



**HAL**  
open science

# Dynamique non linéaire des structures mécaniques: application aux systèmes à symétrie cyclique

Aurelien Grolet

► **To cite this version:**

Aurelien Grolet. Dynamique non linéaire des structures mécaniques: application aux systèmes à symétrie cyclique. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole centrale de Lyon, 2013. Français. NNT : . tel-01727750

**HAL Id: tel-01727750**

**<https://theses.hal.science/tel-01727750v1>**

Submitted on 9 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

**Docteur de l'École Centrale de Lyon**  
(Spécialité Mécanique)

par

Aurélien GROLET

## **Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique**

présentée et soutenue publiquement le 4 décembre 2013, devant le jury d'examen:

R. OHAYON, Professeur, LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers	Président
G. KERSCHEN, Professeur, LTAS, Université de Liège	Rapporteur
B. COCHELIN, Professeur, LMA, Université de Marseille	Rapporteur
M.C. GILSON, Ingénieur d'Étude Snecma, Villaroche	Examineur
P. MALBOS, Maître de Conférences, ICJ, Université Claude Bernard, Lyon	Examineur
F. THOUVEREZ, Professeur, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Directeur de thèse



## Résumé

D'un point de vue industriel, la mise en place de nouvelles architectures de systèmes mécaniques nécessite un long processus de conception permettant de définir et d'anticiper le comportement. Dans le cas particulier des systèmes aéronautiques tels que les moteurs d'avions, un certain nombre de pièces sont particulièrement sensibles car elles doivent répondre à des impératifs stricts en termes d'encombrement, de performance et de tenue mécanique. Dans ce contexte, la prévision du comportement vibratoire revêt une importance particulière puisqu'elle permet d'évaluer le niveau des sollicitations cycliques appliquées sur le système et guide ainsi la détection en amont d'éventuels problèmes de fatigue des matériaux. La plupart du temps, des modèles numériques sont utilisés pour représenter les structures, et le comportement est simulé en résolvant un ensemble d'équations. Pour atteindre un niveau de détail répondant au besoin industriel, ces modèles peuvent être particulièrement gros, et la résolution des équations associées demande des ressources et des temps de calcul considérables. De plus, pour rendre compte au mieux des comportements observés expérimentalement, il est souvent nécessaire de prendre en compte des phénomènes non-linéaires, ce qui augmente encore la difficulté.

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent cette problématique du comportement vibratoire des structures non-linéaires et s'orientent autour de deux axes : la réduction de modèle et le calcul des solutions multiples.

L'objectif du premier axe est de contribuer à la construction de modèles numériques non-linéaires réduits utilisables en conception de systèmes industriels et de proposer des outils d'exploitation et d'interprétation de ces modèles. En particulier, on considère le cas des méthodes de projection de Galerkin et on montre qu'elles sont à même de construire des modèles réduits réalistes. Des méthodes complémentaires de réduction de modèles sont également présentées dans le cas particulier de la recherche de solutions par la méthode de la balance harmonique (HBM) : on s'intéressera en particulier à des méthodes de sélection d'harmoniques. Après avoir comparé les différentes méthodes proposées sur un exemple simple de poutre non-linéaire, elles sont appliquées à un modèle de structure industrielle représentant une aube d'hélice d'open rotor.

Le second axe de ces travaux concerne le calcul de solutions multiples pour les systèmes dynamiques non-linéaires. Une particularité de ces systèmes est en effet de présenter plusieurs configurations stables pour un état de sollicitation donné. Il s'agira ici de proposer des méthodes de calcul permettant de dresser la liste exhaustive des solutions possibles. Le travail présenté se concentre sur la recherche de solutions périodiques par la méthode de la balance harmonique pour des systèmes possédant des non-linéarités polynomiales. Ces restrictions conduisent à la résolution de systèmes polynomiaux pour lesquels il existe des méthodes permettant de calculer l'ensemble des solutions. En particulier, on propose l'utilisation originale de méthodes basées sur le calcul de bases de Groebner pour la résolution de systèmes polynomiaux issus de la mécanique. Les différentes méthodes présentées sont illustrées et comparées sur des exemples simples. Les résultats montrent que même pour des systèmes simples, le comportement dynamique peut être très complexe.

**Mots-clés:** systèmes mécaniques, vibrations, dynamique non-linéaire, réduction de modèle, solutions multiples

## Abstract

In an industrial context, the design of new mechanical systems requires long design processes in order to define and to anticipate the behavior of all the constitutive parts. In the particular case of aeronautical structures such as plane engines, design is especially critical since they have to meet various and strict needs (life duration, performances . . .). Then, anticipating vibratory behavior is very important as this provides information about cyclic solicitations and fatigue. Most often, numerical models are used to mimic the structure and mechanical behavior is simulated by solving a set of differential equations. In the case of industrial structures, such models can be quite large and their resolution very time-consuming. Moreover, in order to model experimental behavior realistically, it is often necessary to take nonlinear phenomena into account and thus increase the required computational effort.

The work presented in this PhD deals with the study of mechanical nonlinear systems. It focuses on two principal directions : model reduction and multiple solutions computation.

The goal of the first direction is to contribute to the building of numerical reduced order models usable in industrial context and to propose tools to exploit and interpret them. Particularly, Galerkin projection methods are investigated in the context of nonlinear systems reduction, showing that those methods are, under certain conditions, able to give a reliable picture of full system behavior. In the case of the harmonic balance method, complementary methods are also proposed to reduce the size of the algebraic equations system by using harmonic selection techniques. The presented methods are firstly illustrated and compared on a simple nonlinear beam example ; they are then applied to an industrial model of open rotor blade.

The second direction of this work deals with the computation of multiple solutions arising in nonlinear dynamical systems. Indeed, it has been shown that such systems can present different stable configurations for a given solicitation. The objective here is to provide tools for computing such multiple solutions. We only consider the case of periodic solutions for systems with polynomial nonlinearities, treated with harmonic balance method. These hypotheses enable one to search for multiple states as solutions of polynomial algebraic systems of equations, for which some methods exist to compute the entire set of solutions. In particular, we propose to use methods relying on Groebner basis computation, in order to compute the whole set of solutions. The proposed methods are illustrated and compared on simple examples, showing that even such simple systems can present very complex dynamical behavior.

**Keywords:** mechanical systems, vibration, nonlinear dynamics, reduced order model, multiple solutions

## Remerciements

Ces travaux de thèse ont été effectués au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon, et ont été financés par le motoriste SNECMA au travers d'une convention CIFRE.

En premier lieu, je tiens à remercier profondément mon directeur de thèse Fabrice Thouverez de m'avoir proposé ce travail de recherche et de m'avoir encadré durant ces trois années. Ses conseils et ses choix d'orientations ont été d'une grande valeur, et il a toujours su se montrer à l'écoute en acceptant même une balade du côté des mathématiques appliquées.

Je tiens ensuite à adresser de sincères remerciements à Bruno Cochelin et Gaetan Keerschen de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteur de ce manuscrit. Mes remerciements s'adressent également à Roger Ohayon qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de soutenance.

Bien avidement, je remercie SNECMA pour avoir financé ces travaux, et plus particulièrement l'ingénieur d'étude Marie-Charline Gilson, qui fut ma correspondante principale à SNECMA, et avec qui les discussions de travail furent des plus agréables.

Je remercie également Philippe Malbos, maître de conférence en mathématique à L'institut Camille Jordan, qui a accepté de participer au jury de thèse, et dont l'aide m'aura été précieuse pour lever certaines difficultés liées aux bases de Gröbner.

J'adresse ensuite toute ma reconnaissance à Laurent Blanc, pour l'aide qu'il m'a apporté lors de la rédaction de ce manuscrit et lors de la relecture. Plus généralement, je remercie toutes les personnes de l'équipe d2s que j'ai eu l'occasion de côtoyer et qui ont su faire de ces trois années passées au LTDS un moment agréable.

Enfin, j'adresse de profonds remerciements à mes parents qui m'ont soutenu sans failles pendant toutes ces années d'études.



*A mes parents.*





# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Généralités sur la dynamique non-linéaire des systèmes mécaniques</b>	<b>5</b>
1.1 Formulation générale d'un problème de vibration non-linéaire	6
1.1.1 Modélisation du système mécanique	6
1.1.1.1 Equations générales	6
1.1.1.2 Forces d'excitation	7
1.1.1.3 Amortissement	7
1.1.2 Non-linéarités envisagées	8
1.1.2.1 Non-linéarités géométriques	8
1.1.2.2 Frottement	9
1.2 Méthodes d'estimation des solutions	9
1.2.1 Méthodes dans le domaine temporel	10
1.2.1.1 Méthodes de perturbation	10
1.2.1.2 Intégration temporelle	10
1.2.1.3 Méthodes de tir	11
1.2.2 Méthodes de Ritz-Galerkin	12
1.2.2.1 Méthodes de collocation	13
1.2.2.2 Méthode de la balance harmonique	13
1.2.2.3 Compléments sur la HBM	14
1.2.3 Calcul des solutions des systèmes d'équations algébriques	16
1.2.3.1 Résolution du système non-linéaire	16
1.2.3.2 Méthodes de continuation	19
1.2.3.3 Complément sur les méthodes de continuation	22
1.2.4 Solution d'un système non-linéaire autonome : notion de modes non-linéaires	24
1.2.4.1 Modes linéaires	25
1.2.4.2 Modes non-linéaires	25

1.2.4.3	Exemples de modes non-linéaires . . . . .	28
1.3	Analyse des solutions . . . . .	30
1.3.1	Calcul de la stabilité des solutions . . . . .	30
1.3.1.1	Définitions . . . . .	30
1.3.1.2	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	31
1.3.1.3	Stabilité des solutions périodiques, théorie de Floquet . . . . .	32
1.3.1.4	Autres méthodes de calcul numérique de la stabilité . . . . .	35
1.3.2	Phénoménologie non-linéaire . . . . .	38
1.3.2.1	Résonance principale . . . . .	38
1.3.2.2	Résonance secondaire . . . . .	39
1.3.2.3	Localisation forcée . . . . .	41
1.4	Bilan du chapitre . . . . .	42
 <b>Chapitre 2 Méthodes de Galerkin pour la réduction de modèles de systèmes dynamiques non-linéaires</b>		<b>45</b>
2.1	Enjeux de la réduction de modèle . . . . .	46
2.1.1	Objectifs de la réduction . . . . .	46
2.1.2	Estimation de l'erreur de réduction . . . . .	46
2.1.3	Exemple d'illustration . . . . .	47
2.2	Réduction par projection de Galerkin . . . . .	49
2.2.1	Méthodes de calcul d'une base de projection ( <i>a priori</i> ) . . . . .	50
2.2.1.1	Bases structurales . . . . .	50
2.2.1.2	Bases modales . . . . .	52
2.2.1.3	Dérivés modales . . . . .	54
2.2.1.4	Base de Krylov . . . . .	56
2.2.1.5	Bi-linéarisation et méthodes variationnelles . . . . .	61
2.2.2	Méthodes de calcul d'une base de projection ( <i>a posteriori</i> ) . . . . .	64
2.2.2.1	Proper Orthogonal Decomposition (POD) . . . . .	64
2.2.2.2	Modes compagnons . . . . .	65
2.2.3	Méthodes de Galerkin non-linéaires . . . . .	71
2.3	Evaluation des termes non-linéaires réduits . . . . .	73
2.3.1	Développement de la non-linéarité . . . . .	73
2.3.2	Méthodes d'évaluation des raideurs réduites . . . . .	73
2.3.3	Exemple d'application . . . . .	76
2.4	Bilan du chapitre . . . . .	77

---

<b>Chapitre 3 Extension des méthodes de réduction de modèle aux systèmes traités par HBM</b>	<b>79</b>
3.1 Proper Generalized decomposition (PGD)	80
3.1.1 Optimal Galerkin PGD	80
3.1.1.1 Présentation	81
3.1.1.2 Cas de la recherche de solutions périodiques pour les systèmes non-linéaires	82
3.1.2 Progressive Galerkin PGD	83
3.1.2.1 Présentation	84
3.1.2.2 Cas de la recherche de solutions périodiques pour les systèmes non-linéaires	85
3.1.2.3 Remarques sur une approximation à un mode	86
3.1.3 Variantes	86
3.1.3.1 Algorithme d'Arnoldi	86
3.1.3.2 Galerkin PGD avec déflation d'opérateur	87
3.1.4 Exemple d'application de la PGD aux problèmes de vibration non-linéaires	87
3.1.4.1 Solutions forcées	87
3.1.4.2 Solutions libres	89
3.1.5 Conclusions	90
3.2 Réduction du système d'équation de la HBM par sélection d'harmonique	92
3.2.1 Etat de l'art sur les méthodes de sélection d'harmonique	92
3.2.1.1 Méthodes globales	92
3.2.1.2 Méthodes locales	94
3.2.1.3 Limitations	95
3.2.2 Méthode de sélection par prédiction tangente	95
3.2.2.1 Application à un ddl particulier	96
3.2.2.2 Application au système complet	97
3.2.3 Exemple d'application sur un système avec non-linéarité géométrique	98
3.2.4 Exemple d'application sur un système avec frottement	99
3.3 Bilan du chapitre	103
<b>Chapitre 4 Méthodes de recherche des solutions multiples pour les systèmes dynamiques non-linéaires</b>	<b>105</b>
4.1 Systèmes dynamiques non-linéaires et solutions multiples	106
4.1.1 Méthodes dans le domaine temporel	106
4.1.2 HBM et non-linéarité polynomiale	107
4.1.3 Méthode de Newton-Raphson modifiée	108

---

4.1.4	Exemple d'application . . . . .	108
4.2	Homotopie . . . . .	109
4.2.1	Homotopie linéaire . . . . .	109
4.2.1.1	Choix du polynôme de départ . . . . .	110
4.2.1.2	Exemple d'application de l'homotopie linéaire . . . . .	113
4.2.2	Homotopie polyédrale . . . . .	113
4.2.2.1	Polynôme de départ et homotopie polyédrale . . . . .	114
4.2.2.2	Recherche des vecteurs beta . . . . .	115
4.2.2.3	Résolution du système binomial . . . . .	115
4.3	Résolution des systèmes polynomiaux à l'aide de bases de Gröbner . . . . .	116
4.3.1	Bases de Gröbner . . . . .	117
4.3.1.1	Définition . . . . .	118
4.3.1.2	Calcul d'une base de Gröbner . . . . .	118
4.3.2	Bases de Gröbner et résolution de systèmes polynomiaux . . . . .	120
4.3.2.1	Base de Gröbner avec ordre d'élimination . . . . .	120
4.3.2.2	Rational Univariate Representation (RUR) . . . . .	121
4.3.3	Systèmes polynomiaux et algèbre linéaire . . . . .	121
4.3.3.1	Espace quotient . . . . .	122
4.3.3.2	Matrices de multiplication . . . . .	122
4.3.3.3	Application à la résolution de systèmes polynomiaux . . . . .	123
4.3.4	Exemples d'application sur un système cyclique . . . . .	124
4.3.5	Conclusions . . . . .	127
4.4	Résolution des systèmes à symétrie cyclique : polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini . . . . .	128
4.4.1	Système invariant . . . . .	128
4.4.2	Décomposition et invariants polynomiaux . . . . .	129
4.4.3	Matrice de multiplication des invariants primaires . . . . .	130
4.4.3.1	Décomposition et application à la résolution du système polyno- mial cible . . . . .	130
4.4.3.2	Construction de la base du quotient invariant . . . . .	130
4.4.4	Exemple d'applications sur un système à symétrie cyclique . . . . .	131
4.4.4.1	Définition des groupes laissant les équations invariantes . . . . .	132
4.4.4.2	Groupe cyclique $\mathcal{C}_2$ . . . . .	132
4.4.4.3	Groupe $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . . . . .	135
4.4.5	Conclusions . . . . .	136
4.5	Continuation en amortissement . . . . .	137

---

4.5.1	Stratégie proposée . . . . .	138
4.5.2	Application . . . . .	140
4.5.2.1	Calcul des solutions du système non amorti . . . . .	140
4.5.2.2	Continuation en amortissement . . . . .	141
4.5.2.3	Continuation en fréquence . . . . .	142
4.5.3	Conclusions . . . . .	144
4.6	Bilan du chapitre . . . . .	144
<b>Chapitre 5 Application au cas industriel de l'open rotor</b>		<b>147</b>
5.1	Description du cas-test . . . . .	148
5.1.1	Contexte : la technologie des open rotors . . . . .	148
5.1.2	Problématique scientifique . . . . .	148
5.2	Stratégie de modélisation . . . . .	149
5.2.1	Non-linéarités géométriques . . . . .	149
5.2.1.1	Formulation du problème continu . . . . .	149
5.2.1.2	Discrétisation par éléments finis . . . . .	150
5.2.2	Prise en compte de la symétrie cyclique . . . . .	152
5.2.2.1	Définition des composantes cycliques . . . . .	152
5.2.2.2	Particularités du calcul des modes propres . . . . .	153
5.2.2.3	Cas des systèmes non-linéaires . . . . .	154
5.3	Réduction des modèles éléments finis générés par SAMCEF . . . . .	154
5.3.1	Stratégie de calcul et implémentation . . . . .	154
5.3.2	Application sur un cas académique de poutre 3D . . . . .	155
5.3.2.1	Description du modèle . . . . .	155
5.3.2.2	Réduction du modèle : cas 1 . . . . .	156
5.3.2.3	Réduction du modèle : cas 2 . . . . .	157
5.4	Application à la réduction du modèle de pale de l'open rotor . . . . .	160
5.4.1	Description du modèle . . . . .	160
5.4.2	Réduction sur les premiers modes linéaires . . . . .	161
5.4.3	Introduction des dérivées modales dans la base de projection . . . . .	163
5.5	Bilan du chapitre . . . . .	165
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>167</b>
<b>Annexe A Formatage du modèle SAMCEF et stratégie de calcul pour la réduction de modèle</b>		<b>171</b>
A.0.1	Pré-traitement du modèle SAMCEF . . . . .	171

A.0.1.1	Formatage du jeu de données . . . . .	171
A.0.1.2	Analyse modale préliminaire . . . . .	172
A.0.2	Procédure STEP à partir de SAMCEF . . . . .	172
A.0.3	Calcul des dérivées modales à l'aide de SAMCEF . . . . .	173
<b>Bibliographie</b>		<b>175</b>
<b>Liste des publications de l'auteur</b>		<b>185</b>
<b>Table des figures</b>		<b>187</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>191</b>

# Introduction

La mise en place de nouvelles architectures de structures complexes - telles que les moteurs d'avions - nécessite une longue étape préliminaire de conception. Il est alors crucial de prédire le comportement des pièces mécaniques pour en garantir la tenue pendant leur durée de vie. Dans ce contexte, la prédiction du comportement vibratoire revêt une importance particulière car elle permet d'évaluer le niveau des sollicitations cycliques appliquées sur le système et guide ainsi la détection en amont d'éventuels problèmes de fatigue des matériaux.

Deux approches complémentaires participent de la conception : les essais expérimentaux et les essais numériques. Les études expérimentales permettent d'identifier les phénomènes physiques importants et génèrent des bases de données de référence. Cependant, elles peuvent se révéler coûteuses en temps et en moyens mobilisés. L'idéal est souvent de se limiter à des essais partiels suivis d'un essai unique sur le système complet en cas de stricte nécessité, pour obtenir une certification par exemple. Les essais numériques permettent quant à eux de réduire significativement les besoins en essais vibratoires sur structures réelles. Ils pallient à l'absence d'un prototype ou à son indisponibilité, par exemple au début du cycle de conception. En général, les études sont réalisées grâce à des logiciels de calcul par éléments finis : les structures sont discrétisées sous forme de maillages et les solutions sont obtenues en résolvant des systèmes d'équations différentielles. Une hypothèse de fonctionnement linéaire est la plupart du temps adoptée en raison des difficultés techniques ou des coûts associés à une modélisation plus réaliste.

L'hypothèse de linéarité confine les solutions à un domaine de validité restreint voire à une non-représentativité totale du comportement réel. Par exemple, les structures en grand déplacement (non-linéarités géométriques) ou présentant du frottement ne peuvent être traitées par des approches linéaires. Les systèmes d'équations à résoudre deviennent plus compliqués et il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes spécifiques, le plus souvent itératives, pour en déterminer les solutions.

Différents travaux ont été réalisés au LTDS dans ce cadre et ont été appliqués aux cas des machines tournantes. Les problématiques associées aux phénomènes de contact ont été étudiées, par exemple, pour prédire l'influence du frottement et de l'usure en pied d'aube de turboréacteur [1,2] sur la réponse dynamique. Des modèles décrivant le contact rotor / stator en tête d'aube pour des turbines basse pression ont aussi été proposés [3]. Les non-linéarités envisagées dans ces thèses sont dites localisées car elles n'agissent que sur un sous-ensemble du système. Cette particularité permet de limiter le nombre de variables en condensant le problème sur les degrés de liberté non-linéaires. Mais cette réduction ne suffit pas quand le modèle met en jeu un nombre important de ces degrés de liberté, par exemple pour décrire le frottement au niveau d'interfaces finement discrétisées : le temps de calcul requis gêne l'accès aux solutions et empêche toute étude de sensibilité. La situation est encore pire pour les non-linéarités dites distribuées, c'est-à-dire agissant sur l'ensemble des degrés de liberté de la structure. Pour des



modèles éléments finis de grande taille, le traitement des non-linéarités peut très vite devenir impossible même avec des calculateurs puissants. Par ailleurs, au-delà des problèmes de coûts de calcul, certaines propriétés des systèmes non-linéaires restent difficiles à caractériser sur des modèles industriels, bien qu'elles soient d'une importance primordiale pour leur caractérisation (stabilité, bifurcation, localisation, ...).

L'objectif de ce travail est de contribuer à la construction de modèles numériques non-linéaires réduits utilisables en conception de systèmes industriels et de proposer des outils de simulations et d'interprétations de ces modèles.

Le premier enjeu est de proposer et d'évaluer des méthodes de réduction de modèle adaptées aux systèmes dynamiques non-linéaires de grande taille. Ces méthodes doivent être en mesure de représenter l'état du système en fonction d'un nombre réduit de variables (et donc d'un nombre réduit d'équations), tout en maintenant acceptable l'erreur commise par rapport au modèle complet. La mise en place de tels modèles doit permettre à terme de réaliser de nombreuses simulations à moindre coût à des fins d'optimisation. L'application industrielle visée est le traitement d'un modèle d'aube d'hélice d'open rotor : ces aubes, très élancées, peuvent faire l'objet de grands déplacements et sont soumises à des efforts présentant des non-linéarités géométriques. Les résultats de simulations doivent montrer la faisabilité de la méthode et prédire le comportement de l'aube.

Le deuxième enjeu est d'améliorer les outils nécessaires au traitement des spécificités intrinsèques des systèmes différentiels non-linéaires. L'étude des vibrations des structure mécaniques s'inscrit en effet plus largement dans la thématique des systèmes dynamiques, une branche des mathématiques relativement récente - puisqu'initiée au début du 20e siècle - qui montre l'existence d'une grande variété de comportements. Or, contrairement aux systèmes linéaires, pour lesquels les solutions sont bien connues et peuvent être calculées de manière analytique, les systèmes non-linéaires nécessitent des méthodes de résolution particulières, la plupart du temps numériques et itératives. Cela complique, par exemple, l'étude de bifurcations et d'instabilités absentes dans le cas linéaire. Les bifurcations peuvent entraîner le système dans une configuration imprévue et dangereuse : le phénomène de localisation conduit ainsi les structures à symétrie cyclique, de type roue aubagée par exemple, à vibrer avec une forte amplitude impliquant quelques aubes seulement [4,5]. Un autre phénomène typique des systèmes non-linéaires est l'existence de plusieurs configurations stables pour un même état de sollicitation. Ce phénomène de solution multiple peut devenir problématique s'il existe un état de vibration stable en dehors des zones de sécurité délimitées lors de la conception. Par conséquent, le calcul de toutes les solutions et le suivi des bifurcations sont importants et feront l'objet d'une attention particulière dans ce manuscrit.

Pour répondre aux différents objectifs présentés dans cette introduction, le manuscrit est organisé de la façon suivante :

- Le chapitre 1 présente d'une manière générale la théorie des vibrations non-linéaires. Après avoir rappelé le formalisme et le type des équations considérées, nous présenterons dans une première partie les différentes méthodes permettant d'en déterminer une solution. En particulier, nous mettrons l'accent sur la méthode de la balance harmonique (HBM) et sur les méthodes de continuation qui seront utilisées tout au long du manuscrit. Dans une seconde partie, on rappelle certaines spécificités des vibrations en présence de non-linéarités, comme la dépendance amplitude - fréquence, la présence de bifurcation ou encore le concept de modes non-linéaires.

- 
- Le chapitre 2 traite de la réduction de modèle pour les systèmes dynamiques non-linéaires par des méthodes de Galerkin. Après avoir rappelé le principe de ces méthodes, nous présenterons différentes possibilités de choix pour la base de réduction et nous évaluerons la capacité de chacune à retranscrire correctement les phénomènes non-linéaires en les comparant à l'aide d'un exemple simple de poutre non-linéaire. Une attention particulière sera portée à l'évaluation des projections des efforts non-linéaires.
  - Le chapitre 3 présente des extensions des méthodes de réduction de modèle au cas des systèmes traités par la HBM. Dans un premier temps, nous présenterons les méthodes de PGD (Proper Generalized Decomposition) et nous en proposerons une application originale à la recherche des solutions périodiques d'un problème de vibration non-linéaire. Nous poursuivrons en traitant le cas particulier de la réduction du nombre de variables pour les systèmes algébriques issus de la HBM : il s'agit de présenter les différentes méthodes de sélection d'harmonique existantes et de proposer une nouvelle méthode directement intégrable dans les processus de continuation.
  - Le chapitre 4 est dédié à la recherche de solutions multiples pour les systèmes dynamiques, et s'inscrit dans la continuité des travaux d'E. Sarrouy [6]. Après avoir ramené le problème dynamique à la résolution d'un système d'équations polynomiales, nous présenterons différentes méthodes permettant d'en obtenir toutes les solutions. Dans un premier temps, nous rappellerons les méthodes d'homotopies polynomiales qui permettent d'obtenir toutes les solutions en utilisant une procédure basée sur des méthodes de continuation. Nous présentons ensuite l'utilisation originale des bases de Groebner pour la résolution des systèmes polynomiaux dans le cadre de systèmes mécaniques. Enfin nous développerons une méthode permettant la prise en compte de la symétrie du système pour en diminuer le nombre de solutions et ainsi accélérer sa résolution.
  - Enfin, le chapitre 5 présente l'application des méthodes de réduction au modèle de la pale de l'open rotor fourni par la société Snecma du groupe Safran. Dans un premier temps, nous rappellerons la problématique de la modélisation des structures à symétrie cyclique ainsi que la prise en compte des non-linéarités géométriques. Nous poursuivrons en présentant les différentes étapes de la réduction du modèle industriel à partir d'un code éléments-finis standard, tout en les validant sur un exemple simple de poutre 3D. Enfin, nous appliquerons la procédure de réduction au modèle industriel.
  - Nous terminerons par une conclusion et quelques perspectives pour des travaux futurs.



# Chapitre 1

## Généralités sur la dynamique non-linéaire des systèmes mécaniques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Formulation générale d'un problème de vibration non-linéaire . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1	Modélisation du système mécanique . . . . .	6
1.1.2	Non-linéarités envisagées . . . . .	8
<b>1.2</b>	<b>Méthodes d'estimation des solutions . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	Méthodes dans le domaine temporel . . . . .	10
1.2.2	Méthodes de Ritz-Galerkin . . . . .	12
1.2.3	Calcul des solutions des systèmes d'équations algébriques . . . . .	16
1.2.4	Solution d'un système non-linéaire autonome : notion de modes non-linéaires . . . . .	24
<b>1.3</b>	<b>Analyse des solutions . . . . .</b>	<b>30</b>
1.3.1	Calcul de la stabilité des solutions . . . . .	30
1.3.2	Phénoménologie non-linéaire . . . . .	38
<b>1.4</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>42</b>

---

Ce premier chapitre est consacré aux vibrations non-linéaires d'un point de vue général. Après avoir présenté rapidement les systèmes considérés, on rappelle les grandes étapes de modélisation d'un système mécanique et les équations qui en découlent. Du fait de la présence de termes non-linéaires dans les équations du mouvement, de nouveaux phénomènes apparaissent et des méthodes de résolution spécifiques doivent être appliquées. On présente ici les techniques de résolution les plus couramment utilisées, avec un accent particulier sur la méthode de la balance harmonique qui sera utilisée dans le reste de ce manuscrit. Enfin, nous terminerons sur les méthodes permettant de déterminer la stabilité des solutions et nous ferons une présentation générale de la phénoménologie induite par les vibrations en présence de non-linéarités.

## 1.1 Formulation générale d'un problème de vibration non-linéaire

### 1.1.1 Modélisation du système mécanique

#### 1.1.1.1 Equations générales

On s'intéresse ici à l'étude des vibrations de structures mécaniques soumises à des efforts non-linéaires, en particulier aux structures cycliques de type hélices de turbopropulseurs. En fonctionnement, ces structures sont amenées à se déformer. L'objectif est de déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  d'une structure en tout point  $(x, y, z)$  et pour tout instant  $t$ . La connaissance du champ de déplacement permettra par la suite d'accéder aux contraintes dans le matériau et d'adapter le dimensionnement.

La modélisation de ce type de système fait en général intervenir une discrétisation (éléments finis [7, 8], méthode de Ritz [9], ...) qui amène à chercher le champ de déplacement sous la forme  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{x}(t)$ , où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme utilisées pour la discrétisation, et  $\mathbf{x}$  est le vecteur des degrés de liberté. Les équations aux dérivées partielles vérifiées par  $\mathbf{u}$  sont projetées sur l'espace engendré par les fonctions de forme et on obtient alors une version discrétisée des équations du mouvement ne faisant plus intervenir que des dérivées temporelles. Très généralement, après discrétisation, les équations prennent la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}_{ex}(t), \quad (1.1)$$

avec  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur  $(n \times 1)$  représentant l'évolution temporelle des degrés de liberté (ddl),  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  les matrices  $(n \times n)$  de masse, d'amortissement et de raideur,  $\mathbf{F}_{nl}$  le vecteur  $(n \times 1)$  des efforts non-linéaires et  $\mathbf{F}_{ex}$  le vecteur  $(n \times 1)$  des efforts d'excitation.

Dans certain cas, il peut être utile de transformer l'équation (1.1) en une équation différentielle ordinaire du premier ordre (équation d'état) de taille  $2n$ . Pour cela, on définit le vecteur d'état par  $\mathbf{y}(t)^T = [\mathbf{x}(t)^T, \dot{\mathbf{x}}(t)^T]^T$  et on pose :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \mathbf{H}_{ex}(t), \quad (1.2)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{F}_{nl} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{F}_{ex}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Les matrices de masse et de raideur (resp.  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$ ) sont calculées par assemblage de matrices élémentaires calculées sur un élément de référence et sont le plus souvent disponibles à partir des logiciels d'éléments finis. Pour plus de détails sur les formulations éléments finis, on pourra

se référer aux ouvrages [7,8]. On décrit dans la suite de cette section les modélisations adoptées pour les autres termes de l'équation (1.1).

### 1.1.1.2 Forces d'excitation

Les forces d'excitation correspondent aux sollicitations du milieu extérieur sur la structure. Dans le cas des machines tournantes, ces forces proviennent de phénomènes variés. La majeure partie des excitations en fonctionnement est liée au couplage entre les mouvements du fluide et de la structure. Dans le cadre de ces phénomènes aéroélastiques, on distingue les oscillations auto-entretenues et les oscillations forcées [10].

Dans le premier cas, les forces aérodynamiques, souvent instationnaires, sont liées aux mouvements de la structure, et se développent de manière auto-entretenu dans un échange énergétique entre la structure et le fluide. Le flottement fait partie de ces phénomènes auto-entretenus et correspond à une instabilité au voisinage d'une des fréquences propres de la structure. D'un point de vue physique, le flottement se caractérise par un amortissement aéroélastique négatif et il apparaît lorsque l'énergie apportée à la structure par le fluide est supérieure à l'énergie dissipée dans la structure [11,12]. Ce phénomène est particulièrement dangereux car après son apparition, le comportement de la structure est incontrôlable et peut mener à un endommagement sévère voire à la destruction de celle-ci. Les méthodes de prédiction du flottement font intervenir des stratégies de couplage entre équations du fluide et de la structure [13,14] et sont en dehors du cadre de ce manuscrit.

Dans le cas des oscillations forcées, l'excitation peut provenir des variations des caractéristiques de l'écoulement fluide autour de la structure (en supposant que le mouvement de la structure n'affecte pas le mouvement du fluide). C'est typiquement le cas dans les structures tournantes multi-étages où les sillages des redresseurs engendrent des excitations tournantes synchrones sur l'étage suivant [11]. L'excitation peut également être d'origine mécanique comme par exemple une excitation de balourd due à un défaut de masse, ou encore une excitation ponctuelle appliquée lors d'un test de caractérisation.

Dans la suite de ce manuscrit, on se limite à des forces d'excitation ponctuelles et harmoniques de période  $T$ , correspondant aux forces typiques appliquées lors d'essais expérimentaux. Le terme correspondant de l'équation (1.1) prend alors la forme générique suivante :

$$\mathbf{F}_{ex}(t) = \mathbf{F}_1^c \cos(\omega t), \quad (1.4)$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  correspond à la pulsation de l'excitation, et où  $\mathbf{F}_1^c$  correspond à la distribution spatiale des amplitudes de forçage (la plupart du temps ponctuelle).

### 1.1.1.3 Amortissement

Les sources d'amortissement pour les structures sont nombreuses (amortissement intrinsèque, frottement, interaction fluide structure ...) et nous présentons uniquement la modélisation qui sera adoptée dans ce manuscrit. Pour plus de détails sur la prise en compte et la modélisation de l'amortissement dans les structures mécaniques, on pourra par exemple consulter la thèse [15].

Parmi les sources d'amortissement, on distingue les sources linéaires des sources non-linéaires. Parmi les dispositifs linéaires on peut mentionner l'utilisation de matériaux viscoélastiques [16] ou encore d'amortisseurs dynamiques faisant intervenir un fluide [17]. Au niveau des sources non-linéaires, le frottement a depuis longtemps été utilisé pour contrôler le niveau vibratoire des structures telles que les hélices de turbopropulseurs, par exemple en jouant sur les jonctions en

pied d'aube [1,2], ou en intégrant directement des éléments frottants entre les sous-structures [11]. On se limitera ici à décrire la modélisation des sources d'amortissement linéaires.

Pour des études de vibrations, il est courant de prendre en compte l'amortissement après avoir discrétisé le problème. La matrice d'amortissement linéaire  $\mathbf{C}$  de l'équation (1.1) peut par exemple être construite en utilisant un amortissement de Rayleigh [18], combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur, sous la forme suivante :

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}, \quad (1.5)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients contrôlant le niveau d'amortissement. Lorsque c'est possible, ils sont déterminés à partir d'essais expérimentaux. En utilisant la base des modes propres linéaires pour projeter les équations, on montre que l'amortissement de Rayleigh peut être associé à un amortissement modal de matrice  $\mathbf{\Xi}$  définie par :

$$\mathbf{\Xi} = \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{\Omega}^{-1} + \beta\mathbf{\Omega}), \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{\Omega}$  représente la matrice diagonale des pulsations propres du système. La matrice  $\mathbf{\Xi}$  est diagonale, et dans base modale l'amortissement s'exprime par  $2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}$ .

Dans la suite de ce manuscrit, on se limitera en général à l'utilisation de l'amortissement de Rayleigh. Ne disposant pas d'essais expérimentaux pour évaluer les coefficients des modèles, ceux-ci ont été fixés a priori et seront rappelés à chaque application.

### 1.1.2 Non-linéarités envisagées

Pour les systèmes mécaniques, les sources d'efforts non-linéaires sont nombreuses et les phénomènes associés le sont tout autant. Nous présenterons simplement ici les deux types de non-linéarité qui seront considérés dans ce manuscrit.

#### 1.1.2.1 Non-linéarités géométriques

Dans l'étude des vibrations des structures déformables, les modèles se basent généralement sur des linéarisations justifiées par l'hypothèse des petites perturbations. Cependant lorsque les amplitudes des mouvements sont relativement grandes, cette hypothèse n'est plus valide et il est alors nécessaire de considérer l'expression complète du tenseur des déformations pour obtenir une bonne description des phénomènes [19] (voir également Chapitre 5, section 5.2.1). D'un point de vue algébrique, la force non-linéaire associée  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t))$  fait intervenir des termes polynomiaux de degré 3 et engendre une toute nouvelle phénoménologie par rapport au cas linéaire.

De nombreuses études ont été menées sur les non-linéarités géométriques, en particulier pour le cas des structures élancées ou minces (poutres [20], plaques [21, 22], coques [23]). Les applications sont variées : on peut citer par exemple la conception de MEMS [24, 25], de pales d'hélicoptères [26] ou l'étude d'instruments de musique tel que les gongs [27, 28]. Les applications avec prise en compte des non-linéarités géométriques pour des problèmes de dynamique 3D sont plus rares.

Dans ce manuscrit, on considère des forces non-linéaires provenant de non-linéarités géométriques, premièrement sur un modèle de poutre, pour illustrer la plupart des méthodes présentées (Chapitre 2 et 3), puis sur un modèle 3D de structure industrielle (Chapitre 5).

### 1.1.2.2 Frottement

Les phénomènes de frottement sont une source de non-linéarité très importante en mécanique puisqu'ils sont présents dans tout système assemblé. Si, à première vue, le frottement peut paraître néfaste puisqu'il entraîne une perte d'énergie, il s'avère être un élément important du contrôle vibratoire de structures telles que les pales de turbopropulseurs. Sa modélisation est donc importante quand on souhaite optimiser les dispositifs d'amortissement, ou encore prévoir l'usure qu'ils engendrent.

La modélisation du frottement nécessite un traitement spécial des nœuds des interfaces : il faut séparer les déplacements dans la direction normale des déplacements dans les deux directions tangentes et définir des lois spécifiques pour les deux ensembles de ddl. La première loi, appelée loi de contact, permet de détecter le contact entre deux sous-structures et de déterminer l'effort de pression appliqué. La seconde loi, appelée loi de frottement, exprime la valeur de l'effort de frottement en fonction de la force de pression. Les lois les plus connues sont la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb [11], dans ce cas, en notant  $\delta_n$  la pénétration entre les solides et  $\delta_t$  le déplacement relatif (tangent) entre les solides,  $F_n$  (reps.  $F_t$ ) l'effort normal (resp. tangent) et  $\mu$  le coefficient de frottement, les lois s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_n &= 0 \text{ si } \delta_n < 0, \text{ loi de contact} \\ \delta_n &= 0 \text{ si } F_n > 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_t &= 0 \text{ si } F_t < \mu F_n, \text{ loi de frottement} \\ F_t &= -\mu F_n \frac{\dot{\delta}_t}{\|\dot{\delta}_t\|} \end{aligned} \quad (1.8)$$

A la différence des non-linéarités géométriques, le frottement est une non-linéarité non-régulière puisque les efforts de contact sont discontinus. De nombreuses études utilisent une approximation continue des lois de contact pour résoudre les équations de la dynamique, par exemple en ajoutant des raideurs de pénalité [29]. La définition du frottement peut également être présentée sous forme dynamique dans le but de prendre en compte les phénomènes d'hystérésis qui lui sont associés (modèles de Bouc Wien [30], de LuGre [31] ...). La prise en compte directe des équations non-régulières (1.8) peut cependant se faire, par exemple en utilisant une approche par lagrangiens ou encore par lagrangien augmentés [2, 32].

Dans ce manuscrit, quelques exemples d'illustration font intervenir des lois de frottement régularisées, en particulier pour la présentation des méthodes de sélection d'harmonique au chapitre 3. La modélisation utilisée sera rappelée lors de la définition du cas-test.

## 1.2 Méthodes d'estimation des solutions

Nous présentons ici les différentes méthodes qui permettent d'obtenir une solution approchée du système différentiel non-linéaire de l'équation (1.1). On distingue deux catégories : les méthodes dans le domaine temporel et les méthodes de type Galerkin. On présente également les méthodes de résolution des systèmes algébriques non-linéaires, en particulier les méthodes de continuation nécessaire à l'estimation des solutions dépendant d'un paramètre.



## 1.2.1 Méthodes dans le domaine temporel

### 1.2.1.1 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation sont parmi les premières employées pour résoudre un système d'équations dynamiques non-linéaires. Ces méthodes consistent à introduire un paramètre  $\epsilon$ , suffisamment faible, caractérisant l'ordre de grandeur de la non-linéarité puis à rechercher les solutions sous la forme d'un développement de Taylor pour  $\epsilon$  proche de zéro :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \epsilon \mathbf{x}_1(t) + \epsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^{m+1}). \quad (1.9)$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.1), en regroupant les termes d'une même puissance de  $\epsilon$ , on obtient une série de  $m$  équations différentielles linéaires régissant l'évolution de chaque composante  $\mathbf{x}_i$ . La résolution de ces équations permet alors d'obtenir une approximation de la solution. Cependant, il est possible que des termes séculaires (ie tendant vers l'infini avec le temps) apparaissent lors des intégrations ce qui limite le domaine temporel de validité des solutions ainsi obtenues.

Pour pallier à ce problème des termes séculaires, il est possible d'utiliser la méthode de Lindstedt-Poincaré [33], qui propose un changement d'échelle de temps en introduisant une nouvelle variable sans dimension  $s$  définie par :

$$s = (\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)t. \quad (1.10)$$

En recherchant désormais les solutions sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t(s)) = \mathbf{y}(s) = \mathbf{y}_0(s) + \epsilon \mathbf{y}_1(s) + \epsilon^2 \mathbf{y}_2(s) + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^m), \quad (1.11)$$

en réécrivant les opérations de dérivation en fonction de la variable  $s$  et en regroupant tous les termes d'une même puissance de  $\epsilon$ , on obtient une fois encore une série d'équations différentielles linéaires. L'annulation des termes séculaires donne enfin les valeurs des différents paramètres  $\omega_k$ .

Enfin citons la méthode des échelles multiples qui a été largement utilisée dans la résolution de systèmes non-linéaires [4,33]. A l'instar de la méthode précédente, on introduit plusieurs échelles de temps  $T_0, T_1, T_2, \dots$  avec  $T_i = \epsilon^i t$  et on cherche les solutions sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon \mathbf{x}_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 \mathbf{x}_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^m). \quad (1.12)$$

Encore une fois, en injectant cette expression dans l'équation de vibration (1.1), en exprimant les opérateurs de dérivation par rapport aux nouvelles échelles de temps et en regroupant les termes d'une même puissance de  $\epsilon$ , on obtient une série d'équations différentielles linéaires régissant l'évolution de chaque composante. L'élimination des termes séculaires après intégration permet de déterminer les échelles de temps de chaque composante.

Les méthodes de perturbation présentées ici ont l'avantage de donner une solution sous forme analytique mais elles font intervenir des calculs analytiques lourds (en particulier pour les échelles multiples) ce qui limite leur utilisation à des systèmes de petite taille (quelques ddl). De plus, ces méthodes ne sont valables que dans le cas d'une non-linéarité faible ( $\epsilon \ll 1$ ), ce qui limite leur domaine d'application.

### 1.2.1.2 Intégration temporelle

Une autre manière de résoudre le problème dans le domaine temporel est d'intégrer directement les équations du mouvement, à partir de conditions initiales données, grâce à des schémas

d'intégration numérique [34]. Bon nombre de ces schémas sont conçus pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires (premier ordre en temps) de sorte qu'il est nécessaire de repasser en formulation d'état comme indiqué à l'équation (1.2) (ce qui, pour mémoire, a l'inconvénient de doubler le nombre de variables). La solution  $\mathbf{y}(t)$  (contenant les positions  $\mathbf{x}(t)$  et les vitesses  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ) est discrétisée en temps, et les opérateurs de dérivation par rapport au temps sont également discrétisés. En notant  $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i$ , il est alors possible d'exprimer  $\mathbf{y}(t_{i+1})$  en fonction des valeurs de  $\mathbf{y}$  et de  $\dot{\mathbf{y}}$  aux instants précédents selon l'expression suivante :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}(t = t_{i+1}) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{y}_{i+1-k} + (t_{i+1} - t_i) \sum_{k=0}^m \beta_k \dot{\mathbf{y}}_{i+1-k}. \quad (1.13)$$

On distingue le cas des schémas explicites ( $\beta_0 = 0$ ) et des schémas implicites ( $\beta_0 \neq 0$ ). Les premiers permettent une estimation rapide de la solution, puisque qu'ils ne requièrent qu'une simple évaluation (sommés et produits), mais sont soumis à des conditions sur la longueur du pas de temps entre deux instants pour assurer la stabilité du schéma. Pour les seconds, la stabilité est assurée inconditionnellement, mais la détermination de la solution passe par la résolution d'un système d'équations algébriques (possiblement non-linéaires) à chaque pas de temps, ce qui alourdit considérablement les calculs. Les valeurs des  $\alpha_k$  et des  $\beta_k$  sont en général choisies nulles au-delà d'un certain indice  $k_s$ . Par exemple, pour  $\alpha_1 = 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$  on retrouve le schéma d'Euler explicite et pour  $\alpha_1 = 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$  le schéma d'Euler implicite. Ces derniers schémas sont d'ordre 1, ce qui signifie que l'erreur commise est de l'ordre de  $t_{i+1} - t_i$ . Pour améliorer la précision des résultats, il est courant d'utiliser des schémas de Runge Kutta [35] dont le plus utilisé est le schéma d'ordre 4 (RK4). L'idée de ces derniers est de calculer itérativement la solution à l'instant  $t_{i+1}$  en se basant sur des valeurs de la solution ( $\mathbf{y}_{i+\frac{1}{2}}$  par exemple) calculées lors des itérations précédentes.

D'autres schémas, plus particuliers, sont capables de traiter directement le système d'équations différentielles d'ordre 2 (Eq.(1.1)), ce qui permet entre autres de s'affranchir du doublement du nombre de variables induit par la représentation d'état. Le plus utilisé de ces schémas est le schéma de Newmark [36] qui peut être vu comme une généralisation de certains schémas bien connus (comme les différences finies centrées en particulier).

L'emploi des intégrateurs temporels pour la résolution de systèmes dynamiques non-linéaires est très répandu du fait de leur précision et de leur simplicité d'utilisation. De plus, ces méthodes ne font aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de la non-linéarité et sont donc à même de traiter des problèmes de natures variées. Toutefois, lors de la recherche de solutions périodiques, il est nécessaire de calculer la réponse jusqu'à apparition d'un régime établi, cela implique une phase de calcul du régime transitoire qui peut s'avérer longue, en particulier si l'amortissement est faible.

### 1.2.1.3 Méthodes de tir

Les méthodes de tir (shooting methods) [37,38] sont des méthodes utilisées lors de la recherche de solutions périodiques à partir d'un intégrateur temporel. Elles permettent de s'affranchir du calcul du régime transitoire en utilisant une stratégie itérative de correction des conditions initiales. Plus précisément, pour des conditions initiales données à l'itération  $i$  :  $\mathbf{y}_0^{(i)} = \mathbf{y}^{(i)}(0)$ , on calcule la valeur de la solution au bout d'un temps  $T$  correspondant à une période. On regarde alors la distance  $d$  entre la valeur obtenue  $\mathbf{y}^{(i)}(T, \mathbf{y}_0^{(i)})$  et les conditions initiales  $\mathbf{y}_0^{(i)}$  :

$$d^{(i)} = d(\mathbf{y}_0^{(i)}) = \|\mathbf{y}^{(i)}(T, \mathbf{y}_0^{(i)}) - \mathbf{y}_0^{(i)}\|. \quad (1.14)$$

Si la distance  $d^{(i)}$  est nulle, on a trouvé une solution périodique de période  $T$  définie par les conditions initiales  $\mathbf{y}^{(i)}(0)$ . Dans le cas contraire, on doit corriger les conditions initiales de manière à diminuer la distance. Cette correction peut être déterminée par un développement à l'ordre 1 de la distance  $d$ . On obtient l'expression des conditions initiales à l'itération suivante par :

$$\mathbf{y}_0^{(i+1)} = \mathbf{y}_0^{(i)} + \Delta \mathbf{y}_0, \text{ avec } \frac{\partial d}{\partial \mathbf{y}_0}(\mathbf{y}_0^{(i)}) \Delta \mathbf{y}_0 = -d(\mathbf{y}_0^{(i)}). \quad (1.15)$$

Le processus de correction est ensuite appliqué aux conditions initiales jusqu'à ce que celles-ci correspondent à une solution périodique. Dans le cas où la période des oscillations n'est pas connue (calcul de modes non-linéaires par exemple), on peut adapter la méthode de tir en considérant que la période  $T$  est également une variable et en ajoutant une seconde équation, appelée équation de phase, permettant de fixer la phase de la solution (voir par exemple [38]). Un point particulier de la méthode est que le calcul de la matrice jacobienne  $\frac{\partial d}{\partial \mathbf{y}_0}$  fait intervenir l'évaluation de la matrice de monodromie (voir section 1.3.1.3) qui permet également de statuer sur la stabilité de la solution.

Les méthodes de tir s'avèrent efficaces pour traiter le cas de systèmes avec un faible nombre de variables. En revanche, pour de gros systèmes, les temps de calcul peuvent devenir rapidement élevés en raison de la nature itérative de la méthode et de l'utilisation d'intégrateurs temporels.

## 1.2.2 Méthodes de Ritz-Galerkin

Les méthodes de Galerkin supposent que la solution du système de l'équation (1.55) se décomposent sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k \boldsymbol{\eta}_k(t), \quad (1.16)$$

où les fonctions  $\boldsymbol{\eta}_k(t)$  sont fixées a priori. En remplaçant cette expression dans l'équation du mouvement (1.1), les équations ne sont pas forcément vérifiées et l'approximation induit une erreur définie par :

$$\mathbf{R}(\Psi, \boldsymbol{\eta}) = \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{M} \Psi_k \ddot{\boldsymbol{\eta}}_k + \mathbf{C} \Psi_k \dot{\boldsymbol{\eta}}_k + \mathbf{K} \Psi_k \boldsymbol{\eta}_k \right] + \mathbf{F}_{nl}(\Psi, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{F}_{ex}(t). \quad (1.17)$$

L'objectif des méthodes de Galerkin est de rendre ce résidu orthogonal à une base de fonctions test  $\boldsymbol{\zeta}_k(t)$   $k = 1..N$  en recherchant les coefficients  $\Psi$  vérifiant les équations de projection suivantes :

$$\int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{R}(\Psi, \boldsymbol{\eta}(t)) \boldsymbol{\zeta}_k(t) dt = 0, \quad k = 0..N. \quad (1.18)$$

Dans le cas où les fonctions tests sont égales aux fonctions utilisées pour l'approximation (ie  $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\zeta}_k$ )  $k = 1..N$ ) on parle de projection de Galerkin, dans le cas contraire on parle de projection de Petrov-Galerkin. Le choix des fonctions d'approximation est large et donne lieu à de nombreuses méthodes. Dans le cadre de la recherche de solutions périodiques, des fonctions trigonométriques sont souvent utilisées comme fonctions d'approximation (méthode de la balance harmonique, collocation trigonométrique ...). Pour des problèmes non réguliers (contact par exemple) il a été envisagé d'utiliser des bases d'ondelettes comme fonctions d'approximations [39]. On se contentera ici de décrire les deux principales méthodes utilisant les fonctions trigonométriques comme bases d'approximation : la collocation trigonométrique et la méthode de la balance harmonique.

### 1.2.2.1 Méthodes de collocation

Dans le cas des méthodes de collocation les fonctions test sont des fonctions de Dirac  $\zeta_k(t) = \delta(t - t_k)$  permettant d'évaluer l'expression du résidu en  $N$  instants  $t_k$ . Les fonctions  $\eta_k$  choisies pour l'approximation déterminent le type de méthode. Pour la recherche de solutions périodiques, il paraît naturel d'utiliser la base de Fourier  $[1, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)]$  pour  $k = 1, \dots, H$  comme fonctions d'approximation. Dans ce cas, on parle de collocation trigonométrique et l'approximation s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{x}}. \quad (1.19)$$

On doit alors évaluer le résidu pour  $N = 2H + 1$  pas de temps différents afin de construire le système algébrique non-linéaire que doivent vérifier les inconnues  $\Psi$ . En posant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= [t_0, \dots, t_{2H+1}]^T \\ \tilde{\mathbf{x}} &= [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_H^T]^T \\ \mathbf{F}_{nl}^{(coll)} &= [\mathbf{F}_{nl}(t_0)^T, \dots, \mathbf{F}_{nl}(t_{2H+1})^T]^T \\ \mathbf{F}_{ex}^{(coll)} &= [\mathbf{F}_{ex}(t_0)^T, \dots, \mathbf{F}_{ex}(t_{2H+1})^T]^T \\ \mathbf{L}_1 &= \mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_{N,1} \\ \mathbf{L}_{2k} &= (\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}) \otimes \cos(k\omega t) + (k\omega\mathbf{C}) \otimes \sin(k\omega t) \\ \mathbf{L}_{2k+1} &= (\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}) \otimes \sin(k\omega t) - (k\omega\mathbf{C}) \otimes \cos(k\omega t) \\ \mathbf{L} &= [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_{2H+1}] \end{aligned} \quad (1.20)$$

l'équation de collocation s'écrit :

$$\mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_{nl}^{(coll)}(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{F}_{ex}^{(coll)} = 0. \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) correspond à un système d'équations algébriques de taille  $N = (2H + 1)n$  qui peut être résolu à l'aide de la méthode de Newton. La collocation trigonométrique a été utilisée pour trouver les solutions périodiques de beaucoup de systèmes mécaniques non-linéaires liés à la dynamique des rotors [40] ou à l'amortissement par squeeze film [41].

### 1.2.2.2 Méthode de la balance harmonique

La méthode de la balance harmonique ou HBM (pour Harmonic Balance Method) est un cas particulier des méthodes de Galerkin où les fonctions d'approximation  $\eta_k(t)$  correspondent à la base de Fourier et où les fonctions tests  $\zeta_k$  sont égales aux fonctions d'approximation. La résolution par HBM revient en fait à rechercher les solutions de l'équation (1.55) sous forme de séries de Fourier tronquées à l'harmonique  $H$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^H (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{x}}, \quad (1.22)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= [1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)], \\ \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{T}(t) \otimes \mathbf{I}_n, \\ \tilde{\mathbf{x}} &= [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_H^T]^T. \end{aligned} \quad (1.23)$$

L'expression des dérivées premières et secondes par rapport au temps s'exprime alors par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}(t)(\nabla\tilde{\mathbf{x}}) \text{ et } \ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}(t)(\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}), \quad (1.24)$$

avec  $\nabla$  l'opérateur de dérivation dans le domaine fréquentiel de taille  $(2H + 1)n \times (2H + 1)n$  défini par :

$$\nabla = \text{diag}(0, \nabla_1, \dots, \nabla_H), \quad \nabla_k = k\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n. \quad (1.25)$$

En substituant l'équation (1.22) dans l'équation (1.55) et en projetant les équations obtenues sur la base  $\mathbf{Q}(t)$  on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} (\mathbf{Q}(t)^T \mathbf{M} \mathbf{Q}(t) \nabla^2 + \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{C} \mathbf{Q}(t) \nabla + \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{K} \mathbf{Q}(t)) dt \right] \tilde{\mathbf{x}} \\ & + \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{F}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}) dt = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{F}_{ex}(t) dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}, \quad (1.27)$$

avec  $\mathbf{Z}$  la matrice de rigidité dynamique définie par :

$$\mathbf{Z}(\omega) = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{Z}_1(\omega), \dots, \mathbf{Z}_H(\omega)) \text{ avec } \mathbf{Z}_k(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & k\omega \mathbf{C} \\ -k\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{ex}$  correspondent respectivement aux efforts non-linéaires et aux efforts d'excitation dans le domaine fréquentiel et sont définis par :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}^0 \\ \mathbf{f}_{nl}^{1c} \\ \mathbf{f}_{nl}^{1s} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{nl}^{Hc} \\ \mathbf{f}_{nl}^{Hs} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{F}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}) dt \text{ et } \tilde{\mathbf{F}}_{ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ex}^0 \\ \mathbf{f}_{ex}^{1c} \\ \mathbf{f}_{ex}^{1s} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{ex}^{Hc} \\ \mathbf{f}_{ex}^{Hs} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{F}_{ex}(t) dt \quad (1.29)$$

L'équation (1.27) représente l'équation de base de la HBM. Il s'agit d'un système de  $n_H = (2H + 1)n$  équations algébriques non-linéaires à  $n_H$  inconnues, dont les solutions sont les composantes fréquentielles des solutions de l'équation (1.1). La résolution de cette équation fait intervenir des techniques itératives (de type Newton-Raphson) présentées à la section 1.2.3.

La HBM a l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de la non-linéarité. Elle est à même de traiter des problèmes aussi bien réguliers (non-linéarités géométriques, ...) que non-réguliers (frottement, contact, ...) pourvu que la solution existe et que l'on intègre suffisamment d'harmoniques dans le développement de l'équation (1.22). Pour cette raison, elle a été largement utilisée pour calculer des solutions approchées de systèmes dynamiques non-linéaires. On peut citer par exemple l'étude de systèmes mécaniques avec non-linéarité géométrique [20], avec non-linéarité de contact [42] et / ou de frottement [43, 44] ou encore pour l'étude de la cinétique d'usure des matériaux aux interfaces [45].

### 1.2.2.3 Compléments sur la HBM

#### Estimation des forces non-linéaires

Lors du passage dans le domaine fréquentiel, on est amené à calculer l'expression  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  des efforts non-linéaires dans ce nouveau domaine. Ceux-ci correspondent aux coefficients de la décomposition en série de Fourier de  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$  et ne peuvent être déterminés analytiquement

que dans certains cas particuliers (non-linéarité polynomiale par exemple). Dans le cas général, il est courant d'utiliser la méthode AFT (Alternate Frequency Time) proposé par Griffin et al. dans [46] et reprise dans de nombreuses études utilisant la HBM. Cette méthode consiste à repasser temporairement dans le domaine temporel avant d'effectuer les décompositions en séries de Fourier. Plus précisément, pour un vecteur d'inconnue  $\tilde{\mathbf{x}}$ , on reconstitue la solution temporelle  $\mathbf{x}(t)$  par  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{x}}$  puis on évalue les efforts non-linéaires dans le domaine temporel  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ . Enfin on calcule la décomposition en séries de Fourier des efforts non-linéaires, et on ne garde pour  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  que les harmoniques inférieures à  $H$ .

En pratique on utilise les transformées de Fourier discrètes (DFT) pour le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel. La période des solutions est subdivisée en  $n_t$  instants  $t_k = \frac{2\pi}{\omega} \frac{k}{n_t}$  pour  $k = 1, \dots, n_t$  et on définit la matrice de transformée de Fourier discrète par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{n_t} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 \cos(\omega t_1) & \dots & 2 \cos(\omega t_{n_t}) \\ 2 \sin(\omega t_1) & \dots & 2 \sin(\omega t_{n_t}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 2 \cos(H\omega t_1) & \dots & 2 \cos(H\omega t_{n_t}) \\ 2 \sin(H\omega t_1) & \dots & 2 \sin(H\omega t_{n_t}) \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

et la matrice de transformée inverse par :

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(H\omega t_1) & \sin(H\omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{n_t}) & \sin(\omega t_{n_t}) & \dots & \cos(H\omega t_{n_t}) & \sin(H\omega t_{n_t}) \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Notons que ces matrices sont en fait indépendantes de la pulsation puisqu'on a  $\omega t_k = \frac{2k\pi}{n_t}$ , par conséquent il n'est pas nécessaire de les recalculer à chaque changement de pulsation. L'expression des déplacements discrétisés en temps s'obtient alors par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{x}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_{n_t}) \end{bmatrix} = (\bar{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{x}}. \quad (1.32)$$

Après avoir évalué les forces non-linéaires pour chaque pas de temps  $t_k$ , on obtient l'expression des forces non-linéaires dans le domaine fréquentiel par :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = (\mathcal{F} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{nl}(t_1) \\ \mathbf{F}_{nl}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{nl}(t_{n_t}) \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Cette approche permet de traiter des non-linéarités de toutes sortes (polynomiales, non-régulières, implicites, ...) ce qui en fait un outil extrêmement intéressant.

### Sélection des harmoniques

L'un des paramètres les plus importants de la HBM est le nombre d'harmoniques retenues dans la décomposition de la solution (équation (1.22)). A priori, plus ce nombre d'harmoniques

est élevé, plus la description de la solution sera bonne. Pour les problèmes de grande taille, il faut toutefois veiller à garder ce nombre d'harmoniques aussi faible que possible pour des raisons de temps de calcul. En effet, le nombre de variables de la HBM croît linéairement avec le nombre d'harmoniques ( $n_H = (2H + 1)n$ ) ce qui peut entraîner une augmentation considérable des temps de calcul pour la résolution du système algébrique non-linéaire (1.27). Dans le cas général, il n'existe pas de critère permettant de quantifier l'importance relative de chaque harmonique dans la réponse, et on est contraint à effectuer des études de convergence des solutions en fonction du nombre d'harmoniques retenues. L'étude de la parité des efforts non-linéaires peut éventuellement permettre d'éliminer d'office certains harmoniques (par exemple retrait des harmoniques pairs pour une force non-linéaire impaire). Cependant, il faut garder en tête qu'en supprimant ces harmoniques on supprime également une partie de la phénoménologie du système (par exemple l'apparition de solutions de pulsation  $2\omega$  par bifurcation pour un oscillateur de Duffing). Des techniques plus élaborées de sélection d'harmoniques pour les méthodes HBM sont présentées au chapitre 4.1.

### 1.2.3 Calcul des solutions des systèmes d'équations algébriques

Une partie des méthodes présentées dans la section précédente pour résoudre les systèmes d'équations différentielles non-linéaires fait intervenir la résolution de systèmes d'équations algébriques non-linéaires. Ces systèmes algébriques peuvent de plus dépendre de paramètres comme la fréquence d'excitation ou le taux d'amortissement. D'une manière générale, un système de  $n_e$  équations algébriques ayant pour variable  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n_e}]^T$  et dépendant d'un paramètre  $\mu$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G} : \mathbb{R}^{n_e} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_e}. \quad (1.34)$$

Dans un premier temps, on présente les méthodes permettant de résoudre le système (1.34) dans le cas où le paramètre  $\mu$  est fixé. On présente ensuite les méthodes dites de "continuation" permettant d'étendre les solutions pour différentes valeurs du paramètre.

#### 1.2.3.1 Résolution du système non-linéaire

##### Méthodes de point fixe

Dans le cas général, il est souvent très difficile, voire impossible, d'obtenir une expression analytique des solutions du système (1.34). On a alors recours à des techniques numériques permettant d'obtenir une approximation des solutions. Parmi ces techniques, les méthodes de point fixe sont parmi les plus utilisées. Elles consistent à transformer la recherche des solutions en un problème de point fixe défini par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mu_0), \quad \mathbf{Q} : \mathbb{R}^{n_e} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.35)$$

avec par exemple  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mu_0) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mu_0) + \mathbf{x}$ . Ainsi, les solutions de  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mu_0) = \mathbf{0}$  correspondent aux points fixes de la fonction  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mu_0)$ . Sous certaines conditions de régularité sur  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mu_0)$  ( $\mathbf{Q}$  k-lipschitzienne avec  $|k| < 1$ , ie  $\mathbf{Q}$  contractante), on est assuré de l'existence d'un unique point fixe qui peut être calculé par application du processus itératif suivant :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_i, \mu_0), \quad \mathbf{x}_0 \text{ fixé a priori.} \quad (1.36)$$

### Méthode de Newton

La méthode de point fixe la plus utilisée pour résoudre les équations (1.34) est, en général, la méthode de Newton [47]. Celle-ci consiste à rechercher itérativement la solution en partant d'un itéré initial  $\mathbf{x}_0$  et en appliquant une série de corrections déterminées par la résolution d'un système linéaire. Plus précisément, pour un point initial  $\mathbf{x}_k$ , l'expression de l'itéré suivant sera donné par la relation :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}^k \text{ avec } \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_k). \quad (1.37)$$

En appliquant successivement la relation de l'équation (1.37), le vecteur  $\mathbf{x}_k$  se rapproche progressivement d'une des solutions du système (1.34). Pour déterminer la fin des itérations, il est courant d'utiliser les trois critères suivants :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^k &\leq \epsilon_1, \\ \frac{\|\Delta \mathbf{x}^k\|}{\|\mathbf{x}_k\|} &\leq \epsilon_2, \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) &\leq \epsilon_3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Les deux premiers critères sont relatifs à la convergence de la solution et correspondent à la norme absolue [resp. relative] de la correction  $\Delta \mathbf{x}$ , le troisième critère permet quant à lui de maîtriser l'erreur commise. La convergence de la méthode de Newton est indépendante de la norme choisie, en revanche les critères d'arrêt le sont. Dans la majeure partie des cas, on choisira la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ . Une illustration du principe de la méthode de Newton est donnée sur la Fig.1.1.

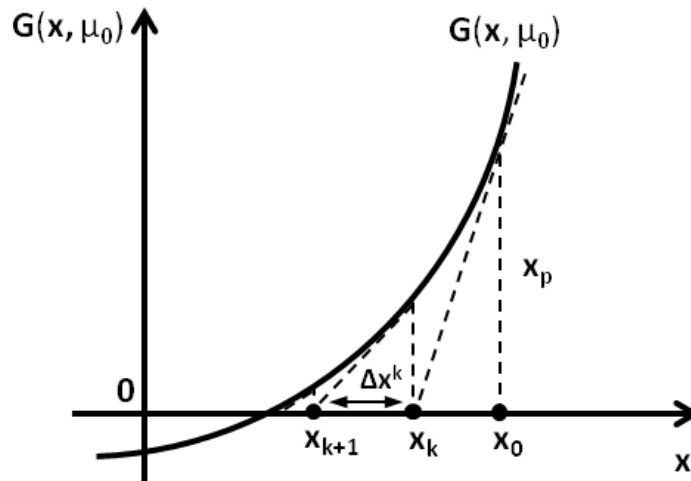


FIGURE 1.1 – Illustration du principe de la méthode de Newton

D'un point de vue global, la réussite et la convergence de la méthode dépendent fortement du choix du point initial  $\mathbf{x}_0$ . Cependant, au niveau local, en imposant des conditions de régularité sur  $\mathbf{G}$  et ses dérivées et en supposant que l'itéré initial est suffisamment proche d'une solution, on peut démontrer que la convergence de la méthode est quadratique [47], ce qui signifie que l'erreur à une itération est proportionnelle au carré de l'erreur à l'itération précédente, ce qui en fait une méthode très performante si on dispose d'un itéré initial adéquat.



De nombreuses techniques ont été développées afin de perfectionner la méthode de Newton, en particulier les techniques de régions de confiance et de recherche linéaire [48]. Ces méthodes permettent d'améliorer le comportement de la méthode de Newton lorsque la matrice jacobienne devient singulière ou que le point de départ est (raisonnablement) éloigné de la solution.

Si le système d'équation possède plusieurs solutions pour un même paramètre  $\mu_0$ , la méthode de Newton convergera vers l'une ou l'autre des solutions en fonction de l'itéré initial. Pour obtenir toutes les solutions, il faudrait alors discrétiser l'ensemble des itérés initiaux et lancer la méthode de Newton pour chacune des conditions initiales ainsi obtenues. Cette procédure n'est bien sûr envisageable que pour de très petits systèmes en raison de la croissance exponentielle du nombre de conditions initiales lorsque le nombre de variables augmente. Un moyen de contourner ce problème est d'utiliser un algorithme de continuation comme décrit dans la partie suivante. Bien que les algorithmes de continuation ne permettent pas d'obtenir à eux seuls toutes les solutions d'un système algébrique, ils sont en mesure d'en calculer un sous-ensemble. Le problème de la résolution globale de systèmes d'équations algébriques est traité en détail au chapitre 3.

### Méthode de Newton-Krylov

La méthode de Newton-Krylov [49] est une version de la méthode de Newton qui se base sur la méthode de Krylov pour résoudre les systèmes linéaires sous-jacents à la méthode de Newton [50, 51]. En particulier, cette méthode ne nécessite pas d'évaluation de la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)$ , ce qui permet dans certains cas d'obtenir de bonnes performances de résolution.

La méthode de Krylov est une méthode itérative pour résoudre des systèmes linéaires de grande taille de type  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  à l'aide de l'espace de Krylov associé :

$$K_j(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}_0) = \text{vect}(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{r}_0) \quad (1.39)$$

avec  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$  (typiquement l'algorithme GmRes [52]). La méthode de Newton consiste à définir une série d'itérés  $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta\mathbf{X}$  où  $\Delta\mathbf{X}$  est solution du système linéaire  $\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{X}_k = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_k)$ .

On peut alors appliquer la méthode de Krylov à la résolution des systèmes linéaires induits par la méthode de Newton en posant (à  $k$  fixé)  $\mathbf{r}_k^0 = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{J}_k\Delta\mathbf{X}_k^0$ . A chaque itération  $j$  de la méthode de Krylov, on cherche à minimiser  $\|\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{X}_k^j + \mathbf{G}(\mathbf{X}_k)\|$  au sens des moindres carrés. La valeur de l'incrément de Newton à l'étape  $j$  du processus de Krylov est alors recherchée sous la forme :

$$\Delta\mathbf{X}_k^j = \Delta\mathbf{X}_k^0 + \sum_{j=0}^{j-1} \alpha_j [\mathbf{J}_k]^j \mathbf{r}_0, \quad (1.40)$$

où les  $\alpha_j$  minimisent le résidu (en pratique la base de l'espace de Krylov est orthonormalisée par un processus d'Arnoldi [53]).

Cette méthode de Newton-Krylov est très attractive puisqu'elle ne nécessite pas l'évaluation du jacobien  $\mathbf{J}_k$ , mais seulement son action sur un vecteur  $\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{X}_k^j$  qui peut être approximé par la relation suivante :

$$\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{X}_k^j = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{X}_k + \epsilon\Delta\mathbf{X}_k^j) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_k)}{\epsilon} \quad (1.41)$$

Le choix du paramètre  $\epsilon$  est important pour le succès de la méthode [49]. Un autre point important est l'utilisation de préconditionneurs pour regrouper les valeurs propres du jacobien et ainsi réduire le nombre d'itérations de la méthode de Krylov [54, 55].

### 1.2.3.2 Méthodes de continuation

La méthode de Newton présentée dans le paragraphe précédent permet de trouver une solution  $\mathbf{x}_0$  du système (1.34) pour une valeur fixée du paramètre  $\mu = \mu_0$ . Supposons maintenant que le paramètre  $\mu$  est également considéré comme variable, et que l'on cherche à obtenir l'évolution de la solution  $\mathbf{x}$  en fonction du paramètre  $\mu$ ,  $\mu \in [\mu_0, \mu_f]$ . Des méthodes spécifiques, appelées méthodes de continuation, ont été développées pour traiter ce type de problème. Elles reposent principalement sur l'utilisation de la méthode de Newton au travers de stratégies de prédiction / correction de la solution. On propose ici de rappeler les étapes clés des principaux algorithmes de continuation, pour plus de détails sur ces méthodes on pourra consulter [56].

#### Continuation séquentielle

La méthode de continuation séquentielle est l'une des plus simples à mettre en œuvre. Elle consiste à paramétrer les solutions du système en fonction du paramètre  $\mu$  :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mu)$ . D'un point de vue numérique, on discrétise l'intervalle de variation du paramètre  $\mu$  en  $N$  valeurs  $\mu_i$ , et on recherche les  $N$  solutions  $\mathbf{x}_i(\mu_i)$  correspondantes. Partant d'une solution  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$  on effectue une prédiction pour le paramètre  $\mu_{i+1}$  en utilisant la solution à l'itération précédente :  $(\mathbf{x}_p, \mu_p) = (\mathbf{x}_i, \mu_{i+1})$ . Cette prédiction est ensuite corrigée en appliquant l'algorithme de Newton pour  $\mu$  fixé à  $\mu = \mu_{i+1}$ . Une illustration du principe de cette continuation séquentielle est donnée sur la Fig.1.2. Notons qu'il est possible d'améliorer la continuation séquentielle en utilisant un prédicteur plus performant comme par exemple un prédicteur tangent. Toutefois, si les courbes de solution du système (1.34) présentent des points de retournement (présence d'une tangente verticale pour  $\mu = \mu_c$ ), la continuation séquentielle ne permet pas de suivre ces retournements. Il faut alors choisir une autre paramétrisation des solutions, par exemple  $(\mathbf{x}, \mu) = (\mathbf{x}(\mathbf{x}_k), \mu(\mathbf{x}_k))$  où  $\mathbf{x}_k$  est la nouvelle variable contrôlant les solutions. Ces changements de paramétrisation au cours de la continuation peuvent être lourds à gérer et il n'est pas toujours facile de choisir a priori une nouvelle variable pour paramétrer les solutions lors du passage au point de retournement.

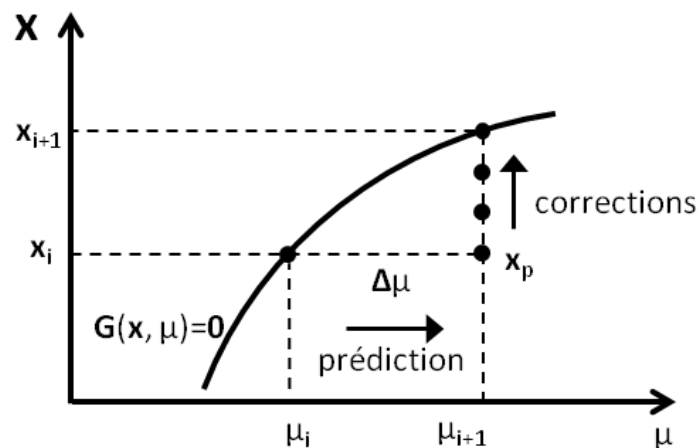


FIGURE 1.2 – Illustration du principe de la continuation séquentielle

### Continuation par longueur d'arc

La continuation par longueur d'arc permet de s'affranchir des problèmes dus aux points de retournement. Pour cela les solutions sont paramétrées par une abscisse curviligne  $s$  de sorte qu'elles sont exprimées par  $(\mathbf{x}(s), \mu(s))$ . Au niveau numérique, on aura accès aux solutions  $(\mathbf{x}_i, \mu_i) = (\mathbf{x}(s_i), \mu(s_i))$  pour différentes valeurs de l'abscisse  $s_i$ . Cette paramétrisation permet au paramètre  $\mu$  d'être considéré comme une variable à part entière ce qui permet de traiter simplement les points de retournement.

Dans un premier temps, on définit la prédiction à une étape  $i$  par :

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}, \quad \mu_p = \mu_i + \Delta\mu \quad (1.42)$$

En utilisant une prédiction tangente, les incréments  $\Delta\mathbf{x}$  et  $\Delta\mu$  sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i, \mu_i) \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mu}(\mathbf{x}_i, \mu_i) \Delta\mu = \mathbf{0}. \quad (1.43)$$

Ce système d'équations est sous-déterminé ( $n_e$  équations pour  $n_e + 1$  inconnues) et on doit ajouter une équation fixant la longueur de la prédiction par

$$\|\Delta\mathbf{x}\|^2 + \|\Delta\mu\|^2 = ds^2. \quad (1.44)$$

En combinant les équations (1.43) et (1.44) on obtient les expressions suivantes pour les incréments :

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \frac{\pm ds}{\sqrt{1 + \left\| \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mu} \right\|^2}}, \\ \Delta\mathbf{x} &= \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mu} \Delta\mu. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le choix du signe de  $\Delta\mu$  est réalisé en fonction du sens de continuation ( $\mu$  croissant ou décroissant). Dans un premier temps, on peut choisir  $ds$  positif (continuation croissante) et détecter les éventuels changements de signe en regardant le signe du produit scalaire entre deux prédictions consécutives (si le produit scalaire est négatif alors on change le signe de  $ds$ ) [56]. En pratique les changements de signe interviennent au niveau des points de retournement.

Au niveau de la correction, le système (1.34) est simplement complété par une équation fixant la longueur  $ds$  entre la solution précédente  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$  et la solution courante  $(\mathbf{x}, \mu)$  :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 + \|\mu - \mu_i\|^2 = ds^2, \quad (1.46)$$

puis est résolue par la méthode de Newton. L'équation (1.46) correspond au fait que l'on recherche la solution sur une sphère de centre  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$  et de rayon  $ds$ . Un schéma résumant le principe de la continuation par longueur d'arc est présenté Fig.1.3.

### Méthode asymptotique numérique

La méthode asymptotique numérique (MAN [57]) est une méthode permettant de résoudre les systèmes d'équations algébriques (1.34) dépendant d'un paramètre, où les termes non-linéaires sont analytiques (ie égaux à leur développement en série entière). A la différence de la méthode de Newton, les solutions sont recherchées sous forme de séries entières (tronquées à l'ordre  $N$ ) d'un paramètre de chemin  $s$  :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^N s^j \mathbf{x}_j, \quad \mu = \mu_0 + \sum_{j=1}^N s^j \mu_j, \quad (1.47)$$

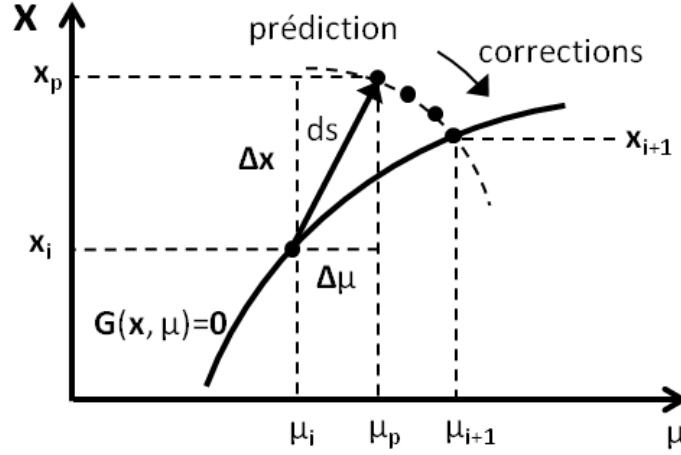


FIGURE 1.3 – Illustration du principe de la continuation par longueur d'arc

où  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  est une solution connue du système (1.34). En substituant la relation (1.47) dans l'équation (1.34) et en effectuant un développement de Taylor autour de  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ , il est possible de montrer que les coefficients  $(\mathbf{x}_j, \mu_j)$  vérifient  $N$  systèmes d'équations linéaires du type :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mu_0) \mathbf{x}_j + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mu}(\mathbf{x}_0, \mu_0) \mu_j = \mathbf{F}_{nl}^j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}), \quad (1.48)$$

où les seconds membres  $\mathbf{F}_{nl}$  pour un ordre  $j$  ne dépendent que des coefficients des ordres précédents  $1, \dots, j-1$ . Ces systèmes sont sous déterminés ( $n_e$  équations pour  $n_e + 1$  inconnues). On ajoute donc une équation permettant de contrôler le paramètre de chemin, par exemple en utilisant une pseudo longueur d'arc définie par :

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 = 1, \quad \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_j = 0 \text{ pour } j = 2, \dots, N. \quad (1.49)$$

Il est alors possible de résoudre successivement chaque système linéaire (1.48) et d'obtenir une continuation des solutions en fonction du paramètre de chemin  $s$ . Le principal avantage de la méthode réside dans le fait qu'une seule inversion de matrice est nécessaire, puisque tous les systèmes linéaires (1.48) sont définis par la même matrice, et que seuls les seconds membres varient d'un ordre à l'autre.

La longueur maximale de l'intervalle du paramètre de chemin pour une itération donnée est déterminée de manière à vérifier le critère de tolérance suivant :

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}(s), \mu(s))\| \leq \epsilon \quad \forall s \in [0, s_{max}], \quad (1.50)$$

où  $\epsilon$  est une tolérance fixée a priori. En supposant que le résidu soit dominé par le premier terme négligé (d'ordre  $N+1$ ), on peut obtenir une approximation du pas maximum  $s_{max}$  par :

$$s_{max} \approx \left( \frac{\epsilon}{\|\mathbf{F}_{nl}^{N+1}\|} \right)^{N+1}. \quad (1.51)$$

Ainsi la MAN permet d'obtenir une branche de solution définie de manière analytique entre les points  $(\mathbf{x}(0), \mu(0))$  et  $(\mathbf{x}(s_{max}), \mu(s_{max}))$ , et vérifiant l'équation (1.34) jusqu'à une tolérance

de  $\epsilon$ . La procédure peut ensuite être réappliquée en repartant du dernier point calculé pour finalement décrire toute la branche de solution. Etant donné que l'on ne se base que sur un correcteur (équation (1.47)), il peut arriver qu'à partir d'un certain nombre d'itérations la solution ne vérifie plus le critère (1.50), il est alors nécessaire d'effectuer une correction (par exemple avec un algorithme de Newton) pour se replacer sur la branche de solution et définir un point initial correct.

Une implémentation de la MAN basée sur l'utilisation du logiciel Matlab a été réalisée par l'équipe de B. Cochelin sous le nom de MANLAB [58, 59]. Elle a été utilisée pour simuler des comportements de systèmes dynamiques non-linéaires et étudier leur stabilité (structures minces [20], instruments de musique [60] ...). Cependant, dans le but d'obtenir un code uniforme, cette implémentation se base sur une représentation quadratique des équations algébriques. Bien que de nombreux systèmes non-linéaires soient représentables sous forme quadratique en introduisant de nouvelles variables, la taille des systèmes engendrés peut rapidement devenir problématique pour des systèmes comportant déjà un grand nombre de ddl.

### 1.2.3.3 Complément sur les méthodes de continuation

#### Gestion du pas de continuation

La continuation par longueur d'arc fait intervenir un paramètre  $ds$  quantifiant la distance entre deux solutions successives. Ce paramètre est également utilisé pour définir la longueur de la prédiction. Intuitivement, on peut imaginer que plus le pas sera grand, plus la prédiction sera éloignée de la solution réelle, ce qui aura pour effet d'augmenter le nombre d'itérations dans l'algorithme de Newton. D'un autre côté, plus le pas sera grand, moins il faudra de points pour décrire la courbe de solution, ce qui paraît avantageux en termes de temps de calcul. Pour gérer ce compromis, il est possible d'adapter le pas de continuation en fonction du nombre d'itérations de Newton nécessaires pour obtenir la solution à une précision donnée. Une stratégie simple est de diminuer le pas lorsque le nombre d'itérations de Newton dépasse un nombre d'itération maximum  $N_{max}$ , et de l'augmenter lorsqu'il est inférieur à un nombre minimum d'itération  $N_{min}$ . Plus précisément, si l'étape de correction par l'algorithme de Newton demande plus de  $N_{max}$  itérations, la correction est arrêtée et une nouvelle prédiction est calculée pour un pas plus petit (par exemple  $ds = \alpha ds$  avec  $\alpha \leq 1$ ) et la correction est de nouveau appliquée à partir de cette nouvelle prédiction. Dans le cas contraire, si la correction demande moins de  $N_{min}$  itérations, la prédiction à l'étape suivante sera calculée avec un pas plus grand (par exemple  $ds = ds \frac{N_{max}}{N_{it}}$ , où  $N_{it} \leq N_{min}$  représente le nombre d'itérations de Newton qui ont été nécessaires pour calculer la solution). Dans le cas où le nombre d'itérations de correction est compris entre  $N_{min}$  et  $N_{max}$ , on laisse la longueur du pas inchangée.

Il est également possible d'imposer des bornes sur le domaine de variation du paramètre  $ds$ . Par exemple, si le pas devient supérieur à une valeur  $ds_{max}$ , alors on le limite à cette valeur par  $ds = ds_{max}$ . Dans le cas où le pas  $ds$  deviendrait trop petit, cela peut être révélateur d'un problème au niveau de la continuation (singularités par exemple) et il est préférable de terminer l'algorithme si cette situation se produit.

Pour les valeurs  $N_{min}$  et  $N_{max}$  on choisit en pratique des entiers inférieurs à 20. Pour les valeurs initiales du pas de continuation, on peut choisir un ordre de grandeur correspondant à la discrétisation en  $\mu$  attendue.

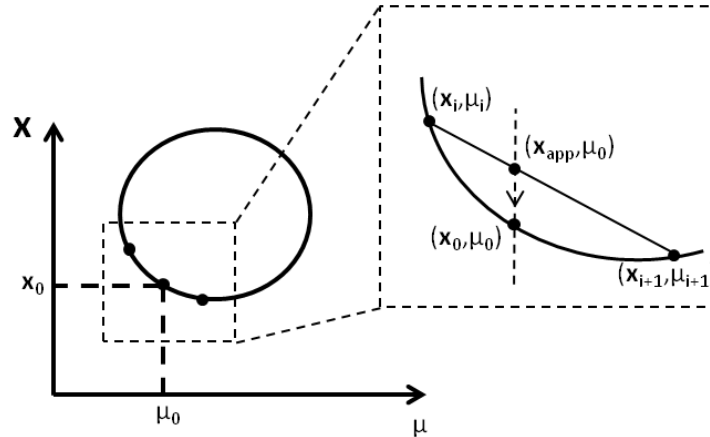


FIGURE 1.4 – Illustration du processus de détection des courbes fermées lors d'une procédure de continuation

### Gestion des courbes fermées

Lors de la continuation par longueur d'arc des solutions de l'équation (1.34), il peut arriver que ces solutions dessinent des courbes fermées dans le plan  $(\mu, \mathbf{x})$ . On propose ici une méthode simple permettant de détecter si une telle situation se produit en regardant si les solutions repassent par un point initial. Plus précisément, notons  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  une première solution du système (1.34), et  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$ ,  $(\mathbf{x}_{i+1}, \mu_{i+1})$  deux solutions consécutives obtenues par continuation vérifiant  $\mu_i \leq \mu_0 \leq \mu_{i+1}$  (l'ordre des signes peut être changé en adaptant ce qui suit). L'idée est de regarder si la solution  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  ne se trouve pas "entre" les solutions  $(\mathbf{x}_{i+1}, \mu_{i+1})$  et  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$ . Pour cela on construit une interpolation linéaire de la solution entre  $(\mathbf{x}_i, \mu_i)$  et  $(\mathbf{x}_{i+1}, \mu_{i+1})$  par :

$$\mathbf{x}_{app}(\mu_0) = \mathbf{x}_i + \frac{\mu_0 - \mu_i}{\mu_{i+1} - \mu_i} (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \quad (1.52)$$

et on utilise cette approximation comme itéré initial lors de la recherche d'une solution intermédiaire, noté  $\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}}$ , par la méthode de Newton pour un paramètre fixé à  $\mu = \mu_0$ . On évalue ensuite la distance relative entre cette solution et la solution initiale par :

$$d = \frac{\|\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x}_0\|}. \quad (1.53)$$

Si cette distance  $d$  est inférieure à un certain seuil  $d_{min}$  fixé par l'utilisateur, on peut considérer que l'on a fait le tour de la courbe fermée et que l'on peut terminer l'algorithme de continuation. Une illustration de cette méthode de détection des courbes fermées est donnée sur la Fig.1.4.

### Gestion des bifurcations

Pour des systèmes dépendant de paramètres, il n'est pas rare de voir apparaître des phénomènes de bifurcation. Ceux-ci correspondent à un changement dans la topologie des solutions lorsque le paramètre  $\mu$  atteint une valeur critique  $\mu_c$ . On décrit ici les deux principaux types de bifurcations statiques rencontrées lors de la continuation : les bifurcations de type points de retournement et les bifurcations de type points d'embranchement.

Ces bifurcations correspondent à des points rendant la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_x = [\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}]$  singulière et peuvent être recherchées par résolution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mu) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= 1. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Le système (1.54) peut être résolu par une méthode de Newton pour obtenir les coordonnées  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$  du point de bifurcation ainsi qu'une des tangentes  $\mathbf{v}$  au point de bifurcation. Les autres tangentes (si elles existent) peuvent être obtenues en calculant les vecteurs propres de la matrice  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}$  associés à une valeur propre nulle. Dans le cas où on est en mesure d'exprimer la hessienne  $\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial x_i \partial x_j}$ , Balachandran propose dans [56] une méthode efficace utilisant le théorème de superposition pour la résolution du système (1.54). L'itéré initial de la méthode de Newton peut être déterminé lors d'une première continuation durant laquelle on aura pris soin de repérer les différents changements de signe du déterminant de la matrice jacobienne  $\det(\mathbf{J}_x)$ . Une fois les points de bifurcation déterminés, on calcule le rang de la matrice  $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_x, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mu}]$  en chaque point pour statuer sur la nature de la bifurcation.

Dans le cas où la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est de rang  $n_e$ , il s'agit d'un point de retournement. Comme son nom l'indique, il correspond à un retournement de la courbe solution, ce qui se traduit par l'apparition d'une tangente verticale pour la valeur critique  $\mu_c$ . L'algorithme de continuation par longueur d'arc a été conçu pour traiter ce type de bifurcation, par conséquent elle ne nécessite pas de traitement spécifique.

Dans le cas où la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est au plus de rang  $n_e - 1$ , il s'agit d'un point d'embranchement. Il correspond au fait qu'au moins deux courbes de solutions passent par un même point  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ . Il existe alors au moins deux vecteurs distincts  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  tels que  $\mathbf{J}\mathbf{t}_1 = \mathbf{J}\mathbf{t}_2 = \mathbf{0}$ . Ces vecteurs correspondent aux directions tangentes de chacune des courbes solutions passant par  $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$  et il est possible de les utiliser dans un algorithme de continuation pour indiquer la direction de prédiction. D'un point de vue plus pragmatique, il est également possible de continuer les solutions issues d'un point d'embranchement en perturbant le système (1.34) par l'ajout d'un vecteur de petite norme aléatoirement choisi. Cette perturbation a pour effet de casser le point d'embranchement et permet de diriger la continuation vers l'une ou l'autre des branches disponibles. Une fois que l'on est suffisamment éloigné du point d'embranchement, on retire la perturbation et on poursuit la continuation.

Pour un exemple de suivi de bifurcation on pourra se reporter à la section 1.2.4.3 où on traite le cas d'un système de dimension 2, ou encore à l'article [61] où on traite le cas d'une structure à symétrie cyclique.

#### 1.2.4 Solution d'un système non-linéaire autonome : notion de modes non-linéaires

Les méthodes de calcul de solutions et de leurs stabilités exposées précédemment sont maintenant utilisées pour étudier et analyser le comportement vibratoire d'un système mécanique libres, dont les solutions sont données par résolution de l'équation autonome suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \tag{1.55}$$

Les concepts présentés dans cette section seront illustrés sur un exemple simple à deux degrés

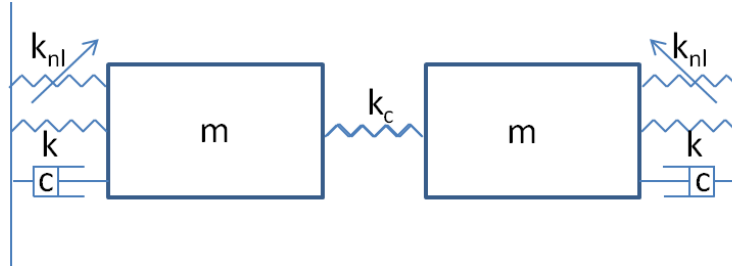


FIGURE 1.5 – Schéma du système mécanique à 2 ddl utilisé pour illustrer les concepts de la section 1.3

de liberté représenté sur la Fig.1.5 et obéissant aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k + k_c)x_1 - k_c x_2 + k_{nl}x_1^3 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + (k + k_c)x_2 - k_c x_1 + k_{nl}x_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Pour les applications numériques on choisira  $m = k = k_{nl} = 1$ ,  $k_c = 2$ ,  $c = 0.1$ , dans le système d'unités international (SI).

#### 1.2.4.1 Modes linéaires

On rappelle tout d'abord les résultats généraux concernant la théorie des vibrations libres dans le cadre linéaire. Dans ce paragraphe, on considérera donc que les efforts non-linéaires sont nuls et que le système est non-amorti ( $\mathbf{F}_{nl} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  dans l'équation (1.55)). Les modes propres linéaires sont définis comme étant les solutions périodiques de l'équation libre et non amortie suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

En recherchant ces modes sous la forme  $\mathbf{x}(t) = \Phi(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$ , on obtient l'équation aux valeurs propres définissant les formes propres  $\Phi_i$  et les fréquences propres  $\omega_i$ , donnée par :

$$\mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi. \quad (1.58)$$

Les modes propres correspondent à une famille de  $n$  solutions périodiques et forment une base de l'espace des solutions de l'équation (1.57) (système fondamental de solution). Le calcul des modes propres est particulièrement utile pour la détermination des solutions du système linéaire (libre ou forcé) puisque d'une part les  $\omega_i$  indiquent les fréquences de résonance du système et que d'autre part les  $\Phi_i$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$  qui diagonalise simultanément les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  et qui par conséquent permet de découpler les équations.

Notons que la définition des modes propres linéaires (Eq.(1.58)) est indépendante de l'amplitude de vibration, ce qui conduit à des pulsations et des formes propres constantes, ce qui n'est pas le cas pour les modes non-linéaires. Notons également que si on initialise le mouvement selon un mode propre, alors le mouvement restera sur ce mode particulier pour tous les temps futurs : un mode propre linéaire peut alors être vu comme un sous-espace invariant de l'espace des phases.

#### 1.2.4.2 Modes non-linéaires

On considère maintenant les solutions libres de l'équation non-linéaire (1.55). En particulier, on introduit la notion de modes non-linéaires (MNL). Pour cette partie, on peut citer comme



ouvrage de référence le livre de Vakakis [62], ou encore cet article en deux parties [63,64] dressant un état de l'art sur la notion de modes non-linéaires, leur calcul et leur utilisation.

### Approche de Rosenberg

Les modes propres linéaires sont un outil performant pour l'analyse de systèmes linéaires puisqu'ils permettent de découpler les équations. Dans le cas non-linéaire, ce découplage ne peut plus être réalisé par les modes linéaires et la résolution des équations de vibrations non-linéaires nécessite des méthodes spécifiques.

Les travaux de Lyapunov au début du 20e siècle ont permis de montrer l'existence d'une famille de  $n$  solutions périodiques au voisinage des points d'équilibres stables pour un système non-linéaire à  $n$  degrés de liberté sans relation de résonance interne. Ces solutions seront ensuite étudiées par Rosenberg, pour une classe de systèmes dite "admissible", sous le nom de modes non-linéaires. Dans le but de les calculer pratiquement, il définit les modes non-linéaires comme étant les vibrations à l'unisson du système non-linéaire libre et non amorti [65]. Par vibrations "à l'unisson", Rosenberg suppose en fait les points suivants :

- (i) tous les ddl atteignent leur extremum et passent par zéro en même temps,
- (ii) tous les ddl vibrent à la même fréquence,
- (iii) le mouvement de chaque ddl est paramétrable en fonction du mouvement d'un unique ddl de référence arbitrairement choisi.

Cette définition, en parallèle direct avec la notion de modes linéaires, suppose en particulier qu'il ne peut pas y avoir de déphasage entre les mouvements de chaque ddl (point (i)). En utilisant le point (iii), les modes non-linéaires peuvent être recherchés sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)], \text{ avec } \mathbf{x}_i(t) = g_i(\mathbf{x}_k(t)) \text{ pour } i = 1..n, i \neq k \quad (1.59)$$

où  $k$  est l'indice de la composante retenue pour le paramétrage et où les fonctions  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  représentent la relation entre le mouvement de la coordonnée  $i$  et le mouvement de la coordonnée de référence  $k$ . La détermination des fonctions  $g_i$  se fait en exprimant les dérivées première et seconde de chaque composante  $\mathbf{x}_i$  uniquement en fonction de  $\mathbf{x}_k$  et  $g_i$ , puis en remplaçant les expressions obtenues dans l'équation du mouvement. On obtient alors une série de  $n-1$  équations différentielles ne dépendant plus explicitement du temps et dont les solutions sont les fonctions  $g_i(\mathbf{x}_k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq k$ .

La plupart du temps, il n'existe pas de solution analytique à ces équations et on recherche souvent les expression des  $g_i$  sous la forme d'un développement polynomial. Finalement, en remplaçant l'expression des  $g_i$  dans l'équation régissant le mouvement de la coordonnée  $\mathbf{x}_k$ , on obtient une équation différentielle appelée équation modale qui permet de déterminer l'évolution temporelle de la composante  $\mathbf{x}_k$  pour des conditions initiales données. La résolution de l'équation modale fait apparaître une dépendance entre amplitude de vibration et période des oscillations. En d'autres termes, la fréquence des oscillations pour un mode non-linéaire donné est fonction de l'amplitude de la coordonnée de référence  $\mathbf{x}_k$ . On distingue deux cas particuliers : soit la fréquence des oscillations diminue avec l'amplitude, on parle alors de non-linéarité assouplissante, soit la fréquence augmente avec l'amplitude, et dans ce cas on parle de non-linéarité raidissante.

Le paramétrage de l'équation (1.59) permet de définir un mode non-linéaire comme une courbe dans l'espace des configurations (ie l'espace des composantes  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) appelée ligne modale. Lorsque cette courbe est une droite (ie  $g_i(\mathbf{x}_k) = \alpha_i \mathbf{x}_k$ ,  $\alpha_i$  constant) le mode non-linéaire est dit similaire. Cela signifie en particulier que la forme du mode non-linéaire ne dépend pas de l'amplitude de vibration. Dans le cas où la ligne modale est une courbe (non droite), le

mode non-linéaire est dit non-similaire et sa forme est dépendante de l'amplitude de vibration. Une propriété importante est que les lignes modales sont tangentes aux droites modales définies par les modes propres du système linéarisé au point d'équilibre.

Bien que la définition des modes non-linéaires de Rosenberg apparaisse restrictive (système conservatif et admissible), elle permet de mettre en évidence de nouveaux phénomènes caractéristiques des systèmes non-linéaires, à savoir la dépendance fréquence / amplitude ainsi que la dépendance forme / amplitude des modes non-linéaires. Ces phénomènes, aujourd'hui bien connus (au moins au niveau numérique), ont été largement étudiés. On pourra par exemple consulter [38,63,64,66] concernant les structures à symétrie cyclique, [20,67–70] pour l'étude de structures minces (plaques ou coques), ou encore [71,72] pour l'identification expérimentale des modes non-linéaires.

### Approche de Shaw et Pierre

Nous venons de voir que la définition des modes non-linéaire de Rosenberg est trop restrictive puisqu'elle ne considère que des systèmes admissibles (en particulier des systèmes avec non-linéarité impaire [65]) et non-amortis. Pour étendre le concept de mode non-linéaire à une classe plus grande de systèmes, Shaw et Pierre proposent de les définir comme étant des "invariants de dimension 2 de l'espace des phases" [73,74]. Plus précisément, ils supposent que chaque couple de composante  $(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i)$  est paramétré par un unique couple de variables  $(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$  arbitrairement choisies. Cette définition mène au paramétrage suivant :

$$\mathbf{x}_i = g_i(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k), \text{ et } \dot{\mathbf{x}}_i = h_i(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k). \quad (1.60)$$

En utilisant une méthode similaire à la méthode de Rosenberg, on est en mesure d'obtenir une série de  $2n - 2$  équations différentielles, ne dépendant plus explicitement du temps, dont les solutions sont les fonctions  $g_i$  et  $h_i$  pour  $i = 1..N$ ,  $i \neq k$ . Encore une fois il est très rare d'obtenir des solutions analytiques pour ce type d'équation, et les fonctions  $g_i$  et  $h_i$  sont souvent recherchées sous forme de développements polynomiaux.

Cette définition des modes non-linéaires comme invariants de l'espace des phases a été reprise pour calculer les modes non-linéaires de systèmes discrets [74] ou continus [75], et la réduction de modèle [76–79]. Une extension de la définition au cas des systèmes avec résonance interne a été proposée dans [80]. Cependant le caractère fortement analytique de la méthode limite sont application à des problèmes de grande taille.

### Approche numérique : utilisation de la HBM

Les deux approches précédentes présentent des développements analytiques importants et ne sont par conséquent pas adaptées aux systèmes de grande taille. On présente ici l'approche numérique utilisée dans ce manuscrit pour calculer les modes non-linéaires. Le point de départ est la méthode de la balance harmonique décrite dans les sections 1.2.2.2 et 1.2.2.3. Au vu des systèmes non-linéaires étudiés dans ce manuscrit, on considèrera par la suite que les non-linéarités sont uniquement fonction du déplacement  $\mathbf{x}$  (non-linéarités conservatives). Pour le cas des systèmes avec des non-linéarités non-conservatives on pourra se référer aux études de D. Laxalde [11,81] qui propose une adaptation de la HBM pour calculer les modes non-linéaires de systèmes avec des non-linéarités de type frottement (modes complexes non-linéaires).

Ici nous définirons simplement les modes non-linéaires comme étant les solutions périodiques du système libre et non amorti suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.61)$$

En utilisant la méthode HBM, on recherche les modes non-linéaires sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=0}^H \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \quad (1.62)$$

où les coefficients  $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_H^T]^T$  et la pulsation  $\omega$  sont inconnus. En appliquant les équations de la HBM (voir section 1.2.2.2) on obtient alors un système algébrique sous déterminé de  $n_H = (2H + 1)n$  équations à  $n_H + 1$  inconnues ( $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\omega$ ). Pour fermer le système d'équations, on introduit une équation supplémentaire appelée condition de phase. On peut par exemple considérer une condition du type  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ , ce qui se traduit dans le domaine fréquentiel par  $\sum_{k=1}^H k\omega \mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ .

Le système d'équations algébriques obtenu peut ensuite être résolu par une méthode de continuation (voir section 1.2.3.2) pour obtenir les modes non-linéaires. L'initialisation de la méthode de continuation est ici très importante puisqu'elle définit le mode qui va être calculé. En utilisant le fait que les modes linéaires sont tangents aux modes non-linéaires à basse amplitude, il est courant d'initier la continuation avec des données issues d'une analyse linéaire. Par exemple pour un mode linéaire donné par un couple  $(\omega_i, \Phi_i)$  (pulsation propre, forme propre du mode  $i$ ), on initialisera la méthode de continuation par :

$$\omega^{(0)} = \omega_i, \mathbf{a}_1^{(0)} = \epsilon \Phi_i, \mathbf{b}_1^{(0)} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{a}_k^{(0)} = \mathbf{b}_k^{(0)} = \mathbf{0} \text{ pour } k = 2..H \quad (1.63)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre contrôlant l'amplitude de l'initialisation (en pratique on prend  $\epsilon$  relativement petit).

### 1.2.4.3 Exemples de modes non-linéaires

En guise d'exemple, on considère le calcul des modes non-linéaires du système à deux ddl de l'équation (1.56). Dans le cas de la recherche de mode non-linéaire, cette équation se simplifie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_1 + (k + k_c)\mathbf{x}_1 - k_c\mathbf{x}_2 + k_{nl}\mathbf{x}_1^3 &= 0, \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 + (k + k_c)\mathbf{x}_2 - k_c\mathbf{x}_1 + k_{nl}\mathbf{x}_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Les modes propres linéaire de ce système sont donnés par :

$$(\omega_1, \Phi_1) = \left( \sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), (\omega_2, \Phi_2) = \left( \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right). \quad (1.65)$$

En recherchant une approximation des MNLs à un seul harmonique par HBM et en utilisant la condition de phase  $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{0}$ , les solutions sont recherchées sous la forme  $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i \cos(\omega t)$ ,  $i = 1, 2$ , où les  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  vérifient le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} \alpha(\omega)\tilde{\mathbf{x}}_1 - \beta\tilde{\mathbf{x}}_2 + \gamma\tilde{\mathbf{x}}_1^3 &= 0, \\ \alpha(\omega)\tilde{\mathbf{x}}_2 - \beta\tilde{\mathbf{x}}_1 + \gamma\tilde{\mathbf{x}}_2^3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.66)$$

avec  $\alpha(\omega) = k + k_c - m\omega^2$ ,  $\beta = k_c$  et  $\gamma = \frac{3}{4}k_{nl}$ .

En initialisant la solution sur le premier mode propre (ie  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2$ ) le système (1.66) se réduit à une seule équation donnant l'évolution de la pulsation en fonction de l'amplitude pour le premier mode non-linéaire :

$$\alpha(\omega) - \beta + \gamma\tilde{\mathbf{x}}_1^2 = 0 \quad (1.67)$$

On en déduit alors que le premier mode non-linéaire est similaire, et son expression (approximée à un harmonique) est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega(\tilde{\mathbf{x}}_1)t), \text{ avec } \omega(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \sqrt{\frac{k + \frac{3}{4}k_{nl}\tilde{\mathbf{x}}_1^2}{m}}. \quad (1.68)$$

De la même manière en initialisant la solution sur le deuxième mode linéaire (ie  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = -\tilde{\mathbf{x}}_2$ ), le système (1.66) se réduit à une seule équation donnant l'évolution de la pulsation en fonction de l'amplitude du deuxième mode non-linéaire :

$$\alpha(\omega) + \beta + \gamma\tilde{\mathbf{x}}_1^2 = 0. \quad (1.69)$$

On en déduit alors l'expression (approximée à une harmonique) du deuxième mode non-linéaire :

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega(\tilde{\mathbf{x}}_1)t), \text{ avec } \omega(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \sqrt{\frac{k + 2kc + \frac{3}{4}k_{nl}\tilde{\mathbf{x}}_1^2}{m}}. \quad (1.70)$$

On voit alors que le système possède deux modes non-linéaires similaires (la forme du mode n'évolue pas avec l'amplitude de vibration). On montre maintenant que le deuxième mode non-linéaire présente un point de bifurcation de type point d'embranchement. La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  du système (1.66) est définie par  $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_\omega]$  avec :

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \alpha + 3\gamma\tilde{\mathbf{x}}_1^2 & -\beta \\ -\beta & \alpha + 3\gamma\tilde{\mathbf{x}}_2^2 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{J}_\omega = \frac{d\alpha}{d\omega} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.71)$$

En utilisant les résultats précédent et en se plaçant sur le deuxième mode, l'expression de la matrice jacobienne devient :

$$\mathbf{J}_x^{(2)} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 3\beta & -\beta \\ -\beta & -2\alpha - 3\beta \end{bmatrix}. \quad (1.72)$$

Le déterminant est donné par  $\det(\mathbf{J}_x^{(2)}) = 4\alpha^2 + 12\alpha\beta + 8\beta^2$  et s'annule pour  $\alpha(\mu) = -\beta$  ou  $\alpha(\mu) = -2\beta$ . La première condition correspond au point de bifurcation  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 = 0$  pour  $\omega = \omega_2$ . Cette bifurcation correspond au point d'apparition du deuxième mode, on montre qu'il existe en ce point deux directions tangentes qui sont  $\mathbf{t}_1^{(2)} = [1, -1, 0]^T$  et  $\mathbf{t}_2^{(2)} = [0, 0, 1]$  correspondant respectivement à la continuation du deuxième MNL et de la solution triviale. La deuxième condition de singularité  $\alpha(\mu) = -2\beta$  correspond à une bifurcation du deuxième mode au point  $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$  pour  $\omega_c = \sqrt{\frac{k+3k_c}{m}}$ . La matrice jacobienne en ce point est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{J}^{(2)}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, -\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, \omega_c\right) = \begin{bmatrix} \beta & -\beta & \delta \\ -\beta & \beta & -\delta \end{bmatrix}, \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{d\alpha}{d\omega}(\omega_c). \quad (1.73)$$

Cette matrice est de rang 1 et les deux tangentes associées sont définies par  $\mathbf{t}_1^{(3)} = [1, -1, \frac{-2\beta}{\delta}]^T$  et  $\mathbf{t}_2^{(3)} = [1, 1, 0]^T$ . Elles correspondent respectivement à la continuation du deuxième mode, ou à la continuation de la branche bifurquée comme indiqué sur la Fig.1.6. Cette branche supplémentaire de solutions illustre la surabondance des modes non-linéaires et elle correspond à une solution localisée sur une seule des deux masses du système. Ce phénomène de localisation qui "casse" la symétrie naturelle de la structure par des effets non-linéaires se retrouve particulièrement dans les structures non-linéaires à symétrie cyclique [38, 63, 64, 66]. On pourra en particulier consulter [61] pour une application plus détaillée à la continuation des bifurcations d'un système non-linéaire à symétrie cyclique.

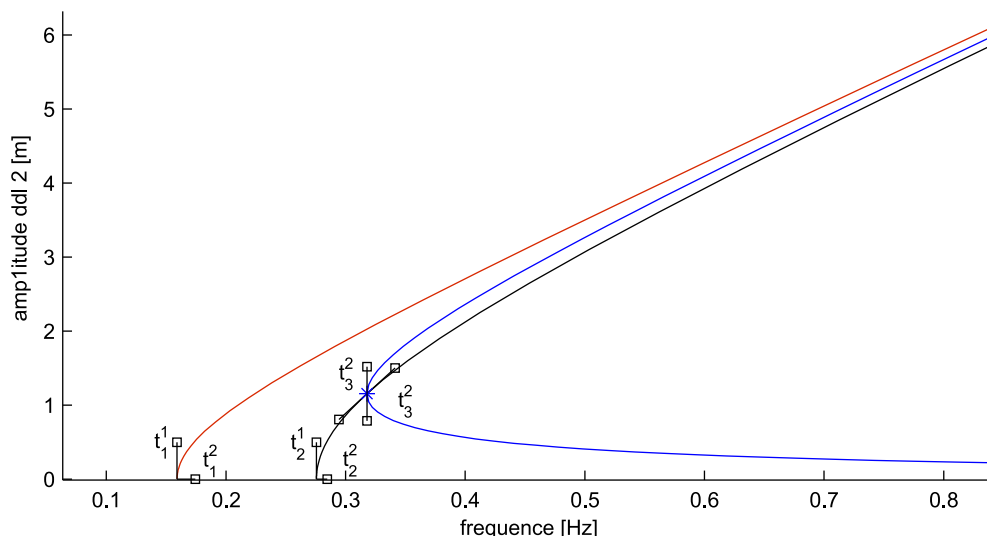


FIGURE 1.6 – Représentation des backbone curves des modes non-linéaires, solutions du système (1.66) en fonction du paramètre  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Seule l'amplitude de la variable  $\mathbf{x}_1$  a été représentée

### 1.3 Analyse des solutions

Dans la section précédente, nous avons présenté les principales méthodes d'estimation des solutions pour les systèmes dynamiques non-linéaires, et en particulier la méthode de la balance harmonique (HBM) permettant de calculer les solutions périodiques. Ici nous exposons dans un premier temps les méthodes permettant d'estimer la stabilité des solutions. Nous poursuivrons ensuite en utilisant les méthodes de calcul des solutions et de leur stabilité pour illustrer certains phénomènes propres aux vibrations non-linéaires dans le cas libre (système autonome) et dans le cas forcé (système non-autonome).

#### 1.3.1 Calcul de la stabilité des solutions

Les sections précédentes donnent des outils pour déterminer les solutions d'un système d'équations non-linéaires. Cependant, il reste à déterminer si la solution obtenue est physiquement observable ou non. Pour cela, nous présentons dans cette section les méthodes permettant de statuer sur la stabilité des solutions (points d'équilibre ou solutions périodiques) de systèmes dynamiques non-linéaires. Pour plus de détails sur les éléments de cette section on peut se reporter à [56]. Dans ce qui suit le système est considéré sous la forme d'un système différentiel du premier ordre (équation (1.2)) rappelé ci-dessous :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{H} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}. \quad (1.74)$$

##### 1.3.1.1 Définitions

Le calcul de stabilité est un outil pour statuer sur l'évolution d'une solution du système (1.74) lorsque celle-ci est soumise à une petite perturbation. Plusieurs définitions plus ou moins larges de la stabilité ont été proposées. Parmi celles-ci se trouve la définition de stabilité au sens

de Lyapunov qui peut se traduire par la relation suivante :

$$[\mathbf{y} \text{ stable (Lyapunov) } ] \equiv [\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) \text{ tq } \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{z}(t_0)\| \leq \alpha \Rightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \epsilon \forall t \geq t_0]. \quad (1.75)$$

Cette définition correspond au fait que pour une solution stable  $\mathbf{y}$  toutes les solutions  $\mathbf{z}$  suffisamment proches de  $\mathbf{y}$  à un instant  $t_0$  restent confinées dans un tube de ligne moyenne la trajectoire de  $\mathbf{y}$  et de rayon  $\epsilon$ . En d'autres termes, la norme de la perturbation reste bornée.

Cette définition de stabilité est relativement large et on lui préfère souvent la notion de stabilité asymptotique définie par la relation suivante :

$$[\mathbf{y} \text{ stable (asymptotiquement) } ] \equiv [\mathbf{y} \text{ stable (Lyapunov) et de plus } \lim_{t \rightarrow \infty} (\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|) = 0]. \quad (1.76)$$

Dans ce cas toutes les fonctions  $\mathbf{z}$  suffisamment proches de  $\mathbf{y}$  à un instant  $t_0$  tendent vers la solution  $\mathbf{y}$  pour des temps très grands. En d'autres termes, l'amplitude de la perturbation tend vers zéro avec le temps.

Ces deux définitions sont particulièrement bien adaptées pour la détermination de la stabilité des points d'équilibre de l'équation (1.1). En revanche, pour les solutions périodiques de problèmes non-linéaires, cette définition est restrictive puisque dans ce contexte toute solution d'un système libre non amorti est instable (en effet puisque la pulsation dépend de l'amplitude de vibration, deux solutions issues de conditions initiales proches vibrent avec des pulsations légèrement différentes et par conséquent il existe des temps  $t_k$  tels que  $\|\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{z}(t_k)\| \geq \epsilon$ , voir par exemple [56]).

Pour relaxer la définition de stabilité pour les solutions périodiques, Poincaré a introduit le concept de stabilité orbitale, définie par :

$$[\mathbf{y} \text{ stable (orbitalement) } ] \equiv [\forall \epsilon > 0, \exists \alpha \text{ tq si } \mathbf{z} \text{ vérifie } \|\mathbf{y}(t=0) - \mathbf{z}(t=\tau)\| \leq \alpha \text{ alors } \exists t_1, t_2 \text{ tel que } \|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{z}(t_2)\| \leq \epsilon]. \quad (1.77)$$

Cette définition cherche à comparer les trajectoires géométriques des solutions périodiques (cycles limites) plutôt que leurs valeurs numériques en chaque instant, et permet ainsi d'étendre le concept de stabilité à une classe plus large de solutions.

### 1.3.1.2 Stabilité des points d'équilibre

On présente ici les méthodes permettant de statuer sur la stabilité des points d'équilibre  $\mathbf{y}_0$  du système (1.74).

#### Fonction de Lyapunov

Une première méthode pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre est d'utiliser une fonction de Lyapunov [56]. Une telle fonction  $V$  doit vérifier les propriétés suivantes :

- $V$  est de classe  $\mathcal{C}^{(1)}$ , définie dans un voisinage de  $\mathbf{y}_0$ ,
- $V(\mathbf{y}_0) = 0$ ,
- $V(\mathbf{y}) > 0$  pour  $\mathbf{y}$  dans un voisinage de  $\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$ .

Le théorème de stabilité de Lyapunov assure que la solution  $\mathbf{y}_0$  est stable [resp. asymptotiquement stable] au sens de Lyapunov si  $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$  [resp. si  $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ ].

La partie la plus délicate de cette méthode consiste à construire la fonction  $V$  vérifiant les hypothèses précédentes. Cependant, dans le cas des systèmes mécaniques, il est souvent possible d'utiliser l'expression de l'énergie du système comme fonction de Lyapunov.

### Linéarisation au point d'équilibre

Une autre méthode pour la détermination de la stabilité des points d'équilibre consiste à introduire une petite perturbation  $\mathbf{z}(t)$  sous la forme  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}(t)$ , puis à regarder l'évolution de cette perturbation. En remplaçant l'expression de  $\mathbf{y}(t)$  dans l'équation (1.74) et en effectuant un développement à l'ordre 1 en  $\mathbf{z}$ , on se ramène à l'étude du système linéarisé suivant :

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, t)\mathbf{z}, \quad (1.78)$$

où  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{A}$  représente la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Les solutions de l'équation (1.78) s'écrivent sous la forme  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ . En diagonalisant la matrice  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ ) et en appliquant le changement de variable  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\mathbf{u}(t)$ , il vient  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{\mathbf{D}(t-t_0)}$  soit encore

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i(0)e^{\lambda_i(t-t_0)}. \quad (1.79)$$

On voit alors que l'évolution de l'amplitude de la perturbation est donnée par le signe des parties réelles des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$ . D'un point de vue général, si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, la solution est asymptotiquement stable (la perturbation a une décroissance exponentielle). En revanche, s'il existe au moins une valeur propre à partie réelle positive la solution est instable (croissance exponentielle de la perturbation selon au moins une direction). La détermination des parties réelles des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  permet de décomposer l'espace en trois sous-espaces stables appelés respectivement variété stable (partie réelle négative), variété instable (partie réelle positive) et variété centrée (partie réelle nulle), chacun de ces sous-espaces étant engendré par les vecteurs propres correspondants. Si la variété centrée n'est pas vide (point non-hyperbolique), il faut étudier la dynamique sur cette variété pour statuer sur la stabilité de la solution. Un résumé des situations possibles lors de la détermination des valeurs propres de la matrice jacobienne est donné sur la Fig.1.7.

#### 1.3.1.3 Stabilité des solutions périodiques, théorie de Floquet

On considère maintenant une solution périodique  $\mathbf{y}_p(t)$  de période  $T$  du système (1.74). Comme dans le cas des points d'équilibre on cherche à déterminer la stabilité de  $\mathbf{y}_p(t)$  en introduisant une perturbation  $\mathbf{z}(t)$  sous la forme  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{z}(t)$ . En introduisant cette expression dans l'équation (1.74) et en développant à l'ordre 1 par rapport à  $\mathbf{z}$  on obtient l'équation linéarisée suivante :

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_p(t), t)\mathbf{z}(t), \quad (1.80)$$

où  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{y}_p(t)) = \mathbf{A}(t)$  représente la matrice jacobienne évaluée en  $\mathbf{y}_p(t)$ . L'équation (1.80) correspond à une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques (de période  $T$ ) dont la résolution fait intervenir la théorie de Floquet [56].

On montre que le système (1.80) possède  $n$  solutions linéairement indépendantes  $\mathbf{z}_i(t)$  formant un système fondamental de solutions. En regroupant les fonctions  $\mathbf{z}_i$  dans une matrice  $\mathbf{Z}(t)$  définie par :

$$\mathbf{Z}(t) = [\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_n(t)], \quad (1.81)$$

on montre que  $\mathbf{Z}(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{y}_p(t))\mathbf{Z}(t). \quad (1.82)$$

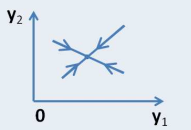
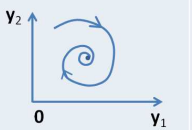
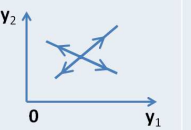
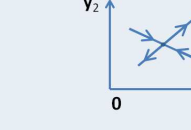
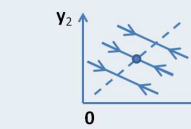

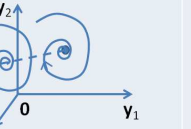
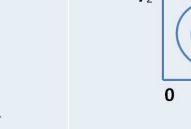
SOLUTION HYPERBOLIQUE $\forall \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$				
PUIT $\forall \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$		SOURCE $\forall \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$		POINT SELLE $\exists \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ et $\exists \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$
NŒUD STABLE $\forall \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0$	FOCUS STABLE $\exists \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0$	NŒUD INSTABLE $\forall \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0$	FOCUS INSTABLE $\exists \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0$	POINT SELLE INSTABLE
				
SOLUTION NON HYPERBOLIQUE $\exists \lambda_k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$				
$\forall \lambda_i, i \neq k \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$		$\forall \lambda_i, i \neq k \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$		$\forall \lambda_i \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$
NŒUD MARGINALEMENT STABLE $\forall \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0$	FOCUS MARGINALEMENT STABLE $\exists \lambda_i \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0$	POINT NON HYPERBOLIQUE INSTABLE	CENTRE	
				

FIGURE 1.7 – Stabilité des points d'équilibre

Comme les coefficients de l'équation (1.82) sont périodiques de période  $T$ , la matrice  $\mathbf{Z}(t+T) = [\mathbf{z}_1(t+T), \dots, \mathbf{z}_n(t+T)]$  constitue également un ensemble fondamental de solutions. Du fait que les  $\mathbf{z}_i(t)$  forment une base de l'espace des solutions, la matrice  $\mathbf{Z}(t+T)$  doit s'exprimer comme combinaison linéaire des  $\mathbf{z}_i(t)$  :

$$\mathbf{Z}(t+T) = \mathbf{Z}(t)\Phi, \quad (1.83)$$

où  $\Phi$  est une matrice constante de taille  $n \times n$  appelée matrice de monodromie. En imposant la condition  $\mathbf{Z}(t=0) = \mathbf{I}_n$  (matrice identité de taille  $n$ ) l'équation (1.83) devient  $\mathbf{Z}(T) = \Phi$  et il est alors possible de calculer  $\Phi$  par intégration sur une période  $T$  du système (1.74) pour des conditions initiales du type  $\mathbf{z}_i(0) = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  où le "1" est placé en  $i^{\text{ème}}$  position.

En appliquant récursivement la relation de l'équation (1.83) on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{Z}(mT) = \mathbf{Z}((m-1)T)\Phi = \mathbf{Z}(0)\Phi^m. \quad (1.84)$$

En considérant que la matrice  $\Phi$  est diagonalisable ( $\Phi = \mathbf{PDP}^{-1}$ ) et en appliquant le changement de variable  $\mathbf{Z} = \mathbf{VP}$  il vient  $\mathbf{V}(mT) = \mathbf{V}_0\mathbf{D}^m$  soit encore

$$\mathbf{v}_i(mT) = \mathbf{v}_i(0)\rho_i^m. \quad (1.85)$$



Cette dernière équation montre que la stabilité des solutions est liée aux normes des valeurs propres  $\rho_i$  de la matrice de monodromie. Si toutes les valeurs propres sont de norme inférieure à 1 (ie  $|\rho_i| < 1, i = 1..n$ ) la solution périodique  $\mathbf{y}_p(t)$  est stable. Au contraire s'il existe une valeur propre de norme supérieure à 1 (ie  $\exists i, |\rho_i| > 1$ ) alors la solution périodique est instable. Enfin dans le cas où une ou plusieurs valeurs propres sont de norme 1, il faut disposer d'autres informations pour déterminer la stabilité de la solution périodique. Notons toutefois que, si  $\rho_k = 1$  [resp.  $\rho_k = -1$ ] la solution associée  $\mathbf{v}_k$  est périodique de période  $T$  [resp.  $2T$ ] (résultats valides au premier ordre). La perte de stabilité est en général liée à un phénomène de bifurcation, et la manière dont les multiplicateurs de Floquet quittent le cercle unité indique le type de bifurcation. On compte 3 types de bifurcation pour les solutions périodiques : les points de retournement ou d'embranchement, les doublements de période ou les bifurcations de Hopf d'ordre 2 (aussi appelées bifurcation de Neimark-Sacker). La Fig.1.8 donne un résumé des différents scénarios de bifurcation. Dans le cas des solutions périodiques de systèmes libres (modes non-linéaires) il est possible de montrer que la matrice de monodromie associée possède toujours une valeur propre égale à 1 [56]. Il faut alors tenir compte de cette valeur avant de statuer sur la stabilité de la solution libre.

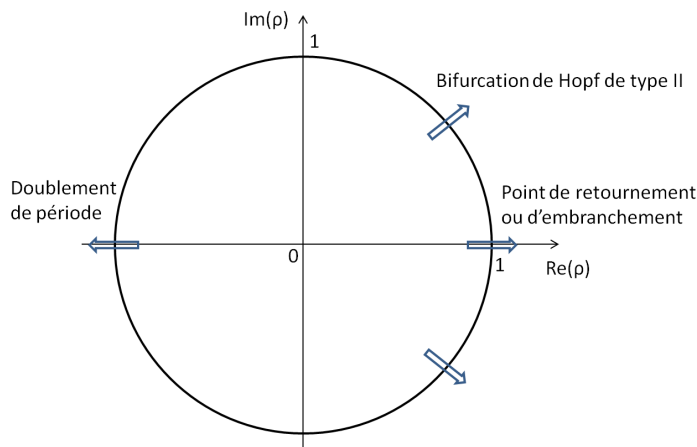


FIGURE 1.8 – Les différents scénarios de bifurcation possibles pour une solution périodique en fonction des multiplicateurs de Floquet  $\rho$

D'un point de vue pratique, il est important de bien choisir les paramètres contrôlant le niveau d'erreur dans la solution, en particulier la taille maximale du pas de temps et la tolérance sur les solutions. Il a été montré [82] que le calcul de la stabilité par utilisation des matrices de monodromie est fortement dépendant du nombre de pas de temps utilisés sur l'intervalle d'intégration. On veillera donc à utiliser un nombre de pas de temps suffisamment grand pour assurer la validité des résultats. La détermination du pas de temps à utiliser peut éventuellement être guidée par une étude préliminaire de la convergence de la stabilité en fonction du nombre de pas de temps retenus.

L'avantage de la méthode de monodromie réside premièrement dans sa facilité de mise en place : il suffit d'avoir accès à un intégrateur temporel. En revanche, cette méthode est relativement longue, notamment pour les systèmes de grande taille. En effet, pour calculer la stabilité d'une solution, il faut réaliser  $n$  intégrations temporelles (où  $n$  est le nombre de variable du système), avec un pas de temps suffisamment faible pour assurer des résultats corrects, et il faut ensuite réitérer ces calculs pour chaque solution.

Etant donné que le calcul des solutions périodiques sera réalisé dans le domaine fréquentiel (par exemple par HBM), il pourra être judicieux d'évaluer également la stabilité dans ce même domaine dans le but d'éviter au maximum les phases d'intégration numérique souvent coûteuses. Nous présentons dans le paragraphe suivant certaines de ces approches.

### 1.3.1.4 Autres méthodes de calcul numérique de la stabilité

#### Méthode de Hill

La méthode de Hill est une méthode de calcul de stabilité dans le domaine fréquentiel, et elle peut s'appliquer lorsque les solutions sont recherchées sous forme de séries de Fourier comme dans le cadre de la HBM. La méthode est basée sur l'exploitation d'une troncature du déterminant de Hill et plusieurs formalismes ont été proposés [42,82,83]. Dans [83], la perturbation est considérée directement dans le domaine fréquentiel, ce qui permet de traiter le calcul de stabilité directement sur les équations du mouvement à  $n$  variables (sans repasser dans l'espace d'état). En considérant une solution  $\mathbf{x}_p(t)$  de l'équation (1.1) calculée par balance harmonique (représentée par ses coefficients  $\tilde{\mathbf{x}}_p$ ), on lui ajoute une perturbation dont l'amplitude varie de manière exponentielle sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)(\tilde{\mathbf{x}}_p + e^{\lambda t}\tilde{\mathbf{p}}), \quad (1.86)$$

où  $\tilde{\mathbf{p}}$  représente les coefficients de Fourier de la perturbation. L'objectif est ici d'évaluer le coefficient  $\lambda$  pour statuer sur l'évolution de la perturbation.

En substituant l'équation (1.86) dans l'équation du mouvement (1.1), en développant le terme non-linéaire au premier ordre, et en appliquant une procédure de Galerkin, on se ramène à une équation du type :

$$(\mathbf{H}_0 + \lambda\mathbf{H}_1 + \lambda^2\mathbf{H}_2)\tilde{\mathbf{p}} = 0, \quad (1.87)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \int \mathbf{Q}^T(\mathbf{M}\mathbf{Q}\nabla^2 + \mathbf{C}\mathbf{Q}\nabla + \mathbf{K}\mathbf{Q} + \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p)) dt, \\ \mathbf{H}_1 &= \int \mathbf{Q}(t)^T(2\mathbf{M}\mathbf{Q}\nabla + \mathbf{C}\mathbf{Q}) dt, \\ \mathbf{H}_2 &= \int \mathbf{Q}(t)^T\mathbf{M}\mathbf{Q} dt. \end{aligned} \quad (1.88)$$

L'équation (1.87) correspond à un problème aux valeurs propres généralisé dont les solutions  $(\lambda_i, \tilde{\mathbf{p}}_i)$  permettent de statuer sur l'évolution de la perturbation. Le critère de stabilité s'énonce de la manière suivante :

- si toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative la solution est stable,
- s'il existe une valeur propre de partie réelle positive, la solution est instable,
- si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures, d'autres éléments sont nécessaires pour juger de la stabilité.

Cette méthode de calcul a par exemple été utilisée pour l'étude du contact rotor / stator [42] ou l'étude de la dynamique des roulements [84]. Cependant, dans [83], Gousskov compare la méthode de Hill à une analyse de Floquet sur un oscillateur de Duffing et montre que cette méthode de Hill sous-estime les zones de stabilité dès lors qu'on considère plus d'une harmonique dans le développement de la solution. La méthode apparaît donc peu fiable.

Lazarus et Thomas ont proposé dans [82] une autre utilisation de la méthode de Hill basée cette fois sur l'équation d'état d'ordre 1 à  $2n$  variables. En reprenant les éléments de la théorie de

Floquet présentés à la section 1.3.1.3. Chaque fonction  $\mathbf{z}_j(t)$  du système fondamental de solution (équation (1.81)) de l'équation linéarisée est exprimée sous sa forme de Floquet :

$$\mathbf{z}_j(t) = \mathbf{p}_j(t)e^{\alpha_j t}, \quad (1.89)$$

où les fonctions  $\mathbf{p}_j(t)$  sont périodiques de période  $T$ , et les  $\alpha_j$  sont des coefficients complexes appelés exposants de Floquet. En utilisant l'expression de l'équation (1.89) et la périodicité des  $\mathbf{p}_j(t)$  on montre que :

$$\mathbf{z}_j(t + mT) = \mathbf{p}_j(t + mT)e^{\alpha_j(t+mT)} = \mathbf{z}_j(t)e^{\alpha_j mT} = \mathbf{z}_j(t)[e^{\alpha_j T}]^m. \quad (1.90)$$

Cette dernière équation est à rapprocher de l'équation (1.85) et permet de déterminer la stabilité de la solution en fonction du signe de la partie réelle des exposants  $\alpha_j$  :

- (i) si tous les  $\alpha_j$  sont de partie réelle strictement négative, toutes les solutions fondamentales  $\mathbf{z}_j(t)$  tendent vers zéro et la solution est stable,
- (ii) au contraire, s'il existe un  $\alpha_j$  de partie réelle positive ou nulle, la solution fondamentale correspondante croît de manière exponentielle et la solution est instable.

Notons ici que les exposants de Floquet sont définis de manière unique modulo  $2i\pi/T$  (ie on peut remplacer  $\alpha_j$  par  $\alpha_j + 2ik\pi/T$  dans l'équation (1.89) sans changer l'égalité).

On revient maintenant à la méthode de Hill proprement dite. Chaque fonction périodique  $\mathbf{p}_j(t)$  (équation (1.89)) est exprimée sous la forme de sa série de Fourier :

$$\mathbf{p}_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_j^k e^{ik\omega t}, \quad (1.91)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , et où les  $\mathbf{p}_j^k$  sont des vecteurs de coefficients complexes de taille  $n$ . Dans ce cas, les solutions fondamentales  $\mathbf{z}_j(t)$  s'expriment par :

$$\mathbf{z}_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_j^k e^{ik\omega t} e^{\alpha_j t}. \quad (1.92)$$

De même en exprimant la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_p(t), t)$  sous la forme de sa série de Fourier on a :

$$\mathbf{J}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}^k e^{ik\omega t}, \quad (1.93)$$

où les  $\mathbf{J}^k$  sont des matrices complexes de taille  $n \times n$ .

En substituant les équations (1.92) et (1.93) dans l'équation (1.80), on obtient le système d'équations suivant :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_j + ik\omega) \mathbf{p}_j^k e^{(\alpha_j + ik\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}^l \mathbf{p}_j^k e^{(\alpha_j + 2i(k+l)\omega)t}. \quad (1.94)$$

En effectuant le changement d'indice  $k \rightarrow k - l$  dans le membre de droite et en regroupant tous les termes sous la même somme on obtient alors l'équation suivante :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{J}^l \mathbf{p}_j^{k-l} - (\alpha_j + ik\omega) \mathbf{p}_j^k \right] e^{(\alpha_j + 2ik\omega)t} = \mathbf{0}. \quad (1.95)$$

En égalisant séparément chaque harmonique de l'équation (1.95) à zéro, il est possible de réécrire le problème sous la forme d'un problème aux valeurs propres du type :

$$(\mathbf{H} - s\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.96)$$

avec  $\mathbf{H}$  la matrice de Hill (de dimension infini) donnée par :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{J}^0 + i\omega\mathbf{I} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{J}^{-2} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}^1 & \mathbf{J}^0 & \mathbf{J}^{-1} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{J}^2 & \mathbf{J}^1 & \mathbf{J}^0 - i\omega\mathbf{I} \cdots & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.97)$$

$s$  est un nombre complexe, et  $\mathbf{q}$  un vecteur de dimension infinie. Les valeurs de  $s$  et de  $\mathbf{q}$  sont reliées aux valeurs des  $\alpha_j$  et des  $\mathbf{p}_j$  par les relations suivantes :

$$s_j^k = \alpha_j + ik\omega, \quad \mathbf{q}_j^k = [\dots, \mathbf{p}_j^{-1-k}, \mathbf{p}_j^{0-k}, \mathbf{p}_j^{1-k}, \dots]^T, \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}, j = 1..n. \quad (1.98)$$

Cette dernière équation montre que les exposants de Floquet  $\alpha_j$  peuvent être calculés à partir des valeurs propres  $s_j^k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Cependant, il est bien évident que la résolution du problème aux valeurs propres de dimension infinie (équation (1.96)) n'est pas réalisable numériquement, et qu'il est nécessaire de tronquer les développements des séries de Fourier des équations (1.92) et (1.93) à un certain ordre  $H$  pour résoudre le problème.

Par conséquent, la matrice  $\mathbf{H}$  sera tronquée en une matrice  $\tilde{\mathbf{H}}$  de taille  $n(2H + 1)$  correspondant au fait que l'on ne considère que les indices  $k, l \in [-H..H]$  dans l'équation (1.95). En notant  $\tilde{s}_j^k$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_j^k$  les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\tilde{\mathbf{H}}$ , il est possible de montrer que les couples  $(\tilde{s}_j^k, \tilde{\mathbf{q}}_j^k)$  tendent vers  $(s_j^k, \mathbf{q}_j^k)$  lorsque le nombre d'harmonique  $H$  tend vers l'infini [82]. Il reste maintenant à déterminer quelles sont les valeurs propres  $s_j^k$  qui seront utilisées pour le calculs des exposants de Floquet  $\alpha_j$ .

Lazarus et Thomas proposent d'analyser les vecteur propres du problème tronqué :

$$\tilde{\mathbf{q}}_j^k = [\mathbf{p}_j^{-H-k}, \dots, \mathbf{p}_j^{-1-k}, \mathbf{p}_j^{0-k}, \mathbf{p}_j^{1-k}, \dots, \mathbf{p}_j^{H-k}], \quad (1.99)$$

et de considérer uniquement ceux associés à  $k = 0$  :

$$\tilde{s}_j^0 = \alpha_j, \quad \tilde{\mathbf{q}}_j^0 = [\mathbf{p}_j^{-H}, \dots, \mathbf{p}_j^{-1}, \mathbf{p}_j^0, \mathbf{p}_j^1, \dots, \mathbf{p}_j^H]. \quad (1.100)$$

Pour déterminer ces vecteurs, ils proposent tout d'abord de résoudre le problème aux valeurs propres tronqué pour obtenir les couples  $(\tilde{s}_j^k, \tilde{\mathbf{q}}_j^k)$ , puis de sélectionner parmi ces couples ceux qui sont associés à la valeur  $k = 0$ . La sélection s'effectue de manière numérique et se base sur des arguments de symétrie pour sélectionner les valeurs propres les plus proches de l'axe des réels (ie  $k = 0$ ) qui semblent être les valeurs les plus convergées malgré la troncature réalisée. Au final, ils proposent de retenir pour les  $\tilde{\mathbf{q}}_j^0$  les  $n$  vecteurs  $\tilde{\mathbf{q}}_j^k$  qui ont les formes les plus symétriques. Les valeurs propres associées  $\tilde{s}_j^0$  correspondent alors directement aux exposants de Floquet ( $\tilde{s}_j^0 = \alpha_j$ ), et il est alors possible de statuer sur la stabilité des solutions.

Le principal effort numérique de cette méthode réside dans l'évaluation des coefficients de Fourier de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}^k$  (équation (1.93)) et dans le calcul des valeurs propres de la matrice tronquée  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Cette méthode a été appliquée à un système simple d'oscillateur de Duffing et comparée à la méthode basée sur le calcul des valeurs propres de la matrice de monodromie

dans [82]. Les résultats obtenus montrent que la méthode de Hill permet un gain de temps d'un facteur 4 par rapport à une étude de stabilité basée sur la théorie de Floquet, tout en donnant des résultats quasiment identiques. On pourra trouver la définition d'une méthode similaire, avec application à la stabilité et à la détection de bifurcation dans le domaine de l'électronique dans [85]

### Utilisation d'un pseudo-temps

Une dernière méthode pour évaluer la stabilité des solutions calculées par HBM a été proposée par D. Laxalde dans [11]. Il propose de considérer une nouvelle échelle de temps lente ( $\tau$ ) pour introduire une dépendance en (pseudo) temps des coefficients de Fourier de la solution sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{x}}(\tau). \quad (1.101)$$

Il postule ensuite que la vitesse a la même forme que dans le cas de la HBM classique, c'est-à-dire  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t)\nabla\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$ , et obtient l'accélération sous la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}(t)(\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \nabla\frac{\partial\tilde{\mathbf{x}}}{\partial t}). \quad (1.102)$$

En introduisant ces relations dans l'équation du mouvement et en éliminant l'échelle de temps rapide ( $t$ ) par une procédure de Galerkin, on obtient les équations suivantes gouvernant l'évolution des coefficients sur l'échelle de temps lente :

$$\widetilde{\mathbf{M}}\nabla\frac{\partial\tilde{\mathbf{x}}}{\partial\tau}(\tau) = \widetilde{\mathbf{F}}_{ex} - \Lambda\tilde{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{F}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau)). \quad (1.103)$$

Dans ce contexte, les solutions de la HBM sont vues comme les points stationnaires du système (1.103), et la stabilité peut être évaluée en utilisant les arguments de stabilité pour les points fixes (section 1.3.1.2) sur l'équation (1.103).

Notons que le formalisme de l'équation (1.103) permet également de calculer les solutions des équations de la HBM par intégration temporelle. En partant d'une condition initiale  $\tilde{\mathbf{x}}(\tau = 0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$  on intègre l'équation (1.103) sur un temps suffisamment long pour atteindre un état stationnaire, la solution de la HBM est alors donnée par cet état stationnaire (voir par exemple [2, 86]).

### 1.3.2 Phénoménologie non-linéaire

On illustre maintenant les phénomènes typiques que l'on peut rencontrer dans le cas des vibrations non-linéaires (sauts, résonances secondaires, localisation,...). On considère en particulier le cas des oscillations forcées gouvernées par l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (1.104)$$

où  $\mathbf{F}_{ex}(t)$  correspond aux forces d'excitation, supposées harmonique ( $\mathbf{F}_{ex}(t) = \mathbf{F} \cos(\Omega t)$ ).

#### 1.3.2.1 Résonance principale

Le phénomène de résonance non-linéaire correspond au fait que le système atteint son maximum d'amplitude pour des fréquences d'excitation particulières. Cependant, dans le cas non-linéaire, nous avons vu que la fréquence de vibration est dépendante de l'amplitude des mouvements. Ainsi pour des amplitudes de force différentes, la fréquence de résonance d'un même

mode sera différente. En fait, on observe expérimentalement et numériquement que les courbes représentant l'amplitude de vibration en fonction de la fréquence d'excitation se positionnent autour des "backbone curves" (ossature) définies par les modes non-linéaires. Pour illustrer ce phénomène de résonance non-linéaire, on reprend le cas de l'exemple à deux ddl de l'équation (1.56) rappelée ici :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_1 + c\dot{\mathbf{x}}_1 + (k + k_c)\mathbf{x}_1 - k_c\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^3 &= \mathbf{F}_1 \cos(\Omega t), \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 + c\dot{\mathbf{x}}_2 + (k + k_c)\mathbf{x}_2 - k_c\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^3 &= \mathbf{F}_2 \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (1.105)$$

En appliquant l'approximation de la HBM (équation (1.22)) pour  $\omega = \Omega$ , on se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques du type (1.27) dont la résolution par continuation permet d'obtenir les courbes de réponse en fréquence. On a tracé sur la Fig.1.9 ces courbes pour plusieurs niveaux de l'excitation  $F$ . Premièrement, on observe bien que les courbes de réponse forcée se positionnent autour des backbone curves des modes non-linéaires. Ensuite, pour des amplitudes de vibration suffisamment grandes, on observe l'apparition de deux points de retournement qui conduisent à plusieurs solutions possibles (3 au maximum) pour une même fréquence d'excitation. Cependant, toutes ces solutions ne sont pas stables. En effet, la partie de la courbe située entre les deux points de retournement est instable, comme l'indique la norme des multiplicateurs de Floquet représentés Fig.1.10. Physiquement, cette instabilité se traduit par des phénomènes de saut : lors d'un balayage fréquentiel le système passe brutalement d'un état à un autre en suivant les directions indiquées sur la Fig.1.10.

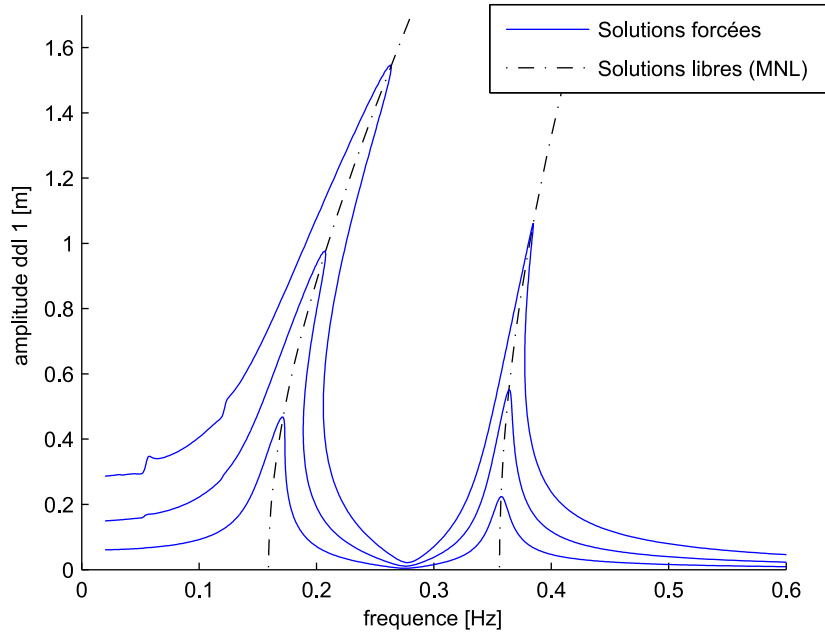


FIGURE 1.9 – Illustration du phénomène de résonance non-linéaire : solutions forcées du système (1.105) pour  $F = 0.1, 0.25, 0.5N$ . Comparaison avec les modes non-linéaires

### 1.3.2.2 Résonance secondaire

En plus du phénomène de résonance principale, les systèmes dynamiques non-linéaires peuvent présenter d'autres formes de résonances appelées résonances secondaires. Ces résonances appa-

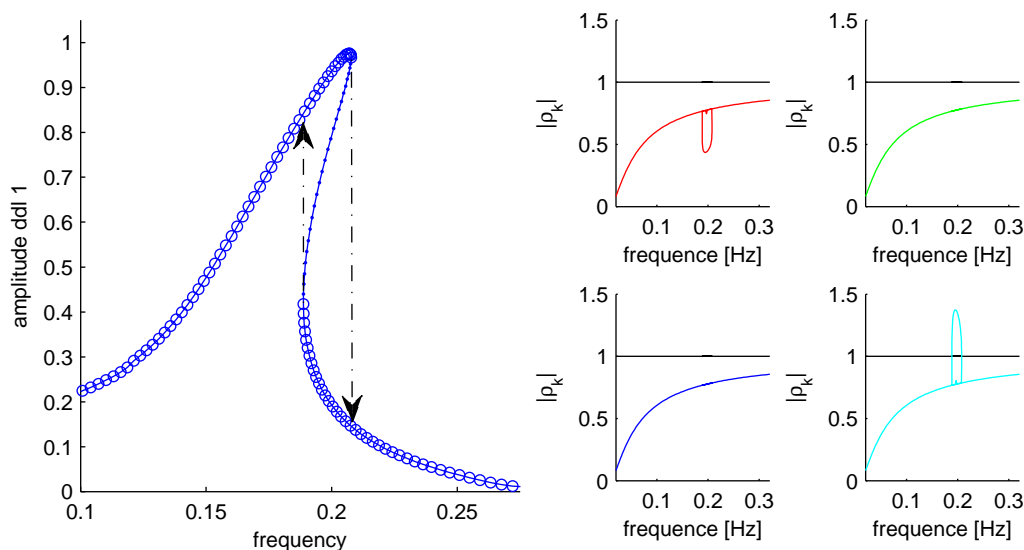


FIGURE 1.10 – Étude de stabilité de la réponse forcée autour de la résonance du premier mode non-linéaire pour le système (1.105) pour  $F = 0.25N$ . A gauche : amplitude du ddl 1 en fonction de la fréquence ( $\circ$  : stable,  $-$  : instable) et illustration des phénomènes de saut. A droite : normes des multiplicateurs de Floquet  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$

raissent lorsqu'il existe des relations du type  $p\Omega = \sum_k q_k \omega_k$ ,  $(p, q_k) \in \mathbb{Z}$ , liant la pulsation d'excitation aux pulsations de résonance du système linéarisé. On distingue deux types de résonances secondaires : les résonances sur-harmoniques et les résonances sous-harmoniques. On présente également le cas où le système possède des relations de résonances internes.

### Résonances sur-harmonique et sous-harmonique

Les résonances sur-harmoniques sont observées lorsqu'il existe une relation du type  $\Omega = \frac{\omega_i}{p}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . On observe alors l'apparition d'un terme supplémentaire de pulsation fondamentale  $p\Omega$  dans la réponse du système. Notons que la HBM est particulièrement bien adaptée pour calculer les résonances sous-harmoniques puisque l'approximation de l'équation (1.22) contient déjà les termes de pulsation  $p\Omega$ . Pour illustrer le phénomène de résonance sur-harmonique, on considère encore une fois le système (1.105) pour  $\mathbf{F}_1 = F$ ,  $\mathbf{F}_2 = 0$ . Ce système, avec une non-linéarité cubique, possède théoriquement une résonance sur-harmonique pour  $p = 3$ . Cette résonance secondaire est illustrée sur la Fig.1.11, où on observe bien l'apparition d'un pic pour  $\Omega = \frac{\omega_1}{3} \approx 0.053$ . L'évolution temporelle des ddl lors de la résonance interne est également représentée sur la Fig.1.11. En appliquant le même raisonnement pour le deuxième mode, on observe l'apparition d'une résonance sur-harmonique d'ordre 3 pour le mode 2 vers  $\Omega = \frac{\omega_2}{2} \approx 0.118$ . En considérant des harmoniques d'ordre plus élevé dans l'approximation de la HBM, on est en mesure de mettre en évidence d'autres résonances sur-harmoniques pour  $p = 5, 7, \dots$ , également présentes sur la Fig.1.11.

Les résonances sous-harmoniques sont observées lorsqu'il existe une relation du type  $\Omega = p\omega_i$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Elles correspondent à l'apparition d'un terme de pulsation fondamentale  $\frac{\Omega}{p}$  dans la réponse du système. On pourra consulter [87] pour un exemple de résonance sous-harmonique.

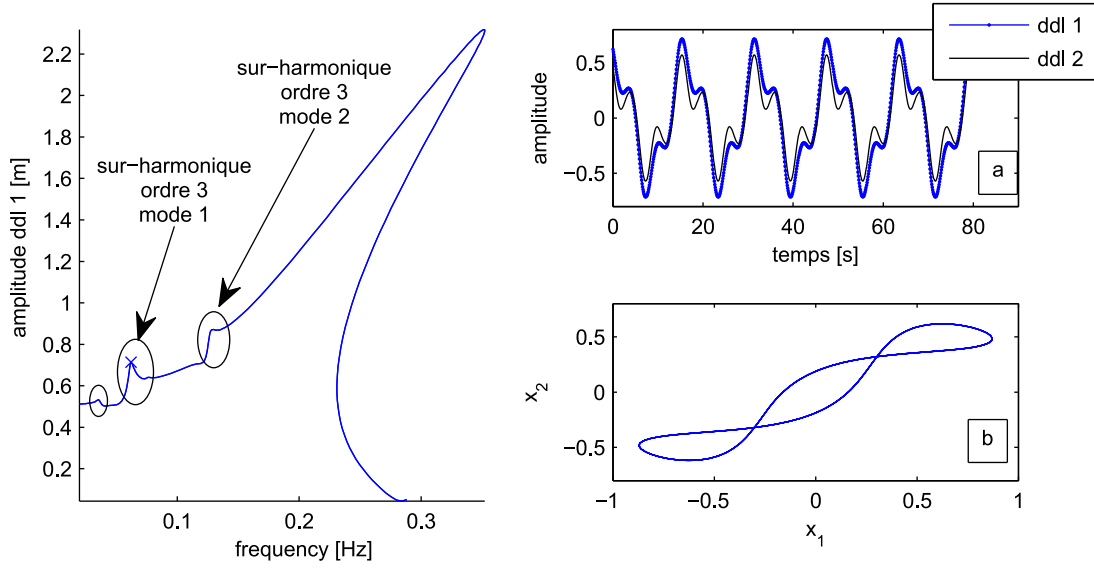


FIGURE 1.11 – Résonance sur-harmonique du système à deux ddl de l'équation (1.105) pour  $F = 1N$ . A gauche : représentation dans le plan fréquence / amplitude. A droite : (a) évolutions temporelles des ddl au point  $f = 0.062$  Hz, (b) évolution dans l'espace des configurations de la solution au point  $f = 0.062$  Hz (sur-harmonique d'ordre 3 du mode 1)

### Résonance interne

Une relation de résonance interne existe lorsque les pulsations propres du système linéarisé sont commensurables. En d'autres termes, une résonance interne est définie par une relation du type  $\sum_k q_k \omega_k = 0$ ,  $q_k \in \mathbb{Z}$ . Lorsqu'une telle relation existe, elle induit un couplage entre les modes impliqués dans la relation de résonance (ie les modes pour lesquels  $q_k \neq 0$ ), et l'énergie est constamment échangée entre ces modes. On pourra par exemple consulter [88–90] pour des études de résonance interne dans des systèmes mécaniques faiblement couplés.

Notons que les systèmes à symétrie cyclique possèdent naturellement des relations de résonances internes du type  $\omega_p = \omega_q$  en raison des modes doubles qui existent pour ce type de structure. De plus, il a été montré numériquement [38] que des relations de résonance interne peuvent apparaître même si les fréquences du système linéarisé ne sont pas commensurables. En effet, puisque les fréquences de résonance évoluent avec l'amplitude de vibration, des fréquences qui n'étaient initialement pas commensurables, peuvent le devenir lorsque l'amplitude augmente.

#### 1.3.2.3 Localisation forcée

En plus des phénomènes de résonance, certains systèmes non-linéaires peuvent faire apparaître des phénomènes de localisation forcée. Ce type de comportement particulier a été étudié par Vakakis et son équipe [4, 5, 91] pour des systèmes à symétrie cyclique. Il correspond au fait que pour une excitation donnée, la réponse du système est localisée spatialement. Ce type de comportement avait déjà été observé pour des systèmes à symétrie cyclique linéaires et désaccordés (voir par exemple [92]), mais dans le cas des systèmes non-linéaires, ce phénomène peut apparaître même pour des systèmes parfaitement symétriques (parfaitement accordés). Pour l'illustrer, on considère le cas de l'exemple à 2 ddl de l'équation (1.105) pour  $\mathbf{F}_1 = F$ ,  $\mathbf{F}_2 = 0$ . En faisant varier l'amplitude de la force  $F$ , on observe l'apparition d'un nouveau type de solution



correspondant au phénomène de localisation forcée (Fig.1.12). Ces nouvelles solutions sont organisées autour des branches bifurquées du deuxième mode non-linéaire et elles correspondent à un mouvement localisé uniquement sur l'une des deux masses (ici sur la seconde masse). Après un calcul de stabilité, il s'avère qu'une partie de ces nouvelles solutions sont stables et peuvent donc en théorie être physiquement observées. Nous verrons dans le chapitre 3 que ces solutions décrivent en fait initialement des courbes fermées dans le plan fréquence / amplitude, et que ces courbes fermées fusionnent avec la courbe de résonance principale lorsque l'amplitude augmente. On voit ici tout l'intérêt de calculer les bifurcations des modes non-linéaires puisqu'elle peuvent indiquer la présence possible de localisation. Bien sûr ce phénomène de localisation forcée est fortement dépendant de l'amortissement et tend à disparaître lorsque l'amortissement augmente.

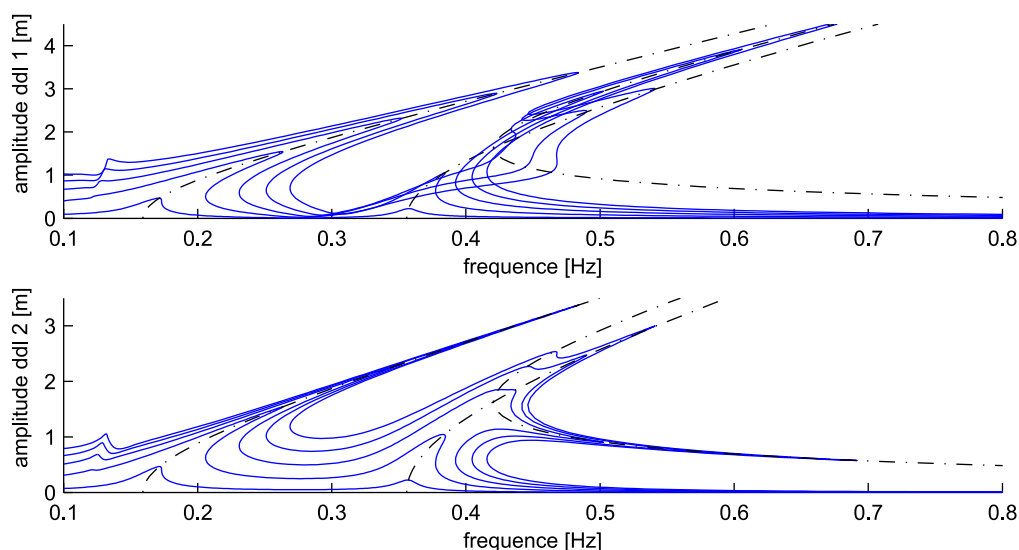


FIGURE 1.12 – Illustration du phénomène de localisation forcée pour le système (1.105). Les courbes de réponse forcée (—) ont été calculées pour différentes valeurs de  $F$  ( $F = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$ ) et sont comparées aux backbone curves des modes non-linéaires (---)

On peut supposer que la localisation forcée des systèmes non-linéaires symétriques est en fait de même nature que la localisation forcée des systèmes linéaires désaccordés. En effet, étant donné que les deux masses vibrent avec une amplitude différente, la "fréquence propre apparente de chaque masse" est différente et par conséquent le système apparaît désaccordé.

## 1.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps le type de systèmes étudiés dans le manuscrit. Il s'agit de systèmes dynamiques non-linéaires caractérisant les vibrations de systèmes mécaniques soumis à des forces non-linéaires par rapport au déplacement (non-linéarité géométrique par exemple) ou à la vitesse (par exemple non-linéarité de frottement).

Ensuite, les méthodes générales de calcul des solutions des systèmes considérés ont été présentées. En particulier, l'accent a été mis sur la méthode de la balance harmonique et sur les méthodes de continuation des solutions de système algébrique qui seront utilisées tout au long

de ce manuscrit. La HBM a l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de la non-linéarité et est donc bien adaptée aux systèmes étudiés ici.

Enfin, ce chapitre présente les méthodes d'analyse des solutions et une partie des comportements propres aux systèmes dynamiques non-linéaires. Dans un premier temps, les méthodes permettant de statuer sur la stabilité des solutions sont exposées, puis on illustre la nouvelle phénoménologie vibratoire (par rapport au cas linéaire) induite par les forces non-linéaires aussi bien dans le cas libre que dans le cas forcé. Au niveau des systèmes libres, le concept de modes non-linéaires est introduit ainsi que des méthodes de calcul permettant de les déterminer. Ces modes non-linéaires définissent une ossature (backbone curve) sur laquelle viennent se positionner les solutions du système forcé. Les différents concepts propres aux systèmes dynamiques non-linéaires (surabondance des modes non-linéaires, résonance sur / sous harmonique, localisations forcés ...) sont illustrés sur un exemple simple à deux degrés de liberté.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont particulièrement bien adaptées à la résolution de "petits" systèmes non-linéaires (de l'ordre d'une centaine de ddl). Pour des systèmes plus gros, comme ceux rencontrés régulièrement dans l'industrie, il faut tout d'abord envisager une étape de réduction du modèle pour pouvoir obtenir des temps de calcul raisonnables, c'est ce qu'on s'attache à décrire dans le chapitre qui suit.



## Chapitre 2

# Méthodes de Galerkin pour la réduction de modèles de systèmes dynamiques non-linéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Enjeux de la réduction de modèle</b>	<b>46</b>
2.1.1	Objectifs de la réduction	46
2.1.2	Estimation de l'erreur de réduction	46
2.1.3	Exemple d'illustration	47
<b>2.2</b>	<b>Réduction par projection de Galerkin</b>	<b>49</b>
2.2.1	Méthodes de calcul d'une base de projection ( <i>a priori</i> )	50
2.2.2	Méthodes de calcul d'une base de projection ( <i>a posteriori</i> )	64
2.2.3	Méthodes de Galerkin non-linéaires	71
<b>2.3</b>	<b>Evaluation des termes non-linéaires réduits</b>	<b>73</b>
2.3.1	Développement de la non-linéarité	73
2.3.2	Méthodes d'évaluation des raideurs réduites	73
2.3.3	Exemple d'application	76
<b>2.4</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>77</b>

---

Ce chapitre présente l'application des méthodes de Galerkin à la réduction de systèmes dynamiques non-linéaires. Après avoir rappelé les objectifs de la réduction de modèle dans un contexte industriel, on présente les éléments principaux de la réduction par projection de Galerkin. En particulier, on expose différentes méthodes de calcul de la base de projection et on les compare entre elles sur un exemple simple de poutre non-linéaire. Enfin, une attention particulière est portée au traitement des termes correspondant à la projection des efforts non-linéaires, on présente en particulier une méthode d'estimation directe des termes non-linéaires réduits dans le cadre des non-linéarités polynomiales

## 2.1 Enjeux de la réduction de modèle

### 2.1.1 Objectifs de la réduction

Pour un système mécanique industriel, la discrétisation utilisée dans la méthode des éléments finis est telle qu'elle peut générer des modèles de grande taille (il n'est pas rare de voir des modèles de taille supérieure à un million de degrés de liberté). De plus, du fait de leurs non-linéarités, l'évaluation et la résolution itérative (de type Newton) de ces équations peuvent se révéler consommatrices en ressources de calcul aussi bien dans le cas d'une résolution par intégration temporelle que dans le cas d'une résolution basée sur une méthode fréquentielle telle que la HBM. Dans ce contexte la réduction de modèle a plusieurs objectifs : (i) réduire le nombre de paramètres permettant de représenter les solutions, et (ii) donner une expression des forces non-linéaires en fonction seulement de ces paramètres.

Le premier objectif est souvent réalisé en projetant le système sur une base de réduction bien choisie, les variables originales  $\mathbf{x}$  sont exprimées en fonction d'un ensemble de variables plus petit  $\mathbf{q}$ , le plus souvent par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire du type  $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}$  où  $\mathbf{\Phi}$  est la base de réduction (voir section 2.2). Les équations sont ensuite réduites en appliquant une projection de Galerkin. Il est bien évident que le choix de la base de projection est crucial pour le succès de la méthode. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il existe d'autres méthodes de réduction du nombre de variables basées sur une évaluation progressive de la base de réduction en même temps que l'évaluation des solutions (méthodes de type PGD [93–96]), ou basées sur une utilisation des modes non-linéaires [76–79].

Le second objectif, consiste à améliorer les performances du modèle réduit obtenu par projection de Galerkin en proposant une expression des efforts non-linéaires réduits directement en fonction des paramètres  $\mathbf{q}$ . Cet objectif sera ici réalisé au travers d'une procédure d'évaluation des raideurs non-linéaires du système réduit appelée STEP (STiffness Evaluation Procedure, section 2.3.2) [97, 98].

Ces deux objectifs introduisent des approximations qui sont sources d'erreurs : une difficulté inhérente à la réduction modèle est en effet le contrôle du niveau d'erreur engendré par l'approximation. Ici une attention particulière sera portée à l'écart entre les solutions approchées par la méthode de réduction et les solutions exactes (issues d'un modèle numérique complet).

### 2.1.2 Estimation de l'erreur de réduction

On rappelle tout d'abord les notations principales, déjà utilisées dans le premier chapitre. L'équation du mouvement après discrétisation spatiale est donnée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (2.1)$$

Cette équation peut également être formulée sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 donné par :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \mathbf{H}_{ex}(t) \quad (2.2)$$

Sauf dans quelques cas particuliers, il n'existe pas d'estimateur d'erreur a priori pour estimer la qualité du modèle réduit. On propose ici des estimateurs d'erreur a posteriori, qui permettent d'évaluer la qualité de la solution réduite  $\mathbf{x}_r$  par rapport à la solution exacte du problème complet  $\mathbf{x}^*$ . La plupart du temps, la solution de référence  $\mathbf{x}^*$  sera obtenue par application de la HBM sur le système complet.

L'estimateur le plus simple à considérer est la différence relative entre la solution approchée et la solution complète définie par :

$$\epsilon_{rel} = \frac{\|\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{x}^*(t)\|}{\|\mathbf{x}^*(t)\|} \quad (2.3)$$

Différents choix sont possibles pour la norme  $\|\cdot\|$ , on peut citer en particulier la norme infinie ( $\|\mathbf{x}(t)\| = \max_i(\max_t)(|x_i(t)|)$ ) ou encore la norme 2 ( $\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{\int_0^T x_i(t)^2 dt}$ ). Bien entendu l'intérêt de cet estimateur est limité à des cas particuliers pour lesquels on connaît l'expression de la solution exacte.

Un second estimateur est l'erreur commise sur l'équation du mouvement complète. On peut définir cette erreur par :

$$\epsilon_{mvt} = \frac{\|\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}_r) - \mathbf{F}(t)\|}{\|\mathbf{F}(t)\|} \quad (2.4)$$

Cet estimateur est a priori le meilleur estimateur puisqu'on regarde si l'équation différentielle de départ est bien vérifiée. Cependant, l'erreur donnée par  $\epsilon_{mvt}$  ne mesure pas que l'erreur liée à la réduction de modèle, une partie de cette erreur est en effet générée par la troncature des harmoniques effectuée durant une résolution HBM. Pour ne mesurer que l'erreur induite par la réduction de modèle, on peut considérer une version fréquentielle  $\tilde{\epsilon}_{mvt}$  de l'erreur sur l'équation du mouvement donnée par :

$$\tilde{\epsilon}_{mvt} = \frac{\|\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_{nl} - \tilde{\mathbf{F}}_{ex}\|}{\|\tilde{\mathbf{F}}_{ex}\|} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice de raideur dynamique associée au problème complet. Dans ce cas, on regarde dans quelle mesure les équations algébriques non-linéaires (issues de la HBM) définies pour le système complet sont vérifiées par la solution approchée.

Tout au long des simulations réalisées dans ce chapitre et dans le suivant, nous utiliserons ces estimateurs d'erreur pour quantifier la qualité et la précision des modèles réduits présentés.

### 2.1.3 Exemple d'illustration

On présente ici l'exemple qui sera utilisé pour illustrer les méthodes de réduction de modèle. Le système considéré consiste en une poutre d'Euler-Bernoulli bi-encastrée avec non-linéarité géométrique (Fig.2.1). Pour chaque point de la poutre, on considère trois degrés de liberté (deux translations  $u$  et  $v$ , une rotation  $\theta \approx \frac{\partial v}{\partial x}$ ).

Les conditions aux limites pour une poutre bi-encastrée sont les suivantes :

$$u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = \theta(0) = \theta(L) = 0 \quad (2.6)$$

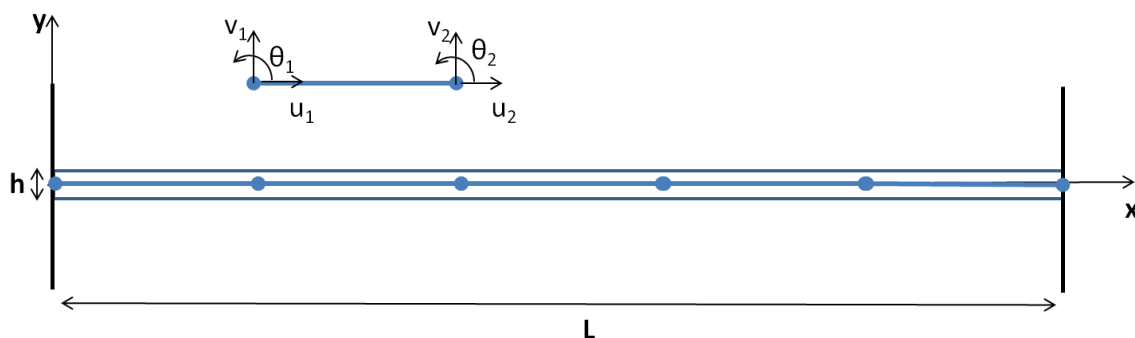


FIGURE 2.1 – Modèle de poutre élément fini utilisé pour illustrer les méthodes de réduction de modèle

En appliquant la méthode des éléments finis, on interpole les déplacements sur un élément de longueur  $l = \frac{L}{n_e}$  par :

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{N}_u(x)\mathbf{q} \\ v(x) &= \mathbf{N}_v(x)\mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec  $\mathbf{q} = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^T$ ,  $\mathbf{N}_u = [N_1, 0, 0, N_2, 0, 0]$  et  $\mathbf{N}_v = [0, N_3, N_4, 0, N_5, N_6]$  où les  $N_i(x)$  représentent les polynômes d'interpolations (ici les polynômes d'Hermite) [7, 19].

En utilisant les approximations de Von Karman pour l'évaluation des termes non-linéaires, l'énergie de déformation est donnée par la relation suivante [19] :

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \left( ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right) dx \quad (2.8)$$

Enfin, en appliquant les équations de Lagrange, on est en mesure de définir l'expression des matrices élémentaires de masse et de raideur, ainsi que les coefficients non-linéaires élémentaires, donnés pour  $1 \leq i, j, k, m \leq 6$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{el}(i, j) &= \rho S \int_0^l (\mathbf{N}_u(i)\mathbf{N}_u(j) + \mathbf{N}_v(i)\mathbf{N}_v(j)) dx \\ \mathbf{K}_{el}(i, j) &= ES \int_0^l \left( \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(j) \right) dx + EI \int_0^l \left( \frac{\partial^2 \mathbf{N}_v}{\partial x^2}(i) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_v}{\partial x^2}(j) \right) dx \\ \mathbf{K}_{el}^{(2)}(i, j, k) &= \frac{1}{2} ES \int_0^l \left( \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) \right) dx + ES \int \left( \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) \right) dx \\ \mathbf{K}_{el}^{(3)}(i, j, k, m) &= \frac{1}{2} ES \int \left( \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(i) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(j) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(k) \frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial x}(m) \right) dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

Après assemblage de ces matrices élémentaires et application des conditions aux limites, on obtient une équation d'équilibre sous la forme de l'équation (2.1) avec  $n = 3(n_e + 1)$  ddl, où les efforts non-linéaires sont exprimés par des polynômes de degré 3. Dans la suite de ce chapitre, les valeurs numériques des paramètres du modèle sont données par (50 éléments) pour une poutre en acier de section carrée, unité SI) :

$$n_e = 50, L = 1, ES = 1.89 \cdot 10^8, EI = 1.4175 \cdot 10^4, \rho S = 7.02 \quad (2.10)$$

Dans la majeure partie des cas, on supposera que le système est excité par une force périodique, dans la direction transverse, appliquée au centre de la poutre. L'évolution temporelle de la force sera alors du type  $f(t) = A \cos(\omega t)$  où  $A$  et  $\omega$  représentent respectivement l'amplitude et la pulsation d'excitation. Pour le calcul des réponses forcées, on introduira un amortissement de

type Rayleigh défini par la matrice  $\mathbf{C} = 3\mathbf{M}$ , et on se concentrera principalement sur le premier mode de vibration. Cet exemple de poutre bi-encastée illustre bien les difficultés rencontrées lors de la réduction de modèle des systèmes non-linéaires. En particulier, il est bien connu que pour des amplitudes suffisantes, la non-linéarité induit un couplage entre modes de flexion et modes de traction. L'objectif de la réduction de modèle est alors de trouver une "bonne" base de réduction permettant de prendre en compte ces couplages.

## 2.2 Réduction par projection de Galerkin

La méthode de Galerkin est l'une des méthodes les plus utilisées pour la réduction du nombre de ddl d'un système dynamique. Soit  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur des ddl vérifiant l'équation de vibration (2.1). La méthode consiste ici à rechercher le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ , appelé espace de réduction, qui contient "la plus grande partie de la dynamique". Formellement, après avoir déterminé une base de réduction  $\Phi = [\Phi_k]_{1 \leq k \leq r}$  ( $r \leq n$ ), le vecteur des ddl est exprimé sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^r \Phi_k q_k(t) \quad (2.11)$$

où le vecteur  $\mathbf{q}(t)$  de taille  $r \times 1$  représente le vecteur des degrés de liberté réduits.

En introduisant l'approximation (2.11) dans l'équation du mouvement, on est en mesure de définir le résidu suivant :

$$\mathbf{R}(\Phi \mathbf{q}) = \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\Phi \mathbf{q}(t), \Phi \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (2.12)$$

La procédure de Galerkin consiste alors à rechercher les solutions  $\mathbf{q}(t)$  qui permettent de rendre le résidu orthogonal à un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  appelé espace de projection. Ce sous-espace est défini par une base  $\Psi = [\Psi_k]_{1 \leq k \leq r}$ , et la condition d'orthogonalité du résidu se traduit alors par  $\Psi^T \mathbf{R}(\Phi \mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Il est possible de considérer des bases de réduction et de projection différentes ( $\Psi \neq \Phi$ , méthode de Petrov-Galerkin), ou des bases identiques ( $\Psi = \Phi$ , méthode de Galerkin).

L'orthogonalité du résidu donne l'équation différentielle régissant l'évolution du vecteur des ddl réduits  $\mathbf{q}(t)$  :

$$\Psi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Psi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Psi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) + \Psi^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi \mathbf{q}(t), \Phi \dot{\mathbf{q}}(t)) = \Psi^T \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (2.13)$$

qui peut également être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}(t) + \mathbf{F}_{nl}^r(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{F}_{ex}^r(t) \quad (2.14)$$

avec  $\mathbf{A}_r = \Psi^T \mathbf{A} \Phi$  pour  $\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ , et  $\mathbf{F}^r = \Psi^T \mathbf{F}$  pour  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{nl}, \mathbf{F}_{ex}$ .

Notons ici que l'évaluation des matrices réduites, ainsi que l'évaluation des efforts d'excitation réduits ( $\mathbf{F}_{ex}^r$ ) peuvent être réalisées une fois pour toute en début de procédure. En revanche, l'évaluation des efforts non-linéaires réduits n'est pas immédiate, il faut tout d'abord reconstruire le vecteur des ddl complet  $\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}$ , pour ensuite évaluer le vecteur des efforts non-linéaires, et enfin projeter ces derniers pour obtenir le vecteur des efforts non-linéaires réduits.

L'équation (2.14) correspond alors à une équation différentielle semblable à l'équation du mouvement (2.1) mais comportant moins de variables ( $r \leq n$ ). Les méthodes présentées au chapitre 1 peuvent alors être utilisées pour déterminer les solutions  $\mathbf{q}$  de l'équation réduite, pour enfin obtenir une approximation  $\mathbf{x}_{app}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$  du problème de départ (équation (2.1)).



Il est clair que la qualité de l'approximation est directement liée à la base de réduction, la section suivante présente quelques méthodes pour le calcul de base de réduction adaptées au problème de l'équation (2.1).

### 2.2.1 Méthodes de calcul d'une base de projection (*a priori*)

Comme indiqué précédemment, la première étape pour réduire un système par projection de Galerkin consiste à déterminer une base de réduction. Cette étape est cruciale puisqu'elle conditionne la qualité des résultats finaux, mais aussi les performances de la méthode. En effet, les formes des vecteurs de la base de réduction doivent être adaptées à la dynamique afin que l'on puisse représenter le maximum de phénomènes tout en maintenant la dimension de la base de réduction la plus petite possible. On distingue deux types de méthodes pour la construction des bases de projection :

- (i) les méthodes dites *a priori*, où la construction de la base repose sur les données initiales du problème,
- (ii) les méthodes dites *a posteriori*, où la base de projection est construite à partir de données provenant de simulations numériques ou d'expériences.

La suite de cette section présente les principales méthodes *a priori* permettant le calcul de bases de réduction adaptées aux problèmes de dynamique non-linéaire.

#### 2.2.1.1 Bases structurales

Avant de présenter les différentes méthodes de construction de bases de réduction pour les systèmes non-linéaires, on rappelle ici les principales bases de réduction utilisées pour réduire les systèmes mécaniques. Ces méthodes classiques de réduction de systèmes dynamiques linéaires peuvent être également utilisées pour réduire un système non-linéaire où les non-linéarités sont localisées sur un sous-ensemble des ddl (cas typique du frottement [2, 11]). Dans ce cas, le vecteur des variables réduites contient seulement l'ensemble des ddl non-linéaires, éventuellement complété par d'autres coordonnées généralisées prenant en compte des déplacements d'ensemble de la structure. D'un point de vue général, le vecteur des déplacements est réorganisé en séparant les ddl non-linéaires ( $\mathbf{x}_m$ ) des ddl linéaires ( $\mathbf{x}_s$ ), et il est approximé sous la forme suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \Psi \mathbf{q} \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des variables réduites.

On distingue trois grandes familles de méthode de réduction dans le domaine structural : les méthodes statiques de type condensation de Guyan [99], les méthodes utilisant des modes à interface fixe de type Craig et Bampton [100] et les méthodes basées sur l'utilisation de modes à interface libre de type McNeal [101].

#### Condensation statique de Guyan

Dans le cas de la condensation de Guyan [99], on suppose que les efforts d'inertie des ddl esclaves sont négligeables par rapport aux efforts d'inertie des ddl maîtres. Avec cette hypothèse, on peut exprimer le déplacement des ddl esclaves en fonction du déplacement des ddl maîtres, ce qui fait que les coordonnées réduites  $\mathbf{q}$  contiennent uniquement les variables maîtres :  $\mathbf{q} = \mathbf{x}_m$ .

La matrice de réduction est donnée par :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$\Psi$  est ici constituée des déformées statiques obtenues en imposant une force unitaire sur chacun des ddl maîtres. La précision des résultats est largement conditionnée par le découpage entre ddl maîtres et ddl esclaves, ainsi que par la vérification de l'hypothèse des forces d'inertie faibles pour les ddl esclaves. Cette distinction n'est pas forcément simple à faire pour des systèmes industriels complexes, et on lui préférera souvent une des méthodes de synthèse modale suivantes.

### Méthode de Craig et Bampton

La méthode de Craig et Bampton [100] repose sur une séparation des ddl intérieurs ( $\mathbf{x}_s$ ) et des ddl de frontière ( $\mathbf{x}_m$ ). Le vecteur des coordonnées réduites est composé des déplacements aux interfaces complété par des coordonnées généralisées correspondant à  $r$  modes propres de la structure à interface fixe :  $\mathbf{q}^T = [\mathbf{x}_m^T, \boldsymbol{\nu}_r^T]^T$ . La matrice de réduction est alors donnée par la relation suivante :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} & \boldsymbol{\Phi}_r^{libre} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Cette méthode de réduction est particulièrement bien adaptée aux problèmes non-linéaires où les non-linéarités sont localisées (type frottement) et elle est souvent retenue pour l'étude de systèmes industriels (voir par exemple [2, 11]). En général, le choix du nombre de modes à interface fixe à inclure dans la base de réduction se fait a priori en retenant les modes qui sont dans la bande de fréquence étudiée.

### Méthode de McNeal

La méthode de McNeal [101] est une méthode de réduction reposant sur une approximation de la solution par des modes à interfaces libres. En notant  $\Phi$  la base tronquée des modes à interfaces libres, l'approximation de la solution s'écrit  $\mathbf{x} = \Phi\mathbf{q}$ . La troncature de la base modale induit une erreur qui peut être réduite en ajoutant une correction prenant en compte la participation statique des modes d'ordre supérieur. La solution approchée est alors représentée par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \Phi\mathbf{q} + \mathbf{G}_{res}\mathbf{F} \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{G}_{res}$  représente la matrice de flexibilité résiduelle (sur les modes non retenus) définie par :

$$\mathbf{G}_{res} = \sum_{i=r+1}^n \frac{\Phi_i\Phi_i^T}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (2.19)$$

Le calcul de la matrice résiduelle exacte est très coûteux, et on se contente souvent d'une approximation de cette matrice au premier ordre :

$$\mathbf{G}_{res} \approx \mathbf{G}_{res}^0 = \sum_{i=r+1}^n \frac{\Phi_i\Phi_i^T}{\omega_i^2} \quad (2.20)$$

L'avantage de la méthode de Mc Neal est qu'elle fait disparaître les ddl d'interfaces, amenant à un modèle réduit de taille plus petite comparativement à une réduction de Craig et Bampton. En revanche, le calcul de la souplesse résiduelle peut s'avérer très long puisqu'il nécessite l'inversion de la matrice de raideur.

### 2.2.1.2 Bases modales

Un premier choix pour la base de réduction est de considérer un ensemble de vecteurs bien choisis parmi les formes modales du système linéarisé autour d'un point d'équilibre. Un premier critère de choix peut être défini par l'intervalle de fréquence étudié. Comme dans le cas d'une synthèse modale linéaire, on doit considérer tous les modes propres excités par les sollicitations extérieures (ie ceux dont le produit scalaire avec la force d'excitation est non nul) en prenant éventuellement en compte des termes résiduels basse ou haute fréquence (par exemple par l'ajout d'une correction statique [102]).

Lorsque les amplitudes de vibration restent relativement faibles, ce choix de base de réduction donne en général des résultats corrects. En revanche, lorsque les amplitudes de vibration augmentent, l'activation des non-linéarités induit généralement une évolution des formes modales, ou encore des couplages entre modes, dont certains ne sont pas dans la bande de fréquence étudiée. Il faut alors compléter la base de réduction avec d'autres modes dans le but de prendre en compte ces couplages.

Pour illustrer ces faits, on considère le cas de la poutre décrite à la section 2.1.3. La Fig.2.2 représente les 4 premiers modes transverses et les 4 premiers modes longitudinaux (on observe que les modes propres sont découplés, ie purement transverses ou purement longitudinaux). On choisit d'étudier une bande de fréquence autour du premier mode propre ( $\omega_1 \approx 10^3 \text{rad.s}^{-1} \approx 160\text{Hz}$ ). On rappelle que l'excitation est transverse, appliquée au milieu de la poutre. Dans un premier temps, la base de réduction est seulement composée du premier mode transverse. Lorsque l'amplitude est suffisante pour activer les non-linéarités, la base de réduction n'est plus adaptée pour décrire le problème (Fig.2.3). On choisit alors de compléter la base de projection avec le troisième mode transverse ou avec le quatrième mode longitudinal. Les résultats de la Fig.2.3 nous montre que l'ajout d'un mode transverse ne change pas beaucoup la qualité de la solution, en revanche l'ajout d'un mode longitudinal permet bien d'augmenter la limite de validité du modèle réduit.

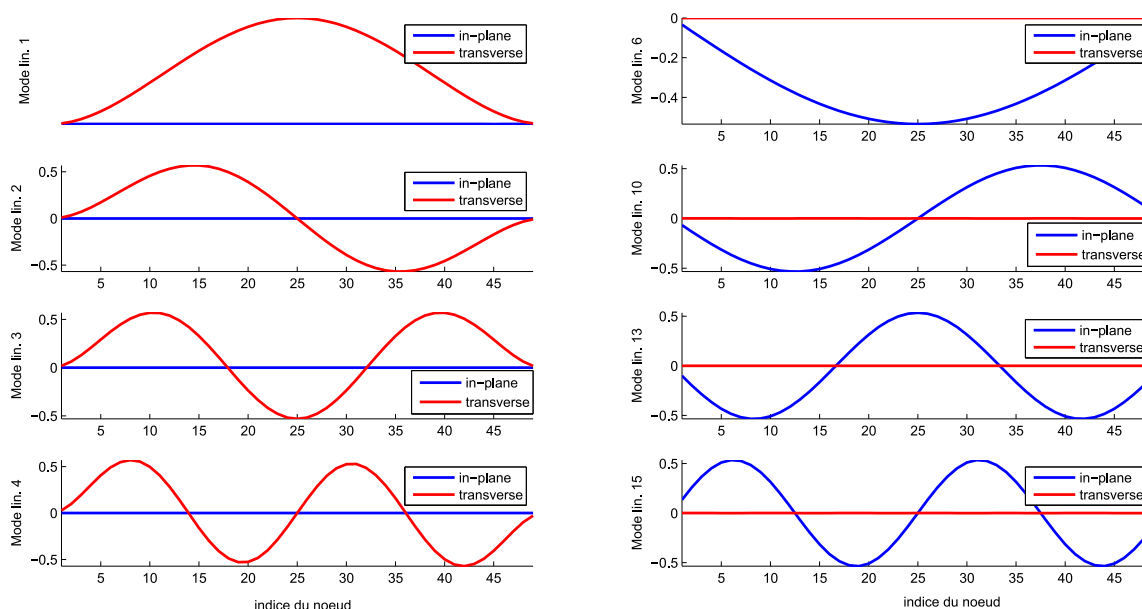


FIGURE 2.2 – Modes linéaires de la poutre de l'exemple 1 (4 premiers transverses (gauche), et 4 premiers longitudinaux (droite))

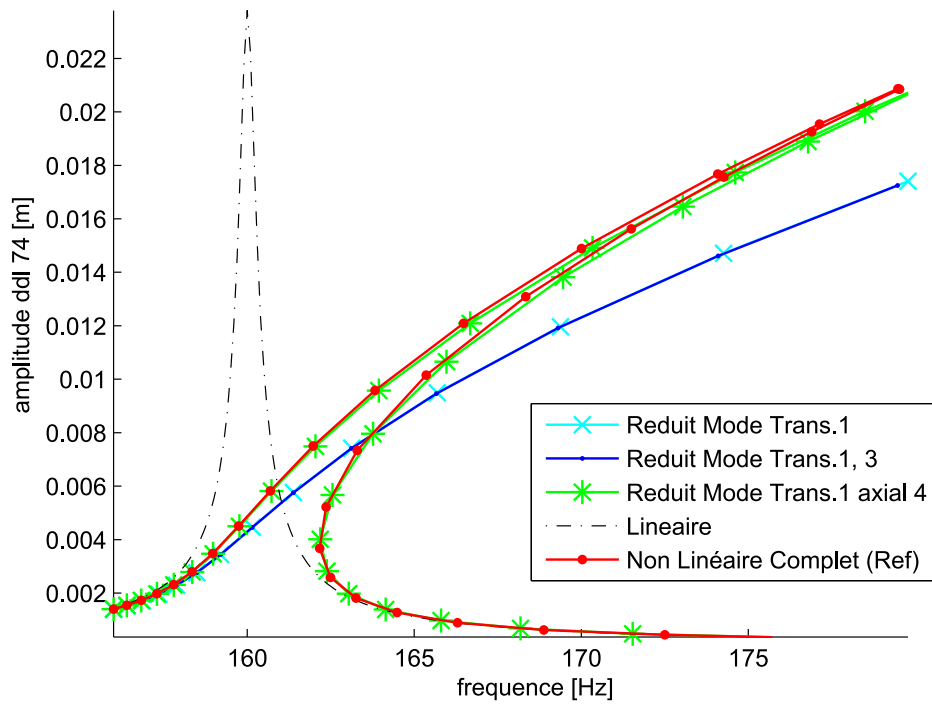


FIGURE 2.3 – Réponse en fréquence du système réduit pour différentes bases de projection (transverse 1, transverse 1 + 3, transverse 1 + axial 3), comparée à la réponse du système complet (amplitude  $F = 2 \cdot 10^2 N$ )

Pour des géométries simples comme la poutre, des raisonnements empiriques peuvent aider à déterminer quels modes ajouter pour prendre en compte les couplages modaux. Pour des géométries plus complexes, de tels raisonnements ne sont plus applicables et on doit alors disposer d'un critère nous indiquant quels modes ajouter à la base de projection. Le calcul des modes non-linéaires, peut ici servir d'indicateur pour la construction d'une base de réduction. En effet, en projetant les modes non-linéaires sur la base des modes linéaires, on est en mesure de définir les interactions modales induites par une augmentation de l'amplitude du mouvement.

### 2.2.1.3 Dérivés modales

Une autre manière de compléter la base des modes propres linéaire est de considérer l'utilisation de formes particulières appelées dérivées modales, présentées en particulier dans [103,104]. Le concept de dérivée modale repose sur le fait que, pour des systèmes non-linéaires, la forme des modes peut changer en fonction de l'amplitude de vibration, et par conséquent en fonction des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$ . Ce constat, en lien avec la notion de mode non-linéaire, amène à considérer que la base de réduction dépend explicitement des coordonnées réduites :  $\Phi = \Phi(\mathbf{q})$ . Par conséquent, on a  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{q})\mathbf{q}$ , et, en développant au deuxième ordre autour de zéro, on obtient [103, 104] :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{q})\mathbf{q} \approx \sum_i \Phi_i(\mathbf{q})q_i = \mathbf{x}(\mathbf{q} = 0) + \sum_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}(\mathbf{q} = 0)q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_k \partial q_l}(\mathbf{q} = 0)q_k q_l \quad (2.21)$$

L'évaluation des dérivées donne premièrement :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}(\mathbf{q} = 0) = \Phi_k(\mathbf{q} = 0) \quad (2.22)$$

(on reconnaît ici l'expression des modes propres du système linéarisé autour de zéro) et deuxièmement :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_k \partial q_l}(\mathbf{q} = 0) = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_l}(\mathbf{q} = 0) + \frac{\partial \Phi_l}{\partial q_k}(\mathbf{q} = 0) = \partial \Phi_{k,l} \quad (2.23)$$

qui donne la définition de la dérivée modale  $(k, l)$ .

En remplaçant les produits  $q_k q_l$  par de nouvelles variables  $p_{k,l}$ , le développement de  $\mathbf{x}$  devient :

$$\mathbf{x} = \sum_k \Phi_k q_k + \sum_{k,l} \partial \Phi_{k,l} p_{k,l} = [\Phi \ \partial \Phi] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

On remarque que  $\mathbf{x}$  se décompose alors en deux termes, le premier  $\Phi\mathbf{q}$  correspond à l'approximation des déplacements en utilisant des modes linéaires, et le second  $\partial\Phi\mathbf{p}$  correspond à un terme correctif dû à la variation des formes propres en fonction des coordonnées généralisées.

La procédure de réduction de modèle peut alors se dérouler de la manière suivante : dans un premier temps la base de réduction est formée à partir des formes propres du système linéarisé. Comme dans le cas des bases modales, on sélectionne les modes excités par les sollicitations extérieures et appartenant à la bande de fréquence étudiée. Ensuite, on complète cette base en y adjoignant les dérivées modales. Pour assurer une bonne performance, il est nécessaire d'effectuer une troncature dans le développement de l'équation (2.24) pour ne garder au final que quelques dérivées modales. Le choix des dérivées modales à ajouter peut être guidé par les amplitudes des composantes  $q_j, q_k$ . En effet, on observe que l'amplitude de chaque dérivée modale  $(j, k)$  dans la réponse est du même ordre de grandeur que le produit  $q_j q_k$ , on veillera donc à sélectionner

les dérivées modales pour lesquelles les produits  $q_j q_k$  sont dominants. Bien que les amplitudes  $q_j$  ne soient pas connues a priori, on peut avoir une idée de leur ordre de grandeur en réalisant un calcul où la réduction est effectuée uniquement avec les vecteurs de la base modale.

Dans [103], Slaats donne trois méthodes permettant le calcul effectif des dérivées modales. Les deux premières méthodes sont proches de la méthode de Nelson [105]. Elles sont basées sur une différentiation analytique de l'équation aux valeurs propres du système en prenant en compte, ou non, les effets dû à l'inertie. La troisième méthode est une procédure purement numérique basée sur la résolution de deux problèmes aux valeurs propres. Avant de présenter ces méthodes, on rappelle que l'équation aux valeurs propres du système est donnée par

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = 0 \quad (2.25)$$

En différentiant ce problème aux valeurs propres par rapport à la variable  $q_k$  on obtient (en supposant que la matrice de masse ne dépend pas des  $q_k$ ) :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \left( \frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_k} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k} \right) \Phi_i \quad (2.26)$$

Cette équation est à la base des deux méthodes analytiques proposées pour calculer les dérivées modales.

### Méthode 1 (avec prise en compte de l'inertie)

On utilise ici l'équation (2.26) pour exprimer  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}$  en fonction de  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k}$  et de  $\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_k}$ . Le premier terme  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k}$  peut être obtenu de manière analytique (pour certains cas particuliers) ou de manière numérique (différences finies). Dans le cas où les vecteurs propres sont normés par rapport à la masse, on peut montrer [103] que le second terme  $\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_k}$  peut être obtenu par la relation suivante :

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_k} = \Phi_k^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k} \Phi_r \quad (2.27)$$

$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}$  s'obtient alors par la résolution de l'équation (2.26). On note cependant que cette dernière équation est singulière puisque la matrice  $(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})$  est au plus de rang  $n - 1$ . La résolution passe alors par une projection qui permet de réduire le nombre d'équations et de variables du système (2.26) pour le rendre non singulier [103].

### Méthode 2 (sans prise en compte de l'inertie)

Ici on néglige les effets dus à l'inertie pour le calcul des dérivées modales. Dans ce cas, l'équation (2.26) devient :

$$\mathbf{K} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k} \Phi_i \quad (2.28)$$

En supposant  $\mathbf{K}$  non singulière, on obtient l'expression des dérivées modales par :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k} \Phi_i \quad (2.29)$$

Une fois encore, le calcul de  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k}$  peut se faire de manière analytique (cas particulier) ou de manière numérique (différences finies). On note que les dérivées modales calculées par cette

approche simplifiée donnent des résultats proches de ceux calculés par la première méthode, et on a de plus la relation  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i}$  ce qui permet de diviser par deux le nombre de calculs. Bien que l'inertie soit négligée, cette méthode permet parfois d'avoir une bonne approximation des dérivées modales.

### Méthode 3 (numérique)

Le principal inconvénient des deux méthodes précédentes, et qu'elles nécessitent explicitement l'expression des matrices  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_k}$ , celles-ci ne sont pas toujours aisées à obtenir, en particulier au sein des codes éléments finis propriétaires. La méthode numérique présentée ici pour le calcul des dérivées modales, permet de s'affranchir en partie de ces inconvénients puisqu'elle repose simplement sur la résolution de problèmes aux valeurs propres. Plus précisément, pour calculer une dérivée modale particulière, on résout un premier problème aux valeurs propres (P1) en utilisant les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$  pour obtenir les vecteurs propres  $\Phi(\mathbf{x}_0)$ . On résout ensuite un second problème (P2) en utilisant les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0 + \Phi_k \delta q_k)$  pour obtenir les vecteurs propres  $\Phi(\mathbf{x}_0 + \Phi_k \delta q_k)$ . L'évaluation des dérivées modales se fait alors en calculant numériquement la variation suivante :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k} = \frac{\Phi_i(\mathbf{x}_0) - \Phi_i(\mathbf{x}_0 + \Phi_k \delta q_k)}{\delta q_k} \quad (2.30)$$

Comme dans tous les calculs de variation numérique, le paramètre  $\delta q_k$  doit être choisi suffisamment petit pour obtenir une bonne précision, mais également suffisamment grand pour éviter les erreurs d'arrondi. Cette méthode nécessite plus de travail que les deux premières dans le sens où l'on doit recalculer la matrice de raideur et les modes propres pour chaque valeur de  $\delta q_k$ ,  $k = 1..r$ . En contrepartie de ces efforts, cette méthode est directement applicable en utilisant la plupart des codes éléments finis.

Pour illustrer le concept de dérivée modale, on considère l'exemple de la poutre de la section 2.1.3. On suppose que la base de réduction est composée du premier mode transverse et de la dérivée modale (1,1) (ie  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1}$ ) calculée par la méthode 2 (sans prise en compte de l'inertie). Les formes du premier mode transverse et de la dérivée modale (1.1) sont représentés sur la Fig.2.4, et la réponse en fréquence est représentée sur la Fig.2.5.

Premièrement, on observe que la forme de la dérivée modale (1,1) est très proche de la forme du quatrième mode longitudinal (Fig.2.2), ce qui en fait un bon candidat pour compléter la base de réduction. Les résultats de la Fig.2.5 montrent effectivement que lorsque le premier mode transverse est complété par la dérivée modale (1,1), les résultats du modèle réduit sont très proches des résultats du modèle complet. Dans ce cas le facteur de réduction est assez impressionnant puisqu'on est passé d'un système algébrique à 765 variables à un système algébrique à 10 variables alors que la qualité de la solution est restée sensiblement la même. Un autre exemple de l'utilisation des dérivées modales a également été présenté à la conférence CanCNSM 2013 [106].

#### 2.2.1.4 Base de Krylov

Jusqu'à présent nous avons présenté des choix de bases de projections se basant principalement sur le calcul de formes modales. On présente ici une solution alternative consistant à

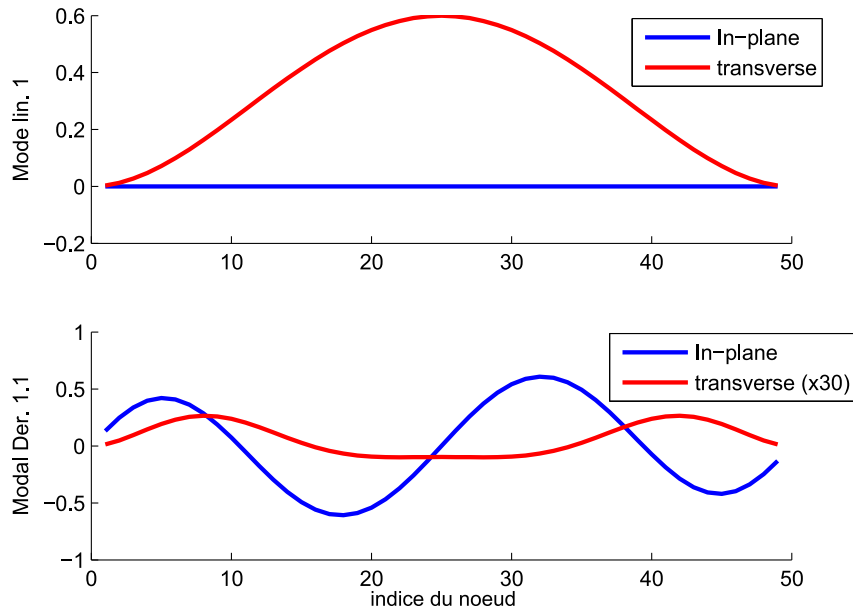


FIGURE 2.4 – Forme du premier mode transverse et de la dérivée modale (1,1)

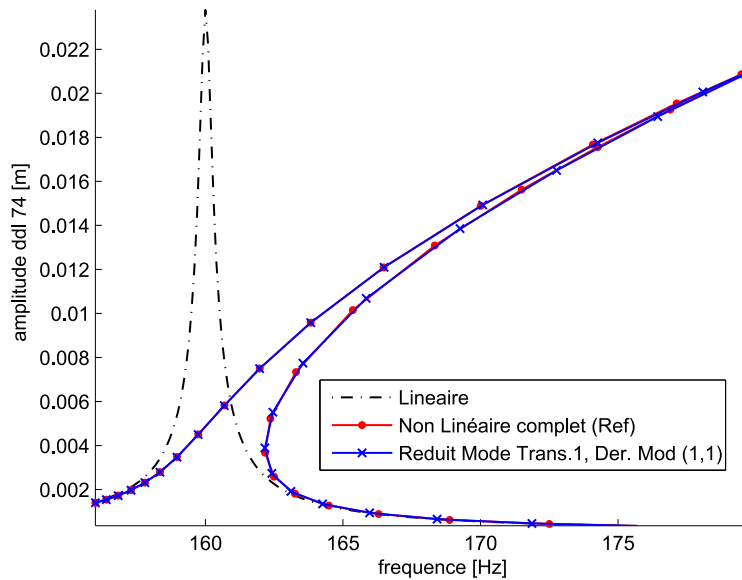


FIGURE 2.5 – Réponse en fréquence du système réduit par le premier mode transverse et la dérivée modale (1,1) comparée à la réponse du système complet



utiliser des vecteurs issus d'une base d'un espace de Krylov particulier. On rappelle ici qu'un espace de Krylov  $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  est défini par l'espace engendré par la suite des  $r$  vecteurs  $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{b}$  pour  $i = \{0, \dots, r-1\}$ .

En supposant que le choix de la matrice  $\mathbf{A}$  ait été fixé, on peut calculer un ensemble de  $r$  vecteurs ( $r \leq n$ ) générant l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , puis les orthogonaliser pour obtenir une base de projection et réduire les équations dynamiques (2.1).

Dans un premier temps, la méthode a été proposée pour traiter des systèmes sous forme d'équation d'état (système d'ordre 1), par exemple pour la réduction de modèle des circuits électroniques [107, 108]. Dans ce cas, le choix de la matrice  $\mathbf{A}$  est dicté par des considérations sur la fonction de transfert du système. Plus particulièrement, pour un système linéarisé d'ordre 1 la fonction de transfert  $\mathbf{H}(s)$  peut se mettre sous la forme générale suivante

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{I} - (-(s - s_0)\mathbf{A}))^{-1} \mathbf{F} \quad (2.31)$$

où  $s_0$  est le point de linéarisation,  $\mathbf{A}$  est une matrice définie à partir des matrices du système d'ordre 1, et  $\mathbf{H}$  est un vecteur construit à partir de la forme des efforts d'excitation. En supposant que le point de fonctionnement n'est pas très éloigné du point de développement ( $\|s - s_0\| \ll 1$ ), il est possible de développer la fonction de transfert (2.31) en série entière sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (s - s_0)^k (-\mathbf{A})^k \mathbf{F} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}^k \mathbf{m}_k \quad (2.32)$$

où les  $\mathbf{m}_k = (-\mathbf{A})^k \mathbf{F}$  sont appelés les moments de la fonction de transferts  $\mathbf{H}(s)$ . On observe que ces moments sont définis naturellement par les vecteurs d'un espace de Krylov  $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{q})$ . La réduction de modèle s'effectue alors en calculant les  $r$  premiers vecteurs de la base de Krylov, puis en les utilisant pour définir la base de projection. Le modèle réduit ainsi construit permet d'assurer que les  $r$  premiers moments du système réduit sont égaux au  $r$  premiers moments du système complet. En pratique, les vecteurs de l'espace de Krylov ne sont pas directement utilisables car ils tendent à devenir colinéaires au fur et à mesure des itérations, et il est nécessaire de construire une base orthogonale à partir de ces vecteurs, par exemple en utilisant une orthogonalisation de Gram-Schmidt modifiée (méthode d'Arnoldi, [109]).

Dans le cas d'un système d'ordre 2 du type (2.1), il est possible d'utiliser les bases construites à partir de l'équation d'état pour réduire le système en appliquant une troncature des vecteurs [110]. Cependant, il existe une extension de la méthode de réduction à l'aide d'une base d'un espace de Krylov applicable directement au système d'ordre 2, sans repasser par l'équation d'état. Cette méthode a été proposée par Bai et fait l'objet de plusieurs publications [110–114]. Nous proposons ici de décrire cette méthode en détail.

On reprend ici le système non-linéaire de l'équation (2.1). La linéarisation du système autour d'un point de l'espace des phases  $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$  est donnée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{lin}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_{lin}\mathbf{X} = \mathbf{F}u(t) \quad (2.33)$$

avec :

$$\mathbf{C}_{lin} = \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0), \quad \mathbf{K}_{lin} = \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \quad (2.34)$$

En appliquant une transformée de Laplace et en considérant un point de fonctionnement  $s = s_0$  on obtient :

$$[s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C}_{lin} + \mathbf{K}_{lin}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}u(s) \quad (2.35)$$

soit encore :

$$\left[ (s - s_0)^2 \mathbf{M} + (s - s_0) \tilde{\mathbf{C}}_{lin} + \tilde{\mathbf{K}}_{lin} \right] \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}u(s) \quad (2.36)$$

avec  $\tilde{\mathbf{C}}_{lin} = 2s_0 \mathbf{M} + \mathbf{C}_{lin}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}_{lin} = s_0^2 \mathbf{M} + s_0 \mathbf{C}_{lin} + \mathbf{K}_{lin}$ .

En utilisant les résultats obtenus pour un système d'ordre 1, il a été montré ([111]) que l'on peut construire une base appropriée pour réduire le système en utilisant un espace de Krylov d'ordre 2 :  $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{b})$  défini par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= \mathbf{b} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{E}\mathbf{k}_0 \\ \mathbf{k}_i &= \mathbf{E}\mathbf{k}_{i-1} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{i-2}, \quad i \leq r - 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec  $\mathbf{E} = -\tilde{\mathbf{K}}_{lin}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{lin}$ ,  $\mathbf{A} = -\tilde{\mathbf{K}}_{lin}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}$  et  $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{K}}_{lin}^{-1} \mathbf{F}$ .

En pratique, on utilise un algorithme SOAR (Second Order ARnoldi) [110–114], décrit dans l'algorithme 1, pour générer une base  $\mathbf{V}_r$  de l'espace de Krylov d'ordre 2. Cette base  $\mathbf{V}_r$  est ensuite utilisée pour réduire le système par projection de Galerkin ( $\Phi = \mathbf{V}_r$ ).

---

**Algorithm 1** Algorithme SOAR pour la construction d'une base d'un espace de Krylov d'ordre 2

---

```

 $\mathbf{k}_0 = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}$ 
 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{k}_0 / \|\mathbf{k}_0\|$ 
 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{E}\mathbf{k}_0$ 
 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 - (\mathbf{V}_1^T \mathbf{k}_1) \mathbf{V}_1$ 
 $\mathbf{V}_2 = \mathbf{k}_1 / \|\mathbf{k}_1\|$ 
for  $j = 2 : r - 1$  do
     $\mathbf{k}_j = \mathbf{E}\mathbf{k}_{j-1} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{j-2}$ 
     $\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_j - \mathbf{V}(\mathbf{V}^T \mathbf{k}_j)$ 
     $\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{k}_j / \|\mathbf{k}_j\|$ 
end for
retourner  $\mathbf{V}_r = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r]$ 
    
```

---

Il n'y a pas de règle spécifique pour choisir le point de développement  $s_0$  cependant dans [115] Feldmann propose le choix heuristique  $s_0 = 2\pi f_{max} = \omega_{max}$  dans le cas où la bande de fréquence étudiée est du type  $[0, f_{max}]$ .

Les bases de réduction construites à partir de ces espaces de Krylov donnent de bons résultats pour les systèmes linéaires [112]. En revanche, pour des systèmes non-linéaires, les résultats sont variables en fonction du type de non-linéarité considérée.

Pour illustrer les méthodes de Krylov, on reprend l'exemple de la poutre bi-encastée définie à la section 2.1.3. La linéarisation autour du point d'équilibre  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  donne  $\tilde{\mathbf{C}}_{lin} = \mathbf{C}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{lin} = \mathbf{K}$  (Eq.(2.34)). En choisissant un point de fonctionnement  $s_0 = \omega_f$  correspondant à la pulsation maximale du domaine d'étude, on génère une base de l'espace de Krylov d'ordre 2 en utilisant l'algorithme 1. Les cinq premiers vecteurs de cette base sont représentés sur la Fig.2.6, et la fonction de réponse en fréquence du système réduit est comparée à celle du système complet sur la Fig.2.7.

Premièrement, on observe que les vecteurs de la base de réduction sont uniquement composés de déplacement transversaux (pas de déplacement axiaux). Cette situation était prévisible. En effet, étant donné que la force est appliquée de manière transverse au milieu de la poutre, le premier vecteur  $\mathbf{k}_0$  de l'espace de Krylov correspond à la solution statique du problème

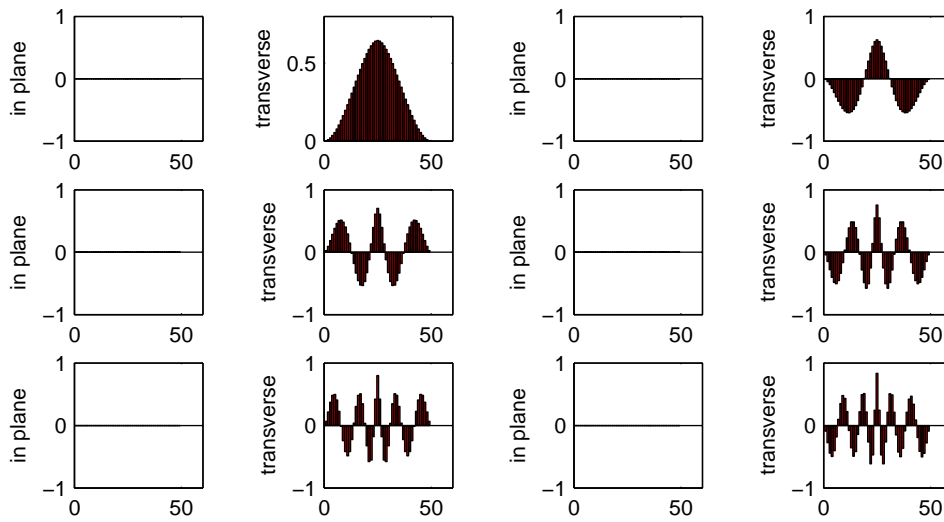


FIGURE 2.6 – Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov linéaire (Algo. 1), composante axiales et transversales

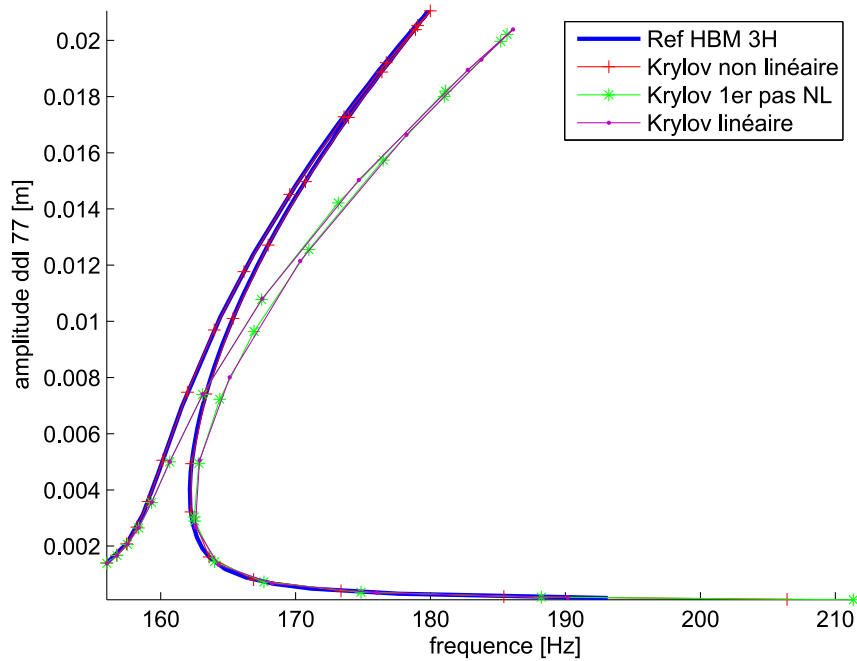


FIGURE 2.7 – Comparaison des fonctions de réponse en fréquence entre le système complet et le système réduit sur des bases de Krylov : (i) base linéaire, (ii) base avec premier pas non-linéaire, (iii) base avec tous les pas non-linéaires

linéaire et comporte donc uniquement des composantes transverses. Par récurrence, on voit que chaque vecteur  $\mathbf{k}_i$  est uniquement composé de déplacements transversaux, et par conséquent  $\mathbf{k}_{i+1}$  représentera également un déplacement purement transverse (voir la définition de  $\mathbf{k}_{i+1}$  dans l'équation (2.37)). On peut donc s'attendre à ce que la réduction par cette base ne soit pas adaptée puisqu'elle ne comporte aucune composante axiale. Cette hypothèse est bien vérifiée sur la Fig.2.7, où on observe que le comportement du système réduit est largement plus raide que le comportement du système complet. Le principal problème est ici que les efforts non-linéaires tangents sont nuls lorsqu'ils sont évalués au point d'équilibre  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Pour améliorer les résultats, on propose de définir a priori une version non-linéaire de la relation de récurrence (2.37) donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{k}_0 + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{k}_0) &= \mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{k}_1 + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{k}_1) &= -\tilde{\mathbf{C}}_{lin}\mathbf{k}_0 \\ \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{k}_i + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{k}_i) &= -\tilde{\mathbf{C}}_{lin}\mathbf{k}_{i-1} - \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{k}_{i-2}\end{aligned}\quad (2.38)$$

Dans ce cas, on prend bien en compte la non-linéarité au travers des efforts non-linéaires, et la détermination de chaque nouveau vecteur  $\mathbf{k}_i$  passe par la résolution d'une équation algébrique non-linéaire. On peut également envisager une troisième version du calcul d'une base de Krylov en n'effectuant la résolution non-linéaire que pour le premier vecteur  $\mathbf{k}_0$ , et en utilisant les relations de récurrences linéaires de l'équation (2.37) pour les autres vecteurs. Pour évaluer l'efficacité de cette nouvelle procédure incluant les termes non-linéaires, on calcule une base de projection à 6 vecteurs en effectuant un premier pas non-linéaire (Fig.2.8), ou en considérant tous les pas non-linéaires (Fig.2.9). Pour ces deux bases, on observe que l'on a maintenant apparition de composantes axiales dans les vecteurs de réduction. En revanche, l'amplitude de ces composantes axiales est différente selon que l'on effectue une seule itération non-linéaire, ou toutes les itérations non-linéaires (en particulier pour le 6ème vecteur). Au niveau de la FRF, la base calculée avec seulement le premier pas non-linéaire ne permet pas d'améliorer les résultats par rapport à une base de Krylov totalement linéaire. En revanche, la base de Krylov construite avec toutes les itérations non-linéaires permet de bien approximer le système complet, comme on peut le voir sur la Fig.2.7.

### 2.2.1.5 Bi-linéarisation et méthodes variationnelles

Les méthodes de bi-linéarisation et les méthodes variationnelles ont en commun l'utilisation d'un développement en série de la non-linéarité. Ce développement permet de transformer la résolution du problème dynamique non-linéaire d'ordre 1 (équation (2.2)) en la résolution d'un problème dynamique linéaire de plus grande taille. Les méthodes de réduction par sous-espace de Krylov sont alors appliquées à ces équations linéaires. Plus précisément, on considère que les efforts non-linéaires peuvent être développés sous la forme suivante (on a supposé que  $\mathbf{H}_{nl}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ) :

$$\mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \sum_i \mathbf{H}_i \mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{H}_1 \mathbf{y} + \mathbf{H}_2(\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}) + \dots \quad (2.39)$$

où  $\otimes$  correspond au produit de Kronecker de vecteurs  $\mathbf{y}$  défini par  $(\mathbf{y} \otimes \mathbf{y})_{(i-1)m+j} = \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j$ , où  $m$  correspond au nombre d'éléments de  $\mathbf{y}$ .

Dans le cas de la méthode variationnelle [116–119], on considère la réponse du système (2.2) soumis à une excitation du type  $\mathbf{H}_{ex} = \alpha \mathbf{H}u(t)$ , et on recherche la solution sous la forme d'une

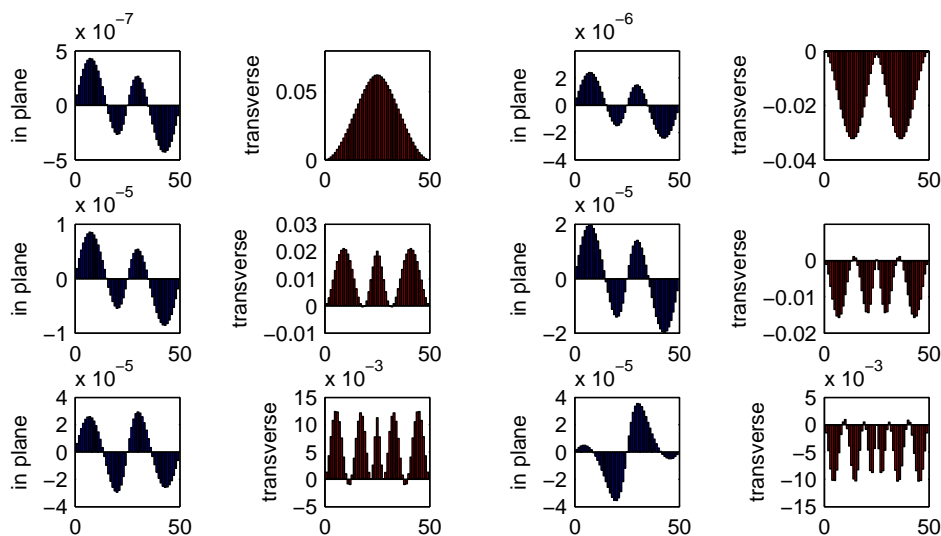


FIGURE 2.8 – Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov avec premier pas non-linéaire, composante axiales et transversales

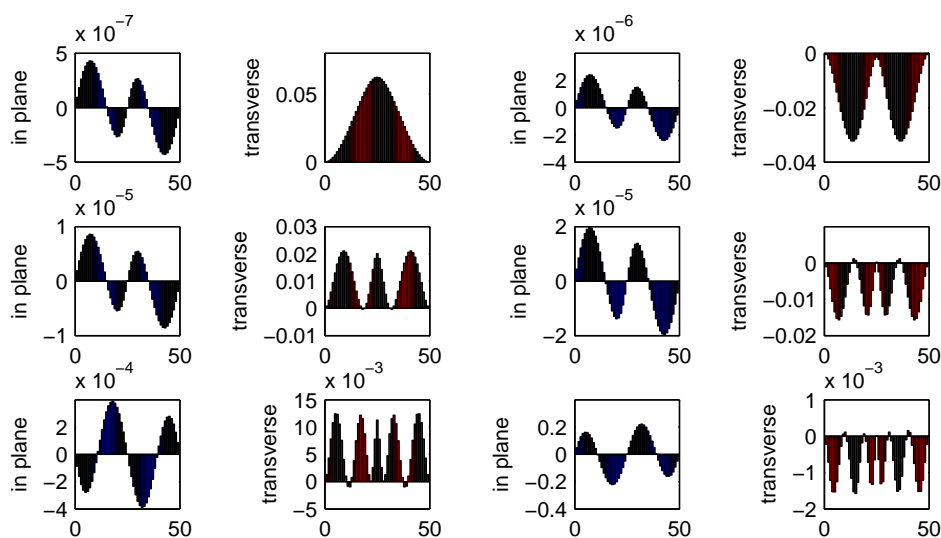


FIGURE 2.9 – Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov non-linéaire (Eq.(2.38)), composante axiales et transversales

série entière du paramètre  $\alpha$  :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_i \alpha^i \mathbf{y}_i(t) = \alpha \mathbf{y}_1(t) + \alpha^2 \mathbf{y}_2(t) + \alpha^3 \mathbf{y}_3(t) + \dots \quad (2.40)$$

En utilisant le développement de la non-linéarité (Eq.(2.39)), en remplaçant  $\mathbf{y}(t)$  par son développement (Eq.(2.40)) et en égalisant les quantités de même puissance de  $\alpha$ , on obtient la suite

d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}_1}{dt} + (\mathbf{B} + \mathbf{H}_1)\mathbf{y}_1 &= \mathbf{B}u(t) \\
 \mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}_2}{dt} + (\mathbf{B} + \mathbf{H}_1)\mathbf{y}_2 + \mathbf{H}_2(\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{y}_1) &= 0 \\
 \mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}_3}{dt} + (\mathbf{B} + \mathbf{H}_1)\mathbf{y}_3 + \mathbf{H}_2(\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{y}_2 + \mathbf{Y}_2 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{H}_3(\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{Y}_1) &= 0 \\
 \dots &
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

La méthode de réduction consiste alors à réduire chacun de ces systèmes linéaires par l'utilisation de sous-espace de Krylov. Supposons que l'on ait obtenu une base  $\mathbf{V}_1$  à  $r_1$  vecteurs pour réduire la première équation de (2.41). On a alors  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{z}_{r_1}$  et le dernier terme de la seconde équation de (2.41) devient  $\mathbf{H}_2(\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{y}_1) = \mathbf{H}_2(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1)(\mathbf{z}_{r_1} \otimes \mathbf{z}_{r_1})$ . La seconde équation devient donc une équation avec  $r_1^2$  variables d'entrée (inputs) qui est également réduite par la méthode des bases de Krylov. Par récurrence, on voit que la troisième équation sera une équation d'au moins  $r_1^3$  variables d'entrée, etc.

Sans parler de la convergence de la série de l'équation (2.40), on voit apparaître le problème suivant : si le nombre de vecteurs de base  $r_1$  est grand cela permet de faire correspondre un grand nombre de moments pour la première équation, mais cela implique que le nombre d'inputs pour la troisième équation sera grand et il est alors difficile de réduire le troisième système à un faible nombre d'équations. D'autre part, si  $r_1$  est petit, l'erreur commise sur  $y_1$  est grande et cette erreur va se propager au fur et à mesure produisant une solution totalement erronée. Une solution serait d'utiliser l'algorithme de Lanczos pour réduire le premier système. Cela permet de faire correspondre plus de moments pour le même nombre de vecteurs de base ( $2r_1 - 1$  au lieu de  $r_1$ ).

Dans le cas de la méthode de bi-linéarisation, on introduit la nouvelle variable  $(\mathbf{y}^\otimes)^T = [\mathbf{y}^T, (\mathbf{y}^{(2)})^T, (\mathbf{y}^{(3)})^T, \dots]$  et il est possible de montrer que  $\mathbf{y}^\otimes$  vérifie l'équation bilinéaire suivante (on suppose pour simplifier que  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  dans l'équation (2.2)) :

$$\frac{d\mathbf{y}^\otimes}{dt} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y}^\otimes + \mathbf{N}\mathbf{y}^\otimes u + \tilde{\mathbf{H}}u \tag{2.42}$$

ce qui correspond au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{y}^{(1)}}{dt} &= (\mathbf{B} + \mathbf{H}_1)\mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{H}_3\mathbf{y}^{(3)} + \mathbf{B}u \\
 \frac{d\mathbf{y}^{(2)}}{dt} &= ((\mathbf{B} + \mathbf{H}_1) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{H}_1))\mathbf{y}^{(2)} + (\mathbf{H}_{ex} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{H}_{ex})\mathbf{y}^{(1)}u \\
 \dots &
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

La réduction de ce système, également basée sur l'utilisation d'espaces de Krylov, n'est cependant pas directe du fait du caractère bilinéaire des équations. La résolution passe ici par l'expression de la solution sous forme d'une série de Volterra [120,121], puis par l'application de la transformée de Laplace pour les noyaux de Volterra d'ordre  $k$  dans le domaine fréquentiel. Enfin, on utilise un raisonnement similaire à celui de la section 2.2.1.4, c'est-à-dire que l'on exprime les (multi) moments des noyaux d'ordre  $k$  et on voit apparaître naturellement des espaces de Krylov tels que  $\text{vect}(\mathbf{V}_j) = \mathcal{K}_{q_j}(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{N}\mathbf{V}^{(j-1)})$  avec  $\text{vect}(\mathbf{V}_1) = \mathcal{K}_{q_1}(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B})$ . On utilise ensuite l'union des  $\mathbf{V}_j$  pour générer la base de réduction de la variable  $\mathbf{y}^\otimes$ . Avec cette méthode, les moments du système bilinéaire réduit correspondent à certains moments du système bilinéaire non réduit. En particulier  $q_1$  moments du noyau d'ordre 1 sont identiques,  $q_2$  moments du noyau d'ordre 2 sont identiques, ...

Cette méthode comporte de nombreux désavantages. En particulier l'augmentation substantielle du nombre de variables. En effet, la taille du système d'équations bilinéaires est de taille

$\sum_{i=1}^q N^i$  où  $q$  est l'ordre de développement de la non-linéarité. De plus, il n'existe aucune règle permettant de choisir le nombre optimal de moments  $q_j$  à faire correspondre pour le noyau d'ordre  $j$ .

De par l'augmentation consécutive du nombre de degrés de liberté, l'application de ces méthodes paraît difficilement applicable aux systèmes de grande taille. On notera cependant que l'expression des efforts non-linéaires sous forme de série entière (équation (2.39)) permet de calculer les projections de Galerkin une fois pour toutes en début de procédure comme indiqué dans la section 2.3.

## 2.2.2 Méthodes de calcul d'une base de projection (*a posteriori*)

### 2.2.2.1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La "proper orthogonal decomposition" (POD) est une technique largement employée pour la réduction de modèle ([122]). Selon le domaine d'application, on peut aussi la retrouver sous le nom d'analyse en composantes principales (ACP, ou PCA), ou encore décomposition de Karhunen-Loeve. A partir d'un champ  $u(x, t)$  obtenu expérimentalement ou numériquement, cette méthode consiste à rechercher une base de vecteur orthogonaux  $\phi(x)$  qui maximise la moyenne du produit scalaire  $\langle \Phi_i^T u(x, t) \rangle_t$ . Cela revient à résoudre un problème aux valeurs propres qui donne les modes propres orthogonaux (POM) à droite notés  $\Phi_i$  [resp. à gauche notés  $\Psi_i$ ] et les valeurs propres orthogonales (POV)  $\lambda_i$  de sorte que  $u(x, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i \Psi_i^T$ . Dans le cas discret, le calcul des POMs et des POVs peut se faire par la méthode des snapshots. En considérant le champ discret  $\mathbf{U} = (u(x_i, t_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = [\mathbf{u}_{t_1}, \dots, \mathbf{u}_{t_m}]$ , la décomposition en modes propres orthogonaux peut être réalisée au travers d'une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $\mathbf{U}$ . On aura alors :

$$\mathbf{U} = \Phi \Sigma \Psi^T \quad (2.44)$$

avec  $\Phi$  de taille  $(n \times n)$ ,  $\Sigma$  de taille  $n \times m$ , et  $\Psi$  de taille  $m \times m$ . La matrice  $\Sigma$  est une matrice diagonale, dont les termes diagonaux  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont appelés valeurs singulières. Les modes propres orthogonaux (POM) sont alors définis comme étant les colonnes de la matrice  $\Phi$ . Cette décomposition a l'avantage de quantifier la participation de chaque mode au travers du rapport  $\sigma_i / (\sum_j \sigma_j)$  qui donne la quantité d'énergie contenue dans le POM  $i$ . De plus, les valeurs singulières sont organisées par ordre décroissant ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ ), et on observe en pratique qu'elles deviennent très faibles à partir d'un certain rang  $r$ . En ne retenant que les  $r$  premiers POMs pour former la base de réduction, on obtient un modèle réduit qui permet de restituer la majeure partie de l'énergie. En général, le rang  $r$  est défini de sorte qu'au moins 99% de l'énergie soit contenue dans les  $r$  premiers POMs ( $(\sum_{i=1}^r \sigma_i) / (\sum_{j=1}^n \sigma_j) \geq 0.99$ ).

Cette technique permet d'obtenir de bons résultats en termes de réduction de modèle, mais elle souffre de plusieurs inconvénients. En particulier, elle nécessite une simulation totale du système à étudier pour obtenir les snapshots qui permettent de calculer les POMs. Ces simulations sont souvent coûteuses en temps de calcul. De plus, la base obtenue ne peut servir à la réduction de modèle que pour des excitations proches de celles qui ont généré les snapshots. En particulier, lorsqu'on augmente l'amplitude de l'excitation, il se peut que des phénomènes non-linéaires apparaissent alors que ceux-ci n'étaient pas présents pour une solution obtenue avec une amplitude plus faible (par exemple les phénomènes de localisation). Dans ce cas, la base de projection obtenue par POD sur la solution de faible amplitude n'est plus adaptée à la réduction du système et il faut re-simuler le système pour obtenir une base de projection correcte.

Dans le cas d'une résolution fréquentielle, une méthode de réduction consiste à simuler le système complet sur  $p$  points bien choisis (par exemple un point pré-résonance, un point proche de la résonance et un point post-résonance) puis à appliquer une POD à chacune des solutions obtenues pour obtenir  $p$  bases de projection  $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq p}$ . La base de réduction peut ensuite être obtenue par concaténation des  $\Phi_i$  et par sélection des vecteurs les plus significatifs par SVD. Cette technique a l'avantage de définir une seule base de projection pour toute une gamme fréquence. Cependant, on se retrouve face au problème majeur de la POD, à savoir que les  $p$  simulations peuvent s'avérer coûteuses en temps.

La POD permet cependant une bonne estimation du "potentiel de réduction" d'un système. En effet, en étudiant la décroissance des valeurs singulières, on peut statuer sur la capacité d'un système à être réduit. Si les valeurs singulières décroissent brutalement (saut de plusieurs ordres de grandeur entre deux valeurs consécutives), on peut supposer que le système se prête bien à une réduction de modèle. Au contraire, si les valeurs singulières décroissent régulièrement, sans saut, alors le système apparaîtra comme difficilement réductible.

### Exemple

On applique ici la méthode de réduction par POD à la poutre décrite à la section 2.1.3. On considère que le système est excité par une force périodique du type  $F_{ex}(t) = A \cos(\omega t)$ , et on étudie le premier mode de vibration du système. Dans un premier temps, on calcule une solution préliminaire par HBM pour  $A = 200N$ . Cette solution est ensuite utilisée pour réaliser une décomposition POD. Ici, on ne considérera que trois pas de fréquence pour effectuer la décomposition POD (un pas pré-résonance, un pas à la résonance, et un pas post-résonance). Les valeurs singulières et les 4 premiers modes propres orthogonaux obtenus pour les trois points sont représentés sur les Fig.2.10 et Fig.2.11. On observe bien que les valeurs singulières chutent brutalement à partir du 10ème rang. Cela indique que le système est effectivement réductible et qu'il est a priori possible d'avoir une bonne approximation avec seulement quelques modes. Etant donné que les valeurs singulières sont très faibles à partir du 4ème mode (ie inférieures à  $10^{-10}$ ), on ne retiendra que 4 modes pour chacun des pas de fréquence. Pour définir une base de projection, on concatène les 4 premiers vecteurs propres orthogonaux de chaque pas de fréquence, et on effectue une décomposition en valeurs singulières pour ne retenir au final que 4 modes dans la base de réduction (Fig.2.12). Les équations sont alors projetées sur cette base par une projection de Galerkin, puis le système réduit est résolu par HBM.

La Fig.2.13 compare les résultats obtenus par HBM sur le système complet et sur le système réduit pour différents nombres de vecteurs dans la base de réduction. On observe que pour une solution calculée avec 2 modes, les résultats sont encore éloignés des résultats de référence. En revanche, les solutions calculées avec 3 et 4 modes sont relativement proches de la solution de référence. Cela est dû en partie au fait que le 3ème mode comporte une composante axiale qui permet de prendre en compte le couplage entre les mouvements transversaux et axiaux.

#### 2.2.2.2 Modes compagnons

La méthode des modes compagnons, présentée en particulier dans [97], permet de compléter une base de réduction formée de modes propres linéaires par d'autres formes appelées modes compagnons (ou encore modes duals). Ces nouvelles formes sont spécialement conçues pour capturer les couplages modaux pouvant intervenir avec une augmentation de l'amplitude. Sur ce point, les modes compagnons sont semblables aux dérivées modales puisqu'ils permettent de compléter la base de réduction linéaire. En revanche leur calcul repose sur une procédure que



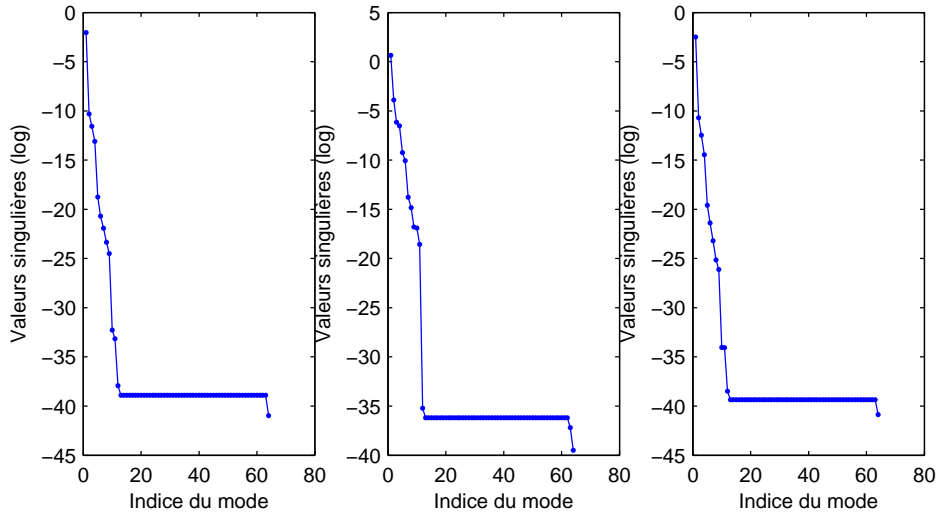


FIGURE 2.10 – Valeurs singulières calculées pour les trois pas de fréquence considérés

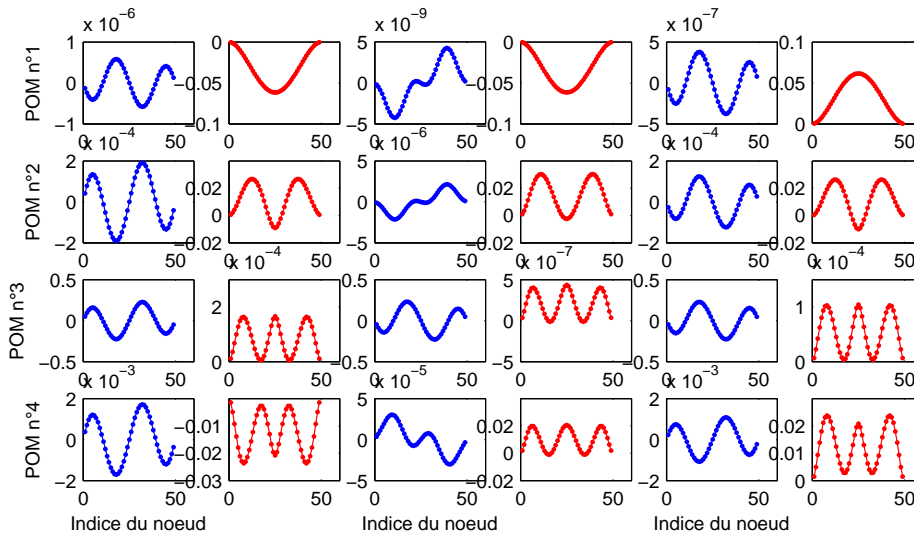


FIGURE 2.11 – Forme des 4 premiers modes propres orthogonaux (composantes axiales (bleu) et transverses (rouge)) pour les 3 pas de fréquence considérés

l'on peut qualifier d'a posteriori puisqu'il est nécessaire d'effectuer la résolution de plusieurs problèmes statiques en amont, qui doivent être représentatifs du problème abordé. Pour la présentation de la méthode on considèrera par la suite que la non-linéarité est seulement fonction du déplacement :  $\mathbf{F}_{nl} = \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x})$ . L'extension à tout type de non-linéarité est envisageable, mais demanderait une modification de la méthode puisque celle ci est basée sur les résultats de calculs statiques (qui ne prennent pas en compte la vitesse).

On considère tout d'abord que l'on dispose d'une base de réduction  $\Phi$  constituée de formes propres linéaires. La recherche des modes compagnons consiste à résoudre plusieurs problèmes statiques à force imposée. Les solutions ainsi obtenues sont utilisées pour extraire les modes

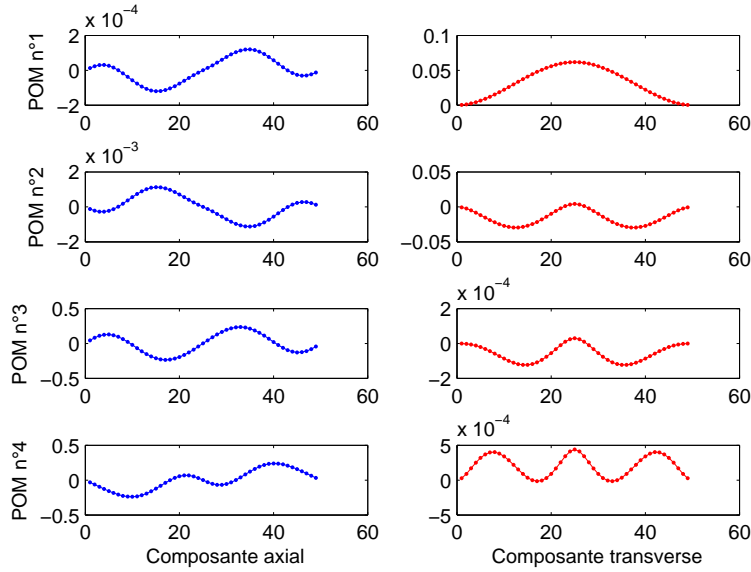


FIGURE 2.12 – Forme des 4 premiers modes propres orthogonaux retenus pour la base de réduction

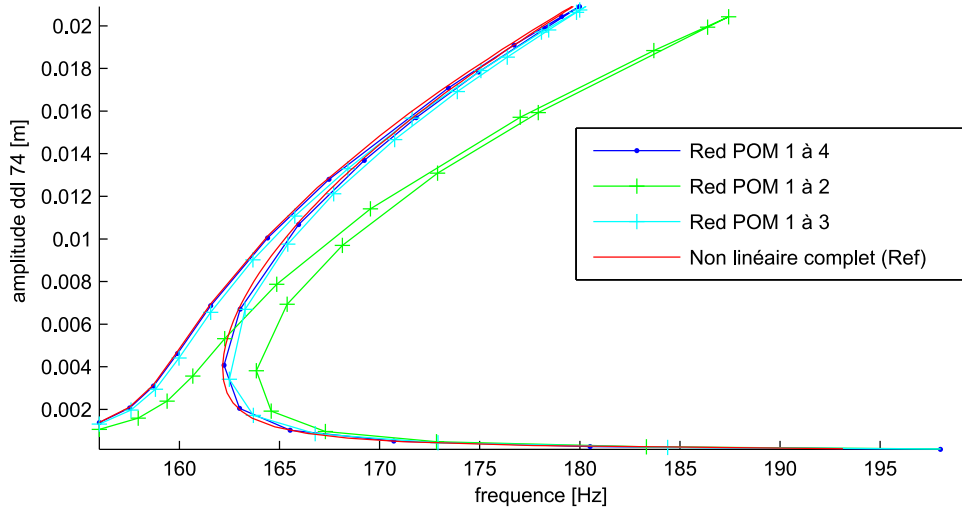


FIGURE 2.13 – Comparaison entre la solution de référence et les solutions calculées par réduction sur la base des modes propres orthogonaux de la Fig.2.12 : évolution de l'amplitude de la composante transverse du centre de la poutre

compagnons. Le problème statique à résoudre sera de la forme suivante :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_s \quad (2.45)$$

La forme de la force statique  $\mathbf{F}_s$  à imposer doit être choisie de manière à n'exciter principalement que les vecteurs propres linéaires (et seulement ces modes là dans le cas d'un système linéaire).

Cette situation se produit lorsque la force  $\mathbf{F}_s$  est de la forme :

$$\mathbf{F}_s^{(m)} = \sum_i \alpha_i^{(m)} \mathbf{K} \Phi_i \quad (2.46)$$

où  $m = 1..M$  représente le cas de chargement et où les  $\alpha_i^{(m)}$  sont des coefficients à choisir en fonction des modes considérés. Dans [97] Capiez-Lernout considère qu'il est suffisant de prendre les cas suivants :

$$\mathbf{F}_i^{(m)} = \alpha_i^{(m)} \mathbf{K} \Phi_i \quad (2.47)$$

correspondant à un chargement selon un seul mode ( $i$ ), et

$$\mathbf{F}_{i,j}^{(s)} = \frac{1}{2} \alpha_i^{(s)} (\mathbf{K} \Phi_i \pm \mathbf{K} \Phi_j), \quad i \neq j \quad (2.48)$$

correspondant à un chargement selon deux modes ( $i, j$ ). Le choix des modes à considérer peut être guidé par l'amplitude de leur participation dans la réponse totale. Les valeurs des coefficients  $\alpha_i^{(m)}$  doivent être prises de manière à ce que les solutions statiques correspondantes évoluent d'un comportement linéaire à un comportement non-linéaire (voir hautement non-linéaire).

En résolvant l'équation statique (2.45) pour chaque cas de chargement (Eqs.2.47,2.48), on obtient les solutions correspondantes  $\mathbf{x}_i^{(m)}$  et  $\mathbf{x}_{i,j}^{(m)}$ . On retire ensuite la participation des modes linéaires (ainsi que celle des modes compagnons déjà sélectionnés) dans les solutions obtenues (on suppose que les vecteurs de projection sont normés par rapport à la masse) :

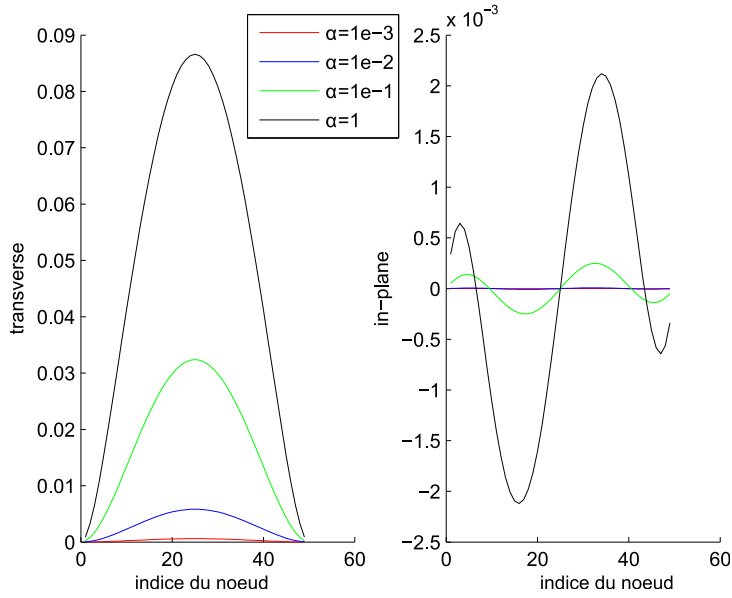
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{(s)} &= \mathbf{x}_i^{(m)} - \sum_k \Phi_k^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i^{(m)} \\ \mathbf{v}_{i,j}^{(s)} &= \mathbf{x}_{i,j}^{(m)} - \sum_k \Phi_k^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{i,j}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Enfin, on réalise une décomposition en valeurs singulières des matrices  $\mathbf{V}_i = [\mathbf{v}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_i^{(M)}]$ . On a  $\mathbf{V}_i = \Psi^{(i)} \Sigma^{(i)} (\Theta^{(i)})^T$ , et on peut finalement extraire les formes dominantes  $\Psi^{(i)}$  qui seront ensuite sélectionnées comme mode compagnons. On note que pour qu'un mode  $\Psi_k^{(i)}$  soit sélectionné comme mode compagnon, il faut non seulement qu'il soit associé à une valeur singulière élevée mais qu'il induise également une grande énergie de déformation (approximée par exemple par  $(\Psi_k^{(i)})^T \mathbf{K} \Psi_k^{(i)}$ ).

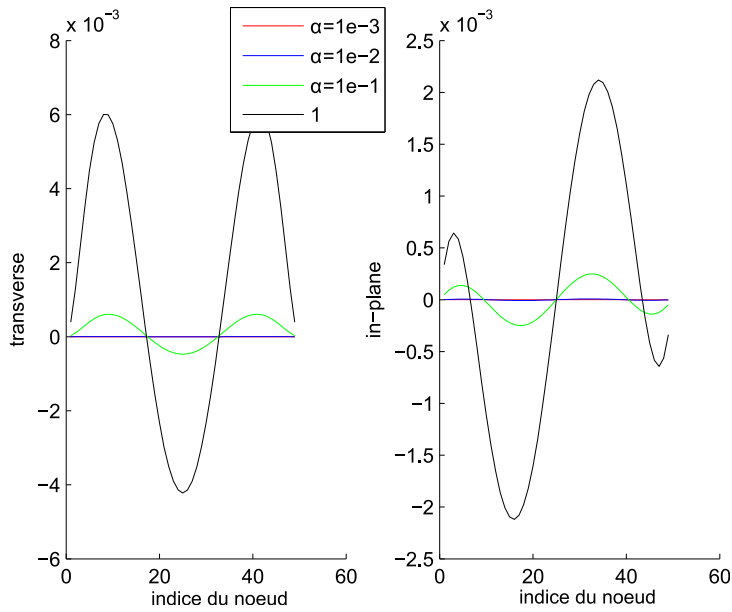
Pour illustrer la méthode des modes compagnons, on considère l'exemple de poutre de la section 2.1.3. Une fois encore on considère seulement le premier mode transverse et on va chercher à déterminer les candidats possibles pour ses modes compagnons. La première étape est la résolution statique de l'équation (2.45) pour des forces imposées de la forme  $\mathbf{F} = \alpha^{(s)} \mathbf{K} \Phi_1$  avec quatre amplitudes différentes. Les résultats de ces calculs statiques sont présentés sur les Figs.2.14a et 2.14b.

Bien que la force soit purement transverse, on observe sur la Fig.2.14a l'apparition d'une composante longitudinale lorsque l'amplitude de la force augmente. Le fait de retirer la participation du premier mode transverse fait apparaître une composante sur un mode ressemblant au troisième mode longitudinal, ainsi qu'une composante sur un mode proche du troisième mode transverse (Fig.2.14b). Il reste maintenant à effectuer une SVD de la matrice  $\mathbf{V}$  pour extraire les formes des modes compagnons. La Fig.2.15 représente les différentes formes possibles  $\Psi_k$  résultant de la SVD (les modes ont été normés par rapport à la masse).

La sélection du mode compagnon se fait en fonction de la valeur singulière et/ou de l'énergie de déformation associée à la forme choisie. La Fig.2.16 montre les réponses en fréquence du système réduit soit sur le mode compagnon avec la plus grande valeur singulière (le premier),



(a) Résultat  $\mathbf{u}_1^{(s)}$  des calculs statiques préliminaires au calcul des modes compagnons (force selon le premier mode transverse pour différentes amplitudes  $\alpha$ )



(b) Résultat  $\mathbf{v}_1^{(s)}$  des calculs statiques préliminaires après retrait de la participation du premier mode transverse  $\Phi_1$

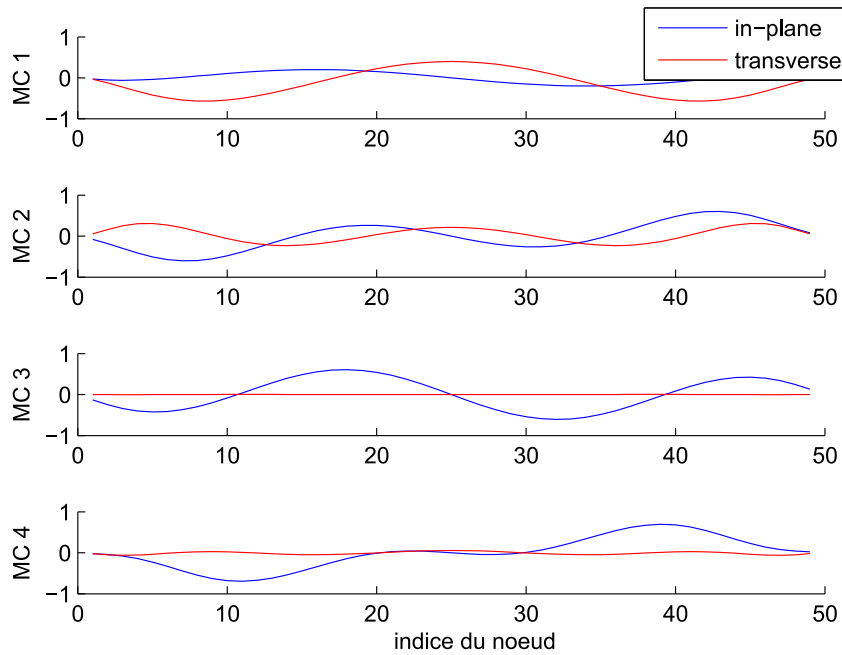


FIGURE 2.15 – Candidats possibles pour les modes compagnons du premier mode transverse

soit sur le mode compagnon avec la plus grande énergie de déformation (le troisième). On observe que le mode compagnon avec la plus grande énergie de déformation donne de meilleurs résultats que le mode compagnon avec la plus grande valeur singulière (on reconnaît bien la forme du 4ème mode axial dans le 3ème mode compagnon). Cet exemple montre bien l'importance des critères de sélection du mode compagnon sur la qualité de la réponse du système réduit. La méthode des modes compagnons donne ici de bons résultats, mais elle souffre des mêmes inconvénients que la réduction sur une base POD. En particulier, la base peut ne plus être adaptée si le système évolue avec des amplitudes supérieures à celles qui ont été utilisées pour la génération des modes compagnons.

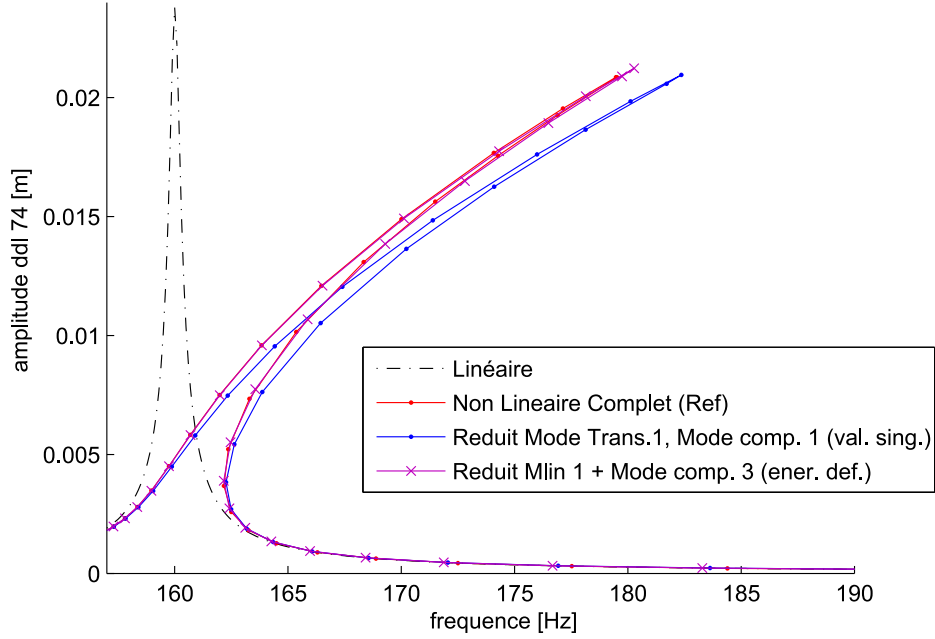


FIGURE 2.16 – Réponse en fréquence pour le système réduit sur le premier mode transverse et le premier (val. sing. max.) ou le troisième (E. def. max.) mode compaignon

### 2.2.3 Méthodes de Galerkin non-linéaires

La méthode de projection de Galerkin présentée en section 2.2, recherche la solution de l'équation (2.1) dans un sous-espace  $\mathcal{E}_r$  de  $\mathbb{R}^n$ , généré par la base de réduction  $\Phi$ . Par conséquent, toute la dynamique sur l'espace complémentaire  $\mathcal{E}_c$ , de dimension  $n - r$ , est ignorée. Cela peut devenir problématique en particulier lorsque la non-linéarité induit un couplage entre des modes de l'espace de réduction et de l'espace complémentaire. L'idée des méthodes de Galerkin non-linéaires est de ne plus négliger l'espace complémentaire. Pour cela, on recherche les solutions de l'équation (2.2) sous la forme  $\mathbf{x} = \Phi_r \mathbf{q} + \Phi_c \mathbf{p}$  avec  $\Phi_r$  la base constituée des  $r$  premiers modes propres linéaires et  $\Phi_c$  la base complémentaire dans  $\mathbb{R}^n$ .

En projetant l'équation (2.2) et en utilisant le fait que les modes linéaires sont découplés, on obtient les deux systèmes d'équation suivants :

$$\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_r^T \mathbf{C} \Phi_r \dot{\mathbf{q}} + \Phi_r^T \mathbf{K} \Phi_r \mathbf{q} + \Phi_r^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi_r \mathbf{q} + \Phi_c \mathbf{p}) = \Phi_r^T \mathbf{F}_{ex} \quad (2.50)$$

$$\Phi_c^T \mathbf{M} \Phi_c \ddot{\mathbf{p}} + \Phi_c^T \mathbf{C} \Phi_c \dot{\mathbf{p}} + \Phi_c^T \mathbf{K} \Phi_c \mathbf{p} + \Phi_c^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi_r \mathbf{q} + \Phi_c \mathbf{p}) = \Phi_c^T \mathbf{F}_{ex} \quad (2.51)$$

Dans la méthode de Galerkin classique, on fait l'hypothèse  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , ce qui revient à négliger la deuxième équation. Ici, la méthode de Galerkin non-linéaire consiste à utiliser la seconde équation pour approximer la dynamique sur l'espace complémentaire.

#### Variétés inertielles

La méthode de Galerkin non-linéaire consiste à définir une application  $\xi$  permettant d'exprimer les variables complémentaires  $\mathbf{p}$  en fonction des variables réduites  $\mathbf{q}$  sous la forme  $\mathbf{p} = \xi(\mathbf{q})$ .

Cette application de  $\mathbb{R}^r$  dans  $\mathbb{R}^{n-r}$  définit une variété appelée variété inertielle. Ce concept est en fait une version globale du concept de variété centrée [123, 124].

En pratique le calcul exact de  $\boldsymbol{\xi}$  est peu souvent réalisable, et on cherche alors à obtenir une variété inertielle approchée  $\boldsymbol{\xi}_{app}$  (Approximated Inertial Manifold, AIM). Plusieurs méthodes de calcul sont possibles en se basant sur l'équation projetée sur la base complémentaire (Eq.(2.51)). Un des cas les plus simples consiste à négliger les dérivées temporelles dans la deuxième équation pour obtenir une variété inertielle quasi-statique (FMT-AIM) défini par l'équation :

$$(\boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_c) \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{F}_{nl}(\boldsymbol{\Phi}_r \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_c \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q})) - \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{F}_{ex} = 0 \quad (2.52)$$

Cette équation algébrique peut être résolue par une méthode de Newton, ou par une méthode de point fixe. Dans la plupart des études il est courant de n'utiliser que quelques itérations de point fixe pour diminuer l'effort de calcul. Le résolution se déroule ainsi : à chaque itération ( $\mathbf{q}$  donné) on calcule  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q})$  à l'aide de (2.52) et on exprime les efforts non-linéaires par  $\mathbf{F}_{nl}(\boldsymbol{\Phi}_r \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_c \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q}))$ , on résout l'équation (2.50) et enfin on exprime la solution à l'aide de la relation  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}_r \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_c \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q})$ .

D'autres définitions pour la variété inertielle approchée sont également possibles, en particulier la variété inertielle d'Euler-Galerkin qui est obtenue en utilisant un schéma d'Euler implicite pour discrétiser l'équation (2.51), puis une itération de point fixe pour résoudre le problème non-linéaire associé [123].

La méthode de la variété inertielle peut s'avérer coûteuse en temps de calcul puisque à chaque itération du solveur de Newton on doit calculer la variété inertielle approchée. Le calcul de la solution par la méthode de Galerkin classique avec un nombre de modes  $r_2$  supérieur au nombre de modes retenus  $r$  pour une résolution par Galerkin non-linéaire peut souvent être réalisée plus rapidement et peut même donner de meilleurs résultats. Il faut alors choisir le nombre de modes retenus dans la base  $\boldsymbol{\Phi}_r$  correctement, ce qui nécessite souvent des études de convergence.

Pour réduire les temps de calcul associés au calcul d'une variété inertielle, on peut utiliser la méthode du Galerkin postprocess [123, 124]. Cette méthode, qui peut être comparée à la méthode de la correction statique en dynamique linéaire [125], consiste à résoudre l'équation (2.50) avec  $\mathbf{q} = 0$  (comme dans le cas d'une méthode de Galerkin classique) puis à "lisser" la solution obtenue grâce à la variété inertielle en posant  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}_r \mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_c \boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q})$ , où  $\boldsymbol{\xi}_{app}(\mathbf{q})$  vérifie l'équation (2.52). Cette opération de "lissage" peut se faire en parallèle du calcul des solutions. Il est indiqué que le Galerkin postprocess permet d'obtenir des résultats équivalents à la méthode Galerkin non-linéaire avec des temps de calcul comparables à ceux de la méthode de Galerkin classique [125]. Cependant, il se peut que la méthode du postprocessing donne des résultats dégradés par rapport à la solution non lissée, en particulier si le nombre de modes retenus pour calculer la solution de base est faible [125]. Dans [125], Kovacs explique que les méthodes de Galerkin non-linéaires (Galerkin non-linéaire, postprocess) permettent une amélioration par rapport à une méthode de Galerkin Classique que dans les cas où les solutions sont suffisamment irrégulières (ex : choc, discontinuité dans l'excitation, ...).

Ici, nous avons présenté l'utilisation de la méthode de Galerkin non-linéaire dans le cas où on recherche les évolutions temporelles pour une base de mode fixée. On remarque qu'on aurait pu effectuer le même travail pour une recherche de mode à évolution temporelle fixée. En particulier dans le cas de la HBM, l'application de la méthode de Galerkin non-linéaire revient à exprimer l'amplitude des harmoniques de rang élevé en fonction de l'amplitude des premiers harmoniques.

## 2.3 Evaluation des termes non-linéaires réduits

Cette section traite en particulier du problème de l'évaluation des termes non-linéaires réduits par projection de Galerkin. Dans le cas général, on doit calculer les efforts non-linéaires pour le modèle complet, puis on projette ces efforts sur la base de réduction. Cette procédure limite l'efficacité des méthodes de réduction de modèle. En effet, bien que le nombre de ddl soit réduit, l'évaluation des efforts non-linéaires pour le modèle complet peut s'avérer particulièrement lourde en termes de temps de calcul. De plus, lors d'une résolution itérative (type HBM), il est nécessaire de recalculer les efforts non-linéaires complets à chaque itération de la méthode de Newton. Pour éviter ces calculs sur le système complet lors de la résolution, la méthode de réduction doit être en mesure de donner une expression des efforts non-linéaires réduits seulement en fonction des coordonnées réduites. Les méthodes proposées ici s'appliquent particulièrement bien aux non-linéarités ne faisant intervenir que le déplacement. Ces travaux ont été présentés à la conférence CanCNSM 2013 [106].

### 2.3.1 Développement de la non-linéarité

On considère ici que la non-linéarité peut se développer en série entière sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_1 \mathbf{x} + \mathbf{H}_2 \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{H}_3 \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \dots \quad (2.53)$$

où les  $\mathbf{H}_i$  sont des matrices de taille  $n \times n^i$ . En particulier, les non-linéarités géométriques peuvent être représentées exactement par un tel développement à l'ordre 3 (les termes non-linéaires sont polynomiaux de degré 3). En utilisant une base de réduction  $\Phi$  tel que le déplacement soit approximé par  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}$ , l'expression des efforts non-linéaires réduits est donnée par :

$$\mathbf{F}_{nl,r}(\mathbf{q}) = \Phi^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi \mathbf{q}) = \Phi^T \mathbf{H}_1 \Phi \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{H}_2 (\Phi \mathbf{q}) \otimes (\Phi \mathbf{q}) + \Phi^T \mathbf{H}_3 (\Phi \mathbf{q}) \otimes (\Phi \mathbf{q}) \otimes (\Phi \mathbf{q}) + \dots \quad (2.54)$$

Finalement, en utilisant les propriétés du produit de Kronecker  $\otimes$ , l'expression des efforts réduits devient :

$$\mathbf{F}_{nl,r}(\mathbf{q}) = (\Phi^T \mathbf{H}_1 \Phi) \mathbf{q} + (\Phi^T \mathbf{H}_2 (\Phi \otimes \Phi)) (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + (\Phi^T \mathbf{H}_3 (\Phi \otimes \Phi \otimes \Phi)) (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + \dots \quad (2.55)$$

Ce qui peut finalement se réécrire :

$$\mathbf{F}_{nl,r}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_{1,r} \mathbf{q} + \mathbf{H}_{2,r} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + \mathbf{H}_{3,r} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + \dots \quad (2.56)$$

L'expression de l'équation (2.56) a l'avantage de représenter les efforts non-linéaires réduits seulement en fonction des coordonnées réduites  $\mathbf{q}$ . Si on dispose de l'expression des matrices  $\mathbf{H}_i$ , il est alors possible de calculer les matrices réduites  $\mathbf{H}_{i,r}$  une fois pour toutes en début de résolution, ce qui évite la reconstruction des efforts complets et les projections.

Bien sûr, cette méthode n'est applicable que dans le cas où l'expression des matrices  $\mathbf{H}_i$  est connue. Dans le cas où le développement de la non-linéarité n'est pas disponible, on présente une méthode d'évaluation des termes non-linéaires réduits basée sur l'exploitation de calculs statiques.

### 2.3.2 Méthodes d'évaluation des raideurs réduites

On suppose ici que les non-linéarités sont de type polynomial. Dans un souci de simplification, on ne présentera la méthode que pour des non-linéarités de degré 3 (du type des non-linéarités



géométriques), mais cette méthode reste applicable pour tous les degrés. On considère donc que la non-linéarité s'exprime sous la forme suivante :

$$(\mathbf{F}_{nl})_i(\mathbf{x}) = \sum_j k_{i,j}^{(1)} x_j + \sum_{j,k} k_{i,j,k}^{(2)} x_j x_k + \sum_{j,k,l} k_{i,j,k,l}^{(3)} x_j x_k x_l, \quad i = 1..n \quad (2.57)$$

Pour éviter ces calculs sur le système complet, on recherche une expression des forces non-linéaires réduites  $\mathbf{F}_{nl,r} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{nl}$  seulement en fonction des coordonnées réduites  $\mathbf{q}$ . Dans le cas de non-linéarité cubique, on recherche ces efforts sous la forme suivante [97, 126] :

$$(\mathbf{F}_{nl,r})_i(\mathbf{q}) = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{\Phi} \mathbf{q}) = \sum_j \tilde{k}_{i,j}^{(1)} q_j + \sum_{j,k} \tilde{k}_{i,j,k}^{(2)} q_j q_k + \sum_{j,k,l} \tilde{k}_{i,j,k,l}^{(3)} q_j q_k q_l, \quad i = 1..r \quad (2.58)$$

Il reste maintenant à identifier la valeur des coefficients  $\tilde{k}_{i,j}^{(1)}$ ,  $\tilde{k}_{i,j,k}^{(2)}$  et  $\tilde{k}_{i,j,k,l}^{(3)}$  grâce à la méthode d'évaluation des raideurs réduites (STiffness Evaluation Procedure, STEP). Pour cela, on réalise une interpolation des forces non-linéaires réduites en fonction des déplacements réduits grâce à une série de calculs statiques préliminaires. Deux méthodes sont alors envisageables : soit on impose une série de forces bien choisie et on obtient les déplacements associés par résolution d'une équation non-linéaire, soit on impose une série de déplacements bien choisie et on obtient les forces par évaluation d'une expression non-linéaire.

### Méthode 1 : forces imposées

Plus précisément, dans le premier cas on impose des forces  $\mathbf{F}_s$  pour obtenir une série de déplacements  $\mathbf{x}_s$ . En définissant  $(\mathbf{F}_{nl,r})_i^s = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{F}_s$  et  $q_i^s = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{x}_s$ , l'équation (2.58) fournit pour chaque indice de chargement  $s$ , un système d'équations linéaires en  $\tilde{k}^{(1,2,3)}$  que l'on est en mesure de résoudre par une procédure de moindres carrés. Cette méthode possède plusieurs inconvénients : premièrement, on ne sait pas a priori quelle forme de force choisir pour imposer les efforts. Comme dans le calcul des modes compagnons, on peut envisager d'imposer des forces du type  $\mathbf{F}_{k,s} = \beta_s \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_k$  pour chaque mode  $\mathbf{\Phi}_k$  et pour différentes amplitudes  $\beta_s$ . Un deuxième inconvénient est le fait que l'on doit résoudre un problème non-linéaire statique à chaque nouveau cas de chargement ce qui peut se révéler très consommateur en ressources et en temps de calcul. Enfin, on observe en pratique que cette méthode requiert une grande précision sur les déplacements et les efforts pour estimer correctement les coefficients de raideur réduite. Pour ces trois raisons, on préférera la méthode dite en déplacements imposés, où l'on impose cette fois les déplacements au lieu des forces.

### Méthode 2 : déplacements imposés

Dans la deuxième méthode, on impose des déplacements de façon assez naturelle comme une combinaison de modes de la base de réduction, et on évalue les forces non-linéaires correspondantes. Le fait de considérer des déplacements particuliers permet d'introduire des simplifications dans l'évaluation des paramètres. En particulier, si on impose un déplacement selon un mode du type  $\mathbf{x} = q_n \mathbf{\Phi}_n$  alors l'équation (2.58) se réduit à :

$$(\mathbf{F}_{nl,r})_s = \tilde{k}_{s,n}^{(1)} q_n + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2)} q_n^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3)} q_n^3 = \mathbf{\Phi}_s^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{\Phi}_n q_n) \quad (2.59)$$

En considérant alors ce déplacement pour trois amplitudes différentes  $q_n^{(1)}, q_n^{(2)}, q_n^{(3)}$ , on obtient le système d'équations (linéaire en  $\tilde{k}$ ) suivant :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_{nl}^r)_s^{(1)} &= \tilde{k}_{s,n}^{(r)} q_n^{(1)} + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)} (q_n^{(1)})^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)} (q_n^{(1)})^3 = \Phi_s^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi_n q_n^{(1)}) \\ (\mathbf{f}_{nl}^r)_s^{(2)} &= \tilde{k}_{s,n}^{(r)} q_n^{(2)} + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)} (q_n^{(2)})^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)} (q_n^{(2)})^3 = \Phi_s^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi_n q_n^{(2)}) \\ (\mathbf{f}_{nl}^r)_s^{(3)} &= \tilde{k}_{s,n}^{(r)} q_n^{(3)} + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)} (q_n^{(3)})^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)} (q_n^{(3)})^3 = \Phi_s^T \mathbf{F}_{nl}(\Phi_n q_n^{(3)}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Il est alors possible de résoudre ce système linéaire à 3 variables pour obtenir les valeurs de  $\tilde{k}_{s,n}^{(1,r)}, \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)}, \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)}$  pour  $s = \{1, \dots, r\}, n = \{1, \dots, r\}$ . Notons que le coefficient  $\tilde{k}_{s,n}^{(1,r)}$  peut être estimé directement par  $\tilde{k}_{s,n}^{(1,r)} = \Phi_s^T \mathbf{K} \Phi_n$ , ces paramètres peuvent servir à une vérification en les comparant aux raideurs linéaires réduites calculées par la méthode d'évaluation des raideur (STEP).

De la même manière, en imposant un déplacement sur deux modes tel que  $\mathbf{x} = \Phi_n q_n + \Phi_m q_m$ ,  $1 \leq n \leq m \leq r$ , l'équation (2.58) se réduit à :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{nl,r})_s &= \tilde{k}_{s,n}^{(1,r)} q_n + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)} q_n^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)} q_n^3 + \tilde{k}_{s,m}^{(1,r)} q_m + \tilde{k}_{s,m,m}^{(2,r)} q_m^2 + \tilde{k}_{s,m,m,m}^{(3,r)} q_m^3 + \\ &\quad 2\tilde{k}_{s,n,m}^{(2,r)} q_n q_m + 3\tilde{k}_{s,n,n,m}^{(3,r)} q_n^2 q_m + 3\tilde{k}_{s,n,m,m}^{(3,r)} q_n q_m^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

En choisissant plusieurs amplitudes de déplacement, et en supposant que l'on a déjà obtenu la valeur des coefficients  $\tilde{k}_{s,n}^{(1,r)}, \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)}$  et  $\tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)}$  (avec un déplacement sur un mode) il est possible d'obtenir la valeur des coefficients  $\tilde{k}_{s,n,m}^{(1,r)}, \tilde{k}_{s,n,n,m}^{(2,r)}$  et  $\tilde{k}_{s,n,m,m}^{(3,r)}$  pour  $s = \{1, \dots, r\}$  et  $1 \leq n \leq m \leq r$  en résolvant un système linéaire par la méthode des moindres carrés.

Enfin, en imposant un déplacement sur trois modes tel que  $\mathbf{x} = \Phi_n q_n + \Phi_m q_m + \Phi_l q_l$ ,  $1 \leq n \leq m \leq l \leq r$ , l'équation (2.58) se réduit à :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{nl,r})_s &= \tilde{k}_{s,n}^{(1,r)} q_n + \tilde{k}_{s,n,n}^{(2,r)} q_n^2 + \tilde{k}_{s,n,n,n}^{(3,r)} q_n^3 + \\ &\quad \tilde{k}_{s,m}^{(1,r)} q_m + \tilde{k}_{s,m,m}^{(2,r)} q_m^2 + \tilde{k}_{s,m,m,m}^{(3,r)} q_m^3 + \\ &\quad \tilde{k}_{s,l}^{(1,r)} q_l + \tilde{k}_{s,l,l}^{(2,r)} q_l^2 + \tilde{k}_{s,l,l,l}^{(3,r)} q_l^3 + \\ &\quad 2\tilde{k}_{s,n,m}^{(2,r)} q_n q_m + 2\tilde{k}_{s,n,l}^{(2,r)} q_n q_l + 2\tilde{k}_{s,l,m}^{(2,r)} q_l q_m + \\ &\quad 3\tilde{k}_{s,n,n,m}^{(3,r)} q_n^2 q_m + 3\tilde{k}_{s,n,n,m}^{(3,r)} q_n q_m^2 + 3\tilde{k}_{s,n,n,l}^{(3,r)} q_n^2 q_l + \\ &\quad 3\tilde{k}_{s,m,m,l}^{(3,r)} q_m^2 q_l + 3\tilde{k}_{s,n,l,l}^{(3,r)} q_n^2 q_l + 3\tilde{k}_{s,m,l,l}^{(3,r)} q_m^2 q_l \end{aligned} \quad (2.62)$$

En procédant de la même manière que pour les cas à un ou deux modes, on est en mesure d'obtenir les derniers coefficients  $\tilde{k}_{s,n,m,l}^{(3,r)}$  pour  $s = 1..r, 1 \leq n \leq m \leq l \leq r$ .

Les déplacements sont imposés pour plusieurs amplitudes des variables  $q_i$ , ces amplitudes doivent être choisies de sorte que l'on puisse voir tous les "régimes" du système. Plus précisément, les variables doivent couvrir un domaine allant des petites amplitudes (information sur le régime linéaire) aux grandes amplitudes (information sur le régime non-linéaire). En pratique le choix des amplitudes maximum à considérer est relativement délicat surtout si certains modes répondent plus que d'autres, dans ce cas une analyse statique préliminaire peut éventuellement indiquer les ordres de grandeurs des amplitudes à considérer. Numériquement, on remarque que les ordres de grandeur des coefficients linéaires, quadratiques et cubiques sont très différents, par conséquent une mise à l'échelle des équations peut se révéler utile pour éviter les problèmes de conditionnement.

Dans le cas des structures courbes, telles que les coques, pouvant présenter des phénomènes de flambement, des problèmes de non-convergence des solutions statiques peuvent être observés. Capiez-Lernout [97] recommande alors d'imposer des déplacements autour d'une position

moyenne  $\mathbf{x}_0$  voisine de la position de flambement. Les déplacements imposés seront alors de la forme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + q_n \Phi_n$ , la procédure d'évaluation reste la même à la différence près que les simplifications utilisées pour passer de l'équation (2.58) à l'équation (2.59) n'ont plus lieu (on doit considérer tous les paramètres en même temps).

### 2.3.3 Exemple d'application

Pour illustrer l'efficacité de la méthode STEP, on choisit de l'appliquer au modèle de poutre présenté à la section 2.1.3. On compare les résultats donnés par STEP aux résultats calculés analytiquement dans le cas continu. Plus précisément, on choisit de réduire le système sur la base constituée du quatrième mode axial et du premier mode transverse  $\Phi = [\Phi_u \Phi_v]$ , avec :

$$\begin{aligned}\Phi_u &= A_u \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \\ \Phi_v &= A_v (c_1(\cos(\alpha x) - \cosh(\alpha x)) + c_2(\sin(\alpha x) - \sinh(\alpha x)))\end{aligned}\quad (2.63)$$

où  $\Phi_u$  et  $\Phi_v$  représentent le quatrième mode axial et le premier mode transverse (les amplitudes  $A_u$  et  $A_v$  sont choisies de telle sorte que les modes soit normés par rapport à la masse). Pour l'interpolation des efforts non-linéaires par STEP, les amplitudes modales sont prises dans l'ensemble  $[1e^{-3}, 1e^{-2}, 5e^{-2}, 1e^{-1}]$ . Après calcul, on obtient un système de deux équations du type :

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{u,u}q_u + \tilde{k}_{u,v}q_v + \tilde{k}_{u,uu}q_u^2 + \tilde{k}_{u,vv}q_v^2 + \tilde{k}_{u,uuu}q_u^3 + \tilde{k}_{u,vvv}q_v^3 + \tilde{k}_{u,uv}q_uq_v + \tilde{k}_{u,uuv}q_u^2q_v \\ + \tilde{k}_{u,uvv}q_uq_v^2 = f_u \\ \tilde{k}_{u,v}q_u + \tilde{k}_{v,v}q_v + \tilde{k}_{v,uu}q_u^2 + \tilde{k}_{v,vv}q_v^2 + \tilde{k}_{v,uuu}q_u^3 + \tilde{k}_{v,vvv}q_v^3 + \tilde{k}_{v,uv}q_uq_v + \tilde{k}_{v,uuv}q_u^2q_v \\ + \tilde{k}_{v,uvv}q_uq_v^2 = f_v\end{aligned}\quad (2.64)$$

avec seulement cinq des 18 coefficients qui sont non nuls, les résultats de la comparaison sont présentés dans la Table 2.1. Dans ce cas, on observe que la méthode STEP donne d'excellents

Modèle	$\tilde{k}_{u,u}$	$\tilde{k}_{u,vv}$	$\tilde{k}_{v,v}$	$\tilde{k}_{v,uv}$	$\tilde{k}_{v,vvv}$
Analytique	4.2515e9	-5.2181e8	1.0107e6	-1.0436e9	4.2648e8
Éléments finis	4.2739e9	-5.2182e8	1.0108e6	-1.0436e9	4.2645e8
Erreur (%)	0.53	2e-3	2e-2	0	7e-2

TABLE 2.1 – Comparaison des raideurs non-linéaires réduites : (i) calculées analytiquement, (ii) calculées par STEP

résultats puisque l'erreur maximale commise sur les coefficients (non nuls) est de l'ordre de 0.5%. Dans le cas analytique, la valeur des autres coefficients est strictement égale à zéro, alors que dans le cas numérique, il est possible d'obtenir de faibles valeurs non nulles. Ces faibles valeurs ne posent pas de problème tant que l'on reste dans la limite de validité du modèle réduit (ie si les amplitudes modales ne dépassent pas les amplitudes modales utilisées lors de l'interpolation des efforts) car, dans le modèle, elles sont multipliées par des produits du type  $q_i q_j q_k$  qui restent d'amplitude généralement faible. Nous verrons dans la suite que, pour un modèle éléments finis 3D, les valeurs des amplitudes modales utilisées lors de l'interpolation peuvent largement influencer les valeurs des raideurs non-linéaires réduites.

## 2.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté les enjeux des méthodes de réduction de modèle dans le cadre de la simulation du comportement dynamique de structures non-linéaires, ainsi que les méthodes basées sur des projections de Galerkin pour la création de modèles réduits. L'étape cruciale de cette méthode est le choix de la base de projection qui sera retenue pour représenter le système réduit. L'utilisation des vecteurs de la base modale est un bon point de départ pour la construction d'une base de projection, mais il est souvent nécessaire de compléter cette base par de nouveaux vecteurs qui prendront en compte les effets induits par la non-linéarité. Ces vecteurs complémentaires peuvent être obtenus à partir de simulations (a posteriori) ou directement à partir des propriétés du système (a priori) et la table 2.2 dresse une comparaison des différentes bases en terme de facilité de mise en œuvre et de qualité des résultats.

Dans le cadre de la résolution de systèmes de grande taille géométriquement non-linéaires, ce chapitre porte une attention particulière au traitement des projections des termes non-linéaires. Dans le but d'éviter de calculer des quantités sur la structure complète lors de la simulation du modèle réduit, il est proposé d'évaluer directement les termes non-linéaires réduits grâce à une approximation polynomiale construite à partir de calculs statiques préliminaires. Cette méthode a été appliquée au cas de la poutre non-linéaire et les résultats ont été comparés avec ceux d'un modèle continu. On montre que la méthode d'estimation des raideurs réduites permet une évaluation correcte des efforts réduits en fonction seulement des coordonnées réduites et permet ainsi de diminuer la charge de calcul nécessaire à la résolution du modèle réduit.

La méthode de Galerkin présentée dans ce chapitre, permet la création d'un modèle réduit qui se met également sous la forme de l'équation de référence (1.1) et peut donc être résolue par une des méthodes présentées dans le chapitre 1. Dans le chapitre suivant, on présente plusieurs extensions des méthodes de réduction de modèle dans le cadre particulier de la recherche de solutions périodiques par la méthode de la balance harmonique. On y propose en particulier une application des méthodes de PGD, ainsi que certaines méthodes de sélection d'harmoniques.

Méthode	mise en place	qualité des résultats	remarques/limitations
Bases modales	directe (calcul de vecteurs propres)	bonne si les modes ont été choisis correctement	ne prend en compte la non-linéarité qu'au travers d'une linéarisation
Dérivées modales	résolution de problèmes aux valeurs propres, puis différences finies	permettent de compléter la base modale linéaire et de donner de bons résultats si les dérivés modales sont choisis correctement	prise en compte des non-linéarités à l'ordre 1, mais peu de critères sur la sélection des dérivées modales
Base de Krylov	résolution récursive de systèmes linéaires (ou non-linéaires)	les résultats sont dans l'ensemble moins bons que pour les autres méthodes (sauf dans le cas d'un base de Krylov totalement non-linéaire)	la base dépend de la forme de la force utilisée
Base POD	simulations préliminaires, puis extraction des modes par SVD	les résultats sont de bonne qualité en général, mais seulement pour des excitations proches de celles utilisées pour construire la base	les temps de calcul des simulations préliminaires peuvent être prohibitifs, choix arbitraire d'une plage de fréquence pour utiliser la base de réduction
Modes compagnons	calculs statiques préliminaires, puis extraction des modes par SVD	permettent de compléter une base initiale, pour en améliorer la qualité	les calculs statiques peuvent prendre un temps important, mais une partie des résultats pourrait être avantageusement réutilisés pour l'évaluation des efforts non-linéaires réduits.

TABLE 2.2 – Tableau comparatif des méthodes de calcul de base de projection pour les méthodes de Galerkin

## Chapitre 3

# Extension des méthodes de réduction de modèle aux systèmes traités par HBM

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Proper Generalized decomposition (PGD)</b>	<b>80</b>
3.1.1	Optimal Galerkin PGD	80
3.1.2	Progressive Galerkin PGD	83
3.1.3	Variantes	86
3.1.4	Exemple d'application de la PGD aux problèmes de vibration non-linéaires	87
3.1.5	Conclusions	90
<b>3.2</b>	<b>Réduction du système d'équation de la HBM par sélection d'harmonique</b>	<b>92</b>
3.2.1	Etat de l'art sur les méthodes de sélection d'harmonique	92
3.2.2	Méthode de sélection par prédiction tangente	95
3.2.3	Exemple d'application sur un système avec non-linéarité géométrique	98
3.2.4	Exemple d'application sur un système avec frottement	99
<b>3.3</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>103</b>

---

Ce chapitre propose une extension des méthodes de réduction de modèle dans le cadre particulier de la recherche de solutions périodiques par la méthode de la HBM. Dans un premier temps, on considère une application originale des méthodes de PGD pour traiter des problèmes de vibration non-linéaires. Cette méthode dite *a priori*, permet de calculer une base de projection en même temps que le calcul de la solution, ce qui permet d'éviter les problèmes liés au choix d'une base de projection comme dans les méthodes de Galerkin. Dans une deuxième partie, on propose de réduire directement le nombre d'équations algébriques issues de la HBM en considérant des méthodes de sélection d'harmoniques. Après avoir présenté les résultats de la littérature, on propose une nouvelle méthode de sélection d'harmoniques basée sur l'utilisation d'un prédicteur tangent, et directement intégrable dans les procédures de continuation.

### 3.1 Proper Generalized decomposition (PGD)

La *Proper Generalized Decomposition* (PGD) est une méthode de résolution des équations dynamiques par l'utilisation d'un modèle réduit construit en même temps que la solution elle-même, et se classe donc dans les méthodes dites *a priori*. La méthode (dans son formalisme actuel) a été proposée par A. Nouy, à l'origine pour résoudre des problèmes de mécanique statique et stochastique [127–129]. Elle a ensuite été appliquée aux systèmes dynamiques [93] et reprise dans de nombreux travaux (entre autres [94–96, 130]). La méthode repose ici sur l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps. Les solutions de l'équation (2.1) sont alors recherchées sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_r(t) = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(x) \lambda_i(t) = \mathbf{W}_r \Lambda_r \quad (3.1)$$

avec  $r$  un entier correspondant au nombre de termes retenus dans la décomposition de la solution.

A la différence des méthodes de Galerkin, les fonctions de forme  $\mathbf{w}_i(x)$  ne sont pas connues a priori et devront être déterminées au cours de la résolution, en même temps que les évolutions temporelles  $\lambda_i(t)$ . La résolution à proprement parler est itérative et repose sur des itérations de points fixes. De manière générale, on peut résumer la procédure de la manière suivante :

- (i) on initialise les fonctions de forme,
- (ii) on calcule les évolutions temporelles correspondantes,
- (iii) on utilise les évolutions temporelles de l'étape (ii) pour calculer de nouvelles fonctions de forme et on reboucle sur l'étape (ii).

Les itérations sont alors réalisées jusqu'à l'obtention d'une convergence pour la solution. Les étapes (ii) et (iii) constituent le cœur de la méthode puisqu'il s'agit de résoudre les problèmes donnant les fonctions de forme ou les évolutions temporelles. Ces problèmes sont définis par le type de méthode choisie. Dans la suite, on propose une application originale de la PGD à la recherche de solutions périodiques pour des systèmes dynamiques non-linéaires. En particulier, nous présenterons les deux algorithmes principaux permettant d'effectuer une résolution par PDG, à savoir l'*Optimal Galerkin PGD* (oPGD) et la *Progressive PGD*. Les résultats de cette section ont fait l'objet d'une présentation à la conférence IMECE 2012 [131].

#### 3.1.1 Optimal Galerkin PGD

Avant de présenter l'Optimal Galerkin PGD (oPGD), on introduit tout d'abord une formulation faible du problème de l'équation (2.1), qui servira dans la présentation des algorithmes.

Cette formulation est donnée par l'équation suivante :

$$A(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) = L(\mathbf{v}(t)) \quad \forall \mathbf{v}(t) \in E \quad (3.2)$$

avec

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{I_t} [\mathbf{v}(t)^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)))] dt \quad (3.3)$$

et

$$L(\mathbf{v}) = \int_{I_t} [\mathbf{v}(t)^T \mathbf{F}_{ex}(t)] dt \quad (3.4)$$

où  $I_t$  représente l'intervalle temporel de définition des fonctions  $\mathbf{u}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$ . Lors de la recherche de solutions périodiques, il apparaît naturel de choisir cet intervalle comme correspondant à une période de la solution ( $I_t = [0, T]$ ).

### 3.1.1.1 Présentation

Pour l'optimal Galerkin PGD, les fonctions de forme et les évolutions temporelles de la décomposition (3.1) sont recherchées de sorte qu'elles vérifient simultanément deux critères d'orthogonalité (au sens de Galerkin) faisant intervenir la formulation faible du problème. Ces critères d'orthogonalité (respectivement par rapport à  $\text{vect}(\mathbf{W}_r)$  et  $\text{vect}(\Lambda_r)$ ) s'écrivent :

$$B(\mathbf{W}_r \Lambda_r, \mathbf{W}_r^* \Lambda_r) = L(\mathbf{W}_r^* \Lambda_r) \quad \forall \mathbf{W}_r^* \in (E_s)^r \text{ (orthogonalité / temps)} \quad (3.5)$$

et

$$B(\mathbf{W}_r \Lambda_r, \mathbf{W}_r \Lambda_r^*) = L(\mathbf{W}_r \Lambda_r^*) \quad \forall \Lambda_r^* \in (E_t)^r \text{ (orthogonalité / espace)} \quad (3.6)$$

On peut alors définir deux applications liées respectivement à chaque critère d'orthogonalité. La première application, correspondant à un problème spatial, est définie par :

$$\begin{aligned} S : (E_t)^r &\rightarrow (E_s)^r \\ \Lambda_r &\mapsto \mathbf{W}_r = S(\Lambda_r) \quad \text{tel que Eq.(3.5) soit vérifiée} \end{aligned} \quad (3.7)$$

et la seconde application, correspondant à un problème temporel, est définie par :

$$\begin{aligned} T : (E_s)^r &\rightarrow (E_t)^r \\ \mathbf{W}_r &\mapsto \Lambda_r = T(\mathbf{W}_r) \quad \text{tel que Eq.(3.6) soit vérifiée} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Lors d'une résolution par oPGD, le couple  $(\Lambda_r, \mathbf{W}_r)$  est alors déterminé comme étant le couple vérifiant une des trois conditions suivantes :

- $\Lambda_r = T(\mathbf{W}_r)$  et  $\mathbf{W}_r = S(\Lambda_r)$
- $\Lambda_r = T(\mathbf{W}_r)$  et  $\mathbf{W}_r$  est un point fixe de  $G = S \circ T$
- $\mathbf{W}_r = S(\Lambda_r)$  et  $\Lambda_r$  est un point fixe de  $H = T \circ S$

Ces trois conditions sont équivalentes, et elles montrent que la recherche de la solution peut être réalisée par un algorithme de point fixe. En particulier, le couple optimal  $(\mathbf{W}_r, \Lambda_r)$  peut être vu comme un point fixe de l'application  $S \circ T$ . L'algorithme utilisé ici est un algorithme de recherche de point fixe par itération de Picard. Il est également appelé par Nouy algorithme d'itération par sous espace (*subspace iteration*, [93]).

Pour calculer une solution à  $r$  composantes, la méthode est décrite dans l'algorithme 2.

Cet algorithme est relativement lourd en termes de ressource de calcul. En particulier, l'évaluation des fonctions de forme  $\mathbf{W}_r$  au travers de l'application  $S$  demande la résolution d'un



---

**Algorithm 2** Algorithme de décomposition par Optimal Galerkin PGD (oPGD)

---

Choisir  $r, H$ , tel que  $r \leq 2H + 1$   
 initialiser  $\mathbf{\Lambda}_r = \mathbf{\Lambda}_r^0$   
**for**  $k = 1..k_{max}$  **do**  
 (i). calculer  $\mathbf{W}_r^k = S(\mathbf{\Lambda}_r^{k-1})$  [Eq.(3.11)], orthonormer  $\mathbf{W}_r^k$  (facultatif)  
 (ii) calculer  $\mathbf{\Lambda}_r^k = T(\mathbf{W}_r^k)$  [Eq.(3.13)]  
 évaluer la stationnarité de  $\mathbf{x}_r^k = \mathbf{W}_r^k \mathbf{\Lambda}_r^k$  [  $\frac{\|\mathbf{x}_r^k - \mathbf{x}_r^{k-1}\|}{\|\mathbf{x}_r^{k-1}\|} \leq \epsilon$  ]  
**end for**  
 affecter  $\mathbf{x}_r = \mathbf{W}_r^k \mathbf{\Lambda}_r^k$

---

système algébrique non-linéaire de taille  $nr$ , il s'agit là de la partie la plus lourde du calcul. Les itérations peuvent être menées jusqu'à convergence de la solution, mais on observe en pratique que la stationnarité est atteinte en quelques itérations seulement ( $k_{max} = 2$ , ou 3 en pratique) comme dans la plupart des études de Nouy [127–129]. Il est clair que ce paramètre agit de manière quasi-proportionnelle sur les temps de calcul (on doit résoudre  $k_{max}$  fois le problème spatial et le problème temporel). L'initialisation des variables joue aussi un grand rôle dans la vitesse de convergence de la méthode. La résolution du problème temporel est quand à elle relativement rapide car elle ne nécessite que la résolution d'équations différentielles à  $r$  variables ( $r$  relativement petit).

### 3.1.1.2 Cas de la recherche de solutions périodiques pour les systèmes non-linéaires

Dans un premier temps, on donne les équations correspondant à l'application des mappings  $S$  et  $T$  dans le cas de recherche des solutions périodiques du problème d'ordre 2 (Eq.(2.1)). Etant donné que l'on ne s'intéresse qu'aux solutions périodiques, on fait l'hypothèse que les  $\lambda_i(t)$  sont périodiques de période fondamentale  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , et qu'ils sont représentables par des séries de Fourier tronquées. Par conséquent, on écrira :

$$\lambda_i(t) = \mathbf{D}(t)\tilde{\lambda}_i, \quad \dot{\lambda}_i(t) = \mathbf{D}(t)\nabla\tilde{\lambda}_i, \quad \ddot{\lambda}_i(t) = \mathbf{D}(t)\nabla^2\tilde{\lambda}_i \quad (3.9)$$

avec  $\lambda_i(t)$  une fonction scalaire périodique,  $\tilde{\lambda}_i$  le vecteur des coefficients de la série de Fourier associée (tronquée à l'ordre  $H$ ),  $\mathbf{D}(t) = [1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)]$  la matrice de passage fréquence-temps et  $\nabla$  la matrice de dérivation dans le domaine fréquentiel.

On rappelle que la solution est recherchée sous la forme  $\mathbf{x}_r = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i \lambda_i(t)$ , avec  $r$  le nombre de modes retenus dans la décomposition.

**Mapping  $S$  :** L'application du mapping  $S$  (équation (3.11)) nécessite la résolution de  $nr$  équations algébriques non-linéaires couplées que l'on peut écrire sous forme d'un système global défini par bloc de  $n$  équations :

$$\left( \sum_{i=1}^r \left[ \int_{I_t} \lambda_j (\mathbf{M}\ddot{\lambda}_i + \mathbf{C}\dot{\lambda}_i + \mathbf{K}\lambda_i) dt \right] \mathbf{w}_i \right) + \int_{I_t} \lambda_j \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{W}_r, \mathbf{\Lambda}_r) dt = \int_{I_t} \lambda_j \mathbf{F}_{ex} dt, \quad \forall j \in [1 : r] \quad (3.10)$$

En notant :

- $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1^T; \dots; \mathbf{w}_r^T]^T$  [vecteur  $rn \times 1$ ]
- $\mathbf{P}_a = [(\int \lambda_j \dot{\lambda}_i)_{1 \leq i, j \leq r}]$  [matrice  $r \times r$ ]
- $\mathbf{P}_v = [(\int \lambda_j \lambda_i)_{1 \leq i, j \leq r}]$  [matrice  $r \times r$ ]
- $\mathbf{P}_p = [(\int \lambda_j \lambda_i)_{1 \leq i, j \leq r}]$  [matrice  $r \times r$ ]

$$\begin{aligned} - \mathbf{F}_{nl,s} &= (\int \lambda_j \mathbf{F}_{nl})_{1 \leq j \leq r} \quad [\text{vecteur } rn \times 1] \\ - \mathbf{F}_s &= (\int \lambda_j u)_{1 \leq j \leq r} \otimes \mathbf{F} \quad [\text{vecteur } rn \times 1] \end{aligned}$$

le système d'équations peut se réécrire sous forme globale de la manière suivante :

$$[(\mathbf{P}_a \otimes \mathbf{M}) + (\mathbf{P}_v \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{P}_p \otimes \mathbf{K})]\mathbf{W} + \mathbf{F}_{nl,s} = \mathbf{F}_s \quad (3.11)$$

Ici, les  $\lambda_i$  sont donnés et on trouve les  $\mathbf{w}_i$  par un algorithme de type Newton-Raphson. Dans le cas de solutions périodiques les  $\lambda_i$  sont donnés par leurs séries de Fourier tronquées à l'ordre  $H$   $\tilde{\lambda}_i$  et les intégrales sont évaluées dans le domaine fréquentiel, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int \lambda_j \ddot{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_j^T \mathbf{H} \nabla^2 \tilde{\lambda}_i \\ \int \lambda_j \dot{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_j^T \mathbf{H} \nabla \tilde{\lambda}_i \\ \int \lambda_j \lambda_i &= \tilde{\lambda}_j^T \mathbf{H} \tilde{\lambda}_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec  $\mathbf{H} = \int_0^T D^T(t)D(t)dt$ .

**Mapping  $T$**  : L'application du mapping  $T$  (équation (3.13)) nécessite la résolution de  $r$  équations différentielles non-linéaires couplées données par :

$$(\mathbf{W}_r^T \mathbf{M} \mathbf{W}_r) \ddot{\mathbf{\Lambda}}_r + (\mathbf{W}_r^T \mathbf{C} \mathbf{W}_r) \dot{\mathbf{\Lambda}}_r + (\mathbf{W}_r^T \mathbf{K} \mathbf{W}_r) \mathbf{\Lambda}_r + \mathbf{W}_r^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{W}_r, \mathbf{\Lambda}_r) = \mathbf{W}_r^T \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (3.13)$$

Ici, les  $\mathbf{w}_i$  sont donnés et on trouve les  $\lambda_i$  par résolution des équations différentielles (3.13). Dans le cas de la recherche de solutions périodiques, les solutions de ces équations différentielles sont recherchées par HBM, ce qui revient à transformer le problème en système d'équations algébriques non-linéaires de taille  $r(2H + 1)$  (où  $H$  est le nombre d'harmoniques retenu pour le calcul des  $\lambda_i$ ) (voir Chapitre 1).

On revient maintenant à la description de l'algorithme de décomposition par oPGD (Algo.2). On choisit tout d'abord un nombre d'harmoniques  $H$  pour représenter les solutions périodiques, et on fixe le nombre de modes  $r$  ( $r \leq n$ ) retenus dans la décomposition. Dans toute la suite, on considèrera que  $r \leq 2H + 1$ . Cette hypothèse permet l'initialisation des évolutions temporelles sur des directions indépendantes. Dans les études de Nouy [93], l'initialisation est souvent générée aléatoirement. Ici, on propose d'utiliser les composantes de la base de Fourier pour l'initialisation de  $\mathbf{\Lambda}_r$  : par exemple  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \cos(\omega t)$ ,  $\lambda_3 = \sin(\omega t)$ , ... Dans le cas où  $2H + 1 \leq r$ , on dispose de  $2H + 1$  vecteurs pour exprimer  $r$  directions indépendantes, ce qui est impossible. Dans ce cas la matrice  $\mathbf{\Lambda}_r$  serait de rang inférieur à  $r$ , ce qui se traduit par des matrices singulières dans l'équation (3.11). On évitera cette situation en imposant  $r \leq 2H + 1$ , ce qui est assuré dès lors que  $H$  est suffisamment grand.

Lors d'une résolution pour une plage de fréquence (continuation séquentielle par exemple), on peut utiliser les résultats de la fréquence précédente pour initialiser les évolutions temporelles. De même, il est également possible d'utiliser les formes spatiales de l'itération précédente pour initialiser la résolution du problème spatial par la méthode de Newton (résolution de l'équation (3.11)). Cela a pour effet de diminuer largement le nombre d'itérations dans la méthode de Newton par rapport à une initialisation aléatoire. De plus, cela permet aussi de fixer un nombre d'itérations de PGD  $k_{max}$  faible (1 ou 2 en pratique) car la stationnarité est rapidement atteinte. L'étape d'orthogonalisation de la base des vecteurs spatiaux permet d'éviter les problèmes de mauvais conditionnement matriciel dans le problème temporel.

### 3.1.2 Progressive Galerkin PGD

La méthode oPGD donne de bons résultats en termes de réduction de modèle, mais elle est cependant peu performante en termes de temps de calcul. Cela provient en partie de la résolution

du problème spatial à  $nr$  inconnues. Dans un certain sens, la méthode oPGD recherche les  $r$  vecteurs de la base  $\mathbf{W}_r$  en une seule fois et on impose l'orthogonalité par rapport au  $r$  vecteurs, d'où le nom d'optimal. Ici, pour la *progressive PGD* (pPGD), on cherche à améliorer les temps de calcul en ne considérant qu'un seul vecteur à la fois, menant à une construction progressive de la solution, mais diminuant la taille des problèmes à résoudre.

### 3.1.2.1 Présentation

Lors de la résolution par PGD progressive les solutions  $\mathbf{x}$  sont recherchées itérativement sous la forme :

$$\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{x}_{r-1}(t) + \mathbf{w}_r \lambda_r(t) \quad (3.14)$$

avec  $\lambda_r(t) \in E_t$ ,  $\mathbf{w}_r \in E_x$  et  $\mathbf{x}_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{w}_i \lambda_i(t)$ . Le couple à ajouter  $(\lambda_r, \mathbf{w}_r)$  est déterminé de manière à satisfaire simultanément les deux critères d'orthogonalité suivants :

$$B(\mathbf{x}_{r-1} + \mathbf{w}_r \lambda_r, \mathbf{w}_r^* \lambda_r) = L(\mathbf{w}_r^* \lambda_r) \quad \forall \mathbf{w}_r^* \in E_x \quad (3.15)$$

et

$$B(\mathbf{x}_{r-1} + \mathbf{w}_r \lambda_r, \mathbf{w}_r \lambda_r^*) = L(\mathbf{w}_r \lambda_r^*) \quad \forall \lambda_r^* \in E_t \quad (3.16)$$

On remarque ici que l'orthogonalité n'est imposée que par rapport à un seul vecteur. Ces critères permettent de définir les deux applications suivantes :

$$S_{r-1} : \begin{array}{l} E_t \rightarrow E_x \\ \lambda \mapsto \mathbf{w} = S_{r-1}(\lambda) \end{array} \quad \text{tel que Eq.(3.15) soit vérifiée} \quad (3.17)$$

$$T_{r-1} : \begin{array}{l} E_x \rightarrow E_t \\ \mathbf{w} \mapsto \lambda = T_{r-1}(\mathbf{w}) \end{array} \quad \text{tel que Eq.(3.16) soit vérifiée} \quad (3.18)$$

Lors de la résolution par pPGD, le couple  $(\lambda_r, \mathbf{w}_r) \in E_t \times E_x$  est alors déterminé comme étant le couple vérifiant une des trois conditions suivantes :

- $\lambda_r = T_{r-1}(\mathbf{w}_r)$  et  $\mathbf{w}_r = S_{r-1}(\lambda_r)$
- $\lambda_r = T_{r-1}(\mathbf{w}_r)$  et  $\mathbf{w}_r$  est un point fixe de  $G_{r-1} = S_{r-1} \circ T_{r-1}$
- $\mathbf{w}_r = S_{r-1}(\lambda_r)$  et  $\lambda_r$  est un point fixe de  $H_{r-1} = T_{r-1} \circ S_{r-1}$

Une fois encore les composantes sont recherchées par des itérations de points fixes et un algorithme global de la méthode est proposé dans l'Algorithme 3.

L'algorithme utilisé repose toujours sur une itération de Picard. La construction de la solution se fait progressivement en calculant les modes un par un. Avec cet algorithme, chaque terme de la décomposition est calculé quasi-indépendamment.

L'étape de mise à jour ("update") optionnelle (étape 1.3 [opt]), consiste à recalculer toutes les fonctions temporelles en même temps à partir de la base des modes courants. Cela permet une amélioration significative des résultats en comparaison de ceux obtenus par l'algorithme sans mise à jour des fonctions temporelles.

Dans le cas d'une approximation à un mode de PGD, la définition progressive de la PGD est strictement équivalente à la définition optimale de la PGD présentée à la section précédente ( $S_0=S$ ) et elle souffre donc des mêmes problèmes (voir les remarques sur une approximation à un seul mode, section 3.1.2.3). Par conséquent le premier mode de PGD peut ne pas être optimal (pas de prise en compte de l'amortissement ou de la non-linéarité) et comme la décomposition est progressive l'erreur se propage au travers des opérations successives.

---

**Algorithm 3** Algorithme de décomposition par Progressive PGD (pPGD)

---

```

for  $l = 1..r$  do
  initialiser  $\lambda_l^0(t)$ 
  for  $k = 1..k_{max}$  do
    calculer  $\mathbf{w}_l^k = S_{l-1}(\lambda_l^{k-1})$  [résoudre Eq.(3.11)]
    orthonormer  $\mathbf{w}_l^k$  par rapport à la base  $\mathbf{W}_{l-1}$  (facultatif)
    calculer  $\lambda_l^k = T_{l-1}(\mathbf{w}_l^k)$  [résoudre Eq.(3.21)]
    évaluer la convergence de  $\mathbf{w}_l^k \lambda_l^k$ 
  end for
  affecter  $\lambda_l = \lambda_l^{k_{max}}$  et  $\mathbf{w}_l = \mathbf{w}_l^{k_{max}}$ 
  [optionnel] mettre à jour les fonctions temporelles en résolvant  $\Lambda_l = T(\mathbf{W}_l)$  [résoudre Eq.(3.13)]
  affecter  $\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_{l-1} + \mathbf{w}_l \lambda_l$  (ou  $\mathbf{x}_l = \mathbf{W}_l \Lambda_l$  si 1.3 [opt])
  évaluer la stationnarité de  $\mathbf{x}_l$ 
end for
retourner  $\mathbf{x}_r$ 

```

---

### 3.1.2.2 Cas de la recherche de solutions périodiques pour les systèmes non-linéaires

On donne ici les équations correspondant à l'application des mappings  $S_{r-1}$  et  $T_{r-1}$  dans le cas où on recherche des solutions périodiques du problème de l'Eq.(2.1).

**Mapping**  $S_{r-1}$  : L'application du mapping  $S_{r-1}$ , équation (3.17), nécessite la résolution de  $n$  équations algébriques non-linéaires que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\left( \sum_{i=1}^r \left[ \int_{I_t} \lambda_r (\mathbf{M}\ddot{\lambda}_i + \mathbf{C}\dot{\lambda}_i + \mathbf{K}\lambda_i) dt \right] \mathbf{w}_i \right) + \int_{I_t} \lambda_r \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{W}_r, \Lambda_r) dt = \int_{I_t} \lambda_r \mathbf{F}_{ex} dt \quad (3.19)$$

En prenant en compte le fait que les  $r - 1$  premiers termes de la décomposition sont connus des itérations précédentes, on peut réécrire ce système sous forme "(semi)déflaté" (le terme semi déflaté est utilisé car on ne peut pas séparer les termes dans la non-linéarité) :

$$\left[ \int_{I_t} \lambda_r (\mathbf{M}\ddot{\lambda}_r + \mathbf{C}\dot{\lambda}_r + \mathbf{K}\lambda_r) dt \right] \mathbf{w}_r + \int_{I_t} \lambda_r \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{W}_r, \Lambda_r) dt = \int_{I_t} \lambda_r \mathbf{F}_{ex} dt - \left( \sum_{i=1}^{r-1} \left[ \int_{I_t} \lambda_r (\mathbf{M}\ddot{\lambda}_i + \mathbf{C}\dot{\lambda}_i + \mathbf{K}\lambda_i) dt \right] \mathbf{w}_i \right) \quad (3.20)$$

Les  $\lambda_i$  sont donnés et on trouve  $\mathbf{w}_r$  par un algorithme de type Newton-Raphson.

**Mapping**  $T_{r-1}$  : L'application du mapping  $T_{r-1}$ , équation (3.18), nécessite la résolution d'une seule équation différentielle non-linéaire donnée par :

$$(\mathbf{w}_r^T \mathbf{M} \mathbf{w}_r) \ddot{\lambda}_r + (\mathbf{w}_r^T \mathbf{C} \mathbf{w}_r) \dot{\lambda}_r + (\mathbf{w}_r^T \mathbf{K} \mathbf{w}_r) \lambda_r + \mathbf{w}_r^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{W}_r, \Lambda_r) = \mathbf{w}_r^T \mathbf{F}_{ex}(t) - [(\mathbf{w}_r^T \mathbf{M} \mathbf{W}_{r-1}) \ddot{\Lambda}_{r-1} + (\mathbf{w}_r^T \mathbf{C} \mathbf{W}_{r-1}) \dot{\Lambda}_{r-1} + (\mathbf{w}_r^T \mathbf{K} \mathbf{W}_{r-1}) \Lambda_{r-1}] \quad (3.21)$$

Dans le cas périodique, les  $\mathbf{w}_i$  sont donnés et on trouve  $\lambda_r$  par HBM (ce qui nécessite la résolution d'une équation algébrique non-linéaire de taille  $2N_h + 1$  où  $H$  est le nombre d'harmoniques retenu pour le calcul de  $\lambda_r$ ).

### 3.1.2.3 Remarques sur une approximation à un mode

Lors d'une approximation à un mode (oPGD à un seul mode, ou pPGD en général), on recherche  $\mathbf{x}(t)$  sous la forme  $\mathbf{x}(t) = \lambda_1 \mathbf{w}_1$ . Pour certains cas de non-linéarités, il peut arriver que la contribution du terme non-linéaire de l'Eq.(3.10) soit nulle ou quasi nulle :

$$\int_{I_t} \lambda_1 \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{w}_1, \lambda_1) dt \approx \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Dans ce cas, la résolution du problème spatial Eq.(3.10) revient à la résolution d'un système linéaire et la forme  $\mathbf{w}_1$  qui en découle ne prend pas en compte la non-linéarité (en fait il s'agit d'une forme linéaire) et mène donc à des résultats erronés. Cette contribution, éventuellement nulle, est due à la nature périodique des solutions recherchées : pour une solution périodique la position est orthogonale à la vitesse (au sens du produit scalaire dans  $L^2$ ). Par conséquent, dès que la non-linéarité évolue de manière semblable à la vitesse (du point de vue temporel), la contribution du terme non-linéaire pour une approximation à un mode de PGD sera nulle (on peut citer l'exemple d'une non-linéarité de la forme  $f_{nl}(u, \dot{u}) = \tanh(\alpha u)$ ).

De même (et peut-être encore plus grave pour la suite), pour une approximation à un mode de PGD, la contribution du terme d'amortissement de l'Eq.(3.10) est toujours nulle :

$$\left( \int_{I_t} \lambda_1 \dot{\lambda}_1 dt \right) \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

En revanche, dès que le nombre de mode de PGD est supérieur ou égal à deux, ces problèmes disparaissent grâce à l'apparition de termes croisés :

$$\begin{aligned} \left( \int_{I_t} \lambda_1 \dot{\lambda}_1 dt \right) \mathbf{C} &= \mathbf{0} \\ \left( \int_{I_t} \lambda_1 \dot{\lambda}_2 dt \right) \mathbf{C} &\neq \mathbf{0} \\ \left( \int_{I_t} \lambda_2 \dot{\lambda}_1 dt \right) \mathbf{C} &\neq \mathbf{0} \\ \left( \int_{I_t} \lambda_2 \dot{\lambda}_2 dt \right) \mathbf{C} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

de même pour le terme non-linéaire :

$$\begin{aligned} \int_{I_t} \lambda_1 \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{w}_1 \lambda_1 + \mathbf{w}_2 \lambda_2) dt &\neq \mathbf{0} \\ \int_{I_t} \lambda_2 \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{w}_1 \lambda_1 + \mathbf{w}_2 \lambda_2) dt &\neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.1.3 Variantes

Comme nous l'avons expliqué dans la section Optimal Galerkin PGD, l'application du mapping  $S$  peut s'avérer coûteuse si le système possède un grand nombre de ddl ( $n$  grand) ou si on veut une solution avec beaucoup de modes de PGD ( $r$  grand). Des variations ont été proposées pour s'affranchir du calcul de l'application  $S$  (ce qui bien entendu entraîne une dégradation des résultats).

#### 3.1.3.1 Algorithme d'Arnoldi

Dans cet algorithme, on approche le sous-espace dominant de l'application  $G$  par un sous-espace de Krylov.

L'avantage de cet algorithme réside dans le fait que le calcul du sous espace de Krylov se fait en appliquant le mapping  $G$  à un seul vecteur (contrairement à l'algorithme Galerkin PGD où on applique  $G$  à l'ensemble des vecteurs de  $\mathbf{W}_r$ ).

---

**Algorithm 4** Algorithme d'Arnoldi pour le calcul d'une décomposition PGD

---

```

initialiser  $\mathbf{V}_1 \in E_x$ ,  $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\|\mathbf{V}_1\|}$ 
for pour  $i = 1..r$  do
    calculer  $\mathbf{V} = G(\mathbf{V}_i) = S \circ T(\mathbf{V}_i)$ 
    orthogonaliser  $\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V} - \sum_j (\mathbf{V}_j^T \mathbf{V}) \mathbf{V}_j$  (facultatif)
    if  $\|\mathbf{V}_{i+1}\| \leq \epsilon \|\mathbf{V}\|$  then
        break
    end if
    affecter  $\mathbf{V}_{i+1} = \frac{\mathbf{V}_{i+1}}{\|\mathbf{V}_{i+1}\|}$ 
end for
affecter  $\mathbf{W}_r = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_r]$  et calculer  $\mathbf{\Lambda}_r = T(\mathbf{W}_r)$ 

```

---

La construction de la base de Krylov est relativement rapide, puisque qu'elle nécessite la résolution de  $r$  fois un système algébrique non-linéaire de taille  $n$  et  $r$  fois une équation différentielle non-linéaire de taille 1. Enfin les évolutions temporelles nécessitent quant à elles la résolution de  $r$  équations différentielles non-linéaires couplées. Cependant, comme les mappings sont appliqués à un seul vecteur, cet algorithme souffre également de problèmes liés aux approximations à un mode.

### 3.1.3.2 Galerkin PGD avec déflation d'opérateur

Une autre solution pour s'affranchir de l'application du mapping  $S$  est de considérer une décomposition progressive où les modes sont calculés deux par deux. L'idée est la même que dans le cas de la progressive PGD, mais on évite les approximations à un mode ce qui permet d'obtenir de bien meilleurs résultats qu'avec les méthodes progressive PGD et Arnoldi PGD. L'algorithme utilisé est quasiment le même que pour la méthode progressive PGD à la différence que les modes sont calculés deux par deux.

### 3.1.4 Exemple d'application de la PGD aux problèmes de vibration non-linéaires

On propose ici d'appliquer les deux méthodes de décomposition PGD, précédemment exposées, à l'exemple de la poutre bi-encastée de la section 2.1.3. On considère dans un premier temps le cas de la vibration forcée, et les résultats seront comparés aux solutions obtenues par HBM sur le problème complet, ainsi que par rapport à une version idéale de la POD. Pour terminer sur cette application, on considèrera également le cas des vibrations libres traité par PGD.

#### 3.1.4.1 Solutions forcées

On considère ici que la poutre de l'exemple 2.1.3 est excitée en son centre par une force transverse périodique du type  $f_{ex}(t) = A \cos(\omega t)$  avec  $A = 200N$ . La solution de référence est calculée par HBM avec  $H = 3$  harmoniques pour une bande de fréquence centrée autour du premier mode propre ( $\frac{\omega}{2\pi} \in [155, 190]$  Hz), les résultats sont présentés sur la Fig.3.1.

Pour évaluer les résultats de la PGD en termes de réduction de modèle, on les comparera à ceux obtenus à l'aide d'une version idéale de la POD. Cette version idéale, correspond au fait que l'on calcule une base de projection par POD (pour chaque pas de fréquence) à partir des

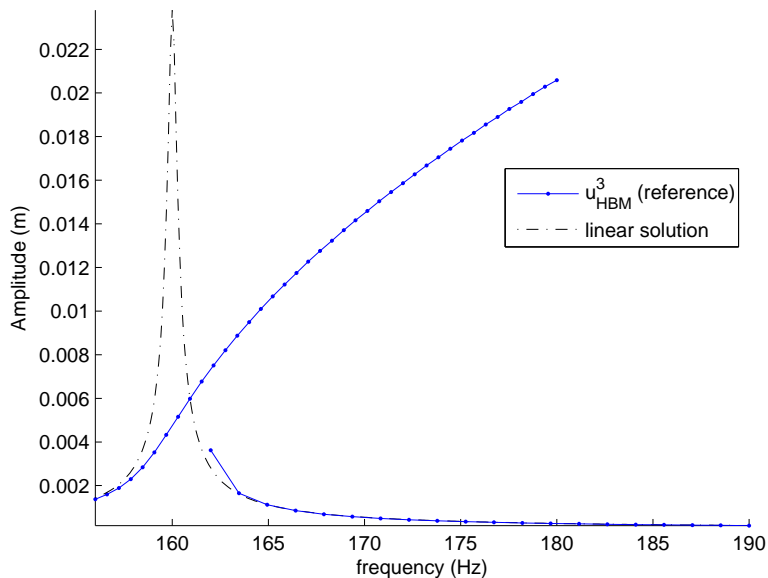


FIGURE 3.1 – Déplacement transverse du centre de la poutre en fonction de la fréquence pour la solution de référence calculée par HBM

résultats de la HBM, puis que l'on utilise ces bases de projection pour recalculer la solution approchée  $\mathbf{x}_{POD}^r$  à partir du modèle réduit ainsi obtenu. Bien évidemment, cette version idéale de la POD n'a pas d'intérêt pratiques si ce n'est de pouvoir comparer les méthodes de réduction de modèle.

Les solutions sont ensuite calculées par les deux méthodes oPGD et pPGD. Au niveau de la oPGD, l'initialisation des fonctions temporelles pour le premier pas de fréquence  $\mathbf{q}_r(t)$  (Algo.2) est réalisée de manière aléatoire. Pour les pas de fréquence suivants, la méthode est initialisée à partir des résultats obtenus au pas de fréquence précédent. Une stratégie similaire est utilisée au niveau de l'initialisation de la méthode pPGD (Algo.3), et on utilise de plus l'étape d'update à chaque fois qu'un nouveau vecteur a été calculé. Les solutions calculées par oPGD (resp. par pPGD) avec  $r$  modes seront dénotées  $\mathbf{x}_{oPGD}^r$  (resp.  $\mathbf{x}_{pPGD}^r$ ). Dans la mesure où il n'existe pas de théorème pour prouver la convergence du problème de point fixe, des études de convergence en fonction du nombre d'itération de PGD  $k_{max}$  ont été réalisées. Il s'avère que la convergence est atteinte relativement vite et qu'on peut se contenter d'au plus 3 itérations de PGD. Par conséquent, on choisit de fixer  $k_{max} = 3$  dans les algorithmes Algo.2 et Algo.3.

Les solutions sont comparées par rapport à la solution de référence en utilisant l'erreur relative donnée par  $\epsilon_r = \|\mathbf{u}_{ref}(t) - \mathbf{u}(t)\| / \|\mathbf{u}_{ref}\|$ , où  $\|\cdot\|$  correspond à la norme 2. La Fig.3.2 représente cette erreur relative pour les 3 méthodes (oPGD, pPGD, POD) et pour différentes tailles du modèle réduit  $r = \{1, \dots, 4\}$ . On observe sur cette figure que la méthode oPGD donne des solutions très similaires à la POD en termes d'erreur relative, et peut même donner des résultats de qualité supérieure à nombre de mode égaux. Par exemple, une solution obtenue par oPGD pour  $m = 2$  produit une erreur plus faible que la solution obtenue par POD à 2 modes. Nous pensons que ce phénomène est dû au fait que la décomposition oPGD calcule une forme prenant en compte les déplacements axiaux à partir du deuxième mode (alors que les

déplacements axiaux n'apparaissent que dans le 3ème mode de la POD, voir Fig.3.3 et Fig.3.5).

En termes de performance, la résolution du problème spatial de la méthode oPGD correspond à la résolution d'un système algébrique de taille  $n \times r$  par la méthode de Newton. Cette étape est particulièrement longue et les performances de la PGD sont directement liées à l'efficacité de la méthode utilisée pour résoudre le problème spatial. Une manière de rendre la résolution plus rapide serait de rechercher la solution du problème spatial dans un sous-espace engendré par quelques vecteurs propres linéaires comme expliqué dans [94]. Il est également possible d'envisager une linéarisation de la méthode de Newton comme décrit dans [132]. La méthode pPGD est plus performante dans la mesure où la résolution du problème spatial ne nécessite que la résolution d'un système algébrique de taille  $n$ . Cependant les résultats ne sont pas aussi bons que ceux de l'oPGD.

Les méthodes oPGD et pPGD donnent des résultats corrects en termes d'erreur relative par rapport à la solution de référence, et on observe bien une décroissance de l'erreur lorsque l'on ajoute des modes dans la décomposition. Cependant, cette décroissance n'est pas monotone et on peut observer que pour une décomposition à 4 modes, les résultats sont moins bons que pour une décomposition à 3 modes. Cela est dû en partie au fait que pour un nombre de modes trop élevé, les amplitudes de certaines évolutions temporelles sont si faibles qu'elles introduisent des problèmes de singularité dans la résolution du problème spatial.

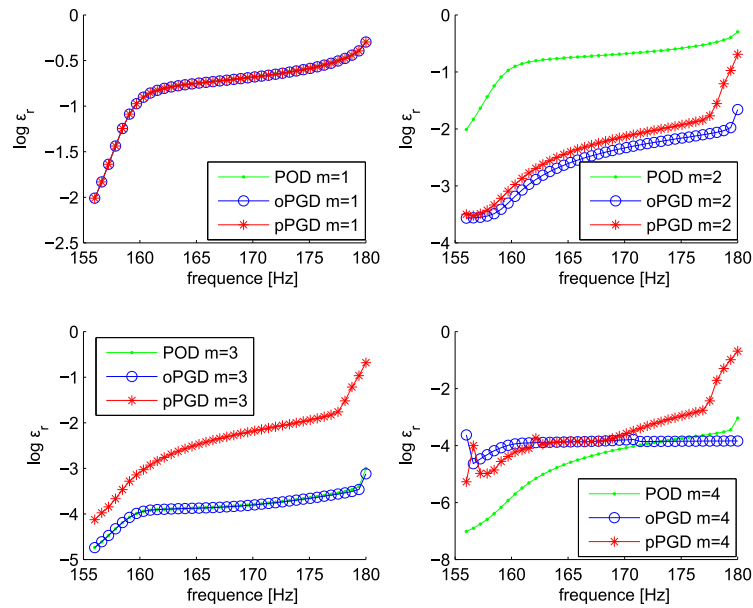


FIGURE 3.2 – Erreur relative  $\epsilon_r$  par rapport à la solution de référence pour les trois méthodes POD, oPGD et pPGD pour  $r = 1, 2, 3, 4$

### 3.1.4.2 Solutions libres

On montre ici que les méthodes de décomposition PGD sont également applicables pour la recherche des solutions libres (modes non-linéaires). On considère encore une fois la poutre présentée à la section 2.1.3, et on se concentre seulement sur le premier mode de vibration (la



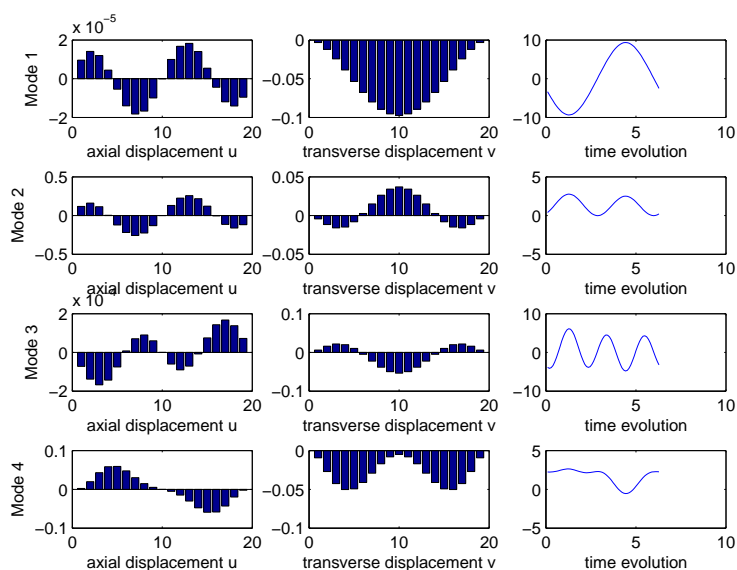


FIGURE 3.3 – Réponse forcée : décomposition calculée par oPGD pour  $m = 4$  en  $\frac{\omega}{2\pi} = 180$  Hz (les formes ont été normées pour les comparer)

procédure peut être appliquée de manière similaire pour n'importe quel mode). Une solution de référence est calculée par HBM avec  $H = 3$  harmoniques, et une version idéale de la POD est appliquée pour obtenir un modèle réduit à  $r$  variables. On calcule ensuite les solutions libres en utilisant la méthode oPGD. Dans un premier temps, on utilise les résultats d'une analyse modale linéaire pour initialiser les composantes de la PGD, puis on contrôle l'amplitude de l'évolution temporelle associée au premier mode de PGD pour éviter d'obtenir la solution nulle.

La Fig.3.6 représente la backbone curve du premier mode, obtenue par les 3 différentes méthodes (HBM, POD, oPGD), et la Fig.3.7 compare les erreurs relatives par rapport à la solution de référence. Encore une fois, les résultats de la méthode oPGD sont très proches des résultats de la POD en termes d'erreur relative, et pour  $r = 2$ , la solution obtenue par oPGD donne une erreur plus faible que la solution obtenue par POD.

### 3.1.5 Conclusions

Les méthodes de décomposition PGD ont été appliquées pour la recherche de solutions périodiques de problèmes de vibration non-linéaires. L'utilisation de la HBM permet de résoudre facilement les problèmes temporels et permet une évaluation rapide des différentes intégrales dans le domaine fréquentiel. La méthode oPGD permet de trouver des formes modales adaptées au problème et donne clairement les meilleurs résultats. En revanche, l'application de cette méthode est relativement lourde, en particulier à cause de la taille du problème spatial. Dans certains cas, il est moins coûteux d'appliquer la HBM directement sur le problème complet (en particulier dans le cas où le nombre de modes est supérieur au nombre de variables harmoniques  $r \geq 2H + 1$ ). La méthode de progressive PGD peut être une alternative à ces problèmes de coût numérique. Cependant, les résultats obtenus sont de moins bonne qualité, et il est fortement conseillé d'utiliser l'étape de mise à jour des fonctions temporelles, à chaque fois qu'un nouveau

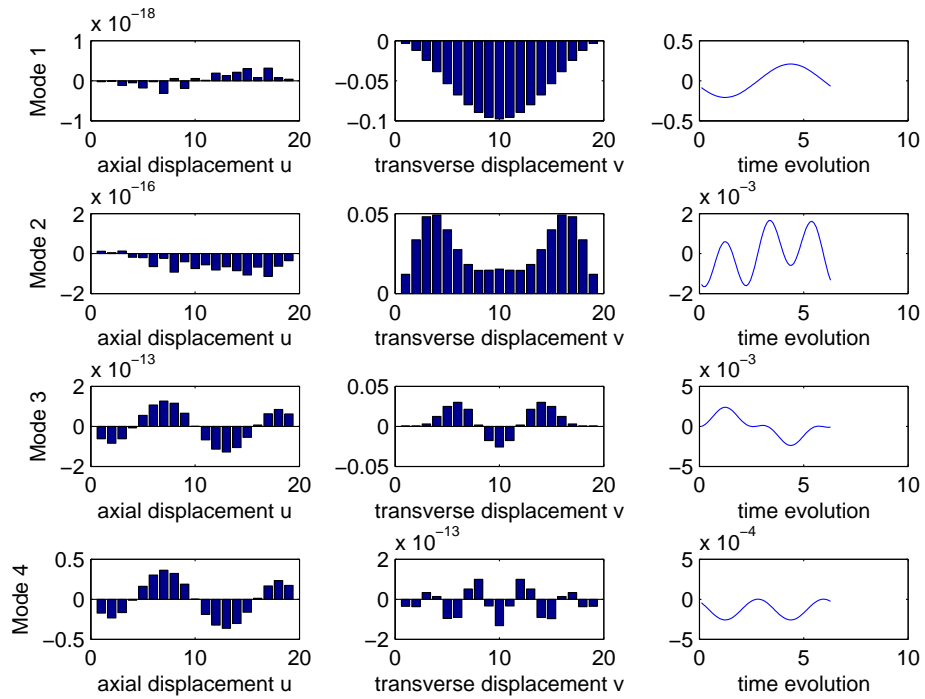
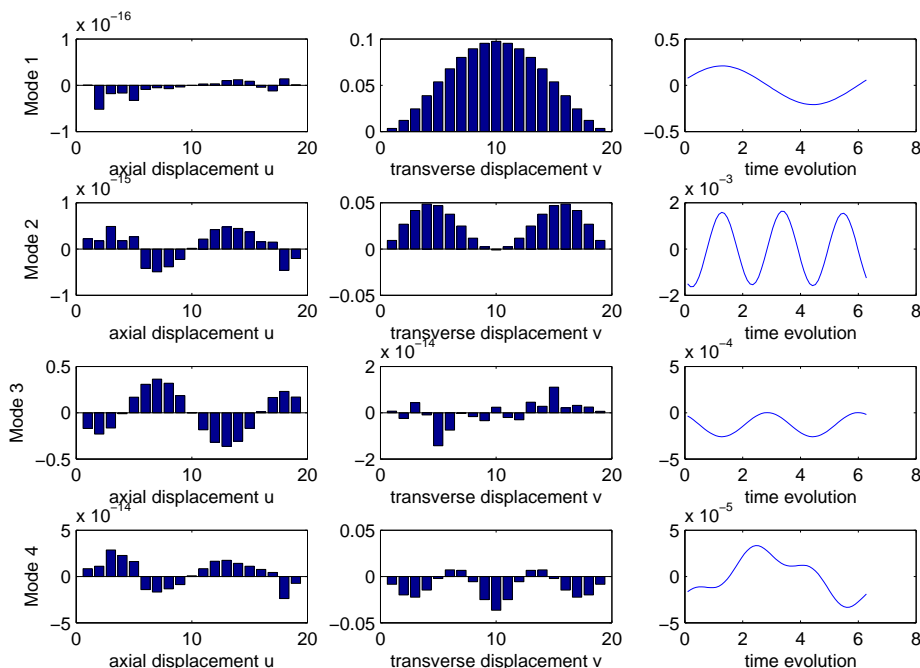


FIGURE 3.4 – Réponse forcée : décomposition calculée par pPGD pour  $r = 4$  en  $\frac{\omega}{2\pi} = 180$  Hz

mode a été calculé, pour améliorer l'approximation. Malgré leurs inconvénients, les méthodes de PGD sont à même de calculer des bases de réduction de faible dimension adaptées aux problèmes non-linéaires. Ces bases sont en un certain sens optimales puisqu'elles engendrent des erreurs du même ordre de grandeur que l'erreur générée par une réduction POD.


 FIGURE 3.5 – Réponse forcée : décomposition calculée par POD pour  $r = 4$  en  $\frac{\omega}{2\pi} = 180$  Hz

## 3.2 Réduction du système d'équation de la HBM par sélection d'harmonique

On suppose ici que la résolution des équations différentielles (2.1) a été transformée en la résolution d'un système d'équations algébriques. En particulier, on considère que l'on recherche les solutions par la méthode de la balance harmonique. On rappelle que les coefficients de la série de Fourier tronquée sont solutions du système algébrique suivant (voir Chapitre 1, section 1.2.2.2) :

$$\Lambda \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

On présente ici les méthodes de sélection d'harmonique pour la recherche de solutions périodiques par HBM. Ces méthodes de sélection sont aussi appelées méthodes de balance harmonique adaptatives (Adaptive HBM, AHBM). Après avoir rappelé les principales méthodes existantes, on développe une méthode de sélection basée sur l'utilisation de prédicteurs tangents. Ces développements ont fait l'objet d'une publication dans le journal MSSP [133], et ont été présentés à la conférence ENOC 2011 [134].

### 3.2.1 Etat de l'art sur les méthodes de sélection d'harmonique

#### 3.2.1.1 Méthodes globales

Les méthodes de sélection d'harmonique dites globales, consistent à définir un nombre d'harmoniques unique pour tous les ddl et à faire varier ce nombre d'harmoniques en fonction du paramètre de continuation (le plus souvent la fréquence, parfois l'amplitude du mouvement).

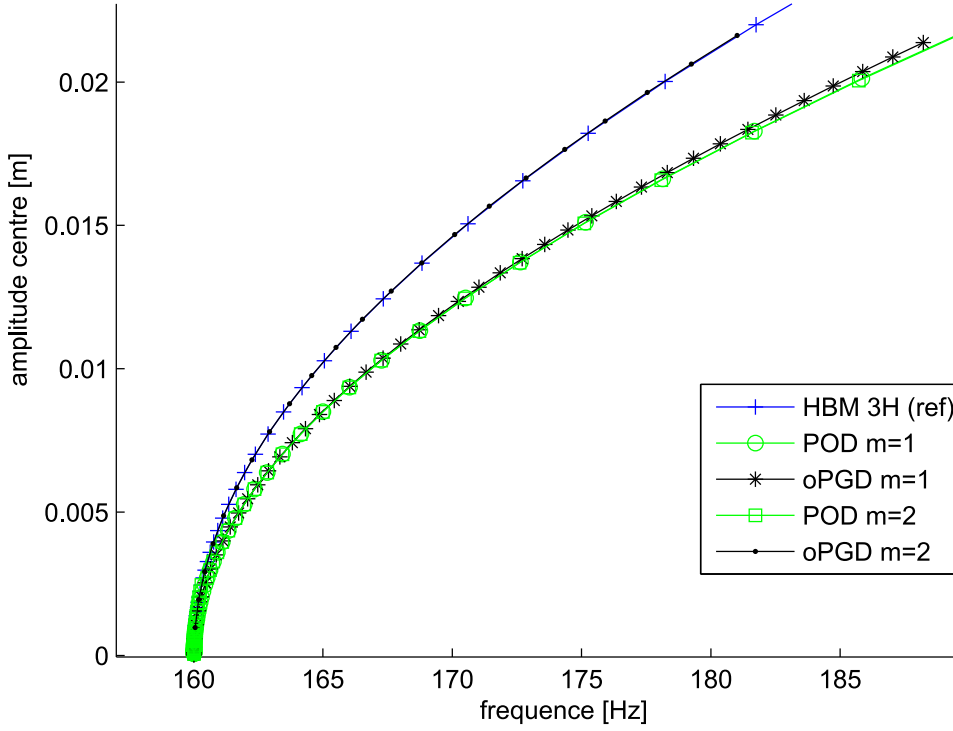


FIGURE 3.6 – Backbone curve du premier mode non-linéaire calculée par HBM, POD et oPGD

L'augmentation ou la diminution du nombre d'harmoniques est souvent basée sur un processus itératif et sur l'évaluation de critères permettant de quantifier l'importance des non-linéarités.

Dans la littérature, on trouve deux critères différents. Le premier proposé par D. Laxalde dans [11] consiste à évaluer l'erreur de Fourier entre les forces non-linéaires dans le domaine temporel et la reconstruction des forces non-linéaires à partir des coefficients de Fourier. Cette erreur s'exprime de la manière suivante :

$$\epsilon(H) = \int_0^T \left( \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \sum_{k=0}^H \mathbf{F}_k^c \cos(k\omega t) + \mathbf{F}_k^s \sin(k\omega t) \right) dt \quad (3.27)$$

Au cours d'un calcul par continuation, si cette erreur est supérieure à un seuil fixé par l'utilisateur, on fait alors le choix d'augmenter le nombre d'harmoniques. De même si cette erreur est inférieure à un seuil donné, on fait le choix de diminuer le nombre d'harmoniques.

Le second critère a été proposé par V. Jaumouillé dans [31]. Il est basé sur le calcul de la variation relative de l'énergie de déformation en fonction du nombre d'harmoniques retenus. On calcule une solution avec un nombre d'harmoniques  $H$  puis on évalue l'énergie de déformation associée. On réitère ensuite ce calcul avec un nombre d'harmoniques  $H + 1$  (ou  $H - 1$  dans le cas où on veut diminuer le nombre d'harmoniques), puis on évalue la différence relative entre les énergies de déformations de la manière suivante :

$$\epsilon(H) = \left| \frac{S(H+1) - S(H)}{S(H)} \right| \quad (3.28)$$

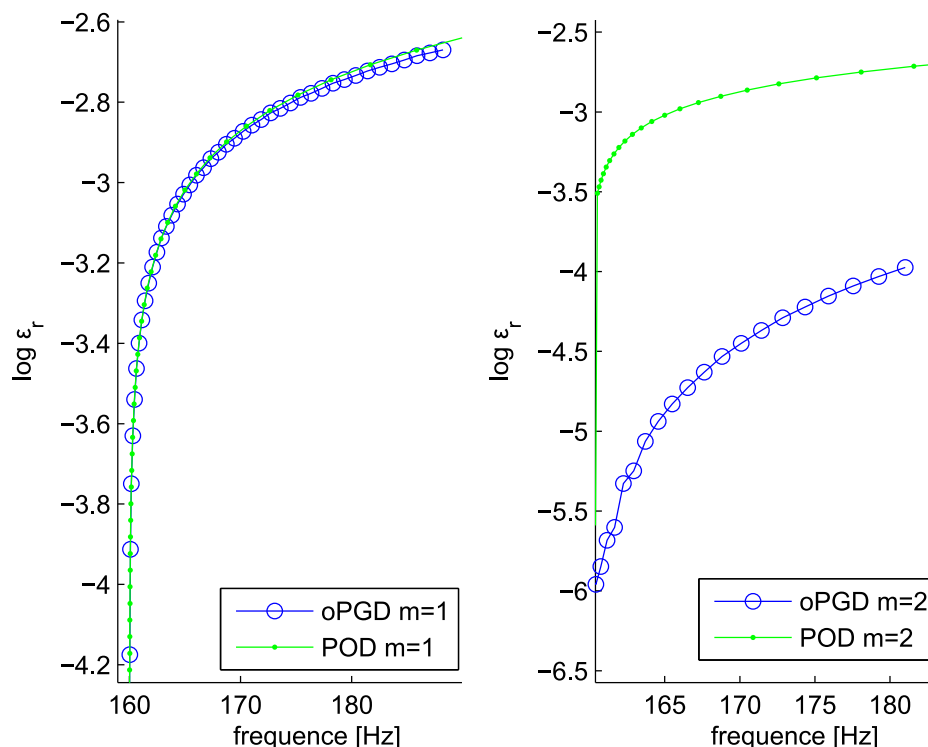


FIGURE 3.7 – Erreur relative  $\epsilon_r$  par rapport à la solution de référence pour les deux méthodes POD et oPGD pour  $r = 1, 2$  (MNL computation)

où  $S$  représente l'énergie de déformation du système. Le nombre d'harmoniques retenus est défini lorsque la variation relative est inférieure à un seuil donné par l'utilisateur.

Ici, le nombre d'harmoniques est le même pour tous les degrés de liberté. Or, pour les systèmes dynamiques non-linéaires, il est clair que tous les ddl ne sont pas affectés de manière identique par la non-linéarité.

### 3.2.1.2 Méthodes locales

Les méthodes locales de sélection d'harmonique consistent à définir un nombre d'harmoniques différent pour chaque ddl et à faire évoluer ces nombres en fonction du paramètre de continuation.

Une première méthode de sélection locale a été définie par R.C. Mapple dans [135, 136]. Après avoir calculé une solution du système d'équations algébriques (3.26) pour un nombre d'harmonique  $H$ , on évalue pour chaque ddl  $d$  la densité spectrale contenue dans la dernière harmonique (la numéro  $H$ ) :

$$\epsilon(H, d) = \frac{(u_H^{c,d})^2 + (u_H^{s,d})^2}{(u_0^d)^2 + \sum_{k=1}^H (u_k^{c,d})^2 + (u_k^{s,d})^2} \quad (3.29)$$

Si cette densité spectrale est trop grande, alors on décide d'ajouter des harmoniques, si elle est trop faible on décide de réduire le nombre d'harmoniques.

### 3.2.1.3 Limitations

Les méthodes présentées précédemment sont relativement aisées à mettre en œuvre et permettent de définir un nombre d'harmoniques variable en fonction de la fréquence. Cependant, elles ont deux inconvénients majeurs. Premièrement, ces méthodes procèdent de manière itérative. En effet, pour chaque incrément dans le nombre d'harmoniques, on doit recalculer une solution complète du système non-linéaire dans le but d'évaluer les différences relatives du critère de sélection (erreur de Fourier, énergie de déformation, fraction d'énergie contenue dans la dernière harmonique, ...). Cette procédure itérative permet de contrôler précisément l'erreur commise, mais elle peut aussi s'avérer consommatrice en temps de calcul. De plus, l'incrément sur le nombre d'harmoniques est défini a priori par l'utilisateur (en général  $\Delta H = 1$  ou  $2$ ). Il peut arriver que cet incrément soit trop petit pour les systèmes fortement non-linéaires, ce qui entraîne une augmentation du nombre d'itérations pour obtenir la stationnarité du critère de sélection, et par conséquent une augmentation du temps de calcul.

Une autre limitation de ces méthodes itératives est liée au fait qu'elles peuvent s'arrêter prématurément : lors du calcul du critère de sélection, certains harmoniques peuvent avoir une participation nulle dans le critère, amenant de fait à une stationnarité artificielle du critère de sélection. Typiquement on observe ces phénomènes par exemple pour des non-linéarités impaires. Dans ce cas, seules les harmoniques impaires ont une participation non nulle dans le critère, et l'ajout de l'harmonique  $H + 1$  (qui est paire) n'induit pas de changement dans le critère de sélection, amenant à une fin prématurée de l'algorithme de sélection.

Pour éviter ces deux inconvénients majeurs, on propose une méthode de sélection d'harmonique locale, basée sur l'utilisation de prédicteurs tangents.

### 3.2.2 Méthode de sélection par prédiction tangente

On développe ici une méthode de sélection d'harmonique originale basée sur l'utilisation de prédicteurs tangents. Contrairement aux méthodes exposées précédemment, il ne s'agit pas d'ajouter ou de retirer des harmoniques, mais de définir un nombre maximum d'harmoniques autorisé  $H_{max}$  (supposé grand) et de rechercher lesquelles de ces harmoniques sont les plus indispensables au calcul de la solution. Les solutions de l'équation (2.1) seront alors recherchées sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \sum_{k=1}^{H_{max}} \tilde{\mathbf{x}}_k^c \cos(k\omega t) + \tilde{\mathbf{x}}_k^s \sin(k\omega t) \quad (3.30)$$

La méthode proposée ici consiste à sélectionner les composantes de  $\tilde{\mathbf{x}}$  qui ont la plus grande participation dans la solution. Etant donné que la solution  $\tilde{\mathbf{x}}$  n'est pas connue a priori, on va se baser sur une approximation de la solution, donnée par une prédiction tangente. On fait donc l'hypothèse que la prédiction a un contenu fréquentiel proche de celui de la solution réelle. En notant  $\tilde{\mathbf{x}}^i$  une solution pour le pas de fréquence  $i$ , on rappelle que l'expression de la prédiction  $\tilde{\mathbf{x}}_{pred}^{i+1}$  pour le pas de fréquence suivant est donnée par  $\tilde{\mathbf{x}}_{pred}^{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}^i + \Delta\tilde{\mathbf{x}}$  avec  $\Delta\tilde{\mathbf{x}}$  solution du système linéaire suivant :

$$\left[ \mathbf{\Lambda} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}_i) \right] \Delta\tilde{\mathbf{x}} = - \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \omega}(\omega_i) \tilde{\mathbf{x}}_i \Delta\omega \quad (3.31)$$

Dans la suite, on considérera que le système linéaire (3.31) définissant la prédiction est toujours de taille maximale  $\tilde{n} = n(2H_{max} + 1)$ .

### 3.2.2.1 Application à un ddl particulier

Etant donné que la méthode proposée est de nature locale (nombre d'harmoniques différent pour chaque ddl), on se limite simplement à un ddl particulier  $\mathbf{x}_d(t)$ . En utilisant l'approximation de l'équation (3.30), on peut développer  $\mathbf{x}_d(t)$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_d(t) = \tilde{\mathbf{x}}_{d,0} + \sum_{k=1}^{H_{max}} \tilde{\mathbf{x}}_{d,k}^c \cos(k\omega t) + \tilde{\mathbf{x}}_{d,k}^s \sin(k\omega t) = \mathbf{D}(t)\tilde{\mathbf{x}}_d \quad (3.32)$$

où les coefficients  $\tilde{\mathbf{x}}_{d,k}^c$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{d,k}^s$  sont désormais des quantités scalaires, que l'on peut regrouper dans un vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}_d$  de taille  $2H_{max} + 1$ .

Pour initier la méthode de sélection, on suppose que l'on a déjà calculé une solution  $\tilde{\mathbf{x}}^i$  pour le premier pas de fréquence ( $i = 1$ ). Cette solution peut être, par exemple, calculée avec un nombre d'harmoniques maximum  $H_{max}$  pour tous les ddl, mais on peut aussi envisager de la calculer avec seulement un sous-ensemble des harmoniques disponibles. Dans la suite, on notera  $\mathcal{S}_d^i$  l'ensemble des harmoniques utilisés pour le calcul du ddl  $d$  au pas de fréquence  $i$ , et on distinguera le vecteur des harmoniques réduit  $\tilde{\mathbf{x}}_{d,red}$  (de taille  $H_d^r$ ) du vecteur des harmoniques complet  $\tilde{\mathbf{x}}_d$  (de taille  $2H_{max} + 1$ ). En utilisant l'ensemble des harmoniques retenus  $\mathcal{S}_d^i$ , on peut définir une matrice booléenne  $\mathbf{P}_d^i$  de taille  $(2H_{max} + 1) \times H_d^r$  liant les vecteurs réduits aux vecteurs complets par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{d,red} = (\mathbf{P}_d^i)^T \tilde{\mathbf{x}}_d \quad (3.33)$$

En d'autres termes, le vecteur d'harmoniques réduit  $\tilde{\mathbf{x}}_{d,red}$  est défini à partir du vecteur global  $\tilde{\mathbf{x}}_d$  en supprimant les variables liées aux harmoniques qui n'ont pas été retenus. Réciproquement, on peut définir le vecteur d'harmonique complet en fonction du vecteur d'harmonique réduit par la relation :

$$\tilde{\mathbf{x}}_d = \mathbf{P}_d^i \tilde{\mathbf{x}}_{d,red} \quad (3.34)$$

Cela revient à considérer que les harmoniques qui n'ont pas été retenus ont des coefficients nuls dans le vecteur complet  $\tilde{\mathbf{x}}_d$ . Dans la suite des harmoniques sélectionnés pour le calcul du ddl  $d$  au pas de fréquence  $i$  seront représentés par  $\mathcal{S}_d^i$  et les variables correspondantes seront représentées par  $\mathbf{P}_d^i$ .

Dans un premier temps, on effectue une prédiction tangente pour la solution au pas de fréquence suivant ( $i + 1$ ) en utilisant le système de taille maximum (3.31). On obtient alors un vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}_{pred}^{i+1}$  de taille maximal  $n(2H_{max} + 1)$  que l'on peut séparer en  $n$  vecteurs de taille  $2H_{max} + 1$  correspondant chacun à un ddl. On notera  $\tilde{\mathbf{x}}_{d,pred}$  le vecteur prédit associé au ddl  $d$ . La sélection des harmoniques repose alors sur l'évaluation de la fraction d'énergie spectrale contenue dans chacun des harmoniques du vecteur prédit. Plus précisément, pour chaque harmonique  $k$  ( $1 \leq k \leq H_{max}$ ), on évalue la densité spectrale  $\rho_k^d$  contenue dans l'harmonique  $k$  du ddl  $d$  :

$$\rho_k^d = \frac{(\tilde{\mathbf{x}}_{d,pred}^{k,c})^2 + (\tilde{\mathbf{x}}_{d,pred}^{k,s})^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{d,pred}\|^2} \quad (3.35)$$

et on sélectionnera les harmoniques ayant les plus fortes contributions (par ordre décroissant) dans l'énergie totale, jusqu'à ce que l'énergie contenue dans les harmoniques restants soit négligeable. Pour éviter d'appliquer cette procédure pour tous les harmoniques à chaque fois, on peut déjà évaluer l'énergie contenue dans les harmoniques qui ont été sélectionnés au pas de fréquence précédent (ie définie par  $\mathcal{S}_d^i$ ), et on ajoutera ou on retirera des harmoniques en fonction de la

valeur de l'énergie résiduelle  $\epsilon_d^i$  définie par :

$$\epsilon_d^i = 1 - \sum_{k \in \mathcal{S}_d^i} \rho_k^d \quad (3.36)$$

Il peut alors se présenter 3 cas, en fonction de la valeur de  $\epsilon_d^i$ , par rapport à des seuils  $\epsilon_f$  et  $\epsilon_b$  ( $\epsilon_b \leq \epsilon_f$ ) définis par l'utilisateur.

**Cas 1 :**  $\epsilon_d^i \geq \epsilon_f$

Dans ce cas, la valeur de l'énergie résiduelle  $\epsilon_d^i$  est encore trop grande pour être acceptable, et on doit inclure de nouveaux harmoniques. Pour chaque harmonique n'appartenant pas à  $\mathcal{S}_d^i$ , on calcule et on ordonne les fractions d'énergie  $\rho_d^k$  (équation (3.35)) par ordre décroissant. Les harmoniques générant les plus grandes valeurs de  $\rho_d^k$  sont alors ajoutés à l'ensemble  $\mathcal{S}_d^i$  jusqu'à ce que l'on obtienne  $\epsilon_d^i \leq \epsilon_f$ , ce qui permet de définir le nouvel ensemble d'harmonique  $\mathcal{S}_d^{i+1}$  (et par conséquent le nouvel ensemble de variable  $\mathbf{P}_d^{i+1}$ ) pour le pas de fréquence suivant.

**Cas 2 :**  $\epsilon_d^i \leq \epsilon_b$

Dans ce cas, la valeur de l'énergie résiduelle  $\epsilon_d^i$  est très faible, et on peut supposer qu'il est alors possible de retirer des variables sans induire trop d'erreur dans la solution finale. Pour chaque harmonique appartenant à  $\mathcal{S}_d^i$ , on calcule et on ordonne les fractions d'énergie  $\rho_d^k$  (équation (3.35)) par ordre croissant. Les harmoniques générant les plus petites valeurs de  $\rho_d^k$  sont alors retirés de l'ensemble  $\mathcal{S}_d^i$  jusqu'à ce que l'on obtienne  $\epsilon_b \leq \epsilon_d^i \leq \epsilon_f$ , ce qui permet de définir le nouvel ensemble d'harmoniques  $\mathcal{S}_d^{i+1}$  (et par conséquent le nouvel ensemble de variables  $\mathbf{P}_d^{i+1}$ ) pour le pas de fréquence suivant.

**Cas 3 :**  $\epsilon_b \leq \epsilon_d^i \leq \epsilon_f$

Dans ce cas, on suppose que la valeur de l'énergie résiduelle  $\epsilon_d^i$  est acceptable, et on mènera donc le calcul au pas de fréquence suivant en considérant que  $\mathcal{S}_d^{i+1} = \mathcal{S}_d^i$  (ie on garde les mêmes harmoniques qu'au pas précédent).

### 3.2.2.2 Application au système complet

En appliquant la procédure précédente pour chaque ddl  $d = 1..n$ , on obtient une série de matrices  $\mathbf{P}_d^{i+1}$  qui permet de définir les harmoniques qui seront retenus pour chaque ddl lors du pas de fréquence  $i+1$ . En regroupant ces matrices sous la forme d'une matrice booléenne globale  $\mathbf{P}^{i+1}$  de taille  $n(2H_{max}+1) \times \sum_d H_d^r$ , on est en mesure de définir le vecteur d'harmoniques réduit  $\tilde{\mathbf{x}}_{red}$  en fonction du vecteur d'harmoniques global  $\tilde{\mathbf{x}}$  par les relations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{red} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{red} \quad (3.37)$$

En substituant la relation (3.37) dans l'équation (3.26) et en ne gardant que les équations liées aux harmoniques sélectionnés, on définit le système d'équations algébriques réduit suivant :

$$(\mathbf{P}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{x}}_{red} + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{red}) - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{F}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

dont la solution est le vecteur d'harmoniques réduit  $\tilde{\mathbf{x}}_{red}^{i+1}$  pour le pas de fréquence  $i+1$ .



Finalement, cette solution est transformée en un vecteur d'harmoniques de taille maximale, qui est ensuite utilisée pour calculer une prédiction tangente pour le pas de fréquence  $i + 2$ . La méthode de sélection est alors ré-appliquée sur cette nouvelle prédiction et la procédure se poursuit ainsi jusqu'à ce que tout l'intervalle de fréquence ait été parcouru.

### Remarques

Les paramètres les plus importants de la méthode sont les deux seuils  $\epsilon_b$  et  $\epsilon_f$  contrôlant respectivement le retrait ou l'ajout d'harmoniques. Les valeurs de ces seuils doivent être fixées relativement petites. En particulier  $\epsilon_f$  doit être suffisamment petit pour assurer une bonne approximation de la solution, et  $\epsilon_b$  doit être choisi suffisamment petit de manière à ne pas retirer des harmoniques trop importants. Ces valeurs doivent être fixées par l'utilisateur, mais elles ont tout de même un sens physique dans la mesure où elles indiquent le pourcentage d'énergie retenue à partir de la prédiction. On préconise ici d'utiliser les valeurs  $\epsilon_b = 10^{-10}$  et  $\epsilon_f = 10^{-8}$ .

Le fonctionnement de la méthode est assuré par l'utilisation d'un prédicteur tangent de taille maximale, qui permet d'obtenir des informations sur les harmoniques non sélectionnés au travers de la matrice jacobienne du problème. Dans le cas où le pas de continuation serait trop grand, il est possible que la prédiction soit très éloignée de la solution réelle, ce qui affecterait l'efficacité de la méthode de sélection. On peut envisager de contrôler le pas de continuation en fonction du nombre d'itérations nécessaires pour la résolution de l'équation algébrique. Si ce nombre d'itérations est trop grand, on considère que la prédiction n'était pas assez proche de la solution réelle, et on refait une prédiction pour un pas de continuation plus petit.

Le coût principal de la méthode tient au calcul de la matrice jacobienne de l'équation algébrique pour ensuite résoudre le système linéaire (3.31) et obtenir la prédiction. Cependant ce temps est négligeable devant le temps de résolution de l'équation algébrique. De plus, cette étape est nécessaire dans les algorithmes de continuation. L'étape de sélection des harmoniques en elle-même est très rapide puisqu'elle n'est pas incrémentale et qu'elle ne nécessite que l'évaluation des quantités  $\epsilon_d^k$  définies à l'équation (3.36).

### 3.2.3 Exemple d'application sur un système avec non-linéarité géométrique

On propose ici une application de la procédure de sélection d'harmoniques, présentée dans la section précédente, sur l'exemple de la poutre bi-encastree avec non-linéarité géométrique (section 2.1.3). On considère ici que la poutre est discrétisée en  $n_e = 20$  éléments et un premier calcul de référence est réalisé par HBM classique avec  $H = 7$  harmoniques (Fig.3.8).

Un second calcul est réalisé en appliquant la procédure de sélection d'harmoniques. Les paramètres contrôlant l'ajout et le retrait d'harmoniques sont fixés respectivement à  $\rho_f = 10^{-8}$  et  $\rho_b = 10^{-10}$ . Le premier point de calcul est réalisé en retenant tous les harmoniques, puis la procédure de sélection s'applique à partir de la première prédiction. La solution obtenue est comparée à la solution de référence sur la Fig.3.8.

Au niveau de la sélection, la Fig.3.9 représente le nombre de variables algébriques retenues en fonction de l'indice du pas de calcul. Bien que l'on ne retienne au plus que 45 % du nombre de variables de départ, on observe que la solution obtenue reste proche de la solution de référence. Le détail de la sélection des harmoniques en fonction de la fréquence est donné pour les composantes axiales et les composantes transverses sur les Fig.3.10 et 3.11.

Pour les composantes axiales, la méthode de sélection proposée ne retient que les harmoniques pairs, et pour les composantes transversales, elle ne retient que les harmoniques impairs.

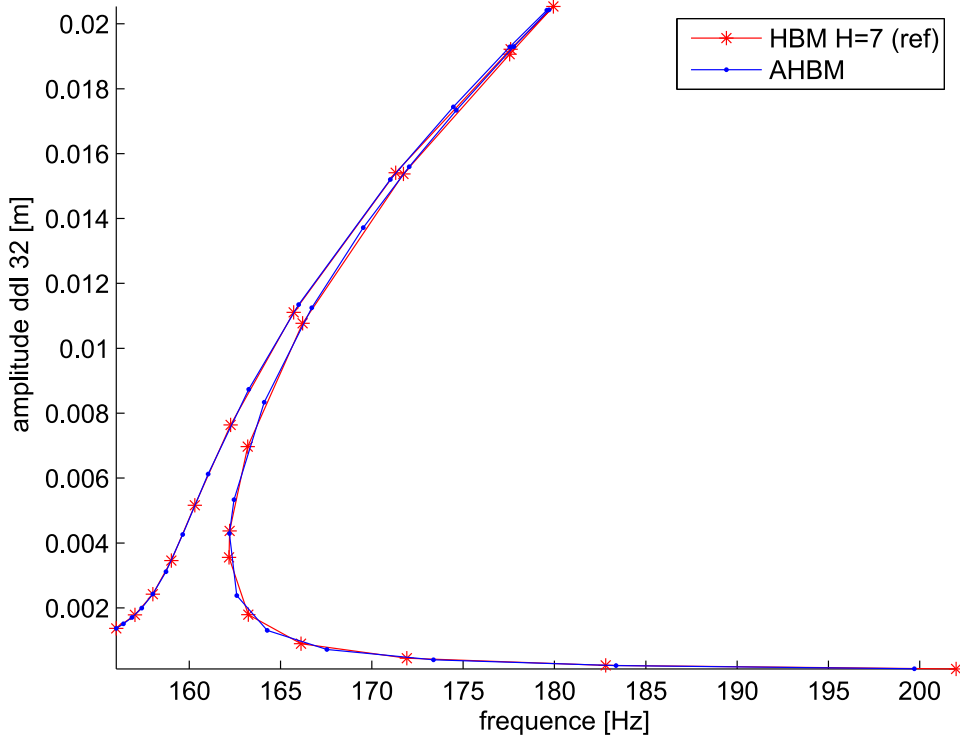


FIGURE 3.8 – Comparaison des FRF entre la solution de référence calculée par HBM à 7 harmoniques \*, et la solution calculée par HBM adaptative · (sélection d'harmonique)

Dans cet exemple, les mouvements transversaux sont impairs et la méthode de sélection détecte automatiquement les harmoniques inutiles (de même pour le mouvement axial qui est pair). De plus, on observe que des harmoniques d'ordre supérieur sont ajoutés lorsque l'on se situe dans la zone de résonance (par exemple l'harmonique 5 pour les déplacements transversaux Fig.3.11). Contrairement à la solution de référence qui est calculée avec 7 harmoniques, la solutions obtenue par sélection ne considère jamais la 7ème harmonique (sa fraction d'énergie est inférieur à  $\rho_f$ ). La méthode proposée ici permet d'adapter le nombre d'harmoniques en fonction de la fréquence, mais également en fonction des degrés de libertés, ce qui permet dans ce cas de diviser au moins par deux le nombre de variables considérées, tout en gardant une solution de qualité acceptable .

### 3.2.4 Exemple d'application sur un système avec frottement

On propose ici une application de la procédure de sélection d'harmoniques basée sur une prédiction tangente. On considère ici un système discret composé de  $n = 25$  masses ponctuelles reliées entre elles par des raideurs linéaires, et soumises à une loi de frottement régularisée. (Fig.3.12).

L'équation du mouvement pour un tel système peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{fr}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_{ex} \quad (3.39)$$

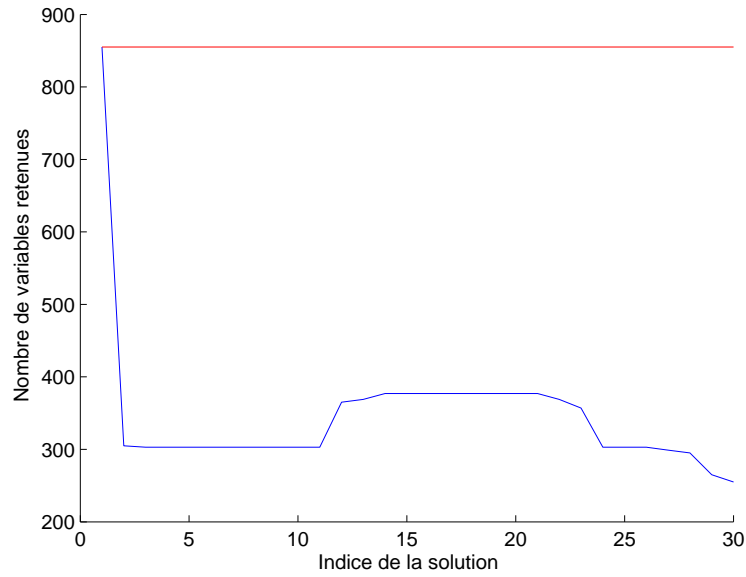


FIGURE 3.9 – Evolution du nombre de variables algébriques en fonction de la fréquence lors de l'application de la procédure de sélection d'harmonique, le trait horizontal représente le nombre de variable total dans une résolution par HBM classique)

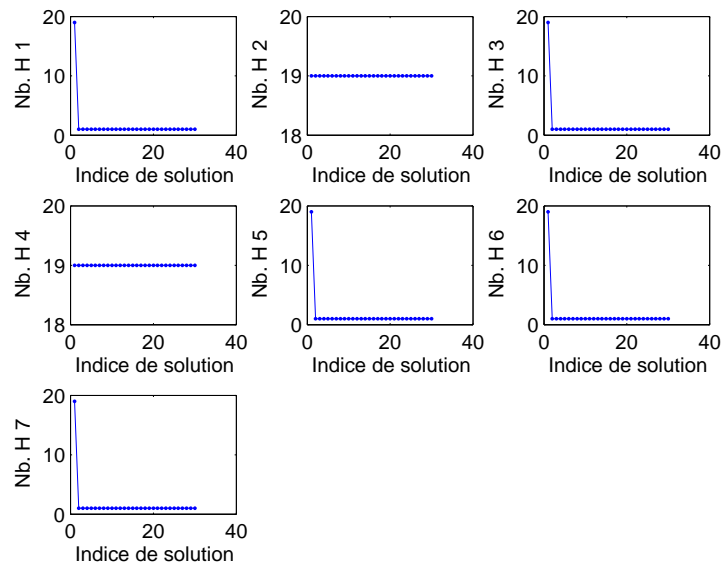


FIGURE 3.10 – Répartition des harmoniques sélectionnés pour les ddl axiaux en fonction de la fréquence

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  les matrices de masse, d'amortissement et de raideur définies par :

$$\mathbf{M} = m\mathbf{I}_n, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c & 2c & -c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c & 2c & -c & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c & 2c & -c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c & c \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

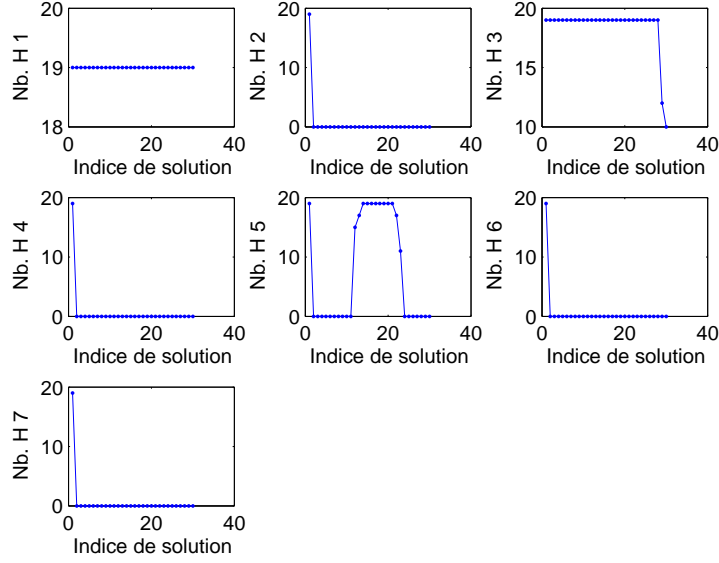


FIGURE 3.11 – Répartition des harmoniques sélectionnés pour les ddl transverses en fonction de la fréquence

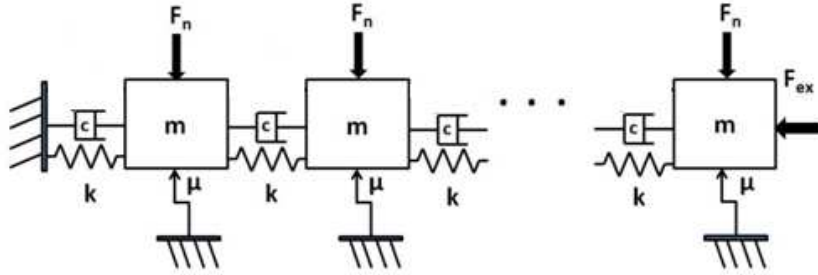


FIGURE 3.12 – Système frottant discret utilisé pour illustrer la méthode de sélection d'harmonique

où  $k = m = c = 1$ .

$\mathbf{F}_{fr}$  représente les efforts non-linéaires dus aux éléments de friction. Ici, on considère que seulement les 15 premiers ddl sont soumis à une loi de frottement régularisé sous la forme suivante [137] :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{fr})_i &= \mu F_n \tanh(\alpha \dot{\mathbf{x}}_i) \text{ si } 1 \leq i \leq 15 \\ (\mathbf{F}_{fr})_i &= 0 \text{ si } 16 \leq i \leq 25 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dans la suite, on supposera que seulement les 15 premiers ddl sont frottants, et on considérera les valeurs numériques suivantes :

$$\mu = 0.3, F_n = 1, \alpha = 100 \quad (3.42)$$

Enfin,  $\mathbf{F}_{ex}$  représente les forces d'excitations imposées. Dans cet exemple, on considérera que le système est simplement excité au niveau du dernier ddl par une force périodique représentée

par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{ex})_i &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ (\mathbf{F}_{ex})_n &= A \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dans un premier temps, on fixe l'amplitude de la force d'excitation (Eq.(3.43)) à  $A = 0.1$ . Un premier calcul par HBM classique avec  $H = 40$  harmoniques est réalisé pour obtenir la courbe de résonance autour du premier mode du système (solution de référence). Un second calcul est ensuite réalisé en appliquant la procédure de sélection d'harmonique présentée à la section précédente. Le nombre maximum d'harmoniques est fixé à  $H_{max} = 40$  et les paramètres contrôlant l'ajout et le retrait d'harmoniques sont fixés à  $\epsilon_f = 10^{-8}$  et  $\epsilon_b = 10^{-10}$ . Pour le premier pas de fréquence, tous les harmoniques sont considérés, puis on applique la procédure de sélection pour les pas suivants. Pour chacune des solutions (HBM et AHBM), on a représenté sur la Fig.3.14 l'amplitude du dernier ddl en fonction de la fréquence. Pour la solution obtenue par AHBM, la procédure de sélection est illustrée par une série de matrices de taille  $n \times (2H_{max} + 1)$  qui représente les variables sélectionnées (présence d'un point en position  $i, k$ , si l'harmonique  $k$  a été retenu pour le ddl  $i$ ). A la première itération, tous les harmoniques de tous les ddl sont sélectionnés (matrice pleine). Pour les itérations suivantes, on observe que tous les harmoniques de rang pair ont été supprimés par la procédure de sélection (non-linéarité impaire), et que le nombre d'harmoniques sélectionnés varie bien en fonction des degrés de liberté et de la fréquence. La Fig.3.13 montre l'évolution du nombre de variables sélectionnées en fonction de la fréquence, la méthode de sélection permet ici de réduire au minimum par 5 le nombre de variables par rapport à un calcul HBM à nombre d'harmonique fixe, ce qui se traduit par un gain de temps global d'environ 70% (la AHBM est environ 3 fois plus rapide que la HBM dans ce cas). En étudiant le détail de temps de calcul (Fig.3.13b), on constate que la méthode de sélection s'applique très rapidement, et que la diminution du nombre de variables permet de faire chuter significativement le temps de résolution de l'équation algébrique.

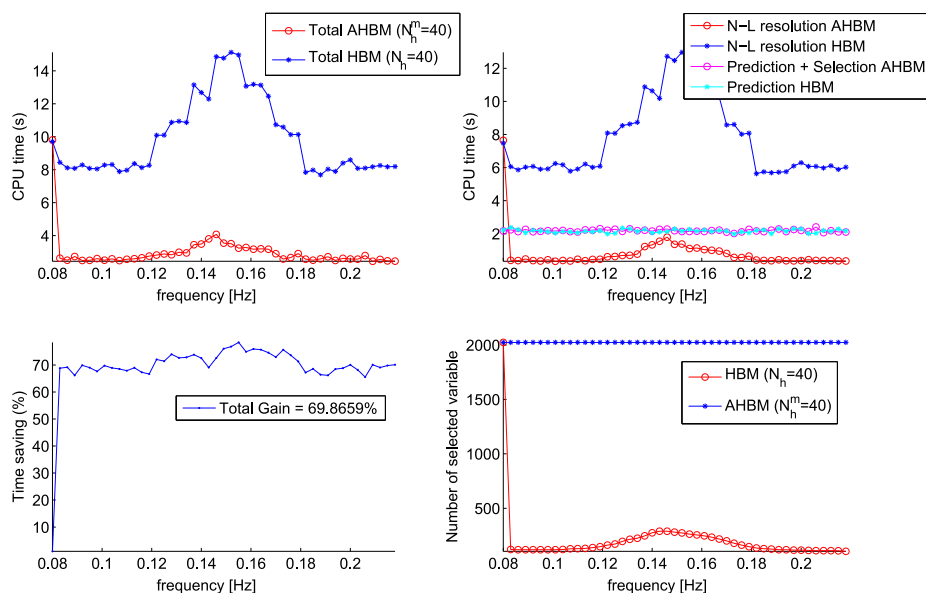


FIGURE 3.13 – Comparaison des temps de résolution pour la HBM (\*) et la AHBM (o). De gauche a droite : a) temps de résolution total ; b) temps de résolution détaillé ; c) gain de temps ; d) nombre de variables sélectionnées

Au niveau de l'erreur relative par rapport à la solution de référence, on observe sur la Fig.3.15 que celle-ci est au maximum inférieure à  $2 \cdot 10^{-9}$  et on peut donc conclure que la méthode de sélection ne dégrade pas significativement les solutions.

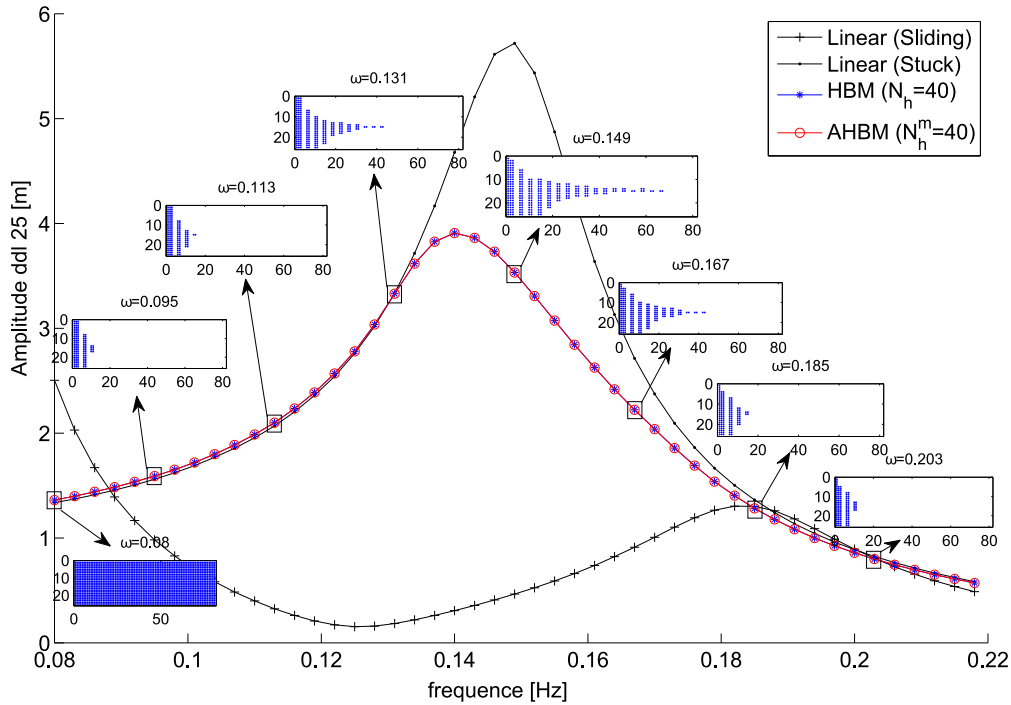


FIGURE 3.14 – Comparaison entre HBM et AHBM : évolution de l'amplitude du ddl n 25 en fonction de la fréquence ( $H_{max} = 40$ )

### 3.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté et appliqué des méthodes de réduction de modèle originales dans le cadre spécifique des systèmes traités par la méthode de la balance harmonique. Dans un premier temps, on considère les méthodes de type PGD. Ces méthodes dites a priori ont la particularité de rechercher les solutions sous forme séparée. Par conséquent, la base de réduction est calculée automatiquement, en même temps que la solution. Lors de la résolution d'un système dépendant d'un paramètre, cette stratégie permet alors d'obtenir une base de réduction variable en fonction de la valeur du paramètre, étant à même de suivre les changements de comportement induits par l'activation des non-linéarités. La méthode est appliquée sur un exemple simple de poutre non-linéaire, et on montre que cette méthode permet de réduire efficacement le modèle, dans la mesure où seulement quelques modes suffisent pour obtenir une très bonne approximation de la solution. Cependant, dans la version proposée, les gains en termes de temps de calcul par rapport à la résolution du modèle complet restent très faibles. Ceci est dû en partie au fait que les méthodes de PGD sont des méthodes invasives et qu'elles nécessitent donc l'évaluation de quantités sur la structure complète, ce qui en limite les performances. Dans une deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement à la réduction du

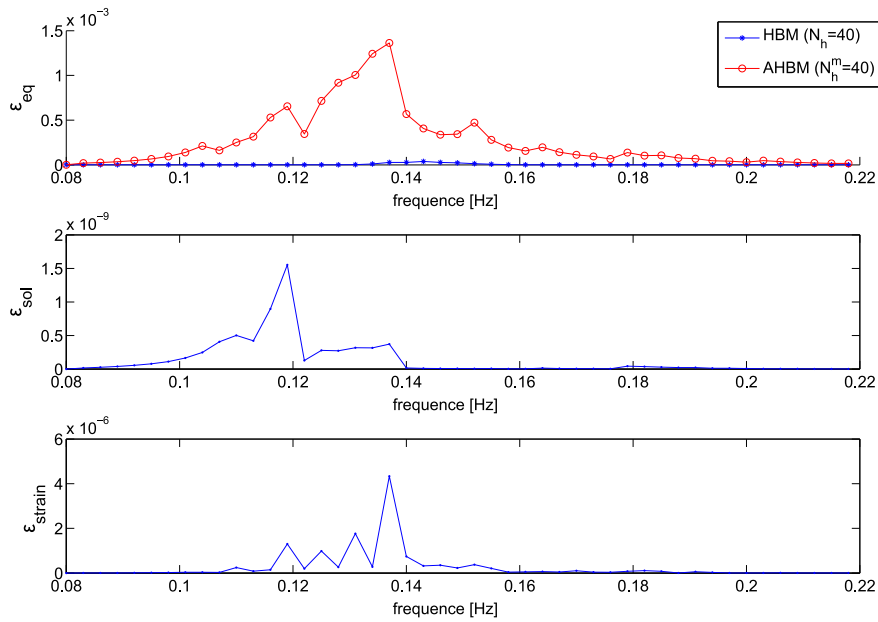


FIGURE 3.15 – Comparaison des différents estimateurs d’erreur entre les solutions calculées par HBM (\*) et par AHBM (o). De haut en bas : a) erreur sur l’équation du mouvement  $\epsilon_{eq}$  ; b) erreur relative entre les solutions  $\epsilon_{sol}$  ; c) erreur relative sur l’énergie de déformation  $\epsilon_{strain}$

système d’équations algébriques issues de la HBM. Il s’agit de réduire le nombre de variables de la HBM en considérant des techniques de sélection d’harmonique. Après avoir dressé un bref état de l’art sur les méthodes de sélection d’harmonique existantes et leurs limitations, on propose ici une méthode de sélection originale utilisant des informations disponibles durant les procédures de continuation. L’application de cette méthode sur des exemples simples montre qu’elle permet d’estimer correctement les harmoniques à sélectionner en fonction de la fréquence d’excitation, mais également en fonction du degré de liberté considéré.

## Chapitre 4

# Méthodes de recherche des solutions multiples pour les systèmes dynamiques non-linéaires

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Systèmes dynamiques non-linéaires et solutions multiples</b>	<b>106</b>
4.1.1	Méthodes dans le domaine temporel	106
4.1.2	HBM et non-linéarité polynomiale	107
4.1.3	Méthode de Newton-Raphson modifiée	108
4.1.4	Exemple d'application	108
<b>4.2</b>	<b>Homotopie</b>	<b>109</b>
4.2.1	Homotopie linéaire	109
4.2.2	Homotopie polyédrale	113
<b>4.3</b>	<b>Résolution des systèmes polynomiaux à l'aide de bases de Gröbner</b>	<b>116</b>
4.3.1	Bases de Gröbner	117
4.3.2	Bases de Gröbner et résolution de systèmes polynomiaux	120
4.3.3	Systèmes polynomiaux et algèbre linéaire	121
4.3.4	Exemples d'application sur un système cyclique	124
4.3.5	Conclusions	127
<b>4.4</b>	<b>Résolution des systèmes à symétrie cyclique : polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini</b>	<b>128</b>
4.4.1	Système invariant	128
4.4.2	Décomposition et invariants polynomiaux	129
4.4.3	Matrice de multiplication des invariants primaires	130
4.4.4	Exemple d'applications sur un système à symétrie cyclique	131
4.4.5	Conclusions	136
<b>4.5</b>	<b>Continuation en amortissement</b>	<b>137</b>
4.5.1	Stratégie proposée	138
4.5.2	Application	140
4.5.3	Conclusions	144
<b>4.6</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>144</b>

---



Ce chapitre présente les méthodes de recherche de solution multiple pour les systèmes dynamiques non-linéaires. Après avoir fait l'hypothèse de non-linéarités polynomiales, la HBM est employée pour obtenir un ensemble d'équations algébriques polynomiales. Différentes méthodes permettant le calcul de toutes les solutions d'un système polynomial à plusieurs variables sont exposées. Dans un premier temps, on rappelle le principe des méthodes d'homotopies, et on les applique sur un exemple simple. La suite de ce chapitre est consacrée à l'utilisation des bases de Gröbner pour la résolution des systèmes polynomiaux. En particulier, on présente une méthode de résolution basée sur le calcul de valeurs propres de matrices spéciales appelées matrices de multiplication. Puis, on propose une extension de ces méthodes, basée sur la théorie des groupes, permettant de réduire la taille des problèmes à résoudre lorsque le système possède certaines symétries. Enfin, on propose une procédure de continuation en amortissement, permettant de retrouver les solutions du système amorti à partir des solutions du système non-amorti.

## 4.1 Systèmes dynamiques non-linéaires et solutions multiples

On considère ici la résolution des  $n$  équations dynamiques non-linéaires régissant le mouvement d'un solide discrétisé par la méthode des éléments finis du type :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (4.1)$$

Ces équations s'accompagnent de plus de conditions initiales du type  $(\mathbf{x}(t=0), \dot{\mathbf{x}}(t=0)) = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ . Dans le cas linéaire, les solutions de ces équations sont composées d'une partie transitoire (solution de l'équation homogène) et d'une partie établie (solution particulière). La partie transitoire décroît avec le temps et le système atteint un régime permanent. Dans le cas non-linéaire, le principe de superposition n'est plus applicable et on ne peut pas utiliser une décomposition similaire des solutions. De plus, il est possible qu'il existe plusieurs régimes permanents pour une même fréquence d'excitation : l'état atteint par le système dépend alors des conditions initiales. En théorie, on peut même imaginer faire changer l'état du système en lui appliquant une perturbation appropriée. Cependant, toutes les solutions ne sont pas stables, et il est nécessaire de coupler la recherche des solutions multiples avec un calcul de stabilité, pour ne retenir que les solutions physiquement réalisables. La recherche de solutions multiples apparaît alors comme un outil pouvant aider à la conception des structures, dans la mesure où elle est susceptible de prédire tout les états possibles pour le système.

On présente ici quelques méthodes de recherche de solutions multiples pour les systèmes dynamiques non-linéaires du type (4.1). Après avoir fait un bref rappel des méthodes dans le domaine temporel, on considère plus particulièrement le cas des systèmes dynamiques avec non-linéarités polynomiales, traités par la méthode de la balance harmonique. L'application de la HBM sur ce type de non-linéarité permet de se ramener à la résolution de systèmes algébriques polynomiaux, pour lesquels il existe de nombreuses méthodes de résolution. Parmi celles-ci, on expose plus particulièrement les méthodes numériques de type homotopie et les méthodes algébriques basées sur l'utilisation des bases de Gröbner.

### 4.1.1 Méthodes dans le domaine temporel

Les méthodes de recherche de solutions multiples dans le domaine temporel, traitent directement les solutions du système (4.1). Une méthode "naïve" de calcul des solutions multiples serait de discrétiser l'espace des conditions initiales, puis de réaliser une intégration temporelle pour chaque condition initiale. L'intégration temporelle doit être menée sur un temps suffisamment

long pour pouvoir observer un régime établi. Bien entendu, cette méthode est inapplicable en pratique, puisque le nombre de conditions initiales à considérer devient rapidement ingérable.

Une manière plus réaliste de calculer des solutions dans le domaine temporel consiste à utiliser la méthode du cell mapping [6, 138]. Celle-ci consiste à discrétiser l'espace des conditions initiales en cellules. On choisit alors une condition initiale pour chaque cellule  $C_i$ , et on effectue une intégration temporelle à partir de ces conditions initiales. L'état final de l'intégration temporelle se trouve alors dans la cellule  $C_j$ . L'application des intégrations temporelles produit alors des paires de cellules  $(C_i, C_j)$  telles qu'une condition initiale prise en  $C_i$  conduit à un état en  $C_j$ . Les solutions multiples peuvent alors être identifiées en analysant les mappings ainsi créés. Plus précisément, on recherchera les chemins fermés de cellules du type  $C_1 - C_2 - \dots - C_N$  avec de plus  $C_1 = C_N$ . La méthode du cell-mapping apparaît comme une méthode attractive, puisqu'en plus des solutions multiples, elle permet d'obtenir d'autres informations telles que la stabilité ou le bassin d'attraction de la solution. Cependant, d'après les résultats exposés dans [6], cette méthode ne semble applicable que pour des très petits systèmes dynamiques (au maximum 5 ddl). Pour cette raison, on préférera utiliser une approche différente couplant la HBM à la résolution complète de systèmes algébriques non-linéaires.

#### 4.1.2 HBM et non-linéarité polynomiale

On applique ici la méthode de la HBM au système (4.1), en supposant que les non-linéarités sont polynomiales. Pour simplifier, on considère de plus que les efforts non-linéaires sont uniquement fonction du déplacement (mais généralement les méthodes s'appliquent également pour des non-linéarités polynomiales mêlant vitesse et déplacement). L'équation (4.1) prend alors la forme particulière suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \sum_{j=2}^d \mathbf{H}_j \mathbf{x}^{(j)}(t) = \mathbf{F}_{ex}(t) \quad (4.2)$$

Avec  $d$  le degré maximum des polynômes,  $\mathbf{x}^{(j)} = \otimes_j \mathbf{x}$  (ie  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ , ...), et  $\mathbf{H}_j$  une matrice de taille  $n \times n^j$  contenant les coefficients des polynômes.

En appliquant la méthode de la HBM au système (4.2), on recherche des solutions sous la forme  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)$  et on se ramène à la résolution de  $\tilde{n} = n(2H+1)$  équations polynomiales du type :

$$\mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{x}} + \sum_{j=2}^d \tilde{\mathbf{H}}_j \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}(t) \quad (4.3)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}^T = [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_H^T, \mathbf{b}_H^T]$ .

Dans le reste de ce chapitre, on se limite à des polynômes de degré 3, permettant de représenter, en particulier, les non-linéarités géométriques. Il est alors pratique de réécrire le système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}$  sous la forme indicielle suivante :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left\{ P_j(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_j} c_j(\alpha) \tilde{\mathbf{x}}^\alpha, j = 1.. \tilde{n} \right\} \quad (4.4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}^\alpha = \tilde{x}_1^{\alpha_1} \times \dots \times \tilde{x}_n^{\alpha_n}$ , les exposants  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{N}^{\tilde{n}}$ , et les coefficients  $c_j(\alpha) \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_j$  est appelé le support du polynôme  $P_j$  et contient tous les exposants  $\alpha$  définissant

$P_j$ . Dans le cas des non-linéarités cubiques, la somme des composantes de chaque exposant  $\alpha$  est inférieure ou égale à 3. Pour alléger les notations, on notera simplement  $\mathbf{x}$  les variables du système polynomial lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

En général, ce système polynomial  $\mathbf{P}$  est résolu par une méthode de Newton, ce qui permet d'obtenir une solution. La solution obtenue dépend de l'itéré initial et, en théorie, il est possible d'obtenir toutes les solutions du système d'équations en sondant correctement l'espace des itérés initiaux. Cependant, plus le nombre de variables est grand, plus le nombre de conditions initiales à tester augmente (évolution exponentielle avec le nombre de variables), et devient infaisable en pratique. De plus, il se peut que certaines racines aient un bassin d'attraction très petit ou très étroit qui peut être impossible à obtenir si la discrétisation numérique de l'espace des conditions initiales est trop grossière. Avant de présenter des méthodes dédiées spécifiquement à la recherche de solutions multiples, on présente dans la suite de cette section une adaptation de la méthode de Newton qui permet en pratique de trouver une partie de l'ensemble des solutions.

### 4.1.3 Méthode de Newton-Raphson modifiée

La méthode présentée ici est issue de [86] et consiste à utiliser la méthode de Newton de manière séquentielle. On suppose que l'on a obtenu une racine  $\mathbf{x}_1$  du système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . On définit alors un nouveau système d'équations (qui n'est plus forcément polynomial) par :

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = \frac{c_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|} \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

et on recherche une solution  $\mathbf{x}_2$  de ce dernier système par la méthode de Newton. Le fait de diviser par  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|$  permet d'introduire une singularité au niveau de la première racine  $\mathbf{x}_1$ , et, a priori, d'éviter de retomber sur la racine déjà calculée.

Plus généralement, pour une suite de racines  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  on définit le système  $\mathbf{P}_n(\mathbf{x})$  par :

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{x}) = \frac{c_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|} \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

et on en recherche une racine  $\mathbf{x}_{n+1}$  par la méthode de Newton.

Plusieurs paramètres influencent la réussite de la méthode. Premièrement, le coefficient  $c_n$  doit être choisi de manière à contrebalancer le poids de la division par le produit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|$ . Plus le nombre de racines calculées est grand, plus le coefficient  $c_n$  doit augmenter de manière à ce que la norme du système  $\mathbf{P}_n(\mathbf{x})$  ne devienne pas trop petite. Deuxièmement, la condition initiale choisie pour résoudre le système doit être éloignée des points de singularité induits par la division. Dans [86], il est proposé de choisir  $\mathbf{x}_{n+1}^0$  à l'extérieur d'une boule de centre  $\mathbf{x}_n$  et de rayon  $r$ , le choix de  $\mathbf{x}_{n+1}^0$  est alors donné par  $\mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n + r\mathbf{T}$  où  $\mathbf{T}$  est une direction de recherche.

Un des avantages de cette méthode est que, si l'implémentation de la méthode de Newton est faite dans l'espace des nombres réels, elle permet alors de n'obtenir que les solutions réelles du système sans se soucier des solutions complexes. Cependant, bien que la mise en place de cette méthode soit très simple, celle-ci ne permet d'obtenir qu'un sous ensemble des solutions, et on ne dispose pas de moyen permettant de vérifier que l'on a bien trouvé toutes les solutions du système.

### 4.1.4 Exemple d'application

Afin d'illustrer les méthodes étudiées dans ce chapitre, on choisit un exemple simple issu de l'application de la HBM à un système mécanique cyclique. Le système correspond à une série

d'oscillateurs de Duffing couplés entre eux linéairement et de manière cyclique, et il est régi par les équations différentielles suivantes :

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (k + 2k_c)u_i - k_c u_{i-1} - k_c u_{i+1} + k_{nl}u_i^3 = f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

avec les conditions de cyclicité  $u_{n+1} = u_1$  et  $u_0 = u_n$ . Après application de la méthode de la balance harmonique et en ne retenant qu'un seul harmonique pour chaque ddl ( $u_i = x_i \cos(\omega t) + y_i \sin(\omega t)$ ), on obtient le système algébrique suivant à  $2n$  équations :

$$\begin{aligned} (2k_c + k - \omega^2 m)x_i + \omega c y_i - k_c x_{i-1} - k_c x_{i+1} + \frac{3}{4}k_{nl}(x_i^3 + x_i y_i^2) - f_i^c &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ (2k_c + k - \omega^2 m)y_i - \omega c x_i - k_c y_{i-1} - k_c y_{i+1} + \frac{3}{4}k_{nl}(x_i^2 y_i + y_i^3) - f_i^s &= 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans le cas non-amorti et pour une excitation uniquement de la forme  $f_i^c \neq 0$ ,  $f_i^s = 0$ , on recherchera les solutions en phase avec l'excitation sous la forme  $u_i = x_i \cos(\omega t)$ , le système (4.8) se simplifie alors en un système algébrique à  $n$  équations données par :

$$(2k_c + k - \omega^2 m)x_i - k_c x_{i-1} - k_c x_{i+1} + \frac{3}{4}k_{nl}x_i^3 - f_i^c = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

Pour alléger les notations, on notera  $\alpha = k + 2k_c - \omega^2 m$ ,  $\beta = k_c$ ,  $\gamma = \frac{3}{4}k_{nl}$  et  $\delta = c\omega$ . Notons que dans le cas dégénéré  $n = 2$ , on prendra seulement  $\alpha = k + k_c - \omega^2$  (une seule raideur de couplage entre les deux ddl) et dans le cas dégénéré  $n = 1$  on aura  $\alpha = k - \omega^2$ . Les valeurs numériques utilisées dans les simulations sont les suivantes :  $k = k_c = k_{nl} = m = 1$ , et  $c = 0.1$ .

## 4.2 Homotopie

L'homotopie est une méthode numérique permettant d'obtenir toutes les solutions d'un système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}$ . La méthode consiste à choisir un polynôme de départ  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  bien choisi et dont on connaît toutes les racines pour ensuite faire évoluer continument  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  vers le polynôme cible  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  en fonction d'un paramètre  $t \in [0, 1]$ . En suivant les chemins initiés à  $t = 0$  par les racines de  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  en utilisant une continuation sur  $t$ , on arrive aux racines de  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  en  $t = 1$ . Le succès d'une telle méthode repose sur 3 propriétés :

- Trivialité : toutes les racines du polynôme de départ doivent être connues ;
- Régularité : l'ensemble des chemins paramétrés par  $t$  et reliant les racines doit être régulier (pas de bifurcations) ;
- Accessibilité : chaque racine de  $\mathbf{P}$  doit être reliée à une racine de  $\mathbf{Q}$ . Il en résulte que les racines de  $\mathbf{P}$  peuvent être obtenues par continuation des racines de  $\mathbf{Q}$ .

### 4.2.1 Homotopie linéaire

L'homotopie linéaire  $\mathbf{H}$  est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}) + t\mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

On remarque que  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{P}(\mathbf{x})$ . La continuation de chaque racine  $\mathbf{x}^*$  de  $\mathbf{Q}$  définit un chemin  $\mathbf{H}^*(\mathbf{x}, t)$  commençant à  $\mathbf{x}^*$  en  $t = 0$  et paramétré par  $t$ . D'après la propriété d'accessibilité, chaque racine de  $\mathbf{P}$  doit être reliée à une racine de  $\mathbf{Q}$ . Par conséquent, le polynôme de départ  $\mathbf{Q}$  doit avoir au moins autant de racines que le polynôme cible  $\mathbf{P}$ . En pratique, il est difficile d'évaluer le nombre de solutions d'un système polynomial a priori, et on choisit généralement un polynôme de départ avec plus de racines que le polynôme cible. De fait,

certains des chemins initiés par les racines de  $Q$  divergent lorsque le paramètre  $t$  s'approche de 1.

On voit ici l'utilité de bien choisir le polynôme de départ. En effet si  $Q$  a plus de racine que  $P$ , il n'y a pas de moyen de savoir au préalable si le chemin va être divergent. Par conséquent, il faut effectuer la continuation pour tous les chemins pour être sûr d'obtenir toutes les racines de  $P$ . Si seulement une petite fraction des chemins n'est pas divergente, cela amène à de nombreux calculs inutiles. Voilà pourquoi il faut rechercher un polynôme de départ avec un nombre de racines le plus petit possible.

Même si on n'est pas en mesure de connaître facilement le nombre de solutions d'un système polynomial, il existe des bornes supérieures sur le nombre de racines d'un tel système. La première borne, bien connue, est appelée borne de Bézout [6] et elle correspond au produit des degrés totaux de chaque équation :  $N_B = \prod_{i=1}^n m_i$ . En pratique, cette borne surestime largement le nombre de solutions et elle conduit à la continuation de nombreux chemins divergents. Lorsque le nombre de variable augmente la borne explose de manière exponentielle : par exemple elle est du type  $N_b = 3^{n_e}$  pour un système de  $n_e$  équations de degré 3.

La seconde borne sur le nombre de racines, est appelée la borne BKK (du nom des auteurs l'ayant proposée). Cette borne correspond au volume mixte de l'enveloppe convexe des polytopes définis par le support (éventuellement augmenté de  $x^0 = 1$ ) de chaque équation. Le calcul de cette borne est relativement complexe [139, 140], et fait intervenir des tirages de variables aléatoire. Les algorithmes déterministes pour calculer une telle borne sont rares [141]. En pratique, cette borne est largement inférieure à la borne de Bézout, et elle augmente plutôt de manière linéaire avec le nombre de variables.

La première borne est en général utilisée dans les méthodes d'homotopie linéaire (par exemple pour un polynôme initial construit à partir de la méthode du degré total), alors que la seconde borne se retrouve dans un autre type d'homotopie, appelée homotopie polyédrale. Dans la suite de cette partie, on présente quelques méthodes de choix du polynôme de départ. On poursuit ensuite en donnant une description rapide de l'homotopie polyédrale.

#### 4.2.1.1 Choix du polynôme de départ

On présente ici quelques-uns des choix possibles pour le polynôme de départ lors du calcul des solutions du système polynomial par une méthode d'homotopie linéaire. On se concentre principalement sur la méthode du degré total.

##### Méthode du degré total

La construction du polynôme de départ par la méthode du degré total est basée sur l'utilisation de la borne de Bézout. En particulier, on construit un polynôme de départ qui a autant de racines que la borne de Bézout, et qui est facilement solvable. Un des choix le plus simples pour le polynôme de départ est du type :

$$\begin{aligned} x_1^{m_1} &= c_1 \\ &\vdots \\ x_n^{m_n} &= c_n \end{aligned} \tag{4.11}$$

où les coefficients  $c_i$  sont des nombres complexes [6]. Ce système polynomial est découplé dans le sens où chaque équation ne dépend que d'une seule variable. Cela permet de trouver facilement

toutes les solutions du système de départ. Plus précisément, les solutions de chaque équation sont des multiples des racines de l'unité et sont données par :

$$x_j^{p_j} = c_j^{\frac{1}{m_j}} \times e^{\frac{2ip_j\pi}{m_j}}, \quad p_j \in [0, m_j - 1], \quad i^2 = -1 \quad (4.12)$$

Finalement, les solutions du système de départ sont les  $n$ -uplets  $(x_1^{p_1}, \dots, x_n^{p_n})$  pour  $(p_1, \dots, p_n) \in [0, m_1 - 1] \times \dots \times [0, m_n - 1]$  ( $N_B$  solutions).

En guise d'illustration, on applique la méthode du degré total sur le système à deux variables suivant issu de l'équation (4.8) pour le cas dégénéré  $n = 1$  (oscillateur de Duffing classique) :

$$\begin{aligned} \alpha x + \delta y + \gamma(x^3 + xy^2) - f^c &= 0 \\ \alpha y - \delta x + \gamma(y^3 + yx^2) - f^s &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec  $\alpha = k - \omega^2 m$ ,  $\beta = k$ ,  $\delta = \omega c$  et  $\gamma = \frac{3}{4} k_{nl}$ . Les valeurs numériques utilisées sont rappelées ici  $k = m = k_{nl} = f^c = 1$ ,  $c = 0.1$  et  $f^s = 0$ .

Ici chacune des deux équations du système est de degré total égal à 3. Par conséquent, le calcul de la borne de Bézout  $N_B = 3 \times 3 = 9$  nous indique qu'il y a au plus 9 solutions à ce système. Comme système de départ, on choisit simplement le système suivant :

$$\begin{aligned} x_1^3 - 1 &= 0 \\ x_2^3 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

dont les solutions sont les couples  $(x_1, x_2) = (e^{\frac{2ip_1\pi}{3}}, e^{\frac{2ip_2\pi}{3}})$  pour  $(p_1, p_2) \in [0, 2]^2$ .

$\omega$	Nb. de solutions réelles	Nb. de solutions complexes	Nb. de chemins divergés
1	1	2	6
1.5	1	2	6
2	3	0	6
2.5	3	0	6
3	3	0	6
3.5	1	2	6

TABLE 4.1 – Résumé des résultats de la résolution par homotopie linéaire (degré total) du système (4.13)

La table (4.1) liste le nombre de chemins convergés en fonction de la fréquence d'excitation, ainsi que la distinction entre les solutions réelles et imaginaires.

Dans cet exemple, la continuation des 9 chemins amène à 3 solutions convergées et à 6 chemins non-convergés. Parmi les solutions convergées, on a soit une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées, soit 3 solutions réelles. Les solutions réelles sont représentées sur la Fig.4.1, où on a également représenté la FRF à une harmonique obtenue par continuation des solutions par rapport à la pulsation. Cet exemple illustre bien la méthode de l'homotopie, et en particulier son principal inconvénient : seulement une partie des chemins convergent. On réalise de fait une majorité de calculs inutiles. On peut cependant nuancer ce dernier propos, en remarquant que la continuation des chemins peut être réalisée de manière parallèle, ce qui

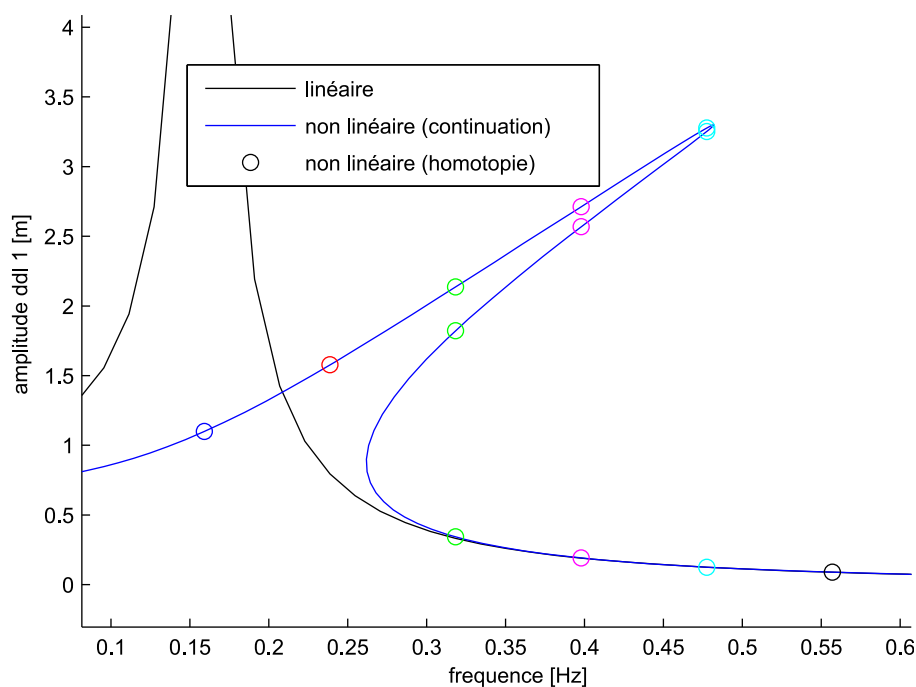


FIGURE 4.1 – Réponse en fréquence de l'oscillateur de Duffing, comparaison entre les solutions de l'homotopie et la continuation en fréquence

permet de diviser le travail entre plusieurs processeurs et ainsi d'augmenter les performances de la méthode en termes de temps de calcul. Un autre exemple d'application de l'homotopie linéaire sur un système à symétrie cyclique est donnée dans [142], où on compare les solutions obtenues par homotopie et par suivi des bifurcations du système d'équations algébriques.

### Autres approches possibles

La construction du polynôme de départ peut se faire par d'autres méthodes plus spécifiques. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode basée sur une multi-homogénéisation du système cible [6, 143]. Cette méthode consiste à séparer l'ensemble des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $m$  groupes  $X_k$  ( $k \in [1, m]$ ) composés chacun de  $n_i$  variables ( $\sum n_i = n$ ). Par exemple, en considérant premièrement les variables qui n'apparaissent qu'à l'ordre 1, puis les variables qui apparaissent au maximum à l'ordre 2,  $\dots$ , on homogénéise le système cible par rapport à chacun des groupes de variables. On rappelle qu'un polynôme est dit homogène de degré  $d$  si  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{P}(\beta \mathbf{x}) = \beta^d \mathbf{P}(\mathbf{x})$ . Pour chaque groupe de variables  $X_k$  on définit la variable d'homogénéisation  $z_k$ , l'homogénéisation se réalise alors en remplaçant chaque variable  $x_k$  de  $X_k$  par  $x_k/z_k$ , puis en multipliant chaque équation par un produit  $\prod z_k^{\alpha_k}$  permettant de rendre les dénominateurs de chaque équations égaux à un. On obtient alors un nouveau système composé des  $n + m$  variables  $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$ , et on utilise ce système pour construire la matrice  $\mathbf{D} = (d_{i,j})$  pour  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, m]$ , où chaque élément de la matrice  $\mathbf{D}$  correspond au degré maximum des variables du groupe  $j$  dans l'équation  $i$ . Le nombre de solutions de ce système est alors donné par le nombre suivant :

$$\text{Bez}(\mathbf{D}, \mathbf{N}) = \text{coeff}(z_1^{n_1} \dots z_m^{n_m}, \prod_i \sum_j d_{i,j} z_j) \quad (4.15)$$

où  $\text{coeff}(\mathbf{x}^\alpha, P)$  correspond au coefficient du monôme  $\mathbf{x}^\alpha$  dans le polynôme  $P$ . Il reste maintenant à construire un système de départ possédant  $\text{Bez}(\mathbf{D}, \mathbf{N})$  racines. Pour cela, on construit un polynôme  $Q(\mathbf{x})$  de même matrice  $\mathbf{D}$  et que l'on sait résoudre (voir par exemple [6] chapitre 6.5.2). L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le nombre  $\text{Bez}(\mathbf{D}, \mathbf{N})$  est en général inférieur à la borne de Bézout, ce qui limite le nombre de chemins divergents. Cependant, lorsque toutes les équations ont le même degré et que chaque variable est soumise aux non-linéarités, on s'aperçoit que cette méthode revient en fait à utiliser la méthode du degré total.

Enfin, parmi les méthodes plus spécialisées pour la définition d'un système de départ, on peut citer les méthodes reposant sur des produits d'éléments linéaires, des produits de monômes, des produits de polynômes, ou encore basées sur l'étude des polytopes de Newton [6, 143]. -

#### 4.2.1.2 Exemple d'application de l'homotopie linéaire

On considère ici l'application de l'homotopie linéaire avec la méthode du degré total sur le système (4.8) pour un nombre de ddl variant entre 1 et 3. La table 4.2 résume les résultats obtenus.

n	nb chemins	nb convergés	tps total (s)	temps moyen / chemin
1	9	3	14.9	1.65
2	81	11	208.3	2.57
3	729	36	2586	3.54

TABLE 4.2 – Résultats de l'application de l'homotopie linéaire avec méthode du degré total pour l'exemple de l'équation (4.8)

En utilisant la méthode du degré total, le nombre de chemins à suivre est donné par  $N_c = 3^{n_e}$  où  $n_e$  représente le nombre de variable de la HBM ( $n_e = 2n$  dans ce cas). Ce nombre de chemins augmente rapidement avec le nombre de ddl, et étant donné le temps moyen de continuation d'un chemin, on sent bien que l'application de cette méthode va vite être limitée. Par exemple, pour un système à 5 ddl, on doit suivre 59049 chemins. Si on suppose un temps moyen de 2 secondes par chemin (estimation faible), le temps de résolution total se situera autour de 32 heures pour une résolution séquentielle. Si on compare ce temps de résolution avec celui de la méthode reposant sur les matrices de multiplication (12 min, voir table 4.4), on voit que l'homotopie est largement moins performante que cette dernière. Le problème réside majoritairement dans le fait que la méthode du degré total surestime largement le nombre de racines et conduit à la continuation de chemins divergents (ce qui représente la majeure partie des calculs). Malheureusement, on ne peut pas sélectionner a priori les racines du polynôme de départ qui vont converger.

#### 4.2.2 Homotopie polyédrale

L'homotopie polyédrale est une variante des méthodes d'homotopie qui permet d'utiliser la borne BKK et ainsi de suivre moins de chemins divergents. Notons que la borne BKK ne correspond pas exactement au nombre de solutions du système, mais qu'il s'agit à ce jour de la meilleure borne disponible [144]. La mise en place de cette stratégie est plus complexe que les méthodes précédentes, en partie en raison de l'introduction de paramètres aléatoires ainsi que de l'utilisation de méthodes combinatoires [144].



L'idée est ici de partir d'un polynôme de départ  $\mathbf{Q}$  qui possède le même support que  $\mathbf{P}$  mais avec des coefficients différents pris au hasard dans  $\mathbb{C}^n$ . Le polynôme  $\mathbf{Q}$  est donc particulièrement proche de  $\mathbf{P}$  et son nombre de racines sera proche de celui de  $\mathbf{P}$ . Le fait que les coefficients de  $\mathbf{Q}$  soient pris au hasard assure (presque sûrement) le fait que le polynôme  $\mathbf{Q}$  a un nombre de racines maximum pour un support donné (on dit que se polynome est en position générale). Une fois les racines de  $\mathbf{Q}$  connues, on utilise l'homotopie linéaire définie à la section précédente pour déterminer les racines du système cible  $\mathbf{P}$ .

La détermination des racines de  $\mathbf{Q}$  fait intervenir l'homotopie polyédrale à proprement parler : il s'agit de trouver les racines de  $\mathbf{Q}$  par continuation des racines d'un système binomial  $\mathbf{B}$ .

#### 4.2.2.1 Polynôme de départ et homotopie polyédrale

On rappelle que :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_j} c_j(\alpha) \mathbf{x}^\alpha \quad (4.16)$$

Le polynôme de départ  $\mathbf{Q}$  est défini par :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}'_j} c_j^*(\alpha) \mathbf{x}^\alpha \quad (4.17)$$

Avec  $\mathcal{S}'_j = \mathcal{S}_j \cup \{\mathbf{0}\}$  et  $c_j^*(\alpha)$  des coefficients pris au hasard dans  $\mathbb{C}$ .

On introduit l'homotopie polyédrale définie par :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}'_j} c_j^*(\alpha) \mathbf{x}^\alpha t^{w_j(\alpha)} \quad (4.18)$$

où  $t$  est un paramètre ( $t \in [0, 1]$ ) et  $w_j : \mathcal{S}'_j \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de relèvement (lifting function). Le choix des  $w_j$  peut être fait au hasard [140] ou peut être dynamique dans le cas d'une méthode déterministe [141]. Pour l'homotopie polyédrale définie par le système (4.18), on observe que l'on a  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})$  mais en revanche que  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ . Pour pouvoir définir un polynôme de départ non nul, on effectue un changement de variable  $\mathbf{x} = \mathbf{y}t^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^n$  (ie  $x_i = y_i t^{\beta_i}$ ,  $i = 1..n$ ) on obtient alors :

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_j(\mathbf{y}t^\beta, t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}'_j} c_j^*(\alpha) \mathbf{y}^\alpha t^{\langle \alpha, \beta \rangle + w_j(\alpha)} \quad (4.19)$$

où  $\langle \alpha, \beta \rangle$  représente le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$ .

Supposons maintenant que l'on puisse trouver un vecteur d'exposant  $\beta$  tel que seulement deux des exposants  $\langle \alpha_1, \beta \rangle + w_j(\alpha_1)$  et  $\langle \alpha_2, \beta \rangle + w_j(\alpha_2)$  soient égaux à une même quantité  $\gamma_j$  pour tout  $j \in [1..n]$ . En divisant chaque équation par  $t^{\gamma_j}$  le système se retrouvera alors sous forme binomiale. En notant  $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ , cela se traduit par le fait que le système  $\mathbf{B}(\mathbf{y}) = t^{-\gamma} \mathbf{H}(\mathbf{y}t^\beta, t)$  est un système binomial (ie seulement deux monômes ont des coefficients non nuls pour chaque équation).

En effet, si on recherche les  $\beta$  tels que pour  $j = 1..n$  on a :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \beta \rangle + w_j(\alpha_1) &= \langle \alpha_2, \beta \rangle + w_j(\alpha_2) = \gamma_j \\ \langle \alpha_1, \beta \rangle + w_j(\alpha_1) &\leq \langle \alpha, \beta \rangle + w_j(\alpha), \quad \alpha \in \mathcal{S}'_j \end{aligned} \quad (4.20)$$

on obtient une série de systèmes définissant les homotopies polyédrale (une pour chaque  $\beta$ ) donnés par :

$$\mathbf{H}_j^\beta(\mathbf{y}, t) = t^{-\gamma_j} \mathbf{H}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha \in \{\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}\}} c_j^*(\alpha) \mathbf{y}^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{S}'_j - \{\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}\}} c_j^*(\alpha) \mathbf{y}^\alpha t^{<\alpha, \beta> + w_j(\alpha) - \gamma_j} \quad (4.21)$$

On remarque ainsi que  $\mathbf{H}^\beta(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})$  et que :

$$\mathbf{H}_j^\beta(\mathbf{x}, 0) = \sum_{\alpha \in \{\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}\}} c_j^*(\alpha) \mathbf{y}^\alpha = \mathbf{B}_j^\beta(\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

Le polynôme de départ de l'homotopie polyédrale se retrouve bien sous forme binomiale.

#### 4.2.2.2 Recherche des vecteurs beta

La recherche des  $\beta$  consiste à rechercher les solutions de l'équation (4.20). Le problème peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} <\alpha_1 - \alpha_2, \beta> = w_j(\alpha_2) - w_j(\alpha_1) \\ <\alpha_1 - \alpha, \beta> \leq w_j(\alpha) - w_j(\alpha_1), \alpha \in \mathcal{S}'_j \end{aligned} \quad (4.23)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{eq} \beta &= \mathbf{b}_{eq} \\ \mathbf{A}_{neq} \beta &\leq \mathbf{b}_{neq} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Une des solutions instinctives pour résoudre ce problème (trouver les  $\beta$ ) est d'utiliser la force brute. Pour cela, on considère toutes les paires possibles  $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)})$  pour chaque support  $\mathcal{S}'_j$ . On teste toutes les combinaisons possibles de ces paires en établissant les matrices  $\mathbf{A}_{eq}$  et  $\mathbf{A}_{neq}$ . Si la matrice  $\mathbf{A}_{eq}$  est régulière, on teste si le problème de minimisation est faisable, et si oui, on calcule la solution  $\beta$  associée.

Il peut arriver que pour une paire particulière  $(\alpha_1^{(j_0)}, \alpha_2^{(j_0)})$  les contraintes engendrées sur l'équation  $j_0$  du système (4.20) soient infaisables. Ainsi, si au cours du processus on trouve une telle paire, on pourra éliminer toutes les combinaisons contenant la paire  $(\alpha_1^{(j_0)}, \alpha_2^{(j_0)})$ . Cela permet en pratique de réduire le nombre de combinaisons à tester. Une implémentation efficace de cette méthode consiste à organiser les combinaisons de paire dans un arbre tel que si on arrive à un nœud infaisable, alors tous les nœuds fils sont également infaisables et on ne les teste pas [144].

#### 4.2.2.3 Résolution du système binomial

Les systèmes binomiaux  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  résultant de la recherche des  $\beta$  peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}} &= -\frac{c_1(\alpha_1^{(1)})}{c_1(\alpha_2^{(1)})} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{\alpha_1^{(n)} - \alpha_2^{(n)}} &= -\frac{c_n(\alpha_1^{(n)})}{c_n(\alpha_2^{(n)})} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ce qui peut encore se noter sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{V}} = \mathbf{d} \quad (4.26)$$

avec  $\mathbf{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  la matrice des exposants pour chaque variable (colonnes) et pour chaque équation (lignes). La stratégie utilisée pour résoudre un tel système consiste à triangulariser la matrice  $\mathbf{V}$  pour se ramener à un système du type suivant :

$$\begin{aligned} x_1^{r_{1,1}} \dots x_n^{r_{1,n}} &= d'_1 \\ &\vdots \\ x_n^{r_{n,n}} &= d'_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

La triangulation doit se faire avec des matrices d'entiers. Pour cela, on utilise des matrices telles que :

$$\begin{bmatrix} k & l \\ b/d & a/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

avec  $d = \text{pgcd}(a, b)$  et  $(k, l)$  tel que  $ka + bl = d$ . Par exemple, en choisissant la première colonne  $\mathbf{v}_1$  de  $\mathbf{V}$  de sorte que  $\mathbf{v}_1 = [\dots a \dots b \dots]^T$  avec  $a$  en  $i^{\text{ème}}$  et  $b$  en  $j^{\text{ème}}$  position et en multipliant par une matrice  $\mathbf{Q}_{i,j}$  comprenant des 1 sur la diagonale excepté aux positions  $(i, i)$  et  $(j, j)$  et tel que  $\mathbf{Q}_{i,j}([i, j], [i, j]) = \begin{bmatrix} k & l \\ b/d & a/d \end{bmatrix}$ , on obtiendra :

$$\mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{v}_1 = [\dots d \dots 0 \dots]^T \quad (4.29)$$

En répétant l'opération, on est en mesure de définir une matrice  $\mathbf{Q}$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{R}$  telle que  $\mathbf{QV} = \mathbf{R}$ . En posant  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{\mathbf{Q}}$ , on obtient alors un système de la forme (4.27) donné par :

$$(\mathbf{z}^{\mathbf{Q}})^{\mathbf{V}} = \mathbf{z}^{\mathbf{QV}} = \mathbf{z}^{\mathbf{R}} = \mathbf{d}' \quad (4.30)$$

La résolution de ce système se fait par remontée (ie on résout d'abord la dernière équation, puis l'avant dernière, etc...) et on est en mesure d'obtenir les solutions  $\mathbf{z}$  telles que  $\mathbf{z}^{\mathbf{R}} = \mathbf{d}'$ . En posant  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{\mathbf{Q}}$ , on obtiendra bien les solutions du système binomial de l'équation (4.26).

La méthode de l'homotopie polyédrale a déjà été mise en œuvre sur de nombreux systèmes non-linéaires et semble prometteuse [144], elle n'a cependant pas été retenue dans ce manuscrit compte tenue de sa complexité de mise en œuvre. Nous préférons une approche basée sur l'utilisation de bases de Gröbner qui est présentée dans la prochaine section.

### 4.3 Résolution des systèmes polynomiaux à l'aide de bases de Gröbner

Avant d'introduire les bases Gröbner, on rappelle tout d'abord un certain nombre de définitions liées aux systèmes d'équations polynomiales à plusieurs variables. On note  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  l'ensemble des polynômes de la variable  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On considère un système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})]$ . On a  $p_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ ,  $i = 1..n$  et les polynômes s'écrivent sous la forme suivante :

$$p_j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_j} c(\alpha) \mathbf{x}^\alpha \quad (4.31)$$

où  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{N}^n$  correspond au vecteur des exposants,  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  correspond au monôme,  $c(\alpha) \in \mathbb{C}$  correspond au coefficient du monôme  $\mathbf{x}^\alpha$ , et  $\mathcal{S}_j \subset \mathbb{N}^n$  correspond au support du polynôme  $p_j$ .

Pour ordonner les monômes entre eux, il est courant de définir un ordre monomial (i.e. un ordre sur l'ensemble des monômes). Plusieurs choix sont possibles, et on se limite aux deux ordres les plus couramment utilisés, à savoir l'ordre lexicographique et l'ordre grevlex. Ces derniers sont définis par :

*ordre lexicographique* (noté lex) :

$$\mathbf{x}^\alpha \geq_{lex} \mathbf{x}^\beta \equiv \exists k \leq n \text{ tel que } \alpha_k > \beta_k \text{ et } \alpha_j = \beta_j \text{ pour } j = 1..k-1 \quad (4.32)$$

dans ce cas, les monômes sont rangés en comparant les puissances de  $x_1$  puis de  $x_2$ , etc.

*ordre grevlex* (degré lexicographique inversé, graded reverse lexicographic, noté grev) défini par :

$$\mathbf{x}^\alpha \geq_{grev} \mathbf{x}^\beta \equiv [ |\alpha| \geq |\beta| ] \text{ ou } [ |\alpha| = |\beta| \text{ et } \exists k \leq n \text{ tel que } \alpha_j = \beta_j \text{ pour } j = k+1..n \text{ et } \alpha_k < \beta_k ] \quad (4.33)$$

Dans ce cas, les monômes sont rangés selon leur degré total, puis en fonction de la puissance de  $x_n$  (plus la puissance est petite, plus le monôme est 'grand', d'où le 'reverse', ce qui permet d'avoir  $x_1 > \dots > x_n$ ), puis en fonction des puissances des variables  $x_{n-1}, \dots, x_1$ .

En utilisant un ordre monomial, on est en mesure de définir le monôme dominant (leading monomial, LM), le coefficient dominant (leading coefficient LC) et le terme dominant (leading term LT) d'un polynôme  $p$  par :

- $LM(p) = \mathbf{x}^{\alpha_m}$ , où  $\alpha_m$  est le vecteur d'exposants le plus grand par rapport à l'ordre choisi
- $LC(p) = c(\alpha_m)$
- $LT(p) = LC(p) \times LM(p)$

### 4.3.1 Bases de Gröbner

Le concept de bases de Gröbner est intimement lié à la notion d'idéal et à l'opération de division d'un polynôme par une famille de polynômes. Par définition, tout système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}$  définit un idéal sur l'ensemble des polynômes  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ . Ici, l'idéal de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  engendré par le système  $\mathbf{P}$  est noté  $\mathcal{I}$  (également noté  $\mathcal{I} = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ ) et correspond à l'ensemble défini par :

$$\mathcal{I} = \left\{ f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \text{ tel que } f = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, \lambda_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \right\} \quad (4.34)$$

Les éléments de l'idéal  $\mathcal{I}$  sont des combinaisons algébriques des polynômes du système d'équations  $\mathbf{P}$ , c'est à dire que les coefficients des combinaisons sont également des polynômes ( $\neq$  combinaisons linéaires).

L'opération de division d'un polynôme  $g$  par une famille de polynômes  $\mathbf{P}$  revient à rechercher une décomposition du type :

$$g = \sum_j \lambda_j p_j + r, \lambda_j \in \mathbb{C}[\mathbf{x}], r \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \quad (4.35)$$

et est appelée opération de réduction modulo  $\mathbf{P}$ . On la notera  $g \rightarrow_{\mathbf{P}} r$  (lire  $g$  se réduit à  $r$  modulo  $\mathbf{P}$ ). Cependant, le reste  $r$  défini ainsi n'est pas unique et dépend de l'ordre dans lequel les divisions ont été effectuées. Pour l'illustrer, on considère le polynôme  $f = x^4 y^2 + xy + 1$  et les deux polynômes  $p_1 = x^3 y + 2xy^2$  et  $p_2 = x^2 y + 1$ , l'ordre choisi est l'ordre grevlex avec  $x < y$ . La division est similaire à la division des entiers et se déroule de la manière suivante (division

par  $p_1$  en premier) : on regarde si le monôme dominant de  $p_1$  divise le monôme dominant de  $f$ . Dans ce cas, on a bien  $LM(p_1) = x^3y$  qui divise  $LM(f) = x^4y^2$ , et on peut calculer l'expression du reste  $r_1$  par  $r_1 = f - xyp_1 = -2x^2y^3 + xy + 1$ . On poursuit la division par  $p_1$  en regardant si  $LM(p_1)$  divise  $LM(r_1)$ , ce qui n'est pas le cas dans cet exemple. On introduit alors la division par  $p_2$ , on voit que  $LM(p_2)$  divise  $LM(r_1)$ , l'expression du reste est donnée par  $r_2 = r_1 + 2y^2p_2 = 2y^2 + xy + 1$ . Comme aucun des monômes dominants de l'ensemble  $\mathbf{P}$  ne divise  $r_2$ , la division est terminée et on écrit  $f \rightarrow_{\mathbf{P}} r_2$ . Si on effectue les divisions dans le sens inverse (division par  $p_2$  en premier) on obtient  $\tilde{r}_1 = f - x^2yp_2 = -x^2y + xy + 1$  puis  $\tilde{r}_2 = r_1 - 1 \times p_2 = xy + 2$ . On a donc  $f \rightarrow_{\mathbf{P}} r_2$  et  $f \rightarrow_{\mathbf{P}} \tilde{r}_2$  avec  $r_2 \neq \tilde{r}_2$ , ce qui illustre la non-unicité du reste. Il existe cependant des familles génératrices de l'idéal qui permettent de rendre le reste unique : les bases de Gröbner.

#### 4.3.1.1 Définition

Une base de Gröbner est une famille de polynômes particulière  $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_N)$ ,  $g_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ , qui engendre l'idéal  $\mathcal{I}$  (ie  $\mathcal{I} = \langle g_1, \dots, g_N \rangle$ ) et qui permet de plus de rendre unique le reste dans l'opération de réduction d'un polynôme  $f$  de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  modulo un idéal  $\mathcal{I}$  défini par une famille de polynômes  $\mathbf{P}$ . L'opération associée, appelée réduction modulo l'idéal, est notée  $g \xrightarrow{\mathbf{G}} r$  (lire  $g$  se réduit à  $r$  modulo  $\mathbf{G}$ ). En quelque sorte, les bases de Gröbner permettent d'étendre le concept de la division euclidienne pour les polynômes à plusieurs variables.

Plus formellement, pour un ordre monomial fixé, un sous ensemble  $\mathbf{G} = \{g_1, \dots, g_n\} \subset \mathcal{I}$  est dit être une base de Gröbner de  $\mathcal{I}$  si le terme dominant de tout élément de  $\mathcal{I}$  est divisible par  $LT(g_i)$  pour un  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On peut également définir les bases de Gröbner en utilisant la relation d'appartenance à l'idéal de la manière suivante :

$$\mathbf{G} \text{ est une base de Gröbner pour } \mathcal{I} \text{ si et seulement si } [f \in \mathcal{I}] \equiv [f \rightarrow_{\mathbf{G}} 0] \quad (4.36)$$

En reprenant l'exemple de la partie précédente, le calcul d'une base de Gröbner  $\mathbf{G}$  avec l'ordre grevlex donne les deux polynômes  $g_1 = 2y^2 - 1$  et  $g_2 = x^2 + 2y$ . En effectuant la réduction du polynôme  $f = x^4y^2 + xy + 1$  par les éléments de la base  $\mathbf{G}$  on obtient  $f \xrightarrow{\mathbf{G}} xy + 2$ . Ce reste est unique, et correspond au représentant canonique de la classe d'équivalence définie par la relation  $[f = h] \equiv [f - h \in \mathcal{I}]$  (aussi appelé forme normale de  $f$ ).

Les bases de Gröbner ont été introduites par Buchberger au cours de son doctorat avec le professeur Gröbner [145]. Une bonne introduction aux bases de Gröbner (en français) est donnée dans [146], on peut également citer l'article de Buchberger [147] qui explique simplement l'utilisation et les enjeux du calcul de base de Gröbner. Dans la suite, après avoir présenté quelques méthodes de calcul, on se concentre principalement sur l'utilisation des bases de Gröbner pour le calcul des solutions du système  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$  (équation (4.31)).

#### 4.3.1.2 Calcul d'une base de Gröbner

Le calcul des bases de Gröbner repose sur une généralisation de l'algorithme de division euclidienne pour les polynômes à plusieurs variables. Une première façon de construire une base de Gröbner  $\mathbf{G}$  partant d'un ensemble de polynômes  $\mathbf{P}$  consiste à utiliser l'algorithme de Buchberger [147], rappelé à l'algorithme 5.

Cet algorithme est basé sur l'utilisation de polynômes particuliers appelés S-polynômes, définis par la relation suivante :

$$S(p_1, p_2) = \text{LC}(p_2) \frac{\text{ppcm}(LM(p_1), LM(p_2))}{LM(p_1)} p_1 - \text{LC}(p_1) \frac{\text{ppcm}(LM(p_1), LM(p_2))}{LM(p_2)} p_2 \quad (4.37)$$

---

**Algorithm 5** Algorithme de Buchberger utilisé pour le calcul d'une base de Gröbner

---

```

initialiser  $\mathbf{G} = \mathbf{P}$ 
construire  $\mathcal{S} = \{(g_i, g_j), 1 \leq i < j \leq n, g_i, g_j \in \mathbf{G}\}$ 
while  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  do
  choisir et retirer une paire  $(g_1, g_2)$  de  $\mathcal{S}$ 
  calculer le S-polynôme  $s = S(g_1, g_2)$ 
  calculer le reste  $r$  dans la réduction  $s \rightarrow_{\mathbf{G}} r$ 
  if  $r=0$  then
    considérer la paire suivante
  else
    ajouter  $r$  à  $\mathbf{G}$  :  $g_{n+1} = r$ 
    actualiser l'ensemble  $\mathcal{S}$  :  $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{(g_i, g_{n+1}), 1 \leq i \leq n\}$ 
  end if
end while

```

---

En apparence, l'algorithme de Buchberger semble très simple, mais il repose en fait sur une combinatoire élevée dans la mesure où l'on doit effectuer la réduction de nombreux polynômes (les S-polynômes) par rapport à un ensemble de polynômes de taille variable  $\mathbf{G}$  qui finalement deviendra la base de Gröbner à la fin de l'algorithme.

Le temps de calcul et la forme des bases de Gröbner dépendent de l'ordre monomial choisi, et c'est cet ordre qui va influencer le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir le résultat. En particulier, il est reconnu que l'ordre grevlex donne des bases de Gröbner plus petites en un temps plus court que le calcul avec l'ordre lexicographique [148]. En revanche, l'ordre lexicographique (qui est l'ordre donnant les temps de calcul les plus longs) est un ordre d'élimination, cela signifie qu'une base de Gröbner calculée avec un tel ordre sera sous forme (pseudo-)triangulaire et que par conséquent le calcul des zéros pourra être réalisé sans trop de difficultés comme nous le verrons dans la section suivante.

Des améliorations à l'algorithme de Buchberger ont été proposées dans le but d'éviter de calculer des réductions dont on connaît déjà le résultat (en particulier pour des réductions à 0 par rapport à  $\mathbf{G}$ ). On peut citer les deux critères de Buchberger introduits dans [149], ou les améliorations de Faugère introduisant l'algèbre linéaire dans le calcul des bases de Gröbner (F4 [150], F5 [151]). La complexité des algorithmes permettant le calcul des bases de Gröbner est, dans le pire des cas, doublement exponentielle par rapport au nombre de variables et, pour des cas suffisamment généraux, simplement exponentielle. Cependant les algorithmes peinent à obtenir pratiquement cette complexité simplement exponentielle en raison des nombreux (et gros) calculs intermédiaires.

Depuis les années 2000, la plupart des logiciels de calcul symbolique (Maple, MuPad, Mathematica, ...) comportent des packages pour calculer des bases de Gröbner. En particulier, les versions postérieures à Maple 11 ont une implémentation compilée de l'algorithme F4 développé par Faugère sous le nom de méthode "FGb". Le package "Gröbner" de Maple possède également beaucoup d'autres fonctions relatives aux calculs dans les idéaux (en particulier la fonction NormalForm qui permet d'obtenir le représentant canonique des classes d'équivalences de chaque polynôme modulo un idéal  $\mathcal{I}$ ). La librairie FGb, disponible sur la page personnelle de Faugère [152], est une implémentation en C/C++ de différentes fonctions relatives aux polynômes. En particulier, y sont implémentées des versions des algorithmes F4 et F5 (en test). De nombreux autres logiciels spécialisés dans le traitement des polynômes sont également disponibles

(Singular, Magma, ...).

### 4.3.2 Bases de Gröbner et résolution de systèmes polynomiaux

#### 4.3.2.1 Base de Gröbner avec ordre d'élimination

Comme une base de Gröbner  $\mathbf{G}$  génère également l'idéal engendré par le système  $\mathbf{P}$ , une des propriétés remarquables des bases de Gröbner et le fait que les solutions de  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  sont également les solutions de  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Dans certains cas, le système  $\mathbf{G}$  peut être plus facile à résoudre, en particulier si on utilise l'ordre lexicographique pour le calcul de la base de Gröbner qui prend la forme triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} x_1 - g_1(x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} - g_{n-1}(x_n) &= 0 \\ g_n(x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Ainsi, il est aisé de résoudre le système polynomial  $\mathbf{G}$ . On commence par résoudre la dernière équation (résolution d'un polynôme à une seule variable) pour obtenir les différentes valeurs de  $x_n$  possibles. On utilise ensuite ces résultats en les substituant dans les  $n - 1$  équations restantes, ce qui permet de trouver les valeurs des composantes  $x_i$ . En guise d'illustration, on applique cette méthode sur le système à deux variables suivant issu de l'exemple (4.8) pour le cas dégénéré  $n = 1$  (oscillateur de Duffing classique) :

$$\begin{aligned} \alpha x + \delta y + \gamma(x^3 + xy^2) - 1 &= 0 \\ \alpha y - \delta x + \gamma(y^3 + yx^2) - 0 &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

L'ordre lexicographique correspond ici à  $x < y$ , et le calcul de la base de Gröbner  $\mathbf{G}$  donne (pour  $\omega = 2$ ) :

$$\begin{aligned} g_1 &= -75y^2 + 60y + 4x \\ g_2 &= -80 + 3616y - 9000y^2 + 5625y^3, \end{aligned} \tag{4.40}$$

On observe bien que la deuxième équation ne dépend que de la variable  $y$ . De plus elle est de degré 3, ce qui indique qu'il y a 3 couples de solutions possibles. Pour la fréquence choisie ( $\omega = 2$ ), il s'avère que les 3 solutions sont réelles et on retrouve bien les résultats attendus (voir l'exemple de l'homotopie Fig.4.1). On voit ici l'avantage principal de l'utilisation des bases de Gröbner par rapport aux méthodes d'homotopie : les bases de Gröbner permettent de déterminer le nombre exact de solutions (complexes) d'un système polynomial. Par conséquent, il n'y a pas de surestimation du nombre de solutions, et donc pas de continuations inutiles.

L'un des désavantages de cette méthode est que les temps de calcul des bases de Gröbner pour l'ordre lexicographique sont très longs, même pour de petits systèmes. Pour "gagner du temps", il est possible de calculer une première base de Gröbner  $\mathbf{G}_1$  en utilisant un ordre qui permette un calcul rapide (par exemple l'ordre grevlex), puis de la transformer en une nouvelle base  $\mathbf{G}_2$  adaptée à l'ordre lexicographique en utilisant l'algorithme FGLM [153] [154]. Cette méthode de résolution permet d'obtenir toutes les solutions d'un système d'équations algébriques, mais elle reste peu flexible du fait de l'utilisation impérative de l'ordre lexicographique. De plus, le degré du polynôme à une variable, qui traduit le nombre de solutions du système, peut être très élevé par exemple pour un système à 10 équations cubiques, on obtiendrait un polynôme de degré  $3^{10} = 59049$ . Le degré des fonctions  $g_i$ ,  $i = 1..n - 1$ , peut également être important, ce qui implique d'avoir une grande précision sur les solutions  $x_n$ , sous peine d'introduire des erreurs numériques.

### 4.3.2.2 Rational Univariate Representation (RUR)

Nous avons vu dans la partie précédente qu'une méthode pour calculer les solutions d'un système polynomial consiste à calculer une base de Gröbner de l'idéal pour l'ordre lexicographique. Cette base possède une forme triangulaire qui permet de résoudre facilement le système d'équations. L'inconvénient majeur de cette méthode est lié au fait que les temps de calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique peuvent vite devenir très longs. Une alternative à cette méthode est d'utiliser la RUR (Rational Univariate Representation). La RUR est une méthode proposée par F. Rouillé [155] qui consiste à réécrire le système d'équations sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} g_0(v) &= 0 \\ x_1 &= \frac{g_1(v)}{h(v)} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{g_n(v)}{h(v)} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Où la variable  $v$  est appelée variable séparante (ie la valeur de la variable est différente pour chaque solution). La RUR permet donc la construction d'un polynôme en une variable  $v$  dont les solutions permettent de retrouver les solutions du système de départ. D'après Lazard [148], la RUR est aujourd'hui encore la méthode la plus efficace (par rapport à la méthode de changement de base FGLM) pour résoudre un système d'équations polynomiales dans le cas où le corps de base est un corps de caractéristique nulle (par exemple le corps des rationnels). De plus, il semble que les coefficients des polynômes calculés par RUR soient moins grands dans le sens où ils prennent beaucoup moins d'espace mémoire (au minimum 5 fois moins) que les coefficients des polynômes d'une base de Gröbner calculés avec l'ordre lexicographique [155].

Les algorithmes de décomposition RUR [155] se décomposent en deux parties : la première consiste à trouver une variable séparante et la seconde à calculer numériquement les polynômes  $g_0$ ,  $g_i$  et  $h$ . Pour ce faire, l'algorithme prend en entrée une base  $\mathcal{B}$  de l'espace quotient  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I$  (voir section 4.3.3.1). Une des méthodes pour obtenir cette base consiste premièrement à calculer une base de Gröbner pour n'importe quel ordre de degré total (par exemple grevlex) puis à en déduire une base de monômes par recherche des formes normales modulo l'idéal. Cette fonction est implémentée dans Maple sous le nom "NormalSet" pour obtenir une base de monômes et sous la fonction "MultiplicationMatrix" pour obtenir la table de multiplication par rapport à une variable. Une fois que l'on a une base de l'espace quotient, on peut calculer les tables de multiplication relatives aux différentes variables. Partant de là on peut calculer les polynômes  $g_0$ ,  $g_i$  et  $h$  en suivant les instructions données dans [155].

Enfin, on peut citer [156] qui présente une autre manière d'obtenir une décomposition RUR sans calculer une base de Gröbner. La méthode est basée sur une procédure itérative qui permet le passage de la solution d'un système à  $i$  polynômes  $(f_{n-i+1}, \dots, f_n)$  vers la solution d'un système à  $i + 1$  polynômes  $(f_{n-i}, \dots, f_n)$ . Pour cela, la méthode repose sur des propriétés probabilistes (choix de valeurs au hasard) et sur un algorithme de Newton-Raphson. Une implémentation en langage magma de cette méthode est disponible sur la page des travaux de Lecerf [156].

### 4.3.3 Systèmes polynomiaux et algèbre linéaire

Les bases de Gröbner, permettent également de lier la résolution de systèmes polynomiaux à l'algèbre linéaire, et en particulier à la résolution de problèmes aux valeurs propres pour lesquels il existe de nombreuses méthodes de résolution performantes. En effet, l'introduction d'espaces



quotients va permettre la construction de matrices, appelées matrices de multiplication, dont les valeurs propres sont en lien direct avec les solutions du système d'équations polynomiales [157].

### 4.3.3.1 Espace quotient

L'espace vectoriel considéré ici est un espace quotient  $\mathbb{A}$  défini par  $\mathbb{A} = \frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}]}{\mathcal{I}}$ . Cet espace correspond à l'ensemble des classes d'équivalences de la relation induite par l'idéal  $\mathcal{I}$  sur  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  définie par :

$$[f = h] \equiv [f - h \in \mathcal{I}] \quad (4.42)$$

Si le système d'équations  $\mathbf{P}$  définissant l'idéal ne possède qu'un nombre fini de solutions ( $n_s$  solutions), alors l'idéal est de dimension 0 et l'espace  $\mathbb{A}$  est un espace vectoriel de dimension finie égale à  $n_s$  [153]. L'espace  $\mathbb{A}$  est composé de tous les restes possibles que l'on peut obtenir lors de la réduction d'un polynôme de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  modulo  $\mathcal{I}$ .

Le fait de connaître une base de Gröbner  $\mathbf{G}$  de l'idéal  $\mathcal{I}$ , permet de déterminer une base  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n_s})$ ,  $b_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  de  $\mathbb{A}$  en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, tout élément  $q$  de  $\mathbb{A}$  pourra se décomposer de manière unique sous la forme  $q = \sum_{i=1}^{n_s} \mu_i b_i$ ,  $\mu_i \in \mathbb{C}$ . Les éléments  $b_i$  peuvent être calculés en utilisant la caractérisation suivante :

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\alpha \notin \langle \text{LT}(\mathbf{G}) \rangle\} \quad (4.43)$$

où  $\langle \text{LT}(\mathbf{G}) \rangle$  représente l'idéal engendré par les termes dominants de la base de Gröbner  $\mathbf{G}$ . La détermination de la base s'effectue alors en calculant successivement les réductions modulo l'idéal de tous les monômes  $\mathbf{x}^\alpha$ , pour  $|\alpha|$  inférieur à un certain degré  $n_0$ . Les opérations de réduction se font relativement à une base de Gröbner de l'idéal pour que la base soit uniquement composée des représentants canoniques de chaque classe d'équivalence. Notons que la base  $\mathcal{B}$  n'est pas unique et dépend de l'ordre monomial choisi.

### 4.3.3.2 Matrices de multiplication

Une classe d'application particulière du quotient  $\mathbb{A}$  est la classe des applications "multiplication par un polynôme  $f$  de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ " définie par la relation suivante :

$$m_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{A} \\ q & \mapsto & m_f(q) = qf \end{array} \quad (4.44)$$

Ces applications  $m_f$  sont linéaires et peuvent donc être représentées par des matrices  $\mathbf{M}_f$  relativement à une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{A}$ . Ces matrices sont appelées matrices de multiplication par le polynôme  $f$ . Si on rassemble les éléments de la base sous la forme vectorielle  $\mathbf{B} = [b_1, \dots, b_{n_s}]^T$ , les matrices de multiplication sont définies par la relation suivante :

$$f\mathbf{B} = \mathbf{M}_f\mathbf{B} \quad (4.45)$$

On peut interpréter cette relation par le fait que si le degré d'un produit  $p = fb_i$  est supérieur au degré maximum de la base  $\mathbf{B}$ , alors il sort de l'espace quotient, et on le remplace par le représentant de sa classe d'équivalence. Ce représentant s'exprime comme combinaison linéaire des  $b_i$  (car les  $b_i$  forment une base pour les représentants de chaque classe d'équivalence). Pour déterminer les coefficients de la combinaison linéaire, il suffit de calculer la forme normale de chaque produit  $f \times b_i : h = \text{NF}(fb_i, \mathbf{G})$ , et de la décomposer sur la base  $\mathbf{B}$  selon l'expression  $h = \sum_{k=1}^{n_s} M_f(i, k)b_k$ .

### 4.3.3.3 Application à la résolution de systèmes polynômiaux

On peut montrer [158, 159] que les matrices de multiplication associées aux variables elles-mêmes (ie  $\mathbf{M}_{x_1}, \dots, \mathbf{M}_{x_n}$ ) contiennent des informations sur les solutions du système  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Plus précisément, les solutions du système sont données par les n-uplet de valeurs propres  $(\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_n})$  associées à des vecteurs propres communs pour chacun des problèmes  $\mathbf{M}_{x_i} \mathbf{v} = \lambda_{x_i} \mathbf{v}$ . En d'autre termes, après avoir résolu les  $n$  problèmes aux valeurs propres, s'il existe un vecteur propre  $\mathbf{v}_0$  qui est commun aux  $n$  matrices de multiplication, alors il existe une solution du système définie par les valeurs propres correspondantes :  $(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$  [159]. En se basant sur le fait que les vecteurs propres doivent être communs à toutes les matrices, on peut se contenter de résoudre simplement un seul problème aux valeurs propres, puis de tester si les vecteurs obtenus sont solutions des  $n - 1$  autres problèmes.

Dans le cas où la base  $\mathbf{B}$  utilisée pour construire les matrices contient tous les monômes  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , il est possible de lire directement les composantes des solutions dans le vecteur propre, puisque celui-ci représente les valeurs des éléments de la base  $\mathbf{B}$  prises aux points de solution du système  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . En supposant que les premiers éléments de la base  $\mathbf{B}$  sont organisés dans l'ordre  $\mathbf{B} = [1, x_1, \dots, x_n, \dots]$  et que les vecteurs propres sont normés pour avoir leurs premières composantes à 1, il est alors possible de lire les composantes des solutions dans les composantes  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 2, \dots, n + 1$  des vecteurs propres.

En guise d'illustration, on reprend le système (4.8) pour le cas dégénéré  $n = 1$  rappelé ici :

$$\begin{aligned} \alpha x + \delta y + \gamma(x^3 + xy^2) - f^c &= 0 \\ \alpha y - \delta x + \gamma(y^3 + yx^2) - f^s &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

On choisit l'ordre grevlex pour ordonner les monômes, la base de Gröbner associée comporte alors 3 éléments qui sont donnés par (pour  $\omega = 2\text{rad.s}^{-1}$ ) :

$$\begin{aligned} g_1 &= 75y^2 - 4x - 60y \\ g_2 &= 75yx - 20 - 60x + 4y \\ g_3 &= 75x^2 + 4x - 315y \end{aligned} \quad (4.47)$$

En effectuant la réduction des monômes de degré inférieur à 2 par rapport cette base de Gröbner, on obtient une base  $\mathbf{B}$  de l'espace quotient à 3 éléments :

$$\mathbf{B} = [1, x, y] \quad (4.48)$$

On cherche maintenant à calculer la matrice de multiplication associée à la variables  $x$  noté  $\mathbf{M}_x$ . Pour cela, on utilise la définition  $x\mathbf{B} = \mathbf{M}_x\mathbf{B}$  et pour chaque élément de la base  $\mathbf{B}$ , on calcule la forme normale du produit  $xb_i$  :  $h_i = NF(xb_i, \mathbf{G})$ . Si  $h_i \in \mathbf{B}$  alors il existe  $k$  tel que  $h_i = b_k$ , et la ligne  $i$  de la matrice de multiplication sera composée d'un 1 en position  $(i, k)$  et de zéros sur le reste de la ligne. Si  $h_i \notin \mathbf{B}$ ,  $h_i$  est une combinaison linéaire des éléments de la base  $\mathbf{B}$  du type  $h_i = \sum_{j=1}^{n_s} m_{i,j} b_j$ , et les éléments non nuls de la ligne  $i$  sont exactement les  $m_{i,j}$ . Par exemple pour la 3ème ligne de la matrice  $\mathbf{M}_x$ , la forme normale du produit  $x b_2 = xy$  est donnée par :

$$NF(xy) = h_3 = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x - \frac{4}{75}y = \frac{4}{15}b_1 + \frac{4}{5}b_2 - \frac{4}{75}b_3 \quad (4.49)$$

ce qui donne l'expression de la 3ème ligne de la matrice. La matrice finale est donnée par :

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{75} & \frac{21}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{75} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Après normalisation de la première composante à 1, le calcul des vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{M}_x$  donne :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.69 \\ 0.66 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.34 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.93 \\ 0.9 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

On peut identifier directement les valeurs des solutions dans les vecteurs propres de la matrice au niveau de la deuxième (solution pour  $x$ ) et de la troisième (solution pour  $y$ ) composante, ce qui donne les trois couples de solutions  $(-1.69, 0.66)$ ,  $(-0.34, 0.02)$  et  $(1.93, 0.9)$ .

#### 4.3.4 Exemples d'application sur un système cyclique

On choisit ici de comparer les deux méthodes présentées dans cette section (ie base de Gröbner avec ordre lexicographique, et méthode des matrices de multiplication) sur l'exemple présenté à l'équation (4.8). Pour montrer l'évolution du nombre de solutions et des temps de calcul, on considère que  $n$  (nombre de ddl physiques) varie entre 1 et 5 ce qui engendre des systèmes algébriques de tailles comprises entre 2 et 10 variables. Dans un premier temps, on considère le calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique. Les résultats sont résumés dans la table 4.3.

n	nvar	temps CPU (s)	degré max
1	2	0.031	3
2	4	0.230	35
3	6	0.5	25
4	8	298.7	93
5	10	XX	633

TABLE 4.3 – Calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique pour le système de l'équation (4.8)

Dans un deuxième temps, on considère le calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre grevlex, puis son utilisation pour en déduire une base de l'espace quotient qui pourra être utilisée pour construire les matrices de multiplication. Les résultats sont présentés dans la Table 4.4 et sur la Fig. 4.2.

On note que ces applications confirment les remarques faites sur les temps de calcul des bases de Gröbner associées à l'ordre lexicographique et à l'ordre grevlex. En effet, pour un système algébrique à 8 variables, il faut environ 300s pour calculer une base pour l'ordre lexicographique, alors qu'il n'en faut que 5 pour calculer une base pour l'ordre grevlex. De plus, pour un système à 10 variables, nous n'avons pas été en mesure d'obtenir une base de Gröbner en un temps raisonnable, par les moyens de calcul à notre disposition, alors que le calcul d'une base pour l'ordre grevlex ne prend qu'une dizaine de minutes. Par conséquent, nous utiliserons uniquement l'ordre grevlex pour tous les calculs de bases de Gröbner qui suivent, et nous utiliserons la méthodes de matrices de multiplication pour déterminer les solutions du système d'équations polynomiales.

Nous considérons ici un système à 5 ddl, amorti et forcé sur son premier mode, issu de l'exemple (4.8), dont les équations obtenues après discrétisation par HBM à un seul harmonique

n	nvar	temps CPU (s) base $\mathbf{G}_{grevlex}$	temps CPU (s) base $\mathcal{B}$	$\#\mathcal{B}$
1	2	0.031	0	9
2	4	0.016	0	35
3	6	0.078	0	25
4	8	5.531	0.063	93
5	10	714.6	1.38	633

TABLE 4.4 – Calcul d’une base de Gröbner pour l’ordre grevlex, et d’une base de l’espace quotient pour l’exemple de l’équation (4.8)

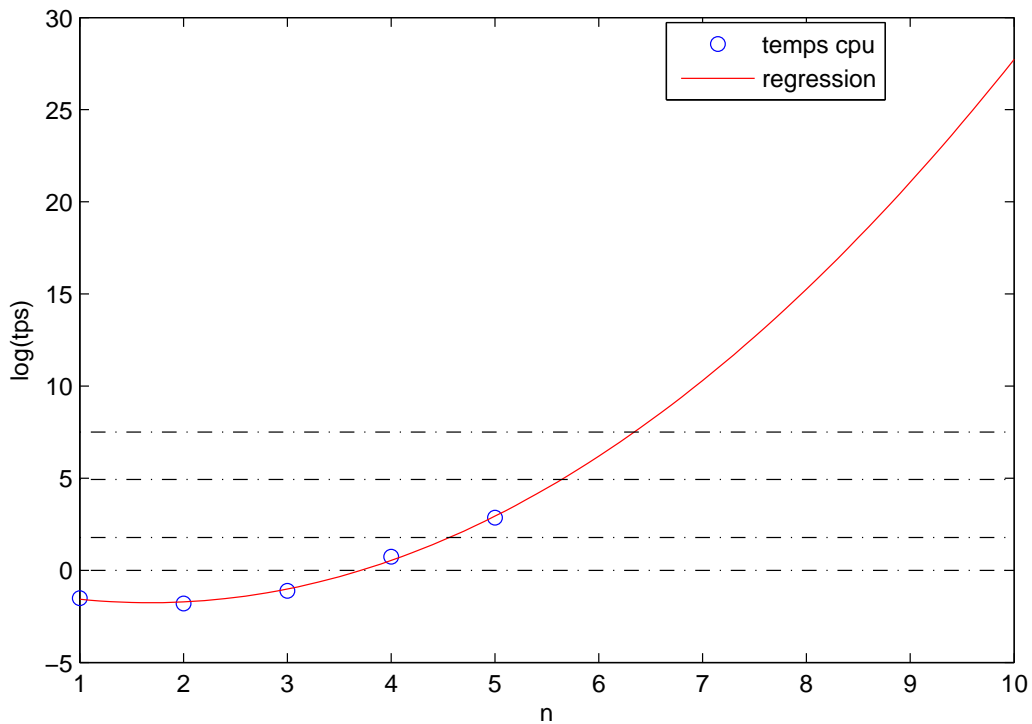


FIGURE 4.2 – Temps de calcul d’une base de Gröbner pour l’ordre grevlex pour l’exemple du système (4.8), et extrapolation du type  $\log(t) = a + bn + cn^2$ . Les lignes horizontales indiquent de bas en haut : 1s, 1 min, 1 jour, 1 an.

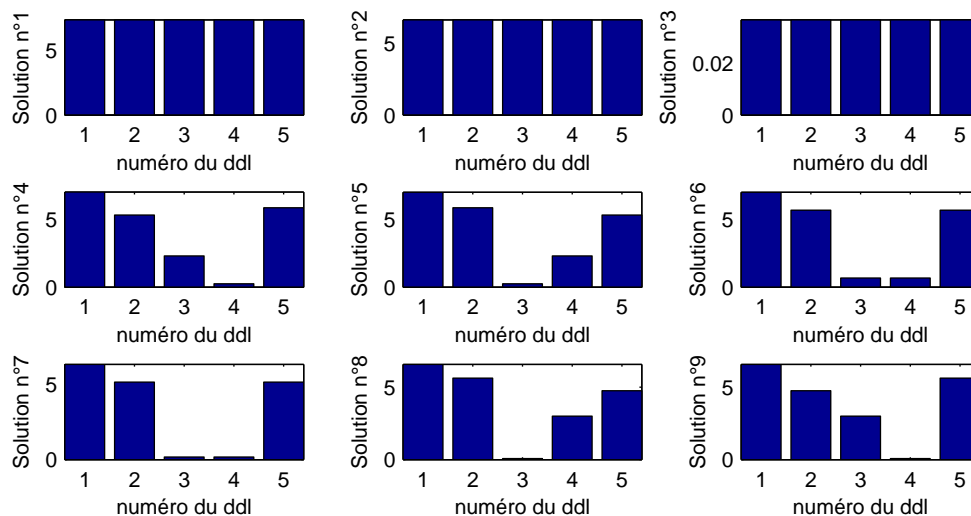


FIGURE 4.3 – Forme des neuf familles de solutions obtenues par la méthode des matrices de multiplication. Amplitude de la première harmonique en fonction du numéro du ddl

sont rappelées ici :

$$\begin{aligned} (2k_c + k - \omega^2 m)x_i + \omega c y_i - k_c x_{i-1} - k_c x_{i+1} + \frac{3}{4} k_{nl} (x_i^3 + x_i y_i^2) - 1 &= 0, \quad i = 1, \dots, 5 \\ (2k_c + k - \omega^2 m)y_i - \omega c x_i - k_c y_{i-1} - k_c y_{i+1} + \frac{3}{4} k_{nl} (x_i^2 y_i + y_i^3) - 0 &= 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nous recherchons les solutions multiples de ce système de 10 équations pour la pulsation particulière  $\omega_0 = 2.5 \text{ rad.s}^{-1}$  par la méthode des matrices de multiplication. Comme indiqué dans la table 4.4, l'espace quotient est dimension 633, ce qui signifie que les matrices de multiplication sont également de taille 633. Pour résoudre le système, on n'assemble que la matrice de multiplication  $\mathbf{M}_{x_1}$ , puis on calcule ses vecteurs propres. Après avoir normé ces vecteurs de telle manière que leurs premières composantes soient égales à 1, les solutions possibles du système sont extraites en ne considérant que les composantes des vecteurs associées aux variables elles-mêmes (dans notre cas, on ne retient que les 10 premières composantes, associées aux 10 variables  $x_i, y_i, i = 1, \dots, 5$ ). Sur les 633 solutions possibles, on ne retient que les 33 solutions réelles, et on les utilise comme points de départ d'un algorithme de Newton pour vérifier qu'elles sont effectivement solution du système algébrique (on rappelle que les solutions sont associées aux vecteurs propres communs à toutes les matrices de multiplication  $\mathbf{M}_{x_1}, \dots, \mathbf{M}_{x_n}, \mathbf{M}_{y_1}, \dots, \mathbf{M}_{y_n}$ ).

Dans notre cas, on observe que toutes les solutions possibles convergent vers une solution du système algébrique (4.52). Parmi ces 33 solutions, certaines sont équivalentes dans le sens où elles représentent la même solution à une rotation près. En regroupant les solutions équivalentes, on se retrouve avec seulement 9 solutions, dont les formes sont données sur la Fig.4.3.

Ces solutions correspondent au mouvement sur la courbe de résonance principale (solutions 1, 2 et 3), et à des mouvements plus ou moins localisés (solution 4 à 9). On observe également que certaines solutions sont symétriques entre-elles (ie les solutions 4, 5 et les solutions 8,9). Pour finir, on utilise ces 9 points de solutions comme points de départ d'une continuation par longueur d'arc pour inscrire ces solutions dans un diagramme plus global. Les résultats sont représentés sur la Fig.4.4. Après continuation des solutions, on se rend compte qu'il n'existe en fait que 3 familles de solutions, correspondant respectivement au mouvement sur le premier mode (solutions 1,2,

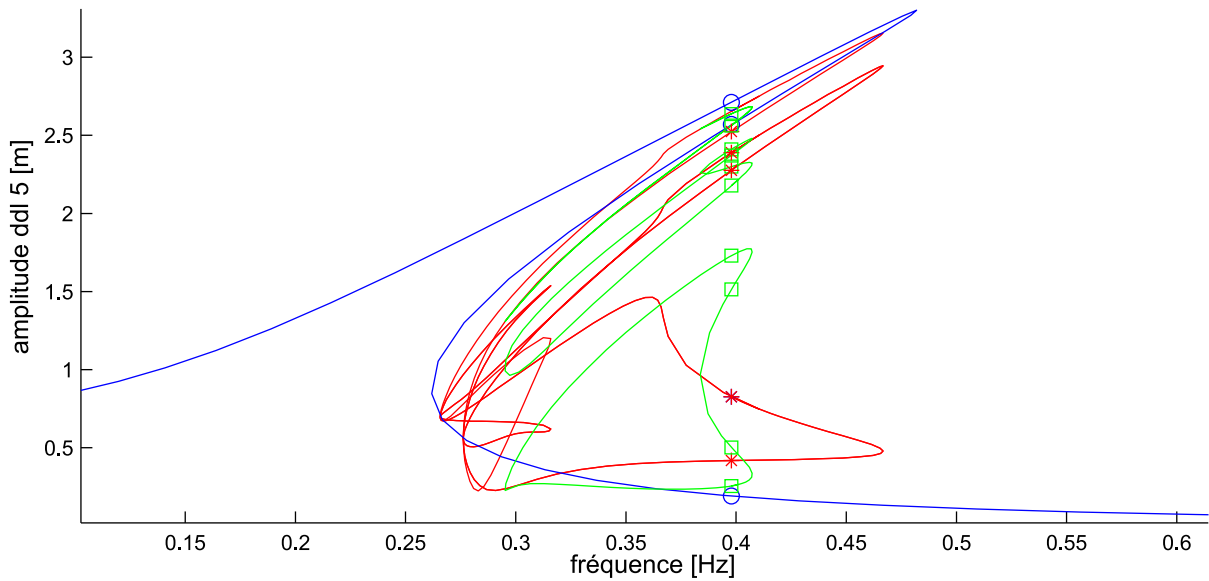


FIGURE 4.4 – Continuation des solutions multiples obtenues par la méthode des matrices de multiplication pour un système cyclique à 5 degrés de liberté

et 3, courbe bleu), à une première bifurcation (solutions 5 et 6, courbe rouge) et à une seconde bifurcation (solutions 4, 7, 8 et 9, courbe verte).

Cette application montre premièrement que l'utilisation de l'ordre grevlex est grandement recommandée pour le calcul des bases de Gröbner, et donc que la méthode des matrices de multiplication s'avérera être plus efficace que la méthode directe (avec l'ordre lexicographique). Ici, la méthode des matrices de multiplication a permis de trouver les solutions d'un problème à 10 variables, alors que le calcul d'une base pour l'ordre lexicographique n'a pas été possible. Comparée aux méthodes d'homotopie, la méthode des matrices de multiplication est également très avantageuse, puisque dans cet exemple, il suffit de calculer les valeurs propres d'une matrice de taille 633. Dans le cas d'une homotopie utilisant un polynôme de départ basé sur le degré total des équations, on aurait dû suivre  $3^{10} = 59049$  chemins, ce qui se serait révélé largement plus coûteux.

En revanche, on voit tout de même les limitations de cette méthode car pour un système à 6 ddl (12 variables), il faudrait environ deux semaines pour calculer la base de Gröbner pour l'ordre grevlex (voir Fig.4.2). Afin de pouvoir aller plus loin, nous proposerons à la section 4.5 de travailler sur le système forcé conservatif ce qui permettra de réduire la taille du problème traité.

### 4.3.5 Conclusions

Cette section présente l'utilisation des bases de Gröbner pour la résolution complète de systèmes d'équations polynomiales. La première méthode proposée repose sur le calcul d'une base de Gröbner pour un ordre d'élimination (l'ordre lexicographique par exemple). Cela permet de transformer le système de départ  $\mathbf{P}$  en un système  $\mathbf{G}$  qui possède une forme particulière et qui est plus facile à résoudre. La caractéristique principale des bases de Gröbner calculées ainsi est qu'il existe une équation polynomiale à une seule variable, qui est solvable par des méthodes classiques (méthode des matrices compagnons par exemple). Les autres équations de

la base permettent alors d'obtenir les valeurs des autres composantes par évaluation. Le principal désavantage de cette méthode est que le temps de calcul d'une base de Gröbner relativement à l'ordre lexicographique augmente rapidement avec le nombre de variables. Pour des non-linéarités cubiques, les tests numériques indiquent que la méthode est applicable pour des systèmes de taille inférieure à une dizaine de variables. Lazard [148] estime que les problèmes pour lesquels il y a une centaine de racines sont solvables par cette méthode.

L'autre méthode proposée dans cette section, repose sur l'utilisation des méthodes de l'algèbre linéaire pour résoudre les systèmes polynomiaux. En particulier, après avoir calculé une base de Gröbner de l'idéal, on peut l'utiliser pour déterminer une base de l'espace quotient en tant qu'espace vectoriel. Cette base est ensuite utilisée pour construire les matrices de multiplication. Enfin, le calcul des vecteurs propres des matrices de multiplication permet de remonter aux solutions du système polynômial de départ. Cette méthode a l'avantage de pouvoir utiliser n'importe quel ordre sur les monômes (en particulier l'ordre grevlex) ce qui permet d'obtenir des bases de Gröbner en un temps raisonnable. De plus, de nombreuses méthodes sont disponibles pour la résolution de problèmes aux valeurs propres (calcul des valeurs propres réelles seulement, calcul parallèle des valeurs propres,...). Cependant, l'application de cette méthode est encore limitée par le nombre de variables et le degré maximum du système de départ. En effet, plus le nombre de variables est élevé, plus il existe de solutions pour le système, et plus la taille des matrices de multiplication est grande, ce qui peut poser problème si l'on en recherche toutes les valeurs propres. Dans le but de diminuer la taille des matrices de multiplication, on propose dans la section suivante une méthode reposant sur l'utilisation des groupes laissant les équations invariantes.

## 4.4 Résolution des systèmes à symétrie cyclique : polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini

Nous présentons ici une adaptation de la méthode des matrices de multiplication au cas de systèmes polynomiaux non-linéaires qui possèdent certaines propriétés de symétrie. Dans la partie précédente, les matrices de multiplication étaient associées aux variables elles mêmes (ie  $\mathbf{M}_{x_1}, \mathbf{M}_{x_2}, \dots$ ). Ici, nous allons rechercher de nouvelles variables  $\pi_1, \pi_2, \dots$ , liées aux propriétés de symétrie (plus précisément invariantes), et considérer les matrices de multiplication associées (ie  $\mathbf{M}_{\pi_1}, \mathbf{M}_{\pi_2}, \dots$ ). Plus précisément, on considérera uniquement un sous-bloc de ces matrices, puisqu'on peut montrer que celle-ci sont diagonales par bloc, et que tous les blocs sont équivalents. Ainsi, on se retrouvera avec des matrices de taille réduite pour estimer la valeurs des variables  $\pi_i$  aux points de solutions. Finalement, on pourra utiliser ces valeurs pour remonter aux valeurs des variables  $x_i$ .

### 4.4.1 Système invariant

On suppose maintenant que le système d'équations polynomiales est invariant selon certains changements de coordonnées (exemple typique des systèmes à symétrie cyclique). En notant  $g$  une opération de permutation des coordonnées (ie  $g(\mathbf{x}) = [x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)}]$ ), l'invariance du système d'équation par rapport à l'élément  $g$  se traduit par [160] :

$$\mathbf{P}(g(\mathbf{x})) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (4.53)$$

Ce cas d'invariance est relativement rare car chaque équation doit être invariante par rapport à  $g$ . Dans le cas des systèmes à symétrie cyclique, on observe plutôt des systèmes dits équivariants,

caractérisés par la relation suivante :

$$\mathbf{P}(g(\mathbf{x})) = g(\mathbf{P})(\mathbf{x}) \quad (4.54)$$

avec  $g(\mathbf{P}) = [p_{g(1)}, \dots, p_{g(n)}]$ . Dans ce cas, c'est le système qui est globalement invariant par rapport au changement de coordonnées, et l'idéal engendré par  $\mathbf{P}$  est le même que celui engendré par  $g(\mathbf{P})$ .

Ces changements de coordonnées peuvent être formalisés par un groupe  $G$  (au sens algébrique), et on peut définir l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  qui sont invariants sous l'effet du groupe  $G$  noté  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$  par :

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G = \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \text{ tel que } f(g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), \forall g \in G\} \quad (4.55)$$

#### 4.4.2 Décomposition et invariants polynomiaux

On suppose donc que notre système  $\mathbf{P}$  est équivariant sous l'effet d'un groupe  $G$ . On note  $\mathcal{I} = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$  l'idéal engendré par le système d'équations polynomiales  $\mathbf{P}$ , et on définit l'idéal invariant par  $\mathcal{I}^G = \mathcal{I} \cap \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ . On peut montrer que l'ensemble des polynômes  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  peut se décomposer sous la forme de la somme directe suivante [160, 161] :

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_K \quad (4.56)$$

où les  $V_i$  sont appelées composantes isotypiques. Cela signifie que l'on peut décomposer tout polynôme de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  comme la somme directe d'un polynôme invariant par le groupe  $G$  et d'un polynôme appartenant à un espace complémentaire.

De la même manière, en définissant  $\mathcal{I}_i = \mathcal{I} \cap V_i$ , l'espace quotient  $\mathbb{A} = \frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}]}{\mathcal{I}}$  se décompose sous la somme directe suivante [161] :

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}[\mathbf{x}]/\mathcal{I} = \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G/\mathcal{I}^G \oplus V_2/\mathcal{I}_2 \oplus \dots \oplus V_K/\mathcal{I}_K \quad (4.57)$$

On se concentre maintenant sur l'espace des polynômes invariants  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ . On peut montrer que cet ensemble se décompose sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G = \oplus S_i \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}] = \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}] \oplus S_2 \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}] \oplus S_3 \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}] \oplus \dots \quad (4.58)$$

où  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_n]$  correspond aux invariants polynomiaux primaires du groupe  $G$ , et  $(S_2, S_3, \dots)$  sont les invariants secondaires du groupe. Dans certains cas particuliers on aura  $S_2 = S_3 = \dots = 0$  et donc  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G = \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}]$ , ce qui signifiera dans ce cas que l'espace des polynômes invariants par  $G$  correspondra à l'espace des polynômes de la variable  $\boldsymbol{\pi}$ .

Les invariants primaires  $\boldsymbol{\pi}$  peuvent être trouvés en utilisant une représentation matricielle des actions du groupe  $G$ . Ces matrices sont des matrices  $(\mathbf{A}_g)$  de  $\mathbb{R}^n$  qui agissent sur un vecteur de variables  $\mathbf{x}$  de sorte que  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_g \mathbf{x}$  pour chaque  $g \in G$ . On définit alors l'opérateur projection de Reynolds pour un polynôme  $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  par [162] :

$$\text{Re}_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g(\mathbf{x})) = \frac{1}{|G|} \sum_{\mathbf{A}_g \in G} f(\mathbf{A}_g \mathbf{x}) \quad (4.59)$$

Cet opérateur permet de déterminer si un polynôme est invariant sous l'action du groupe. En effet, on a  $f$  invariant par  $G$  si et seulement si  $\text{Re}_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . De plus, cet opérateur permet également de construire des invariants à partir de n'importe quel polynôme  $f$  (on a  $\forall f \text{ Re}_f[\text{Re}_f(\mathbf{x})] = \text{Re}_f(\mathbf{x})$ ). Pour calculer l'ensemble des invariants primaires, il suffit alors de calculer les projections de Reynolds pour chaque monôme  $\mathbf{x}^\alpha$  de degré total inférieur à  $|G|$ . Il faut tout de même éliminer les redondances qui peuvent apparaître, on peut utiliser le calcul de bases de Gröbner pour cela [162].



### 4.4.3 Matrice de multiplication des invariants primaires

#### 4.4.3.1 Décomposition et application à la résolution du système polynomial cible

Les invariants primaires  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_n]$  du groupe  $G$  sont une famille particulière de monômes de  $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ . En supposant que l'on connaisse les valeurs des invariants  $\pi_1, \dots, \pi_n$ , on est en mesure de retrouver les valeurs des composantes de  $\boldsymbol{x}$  correspondantes, en résolvant un système du type suivant :

$$\begin{aligned} \pi_1(\boldsymbol{x}) &= c_1 \\ &\vdots \\ \pi_n(\boldsymbol{x}) &= c_n \end{aligned} \tag{4.60}$$

On cherchera donc à obtenir les valeurs des invariants primaires aux points de solution du système  $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ . Pour cela, on utilise la méthode des matrices de multiplication déjà présentée à la section 4.3.3.2 (ie calcul des matrices de multiplication  $\mathbf{M}_{\pi_i}$ , et résolution des problèmes aux valeurs propres). A ce stade, nous avons simplement remplacé la recherche des solutions  $\boldsymbol{x}$  par la recherche des solutions  $\boldsymbol{\pi}$ .

L'avantage d'utiliser les invariants primaires, tient au fait que l'on peut montrer que les matrices de multiplication associées aux invariants primaires peuvent être diagonales par bloc dans une base  $\boldsymbol{B}'$  de  $\mathbb{A}$  qui est adaptée à la décomposition du quotient (Eq.(4.57)) (ie  $[b'_1, \dots, b'_{n_1}]$  base de  $\frac{\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]^G}{\mathcal{I}^G}$ , etc) ([161], Thm 3). De plus les blocs diagonaux d'une même matrice sont dans un certain sens équivalents puisqu'on peut observer qu'ils ont les mêmes valeurs propres ([161], prop. 8). Par conséquent, il suffit de se concentrer sur le premier bloc, noté  $\mathbf{M}_{\pi_i}^{(1)}$ , pour obtenir toutes les valeurs des invariants primaires. On note  $\lambda_k^i, k = 1..n_1$  les valeurs propres des matrices  $\mathbf{M}_{\pi_i}^{(1)}, i = 1..n$ , ces valeurs propres correspondent aux valeurs des invariants  $\pi_i$  évaluées aux points de solution de  $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$  et on peut donc définir les systèmes suivants :

$$\mathcal{S}_k : \begin{aligned} \pi_1(\boldsymbol{x}) &= \lambda_k^1 \\ &\vdots \\ \pi_n(\boldsymbol{x}) &= \lambda_k^n \end{aligned}, \quad k = 1..n_1 \tag{4.61}$$

En résolvant chacun des systèmes  $\mathcal{S}_k$  pour la variable  $\boldsymbol{x}$ , on obtient une orbite de solutions, et on retrouve les autres solutions par application des actions du groupe  $G$ . L'un des avantages principaux de cette méthode, est qu'on peut simplement utiliser un algorithme de Newton pour résoudre le système (4.61), puisqu'une seule solution suffit, les autres étant retrouvées par application des actions du groupe  $G$ .

Pour appliquer ce raisonnement, il reste cependant à trouver une base  $\boldsymbol{B}'$  qui rende la matrice de multiplication diagonale par bloc. Plus précisément il suffit de trouver une base  $(b'_1, \dots, b'_{n_1})$  de  $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]^G/\mathcal{I}^G$  qui nous permette de calculer ensuite les premiers blocs  $\mathbf{M}_{\pi_i}^{(1)}$ .

#### 4.4.3.2 Construction de la base du quotient invariant

Le but est de construire les matrices de multiplication des invariants  $\pi_i$  en utilisant la méthode donnée dans la section 4.3.3.2. Par exemple, pour  $\pi_1$ , on doit effectuer les produits  $\pi_1 b'_j$  et exprimer le résultat en fonction des vecteurs de la base  $\boldsymbol{B}'$  en accord avec l'équation (4.67). Pour cela, on utilise l'opération de réduction modulo l'idéal (après avoir calculé une base de Gröbner), ce qui permet de calculer le reste  $h = \text{NF}(\pi_1 b'_j, G)$ .

On veut trouver une base (d'invariants) qui permet d'exprimer tous les restes  $h$  qui peuvent arriver dans les produits  $\pi_1 b_j$  (puis par extension dans tous les produits  $\pi_i b_j$ ). Ainsi, on travaillera

itérativement sur les produits  $\pi_1 b_j$   $j = 1..n$ . Premièrement, on calcule le reste  $h = \text{NF}(\pi_1 b'_j, G)$ , puis on recherche dans la base s'il existe des vecteurs dont le monôme dominant divise le monôme dominant de  $h$ .

- Si un tel monôme  $b_k$  existe, on effectue la division de  $h$  par  $b_k$  :  $h = M_{b_j, b_k} b_k + r$  et on note le coefficient  $M_{b_j, b_k}$  (coefficient numérique car base d'un espace vectoriel). Enfin on retire la participation de  $b_k$  dans  $h$  en affectant  $h = \text{NF}(h, b_k)$ .
- S'il n'existe pas de monôme divisant  $h$ , on considère le terme de plus haut degré  $f = \text{LM}(h)$  et on construit un invariant associé par la projection de Reynolds  $f^G = \text{Re}_f(\mathbf{x})$  (Eq.(4.59)). Ce nouveau polynôme  $f^G$ , qui permet maintenant de diviser  $h$ , est ajouté à la base  $\mathcal{B}$ . On retire ensuite sa participation à  $h$  en affectant  $h = \text{NF}(h, f^G)$ .

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que tous les termes de la base soient parcourus. Enfin, on ré-applique la procédure sur les autres invariants  $\pi_i$   $i = 1..m$  pour voir si l'on n'a pas oublié de vecteurs dans la base  $\mathcal{B}$ .

On peut résumer cette procédure dans l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 6** Algorithme utilisé pour déterminer une base de l'espace invariant, permettant le calcul des matrices de multiplication des invariants primaires

---

```

initialiser  $b_1 = 1, \dots, b_{n_0} = \pi_m$ 
 $n_1 = n_0$ 
 $j = 0$ 
while  $j < n_1$  do
   $j = j + 1$ 
  calculer  $p = \pi_1 b_j$ , puis calculer le reste modulo l'idéal  $h = \text{NF}(p, G)$ 
  while  $h \neq 0$  do
    if il existe un  $b_k$  qui divise  $h$  then
      noter le coefficient  $M_{b_j, b_k}$  tq  $h = M_{b_j, b_k} b_k + h_2$ 
      calculer  $h = h_2 = \text{NF}(h, b_k)$ 
    else
      prendre  $f = \text{LM}(h)$  [leading monomial]
      calculer l'invariant associé  $f^G = \text{Re}_f(\mathbf{x})$ 
      ajouter  $f^G$  à la base,  $n_1 = n_1 + 1$ 
      noter le coefficient  $M_{b_j, f^G}$  tq  $h = M_{b_j, f^G} f^G + h_2$ 
      calculer  $h = h_2 = \text{NF}(h, f^G)$ 
    end if
  end while
end while

```

---

#### 4.4.4 Exemple d'applications sur un système à symétrie cyclique

On applique ici la méthode présentée dans cette section à la recherche des solutions du système non-amorti et non-forcé (modes non-linéaires) de l'équation (4.9) rappelée ici :

$$\alpha x_i - \beta x_{i-1} - \beta x_{i+1} + \gamma x_i^3 = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.62)$$

avec  $\alpha = k + 2k_c - \omega^2 m$  ( $\alpha = k + k_c - \omega^2 m$  si  $n = 2$ ),  $\beta = k_c$ ,  $\gamma = \frac{3}{4} k_{nl}$ .

Le fait de considérer un système non-forcé permet ici de rendre le système invariant par changement de signe des variables. On appliquera la méthode présentée dans la partie précé-

dente un exemple à 2 ddl ( $n = 2$ ) on comparera les résultats avec la méthode des matrices de multiplication exposée à la section 4.3.3.2

#### 4.4.4.1 Définition des groupes laissant les équations invariantes

On considère ici le système à 2 variables de l'équation (4.62) (avec  $\alpha = k + k_c - \omega^2 m$ ) et on en recherche les solutions multiples pour la pulsation particulière  $\omega = 2.5 \text{rad.s}^{-1} \approx 0.4 \text{Hz}$ . Ce système a la particularité d'être déjà sous la forme d'une base de Gröbner pour n'importe quel ordre monomial comparant d'abord les termes par le degré total, donc en particulier pour l'ordre grevlex. En effet, étant donné que les monômes dominants de chaque équation sont premiers entre eux, on peut en déduire que le système est bien une base de Gröbner, et que le nombre de solution de ce système est maximum et égal à la dimension de l'espace quotient [163]. On peut alors déterminer une base  $\mathcal{B}$  de l'espace quotient en tant qu'espace vectoriel par application de l'opération réduction modulo la base de Gröbner. Cette base est donnée par :

$$\mathcal{B} = [1, x_2, x_1, x_2^2, x_1 x_2, x_1^2, x_2^2 x_1, x_2 x_1^2, x_2^2 x_1^2] \quad (4.63)$$

Le nombre d'éléments de la base est de 9. Par conséquent l'espace quotient  $\mathbb{A}$  est de dimension 9 et le système  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  a 9 solutions. Les matrices de multiplication des variables  $x_1$  et  $x_2$  (reps.  $\mathbf{M}_{x_1}$  et  $\mathbf{M}_{x_2}$ ), définies par  $x_1 \mathcal{B} = \mathbf{M}_{x_1} \mathcal{B}$  (resp.  $x_2 \mathcal{B} = \mathbf{M}_{x_2} \mathcal{B}$ ), sont de taille  $9 \times 9$ , mais n'ont pas de structure particulière. Il faudrait donc calculer les 9 valeurs propres associées pour obtenir les solutions de  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Ici, on applique la méthode prenant en compte les groupes laissant le système d'équations invariant. Dans cet exemple, il y a au moins 3 groupes qui laissent les équations invariantes :

- invariant par changement de coordonnées, groupe  $\mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{e, a \mid a^2 = e\}$   $a[(x_1, x_2)] = (x_2, x_1)$
- invariant par changement de signe, groupe  $\mathbb{Z}_2 = \{e, b \mid b^2 = e\}$   $b[(x_1, x_2)] = (-x_1, -x_2)$
- invariant par rotation et changement de signe, groupe  $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

La loi de composition interne des groupes est l'application "composée" ( $f \circ g(x) = f(g(x))$ ). Dans un premier temps, on traitera seulement le cas de l'invariance par rapport à un changement de coordonnées, puis on considèrera l'invariance par changement de coordonnées et par changement de signe.

#### 4.4.4.2 Groupe cyclique $\mathcal{C}_2$

On considère tout d'abord l'invariance seulement par rapport au groupe cyclique  $\mathcal{C}_2$ . On rappelle que  $\mathcal{C}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{e, a \mid a^2 = e\}$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , ce groupe peut être représenté par les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

et on peut écrire :

$$e[(x_1, x_2)] = \mathbf{M}_e \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad a[(x_1, x_2)] = \mathbf{M}_a \mathbf{x} = (x_2, x_1) \quad (4.65)$$

#### Calcul des invariants primaires

On recherche ici les invariants primaires de ce groupe. Pour cela, il suffit de calculer les projections de Reynolds de tous les monômes de degré total inférieur à 2 (car le groupe contient 2 éléments). On doit donc calculer 6 projections résumées dans la table 4.5.

4.4. Résolution des systèmes à symétrie cyclique : polynômes invariants sous l'action d'un groupe fini

monome $f$	1	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_1x_2$	$x_2^2$
projection $\text{Re}_f(\mathbf{x})$	1	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$	$x_1x_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

TABLE 4.5 – Projection de Reynolds pour le groupe  $\mathbb{Z}_2$

Ici, on observe des redondances parmi les invariants obtenus : par exemple, si on note  $\pi_1 = x_1 + x_2$ ,  $\pi_2 = x_1x_2$ ,  $\pi_3 = x_1^2 + x_2^2$  on voit que  $\pi_3 = \pi_1^2 - 2\pi_2$  et donc que  $\pi_3$  peut s'exprimer en fonction de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . On choisira donc seulement les invariants  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2]$  et on aura alors  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathcal{C}_2} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\pi}]$ .

Une vérification avec le logiciel singular (commande `invariant_ring`), nous donne les mêmes résultats, et on sait de plus qu'il n'y a pas d'invariants secondaires (ie  $S_2 = 0$ ).

### Table de multiplication des invariants

Une fois les invariants déterminés, le but est de construire les tables de multiplication des invariants par rapport à une base  $\mathcal{B}$  qui va rendre les matrices diagonales par bloc. Le premier bloc des matrices de multiplication est associé à l'espace invariant  $\mathbb{A}^{\mathcal{C}_2} = \frac{\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{\mathcal{C}_2}}{I^{\mathcal{C}_2}}$ . Les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  (qui sont des polynômes) devront donc également être invariants par rapport aux actions du groupe  $\mathcal{C}_2$ .

En notant  $\mathbf{B} = [b_1, \dots, b_{n_s}]$  les éléments de la base  $\mathcal{B}$ , les matrices de multiplications  $\mathbf{M}_{\pi_i}$  sont définies par :

$$\pi_i \mathbf{B} = \mathbf{M}_{\pi_i} \mathbf{B} \quad (4.66)$$

Sous forme indicielle, cette équation devient :

$$\pi_i b_i = \sum_{j=1}^{n_s} \mathbf{M}_{\pi_i}(i, j) b_j \quad (4.67)$$

Pour les premiers vecteurs de la base :  $(b_1, \dots, b_{n_1})$ , on choisira des polynômes invariants de monômes dominants tous différents (par rapport à l'ordre monomial grevlex) ce qui assure qu'ils forment bien une base de l'espace invariant.

On va construire la base de manière itérative. Dans un premier temps, il semble raisonnable d'inclure les invariants primaires dans notre base. On pose donc  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = \pi_1 = x_1 + x_2$ ,  $b_3 = \pi_2 = x_1x_2$ . A priori, on peut aussi inclure  $b_4 = \pi_3 = x_1^2 + x_2^2$  car il est de terme dominant  $x_1^2$  qui n'était pas encore inclu dans la base. On va voir que ce terme aurait aussi pu être calculé par l'application de l'algorithme 6, décrit dans la suite.

Dans un premier temps, on calcule les formes normales des produits  $\pi_1 b_j$ . Les résultats sont donnés dans la table 4.6.

produit $f = \pi_1 b_j$	$\pi_1 b_1 = x_1 + x_2$	$\pi_1 b_2 = (x_1 + x_2)^2$	$\pi_1 b_3 = x_1x_2(x_1 + x_2)$
$h = \text{NF}(f, G)$	$b_1$	$2b_2 + (x_1^2 + x_2^2)$	$x_1^2x_2 + x_2^2x_1$

TABLE 4.6 – Expression des formes normales produits  $\pi_1 b_j$  (première passe)

Cette première étape nous permet d'identifier deux vecteurs de base supplémentaires qui sont  $b_4 = x_1^2 + x_2^2$  et  $b_5 = x_1x_2(x_1 + x_2) = \pi_1\pi_2$ . On calcule alors leurs produits avec  $\pi_1$  dans la table 4.7. La deuxième passe nous livre le vecteur supplémentaire  $b_6 = x_1^2x_2^2$ . On effectue une

$$\begin{array}{l} \text{produit } f = \pi_1 b_j \quad \pi_1 b_4 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) \quad \pi_1 b_5 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 \\ h = \text{NF}(f, G) \quad 7b_2 + b_5 \quad \frac{34}{3}b_3 + \frac{4}{3}b_4 + 2x_1^2 x_2^2 \end{array}$$

TABLE 4.7 – Expression des formes normales produits  $\pi_1 b_j$  (deuxième passe)

dernière passe qui donne  $\pi_1 b_6 = \frac{28}{3}b_2 + \frac{17}{3}b_5$ , et qui ne rajoute pas de nouveau vecteur à la base. Pour finir, on vérifie qu'il n'existe pas de nouveaux éléments en considérant le calcul des formes normales des produits  $\pi_2 b_j$ . Dans notre cas, toutes ces formes normales s'expriment en fonction des vecteurs  $b_i$  de la base que l'on vient de calculer. On a donc trouvé une base de l'espace invariant à 6 éléments.

Le premier bloc de la matrice de multiplication (de taille  $6 \times 6$ ) relativement à la base  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_6)$  peut être formé en utilisant les résultats des calculs précédents et est donné par :

$$\mathbf{M}_{\pi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{28}{3} & 0 & 0 & \frac{17}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

De la même manière, la matrice de multiplication associée à  $\pi_2$  est donnée par :

$$\mathbf{M}_{\pi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{34}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{28}{3} & 0 & 0 & \frac{17}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{309}{9} & \frac{68}{9} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

On observe que les premières colonnes de chaque matrice sont nulles. Cela est lié au fait que les forces ont été choisies nulles ( $f_1 = f_2 = 0$  dans Eq.(4.62)).

### Résolution du système

Le calcul des valeurs propres des matrices de multiplication précédemment calculées donne 6 couples  $(\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$  qui définissent 6 systèmes d'équations de la forme (4.61). Les couples sont les suivants :

$$(\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}) \in \{(0, 0), (-5.29, 7), (-1.73, -1.33), (1.73, -1.33), (5.29, 7), (0, -4.33)\} \quad (4.70)$$

Les systèmes  $\mathcal{S}_k$  de l'équation (4.61) sont alors donnés par :

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \lambda_{\pi_1}^k \\ x_1 x_2 = \lambda_{\pi_2}^k \end{array} \quad (4.71)$$

donne 6 couples  $(x_1, x_2)$  de solution de  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0$  qui sont :

$$(x, y) \in \{(0, 0), (-2.64, -2.64), (-2.3, 0.57), (-0.57, 2.30), (2.64, 2.64), (-2.08, 2.08)\} \quad (4.72)$$

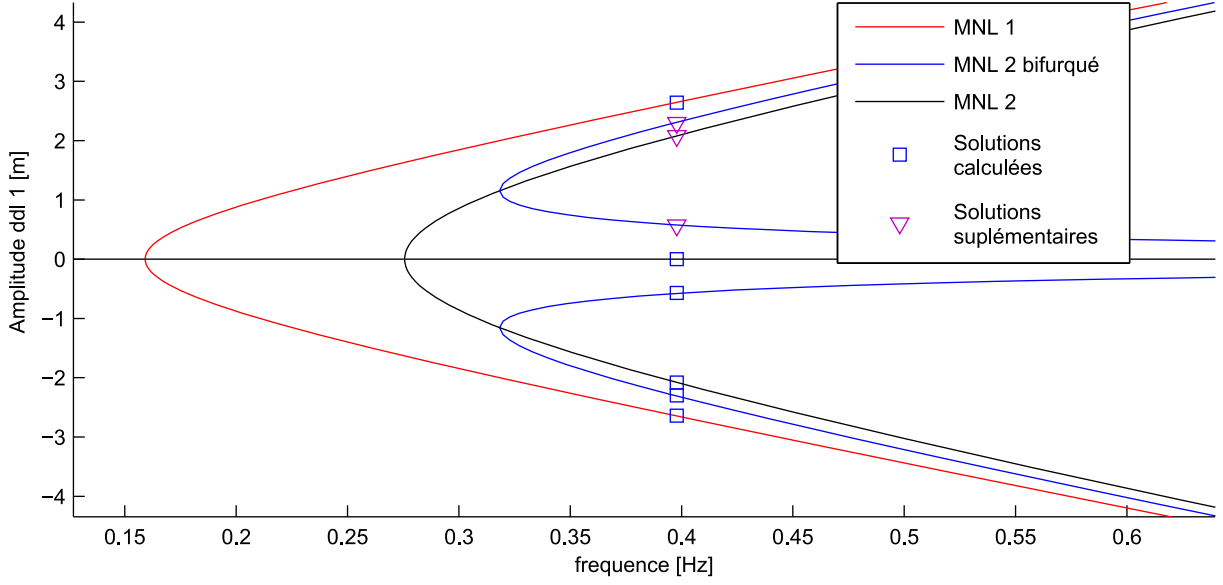


FIGURE 4.5 – Représentation des solutions multiples pour le système à 2 ddl pour une fréquence de 0.4Hz (invariance par rapport à  $\mathbb{Z}_2$ ). Les courbes en trait continu représentent les backbone curves des différents modes non-linéaires calculés au chapitre 1, section 1.2.4.3.

En appliquant les actions du groupe  $\mathcal{C}_2$  sur ces solutions, on génère 3 solutions supplémentaires qui sont  $\{(0.57, -2.3), (2.3, -0.57), (2.08, -2.08)\}$ . Ces solutions sont représentées sur la Fig.4.5, où on a également représenté les backbone curves des modes non-linéaires calculés au chapitre 1, on retrouve bien les 9 solutions attendues.

Dans cet exemple nous avons considéré l'invariance par permutation des variables, ce qui a permis de réduire la tailles des matrices de multiplication de 9 à 6. Nous allons maintenant re-considérer ce même exemple, mais en utilisant un groupe plus gros, prenant également en compte l'invariance par changement de signe. Cela permettra de réduire encore plus la taille des matrices de multiplication.

#### 4.4.4.3 Groupe $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$

On considère maintenant l'invariance par rapport à la permutation des coordonnées et par changement de signe, représentée par le groupe  $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$  avec  $\mathbb{Z}_2 = \{e, a \mid a^2 = e\}$ . Il s'agit d'un groupe à 4 éléments, non-cyclique. Dans  $\mathbb{R}^2$ , ce groupe peut être représenté par les quatre matrices suivantes :

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

#### Calcul des invariants

Pour le calcul des invariants primaires, on doit calculer les projections de Reynolds de tous les monômes de degré inférieur à 4. Ces calculs sont résumés dans la table 4.8. On choisit alors les deux invariants  $\pi_1 = x_1 x_2$ ,  $\pi_2 = x_1^2 + x_2^2$  comme invariants primaires.

monome $f$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_1^2x_2$	$x_2^2x_1$
projection $\text{Re}_f(\mathbf{x})$	0	0	$x_1x_2$	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2x_2 + x_1x_2^2$	$x_1^2x_2 + x_2^2x_1$
	$x_1^3$	$x_2^3$	$x_1^2x_2^2$	$x_1x_2^3$	$x_1^3x_2$	$x_1^4$	$x_2^4$
	0	0	$x_1^2x_2^2$	$x_1x_2^3 + x_1^3x_2$	$x_1^3x_2 + x_1x_2^3$	$x_1^4 + x_2^4$	$x_1^4 + x_2^4$

TABLE 4.8 – Projection de Reynolds pour le groupe  $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$

### Calcul des tables de multiplication

En appliquant la procédure récursive de l'algorithme 6, on obtient cette fois une base  $\mathcal{B}$  à 4 éléments  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = x_1x_2$ ,  $b_3 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $b_4 = x_1^2x_2^2$  qui permet d'exprimer le premier bloc des matrices de multiplication sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_{\pi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{34}{9} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{305}{9} & \frac{68}{9} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\pi_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{34}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{17}{3} & 2 \\ 0 & \frac{136}{9} & \frac{16}{9} & \frac{34}{3} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

### Calcul des solutions

Le calcul des vecteurs propres de la matrice de multiplication associée à la variable  $\pi_1$  donne les couples suivants comme solutions :

$$(\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}) \in \{(0, 0), (7, 14), (-4.33, 8.66), (-1.33, 5.66)\} \quad (4.75)$$

et les solutions obtenues en résolvant le système :

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \lambda_{\pi_1} \\ x_1^2 + x_2^2 &= \lambda_{\pi_2} \end{aligned} \quad (4.76)$$

par la méthode de Newton sont données par :

$$(x, y) \in \{(0, 0), (2.64, 2.64), (2.08, -2.08), (-0.57, 2.3)\} \quad (4.77)$$

On obtient donc 4 solutions et en appliquant les actions du groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , on génère 5 nouvelles solutions. Ces solutions sont représentées sur la Fig.4.6. Une fois encore, on retrouve bien les 9 solutions attendues.

Cet exemple illustre bien le fait que plus le groupe laissant les équations invariantes est gros, plus la taille des matrices de multiplication est réduite. En effet, en ne considérant aucune symétrie, les matrices sont de tailles 9, en considérant l'invariance par permutation des coordonnées, les matrices sont de taille 6, et si on considère de plus l'invariance par changement de signe, les matrices sont de taille 4. Il est donc important de s'attacher à rechercher le groupe qui laisse les équations invariantes, le plus gros possible.

#### 4.4.5 Conclusions

L'application de méthodes prenant en compte les groupes  $G$  laissant globalement invariant le système d'équations semble prometteuse puisqu'elle permet de réduire le nombre de solutions des équations. En effet, la résolution d'un système polynomial  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  est ramenée à la résolution

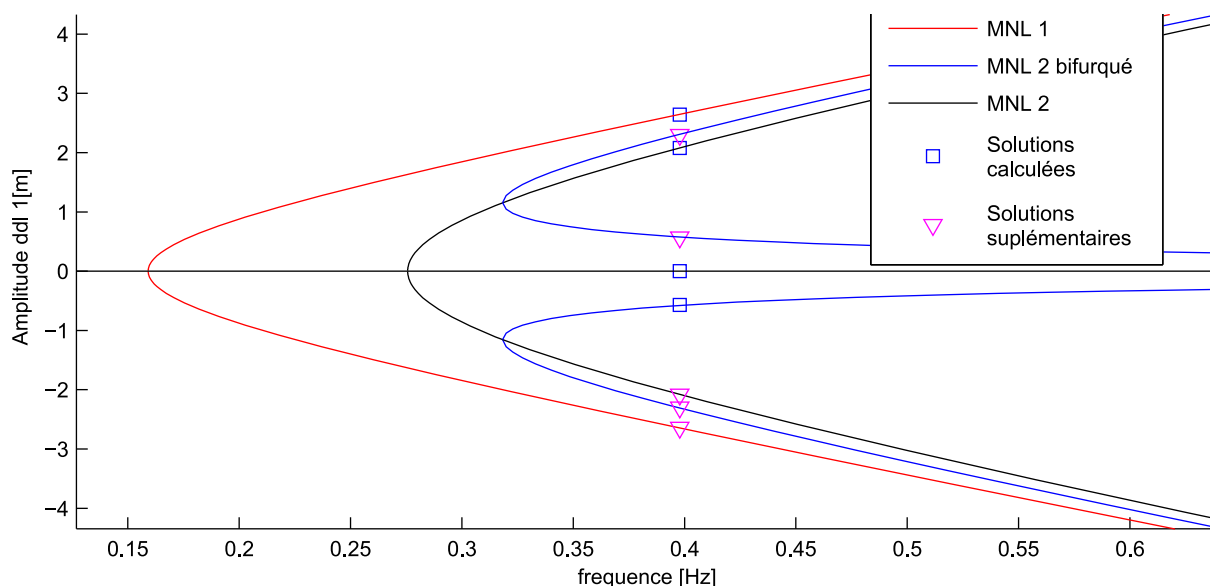


FIGURE 4.6 – Représentation des solutions multiples pour le système à 2 ddl pour une fréquence de 0.4Hz (invariance par rapport à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ). Les courbes en trait continu représentent les backbone curves des différents modes non-linéaires calculés au chapitre 1, section 1.2.4.3.

de  $n_1$  sous-systèmes  $\mathcal{S}_k$  faisant intervenir les invariants primaires du groupe  $G$ . L'avantage est qu'il est suffisant d'obtenir une seule solution par sous-système, les autres étant déterminées par application des actions du groupe. La méthode de Newton est alors tout à fait adaptée à la résolution des sous-systèmes.

Pour appliquer cette méthode, il faut disposer d'une base de Gröbner  $\mathbf{G}$  de l'idéal  $I$  engendré par le système polynomial ainsi que d'une procédure permettant d'évaluer la forme normale de n'importe quel polynôme par rapport à  $\mathbf{G}$ . On évalue ensuite les invariants primaires  $\pi$  du groupe  $G$  par application des projections de Reynolds (l'élimination des redondances dans les invariants primaires peut éventuellement poser une difficulté). On recherche une base de l'espace quotient invariant  $\mathbb{A}^G$  qui permet d'exprimer les matrices de multiplication relatives aux invariants  $\pi$ . Enfin, on utilise ces matrices de multiplication pour déterminer les valeurs des invariants aux points de solution, ce qui permet de définir les sous-systèmes  $\mathcal{S}_k$ . Les solutions sont alors obtenues par résolution des sous-systèmes et par application des actions du groupe  $G$ .

## 4.5 Continuation en amortissement

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la résolution complète des systèmes polynômiaux n'est applicable que pour des systèmes de petite taille (une dizaine d'équations). Au niveau de la HBM, cela se traduit en pratique par la recherche de solutions à un seul harmonique, ce qui permet de limiter le nombre d'équations à  $\tilde{n} = n(2 \times 1 + 1) = 3n$  ( $2n$  dans le cas d'une solution sans composante statique). On propose ici de réduire encore le nombre d'équation en travaillant sur le système non-amorti. On fera l'hypothèse que les solutions sont en phase avec l'excitation pour un système conservatif et dont la non-linéarité ne dépend que du déplacement, ce qui permet de rechercher les solutions avec deux fois moins de variables algébriques. Par exemple, pour une excitation en  $\cos(\omega t)$ , on recherche les solutions en utilisant



uniquement la fonction  $\cos(\omega t)$  dans le développement de la HBM (cas d'une recherche à un seul harmonique) cela permet de réduire le nombre d'équations à  $\tilde{n} = (1 + 1)n = 2n$  ( $n$  dans le cas d'une solution sans composante statique). La solution du système amorti est alors retrouvée en continuant la solution du système non-amorti par rapport à un paramètre contrôlant le niveau d'amortissement. Notons que ces travaux ont été présentés à la conférence CSMA 2013 [164].

### 4.5.1 Stratégie proposée

Pour détailler la méthode de continuation en amortissement, on introduit le système d'équations suivant :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega, \epsilon) = \mathbf{\Lambda}(\omega, \epsilon)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ex} = \mathbf{0} \quad (4.78)$$

avec  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T]$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}^T = [(\mathbf{F}_{nl}^{1c})^T, (\mathbf{F}_{nl}^{1s})^T]$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{ex}^T = [(\mathbf{F}_{ex}^{1c})^T, (\mathbf{F}_{ex}^{1s})^T]$  et :

$$\mathbf{\Lambda}(\omega, \epsilon) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \epsilon \omega \mathbf{C} \\ -\epsilon \omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Ce système est issu de l'application de la HBM au système (4.1) en utilisant une approximation à une harmonique et sans composante continue. Le paramètre  $\epsilon$  est introduit pour contrôler le niveau l'amortissement ( $\epsilon \in [0, 1]$ ).

Dans un premier temps, la méthode consiste à déterminer toutes les solutions du système non-amorti ( $\epsilon = 0$ ) pour une fréquence fixe  $\omega = \omega_0$ . Dans ce cas, les solutions de l'équation (4.78) sont de la forme  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{a}_1^T, \mathbf{0}^T]$  où  $\mathbf{a}_1$  est donné par la résolution du système algébrique (non amorti) à  $n$  équations suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^{1c}(\mathbf{a}_1) - \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^{1c} = 0 \quad (4.80)$$

La résolution de ce système peut par exemple être réalisée par la méthode des matrices de multiplication présentée à la section 4.3.3.2.

Une fois que toutes les solutions du système non-amorti (4.80) ont été calculées, on les utilise comme point de départ pour une continuation en amortissement. Une première manière de définir la continuation serait de fixer la fréquence, puis d'effectuer une continuation séquentielle sur le paramètre  $\epsilon$ . Cependant, le changement du niveau d'amortissement n'assure pas toujours l'existence de la solution pour la fréquence considérée. On propose ici d'utiliser une méthode de continuation à deux paramètres  $\epsilon$  et  $\omega$  ce qui permettra de suivre l'évolution fréquentielle des solutions en fonction du taux d'amortissement. La méthode de continuation utilisée ici est standard dans le sens où elle est basée sur une stratégie de prédiction/correction

### Phase de prédiction

On utilise une prédiction tangente pour obtenir une estimation de la solution en fonction de la variation  $\Delta\epsilon$ . En partant d'une solution  $(\mathbf{x}_i, \omega_i, \epsilon_i)$ , la prédiction est définie par  $(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i, \omega_i + \Delta\omega_i, \epsilon_i + \Delta\epsilon_i)$ . En développant les équations (4.78) à l'ordre 1, on obtient le système définissant les incréments de la prédiction :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \epsilon} \Delta \epsilon = 0 \quad (4.81)$$

Ce système possède  $n$  équations pour  $n + 2$  inconnues, il faut donc ajouter deux équations pour déterminer totalement la prédiction.

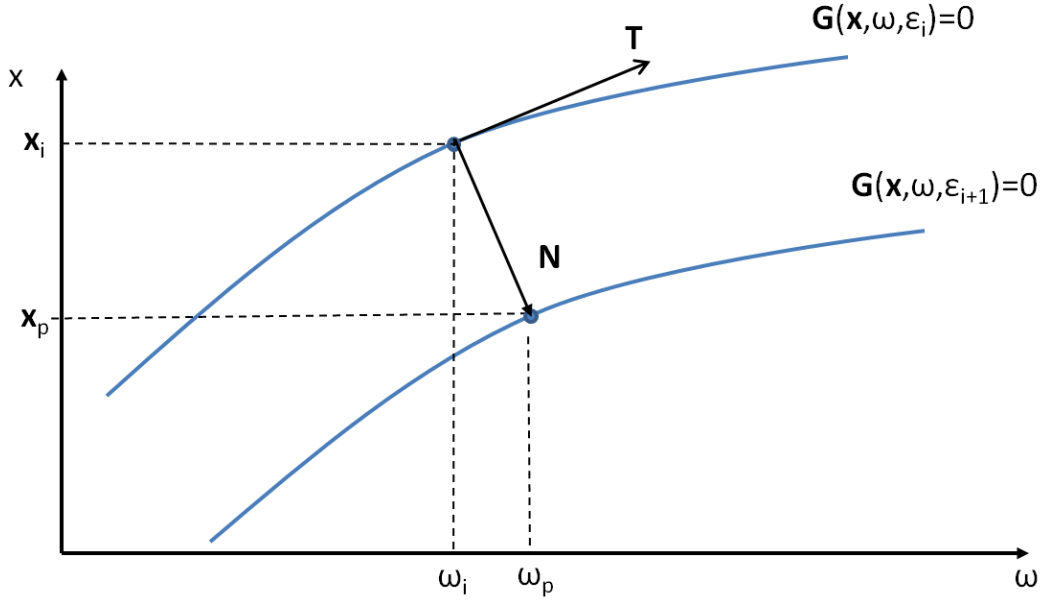


FIGURE 4.7 – Illustration du calcul de la prédiction pour la méthode de continuation en amortissement

Pour fixer la première équation, on impose le fait que la prédiction soit normale à la courbe de départ (Fig.4.7). Pour  $\epsilon$  fixé, on sait que la direction tangente à la courbe d'équation  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega, \epsilon)$  est donné par résolution de l'équation  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega} \Delta \omega = 0$ , ce qui correspond à une direction tangente portée par le vecteur suivant :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{G}^{-1} \partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

le plan normal vérifie alors l'équation suivante :

$$\mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}^{-1} \partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega}\right)^T \Delta \mathbf{x} + \Delta \omega = 0 \quad (4.83)$$

On doit enfin ajouter une troisième équation qui peut être soit la longueur de la prédiction (ie  $\|\Delta \mathbf{x}\|^2 + \|\Delta \omega\|^2 + \|\Delta \epsilon\|^2 - ds^2 = 0$ ), soit un incrément sur  $\epsilon$  directement (ie  $\Delta \epsilon = ds$ ). Le deuxième cas est plus facile à traiter car on peut déterminer  $\Delta \mathbf{x}$  directement. En effet, en combinant les équations (4.81) et (4.83), on obtient l'équation suivante permettant de déterminer  $\Delta \mathbf{x}$  en fonction de  $\Delta \epsilon$  :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \mathbf{G}^{-1} \partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega}\right)^T\right) \Delta \mathbf{x} = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \epsilon} \Delta \epsilon \quad (4.84)$$

L'incrément  $\Delta \omega$  est ensuite calculé en utilisant l'équation (4.83). A l'issue de l'étape de prédiction on dispose d'un vecteur prédit  $(\mathbf{x}_p, \omega_p, \epsilon_p) = (\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}, \omega_i + \Delta \omega, \epsilon_i + \Delta \epsilon)$ .

### Phase de correction

Une fois qu'une prédiction a été déterminée pour un nouveau niveau d'amortissement  $\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + \Delta \epsilon$ , on applique des corrections pour déterminer la solution correspondant à ce niveau

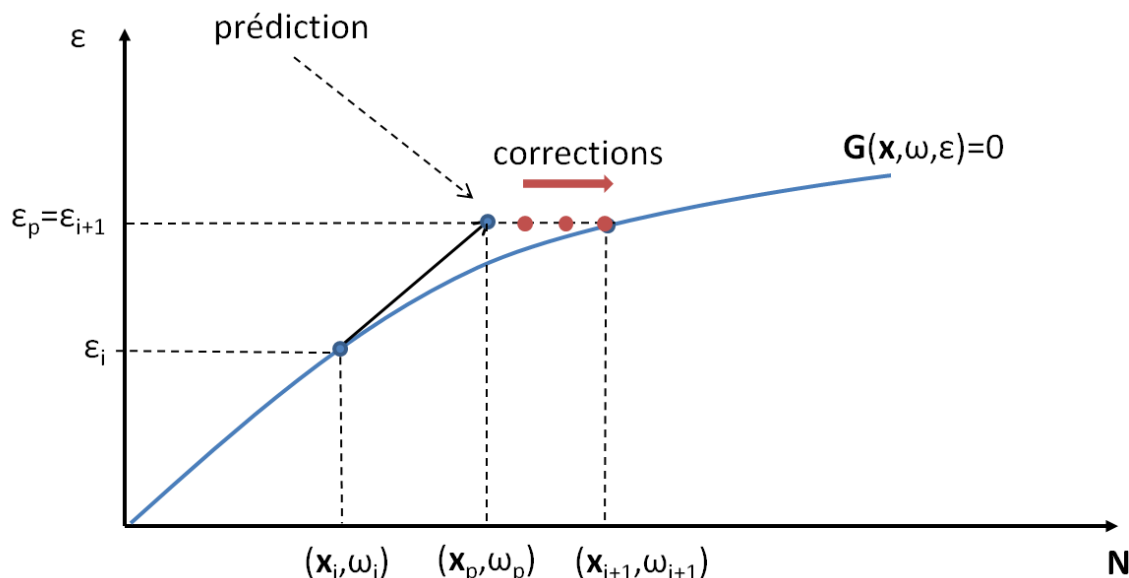


FIGURE 4.8 – Illustration du calcul des corrections pour la méthode de continuation en amortissement

d'amortissement. Les corrections se font en appliquant la méthode de Newton-Raphson à  $\epsilon$  fixé ( $\epsilon = \epsilon_{i+1}$ ) sur le système d'équations suivant :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega, \epsilon_{i+1}) = 0 \quad (4.85)$$

La prédiction calculée à l'étape précédente est alors utilisée comme point de départ pour la méthode de Newton. Cependant l'équation (4.85) correspond à un système de  $n$  équations pour  $n + 1$  inconnues ( $\mathbf{x}$  et  $\omega$ ). Il faut donc adjoindre une équation pour déterminer les corrections de manière unique. On choisit ici d'ajouter une équation permettant de rechercher les corrections sur le plan normal, définie à l'étape de prédiction (Fig.4.8). Cette relation peut se traduire par l'équation suivante :

$$\mathbf{T}_i^T \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \left( -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega} \right)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + (\omega - \omega_i) = 0 \quad (4.86)$$

Où  $\mathbf{T}_i$  est la direction tangente au point précédemment calculé (d'indice  $i$ ) donné par la relation (4.82).

## 4.5.2 Application

On propose ici d'appliquer la méthode de continuation en amortissement couplée à la recherche des solutions multiples du système (4.8) pour  $n = 8$  ddl. Dans toute la suite, on considérera que la fréquence d'excitation est fixée à  $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$ .

### 4.5.2.1 Calcul des solutions du système non amorti

Comme indiqué précédemment, les solutions du système non-amorti (approximation à un seul harmonique) sont données par la résolution du système (4.80). Dans le cas de cette application,

ce système prend la forme de l'équation (4.9) rappelée ici :

$$(2k_c + k - \omega^2 m)x_i - k_c x_{i-1} - k_c x_{i+1} + \frac{3}{4} k_{nl} x_i^3 - f_i^c = 0, \quad j = 1..8 \quad (4.87)$$

Dans la suite, nous allons tout d'abord utiliser la méthodes des matrices de multiplication pour déterminer les solutions de ce système pour la pulsation particulière  $\omega = 3 \text{ rad.s}^{-1}$ . Nous utiliserons ensuite ces solutions comme points de départ de la continuation en amortissement ce qui permettra finalement d'obtenir les solutions du système forcé et amorti.

### Détermination d'une base de l'espace quotient

Dans le cas de cet exemple, les monômes dominants de chaque équation sont premier entre eux, ce qui implique que le système (4.87) est déjà sous la forme d'une base de Gröbner pour l'ordre grevlex [163]. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de recalculer une base de Gröbner, et on peut utiliser le système (4.87) pour effectuer les réductions modulo l'idéal et déterminer une base de l'espace quotient. Ici cette base est donnée par :

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}^\alpha, \alpha \in [0, 2]^8\} \quad (4.88)$$

et elle est donc constituée de  $3^8 = 6561$  éléments.

### Détermination des matrices de multiplication et calcul des valeurs propres

La base  $\mathcal{B}$  déterminée précédemment est utilisée pour construire la matrice de multiplication relative à la variable  $x_1$  noté  $\mathbf{M}_{x_1}$ . Cette matrice est de taille  $6561 \times 6561$ , mais elle possède de nombreux éléments nuls. Le calcul des valeurs propres mène à des solutions réelles et complexes et on est ici seulement intéressé par les valeurs propres réelles. En raison de la taille des matrices, il est intéressant d'utiliser des méthodes telles que la méthode d'Arnoldi pour calculer les valeurs propres possédant les plus petites parties imaginaires [165]. De par sa construction, les éléments de la matrice  $\mathbf{M}_{x_1}$  sont convertis en virgule flottante ce qui peut engendrer des erreurs d'arrondis et par conséquent, amener à des valeurs propres légèrement différentes des solutions. Dans le but d'obtenir de "vraies" solutions pour le système non-amorti, les solutions sont raffinées en utilisant un algorithme de Newton prenant comme points de départ les solutions obtenues par les vecteurs propres de la matrice de multiplication. En plus de raffiner les solutions, cette méthode permet de détecter directement lesquels des vecteurs propres étaient effectivement solutions du système non-amorti (on rappelle que les solutions sont associées à des vecteur propres communs, et donc que tous les vecteurs propres ne représentent par forcément une solution) : si l'algorithme de Newton converge, on garde la solution obtenue, sinon, on considère que le vecteur propre n'était pas solution du problème non-amorti, et on le rejette.

Pour prendre en compte la symétrie du système considéré, on décide de trier les solutions obtenues après raffinement par famille. On considère ici qu'une solution  $\mathbf{a}$  fait partie de la famille  $F_{\mathbf{a}^*}$  si  $\mathbf{a}$  correspond à une permutation circulaire des éléments de  $\mathbf{a}^*$ .

En appliquant les remarques précédentes, on obtient seulement  $N_u = 692$  solutions réelles distinctes pour le système non-amorti.

#### 4.5.2.2 Continuation en amortissement

On utilise maintenant les  $N_u$  solutions du système non amorti calculées précédemment comme point de départ de la continuation en amortissement. Lors de la continuation, l'augmentation

progressive du niveau d'amortissement tend à faire disparaître certaines solutions du système non-amorti. Ici, la continuation en amortissement n'a abouti que pour  $N_d = 124$  solutions (ie  $N_u - N_d = 568$  solutions ont disparu en raison de l'augmentation du niveau d'amortissement). Le fait que toutes les solutions ne convergent pas forcément lors de la continuation en amortissement est illustré sur la Fig.4.9, on peut observer que les solutions sous forme de courbes fermées se rétractent au fur et à mesure que l'amortissement augmente.

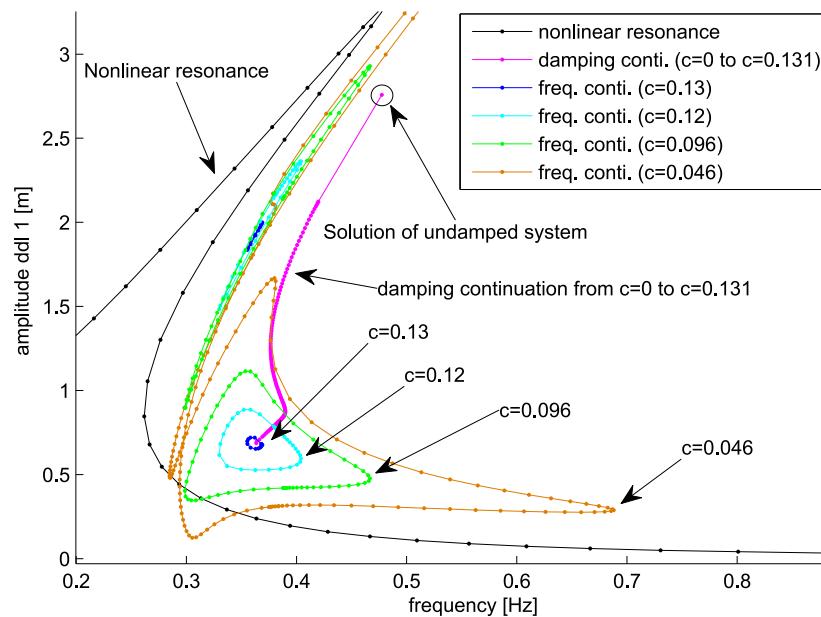


FIGURE 4.9 – Illustration de la méthode de continuation en amortissement, et de la disparition des solutions avec l'augmentation du niveau d'amortissement

Cette continuation en amortissement a également l'avantage de fournir le niveau d'amortissement limite à partir duquel la solution va disparaître. Cette information peut être utile, notamment dans le cadre de la conception.

#### 4.5.2.3 Continuation en fréquence

Pour terminer, on utilise les  $N_d = 124$  solutions du système amorti comme point de départ d'une continuation en fréquence. Dans le but d'éviter des continuations inutiles, la méthode est réalisée de manière séquentielle, et pour chaque point de départ on vérifie qu'il n'appartient pas à une famille de solutions déjà calculée. Cela se fait en évaluant la distance entre le point initial et les familles de solutions déjà calculées : si cette distance est inférieure à un certain seuil, alors on considère que ce point de départ appartient à une famille que l'on a déjà calculée, et on passe à la continuation en fréquence de la solution suivante. Du fait que le système soit cyclique, on vérifie également que toute permutation circulaire des composantes d'un point de départ n'appartient pas à une famille déjà calculée.

En utilisant cette technique de détection des familles déjà calculées, on effectue la continuation de seulement 16 familles de solutions. Après avoir réalisé une étude de stabilité, les résultats obtenus sont tracés dans le plan amplitude fréquence sur la Fig.4.10. On observe que les solutions peuvent être classées en deux catégories : solutions issues de bifurcations ou alors solutions sous forme de courbes fermées.

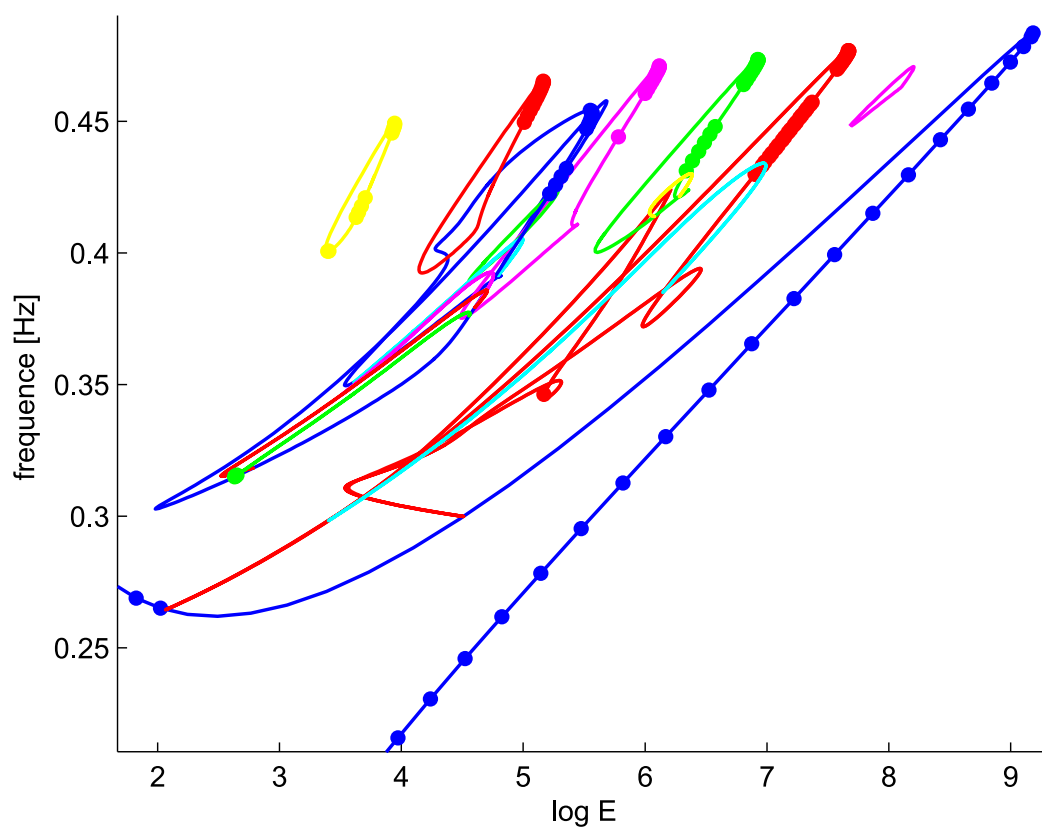


FIGURE 4.10 – Tracé des 16 familles de solutions dans le plan fréquence-amplitude (o : points stables)

Pour compléter le diagramme amplitude-fréquence de la Fig.4.10, on a également représenté l'amplitude des familles de solutions pour leur énergie maximum sur la Fig.4.11. On observe que les solutions obtenues correspondent à des mouvements plus ou moins localisés, et l'analyse de la stabilité par la méthode de Floquet révèle qu'une partie de ces solutions est stable, ce qui indique que la localisation est dans ce cas physiquement réalisable.

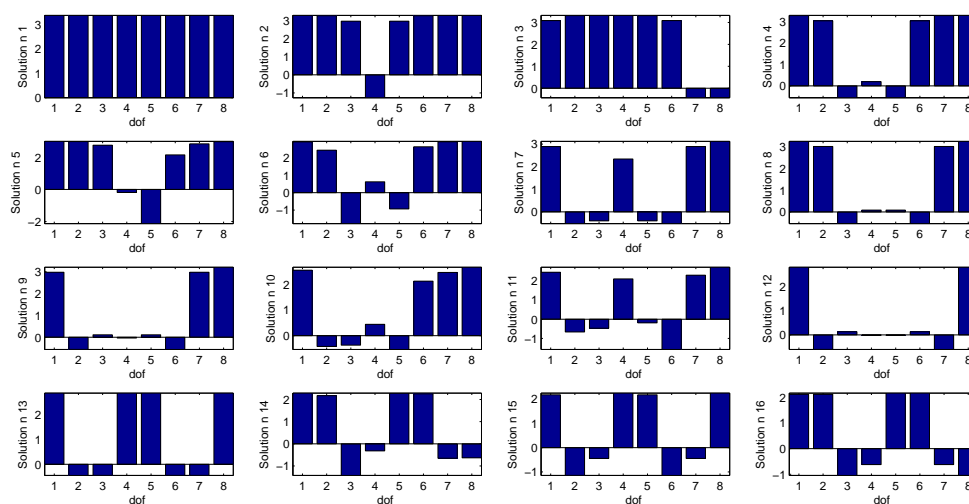


FIGURE 4.11 – Forme des 16 familles de solution

### 4.5.3 Conclusions

La méthode de continuation en amortissement présentée dans cette section consiste à déterminer les solutions d'un système amorti en continuant les solutions du système non-amorti en fonction d'un paramètre contrôlant le niveau d'amortissement. Le fait de travailler sur un système non-amorti permet, sous les hypothèses de ce chapitre, de réduire le nombre de variables de la HBM, et par conséquent permet d'appliquer la méthode des matrices de multiplication pour des systèmes possédant un plus grand nombre de ddl que dans le cas d'une application directe sur le système amorti. La méthode a été appliquée sur un exemple simple à 8 ddl qui n'a pu être résolu de manière directe avec les moyens informatiques à notre disposition.

## 4.6 Bilan du chapitre

Ce chapitre traite de la recherche des solutions multiples pour les systèmes dynamiques non-linéaires. Après avoir fait quelques hypothèses sur les systèmes considérés (non-linéarités polynomiales, ne dépendant que du déplacement), et après application de la méthode de la balance harmonique, la recherche des solutions multiples se traduit par la résolution d'un système algébrique non-linéaire. Plusieurs méthodes sont présentées pour obtenir toutes les solutions d'un tel système. Nous avons tout d'abord exposé les méthodes d'homotopies, consistant à calculer les solutions d'un système cible par continuation des racines d'un système de départ que l'on sait résoudre. La construction du polynôme de départ conditionne les performances de la méthode, puisque c'est ce polynôme qui fixe le nombre de racines à continuer. Dans le

cas d'une construction du polynôme de départ par la méthode du degré total, la méthode est relativement simple à mettre en œuvre, mais elle a l'inconvénient de surestimer le nombre de racines, amenant à de nombreuses continuations inutiles. L'utilisation de l'homotopie polyédrale est une alternative pour construire le polynôme de départ, et elle permet de mieux limiter le nombre de chemin divergents (utilisation de la borne BKK plutôt que de la borne de Bézout). Cependant, sa mise en œuvre reste très complexe, notamment en raison du caractère probabiliste de la méthode, et nous nous sommes tourné vers l'utilisation des bases de Gröbner.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la résolution des systèmes polynomiaux basée sur l'utilisation des bases de Gröbner. Ces bases correspondent à une famille de polynômes permettant d'engendrer l'idéal défini par le système d'équations et qui possède de plus certaines propriétés (en particulier les systèmes d'équations définis par une base de Gröbner possèdent les mêmes solutions que le système cible). Dans le cas du calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique, la famille de polynômes obtenue est sous forme triangulaire, et un des polynômes de la famille ne dépend que d'une seule variable, ce qui permet de résoudre facilement le système d'équations. L'inconvénient majeur de cette méthode est le temps de calcul élevé d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique. Pour contourner ce désavantage, on propose d'utiliser une autre méthode faisant intervenir une base de Gröbner pour l'ordre grevlex, dont le calcul est plus rapide. Cette base est ensuite utilisée pour la construction de matrices particulières appelées matrices de multiplication. Le calcul des vecteurs propres de ces matrices permet alors de retrouver les solutions du système cible. En pratique, on observe que la taille des matrices de multiplication croît exponentiellement en fonction du nombre de variables, ce qui limite leur utilisation à des systèmes contenant une dizaine de variables.

Dans le cas des systèmes à symétrie cyclique, la méthode des matrices de multiplication peut être améliorée en prenant en compte les groupes de symétrie rendant invariant le système d'équation. Cette amélioration est présentée dans ce chapitre, et on montre que dans certains cas, elle permet de diminuer la taille des matrices de multiplication, amenant à un nombre réduit de solutions. Les solutions du système complet sont alors obtenues par application des actions du groupe sur les solutions obtenues. Cette méthode prometteuse nécessitera l'automatisation de la définition des invariants et du calcul des matrices de multiplications associées pour être applicable à des problèmes concrets.

En dernier lieu, nous avons proposé une méthode basée sur le calcul des solutions du système non-amorti, puis sur une continuation en amortissement de ces solutions permettant de retrouver les solutions du système amorti. L'avantage de travailler sur un système non-amorti réside dans le fait que le nombre de variables du système algébrique est réduit. Cela permet en particulier d'appliquer la méthode des matrices de multiplication pour des systèmes possédant un nombre de ddl plus grands (comparé à l'application des matrices de multiplication directement sur le système amorti).





# Chapitre 5

## Application au cas industriel de l'open rotor

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Description du cas-test</b>	<b>148</b>
5.1.1	Contexte : la technologie des open rotors	148
5.1.2	Problématique scientifique	148
<b>5.2</b>	<b>Stratégie de modélisation</b>	<b>149</b>
5.2.1	Non-linéarités géométriques	149
5.2.2	Prise en compte de la symétrie cyclique	152
<b>5.3</b>	<b>Réduction des modèles éléments finis générés par SAMCEF</b>	<b>154</b>
5.3.1	Stratégie de calcul et implémentation	154
5.3.2	Application sur un cas académique de poutre 3D	155
<b>5.4</b>	<b>Application à la réduction du modèle de pale de l'open rotor</b>	<b>160</b>
5.4.1	Description du modèle	160
5.4.2	Réduction sur les premiers modes linéaires	161
5.4.3	Introduction des dérivées modales dans la base de projection	163
<b>5.5</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>165</b>

---

Ce dernier chapitre a pour objectif de mettre en œuvre les méthodes de réduction de modèle présentées dans le chapitre 2 dans cas d'une structure tridimensionnelle, et en particulier sur un modèle industriel de type pale d'open rotor. Dans un premier temps, on rappelle la définition et les méthodes de modélisation utilisées pour prendre en compte des non-linéarités géométriques dans les structures 3D. Dans un deuxième temps, on démontre la faisabilité de l'implémentation des méthodes de réduction de modèle en les appliquant sur un exemple simple de poutre 3D généré par SAMCEF. Enfin, on considère le cas de l'application industrielle sur laquelle nous avons appliqué nos méthodes de réduction et analysé leur efficacité.

## 5.1 Description du cas-test

### 5.1.1 Contexte : la technologie des open rotors

L'open rotor est un turboréacteur dont la soufflante, non carénée, est fixée en dehors de la nacelle. Cette soufflante est constituée de deux hélices contrarotatives (Fig.5.1). La principale caractéristique de ce moteur est son taux de dilution élevé, qui lui permet d'assurer une poussée égale à celle d'un moteur classique pour une consommation de carburant moindre. En théorie, les économies de carburant devraient être de 20 à 30 %. Ce type de moteur a déjà été implanté dans les années 1980 notamment sur quelques avions de transport militaire russes (type Tupolev TU-20/TU-95). Il a cependant été rapidement abandonné, en partie à cause de la baisse du prix du kérosène dans les années qui ont suivi sa mise en service. Aujourd'hui, le prix élevé (et toujours en augmentation) des hydrocarbures et les nouveaux objectifs de diminution des gaz à effet de serre motivent à nouveau le développement de l'open rotor.



FIGURE 5.1 – Maquette de l'open rotor développé par Snecma [166]

### 5.1.2 Problématique scientifique

On s'intéresse ici plus particulièrement à la dynamique des hélices de propulsion des open rotors. Ces hélices sont composées de pales élancées reliées entre elles par un disque, et font

donc partie des structures à symétrie cyclique. De par leurs dimensions et les excitations qu'elles subissent, les pales des hélices peuvent être soumises à de grands déplacements induisant des non-linéarités de type géométrique. D'autres sources de non-linéarité sont également présentes dans ce système : par exemple le frottement en pied d'aube (système de fixation en queue d'aronde) où encore le comportement de matériaux composites. La modélisation de ces structures industrielles par la méthode des éléments finis conduit à des modèles à plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté. Ces modèles sont donc trop gros pour effectuer une analyse non-linéaire en un temps raisonnable : une réduction s'impose.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans un premier temps on rappelle la formulation des non-linéarités géométriques et leur traitement par la méthode des éléments finis. Nous rappellerons ensuite les principales caractéristiques de la modélisation des structures à symétrie cyclique. Ensuite nous présentons les méthodes de réduction de modèle appliquées à un cas 3D issu du logiciel SAMCEF. Enfin, on applique les méthodes de réduction de modèle aux pales des hélices de l'open rotor et on en évalue les performances.

## 5.2 Stratégie de modélisation

### 5.2.1 Non-linéarités géométriques

#### 5.2.1.1 Formulation du problème continu

On considère ici une structure mécanique déformable de volume  $\Omega$ . On note  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point de la structure dans un repère cartésien  $\mathcal{R} = (e_x, e_y, e_z)$ , et  $\mathbf{u}(x, y, z) = (u_x, u_y, u_z)$  le déplacement associé. On présente les équations en formalisme lagrangien, c'est-à-dire que toutes les quantités intégrées en espace sont évaluées par rapport à la configuration de référence de volume  $\Omega_0$  et de frontière  $\partial\Omega_0$ . Les équations du mouvement sont obtenues par application du principe d'Hamilton, ce qui nécessite tout d'abord de calculer le lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}_{int} + \mathcal{W}_{ex}$ , avec  $\mathcal{T}$  l'énergie cinétique,  $\mathcal{U}_{int}$  l'énergie potentielle des efforts intérieurs et  $\mathcal{W}_{ex}$  le travail des efforts extérieurs.

L'expression de l'énergie cinétique s'obtient directement en écrivant :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0(\dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}}) d\Omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) d\Omega_0. \quad (5.1)$$

Pour le calcul de l'énergie de déformation, on ne fait aucune hypothèse sur la nature des déplacements, on utilise donc le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\epsilon(\mathbf{u})$  dont l'expression est donnée par [167] :

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{u})^T)(\nabla \mathbf{u}) = \epsilon_l + \epsilon_{nl}. \quad (5.2)$$

Ce tenseur s'écrit encore, sous forme indicielle :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (5.3)$$

On observe que le tenseur des déformations se décompose en deux parties, l'une linéaire ( $\epsilon_l$ ), l'autre quadratique ( $\epsilon_{nl}$ ). Notons que dans le cadre des petites perturbations, on néglige les termes quadratiques et le tenseur des déformations est alors égal à  $\epsilon_l$ . Le calcul de l'énergie de déformation fait également intervenir un tenseur des contraintes, obtenu à partir du tenseur des

déformation en utilisant une loi de comportement. Ici on utilise la loi de Hooke. Le tenseur des contraintes  $\sigma$  est donc défini par :

$$\sigma = \mathbb{C}\epsilon, \quad (5.4)$$

ou

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}. \quad (5.5)$$

Le tenseur  $\mathbb{C}$ , d'ordre 4, se décline ici par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\epsilon) \mathbf{I}_3 \right). \quad (5.6)$$

avec  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériaux. Avec ces notations, l'énergie de déformation est définie par :

$$\mathcal{U}_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \epsilon : \sigma \, d\Omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \, d\Omega_0 \quad (5.7)$$

Pour finir, l'expression du travail des efforts extérieurs (supposés conservatifs) est donnée par :

$$\mathcal{W}_{ext} = \int_{\Omega_0} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{u} \, d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{f_0}} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{u} \, dS_0, \quad (5.8)$$

avec  $\mathbf{F}_v$  les forces volumiques, s'exerçant sur  $\Omega_0$  et  $\mathbf{F}_s$  les forces surfaciques s'exerçant sur  $\partial\Omega_{f_0}$ , partie de  $\partial\Omega_0$  soumise à des efforts imposés.

La formulation du principe d'Hamilton permet, sous certaines conditions, d'obtenir les équations du mouvement de notre problème :

$$\delta \left( \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}_{int} + \mathcal{W}_{ex}) dt \right) = 0, \text{ avec } \delta \mathbf{u}(t_1) = \delta \mathbf{u}(t_2) = 0. \quad (5.9)$$

avec  $\mathbf{u}$  cinématiquement admissible (ie vérifiant les conditions de déplacements imposés sur  $\partial\Omega_{u_0}$ , partie de la frontière complémentaire de  $\partial\Omega_{f_0}$  et  $\delta \mathbf{u}$  cinématiquement admissible à zéro).

### 5.2.1.2 Discrétisation par éléments finis

Afin de résoudre le problème, on utilise la méthode des éléments finis. Pour cela, on construit un maillage de la structure, et on introduit une discrétisation du type :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}(t), \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{N}$  est une matrice contenant les fonctions de forme, et  $\mathbf{q}$  un vecteur contenant les degrés de liberté (ie les déplacements aux nœuds du maillage dans les 3 directions).

Pour simplifier les expressions, on utilisera la notation de Voigt pour exprimer les tenseurs des contraintes et des déformations sous forme de vecteurs. Ainsi le tenseur des déformations  $\epsilon$  sera représenté par le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}$  et le tenseur des contraintes  $\sigma$  le sera par  $\mathbf{S}$  avec :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{xz}, 2\epsilon_{yz}]^T, \\ \mathbf{S} &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}]^T. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La loi de comportement (5.4) prend la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \quad (5.12)$$

avec  $\mathbf{D}$  la matrice définie par  $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$  où  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  sont donnés par :

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \mathbf{I}_3. \quad (5.13)$$

Avec ces notations, la densité d'énergie de déformation s'exprime simplement par  $\mathbf{S}^T \boldsymbol{\gamma}$ .

On introduit la matrice  $\mathbf{B}$ , contenant les dérivées spatiales des fonctions de forme, définies par les relations suivantes :

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q}, \text{ avec } \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}). \quad (5.14)$$

On notera ici que la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  est composé d'un partie linéaire  $\mathbf{B}_l$  indépendante de  $\mathbf{q}$  et d'une partie non-linéaire  $\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})$  qui est linéaire en  $\mathbf{q}$ . En utilisant la définition de la matrice  $\mathbf{B}$ , il est alors possible d'exprimer les déformations sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\gamma} = \left( \mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{q}, \quad (5.15)$$

et la loi de comportement devient alors égale à :

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \left( \mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{q}. \quad (5.16)$$

Finalement le principe d'Hamilton donne :

$$\left( \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_0 \right) \ddot{\mathbf{q}} = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}))^T \mathbf{S} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{N}^T \mathbf{F}_v d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{f0}} \mathbf{N}^T \mathbf{F}_s dS_0 \quad (5.17)$$

En injectant la relation de comportement (5.16) dans la nouvelle expression (5.17), on obtient l'équation du mouvement vérifiée par le vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{K}_2(\mathbf{q}) \mathbf{q} + \mathbf{K}_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (5.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_0, \\ \mathbf{K} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_l^T \mathbf{D} \mathbf{B}_l d\Omega_0, \\ \mathbf{K}_2(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_l^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_l d\Omega_0, \\ \mathbf{K}_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \int_{\omega_0} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q}) d\Omega_0, \\ \mathbf{F}_{ext} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}^T \mathbf{F}_v d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{f0}} \mathbf{N}^T \mathbf{F}_s dS_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur linéaire,  $\mathbf{K}_2$  et  $\mathbf{K}_3$  sont respectivement les matrices de raideur quadratique et cubique, et  $\mathbf{F}_{ext}$  représente le vecteur des efforts extérieurs. L'expression de l'équation (5.18) montre que les non-linéarités géométriques se traduisent par la présence de termes quadratiques et cubiques dans les équations du mouvement.

## 5.2.2 Prise en compte de la symétrie cyclique

### 5.2.2.1 Définition des composantes cycliques

Une structure à symétrie cyclique est générée par répétition circulaire d'une sous-structure de base appelée secteur. Les hélices des open rotors sont des structures à symétrie cyclique (les engrenages ou les antennes paraboliques en sont d'autres exemples). Du fait de la symétrie, il est possible de déterminer le comportement du système complet à partir du mouvement d'un secteur de référence et des conditions aux limites de cyclicité qui s'y appliquent. On rappelle ici les principaux résultats de la modélisation des structures à symétrie cyclique, pour plus de détails, on pourra se référer à [11, 168].

On considère un système cyclique à  $N$  secteurs (l'angle occupé par chaque secteur vaut alors  $\theta = \frac{2\pi}{N}$ ), et on note  $\mathbf{u}$  le vecteur des déplacements de la structure, et  $\mathbf{u}_j$  la restriction de ce vecteur au secteur  $j$ . Du fait de la condition de cyclicité ( $\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j$ ), le déplacement sur un secteur  $j \in [0, N-1]$  peut s'exprimer comme étant la somme de fonctions harmoniques du type :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^k e^{ijk\theta}, \text{ où } i^2 = -1. \quad (5.20)$$

Les composantes  $\tilde{\mathbf{u}}^k$  sont appelées composantes cycliques d'ordre  $k$  et sont en général définies pour le secteur de référence (d'indice 0). On remarque que le déphasage entre deux secteurs consécutifs pour l'harmonique  $k$  est donné par  $k\theta$ . Réciproquement, les composantes cycliques peuvent être calculées en utilisant les déplacements physiques sur chacun des secteurs, en utilisant une transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{\mathbf{u}}^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j e^{-ijk\theta}. \quad (5.21)$$

Les représentations en composantes cycliques ou en composantes physiques sont équivalentes et on a la relation matricielle suivante liant ces deux représentations :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (5.22)$$

avec  $\mathbf{E}$  la matrice de transformée de Fourier discrète définie par  $\mathbf{E}_{j,k} = e^{ijk\theta}$  avec ( $i^2 = -1$ )  $k \in [0, N-1]$  et  $j \in [0, N-1]$ . En général, les grandeurs étudiées sont réelles, et on préférera utiliser la version réelle de l'équation (5.20) donnée par :

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sum_{k=1}^H \tilde{\mathbf{u}}_c^k \cos(k(j-1)\theta) + \tilde{\mathbf{u}}_s^k \sin(k(j-1)\theta) + (-1)^j \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \quad (5.23)$$

avec  $H = (N-1)/2$  si  $N$  est impair, et  $H = N/2 - 1$  si  $N$  est pair. Notons que le dernier terme dans le développement (5.23) n'existe que si  $N$  est pair. Les composantes cycliques réelles

peuvent être calculées en utilisant les déplacements physiques :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j, \\
 \tilde{\mathbf{u}}_c^k &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \cos(kj\theta), \\
 \tilde{\mathbf{u}}_s^k &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \sin(kj\theta), \\
 \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j (-1)^j.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

et on a la relation matricielle suivante entre les composantes cycliques réelles et les composantes physiques :

$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{u}}, \tag{5.25}$$

où la matrice  $\mathbf{F}$  est définie par les relations suivantes (pour  $(k, j) \in [0, \dots, N-1]^2$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{j,1} &= 1, \\
 \mathbf{F}_{j,k} &= \cos(pj\theta) \text{ si } k = 2p \text{ et } 0 \leq k \leq N-1, \\
 \mathbf{F}_{j,k} &= \sin(pj\theta) \text{ si } k = 2p+1 \text{ et } 0 \leq k \leq N-1, \\
 \mathbf{F}_{j,N/2-1} &= (-1)^j.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

### 5.2.2.2 Particularités du calcul des modes propres

On considère une structure mécanique linéaire à symétrie cyclique discrétisée par la méthode des éléments finis et caractérisée par ses matrices de masse  $\mathbf{M}_s$  et de raideur  $\mathbf{K}_s$ . On note  $N$  le nombre de secteurs et  $n$  le nombre de degrés de liberté par secteur, les matrices de masse et de raideur sont alors de taille  $Nn \times Nn$ . La recherche des modes propres de la structure revient à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \Phi = \mathbf{0}. \tag{5.27}$$

Ce problème aux valeurs propres est de taille  $Nn$  et sa résolution peut être très coûteuse dans le cas de structures discrétisées finement ou possédant un grand nombre de secteurs. Pour accélérer les calculs, il est courant d'utiliser la représentation en base cyclique de l'équation (5.23). On considère tout d'abord le secteur de référence, et on partitionne les déplacements en séparant les ddl de frontière (à gauche  $g$  et à droite  $d$ ) des ddl internes  $i$ . Dans ce cas, le vecteur des ddl sur le secteur de référence peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_g \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

et les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  du secteur de référence s'écrivent :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{dd} & \mathbf{M}_{di} & \mathbf{M}_{dg} \\ \mathbf{M}_{id} & \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ig} \\ \mathbf{M}_{gd} & \mathbf{M}_{gi} & \mathbf{M}_{gg} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{dg} \\ \mathbf{K}_{id} & \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ig} \\ \mathbf{K}_{gd} & \mathbf{K}_{gi} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$



Le problème aux valeurs propres posé sur le secteur de référence est donné par :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi = 0 \quad (5.30)$$

En utilisant les relations de propagation du type  $\mathbf{u}_g = e^{ik\theta} \mathbf{u}_d$ , il est possible de réduire la taille du problème aux valeurs propres (5.30), qui devient :

$$(\mathbf{K}_k - \omega^2 \mathbf{M}_k) \Phi = 0 \quad (5.31)$$

avec

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{dd} + \mathbf{M}_{gg} + e^{ik\theta} \mathbf{M}_{dg} + e^{-ik\theta} \mathbf{M}_{gd} & \mathbf{M}_{di} + e^{-ik\beta} \mathbf{M}_{gi} \\ \mathbf{M}_{id} + e^{ik\beta} \mathbf{M}_{ig} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

et

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} + \mathbf{K}_{gg} + e^{ik\theta} \mathbf{K}_{dg} + e^{-ik\theta} \mathbf{K}_{gd} & \mathbf{K}_{di} + e^{-ik\beta} \mathbf{K}_{gi} \\ \mathbf{K}_{id} + e^{ik\beta} \mathbf{K}_{ig} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

La résolution du problème (5.31) donne les fréquences et les déformées propres pour le diamètre  $k$  du secteur de référence. Dans le cas où  $k = 0$  (et  $k = N/2$  si  $N$  est pair), les matrices associées sont symétriques réelles et les valeurs propres correspondantes sont réelles et simples (mode non-dégénéré). Pour les autres cas ( $k \neq 0$  et  $k \neq N/2$ ), les matrices sont complexes et hermitiennes, et les valeurs propres sont réelles et doubles. Il est alors classique de résoudre ce problème dans un formalisme réel en séparant partie réelle et partie imaginaire [1]. Pour chaque fréquence propre  $\omega_k$ , il existe deux formes propres orthogonales ( $\Phi_c^k$  et  $\Phi_s^k$ ) formant une base de l'espace des solutions (toutes combinaisons linéaires des formes propres  $\Phi_c^k$  et  $\Phi_s^k$  est également forme propre pour la fréquence  $\omega_k$ ). Les déformées propres ont alors la particularité de présenter des diamètres nodaux correspondant à une ligne où les amplitudes de vibration sont nulles. Il est classique d'organiser les modes en fonction de leur nombre de diamètres nodaux, par exemple en traçant l'évolution de la fréquence propre de chaque famille de modes en fonction du nombre de diamètre nodaux.

### 5.2.2.3 Cas des systèmes non-linéaires

Comme il a été précisé précédemment, la modélisation par symétrie cyclique n'est applicable que dans le cas des structures linéaires. Pour des structures non-linéaires, la non-linéarité induit des couplages entre composantes harmoniques et les problèmes ne sont plus découplés. La représentation de solutions localisées sur un secteur par exemple, demanderait un grand nombre d'harmoniques pour pouvoir être représentée correctement, et donc nécessiterait de conserver un degré de couplage élevé entre les harmoniques. L'analyse en symétrie cyclique reste cependant un outil utile pour l'étude des structures non-linéaires dans la mesure où elle permet d'obtenir la forme des modes pour des vibrations à basse amplitude, ou dans le cadre d'une hypothèse de découplage des harmoniques spatiaux. Ces modes peuvent ensuite être utilisés comme point de départ d'une continuation destinée à calculer les modes non-linéaires.

## 5.3 Réduction des modèles éléments finis générés par SAMCEF

### 5.3.1 Stratégie de calcul et implémentation

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la procédure de réduction de modèle pour des systèmes soumis à des non-linéarités géométriques se déroule en deux temps :

- (i) calculer une base de projection ;
- (ii) calculer l'expression des efforts non-linéaires réduits relativement à cette base de projection (procédure STEP, chapitre 2 section 2.3.2)

Des codes spécifiques ont été écrits pour interfacer le logiciel de calcul élément finis SAMCEF et le logiciel de calcul scientifique MATLAB dans le but d'effectuer les opérations nécessaires à la création d'un modèle réduit. Les différentes parties de la stratégie de calcul sont présentées dans l'annexe A qui pourra servir de guide d'utilisation des codes fournis à SNECMA.

Dans le but de montrer la faisabilité de la méthode et de quantifier les résultats obtenus, ces procédures sont tout d'abord appliquées à un cas simple de poutre 3D non-linéaire.

## 5.3.2 Application sur un cas académique de poutre 3D

### 5.3.2.1 Description du modèle

On se propose d'illustrer les procédures décrites précédemment sur un cas de poutre 3D traité par SAMCEF. La poutre possède les mêmes propriétés géométriques et de matériaux que la poutre 1D présentée dans la section 2.1.3. Elle est encastree à ses deux extrémités. Le maillage comporte 10 éléments sur la longueur et 2x2 éléments dans la section. Les éléments sont cubiques à 20 nœuds de degré deux "explicités" (ie sans degrés de liberté internes dans la terminologie SAMCEF). Le modèle est composé de 297 nœuds, chacun associé à 3 ddl. Une illustration de la poutre et de son maillage est donnée en Fig.5.2.

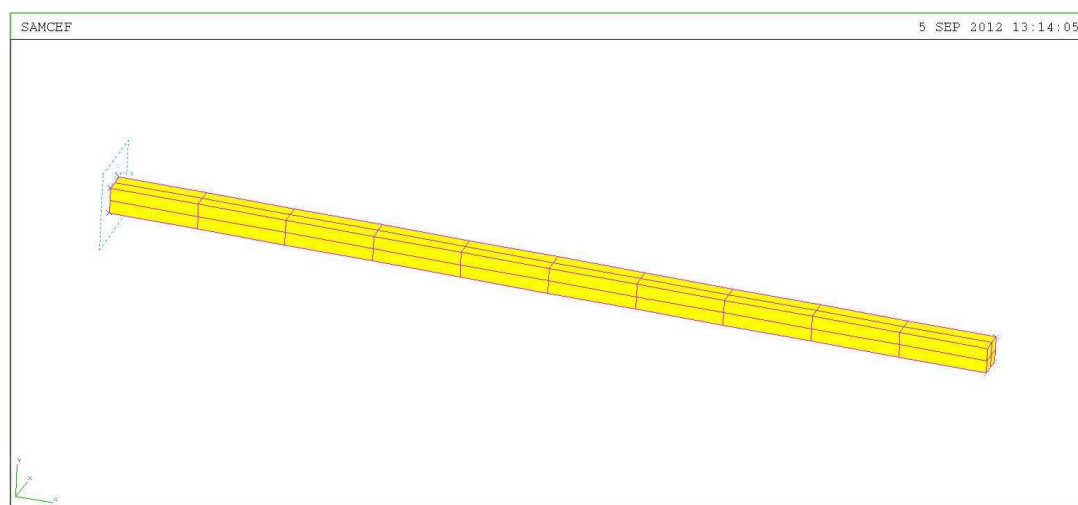


FIGURE 5.2 – Modèle de poutre 3D et son maillage (réalisé sous SAMCEF v12.1)

Une analyse modale préliminaire nous donne les fréquences propres du premier mode transverse et du 4ème mode axial (table 5.1). On retrouve bien une fréquence de résonance pour le premier mode transverse autour de 160 Hz.

Mode	1F	4I
Fréquence [Hz]	160.25	10422

TABLE 5.1 – Fréquence propre du premier mode transverse et du 4e mode longitudinal du modèle de poutre 3D calculées par SAMCEF

Dans la suite de cet exemple, on considèrera deux bases de réduction pour le modèle de la poutre 3D :

- Cas 1 : 1er mode transverse (1F) + 4e mode longitudinal (4I),
- Cas 2 : 1er mode transverse (1F) + dérivée modale (1,1) (MD11).

Ces deux bases de réduction vont permettre de comparer les résultats de la réduction de modèle d'un poutre 3D avec les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3 sur la poutre 1D.

### 5.3.2.2 Réduction du modèle : cas 1

Ce premier cas va permettre de tester la validité de la méthode de réduction pour les modèles SAMCEF. On rappelle que dans ce cas le modèle est réduit sur le premier mode transverse et le quatrième mode axial (cf Figs. 5.3 et 5.4). Les amplitudes modales utilisées pour  $q_1 = q_v$  (1F) sont dans l'intervalle  $[1e-4, 1e-1]$  et les amplitudes modales utilisées pour  $q_2 = q_u$  (4I) sont dans l'intervalle  $[1e-5, 1e-2]$ . Après réduction, on obtient alors un système à deux ddl qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_{u,u}q_u + \tilde{k}_{u,v}q_v + \tilde{k}_{u,uu}q_u^2 + \tilde{k}_{u,vv}q_v^2 + \tilde{k}_{u,uuu}q_u^3 + \tilde{k}_{u,vvv}q_v^3 + \tilde{k}_{u,uv}q_uq_v + \tilde{k}_{u,uuv}q_u^2q_v \\
 + \tilde{k}_{u,uvv}q_uq_v^2 = f_u \\
 \tilde{k}_{v,v}q_u + \tilde{k}_{v,v}q_v + \tilde{k}_{v,uu}q_u^2 + \tilde{k}_{v,vv}q_v^2 + \tilde{k}_{v,uuu}q_u^3 + \tilde{k}_{v,vvv}q_v^3 + \tilde{k}_{v,uv}q_uq_v + \tilde{k}_{v,uuv}q_u^2q_v \\
 + \tilde{k}_{v,uvv}q_uq_v^2 = f_v
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

avec les valeurs des coefficients données par la table 5.2 (seuls les termes non nuls sont présentés).

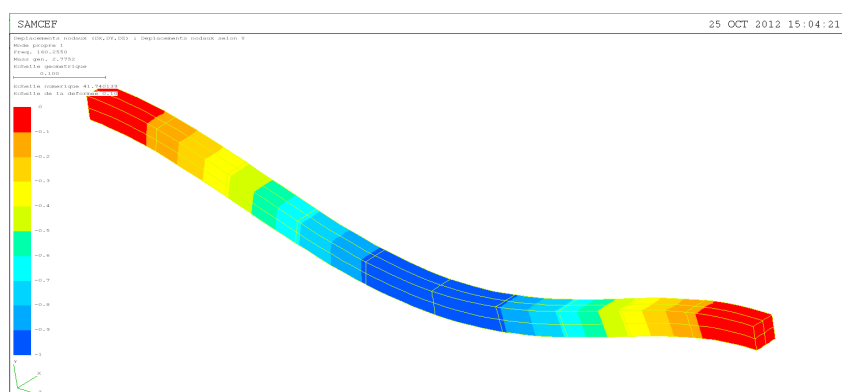


FIGURE 5.3 – Forme propre du premier mode transverse calculé par SAMCEF

Coefficient	$k_{u,u}$	$k_{u,uu}$	$k_{u,vv}$	$k_{u,uuu}$	$k_{u,uvv}$
EF 3D SAMCEF	4.2886e9	-1.0382e8	-5.1664e8	1.15e11	1.3040e10
Coefficient	$k_{v,v}$	$k_{v,vvv}$	$k_{v,uv}$	$k_{v,uuv}$	
EF 3D SAMCEF	1.0139e6	1.6308e9	-1.033e9	1.304e10	

TABLE 5.2 – Raideurs non-linéaires réduites pour le cas de poutre 3D traité par SAMCEF. Réduction sur les modes 1F et 4I calculés par STEP

On remarque que certains des coefficients calculés par STEP pour le modèle éléments finis 3D sont proches de ceux calculés pour le modèle 1D d'Euler-Bernoulli (en particulier pour les coefficients linéaires). En revanche, on observe parfois de fortes différences, en particulier pour le

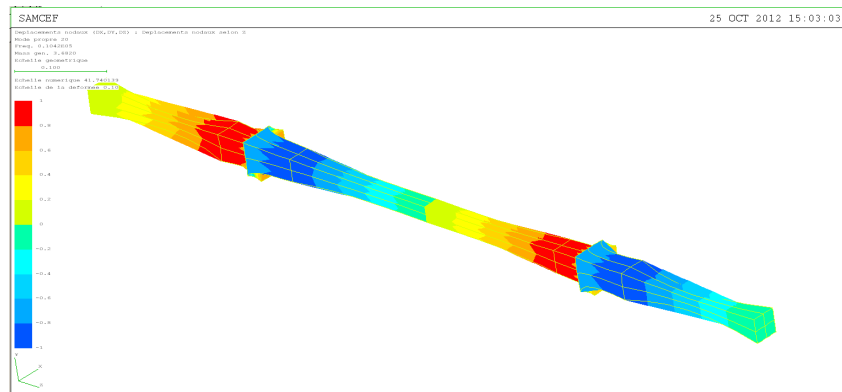


FIGURE 5.4 – Forme propre du 4e mode axial calculé par SAMCEF

terme  $k_{v,vvv}$  qui est environ deux fois plus grand que le même coefficient calculé pour le modèle d'Euler-Bernoulli. On en conclut que la réduction du modèle 3D par le premier mode transverse plus le quatrième mode axial est plus raide que la réduction du modèle 1D pour ces mêmes modes. En termes de réponse en fréquence, la courbe représentant l'évolution de l'amplitude en fonction de la fréquence est donnée sur la Fig.5.5, où on observe bien le caractère très raidissant de la réduction sur les modes 1F et 4I par rapport aux résultats de la poutre d'Euler non réduite.

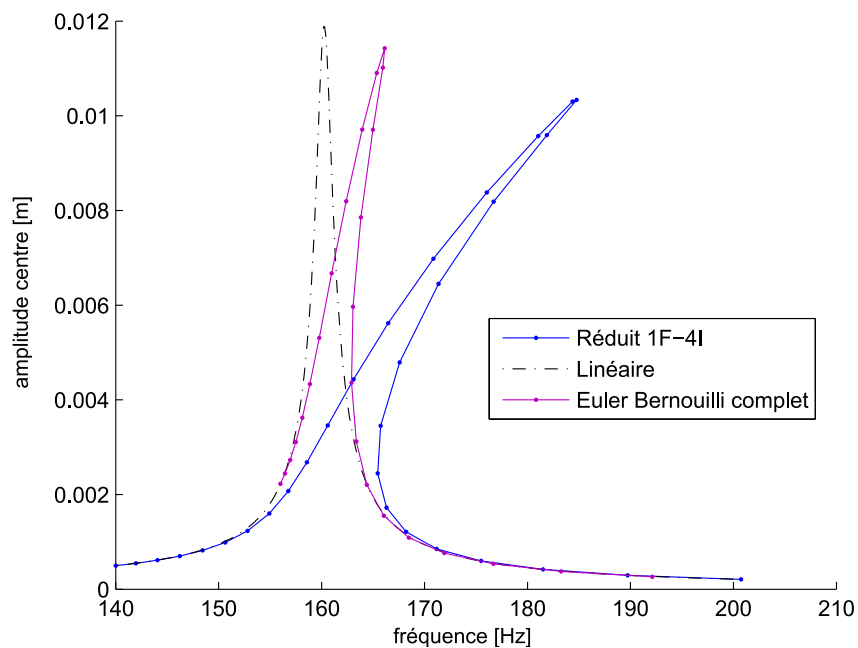


FIGURE 5.5 – FRF de la poutre 3D réduite sur le mode 1F et 4I. Comparaison avec la FRF de la poutre d'Euler-Bernoulli (non réduite)

### 5.3.2.3 Réduction du modèle : cas 2

Dans ce deuxième cas, on réduit le modèle sur le premier mode transverse et sur la dérivée modale (1,1). Cela va nous permettre de mettre en place le calcul des dérivées modales avec SAMCEF et de comparer les résultats avec le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli.

Pour le calcul de la dérivée modale (1,1), on impose un déplacement sur le premier mode propre pour une amplitude  $q_1 = 1e-3$ , et on calcule le premier mode propre de cette configuration déformée, enfin on calcule la dérivée modale par l'équation (2.30). Une représentation de la forme de la dérivée modale (1,1) est donnée sur la Fig.5.6 et les déplacements de la ligne moyenne sont donnés sur la Fig.5.7. Comme dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli on observe bien que la dérivé modale (1,1) est composée d'un déplacement axial proche du mode 4I et d'un déplacement transverse proche du mode 3F.

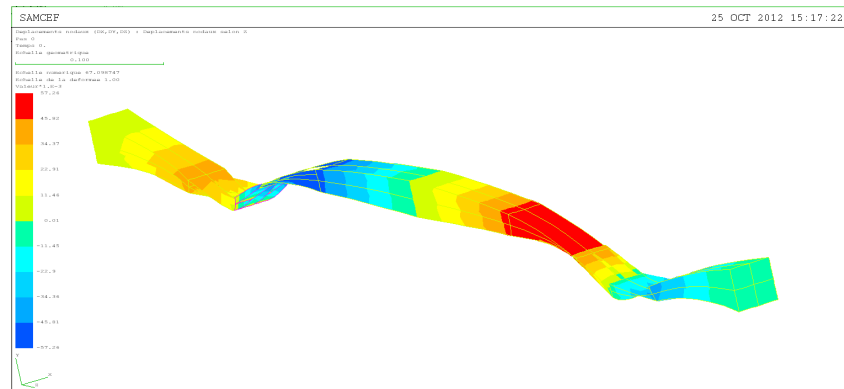


FIGURE 5.6 – Forme propre de la dérivée modale (1,1) calculée par SAMCEF

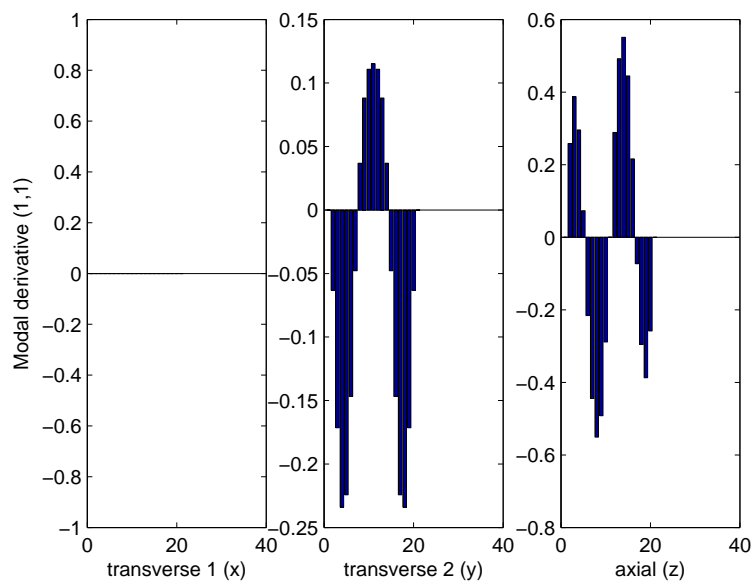


FIGURE 5.7 – Déplacement de la ligne moyenne dans les 3 directions pour la dérivée modale (1,1) calculée par SAMCEF

En notant  $q_1$  l'amplitude du premier mode transverse (1F) et  $q_2$  l'amplitude de la dérivé modale (1,1) (MD11), les coefficients du modèle réduit correspondant à l'équation (5.34) sont donnés dans la table Tab.5.3.

La Fig.5.8 présente l'évolution de l'amplitude en fonction de la fréquence pour la réduction sur le mode 1F et la dérivée modale (1,1). On observe que l'utilisation de la dérivée modale

Coefficient	$k_{1,1}$	$k_{1,22}$	$k_{1,111}$	$k_{1,222}$	$k_{1,12}$	$k_{1,112}$
EF 3D SAMCEF	1.0139e6	5.3576e9	1.631e9	-3.0506e10	-9.14e9	-2.651e9
Coefficient	$k_{1,122}$	$k_{2,2}$	$k_{2,11}$	$k_{2,22}$	$k_{2,111}$	$k_{2,222}$
EF 3D SAMCEF	5.7725e10	3.2461e10	-4.66e9	-4.5512e11	-9e8	1.7137e12
Coefficient	$k_{2,12}$	$k_{2,112}$	$k_{2,122}$			
EF 3D SAMCEF	1.0715e10	5.7725e10	-9.1516e10			

TABLE 5.3 – Raideurs non-linéaires réduites pour le cas de la poutre 3D traité par SAMCEF. Réduction sur les modes 1F et MD11 calculés par STEP

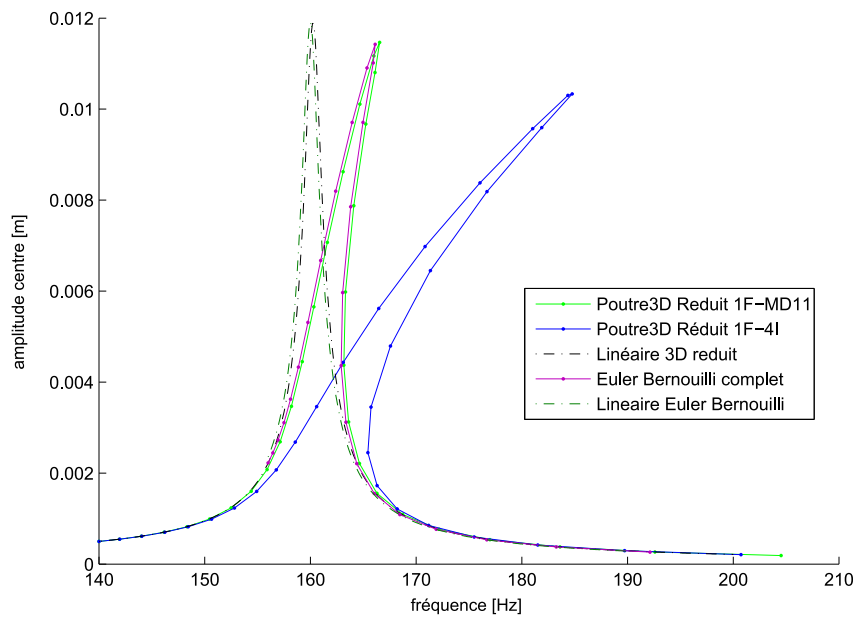


FIGURE 5.8 – FRF de la poutre 3D réduite sur les mode 1F et MD (1,1). Comparaison avec la poutre d'Euler-Bernoulli non réduite.

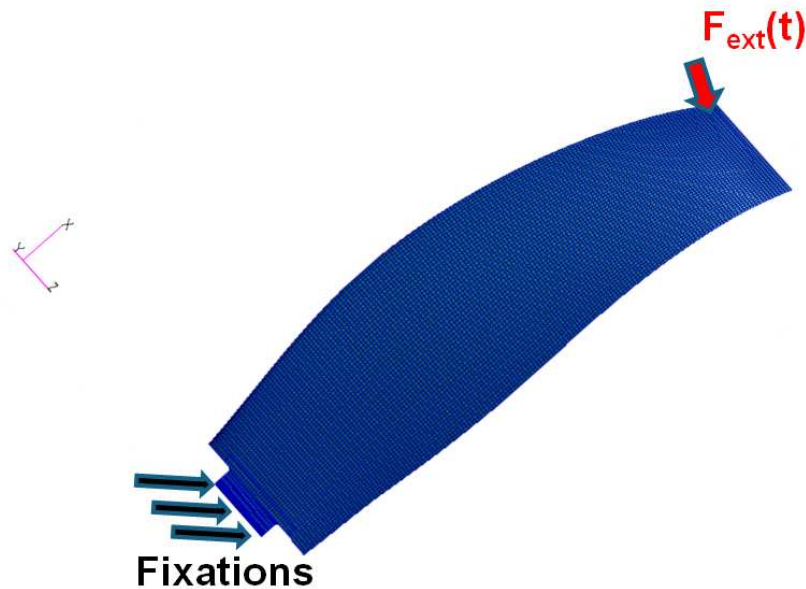


FIGURE 5.9 – Maillage éléments finis du modèle de pale d'open rotor

nous donne des résultats moins raides que la réduction sur les modes 1F et 4I, et qu'elle permet également de retrouver des résultats proches de ceux de la poutre d'Euler-Bernoulli non réduite.

## 5.4 Application à la réduction du modèle de pale de l'open rotor

### 5.4.1 Description du modèle

L'objet de l'étude est une pale d'hélice d'open rotor, dont une représentation du maillage est donnée sur la Fig.5.9. Ce modèle comporte 41 698 nœuds, ce qui correspond à  $n = 41\,698 \times 3 = 125\,094$  ddl.

On considèrera dans la suite que la pale est encastrée au niveau de ses portées et qu'une force ponctuelle et harmonique est appliquée en tête d'aube au niveau du bord d'attaque côté extradós (nœud 34 632). L'amplitude de la force imposée est de  $F = 25N$ . On introduit a priori un amortissement modal de  $\xi = 0.03$  pour le premier mode. Les bases de réduction utilisées pour ces premiers résultats seront composées de vecteurs de la base modale linéaire et de dérivées modales.

### 5.4.2 Réduction sur les premiers modes linéaires

On utilise les algorithmes de réduction présentés précédemment pour réduire le modèle de la pale sur les 5 premiers modes propres de la structure. On effectue les réductions de manière séquentielle, c'est-à-dire que l'on considère la réduction sur le premier mode, puis sur les deux premiers modes, etc. Cela permet en particulier de mettre en évidence une éventuelle convergence des résultats. Les formes des 5 modes considérés sont représentées sur la Fig.5.10.

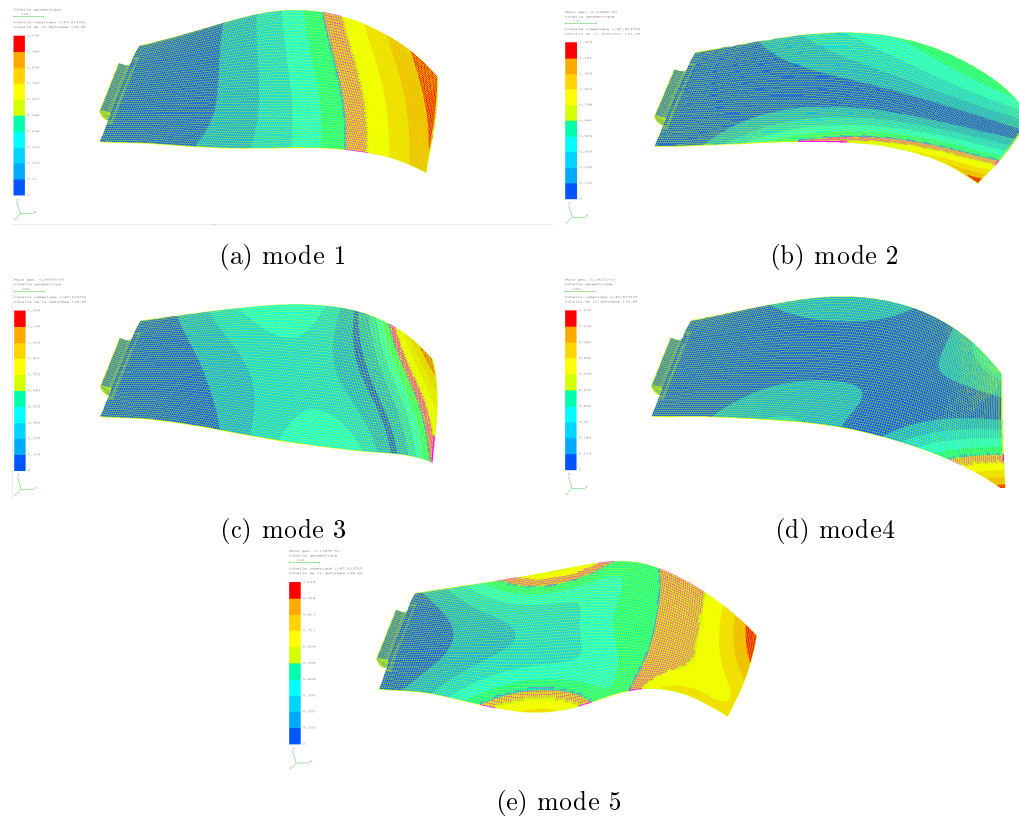


FIGURE 5.10 – Forme des cinq premiers modes propres de la structure industrielle (norme du déplacement)

Au niveau de la construction du modèle réduit pour 5 modes, on doit imposer un déplacement sur 1, 2 ou 3 modes pris parmi les 5 modes disponibles. Pour un déplacement imposé sur 1 mode, on considère 5 amplitudes différentes, ce qui amène à 25 calculs statiques. Pour un déplacement sur 2 modes, il y a 10 paires de modes à considérer, ce qui conduit à 4 combinaisons (décrites dans l'équation (A.2)) et ce pour 5 amplitudes différentes, ce qui conduit à 200 calculs statiques. Enfin pour un déplacement imposé sur 3 modes, il y a 10 triplets de modes à considérer, ce qui conduit à 10 combinaisons (décrites dans l'équation (A.3)) et ce pour 5 amplitudes différentes, ce qui mène à 400 calculs statiques. Au final on doit réaliser  $25 + 200 + 400 = 625$  calculs statiques. Notons que ces calculs sont relativement rapides car il s'agit seulement d'évaluer les efforts en fonction des déplacements imposés (il n'y pas de résolutions non-linéaires). Dans ce cas, la création du modèle pour 5 modes requiert une cinquantaine d'heures.

Pour évaluer la convergence des coefficients du modèle réduit, on trace l'évolution des coefficients  $k_{i,i,i}$ ,  $k_{i,i,i,i}$ ,  $k_{i,i,j}$ ,  $k_{i,i,i,j}$  et  $k_{i,i,j,j}$  pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$ . Les résultats sont donnés sur les Figs. 5.11 et 5.12.



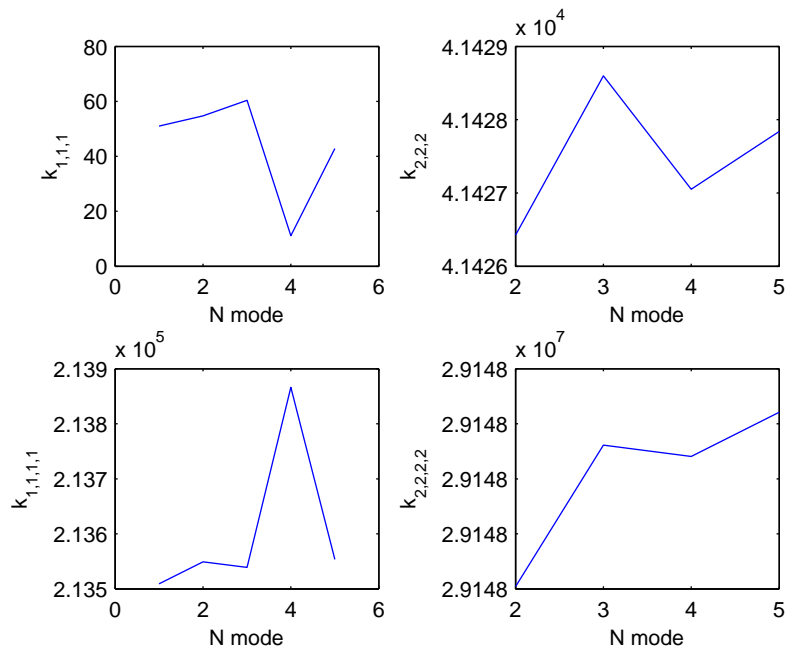


FIGURE 5.11 – Evolution des coefficients  $k_{1,1,1}$ ,  $k_{2,2,2}$ ,  $k_{1,1,1,1}$  et  $k_{2,2,2,2}$  en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit

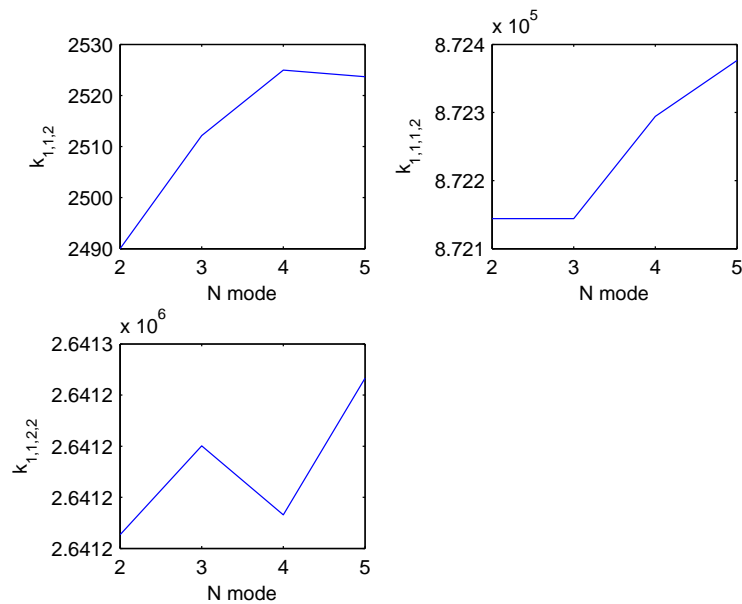


FIGURE 5.12 – Evolution des coefficients  $k_{1,1,2}$ ,  $k_{1,1,1,2}$  et  $k_{1,1,2,2}$  en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit

D'une manière générale, ces figures montrent que les coefficients ne varient pas trop en fonction du nombre de modes considérés (sauf peut être pour le coefficient  $k_{1,1,1}$ , mais celui-ci a une valeur très faible par rapport aux autres coefficients).

On peut simuler le comportement dynamique de la structure pour une force ponctuelle  $\mathbf{F}$ , appliquée du côté libre de la pale (nœud 34632), selon la direction  $y$ , d'amplitude de 25 N, en utilisant les modèles réduits que l'on vient de calculer. Les résultats sont tracés sur la Fig.5.13. Encore une fois on observe que la réduction sur un seul mode (sur le premier mode) induit un effet rigidifiant artificiel qui tend à s'atténuer lorsque le nombre de modes utilisés pour construire le modèle réduit augmente. On observe également une convergence apparente des résultats, les FRFs calculées sur un modèle réduit à 3, 4 ou 5 modes sont sensiblement les mêmes. Ces résultats sont à analyser avec précautions, en effet, il n'existe pas de solutions de référence auxquelles les comparer (il est, à ce jour, extrêmement difficile de réaliser une analyse dynamique non-linéaire sur la structure complète) et les seuls moyens de valider ces résultats seraient de considérer un modèle réduit avec plus de modes ou encore de les comparer avec des résultats expérimentaux.

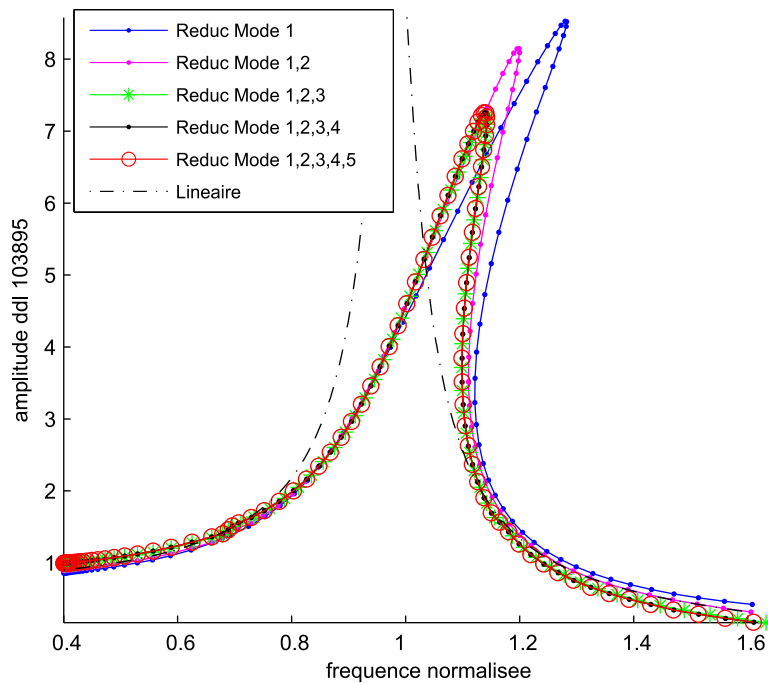


FIGURE 5.13 – Evolution de la FRF de la pale pour une excitation ponctuelle calculée à partir d'un modèle réduit sur les 5 premiers modes de la structure

### 5.4.3 Introduction des dérivées modales dans la base de projection

On considère maintenant l'introduction de dérivées modales dans la base de projection afin d'observer leurs contributions à une amélioration éventuelle des résultats. Etant donné que l'on étudie le comportement de la structure autour de sa première fréquence de résonance, on ne considèrera que la dérivée modale (1,1) notée  $\partial\Phi_{1,1}$  et on réduira le système sur les deux bases suivantes :

- (i) mode 1F et dérivée modale (1,1),
- (ii) modes 1F, 2F et dérivée modale (1,1).

Pour le calcul de  $\partial\Phi_{1,1}$ , on suit la procédure décrite à la section A.0.3. L'amplitude utilisée pour imposer un déplacement statique sur le premier mode linéaire  $\Phi_1$  est de  $q_1 = 1e - 3$ , et on calcule le premier mode propre dans la configuration déformée  $\Phi_1^d$ . La dérivée modale (1,1) est alors définie par :

$$\partial\Phi_{1,1} = \frac{\Phi_1^d - \Phi_1}{q_1}. \quad (5.35)$$

La forme de la dérivée modale (1,1) est représentée sur la Fig.5.14. Celle-ci correspond à un déplacement en forme de "papillon" dans la direction transverse et peut, dans une certaine mesure, être rapprochée du 2ème mode propre linéaire (Fig.5.10)

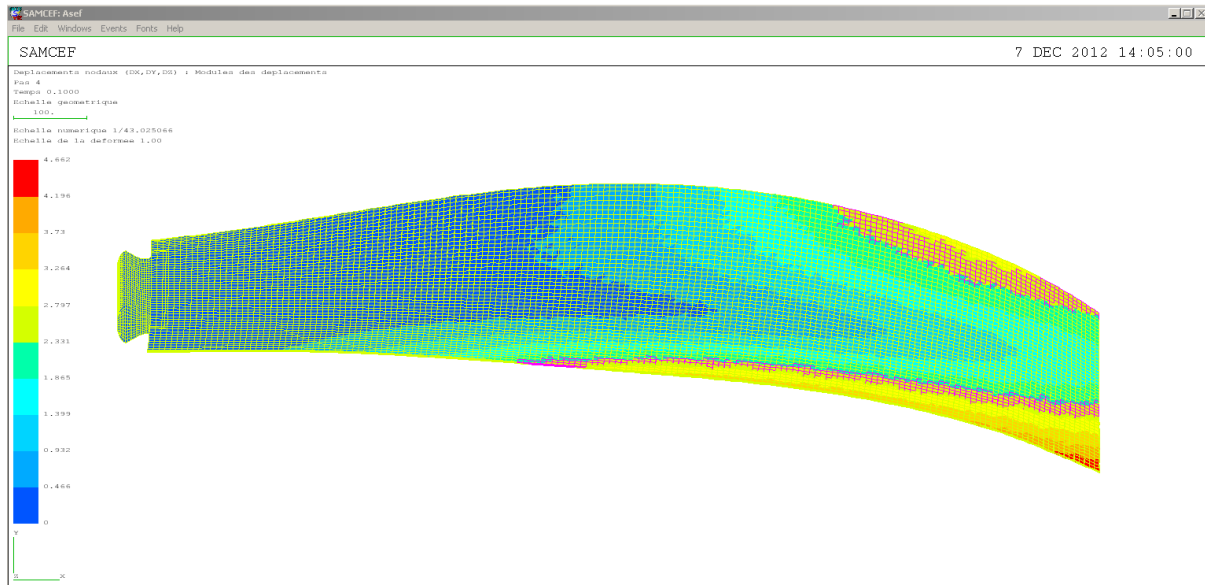


FIGURE 5.14 – Représentation de la dérivée modale (1,1) pour la pale d'open rotor

Après avoir calculé cette dérivée modale, on construit les deux bases de réduction  $\Psi_1 = [\Phi_1, \partial\Phi_{1,1}]$  et  $\Psi_2 = [\Phi_1, \Phi_2, \partial\Phi_{1,1}]$  et on estime les coefficients du modèle réduit en appliquant la procédure STEP décrite à la section A.0.2. Finalement, on utilise ces résultats pour simuler le comportement dynamique de la structure autour de son premier mode de vibration.

La Fig.5.15 compare les résultats obtenus en utilisant les bases  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  et la base composée des 5 premiers modes propres décrite dans la partie précédente. On observe ici que l'ajout de  $\partial\Phi_{1,1}$  ne permet malheureusement pas d'améliorer les résultats (si on considère que la solution de référence est la solution calculée avec les 5 premiers modes).

Ces résultats ne signifient pas forcément que les dérivées modales ne permettent pas d'améliorer les résultats, mais ils indiquent que la dérivée modale (1,1) n'est peut être pas la meilleure candidate pour cette configuration. D'autres calculs seraient nécessaires pour confirmer ou infirmer ces résultats, par exemple en considérant des dérivés modales (1,2) ou (1,3). Se pose ici la question du choix d'une base de dérivées modales (ou de modes linéaires) permettant d'obtenir un modèle réduit représentatif et efficace. Il est clair qu'une stratégie de choix a priori devrait être mise en place pour rendre l'approche efficace. Ces développements n'ont pas pu être réalisés par manque de temps, mais feront l'objet de futures recherches.

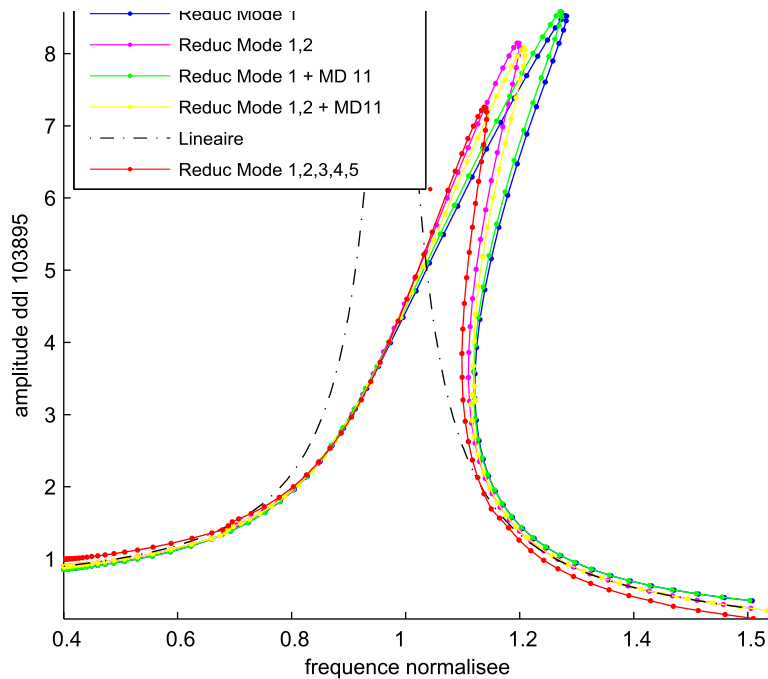


FIGURE 5.15 – Comparaison des réponses en fréquence pour différents modèles réduits de pale d'open rotor

## 5.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons utilisé une partie des méthodes de réduction de modèle présentées dans le chapitre 2 afin de réduire des modèles tridimensionnels de structures mécaniques. Des algorithmes spécifiques ont été implémentés pour mettre en place la méthode de réduction en lien avec le logiciel SAMCEF (logiciel d'éléments finis utilisé par SNECMA). Deux applications ont été traitées, une première correspondant à un cas simple de poutre 3D et le second correspondant à un exemple de structure industrielle. Pour le cas de la poutre bi-encastée, les résultats ont été comparés avec ceux du chapitre 2, et ils montrent que, dans ce cas, l'utilisation de dérivées modales pour compléter la base de projection permet de retrouver des résultats en cohérence avec les résultats du modèle 1D obtenus dans le chapitre 2.

Enfin nous avons présenté l'application des méthodes de réduction, et en particulier la procédure d'évaluation des raideurs non-linéaires (STEP) au cas d'une aube d'open rotor. Les simulations ont été réalisées sur une pale seule, dont les portées sont supposées fixes. La structure est réduite sur une base comprenant les 5 premiers modes linéaires, et on étudie l'influence de la taille de la base sur la réponse dynamique. Les résultats font apparaître une convergence empirique, qu'il faudrait étayer par d'autres simulations ou par des résultats expérimentaux, étant donné qu'il n'existe pas de solution de référence pour ce modèle. L'utilisation des dérivées modales a également été envisagée pour compléter la base de réduction de ce modèle. Ici, les dérivées modales qui ont été choisies, ne permettent malheureusement pas d'améliorer les résultats. Cependant, au vu des résultats obtenus pour la poutre 3D, nous pensons que des dérivées modales bien choisies devraient être à même d'améliorer la qualité du modèle réduit.

de la structure industrielle, la question réside donc dans le choix des dérivées modales à inclure dans la base de réduction.

En termes de perspectives, un premier objectif pour des travaux futurs serait de valider les méthodes de réduction et les résultats présentés dans cette section. Étant donné qu'il semble difficile d'obtenir une solution de référence pour le modèle de l'aube en non-linéaire géométrique, il serait judicieux de construire un modèle proche avec moins de degrés de libertés et pour lequel on serait en mesure de calculer une solution de référence (par HBM ou autre). On pourrait par exemple construire un modèle de plaque vrillée, en commençant par un modèle 2D (modèle de plaque) puis en continuant avec un modèle 3D.

Une autre méthode de validation serait de réaliser des expériences sur une pale seule, encastree dans un mors et soumise à une excitation périodique. Les résultats expérimentaux permettraient alors d'obtenir différentes informations, et en particulier le niveau d'excitation nécessaire pour faire apparaître des phénomènes non-linéaires. De plus, ils permettraient de définir un coefficient d'amortissement représentatif de la structure.

Une autre perspective importante consisterait à prendre en compte le disque et à construire effectivement un modèle à symétrie cyclique. En effet, dans les sections précédentes, nous avons appliqué une méthode de réduction sur une pale seule et encastree au niveau de ses portées. Nous pourrions ainsi prendre en compte un couplage linéaire entre les secteurs tout en conservant la caractéristique non-linéaire de la pale.

Une ultime réduction pourrait être réalisée, dans l'objectif d'étudier les solutions multiples du problème. En effet, la construction des modes non-linéaires du secteur pourra être avantageusement réutilisée dans un modèle de roue aubagée complète donnant accès à un problème compact et donc gérable par les techniques de recherche de solutions multiples présentées dans le chapitre 4.1.

# Conclusions et perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse concernent l'étude des systèmes vibratoires mécaniques non-linéaires et s'articulent principalement autour de deux axes : la réduction de modèle et la recherche exhaustive des solutions périodiques.

Dans un premier temps (chapitre 2), une étude comparative des méthodes de réduction par projection de Galerkin a été effectuée. On a détaillé les procédures de choix de différentes bases de projection, soit calculées directement à partir des données mécaniques du modèle (a priori), soit calculées à partir de simulations ou d'expériences préliminaires (a posteriori). Dans l'optique d'une application à des structures industrielles, on s'est tourné vers un choix de base a priori, car cela demande moins de calculs que le choix d'une base a posteriori. Une attention particulière a été portée au traitement des termes correspondant à la projection des efforts non-linéaires, puisque l'évaluation de ces derniers joue un rôle crucial dans les performances des méthodes de réduction. Dans le cadre particulier des non-linéarités géométriques, le choix a été fait d'estimer les termes réduits à partir d'une approximation polynomiale basée sur une simulation statique. Cette stratégie permet d'éviter de recalculer le champ de forces non-linéaires du modèle complet à chaque itération, ce qui accélère l'évaluation des équations dans les processus de résolution du système réduit. Dans le cadre des structures industrielles, une fois que l'approximation a été calculée, elle a permis d'obtenir un modèle réduit totalement indépendant du modèle complet, ce qui évite notamment les échanges de données entre les logiciels éléments-finis et les logiciels spécifiques associés au traitement des équations non-linéaires.

Toujours sur la réduction de modèle, il a été envisagé (chapitre 3) d'utiliser des méthodes de réduction dans le cadre spécifique de la recherche des solutions vibratoires non-linéaires par la méthode HBM. Une application originale des méthodes de Proper Generalized Decomposition (PGD) a été ainsi proposée. La méthode PGD permet de calculer simultanément une base de réduction et la solution. La base de réduction peut ainsi évoluer en fonction de certains paramètres (comme la fréquence d'excitation) pour s'adapter aux variations de comportement du système. Cette approche fournit une bonne approximation de la solution en fonction d'un petit nombre de paramètres. Cependant, par construction, la méthode est totalement dépendante du modèle complet, dans le sens où on doit évaluer certaines quantités sur ce modèle pour les projeter sur des espaces qui évoluent. Ainsi les performances sont moins intéressantes que lors d'une réduction incluant une fois pour toutes l'estimation des efforts non-linéaires. Dans le cadre de la recherche de solution périodiques par HBM, on a également proposé de réduire le nombre d'équations algébriques en utilisant des méthodes de sélection d'harmoniques. Elles ont pour but de prédire les composantes fréquentielles les plus significatives dans une solution et de ne retenir que celles-ci dans le calcul effectif de cette solution. On a ainsi proposé (chapitre 3) une méthode de sélection d'harmonique efficace basée sur l'information contenue dans les prédictions associées aux méthodes de continuation. Cette méthode permet de gérer indépendamment le contenu fré-

quentiel de chaque degré de liberté pour chaque fréquence de calcul. Les gains obtenus en terme de temps de simulation sont en moyenne (sur les exemples traités) de l'ordre d'un facteur 2 à 4. Enfin, dans le chapitre 5, une partie des méthodes de réduction de modèle exposées dans ce manuscrit ont été appliquées dans le cadre de la réduction des structures 3D avec non-linéarités géométriques. Au vu des résultats exposés au chapitre 2, la méthode de réduction par projection de Galerkin a été choisie pour sa facilité de mise en œuvre. La méthode d'estimation des efforts non-linéaires réduits est nécessaire pour les modèles éléments-finis, car il n'est pas possible d'obtenir directement une expression des efforts non-linéaires en fonction des degrés de liberté. Des codes spécifiques ont été écrits pour interfacer le logiciel de calcul éléments-finis SAMCEF, utilisé par Snecma, et le logiciel de calcul numérique Matlab, utilisé pour la résolution du système réduit. Ils permettent le calcul des dérivées modales et l'approximation des efforts non-linéaires réduits pour des modèles 3D générés par SAMCEF. Les différentes procédures ont été testées sur un cas de poutre 3D non-linéaire et donnent des résultats cohérents avec ceux d'un modèle 1D utilisé au préalable pour tester les méthodes de réduction. Une première application de ces procédures sur un modèle industriel de pale d'open rotor est également faite (chapitre 5). Le modèle de pale est réduit sur la base de ses premiers modes propres, complétés par leurs dérivées modales. Les premiers résultats montrent un début de convergence du comportement non-linéaire. Ceux-ci devront être complétés par l'augmentation de la taille de la base de réduction, ou sa modification à l'aide de vecteurs pouvant être issus de différents calculs de dérivées modales.

Le deuxième axe des travaux a porté sur la recherche exhaustive des solutions périodiques des systèmes dynamiques non-linéaires. De manière générale, un sous-ensemble des solutions peut être déterminé par l'utilisation de méthodes de continuation couplées à un suivi des bifurcations. Cependant, il a été montré, en particulier dans ce manuscrit, que certaines solutions ne peuvent pas s'obtenir de cette manière dans la mesure où elles sont "déconnectées" des autres solutions. Dans le cadre de la recherche des solutions périodiques par HBM pour des systèmes avec non-linéarités polynomiales (du type des non-linéarités géométriques), il a été proposé (chapitre 4.1) d'utiliser des méthodes basées sur le calcul de bases de Groebner pour résoudre totalement les systèmes d'équations algébriques associés. La méthode transforme le problème en la résolution d'un problème aux valeurs propres de taille égale au nombre de solutions (réelles ou complexes) du système algébrique. La résolution de ce problème permet alors de déterminer numériquement les solutions. L'avantage par rapport aux méthodes d'homotopies est que cette méthode n'est pas basée sur des méthodes de continuation, ce qui évite de suivre des chemins divergents et permet le calcul direct des solutions. L'application de ces méthodes à des systèmes à symétrie cyclique simples et comportant des non-linéarités cubiques montre que, même pour des excitations simples, le comportement dynamique du système peut être extrêmement riche et complexe. Enfin, dans un esprit plus prospectif, une extension de ces méthodes de recherche de solutions multiples a été proposée dans le cadre des systèmes d'équation possédant une certaine symétrie (symétrie cyclique par exemple). L'utilisation de la théorie des groupes, couplée aux méthodes matricielles de détermination des solutions permet de réduire la taille de l'ensemble des solutions en définissant des classes d'équivalence pour les différentes solutions. Cela permet de rendre plus efficace la recherche des solutions multiples dans la mesure où les solutions similaires ne sont comptées qu'une seule fois et que, de ce fait, les ensembles considérés sont moins grands.

En termes de pistes pour des travaux futurs, on peut premièrement considérer la nécessité

---

de consolider et d'améliorer les techniques de réduction de modèle utilisées dans ce manuscrit. Pour les méthodes de projection de Galerkin, il serait par exemple intéressant de dresser une liste de critères permettant de sélectionner les vecteurs de la base de projection, en particulier dans le cadre de l'utilisation des dérivées modales. En effet, dans cette étude, les dérivées modales à ajouter pour compléter la base linéaire ont été choisies simplement, en s'appuyant sur des considérations fréquentielles, ce qui ne permet pas toujours d'améliorer les résultats. La présence d'un critère de sélection des dérivées modales basé sur d'autres éléments, quantitatifs, permettrait probablement d'obtenir de meilleures bases de réduction.

De manière générale, les bases de projection utilisées dans ce manuscrit ont été choisies a priori, c'est-à-dire calculées à partir des données mécaniques de la structure, ceci dans le but de limiter les calculs nécessaires à leur détermination. Cependant, il s'avère que pour déterminer une approximation des efforts non-linéaires réduits, on doit réaliser une série de calculs statiques sur le modèle complet. Il est clair que les résultats de ces calculs contiennent des informations sur le comportement de la structure qui ne sont pas toutes exploitées (ie les informations orthogonales à la base de projection). Il serait alors intéressant de considérer l'étude de ces résultats pour déterminer un ensemble de vecteurs pouvant compléter la base de projection initiale.

Au niveau de l'évaluation des raideurs réduites, il serait judicieux de réaliser une étude plus poussée sur la méthode proposée, par exemple en déterminant le nombre optimal de calculs statiques à considérer (et les combinaisons de modes associées) pour obtenir une approximation plus fiable des efforts non-linéaires réduits. Cela devrait permettre d'optimiser les temps de calcul et de donner des intervalles de validité pour les expressions réduites. Par ailleurs, il est en théorie possible d'envisager la création d'une méthode similaire pour les efforts non-linéaires dépendant de la vitesse. En effet, la méthode d'estimation des termes non-linéaires réduits présentée ici n'est envisagée que pour les non-linéarités faisant intervenir le seul déplacement, ce qui exclut par exemple les problèmes de frottement. En supposant la forme des efforts non-linéaires réduits, il est possible d'introduire des effets de vitesse via des simulations préliminaires dynamiques.

Pour consolider les résultats obtenus sur la réduction de modèle des structures 3D, et en particulier les résultats de l'application industrielle, il serait souhaitable d'appliquer une partie des méthodes sur un modèle de complexité intermédiaire, comme une plaque vrillée, pour laquelle on sait calculer une solution de référence. Cela permettrait de quantifier les performances et la qualité des méthodes de réduction plus précisément qu'avec des modèles 1D trop simples. La création de modèles réduits performants prenant en compte les non-linéarités géométriques devrait, à terme, être suffisamment souple pour permettre l'intégration de nouvelles sources de non-linéarité, comme par exemple le frottement.

Enfin, pour valider les résultats de la réduction de la structure industrielle, il faudrait comparer les résultats obtenus à des résultats d'essais expérimentaux, mais cela dépend de leur disponibilité.

Au niveau de la recherche des solutions multiples, les résultats présentés dans ce manuscrit ont montré que l'application des méthodes disponibles reste limitée à des systèmes de petite taille (une dizaine de variables) en raison de la croissance exponentielle du nombre de solutions quand on augmente le nombre de variables. Cependant, l'extension proposée basée sur la prise en compte des symétries permet d'envisager le cas de systèmes plus gros puisqu'elle permet de réduire le nombre de solutions à chercher. Dans ce contexte, on peut envisager une application de cette méthode à des systèmes plus compliqués que ceux considérés dans le manuscrit, par exemple des systèmes à symétrie cyclique comportant plusieurs degrés de liberté par secteur. D'autre part, les méthodes proposées ici traitent des solutions dans leur ensemble, et on s'aperçoit



qu'une grande majorité des solutions est complexe et que seule une petite partie des solutions est réelle. Des améliorations pourraient alors être apportées en ne considérant que la recherche des solutions réelles des systèmes d'équations algébriques.

Enfin, à un niveau plus théorique, ce manuscrit ne considère que l'étude des solutions périodiques. Or, il existe d'autres types de solutions pour les systèmes dynamiques non-linéaires, comme les solutions quasi-périodiques. Ces solutions font intervenir plusieurs composantes fréquentielles de base, incommensurables entre elles, et ne peuvent pas être déterminées à partir de la méthode HBM classique. Dans un souci d'exhaustivité, il est envisageable de développer et d'intégrer des méthodes de recherche de solutions quasi-périodiques dans les méthodes d'analyse des systèmes dynamiques présentées ici.

# Annexe A

## Formatage du modèle SAMCEF et stratégie de calcul pour la réduction de modèle

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la procédure de réduction de modèle pour des systèmes soumis à des non-linéarités géométriques se déroule en deux temps :

- (i) calculer une base de projection ;
- (ii) calculer l'expression des efforts non-linéaires réduits relativement à cette base de projection (procédure STEP, chapitre 2, section 2.3.2).

On montre ici comment ces deux opérations peuvent être réalisées à partir d'un logiciel éléments finis (dans notre cas SAMCEF) et de Matlab. On commencera par la description de la procédure STEP réalisée à l'aide de SAMCEF, puis on donnera des indications particulières sur le calcul des bases de projection à partir de SAMCEF. Cette annexe est prioritairement destinée au bureau d'études de Snecma et sert de support aux algorithmes qui lui ont été fournis.

### A.0.1 Pré-traitement du modèle SAMCEF

#### A.0.1.1 Formatage du jeu de données

En général, un modèle éléments finis se compose de trois parties : une partie de définition de la structure (géométrie, maillage, matériaux ...), une partie donnant les conditions aux limites (déplacements imposés, forces imposés ...) et enfin une partie de définition du calcul (analyse modale, calcul non-linéaire statique ...). Par souci de modularité on choisit d'associer à chaque partie un fichier distinct, cela permet en particulier de changer les conditions aux limites ou le type de calcul de manière simple sans avoir à réécrire les données géométriques.

On suppose alors que la partie géométrique du modèle est consignée dans le fichier *data\_NomPb.dat*, que les conditions aux limites sont données dans le fichier *clm\_NomPb\_CLMtype.dat* et que la description du calcul est donnée dans le fichier *comp\_NomPb\_CompType.dat*. Le fichier de description du calcul fait appel aux deux autres fichiers grâce aux commandes suivantes :

```
INPUT.MODELE "data_NomPb.dat"
INPUT.BOUNDARYCONDITION "clm_NomPb_CLMtype.dat"      (A.1)
...
```

### A.0.1.2 Analyse modale préliminaire

Avant de pouvoir appliquer la procédure STEP, il est nécessaire d'effectuer une analyse modale du système au repos (ie soumis uniquement à ses conditions aux limites de départ). Cette analyse modale permet au passage d'obtenir les matrices de masse et de raideur linéaire du système complet (utilisation de la routine Fortran *u11toIJ.f* pour lire le fichier binaire *.u11* contenant les résultats).

Le fichier décrivant le calcul est nommé *comp\_NomPb\_ModalBasis\_0.dat*. Le lancement du calcul ainsi que la récupération des modes propres par Samres se fait en appelant *lance\_NomPb\_ModalBasis.sh*. Le fichier *NomPb\_ModalBasis.ans* généré par Samres contient les formes propres linéaires des modes calculés.

### A.0.2 Procédure STEP à partir de SAMCEF

On suppose que l'on dispose d'une base de projection  $\Phi$  de taille  $n \times r$ , ainsi que des matrices de masse et de raideur linéaire  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  obtenues par un calcul préliminaire. La procédure STEP (méthode en déplacement imposé) se déroule alors en trois temps :

1. Ecriture des jeux de données pour réaliser les calculs statiques.
2. Résolution des problèmes définis dans l'étape précédente.
3. Traitement des résultats pour en extraire les forces réduites.

Le lancement d'un calcul global (ie étapes 1,2,3 et éventuellement une étape 0 correspondant au calcul des dérivées modales) se fait grâce au fichier de lancement *lanceGlobal\_PoutreSam.sh*. Le détail des étapes 1 à 3 est donné dans la suite de cette section.

#### Etape 1 (Matlab)

Cet étape permet de générer les jeux de données qui définissent les calculs statiques associés à un déplacement imposé sur une combinaison de un, deux ou trois modes. Ces jeux de données sont créés par la routine *MakeDatCompForceFromDispOnProjectionBasis.m* qui prend comme argument la base de réduction. Les déplacements sur un deux ou trois modes sont gérés séparément et leurs amplitudes sont gérées par une fonction qui permet de faire varier l'amplitude en fonction du temps. Pour un déplacement sur deux modes  $i$  et  $j$  on considère les 4 combinaisons suivantes :

$$(i) + (j), (i) - (j), (i) + \frac{1}{2}(j), (i) - \frac{1}{2}(j) \quad (\text{A.2})$$

Enfin pour un déplacement sur 3 modes  $i, j$  et  $k$  on considère les 10 combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} &(i) + (j) + (k), (i) + (j) - (k), (i) - (j) + (k), (i) - (j) - (k), (i) + (j) + \frac{1}{2}(k), \\ &(i) + (j) - \frac{1}{2}(k), (i) + \frac{1}{2}(j) + (k), (i) - \frac{1}{2}(j) + (k), \frac{1}{2}(i) + (j) + (k), -\frac{1}{2}(i) + (j) + (k). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On note que les combinaisons de mode utilisées peuvent être adaptées en fonction des modes considérés.

Une fois que cette routine a été exécutée, on obtient les fichiers suivants :

1. une liste de fichier contenant les conditions aux limites pour un déplacement imposé sur un, deux ou trois modes (*clm\_NomPb\_DepMode\_Basis\_nMode\_casI.dat*) pour  $n = 1, 2, 3$  et  $I$  variables selon le nombre de mode considéré ( $I = 1, 2$  pour  $n = 1, I = 1..4$  pour  $n = 2$  et  $I = 1..10$  pour  $n = 3$ ).

- 
2. une liste de fichier contenant les instructions de lancement des calculs statiques non linéaires (*comp\_NomPb\_Force\_DepMode\_Basis\_nMode\_casI.dat*).
  3. un fichier permettant l'exécution de tous les calculs définis précédemment ainsi que la récupération des résultats (i.e. des efforts) à partir d'un terminal linux (*lance\_NomPb\_GetForcesFromDepMode.sh*).

## Etape 2 (SAMCEF)

Le lancement des calculs se fait simplement en exécutant le fichier *lance\_NomPb\_GetForcesFromDepMode.sh* à partir d'un terminal linux. On note que les différentes amplitudes sont en fait gérées par le paramètre subcase (.SUB) de SAMCEF ainsi que grâce à une fonction qui permet de faire varier l'amplitude des déplacements imposés (la fonction peut être définie en même temps que les données géométriques).

On obtient alors une série de fichiers générée par Samres contenant les efforts induits par les déplacements imposés *NomPb\_Forces\_DepMode\_Basis\_nMode\_casI.ans*.

## Etape 3 (Matlab)

La récupération des résultats SAMCEF et la génération du modèle réduit se fait en exécutant la routine *MakeReducedModelFromSamcefResult.m* qui prend comme argument les fichiers de résultats générés par Samres. Après avoir récupéré les efforts, la routine permet l'évaluations des coefficients linéaires  $k_{s,n}^{(r)}$  et non linéaires  $k_{s,n,m}^{(2,r)}$  et  $k_{s,n,m,l}^{(3,r)}$  au travers de la résolution des équations (2.59,2.61,2.62) (voir chapitre 2). Ces paramètres peuvent ensuite être utilisés pour réaliser une étude dynamique par HBM sur le modèle réduit.

Une étape de vérification des coefficients linéaires est également effectuée en comparant les coefficients linéaires obtenus par STEP avec les coefficients linéaires obtenus par projection de Galerkin ( $k_{s,n}^{(r)} = \Phi_s^T \mathbf{K} \Phi_n$ ).

### A.0.3 Calcul des dérivées modales à l'aide de SAMCEF

On présente ici la procédure utilisée pour calculer les dérivés modales à partir de SAMCEF. La méthode utilisée est la méthode numérique faisant intervenir la résolution de deux problèmes aux valeurs propres (méthode 3, chapitre 2 section 2.2.1.3). La mise en œuvre de la méthode se fait en trois étapes :

1. Ecriture des jeux de données pour un déplacement imposé sur un mode propre linéaire.
2. Calcul des modes propres de la structure dans la configuration déformée.
3. Traitement des résultats pour en extraire les dérivées modales.

## Etape 1 (Matlab)

Cette étape permet de générer les jeux de données nécessaire au calcul des modes propres d'une configuration déformée. Ces jeux de données sont créés par la routine *MakeDatModalDerivative.m* qui prend comme argument une série de couple  $\{(i, j), \delta q_j\}$ ,  $1 \leq i, j \leq n_{ml}$  qui indiquent quelles sont les dérivés modales qui vont être calculées (i.e.  $\partial \Phi_{i,j}$ ) ainsi que l'amplitude  $\delta q_j$  du déplacement imposé sur le mode  $j$ . La routine prend également en entrée la matrice des modes propres linéaires initiaux (pour pouvoir imposer les conditions aux limites en déplacement). Une fois que cette routine a été exécutée, on obtient les fichiers suivants :

- Une liste de fichiers contenant les conditions aux limites pour un déplacement imposé d’amplitude  $\delta q_j$  sur le mode linéaire  $j$  (*clm\_NomPb\_DepMode\_j.dat*).
- Une liste de fichiers contenant les instructions pour le calcul des modes propres dans la configuration déformée (*comp\_NomPb\_ModalBasis\_DepMode\_j.dat*)
- Un fichier de lancement séquentiel de tous les calculs précédents et des requêtes Samres associées à la récupération des modes propres des configurations déformées (*lance\_NomPb\_ModalBasis\_DepMode.sh*)

## Etape 2 (SAMCEF)

Le lancement des calculs samcef est réalisé en exécutant le fichier *lance\_NomPb\_ModalBasis\_DepMode.sh* à partir d’un terminal linux. On obtient alors une série de fichiers générée par Samres (*NomPb\_ModalBasis\_DepMode\_j.ans*) contenant les modes propres de la configuration déformée.

## Etape 3 (Matlab)

La récupération des résultats Samres et le calcul des formes des dérivées modales se fait en exécutant la routine *ComputeModalDerivativeFromSamcefResults.m* qui prend comme arguments les modes propres linéaires initiaux ainsi que les couples  $\{(i, j), \delta q_j\}$  permettant de définir les dérivées modales qui vont être calculées. La matrice de masse est également utilisée dans cette routine pour normer les modes. On obtient une base de projection composée des modes propres linéaires initiaux retenus ainsi que des dérivées modales calculées, qui peuvent être utilisées dans la procédure d’estimation des raideurs non-linéaires par STEP.

# Bibliographie

- [1] D. Charleux. *Etude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2006.
- [2] L. Salles. *Etude de l'usure par fretting sous chargement dynamique dans les interfaces frottantes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [3] M. Gruin. *Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine basse pression soumise à des excitation structurales d'un turboréacteur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2012.
- [4] A. F. Vakakis. A multiple-scale analysis of nonlinear, localized modes in a cyclic periodic system. *Journal of Applied Mechanics*, 60 :388–397, 1993.
- [5] A. F. Vakakis and M.E King. A very complicated structure of resonances in a nonlinear system with cyclic symmetry : non linear forced localization. *Nonlinear dynamics*, 7 :85–104, 1995.
- [6] E. Sarrouy. *Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires. Application à la dynamique des rotors*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2008.
- [7] A. Ern and J.L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*.
- [8] O.C Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. ZHU. *Finite element method its basis and fundamental*.
- [9] J.L. Guyader. *The Rayleigh-Ritz method based on hamiltonian functional*.
- [10] K. C. Hall, R. E. Kielb, and J.P. Thomas. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics And Aeroelasticity of Turbomachines*. Springer, 2006.
- [11] D. Laxalde. *Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roue aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2007.
- [12] K. C. Hall, J. P. Thomas, and W. S. Clark. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA Journal*, 36 :879–886, 2002.
- [13] V. Carstens and J. Belz. Numerical investigation of nonlinear fluid-structure interaction in vibrating compressor blades. *Journal of turbomachinery*, 123 :402–408, 2001.
- [14] Yun Zheng and Hui Yang. Coupled fluid-structure flutter analysis of a transonic fan. *Chinese Journal of Aeronautics*, 24(3) :258 – 264, 2011.
- [15] Sondipon Adhikari. *Damping models for structural vibrations*. PhD thesis, Cambridge University, 2000.
- [16] S. Ghinet and N. Atalla. Modeling thick composite laminate and sandwich structures with linear viscoelastic damping. *Computers and Structures*, 89(15–16) :1547 –1561, 2011.
- [17] P. Dufflot and D. Taylor. Fluid viscous damping ; an effective way to suppress pedestrian induced motions in footbridge. *Footbridge 2008, third conference*, 2008.

- [18] M. Liu and D.G. Gorman. Formulation of Rayleigh damping and its extensions. *Computers and Structures*, 57(2) :277 – 285, 1995.
- [19] A. H. Nayfeh and P.F. Pai. *Linear and nonlinear structural mechanics*. Wiley-Interscience, 1996.
- [20] F. Perignon. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non-linéaires*. PhD thesis, Université d’Aix-Marseille II, 2004.
- [21] M. Amabili. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of rectangular plates with geometric imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 291 :539–565, 2006.
- [22] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric nonlinear forced vibrations of free edge circular plates. part 1 : Theory. *Journal of sound and vibration*, 258 :649–676, 2002.
- [23] M Amabili. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells : Comparison of different shell theories. *Composite Structures*, 94(1) :207 – 220, 2011.
- [24] S.N. Mahmoodi. *Nonlinear vibration and frequency response analysis of nanomechanical cantilever beams*. PhD thesis, Clemson University, 2007.
- [25] A. Lazarus, O. Thomas, and J.-F. Deu. Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS. *Finite Elements in Analysis and Design*, 49(1) :35 – 51, 2012.
- [26] M.R.M. Crespo Da Silva. A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :619 – 635, 1998.
- [27] C. Touzé. *Analyse et modélisation de signaux acoustiques et vibratoires chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, Université Paris 6, 2000.
- [28] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Paris 6, 2001.
- [29] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Models of friction damping with variable normal load for time-domain. *Proceedings of ISMA, Leuven, Belgium*, 1 :44–45, 2002.
- [30] R. Bouc. Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the 4th Conference on Non-Linear Oscillation, Prague, Czechoslovakia*, 1 :44–45, 1981.
- [31] V. Jaumouillé, J. J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems - application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329 (19) :4048–4067, 2010.
- [32] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jezequel. A dynamic lagrangian frequency time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of sound and Vibration*, 265 (1) :201–219, 2003.
- [33] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley-Interscience, 1979.
- [34] M. Geradin. *Théorie des vibrations*. Masson, 1993.
- [35] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comp. Appl. Math*, 6 :19–26, 1980.
- [36] N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 85 :19–26, 1959.
- [37] P. Sundarajan and S.T. Noah. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arclength continuation method. application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119 :9–20, 1997.

- 
- [38] F. Georgiades, M. Peeters, G. Kerschen, and J.C. Golinval. Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *AIAA journal*, 47 :195–216, 2009.
- [39] S. Jones and M. Legrand. Vibrations of mechanical systems undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method. *preprint Computers and Structure, March 2013*, 2013.
- [40] D. Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel- Application à la dynamique des rotors*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [41] F. Assis Rodrigues. *Etude de la dynamique non linéaire d'amortisseur du type squeeze film*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 2003.
- [42] G. Groll and D.J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241 (2) :223–233, 2001.
- [43] K.Y. Sanliturk and D.J. Ewins. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :511–523, 1996.
- [44] D. Laxalde, F. Thouverez, J. J. Sinou, and J. P. Lombard. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European journal of mechanics and solids*, 36 :676–687, 2007.
- [45] L. Salles, L. Blanc, F. Thouverez, and A.M. Gouskov. Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces. *Int. Journal of solid and structures*, 2011 :1513–1524, 2011.
- [46] T.M. Cameron, J.H. Griffin, and P. Grant. An alternating frequency time domain method for calculating the steady state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56 (1) :149–154, 1989.
- [47] C.T. Kelley. *Solving nonlinear equations with Newton method*. SIAM, 2003.
- [48] Y. Yuan. A review of trust region algorithms for optimization. *Proceedings of the Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, 1999.
- [49] D.A. Knoll and D.E. Keyes. Jacobian free Newton-Krylov methods : a survey of approaches and applications. *Journal of computational physics*, 193 :357–397, 2004.
- [50] P. Cresta. *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2008.
- [51] F. Risler and C. Rey. Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large scale nonlinear problems. *Numerical algorithms*, 23 :1–30, 2000.
- [52] H.B. An and Z.Z. Bai. A globally convergent Newton GMRES method for large sparse systems of nonlinear equations. *Applied Numerical Mathematics*, 57 :235–252, 2007.
- [53] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9 :17–29, 1951.
- [54] C. Rey and F. Risler. A Rayleigh Ritz preconditioner for the iterative solution to large scale non linear problems. *Numerical Algorithms*, 17 :279–311, 1998.
- [55] S. Sundar, B.K. Bhagavan, and S. Prasad. Newton-preconditioned Krylov subspace solvers for systems of nonlinear equations, a numerical experiment. *Applied Mathematic Letters*, 14 :195–200, 2001.
- [56] A.H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley-Interscience, 1995.



- [57] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode Asymptotique Numérique*. Lavoisier, Paris, 2007.
- [58] R. Arquier. *Une méthode de calcul des modes de vibrations non-linéaires des structures*. PhD thesis, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 2007.
- [59] S. Kakar, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas, and A. Lazarus. Manlab user guide. <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>, 2012.
- [60] S. Karkar. *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires, application aux instruments de musique auto-oscillants*. PhD thesis, Université de Aix Marseille, 2012.
- [61] A. Grolet and F. Thouverez. Free and forced vibration analysis of nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :2911–2928, 2012.
- [62] A.F. Vakakis. *Normal mode and localiation in nonlinear systems*. Wiley-Interscience, 1996.
- [63] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A. F. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical system and signal processing*, 23 :170–194, 2009.
- [64] M. Peeters, G. Kerschen, R. Vigié, G. Sérandour, and J.C. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : toward a practical computation using continuation technique. *Mechanical System and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.
- [65] R.M. Rosenberg. On nonlinear vibration of systems with many degrees of freedom. *Advance in applied mechanics*, pages 155–242, 1966.
- [66] A. F. Vakakis. Nonlinear normal mode and their application in vibration theory : an overview. *Mechanical System and Signal Processing*, 11(1) :3–22, 1996.
- [67] R. Benamar, M.M.K. Bennouna, and R.G. White. The effect of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures, part ii : fully clamped rectangular isotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 164(2) :295–316, 1993.
- [68] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non linear oscillation of structural systems using nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273 :77–101, 2004.
- [69] M. Ribeiro and M. Petyt. Nonlinear free vibration of isotropic plates with internal resonance. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 35 :263–278, 2000.
- [70] R. Lewandowski. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures-part 1 :theoretical background. *International Journal of Solids Structures*, 34(15) :1925–1947, 1997.
- [71] C. Gibert. *Analyse modale non-linéaire expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [72] M. Peeters. *Theoretical and experimental modal analysis of nonlinear vibrating structure using non linear normal modes*. PhD thesis, Université de Liège, 2011.
- [73] S.W. Shaw and C. Pierre. Nonlinear modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150 :170–173, 1991.
- [74] S.W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993.
- [75] S.W. Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169 :319–347, 1993.

- 
- [76] E. Pesheck, C. Pierre, and S. Shaw. Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124 :229–236, 2002.
- [77] P. Apiwattanalungarn, C. Pierre, and S. Shaw. Component mode synthesis using nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 41 :17–46, 2005.
- [78] M. Krack, L. Panning von Scheidt, J. Wallascheck, C. Siewert, and Hartung A. Reduced order modeling based on complex nonlinear modal analysis and its application to bladed disks with shroud contact. *Proceeding of ASME Turbo Expo 2013, San Antonio, Texas*, GT2013-94560, 2013.
- [79] M. Krack, L. Panning-von Scheidt, and J. Wallascheck. A method for nonlinear modal analysis and synthesis : application to harmonically forced and self excited mechanical systems. *Preprint submitted to Journal of Sound and Vibration*, 2013.
- [80] D. Jiang, C. Pierre, and Shaw S.W. The construction of non linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 40 :729–746, 2005.
- [81] D. Laxalde and F. Thouverez. Complex nonlinear modal analysis for mechanical systems : application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322 :1009–1025, 2009.
- [82] T. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C.R. Mécanique*, 338 :510–517, 2010.
- [83] M. Guskov. *Dynamique non linéaire des systèmes multi rotors : études numérique et expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon,, 2007.
- [84] C. Villa, J.J Sinou, and F. Thouverez. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :804–821, 2008.
- [85] F.L. Traversa, Bonani F., and S. Donati Guerrieri. A frequency-domain approach to the analysis of stability and bifurcations in nonlinear systems described by differential-algebraic equations. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 36 :421–439, 2008.
- [86] C.S Liu, W. Yeih, and Atluri Satya. An enhanced fictitious time integration method for nonlinear algebraic equation with multiple solutions. *CMESy*, 59(3) :301–323, 2010.
- [87] S. Samaranayake. Subharmonic oscillations in harmonically excited mechanical systems with cyclic symmetry. *Journal of Sound and Vibration*, 206(1) :39–60, 1997.
- [88] S. Samaranayake, G. Samaranayake, and A.K. Bajaj. Resonant vibrations in harmonically excited weakly coupled mechanical systems with cyclic symmetry. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11 :1028–1043, 2000.
- [89] S. Samaranayake, G. Samaranayake, and A.K. Bajaj. Non-resonant and resonant chaotic dynamics in externally excited cyclic systems. *Acta Mechanica*, 150 :139–160, 2001.
- [90] S. Samaranayake, A.K. Bajaj, and O.D Nwokah. Amplitude modulated dynamics and bifurcations in the resonant response of a structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 109 :101–125, 1995.
- [91] A. F. Vakakis. Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 95 :197–226, 1992.
- [92] Y.J. Yana, P.L. Cuia, and H.N. Hao. Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk. *Journal of Sound and Vibration*, 317 :294–307, 2008.

- [93] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 :1603–1626, 2010.
- [94] F. Chinesta, E. Prulière, A. Ammar, and E. Cuerto. Non incremental strategies for simulating thermomechanical models with uncertainty. *Int. J Mater. Form.*, 2 :563–566, 2009.
- [95] P. Ladevèze, J.C. Passieux, and D. Neron. The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 199 :1287–1296, 2010.
- [96] J.C Passieux. *Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et espace*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2008.
- [97] Y.W. Chang, X.Q. Wang, E. Capiez-Lernout, M.P. Mignolet, and C. Soize. Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures. *IFASD 2011*, 2011.
- [98] C. Touzé, D. Chappelle, and M. Vidrascu. Calcul direct de la raideur non-linéaire géométrique pour la réduction de modèle de coques en élément finis. *CSMA 2013*, 11, 2013.
- [99] R.J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3, 1965.
- [100] R.R. Craig and C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6 :1313–1319, 1968.
- [101] R. H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 6 :581–601, 1971.
- [102] O. Thomas, S. Nezamabadi, and J.F. Deu. Calcul de vibrations non-linéaires de micro/nano structures piézoélectriques stratifiées par modèles réduits avec correction quasi-statique. *CSMA 2013, Giens*, 2013.
- [103] P.M.A. Slaats, J. Jongh, and A.H.J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers and structures*, 54 (6) :1155–1171, 1995.
- [104] J. De Jongh. *A reduction method for nonlinear dynamic systems*. PhD thesis, Eindhoven University (Master thesis), 1992.
- [105] R.B. Nelson. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, 14 :1201–1205, 1976.
- [106] A. Grolet and F. Thouverez. Model reduction for nonlinear vibration of structural systems using modal derivatives and stiffness evaluation procedure. *CanCNSM 2013, Montreal, Canada*, 2013.
- [107] L. Feng. Review of model order reduction methods for numerical simulation of nonlinear circuits. *Applied mathematics and computation*, 167, 2005.
- [108] P. Benner and T. Breiten. Krylov subspace based model reduction of nonlinear circuit models using bilinear and quadratic linear approximations. *Max-Planck-Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany*.
- [109] T. Bechtold. Two sided Arnoldi algorithm and its application in order reduction for mems. *Proceeding 4th Mathmod Vienna*, 2003.
- [110] Z. Bai and R.C. Li. Structure preserving model reduction using a Krylov subspace projection formulation. *Communication in Mathematical Science*, 3 :179–199, 2005.

- 
- [111] Z. Bai and S. Yangfeng. Dimension reduction of large scale second order dynamical systems via a second order arnoldi method. *Journal of Scientific Computing*, 26 :1692–1709, 2005.
- [112] Z. Bai. Krylov subspace techniques for reduced order modeling of large scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43 :9–44, 2002.
- [113] Z. Bai and S. Yangfeng. SOAR : A second order Arnoldi method for the solution of the quadratic eigenvalue problem. *Matrix Anal. Appl.*, 26 :640–659, 2005.
- [114] B. Lohmann. Reduction of second order systems using second order Krylov subspaces. 2005.
- [115] P. Felmann and R. W. Freund. Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via the Lanczos process. *IEEE Transaction on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 14 :639–649, 1995.
- [116] W.J. Rugh. *Nonlinear systems theory*. 2002.
- [117] J.R. Phillips. Automated extraction of nonlinear circuits macromodel. *IEEE Custom integrated circuits conference*, 2000.
- [118] J.R. Phillips. Projection based approach for model reduction of nonlinear time varying systems. *IEEE transaction on computer aided design of integrated circuits and systems*, 22, 2003.
- [119] P. Li. Compact reduced order modeling of weakly nonlinear analog and RF circuits. *IEEE Transaction on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 23 :184–203, 2005.
- [120] Y. Lin. Order reduction of bilinear MIMO dynamical systems using new block krylov subspaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 58 :1093–1102, 2009.
- [121] L. Peng and L.T. Pileggi. Compact reduced order modeling of weakly nonlinear analog and rf circuits. *IEEE Transactions on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 23, 2005.
- [122] A. Chatterjee. An introduction to the pod. *Current Science*, 78 :808–817, 2002.
- [123] A. Steindl and H. Troger. Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics. *International journal of solids and structures*, 38 :2131–2147, 2001.
- [124] J. Novo, E. Titi, and S. Wynne. Efficient methods using high accuracy approximate inertial manifolds. *Number. Math.*, 87 :523–554, 2001.
- [125] D.C. Kovacs. *Inertial manifolds and nonlinear galerkin methods*. PhD thesis, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and state university, 2005.
- [126] A. Muravyov and S. Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Comp. and Struct.*, 81 :1513–1523, 2003.
- [127] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :4521–4537, 2007.
- [128] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 :4718–4736, 2008.
- [129] A. Nouy and O. Le Maitre. Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 228 :202–235, 2009.
- [130] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Proper generalized decomposition of multiscale models. *Int. J Numer. Mech. Engrg.*, 2009.

- [131] A. Grolet and F. Thouverez. On the use of the proper generalizer decomposition for solving non-linear vibration problems. *Proceedings of the ASME 2012 IMECE, Huston, Texas*, 2012.
- [132] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cuerto. Recent advance and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multi dimensional models. *Arch. Comput. Methods Eng*, 17 :327–350, 2011.
- [133] A. Grolet and F. Thouverez. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical System and Signal Processing*, 30 :43–60, 2012.
- [134] A. Grolet and F. Thouverez. An harmonic selection process for computing solutions of nonlinear dynamic equation with the harmonic balance method. *Proceedings of the 2011 European Nonlinear Oscillation Conference, Rome, Italy*, 2011.
- [135] R. C. Maple, P. I. King, and M. E. Oxley. Adaptive harmonic balance solutions to Euler’s equation. *AIAA journal*, 41(9), 2003.
- [136] R. C. Maple, P. I. King, P. D. Orkiwis, and J. M. Wolff. Adaptive harmonic balance method for nonlinear time periodic flows. *Journal of computational physics*, 193 :620–641, 2004.
- [137] S. Andersson, A. Soderberg, and S. Bjorklund. Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts. *Tribology international 48876*, 40 :580–587, 2007.
- [138] C.S. Hsu. *Cell to cell mapping, a method of global analysis for nonlinear systems*. Springer-Verlag, 1987.
- [139] T.Y Li and W. Wang. The BKK root count in  $c^n$ . *Mathematics of Computation*, 65(216) :1477–1484, 1996.
- [140] T. Gao, T.Y. Li, and X. Wang. Finding all isolated zeros of polynomial systems in  $c^n$  via stables mixed volumes. *Journal of Symbolic Computation*, 28 :187–211, 1999.
- [141] J. Verschelde, K. Getermann, and R. Cools. Mixed volume computation by dynamic lifting applied to polynomial system solving. *Discrete and Computational Geometry*, 16(69) :69–112, 1996.
- [142] E. Sarrouy, A. Grolet, and F. Thouverez. Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 46 :727–737, 2011.
- [143] A.J. Sommese and C. W. Wampler. *The numerical solution of polynomials arising in engineering and science*. World Scientific Publishing, 2005.
- [144] T.Y. Li. Solving polynomial systems with polyhedral homotopie. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 3 :251–279, 1999.
- [145] Bruno Buchberger. Bruno buchberger’s phd thesis 1965 : An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 41(3-4) :475 – 511, 2006.
- [146] F. Ivorra. Une petite introduction aux bases de Groebner. *Cours de L3 de l’université de Rennes*.
- [147] B. Buchberger. Groebner basis, a short introduction for systems theorists.
- [148] D. Lazard. Thirty years of polynomial system solving, and now? *Journal of Symbolic Computation*, 44 :222–231, 2009.
- [149] B. Buchberger. An algorithmic criterion for the solvability of a system of algebraic equations. *Aequationes Mathematicae*, 4 :374–383, 1970.

- 
- [150] J.C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Groebner basis (F4). 2002.
  - [151] J.C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Groebner basis without reduction to zero (F5). 2004.
  - [152] J.C. Faugère. [www-calfor.lip6/~jcf/software/index.html](http://www-calfor.lip6/~jcf/software/index.html).
  - [153] J.C. Faugère, P. Gianni, and D. Mora. Efficient computation of zero-dimensional Groebner basis by change of ordering. *Journal of symbolic computation*, 16 :329–344, 1993.
  - [154] S. Collart, M. Kalkbrener, and D. Mall. The Groebner walk. *Journal of Symbolic Computation*, 1993.
  - [155] F. Rouillier. Solving zero dimensional polynomial system through the rational univariate representation. *AAECC*, 9 :433–461, 1999.
  - [156] M. Giusti, G. Lecerf, and B. Salvy. A groebner free alternative for polynomial system solving. 2000.
  - [157] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, varieties and algorithms (2nd edition)*. Springer, 1996.
  - [158] H.M Moller and H.J. Stetter. Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems. *Numerische Mathematik*, 70 :311–329, 1995.
  - [159] H.M Moller and R. Tenberg. Multivariate polynomial system solving using intersections of eigenspaces. *Journal of symbolic computation*, 32 :513–531, 2001.
  - [160] K. Gatermann and F. Guyard. An introduction to invariant and moduli. *Journal of symbolic computation*, 28 :275–302, 1999.
  - [161] R.M. Corless, K. Gatermann, and I. S. Kotsireas. Using symmetries in the eigenvalue method for polynomial systems. *Journal of symbolic computation*, 44 :1536–1550, 2009.
  - [162] K.I. Thompson. Polynomial invariant of finite groups.
  - [163] B. Hanzon and D. Jibetean. Global minimization of a multivariate polynomial using matrix methods. *Journal of global optimisation*, 27 :1–23, 2003.
  - [164] A. Grolet and F. Thouverez. Vibration of mechanical systems with geometric nonlinearities : Solving HBM equations with Groebner basis and continuation methods. *CSMA 2013, Giens, France*, 2013.
  - [165] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, and C. Yang. Arpack users’ guide. *SIAM*, 1998.
  - [166] SNECMA website. [www.snecma.com](http://www.snecma.com).
  - [167] K.J. Bathe and Bolourchi S.. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *international journal for numerical methods in engineering*, 14 :961–986, 1979.
  - [168] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 :81–102, 1979.



# Liste des publications de l'auteur

- [1] A. Grolet and F. Thouverez. Free and forced vibration analysis of nonlinear system with cyclic symmetry Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2911–2928, 2012.
- [2] A. Grolet and F. Thouverez. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical System and Signal Processing*, 30, 43–60, 2012.
- [3] E. Sarrouy, A. Grolet, and F. Thouverez. Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 46, 727–737, 2011.
- [4] A. Grolet and F. Thouverez. An harmonic selection process for computing solutions of nonlinear dynamic equation with the harmonic balance method. *Proceedings of the 2011 European Nonlinear Oscillation Conference, Rome, Italy*, 2011.
- [5] A. Grolet and F. Thouverez. On the use of the proper generalizer decomposition for solving non-linear vibration problems. *Proceedings of the ASME 2012 IMECE, Houston, Texas*, 2012.
- [6] A. Grolet and F. Thouverez. Vibration of mechanical systems with geometric nonlinearities Solving HBM equations with Groebner basis and continuation methods. *Proceeding of the CSMA 2013, Giens, France*, 2013.
- [7] A. Grolet and F. Thouverez. Model reduction for nonlinear vibration of structural systems using modal derivatives and stiffness evaluation procedure. *Proceeding of the CanCNSM 2013, Montréal, Canada*, 2013.





# Table des figures

1.1	Illustration du principe de la méthode de Newton . . . . .	17
1.2	Illustration du principe de la continuation séquentielle . . . . .	19
1.3	Illustration du principe de la continuation par longueur d'arc . . . . .	21
1.4	Illustration du processus de détection des courbes fermées lors d'une procédure de continuation . . . . .	23
1.5	Schéma du système mécanique à 2 ddl utilisé pour illustrer les concepts de la section 1.3 . . . . .	25
1.6	Représentation des backbone curves des modes non-linéaires, solutions du système (1.66) en fonction du paramètre $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Seule l'amplitude de la variable $x_1$ a été représentée . . . . .	30
1.7	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	33
1.8	Les différents scénarios de bifurcation possibles pour une solution périodique en fonction des multiplicateurs de Floquet $\rho$ . . . . .	34
1.9	Illustration du phénomène de résonance non-linéaire : solutions forcées du système (1.105) pour $F = 0.1, 0.25, 0.5N$ . Comparaison avec les modes non-linéaires . . . . .	39
1.10	Etude de stabilité de la réponse forcée autour de la résonance du premier mode non-linéaire pour le système (1.105) pour $F = 0.25N$ . A gauche : amplitude du ddl 1 en fonction de la fréquence ( $\circ$ : stable, $-$ : instable) et illustration des phénomènes de saut. A droite : normes des multiplicateurs de Floquet $\rho_i, i = 1, \dots, 4$ . . . . .	40
1.11	Résonance sur-harmonique du système à deux ddl de l'équation (1.105) pour $F = 1N$ . A gauche : représentation dans le plan fréquence / amplitude. A droite : (a) évolutions temporelles des ddl au point $f = 0.062$ Hz, (b) évolution dans l'espace des configurations de la solution au point $f = 0.062$ Hz (sur-harmonique d'ordre 3 du mode 1) . . . . .	41
1.12	Illustration du phénomène de localisation forcée pour le système (1.105). Les courbes de réponse forcée ( $-$ ) ont été calculées pour différentes valeurs de $F$ ( $F = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$ ) et sont comparées aux backbone curves des modes non-linéaires ( $-.$ ) . . . . .	42
2.1	Modèle de poutre élément fini utilisé pour illustrer les méthodes de réduction de modèle . . . . .	48
2.2	Modes linéaires de la poutre de l'exemple 1 (4 premiers transverses (gauche), et 4 premiers longitudinaux (droite)) . . . . .	52
2.3	Réponse en fréquence du système réduit pour différentes bases de projection (transverse 1, transverse 1 + 3, transverse 1 + axial 3), comparée à la réponse du système complet (amplitude $F = 2 \cdot 10^2 N$ ) . . . . .	53
2.4	Forme du premier mode transverse et de la dérivée modale (1,1) . . . . .	57

2.5	Réponse en fréquence du système réduit par le premier mode transverse et la dérivée modale (1,1) comparée à la réponse du système complet . . . . .	57
2.6	Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov linéaire (Algo. 1), composante axiales et transversales . . . . .	60
2.7	Comparaison des fonctions de réponse en fréquence entre le système complet et le système réduit sur des bases de Krylov : (i) base linéaire, (ii) base avec premier pas non-linéaire, (iii) base avec tous les pas non-linéaires . . . . .	60
2.8	Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov avec premier pas non-linéaire, composante axiales et transversales . . . . .	62
2.9	Forme des 6 premiers vecteurs calculés par une procédure de Krylov non-linéaire (Eq.(2.38)), composante axiales et transversales . . . . .	62
2.10	Valeurs singulières calculées pour les trois pas de fréquence considérés . . . . .	66
2.11	Forme des 4 premiers modes propres orthogonaux (composantes axiales (bleu) et transverses (rouge)) pour les 3 pas de fréquence considérés . . . . .	66
2.12	Forme des 4 premiers modes propres orthogonaux retenus pour la base de réduction . . . . .	67
2.13	Comparaison entre la solution de référence et les solutions calculées par réduction sur la base des modes propres orthogonaux de la Fig.2.12 : évolution de l'amplitude de la composante transverse du centre de la poutre . . . . .	67
2.15	Candidats possibles pour les modes compagnons du premier mode transverse . . . . .	70
2.16	Réponse en fréquence pour le système réduit sur le premier mode transverse et le premier (val. sing. max.) ou le troisième (E. def. max.) mode compagnon . . . . .	71
3.1	Déplacement transverse du centre de la poutre en fonction de la fréquence pour la solution de référence calculée par HBM . . . . .	88
3.2	Erreur relative $\epsilon_r$ par rapport à la solution de référence pour les trois méthodes POD, oPGD et pPGD pour $r = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	89
3.3	Réponse forcée : décomposition calculée par oPGD pour $m = 4$ en $\frac{\omega}{2\pi} = 180$ Hz (les formes ont été normées pour les comparer) . . . . .	90
3.4	Réponse forcée : décomposition calculée par pPGD pour $r = 4$ en $\frac{\omega}{2\pi} = 180$ Hz . . . . .	91
3.5	Réponse forcée : décomposition calculée par POD pour $r = 4$ en $\frac{\omega}{2\pi} = 180$ Hz . . . . .	92
3.6	Backbone curve du premier mode non-linéaire calculée par HBM, POD et oPGD . . . . .	93
3.7	Erreur relative $\epsilon_r$ par rapport a la solution de référence pour les deux méthodes POD et oPGD pour $r = 1, 2$ (MNL computation) . . . . .	94
3.8	Comparaison des FRF entre la solution de référence calculée par HBM à 7 harmoniques *, et la solution calculée par HBM adaptative · (sélection d'harmonique) . . . . .	99
3.9	Evolution du nombre de variables algébriques en fonction de la fréquence lors de l'application de la procédure de sélection d'harmonique, le trait horizontal représente le nombre de variable total dans une résolution par HBM classique) . . . . .	100
3.10	Répartition des harmoniques sélectionnés pour les ddl axiaux en fonction de la fréquence . . . . .	100
3.11	Répartition des harmoniques sélectionnés pour les ddl transverses en fonction de la fréquence . . . . .	101
3.12	Système frottant discret utilisé pour illustrer la méthode de sélection d'harmonique . . . . .	101
3.13	Comparaison des temps de résolution pour la HBM (*) et la AHBM (o). De gauche a droite : a) temps de résolution total ; b) temps de résolution détaillé ; c) gain de temps ; d) nombre de variables sélectionnées . . . . .	102

3.14	Comparaison entre HBM et AHBM : évolution de l'amplitude du ddl n 25 en fonction de la fréquence ( $H_{max} = 40$ ) . . . . .	103
3.15	Comparaison des différents estimateurs d'erreur entre les solutions calculées par HBM (*) et par AHBM (o). De haut en bas : a) erreur sur l'équation du mouvement $\epsilon_{eq}$ ; b) erreur relative entre les solutions $\epsilon_{sol}$ ; c) erreur relative sur l'énergie de déformation $\epsilon_{strain}$ . . . . .	104
4.1	Réponse en fréquence de l'oscillateur de Duffing, comparaison entre les solutions de l'homotopie et la continuation en fréquence . . . . .	112
4.2	Temps de calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre grevlex pour l'exemple du système (4.8), et extrapolation du type $\log(t) = a+bn+cn^2$ . Les lignes horizontales indiquent de bas en haut : 1s, 1 min, 1 jour, 1 an. . . . .	125
4.3	Forme des neuf familles de solutions obtenues par la méthodes des matrices de multiplication. Amplitude de la première harmonique en fonction du numéro du ddl . . . . .	126
4.4	Continuation des solutions multiples obtenues par la méthode des matrices de multiplication pour un système cyclique à 5 degrés de liberté . . . . .	127
4.5	Représentation des solutions multiples pour le système à 2 ddl pour une fréquence de 0.4Hz (invariance par rapport à $\mathbb{Z}_2$ ). Les courbes en trait continu représentent les backbone curves des différents modes non-linéaires calculés au chapitre 1, section 1.2.4.3. . . . .	135
4.6	Représentation des solutions multiples pour le système à 2 ddl pour une fréquence de 0.4Hz (invariance par rapport à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ). Les courbes en trait continu représentent les backbone curves des différents modes non-linéaires calculés au chapitre 1, section 1.2.4.3. . . . .	137
4.7	Illustration du calcul de la prédiction pour la méthode de continuation en amortissement . . . . .	139
4.8	Illustration du calcul des corrections pour la méthode de continuation en amortissement . . . . .	140
4.9	Illustration de la méthode de continuation en amortissement, et de la disparition des solutions avec l'augmentation du niveau d'amortissement . . . . .	142
4.10	Tracé des 16 familles de solutions dans le plan fréquence-amplitude (o : points stables) . . . . .	143
4.11	Forme des 16 familles de solution . . . . .	144
5.1	Maquette de l'open rotor développé par Snecma [166] . . . . .	148
5.2	Modèle de poutre 3D et son maillage (réalisé sous SAMCEF v12.1) . . . . .	155
5.3	Forme propre du premier mode transverse calculé par SAMCEF . . . . .	156
5.4	Forme propre du 4e mode axial calculé par SAMCEF . . . . .	157
5.5	FRF de la poutre 3D réduite sur le mode 1F et 4I. Comparaison avec la FRF de la poutre d'Euler-Bernoulli (non réduite) . . . . .	157
5.6	Forme propre de la dérivée modale (1,1) calculée par SAMCEF . . . . .	158
5.7	Déplacement de la ligne moyenne dans les 3 directions pour la dérivée modale (1,1) calculée par SAMCEF . . . . .	158
5.8	FRF de la poutre 3D réduite sur les mode 1F et MD (1,1). Comparaison avec la poutre d'Euler-Bernoulli non réduite. . . . .	159
5.9	Maillage éléments finis du modèle de pale d'open rotor . . . . .	160

5.10	Forme des cinq premiers modes propres de la structure industrielle (norme du déplacement) . . . . .	161
5.11	Evolution des coefficients $k_{1,1,1}$ , $k_{2,2,2}$ , $k_{1,1,1,1}$ et $k_{2,2,2,2}$ en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit . . . . .	162
5.12	Evolution des coefficients $k_{1,1,2}$ , $k_{1,1,1,2}$ et $k_{1,1,2,2}$ en fonction du nombre de modes retenus dans le modèle réduit . . . . .	162
5.13	Evolution de la FRF de la pale pour une excitation ponctuelle calculée à partir d'un modèle réduit sur les 5 premiers modes de la structure . . . . .	163
5.14	Représentation de la dérivée modale (1,1) pour la pale d'open rotor . . . . .	164
5.15	Comparaison des réponses en fréquence pour différents modèles réduits de pale d'open rotor . . . . .	165

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison des raideurs non-linéaires réduites : (i) calculées analytiquement, (ii) calculées par STEP . . . . .	76
2.2	Tableau comparatif des méthodes de calcul de base de projection pour les méthodes de Galerkin . . . . .	78
4.1	Résumé des résultats de la résolution par homotopie linéaire (degré total) du système (4.13) . . . . .	111
4.2	Résultats de l'application de l'homotopie linéaire avec méthode du degré total pour l'exemple de l'équation (4.8) . . . . .	113
4.3	Calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique pour le système de l'équation (4.8) . . . . .	124
4.4	Calcul d'une base de Gröbner pour l'ordre grevlex, et d'une base de l'espace quotient pour l'exemple de l'équation (4.8) . . . . .	125
4.5	Projection de Reynolds pour le groupe $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	133
4.6	Expression des formes normales produits $\pi_1 b_j$ (première passe) . . . . .	133
4.7	Expression des formes normales produits $\pi_1 b_j$ (deuxième passe) . . . . .	134
4.8	Projection de Reynolds pour le groupe $\mathcal{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . . . . .	136
5.1	Fréquence propre du premier mode transverse et du 4e mode longitudinal du modèle de poutre 3D calculées par SAMCEF . . . . .	155
5.2	Raideurs non-linéaires réduites pour le cas de poutre 3D traité par SAMCEF. Réduction sur les modes 1F et 4I calculés par STEP . . . . .	156
5.3	Raideurs non-linéaires réduites pour le cas de la poutre 3D traité par SAMCEF. Réduction sur les modes 1F et MD11 calculés par STEP . . . . .	159

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Monsieur G. KERSCHEN

Professeur - Université de Liège - LTAS - Chemin des Chevreuils, 1 - Bât. B52 - B-4000 LIEGE 1  
Belgique

Et de

Monsieur B. COCHELIN

Professeur - Ecole Centrale de Marseille - plot 6 bureau 107 - Technopôle de Château-Gombert  
38 rue Joliot Curie - 13451 Marseille cedex 20

**Monsieur GROLET Aurélien**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 29 novembre 2013

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes



M-A. GALLAND

