numerical smearing, ray effect, and angular false scattering in radiation transfer computation. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 81 :63–74, feb 2015.
- [48] M. Sakami, A. Charette, and V. Le Dez. Application of the discrete ordinates method to combined conductive and radiative heat transfer in a two-dimensional complex geometry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 56(4) :517–532, 1996.
- [49] Mohamed Sakami and Andre Charette. A new differencing scheme for the discrete-ordinates method in complex geometries. *Rev. Gen. Therm.*, 37 :440_449, 1998.
- [50] M. Sakami, A. Charette, and V. Le Dez. Radiative heat transfer in three-dimensional enclosures of complex geometry by using the discrete-ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 59(1-2) :117–136, 1998.
- [51] M Sakami and a Charette. Application of a modified discrete ordinates method to two-dimensional enclosures of irregular geometry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 64(3) :275–298, 2000.
- [52] David Joseph. *Modélisation des transferts radiatifs en combustion par Méthode aux Ordonnées Discrètes sur des maillages non structurés tridimensionnels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [53] David Joseph, Mouna El Hafi, Richard Fournier, and Bénédicte Cuenot. Comparison of three spatial differencing schemes in discrete ordinates method using three-dimensional unstructured meshes. *Int. J. Therm. Sci.*, 44(9) :851–864, 2005.
- [54] Guy R. McNamara and Gianluigi Zanetti. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys. Rev. Lett.*, 61(20) :2332–2335, 1988.

- [55] Xiaoyi He and Li-Shi Luo. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 55(6) :R6333, 1997.
- [56] Hudong Chen, Shiyi Chen, and William H Matthaeus. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Soltzmann method. *Phys. Rev. A*, 45(8) :5339–5342, 1992.
- [57] Y H Qian, D D’Humières, and P Lallemand. Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *EPL (Europhysics Lett.)*, 17 :479–484, 1992.
- [58] Guy R. McNamara, Alejandro L. Garcia, and Berni J. Alder. A hydrodynamically correct thermal lattice Boltzmann model. *J. Stat. Phys.*, 87(5-6) :1111–1121, 1997.
- [59] Xiaowen Shan. Simulation of the Rayleigh-Bénard Convection using a Lattice Boltzmann Method. *Phys. Rev. E*, 55(3) :2780–2788, 1997.
- [60] X He, S Chen, and G D Doolen. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit. *J. Comput. Phys.*, 146(1) :282–300, 1998.
- [61] Jeng-Rong Ho, Chun-Pao Kuo, Wen-Shu Jiaung, and Cherng-Jyh Twu. Lattice Boltzmann Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation. *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, 41(6) :591–607, 2002.
- [62] Wen-Shu Jiaung, Jeng-Rong Ho, and Chun-Pao Kuo. Lattice Boltzmann method for the heat conduction problem with phase change. *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, 39(2) :167–187, 2001.
- [63] Hamila Rihab, Nouri Moudhaffar, Ben Nasrallah Sassi, and Perr ?? Patrick. Enthalpic lattice Boltzmann formulation for unsteady heat conduction in heterogeneous media. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 100 :728–736, 2016.
- [64] Robert Prosser and R. S. Cant. On the Use of Wavelets in Computational Combustion. *J. Comput. Phys.*, 147(2) :337–361, 1998.
- [65] Todd Michal. CSE 2009 : Preprocessing for Industrial CFD : More Important Than You Might Think. *SIAM News*, 42(5), 2009.
- [66] S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. I. Ivanov, A. N. Kraiko, and G. P. Prokopov. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics. *Moscow Izd. Nauk.*, 1, 1976.
- [67] Bram van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method. *J. Comput. Phys.*, 32(1) :101–136, 1979.
- [68] H. Jasak, H. G. Weller, and A. D. Gosman. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 31(2) :431–449, 1999.

- [69] Nicholas Metropolis and S Ulam. The Monte Carlo Method. In *J. Am. Stat. Assoc.*, volume 44, pages 335–341. 1949.
- [70] Nicholas Metropolis. *The beginning of the Monte Carlo method. Special Issue 15*. Los Alamos Science, 1987.
- [71] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb. *Monte Carlo methods*. Wiley, 1964.
- [72] William L Dunn and J. Kenneth Shultis. *Exploring Monte Carlo Methods*. Academic Press, 2012.
- [73] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
- [74] A. Haji-Sheikh and E. M. Sparrow. The Floating Random Walk and Its Application to Monte Carlo Solutions of Heat Equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 14(2) :370–389, 1966.
- [75] U H Gerlach. *Linear mathematics in infinite dimensions : Signals, Boundary Value Problems and Special Functions*. 2017.
- [76] Fred J. Hickernell, Hee Sun Hong, Pierre L’Écuyer, and Christiane Lemieux. Extensible Lattice Sequences for Quasi-Monte Carlo Quadrature. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(3) :1117–1138, 2000.
- [77] Eric Veach and Leonidas J. Guibas. Optimally combining sampling techniques for Monte Carlo rendering. *Proc. 22nd Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech. - SIGGRAPH ’95*, pages 419–428, 1995.
- [78] Roland Assaraf and Michel Caffarel. Zero-variance principle for Monte Carlo algorithms. *Phys. Rev. Lett.*, 83(23) :4682, 1999.
- [79] Reuven Y. Rubinstein and Ruth Marcus. Efficiency of multivariate control variates in monte carlo simulation. *Oper. Res.*, 33(3) :661–677, 1985.
- [80] M. Galtier, S. Blanco, C. Caliot, C. Coustet, J. Dauchet, M. El Hafi, V. Eymet, R. Fournier, J. Gautrais, a. Khuong, B. Piaud, and G. Terrée. Integral formulation of null-collision Monte Carlo algorithms. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 125 :57–68, aug 2013.
- [81] V. Eymet, D. Poitou, M. Galtier, M. El Hafi, G. Terrée, and R. Fournier. Null-collision meshless Monte-Carlo—Application to the validation of fast radiative transfer solvers embedded in combustion simulators. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 129 :145–157, nov 2013.
- [82] Mathieu Galtier. *Approche statistique du rayonnement dans les milieux gazeux hétérogènes : de l’échantillonnage des transitions moléculaires au calcul de grandeurs radiatives*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2014.

- [83] M. Galtier, S. Blanco, J. Dauchet, M. El Hafi, V. Eymet, R. Fournier, M. Roger, C. Spiesser, and G. Terrée. Radiative transfer and spectroscopic databases : a line-sampling Monte Carlo approach. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 2015.
- [84] Maxime Roger. *Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo : illustrations en transfert radiatif*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [85] Jérémie De la Torre. *Calculs de sensibilités par méthode de Monte-Carlo, pour la conception de procédés à énergie solaire concentrée*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2011.
- [86] J. De la Torre, G. Baud, J. J. Bézian, S. Blanco, C. Caliot, J. F. Cornet, C. Coustet, J. Dauchet, M. El Hafi, V. Eymet, R. Fournier, J. Gautrais, O. Gourmel, D. Joseph, N. Meilhac, A. Pajot, M. Paulin, P. Perez, B. Piaud, M. Roger, J. Rolland, F. Veynandt, and S. Weitz. Monte Carlo advances and concentrated solar applications. *Sol. Energy*, may 2013.
- [87] Olivier Farges. *Conception optimale de centrales solaires a concentration : application aux centrales a tour et aux installations "beam down"*. PhD thesis, Mines Albi, 2015.
- [88] O Farges, J. J. Bezian, H Bru, M El Hafi, R Fournier, and C. Spiesser. Life-time integration using Monte Carlo Methods when optimizing the design of concentrated solar power plants. *Sol. Energy*, 113 :57–62, 2015.
- [89] Jérémie Dauchet. *Analyse radiative des photobioréacteurs*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2012.
- [90] Jérémie Dauchet, Jean-Jacques Bezian, Stéphane Blanco, Cyril Caliot, Julien Charon, Christophe Coustet, Mouna El Hafi, Vincent Eymet, Olivier Farges, Vincent Forest, Richard Fournier, Mathieu Galtier, Jacques Gautrais, Anaïs Khuong, Lionel Pelissier, Benjamin Piaud, Maxime Roger, Guillaume Terrée, and Sebastian Weitz. Monte Carlo and nonlinearities. *arXiv*, 2016.
- [91] Guillaume Terrée. *Méthode de Monte-Carlo et non-linéarités : de la physique du transfert radiatif à la cinétique des gaz*. PhD thesis, Mines Albi, 2015.
- [92] Pierre-Luc Drouin. Markov chain Monte Carlo and stochastic origin ensembles methods. Technical Report September, Defence Research and Development Canada, Ottawa, 2016.
- [93] A. Haji-Sheikh and E. M. Sparrow. The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods. *J. Heat Transfer*, 89(2) :121–130, 1967.
- [94] N. A. Simonov. Stochastic iterative methods for solving parabolic equations. *Sib. Math. J.*, 38(5), 1997.

- [95] S.K. Fraley, T.J. Hoffman, and P.N. Stevens. Monte Carlo method of solving heat conduction problems. Technical report, Oak Ridge National Laboratory (ORNL), Oak Ridge, TN (United States), dec 1977.
- [96] Francis J. Alexander and Alejandro L. Garcia. The Direct Simulation Monte Carlo Method. In *Comput. Phys.*, volume 11, pages 588–593. 1997.
- [97] MA Fallavollita, D Baganoff, and JD McDonald. Reduction of simulation cost and error for particle simulations of rarefied flows. *J. Comput. Phys.*, 109(1) :30–36, 1993.
- [98] G. Chen and Iain D. Boyd. Statistical Error Analysis for the Direct Simulation Monte Carlo Technique. *J. Comput. Phys.*, 126(2) :434–448, 1996.
- [99] Forrest B. Brown, William R. Martin, and Russel D. Mosteller. Monte Carlo - Advances and Challenges. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 2008.
- [100] John G. Michopoulos, Charbel Farhat, and Jacob Fish. Modeling and Simulation of Multiphysics Systems. *Comput. Inf. Sci. Eng.*, 5 :198–213, 2005.
- [101] Simon Portegies Zwart, Steve McMillan, Stefan Harfst, Derek Groen, Michiko Fujii, Breannan O Nuallain, Evert Glebbeek, Douglas Heggie, James Lombardi, Piet Hut, Vangelis Angelou, Sambaran Banerjee, Houria Belkus, Tassos Fragos, John Fregeau, Evghenii Gaburov, Rob Izzard, Mario Juric, Stephen Justham, Andrea Sottoriva, Peter Teuben, Joris van Bever, Ofer Yaron, and Marcel Zemp. A multiphysics and multiscale software environment for modeling astrophysical systems. *New Astron.*, 14(4) :369–378, 2009.
- [102] Guo-Wei Wei. Multiscale, Multiphysics and Multidomain Models I : Basic Theory. *J. Theor. Comput. Chem.*, 12(08), 2013.
- [103] David a. Kessler, Elaine S. Oran, and Carolyn R. Kaplan. Towards the development of a multiscale, multiphysics method for the simulation of rarefied gas flows. *J. Fluid Mech.*, 661 :262–293, 2010.
- [104] Tj Tautges, Hj Kim, Alvaro Caceres, and Rajeev Jain. Coupled Multi-Physics simulation frameworks for reactor simulation : A Bottom-Up approach. In *Int. Conf. Math. Comput. Methods Appl. to Nucl. Sci. Eng.*, 2011.
- [105] John Tencer and John R. Howell. Coupling radiative heat transfer in participating media with other heat transfer modes. *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2015.
- [106] Seung Wook Baek, Do Young Byun, and Shin Jae Kang. The combined Monte-Carlo and finite-volume method for radiation in a two-dimensional irregular geometry. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 43(13) :2337–2344, 2000.
- [107] Gerard L. Vignoles. A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 93 :707–719, 2016.

- [108] Richard Fournier, Stéphane Blanco, Vincent Eymet, Mouna El Hafi, and Christophe Spiesser. Radiative , conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm. *J. Phys. Conf. Ser.*, 676 :1–3, 2016.
- [109] J L Bonin, C Butto, J L Dufresne, J Y Grandpeix, J L Joly, A Lahellec, V Platel, and M Rigal. The Almeth Project Zoom Code : Results and Perspectives Simulation Environments. In *Build. Simul.*, 1991.
- [110] A M Dubois, J L Dufresne, R Ebert, J Y Grandpeix, J L Joly, A Lahellec, L Laret, G Lefebvre, J L Plazy, and M Pottier. The Model Coupling Problem : Methods Used in Some Building Analysis Tools and the Almeth Propositions. In *Build. Simul.*, 1991.
- [111] La Collaboration TEF-ZOOM. Le Formalisme d’Evolution par Transferts : une introduction au découpage de modèle et à l’analyse de retro-actions. Technical report, Laboratoire de Meteorologie Dynamique, Paris, 2004.
- [112] Jean-Michel Nataf and Rolf Ebert. On the Efficiency of Partitioning in Object-Based Simulation Mathematical Methods. In *Build. Simulation’93*, pages 259–265, 1993.
- [113] Rolf Ebert. *Developpement d’un environnement de simulation de systèmes complexes. Application aux bâtiments*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.
- [114] Etienne Wurtz. *Modelisation tridimensionnelle des transferts thermiques et aerauliques dans le batiment en environnement oriente objet*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, 1995.
- [115] Gilles Lefebvre, Elena Palomo, and Maria del Mar Izquierdo. Reproducing Thermal Coupling Between Components in a Generic Environment Like Matlab. *Build. Simul.*, 1997.
- [116] Gilles Lefebvre, Elena Palomo, and Ali Ait-Yahia. Substructured Modeling of Linear Thermal Systems : the Model Synthesis. *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, 39 :303–324, 2001.
- [117] Afef Gafsi and Gilles Lefebvre. A New Inverse Method Using Model Synthesis : Application to Thermal Systems. *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, 49(6) :513–536, 2006.
- [118] StarWest. EDStaR Framework, 2016. <http://edstar.lmd.jussieu.fr/>.
- [119] S Tada. Material design of aerated concrete - An optimum performance design. *Mater. Struct.*, 19(1) :21–26, 1986.
- [120] V. Sambou, B. Lartigue, F. Monchoux, and M. Adj. Thermal optimization of multilayered walls using genetic algorithms. *Energy Build.*, 41(10) :1031–1036, 2009.

- [121] Mario Ciampi, Francesco Leccese, and Giuseppe Tuoni. Multi-layered walls design to optimize building-plant interaction. *Int. J. Therm. Sci.*, 43(4) :417–429, 2004.
- [122] Meral Ozel. Thermal performance and optimum insulation thickness of building walls with different structure materials. *Appl. Therm. Eng.*, 31(17-18) :3854–3863, 2011.
- [123] Menghao Qin, Rafik Belarbi, Abdelkarim Aït-Mokhtar, and Francis Allard. Simulation of coupled heat and moisture transfer in multi-layer building materials. *Autom. Constr.*, 18(5) :624–631, 2009.
- [124] Kunze Ouyang and Fariborz Haghighat. A Procedure for Calculating Thermal Response Factors of Multi-layer Walls - State Space Method. *Build. Environ.*, 26(2) :173–177, 1991.
- [125] Youming Chen, Juan Zhou, and Jeffrey D. Spitler. Verification for transient heat conduction calculation of multilayer building constructions. *Energy Build.*, 38(4) :340–348, 2006.
- [126] Recep Yumrutas, Mazhar Unsal, and Mehmet Kanoglu. Periodic solution of transient heat flow through multilayer walls and flat roofs by complex finite Fourier transform technique. *Build. Environ.*, 40(8) :1117–1125, 2005.
- [127] Shengwei Wang and Youming Chen. Transient heat flow calculation for multilayer constructions using a frequency-domain regression method. *Build. Environ.*, 38(1) :45–61, 2003.
- [128] C. K. Hsieh and K. C. Su. Thermal radiative properties of glass from 0.32 to 206 ? ?m. *Sol. Energy*, 22(1) :37–43, 1979.
- [129] Vicente De P Nicolau and Fernando P Maluf. Determination of radiative properties of commercial glass. In *18th Conf. Passiv. Low Energy Archit. Florianóp. – BRAZIL, 7-9 Novemb. 2001 Determ.*, number November, pages 7–9, 2001.
- [130] John R. Howell, Robert Siegel, and Pinar Menguc. *Thermal Radiation Heat Transfer*. CRC Press, fifth edition, 2011.
- [131] Intel Corporation. Intel® Core i7-2700 Mobile Processor Series, 2012.
- [132] Eric Devin. Couples thermoélectriques - Données numériques d ' emploi. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33. 1999.
- [133] IEC. IEC 584-2 : Industrial thermocouples - Part 2 : Tolerances. Technical report, 1982.
- [134] A. Mangano and G. Coggiola. Stability of K-, N- and S-type thermocouples in the temperature range from 0 ? ?C to 1060 ? ?C. *Measurement*, 12(2) :171–182, 1993.

- [135] IAPWS. Revised Release on the IAPWS Industrial Formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam. Technical report, The International Association for the Properties of Water and Steam, Lucerne, Switzerland, 2007.
- [136] IAPWS. Release on the IAPWS Formulation 2008 for the Viscosity of Ordinary Water Substance. Technical report, The International Association for the Properties of Water and Steam, Berlin, Germany, 2008.
- [137] IAPWS. Revised Release on the IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use. Technical report, The International Association for the Properties of Water and Steam, Doorwerth, The Netherlands, 2009.
- [138] IAPWS. Release on the IAPWS Formulation 2011 for the Thermal Conductivity of Ordinary Water Substance. Technical report, The International Association for the Properties of Water and Steam, Plzen, Czech Republic, 2011.
- [139] H Rubens and E Ladenburg. Les propriétés optiques de l'eau dans le spectre infra-rouge. *Radium*, 1909.
- [140] Joseph a. Curcio and Charles C. Petty. The Near Infrared Absorption Spectrum of Liquid Water. *J. Opt. Soc. Am.*, 41(5) :302, 1951.
- [141] Zoé Minvielle, Nadia Caney, Philippe Bandelier, Philippe Marty, Jean Antoine Gruss, Claude Roussel, Philippe Bandelier, and Claude Roussel. Échangeurs de chaleur - Description. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33. 2014.
- [142] Yves Jannot. *Transferts thermiques*. Ecole des Mines Nancy, 2012.
- [143] F. W. Dittus and L. M K Boelter. Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, 12(1) :3–22, 1985.
- [144] André Bontemps. Échangeurs de chaleur - Définitions et principes généraux. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33, page 22. 2014.
- [145] André Bontemps and Jean-Francois Fourmigué. Échangeurs de chaleur Dimensionnement thermique. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33. 2014.
- [146] V. Siva Reddy, S.C. Kaushik, K.R. Ranjan, and S.K. Tyagi. State-of-the-art of solar thermal power plants—A review. *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 27 :258–273, nov 2013.
- [147] K. Vignarooban, Xinhai Xu, A. Arvay, K. Hsu, and A. M. Kannan. Heat transfer fluids for concentrating solar power systems - A review. *Appl. Energy*, 146 :383–396, 2015.
- [148] H. Benoit, L. Spreafico, D. Gauthier, and G. Flamant. Review of heat transfer fluids in tube-receivers used in concentrating solar thermal systems : Properties and heat transfer coefficients. *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 55 :298–315, 2016.

- [149] Todd P. Otanicar, Patrick E. Phelan, and Jay S. Golden. Optical properties of liquids for direct absorption solar thermal energy systems. *Sol. Energy*, 83(7) :969–977, 2009.
- [150] Viessmann. VITOSOL 200-F, 2013.
- [151] F. J. McQuillan, J. R. Culham, and M. M. Yovanovich. Properties of Dry Air At One Atmosphere. Technical Report June, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1984.
- [152] Y. S. Touloukian. *Thermophysical Properties of Matter*. 1970.
- [153] J. Hilsenrath, C. W. Beckett, W. S. Benedict, L. Fano, H. J. Hoge, J. F. Masi, and C. V. King. Tables of thermal properties of gases. *J. Electrochem. Soc.*, 103(5), 1956.
- [154] K. G. T. Hollands, T. E. Unny, G. D. Raithby, and L. Konicek. Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers. *J. Heat Transfer*, 98(2) :189, 1976.
- [155] William L Dunn. Inverse Monte Carlo Analysis. *J. Comput. Phys.*, 41(1) :154–166, 1981.
- [156] Klaus Mosegaard. Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling. *Inverse Probl.*, 14 :405–426, 1998.
- [157] William L Dunn. Inverse Monte Carlo Solutions for Radiative Transfer in Inhomogeneous Media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 29(I) :19–26, 1983.
- [158] S Subramaniam and MP Mengüç. Solution of the inverse radiation problem for inhomogeneous and anisotropically scattering media using a Monte Carlo technique. *Int. J. heat mass . . .*, 34(I) :253–266, 1991.
- [159] David A Ligon, Tuan W Chen, and James B Gillespie. Determination of aerosol parameters from light-scattering data using an inverse Monte Carlo technique. *Appl. Opt.*, 35(21) :4297–4303, 1996.
- [160] M. Galtier, M. Roger, F. André, and A. Delmas. A symbolic approach for the identification of radiative properties. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 2017.
- [161] Carey E Floyd, Ronald J Jaszczak, Kim L Greer, and R Edward Coleman. Inverse Monte Carlo as unified reconstruction algorithm for ECT. *J. Nucl. Med.*, 27(10) :1577–1585, 1986.
- [162] A. M. Yacout and William L Dunn. Application of the inverse Monte Carlo method to energy-dispersive X-ray fluorescence. *Adv. x-ray Anal.*, 30 :113–120, 1987.
- [163] M. W. Mickael. A complete inverse Monte Carlo model for energy-dispersive X-ray fluorescence analysis. *Nucl. Instruments Methods Phys. Res.*, 301 :523–542, 1991.

- [164] W L Dunn, V C Boffi, and F O Fogh Ludha. APPLICATIONS OF THE INVERSE MONTE CARLO METHOD IN PHOTON BEAM PHYSICS. *Nucl. Instruments Methods Phys. Res.*, 255 :147–151, 1987.
- [165] David W. Hahn and M. Necati Ozisik. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 3rd edition, aug 2012.
- [166] Kevin D. Cole, James V Beck, A. Haji-Sheikh, and Bahman Litkouhi. *Heat Conduction Using Green's Functions*. CRC Press, 2nd edition, 2010.
- [167] Michel Kern. Problèmes inverses. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33. 2010.
- [168] Daniel Petit and Denis Maillet. Techniques inverses et estimation de paramètres. Partie 1. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33, pages 1–18. 2008.
- [169] Daniel Petit and Denis Maillet. Techniques inverses et estimation de paramètres. Partie 1. In *Tech. l'ingénieur*, volume 33, pages 1–18. 2008.
- [170] Zoubin Ghahramani. Probabilistic machine learning and artificial intelligence. *Nature*, 521(7553) :452–459, 2015.
- [171] Trevor Hastie, Robert Tibshirani, and Jerome Friedman. The Elements of Statistical Learning. *Elements*, 1 :337–387, 2009.
- [172] Gilbert Harman and Sanjeev Kulkarni. *Reliable Reasoning : Induction and Statistical Learning Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 2007.
- [173] Jessie Birman. *Uncertainty quantification and propagation in Conceptual Aircraft Design : from deterministic optimisation to chance constrained optimisation*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2013.
- [174] Amina Aissani. *Optimisation fiabiliste des performances énergétiques des bâtiments*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016.
- [175] Andrew Chen and Chiachung Chen. Comparison of GUM and Monte Carlo methods for evaluating measurement uncertainty of perspiration measurement systems. *Meas. J. Int. Meas. Confed.*, 87 :27–37, 2016.
- [176] H.B. Motra, J. Hildebrand, and F. Wuttke. The Monte Carlo Method for evaluating measurement uncertainty : Application for determining the properties of materials. *Probabilistic Eng. Mech.*, 45 :220–228, 2016.
- [177] S. Mishra, Ch Schwab, and J. Šukys. Multi-level Monte Carlo finite volume methods for uncertainty quantification of acoustic wave propagation in random heterogeneous layered medium. *J. Comput. Phys.*, 312 :192–217, 2016.
- [178] Gi Young Han, Do Hyun Kim, Chang Ho Shin, Song Hyun Kim, Bo Kyun Seo, and Gwang Min Sun. On-the-fly Estimation Strategy for Uncertainty Propagation in Two-Step Monte Carlo Calculation for Residual Radiation Analysis. *Nucl. Eng. Technol.*, 48(3) :765–772, 2016.

- [179] El Abed, El Safadi, Olivier Adrot, Jean-Marie Flaus, and Monte Carlo. Advanced Monte Carlo Method for model uncertainty propagation in risk assessment. *IFAC-PapersOnLine*, 48(3) :529–534, 2015.
- [180] Hans Janssen. Monte-Carlo based uncertainty analysis : Sampling efficiency and sampling convergence. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 109 :123–132, 2013.
- [181] D Ghate and Mb Giles. Inexpensive Monte Carlo uncertainty analysis. *Recent Trends Aerosp. Des. . . .*, 2006.
- [182] M Désenfant, N Fischer, B Blanquart, and N Bédiat. Évaluation De L’Incertitude En Utilisant Les Simulations De Monte Carlo. In *13e congrès Métrologie*, 2007.
- [183] Leonora Bianchi, Marco Dorigo, Luca Maria Gambardella, and Walter J. Gutjahr. A survey on metaheuristics for stochastic combinatorial optimization. *Nat. Comput.*, 8(2) :239–287, 2009.
- [184] Amir Hossein Gandomi and Amir Hossein Alavi. Krill herd : A new bio-inspired optimization algorithm. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17(12) :4831–4845, dec 2012.
- [185] Erik Cuevas and Miguel Cienfuegos. A new algorithm inspired in the behavior of the social-spider for constrained optimization. *Expert Syst. Appl.*, 41(2) :412–425, feb 2014.
- [186] Yang Shi, Hongcheng Liu, Liang Gao, and Guohui Zhang. Cellular particle swarm optimization. *Inf. Sci. (Ny)*, 181(20) :4460–4493, oct 2011.
- [187] Mahdiyeh Eslami, Hussain Shareef, Mohammad Khajehzadeh, and Azah Mohamed. A Survey of the State of the Art in Particle Swarm Optimization. *Res. J. Applied Sci. Eng. Technol.*, (January), 2012.
- [188] Ferrante Neri, Ernesto Mininno, and Giovanni Iacca. Compact Particle Swarm Optimization. *Inf. Sci. (Ny)*, 239 :96–121, aug 2013.
- [189] Dan Simon and Senior Member. Biogeography-based optimization. *Evol. Comput. IEEE Trans.*, 12(6) :702–713, 2008.
- [190] Ilhem Boussaïd, Julien Lepagnot, and Patrick Siarry. A survey on optimization metaheuristics. *Inf. Sci. (Ny)*, 237 :82–117, jul 2013.
- [191] Iztok Fister, Xin-She Yang, and Janez Brest. A comprehensive review of firefly algorithms. *Swarm Evol. Comput.*, pages 1–13, jun 2013.
- [192] Iztok Jr Fister, Xin-she Yang, Iztok Fister, and Janez Brest. A Brief Review of Nature-Inspired Algorithms for. *Elektroteh. Vestn.*, 80(3) :1–7, 2013.
- [193] Pinar Civicioglu. Artificial cooperative search algorithm for numerical optimization problems. *Inf. Sci. (Ny)*, 229 :58–76, apr 2013.

-
- [194] R. Ashok Bakkiyaraj and N. Kumarappan. Optimal reliability planning for a composite electric power system based on Monte Carlo simulation using particle swarm optimization. *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, 47 :109–116, 2013.
- [195] Wei-Chang Yeh, Yi-Cheng Lin, Yun Ying Chung, and Mingchang Chih. A Particle Swarm Optimization Approach Based on Monte Carlo Simulation for Solving the Complex. *IEEE Trans. Reliab.*, 59(1) :212–221, 2010.
- [196] Hui Pan, Ling Wang, and Bo Liu. Particle swarm optimization for function optimization in noisy environment. *Appl. Math. Comput.*, 181(2) :908–919, 2006.
- [197] Freddy Ordonez, Cyril Caliot, Françoise Bataille, and Guy Lauriat. Optimization of the optical particle properties for a high temperature solar particle receiver. *Sol. Energy*, 99 :299–311, jan 2014.
- [198] Ze-Dong Cheng, Ya-Ling He, Bao-Cun Du, Kun Wang, and Qi Liang. Geometric optimization on optical performance of parabolic trough solar collector systems using particle swarm optimization algorithm. *Appl. Energy*, 148(Complete) :282–293, 2015.
- [199] R. Eberhart and J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. *Proc. Sixth Int. Symp. Micro Mach. Hum. Sci.*, pages 39–43, 1995.
- [200] J. Kennedy and R.C. Eberhart. A discrete binary version of the particle swarm algorithm. *1997 IEEE Int. Conf. Syst. Man, Cybern. Comput. Cybern. Simul.*, 5 :4–8, 1997.
- [201] R.C. Eberhart and Yuhui Shi. Particle Swarm Optimization : Developments, Applications and Resources. In *Evol. Comput. IEEE Trans.* IEEE, 2001.
- [202] IEA. Key world energy statistics. Technical report, International Energy Agency, 2016.

Table des figures

1.1	Matrice des catégories de quadratures.	7
1.2	Grille résultant de la discrétisation du domaine 2D Ω , avec des pas Δx et Δy , pour y appliquer la méthode des différences finies. Le champ de grandeur est obtenu aux nœuds de la grille.	10
1.3	Schéma des nœuds résultant de la discrétisation d'un domaine 1D, avec des pas Δx , pour y appliquer la méthode des différences finies. Le champ de température est obtenu au niveau des nœuds de la grille.	10
1.4	Champ de température à un instant $t_1 > 0$, au sein d'un domaine 1D, calculé par la méthode des différences finies avec un schéma numérique progressif en temps et rétrograde en espace.	12
1.5	Schéma d'un volume de contrôle Ω , de frontière $\partial\Omega$	15
1.6	Schéma des cellules résultant de la discrétisation d'un domaine 1D, avec des pas Δx , pour y appliquer la méthode des volumes finis. Le champ de température est obtenu au niveau des cellules et non des nœuds de la grille.	16
1.7	Champ de température à un instant $t_1 > 0$, au sein d'un domaine 1D, calculé par la méthode des volumes finis.	18
1.8	Logigramme de l'algorithme d'évaluation par la méthode de Monte-Carlo.	34
1.9	Diagramme de l'estimation par la méthode de Monte-Carlo de l'intégrale G : histoires un et deux.	35
1.10	Schéma du cas d'illustration "thermos de café" d'un problème de thermique couplée, présentant une double paroi qui enferme une couche d'atmosphère raréfiée immobile.	44
1.11	Schéma d'une approche par couplage homogène de méthodes à base de discrétisation pour traiter le cas d'illustration "thermos de café". Illustration d'un <i>effet de rayon</i> : la valeur d'un des sous-domaines n'est pas prise en compte par manque d'intersection avec l'une des directions discrètes utilisées par la méthode DOM.	45
1.12	Schéma d'une approche par couplage hétérogène de méthodes pour traiter le cas d'illustration "thermos de café" (histoires un et deux).	47

1.13	Schémas d'une approche par couplage homogène de méthodes sans discrétisation pour traiter le cas d'illustration "thermos de café" (histoires un et deux).	49
2.1	Schéma représentant la construction de chemins d'exploration pour évaluer la valeur en x_i d'un champ physique.	56
2.2	Logigramme de l'algorithme d'évaluation de la température (en régime stationnaire), au cours duquel la décision d'arrêt ou d'extension du chemin d'exploration est prise.	60
2.3	Logigramme de l'algorithme d'évaluation de la luminance totale directionnelle au niveau d'une surface (en régime stationnaire), au cours duquel la décision d'arrêt ou d'extension du chemin d'exploration est prise.	61
3.1	Schéma représentant les notations du modèle de température au sein d'un solide (en régime stationnaire).	65
3.2	Logigramme de l'algorithme d'évaluation du modèle de température au sein d'un solide (en régime stationnaire).	67
3.3	Schéma représentant les notations du modèle de température au sein d'un fluide (en régime stationnaire).	68
3.4	Logigramme de l'algorithme d'évaluation du modèle de température au sein d'un fluide (en régime stationnaire).	71
3.5	Schémas présentant les notations du modèle de température au niveau d'une interface (en régime stationnaire).	73
3.6	Logigramme de l'algorithme " <i>maître</i> " d'évaluation du modèle de température au niveau d'une interface (en régime stationnaire).	77
3.7	Logigramme de l'algorithme de préparation de l'exploration au niveau d'une interface (en régime stationnaire).	78
3.8	Schéma représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction incidente à une interface (en régime stationnaire).	79
3.9	Logigramme de l'algorithme d'évaluation du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction incidente à une interface (en régime stationnaire).	81
3.10	Schémas représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface (en régime stationnaire).	82
3.11	Schémas représentant les notations du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface, sous l'effet d'une réflexion par cette dernière (en régime stationnaire).	83
3.12	Logigramme de l'algorithme d'évaluation du modèle de luminance totale directionnelle dans une direction quittant une interface (en régime stationnaire).	86
4.1	Schéma du cas de validation <i>Cd1</i>	93
4.2	Graphiques présentant les résultats du cas de validation <i>Cd1</i>	94
4.3	Schéma du cas de validation <i>Cd2</i>	95

4.4	Graphiques présentant les résultats du cas de validation <i>Cd2</i>	96
4.5	Schéma du cas de validation <i>Cv1</i>	97
4.6	Schéma du cas de validation <i>Cv2</i>	98
4.7	Schéma du cas de validation <i>Tp1</i>	100
4.8	Schéma du cas de validation <i>R1</i>	102
4.9	Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation <i>R1</i>	103
4.10	Schéma du cas de validation <i>R2</i>	103
4.11	Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation <i>R2</i>	104
4.12	Schéma du cas de validation <i>R3</i>	105
4.13	Comparaison des températures estimées avec la référence analytique du cas de validation <i>R3</i>	106
4.14	Schéma du cas de validation <i>Cpl1</i>	107
4.15	Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l'interface du cas de validation <i>Cpl1</i> .	109
4.16	Schéma du cas de validation <i>Cpl2</i>	110
4.17	Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l'interface du cas de validation <i>Cpl2</i> .	111
4.18	Schéma du cas de validation <i>Cpl3</i>	112
4.19	Comparaison des estimations des densités de flux total quittant chacun des domaines, au même point de l'interface du cas de validation <i>Cpl3</i> .	113
4.20	Schéma du cas de validation <i>Cpl4</i>	114
4.21	Comparaison des estimations des densités de flux total quittant les domaines <i>cube₂</i> et <i>cube₃</i> , au même point de l'interface \mathcal{I}_{23} du cas de validation <i>Cpl4</i>	116
5.1	Schéma en coupe d'un <i>Module de Bâtiment</i>	121
5.2	Schéma d'un <i>Module de Bâtiment</i> , avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	123
5.3	Evolution de la température estimée de l'air intérieur au sein d'un unique <i>Module de Bâtiment</i> , en fonction de la conductivité thermique de ses murs.	125
5.4	Schéma d'un assemblage de quatre <i>Modules de Bâtiment</i> , avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	127
5.5	Schéma d'un assemblage de dix <i>Modules de Bâtiment</i> , avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	127
5.6	Schéma d'un assemblage de trente <i>Modules de Bâtiment</i> , avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	128
5.7	Schéma d'un assemblage de cinquante <i>Modules de Bâtiment</i> , avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	129
5.8	Evolution du temps de calcul et de la taille moyenne des chemins d'exploration, en fonction du nombre de <i>Modules de Bâtiment</i> présents dans la scène.	131
5.9	Evolution du temps de calcul, en fonction de la taille moyenne des chemins d'exploration.	131

5.10	Schéma d'un assemblage de dix <i>Modules de Bâtiment</i> , dont l'un d'eux présente un châssis de fenêtre, avec une sonde placée pour estimer la température de l'air intérieur.	133
5.11	Comparaison des estimations de température de l'air intérieur, en fonction du matériau du châssis de fenêtre, avec la température estimée en l'absence de ce dernier.	136
5.12	Evolution des températures estimées par l'outil, en fonction de leur température obtenue par une modélisation par transferts limitants.	137
5.13	Comparaison des estimations de temps de calcul et des tailles moyennes des chemins d'exploration, en fonction du matériau du châssis de fenêtre, avec ceux estimés en l'absence de ce dernier.	137
5.14	Schéma en coupe d'un <i>Module d'Echangeur</i> assemblé avec d'autres — en couleurs pâles — pour former un échangeur à plaques contre-courant à n passes.	140
5.15	Schéma en coupe d'un <i>Collecteur Solaire</i>	143
5.16	Schéma d'un assemblage de vingt-et-un <i>Modules d'Echangeur</i> , couplé avec cent-quatre-vingt <i>Collecteurs Solaires</i> reliés en série.	147
5.17	Comparaison des estimations de température du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.	148
5.18	Représentation des tailles moyennes des chemins d'exploration pour les cas d'illustration, en fonction de leur rapport d'échelle.	151
5.19	Représentation de la mémoire vive nécessaire à la simulation des cas d'illustration, en fonction du nombre d'éléments qui constituent leur scène.	151
5.20	Représentation du nombre d'éléments qui constituent les cas d'illustration, en fonction du nombre de leur rapport d'échelle.	151
5.21	Représentation de la mémoire vive nécessaire à la simulation des cas d'illustration, en fonction de leur rapport d'échelle.	152
5.22	Comparaison des estimations des coefficients composants les modèles prédictifs réduits de la température du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.	157
5.23	Comparaison des estimations des variances de la température — propagées depuis les conditions aux frontières — du Therminol en entrée de l'échangeur, ainsi que de l'eau surchauffée et du Therminol en sortie de ce dernier.	163

Liste des tableaux

1.1	Intervalles de confiance et leur indice de confiance en considérant une distribution suivant la loi normale.	32
4.1	Récapitulatif des contributions de modèle prédictif validées au cours de chacun des cas de validation.	91
4.2	Conditions aux frontières du cas de validation <i>Cd1</i>	93
4.3	Conditions aux frontières du cas de validation <i>Cd2</i>	95
4.4	Conditions aux frontières du cas de validation <i>Cv1</i>	97
4.5	Conditions aux frontières du cas de validation <i>Cv2</i>	99
4.6	Conditions aux frontières du cas de validation <i>Tp1</i>	100
4.7	Conditions aux frontières du cas de validation <i>R1</i>	101
4.8	Conditions aux frontières du cas de validation <i>R2</i>	104
4.9	Conditions aux frontières, et propriétés des interfaces internes, du cas de validation <i>R3</i>	105
4.10	Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation <i>Cpl1</i>	107
4.11	Comparaison des températures estimées avec leur référence analytique, dans le cas de validation <i>Cpl1</i>	108
4.12	Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation <i>Cpl2</i>	110
4.13	Conditions aux frontières, et propriétés de l'interface interne, du cas de validation <i>Cpl3</i>	112
4.14	Comparaison des températures estimées avec leur référence analytique, dans le cas de validation <i>Cpl3</i>	113
4.15	Conditions aux frontières, et propriétés des interfaces internes, du cas de validation <i>Cpl4</i>	115
4.16	Comparaison des températures estimées avec celles de référence obtenues par calcul symbolique, dans le cas de validation <i>Cpl4</i>	115
5.1	Estimations de la température de l'air intérieur au sein d'un unique <i>Module de Bâtiment</i> , en fonction de la conductivité thermique de ses murs.	125

5.2	Taille moyenne des chemins d'exploration et estimations des températures intérieures et du temps de calcul, en fonction du nombre de <i>Modules de Bâtiment</i> présents dans la scène.	131
5.3	Description des différentes configurations étudiées pour le châssis de fenêtre.	134
5.4	Comparaison des résultats obtenus pour différents matériaux constituant le châssis de fenêtre ou en l'absence de ce dernier.	136
5.5	Taille moyenne des chemins d'exploration et estimations des températures et du temps de calcul, en fonction de la position de la sonde dans la scène.	149
5.6	Performances des cas d'illustration : $\mathcal{B}1$ à $\mathcal{B}50$ pour ceux utilisant les <i>Modules de Bâtiment</i> , $\mathcal{Ch}_{\Leftrightarrow}$ pour le châssis équivalent à la vitre et \mathcal{S} pour la centrale solaire.	150
5.7	Estimations des coefficients de chacun des modèles prédictifs réduits de la température au niveau des sondes.	156
5.8	Comparaison des températures prédites à l'aide des modèles réduits générés (T_+) avec celles estimées par une nouvelle exploration de la scène (\tilde{T}).	158
5.9	Distributions gaussiennes modélisant les incertitudes présentent dans la scène.	160
5.10	Estimations des températures, des variances propagées et du temps de calcul, en fonction de la position de la sonde dans la scène.	162
5.11	Comparaison des résultats obtenus par les optimisations et la solution "naïve".	170

Méthode de simulation appropriée aux systèmes complexes : preuve de concept auto-adaptative et auto-apprenante appliquée aux transferts thermiques

Résumé : L'augmentation de la puissance informatique disponible permet aux ingénieurs et designers d'aborder par simulation des problèmes de plus en plus complexes (multi-physiques, multi-échelles, géométries intriquées ...). Dans ce contexte, les quadratures à base de discrétisation (FDM, FEM, FVM) montrent leur limite : le besoin d'un grand nombre de sous-domaines qui implique des coûts RAM et CPU prohibitifs. La méthode de Monte-Carlo apparaît plus appropriée, mais son utilisation est verrouillée par la difficulté de générer des modèles probabilistes de systèmes complexes. Pour surpasser ceci, une approche systémique est proposée et implémentée pour créer une preuve de concept appliquée à la simulation des transferts thermiques couplés. Après une étape de validation vis-à-vis de solutions analytiques, l'outil est employé sur des cas d'illustration (transferts thermiques au sein de bâtiments et dans une centrale solaire) pour étudier ses capacités.

L'approche mise en œuvre présente un comportement particulièrement avantageux pour la simulation de systèmes complexes : son temps de calcul ne dépend que des parties influentes du problème. De plus, elles sont automatiquement identifiées, même en présence de géométries étendues ou intriquées, ce qui rend les simulations auto-adaptatives. Par ailleurs, ses performances de calcul ne sont pas corrélées avec le rapport d'échelle caractérisant le système simulé. Ceci en fait une approche douée d'une remarquable capacité à traiter les problèmes à la fois multi-physiques et multi-échelles. En parallèle de l'estimation d'une observable par des chemins d'exploration, l'outil analyse également ces derniers de manière statistique. Ceci lui permet de générer un modèle prédictif réduit de l'observable, procurant ainsi une capacité d'auto-apprentissage à la simulation. Son utilisation peut améliorer les processus d'optimisation et de contrôle-commande, ou simplifier les mesures par méthodes inverses. De plus, elle a aussi permis de mener une analyse par propagation d'incertitudes, affectant les conditions aux frontières, vers l'observable. Enfin, une démonstration d'optimisation, utilisant des modèles réduits générés, a été réalisée.

Mots-clés : Transferts thermiques couplés, Méthode Monte-Carlo, Modélisation probabiliste, Systèmes complexes, Multi-échelle, Multi-physique.

Suitable method for complex systems simulation: self-adaptive and self-learning proof-of-concept applied to coupled heat transfer

Abstract: As computing power increases, engineers and designers tackle increasingly complex problems using simulation (multiphysics, multiscale, intricately geometries ...). In this context, discretization-based quadratures (FDM, FEM, FVM) show their limit: the need of a great number of sub-domains which induces prohibitive consumption of RAM and CPU power. The Monte Carlo method appears to be more appropriate, but the difficulty to build probabilistic models of complex systems forms a bottleneck. A systemic approach is proposed to alleviate it and is implemented to create a proof-of-concept dedicated to the coupled heat transfer simulation. After a successful validation step against analytical solutions, this tool is applied to illustrative cases (emulating heat transfer in buildings and in solar heating systems) in order to study its simulation capabilities.

This approach presents a major beneficial behavior for complex systems simulation: the computation time only depends on the influential parts of the problem. These parts are automatically identified, even in intricate or extensive geometries, which makes the simulation self-adaptive. In addition, the computational performance and the system scale ratio are completely uncorrelated. Consequently, this approach shows an exceptional capacity to tackle multiphysics and multiscale problems. Each temperature is estimated using exploration paths. By statistically analyzing these paths during the process, the tool is able to generate a reduced predictive model of these physical quantity, which is bringing a self-learning capacity to the simulation. Its use can significantly improve optimization and control of processes, or simplify inverse measurements. Furthermore, based on this model, an uncertainty propagation analysis has been performed. It quantifies the effect of uncertainties affecting boundary conditions on the temperature. Finally a Particle Swarm Optimization (PSO) process, based on simulations done by the framework, is successfully carried out.

Keywords: Coupled heat transfer, Monte Carlo method, Probabilistic modeling, Complex systems, Multiscale, Multiphysics.