



Identification de la conductivité hydraulique pour un problème d'intrusion saline : Comparaison entre l'approche déterministe et l'approche stochastique

Aya Mourad

► To cite this version:

Aya Mourad. Identification de la conductivité hydraulique pour un problème d'intrusion saline : Comparaison entre l'approche déterministe et l'approche stochastique. Mathématiques générales [math.GM]. Université du Littoral Côte d'Opale; École doctorale des Sciences et de Technologie (Beyrouth), 2017. Français. NNT : 2017DUNK0465 . tel-01727531

HAL Id: tel-01727531

<https://theses.hal.science/tel-01727531>

Submitted on 9 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ LIBANAISE



UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Par

Aya MOURAD

Sujet de la thèse :

**Identification de la conductivité hydraulique
pour un problème d'intrusion saline.
Comparaison entre l'approche déterministe et
l'approche stochastique**

soutenue publiquement le 12 Decembre 2017 devant le jury composé de

D. R. Khaled Jbilou

Pr. Amaziane Brahim

Pr. Jean-Paul Chehab

Pr. Carole Rosier

Pr. Mustapha Jazar

Président

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Directeur de thèse

Résumé/Abstract

Identification de la conductivité hydraulique pour un problème d'intrusion saline. Comparaison entre l'approche déterministe et l'approche stochastique

Résumé

Le thème de cette thèse est l'identification de paramètres tels que la conductivité hydraulique, K , pour un problème d'intrusion marine dans un aquifère isotrope et libre. Plus précisément, il s'agit d'estimer la conductivité hydraulique en fonction d'observations ou de mesures sur le terrain faites sur les profondeurs des interfaces, (h, h_1) , entre l'eau douce et l'eau salée et entre le milieu saturé et la zone insaturée. Le problème d'intrusion marine consiste en un système à dérivées croisées d'edps de type paraboliques décrivant l'évolution de h et de h_1 .

Le problème inverse est formulé en un problème d'optimisation où la fonction coût minimise l'écart quadratique entre les mesures des profondeurs des interfaces et celles fournies par le modèle. Nous considérons le problème exact comme une contrainte pour le problème d'optimisation et nous introduisons le Lagrangien associé à la fonction coût. Nous démontrons alors que le système d'optimalité a au moins une solution, les principales difficultés étant de trouver le bon ensemble pour les paramètres admissibles et de prouver la différentiabilité de l'application qui associe $(h(K), h_1(K))$ à K . Ceci constitue le premier résultat de la thèse.

Le second résultat concerne l'implémentation numérique du problème d'optimisation. Notons tout d'abord que, concrètement, nous ne disposons que d'observations ponctuelles (en espace et en temps) correspondant aux nombres de puits de monitoring. Nous approchons donc la fonction coût par une formule de quadrature qui est ensuite

minimisée en utilisant l'algorithme de la variable à mémoire limitée (BLMVM). Par ailleurs, le problème exact et le problème adjoint sont discrétisés en espace par une méthode éléments finis P_1 -Lagrange combinée à un schéma semi-implicite en temps. Une analyse de ce schéma nous permet de prouver qu'il est d'ordre 1 en temps et en espace. Certains résultats numériques sont présentés pour illustrer la capacité de la méthode à déterminer les paramètres inconnus.

Dans la troisième partie de la thèse nous considérons la conductivité hydraulique comme un paramètre stochastique. Pour réaliser une étude numérique rigoureuse des effets stochastiques sur le problème d'intrusion marine, nous utilisons les développements de Wiener pour tenir compte des variables aléatoires. Le système initial est alors transformé en une suite de systèmes déterministes qu'on résout pour chaque coefficient stochastique du développement de Wiener.

Identification of hydraulic conductivity for a seawater intrusion problem. Comparison between the deterministic approach and the stochastic approach

Abstract

This thesis is concerned with the identification, from observations or field measurements, of the hydraulic conductivity K for the saltwater intrusion problem involving a nonhomogeneous, isotropic and free aquifer. The involved PDE model is a coupled system of nonlinear parabolic equations completed by boundary and initial conditions, as well as compatibility conditions on the data. The main unknowns are the saltwater/freshwater interface depth and the elevation of upper surface of the aquifer. The inverse problem is formulated as the optimization problem where the cost function is a least square functional measuring the discrepancy between experimental interfaces depths and those provided by the model. Considering the exact problem as a constraint for the optimization problem and introducing the Lagrangian associated with the cost function, we prove that the optimality system has at least one solution. The main difficulties are to find the set of all eligible parameters and to prove the differentiability of the operator associating to the hydraulic conductivity K , the state variables (h, h_1) . This is the first result of the thesis.

The second result concerns the numerical implementation of the optimization problem. We first note that concretely, we only have specific observations (in space and in time) corresponding to the number of monitoring wells, we then adapt the previous results to the case of discrete observations data. The gradient of the cost function is computed thanks to an approximate formula in order to take into account the discrete observations data. The cost functions then is minimized by using a method based on BLMVM algorithm. On the other hand, the exact problem and the adjoint problem are discretized in space by a P_1 -Lagrange finite element method combined with a semi-implicit time discretization scheme. Some numerical results are presented to illustrate the ability of the method to determine the unknown parameters.

In the third part of the thesis we consider the hydraulic conductivity as a stochastic parameter. To perform a rigorous numerical study of stochastic effects on the saltwater intrusion problem, we use the spectral decomposition and the stochastic variational problem is reformulated to a set of deterministic variational problems to be solved for each Wiener polynomial chaos.

Table des figures

1	Schématisation de l'aquifère.	9
3.1	Convergence de la conductivité hydraulique correspond à l'expérience 1. K est supposée constante sur tout le domaine d'étude. La courbe pointillée avec K_1 correspond au résultat obtenu pour un puits d'observation, avec K_2 au résultat pour deux puits d'observation et avec K_3 pour trois puits d'observation.	84
3.2	Convergence de la fonction coût correspond à l'expérience 1. On suppose que la conductivité hydraulique K est constante sur tout le domaine d'étude. $FC1$ représente la fonction coût où on a un puits d'observation, $FC2$ la fonction coût où on a deux puits d'observation et $FC3$ la fonction coût où on a trois puits d'observation.	85
3.3	Figure a) : Sections transversales des interfaces " h " et " h_1 " au sixième jours pour l'expérience 1 où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d'étude et pour les cas où on a 1 puits d'observation, 2 puits d'observation et 3 puits d'observation. b) : Zoom pour " h_1 ". c) : Zoom pour " h ".	86
3.4	Convergence de la conductivité hydraulique dans l'expérience 2, où K est supposée constante sur tout le domaine d'étude. La courbe avec K_1 représente le résultat obtenu dans le (cas i) pour lequel on a trois puits d'observation pour h_1 et celle avec K_2 représente le résultat obtenu dans le (cas ii) où on a un puits d'observations pour h et un pour h_1	87

-
- 3.5 Convergence de la fonction coût dans l'expérience 2, où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d'étude. La courbe $FC1$ (en pointillé) représente la fonction coût dans le (cas i) où on a trois puits d'observation pour h_1 et la courbe $FC2$ représente la fonction coût dans le (cas ii) où on a un puits d'observations pour h et un pour h_1 88
- 3.6 Figure a) : Sections transversales des interfaces " h " et " h_1 " au sixième jours dans l'expérience 2 où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d'étude. Dans le (cas i), on a 3 puits d'observation pour h_1 et dans le (cas ii), on a un puits d'observation pour h et un pour h_1 . b) : Zoom pour " h ". c) : Zoom pour " h_1 ". 89
- 3.7 Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas i) de l'expérience 3 où on considéré que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone et à " $K2$ exact" sur la deuxième. On a un puits d'observation dans chaque sous domaine. 90
- 3.8 Convergence de la fonction coût dans le (cas i) de l'expérience 3 où on considéré que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone et à " $K2$ exact" sur la deuxième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine. 91
- 3.9 Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas ii) de l'expérience 3 où on considéré que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone et à " $K2$ exact" sur la deuxième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. 92
- 3.10 Convergence de la fonction coût dans le (cas ii) de l'expérience 3 où on considéré que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone et " $K2$ exact" sur la deuxième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. 93

3.11	Figure a) : Section transversale des interfaces " h " et " h_1 " dans l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone et " $K2$ exact" sur la deuxième, pour les deux cas : (cas i) où on a un puits d'observations dans chaque sous domaine, et (cas ii) où on a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. b) : Zoom pour " h ". c) : Zoom pour " h_1 ".	94
3.12	Schématisation de l'aquifère dans l'expérience 4.	95
3.13	Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas i) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone, " $K2$ exact" sur la deuxième et " $K3$ exact" sur la troisième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine. . . .	96
3.14	Convergence de la fonction coût dans le (cas i) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone, " $K2$ exact" sur la deuxième et " $K3$ exact" sur la troisième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine.	97
3.15	Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas ii) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone, " $K2$ exact" sur la deuxième et " $K3$ exact" sur la troisième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. . .	98
3.16	Convergence de la fonction coût dans le (cas ii) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone, " $K2$ exact" sur la deuxième et " $K3$ exact" sur la troisième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine.	99
3.17	Figure a) : Section transversale des interfaces " h " et " h_1 " dans l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " $K1$ exact" sur la première zone, " $K2$ exact" sur la deuxième et " $K3$ exact" sur la troisième, dans les deux cas : (cas i) où on a un puits d'observations dans chaque sous domaine, et (cas ii) où on a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. b) : Zoom de " h ". c) : Zoom de " h_1 ".	100

4.1	Graphe représentant les hauteurs dans le cas déterministe (h_{exact}, H_{exact}) et les espérances de ces hauteurs dans le cas stochastiques pour $P = 1$, $P = 2$ et $P = 5$	114
4.2	Zoom $E(H)$	114
4.3	Zoom $E(h)$	114
4.4	Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$	116
4.5	Graphe représentant la variance de h obtenue dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$	117
4.6	Graphe représentant la variance de H obtenue dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$	117
4.7	Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues pour l'expérience 3, dans les deux cas stochastiques : cas i ($\bar{K} = 42m/j, \sigma = 0.9$) et cas ii ($\bar{K} = 43m/j, \sigma = 0.1$).	119
4.8	Zoom $E(h)$	119
4.9	Zoom $E(H)$	119
4.10	Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues pour l'expérience 4 dans le cas stochastique avec des conditions de marées, pour $\sigma = 0.5$ et $\sigma = 0.9$	120

Liste des tableaux

3.1	Expérience 1.	83
3.2	Expérience 2.	86
3.3	Expérience 3.	90
3.4	Expérience 4.	95
4.1	Les hauteurs obtenues dans le cas déterministe de l'expérience 1.	113
4.2	Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 1$	113
4.3	Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 2$	113
4.4	Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 4$	113
4.5	Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 5$	115
4.6	Les hauteurs obtenues dans le cas déterministe de l'expérience 2.	115
4.7	Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 2 avec $\sigma = 0.01$	115

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

INTRODUCTION

1	Dérivation du modèle	9
2	Aspects "Analyse mathématique".	12
3	Problème d'identification.	14
4	Plan de thèse.	17
4.1	Rappels mathématiques	17
4.2	Identification de la conductivité hydraulique : Étude théorique .	17
4.3	Identification de la conductivité hydraulique : Étude numérique	18
4.4	Approche stochastique	18

Chapitre 1

Rappels mathématiques

1.1	Outils mathématiques	21
1.1.1	Espaces de Lebesgue et de Sobolev.	21
1.1.2	Quelques inégalités fondamentales.	24
1.1.3	Fonctions à valeurs dans un espace de Banach	28
1.1.4	Lemmes de compacité.	30
1.1.5	Théorèmes du point fixe.	31
1.1.6	Résultat de régularité de Meyers.	32
1.2	Résultats mathématiques	34

1.2.1	Existence globale de la solution	35
1.2.2	Résultat de régularité et d'unicité	37
1.3	Processus stochastique - Mesure de Wiener	39

Chapitre 2

Identification de la conductivité hydraulique : Étude théorique

2.1	Introduction	41
2.2	Formulation du problème	43
2.3	Existence du contrôle optimal	45
2.4	Conditions nécessaires d'optimalité	46

Chapitre 3

Identification de la conductivité hydraulique : Étude numérique

3.1	Introduction	68
3.2	Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée	69
3.2.1	Description du schéma numérique	69
3.2.2	Résultat de convergence pour le schéma discrétisant le problème adjoint	71
3.3	Description des méthodes numériques pour le problème d'optimisation	79
3.3.1	Résolution du système d'état et du problème adjoint	79
3.3.2	Description de l'algorithme	79
3.4	Résultats numériques	82
3.4.1	Expérience 1	83
3.4.2	Expérience 2	86
3.4.3	Expérience 3	89
3.4.4	Expérience 4	94

Chapitre 4

Approche stochastique

4.1	Introduction	101
4.2	Présentation du modèle stochastique	102
4.3	L'étape de décomposition spectrale	104
4.4	La méthode des éléments finis	107
4.5	Résultats numériques	112
4.5.1	Expérience 1	112

4.5.2	Expérience 2	113
4.5.3	Expérience 3	118
4.5.4	Expérience 4	118
Bibliographie		121

Annexe A

Dérivation du modèle

A.1	loi de Darcy	129
A.2	loi de conservation de la masse du fluide	130
A.3	Équation d'état pour la compressibilité du fluide	130
A.4	Équation d'état pour la compressibilité du sol	130
A.5	Hypothèses simplificatrices	132
A.5.1	Hypothèses sur le fluide et sur le milieu	132
A.5.2	Hypothèse de Bear	132
A.5.3	Hypothèse sur le flux	133
A.6	Domaine d'intégration	134
A.7	Flux et équations de continuité aux interfaces	135
A.7.1	Équation de continuité	138
A.8	Présence d'autres ressources en eau	138
A.9	Modèle d'intrusion saline	139

Annexe B

Résultat d'unicité et de régularité

B.1	Régularité	143
B.2	Unicité	147

Annexe C

Détails du calcul stochastique

INTRODUCTION

Sur terre, 97% de l'eau de surface est salée, les 3% restants étant de l'eau douce dont approximativement, un tiers est sous forme liquide. Une importante partie de cette réserve d'eau douce est stockée dans le sous-sol de la terre. La diminution du niveau d'eau douce dans les aquifères à cause de leur surexploitation, les conséquences des changements climatiques sur le niveau des lacs et des rivières, la pollution des aquifères par les pesticides et les engrais et l'intrusion saline dans les aquifères côtiers sont autant de facteurs à prendre en compte pour une meilleure gestion des ressources en eau douce. Les aquifères littoraux constituent des ressources d'eau souterraine importantes tant pour les activités humaines (alimentation en eau potable, usages agricoles, industriels et touristiques) que pour l'environnement (zones humides littorales, marais et lagunes côtières situés à l'exutoire de ces nappes). Ils sont le lieu de rencontre de deux types d'eaux souterraines :

- des eaux douces provenant de l'infiltration des précipitations et des eaux de ruissellement au niveau de la surface continentale,
- des eaux salées qui imprègnent les terrains au voisinage des côtes ou pénètrent les cours d'eau au niveau des estuaires, pouvant ainsi donner lieu à la salinisation des eaux souterraines en relation hydraulique avec les eaux de surface (océan, rivières).

Les aquifères littoraux sont donc en contact avec l'eau salée d'origine marine, qui envahit plus ou moins les formations géologiques côtières, l'eau douce d'une densité moindre que l'eau salée "flottant" sur l'eau salée. Cette salinisation peut être amplifiée d'une part par une exploitation par pompage et d'autre part par la modification du niveau marin, par exemple lié au changement climatique. Or, une intrusion saline de manière naturelle conjuguée ou non à une influence anthropique menace la quantité

d'eau douce disponible dans ces réservoirs souterrains. En général, les échanges hydrauliques entre l'eau douce souterraine et l'eau salée sont lents dans des conditions naturelles, ils peuvent alors être remplacés par un quasi-équilibre entre les 2 zones. Cela correspond à l'approximation de Ghyben-Herzberg. Cette approche a conduit à plusieurs modèles analytiques en particulier grâce à la relation linéaire liant les 2 hauteurs des interfaces et celle du niveau de la mer (cf. [12],[26],[37], [41], [46], [65], [76], [77], [78], [75], [81], [82]). Cependant ces solutions analytiques se limitent à des géométries très simples et à des situations où l'hypothèse de Ghyben - Herzberg est satisfaite, elles sont donc essentiellement utilisées comme cas test pour valider des codes numériques. Il n'est plus possible de supposer que la zone d'eau salée est immobile dans des conditions plus drastiques dues à des événements météorologiques ou à l'intervention humaine qui, en pompant intensivement l'eau douce, provoque une baisse du niveau de la nappe phréatique et une intrusion de l'eau saline dans l'aquifère. L'eau salée, qui est plus dense que l'eau douce, glisse en dessous de cette dernière et envahit l'aquifère sous forme d'un biseau salé. Il est nécessaire d'avoir des modèles précis et efficaces simulant le déplacement du front salé dans l'aquifère côtier afin d'optimiser l'exploitation des eaux souterraines.

Ils existent de nombreux livres de référence concernant la modélisation du problème d'intrusion saline, citons par exemple ([11],[12],[14]) et les références qui s'y rapportent. Dans l'optique de notre travail, nous pouvons classer les modèles existants pour décrire l'intrusion saline en 2 grandes catégories :

- La première catégorie consiste à considérer que les deux volumes d'eau interagissent entre eux, formant ainsi une zone de transition caractérisée par les variations de la concentration en sel. Cette approche est très lourde aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue numérique (cf. [1],[27]). Nous soulignons aussi qu'il existe une zone de transition entre la zone saturée en eau et la zone sèche du réservoir (la zone de "désaturation" restant difficile à définir).
- La seconde catégorie consiste à considérer que l'eau douce et l'eau salée sont deux fluides immiscibles. Cela conduit à supposer les domaines occupés par chaque fluide séparés par une interface nette, on néglige alors les transports de masse entre la zone salée et la zone d'eau douce. Par ailleurs, la dimension verticale de l'aquifère (de l'ordre d'une dizaine de mètres) est souvent très petite comparée aux dimensions horizontales de l'aquifère qui sont de l'ordre du km , ce qui rend cette approximation d'autant plus légitime.

De même, l'épaisseur de la zone de transition est négligeable par rapport aux dimensions horizontales de l'aquifère. Pour les mêmes raisons, on peut donc considérer que l'interface entre les zones saturée et sèche, est nette, ce qui revient à négliger les effets de la pression capillaire.

Clairement, cette classe de modèle ne décrit pas le comportement de la zone de transition mais elle donne des informations sur le mouvement du front salé (ou de la surface supérieure de l'aquifère).

Dans ce travail, nous allons utiliser une nouvelle approche récemment introduite dans [28] combinant l'efficacité du modèle avec interface nette au réalisme des modèles avec interface diffuse. Cette approche est déduite de la théorie des fonctions de phase, développée à l'origine par Allen-Cahn pour décrire les phénomènes de transition de phase dans un contexte fluide-fluide et qui est utilisée ici pour décrire les trois états stables caractérisant la zone de transition : eau salée, eau douce, eau mélangée et zone saturée, zone sèche et zone in-saturée. Pour décrire le problème, nous devons distinguer deux types d'aquifère :

- Les aquifères confinés pour lesquels le toit et le substratum sont supposés imperméables, interdisant alors tout échange avec l'extérieur,
- les aquifères libres pour lesquels le toit de l'aquifère est semi-perméable ou perméable (en particulier l'aquifère peut être rechargé en eaux pluviales).

1 Dérivation du modèle

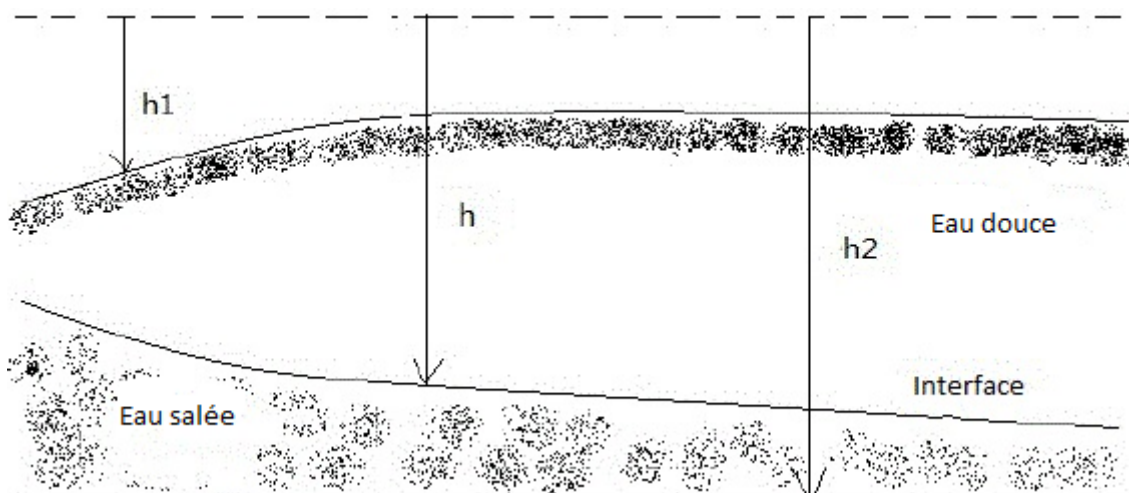


Figure 1 – Schématisation de l'aquifère.

Nous allons maintenant rappeler brièvement la modèle utilisé dans ce document pour décrire l'évolution des interfaces dans le problème d'intrusion saline. Nous renvoyons aux travaux de Bear [12], Choquet et al. [28] et de M. Jazar R. Monneaux [45] pour plus de détails. Notons que le dernier article permet d'obtenir une justification formelle du modèle résultant de l'approximation de Dupuit et de celle de l'interface nette. Cette justification est obtenue en introduisant un paramètre ϵ proportionnel au rapport de la dimension verticale de l'aquifère sur sa dimension horizontale, puis en adimensionnant les équations.

La base de la modélisation est la loi de conservation de la masse écrite pour chaque espèce (eau douce et eau salée) associée à la loi de Darcy classique pour les milieux poreux. Les fluides et le sol sont considérés comme faiblement compressibles.

En introduisant les indices (s, f) caractérisant respectivement l'eau salée et l'eau douce, les charges hydrauliques $\Phi_i, i = f, s$ sont définies à l'élévation z comme suit

$$\Phi_i = \frac{P_i}{\rho_i g} + z, \quad (1)$$

où P_i désigne la pression.

On montre que le flux q_i est donc lié à la charge hydraulique Φ_i à travers la loi de Darcy par

$$q_i = -K_i \nabla(\Phi_i), \quad K_i = \frac{k \rho_i g}{\mu_i},$$

où ρ et μ sont respectivement la densité et la viscosité de fluide dans le milieu poreux, k la perméabilité du sol et g la constante d'accélération gravitationnelle. La matrice K_i est la conductivité hydraulique qui exprime la capacité du sol à conduire le fluide, K_i est proportionnelle à k la perméabilité du sol qui ne dépend que des caractéristiques du milieu poreux et à la viscosité du fluide.

En écrivant la loi de conservation de masse pour chaque espèce (eau douce et salée), compte tenu de (1) et de la loi de Darcy, nous obtenons les équations suivantes

$$S_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot q_i = Q_i, \quad q_i = -K_i \nabla(\Phi_i), \quad K_i = \frac{k \rho_i g}{\mu_i}, \quad (2)$$

où S_f, S_s désignent respectivement les coefficients d'emménagement en eau dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine de l'eau salée. En général, ce coefficient est extrêmement faible en raison de la faible compressibilité du fluide et de la roche. Dans notre travail, nous négligeons ce coefficient, mais nous soulignons que, dans le cas de l'aquifère libre, $S_f \partial_t \Phi_f$ est de l'ordre de $\phi \partial_t \Phi_f$, avec ϕ la porosité du milieu.

Nous allons maintenant exploiter l'approximation de Dupuit pour réduire le problème 3D à un problème 2D en intégrant verticalement les équations déduite de la conservation de la masse. Plus précisément, nous intégrons la loi de conservation de la masse

dans la zone d'eau douce entre l'interface eau douce/eau salée h , et l'interface entre la zone saturée et la zone non saturée h_1 , et entre h et la topographie inférieure h_2 , dans la zone salée.

Cette moyennisation verticale conduit à :

$$S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f = \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}'_f \nabla' \tilde{\Phi}_f) - q_{f|z=h_1} \cdot \nabla(z - h_1) + q_{f|z=h^-} \cdot \nabla(z - h) + B_f \tilde{Q}_f. \quad (3)$$

$$S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s = \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}'_s \nabla' \tilde{\Phi}_s) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) + q_{s|z=h} \cdot \nabla(z - h) + B_s \tilde{Q}_s, \quad (4)$$

où $\nabla' = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$. Les coefficients $B_s = h - h_2$ et $B_f = h_1 - h$ désignent l'épaisseur de la zone salée et de la zone d'eau douce et $\tilde{\Phi}_i, i = f, s$, les moyennes verticales des charges hydrauliques

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} \Phi_f dz \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h \Phi_s dz.$$

Finalement, $\tilde{Q}_i, i = s, f$ représentent les termes sources.

Par ailleurs, l'hypothèse d'interface nette implique la continuité de la pression à l'interface eau douce/eau salée, il s'ensuit que

$$(1 + \alpha) \tilde{\Phi}_s = \tilde{\Phi}_f + \alpha h, \quad \alpha = \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1. \quad (5)$$

Ici le paramètre α caractérise le contraste de densité. L'équation (5) nous permet d'éliminer $\tilde{\Phi}_s$ dans le système final.

Maintenant, notre objectif est d'inclure dans le modèle les propriétés de continuité aux interfaces en vue d'exprimer les quatre termes de flux présents dans (3) - (4).

Tout d'abord, puisque la couche inférieure de l'aquifère est supposée imperméable, le flux entre zone salée et le fond $z = h_2$ est nul :

$$q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) = 0. \quad (6)$$

À l'interface eau douce/eau salée, nous présentons les deux approches suivantes :

- **Approche avec interface nette.**

On revient alors à l'hypothèse traditionnelle de la modélisation avec interface nette, il n'y a pas de transfert de masse à travers l'interface eau douce/ eau salée *i.e.* les composantes normales de la vitesse sont continues à l'interface $z = h$:

$$\left(\frac{q_{f|z=h}}{\phi} - \vec{v} \right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{q_{s|z=h}}{\phi} - \vec{v} \right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (7)$$

On a noté $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire par rapport à l'interface nette. Nous obtenons ainsi

$$q_{f|z=h} \cdot \nabla(z - h) = q_{s|z=h} \cdot \nabla(z - h) = \phi \partial_t h. \quad (8)$$

- **Approche avec interface diffuse.**

Dans cette approche, nous considérons l'existence d'une zone miscible, prenant la forme d'une interface diffuse, d'épaisseur caractéristique δ , entre la zone d'eau douce et la zone d'eau salée. La mise à l'échelle de la dynamique 3D de l'interface diffuse est supposée régie par un modèle de champ de phase, on obtient l'équation de continuité suivante au lieu de (8) (voir [28] pour plus de détails) :

$$q_f|_{z=h} \cdot \nabla(z-h) = q_s|_{z=h} \cdot \nabla(z-h) = \phi(\partial_t h - \delta \Delta' h), \quad (9)$$

où Δ' correspond à la dérivation par rapport aux deux variables (x_1, x_2) . La même approche pour la frange capillaire dans le cas non confiné nous donne :

$$q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z-h_1) = \phi(\partial_t h_1 - \delta \Delta' h_1). \quad (10)$$

Finalement, nous introduisons quelques hypothèses afin de simplifier les notations. En considérant que le milieu est isotrope et $\mu_f = \mu_s$, nous obtenons

$$\tilde{K}_s = (1 + \alpha) \tilde{K}_f. \quad (11)$$

Dans le cas d'un aquifère libre, les inconnues sont les profondeurs des interfaces h et h_1 . En négligeant le coefficient de stockage S_f , le modèle obtenu grâce à l'approche "interface nette-diffuse" s'écrit finalement comme suit :

$$(\mathcal{M}) \left\{ \begin{array}{l} \phi \partial_t h - \nabla' \cdot (\alpha \tilde{K}_f (h_2 - h) \nabla' h) - \nabla' \cdot (\delta \nabla' h) - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f (h_2 - h) \nabla' h_1) \\ \quad = -\tilde{Q}_s B_s, \\ \phi \partial_t h_1 - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f ((h - h_1) + (h_2 - h)) \nabla' h_1) - \nabla' \cdot (\delta \nabla' h_1) \\ \quad - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f \alpha (h_2 - h) \nabla' h) = -\tilde{Q}_s B_s - \tilde{Q}_f B_f. \end{array} \right.$$

Ce modèle sera complété par des conditions aux limites et initiales compatibles qui sont détaillées au chapitre 1.

2 Aspects "Analyse mathématique".

D'un point de vue mathématique, dans le cas de l'approche avec interface nette, le modèle consiste en un système fortement couplé d'équations parabolique-elliptique quasi-linéaires dégénérée pour le cas confiné et d'équations paraboliques dégénérées pour le cas libre. L'apport de l'approche avec interface diffuse est double : il permet d'une part d'éliminer la dégénérescence et d'autre part d'établir un principe du maximum plus réaliste d'un point de vue de la physique, plus précisément une hiérarchie entre les profondeurs des interfaces libres (cf. [29], [30]). Les premières études mathématiques sur le problème d'intrusion marine ont été faites en prenant pour cadre

d'étude les problèmes à frontière libre (l'interface eau douce/eau salée étant cette frontière), citons les travaux de Van Duijn et al ([7], [8], [17], [42], [58], [80]) pour des résultats d'existence de la solution mais aussi de régularité de la frontière libre dans le cas d'un écoulement stationnaire. En particulier dans [80], les auteurs regardent le cas d'un aquifère confiné et ramène le problème dans le cas $1D$ ($\Omega =]-1, 1[$) à une équation parabolique non-linéaire avec 2 dégénérescences, l'une pour la solution " u " et l'autre pour la solution " u_x ". Ils montrent alors dans plusieurs situations, l'existence et l'unicité de solutions de $L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(-1, 1))$. Cette étude permet de retrouver le phénomène de cisaillement observé par Josselin de Jong. Nous soulignons qu'elle se limite au cas $1D$ et les hypothèses de régularité sur la solution sont très fortes en particulier u_t doit appartenir à $L^2(\Omega_T)$. Signalons aussi les travaux de Baiocchi et al. ([10], [9]) concernant les problèmes de filtrage de liquides dans des milieux poreux, et [3] pour un résultat d'existence et unicité pour le problème d'intrusion marine dans le cas stationnaire utilisant la formulation introduite pour un problème d'écoulement dans une digue donné par Brézis et al. dans [21]. Dans tous ces travaux, le domaine d'étude est contenu dans le plan vertical et l'interface eau douce/eau salée est traitée comme une frontière libre. Dans ce travail, nous considérons que l'écoulement des eaux souterraines est quasi-horizontal, notre domaine d'étude étant alors dans le plan horizontal (après avoir appliqué l'approximation de Dupuit au modèle initial $3D$, ce qui permet de ramener notre étude à un problème $2D$). Nous pouvons aussi mentionner les travaux de M. Tber et al. ([71], [68], [69]), les auteurs considèrent le modèle $2D$ résultant des approximations de Dupuit et de l'interface nette. Ils établissent l'existence et l'unicité dans le cas instationnaire, utilisant une discrétisation de type différences finies pour traiter l'évolution en temps. Dans [55], les auteurs K. Najib et C. Rosier montrent directement l'existence d'une solution dans le cas confiné instationnaire, la preuve s'appuyant sur le théorème du point fixe de Schauder. Ce résultat est généralisé dans [29], au cas de l'aquifère libre avec l'approche interface diffuse, le coefficient diffusif supplémentaire permettant alors d'établir une hiérarchie entre les hauteurs des surfaces libres.

D'un point de vue numérique, nous avons déjà mentionné les travaux liés à l'approximation de Ghyben-Herzberg, pour lesquelles des solutions analytiques existent dans des cas très simplifiés (pour des milieux isotropes et homogènes et dans des configurations simplifiées). Dans des cas plus réalistes, c'est à dire pour des géométries complexes et des milieux hétérogènes et anisotropes, plusieurs méthodes numériques ont été utilisées. Nous pouvons mentionner les travaux de J. Bear, J.F. Polo, H.L. Essaid et al ([13], [61], [33]) pour la méthode des différences finies, ainsi que les travaux de J.L. Wilson, D. Esselaoui, P.S. Huyakorn et al ([84], [34], [44]) pour la méthode des éléments

finis et plus récemment les travaux de [57] pour la méthode des volumes finis. Mais souvent il s'agit de stratégies numériques pour la résolution du problème initial tridimensionnel. Nous mentionnons aussi tous les travaux s'inscrivant dans un cadre de monitoring pour lequel on cherche à localiser l'interface salée afin de câler le choix optimal des puits de pompage et les seuils de quantité d'eau à pomper afin de minimiser l'effet de l'intrusion saline.

3 Problème d'identification.

Pour l'hydraulique souterraine, l'identification des paramètres tels que la porosité ou la conductivité hydraulique est une étape incontournable si l'on veut modéliser correctement l'intrusion saline dans les aquifères.

Ce problème inverse consiste à retrouver des paramètres intervenant dans le système d'origine à partir de la solution du problème. Il s'agit donc d'estimer des paramètres difficiles d'accès et caractérisant le phénomène en fonction d'observation. Plus précisément, notre but est d'identifier la conductivité hydraulique et/ou la porosité en fonction d'observations ou de mesures sur le terrain faites sur la profondeur de l'interface entre le milieu saturé et la zone sèche, h_1 et sur la profondeur de l'interface eau douce/eau salée, h . Par ailleurs, le problème d'intrusion saline est souvent transitoire et l'étude de sensibilité [62] montre que la forme de cette interface eau douce/eau salée dépend essentiellement de la conductivité hydraulique. Les autres paramètres comme la porosité, ayant principalement un impact sur le temps mis à atteindre le régime permanent. Pour cette raison, nous avons focalisé, notre étude, sur l'identification de la conductivité hydraulique pour le problème d'intrusion saline dans le cas d'aquifère libre. Soulignons que la problématique d'identification de paramètres a souvent été abordée dans le cadre de l'hydraulique souterraine ([25], [29]), mais plus rarement en ce qui concerne le phénomène d'intrusion saline. Les études de Sun et Yeh [67] furent les premières à développer le cas des résolutions de problèmes inverses pour des systèmes adjoints associés au système stationnaire correspondant. Concernant spécifiquement le problème d'intrusion marine, M.E Talibi et M.H Tber ont démontré l'existence du contrôle optimal et ont donné les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas d'une interface eau douce/eau salée stationnaire et d'un aquifère confiné [71].

Dans ce travail, le problème inverse est formulé comme un problème d'optimisation dont la fonction coût calcule l'écart quadratique entre les charges hydrauliques mesurées et celles données par le modèle. Mais, en général, la profondeur des aquifères confinés est très grande et il est difficile d'atteindre l'interface eau douce/eau

salée. Au contraire, pour les aquifères non confinés, il est plus facile de déterminer les valeurs exactes de la profondeur de l'interface eau douce/eau salée ainsi que celle de l'interface zones sèches/zone saturée. Notre objectif est de généraliser le travail de M.E Talibi et M.H Tber au cas d'un aquifère libre. Cela correspond donc au cas instationnaire, qui est plus réaliste d'un point de vue pratique mais aussi plus compliqué en raison de la présence la variable temporelle.

Le problème inverse est réduit à un problème d'optimisation, où la fonction coût calcule la différence quadratique entre les profondeurs des interfaces mesurées et celles données par le modèle. Dans un premier temps, nous devons choisir soigneusement l'ensemble décrit par les paramètres admissibles. Si on prend cet ensemble dans l'espace $L^\infty(\Omega)$, l'existence et l'unicité de la solution du problème initial sont assurées mais cela ne fournit pas l'existence du contrôle optimal. Par ailleurs, si on prend cet ensemble dans $H^1(\Omega)$, cela constitue une hypothèse trop restrictive qui doit être affaiblie. Par conséquent, nous proposons l'ensemble des paramètres admissibles défini comme un sous-ensemble de l'espace $BV(\Omega)$, l'espace des fonctions à variations bornées, afin de pouvoir récupérer des coefficients discontinus. D'autre part, on impose que la variation totale des paramètres est uniformément bornée, afin d'assurer un résultat de compacité nécessaire pour prouver l'existence d'un contrôle optimal. Puis en considérant le problème exact comme une contrainte pour le problème d'optimisation et en introduisant le Lagrangien associé à la fonction coût et à la solution du problème instationnaire, nous établissons que le système d'optimalité (constitué par les équations d'état, les équations d'état adjoint et la condition d'optimalité) admet au moins une solution. Pour cela, nous avons d'abord établi que le système d'état adjoint associé admet une solution unique. Ce problème rétrograde consiste en un système couplé d'équations paraboliques linéaires, la principale difficulté est liée à la présence de produits scalaires entre les gradients de la solution exacte et les inconnues. La régularité L^4 obtenue pour le gradient de la solution du problème direct nous permet de traiter ces termes. Enfin, pour établir les conditions d'optimalité du premier ordre, il faut montrer que l'opérateur qui, à une conductivité hydraulique K associe la solution du problème directe $(h(K), h_1(K))$ est continue et différentiable. La difficulté provient du fait que le couple $(h(K), h_1(K))$ est implicitement défini par le problème direct. Ce résultat est démontré en appliquant le théorème des fonctions implicites et en démontrant que la différentielle de cet opérateur par rapport à (h, h_1) est un isomorphisme de $Z(0, T)^2$ vers $L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))^2$. À nouveau, nous utilisons le résultat de régularité $L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))$, $r > 2$, établi pour la solution du problème exact. Ce résultat de régularité (qui est une conséquence du résultat de régularité pour des systèmes elliptiques

établi par Meyers [54]) est fondamental pour établir que l'opérateur qui associe à la conductivité les variables d'état, est continu et différentiable sur un espace approprié $Z(0, T)^2$.

Numériquement, dans [72] les auteurs s'intéressent à la résolution numérique du problème d'identification de la conductivité hydraulique pour le problème d'intrusion saline dans le cas d'un aquifère confiné. Le système d'optimalité est, alors, discrétisé par une méthode éléments finis et les auteurs utilisent la bibliothèque Éléments finis C++ Rheolef pour l'implémentation de leur méthode. Pour résoudre le problème d'optimisation, les auteurs ont utilisé un programme C / C ++ basé sur le package d'optimisation avancé qui implémente l'algorithme BLMVM (Bounded Limited Memory Variable Metric). Dans le chapitre 3, nous allons généraliser cette étude au cas d'un aquifère libre.

Nous notons d'abord que, concrètement, nous n'avons que des observations spécifiques (en espace et en temps) correspondant au nombre de puits de monitoring, nous devons donc adapter les résultats précédents au cas de données d'observations discrètes. Le gradient de la fonction coût est calculé grâce à des formules de quadrature afin de prendre en compte les données d'observations discrètes. La fonction coût est ensuite minimisée en utilisant une méthode basée sur l'algorithme BLMVM, qui utilise des gradients projetés pour construire une matrice BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) à mémoire limitée et pour déterminer un pas de descente. La longueur du pas est calculée en utilisant la méthode de recherche linéaire qui l'oblige à satisfaire la condition d'Armijo et qui tente également de vérifier la condition de courbure. À la fin du chapitre, nous avons appliqué cette méthode à certaines expériences numériques pour illustrer la capacité de la méthode à déterminer les paramètres inconnus.

Dans la première partie de ce travail, nous avons considéré que les paramètres intervenant dans le modèle d'intrusion marine et les inconnus étaient des valeurs déterministes, mais une autre façon d'aborder le problème, est de considérer ces paramètres comme des variables aléatoires. Ainsi, nous étudions le problème d'intrusion saline en considérant les paramètres et les inconnus comme des variables stochastiques. Au cours des dernières années, les équations différentielles partielles stochastiques ont fait l'objet de plusieurs recherches théoriques et numériques. Le premier domaine de recherche tente de répondre aux questions sur la façon de modéliser l'incertitude et l'entrée stochastique, tandis que le second sujet couvre la possibilité de développer une méthode pour analyser ces équations et aussi pour concevoir des algorithmes efficaces pour leurs résolutions numériques. Par exemple, l'approche statistique de la méthode de Monte Carlo a été largement utilisée, mais elle est en général très coûteuse.

teuse et, par conséquent, elle est uniquement recommandée en dernier recours. Dans ce travail, nous utilisons la théorie du chaos polynomial de Wiener [83] pour traiter l'incertitude. À cet effet, nous développons la solution stochastique suivant une base orthogonale générée par les produits directs des polynômes d'Hermite fonction des variables aléatoires gaussiennes. Nous décomposons ainsi une fonction stochastique arbitraire en une partie déterministe et en une partie aléatoire. Le problème stochastique d'intrusion saline est ainsi transformé en un système d'équations déterministes que l'on doit résoudre pour chaque coefficient du chaos polynomial décrivant la solution. D'un point de vue numérique, la discrétisation en temps de ce système déterministe est effectuée à l'aide d'un schéma Runge-Kutta à variation totale (TVD), combiné à une méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale. Une fois que les coefficients du chaos polynomial sont calculés à partir des équations déterministes, les propriétés statistiques de la solution stochastique peuvent être étudiées directement.

4 Plan de thèse.

4.1 Rappels mathématiques

Dans le premier chapitre, on présente des outils et des notations mathématiques qu'on utilisera tout au long de cette thèse. Plus précisément, on introduit les espaces de Sobolev, et on redonne quelques inégalités fondamentales (Young, Hölder, Poincaré, Gagliardo-Nirenberg, etc.). On présente également des résultats fondamentaux sur les fonctions à valeurs dans un espace de Banach, ainsi que des résultats fondamentaux utilisés tout au long de ce documents, tels que les lemmes de compacité, le lemme de Mignot et certains théorèmes du point fixe. Nous concluons ce chapitre par le rappel du résultat d'existence globale de la solution pour ce problème d'intrusion saline ainsi que par celui de la régularité L^r , $r > 2$ pour le gradient de la solution. Ce résultat est une conséquence du résultat de régularité de Meyers que nous redonnons également. L'unicité de la solution constitue le dernier rappel de ce chapitre. Les preuves de ces deux résultats (régularité et unicité) sont mises en annexe.

4.2 Identification de la conductivité hydraulique : Étude théorique

Le chapitre 2 présente une étude théorique du problème d'intrusion saline. On formule dans un premier temps le problème de contrôle. Puis nous rappelons les pro-

priétés les plus importantes de l'espace des fonctions à variations bornées, ce qui nous permet de démontrer le résultat d'existence du contrôle optimal. Puis en considérant le problème exact comme une contrainte pour le problème d'optimisation et en introduisant le Lagrangien associé à la fonction coût et à la solution du problème instationnaire, nous établissons que le système d'optimalité (constitué par les équations d'état, les équations d'état adjoint et la condition d'optimalité) admet au moins une solution. Pour cela, nous avons d'abord établi que le système d'état adjoint associé admet une solution unique. Enfin, on donne les conditions d'optimalité du premier ordre en montrant que l'opérateur qui, à une conductivité hydraulique K associe la solution du problème directe $(h(K), h_1(K))$ est continue et différentiable.

4.3 Identification de la conductivité hydraulique : Étude numérique

Dans le chapitre 3, on étudie numériquement le problème d'identification de la conductivité hydraulique. On présente les schémas numériques utilisés pour la résolution du problème exact ainsi que celle du problème adjoint. Les schémas sont basées sur la méthode éléments finis P_1 -Lagrange pour la résolution spatiale combinée à un schéma semi-implicite en temps. On prouve un résultat de convergence pour le problème adjoint montrant que le schéma est d'ordre 1 en temps en espace, ce qui compte tenu de l'unicité de la solution du problème adjoint, nous permet d'assurer que le schéma converge vers la solution souhaitée. On décrit la méthode numérique pour la résolution du problème d'optimisation dans laquelle la fonction coût est minimisée en utilisant une méthode basée sur l'algorithme BLMVM, et en utilisant des gradients projetés pour construire une matrice BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) à mémoire limitée et pour déterminer un pas de descente. Enfin, nous concluons ce chapitre par certains résultats numériques illustrant la capacité de la méthode à déterminer les paramètres inconnus.

Les résultats du chapitre 2 et 3 font l'objet d'un article "A nonlinear optimization method applied to the hydraulic conductivity identification in unconfined aquifers" soumis en juin 2017 à Computers and Mathematics with Applications.

4.4 Approche stochastique

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de problème d'intrusion saline en considérant les paramètres et les inconnus comme des variables stochastiques. On commence par la présentation du modèle stochastique, puis on décrit l'étape de décomposition spec-

trale. Après la transformation du problème stochastique en un système d'équations déterministes, les discrétisations en temps et en espace de ces systèmes déterministes sont effectuées à l'aide d'un schéma Runge-Kutta à variation totale (TVD), ainsi que d'une méthode aux éléments finis. On finit ce dernier chapitre par quelques expériences numériques.

Les résultats de ce chapitre font l'objet d'une publication en préparation "A spectral stochastic method for a seawater intrusion problem with uncertainty" en collaboration avec M. Jazar et C. Rosier.

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Sommaire

1.1 Outils mathématiques	21
1.1.1 Espaces de Lebesgue et de Sobolev.	21
1.1.2 Quelques inégalités fondamentales.	24
1.1.3 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach	28
1.1.4 Lemmes de compacité.	30
1.1.5 Théorèmes du point fixe.	31
1.1.6 Résultat de régularité de Meyers.	32
1.2 Résultats mathématiques	34
1.2.1 Existence globale de la solution	35
1.2.2 Résultat de régularité et d'unicité	37
1.3 Processus stochastique - Mesure de Wiener	39

1.1 Outils mathématiques

Dans cette section, on rappelle plusieurs outils d'analyse fonctionnelle ainsi que quelques notations et définitions qui seront appliquées tout au long de ce travail.

1.1.1 Espaces de Lebesgue et de Sobolev.

On rappelle dans ce paragraphe, certaines définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et des espaces de Sobolev. On se réfère essentiellement aux ouvrages de référence [20, 63, 74, 64].

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω . On note

$$\mathcal{D}(\Omega)^d = \mathcal{D}(\Omega) \times \dots \times \mathcal{D}(\Omega).$$

On désigne par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\bar{\Omega}$. Ceci signifie qu'une fonction appartient à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ si elle est la restriction à Ω d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $\bar{\Omega}$.

On introduit les espaces de Lebesgue. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on désigne par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left/ \begin{array}{l} u \text{ mesurable et il existe une constante } C \\ \text{telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \end{array} \right. \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Propriété 1.1

1. L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.
2. Pour $1 < p < \infty$, l'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$ avec q est l'exposant conjugué de p , i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
3. Pour $p = 1$, l'espace dual de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$, i.e. $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$, mais $(L^\infty(\Omega))'$ contient strictement $L^1(\Omega)$.

■

On présente aussi, les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left/ \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_d \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \forall i = 1, 2, \dots, d, \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \end{array} \right. \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou parfois la norme équivalente

$$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{si } 1 \leq p < \infty).$$

Pour $p = 2$, on pose

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= W^{1,2}(\Omega) \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \middle/ \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_d \in L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

que l'on munit du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + ((u, v)),$$

avec

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme suivante :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour tout entier $m \geq 2$, on pose

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &= W^{m,2}(\Omega) \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \middle/ \begin{array}{l} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists g_{\alpha} \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha} \varphi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1}^d \|D^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est notée par $H_0^m(\Omega)$ et son dual est $H^{-m}(\Omega)$

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Lemme 1.1 *On suppose que $\bar{\Omega}$ est 1-régulier. Alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

■

Propriété 1.2

1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.
2. Pour tout entier m , l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

■

Théorème 1.1 (Injections de Sobolev) Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq +\infty$, q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Les injections suivantes sont continues :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \\ p > N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Supposons que Ω est de plus borné et de classe C^1 , les injections suivantes sont compactes :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), r \in [1, p^*[, \text{avec } p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), r \in [1, +\infty[, \\ p > N & \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

■

1.1.2 Quelques inégalités fondamentales.

On rappelle ici quelques inégalités fondamentales et très utiles. On se réfère essentiellement aux ouvrages de référence [20, 63, 64].

Proposition 1.1 (Inégalité de Young)

Soient p et q deux exposants conjugués tels que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 < p, q < \infty$. Pour tout réels $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Un cas simple de l'inégalité de Young est l'inégalité avec les exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

qui donne également l'inégalité de Young avec ϵ (valable pour tout $\epsilon > 0$) :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

■

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors

$$fg \in L^1 \quad \text{et} \quad \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Plus généralement, soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors

$$fg \in L^r \quad \text{et} \quad \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

■

Théorème 1.3 (Inégalité de Hölder généralisée)

Soient $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$ tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$ et soit $f_k \in L^{p_k}$, pour $k = 1, \dots, n$. Alors

$$\prod_{k=1}^n f_k \in L^1 \quad \text{et} \quad \left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_{L^1} \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

■

Théorème 1.4 (Inégalité de Poincaré)

On suppose que Ω est un ouvert borné (ou borné dans une seule direction). Alors il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

■

Théorème 1.5 (Inégalité de Poincaré généralisée)

On suppose que Ω est un domaine borné régulier. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ (dépendant de $|\Omega|$) telle que

$$\|\rho\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_\Omega \rho \right| \right) \quad \forall \rho \in H^1(\Omega).$$

Autrement dit, la quantité $\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_\Omega \rho \right|$ est une norme équivalente à la norme $\|\rho\|_{H^1(\Omega)}$. ■

Théorème 1.6 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg)

Soient $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact, deux réels $1 \leq q, r \leq \infty$ et un entier m . Soient α un réel et j un entier naturel tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) \alpha + \frac{1-\alpha}{q}$$

et

$$\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

Alors, il existe une constante C dépendant de m, n, j, q, r et α telle que

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C_G \|D^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

En particulier, si $j = 0, p = 4, m = 1, \alpha = \frac{1}{2}, r = 2$ et $q = 2$, on obtient [20] :

$$\|u\|_{L^4} \leq C_G \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

■

Proposition 1.2 (Inégalité d'interpolation entre espaces de Lebesgue)

Soit $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ tels que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. alors pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}^\theta \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{1-\theta} \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

■

Proposition 1.3 (Inégalité d'interpolation entre espaces de Sobolev)

Soit $f \in H^{s_1}(\Omega) \cap H^{s_2}(\Omega)$ tels que $0 < s_1 < s_2$. alors pour tout $s \in]s_1, s_2[$, on a $f \in H^s(\Omega)$ et

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{s_1}(\Omega)}^\theta \|f\|_{H^{s_2}(\Omega)}^{1-\theta} \quad \text{où} \quad s = \theta s_1 + (1-\theta) s_2, \quad 0 < \theta < 1.$$

■

Lemme 1.2 (Inégalité de Gronwall)

Soit $X(t) \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité différentielle

$$\frac{dX}{dt} \leq a(t)X(t) + b(t).$$

Alors

$$X(t) \leq X(0) \exp(A(t)) + \int_0^t \exp[A(t) - A(s)] b(s) ds,$$

avec

$$A(t) = \int_0^t a(r) dr.$$

En particulier, si $a(t) \equiv \alpha$ et $b(t) \equiv \beta$, alors

$$X(t) \leq (X(0) + \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

■

Proposition 1.4 (Inégalité d'interpolation)

$$\|\nabla f\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Delta f\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

Proposition 1.5 (Inégalité d'Agmon)

Soit $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Alors il existe une constante C telle que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|f\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}.$$

En 2D, la première inégalité est toujours vraie, mais pas la deuxième : soit $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe une constante C telle que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

■

Théorème 1.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs x et y de E

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

■

1.1.3 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Dans cette section, on présente quelques résultats concernant les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et X un espace de Banach. Soit $p \in [1, +\infty]$, on pose

$$L^p(I; X) = \{f : I \rightarrow X / f \text{ mesurable et } t \rightarrow \|f(t)\|_X \in L^p(I)\}.$$

Pour $f \in L^p(I; X)$, on définit

$$\|f\|_{L^p(I; X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(I; X)} = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X.$$

Propriété 1.3

1. L'espace $L^p(I; X)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(I; X)}$, est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. Si X est réflexif et $1 < p < \infty$, alors $L^p(I; X)$ est réflexif.
3. Si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathcal{D}(I; X)$ est dense dans $L^p(I; X)$.
4. Si X est réflexif ou X' , l'espace dual de X , est séparable et $1 < p < \infty$, alors l'espace dual de $L^p(I; X)$ s'identifie à $L^q(I; X')$ avec q est l'exposant conjugué de p , i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

■

On rappelle tout d'abord, un résultat à propos de la dérivation des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, cité et démontré par R. Temam [73].

Théorème 1.8 Soient X un espace de Banach et X' son dual. soit $u, v \in L^1(a, b; X)$, a et b sont deux réels positifs, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes

1. u est égale presque partout à une primitive de g ,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds, \quad \xi \in X, p.p. t \in [a, b].$$

2. Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}((a, b))$,

$$\int_a^b u(t) \phi'(t) dt = - \int_a^b g(t) \phi(t) dt.$$

3. Pour tout $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt} \langle u, \eta \rangle_{X, X'} = \langle g, \eta \rangle_{X, X'}$$

au sens des distributions sur (a, b) .

Ensuite, on rappelle un résultat très utile cité dans [73] qui est un cas particulier d'un théorème général d'interpolation introduit dans la livre de Lions-Magenes [51]. ■

Théorème 1.9 Soient V, H, V' trois espaces de Hilbert tels que

$$V \subset H \equiv H' \subset V' \quad \text{avec injections continues et denses,}$$

V' est le dual de V et H' est le dual de H . Si on a une fonction $u \in L^2(0, T; V)$ et sa dérivée $u' \in L^2(0, T; V')$, alors

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$$

et on a l'égalité suivante, vérifiée au sens des distributions sur $(0, T)$,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle_{V', V}.$$

Lemme 1.3 (Mignot)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante telle que

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f(\lambda)}{\lambda} \right\| < +\infty.$$

Soient $w \in L^2(0, T, H)$ telle que

$$\frac{dw}{dt} \in L^2(0, T, V') \text{ et } f(w) \in L^2(0, T, V),$$

alors

$$\left\langle \frac{dw}{dt}, f(w) \right\rangle_{V', V} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\int_0^{w(.,y)} f(r) dr \right) dy \quad \text{dans } D'(0, T),$$

et pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{dw}{dt}, f(w) \right\rangle_{V', V} dt = \int_{\Omega} \left(\int_{w(t_1, y)}^{w(t_2, y)} f(r) dr \right) dy.$$

1.1.4 Lemmes de compacité.

Dans cette section, on donne deux Lemmes de compacité qui seront utiles par la suite. Commençons tout d'abord par rappeler le résultat élémentaire suivant (voir les livres de H. Brezis [20] et J.C. Robinson [64]).

Théorème 1.10 (Rellich-Kondrachov)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Alors, de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$. On dit alors que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

■

Remarque 1.1 *Ce dernier théorème n'est pas toujours vrai si l'ouvert n'est pas borné. Prenons par exemple $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ n'est pas compacte.*

■

Un premier résultat de compacité a été introduit et démontré dans [49] et [73]. On se donne trois espaces de Banach X_0, X et X_1 tels que

$$X_0 \subset X \subset X_1 \quad \text{avec injections continues} \quad (1.1)$$

où

$$\text{l'injection } X_0 \hookrightarrow X \text{ est compacte} \quad (1.2)$$

et

$$X_0 \text{ et } X_1 \text{ sont réflexifs.} \quad (1.3)$$

Soient $T > 0$ un nombre fini et $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$. On définit l'espace

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \mathfrak{V}(0, T; p_0, p_1; X_0, X) \\ &= \left\{ v : v \in L^{p_0}(0, T; X_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; X_1) \right\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathfrak{V}} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}$$

$\mathfrak{V}$ est un espace de Banach et il est évident que

$$\mathfrak{V} \subset L^{p_0}(0, T; X) \quad \text{avec injection continue.}$$

On a alors le premier résultat de compacité :

Théorème 1.11 *Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3) et si $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, alors l'injection de $\mathfrak{Y}$ dans $L^{p_0}(0, T; X)$ est compacte.*

Autrement dit, toute suite bornée dans $\mathfrak{Y}$ admet une sous-suite qui converge fortement dans $L^{p_0}(0, T; X)$.

■

1.1.5 Théorèmes du point fixe.

On rappelle dans cette section deux théorèmes de point fixe très utiles en mathématiques, tels que le théorème de point fixe de Banach [20, 19] et le théorème de point fixe de Schauder [18]. Les théorèmes de point fixe affirment qu'une application admet, sous certaines conditions, un point fixe. Ces théorèmes sont principalement utilisés à la résolution des équations différentielles. Ils interviennent dans la démonstration de l'existence de solutions des équations différentielles.

Le théorème de point fixe de Banach montre qu'une contraction d'un espace métrique complet admet un unique point fixe.

Théorème 1.12 (Point fixe de Banach)

Soient E un espace métrique complet et $\Psi : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $0 < k < 1$. Alors Ψ admet un unique point fixe x^ dans E .*

De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ converge vers x^ .*

■

Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation du théorème de point fixe de Brouwer [74] dans des espaces topologiques de dimension infinie. Il montre l'existence d'un point fixe pour une application continue sur une convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 1.13 (Point fixe de Schauder) *Soient E un espace de Banach et K une partie compacte convexe de E . Alors toute application Φ continue de K dans K possède un point fixe dans K .*

■

1.1.6 Résultat de régularité de Meyers.

Nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et on désigne par Γ la frontière de Ω . Nous rappelons d'abord le résultat suivant (cf. J. L. Lions et E. Magenes [50]) :

$\forall p$, t.q. $1 < p < \infty$, Δ est un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$.

On pose $G = (-\Delta)^{-1}$ et $g(p) = \|G\|_{\mathcal{L}(W^{-1,p}(\Omega); W_0^{1,p}(\Omega))}$.

On souligne que $g(2) = 1$.

Nous donnons à présent deux lemmes préliminaires qui sont une conséquence du résultat de régularité de Meyers [54] et dont on peut trouver les détails de la démonstration dans [16].

1. Cas elliptique :

Lemme 1.4 Soit $A \in (L^\infty(\Omega))^n$ un tenseur symétrique tel qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \forall x \in \Omega \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $\beta = \max_{1 \leq i,j \leq n} \|A_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Il existe $r(\alpha, \beta) > 2$, tel que, pour tout $f \in W^{-1,r}(\Omega)$ et $\forall g_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, l'unique solution u du problème

$$\begin{cases} \nabla \cdot (A \nabla u) = f, \forall x \in \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) + g_0, \end{cases}$$

appartient à $W^{1,r}(\Omega)$. De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C(\alpha, \beta, r) \|f - \nabla \cdot (A \nabla g_0)\|_{W^{-1,r}(\Omega)},$$

où $C(\alpha, \beta, r)$ est une constante ne dépendant que des constantes α et β caractérisant l'opérateur A et de r .

■

Remarque 1.2 La preuve donnée dans [16] nous permet de préciser la constante $C(\alpha, \beta, r)$.

Soit $c \geq 0$, posons

$$\mu = \frac{\alpha + c}{\beta + c} \text{ et } \nu = \frac{\beta^2 + c^2}{(\beta + c)^2}, \quad (1.5)$$

nous choisissons c t.q. $c > \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha}$ de sorte à assurer $\nu < \mu$. Puisque $g(2) = 1$ et $0 < 1 - \mu + \nu < 1$, en utilisant les propriétés de l'application $g(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$g(r)(1 - \mu + \nu) < 1. \quad (1.6)$$

Ainsi, plus $(1 - \mu + \nu)$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra des constantes α, β liées à l'opérateur elliptique A .

Le cas limite correspond au cas où l'opérateur A est le Laplacien, (ou proportionnel au Laplacien), alors $\mu = 1$ et $\nu = 0$ donc (1.6) est satisfaite $\forall r \geq 2$.

Compte tenu des précédentes estimations, nous pouvons majorer la constante $C(\alpha, \beta, r)$ par

$$C(\alpha, \beta, r) \leq (1 - g(r)(1 - \mu + \nu))^{-1} \frac{g(r)}{\beta + c}. \quad (1.7)$$

■

2. Cas parabolique :

Énonçons, à présent, le lemme correspondant au cas parabolique. Nous définissons (cf.[16])

$$X_p = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$

muni de la norme :

$$\left(\int_0^T \|v(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_T)^n}.$$

Nous introduisons

$$Y_p = L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega)),$$

et nous soulignons que l'application $v \rightarrow \operatorname{div}_x v$ envoie $(L^p(\Omega_T))^n$ vers $L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$.

Nous munissons alors Y_p de la norme $\|f\|_{Y_p} = \min_{\operatorname{div}_x g = f} \|g\|_{L^p(\Omega_T)^n}$, nous pouvons alors énoncer l'analogue du lemme 1 (cf. [16]).

Lemme 1.5 Soient f et u^0 tels que $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $u^0 \in H$. Soit u la solution appartenant à $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, & \text{dans } \Omega_T \\ u(0) = u^0. \end{cases}$$

Alors, en supposant que Γ est suffisamment régulière, il existe $r > 2$, dépendant de α, β et Ω tel que si

$$f \in L^r(0, T; W^{-1,r}(\Omega)),$$

et si

$$u^0 \in W_0^{1,r}(\Omega)$$

alors $u \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))$ et il existe $\hat{C}(\alpha, \beta, r) > 0$ telle que

$$\|u\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leq \hat{C}(\alpha, \beta, r) (\|f\|_{L^r(0,T;W^{-1,r}(\Omega))} + \|u_0\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}). \quad (1.8)$$

■

Remarque 1.3 Comme pour le lemme 1, nous pouvons préciser la constante $\hat{C}(\alpha, \beta, r)$.

Posons

$P = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, l'opérateur associé aux conditions de Dirichlet homogènes.

Il est connu que, étant donné $F \in Y_p$, il existe une unique solution $u \in X_p$ telle que :

$$\begin{cases} Pu = f, & \text{dans } \Omega_T \\ u(0) = u^0. \end{cases}$$

Posons $\hat{g}(p) = \|P^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_p; X_p)}$, alors $\hat{g}(2) = 1$.

En utilisant les propriétés de l'application $\hat{g}(\cdot)$, on peut donc trouver $r > 2$ tel que

$$\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1,$$

où les constantes $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ et $\hat{c}$ sont les constantes définies précédemment par (1.5) grâce aux constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

A nouveau, plus $(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu})$ sera petit, plus r pourra être grand, donc la détermination de r dépendra essentiellement des constantes $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ caractérisant l'opérateur elliptique A .

La constante $\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r)$ doit alors satisfaire :

$$\hat{C}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, r) \leq (1 - \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}))^{-1} \frac{\hat{g}(r)}{\hat{\beta} + \hat{c}}.$$

■

1.2 Résultats mathématiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in (1, +\infty)$, on désigne par $W^{n,p}(\Omega)$ désigner l'espace de Sobolev usuel muni de la norme $\|\phi\|_{W^{n,p}(\Omega)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^p(\Omega)}$. Par souci de simplicité nous écrivons $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et

$$V = H_0^1(\Omega), \quad E = H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad H = L^2(\Omega).$$

L'injection $V \subset H = H' \subset V'$ est dense et compact. Pour tout $T > 0$, soit $W(0, T)$ l'espace tel que

$$W(0, T) := \{\omega \in L^2(0, T; V), \partial_t \omega \in L^2(0, T; V')\}$$

muni de la norme hilbertienne $\|\omega\|_{W(0, T)} = (\|\omega\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|\partial_t \omega\|_{L^2(0, T; V')}^2)^{1/2}$. Les injections suivantes sont continues ([50] prop. 2.1 and thm 3.1, chapter 1)

$$W(0, T) \subset \mathcal{C}([0, T]; [V, V']_{\frac{1}{2}}) = \mathcal{C}([0, T]; H)$$

tandis que l'injection

$$W(0, T) \subset L^2(0, T; H) \quad (1.9)$$

est compacte.

1.2.1 Existence globale de la solution

Nous allons rappeler le résultat d'existence de solutions faibles pour ce modèle complété par des conditions initiales et aux bords. Pour cette section, la conductivité hydraulique K sera un tenseur pour donner des résultats généraux, mais pour le problème d'identification, nous allons nous restreindre au cas où K est un scalaire.

Nous considérons un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$ décrivant la projection de l'aquifère sur le plan horizontal. La frontière de Ω , supposée $\mathcal{C}^1$, est désignée par Γ . L'intervalle de temps est $(0, T)$, T étant un nombre réel non négatif et nous posons $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$. Nous concentrons notre travail sur le modèle $(\mathcal{M})$ où la storativité est négligée. D'abord, nous ré-écrivons le modèle $(\mathcal{M})$ avec quelques notations simplificatrices. Les "primes" sont supprimés dans les opérateurs différentiels dans $\mathbb{R}^2$. Les termes de base sont indiqués sans "tildes". La perméabilité $\tilde{K}_f$ est maintenant désignée par K . Nous supposons que la profondeur h_2 est constante, $h_2 > 0$. Nous définissons les fonctions T_s et T_f par

$$T_s(u) = h_2 - u, \quad T_f(u) = u, \quad \text{for } u \in (0, h_2).$$

On prolonge ces fonctions continûment par des constantes en dehors de $(0, h_2)$. Nous considérons alors le système des équations suivantes dans Ω_T :

$$\begin{aligned} \phi \partial_t h - \nabla \cdot (\alpha K T_s(h) \nabla h) - \nabla \cdot (\delta \nabla h) - \nabla \cdot (K T_s(h) \nabla h_1) \\ = -\tilde{Q}_s T_s(h) := -Q_s, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \phi \partial_t h_1 - \nabla \cdot (K (T_f(h - h_1) + T_s(h)) \nabla h_1) - \nabla \cdot (\delta \nabla h_1) - \nabla \cdot (\alpha K T_s(h) \nabla h) \\ = -\tilde{Q}_f T_f(h - h_1) - \tilde{Q}_s T_s(h) := -Q_f - Q_s, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce système (1.10)-(1.11) est complété par les conditions initiales et aux bords suivantes :

$$h = h_D, \quad h_1 = h_{1,D} \quad \text{in } \Gamma \times (0, T), \quad (1.12)$$

$$h(0, x) = h_0(x), \quad h_1(0, x) = h_{1,0}(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.13)$$

avec les conditions de compatibilité

$$h_0(x) = h_D(0, x), \quad h_{1,0}(x) = h_{1,D}(0, x), \quad x \in \Gamma.$$

Examinons maintenant les hypothèses mathématiques. Nous commençons par les caractéristiques de la structure poreuse. Nous supposons l'existence de deux nombres réels positifs K_- et K_+ tel que le tenseur représentant la conductivité hydraulique est un tenseur borné elliptique et uniformément positif :

$$0 < K_- |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1,2} K_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq K_+ |\xi|^2 < \infty \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \xi \neq 0.$$

Nous supposons que la porosité est constante dans l'aquifère. En effet, sur le terrain envisagé ici, les effets dûs aux variations de ϕ sont négligeables par rapport à ceux dûs à des contrastes de densité. Les termes sources Q_f et Q_s sont des fonctions de $L^2(0, T; H)$ tel que $Q_s \geq 0$. Notons par exemple que le pompage d'eau douce correspond à l'hypothèse $Q_f \geq 0$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$. Les fonctions h_D et $h_{1,D}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))')$ tandis que les fonctions h_0 et $h_{1,0}$ sont dans $H^1(\Omega)$.

Finalement, nous supposons que les données aux bords et les données initiales satisfont des conditions physiquement réalistes sur la hiérarchie des profondeurs des interfaces :

$$0 \leq h_{1,D} \leq h_D \leq h_2 \text{ p.p. dans } \Gamma \times (0, T), \quad 0 \leq h_{1,0} \leq h_0 \leq h_2 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

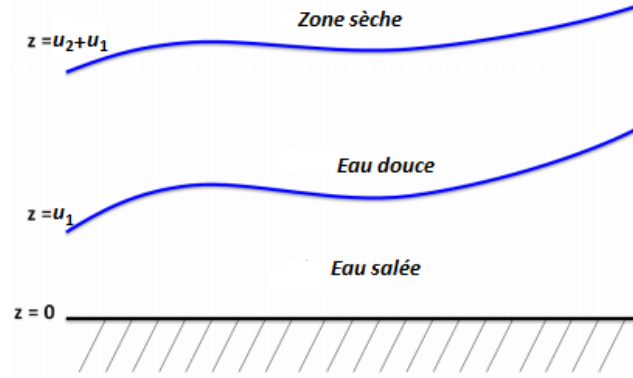
On peut montrer aisément que le système (1.10)-(1.11) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 &= \operatorname{div}(\nu T_{h_2}(u_1) K \nabla (T_{h_2}(u_1) + T_{h_2}(u_2))) + \operatorname{div}(\delta \nabla T_{h_2}(u_1)), \\ \partial_t u_2 &= \operatorname{div}(T_{h_2}(u_1) K \nabla (\nu T_{h_2}(u_1) + T_{h_2}(u_2))) + \operatorname{div}(\delta \nabla T_{h_2}(u_2)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où $\nu = \frac{1}{\alpha + 1}$ et

$$T_{h_2}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq h_2 \\ h_2 & \text{si } u \geq h_2. \end{cases}$$

et où u_1 et u_2 sont données par la figure suivante :



Dans [6], un résultat d'existence globale en temps est donné dans le cas dégénéré ($\delta = 0$) en utilisant la décroissance d'une fonctionnelle de Lyapunov (entropie). Par ailleurs, le principe du maximum suivant :

$$u_i \geq 0, i = 1, 2$$

est prouvé. Ce qui revient à dire $0 \leq h_1 \leq h$.

Récemment dans [32], le théorème suivant est prouvé lorsque $\delta \neq 0$:

Théorème 1.14 *Supposons que le tenseur vérifie :*

$$\nu \frac{K_+^2}{K_-} \leq \frac{p-1}{p} \times \frac{4\delta}{l}, \quad \nu^2 \frac{K_+^2}{K_-} \leq \frac{p-1}{p} \times \frac{4\delta}{l} \quad \text{pour tout } p \geq 2. \quad (1.15)$$

Si $u_i^0 \in L^2(\Omega)$ avec $0 \leq u_i^0 \leq h_2$ p.p. dans Ω . Alors pour tout $T > 0$, le problème (1.14) admet une solution faible $(u_i)_{i=1,2} \in W(0, T)^2$. De plus, le principe maximum suivant est vrai :

$$0 \leq u_i(t, x) \leq h_2 \quad \text{pour p.p. } x \in \Omega, \text{ pour tout } t \in (0, T) \text{ et pour tout } i = 1, 2.$$

■

Ce qui montre en outre que $0 \leq h \leq h_1 \leq h_2$.

1.2.2 Résultat de régularité et d'unicité

Nous allons maintenant indiquer le résultat de régularité $L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))$ (pour $r > 2$) satisfait par la solution exacte, cette régularité nous permet de traiter la non-linéarité du système et ainsi de prouver l'unicité de la solution. On se réfère à [31] pour

plus de détails sur les preuves de ces résultats.

Dans notre cas, les paramètres μ et ν sont tels que

$$\mu = \frac{(\delta + \phi c)}{(\delta + \phi c) + K_+ h_2} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{\sqrt{(\delta + K_+ h_2)^2 + \delta^2}}{((\delta + K_+ h_2) + \delta)}. \quad (1.16)$$

Nous avons choisi $c > 0$ tel que $c > \frac{K_+ h_2}{2\delta\phi^2} (2\phi\delta + K_+ h_2)$ afin d'assurer $\nu < \mu$. Alors, puisque $(1 - \mu + \nu) < 1$ et grâce à la continuité d'une application déduite de $g(\cdot)$, il existe $r > 2$ tel que $k(r) := g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$.

Soit $r(\phi, \delta, h_2, K_+) > 2$ le plus grand nombre réel tel que $g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$ où μ et ν sont définis par (1.16).

Proposition 1.6 *Soit (h, h_1) une solution de problème (1.10)–(1.13) et $r(\phi, \delta, h_2, K_+) > 2$ un nombre réel tel que $g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$. Si $(h_D, h_{1,D}) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2$, $(Q_s, Q_f) \in L^r(0, T; W^{-1,r}(\Omega))^2$ et $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,r}(\Omega)^2$ Alors ∇h et ∇h_1 sont dans $L^r(\Omega_T)$, de plus, nous avons*

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_1(\phi, h_2, K_-, K_+, \delta, h_0, h_{1,0}, h_D, h_{1,D}, Q_f, Q_s), \quad (1.17)$$

et

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_2(\phi, h_2, K_-, K_+, \delta, h_0, h_{1,0}, h_D, h_{1,D}, Q_f, Q_s). \quad (1.18)$$

■

Finalement, nous concluons cette section par l'unicité de la solution du système (1.10)-(1.11). Pour l'obtenir, nous devons supposer que le tenseur représentant la conductivité hydraulique K est symétrique, ainsi les paramètres précédents deviennent

$$\mu = \frac{\delta + \phi c}{\delta + \phi c + K_+ h_2} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\phi c}{\delta + K_+ h_2 + \phi c}. \quad (1.19)$$

Soit $r > 2$, on peut toujours ajuster ϕ , δ , h_2 et K_+ tel que $k(r) = g(r)(1 - \mu + \nu) < 1$. En effet, nous posons :

$$(\delta + K_+ h_2 + \phi c) < \frac{g(r)}{g(r) - 1} \delta, \quad \forall c > 0,$$

donc

$$K_+ < \frac{1}{g(r) - 1} \times \frac{\delta}{h_2} - \frac{\phi c}{h_2}, \quad \forall c > 0.$$

en faisant tendre $c \rightarrow 0$, nous obtenons

$$K_+ < \frac{1}{g(r) - 1} \frac{\delta}{h_2}. \quad (1.20)$$

Remarque 1.4 La condition (1.20) suppose une conductivité hydraulique suffisamment faible à l'intérieur de l'aquifère. Cette condition peut sembler très restrictive mais en réalité on doit se souvenir que la conductivité hydraulique est de l'ordre de 10^{-6} m/s dans un aquifère usuel.

■

Théorème 1.15 Supposons que le tenseur représentant la conductivité hydraulique K est symétrique et soit $(\phi, h_2, K_+, \delta) \in (\mathbb{R}_*^+)^4$ satisfaisant (1.20) pour $r = 4$. Si $(h_D, h_{1,D}) \in L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))^2$, $(Q_s, Q_f) \in (L^4(0, T; W^{-1,4}(\Omega)))^2$ et $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,4}(\Omega)^2$, alors la solution $(h - h_D, h_1 - h_{1,D})$ du système (1.10)-(1.11) est unique dans $W(0, T) \times W(0, T)$.

■

1.3 Processus stochastique - Mesure de Wiener

Définition 1 (Vecteurs gaussiens) Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. X est un vecteur gaussien si et seulement si $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de nombres réels, la variable aléatoire

$$Z = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

est une variable gaussienne.

■

Définition 2 (Mouvement brownien) Le mouvement brownien unidimensionnel $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique dépendant du temps "t" et vérifiant :

1. Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien c.à.d $\forall t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
2. $(B_t)_{t \geq 0}$ est presque sûrement continue, c.à.d pour presque toute réalisation, la fonction $t \rightarrow B_t(\omega)$ est continue.
3. Pour tous s et t , la moyenne $E[B_t] = 0$, et la covariance $E[B_s B_t] = \min(s, t)$.

■

Définition 3 (Mesure de Wiener) Considérons $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Le mouvement brownien est l'application

$$\begin{aligned} B : \quad \Omega &\longrightarrow C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ \omega &\longrightarrow (t \rightarrow B_t(\omega)). \end{aligned}$$

La mesure de Wiener, souvent notée $W(d\omega)$, est la mesure-image de $\mathbb{P}(d\omega)$ par cette application B . Autrement dit, c'est la mesure de probabilité W sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, telle que $\forall \mathcal{A} \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$W(\mathcal{A}) = \mathbb{P}((B_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{A}).$$

■

Définition 4 (Polynômes d'Hermite) Les polynômes d'Hermite sont définis comme suit :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ils peuvent également s'écrire sous forme de développement polynomial :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k},$$

où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

■

Définition 5 (Mesure Gaussienne) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $B_0(\mathbb{R}^n)$ la complétion de σ -algèbre borélienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda^n : B_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ désigne la mesure de Lebesgue de dimension n . Alors la mesure gaussienne standard $\gamma^n : B_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ est définie par :

$$\gamma^n(\mathcal{A}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{A}} e^{-\frac{1}{2} \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2} d\lambda^n(x).$$

■

IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

Sommaire

2.1	Introduction	41
2.2	Formulation du problème	43
2.3	Existence du contrôle optimal	45
2.4	Conditions nécessaires d'optimalité	46

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'identification de la conductivité hydraulique K pour le problème d'intrusion saline pour un aquifère libre, non homogène et isotrope. L'estimation de ce paramètre est basée sur des observations ou des mesures de terrain effectuées sur la profondeur de l'interface eau douce / eau salée et sur la profondeur de la nappe phréatique. Notons que, concrètement, nous ne disposons que d'observations ponctuelles (en espace et en temps) correspondant aux nombres du puits de monitoring.

Par ailleurs le phénomène d'intrusion saline est souvent transitoire et l'étude de sensibilité proposé dans [62] montre que la forme de l'interface eau douce/eau salée dépend essentiellement de la conductivité hydraulique, les autres paramètres telle que la porosité, impactent surtout le temps mis à atteindre le régime permanent, c'est pourquoi on doit considérer le modèle instationnaire pour identifier simultanément

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

ces deux paramètres.

Enfin, notons que les études existantes concernent principalement les résolutions numériques de ces problèmes inverses (voir [72]). Cependant M. E. Talibi et M. H. Tber ont démontré l'existence du contrôle optimal et ont donné des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas d'une interface eau salée/eau douce stationnaire et pour un aquifère confiné (voir [71]). Ce chapitre est une généralisation de ce travail dans le cas d'un aquifère non confiné, nous considérons donc le cas instationnaire, qui est plus réaliste d'un point de vue pratique, mais aussi plus compliqué en raison de la présence de la variable temps. Ce problème inverse est formulé comme un problème d'optimisation dont la fonction coût calcule l'écart quadratique entre les profondeurs des interfaces mesurées et celles données par le modèle. Pour tenir compte de la discontinuité des coefficients, le convexe des fonctions admissibles est pris dans l'espace des fonctions à variation bornée. Ainsi, en utilisant les propriétés de cet espace, les estimations et les résultats de régularité établis pour la solution du problème direct, nous montrons l'existence du contrôle optimal. Puis en considérant le problème exact comme une contrainte pour le problème d'optimisation et en introduisant le Lagrangien associé à la fonction coût et à la solution du problème in-stationnaire, nous établissons que le système d'optimalité (constitué par les équations d'état, les équations d'état adjoint et la condition d'optimalité) admet au moins une solution. En outre, nous avons établi que le système d'état adjoint associé admet une solution unique. Ce problème rétrograde consiste en un système couplé d'équations paraboliques linéaires, la principale difficulté est liée à la présence de produits scalaires entre les gradients de la solution exacte et les inconnus. Le résultat de régularité L^4 obtenu pour le gradient de la solution du problème direct nous permet de traiter ces termes. En outre, pour établir les conditions d'optimalité du premier ordre, il faut montrer que l'opérateur qui à une conductivité hydraulique K associe la solution du problème directe $(h(K), h_1(K))$ est continu et différentiable, et c'est difficile car $(h(K), h_1(K))$ est implicitement définie par le problème directe. Pour prouver ce résultat, on applique la théorème des fonctions implicites en démontrant que la différentielle de cet opérateur par rapport à (h, h_1) est isomorphisme.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans le deuxième paragraphe nous formulons le problème du contrôle et nous rappelons les propriétés les plus importantes de l'espace des fonctions à variations bornées. Au troisième paragraphe, nous donnons le résultat d'existence du contrôle optimal. Le dernier paragraphe est consacré aux conditions nécessaires d'optimalité.

2.2 Formulation du problème

Étant donné une observation répartie des profondeurs de l'interface zone saturée / zone sèche, h_1 , et de l'interface eau douce / eau salée, h , appartenant à $(L^2(\Omega))^2$, notre objectif est d'identifier la conductivité hydraulique, K^* , dans le cas de l'écoulement in-stationnaire régi par le système (1.10)-(1.11). Pour étudier ce problème nous introduisons le problème de contrôle suivant :

$$(\mathcal{O}) \begin{cases} \text{Trouver } K^* \in U_{adm} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(K^*) = \inf_{K \in U_{adm}} \mathcal{J}(K), \end{cases}$$

où

$$\mathcal{J}(K) = \frac{1}{2} \|h_1(K) - h_{1,obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2} \|h(K) - h_{obs}\|_{L^2(\Omega_T)}^2,$$

avec $(h_1(K), h(K))$ la solution du problème (1.10)-(1.11), et $(h_{1,obs}, h_{obs})$ étant les profondeurs observées. Afin d'assurer l'existence d'une solution de $(\mathcal{O})$, il faut choisir soigneusement l'ensemble des paramètres admissibles U_{adm} . Prendre U_{adm} dans l'espace $L^\infty(\Omega)$ assure l'existence et l'unicité de la solution du problème direct (sous certaines conditions sur les paramètres physiques) mais ne permet pas d'avoir l'existence du contrôle optimal, d'autre part, le choix de U_{adm} dans $H^1(\Omega)$ est trop contraignant et doit être affaibli. Nous proposons donc de travailler sur l'ensemble des paramètres admissibles, ainsi que cela est fait dans [72] :

$$U_{adm} = \{K \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), K_m \leq K \leq K_M \text{ et } TV(K) \leq c\},$$

où K_m, K_M et c sont des réels strictement positifs.

$(BV(\Omega); \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ est l'espace de Banach des fonctions à variations bornées sur Ω pour lequel nous allons rappeler quelques résultats connus.

L'espace $BV(\Omega)$

Nous considérons un domaine Ω ouvert et borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ lipschitzienne. On note $M_b(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon défini sur le dual topologique de l'espace des fonctions continues sur Ω s'annulant sur Γ , muni de la topologie de la convergence uniforme noté par (X, Σ) .

Alors pour tout $\mu \in M_b(\Omega)$ il est possible de définir deux fonctions d'ensemble

$$\begin{aligned} \overline{W}(\mu, E) &= \sup\{\mu(A) / A \in \Sigma \text{ et } A \subset E\} & \forall E \in \Sigma, \\ \underline{W}(\mu, E) &= \inf\{\mu(A) / A \in \Sigma \text{ et } A \subset E\} & \forall E \in \Sigma, \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

ainsi

$$\overline{W}(\mu, E) \geq 0 \geq \underline{W}(\mu, E) \quad \forall E \in \Sigma.$$

La variation de la mesure signée μ est la fonction d'ensemble

$$|\mu|(E) = \overline{W}(\mu, E) + |\underline{W}(\mu, E)| \quad \forall E \in \Sigma,$$

et sa variation totale correspond à la valeur de cette mesure sur tout l'ensemble de définition, soit :

$$\|u\|_{M_b(\Omega)} = |u|(X).$$

Définition 6 Soit Ω un sous-ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction f dans $L^1(\Omega)$, la variation totale de f sur Ω définie par :

$$TV(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} v(x) dx, v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \|v\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

f est dite à variation bornée si $TV(f) < \infty$.

■

On note $BV(\Omega)$ l'espace des fonctions $L^1(\Omega)$ à variation bornée sur Ω , qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_1 + TV(f).$$

Pour conclure cette section, nous rappelons quelques propriétés de l'espace $BV(\Omega)$ utiles pour la suite [36, 38] .

Proposition 2.1 soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $BV(\Omega)$, alors

1. Si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$, alors

$$TV(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} TV(f_n).$$

2. Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega)$, alors il existe une fonction f de $BV(\Omega)$ telle que, à une sous suite près,

$$f_n \longrightarrow f \text{ dans } L^1(\Omega).$$

3. Pour tout f dans $BV(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et $r \in [1, \infty[$, il existe une sous suite $(f_n)_n$ de $C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f - f_n|^r d\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} TV(f_n) = TV(f).$$

4. Soit $(f_n)_{n \in \mathcal{N}}$ une suite dans U_{adm} qui converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers un élément f , alors f est dans U_{adm} et $(f_n)_{n \in \mathcal{N}}$ converge fortement vers f dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.

■

Corollaire 1 U_{adm} est un sous ensemble compact de $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.

■

Preuve:

Ce corollaire est une conséquence immédiat des points 3. et 4. de la proposition précédente. □

2.3 Existence du contrôle optimal

A partir des résultats rappelés dans le chapitre précédent concernant la solution du problème d'intrusion saline, nous allons étudier dans cette section le problème $(\mathcal{O})$. Dans la suite, on supposera toutes les hypothèses assurant l'existence, les estimations a priori, la régularité et l'unicité de la solution du problème direct, et nous désignerons par $(h_1(K); h(K))$ la solution du problème variationnel correspondant à une conductivité donnée K . Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 2.1 *Il existe au moins un contrôle optimal pour le problème $(\mathcal{O})$.*

■

Preuve:

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U_{adm}$ une suite minimisante telle que

$$\mathcal{J}(K_n) \longrightarrow \mathcal{J}^* = \inf_{K \in U_{adm}} \mathcal{J}(K).$$

Or U_{adm} est un sous ensemble compact de $L^2(\Omega)$, on déduit qu'il existe une sous suite, toujours notée $(K_n)_n$, et une fonction $K^* \in U_{adm}$ telles que

$$K_n \longrightarrow K^* \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

D'autres part, d'après le théorème d'existence pour le cas libre, la solution $(h_1^n, h^n) = (h_1(K_n), h(K_n))$ du problème (1), (2) et (3); vérifie :

$$\|h_1^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + \|h^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \leq C, \quad \delta \leq h^n \leq h_2, \quad (2.2)$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

$$\|\partial_t h^n\|_{L^2(0,T,V')} \leq C, \quad (2.3)$$

$$\|\partial_t h_1^n\|_{L^2(0,T,V')} \leq C, \quad (2.4)$$

où C est une constante ne dépendant pas de n .

Puisque $(h^n)_n$ et $(h_1^n)_n$ sont uniformément bornées dans $W(0, T)$, nous déduisons grâce au résultat de compacité d'Aubin que $(h^n - h_D)_n$ et $(h_1^n - h_{1,D})_n$ sont séquentiellement compactes dans $L^2(0, T; H)$.

On peut donc extraire une sous suite, non renommée $(h_1^n - h_{1,D}, h^n - h_D)_n \in W(0, T)^2$ et il existe $(h_1^* - h_{1,D}, h^* - h_D) \in W(0, T)^2$ tels que :

$$\begin{aligned} h^n &\longrightarrow h^* \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ et p.p. dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t h^n &\longrightarrow \partial_t h^* \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V'), \\ h_1^n &\longrightarrow h_1^* \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ et p.p. dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t h_1^n &\longrightarrow \partial_t h_1^* \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V'), \end{aligned}$$

ce qui permet de passer à la limite dans la formulation variationnelle,

$\forall (\varphi_i, \varphi_f) \in W(0, T)^2$, (K^*, h^*, h_1^*) satisfait

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h^*}{\partial t} \varphi_i \, dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h_1^*}{\partial t} \varphi_f \, dx dt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + \alpha K^*(x) T_s(h^*)) \nabla h^* \cdot \nabla \varphi_i \, dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} K^*(x) T_s(h^*) \nabla h_1^* \cdot \nabla \varphi_i \, dx dt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + K^*(x) (T_s(h^*) + T_f(h^* - h_1^*))) \nabla h_1^* \cdot \nabla \varphi_f \, dx dt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \alpha K^*(x) T_s(h^*) \nabla h^* \cdot \nabla \varphi_f \, dx dt = - \int_{t_0}^T \int_{\Omega} Q_s \varphi_i \, dx dt - \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (Q_s + Q_f) \varphi_f \, dx dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donc de l'unicité de la solution, il vient que :

$$(h_1^*, h^*) = (h_1(K^*), h(K^*)) \text{ et donc } \mathcal{J}(K^*) = \mathcal{J}^*.$$

Ce qui termine la démonstration. □

2.4 Conditions nécessaires d'optimalité

Le problème d'identification se ramène à chercher le minimum de la fonction coût $\mathcal{J}$, le système d'état étant le problème in-stationnaire (1.10)-(1.11). On considère ce sys-

tème comme une contrainte pour le problème d'optimisation et on introduit le lagrangien $\mathcal{L}$ défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(h_1, h, \lambda_f, \lambda_i, K) = & \mathcal{J}(K) + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h}{\partial t} \lambda_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h_1}{\partial t} \lambda_f dxdt \\
 & + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla \lambda_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_i dxdt \\
 & + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + K(x) (T_s(h) + T_f(h - h_1))) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f dxdt \\
 & + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \alpha K(x) T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \lambda_f dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} Q_s \lambda_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (Q_s + Q_f) \lambda_f dxdt.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

La solution correspond alors à un point selle de ce lagrangien $\mathcal{L}$ considéré comme une fonction des variables indépendantes $h, h_1, \lambda_i, \lambda_f$ et K avec λ_i et λ_f les multiplicateurs de Lagrange. Le minimum recherché, K^* , vérifie le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(h_1^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_f}(h_1^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h_1^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1}(h_1^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}(h_1^*, h^*, \lambda_f^*, \lambda_i^*, K^*) \cdot (K - K^*) \geq 0, & \forall K \in U_{adm}. \end{cases} \tag{2.7}$$

En outre le système d'état adjoint est donné par le système rétrograde suivant :

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} - \nabla \cdot ((\delta + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i + \alpha K T_s(h) \nabla \lambda_f) - \alpha K(x) \nabla h \cdot (\nabla \lambda_i + \nabla \lambda_f) \\ -K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_i = h_{obs} - h, \\ -\phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} - \nabla \cdot ((\delta + K (T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_f) - \nabla \cdot (K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i) \\ -K \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f = h_{1,obs} - h_1, \end{cases}$$

$$\lambda_i = 0, \lambda_f = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \lambda_i(T, x) = \lambda_f(T, x) = 0, \forall x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Proposition 2.2 *Supposons que la conductivité hydraulique satisfasse*

$$K_+ \leq \frac{p-1}{p} \frac{\delta}{\alpha h_2}, p \geq 2.$$

Soit $(h_1(K), h(K))$ la solution de (1.10)-(1.13) associée à la conductivité hydraulique $K \in U_{adm}$, le problème adjoint défini par :

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

Trouver $(\lambda_i, \lambda_f) \in (W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2$ avec $\lambda_i(T, \cdot) = \lambda_f(T, \cdot) = 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_T} [-\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i + \alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dx dt \\ - \int_{\Omega_T} [K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla ((\lambda_i + \lambda_f))] \varphi_i dx dt \\ = \int_{\Omega_{t_f}} (h_{obs} - h) \varphi_i dx dt, \quad \forall \varphi_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \int_{\Omega_T} [-\phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \varphi_f + ((\delta + K(x) (T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_f) \cdot \nabla \varphi_f + K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f] \\ - \int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f \varphi_f dx dt = \int_{\Omega_T} (h_{1,obs} - h_1) \varphi_f dx dt, \quad \forall \varphi_f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{array} \right. \quad (2.9)$$

admet une unique solution.

■

Preuve:

Dans un premier temps, nous changeons la variable temps en posant $t' = T - t$, ce qui nous permet d'écrire le système (2.9) comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i + \alpha K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dx dt' \\ & - \int_{\Omega_T} [K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla ((\lambda_i + \lambda_f))] \varphi_i dx dt' = \int_{\Omega_T} (h_{obs} - h) \varphi_i dx dt', \end{aligned} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} [\phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \varphi_f + ((\delta + K(x) (T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_f) \cdot \nabla \varphi_f + K(x) T_s(h) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f] \\ & - \int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f \varphi_f dx dt' = \int_{\Omega_T} (h_{1,obs} - h_1) \varphi_f dx dt'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Par ailleurs, la condition initiale devient $\lambda_i(0, x) = \lambda_f(0, x) = 0, \forall x \in \Omega$. À partir de maintenant, nous omettons le prime dans t' .

L'étape principale consiste à utiliser un théorème de point fixe de Schauder pour prouver un résultat d'existence pour un problème auxiliaire linéarisé. Nous soulignons que la principale difficulté technique provient de la présence des termes linéaires $K(\nabla h_1 - \alpha \nabla h) \cdot \nabla \lambda_i$, $K \nabla h \cdot \nabla \lambda_f$ et $K \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f$. Nous allons utiliser les résultats énoncés au chapitre 1 de régularité $L^r, r > 2$ des gradients de h et h_1 afin d'estimer ces termes.

Existence globale en temps

Pour la stratégie du point fixe, nous introduisons l'application $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2 &\longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2, \\ (\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) &\rightarrow \mathcal{F}(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) = (\lambda_f, \lambda_i), \end{aligned}$$

où $\lambda_f = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$ et $\lambda_i = \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, le couple (λ_f, λ_i) étant solution du problème variationnel suivant, $\forall w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \phi \partial_t \lambda_f, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_f \cdot \nabla w \, dx dt \\ &+ \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i \cdot \nabla w \, dx dt - \int_{\Omega_T} K(x) \nabla \bar{\lambda}_f \cdot \nabla h_1 w \, dx dt \\ &= - \int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs}) w \, dx dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \phi \partial_t \lambda_i, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla w \, dx dt \\ &+ \alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla w \, dx dt - \int_{\Omega_T} K(x) (\nabla h_1 + \alpha \nabla h) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i w \, dx dt \\ &- \alpha \int_{\Omega_T} K(x) \nabla \bar{\lambda}_f \cdot \nabla h w \, dx dt = - \int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) w \, dx dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

(Puisque (h, h_1) est une solution de (1.10)- (1.13), le couple satisfait $0 \leq h_1 \leq h \leq h_2$, ainsi $T_f(h - h_1) = h - h_1$, $T_s(h) = h_2 - h$). Nous savons grâce à la théorie classique sur les équations paraboliques et elliptiques linéaires que le précédent système variationnel admet une unique solution.

Pour appliquer le théorème de Schauder, nous devons vérifier la continuité de $\mathcal{F}$ pour la convergence faible, donc celles de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

La continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$ pour la convergence faible.

Soit $(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$ une suite de fonction de $W(0, T)^2$ et $(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) \in W(0, T)^2$ tels que

$$(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n) \rightarrow (\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) \quad \text{faiblement dans } W(0, T)^2,$$

c.à.d $\bar{\lambda}_f^n \rightarrow \bar{\lambda}_f$, faiblement dans $L^2(0, T, V)$ et $\frac{d\bar{\lambda}_f^n}{dt} \rightarrow \frac{d\bar{\lambda}_f}{dt}$ faiblement dans $L^2(0, T, V')$.

Posons $\lambda_{f,n} = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$ et $\lambda_f = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, montrons qu'alors $\lambda_{f,n} \rightarrow \lambda_f$ faiblement

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

dans $W(0, T)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{f,n}$ satisfait (2.12). Choisissons un $\tau \in [0, T]$ et prenons $w = \lambda_{f,n} \chi_{(0,\tau)}(t)$ dans (2.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \phi \int_0^\tau \langle \partial_t \lambda_{f,n}, \lambda_{f,n} \rangle_{V',V} dt + \int_{\Omega_\tau} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{i,n} \cdot \nabla \lambda_{i,n} dx dt \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega_\tau} K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_{i,n} \cdot \nabla \lambda_{f,n} dx dt}_{(1)} - \underbrace{\int_{\Omega_\tau} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \bar{\lambda}_{f,n} \lambda_{f,n} dx dt}_{(2)} \\
 & = - \underbrace{\int_{\Omega_\tau} (h_1 - h_{1,obs}) w dx dt}_{(3)}. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Les fonctions $\lambda_{f,n}$ appartiennent à $W(0, T)$ et donc à $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$. D'après le lemme de Mignot (cf. [28]), nous pouvons écrire

$$\int_0^\tau \langle \partial_t \lambda_{f,n}, \lambda_{f,n} \rangle_{V',V} dt = \frac{1}{2} \|\lambda_{f,n}(\tau, \cdot)\|_H^2 - \underbrace{\|\lambda_{f,n}(0, \cdot)\|_H^2}_{=0}.$$

D'autre part, nous avons

$$\int_{\Omega_\tau} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{f,n} \cdot \nabla \lambda_{f,n} dx dt \geq \delta \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(0,\tau;H)}^2.$$

Prenons $M > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 0} \|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(0,T,H)} \leq M \text{ et } \sup_{n \geq 0} \|\nabla \bar{\lambda}_i^n\|_{L^2(0,T,H)} \leq M.$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et de Gagliardo-Nirenberg, nous obtenons, $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
 |(1)| & \leq K_+ h_2 M \sqrt{\tau} \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \frac{K_+^2 h_2^2 M^2 \tau}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2, \\
 |(2)| & \leq \int_0^\tau \left| \int_{\Omega} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \bar{\lambda}_f^n \lambda_{f,n} dx \right| dt \\
 & \leq \int_0^\tau K_+ \left(\int_{\Omega} |\nabla h_1|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \lambda_{f,n}^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\lambda}_f^n|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
 & \leq C_G \int_0^\tau K_+ \left(\int_{\Omega} |\nabla h_1|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \lambda_{f,n}|^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \lambda_{f,n}^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\lambda}_f^n|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
 & \leq \|\nabla \bar{\lambda}_f^n\|_{L^2(\Omega_\tau)} K_+ C_G \underbrace{\left(\|\nabla h_1\|_{L^4(\Omega_T)} \right)}_{\leq C_4} \left(\int_0^\tau \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/4} \\
 & \leq K_+^2 C_4^2 C_G^2 M^2 \times \frac{1}{4\epsilon} + \epsilon \left(\int_0^\tau \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{K_+^2 C_4^2 C_G^2 M^2}{4\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \max_{t \in (0,\tau)} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega_\tau} |\nabla \lambda_{f,n}|^2.
 \end{aligned}$$

Finalement

$$|(3)| \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega_\tau} (h_1 - h_{1,obs})^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \max_{t \in (0, \tau)} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En rassemblant ces inégalités, nous avons :

$$\frac{\phi}{2} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\delta - \epsilon) \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq \epsilon \max_{t \in (0, \tau)} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C, \quad (2.15)$$

où C est une constante ne dépendant que des données et de M .

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\delta - \epsilon > 0$ et $\frac{\phi}{2} - \epsilon > 0$, nous déduisons de (2.27) qu'il existe deux réels $A_M(h, h_{obs}, h_1, h_{1,obs}, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ et $B_M(h, h_{obs}, h_1, h_{1,obs}, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ dépendant seulement des données du problème et de M tels que

$$\|\lambda_{f,n}\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 \leq A_M \text{ and } \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq B_M.$$

Donc la suite $(\lambda_{f,n})_n$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. On pose $C_M = \max(A_M, B_M)$.

Nous allons établir que $(\partial_t \lambda_{f,n})_n$ est bornée dans $L^2(0, T; V') \cap L^1(0, T; H)$. En effet

$$\begin{aligned} \phi \|\partial_t \lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} = & \sup_{\|w\|_{(L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T;H))} \leq 1} \left| - \underbrace{\int_{\Omega_T} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{f,n} \cdot \nabla w dx dt}_{(1)} \right. \\ & \left. - \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i^n \cdot \nabla w}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \bar{\lambda}_f^n w dx dt}_{(3)} - \underbrace{\int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs}) w dx dt}_{(4)} \right|. \end{aligned}$$

Le principe des calculs étant le même que dans les inégalités précédentes, nous n'indiquerons que les estimations clefs :

$$\begin{aligned} |(1)| & \leq (\delta + K_+ h_2) C_M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\ |(2)| & \leq K_+ h_2 M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\ |(3)| & \leq K_+ M C_4 C_G \|w\|_{L^\infty(0,T;H)}^{1/4} \|w\|_{L^2(0,T;V)}^{1/2}, \\ |(4)| & \leq \|h_{1,obs} - h_1\|_{L^2(\Omega_T)} \|w\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

En rassemblant les précédentes estimations, nous concluons que

$$\|\partial_t \lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} \leq D_M,$$

où D_M ne dépend que des données du problème et de M .

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

Ainsi la suite $(\lambda_{f,n})_n$ est uniformément bornée dans l'espace $W(0, T)$. En utilisant le lemme d'Aubin, nous extrayons une suite, non renommée pour simplifier, $(\lambda_{f,n_k})_k$, convergeant fortement dans $L^2(\Omega_T)$, presque partout dans $(0, T) \times \Omega$, et faiblement dans $W(0, T)$ vers une limite noté $\mu_f \in W(0, T)$. Grâce à la convergence forte de $(\lambda_{f,n})_n$ dans $L^2(\Omega_T)$ (et donc à la convergence p.p. dans Ω_T), nous vérifions que μ_f est une solution de l'équation (2.12) par le théorème de convergence dominée. Il en résulte que μ_f est solution de l'équation (2.12) et satisfait les conditions initiales et aux bords. D'après l'unicité de la solution, nous concluons que $\mu_f = \lambda_f$ et que la suite $\lambda_{f,n} \rightarrow \lambda_f$ faiblement dans $W(0, T)$.

la continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$ pour la topologie faible de $W(0, T)$ est établie.

Continuité séquentielle de $\mathcal{F}_2$ pour la convergence faible.

De la même façon, nous montrons la continuité de $\mathcal{F}_2$ en posant $\lambda_{i,n} := \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$, $\lambda_i := \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, et en montrant que $\lambda_{i,n} \rightarrow \lambda_i$ faiblement dans $W(0, T)$. Les estimations clés sont obtenues en utilisant le même type d'arguments que celles du preuve de la continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$, et les détails seront omis. Nous soulignons que nous pouvons utiliser l'estimation (2.27) précédemment montrer pour $\lambda_{f,n}$ pour obtenir les estimations suivants pour $\lambda_{i,n}$:

$$\|\lambda_{i,n}\|_{L^\infty(H)} \leq E_M = E_M(\delta, K, \lambda_{i,0}, l, M, C_M), \quad (2.16)$$

$$\|\lambda_{i,n}\|_{L^2(0,T;V)} \leq F_M = F_M(\delta, K, \lambda_{i,0}, l, M, C_M). \quad (2.17)$$

En posant

$$C'_M := \max(E_M, F_M),$$

nous obtenons

$$\|\partial_t \lambda_{i,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} \leq D'_M. \quad (2.18)$$

Existence de $\mathcal{Z} \subset W(0, T)^2$ tel que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$.

Nous allons à présent montrer qu'il existe un ensemble convexe fermé borné non vide de $W(0, T)^2$, $\mathcal{Z}$, tel que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$.

De nouveau, nous prenons $\alpha \lambda_f$ (resp. λ_i) dans (2.12) (resp. dans (2.13)) et nous som-

mons les deux équations ainsi obtenues, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (\lambda_i^2 + \alpha \lambda_f^2) + \delta \int_{\Omega_T} (|\nabla \lambda_i|^2 + \alpha |\nabla \lambda_f|^2) + \int_{\Omega_T} \alpha K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_i|^2 \\
 & + \int_{\Omega_T} \alpha K(x) (T_f(h - h_1) + T_s(h)) |\nabla \lambda_f|^2 + \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i \cdot \nabla \lambda_f}_{(1)} \\
 & + \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \lambda_i}_{(2)} - \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) (\nabla h_1 + \alpha \nabla h) \cdot \nabla \bar{\lambda}_i \lambda_i}_{(3)} \\
 & - \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) \nabla h \cdot \nabla \bar{\lambda}_f \lambda_i}_{(4)} - \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \bar{\lambda}_f \lambda_f}_{(5)} \\
 & = - \underbrace{\left(\int_{\Omega_T} (h - h_{obs}) \lambda_i + \alpha \int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs}) \lambda_f \right)}_{(6)}.
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 |(1)| & \leq \frac{3\alpha}{4} \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_f|^2 + \frac{\alpha}{3} \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla \bar{\lambda}_i|^2, \\
 |(2)| & \leq \frac{\alpha}{4} \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_f|^2 + \alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_i|^2, \\
 |(3)| & \leq K_+ C_G C_4 (1 + \alpha) \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \frac{K_+^2 C_G^2 C_4^2 (1 + \alpha)^2}{2 \epsilon_0} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \right)^{1/2} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 \\
 & \leq \frac{K_+^4 C_G^4 C_4^4 (1 + \alpha)^4}{4 \epsilon_0 \epsilon_1} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + \frac{\epsilon_1}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2, \\
 |(4)| & \leq \frac{K_+^4 C_G^4 C_4^4 \alpha^4}{4 \epsilon_2 \epsilon_3} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + \frac{\epsilon_2}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \frac{\epsilon_3}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2, \\
 |(5)| & \leq \frac{K_+^4 C_G^4 C_4^4 \alpha^4}{4 \epsilon_4 \epsilon_5} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{\epsilon_4}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 + \frac{\epsilon_5}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2,
 \end{aligned}$$

finalement

$$|(6)| \leq \frac{\phi}{4} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + \frac{\alpha \phi}{4} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 + \frac{1}{\alpha \phi} \int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs})^2.$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

Nous prenons $\epsilon_0 = \frac{2\delta}{3p}$ ($p \geq 2$), $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\delta}{2}$, $\epsilon_3 = \epsilon_5 = \frac{2\alpha\delta}{3}$, $\epsilon_4 = \frac{\alpha\delta}{2}$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\phi}{4} - \frac{3p K_+^4 C_G^4 C_4^4 (1+\alpha)^4}{4\delta^2} - \frac{3 K_+^4 C_G^4 C_4^4 \alpha^3}{4\delta^2} \right) \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) \\ & + \left(\frac{\alpha\phi}{4} - \frac{3 K_+^4 C_G^4 C_4^4 \alpha^2}{4\delta^2} \right) \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_T} (|\nabla \lambda_i|^2 + \alpha |\nabla \lambda_f|^2) \\ & \leq \frac{\delta}{3} \int_{\Omega_T} \left(\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha K_+ h_2}{\delta} \right) |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \alpha |\nabla \bar{\lambda}_f|^2 \right) + \frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 + \frac{1}{\alpha\phi} \int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs})^2. \end{aligned}$$

Nous supposons que le coefficient ϕ est suffisamment grand, et vérifie

$$\Theta_1 := \phi - \frac{3 K_+^4 C_G^4 C_4^4 (p(1+\alpha)^4 + \alpha^3)}{\delta^2} > 0, \quad (2.19)$$

(donc $\Theta_2 := \phi - \frac{3 K_+^4 C_G^4 C_4^4 \alpha}{\delta^2} > 0$). Par ailleurs, par hypothèse, la conductivité hydraulique satisfait

$$K_+ \leq \frac{p-1}{p} \frac{\delta}{\alpha h_2}, \quad p \geq 2. \quad (2.20)$$

En fin, Nous choisissons la constante $M > 0$ telle que

$$M \geq 6 \times \left(\frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} (h - h_{obs})^2 + \frac{1}{\alpha\phi} \int_{\Omega_T} (h_1 - h_{1,obs})^2 \right), \quad (2.21)$$

par conséquent, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_1}{4} \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + \alpha \frac{\Theta_2}{4} \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\int_{\Omega_T} (|\nabla \lambda_i|^2 + \alpha |\nabla \lambda_f|^2) \right) \\ & \leq \frac{\delta}{3} \left(\int_{\Omega_T} (|\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \alpha |\nabla \bar{\lambda}_f|^2) \right) + \frac{M}{6}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ainsi, si $\int_{\Omega_T} (|\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \alpha |\nabla \bar{\lambda}_f|^2) \leq M$ alors (2.22) implique que

$$\int_{\Omega_T} (|\nabla \lambda_i|^2 + \alpha |\nabla \lambda_f|^2) \leq M.$$

On pose $\mathcal{Z}$ l'ensemble borné fermé convexe non vide de $W(0, T) \times W(0, T)$ défini par :

$$\mathcal{Z} = \{(g_i, g_f) \in W(0, T) \times W(0, T); g_i(0) = 0, g_f(0) = 0, \int_{\Omega_T} (|\nabla g_i|^2 + \alpha |\nabla g_f|^2) \leq M\},$$

nous avons établi que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. Le théorème de Schauder nous permet donc de conclure qu'il existe un couple $(\lambda_i, \lambda_f) \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathcal{F}(\lambda_i, \lambda_f) = (\lambda_i, \lambda_f)$. Ce point fixe est une solution faible du problème (2.10)-(2.11).

Unicité de la solution du problème adjoint :

Soient $(\lambda_i, \lambda_f) \in W(0, T)^2$ et $(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_f) \in W(0, T)^2$ deux solutions de (2.9). Posons $u = \lambda_i - \bar{\lambda}_i$ et $v = \lambda_f - \bar{\lambda}_f$. Clairement, puisque le système est linéaire, (u, v) satisfont (2.9) mais les seconds membres de (2.9) sont nuls.

Les calculs précédents conduisent à l'estimation suivante

$$\frac{\Theta_1}{4} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} u^2 \right) + \alpha \frac{\Theta_2}{4} \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} v^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\int_{\Omega_T} (|\nabla u|^2 + \alpha |\nabla v|^2) \right) \leq \frac{\delta}{3} \left(\int_{\Omega_T} (|\nabla u|^2 + \alpha |\nabla v|^2) \right),$$

puis

$$\left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} u^2 \right) \leq 0, \quad \left(\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} v^2 \right) \leq 0, \quad \int_{\Omega_T} |\nabla u|^2 \leq 0 \text{ and } \int_{\Omega_T} |\nabla v|^2 \leq 0.$$

Puisque $(u, v) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2$, cela implique $u = 0$ p.p. dans Ω_T et $v = 0$ p.p. dans Ω_T .

□

Remarque 2.1 La condition (2.19) peut paraître très restrictive. Cependant, nous pouvons prendre à nouveau le coefficient ϕ un nombre arbitrairement grand (cela correspondra à une mise à l'échelle de temps), de sorte que les conditions (2.19) peut être satisfaites. En effet, posons

$$t_0 = \frac{T \delta^2}{3 K_+^4 C_G^4 C_4^4 (p(1 + \alpha)^4 + \alpha^3)}, \quad (p \geq 2),$$

nous avons prouvé l'existence et l'unicité pour tous le temps $t \in [0, t_0]$. Prenons t tels que $t = t_0$ comme une nouveau temps initial, l'existence et l'unicité sont obtenues pour tous $t_0 \leq t \leq 2 t_0$. En utilisant cette observation, nous déduisons le résultat sur $[0, T]$.

Par ailleurs, puisque $\alpha = 0.0125$, $\delta = \mathcal{O}(1)$ et $h_2 = \mathcal{O}(10)$, la condition (2.20) sur la conductivité hydraulique n'est pas très restrictive.

■

Avant d'aborder la détermination les conditions d'optimalité du premier ordre pour le problème $(\mathcal{O})$, nous devons prouver que l'opérateur qui à la conductivité hydraulique K associe $(h(K), h_1(K))$, la solution du problème (1.10)-(1.13), est continue et différentiable. Le point principal consiste à trouver les espaces de fonction bien adaptés de sorte que le théorème des fonctions implicites soit applicable. Les résultats de régularité établis pour $(h(K), h_1(K))$ dans le théorème 1.14 et la proposition 1.6 nous permettront de conclure.

Proposition 2.3 Soit $(h_1(K), h(K))$ la solution de (1.10)-(1.13) associée à la conductivité hydraulique $K \in U_{adm}$ et (F_i, F_f) deux fonctions de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Le problème défini par :

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

1. Trouver $(\lambda_i, \lambda_f) \in (W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2$ tel que $\lambda_i(0, \cdot) = \lambda_f(0, \cdot) = 0$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_T} [\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta + \alpha T_s(h) K(x)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i + T_s(h) K(x) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dx dt \\ - \int_{\Omega_T} \lambda_i [K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \varphi_i] dx dt \\ = \int_{\Omega_T} F_i \varphi_i dx dt, \quad \forall \varphi_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \int_{\Omega_T} \phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \varphi_f + (\delta + (T_s(h) + T_f(h - h_1)) K(x)) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_f dx dt \\ - \int_{\Omega_T} -\alpha T_s(h) K(x) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f + \lambda_f K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_f dx dt \\ + \int_{\Omega_T} \alpha \lambda_i K(x) \nabla h \cdot \nabla \varphi_f dx dt = \int_{\Omega_T} F_f \varphi_f dx dt \quad \forall \varphi_f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{array} \right. \quad (2.23)$$

admet une unique solution.

2. Étant donné $(\phi, h_2, K_+, \delta) \in (\mathbb{R}_*^+)^4$ satisfaisant (1.20) pour $r = \sigma > 6$, (assurant $(h(K), h_1(K)) \in L^\sigma(0, T; W^{1,\sigma}(\Omega))$), il existe $s > 2$, tel que, si $(F_i, F_f) \in L^s(0, T; W^{-1,s}(\Omega))$ et $(\lambda_i(0, \cdot), \lambda_f(0, \cdot)) \in W_0^{1,s}(\Omega)^2$, alors $(\lambda_i, \lambda_f) \in L^s(0, T; W_0^{1,s}(\Omega))$.

■

Preuve:

Nous commençons par établir le point 1) de la proposition.

Existence globale en temps

Pour la stratégie du point fixe, nous introduisons à nouveau l'application $\mathcal{F}$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2 &\longrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^2, \\ (\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) &\rightarrow \mathcal{F}(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) = (\lambda_f, \lambda_i), \end{aligned}$$

où $\lambda_f = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$ et $\lambda_i = \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, où le couple (λ_f, λ_i) est solution du problème variationnel, $\forall w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \phi \partial_t \lambda_f, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_f \cdot \nabla w dx dt \\ &+ \int_{\Omega_T} \alpha K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i \cdot \nabla w dx dt - \int_{\Omega_T} K(x) \bar{\lambda}_f \cdot \nabla h_1 \nabla w dx dt \\ &+ \int_{\Omega_T} \alpha \bar{\lambda}_i K(x) \nabla h \cdot \nabla w dx dt = \int_{\Omega_T} F_f w dx dt, \end{aligned} \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \langle \phi \partial_t \lambda_i, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} (\delta + \alpha K T_s(h)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla w \, dx dt \\
 & + \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla w \, dx dt - \int_{\Omega_T} K(x) \nabla (h_1 + \alpha h) \cdot \bar{\lambda}_i \nabla w \, dx dt \\
 & = \int_{\Omega_T} F_i w \, dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nous savons grâce à la théorie classique sur les équations paraboliques et elliptiques linéaires que le précédent système variationnel admet une unique solution.

Montrons la continuité de $\mathcal{F}$, donc celles de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$ pour la convergence faible.

Soit $(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$ une suite de fonction de $W(0, T)^2$ et $(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) \in W(0, T)^2$ tel que

$$(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n) \rightarrow (\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i) \quad \text{faiblement in } W(0, T)^2,$$

d'où $\bar{\lambda}_f^n \rightarrow \bar{\lambda}_f$, faiblement dans $L^2(0, T, V)$ et $\frac{d\bar{\lambda}_f^n}{dt} \rightarrow \frac{d\bar{\lambda}_f}{dt}$ faiblement dans $L^2(0, T, V')$.

Posons $\lambda_{f,n} = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$ et $\lambda_f = \mathcal{F}_1(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, montrons qu'alors $\lambda_{f,n} \rightarrow \lambda_f$ faiblement dans $W(0, T)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{f,n}$ satisfait (2.12). Choisissons un $\tau \in [0, T]$ et prenons $w = \lambda_{f,n} \chi_{(0, \tau)}(t)$ dans (2.12) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \phi \int_0^\tau \langle \partial_t \lambda_{f,n}, \lambda_{f,n} \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_\tau} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{i,n} \cdot \nabla \lambda_{i,n} \, dx dt \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega_\tau} \alpha K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_{i,n} \cdot \nabla \lambda_{f,n} \, dx dt}_{(1)} - \underbrace{\int_{\Omega_\tau} K(x) \nabla h_1 \cdot \bar{\lambda}_{f,n} \nabla \lambda_{f,n} \, dx dt}_{(2)} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega_T} \alpha \bar{\lambda}_{i,n} K(x) \nabla h \cdot \nabla \lambda_{f,n} \, dx dt}_{(3)} = - \underbrace{\int_{\Omega_\tau} F_f w \, dx dt}_{(4)}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Les fonctions $\lambda_{f,n}$ appartiennent à $W(0, T)$ et donc à $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$. D'après le lemme de Mignot (cf. [28]), nous pouvons écrire

$$\int_0^\tau \langle \partial_t \lambda_{f,n}, \lambda_{f,n} \rangle_{V', V} dt = \frac{1}{2} \left(\|\lambda_{f,n}(\cdot, \tau)\|_H^2 - \underbrace{\|\lambda_{f,n}(0, \cdot)\|_H^2}_{=0} \right).$$

D'autre part, nous avons

$$\int_{\Omega_\tau} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{f,n} \cdot \nabla \lambda_{f,n} \, dx dt \geq \delta \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(0, \tau; H)}^2.$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

Prendre $M > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 0} \|\bar{\lambda}_f^n\|_{W(0,T) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq M \quad \text{and} \quad \sup_{n \geq 0} \|\bar{\lambda}_i^n\|_{W(0,T) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq M.$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et de Gagliardo-Nirenberg, on obtient $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |(1)| &\leq K_+ h_2 M \sqrt{\tau} \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \frac{K_+^2 h_2^2 M^2 \tau}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2, \\ |(2)| &\leq \int_0^\tau \left| \int_\Omega K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_{f,n} \bar{\lambda}_f^n dx dt \right| \\ &\leq \int_0^\tau K_+ \left(\int_\Omega |\nabla h_1|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_\Omega \bar{\lambda}_{f,n}^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\nabla \lambda_f^n|^2 \right)^{1/2} dt \\ &\leq K_+ C_4 M \left(\int_\Omega |\nabla \lambda_f^n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{K_+^2 M^2 C_4^2}{4\epsilon} + \frac{\epsilon}{4} \left(\int_\Omega |\nabla \lambda_f^n|^2 \right), \\ |(3)| &\leq \frac{\alpha^2 K_+^2 M^2 C_4^2}{4\epsilon} + \frac{\epsilon}{4} \left(\int_\Omega |\nabla \lambda_f^n|^2 \right). \end{aligned}$$

finalement

$$|(4)| \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega_T} F_f^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \max_{t \in (0,\tau)} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En rassemblant ces inégalités, nous obtenons :

$$\frac{\phi}{2} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\delta - \epsilon) \|\nabla \lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq \frac{\epsilon}{2} \max_{t \in (0,\tau)} \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C, \quad (2.27)$$

où C est une constante ne dépendant que des données et de M .

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\delta - \epsilon > 0$ et $\frac{\phi}{2} - \epsilon > 0$, nous déduisons de (2.27) qu'il existe deux réels $A_M(h, h_{obs}, h_1, h_{1,obs}, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ et $B_M(h, h_{obs}, h_1, h_{1,obs}, K, \alpha, C_4, \delta, \phi, h_2, T)$ dépendant seulement des données du problème tels que

$$\|\lambda_{f,n}\|_{L^\infty(0,T,H)}^2 \leq A_M \quad \text{and} \quad \|\lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq B_M.$$

Donc la suite $(\lambda_{f,n})_n$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. On pose $C_M = \max(A_M, B_M)$.

Nous allons établir que $(\partial_t \lambda_{f,n})_n$ est bornée dans $L^2(0, T; V') \cap L^1(0, T; H)$.

$$\begin{aligned}
 \phi \|\partial_t \lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} = & \\
 \sup_{\|w\|_{(L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T;H))} \leq 1} & \underbrace{\left| - \int_{\Omega_T} (\delta + K(T_f(h - h_1) + T_s(h))) \nabla \lambda_{f,n} \cdot \nabla w dx dt \right|}_{(1)} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega_T} \alpha K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i^n \cdot \nabla w}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla w \bar{\lambda}_f^n}_{(3)} dx dt \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega_T} \alpha K(x) \bar{\lambda}_i^n \nabla h \cdot \nabla w}_{(4)} dx dt - \underbrace{\int_{\Omega_T} F_f w}_{(5)} dx dt \big|
 \end{aligned}$$

Le principe des calculs étant le même que dans les inégalités précédentes, nous n'indiquerons que les estimations clefs :

$$\begin{aligned}
 |(1)| & \leq (\delta + K_+ h_2) C_M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\
 |(2)| & \leq \alpha K_+ h_2 M \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\
 |(3)| & \leq K_+ M C_4 \|w\|_{L^\infty(0,T;H)}^{1/4} \|w\|_{L^2(0,T;V)}^{1/2}, \\
 |(4)| & \leq \alpha K_+ M C_4 \|w\|_{L^2(0,T;V)}, \\
 |(5)| & \leq \|F_f\|_{L^2(\Omega_T)} \|w\|_{L^2(0,T;V)}.
 \end{aligned}$$

En rassemblant les précédentes estimations, nous concluons que

$$\|\partial_t \lambda_{f,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} \leq D_M,$$

où D_M ne dépend que des données.

Ainsi la suite $(\lambda_{f,n})_n$ est uniformément bornée dans l'espace $W(0, T)$. En utilisant le lemme d'Aubin, nous extrayons une suite, non renommée pour simplifier, $(\lambda_{f,n_k})_k$, convergeant fortement dans $L^2(\Omega_T)$, presque partout dans $(0, T) \times \Omega$, et faiblement dans $W(0, T)$ vers une limite noté μ_f . Grâce à la convergence forte de $(\lambda_{f,n})_n$ dans $L^2(\Omega_T)$ (et donc la convergence p.p. dans Ω_T), nous vérifions que μ_f est une solution de l'équation (2.24) par le théorème de convergence dominée. Il en résulte que μ_f est solution de l'équation (2.24) et satisfait les conditions initiales et aux bords. D'après l'unicité de la solution, Nous concluons que $\mu_f = \lambda_f$ et que la suite $\lambda_{f,n} \rightarrow \lambda_f$ faiblement dans $W(0, T)$.

la continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$ pour la topologie faible de $W(0, T)$ est établi.

Continuité séquentielle de $\mathcal{F}_2$ pour la convergence faible.

De la même façon, nous montrons la continuité de $\mathcal{F}_2$ en posant $\lambda_{i,n} := \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f^n, \bar{\lambda}_i^n)$, $\lambda_i := \mathcal{F}_2(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_i)$, et en montrant que $\lambda_{i,n} \rightarrow \lambda_i$ faiblement dans $W(0, T)$. Les estimations clés sont obtenues en utilisant le même type d'arguments que celles de la preuve du continuité séquentielle de $\mathcal{F}_1$, et les détails seront omis. Nous soulignons que nous pouvons utiliser l'estimation (2.28) précédemment montrée pour $\lambda_{f,n}$ pour obtenir les estimations suivants pour $\lambda_{i,n}$:

$$\|\lambda_{i,n}\|_{L^\infty(H)} \leq E_M = E_M(\delta, K, \lambda_{i,0}, l, M, C_M), \quad (2.28)$$

$$\|\lambda_{i,n}\|_{L^2(0,T;V)} \leq F_M = F_M(\delta, K, \lambda_{i,0}, l, M, C_M). \quad (2.29)$$

On pose

$$C'_M := \max(E_M, F_M),$$

nous obtenons

$$\|\partial_t \lambda_{i,n}\|_{L^2(0,T;V') \cap L^1(0,T;H)} \leq D'_M, \quad (2.30)$$

Existence de $\mathcal{Z} \subset W(0, T)^2$ tel que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$.

On vient de montrer qu'il existe un ensemble convexe fermé borné non vide de $W(0, T)^2$, $\mathcal{Z}$, tel que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$.

De nouveau, nous prenons λ_f (resp. $\alpha \lambda_i$) dans (2.24) (resp. dans (2.25)) et nous ajoutons les deux équations ainsi obtenues, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (\alpha \lambda_i^2 + \lambda_f^2) + \delta \int_{\Omega_T} (\alpha |\nabla \lambda_i|^2 + |\nabla \lambda_f|^2) + \int_{\Omega_T} \alpha^2 K(x) T_s(h) |\nabla \lambda_i|^2 \\ & + \int_{\Omega_T} K(x) (T_f(h - h_1) + T_s(h)) |\nabla \lambda_f|^2 + \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \bar{\lambda}_i \cdot \nabla \lambda_f}_{(1)} \\ & + \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \lambda_i}_{(2)} - \underbrace{\alpha \int_{\Omega_T} K(x) (\nabla h_1 + \alpha \nabla h) \cdot \nabla \lambda_i \bar{\lambda}_i}_{(3)} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega_T} K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \lambda_f \bar{\lambda}_f}_{(4)} + \underbrace{\int_{\Omega_T} \alpha K(x) \bar{\lambda}_i \nabla h \cdot \nabla \lambda_f}_{(5)} \\ & = - \underbrace{\left(\alpha \int_{\Omega_T} F_i \lambda_i + \int_{\Omega_T} F_f \lambda_f \right)}_{(6)}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 |(1)| &\leq \frac{3}{4\phi} \int_{\Omega_T} K(x)T_s(h)|\nabla \lambda_f|^2 + \frac{\alpha}{3\phi} \int_{\Omega_T} K(x)T_s(h)|\nabla \bar{\lambda}_i|^2, \\
 |(2)| &\leq \frac{1}{4\phi} \int_{\Omega_T} K(x)T_s(h)|\nabla \lambda_f|^2 + \alpha^2 \int_{\Omega_T} K(x)T_s(h)|\nabla \lambda_i|^2, \\
 |(3)| &\leq \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{4} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_i^2 + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^4 (1+\alpha)^4}{2\epsilon_2} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \frac{\alpha}{2\epsilon_1} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \\
 |(4)| &\leq \frac{\epsilon_3 \epsilon_4}{4} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_f^2 + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4}{2\epsilon_4} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2 + \frac{1}{2\epsilon_3} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2, \\
 |(5)| &\leq \frac{\epsilon_5 \epsilon_6}{4} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_i^2 + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^4}{2\epsilon_6} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \frac{\alpha}{2\epsilon_5} \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2
 \end{aligned}$$

finalemt

$$|(6)| \leq \frac{\alpha\phi}{4} \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 \right) + \frac{\phi}{4} \left(\max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} F_f^2 + \frac{1}{\alpha\phi} \int_{\Omega_T} F_i^2.$$

Choisir $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = \left(\frac{\alpha\phi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\epsilon_3 = \epsilon_4 = \left(\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha\phi}{4} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 + \frac{\phi}{4} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 + \alpha \left(\delta - \frac{1}{\alpha\phi} \right) \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 \\
 &+ \left(\delta - \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}}} \right) \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \leq \frac{\alpha\phi}{8} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_i^2 + \frac{\phi}{8} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_f^2 \\
 &\alpha \left(\frac{K_+ h_2}{3\phi} + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^{\frac{5}{2}} (1+\alpha)^4}{\phi^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^{\frac{5}{2}}}{\phi^{\frac{1}{2}}} \right) \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4}{\phi} \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2 \\
 &+ \frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} F_f^2 + \frac{1}{\alpha\phi} \int_{\Omega_T} F_i^2.
 \end{aligned}$$

Nous supposons que le coefficient ϕ est assez grand, tel que

$$\frac{K_+ h_2}{3\phi} + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^{\frac{5}{2}} (1+\alpha)^4}{\phi^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_+^4 C_4^4 C_G^4 \alpha^{\frac{5}{2}}}{\phi^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\delta}{4} \quad (2.31)$$

et

$$\delta - \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\delta}{2}. \quad (2.32)$$

De plus, nous avons choisi la constante $M > 0$ tel que

$$M \geq 2 \times \left(\frac{1}{\phi} \int_{\Omega_T} F_f^2 + \frac{1}{\alpha\phi} \int_{\Omega_T} F_i^2 \right), \quad (2.33)$$

par conséquent, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{4} \left(\alpha \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 + \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\alpha \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \right) \\ & \leq \frac{\phi}{8} \left(\alpha \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_i^2 + \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_f^2 \right) + \frac{\delta}{4} \left(\alpha \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2 \right) + \frac{M}{2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Si $\frac{\phi}{4} \left(\alpha \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_i^2 + \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \bar{\lambda}_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\alpha \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_i|^2 + \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{\lambda}_f|^2 \right) \leq M$, alors (2.34)

implique que $\frac{\phi}{4} \left(\alpha \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_i^2 + \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \lambda_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\alpha \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_i|^2 + \int_{\Omega_T} |\nabla \lambda_f|^2 \right) \leq M$.

On pose $\mathcal{Z}$ l'ensemble bornée fermé convexe non vide de $W(0, T) \times W(0, T)$ Défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \{ (g_i, g_f) \in W(0, T) \times W(0, T); g_i(0) = 0, g_f(0) = 0, \\ & \frac{\phi}{4} \left(\alpha \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} g_i^2 + \max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} g_f^2 \right) + \frac{\delta}{2} \left(\alpha \int_{\Omega_T} |\nabla g_i|^2 + \int_{\Omega_T} |\nabla g_f|^2 \right) \leq M \}, \end{aligned}$$

nous avons établi que $\mathcal{F}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. Le théorème de Schauder nous permet de conclure qu'il y a un couple $(\lambda_i, \lambda_f) \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathcal{F}(\lambda_i, \lambda_f) = (\lambda_i, \lambda_f)$. Ce point fixe est une solution faible du problème (2.23).

Concernant le point 2), Nous utilisons à nouveau le résultat de régularité de Meyers en remarquant que, puisque $(\lambda_i, \lambda_f) \in (W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2$ et $((h - h_D, h_1 - h_{1,D}) \in L^\sigma(0, T; W_0^{1,\sigma}(\Omega)))$, nous pouvons trouver $s \in]2, \sigma[$ tel que $\text{div}(\mathcal{X}_1(h) K \lambda_l \nabla h)$, $l \in \{i, f\}$ appartient à $L^s(0, T; W^{-1,s}(\Omega))$ (et le même pour les termes avec h_1). En effet $\lambda_l(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, \infty[$ et $h - h_D \in L^\sigma(0, T; W_0^{1,\sigma}(\Omega))$, avec $\sigma > 6$, alors

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\Omega} |\lambda_l|^s |\nabla h|^s & \leq \|\nabla h\|_{L^\sigma(\Omega_T)}^s \left(\int_{t_0}^T \int_{\Omega} |\lambda_l|^{s\sigma/(\sigma-s)} dx dt \right)^{\frac{\sigma-s}{s}}, \\ & \leq \|\nabla h\|_{L^\sigma(\Omega_T)}^s \left(\int_{t_0}^T \|\lambda_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\lambda_l\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(\int_{\Omega} |\lambda_l|^{2(s\sigma/(\sigma-s)-2)} dx \right)^{1/2} dt \right)^{\frac{\sigma-s}{s}}, \\ & \leq \|\nabla h\|_{L^\sigma(\Omega_T)}^s \|\lambda_l\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{2(\sigma-s)/s} \left(\int_{t_0}^T \|\lambda_l\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(\int_{\Omega} |\lambda_l|^{2(s\sigma/(\sigma-s)-2)} dx \right)^{1/2} dt \right)^{\frac{\sigma-s}{s}}, \\ & \leq \|\nabla h\|_{L^\sigma(\Omega_T)}^s \|\lambda_l\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{5(\sigma-s)/2s} \|\lambda_l\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{2(\sigma-s)/s}, \end{aligned}$$

si $s > 2$ est choisi tel que $\frac{s\sigma}{(\sigma-s)} = 3$, c'est à dire $s = \frac{3\sigma}{3+\sigma}$ (qui est > 2 si $\sigma > 6$), nous obtenons le résultat annoncé. Nous traitons directement les autres termes de (2.23) puisque les fonctions T_s et T_f appartiennent à $L^\infty(\Omega_T)$.

Régularité de l'opérateur $K \rightarrow (h(K), h_1(K))$.

Nous introduisons, $\mathcal{Q}$, l'opérateur qui associe à la conductivité hydraulique K la solution du (1.10)-(1.13), $(h(K), h_1(K))$, et nous allons vérifier que $\mathcal{Q}$ est continue et différentiable sur des espaces de fonction appropriés. Dans ce but, nous définissons l'application $\mathcal{R}$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : Z(0, T)^2 \times \text{Int}(U) &\longrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ (\bar{h}_1, \bar{h}, K) &\longrightarrow \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K) \end{aligned}$$

où

$$Z(0, T) = W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

et

$$U = \{K \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), K_m \leq K \leq K_M \text{ et } TV(K) \leq C\}, \text{ avec } c < C,$$

où c est la constante défini par U_{adm} et $(\bar{h}_1, \bar{h}) = (h_1 - h_{1,D}, h - h_D)$. Nous notons que $U_{adm} \subset \text{Int}(U)$ où ' Int ' désigne l'intérieur de U pour le topologie de $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (cf. [71]).

Alors, $\forall (\varphi_i, \varphi_f) \in L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))^2$, nous avons

$$\begin{aligned} &< \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K), (\varphi_i, \varphi_f) > \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h}{\partial t} \varphi_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial h_1}{\partial t} \varphi_f dxdt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \alpha K(x) T_s(h) \nabla h \cdot \nabla \varphi_f dxdt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + K(x)(T_s(h) + T_f(h - h_1))) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_f dxdt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\delta + \alpha K(x) T_s(h)) \nabla h \cdot \nabla \varphi_i dxdt \\ &+ \int_{t_0}^T \int_{\Omega} Q_s \varphi_i dxdt + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (Q_s + Q_f) \varphi_f dxdt. \end{aligned} \tag{2.35}$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

De plus, nous pouvons calculer les différentielles de $\mathcal{R}$ par rapport à (h_1, h) et à K comme suit, $\forall \lambda = (\lambda_i, \lambda_f) \in Z(0, T)^2$

$$\begin{aligned}
& \langle D_{(\bar{h}_1, \bar{h})} \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K) \cdot \lambda, (\varphi_i, \varphi_f) \rangle \\
&= \int_{\Omega_T} \left(\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta + \alpha T_s(h) K(x)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i + T_s(h) K(x) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i \right) dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega_T} \lambda_i \left(K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_i + \alpha K(x) \nabla h \cdot \nabla \varphi_i \right) dx dt + \int_{\Omega_T} \phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \varphi_f dx dt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} \left(\delta + (T_s(h) + T_f(h - h_1)) K(x) \right) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_f + \alpha T_s(h) K(x) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega_T} \left(\lambda_f K(x) \nabla h_1 \cdot \nabla \varphi_f + \alpha \lambda_i K(x) \nabla h \cdot \nabla \varphi_f \right) dx dt, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

et $\forall L \in \text{Int}(U)$

$$\begin{aligned}
& \langle D_K \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K) \cdot L, (\varphi_i, \varphi_f) \rangle \\
&= \int_{\Omega_T} L T_s(h) (\alpha \nabla h + \nabla h_1) \cdot \nabla \varphi_i dx dt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} L \left((T_s(h) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 + \alpha T_s(h) \nabla h \right) \cdot \nabla \varphi_f dx dt \tag{2.37}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4 *L'application $\mathcal{Q}$ est continue et différentiable de U_{adm} dans $Z(0, T)^2$.*

■

Preuve:

Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à l'application $\mathcal{R}$. Nous voulons d'abord prouver que $\mathcal{R}$ est continue et différentiable de $Z(0, T)^2 \times \text{Int}(U)$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Puisque les fonctions T_s et T_f appartiennent à $L^\infty(\Omega_T)$, la continuité de $\mathcal{R}$ est claire. De la même façon, $D_K \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K)$ est continûment différentiable sur $Z(0, T)^2 \times \text{Int}(U)$. Concernant la continuité de $D_{(\bar{h}_1, \bar{h})} \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K)$ sur $Z(0, T)^2 \times \text{Int}(U)$ au point $(\bar{h}_1, \bar{h}, K)$

(où $(\bar{h}_1(K), \bar{h}(K))$ est solution de (1.10)-(1.13)), nous écrivons $\forall (\varphi_i, \varphi_f) \in L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))^2$

$$\begin{aligned}
 & | \langle D_{(\bar{h}_1, \bar{h})} \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K) \cdot \lambda, (\varphi_i, \varphi_f) \rangle | \leq \\
 & \phi \left(\|\lambda_i\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \|\varphi_i\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|\lambda_f\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \|\varphi_f\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \right) \\
 & + (\delta + \alpha K_M h_2) \|\nabla \lambda_i\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_i\|_{L^2(\Omega_T)} + K_M h_2 \|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_i\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + (\delta + K_M h_2) \|\nabla \lambda_f\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_f\|_{L^2(\Omega_T)} + \alpha K_M h_2 \|\nabla \lambda_i\|_{L^2(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_f\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + K_M \|\lambda_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{1/2} \|\lambda_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{1/2} \|\nabla h_1\|_{L^4(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_i\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + \alpha K_M \|\lambda_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{1/2} \|\lambda_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{1/2} \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_i\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + K_M \|\lambda_f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{1/2} \|\lambda_f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{1/2} \|\nabla h_1\|_{L^4(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_f\|_{L^2(\Omega_T)} \\
 & + \alpha K_M \|\lambda_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{1/2} \|\lambda_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^{1/2} \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)} \|\nabla \varphi_f\|_{L^2(\Omega_T)} \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 2.3, on déduit que $D_{(h_1(K), h(K))} \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K)$ est un isomorphisme de $Z(0, T)^2$ vers $L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))^2$, pour tout $K \in U_{adm}$.

Les hypothèses requises pour l'application du théorème des fonctions implicites sont satisfaites, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Remarque 2.2 Si nous supposons que $(\phi, h_2, K_+, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ satisfait (1.20) pour $r > 6$, ainsi $(h(K), h_1(K)) \in L^r(0, T; W^{1,r})$. alors, grâce au point 1) de proposition 2.3, $D_{(h_1(K), h(K))} \mathcal{R}(\bar{h}_1, \bar{h}, K)$ est un isomorphisme de $Z(0, T) \cap L^s(0, T; W_0^{1,s}(\Omega))$ vers $L^s(0, T; W^{-1,s}(\Omega))$, pour tout $K \in U_{adm}$, avec $s > 2$ défini dans la Proposition 2.3 b). Dans ce cas, nous pouvons appliquer le théorème de fonction implicite à l'opérateur $\mathcal{R}$ sur $Z(0, T) \cap L^s(0, T; W_0^{1,s}(\Omega))$, comme c'est fait dans [71]. Mais, en fait, en utilisant la régularité de $(h_1(K), h(K))$, cela n'est pas nécessaire. ■

Nous considérons le système comme une contrainte pour le problème d'optimisation et nous considérons le Lagrangien $\mathcal{L}$ défini par (2.7). La solution correspond donc à un point de selle du Lagrangien considéré comme une fonction des variables indépendantes $h, h_1, \lambda_i, \lambda_f$ et K , avec λ_i et λ_f les multiplicateurs de Lagrange. Le minimum requis, K^* , satisfait le système d'optimalité (2.7).

Proposition 2.5 Soit K^* une solution du problème $(\mathcal{O})$, il existe un couple $(h^* - h_D, h_1^* - h_{1,D}) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et un couple $\lambda^* = (\lambda_i^*, \lambda_f^*) \in W(0, T) \times L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ satisfaisant le système d'optimalité déterminé par le problème direct (1.10)-(1.13), le problème adjoint (2.8) et tel que, pour tout $K \in U_{adm}$

$$D_K \mathcal{J}(K^*) \cdot (K(x) - K^*(x)) \geq 0, \tag{2.39}$$

CHAPITRE 2. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE THÉORIQUE

avec

$$\begin{aligned} D_K \mathcal{J}(K^*) \cdot K &= \int_{\Omega_T} K T_s(h^*) (\alpha \nabla h^* + \nabla h_1^*) \cdot \nabla \lambda_i^* dxdt \\ &+ \int_{\Omega_T} K ((T_s(h^*) + T_f(h^* - h_1^*)) \nabla h_1^* + \alpha T_s(h^*) \nabla h^*) \cdot \nabla \lambda_f^* dxdt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

■

Preuve:

Grâce à Proposition 2.5, l'application $K \rightarrow (h(K), h_1(K))$ implicitement définie par le problème direct (1.10)-(1.13), est différentiable, alors l'application $K \rightarrow \mathcal{J}(K) = \mathcal{L}(K, h(K), h_1(K), \lambda_i, \lambda_f)$ est aussi différentiable par rapport à (K, h, h_1) et

$$D_K \mathcal{J}(K^*) \cdot L = \partial_K \mathcal{L}(K^*, h(K^*), h_1(K^*), \lambda_i, \lambda_f) \cdot L + \partial_{(h, h_1)} \mathcal{L}(K^*, h(K^*), h_1(K^*), \lambda_i, \lambda_f) \cdot \mathcal{H},$$

où Le lagrangien $\mathcal{L}$ est défini par (2.7) et $\mathcal{H} = \frac{d}{dK}(h(K), h_1(K))(K^*) \cdot L = (\varphi_i, \varphi_f)$. En outre, chaque minimum de $\mathcal{J}$ sur U_{adm} vérifie (2.39).

De plus, le gradient de la fonction coût est donné par, $\forall \delta_K \in U_{adm}$

$$\begin{aligned} D_K \mathcal{J}(K^*) (\delta_K) &= \int_{\Omega_T} \delta_K [T_s(h^*) (\alpha \nabla h^* + \nabla h_1^*) \cdot \nabla \lambda_i + ((T_s(h^*) + T_f(h^* - h_1^*)) \nabla h_1^* + \alpha T_s(h^*) \nabla h^*) \cdot \nabla \lambda_f] dxdt \\ &+ \int_{\Omega_T} [-\phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \varphi_i + (\delta + \alpha K^* T_s(h^*)) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i + \alpha K^* T_s(h^*) \nabla \lambda_f \cdot \nabla \varphi_i] dxdt \\ &- \int_{\Omega_T} [K^* \nabla h_1^* \cdot \nabla \lambda_i + \alpha K^* \nabla h^* \cdot \nabla ((\lambda_i + \lambda_f))] \varphi_i dxdt - \int_{\Omega_T} (h_{obs} - h^*) \varphi_i dxdt, \\ &+ \int_{\Omega_T} [-\phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t} \varphi_f + ((\delta + K^* (T_f(h^* - h_1^*) + T_s(h^*))) \nabla \lambda_f) \cdot \nabla \varphi_f] dxdt \\ &+ \int_{\Omega_T} K(x) T_s(h^*) \nabla \lambda_i \cdot \nabla \varphi_f dxdt - \int_{\Omega_T} K^* \nabla h_1^* \cdot \nabla \lambda_f \varphi_f dxdt - \int_{\Omega_T} (h_{1,obs} - h_1^*) \varphi_f dxdt, \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec $h^* = h(K^*)$, $h_1^* = h_1(K^*)$. On déduit de la proposition 2.2, que le problème adjoint admet une unique solution $\lambda_i^* = \lambda_i(K^*, h^*, h_1^*)$, $\lambda_f^* = \lambda_f(K^*, h^*, h_1^*)$, puis en prenant $\lambda_i = \lambda_i^*$ et $\lambda_f = \lambda_f^*$ dans (2.42), nous obtenons (2.39), ce qui termine la preuve. $\square$

IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.2	Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution ap- prochée	69
3.2.1	Description du schéma numérique	69
3.2.2	Résultat de convergence pour le schéma discrétisant le pro- blème adjoint	71
3.3	Description des méthodes numériques pour le problème d'optimi- sation	79
3.3.1	Résolution du système d'état et du problème adjoint	79
3.3.2	Description de l'algorithme	79
3.4	Résultats numériques	82
3.4.1	Expérience 1	83
3.4.2	Expérience 2	86
3.4.3	Expérience 3	89
3.4.4	Expérience 4	94

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre en oeuvre une méthode numérique résolvant le problème d'optimisation présenté au chapitre précédent. Notons qu'une étude similaire a été faite dans [72]. Les auteurs s'intéressent à la résolution numérique du problème d'identification de la conductivité hydraulique pour le problème d'intrusion saline dans le cas d'un aquifère confiné, le système d'optimalité est, alors, discrétisé par une méthode d'éléments finis, Pour résoudre le problème d'optimisation, les auteurs ont utilisé la bibliothèque Éléments finis C ++ Rheolef et un programme C / C ++ basé sur le package d'optimisation avancé (TAO) qui implémente l'algorithme BLMVM. Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette étude au cas d'un aquifère libre.

Nous notons d'abord que, concrètement, nous n'avons que des observations spécifiques (en espace et en temps) correspondant au nombre de puits, nous devons donc adapter les résultats précédents au cas de données d'observations discrètes. Le gradient de la fonction coût est calculé grâce à des formules approchées afin de prendre en compte les données d'observations discrètes. La fonction coût est ensuite minimisée en utilisant une méthode basée sur l'algorithme BLMVM(Bounded Limited Memory Variable Metric), qui utilise des gradients projetés pour construire une matrice BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) à mémoire limitée et pour déterminer un pas de descente. La longueur du pas est calculée en utilisant la méthode de recherche linéaire qui l'oblige à satisfaire la condition d'Armijo et qui tente également de vérifier la condition de courbure.

Ce chapitre s'organise comme suit : Dans la second paragraphe de ce chapitre, nous présentons les schémas numériques utilisés pour la résolution du problème exact ainsi que celle du problème adjoint. Les schémas sont basés sur la méthode éléments finis P_1 -Lagrange pour la résolution spatiale combinée à un schéma semi-implicite en temps. Un résultat de convergence pour le problème adjoint est prouvé montrant que le schéma est d'ordre 1 en temps et d'ordre k en espace. Puis dans le troisième paragraphe, nous décrivons la méthode numérique et nous présentons les algorithmes utilisés. Enfin, nous concluons ce chapitre par certains résultats numériques pour illustrer la capacité de la méthode à déterminer les paramètres inconnus.

3.2 Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée

Soit $\mathcal{T}_b$, $b \in [0, 1]$ une triangulation régulière du domaine Ω , nous introduisons l'espace approché

$$V_b^k := \{w \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_b, w|_K \in P_k(K) / k \geq 1\}.$$

On note $\mathcal{I}_b \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega), V_b^k)$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange alors il existe une constante $C_I > 0$ telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{L^2} + b \|v - \mathcal{I}_b(v)\|_{H^1} \leq C_I b^{k+1} \|v\|_{H^{k+1}}. \quad (3.1)$$

En considérant $k \geq 1$, l'injection suivant est continue

$$H^{k+1}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}).$$

Nous introduisons $\mathcal{P}_b$ l'opérateur de projection orthogonale sur V_b^k telle que

$$\forall v_b \in V_b^k, \quad a(\mathcal{P}_b(w), v_b) = a(w, v_b) := \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v_b \, dx \quad (3.2)$$

on en déduit de (3.1) que $\forall w \in C^1([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\forall j \in \{0, 1\}$:

$$\|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; L^2)} + b \|w - \mathcal{P}_b(w)\|_{C^j([0, T]; H^1)} \leq C_I b^{k+1} \|w\|_{C^j([0, T]; H^{k+1}(\Omega))}. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, nous rappelons qu'il existe une constante $C(b) > 0$ telle que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(b) \|w\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in V_b^k, \quad (3.4)$$

où la constante $C(b)$ dépend de la discrétisation de l'espace V_b^k , dans notre cas, et pour un maillage quasi-uniforme

$$C(b) \leq c b^{-1}.$$

Enfin, nous notons ψ^n l'approximation d'une fonction ψ au temps $t_n = n \cdot \delta t$, $n = 1, N$ avec $\delta t = \frac{T}{N}$.

3.2.1 Description du schéma numérique

On suppose que $(h_b^n, h_{1,b}^n)$ appartenant à $(\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k)$ vérifient le principe de maximum $0 \leq h_{1,b}^n \leq h_b^n \leq h_2$. Nous considérons le problème direct approché suivant

Trouver $(h_b^{n+1}, h_{1,b}^{n+1}) \in (\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k)$, tel que $\forall w \in V_b^k$:

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left(\phi \frac{h_{1,b}^{n+1} - h_{1,b}^n}{\delta t} w + [\delta \nabla h_{1,b}^{n+1} - T_f(h_b^n - h_{1,b}^n) K \nabla h_{1,b}^{n+1} - T_s(h_b^n) K \nabla (h_{1,b}^{n+1} + h_b^n)] \cdot \nabla w \right) dx \\ + \int_{\Omega} (Q_s^{n+1} + Q_f^{n+1}) w \, dx = 0, \\ \int_{\Omega} \left(\phi \frac{h_b^{n+1} - h_b^n}{\delta t} w + [T_s(h_b^n) K \nabla (h_b^{n+1} - h_{1,b}^{n+1}) + \delta \nabla h_b^{n+1}] \cdot \nabla w + Q_s^{n+1} w \right) dx = 0 \end{array} \right.$$

et

$$(h_b^0, h_{1,b}^0) = (\mathcal{I}_b(h_0), \mathcal{I}_b(h_{1,0})).$$

Le problème adjoint approché est défini par :

Trouver $(\lambda_{i,b}^{n+1}, \lambda_{f,b}^{n+1}) \in V_b^k \times V_b^k$ tel que $\forall W \in V_b^k$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \frac{\lambda_{f,b}^{n+1} - \lambda_{f,b}^n}{dt} W + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_{f,b}^{n+1} \cdot \nabla W + \int_{\Omega} K T_f(h^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) \nabla \lambda_{f,b}^{n+1} \cdot \nabla W \\ & + \int_{\Omega} K T_s(h^{N-n-1}) \nabla (\lambda_{f,b}^{n+1} + \lambda_{i,b}^n) \cdot \nabla W - \int_{\Omega} K \nabla h_1^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_{f,b}^{n+1} W \\ & = \int_{\Omega} (h_{1,obs}^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) W \end{aligned} \quad (3.5)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \frac{\lambda_{i,b}^{n+1} - \lambda_{i,b}^n}{dt} W + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_{i,b}^{n+1} \cdot \nabla W + \int_{\Omega} \alpha K T_s(h^{N-n-1}) (\nabla \lambda_{f,b}^{n+1} + \nabla \lambda_{i,b}^{n+1}) \cdot \nabla W \\ & - \int_{\Omega} K (\nabla h_1^{N-n-1} + \alpha \nabla h^{N-n-1}) \cdot \nabla \lambda_{i,b}^{n+1} W - \int_{\Omega} \alpha K \nabla h^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_{f,b}^{n+1} W \\ & = \int_{\Omega} (h_{obs}^{N-n-1} - h^{N-n-1}) W \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lemme 3.1 Soit h_b^0 et $h_{1,b}^0$ donnés dans $(\mathcal{I}_b(h_D) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(h_{1,D}) + V_b^k)$, le problème adjoint approché (3.5)-(3.6) admet une unique solution $(\lambda_{f,b}^n, \lambda_{i,b}^n) \in (V_b^k) \times (V_b^k)$.

■

Preuve:

Nous prouvons ce résultat par récurrence sur n :

Soit A_1, A_2 les formes bilinéaires continues définies sur $V_b^k \times V_b^k$ par

$$\begin{aligned} A_1(u, w) &= \int_{\Omega} \frac{\phi u w}{\delta t} \, dx + \int_{\Omega} (\delta + \alpha K T_s(h^{N-n})) \nabla u \cdot \nabla w \, dx \\ &- \int_{\Omega} K (\nabla h_1^{N-n} + \alpha \nabla h^{N-n}) \cdot \nabla u \cdot w \, dx, \end{aligned}$$

3.3.2 Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée

et

$$\begin{aligned} A_2(v, w) &= \int_{\Omega} \frac{\phi v w}{\delta t} dx + \int_{\Omega} (\delta + K(h_2 - h_1^{N-n})) \nabla v \cdot \nabla W dx \\ &\quad - \int_{\Omega} K \nabla h_1^{N-n} \cdot \nabla v W dx. \end{aligned}$$

Nous introduisons L_1, L_2 les formes linéaires continues définies sur V_b^k par

$$\begin{aligned} L_1(w) &= - \int_{\Omega} \alpha K T_s(h^{N-n}) \nabla \lambda_{f,b}^n \cdot \nabla W dx + \int_{\Omega} \alpha K \nabla h^{N-n} \cdot \lambda_{f,b}^n W \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda_{i,b}^n}{\delta t} + (h_{obs} - h) \right) W dx, \end{aligned}$$

et

$$L_2(w) = \int_{\Omega} K T_s(h^{N-n}) \nabla \lambda_{i,b}^n \cdot \nabla W dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda_{f,b}^n}{\delta t} + (h_{1,obs} - h_1) \right) W dx.$$

Le problème approché peut ainsi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\lambda_{f,b}^{n+1}, \lambda_{i,b}^{n+1}) \in (\mathcal{I}_b(\lambda_{f,D}) + V_b^k) \times (\mathcal{I}_b(\lambda_{i,D}) + V_b^k), \text{ tel que} \\ A_1(\lambda_{i,b}^{n+1}, w) = L_1(w), \forall w \in V_b^k, \\ A_2(\lambda_{f,b}^{n+1}, w) = L_2(w) \forall w \in V_b^k. \end{array} \right.$$

Comme $T_f(h_b^n - h_{1,b}^n) \geq 0$ et $T_s(h_b^n) \geq 0$, les coercitivités de A_1 et A_2 sur V_b^k sont évidentes. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on vérifie que pour le couple $(\lambda_{i,b}^{n+1}, \lambda_{f,b}^{n+1})$ est bien défini et unique. $\square$

3.2.2 Résultat de convergence pour le schéma discrétisant le problème adjoint

Nous allons énoncer ici un théorème montrant que le schéma discrétisant le problème adjoint est d'ordre 1 en temps et d'ordre k en espace sous une condition de stabilité classique liant le pas de discrétisation en temps au carré de celui en espace. Un résultat analogue a été prouvé pour le schéma discrétisant le problème exact. Il fait l'objet d'un article soumis à APNUM mis en annexe. Pour démontrer ce résultat, nous utilisons la régularité spécifique de notre problème direct, en particulier la régularité L^4 des gradients des inconnus (h, h_1) .

On suppose que les paramètres δ, K_+ et K_- satisfont les conditions

$$\left(\delta - \frac{16}{3} \tilde{\alpha} \frac{K_+}{K_-} \right) > 0 \text{ et } \left(\phi - \left(\frac{2K_-^2}{\tilde{\alpha}} + \frac{3\delta}{8h_2^2} + \frac{9}{8\tilde{\alpha}} \right) \frac{8C_4 K_- G_4^3}{\tilde{\alpha}^2} \right) > 0, \quad (3.7)$$

avec $0 < \tilde{\alpha} < 1$. Nous pouvons alors énoncer le résultat de convergence suivant :

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

Théorème 3.1 *Si la condition de stabilité*

$$\left(\frac{\phi}{2\delta t} - \frac{2h_2 K_+^2 C(b)^2}{\delta} \right) > 0 \quad (3.8)$$

est satisfaite, alors il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute solution (h, h_1) du problème (1.11)-(1.13) dans $Y(\Omega_T) := C^2([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{k+1}(\Omega))$, $k \geq 1$, nous avons les estimations d'erreur suivantes

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\lambda_f(t^n) - \lambda_{f,b}^n\|_{L^2} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}, \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}) \quad (3.9)$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\lambda_i(t^n) - \lambda_{i,b}^n\|_{L^2} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}, \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (3.10)$$

$$\left[\frac{\phi}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|\lambda_f(t^n) - \lambda_{f,b}^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}, \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}), \quad (3.11)$$

et

$$\left[\frac{\phi}{\delta t} \sum_{n=1}^N \|\lambda_i(t^n) - \lambda_{i,b}^n\|_{H^1}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(b^k + \delta t) \max(\|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}, \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}). \quad (3.12)$$

■

Preuve:

À l'instant t^{n+1} (nous rappelons la notation $\lambda_i^{n+1} = \lambda_i(t^{n+1})$) nous avons : $\forall v_b \in V_b^k$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t}(t^{n+1}) v_b \, dx + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_f^{n+1} \cdot \nabla v_b \, dx + \int_{\Omega} K T_f(h^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) \nabla \lambda_f^{n+1} \cdot \nabla v_b \, dx \\ & + \int_{\Omega} K T_s(h^{N-n-1}) \nabla (\lambda_f^{n+1} + \lambda_i^{n+1}) \cdot \nabla v_b \, dx - \int_{\Omega} K \nabla h_1^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_f^{n+1} v_b \, dx \\ & = \int_{\Omega} (h_{1,obs}^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) v_b \, dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Puisque $0 \leq h_1 \leq h^{n+1} \leq h_2$, nous avons $T_s(h^{n+1}) = h_2 - h^{n+1}$ et $T_f(h - h_1) = h - h_1$. En utilisant (3.3), on déduit de (3.13) que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \frac{\mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}) - \mathcal{P}_b(\lambda_f^n)}{\delta t} v_b + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_f^{n+1} \cdot \nabla v_b + \int_{\Omega} K T_f(h^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) \nabla \lambda_f^{n+1} \cdot \nabla v_b \\ & + \int_{\Omega} K T_s(h^{N-n-1}) \nabla (\lambda_f^{n+1} + \lambda_i^{n+1}) \cdot \nabla v_b - \int_{\Omega} K \nabla h_1^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_f^{n+1} v_b \\ & = \int_{\Omega} (h_{1,obs}^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) v_b + R_1^{n+1}(v_b), \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.2 Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée

où

$$R_1^{n+1}(v_b) = \int_{\Omega} \left[\phi \frac{\mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}) - \mathcal{P}_b(\lambda_f^n)}{\delta t} - \phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial t}(t^{n+1}) \right] v_b \, dx.$$

Nous établissons d'abord une estimation uniforme du résidu R_1^{n+1} .

Nous posons

$$R_1^{n+1} := (A) - (B),$$

avec

$$A = \frac{\phi}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t \mathcal{P}_b(\lambda_f) - \partial_t \lambda_f)(s) ds = \phi \frac{\mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}) - \mathcal{P}_b(\lambda_f^n)}{\delta t} - \phi \frac{\lambda_f^{n+1} - \lambda_f^n}{\delta t},$$

et

$$\begin{aligned} B &= \frac{\phi}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (s - t^n) \frac{\partial^2 \lambda_f}{\partial t^2} ds = -\frac{\phi}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \lambda_f}{\partial t}(s) ds + \frac{\phi}{\delta t} [(s - t^n) \frac{\partial \lambda_f}{\partial t}]_{t^n}^{t^{n+1}} \\ &= -\phi \frac{\lambda_f^{n+1} - \lambda_f^n}{\delta t} + \phi \frac{\partial \lambda_f}{\partial s}(t^{n+1}). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} |R_1^{n+1}(v_b)| &\leq \phi (\|\mathcal{P}_b(\lambda_f) - \lambda_f\|_{C^1([0,T],L^2)} + \delta t \|\lambda_f\|_{C^2([0,T],L^2)}) \|v_b\|_{L^2} \\ &\leq \phi C_P (C_I b^{k+1} + \delta t) \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)} \|\nabla v_b\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ainsi

$$|R_1^{n+1}(v_b)| \leq \frac{\delta}{4} \|\nabla v_b\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\delta} \phi^2 C_P^2 (C_I b^{k+1} + \delta t)^2 \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2. \quad (3.15)$$

De la même manière, l'équation de h^{n+1} peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}(t^{n+1}) v_b + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_i^{n+1} \cdot \nabla v_b + \int_{\Omega} \alpha K T_s (h^{N-n-1}) (\nabla \lambda_f^{n+1} + \nabla \lambda_i^{n+1}) \cdot \nabla v_b \\ &- \int_{\Omega} K (\nabla h_1^{N-n-1} + \alpha \nabla h^{N-n-1}) \cdot \nabla \lambda_i^{n+1} v_b - \int_{\Omega} \alpha K \nabla h^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_f^{n+1} v_b \\ &= \int_{\Omega} (h_{obs}^{N-n-1} - h^{N-n-1}) v_b. \end{aligned} \quad (3.16)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \phi \frac{\mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1}) - \mathcal{P}_b(\lambda_i^n)}{\delta t} v_b + \int_{\Omega} \delta \nabla \lambda_i^{n+1} \cdot \nabla v_b + \int_{\Omega} \alpha K T_s (h^{N-n-1}) (\nabla \lambda_f^{n+1} + \nabla \lambda_i^{n+1}) \cdot \nabla v_b \\ &- \int_{\Omega} K (\nabla h_1^{N-n-1} + \alpha \nabla h^{N-n-1}) \cdot \nabla \lambda_i^{n+1} v_b - \int_{\Omega} \alpha K \nabla h^{N-n-1} \cdot \nabla \lambda_f^{n+1} v_b \\ &= \int_{\Omega} (h_{obs}^{N-n-1} - h^{N-n-1}) v_b + \mathcal{R}^{n+1}(v_b), \end{aligned} \quad (3.17)$$

où

$$R^{n+1}(v_b) = \int_{\Omega} \left[\phi \frac{\mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1}) - \mathcal{P}_b(\lambda_i^n)}{\delta t} - \phi \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}(t^{n+1}) \right] v_b \, dx.$$

Alors, de manière similaire à l'obtention de (3.16), nous obtenons

$$|R^{n+1}(v_b)| \leq \frac{\delta}{4} \|\nabla v_b\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\delta} \phi^2 C_P^2 (C_I b^{k+1} + \delta t)^2 \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2. \quad (3.18)$$

Nous introduisons les erreurs $e_b^n = \mathcal{P}_b(\lambda_i^n) - \lambda_{i,b}^n$, et $s_b^n = \mathcal{P}_b(\lambda_f^n) - \lambda_{f,b}^n$, les différences (3.17)-(3.6) et (3.14)-(3.5) donnent

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, v_b) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla v_b) \\ & + (\alpha K T_s (h^{N-n-1}) (\nabla \lambda_f^{n+1} - \nabla \lambda_{f,b}^{n+1} + \nabla \lambda_i^{n+1} - \nabla \lambda_{i,b}^{n+1}), \nabla v_b) \\ & - (K (\nabla h_1^{N-n-1} + \alpha \nabla h^{N-n-1}) \nabla (\lambda_i^{n+1} - \lambda_{i,b}^{n+1}), v_b) \\ & - (\alpha K \nabla h^{N-n-1} \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^{n+1}), v_b) = R^{n+1}(v_b). \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, w_b) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla w_b) \\ & + (K T_f (h^{N-n-1} - h_1^{N-n-1}) \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^{n+1}), \nabla w_b) \\ & + (K T_s (h^{N-n-1}) \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^{n+1} + \lambda_i^{n+1} - \lambda_{i,b}^{n+1}), \nabla w_b) \\ & - (K \nabla h_1^{N-n-1} \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^{n+1}), w_b) = \mathcal{R}_1^{n+1}(w_b). \end{aligned} \quad (3.20)$$

En posant $v_b = e_b^{n+1}$ dans l'équation (3.19) et $w_b = s_b^{n+1}$ dans (3.20), après sommation des deux égalités (3.19)-(3.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{\delta t} (e_b^{n+1} - e_b^n, e_b^{n+1}) + \frac{\phi}{\delta t} (s_b^{n+1} - s_b^n, s_b^{n+1}) + \delta (\nabla e_b^{n+1}, \nabla e_b^{n+1}) + \delta (\nabla s_b^{n+1}, \nabla s_b^{n+1}) + \\ & \underbrace{(K T_s (h) \nabla (e_b^{n+1} + s_b^{n+1}), \nabla (e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))}_{\geq 0} + \underbrace{(K (h - h_1) \nabla s_b^n, \nabla s_b^{n+1})}_{\geq 0} + \\ & \underbrace{(K T_s (h) \nabla (\lambda_f^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}) + \lambda_i - \mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1})), \nabla (e_b^{n+1} + s_b^{n+1}))}_{=E_0} + \underbrace{(K T_s (h) \nabla (\lambda_{i,b}^{n+1} - \lambda_{i,b}^n), \nabla s_b^n)}_{=E_1} + \\ & \underbrace{(K (h - h_1) \nabla (\lambda_f^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1})), \nabla s_b^n)}_{=E_2} - \underbrace{(K \nabla h_1 \nabla (\lambda_i^{n+1} - \lambda_{i,b}^{n+1}), e_b^{n+1})}_{=E_3} - \\ & \underbrace{(\alpha K \nabla h \nabla (\lambda_i^{n+1} - \lambda_{i,b}^n), e_b^{n+1})}_{=E_4} - \underbrace{(\alpha K \nabla h \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^n), e_b^{n+1})}_{=E_5} - \underbrace{(K \nabla h_1 \nabla (\lambda_f^{n+1} - \lambda_{f,b}^n), s_b^{n+1})}_{=E_6} \end{aligned}$$

3.3.2 Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée

$$= R_1^{s_b^{n+1}} + R_b^{e_b^{n+1}}$$

Nous allons maintenant estimer E_i , $i = 1, 6$, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et de Gagliardo-Nirenberg.

Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} |E_0| &\leq K_+ h_2^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{(\|\nabla(\lambda_f^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)})}_{\leq C_I b^k \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}} \\ &\quad + \underbrace{\|\nabla(\lambda_i^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1}))\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq C_I b^k \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} |E_0| &\leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{h_2 - h_b^n} \nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{h_2 K_+^2}{2 K_-} C_I^2 b^{2k} (\|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Concernant E_1 , nous écrivons

$$\lambda_{i,b}^{n+1} - \lambda_{i,b}^n = -e_b^{n+1} + e_b^n + (\mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1}) - \lambda_i^{n+1}) - (\mathcal{P}_b(\lambda_i^n) - \lambda_i^n) + \lambda_i^{n+1} - \lambda_i^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} |E_1| &\leq h_2 C(b) K_+ \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} + h_2 K_+ \underbrace{(\|\nabla(\mathcal{P}_b(\lambda_i^n) - \lambda_i^n)\|_{L^2})}_{\leq C_I b^k \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}} \\ &\quad + \underbrace{\|\nabla(\mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1}) - \lambda_i^{n+1})\|_{L^2}}_{\leq C_I b^k \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla(\lambda_i^{n+1} - \lambda_i^n)\|_{L^2}}_{\leq \delta t \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$|E_1| \leq \frac{2 h_2^2 C(b)^2 K_+^2}{\delta} \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{4 h_2^2 K_+^2 C_I^2 b^{2k}}{\delta} + \frac{2 h_2^2 K_+^2 \delta t^2}{\delta} \right) \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} |E_2| &\leq K_+ \|(h^n - h_1^n)^{\frac{1}{2}} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2} \sqrt{h_2} \|\nabla(\lambda_f^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_f^{n+1}))\|_{L^2} \\ |E_2| &\leq \frac{K_-}{2} \|\sqrt{h^n - h_1^n} \nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{h_2 K_+^2}{2 K_-} C_I^2 b^{2k} \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Concernant E_3 , nous écrivons

$$E_3 = (K \nabla h_1 \nabla(\lambda_i^{n+1} - \mathcal{P}_b(\lambda_i^{n+1})), e_b^{n+1}) - (K \nabla h_1 \nabla e_b^{n+1}, e_b^{n+1}),$$

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

d'où

$$|E_3| \leq \frac{K_+ G_4 \epsilon_1 C_I^2 b^{2k}}{2} \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 + \frac{K_+ G_4 \epsilon_2}{2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+ G_4}{\epsilon_5^{\frac{1}{3}}} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \epsilon_5 \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \quad (3.23)$$

De la même façon

$$|E_4| \leq \alpha \frac{K_+ G_4 \epsilon_1 C_I^2 b^{2k}}{2} \|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \alpha \frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \alpha \frac{K_+ G_4 \epsilon_2}{2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{K_+ G_4}{\epsilon_5^{\frac{1}{3}}} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \epsilon_5 \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4. \quad (3.24)$$

Puis

$$|E_5| \leq \frac{K_+ G_4 \epsilon_1 C_I^2 b^{2k}}{2} \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_s^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 + \frac{K_+ G_4 \epsilon_2}{2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+ G_4 \epsilon_3}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+ G_4 \epsilon_4}{2} \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+ G_4}{8\epsilon_3^2 \epsilon_4} \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4. \quad (3.25)$$

Finalement

$$|E_6| \leq \frac{K_+ G_4 \epsilon_1 C_I^2 b^{2k}}{2} \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2 + \frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 + \frac{K_+ G_4 \epsilon_2}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{K_+ G_4}{\epsilon_5^{\frac{1}{3}}} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \epsilon_5 \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4. \quad (3.26)$$

En rassemblant ces inégalités, nous obtenons après simplifications

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2\delta t} (\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2 + \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2) + \frac{\phi}{2\delta t} (\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|s_b^n\|_{L^2}^2 + \|s_b^{n+1} - s_b^n\|_{L^2}^2) \\ & + \left(\frac{3}{4}\delta - K_+ G_4 \left(\frac{3}{2}\epsilon_2 + 2\epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\epsilon_4 \right) \right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\delta}{4} - K_+ G_4 \left(\frac{\epsilon_2}{2} + \epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{\epsilon_3}{2} \right) \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & - \left(\frac{2h_2^2 C(b)^2 K_+^2}{\delta} \right) \|e_b^{n+1} - e_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{K_-}{2} \|\nabla(e_b^{n+1} + s_b^{n+1})\|_{L^2}^2 + \frac{K_-}{2} \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \left(\frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \epsilon_5 \right) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) + \\ & (2\epsilon_5 + K_+ G_4 \left(\frac{3}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \frac{1}{8\epsilon_3^2 \epsilon_4} \right)) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) + \\ & C_f (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \max(\|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2) (b^k + \delta t)^2, \end{aligned}$$

où C_f est une constante dépendant de ϕ , K_- , K_+ , δ , h_2 , C_I , C_P et G_4 .

Si les nombres réels $\{\epsilon_i > 0\}_{i=1,5}$ sont choisis de telle sorte que :

$$\frac{3}{4}\delta - K_+ G_4 \left(\frac{3}{2}\epsilon_2 + 2\epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\epsilon_4 \right) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{4} - K_+ G_4 \left(\frac{\epsilon_2}{2} + \epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{\epsilon_3}{2} \right) > 0, \quad (3.27)$$

3.3.2 Présentation du schéma Élément fini et existence de la solution approchée

et si la condition de stabilité (3.8) donnée ce théorème est satisfaite

$$\frac{\phi}{2\delta t} - \frac{2h_2 C(b)^2 K_+^2}{\delta} > 0,$$

alors

$$\begin{aligned} & \phi(\|e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|e_b^n\|_{L^2}^2) + \phi(\|s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|s_b^n\|_{L^2}^2) \\ & + 2\delta t \left(\frac{3}{4}\delta - K_+ G_4 \left(\frac{3}{2}\epsilon_2 + 2\epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\epsilon_4 \right) \right) \|\nabla e_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + 2\delta t \left(\frac{\delta}{4} - K_+ G_4 \left(\frac{\epsilon_2}{2} + \epsilon_5^{-\frac{1}{3}} + \frac{\epsilon_3}{2} \right) \right) \|\nabla s_b^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq 2\delta t \left(\frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \epsilon_5 \right) \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4 \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \\ & + 2\delta t C_f (1 + \|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \max(\|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2) (b^k + \delta t)^2 \\ & + 2\delta t (2\epsilon_5 + K_+ G_4 (\frac{3}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \frac{1}{8\epsilon_3^2 \epsilon_4})) (\|\nabla h^{n+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{n+1}\|_{L^4}^4) \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En sommant cette inégalité pour $n \in \{0, \dots, p\}$ et $\forall p \in \{0, \dots, N+1\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \phi(\|e_b^{p+1}\|_{L^2}^2 + \|s_b^{p+1}\|_{L^2}^2) \leq \phi(\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) \\ & + 2 \left(\frac{K_+ G_4}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \epsilon_5 \right) \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \times \delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4 \\ & + 2 (2\epsilon_5 + K_+ G_4 (\frac{3}{8\epsilon_1^2 \epsilon_2} + \frac{1}{8\epsilon_3^2 \epsilon_4})) \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) \times \delta t \sum_{k=0}^p (\|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 + 2\|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4) \\ & + 2 C_f (\phi, K_-, K_+, \delta, h_2, C_I, C_P, G_4) (b^k + \delta t)^2 \max(\|h\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|h_1\|_{Y(\Omega_T)}^2) \\ & \times \delta t \sum_{k=0}^p (1 + \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 + \|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4). \end{aligned}$$

Donc si δt est suffisamment petit pour avoir

$$\delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla h\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4 \quad \text{et} \quad \delta t \sum_{k=0}^p \|\nabla h_1^{k+1}\|_{L^4}^4 \leq \|\nabla h_1\|_{L^4(\Omega_T)}^4 \leq C_4,$$

alors (puisque $n\delta t \leq T$)

$$\begin{aligned} & (\phi - 8 C_4 F_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7)) \max_{k \in (0, N+1)} (\|e_b^k\|_{L^2}^2) + (\phi - 2 C_4 F_2(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)) \max_{k \in (0, N+1)} (\|s_b^k\|_{L^2}^2) \\ & \leq \phi(\|e_b^0\|_{L^2}^2 + \|s_b^0\|_{L^2}^2) \\ & + 2 C_f (\phi, K_-, K_+, \delta, h_2, C_I, C_P, G_4) (T + 2 C_4) (b^k + \delta t)^2 \max(\|\lambda_i\|_{Y(\Omega_T)}^2, \|\lambda_f\|_{Y(\Omega_T)}^2). \end{aligned}$$

Si le paramètre ϕ satisfait

$$(\phi - 6 C_4 F_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6)) > 0, \quad (3.29)$$

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

alors, puisque $\|e_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2(b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$ et $\|s_b^0\|_{L^2}^2 \leq C_I^2(b^k + \delta t)^2 \|h\|_{Y(\Omega_T)}^2$, nous obtenons la stabilité L^2 (3.9) -(3.10) énoncée dans le théorème 3.1.

Nous prouvons les estimations (3.11), (3.12) en additionnant (3.28) pour $n = 1, \dots, N$.

Il nous reste à donner un sens aux conditions (3.27), (3.29), en particulier en choisissant de manière adéquate $\epsilon_i, i = 1, 5$.

Nous rappelons que δ représente l'épaisseur des interfaces diffuses, on peut sans perte de généralité supposer que $\delta = \mathcal{O}(1)$. Prenons

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\tilde{\alpha}}{3 K_- G_4}, \quad \epsilon_4 = \frac{\tilde{\alpha}}{K_- G_4} \quad \epsilon_5 = \frac{K_- G_4^3}{\tilde{\alpha}^3},$$

avec $0 < \alpha < 1$. Ce choix donne un sens à (3.27) (en particulier si le milieu est supposé homogène). En effet, les paramètres δ, K_-, K_+ doivent satisfaire la première hypothèse de (B.2)

$$\left(\delta - \frac{16}{3} \tilde{\alpha} \frac{K_+}{K_-}\right) > 0, \text{ avec } 0 < \tilde{\alpha} < 1.$$

Ensuite, en prenant

$$\epsilon_1 = \left(\frac{3 h_2^2 \tilde{\alpha}}{\delta G_4^2}\right)^2$$

l'inégalité (3.29) devient

$$\left(\phi - \left(\frac{2K_-^2}{\tilde{\alpha}} + \frac{3\delta}{8h_2^2} + \frac{9}{8\tilde{\alpha}}\right) \frac{8C_4 K_- G_4^3}{\tilde{\alpha}^2}\right) > 0. \quad (3.30)$$

La condition (3.30) peut paraître contraignante. Cependant, nous pouvons prendre le coefficient ϕ arbitrairement grand (car cela correspondre à une mise à l'échelle de la variable temps), de sorte que la condition (3.30) puisse effectivement être satisfaite. Posons

$$t_0 = \frac{h_2^2 \tilde{\alpha}^2}{12 K_- C_4 G_4^3 (10 \delta \tilde{\alpha} + 41 K_-^2 h_2^2)},$$

nous avons donc prouvé le résultat de convergence pour tout temps $t \in [0, t_0]$. Mais en prenant $t = t_0$ comme temps initial, le résultat est obtenu pour tout t tel que $t_0 \leq t \leq 2t_0$. Grâce à ce raisonnement inductif, nous obtenons la convergence sur tout l'ensemble d'étude $[0, T]$. Le théorème 3.1 est ainsi prouvé. $\square$

3.3 Description des méthodes numériques pour le problème d'optimisation

3.3.1 Résolution du système d'état et du problème adjoint

En utilisant la méthode des trapèzes composite et après quelques approximations, la fonction coût est calculée selon la formule suivante :

$$J(K) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{(n+1)dt=T} \delta t \frac{|h^{(n+1)}(A_i) - h_{obs}^{(n+1)}(A_i)|^2 + |h^{(n)}(A_i) - h_{obs}^{(n)}(A_i)|^2}{2} + \delta t \frac{|h_1^{(n+1)}(A_i) - h_{1,obs}^{(n+1)}(A_i)|^2 + |h_1^{(n)}(A_i) - h_{1,obs}^{(n)}(A_i)|^2}{2},$$

où N est le nombre de puits.

Par ailleurs, la gradient de la fonction coût est approché par la formule :

$$\begin{aligned} D_k J(K) \cdot \delta_K = & \sum_{n=0}^{(n+1)dt=T} \left[\alpha \delta t \int_{\Omega} \delta_K \frac{(h_2 - h^{(n+1)}) \nabla h^{(n+1)} \cdot \nabla \lambda_i^{(n+1)} + (h_2 - h^{(n)}) \nabla h^{(n)} \cdot \nabla \lambda_i^{(n)}}{2} \right. \\ & + \delta t \int_{\Omega} \delta_K \frac{(h_2 - h^{(n+1)}) \nabla h_1^{(n+1)} \cdot \nabla \lambda_i^{(n+1)} + (h_2 - h^{(n)}) \nabla h_1^{(n)} \cdot \nabla \lambda_i^{(n)}}{2} \\ & + \delta t \int_{\Omega} \delta_K \frac{(h_2 - h_1^{(n+1)}) \nabla h_1^{(n+1)} \cdot \nabla \lambda_f^{(n+1)} + (h_2 - h_1^{(n)}) \nabla h_1^{(n)} \cdot \nabla \lambda_f^{(n)}}{2} \\ & \left. + \alpha \delta t \int_{\Omega} \delta_K \frac{(h_2 - h^{(n+1)}) \nabla h^{(n+1)} \cdot \nabla \lambda_f^{(n+1)} + (h_2 - h^{(n)}) \nabla h^{(n)} \cdot \nabla \lambda_f^{(n)}}{2} \right]. \end{aligned}$$

3.3.2 Description de l'algorithme

Le problème d'optimisation se ramène au problème de minimisation abstrait suivant :

$$\min_{x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; l \leq x \leq u\}} f(x), \quad (3.31)$$

où $l = (l_i)_{i=1,\dots,n}$ et $u = (u_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des limites inférieures et supérieures des paramètres.

Plusieurs stratégies d'optimisation qui ne nécessitent pas la dérivée seconde peuvent être appliquées, telles que des stratégies qui ne nécessitent que le calcul de la fonction coût et de ses gradients à chaque étape de minimisation. Traditionnellement, l'algorithme du gradient conjugué est le premier choix qu'on peut envisager, mais on montre

[56] que cet algorithme peut ne converger que très lentement vers la solution, en particulier quand le nombre des paramètres est assez élevé. Par exemple, un choix possible est l'utilisation de l'algorithme de métrique variable à mémoire limitée pour les problèmes d'optimisation sous contrainte (BLMVM) développé par Benson et Moré [15]. Cet algorithme utilise des gradients projetés pour construire une matrice BFGS à mémoire limitée et pour déterminer un pas de direction.

Une solution de (3.31) satisfait les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \frac{\partial_i f(x)}{\partial x_i} = 0 & \text{if } x_i \in (l_i, u_i), \\ \frac{\partial_i f(x)}{\partial x_i} \geq 0 & \text{if } x_i = l_i, \\ \frac{\partial_i f(x)}{\partial x_i} \leq 0 & \text{if } x_i = u_i, \end{cases}$$

où $\frac{\partial_i f(x)}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à la i^{ime} variable x_i .

L'algorithme BLMVM applique la condition stationnaire qui est la condition nécessaire du premier ordre :

$$T_D \nabla f(x) = 0,$$

avec T_D l'opérateur de type projection donné par :

$$[T_D d]_i = \begin{cases} d_i & \text{si } x_i \in (l_i, u_i), \\ \min\{d_i, 0\} & \text{si } x_i = l_i, \\ \max\{d_i, 0\} & \text{si } x_i = u_i. \end{cases}$$

Étant donné une tolérance ϵ , une solution approchée du problème sous contrainte (3.31) est un vecteur $x \in \Omega$, tel que

$$\|T_D \nabla f(x)\| \leq \epsilon.$$

Le paramètre est mis à jour à chaque itération par :

$$x_{k+1} = Proj_D[x_k + \alpha_k d_k],$$

où l'opérateur $Proj_D$ est la projection sur D , α_k le pas de descente et d_k la direction de descente.

Le pas de descente α_k est calculé par la recherche linéaire projetée qui satisfait la condition suffisante de descente donnée par :

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + c_1 \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle, \quad (3.32)$$

et cela tente également de satisfaire la condition de courbure :

$$d_k^T \nabla f(x_k + \alpha_k d_k) \geq c_2 d_k^T \nabla f(x_k), \quad (3.33)$$

3.3.3 Description des méthodes numériques pour le problème d'optimisation

où c_1 et c_2 sont les paramètres égaux à 10^{-4} et 0.99, dans notre code. À chaque itération k , la direction de descente, d_k , est donnée par :

$$d_k = -H_k \cdot \nabla f(x_k),$$

où H_k est une approximation de l'inverse du Hessien calculée par la formule de mise à jour suivante :

$$H_k = V_{k-1}^T H_{k-1} V_{k-1} + \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^T,$$

où

$$\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}, \quad V_k = I - \rho_k (y_k s_k),$$

et

$$s_k = x_{k+1} - x_k, \quad y_k = T_D \nabla f(x_{k+1}) - T_D \nabla f(x_k).$$

Or, le stockage et la manipulation de H_k sont assez coûteux. Pour éviter ce problème, l'algorithme BLMVM construit une matrice de mémoire limitée L-BFGS (en utilisant uniquement les m dernières itérations). Ainsi, étant donnée une approximation initiale H_k^0 , la matrice H_k est obtenue par la formule suivante :

$$\begin{aligned} H_k = & (V_{k-1}^T \dots V_{k-m}^T) H_k^0 (V_{k-m}^T \dots V_{k-1}^T) + \\ & \rho_{k-m} (V_{k-1}^T \dots V_{k-m+1}^T) s_{k-m} s_{k-m}^T (V_{k-m+1}^T \dots V_{k-1}^T) + \\ & \dots + \\ & \rho_{k-2} (V_{k-1}^T) s_{k-2} s_{k-2}^T (V_{k-1}^T) + \\ & \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^T. \end{aligned}$$

En outre, l'opération produit matrice-vecteur pour le calcul de $d_1 := H_k \nabla f(x_k)$ est calculé en utilisant "L-BFGS two loop recursion pseudo code" [56] qui minimise le coût de calcul de $H_k \nabla f(x_k)$:

Algorithme 1 1: $d_1 = \nabla f(x_k)$

2: **for** $i = k-1, \dots, k-m$ **do**

3: $\alpha_i = \rho_i s_i^T d_1$

4: $d_1 = d_1 - \alpha_i y_i$

5: **end for**

6: $z = H_k^0 d_1$

7: **for** $i = k-m, \dots, k-1$ **do**

8: $\beta_i = \rho_i y_i^T z$

9: $z = z + s_i(\alpha_i - \beta_i)$

10: **end for**

$$11: H_k \nabla f(x_k) = z$$

Décrivons l'algorithme :

Algorithme 2 1: Choisir $x_0 \in D$, et $d = -T_D \nabla f(x_0)$
2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
3: calculer α_k en utilisant la méthode de recherche linéaire projeté qui satisfait (3.32) et tente de satisfaire (3.33)
4: mettre $x_{k+1} = Proj_D[x_k + \alpha_k d_k]$
5: si $\|T_D \nabla f(x_{k+1})\| \leq \epsilon$, **fin**
6: calculer y_k et s_k
7: si $y_k^T s_k > 0$, faire une mise à jour de H_k en utilisant l'algorithme L-BFGS
8: Calculer $H_{k+1} \nabla f(x_{k+1})$ en utilisant la procédure "L-BFGS two loop recursion"
9: si $\langle -T_D(H_{k+1} \nabla f(x_{k+1})), \nabla f(x_{k+1}) \rangle > 0$, mettre $d_{k+1} = H_{k+1} \nabla f(x_{k+1})$;
 sinon $d_{k+1} = -T_D \nabla f(x_{k+1})$.
10: **end for**

3.4 Résultats numériques

La présente section est consacrée aux illustrations numériques de l'algorithme décrit ci-dessus. L'aquifère est figuré par un parallélépipède $(x, y) \in [-50, 50] \times [-20, 20]$, $z \in [-20, 0]$. Les paramètres physiques ont été choisis en accord avec [11] et nous rappelons que la densité de fluide est $1g/ml$ pour l'eau douce et $1.025g/ml$ pour l'eau salée. Dans les simulations suivantes, nous résolvons numériquement les problèmes bidimensionnel. L'aquifère est suivie pour une durée comprise entre 0 et 10 jours, de sorte que le pas de temps égale 1 jour, avec $\delta x = 0.5$ et $\delta y = 0.4$ (5000 noeuds).

Nous utilisons un schéma en temps semi-implicite combiné à une approximation de type élément fini pour discrétiser le système d'état et le problème adjoint associé. Le théorème de convergence implique une condition de stabilité entre le temps et la discrétisation spatiale (Cette condition reste raisonnable, par exemple : δt est d'ordre 1 tandis que $\delta_x = O(10^{-1})$ pour les calculs). Nous adaptons à notre cas le package Free-Fem ++ de Pironneau et al. Pour plus de détails nous renvoyons à [60].

Dans la première expérience, nous prenons K_{exact} comme une valeur exacte de la conductivité hydraulique, puis la profondeur de l'interface eau salée/eau douce h et la profondeur de l'interface entre zone in-saturée et zone saturée, h_1 , sont calculées en résolvant le problème exact associé à cette valeur de K_{exact} . Cela a été considéré comme une donnée observée.

Ensuite, à partir d'une estimation initiale arbitraire de ce paramètre, nous avons calculé

la solution optimale par la procédure d'identification des paramètres précédemment décrite. Cet algorithme est testé sur quatre exemples.

3.4.1 Expérience 1

Dans la première expérience, la conductivité hydraulique est considérée comme constante sur tout le domaine de l'aquifère. Des informations sur h et h_1 sont disponibles à chaque puits d'observation. L'algorithme est appliqué dans le cas où on dispose d'un puit d'observation (cas i), de deux puits d'observation (cas ii) et de trois puits d'observation (cas iii). Les résultats numériques correspondants sont présentés dans le tableau 3.1. Comme prévu, le résultat est amélioré avec l'augmentation du nombre de puits d'observations.

Les figures Fig. 3.1 et Fig. 3.2 illustrent la convergence de la conductivité hydraulique et celle de la fonction coût. La figure Fig. 3.3 montre les sections transversales des interfaces h et h_1 au sixième jour.

Table 3.1 – Expérience 1.

cas	Nombre de puits	Valeurs exactes	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
<i>i</i>	1	$K = 50m/j$	$K_0 = 90m/j$	$K_1 = 51.371m/j$
<i>ii</i>	2	$K = 50m/j$	$K_0 = 90m/j$	$K_2 = 50.064m/j$
<i>iii</i>	3	$K = 50m/j$	$K_0 = 90m/j$	$K_3 = 50.001m/j$

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

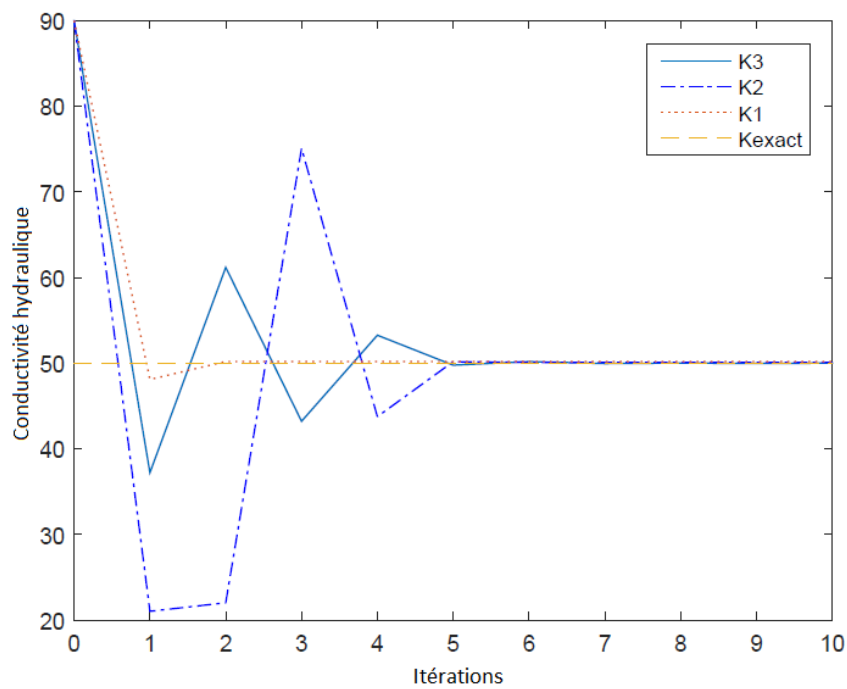


Figure 3.1 – Convergence de la conductivité hydraulique correspond à l'expérience 1. K est supposée constante sur tout le domaine d'étude. La courbe pointillé avec K_1 correspond au résultat obtenu pour un puits d'observation, avec K_2 au résultat pour deux puits d'observation et avec K_3 pour trois puits d'observation.

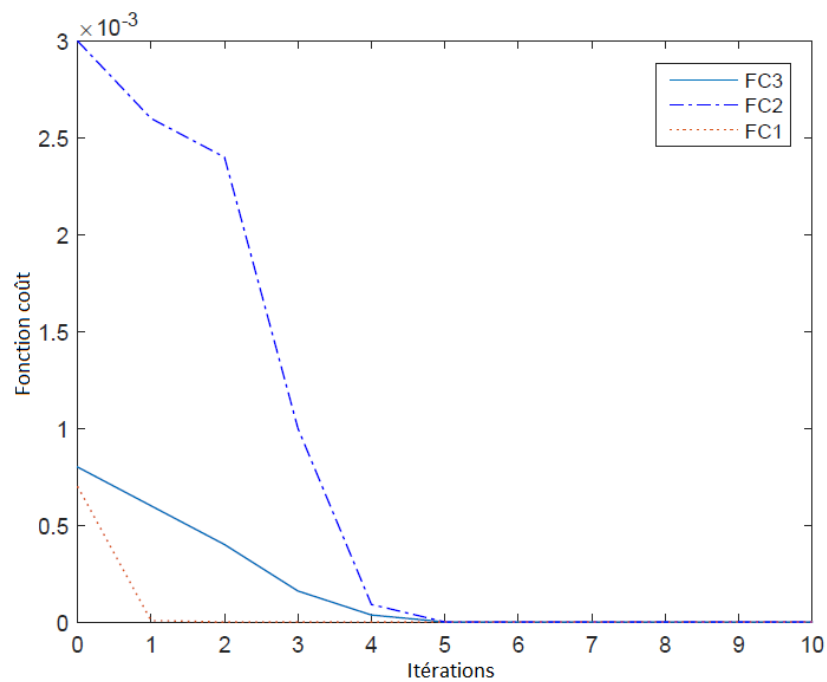


Figure 3.2 – Convergence de la fonction coût correspond à l’expérience 1. On suppose que la conductivité hydraulique K est constante sur tout le domaine d’étude. $FC1$ représente la fonction coût où on a un puits d’observation, $FC2$ la fonction coût où on a deux puits d’observation et $FC3$ la fonction coût où on a trois puits d’observation.

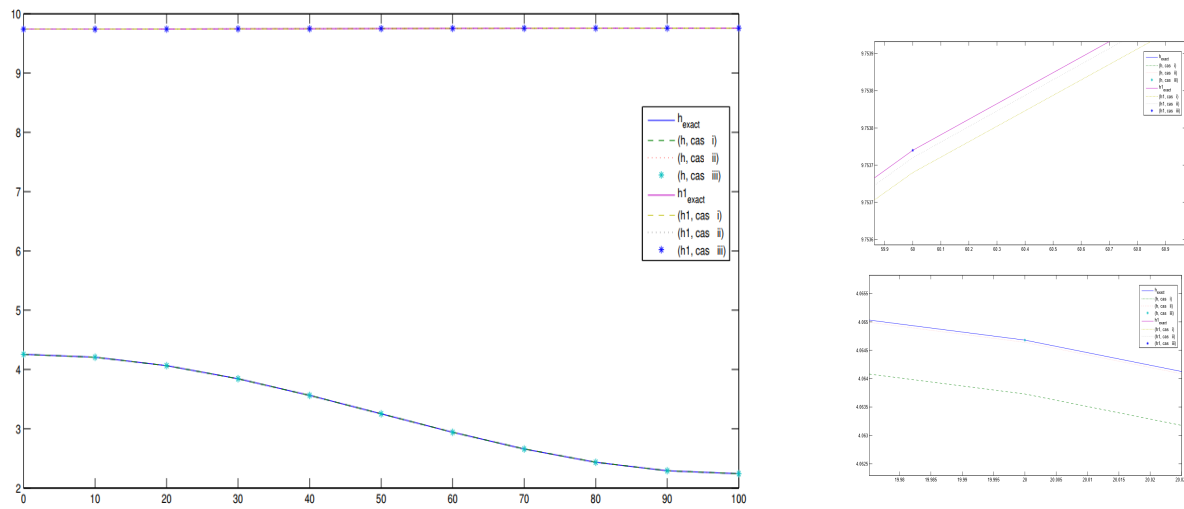


Figure 3.3 – Figure a) : Sections transversales des interfaces " h " et " h_1 " au sixième jours pour l'expérience 1 où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d'étude et pour les cas où on a 1 puits d'observation, 2 puits d'observation et 3 puits d'observation. b) : Zoom pour " h_1 ". c) : Zoom pour " h ".

3.4.2 Expérience 2

Dans la deuxième expérience, nous considérons toujours que la conductivité hydraulique est constante sur tout le domaine, mais nous ne disposons plus que d'observations concernant l'élévation de la surface supérieure de l'aquifère dans trois puits d'observation (cela correspond au cas i). Dans le cas ii , nous avons à nouveau des observations pour les profondeurs des deux interfaces. Les résultats numériques correspondants sont présentés dans le tableau 3.2.

Dans les figures Fig. 3.4 et Fig. 3.5, nous avons tracé graphiquement la convergence de la conductivité hydraulique et celle de la fonction coût. La figure Fig. 3.6 correspond aux sections transversales des interfaces h et h_1 .

La comparaison entre ces deux résultats illustre l'importance d'obtenir des informations sur chaque profondeur d'interface afin d'obtenir des résultats précis.

Table 3.2 – Expérience 2.

cas	Nombre de puits	Valeurs exactes	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
i	3	$K = 40 \text{ m/j}$	$K_0 = 85 \text{ m/j}$	$K_1 = 41.56 \text{ m/j}$
ii	1	$K = 40 \text{ m/j}$	$K_0 = 85 \text{ m/j}$	$K_2 = 39.04 \text{ m/j}$

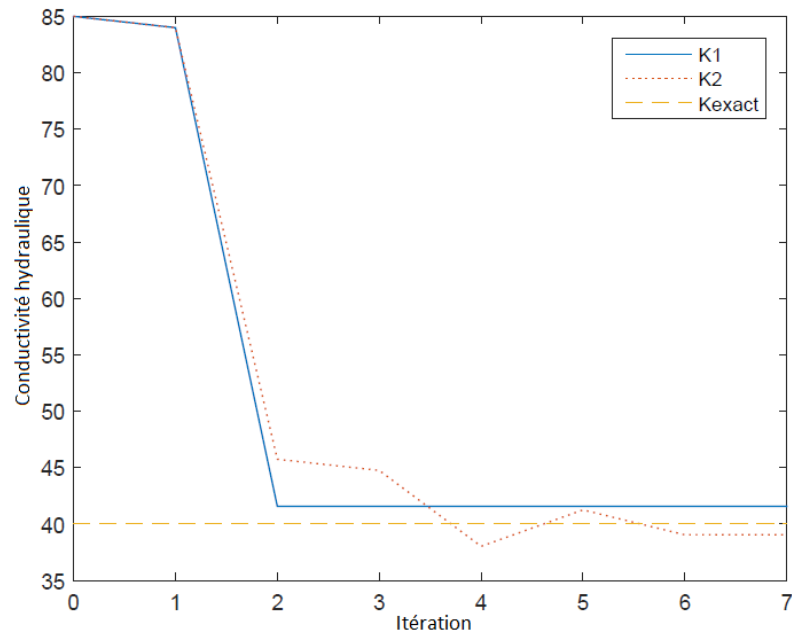


Figure 3.4 – Convergence de la conductivité hydraulique dans l'expérience 2, où K est supposée constante sur tout le domaine d'étude. La courbe avec K_1 représente le résultat obtenu dans le (cas *i*) pour lequel on a trois puits d'observation pour h_1 et celle avec K_2 représente le résultat obtenu dans le (cas *ii*) où on a un puits d'observations pour h et un pour h_1 .

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

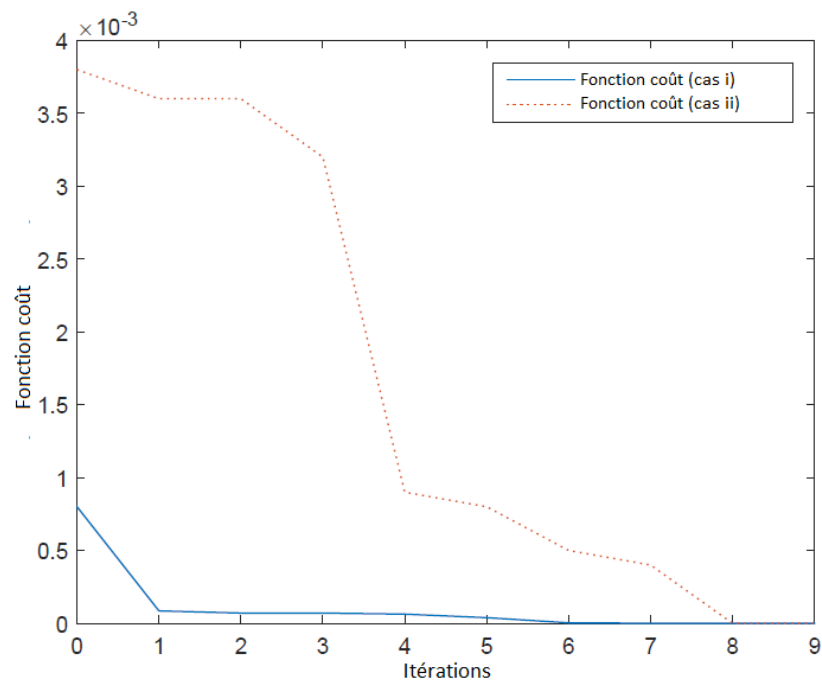


Figure 3.5 – Convergence de la fonction coût dans l’expérience 2, où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d’étude. La courbe $FC1$ (en pointillé) représente la fonction coût dans le (cas i) où on a trois puits d’observation pour h_1 et la courbe $FC2$ représente la fonction coût dans le (cas ii) où on a un puits d’observations pour h et un pour h_1 .

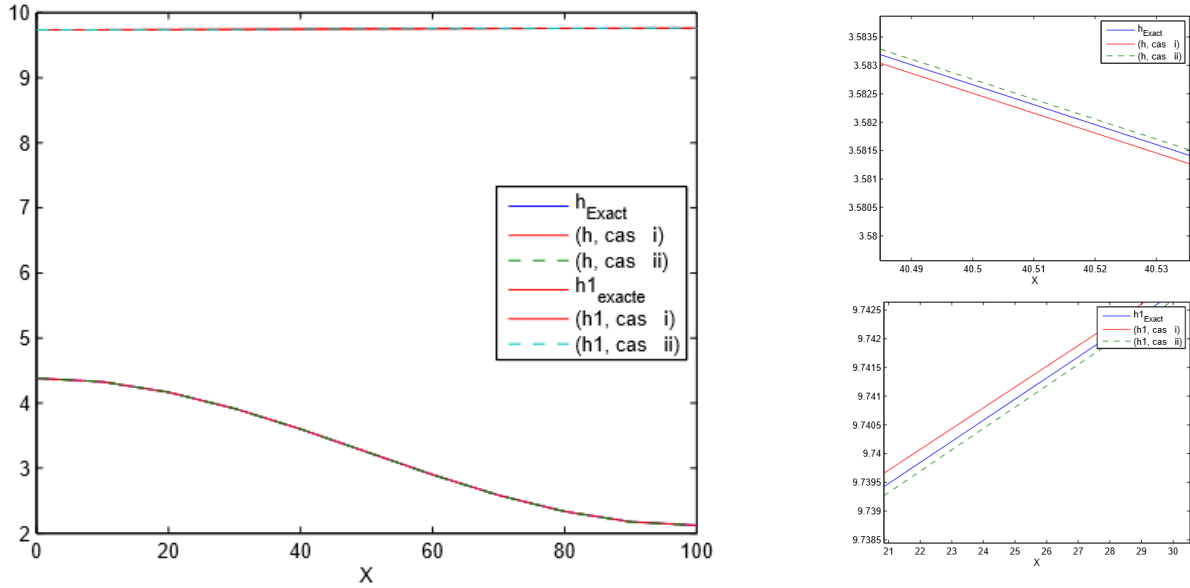


Figure 3.6 – Figure a) : Sections transversales des interfaces " h " et " h_1 " au sixième jours dans l'expérience 2 où la conductivité hydraulique est supposée constante sur tout le domaine d'étude. Dans le (cas i), on a 3 puits d'observation pour h_1 et dans le (cas ii), on a un puits d'observation pour h et un pour h_1 . b) : Zoom pour " h ". c) : Zoom pour " h_1 ".

3.4.3 Expérience 3

Pour la troisième expérience, nous avons considéré que l'aquifère est divisé en deux zones, la conductivité hydraulique est constante et égale à K_1 sur la première zone et à K_2 sur la deuxième.

La méthode est appliquée dans deux cas. Nous avons considéré que nous avons un puits d'observation dans chaque zone dans le premier cas (cas i) et deux puits d'observation dans chaque zone dans le deuxième cas (cas ii). Dans le tableau 3.3, nous avons comparé les résultats numériques avec la solution exacte.

La convergence de la conductivité hydraulique et celle de la fonction coût sont représentées dans les figures Fig. 3.7, Fig. 3.8, Fig. 3.9 et Fig. 3.10. Les sections transversales des interfaces h et h_1 sont tracées dans la figure Fig. 3.11. Encore une fois, nous concluons que l'algorithme fonctionne bien si nous avons suffisamment de puits d'observation.

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

Table 3.3 – Expérience 3.

cas	Nombre de puits	Valeurs exactes	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
i	2	$K_1 = 50 \text{ m/j}$ $K_2 = 80 \text{ m/j}$	$K_1 = 65 \text{ m/j}$ $K_2 = 65 \text{ m/j}$	$K_1 = 50.63 \text{ m/j}$ $K_2 = 79.91 \text{ m/j}$
ii	4	$K_1 = 50 \text{ m/j}$ $K_2 = 80 \text{ m/j}$	$K_1 = 65 \text{ m/j}$ $K_2 = 65 \text{ m/j}$	$K_1 = 49.95 \text{ m/j}$ $K_2 = 80.04 \text{ m/j}$

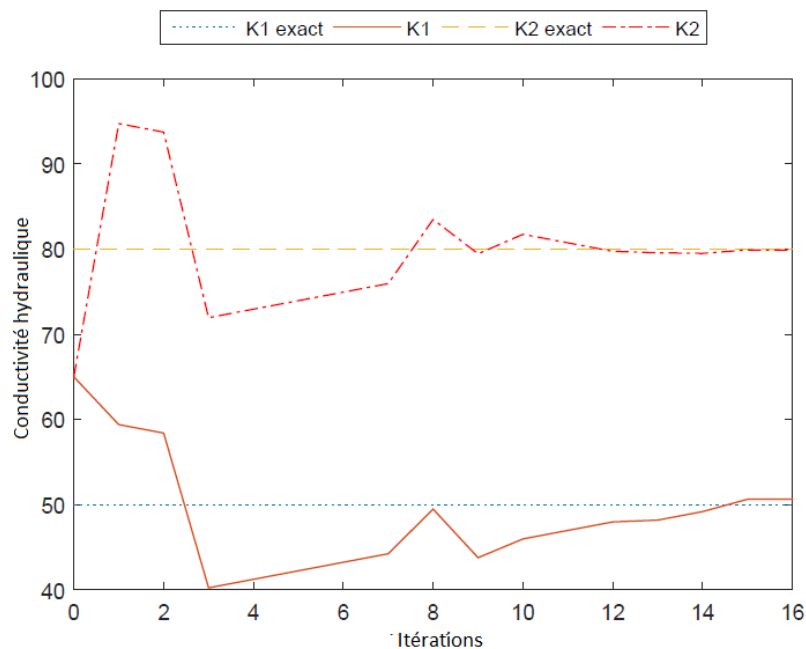


Figure 3.7 – Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas *i*) de l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " K_1 exact" sur la première zone et à " K_2 exact" sur la deuxième. On a un puits d'observation dans chaque sous domaine.

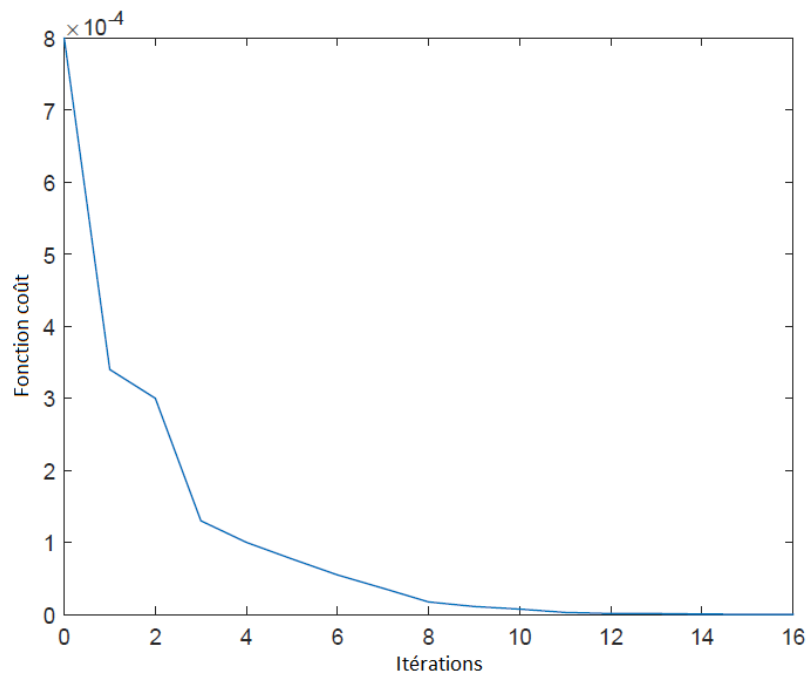


Figure 3.8 – Convergence de la fonction coût dans le (cas *i*) de l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone et à "*K2 exact*" sur la deuxième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine.

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

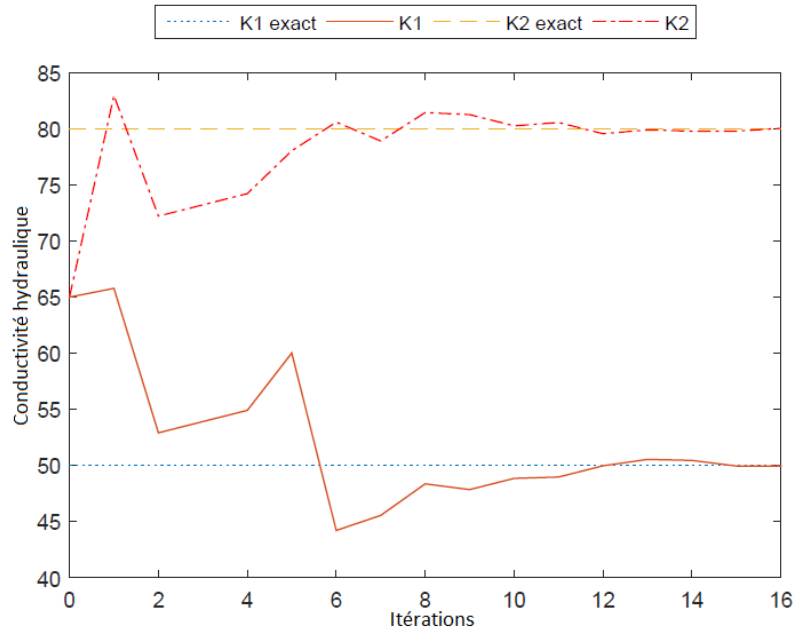


Figure 3.9 – Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas *ii*) de l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone et à "*K2 exact*" sur la deuxième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine.

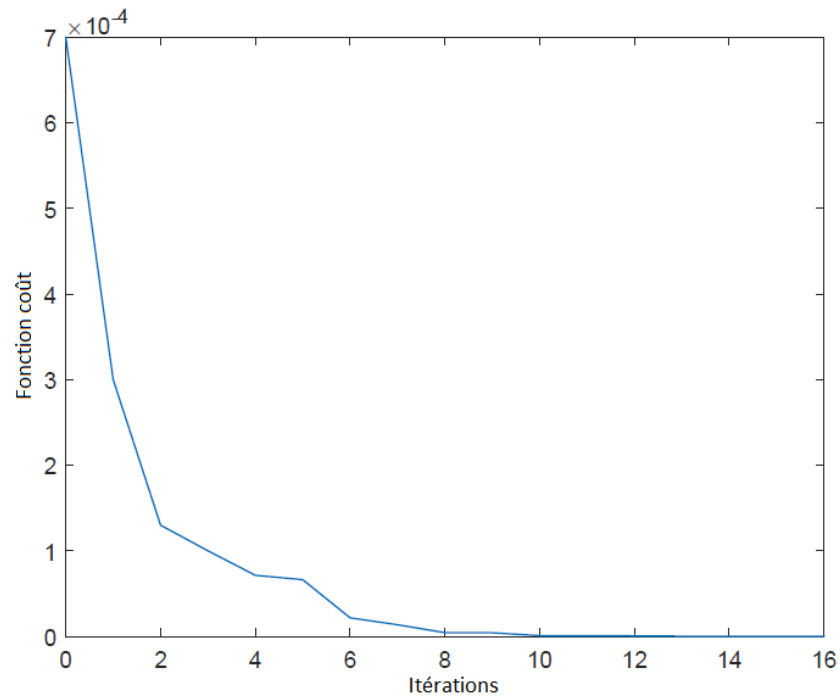


Figure 3.10 – Convergence de la fonction coût dans le (cas *ii*) de l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone et "*K2 exact*" sur la deuxième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine.

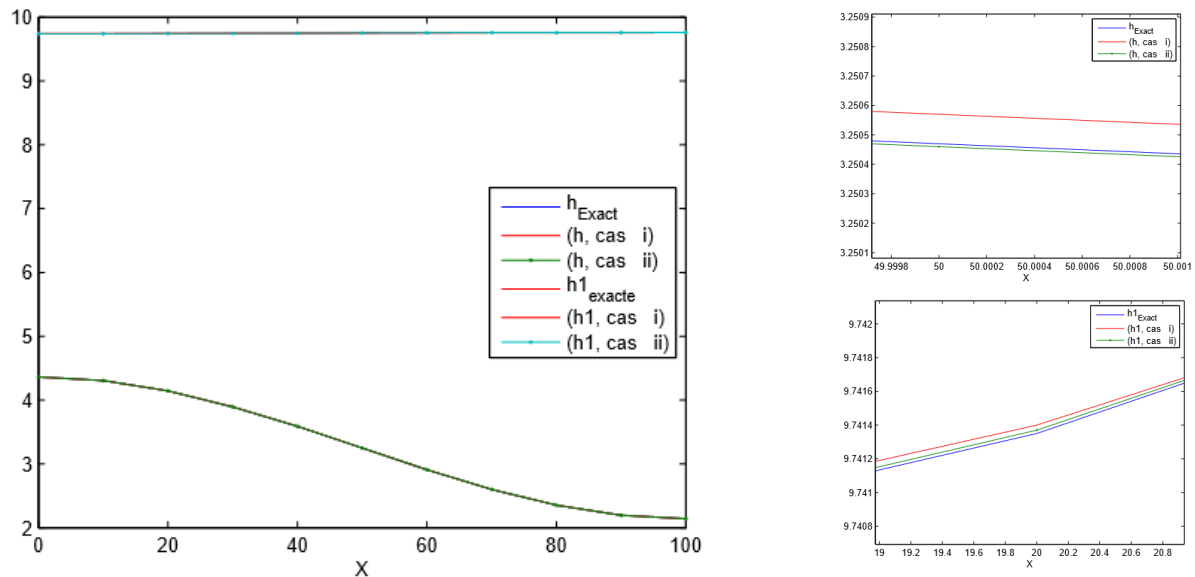


Figure 3.11 – Figure a) : Section transversale des interfaces " h " et " h_1 " dans l'expérience 3 où on considère que l'aquifère est divisé en deux zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " K_1 exact" sur la première zone et " K_2 exact" sur la deuxième, pour les deux cas : (cas i) où on a un puits d'observations dans chaque sous domaine, et (cas ii) où on a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. b) : Zoom pour " h ". c) : Zoom pour " h_1 ".

3.4.4 Expérience 4

Dans la dernière expérience, nous avons considéré que l'aquifère est divisé en trois zones qui sont représentées dans la figure Fig. 3.12. La conductivité hydraulique est supposée constante et égale à K_1 dans la première zone, K_2 dans la seconde et K_3 dans la troisième. La méthode est appliquée dans deux cas. Nous avons d'abord considéré que nous avons un puits d'observation dans chaque zone pour le premier cas (cas i) et deux puits dans chaque zone pour le second cas (cas ii). On peut encore constater qu'une bonne précision est obtenue en comparant la solution exacte et les résultats numériques donnés dans le tableau 3.4.

La convergence pour la conductivité hydraulique et celle pour la fonction coût sont représentées dans les figures Fig. 3.13, Fig. 3.14, Fig. 3.15 et Fig. 3.16. Les sections transversales des interfaces h et h_1 sont tracées dans la figure Fig. 3.17.

Les résultats obtenus pour les quatre expériences confirment que cet algorithme est efficace et précis si le nombre de puits est suffisant.

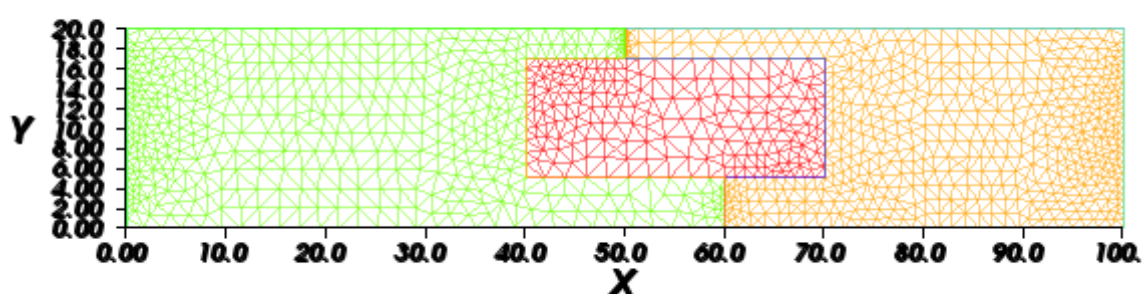


Figure 3.12 – Schématisation de l'aquifère dans l'expérience 4.

Table 3.4 – Expérience 4.

cas	Nombre de puits	Valeurs exactes	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
i	3	$K_1 = 50 \text{ m/j}$ $K_2 = 60 \text{ m/j}$ $K_3 = 40 \text{ m/j}$	$K_1 = 60 \text{ m/j}$ $K_2 = 50 \text{ m/j}$ $K_3 = 50 \text{ m/j}$	$K_1 = 50.45 \text{ m/j}$ $K_2 = 59.67 \text{ m/j}$ $K_3 = 40.14 \text{ m/j}$
ii	6	$K_1 = 50 \text{ m/j}$ $K_2 = 60 \text{ m/j}$ $K_3 = 40 \text{ m/j}$	$K_1 = 60 \text{ m/j}$ $K_2 = 50 \text{ m/j}$ $K_3 = 50 \text{ m/j}$	$K_1 = 49.90 \text{ m/j}$ $K_2 = 60.10 \text{ m/j}$ $K_3 = 39.92 \text{ m/j}$

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

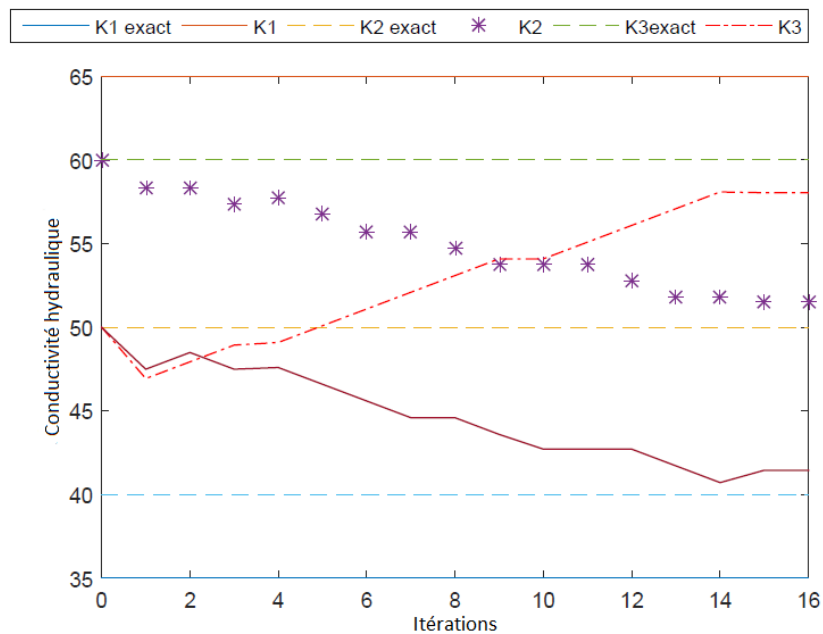


Figure 3.13 – Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas *i*) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone, "*K2 exact*" sur la deuxième et "*K3 exact*" sur la troisième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine.

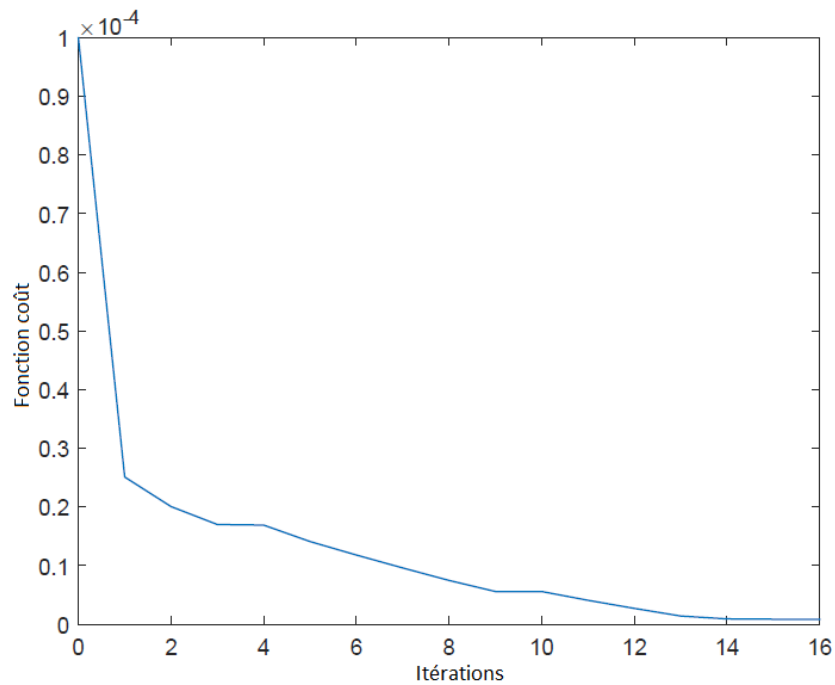


Figure 3.14 – Convergence de la fonction coût dans le (cas *i*) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K*1 exact" sur la première zone , "*K*2 exact " sur la deuxième et "*K*3 exact" sur la troisième. On a un puits d'observations dans chaque sous domaine.

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

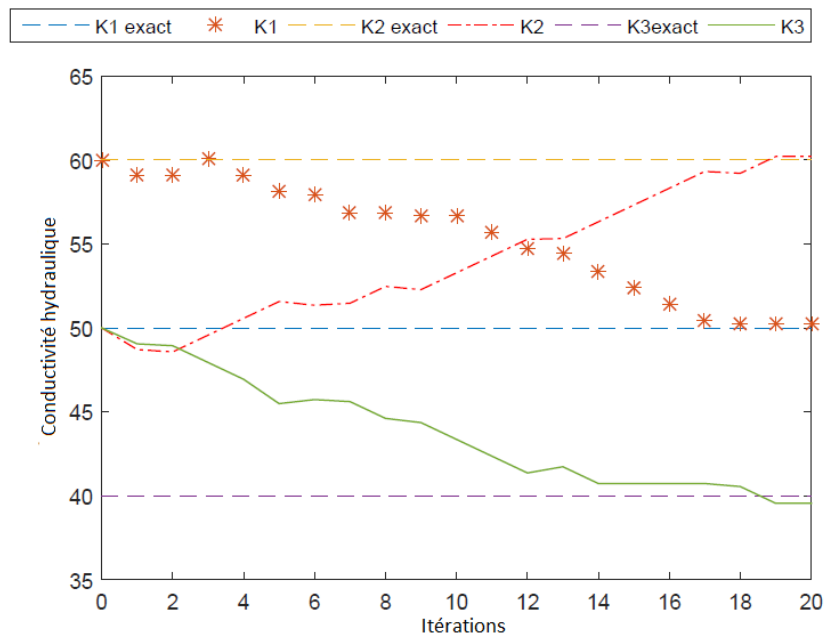


Figure 3.15 – Convergence de la conductivité hydraulique dans le (cas *ii*) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone, "*K2 exact*" sur la deuxième et "*K3 exact*" sur la troisième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine.

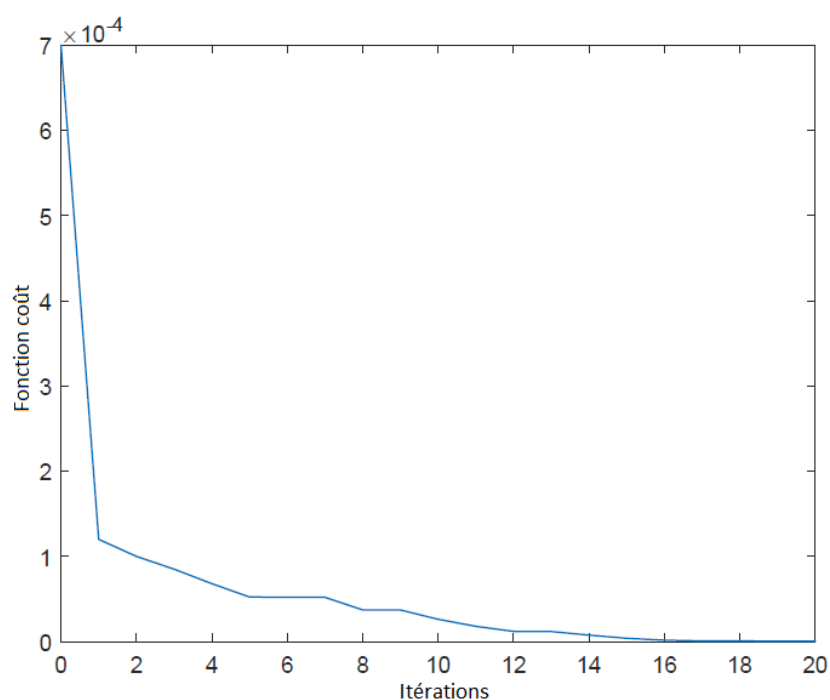


Figure 3.16 – Convergence de la fonction coût dans le (cas *ii*) de l'expérience 4 où on considère que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à "*K1 exact*" sur la première zone , "*K2 exact*" sur la deuxième et "*K3 exact* " sur la troisième. On a deux puits d'observations dans chaque sous domaine.

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITÉ HYDRAULIQUE : ÉTUDE NUMÉRIQUE

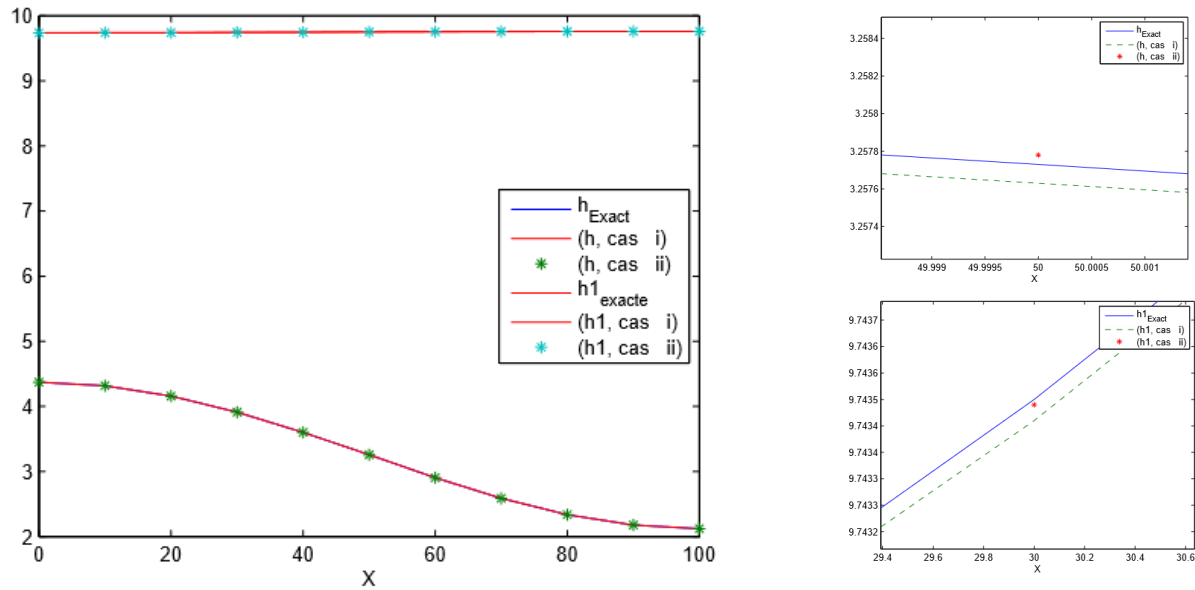


Figure 3.17 – Figure a) : Section transversale des interfaces " h " et " h_1 " dans l'expérience 4 où on considéré que l'aquifère est divisé en trois zones sur lesquelles la conductivité hydraulique est constante et égale à " K_1 exact" sur la première zone, " K_2 exact" sur la deuxième et " K_3 exact" sur la troisième, dans les deux cas : (cas i) où on a un puits d'observations dans chaque sous domaine, et (cas ii) où on a deux puits d'observations dans chaque sous domaine. b) : Zoom de " h ". c) : Zoom de " h_1 ".

APPROCHE STOCHASTIQUE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème d'intrusion saline en considérant les paramètres et les inconnus comme des variables stochastiques. Nous utilisons la théorie du chaos polynomial de Wiener [83] pour traiter l'incertitude. La représentation du chaos polynomial a été largement utilisée pour une quantification efficace de l'incertitude dans les problèmes d'ingénierie de la mécanique des solides et des fluides, par exemple pour les écoulements turbulents [5], les écoulements en milieux poreux [39], les phénomènes de combustion [59], les flux thermiques [48], et les structures élastiques [52]. Ici, en utilisant une base orthogonale générée par des polynômes d'Hermite qui sont des fonctions mesurables par rapport à la mesure de Wiener, nous décomposons d'abord une fonction stochastique arbitraire en une partie déterministe et une partie aléatoire. Ensuite, le problème stochastique d'intrusion saline est transformé en un système d'équations déterministes à résoudre pour chaque coefficient du développement spectral de la solution. Une fois que les coefficients de chaos polynomial sont calculés à partir des équations déterministes, les propriétés statistiques de la solution stochastique peuvent être étudiées directement.

Notre objectif dans ce chapitre est de développer une méthode numérique efficace pour résoudre les équations stochastiques décrivant le problème d'intrusion saline qui soit efficace, précise et simple à mettre en œuvre sur des ordinateurs sans utiliser les approches coûteuses telles que les méthodes de Monte Carlo. Après la transformation du problème stochastique en un système d'équations déterministes, les discrétisations en temps et en espace de ce système déterministe sont effectuées à l'aide d'un schéma Runge-Kutta à variation totale (TVD), ainsi que d'une méthode aux éléments finis. Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, nous présentons le modèle stochastique du problème d'intrusion saline, puis dans le paragraphe qui suit nous présentons la

décomposition spectrale de la solution. Une méthode de type éléments finis est présenté dans le quatrième paragraphe pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles déterministes. Le dernier paragraphe est consacré aux résultats numériques.

4.2 Présentation du modèle stochastique

Étant donné un espace $\mathcal{D}$, l'espace de probabilité gaussien associé est donné par $(\mathcal{D}, \Theta, \mu)$ où Θ est une σ -algèbre sur Ω et μ est la mesure gaussienne normalisée dans (Ω, Θ) . Un champ aléatoire à valeur réelle u défini sur un espace $\mathcal{D}$ et un intervalle de temps $[0, T]$ est un opérateur $u : [0, T] \times \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que, $u(x, t, \cdot)$ est une variable aléatoire par rapport à (Ω, Θ, μ) . Les détails sur la théorie des champs aléatoires peuvent être trouvés dans [2]. Dans la suite, nous utiliserons le symbole ω pour indiquer la dépendance d'une quantité avec la dimension aléatoire du problème, et $\xi_i(\omega)$ désignons des variables aléatoires orthogonales.

Nous nous concentrons, dans ce chapitre, sur une méthode numérique pour approcher la solution du système décrivant le problème d'intrusion saline dans le cas d'une aquifère libre, donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \partial_t h(t, x, \omega) - \nabla \cdot (\alpha K(x, \omega) T_s(h(t, x, \omega)) \nabla h(t, x, \omega)) - \nabla \cdot (\delta \nabla h(t, x, \omega)) \\ - \nabla \cdot (K(x, \omega) T_s(h(t, x, \omega)) \nabla h_1(t, x, \omega)) = -Q_s(t, x, \omega), \\ \phi \partial_t h_1(t, x, \omega) - \nabla \cdot (K(x, \omega) (T_f(h(t, x, \omega) - h_1(t, x, \omega)) + T_s(h))) \nabla h_1(t, x, \omega) \\ - \nabla \cdot (\delta \nabla h_1(t, x, \omega)) - \nabla \cdot (\alpha K(x, \omega) T_s(h) \nabla h(t, x, \omega)) = -Q_f(t, x, \omega) - Q_s(t, x, \omega), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $h(t, x, \omega)$ est la profondeur stochastique de l'interface eau douce/eau salée, $h_1(t, x, \omega)$ est la profondeur stochastique de l'interface entre la zone saturée et la zone sèche et $K(x, \omega)$ représente la conductivité hydraulique stochastique. Le système (4.1) est complété par les conditions initiales et aux bords suivants :

$$h(t, x, \omega) = h_D(t, x, \omega), \quad h_1(t, x, \omega) = h_{1,D}(t, x, \omega) \quad \text{dans } (0, T) \times \partial, \quad (4.2)$$

$$h(0, x, \omega) = h_0(x, \omega), \quad h_1(0, x, \omega) = h_{1,0}(x, \omega) \quad \text{dans } \Omega \times \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

Nous supposons que la porosité est constante dans l'aquifère et que les conditions initiales et aux bords satisfont des conditions physiquement réalistes sur la hiérarchie des profondeurs des interfaces :

$$\begin{aligned} 0 \leq h_{1,D}(t, x, \omega) \leq h_D(t, x, \omega) \leq h_2(x), \quad & \text{dans } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \times \Omega, \\ 0 \leq h_{1,0}(x, \omega) \leq h_0(x, \omega) \leq h_2(x), \quad & x \in \mathcal{D}, \quad \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il a été montré dans [24] qu'une solution peut être représentée en terme de fonctions polynomiales de ξ_i comme suit :

$$\begin{aligned} h &= a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \dots \\ h_1 &= b_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} b_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} b_{i_1} b_{i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $\Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ désigne le chaos polynomial d'ordre n pour les variables $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ [83]. Ces polynômes sont généralement des polynômes multidimensionnels générés par des produits de polynômes d'Hermite fonction des variables aléatoires indépendantes qui sont des fonctions mesurables par rapport à la mesure de Wiener. En particulier, quand les variables indépendantes sont identifiées comme étant le vecteur gaussien $\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$, on retrouve l'expression familière de l'espérance comme :

$$\mathbb{E}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} d\xi$$

où $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Pour simplifier la présentation, la somme (4.5) peut être ré-écrite comme suit :

$$\begin{aligned} h(t, x, \omega) &= \sum_{i_1=1}^{\infty} h_i(t, x) \psi_i(\xi), \\ h_1(t, x, \omega) &= \sum_{i_1=1}^{\infty} h_{1,i}(t, x) \psi_i(\xi), \end{aligned} \quad (4.6)$$

où ψ_i désigne le chaos polynomial d'indice unique. Les polynômes $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ sont définis par la suite.

Il a été montré dans [24] que l'ensemble $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ forme une base complète dans l'espace des variables aléatoires. Ces polynômes sont orthogonaux dans le sens que

$$\mathbb{E}[\psi_i \psi_j] = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (4.7)$$

La solution $(h(t, x, \omega), h_1(t, x, \omega))$ est écrite suivant la décomposition (4.6), en une partie déterministe $(h(t, x), h_1(t, x))$ et une partie stochastique $\psi_i(\xi)$. Nous décomposons aussi la fonction stochastique $K(x, \omega)$ en une partie non perturbée et en une partie perturbée comme suit

$$K(x, \omega) = \bar{K}(x) + \sigma \xi, \quad (4.8)$$

où ξ est une variable gaussienne à moyenne nulle et de variance unitaire, et $\bar{K}(x)$ est la valeur moyenne de la conductivité hydraulique.

4.3 L'étape de décomposition spectrale

Puisque le développement (4.6) nécessite une sommation infinie (et donc intraitable pour le codage informatique), une procédure de troncature est souhaitable. Par conséquent, nous considérons un nombre fini d'indices dans le développement du chaos représentant l'incertitude. Ainsi, la présentation (4.6) est tronquée en conservant l'ordre des polynômes $\leq p$, avec p une valeur prescrite

$$\begin{aligned} h(t, x, \omega) &= \sum_{i_1=1}^P h_i(t, x) \psi_i(\xi), \\ h_1(t, x, \omega) &= \sum_{i_1=1}^P h_{1,i}(t, x) \psi_i(\xi), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $P + 1$ est le nombre total de chaos polynomial d'ordre $\leq p$. Pour un espace dont la dimension stochastique est égal à n ,

$$P = \frac{(p+n)!}{p!n!} + 1.$$

Cependant, les grandes valeurs de P peuvent entraîner un coût de calcul élevé et peuvent limiter l'efficacité de la procédure globale.

Dans le cas où l'on prend $n = 1$, l'espérance par rapport à la mesure gaussienne (4.6) se réduit à

$$\mathbb{E}[F(\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi. \quad (4.10)$$

Les polynômes ψ_i sont alors générés en utilisant la formule de récurrence

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= 1, \\ \psi_1(\xi) &= \xi, \\ \psi_{i+1}(\xi) &= \xi \psi_i(\xi) - i \psi_{i-1}(\xi), \quad i = 1, 2, \dots, P-1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

À partir de cette formule de récurrence, on peut calculer, $\forall i, j = 1, \dots, P$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_i(\xi)] &= \delta_{i,0}, \\ \mathbb{E}[\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= i! \delta_{i,j}, \\ \mathbb{E}[\xi\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= (i+1)! \delta_{i,j-1} i! \delta_{i,j+1}, \\ \mathbb{E}[\xi^2\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= (i+2)! \delta_{i,j-2} + i!(2i+1) \delta_{i,j} + i! \delta_{i,j+2}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. Par conséquent, en développant la solution $(h(t, x, \omega), h_1(t, x, \omega))$, la conductivité hydraulique $K(x, \omega)$, les termes source $(Q_f(t, x, \omega), Q_s(t, x, \omega))$ et les conditions initiales $(h_0(x, \omega), h_{1,0}(x, \omega))$ selon les polynômes $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,P}$, on obtient

$$\begin{aligned}h(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_i(t, x) \psi_i(\xi), & h_1(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_{1,i}(t, x) \psi_i(\xi), \\ Q_f(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P Q_{f,i}(t, x) \psi_i(\xi), & Q_s(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P Q_{s,i}(t, x) \psi_i(\xi), \\ K(x, \omega) &= \sum_{i=1}^P K_i(x) \psi_i(\xi), \\ h_0(x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_{0,i}(x) \psi_i(\xi), & h_{1,0}(x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_{1,0,i}(x) \psi_i(\xi), \\ h_D(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_{D,i}(t, x) \psi_i(\xi), & h_{1,D}(t, x, \omega) &= \sum_{i=1}^P h_{1,D,i}(t, x) \psi_i(\xi),\end{aligned}\quad (4.13)$$

le problème (4.1) s'écrit alors

$$\begin{aligned}& \phi \sum_{i=1}^P \partial_t h_i(t, x) \psi_i - \alpha \operatorname{div} \left[h_2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P K_i(x) \nabla h_j(t, x) \psi_i \psi_j \right] \\ & + \alpha \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_k(t, x) \psi_i \psi_j \psi_k \right] - \delta \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \nabla h_i \psi_i \right] \\ & - \operatorname{div} \left[h_2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P k_i(x) \nabla h_{1,j}(t, x) \psi_i \psi_j \right] + \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_{1,k}(t, x) \psi_i \psi_j \psi_k \right] \\ & = - \sum_{i=1}^P Q_{s,i} \psi_i,\end{aligned}\quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned}
& \phi \sum_{i=1}^P \partial_t h_{1,i}(t, x) \psi_i - \operatorname{div} \left[h_2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P K_i(x) \nabla h_{1,j}(t, x) \psi_i \psi_j \right] \\
& + \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P K_i(x) h_{1,j}(t, x) \nabla h_{1,k}(t, x) \psi_i \psi_j \psi_k \right] - \delta \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \nabla h_{1,i} \psi_i \right] \\
& - \operatorname{div} \left[h_2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P k_i(x) \nabla h_j(t, x) \psi_i \psi_j \right] + \alpha \operatorname{div} \left[\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_k(t, x) \psi_i \psi_j \psi_k \right] \\
& = - \sum_{i=1}^P (Q_{s,i} + Q_{f,i}) \psi_i,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

On munit le système (4.14)-(4.15) des conditions initiales et aux bords suivantes

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^P h_i(t, x) \psi_i(\xi) &= \sum_{i=1}^P h_{D,i}(t, x) \psi_i(\xi), \text{ in } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \times \Omega, \\
\sum_{i=1}^P h_{1,i}(t, x) \psi_i(\xi) &= \sum_{i=1}^P h_{1,D,i}(t, x) \psi_i(\xi), \text{ in } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \times \Omega, \\
\sum_{i=1}^P h_i(0, x) \psi_i(\xi) &= \sum_{i=1}^P h_{0,i}(x) \psi_i(\xi), \text{ in } \mathcal{D} \times \Omega, \\
\sum_{i=1}^P h_{1,i}(0, x) \psi_i(\xi) &= \sum_{i=1}^P h_{1,0,i}(x) \psi_i(\xi), \text{ in } \mathcal{D} \times \Omega.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

On multiplie (4.14) et (4.15) par ψ_k . En prenant les espérances des expressions ainsi obtenues (C.2) et en utilisant la relation d'orthogonalité (4.7), le problème devient :

Pour tout $k = 0, 1, \dots, P$, on résout le système suivant

$$\begin{aligned}
& \phi \partial_t h_k(t, x) - \alpha \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div} [h_2(x) K_i(x) \nabla h_j(t, x)] \\
& - \delta \operatorname{div} [\nabla h_k] + \alpha \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div} [K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_l(t, x)] \\
& - \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div} [h_2(x) K_i(x) \nabla h_{1,j}(t, x)] \\
& + \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div} [K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_{1,l}(t, x)] = -Q_{s,k}(t, x),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \phi \partial_t h_{1,k}(t, x) - \alpha \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div}[h_2(x) K_i(x) \nabla h_{1,j}(t, x)] \\
 & - \delta \operatorname{div}[\nabla h_{1,k}] + \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div}[K_i(x) h_{1,j}(t, x) \nabla h_{1,l}(t, x)] \\
 & - \alpha \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div}[h_2(x) K_i(x) \nabla h_j(t, x)] \\
 & + \alpha \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} \operatorname{div}[K_i(x) h_j(t, x) \nabla h_l(t, x)] \\
 & = -Q_{s,k}(t, x) - Q_{f,k}(t, x),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec les conditions initiales et aux bords suivantes

$$\begin{aligned}
 h_k(t, x) &= h_{D,k}(t, x), \quad x \in \partial \mathcal{D}, \quad t \in [0, T], \\
 h_{1,k}(t, x) &= h_{1,D,k}(t, x), \quad x \in \partial \mathcal{D}, \quad t \in [0, T], \\
 h_k(0, x) &= h_{0,k}(x), \quad x \in \mathcal{D}, \\
 h_{1,k}(0, x) &= h_{1,0,k}(x), \quad x \in \mathcal{D}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Nous remarquons que, grâce à la décomposition spectrale, le problème stochastique (4.1) se ramène à une séquence finie de systèmes couplés déterministes d'équations paraboliques.

4.4 La méthode des éléments finis

Ré-écrivons le système (4.17)-(4.18) comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \phi \partial_t h_k(t, x) - \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(\alpha h_2 D_{i,k} \nabla h_i) + \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(\alpha C_{i,k} \nabla h_i) - \delta \operatorname{div}(\nabla h_k) \\
 & - \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(h_2 D_{i,k} \nabla h_{1,i}) + \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(C_{i,k} \nabla h_{1,i}) = Q_{s,k},
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi \partial_t h_{1,k}(t, x) - \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(\alpha h_2 D_{i,k} \nabla h_{1,i}) + \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(T_{i,k} \nabla h_{1,i}) - \delta \operatorname{div}(\nabla h_{1,k}) \\
 & - \sum_{i=0}^P \operatorname{div} \alpha (h_2 D_{i,k} \nabla h_i) + \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(\alpha C_{i,k} \nabla h_i) = -Q_{s,k} - Q_{f,k},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

où on a introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} D_{i,k}(x) &= \sum_{j=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} K_j(x), \\ C_{i,k}(t, x) &= \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} K_j(x) h_l(t, x), \\ C_{i,k}(t, x) &= \sum_{j=0}^P \sum_{l=0}^P \frac{\mathbb{E}[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l]}{\mathbb{E}[\psi_k^2]} K_j(x) h_{1,l}(t, x), \end{aligned}$$

Le point de départ de l'utilisation de la méthode des éléments finis est la formulation faible des équations semi-discrètes correspondantes à (4.20)-(4.21). En supposant que $(h_k, h_{1,k})$ appartienne à l'espace suivant

$$(h_k, h_{1,k}) \in W(0, T)^2.$$

La solution $(h_k, h_{1,k})$ de (4.20) satisfait, $\forall W \in W(0, T)$, la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \partial_t h_k \cdot W \, dx + \int_{\Omega} \alpha h_2 \sum_{i=0}^P (D_{i,k} \nabla h_i \cdot \nabla W) \, dx - \int_{\Omega} \alpha \sum_{i=0}^P (C_{i,k} \nabla h_i \cdot \nabla W) + \int_{\Omega} \delta \nabla h_k \cdot \nabla W \, dx \\ & + \int_{\Omega} h_2 \sum_{i=0}^P (D_{i,k} \nabla h_{1,i} \cdot \nabla W) - \int_{\Omega} h_2 \sum_{i=0}^P (C_{i,k} \nabla h_{1,i} \cdot \nabla W) = - \int_{\Omega} Q_{s,k} W \, dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$(4.23)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \partial_t h_{1,k} \cdot W \, dx + \int_{\Omega} h_2 \sum_{i=0}^P (D_{i,k} \nabla h_{1,i} \cdot \nabla W) \, dx - \int_{\Omega} \alpha \sum_{i=0}^P (T_{i,k} \nabla h_{1,i} \cdot \nabla W) + \int_{\Omega} \delta \nabla h_{1,k} \cdot \nabla W \, dx \\ & + \int_{\Omega} \alpha h_2 \sum_{i=0}^P (D_{i,k} \nabla h_i \cdot \nabla W) - \int_{\Omega} \alpha h_2 \sum_{i=0}^P (C_{i,k} \nabla h_i \cdot \nabla W) = - \int_{\Omega} (Q_{s,k} + Q_{f,k}) W \, dx. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour la discrétisation du domaine spatial $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$, on procède comme suit : Soit $l_0 > 0$, on pose l un paramètre de discrétisation spatiale tel que $0 < l < l_0$. Nous génerons une partition quasi uniforme $\Omega_h \subset \Omega$ de triangles $\mathcal{T}_j$ qui satisfont aux conditions suivantes :

- $\bar{\mathcal{D}} = \bigcup_{j=1}^{N_e} \mathcal{T}_j$, où N_e est le nombre d'éléments de $\mathcal{T}_l$,

- si $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ sont deux éléments différents de $\mathcal{T}_l$, alors

$$\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \begin{cases} P_{ij} & \text{Un point de maille ou} \\ \Gamma_{ij} & \text{Un côté commun, ou} \\ \emptyset & \text{ensemble vide.} \end{cases}$$

Nous introduisons l'espace approximatif

$$\mathcal{V}_{k,l} := \{v_{k,l} \in H_0^1(\Omega), \forall k \in \mathcal{T}_l, v_{k,l}/k \in P_1(k)\},$$

où $P_1(k)$ est l'espace des polynômes définis sur $\mathcal{T}_l$.

Soit M le nombre de points du maillage $\mathcal{D}_h$, alors n'importe quel élément $v_{k,l}$ de $\mathcal{V}_{k,l}$ peut s'exprimer comme

$$v_{k,l} = \sum_{i=1}^M v_{k,i} \zeta_i(x),$$

où $v_{k,i} = v_k(x_i)$, x_i est le i^{eme} point de maillage, $\{\zeta_i\}_{i=1}^M$ sont les ensembles de fonctions nodales de $\mathcal{V}_{k,l}$ caractérisés par la propriété $\zeta_j(x_i) = \delta_{j,i}$ avec $\delta_{j,i}$ est le symbole de Kronecker. Par conséquent, l'approximation de la solution par la méthode des éléments finis P_1 -Lagrange s'écrit donc

Trouver $(h_{k,l}^{(n)}, h_{1,k,l}^{(n)}) \in \mathcal{V}_{k,l} \times \mathcal{V}_{k,l}$ tels que

$$\begin{aligned} h_{k,l}^{(n)} &= \sum_{j=1}^M H_{k,l}^{(n)} v_{k,j} \\ h_{1,k,l}^{(n)} &= \sum_{j=1}^M H_{1,k,l}^{(n)} v_{k,j}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

où $(H_{k,l}^{(n)}, H_{1,k,l}^{(n)})$ sont les valeurs nodales correspondantes de $(h_{k,l}^{(n)}, h_{1,k,l}^{(n)})$.

Ce système (4.23) - (4.24) peut être écrit sous forme de matrice comme :

$$\begin{aligned} \phi M_k \left[\frac{dH_k}{dt} \right] &= \alpha S_k[H_k] + \alpha G_k[H_k] + \delta M_k[H_k] + S_k[H_{1,k}] + G_k[H_{1,k}] - M_k[Q_{s,k}], \\ \phi M_k \left[\frac{dH_{1,k}}{dt} \right] &= S_k[H_{1,k}] + L_k[H_{1,k}] + \delta M_k[H_{1,k}] + \alpha S_k[H_k] + G_k[H_{1,k}] - M_k[Q_{s,k}] \\ &\quad - M_k[Q_{f,k}], \end{aligned} \tag{4.26}$$

où les éléments des matrices M_k , S_k , G_k et L_k sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} m_{k,ij} &= \int_{\mathcal{D}} v_{k,i} v_{k,j} dx, \\ s_{k,ij} &= - \int_{\mathcal{D}} D_{ik} \nabla v_{k,j} \cdot \nabla v_{k,i} dx \\ g_{k,ij} &= - \int_{\mathcal{D}} C_{ik} \nabla v_{k,j} \cdot \nabla v_{k,i} dx, \\ l_{k,ij} &= - \int_{\mathcal{D}} T_{ik} \nabla v_{k,j} \cdot \nabla v_{k,i} dx. \end{aligned}$$

Les vecteurs à M-valeurs sont définis par $[H_k] = [H_{k,1}, \dots, H_{k,M}]^T$, $[H_{1,k}] = [H_{1,k,1}, \dots, H_{1,k,M}]^T$, $[\frac{dH_k}{dt}] = [\frac{dH_{k,1}}{dt}, \dots, \frac{dH_{k,M}}{dt}]^T$, $[\frac{dH_{1,k}}{dt}] = [\frac{dH_{1,k,1}}{dt}, \dots, \frac{dH_{1,k,M}}{dt}]^T$, $[Q_{s,k}] = [Q_{s,k,1}, \dots, Q_{s,k,M}]^T$ et $[Q_{f,k}] = [Q_{f,k,1}, \dots, Q_{f,k,M}]^T$.

Pour l'intégration temporelle du système (4.20)-(4.21), nous utilisons un schéma Runge-Kutta explicite, la procédure de projection est mise en œuvre pour découpler $h(t, x, \omega)$ et $h_1(t, x, \omega)$. Par conséquent, nous pouvons formuler la discrétisation comme suit :

La solution $(h_k^{n+1}, h_{1,k}^{n+1})$ est une approximation de $(h(t_{n+1}), h_1(t_{n+1}))$ à l'instant t_{n+1} . Elle est calculée selon la procédure suivante :

1. On pose

$$U_{k,l}^{(0)} = h_{k,l}^{(n)},$$

et

$$\begin{aligned} F_{k,l}^{(0)} &= \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla U_{i,l}^{(0)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik} \nabla U_{i,l}^{(0)}) + \delta \text{div}(\nabla U_{k,l}^{(0)}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik}^{(0)} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - Q_{s,k,l}, \end{aligned}$$

on calcule alors

$$U_{k,l}^{(1)} = U_{k,l}^{(0)} + dt F_{k,l}^{(0)}.$$

2. Pour l'étape suivante, on pose

$$\begin{aligned} F_{k,l}^{(1)} &= \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla U_{i,l}^{(1)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik} \nabla U_{i,l}^{(1)}) + \delta \text{div}(\nabla U_{k,l}^{(1)}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik}^{(1)} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - Q_{s,k,l}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de calculer U à l'étape intermédiaire

$$U_{k,l}^{(2)} = \frac{3}{4}U_{k,l}^{(0)} + \frac{1}{4}U_{k,l}^{(1)} + \frac{1}{4}dtF_{k,l}^{(1)}.$$

3. De même, on pose

$$\begin{aligned} F_{k,l}^{(2)} = & \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla U_{i,l}^{(2)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik} \nabla U_{i,l}^{(2)}) + \delta \text{div}(\nabla U_{k,l}^{(2)}) \\ & + \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik}^{(2)} \nabla h_{1,i,k}^{(n)}) - Q_{s,k,l}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de calculer

$$U_{k,l}^{(3)} = \frac{1}{3}U_{k,l}^{(0)} + \frac{2}{3}U_{k,l}^{(2)} + \frac{2}{3}dtF_{k,l}^{(2)}.$$

4. On procède de la même façon pour calculer la hauteur h_1 , c.à.d on pose

$$V_{k,l}^{(0)} = h_{1,k,l}^{(n)},$$

puis on calcule

$$\begin{aligned} I_{k,l}^{(0)} = & \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla V_{i,l}^{(0)}) - \sum_{i=0}^P \text{div}(T_{ik} \nabla V_{i,l}^{(0)}) + \delta \text{div}(\nabla V_{k,l}^{(0)}) \\ & + \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik}^{(0)} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - Q_{s,k,l} - Q_{f,k,l}, \end{aligned}$$

et

$$V_{k,l}^{(1)} = V_{k,l}^{(0)} + dtI_{k,l}^{(0)}.$$

5. Pour l'étape suivante, on pose

$$\begin{aligned} I_{k,l}^{(1)} = & \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla V_{i,l}^{(1)}) - \sum_{i=0}^P \text{div}(T_{ik} \nabla V_{i,l}^{(1)}) + \delta \text{div}(\nabla V_{k,l}^{(1)}) \\ & + \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \text{div}(C_{ik}^{(0)} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - Q_{s,k,l} - Q_{f,k,l}, \end{aligned}$$

et on calcule

$$V_{k,l}^{(2)} = \frac{3}{4}V_{k,l}^{(0)} + \frac{1}{4}V_{k,l}^{(1)} + \frac{1}{4}dtI_{k,l}^{(1)}.$$

6. Finalement, on pose

$$\begin{aligned} I_{k,l}^{(2)} = & \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(h_2 D_{ik} \nabla V_{i,l}^{(2)}) - \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(T_{ik} \nabla V_{i,l}^{(2)}) + \delta \operatorname{div}(\nabla V_{k,l}^{(2)}) \\ & + \alpha \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(h_2 D_{ik} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - \alpha \sum_{i=0}^P \operatorname{div}(C_{ik}^{(0)} \nabla h_{i,k}^{(n+1)}) - Q_{s,k,l} - Q_{f,k,l}, \end{aligned}$$

ce qui entraine la valeur finale

$$V_{k,l}^{(3)} = \frac{1}{3} V_{k,l}^{(0)} + \frac{2}{3} V_{k,l}^{(2)} + \frac{2}{3} dt I_{k,l}^{(2)}.$$

4.5 Résultats numériques

Cette section est consacrée à l'illustration numérique de l'approche stochastique décrite ci-dessus.

L'aquifère est à nouveau figurée par un parallélépipède $(x, y) \in [-50, 50] \times [-20, 20]$, $z \in [-20, 0]$. Les paramètres physiques ont été choisis en accord avec [11] et nous rappelons que la densité du fluide est 1 g/ml pour l'eau douce et 1.025 g/ml pour l'eau salée. Dans les simulations suivantes, nous résolvons numériquement les problèmes bidimensionnels complets. Pour toutes les expériences, nous avons considéré que la conductivité hydraulique est constante sur le domaine complet de l'aquifère.

Dans la première, deuxième et troisième expérience, l'aquifère est suivi pendant une durée 2 jours, et le pas de temps est fixé à $dt = 0.2$.

4.5.1 Expérience 1

Dans la première expérience, nous avons pris pour la conductivité hydraulique dans le problème déterministe égale à la valeur moyenne de celle prise pour le modèle stochastique, et plus précisément égale à $42m/j$. Par ailleurs nous avons pris $\sigma = 0.4$. Dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5, nous avons comparé les résultats des hauteurs dans le cas déterministe h et h_1 aux espérances de h et h_1 dans le cas stochastique obtenues en utilisant $P = 1$, $P = 2$, $P = 4$ et $P = 5$. Ces résultats correspondent aux valeurs des hauteurs en différents points. Pour la simplification d'écriture, on désigne par H la hauteur h_1 .

Ces résultats indiquent qu'il n'est pas nécessaire de prendre $P > 2$.

4.4.5 Résultats numériques

Table 4.1 – Les hauteurs obtenues dans le cas déterministe de l'expérience 1.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$H(t_{final})$	9.71763	9.71946	9.72474	9.73277	9.74236	9.75219	9.76117	9.76852	9.77386	9.77706
$h(t_{final})$	4.80373	4.73035	4.51412	4.16909	3.72839	3.23951	2.75399	2.32361	1.99221	1.78756

Table 4.2 – Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 1$.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71747	9.71948	9.72511	9.73343	9.74311	9.75285	9.76165	9.76882	9.77402	9.77715
$E(h)$	4.83914	4.74984	4.50024	4.12072	3.65542	3.15679	2.67485	2.25687	1.94184	1.75173

Table 4.3 – Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 2$.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71747	9.71949	9.72511	9.73343	9.74311	9.75285	9.76165	9.76882	9.77402	9.77715
$E(h)$	4.83903	4.74974	4.50015	4.12065	3.65539	3.15679	2.67488	2.25693	1.94193	1.75183

Table 4.4 – Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 4$.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71747	9.71949	9.72511	9.73343	9.74311	9.75285	9.76165	9.76882	9.77402	9.77715
$E(h)$	4.83903	4.74974	4.50015	4.12065	3.65539	3.15679	2.67488	2.25693	1.94193	1.75183

4.5.2 Expérience 2

Dans la deuxième expérience, nous avons fixé $P = 2$ et nous avons considéré que $K_{det} = \bar{K} = 42m/j$. Dans les tableaux 4.6 et 4.7 nous avons présenté les espérances de h et h_1 calculées avec le modèle stochastique en utilisant $\delta = 0.01$.

Sur la figure 4.4 nous avons tracé l'espérance de h et h_1 , avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$. Dans les figures Fig. 4.5 et Fig. 4.6, nous avons comparé la variance obtenue en utilisant $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$.

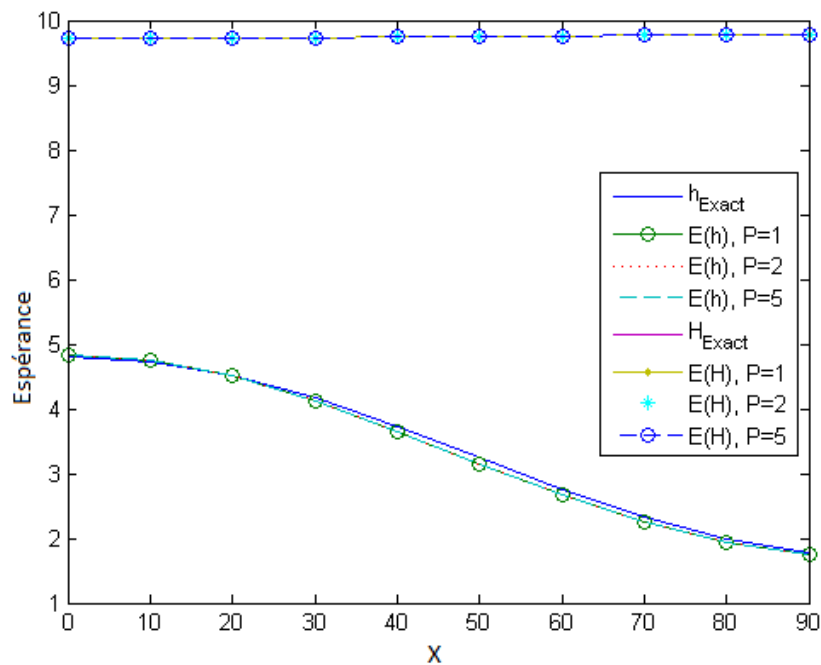


Figure 4.1 – Graphe représentant les hauteurs dans le cas déterministe (h_{exact}, H_{exact}) et les espérances de ces hauteurs dans le cas stochastiques pour $P = 1, P = 2$ et $P = 5$.

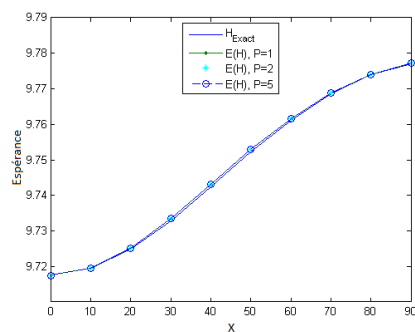


Figure 4.2 – Zoom $E(H)$

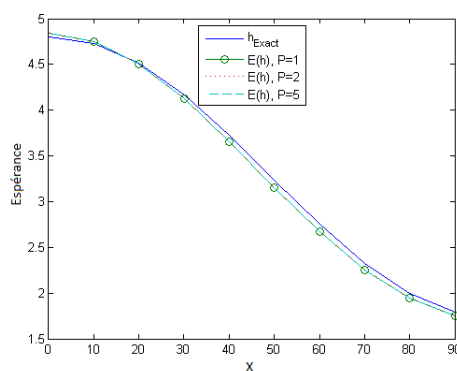


Figure 4.3 – Zoom $E(h)$

4.4.5 Résultats numériques

Table 4.5 – Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 1 avec $P = 5$.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71747	9.71949	9.72511	9.73343	9.74311	9.75285	9.76165	9.76882	9.77402	9.77715
$E(h)$	4.83903	4.74974	4.50015	4.12065	3.65539	3.15679	2.67488	2.25693	1.94193	1.75183

Table 4.6 – Les hauteurs obtenues dans le cas déterministe de l'expérience 2.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71763	9.71946	9.72474	9.73277	9.74236	9.75219	9.76117	9.76852	9.77386	9.77706
$E(h)$	4.80373	4.73035	4.51412	4.16909	3.72839	3.23951	2.75399	2.32361	1.99221	1.78756

Ces résultats indiquent que si nous diminuons la valeur de δ de la donnée stochastiques, nous obtenons une solution plus proche du résultats déterministe et moins de perturbation stochastique.

Table 4.7 – Les espérances de h et H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 2 avec $\sigma = 0.01$.

	(0, 5)	(10, 5)	(20, 5)	(30, 5)	(40, 5)	(50, 5)	(60, 5)	(70, 5)	(80, 5)	(90, 5)
$E(H)$	9.71747	9.71949	9.72512	9.73343	9.74311	9.75285	9.76165	9.76882	9.77402	9.77715
$E(h)$	4.83903	4.74974	4.50016	4.12065	3.65539	3.15679	2.67488	2.25693	1.94193	1.75183

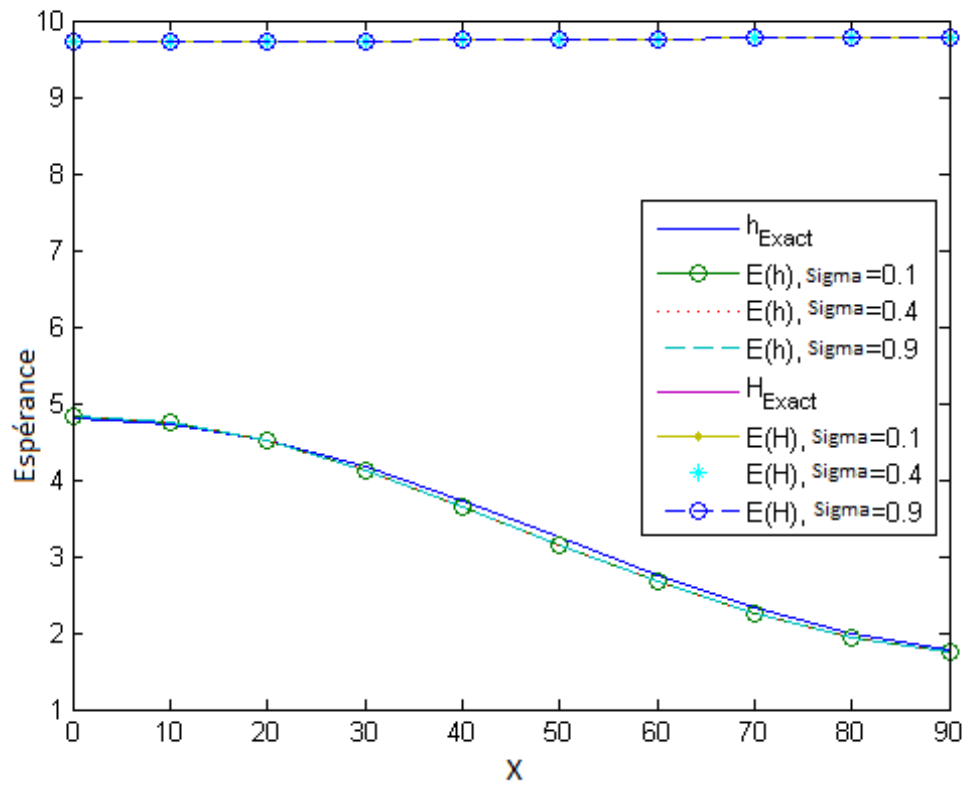


Figure 4.4 – Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$.

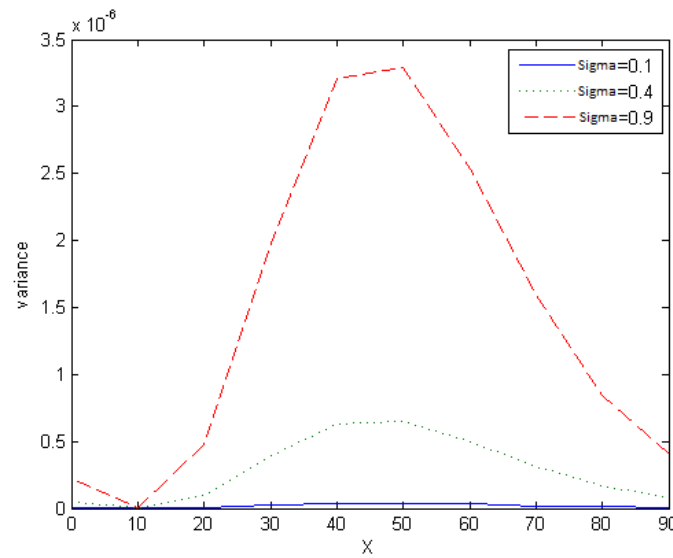


Figure 4.5 – Graphe représentant la variance de h obtenue dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$.

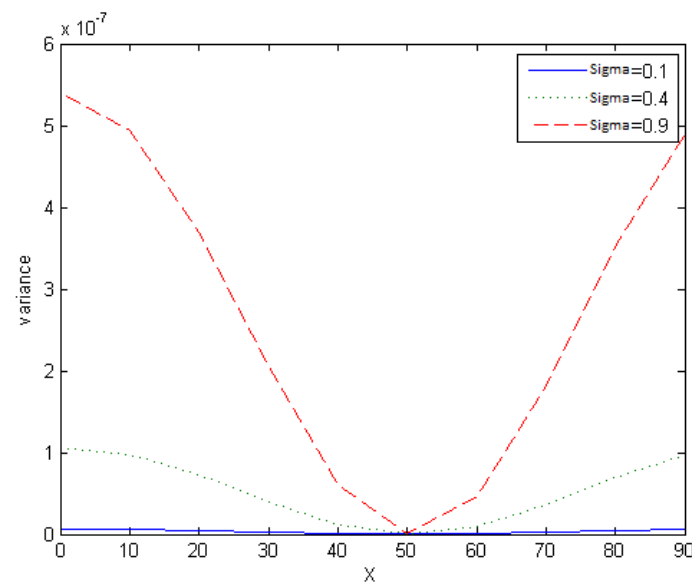


Figure 4.6 – Graphe représentant la variance de H obtenue dans le cas stochastique de l'expérience 2, avec $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.4$ et $\sigma = 0.9$.

4.5.3 Expérience 3

Dans la troisième expérience, nous avons considéré que la conductivité hydraulique dans le problème déterministe est égale à $42m/j$. À nouveau, nous avons fixé $P = 2$.

Dans la figure 4.7, nous avons comparé les espérances de h et h_1 du modèle stochastique dans deux cas, dans le premier cas, nous avons pris ($\bar{K} = 42m/j, \sigma = 0.9$), et dans le second $\bar{K} = 43m/j$ et $\sigma = 0.1$.

4.5.4 Expérience 4

Dans la quatrième expérience, nous avons étudié l'efficacité de la méthode avec la condition des marées. Le pas de temps $dt = 0.1$ et le temps final est 1 jour. Nous prenons $P = 2$ et $K_{det} = \bar{K} = 42m/j$.

Dans la figure 4.10, nous avons tracé la moyenne de h et de h_1 , avec $\sigma = 0.5$ et $\sigma = 0.9$. Ces résultats montrent l'efficacité de notre méthode même en présence de l'effet des marées, et ces résultats indiquent à nouveau que plus la valeur de σ est petite plus la solution est proche de la solution déterministe.

Conclusion générale

Ces expériences numériques montrent, que compte tenu du caractère naturel diffusif du problème, l'approche stochastique ne fait qu'augmenter la diffusion intrinsèque au problème et de manière non significative.

Cette conclusion soulève donc le problème de la pertinence de l'approche stochastique pour l'étude du problème d'intrusion saline.

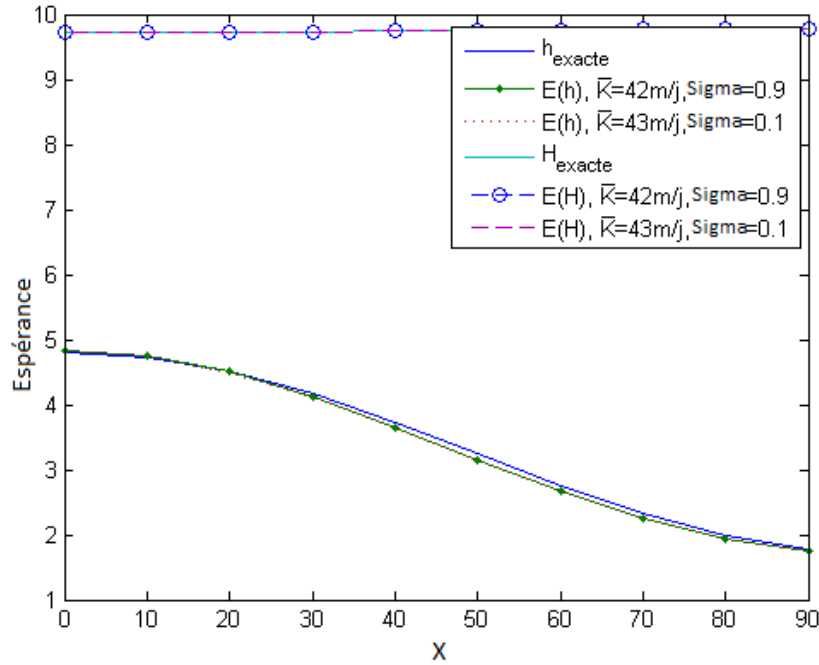


Figure 4.7 – Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues pour l'expérience 3, dans les deux cas stochastiques : cas i ($\bar{K} = 42m/j, \sigma = 0.9$) et cas ii ($\bar{K} = 43m/j, \sigma = 0.1$).

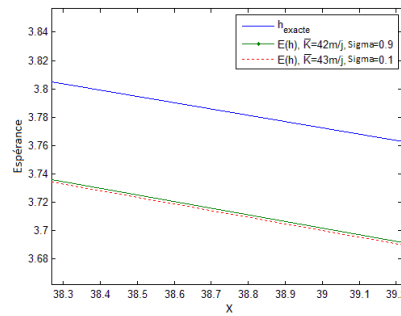


Figure 4.8 – Zoom $E(h)$

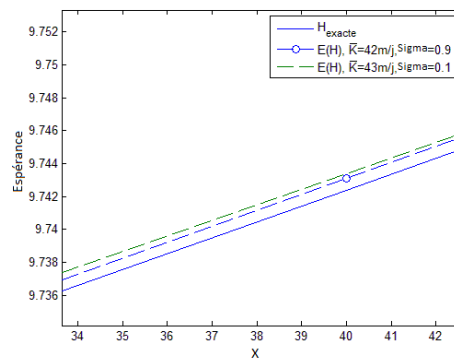


Figure 4.9 – Zoom $E(H)$

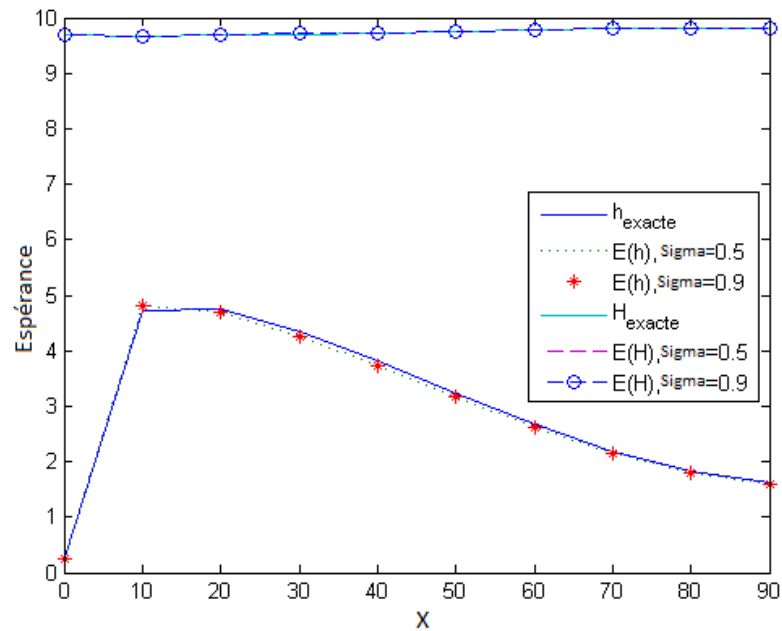


Figure 4.10 – Graphe représentant les espérances de h et de H obtenues pour l'expérience 4 dans le cas stochastique avec des conditions de marées, pour $\sigma = 0.5$ et $\sigma = 0.9$.

Bibliographie

- [1] P. ACKERER, A. YOUNES, *Efficient approximations for the the simulation of density driven flow in porous media*, Adv. Water Res., Vol. 31, 15–27, 2008.
- [2] ADLER, R.J., TAYLOR, J.E., *Random Fields and Geometry* . Birkhäuser, Basel (2005).
- [3] G. ALDUCIN, J. ESQUIVEL-AVILA, L. REYES-AVILA, *Steady filtration problems with seawater intrusion : Variational analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 151, pp. 13-25, 1998.
- [4] M. ALFARO, P. ALIFRANGIS, *Convergence of a mass conserving Allen-Cahn equation whose Lagrange multiplier is nonlocal and local*, Interfaces Free Bound., to appear.
- [5] M. ALFARO, D. HILHORST, M. HIROSHI, *Optimal interface width for the Allen-Cahn equation*, RIMS Kokyuroku, 1416, 148–160, 2005.
- [6] J. ALKHAYAL, S. ISSA, M. JAZAR, R. MONNEAU, *Existence result for degenerate cross-diffusion system with application to seawater intrusion*, <https://arxiv.org/pdf/1408.3925.pdf>
- [7] H. W. ALT, C. J. VAN DUIJN , *A stationary flow of fresh and salt groundwater in coastal aquifer*, Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, Vol. 14 No. 8 pp. 625-656, 1990.
- [8] H. W. ALT, C. J. VAN DUIJN, *A free boundary problem involving a cusp. Part I : global analysis* , European Journal of Appl. Math. 4, 39-63, 1993.
- [9] C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES, G. A. POZZI, *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : Existence and uniqueness theorem*, Ann. Mat. Pura. Appl., Vol. 4, pp. 1-82, 1973.
- [10] C. BAIOCCHI, *Sur un problème à frontière libre tradusiant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, Vol. 273, pp. 1215-1217, 1971.
- [11] J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, 1972.

- [12] J. BEAR, A.H.D. CHENG, S. SOREK, D. OUAZAR, I. HERRERA, *Seawater intrusion in coastal aquifers : Concepts, Methods and Practices*, Kluwer Academic Pub, 1999.
- [13] J. BEAR, J. KAPULAR, *A numerical solution for the movement of an interface in a layered coastal aquifer*, Journal of Hydrology, Vol. 50, pp. 273-298, 1981.
- [14] J. BEAR, A. VERRUIJT, *Modelling groundwater flow and pollution*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987. Vol. 1, 311–341, 1983.
- [15] S.J. BENSON, J. MORÉ, *A limited Memory variable-metric Algorithm for Bound-constrained Minimization*, Technical Report ANL/MSC-P909-O901, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, 2001.
- [16] A. BENSOUSSAN, J. L. LION, G. PAPANICOULOU, *Asymptotic analysis for periodic structure*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [17] C. H. BERESTYCKI, A. BONNET, C. J. VAN DUIJN, *Flots stationnaires d'eau sale et d'eau douce en milieux poreux dans des couches aquifères*, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I 317, 255-260.
- [18] F. BOYER, P. FABRIE, *Élément d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulement de fluides visqueux incompressible*, Mathématiques et Applications. Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [19] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupe de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Company Inc. New York, 1973.
- [20] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Edition Masson, Paris, 1983.
- [21] H. BREZIS, D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A 278, 711-714, 1984.
- [22] BYRD, RICHARD H. ; LU, PEI HUANG ; NOCEDAL, JORGE ; ZHU, CIYOU (1995), *A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 16 (5) : 1190-1208. doi :10.1137/0916069.
- [23] J. W. CAHN AND J. E. HILLIARD, *Free energy of non-uniform systems, I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys., 28, 258-267, 1958.
- [24] R.H. CAMERON, MARTIN, W.T., *The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals*. Ann. Math. 48, 385-392 (1947).
- [25] J. CARRERA, *State of the art of the inverse problem applied to the flow and solute transport problems*, in *Groundwater Flow Quality Modelling*, NATO ASI Ser., Ser. C, pp. 549-589, Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1998.

-
- [26] S. CHARMONMAN, *A solution of the pattern of fresh-water flow in an unconfined coastal aquifer*, Journal of Geophysical Research, Vol. 70, No. 12, 1965.
 - [27] C. CHOQUET, *Parabolic and degenerate parabolic models for pressure-driven transport problems*, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 20, 543–566, 2010.
 - [28] C. CHOQUET, M. M. DIÉDHIOU, C. ROSIER, *Derivation of a Sharp-Diffuse Interfaces Model for Seawater Intrusion in a Free Aquifer. Numerical Simulations*, SIAM J. Appl. Math. 76 (2016), no. 1, 138-158.
 - [29] C. CHOQUET, M. M. DIÉDHIOU, C. ROSIER, *Mathematical analysis of a sharp-diffuse interfaces model for seawater intrusion*, J. Differential Equations 259 (2015), no. 8, 3803-3824.
 - [30] C. CHOQUET, J. LI, C. ROSIER, *Global existence for seawater intrusion models : Comparison between sharp interface and sharp-diffuse interface approaches*, EJDE, Vol. 2015 (2015), No. 126, pp. 1-27.
 - [31] C. CHOQUET, J. LI, C. ROSIER, *Uniqueness for cross-diffusion systems issuing from seawater intrusion problems*, Elec. J. of Diff. Eq., Vol @017 (2017), No 256, pp. 1-22.
 - [32] C. CHOQUET, C. ROSIER, L. ROSIER, *Well posedness of general cross-diffusion systems*, in preparation.
 - [33] H. L. ESSAID, *A quasi-three dimensional finite difference model to simulate freshwater and salt water flow in layered coastal aquifer systems*, U.S. Geological survey water ressources investigations, Report 90-4130. Menlo Park, California, 1990.
 - [34] D. ESSELAOUI, Y. LOUKILI, A. BOURGEAT, *Perfection of the simulation of freshwater/saltwater interface motion*, Recent advances in problems of flow and transport in porous media, eds. J.M. Crolet and M.E. Hatri, pp. 117-129, Kluwer Academic Publishers, 1998.
 - [35] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, Vol. 19, American Mathematical Society
 - [36] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY, *Mesure theory and fine properties of functions*, studies Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.
 - [37] C. W. FETTER, *Position of saline water interface beneath oceanic islands*, Water Resour. Vol. 8, No. 5, 1972.
 - [38] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, *Analyse mathématiques de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques et Applications, Springer, Paris, 1996.
 - [39] GHANEM, R., *Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 158, 199-220 (1998).

CHAPITRE 4. BIBLIOGRAPHIE

- [40] T. R. GINN, J. H. GUSHMAN, *Inverse methods for subsurface flow : A critical review of stochastic techniques*, Stochastic Hydrol. Hydraul., Vol. 4, pp. 1-26, 1990.
- [41] R. E. GLOVER, *The pattern of freshwater flow in a coastal aquifer*, J. of Ground Water Resour., Vol. 64, pp. 439-475, 1959.
- [42] R.E. GRUNDY, C. J. VAN DUIJN, *The fresh-salt water interface in a semi-pervious aquifer*, Applicable Analysis 38, 69-96, 1990.
- [43] F. GUILLÉN-GONZÁLEZ, P. DAMÁZIO, M.A. ROJAS-MEDAR, *Approximation by an iterative method for regular solutions for incompressible fluids with mass diffusion*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 326(2007) 468-487.
- [44] P. S. HUYAKORN, P. F. ANDERSON, J. W. MERCER, H. O. WHITE, *Salt intrusion in aquifers : developement and testing of three dimensional finite element model*, Water. Resou. Res., Vol. 23, pp. 293-319, 1987.
- [45] M. JAZAR, R. MONNEAU, *Derivation of seawater intrusion models by formal asymptotics*, SIAM J. Appl. Math., 74 (2014), no.4, 1152-1173.
- [46] H. G. KEULEGAN, *An example report on model laws for density curent*, U.S. Natl. Bur. of Stand., Gaitherburg, Md, 1954.
- [47] L. KUIPER, *A comparaisn of several methodsfor inverse for the solution of the inverse problem in the two-dimensional steady state groundwater modeling*, Water Resours. Res., Vol. 22, No. 5, pp. 705-714, 1986.
- [48] O.P. LE MAÎTRE, KNIO, O.M., DEBUSSCHERE, B.J., NAJM, H.N., GHANEM, R.G., *A multigrid solver for two-dimensional stochastic diffusion equations . Comput. Methods Appl.Mech. Eng.* 192, 41-42 (2003).
- [49] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [50] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. 1, Dunod, 1968.
- [51] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and application*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [52] H.G. MATTHIES, BRENNER, C.E., BUCHER, C.G., SOARES, C.G., *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-Stochastic finite elements . Struct. Saf.* 19, 283-336 (1997).
- [53] D. MCCLAUGHLIN, L. R. TOWENLEY, *A reassessment of the groundwater inverse problem*, Water Resour. Res., Vol. 32, No. 5, pp. 1131-1161, 1996.
- [54] N. G. MEYERS, *An L_p -estimate for the gradient of solution of second order elliptic divergence equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. 17, pp. 189-206, 1963.

-
- [55] K. NAJIB, C. ROSIER, *On the global existence for a degenerate elliptic-parabolic seawater intrusion problem*, Math. Comput. Simulation, Vol. 81 Issue 1, 2282–2295, 2011.
 - [56] J. NOCEDAL AND S. J. WRIGHT, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1999.
 - [57] D. OUAZAR, I. ELMAHI, *Simulation of salt-freshwater interface in coastal aquifers using finite volume method on unstructured meshes*, Proceedings of finite volume for complex applications II, Ed. Hermes, pp. 525-532, Germany, 1999.
 - [58] L.A. PELETIER, C. J. VAN DUIJN, *A boundary layer problem in fresh-salt groundwater flow*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 45, 1-24, 1992.
 - [59] B.D. PHENIX, DINARO, J.L., TATANG, M.A., TESTER, J.W., HOWARD, J.B., MCRAE, G.J., *Incorporation of parametric uncertainty into complex kinetic mechanisms : application to hydrogen oxidation in supercritical water* . Combust. Flame. 112, 132-146 (1998).
 - [60] O. PIRONNEAU, F. HECHT, A. LE HYARIC, *FreeFem++ version 2.15-1*,
 - [61] J.F. POLO, F. J. R. RAMIS, *Simulation of salt water - Fresh water interface motion*, Water Resources Research, Vol. 19, No. 1, pp. 61-68, 1983.
 - [62] P. RANJAN, S. KAZAMA, M. SAWAMOTO, *Modeling of the dynamics of saltwater-freshwater interface in coastal aquifers*, URL.
 - [63] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
 - [64] J.C. ROBINSON, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
 - [65] S. SHMORAK, A. MURCADO, *Upconing of fresh water-sea water interface below pumping wells, field study*, Water Resour., Vol. 5, No. 6, 1969.
 - [66] N-Z SUN, *Inverse problems in groundwater modelling*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherland, 1994.
 - [67] N-Z SUN, W. G. YEH , *Coupled inverse problems in groundwater modelling 1. Sensivity analysis and parameter identification* , Water Resources Research, Vol. 26, pp. 2507-2525.
 - [68] M. E. TALIBI, M. H. TBER, *Existence of solutions for a degenerate seawater intrusion problem*, EJDE, Vol. 72, pp 1-14, 2005.
 - [69] M. H. TBER, *Analyse Mathématique et Simulation Numérique de Problèmes Directs et Inverses Issus d'un Modèle d'Intrusion Marine dans les Aquifères Côtiers*, Doctorat

CHAPITRE 4. BIBLIOGRAPHIE

- thesis, Université Cadi Ayyad , Faculté des Sciences Semlalia Marrakech, April 21, 2006.
- [70] M. H. TBER, M. E. TALIBI, *A finite element method for hydraulic conductivity identification in a seawater intrusion problem* , Computers & Geosciences 33 (2007) 860-874.
- [71] M. H. TBER, M. E. TALIBI, D. OUARAZA, *Identification of the Hydraulic Conductivities in a Saltwater Intrusion Problem*, J. Inv. Ill-Posed Problems 15 (2007), 1-/80/9320.
- [72] M. H. TBER, M. E. TALIBI, D. OUARAZA, *Parameters identification in a seawater intrusion model using adjoint sensitive method* , Math. Comput. Simul. .77 (2008), pp 301-312.
- [73] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, Revised Edition, Studies in mathematics and its applications vol. 2, North Holland Publishing Company-Amsterdam, New York, 1984.
- [74] R. TEMAM, *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Second Edition, Applied mathematical sciences vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [75] J. C. VAN DAM, P. C. SIKKEMA, *Approximate solution of the problem of the shape of the interface in a semi-confined aquifer*, Journal of Hydrology, Vol. 56, pp. 221-237, 1982.
- [76] P. VAN DER VEER, *Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation*, Journal of Hydrology, Vol. 34, pp. 1-11, 1977.
- [77] P. VAN DER VEER, *Analytical solution for steady interface flow in a coastal aquifer involving a phreatic surface with precipitation*, Journal of Hydrology, Vol. 35, pp. 271-278, 1977.
- [78] P. VAN DER VEER, *Exact solution for two dimensional groundwater flow problems involving a semi-previous boundary*, Journal of Hydrology, Vol. 37, pp. 159-168, 1978.
- [79] H. VAN DER VORST, *Bi-CGSTAB : a fast smoothly converging variant of Bi-CG for the somution of non-symmetric linear systemes*, SIAM J. Sci. Stat. Compt., Vol. 13, pp. 631-644, 1992.
- [80] C. J. VAN DUIJN, D. HILHORST, *On a Doubly Nonlinear Diffusion Equation in Hydrology*, Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl., Vol. 11, no. 3. pp. 305-333, (1987).
- [81] V. N. VAPPICHA, S. H. NAGARAJA, *An approximate solution for the transient interface in a coastal aquifer*, J. Hydrol., Vol. 31, pp. 161-173.
- [82] A. VERRUIJT, *A note on the Ghiber-Herzberg formula*, IASH bull., 13, pp. 43-45, 1968.
- [83] WIENER, N., *The homogeneous chaos*. Am. J. Math. 60, 897-936 (1938).

-
- [84] J. L. WILSON, A. DA COSTA, *finite Element Simulation of A Saltwater/Freshwater Interface With Indirect Toe Tracking*, Water Resour. Research, Vol. 18, No. 4, pp. 1069-1080, 1982.
- [85] W. G. YEH, *Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology : The inverse problem*, Water Resources Review, 1986, 2, pp 95-108.
- [86] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Part 1, Springer Verlag, 1986.

CHAPITRE 4. BIBLIOGRAPHIE

DÉRIVATION DU MODÈLE

La base de la modélisation est la loi de conservation de la masse écrite pour chaque espèce (eau douce et salée) associée à la loi de Darcy classique pour les milieux poreux. Les fluides et le sol sont considérés comme faiblement compressibles.

A.1 loi de Darcy

La loi de Darcy représente un cas particulier de l'intégration des lois générales de la mécanique, lorsque l'on fait l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide newtonien, incompressible, et qu'au cours de son écoulement dans le sol, les forces d'inertie sont négligeables. On montre que la vitesse q du flot est liée à la pression P à travers la loi de Darcy par

$$q = -\frac{k}{\mu}(\nabla P + \rho g \nabla z),$$

où ρ et μ sont respectivement la densité et la viscosité de fluide, k est la perméabilité du sol et g la constante d'accélération gravitationnelle. En introduisant la charge hydraulique ϕ définie par

$$\Phi = \frac{P}{\rho_0 g} + z - h_{ref}, \quad (A.1)$$

nous pouvons écrire l'équation précédente comme suit :

$$q = -K \nabla \Phi - \frac{k}{\mu}(\rho - \rho_0)g \nabla z, \quad K = \frac{k\rho_0 g}{\mu}.$$

Dans cette relation, la matrice K est la conductivité hydraulique qui exprime la capacité du sol à conduire le fluide. Nous avons noté ρ_0 la densité de référence du fluide. Dans (A.1), $Z = z - h_{ref}$ est l'élévation au-dessus d'un niveau de référence fixé dans l'aquifère, $h_{ref} < 0$.

A.2 loi de conservation de la masse du fluide

La loi de conservation de la masse du fluide s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho Q,$$

où ϕ est la porosité et Q est un terme de source générique. Donc le système d'équations pour notre problème 3D s'écrit alors dans le domaine d'eau douce et dans le domaine d'eau salée :

$$\frac{\partial(\rho_f \Phi_f)}{\partial t} + \nabla \cdot q_f = Q_f, \quad \text{dans } \Omega_f, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial(\rho_s \Phi_s)}{\partial t} + \nabla \cdot q_s = Q_s, \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (\text{A.3})$$

où $q_f = -K_f \nabla(\Phi_f)$ et $q_s = -K_s \nabla(\Phi_s)$.

A.3 Équation d'état pour la compressibilité du fluide

On suppose que la pression P et la densité ρ satisfont l'équation d'état :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_p dP, \quad (\text{A.4})$$

où $\alpha_p \geq 0$ est le coefficient de compressibilité du fluide résultant de la variation de la pression. En intégrant (A.4) on obtient

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha_p(P-P_0)},$$

où P_0 est la pression de référence et ρ_0 est la densité de référence du fluide. En supposant que $\alpha_p = 0$, nous récupérons le cas incompressible.

A.4 Équation d'état pour la compressibilité du sol

Modéliser la compressibilité du sol revient à modéliser les effets de compressibilité des roches. Les premières tentatives pour expliquer ce phénomène sont basées sur le modèle de la porosité dépendant de la profondeur $\phi = \phi(z)$.

Par exemple, dans le modèle de Athy on a

$$\phi(z) = \phi_0 e^{-Mz}, \quad (\phi_0, M) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Le problème dans ce modèle est que la variation de la porosité n'est en aucun cas due à la variation de la pression, alors qu'en réalité cette dernière joue un rôle fondamental. C'est pourquoi une approche physique beaucoup plus cohérente consiste à dériver une équation pour la porosité. Soit σ la contrainte totale dans le domaine ou milieux poreux et σ_s la contrainte liée aux squelettes ou pores alors nous avons :

$$\sigma = \phi P + (1 - \phi)\sigma_s,$$

où ϕP représente les effets dûs à la pression. D'après la théorie de Terzaghi la contrainte effective σ_e est définie par :

$$\sigma_e = (1 - \phi)(\sigma_s - P).$$

Il s'en suit que

$$\sigma_e + P = \sigma.$$

En supposant que la contrainte totale reste inchangée nous avons :

$$d\sigma_e = -dP.$$

Considérons maintenant que le volume V se déforme à cause de la compressibilité du sol. Si les grains de la roche poreuse sont incompressibles, la déformation est principalement produite par le réarrangement de l'assemblage des grains et le volume de la partie solide $V_s = (1 - \phi)V$ reste inchangée [7]. Nous avons donc

$$\frac{dV_s}{d\sigma_e} = -\frac{d\phi}{d\sigma_e}V + (1 - \phi)\frac{dV}{d\sigma_e} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{V}\frac{dV}{d\sigma_e} = \frac{1}{1 - \phi}\frac{d\phi}{dP}. \quad (\text{A.5})$$

En supposant que les variations de volume et le comportement élastique du sol sont faibles, on définit la compressibilité du sol par

$$\beta_P = -\frac{1}{V}\frac{dV}{d\sigma_e}.$$

Il en découle d'après l'équation (A.5) que :

$$\beta_P = \frac{1}{1 - \phi}\frac{d\phi}{dP} \Leftrightarrow \phi = 1 - (1 - \phi_0)e^{-\beta_P(P - P_0)}, \quad \phi_0 \in \mathbb{R}_+.$$

En résumé, l'approche consiste à supposer que la variation de porosité provient de la compressibilité du squelette du milieu due à la variation de la pression du fluide. Cela donne en utilisant les présentations différentielles :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial P}dP = (1 - \phi)\left(\frac{1}{(1 - \phi)}\frac{\partial \phi}{\partial P}\right) = (1 - \phi)\alpha_P dP,$$

d'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial P} = (1 - \phi)\beta_P. \quad (\text{A.6})$$

A.5 Hypothèses simplificatrices

Nous allons maintenant donner les hypothèses sur le fluide et sur le milieu, mais aussi sur le flux qui sont simplificatrices dans le contexte de l'intrusion saline dans un aquifère.

A.5.1 Hypothèses sur le fluide et sur le milieu

Nous supposons que les fluides (l'eau douce et l'eau salée) et le sol sont faiblement compressibles donc

$$\alpha_P \ll 1, \quad \beta_P \ll 1.$$

D'où $\rho \approx \rho_0$ et par suite

$$q = -K \nabla \Phi, \quad K = \frac{k \rho_0 g}{\mu}.$$

A.5.2 Hypothèse de Bear

Cette hypothèse, formulée par Bear, consiste à négliger les variation de densité dans la direction de l'écoulement, c'est à dire $\nabla \rho \cdot q \ll 1$. Donc

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = \rho Q \Leftrightarrow \rho \frac{\partial(\phi)}{\partial t} + \phi \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q + \underbrace{\nabla \rho \cdot q}_{=0} = \rho. \quad (\text{A.7})$$

Compte tenu de (A.4) et (A.6) dans la dernière équation, on obtient

$$\underbrace{\rho((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P)}_{=S} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q.$$

Puisque

$$q = -\frac{k \rho_0 g}{\mu} \nabla \phi \quad \text{et} \quad P = \rho_0 g \phi - \rho_0 g z_h,$$

on obtient au final après simplification ($\rho \neq 0$), une équation de conservation de masse couplée à l'équation de Darcy :

$$\underbrace{\rho_0 g((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P)}_{=S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla \phi) = Q, \quad (\text{A.8})$$

où $S_0 = \rho_0 g((1-\phi)\beta_P + \phi\alpha_P)$ est le coefficient d'emmagasinement en eau dans le sol.

À ce stade, dans chaque domaine nous avons une équation de conservation de masse simplifiée du type (A.8) spécifique au milieu. Dans le domaine de l'eau douce, nous avons :

$$S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f = Q_f, \quad (\text{A.9})$$

et dans le domaine de l'eau salée, nous avons :

$$S_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \nabla \cdot q_s = Q_s, \quad (\text{A.10})$$

où S_f , S_s sont respectivement les coefficients d'emménagement en eau dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé, ρ_f , ρ_s sont respectivement les densités de référence dans le domaine de l'eau douce et celui de l'eau salée, ϕ_f , ϕ_s sont respectivement la charge hydraulique dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé, q_f , q_s sont respectivement la vitesse de Darcy dans le domaine de l'eau douce et dans le domaine salé et enfin Q_f , Q_s sont des termes sources. On rappelle que :

$$S_f = \rho_f g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), q_f = -K_f \nabla(\phi_f), K_f = \frac{kg\rho_f}{\mu_f}, \quad (\text{A.11})$$

$$S_s = \rho_s g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), q_s = -K_s \nabla(\phi_s), K_s = \frac{kg\rho_s}{\mu_s}. \quad (\text{A.12})$$

A.5.3 Hypothèse sur le flux

Les deux hypothèses suivantes sont introduites pour réduire le problème 3D à un modèle 2D.

Hypothèse d'interface abrupte ou nette :

L'eau douce et l'eau de mer sont miscibles. Par conséquent, elles sont séparées par une zone de transition caractérisée par les variations de la concentration de sel. Néanmoins, l'épaisseur de la zone de transition est faible par rapport aux dimensions de l'aquifère. Nous supposons alors qu'une interface abrupte sépare les deux domaines distincts, l'un pour l'eau salée et l'autre pour l'eau douce. Une interface nette est également supposée séparer les parties saturée et sèche de l'aquifère, négligeant ainsi l'épaisseur de la zone partiellement saturée. Cette dernière interface libre peut être considérée comme une nappe phréatique. Cette approximation est justifiée parce que l'épaisseur de la frange de capillarité est beaucoup plus petite que la distance à la surface du sol.

Approximation de Dupuit :

L'hypothèse de Dupuit consiste à considérer que la charge hydraulique est constante le long de chaque direction verticale (équipotentiels verticaux). C'est légitime puisque l'on observe effectivement des déplacements quasi horizontaux lorsque l'épaisseur de l'aquifère est faible par rapport à sa largeur et à sa longueur et lorsque le débit est loin des puits. Cette approximation est exacte dans le cas d'un aquifère homogène, isotrope et confiné avec une épaisseur constante.

A.6 Domaine d'intégration

Nous utilisons maintenant les approximations introduites dans le paragraphe A.5.3 pour intégrer verticalement les équations (A.11) - (A.12), réduisant ainsi le problème $3D$ à un problème $2D$.

Intégration Verticale du modèle

L'aquifère est représenté par un domaine $\Omega \times (h_2, h_{max})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la fonction h_2 (respectivement h_{max}) décrivant sa topographie inférieure (respectivement supérieure). Par souci de simplicité, nous supposons que la surface supérieure de l'aquifère est à une profondeur constante, $h_{max} \in \mathbb{R}$, et de plus que $h_{max} = 0$.

Nous désignons par h_1 la profondeur de l'interface zone insaturée/zone saturé et h la profondeur de l'interface eau douce/eau salée. Comme nous ne considérons pas de formations géologiques très profondes, nous supposons que la pression est constante et égale à la pression atmosphérique P_a dans la partie sèche supérieure de l'aquifère, entre $z = h$ et $z = 0$. Nous imposons un équilibre de pression à la limite de chaque zone, plus précisément :

$$\begin{cases} \text{Si } h_1 < h_{max} = 0 & : \quad \Phi_{f|z=h_1} = P_a/\rho_f g + h_1 - h_{ref}. \\ \text{Si } h_1 = h_{max} = 0 & : \quad \Phi_{f|z=h_{max}} = P_a/\rho_f g - h_{ref}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la bonne quantité pour que la charge hydraulique Φ_f soit significative dans l'ensemble de l'aquifère est $h_1^- = \inf(0, h_1)$. La première condition du (A.6) s'écrit comme $\Phi_{f|z=h_1^-} = P_a/\rho_f g + h_1^- - h_{ref}$. Des éléments similaires sur la profondeur de l'interface eau douce/ eau salée h conduisent à introduire $h^- = \inf(0, h)$.

Maintenant, nous effectuons l'intégration verticale. Nous commençons par la zone d'eau douce entre les profondeurs h^- et h_1^- . Nous obtenons

$$\int_{h^-}^{h_1^-} (S_f \partial \Phi_f + \nabla \cdot q_f) dz = \int_{h^-}^{h_1^-} Q_f dz, \quad B_f = h_1^- - h^-.$$

Nous désignons par $\tilde{Q}_f$ le terme source représentant l'approvisionnement en surface répartie d'eau douce dans l'aquifère libre :

$$\tilde{Q}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} Q_f dz.$$

En appliquant la formule de Leibniz au première terme, on obtient :

$$\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial \Phi_f dz = S_f \frac{\partial}{\partial t} \int_{h^-}^{h_1^-} \Phi_f dz + S_f \Phi_{f|z=h^-} \partial_t h^- - S_f \Phi_{f|z=h_1^-} \partial_t h_1^-.$$

On pose $\tilde{\Phi}_f$ la moyenne verticale de Φ_f

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} \Phi_f dz.$$

D'après l'approximation de Dupuit, $\Phi_f(x_1, x_2, z) \simeq \tilde{\Phi}_f(x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $z \in (h^-, h_1^-)$, nous avons donc

$$\int_{h^-}^{h_1^-} S_f \partial \Phi_f dz = S_f B_f \partial \tilde{\Phi}_f.$$

Nous avons aussi

$$\int_{h^-}^{h_1^-} \nabla \cdot q_f dz = \nabla' \cdot (B_f \tilde{q}'_f) + q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) - q_{f|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-),$$

où $\nabla' = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$, $q'_f = (q_{f,x_1}, q_{f,x_2})$ et la vitesse moyenne de Darcy $\tilde{q}'_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} q'_f dz$ est donnée par

$$\tilde{q}'_f = -\frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} (K'_f \nabla' \Phi_f) dz = -\frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} (K'_f \nabla' \tilde{\Phi}_f) dz = -\tilde{K}'_f \nabla' \tilde{\Phi}_f, \quad \tilde{K}'_f = \frac{1}{B_f} \int_{h^-}^{h_1^-} K'_f dz.$$

La loi moyenne de conservation de la masse pour l'eau douce est ainsi écrite comme suit :

$$S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f = \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}'_f \nabla' \tilde{\Phi}_f) - q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) + q_{f|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) + B_f \tilde{Q}_f \quad (\text{A.13})$$

Des calculs similaires dans la zone d'eau salée donnent

$$S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s = \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}'_s \nabla' \tilde{\Phi}_s) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) + B_s \tilde{Q}_s, \quad (\text{A.14})$$

où $B_s = h^- - h_2$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée. Dans ces équations, le terme $B_i \tilde{K}'_i$, $i = f, s$, peut être considéré comme la transmissibilité dynamique de chaque zone. À ce stade, nous avons obtenu un système d'équations ((A.13)-(A.14)) avec quatre inconnus, $\tilde{\Phi}_i$, $i = f, s$, h_1^- et h^- .

A.7 Flux et équations de continuité aux interfaces

Le présent paragraphe est fondamental. En effet, notre approche a commencé comme une approche d'interface nette, mais elle intègre maintenant l'existence de zones miscibles, prenant la forme de deux interfaces diffuses : l'une d'épaisseur δ_1 entre les zones in-saturée et saturée et l'autre d'épaisseur δ_h entre la zone d'eau salée et la zone d'eau

douce . Ce modèle a été initialement introduit dans [28] et nous reprenons ici intégralement la présentation du calcul du flux donné dans cet article. Nous soulignons que ce modèle est complètement nouveau par rapport à la littérature existante et qu'il concilie la simplicité des modèles à interface nette avec le réalisme des modèles à interface diffuse.

Flux au interface eau douce/ eau salée

Nous introduisons une fonction de phase F_h décrivant les deux zones (eau douce, eau salée) et l'interface nette :

$$F_h = \begin{cases} 0 & \text{dans l'eau douce,} \\ \frac{c_s}{2} & \text{sur l'interface nette,} \\ c_s & \text{dans l'eau salée,} \end{cases}$$

où c_s est la concentration moyenne en sel dans la zone salée. Ainsi l'ensemble $\{(x_1, x_2, z) \text{ tels que } F_h(x_1, x_2, z) = \frac{c_s}{2}\}$ représente l'interface nette à l'instant t .

La fonction F_h satisfait une équation de type **Allen-Cahn** tri-stable (les trois points de stabilités ici sont $0, \frac{c_s}{2}$ et c_s) :

$$\partial_t F_h + \vec{v} \cdot \nabla F_h - \delta_h \Delta' F_h + \frac{F_h(F_h - c_s/2)(F_h - c_s)}{\delta_h} = 0, \quad (\text{A.15})$$

où le symbole Δ' correspond à la dérivation par rapport aux deux variables (x_1, x_2) et nous désignons par $\vec{v}$ la vitesse de l'interface. Notons que nous avons déjà négligé ici la différence verticale en ce qui concerne le terme convectif. La taille caractéristique de l'interface diffuse correspondante est $\delta_h > 0$. Le passage de $3D$ à $2D$ suppose que la zone de stabilité $\{F_h = \frac{c_s}{2}\}$ correspond à l'interface nette $z = h$, on a donc :

$$F_h(x_1, x_2, z, t) = c_s/2 \Leftrightarrow z - h^-(x_1, x_2, t) = 0.$$

En différenciant $F_h(x_1, x_2, h^-(x_1, x_2, t), t) = c_s/2$ et en incluant ces résultats dans la projection de l'équation d'Allen-Cahn pour $F_h = c_s/2$, nous obtenons :

$$\partial_z F_h (-\partial_t h^- + \vec{v} \cdot \nabla (z - h^-) + \delta_h \Delta' h^-) + \delta_h \nabla' h^- \cdot \nabla' \partial_z F_h + \delta_h |\nabla' h^-|^2 \partial_{zz}^2 F_h = 0 \quad (\text{A.16})$$

Les deux derniers termes de l'équation (A.16) peuvent être négligés. Tout d'abord, bien sûr, le paramètre de diffusion δ_h qui est la taille caractéristique de l'interface diffuse est petit. Le point suivant vient de la dynamique de l'équation d'Allen-Cahn.

On revient alors à l'hypothèse traditionnelle de la modélisation à interface nette : pas de transfert de masse au travers de l'interface eau douce/ eau salée i.e les composantes normales de la vitesse sont continues et on a :

$$\left(\frac{q_f|_{z=h^-}}{\phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{q_s|_{z=h^-}}{\phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (\text{A.17})$$

On a noté $\vec{n}$ le vecteur normale unitaire par rapport à l'interface nette. En combinant (A.16)- (A.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} q_f|_{z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) &= q_s|_{z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) \\ &= \phi(\partial_t h^- - \delta_h \Delta' h^-) \\ &= \phi(\chi_0(-h) \partial_t h - \delta_h \nabla' \cdot (\chi_0(-h) \nabla' h)), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où nous avons établi

$$\chi_0(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq 0, \\ 1 & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Flux au interface zone sèche /zone saturée

Nous appliquons le même type de raisonnement que dans le cas précédent pour décrire la zone de transition entre la zone saturée et la zone insaturée d'épaisseur δ_1 . Ici pour modéliser la dynamique de cette interface, nous introduisons une fonction de phase F_1 telle que :

$$F_1 = \begin{cases} -1 & \text{dans la zone insaturée,} \\ 0 & \text{sur l'interface nette,} \\ 1 & \text{dans la zone saturée.} \end{cases}$$

L'interface nette est caractérisé par $F(x_1, x_2, z, t) = 0 \Leftrightarrow z - h_1^-(x_1, x_2, t) = 0$. Les termes principaux de la projection sur $z = h_1^-$ d'une équation d'Allen-Cahn tri-sable pour une interface diffuse de taille caractéristique δ_1 donne

$$-\partial_t h_1^- + \vec{v} \cdot \nabla(z - h_1^-) + \delta_1 \Delta' h_1^- = 0. \quad (\text{A.19})$$

En combinant (A.19) et l'équation de continuité des composantes normales de la vitesse, nous obtenons

$$\left(\frac{q_f|_{z=h_1^-}}{\phi} - \vec{v}\right) \cdot \vec{n} = 0, \quad (\text{A.20})$$

et

$$\begin{aligned} q_f|_{z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) &= \phi(\partial_t h_1^- - \delta_1 \Delta' h_1^-) \\ &= \phi((\chi_0(-h_1) \partial_t h_1 - \delta_1 \nabla' \cdot (\chi_0(-h_1) \nabla' h_1))). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Couche imperméable à $z = h_2$ Dans le cas où on suppose que la couche inférieure de l'aquifère est imperméable i.e pas de flux entre la zone salée et le fond $z = h_2$, on a :

$$q_s(h_2) \cdot \nabla(z - h_2) = 0. \quad (\text{A.22})$$

A.7.1 Équation de continuité

L'approximation de Dupuit se lit $\tilde{\Phi}_f \simeq \Phi_{f|z=h_1^-}$, c'est à dire

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref}. \quad (\text{A.23})$$

Compte tenu de la condition aux limites à l'interface libre supérieure et $\Phi_{f|z=h_1^-} \simeq \Phi_{f|z=h^-}$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- - h_{ref} &= \frac{P_{f|z=h^-}}{\rho_f g} + h^- - h_{ref} \\ \Leftrightarrow P_{f|z=h^-} &= P_a + \rho_f g(h_1^- - h^-). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En outre, la pression est continue à l'interface entre l'eau salée et l'eau douce. Comme $P_{s|z=h^-} = \rho_s g(\Phi_{s|z=h^-} - h^- + h_{ref})$ et $\tilde{\Phi}_s \simeq \Phi_{s|z=h^-}$, il s'ensuit que

$$(1 + \alpha)\tilde{\Phi}_s = \frac{P_a}{\rho_f g} + h_1^- + \alpha h^- - (1 + \alpha)h_{ref}, \quad (\text{A.25})$$

où $\alpha = \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1$, caractérise la contraste de densité.

A.8 Présence d'autres ressources en eau

Présence d'une rivière dans une partie $\Omega_r \times \{h_{max}\}$, $\Omega_r \subset \Omega$ de la limite supérieure :

On suppose que la rivière à l'équilibre hydrodynamique, i.e si P_r est la pression dans la rivière :

$$P_r(x_1, x_2, z) = P_a + \rho_f g(0 - z), (x_1, x_2) \in \Omega_r, h_{max} \leq z \leq 0.$$

La charge hydraulique de la rivière Φ_r est donc également constante par rapport à z , comme Φ_f . La condition au bord classique à l'interface d'un aquifère et d'un réservoir d'eau est la continuité de Φ_f et cela donne :

$$\Phi_{f|x \in \Omega_r, z=h_{max}} = \Phi_{r|x \in \Omega_r, z=h_{max}} = \frac{P_{r|z=h_{max}}}{\rho_f g} + h_{max} - h_{ref} = \frac{P_a}{\rho_f g} - h_{ref}.$$

Présence d'une zone faiblement imperméable :

Le flux entre la zone faiblement imperméable et l'eau contenue dans l'aquifère consiste en un terme de fuite q_L

$$q_L(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ dans la zone imperméable,} \\ q_L(x) & x \text{ dans la zone faiblement imperméable.} \end{cases}$$

Le modèle générique de recharge et de décharge est $q_L = (\phi_{ext} - \phi/c_m)$ où ϕ (resp. ϕ_{ext}) est la charge dans la zone de la membrane semi-perméable de l'aquifère (resp. dans la zone faiblement imperméable), la résistance $c_m = \mathcal{O}(b_m/k_m)$ dépend de la profondeur b_m et la perméabilité k_m ($k_m \ll k$) de la membrane. Cette formulation permet de traiter la charge et la décharge, en fonction du rapport entre ϕ et ϕ_{ext} .

Ici, nous pouvons inclure un terme de fuite non salée q_{Lf} du haut de l'aquifère à l'eau douce lorsque l'aquifère est entièrement saturé (c'est-à-dire $h_1 = 0$) et un terme de fuite salé q_{Ls} du fond à l'eau salée :

$$q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) = q_{Lf}, \text{ où } h_1^- = 0, \quad q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) = q_{Ls}. \quad (\text{A.26})$$

Cette condition sera insérée ci-dessous. Plus précisément, d'après (A.26), le terme q_{Lf} s'écrit comme

$$\begin{aligned} q_{Lf}(x, h_1, h) &= (1 - \chi_0(-h_1))\chi_0(h_1^- - h^-) \frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)} \left(\frac{P_{ext,f}(x)}{\rho_f g} + b_{mf}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g} - h_1^- \right) \\ &= (1 - \chi_0(-h_1))\chi_0(h_1^- - h^-) \frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)} \left(\frac{P_{ext,f}(x)}{\rho_f g} + b_{mf}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g} \right). \end{aligned}$$

On suppose que $k_{mf} = 0$ en dehors de la zone faiblement imperméable. Le même type d'arguments nous donne

$$q_{Ls}(x, h_1, h) = \chi_0(h^- - h_2) \frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)} \left(\frac{P_{ext,s}(x)}{\rho_s g} + h_2 - b_{ms}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g(1 + \alpha)} - \frac{h_1^-}{1 + \alpha} - \frac{\alpha h^-}{1 + \alpha} \right).$$

A.9 Modèle d'intrusion saline

Nous commençons par certaines hypothèses, essentiellement introduites pour la simplicité la présentation des équations. On suppose que le milieu est isotrope et que la viscosité est la même pour l'eau salée et l'eau douce. En utilisant la définition de la perméabilité $\tilde{K}_f$ et $\tilde{K}_s$, et que $\mu_f = \mu_s$ nous obtenons

$$k_s = (1 + \alpha)k_f.$$

À cette étape, nous pouvons déduire le modèle bidimensionnel de (A.13)-(A.14) comme suit :

$$\begin{aligned} S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}_f' \nabla' \tilde{\Phi}_f) + q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) - q_{f|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) \\ = B_f \tilde{Q}_f. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s - \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s' \nabla' \tilde{\Phi}_s) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) \\ = B_s \tilde{Q}_s, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Nous pouvons négliger le terme $S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s$ en raison des deux arguments suivants. D'abord, l'eau salée est confinée car le fond de l'aquifère est supposé imperméable :

$$\partial_t \Phi_s \ll 1.$$

Par ailleurs $S_s \ll 1$ à cause de la faible compressibilité du fluide et de la roche, donc

$$S_s = \rho_s g((1 - \phi)\beta_p + \phi\alpha_p) \ll 1. \quad (\text{A.29})$$

Nous choisissons maintenant d'écrire le modèle en utilisant la conservation de la masse de sel et sur la conservation de la masse totale. En utilisant le fait que $S_s B_s \partial_t \tilde{\Phi}_s \approx 0$, et en faisant la somme de (A.27)-(A.28), on obtient :

$$\begin{aligned} -\nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s' \nabla' \tilde{\Phi}_s) - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) + q_{s|z=h^-} \cdot \nabla(z - h^-) &= B_s \tilde{Q}_s, \\ S_f B_f \partial_t \tilde{\Phi}_f - \nabla' \cdot (B_f \tilde{K}_f' \nabla' \tilde{\Phi}_f) - \nabla' \cdot (B_s \tilde{K}_s \nabla \tilde{\Phi}_s) + q_{f|z=h_1^-} \cdot \nabla(z - h_1^-) \\ - q_{s|z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) &= B_f \tilde{Q}_f + B_s \tilde{Q}_s. \end{aligned}$$

De nouveau, pour simplifier le modèle nous considérons que $\delta_h = \delta_1 := \delta$ (les largeurs des interfaces diffuse sont les mêmes). Nous inversons également l'axe vertical et par suite nous remplaçons $-h_1$ par h_1 , $-h$ par h , $-h_2$ par h_2 et $-z$ par z . D'où maintenant B_s et B_f sont écrit comme suit : $B_s = h_2 - h^+$, $B_f = h^+ - h_1^+$ et on peut écrire le système suivant :

$$(\mathcal{M}_1) \left\{ \begin{aligned} &\phi \chi_0(h) \partial_t h - \nabla' \cdot (\alpha \tilde{K}_f(h_2 - h^+) \nabla' h) - \nabla' \cdot (\delta \phi \chi_0(h) \nabla' h) \\ &\quad - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f \chi_0(h) (h_2 - h^+) \nabla' h_1) - \phi q_{Ls}(x, h_1, h) = -\tilde{Q}_s(h_2 - h^+), \\ &\chi_0(S_f(h^+ - h_1^+) + \phi) \partial_t h_1 - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f \chi_0(h_1) ((h^+ - h_1^+) + (h_2 - h^+)) \nabla' h_1) \\ &\quad - \nabla' \cdot (\delta \phi \tilde{K}_f \chi_0(h_1) \nabla' h_1) - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f \alpha(h_2 - h^+) \chi_0(h) \nabla' h) - \phi q_{Lf}(x, h_1, h) \\ &\quad - \phi q_{Ls}(x, h_1, h) = -\tilde{Q}_s(h_2 - h^+) - \tilde{Q}_f(h^+ - h_1^+). \end{aligned} \right.$$

Si nous utilisons également l'hypothèse (A.29) pour négliger le coefficient de stockage S_f dans la zone salée, le dernier modèle se réduit à :

$$(\mathcal{M}_2) \left\{ \begin{array}{l} \phi\chi_0(h)\partial_t h - \nabla' \cdot (\alpha\tilde{K}_f(h_2 - h^+)\nabla'h) - \nabla' \cdot (\delta\phi\chi_0(h)\nabla'h) \\ - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f\chi_0(h)(h_2 - h^+)\nabla'h_1) - \phi q_{Ls}(x, h_1, h) = -\tilde{Q}_s(h_2 - h^+), \\ \phi\chi_0\partial_t h_1 - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f\chi_0(h_1)((h^+ - h_1^+) + (h_2 - h^+)\nabla'h_1) \\ - \nabla' \cdot (\delta\phi\tilde{K}_f\chi_0(h_1)\nabla'h_1) - \nabla' \cdot (\tilde{K}_f\alpha(h_2 - h^+)\chi_0(h)\nabla'h) - \phi q_{Lf}(x, h_1, h) \\ - \phi q_{Ls}(x, h_1, h) = -\tilde{Q}_s(h_2 - h^+) - \tilde{Q}_f(h^+ - h_1^+). \end{array} \right.$$

Dans $(\mathcal{M}_1)$ et $(\mathcal{M}_2)$, les termes q_{Ls} et q_{Lf} sont définis par :

$$\begin{aligned} q_{Ls}(x, h_1, h) &= \chi_0(h^- - h_2) \frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)} \left(\frac{P_{ext,s}(x)}{\rho_s g} + h_2 - b_{ms}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g(1 + \alpha)} - \frac{h_1^-}{1 + \alpha} - \frac{\alpha h^-}{1 + \alpha} \right). \\ q_{Lf}(x, h_1, h) &= (1 - \chi_0(-h_1)) \chi_0(h_1^- - h^-) \frac{k_{mf}(x)}{b_{mf}(x)} \left(\frac{P_{ext,f}(x)}{\rho_f g} + b_{mf}(x) - \frac{P_a}{\rho_f g} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Par la suite, nous utilisons le modèle $(\mathcal{M}_2)$ où nous omettrons les signes + et la fonction indicatrice χ_0 , car h et h_1 vérifieront un principe du maximum naturel, i.e. $h \geq 0$ et $h_1 \geq 0$.

RÉSULTAT D'UNICITÉ ET DE RÉGULARITÉ

B.1 Régularité

Dans le cas d'aquifère libre, nous pouvons exprimer les coefficient caractérisant l'opérateur en fonction des paramètres physiques $\hat{\alpha} = \frac{\delta}{\phi}$, $\hat{\beta} = \frac{\delta}{\phi} + K_+ \frac{h_2}{\phi}$ et $\hat{g}(r) = \|P^{-1}\|_{L(Y_r, X_r)}$, donc

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{c}}{\hat{\beta} + \hat{c}} = \frac{\delta + \phi \hat{c}}{\delta + \phi \hat{c} + K_+ h_2} \text{ and } \hat{\nu} = \frac{\hat{c}}{(\hat{\beta} + \hat{c})} = \frac{\phi \hat{c}}{\delta + \phi \hat{c} + K_+ h_2}.$$

Nous choisissons $\hat{c} > 0$ afin d'assurer $\hat{\nu} < \hat{\mu}$. Ainsi, si $r \geq 2$ est tel que $\hat{k}(r) := \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$, cet exposant est approprié.

Comme précédemment, soit $r > 2$, on peut toujours ajuster h_2, K_+ et δ tel que $\hat{k}(r) = \hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$. C.à.d, nous imposons :

$$\begin{aligned} (\delta + K_+ h_2 + \phi \hat{c}) &< \frac{\hat{g}(r)}{\hat{g}(r) - 1} \delta, \quad \forall \hat{c} > 0, \\ \iff K_+ &< \frac{1}{\hat{g}(r) - 1} \times \frac{\delta}{h_2} - \frac{\phi \hat{c}}{h_2}, \quad \forall \hat{c} > 0. \end{aligned}$$

Laissons $\hat{c} \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\frac{K_+ h_2}{\delta} < \frac{1}{\hat{g}(r) - 1}. \quad (\text{B.1})$$

Proposition B.1 Soit (h, h_1) une solution du problème (1.10)–(1.13) et $r(\delta, h_2, K_+) > 2$ le plus grand nombre réel tel que $\hat{g}(r)(1 - \hat{\mu} + \hat{\nu}) < 1$. De plus, nous supposons qu'il existe $\gamma, 0 < \gamma < 1$ tel que les paramètres physiques satisfassent

$$K_+ \leq \frac{\eta}{1 - \eta} \times \frac{\delta}{h_2}, \quad \text{avec } \eta = \sqrt{(1 - \gamma)} \times \frac{(1 - \hat{k}(r))}{\hat{g}(r)}. \quad (\text{B.2})$$

Si $(h_D, h_{1,D}) \in L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2$, $(h_0, h_{1,0}) \in W^{1,r}(\Omega)^2$ alors ∇h et ∇h_1 sont dans $L^r(\Omega_T)$, de plus, nous avons

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_1(\phi, h_2, K_-, K_+, \delta, h_0, h_{1,0}, h_D, h_{1,D}, Q_f, Q_s),$$

et

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C_2(\phi, h_2, K_-, K_+, \delta, h_0, h_{1,0}, h_D, h_{1,D}, Q_f, Q_s).$$

■

Preuve:

Sans perdre de généralité, nous pouvons simplifier les équations en prenant $Q_f = Q_s = 0$. De la même façon, nous considérerons les conditions aux limites homogènes de Dirichlet pour h et h_1 . Nous renvoyons à [31] pour le cas général.

La preuve est décrite comme suit : Dans la première étape, en utilisant le théorème de Schauder, nous prouvons que pour tout $T > 0$, le système initial complété par les conditions initiales et aux limites

$$\begin{aligned} h &= 0, \quad h_1 = 0 \text{ dans } \Gamma \times (0, T), \\ h(0, x) &= h_0(x), \quad h_1(0, x) = h_{1,0}(x) \text{ p.p. dans } \Omega, \end{aligned}$$

admet une solution (h, h_1) tel que $(h, h_1) \in (W(0, T) \cap L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega)))^2$. Nous remarquons que la séquence (h, h_1) est uniformément bornée dans $(L^2(0, T; V) \cap L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega)))^2$ et nous montrons que le principe maximum suivant $0 \leq h_1(t, x) \leq h(t, x) \leq h_2$ p.p. dans Ω_T est satisfait.

La formulation faible de ce dernier problème est donnée par : pour tout $w \in V$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \delta \nabla h \cdot \nabla w \, dx dt + \int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla h \cdot \nabla w \, dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} K T_s(h) \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dx dt = 0, \\ & \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, w \rangle_{V', V} dt + \int_{\Omega_T} \delta \nabla h_1 \cdot \nabla w \, dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} K \left((T_s(h) + T_f(h - h_1)) \nabla h_1 + T_s(h) \nabla h \right) \cdot \nabla w \, dx dt = 0. \end{aligned}$$

Pour la stratégie du point fixe, nous définissons l'application $\mathcal{F}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2 &\longrightarrow (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2 \\ (\bar{h}, \bar{h}_1) &\longmapsto \mathcal{F}(\bar{h}, \bar{h}_1) = (\mathcal{F}_1(\bar{h}, \bar{h}_1) = h, \mathcal{F}_2(\bar{h}, \bar{h}_1) = h_1), \end{aligned}$$

où (h, h_1) est la solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h, w \rangle_{V', V} + \int_{\Omega_T} \delta \nabla h \cdot \nabla w + \int_{\Omega_T} K T_s(\bar{h}) \nabla h \cdot \nabla w \\ & + \int_{\Omega_T} K T_s(\bar{h}) \nabla \bar{h}_1 \cdot \nabla w = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi \langle \partial_t h_1, w \rangle_{V', V} + \int_{\Omega_T} \delta \nabla h_1 \cdot \nabla w + \int_{\Omega_T} K (T_s(\bar{h}) + T_f(\bar{h} - \bar{h}_1)) \nabla h_1 \cdot \nabla w \\ & + \int_{\Omega_T} K T_s(\bar{h}) \nabla h \cdot \nabla w = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

pour tout $w \in V$. En effet, nous savons grâce à la théorie classique sur les équations paraboliques (voir *e.g.* [50]) que le système variationnel linéaire (B.3)–(B.4) admet une solution unique. La fin du présent paragraphe est consacrée à la preuve de la propriété du point fixe pour l'application $\mathcal{F}$ dans un fermé convexe borné inclus dans l'espace $L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))^2 \cap W(0, T)^2$.

Dans [29], il a déjà été établi qu'il existe deux nombres réels $A_M = A_M(\phi, \delta, K, h_0, h_2, M, T)$ et

$B_M = B_M(\phi, \delta, K, h_{1,0}, h_2, M, A_M, T)$ dépendant uniquement des données tels que

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;(H^1(\Omega)))} &\leq A_M, \\ \|h_1\|_{L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;(H^1(\Omega)))} &\leq B_M. \end{aligned}$$

De plus, il a également été prouvé qu'il existe deux constantes $C_M, D_M > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \|\partial_t h\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 &\leq C_M := \delta A_M + \frac{h_2}{\phi} (K_+ A_M + M), \\ \|\partial_t h_{1,n}\|_{L^2(0,T;V')} &\leq D_M := \delta + \frac{h_2 K_+}{\phi} (2A_M + B_M). \end{aligned}$$

Ces estimations permettent de conclure que $\mathcal{F}$ est continue dans $(L^2(0, T; L^2(\Omega)))^2$ parce que ses deux composants $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont continues. De plus, soit $E_M \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre réel défini par

$$E_M = \max(A_M, B_M, C_M, D_M),$$

et W le sous-ensemble borné convexe fermé (fortement) non vide de $(L^2(0, T; L^2(\Omega)))^2$ défini par

$$W = \left\{ (g, g_1) \in W(0, T)^2; (g(0), g_1(0)) = (h_0, h_{1,0}), \|(g, g_1)\|_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V'))^2} \leq E_M \right\}.$$

Sous certaines conditions sur les paramètres physiques, il est montré que $\mathcal{F}(W) \subset W$. Il résulte du théorème de Schauder [86, cor. 3.6] qu'il existe $(h, h_1) \in W$ tel que $\mathcal{F}(h, h_1) =$

(h, h_1) . Ce point fixe de $\mathcal{F}$ est la solution faible du problème (1.10)–(1.13).

Ce résultat est amélioré en incluant dans la définition du sous-ensemble borné convexe W une estimation uniforme par rapport à M pour la norme $L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega))$.

Soient (M', M'') deux nombres réels strictement positifs que nous définirons plus tard, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{W} = \{ & (g, g_1) \in (W(0, T) \cap L^r(0, T; W^{1,r}(\Omega)))^2, (g(0), g_1(0)) = (h_0, h_{1,0}); \\ & \|(g, g_1)\|_{W(0,T)} \leq E_M, \|\nabla g_1\|_{L^r(\Omega_T)} \leq M' \text{ and } \|\nabla g\|_{L^r(\Omega_T)} \leq M'' \}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Notre objectif est de vérifier que $\mathcal{F}(\tilde{W}) \subset \tilde{W}$. En appliquant le lemme 1.5 à (B.3), nous déduisons que

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq \frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \left(\frac{h_2 K_+}{\phi} \|\nabla \bar{h}_1\|_{L^r(\Omega_T)^2} + \frac{1}{\phi} \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} \right).$$

De même, l'application du lemme 1.5 à (B.4), entraîne que

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq \frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \left(\frac{h_2 K_+}{\phi} \|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} + \frac{1}{\phi} \|h_{1,0}\|_{W^{1,r}(\Omega)} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)^2} & \leq \left(\frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \frac{h_2 K_+}{\phi} \right)^2 \|\nabla \bar{h}_1\|_{L^r(\Omega_T)^2} \\ & + \frac{\hat{g}(r)}{\phi(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \left(\frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \frac{h_2 K_+}{\phi} \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|h_{1,0}\|_{W^{1,r}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Soit γ tel que $0 < \gamma < 1$ et supposons que ϕ, h_2, K_+ et δ satisfont

$$\left(\frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \frac{h_2 K_+}{\phi} \right)^2 \leq 1 - \gamma.$$

Nous soulignons que (B.2) nous redonne l'inégalité précédente, en effet

$$\begin{aligned} (\text{B.2}) \iff h_2 K_+ & \leq \sqrt{(1 - \gamma)} \times \frac{(1 - \hat{k}(r))}{\hat{g}(r)} \times (K_+ h_2 + \delta), \\ \implies K_+ h_2 & \leq \sqrt{(1 - \gamma)} \times \frac{(1 - \hat{k}(r))}{\hat{g}(r)} \times \underbrace{(K_+ h_2 + \delta + \phi c)}_{\phi(\hat{\beta} + c)}, \quad \forall c > 0. \end{aligned}$$

La constante M' est prise de telle sorte que les conditions initiales satisfont

$$\frac{\hat{g}(r)}{\phi(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \left(\frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \frac{h_2 K_+}{\phi} \|h_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|h_{1,0}\|_{W^{1,r}(\Omega)} \right) \leq \gamma M'. \quad (\text{B.7})$$

Considérant (B.2), (B.6) et (B.7), on en déduit que :

$$\|\nabla h_1\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq M',$$

et

$$\|\nabla h\|_{L^r(\Omega_T)^2} \leq M'' := \frac{\hat{g}(r)}{(1 - \hat{k}(r))(\hat{\beta} + c)} \times \left(\frac{h_2 K_+}{\phi} M' + \frac{1}{\phi} \|h_{1,0}\|_{W^{1,r}(\Omega)} \right).$$

Nous soulignons que les deux réels M' et M'' sont indépendants du réel M . Soit $\tilde{W}$ le convexe fermé borné défini par (B.5), nous avons prouvé que $\mathcal{F}(\tilde{W}) \subset \tilde{W}$. Il résulte du théorème de point fixe de Schauder qu'il existe $(\tilde{h}, \tilde{f}) \in \tilde{W}$ tel que $\mathcal{F}(\tilde{h}, \tilde{f}) = (\tilde{h}, \tilde{f})$. Ce point fixe de $\mathcal{F}$ est une solution faible du problème tronqué.

À partir de cette étape, les preuves du principe du maximum sont similaires à la preuve donnée dans [30], nous allons donc les omettre ici. Nous avons donc établi que les gradients de la solution de notre problème satisfont une estimation uniforme dans l'espace $L^r(\Omega_T)$, $r > 2$.

□

B.2 Unicité

Nous allons utiliser la régularité L^4 du gradient de la solution pour prouver l'unicité.

Théorème B.1 Soit $(h_2, K_+, \delta) \in (\mathbb{R}_*^+)^3$ satisfaisant (B.1) et (B.2) pour $r = 4$, alors la solution du système (1.10)-(1.13) est unique dans $W(0, T) \times W(0, T)$.

■

Remarque B.1 Comme dans le cas confiné, nous obtenons l'unicité pour des conditions restrictives sur la conductivité hydraulique, à savoir une faible conductivité hydraulique à l'intérieur de l'aquifère

$$(B.1) - (B.2) \iff K_+ < \inf\left(\frac{1}{\hat{g}(4) - 1}, \frac{\eta}{1 - \eta}\right) \times \frac{\delta}{h_2}, \quad \text{avec} \quad \eta = \sqrt{(1 - \gamma)} \times \frac{(1 - \hat{k}(4))}{\hat{g}(4)}.$$

Mais à nouveau, nous rappelons que la conductivité hydraulique est naturellement faible dans les aquifères usuels.

■

Preuve:

Soit $t \in [0, T]$, nous soulignons que toutes les estimations précédemment établies du temps T , sont valides $\forall t \leq T$.

Soient (h, h_1) et $(\bar{h}, \bar{h}_1)$ deux solutions du problème (1.10)-(1.13), puisque $h_2 \geq h \geq h_1 \geq 0$ et $h_2 \geq \bar{h}_1 \geq \bar{h} \geq 0$, nous pouvons dire que $T_s(h) - T_s(\bar{h}) = \bar{h} - h = -u$, $T_f(h - h_1) + T_s(h) = (h_2 - h_1)$ et $T_f(\bar{h} - \bar{h}_1) + T_s(\bar{h}) = (h_2 - \bar{h}_1)$.

Posons $u = h - \bar{h} \in W(0, T)$ et $v = h_1 - \bar{h}_1 \in W(0, T)$, le couple (u, v) est alors une solution du système suivant :

$$\phi \partial_t u - \nabla \cdot ((\delta + K T_s(\bar{h})) \nabla u) + \nabla \cdot (K u \nabla h) + \nabla \cdot (K u \nabla h_1) - \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla v) = 0$$

$$\phi \partial_t v - \nabla \cdot ((\delta + K(h_2 - \bar{h}_1)) \nabla v) + \nabla \cdot (K v \nabla h_1) + \nabla \cdot (K u \nabla h) - \nabla \cdot (K T_s(\bar{h}) \nabla u) = 0$$

En intégrant ces équations sur $(0, t) \times \Omega$, nous obtenons $\forall (w_1, w_2) \in W(0, T)^2$

$$\phi \int_{\Omega_t} \partial_t u w_1 + \int_{\Omega_t} (\delta + K T_s(\bar{h})) \nabla u \cdot \nabla w_1 - K u \nabla h \cdot \nabla w_1 - K u \nabla h_1 \cdot \nabla w_1 + K T_s(\bar{h}) \nabla v \cdot \nabla w_1 = 0$$

et

$$\phi \int_{\Omega_t} \partial_t v w_2 + \int_{\Omega_t} (\delta + K T_s(\bar{h}_1)) \nabla v \cdot \nabla w_2 - K u \nabla h \cdot \nabla w_2 - K v \nabla h_1 \cdot \nabla w_2 + K T_s(\bar{h}) \nabla u \cdot \nabla w_2 = 0$$

En prenant $w_1 = u$ et $w_2 = v$, puisque $u(t = 0, \cdot) = v(t = 0, \cdot) = 0$ p.p. sur Ω et en appliquant le lemme de Mignot, on obtient après sommation

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (u^2(t, x) + v^2(t, x)) dx + \int_{\Omega_t} (\delta + K T_s(\bar{h})) (\nabla u \cdot \nabla u + \nabla v \cdot \nabla v) \\ & + \int_{\Omega_t} K (\bar{h} - \bar{h}_1) \nabla v \cdot \nabla v + 2 \int_{\Omega_t} K T_s(\bar{h}) \nabla v \cdot \nabla u - \int_{\Omega_t} K u \nabla h_1 \cdot \nabla u \\ & - \int_{\Omega_t} K u \nabla h \cdot \nabla u - \int_{\Omega_t} K u \nabla h \cdot \nabla v - \int_{\Omega_t} K v \nabla h_1 \cdot \nabla v = 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} (u^2(t, x) + v(t, x)^2) dx + \int_{\Omega_t} \delta (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) + \int_{\Omega_t} K T_s(\bar{h}) \nabla (u + v) \cdot \nabla (u + v) \\ & + \int_{\Omega_t} K (\bar{h} - \bar{h}_1) \nabla v \cdot \nabla v - \int_{\Omega_t} K u \nabla (h + h_1) \cdot \nabla u + \int_{\Omega_t} K u \nabla h \cdot \nabla v - \int_{\Omega_t} K v \nabla h_1 \cdot \nabla v = 0 \end{aligned}$$

Grâce à la définition de $T_s(\bar{h})$ et puisque $h_2 \geq \bar{h} \geq \bar{h}_1 \geq 0$, nous obtenons

$$0 \leq \int_{\Omega_t} K T_s(\bar{h}) \nabla (u + v) \cdot \nabla (u + v) + \int_{\Omega_t} K (\bar{h} - \bar{h}_1) \nabla v \cdot \nabla v.$$

D'autre part

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} K u \nabla(h + h_1) \cdot \nabla u \right| \leq \int_0^t K_+ \left(\int_{\Omega} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla(h + h_1)|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} dt. \quad (\text{B.8})$$

En utilisant la proposition B.1, nous avons

$$\left(\int_{\Omega_T} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \leq C_{4,1} \quad \text{and} \quad \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^4 \right)^{1/4} \leq C_{4,2},$$

d'où

$$\left(\int_{\Omega_T} |\nabla(h + h_1)|^4 \right)^{1/4} \leq C_{4,1} + C_{4,2} := C_4.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg est utilisé comme suit

$$\left(\int_{\Omega} |u|^4 \right)^{1/4} \leq C_G \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Alors, combinant les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et de Young appliquées à (B.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_t} K u \nabla(h + h_1) \cdot \nabla u \right| \\ & \leq K_+ C_G \left(\int_0^t (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla(h + h_1)|^4 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq K_+ C_G C_4 \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right)^{3/4} \\ & \leq K_+ C_G C_4 \left(\frac{1}{8} \epsilon_1^{-3} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\epsilon_1 \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right), \quad \text{with } \epsilon_1 > 0. \end{aligned}$$

De la même façon, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_t} K v \nabla h_1 \cdot \nabla v \right| & \leq K_+ C_G \left(\int_0^t (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h_1|^4 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq K_+ C_G C_{4,2} \max_{t \in (0,t)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right)^{3/4} \\ & \leq K_+ C_G C_{4,2} \left(\frac{1}{8} \epsilon_2^{-3} \max_{t \in (0,t)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\epsilon_2 \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right), \quad \text{with } \epsilon_2 > 0. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t \int_{\Omega_t} K u \nabla h \cdot \nabla v \right| &\leq \int_0^t K_+ \left(\int_{\Omega} u^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} dt \\
 &\leq K_+ C_G \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} dt \\
 &\leq K_+ C_G \left(\int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_T} |\nabla h|^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq K_+ C_G C_{4,1} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} \|\nabla u\|^2 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq K_+ C_G C_{4,1} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_1} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + \frac{\epsilon_1}{2} \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \right\} \\
 &\leq K_+ C_G C_{4,1} \left\{ \frac{1}{16\epsilon_1^3} \max_{t \in (0,t)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_1 \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \right\} + \frac{K_+ C_G C_{4,1} \epsilon_1}{2} \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2
 \end{aligned}$$

En combinant toutes ces inégalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\phi}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \frac{\phi}{2} \int_{\Omega} v^2(t, x) dx + (\delta - K_+ C_G \epsilon_1 (2C_4 + C_{4,1})) \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \\
 &+ (\delta - \frac{K_+ C_G C_{4,1}}{2} \epsilon_1 - 2\epsilon_2) \int_{\Omega_t} |\nabla v|^2 \leq \frac{K_+}{8\epsilon_2^3} C_G C_{4,2} \max_{t \in (0,T)} \left(\int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) \\
 &+ \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} C_G \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \max_{t \in (0,T)} \left(\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right). \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

Fixons $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ tels que

$$\delta - K_+ \epsilon_1 C_G (2C_4 + C_{4,1}) > 0,$$

et

$$\delta - \frac{K_+ C_{4,1} C_G}{2} \epsilon_1 - 2\epsilon_2 > 0,$$

alors, en passant au maximum pour $t \in (0, T)$ dans le membre gauche de (B.9), on obtient

$$\begin{aligned}
 &\frac{\phi}{2} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \frac{\phi}{2} \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} v^2(t, x) dx \\
 &\leq \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} C_G \left(\left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + C_{4,2} \max_{t \in (0,T)} \left(\int_{\Omega} v^2(t, x) dx \right) \right)
 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{\phi}{2} - \frac{K_+}{8\epsilon_1^3} C_G \left(C_4 + \frac{C_{4,1}}{2} \right) \right) \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \left(\frac{\phi}{2} - \frac{K_+}{8\epsilon_2^3} C_G C_{4,2} \right) \max_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} v^2(t, x) dx \leq 0.$$

Si ϕ satisfait

$$\frac{\phi}{2} - \frac{K_+ C_G}{8\epsilon_1^3} (C_4 + \frac{C_{4,1}}{2}) > 0 \quad \text{with} \quad \epsilon_1 < \text{Inf}(\frac{2\delta}{K_+ C_{4,1} C_G}, \frac{\delta}{K_+ (2C_4 + C_{4,1}) C_G}) \quad (\text{B.10})$$

et

$$(\frac{\phi}{2} - \frac{K_+}{8\epsilon_2^3} C_G C_{4,2}) > 0 \quad \text{with} \quad \epsilon_2 < \frac{1}{2}(\delta - \frac{K_+ C_{4,1} C_G}{2} \epsilon_1), \quad (\text{B.11})$$

alors (B.10) implique que $\max_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx = 0$ et donc $u = 0$ p.p. dans Ω_T et la même chose pour v .

De nouveau, les conditions (B.10), (B.11) peuvent sembler très restrictives. Cependant, nous pouvons choisir le coefficient ϕ arbitrairement grand (ce qui correspond à une mise à l'échelle temporelle), alors ces conditions (B.10), (B.11) peut être satisfaites. Posons, en effet,

$$t_0 = \text{Inf}(\frac{T \times 8\epsilon_1^3}{K_+ C_G (2C_4 + C_{4,1})}, \frac{T \times 4\epsilon_1^3}{K_+ C_G C_{4,2}}),$$

nous avons prouvé l'unicité pour $t \in [0, t_0]$. Prenons $t = t_0$ comme un nouveau temps initial, l'unicité est obtenue pour tout $t_0 \leq t \leq 2t_0$. En utilisant cette observation de manière inductive, nous déduisons le résultat sur $[0, T]$. Le théorème B.1 est ainsi prouvé. $\square$

DÉTAILS DU CALCUL STOCHASTIQUE

Dans cette annexe, nous allons détailler les calculs des espérances des produits.

En utilisant la formule de récurrence suivante

$$\begin{aligned}\psi_0(\xi) &= 1, \\ \psi_1(\xi) &= \xi, \\ \psi_{i+1}(\xi) &= \xi\psi_i(\xi) - i\psi_{i-1}(\xi), \quad i = 1, 2, \dots, P-1,\end{aligned}\tag{C.1}$$

Nous déduisons que les polynômes ψ_i sont alors générés par

$$\begin{aligned}\psi_0(\xi) &= 1 \\ \psi_1(\xi) &= \xi \\ \psi_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\ \psi_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\ \psi_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3 \\ \psi_5(\xi) &= \xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi \\ \psi_6(\xi) &= \xi^6 - 15\xi^4 + 45\xi^2 - 15 \\ \psi_7(\xi) &= \xi^7 - 21\xi^5 + 105\xi^3 - 105\xi \\ \psi_8(\xi) &= \xi^8 - 28\xi^6 + 210\xi^4 - 420\xi^2 + 105 \\ \psi_9(\xi) &= \xi^9 - 36\xi^7 + 378\xi^5 - 1260\xi^3 + 945\xi \\ \psi_{10}(\xi) &= \xi^{10} - 45\xi^8 + 630\xi^6 - 3150\xi^4 + 4725\xi^2 - 945.\end{aligned}$$

À partir de cette formule de récurrence, on peut calculer, $\forall i, j = 1, \dots, P$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_i(\xi)] &= \delta_{i,0}, \\ \mathbb{E}[\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= i! \delta_{i,j}, \\ \mathbb{E}[\xi\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= (i+1)! \delta_{i,j-1} i! \delta_{i,j+1}, \\ \mathbb{E}[\xi^2\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)] &= (i+2)! \delta_{i,j-2} + i!(2i+1) \delta_{i,j} + i! \delta_{i,j+2}.\end{aligned}\tag{C.2}$$

Puis en utilisant ces formules on peut calculer $\mathbb{E}[\xi^i], \forall i = 2, \dots, 20$. On remarque que $\mathbb{E}[\xi^j] = 0$ si j impair, et si i pair $\mathbb{E}[\xi^i]$ sont données par :

- **Calcul de $\mathbb{E}[\xi^4]$:**

$$\mathbb{E}[\xi^4] = \mathbb{E}[\xi^2 \psi_1(\xi) \psi_1(\xi)] = 1!(2 \cdot 1 + 1) = 3.$$

- **Calcul de $\mathbb{E}[\xi^6]$:**

$$\mathbb{E}[\xi^2 \psi_1(\xi) \psi_3(\xi)] = 3! = 6.$$

Or

$$\begin{aligned} \xi^2 \psi_1(\xi) \psi_3(\xi) &= \xi^2 \cdot \xi \cdot (\xi^3 - 3\xi) \\ &= \xi^6 - 3\xi^4, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi^6 - 3\xi^4] &= 6 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[\xi^6] - 3\mathbb{E}[\xi^4] &= 6 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[\xi^6] &= 6 + 3 \times 3 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[\xi^6] &= 15. \end{aligned}$$

- **Calcul de $\mathbb{E}[\xi^8]$:**

$$\begin{aligned} \xi^2 \psi_2(\xi) \psi_4(\xi) &= \xi^2(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3) \\ &= \xi^8 - 7\xi^6 + 9\xi^4 - 3\xi^2. \end{aligned}$$

Or d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi^2 \psi_2(\xi) \psi_4(\xi)] &= \mathbb{E}[\xi^8 - 7\xi^6 + 9\xi^4 - 3\xi^2] \\ &= \mathbb{E}[\xi^8] - 7 \times 15 + 9 \times 3 - 3 \times 1 \\ &= \mathbb{E}[\xi^8] - 81, \end{aligned}$$

d'autre part, $\mathbb{E}[\xi^2 \psi_2(\xi) \psi_4(\xi)] = (2 + 2)! = 24$, et par suite $\mathbb{E}[\xi^8] = 24 + 81 = 105$.

- **Calcul de $\mathbb{E}[\xi^{10}]$:**

$$\begin{aligned} \xi^2 \psi_4(\xi) \psi_4(\xi) &= \xi^2(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3) \\ &= \xi^{10} - 12\xi^8 + 42\xi^6 - 36\xi^4 + 9\xi^2. \end{aligned}$$

Or d'une part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi^2\psi_2(\xi)\psi_4(\xi)] &= \mathbb{E}[\xi^{10} - 12\xi^8 + 42\xi^6 - 36\xi^4 + 9\xi^2] \\ &= E[\xi^{10}] - 12 \times 105 + 42 \times 15 - 36 \times 3 + 9 \\ &= E[\xi^{10}] - 729,\end{aligned}$$

d'autre part, $\mathbb{E}[\xi^2\psi_2(\xi)\psi_4(\xi)] = 4!(2 \times 4 + 1) = 216$, et par suite $\mathbb{E}[\xi^8] = 729 + 216 = 945$.

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi^{12}] &= 10395, \\ \mathbb{E}[\xi^{14}] &= 135135, \\ \mathbb{E}[\xi^{16}] &= 2027025, \\ \mathbb{E}[\xi^{18}] &= 34459425, \\ \mathbb{E}[\xi^{20}] &= 654729075.\end{aligned}$$

En utilisant ces espérances, on peut calculer $\mathbb{E}[\psi_i\psi_j\psi_k]$, $\forall i, j, k = 0, \dots, 5$:

1. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_0] = 1$
2. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_2] = 5$
3. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_4] = 1728$
4. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_0] = 2$
5. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_4] = 24$
6. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_0] = 24$
7. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_2] = 192$
8. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_1\psi_1] = 1$
9. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_3\psi_3] = 6$
10. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_5\psi_5] = 120$
11. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_1\psi_1] = 2$
12. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_1\psi_3] = 6$
13. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_3\psi_3] = 36$
14. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_3\psi_5] = 120$
15. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_5\psi_5] = 1200$
16. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_1\psi_3] = 24$

17. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_1\psi_5] = 120$
18. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_3\psi_3] = 216$
19. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_3\psi_5] = 1440$
20. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_5\psi_5] = 14400$

et les autres espérances sont nulles.

De la même façon, on calcule $\mathbb{E}[\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l], \forall i, j, k, l = 0, \dots, 5$:

1. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_0\psi_0] = \mathbb{E}[1] = 1$
2. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_2\psi_2] = \mathbb{E}[\psi_2\psi_2] = 2! = 2$
3. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_4\psi_4] = \mathbb{E}[\psi_4\psi_4] = 4! = 24$
4. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_1\psi_1] = \mathbb{E}[\psi_1\psi_1] = 1! = 1$
5. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_3\psi_3] = \mathbb{E}[\psi_3\psi_3] = 3! = 6$
6. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_0\psi_5\psi_5] = \mathbb{E}[\psi_5\psi_5] = 5! = 120$
7. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_1\psi_3] = \mathbb{E}[\xi\psi_2\psi_3] = 3! = 6$
8. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_1\psi_3\psi_4] = \mathbb{E}[\xi\psi_3\psi_4] = 4! = 24$
9. $\mathbb{E}[\psi_0\psi_4\psi_1\psi_5] = \mathbb{E}[\xi\psi_4\psi_5] = 5! = 120$
10. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_1\psi_1] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_2\psi_4] = 4! = 24$
11. $\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_1\psi_1] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_2\psi_2] = 2!(2 \times 2 + 1) = 10$
12. $\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_1\psi_1] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_4\psi_4] = 4!(2 \times 4 + 1) = 216$
13. $\mathbb{E}[\psi_1\psi_1\psi_1\psi_1] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_1\psi_1] = 1!(2 \times 1 + 1) = 3$
14. $\mathbb{E}[\psi_1\psi_1\psi_1\psi_3] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_1\psi_3] = (1 + 2)! = 6$
15. $\mathbb{E}[\psi_1\psi_1\psi_3\psi_3] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_3\psi_3] = 3!(2 \times 3 + 1) = 42$
16. $\mathbb{E}[\psi_1\psi_1\psi_3\psi_5] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_3\psi_5] = (3 + 2)! = 120$
17. $\mathbb{E}[\psi_1\psi_1\psi_5\psi_5] = \mathbb{E}[\xi^2\psi_5\psi_5] = 5!(5 \times 2 + 1) = 1320$
- 18.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_2\psi_2] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^8 - 4\xi^6 + 6\xi^4 - 4\xi^2 + 1] \\
 &= 105 - 4 \times 15 + 6 \times 3 - 4 + 1 \\
 &= 60.
 \end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_4\psi_4] &= \mathbb{E}[(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^{16} - 24\xi^{14} + 228\xi^{12} - 1080\xi^{10} + 2637\xi^8 - 3240\xi^6 + 2052\xi^4 - 648\xi^2 + 81] \\ &= 2027025 - 24 \times 135135 + 228 \times 10395 - 1080 \times 945 + 2637 \times 105 - 3240 \times 15 \\ &= 367119.\end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_2\psi_4] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^8 - 8\xi^6 + 16\xi^4 - 12\xi^2 + 3] \\ &= 105 - 8 \times 15 + 16 \times 3 - 12 \times 1 + 3 \\ &= 24.\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_2\psi_2] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^6 - 3\xi^4 + 3\xi^2 - 1] \\ &= 15 - 3 \times 3 + 3 \times 1 - 1 \\ &= 8.\end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_4\psi_4] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^{10} - 13\xi^8 + 54\xi^6 - 78\xi^4 + 45\xi^2 - 9] \\ &= 945 - 13 \times 105 + 54 \times 15 - 78 \times 3 + 45 \times 1 - 9 \\ &= 192.\end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_0\psi_4\psi_4\psi_4] &= \mathbb{E}[(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 18\xi^{10} + 117\xi^8 - 324\xi^6 + 351\xi^4 - 162\xi^2 + 27] \\ &= 10395 - 18 \times 945 + 117 \times 105 - 324 \times 15 + 351 \times 3 - 162 \times 1 + 27 \\ &= 1728.\end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_3\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\ &= \mathbb{E}[\xi^{10} - 14\xi^8 + 58\xi^6 - 90\xi^4 + 45\xi^2] \\ &= 945 - 14 \times 105 + 58 \times 15 - 90 \times 3 + 45 \times 1 \\ &= 120.\end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_0\psi_4\psi_3\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 19\xi^{10} + 126\xi^8 - 354\xi^6 + 405\xi^4 - 135\xi^2] \\
 &= 10395 - 19 \times 945 + 126 \times 105 - 354 \times 15 + 405 \times 3 - 135 \times 1 \\
 &= 1440.
 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_1\psi_3] &= \mathbb{E}[\xi(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{10} - 10\xi^8 + 30\xi^6 - 30\xi^4 + 9\xi^2] \\
 &= 945 - 10 \times 105 + 30 \times 15 - 30 \times 3 + 9 \times 1 \\
 &= 264.
 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_1\psi_5] &= \mathbb{E}[\xi(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 17\xi^{10} + 94\xi^8 - 198\xi^6 + 165\xi^4 - 45\xi^2] \\
 &= 10395 - 17 \times 945 + 94 \times 105 - 198 \times 15 + 165 \times 3 - 45 \times 1 \\
 &= 1680.
 \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_3\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{14} - 20\xi^{12} + 145\xi^{10} - 480\xi^8 + 759\xi^6 - 540\xi^4 + 135\xi^2] \\
 &= 135135 - 20 \times 10395 + 145 \times 945 - 480 \times 105 + 759 \times 15 - 540 \times 3 + 135 \times 1 \\
 &= 23760.
 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 13\xi^{10} + 60\xi^8 - 120\xi^6 + 99\xi^4 - 27\xi^2] \\
 &= 10395 - 13 \times 945 + 60 \times 105 - 120 \times 15 + 99 \times 3 - 27 \times 1 \\
 &= 2880.
 \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_4\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{16} - 27\xi^{14} + 279\xi^{12} - 1393\xi^{10} + 3555\xi^8 - 4665\xi^6 + 2925\xi^4 - 675\xi^2] \\
 &= 2027025 - 27 \times 135135 + 279 \times 10395 - 1393 \times 945 + 3555 \times 105 - 4665 \times 15 \\
 &= 273600.
 \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^8 - 7\xi^6 + 15\xi^4 - 9\xi^2] \\
&= 105 - 7 \times 15 + 15 \times 3 - 9 \times 1 \\
&= 36.
\end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_0\psi_2\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{12} - 21\xi^{10} + 150\xi^8 - 430\xi^6 + 525\xi^4 - 252\xi^2] \\
&= 10395 - 21 \times 945 + 150 \times 105 - 430 \times 15 + 525 \times 3 - 225 \times 1 \\
&= 1200.
\end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_0\psi_4\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{10} - 12\xi^8 + 48\xi^6 - 72\xi^4 + 27\xi^2] \\
&= 945 - 12 \times 105 + 48 \times 15 - 72 \times 3 + 27 \times 1 \\
&= 216.
\end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_0\psi_4\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{14} - 26\xi^{12} + 253\xi^{10} - 1140\xi^8 + 2415\xi^6 - 2250\xi^4 + 675\xi^2] \\
&= 135135 - 26 \times 10395 + 253 \times 945 - 1140 \times 105 + 2415 \times 15 - 2250 \times 3 + 675 \times 1 \\
&= 14400.
\end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_1\psi_3] &= \mathbb{E}[\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^8 - 5\xi^6 + 7\xi^4 - 3\xi^2] \\
&= 105 - 5 \times 15 + 7 \times 3 - 3 \times 1 \\
&= 48.
\end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_1\psi_5] &= \mathbb{E}[\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{10} - 12\xi^8 + 36\xi^6 - 40\xi^4 + 15\xi^2] \\
&= 945 - 12 \times 105 + 36 \times 15 - 40 \times 3 + 15 \times 1 \\
&= 120.
\end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_3\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 15\xi^{10} + 72\xi^8 - 148\xi^6 + 135\xi^4 - 45\xi^2] \\
 &= 10395 - 15 \times 945 + 72 \times 105 - 148 \times 15 + 135 \times 3 - 45 \times 1 \\
 &= 1920.
 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{10} - 8\xi^8 + 22\xi^6 - 24\xi^4 + 9\xi^2] \\
 &= 945 - 8 \times 105 + 22 \times 15 - 24 \times 3 + 9 \times 1 \\
 &= 372.
 \end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_2\psi_2\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{14} - 22\xi^{12} + 171\xi^{10} - 580\xi^8 + 955\xi^6 - 750\xi^4 + 225\xi^2] \\
 &= 135135 - 22 \times 10395 + 171 \times 945 - 580 \times 105 + 955 \times 15 - 750 \times 3 + 225 \times 1 \\
 &= 19440.
 \end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_1\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{12} - 15\xi^{10} + 78\xi^8 - 162\xi^6 + 117\xi^4 - 27\xi^2] \\
 &= 10395 - 15 \times 945 + 78 \times 105 - 162 \times 15 + 117 \times 3 - 27 \times 1 \\
 &= 2304.
 \end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_1\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{14} - 22\xi^{12} + 171\xi^{10} - 580\xi^8 + 955\xi^6 - 750\xi^4 + 225\xi^2] \\
 &= 135135 - 22 \times 10395 + 177 \times 945 - 636 \times 105 + 999 \times 15 - 630 \times 3 + 135 \times 1 \\
 &= 20160.
 \end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{14} - 18\xi^{12} + 123\xi^{10} - 396\xi^8 + 603\xi^6 - 378\xi^4 + 81\xi^2] \\
 &= 135135 - 18 \times 10395 + 123 \times 945 - 396 \times 105 + 603 \times 15 - 378 \times 3 + 81 \times 1 \\
 &= 30672.
 \end{aligned}$$

43.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_3\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{16} - 25\xi^{14} + 243\xi^{12} - 1167\xi^{10} + 2907\xi^8 - 3627\xi^6 + 2025\xi^4 - 405\xi^2] \\
&= 2027025 - 25 \times 135135 + 243 \times 10395 - 1167 \times 945 + 2907 \times 105 - 3627 \times 15 \\
&= 328320.
\end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_4\psi_4\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^4 - 6\xi^2 + 3)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{18} - 32\xi^{16} + 412\xi^{14} - 2736\xi^{12} + 10014\xi^{10} - 20160\xi^8 + 21420\xi^6 - 10800\xi^4 + 1080] \\
&= 34459425 - 32 \times 2027025 + 412 \times 135135 - 2736 \times 10395 + 10014 \times 945 - 20160 \times 105 + 21420 \times 15 - 1080 \\
&= 4466880.
\end{aligned}$$

45.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_3\psi_3\psi_3\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{12} - 12\xi^{10} + 51\xi^8 - 90\xi^6 + 54\xi^4] \\
&= 10395 - 12 \times 945 + 51 \times 105 - 90 \times 15 + 54 \times 3 \\
&= 3222.
\end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_5\psi_5\psi_5\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{20} - 40\xi^{18} + 660\xi^{16} - 5800\xi^{14} + 29350\xi^{12} - 87000\xi^{10} + 148500\xi^8 - 135000\xi^6 + 54000\xi^4 - 8100\xi^2 + 315] \\
&= 654729075 - 40 \times 34459425 + 660 \times 2027025 - 5800 \times 135135 + 29350 \times 10395 - 87000 \times 945 + 148500 \times 105 - 135000 \times 15 + 54000 \times 3 - 8100 \times 15 + 315 \\
&= 67003200.
\end{aligned}$$

47.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_3\psi_3\psi_1\psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{12} - 16\xi^{10} + 84\xi^8 - 180\xi^6 + 135\xi^4] \\
&= 10395 - 16 \times 945 + 84 \times 105 - 180 \times 15 + 135 \times 3 \\
&= 1800.
\end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi_5\psi_5\psi_1\psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^3 - 3\xi)] \\
&= \mathbb{E}[\xi^{14} - 23\xi^{12} + 190\xi^{10} - 690\xi^8 + 1125\xi^6 - 675\xi^4] \\
&= 135135 - 23 \times 10395 + 190 \times 945 - 690 \times 105 + 1125 \times 15 - 675 \times 3 \\
&= 18000.
\end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_5 \psi_5 \psi_5 \psi_1] &= \mathbb{E}[\xi(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{16} - 30\xi^{14} + 345\xi^{12} - 1900\xi^{10} + 5175\xi^8 - 6750\xi^6 + 3375\xi^4] \\
 &= 2027025 - 30 \times 135135 + 645 \times 10395 - 1900 \times 945 + 5175 \times 105 - 6750 \times 15 \\
 &= 216000.
 \end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_3 \psi_3 \psi_3 \psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{14} - 19\xi^{12} + 132\xi^{10} - 432\xi^8 + 675\xi^6 - 405\xi^4] \\
 &= 135135 - 19 \times 10395 + 132 \times 945 - 432 \times 105 + 675 \times 15 - 405 \times 3 \\
 &= 25920.
 \end{aligned}$$

51.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_3 \psi_3 \psi_5 \psi_5] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{16} - 24\xi^{14} + 219\xi^{12} - 1000\xi^{10} + 2595\xi^8 - 3600\xi^6 + 2025\xi^4] \\
 &= 2027025 - 24 \times 135135 + 219 \times 10395 - 1000 \times 945 + 2595 \times 105 - 3600 \times 15 \\
 &= 339840.
 \end{aligned}$$

52.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\psi_5 \psi_5 \psi_5 \psi_3] &= \mathbb{E}[(\xi^3 - 3\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)(\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi)] \\
 &= \mathbb{E}[\xi^{18} - 33\xi^{16} + 435\xi^{14} - 2935\xi^{12} + 10875\xi^{10} - 22275\xi^8 + 23625\xi^6 - 10125\xi^4] \\
 &= 34459425 - 33 \times 2027025 + 435 \times 135135 - 2935 \times 10395 + 10875 \times 945 - 22275 \times 105 \\
 &= 4104000.
 \end{aligned}$$