



HAL
open science

Modélisation de textures anisotropes par la transformée en ondelettes monogènes et super-résolution de lignes 2-D

Kévin Polisano

► **To cite this version:**

Kévin Polisano. Modélisation de textures anisotropes par la transformée en ondelettes monogènes et super-résolution de lignes 2-D. Analyse classique [math.CA]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT: . tel-01728616v2

HAL Id: tel-01728616

<https://theses.hal.science/tel-01728616v2>

Submitted on 2 May 2018 (v2), last revised 26 Sep 2018 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 217 : Mathématiques, Sciences et Technologies de
l'information et de l'Informatique

THÈSE

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Grenoble Alpes Spécialité "Mathématiques Appliquées"

soutenue publiquement par

Kévin Polisano

le 12 décembre 2017

Modélisation de textures anisotropes par la transformée en ondelettes monogènes et super-résolution de lignes 2-D

Directrice de thèse : **Valérie Perrier**
Co-encadrante de thèse : **Marianne Clausel**
Co-encadrant de thèse : **Laurent Condat**

Jury

Mme Annick Montanvert,	Professeure des Universités	Présidente
Mme Anne Estrade,	Professeure des Universités	Examinatrice
M. Gabriel Peyré,	Directeur de recherche au CNRS	Rapporteur
M. Frédéric Richard,	Professeur des Universités	Rapporteur
M. Pierre Weiss,	Chercheur au CNRS	Examineur

Laboratoire Jean Kuntzmann
Université Grenoble Alpes (Bâtiment IMAG)
UMR CNRS 5224, F-38000 Saint-Martin d'Hères, France

À mes parents.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Gabriel Peyré et Frédéric Richard d'avoir accepté de rapporter cette thèse, pour leur lecture attentive de ce long manuscrit, les commentaires pertinents et les questions qui s'en sont suivies. Je remercie la présidente du jury Annick Montanvert ainsi que les examinateurs Anne Estrade et Pierre Weiss d'avoir accepté de faire partie de ce jury, pour leur gentillesse et l'enthousiasme qu'ils ont manifesté lors de la présentation de mon travail.

Je remercie très chaleureusement mes encadrants, pour leur disponibilité et le rôle central qu'ils ont eu dans l'avancée de cette thèse. Chacun sait que la réussite de la thèse se mesure aussi par la qualité de son encadrement, circonstance pour laquelle j'estime avoir eu beaucoup de chance de vous avoir côtoyé, Valérie, Marianne et Laurent. Merci d'avoir partagé avec moi vos idées, vos intuitions mathématiques et pour tous ces autres moments conviviaux de discussions. Vous êtes pour moi des exemples scientifiques et humains. Un mot en particulier pour Valérie, ma directrice de thèse, qui tout au long de mon parcours m'a fait confiance, s'est toujours montrée à l'écoute et m'a témoigné une extrême bienveillance, encore présente aujourd'hui.

Je termine ce paragraphe dédié aux personnes avec lesquelles j'ai apprécié collaborer, en mentionnant tous les enseignants-chercheurs qui mettent à l'honneur la première composante de leur métier, l'enseignement, avec qui je partage le goût de la transmission et de la didactique. Je remercie mes anciens professeurs devenus collègues, pour m'avoir intégré au sein des équipes pédagogiques de l'Ensimag et permis d'enseigner dans les meilleures conditions qui soient.

Dans le cadre du Laboratoire Jean Kuntzmann, je souhaite remercier sincèrement l'ensemble du personnel qui contribue à y rendre la vie agréable, en particulier tout le personnel administratif et informatique pour leur efficacité et leur sympathie, avec une mention spéciale à Laurence pour sa joie communicative et le nombre de services rendus.

Merci bien sûr à tous les doctorants avec qui j'ai partagé cette aventure, qu'il s'agisse de mes co-bureaux (Chloé pour l'accueil chaleureux en salle 3, inversement proportionnel à la température de cette chambre froide, dans laquelle nous avons (sur)vécu et partagé le chauffage d'appoint avec les acolytes Pierre-Olivier, Jean Matthieu, Abdel, etc. ; puis dans le nouveau bâtiment IMAG avec Benoit, toujours partant pour faire des maths de façon aussi intéressante que désintéressée, Marion, Duong Hung), ou qu'il s'agisse de tous les doctorants que j'avais plaisir à retrouver quotidiennement au moment des repas (merci pour les coups de mains les copains!), à la cafét' autour d'un café ou en dehors du labo : Roland, Thomas, Pierre-Jean, Matthias, Morgane, Romain, Meriem, Cécile, Sefkan, Nelson, Margaux, Rémi, Ester, Charles, Alex, Adrien, Jean-Baptiste, Lionel, Émilie, Dimitri, Arnaud, David, Victor, Léa, Abdelkader, Sophie, ... Merci pour ces moments d'échanges, de rigolade et de conversations en tout genre, des plus légères pour décompresser aux plus philosophiques et politiques pour refaire le monde.

Je remercie mes parents à qui cette thèse est dédiée, ma soeur et mes proches pour leur soutien indéfectible. Merci de m'avoir épargné les sempiternelles questions sur l'avancement de la thèse ! La confiance et la persévérance qu'ils manifestent m'auront toujours accompagnées. Que ce travail soit le modeste témoignage de toute la reconnaissance que je leur dois.

Enfin mes derniers remerciements s'adressent à ma femme, pour sa présence à mes côtés depuis le début de cette thèse, ainsi que pour la patience et le soutien sans faille dont elle a fait preuve durant les derniers mois de rédaction (qui sont loin d'être un long fleuve tranquille). Si la satisfaction éprouvée dans l'accomplissement de ce travail de recherche est indéniable, elle n'est en rien comparé au bonheur incommensurable dont ma femme a été porteuse et m'a apporté cette année, en donnant naissance à notre fils Léo. Ces derniers mots sont pour lui, qui ne se souviendra certainement pas de cette étape, mais dont le sourire m'aura pourtant donné beaucoup d'énergie pour achever cette thèse.

Résumé

L'analyse de texture est une composante du traitement d'image qui suscite beaucoup d'intérêt tant les applications qu'elle recouvre sont diverses. En imagerie médicale, les signaux enregistrés sous forme d'images telles que les radiographies de l'os ou les mammographies, présentent une micro-architecture fortement irrégulière qui invite à considérer la formation de ces textures comme la réalisation d'un champ aléatoire. Suite aux travaux précurseurs de Benoit Mandelbrot, de nombreux modèles dérivés du champ brownien fractionnaire ont été proposés pour caractériser l'aspect fractal des images et synthétiser des textures à rugosité prescrite. Ainsi l'estimation des paramètres de ces modèles, a permis de relier la dimension fractale des images à la détection de modifications de la structure osseuse telle qu'on l'observe en cas d'ostéoporose. Plus récemment, d'autres modèles de champs aléatoires, dits anisotropes, ont été utilisés pour décrire des phénomènes présentant des directions privilégiées, et détecter par exemple des anomalies dans les tissus mammaires.

Cette thèse porte sur l'élaboration de nouveaux modèles de champs anisotropes, permettant de contrôler localement l'anisotropie des textures. Une première contribution a consisté à définir un champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé (GAFBF), et un second modèle basé sur une déformation de champs élémentaires (WAFBF), permettant tous deux de prescrire l'orientation locale de la texture. L'étude de la structure locale de ces champs est menée à l'aide du formalisme des champs tangents. Des procédures de simulation sont mises en oeuvre pour en observer concrètement le comportement, et servir de benchmark à la validation d'outils de détection de l'anisotropie. En effet l'étude de l'orientation locale et de l'anisotropie dans le cadre des textures soulève encore de nombreux problèmes mathématiques, à commencer par la définition rigoureuse de cette orientation. Notre seconde contribution s'inscrit dans cette perspective. En transposant les méthodes de détection de l'orientation basées sur la transformée en ondelettes monogènes, nous avons été en mesure, pour une vaste classe de champs aléatoires, de définir une notion d'orientation intrinsèque. En particulier l'étude des deux nouveaux modèles de champs anisotropes introduits précédemment, a permis de relier formellement cette notion d'orientation aux paramètres d'anisotropie de ces modèles. Des connexions avec les statistiques directionnelles sont également établies, de façon à caractériser la loi de probabilité des estimateurs d'orientation.

Enfin une troisième partie de la thèse est consacrée au problème de la détection de lignes dans les images. Le modèle sous-jacent est celui d'une superposition de lignes diffractées (c.-à-d. convoluées par un noyau de flou) et bruitées, dont il s'agit de retrouver les paramètres de position et d'intensité avec une précision sous-pixellique. Nous avons développé dans cet objectif une méthode fondée sur le paradigme de la super-résolution. La reformulation du problème en termes d'atomes 1-D a permis de dégager un problème d'optimisation sous contraintes, et de reconstruire ces lignes en atteignant cette précision. Les algorithmes employés pour effectuer la minimisation appartiennent à la famille des algorithmes dits proximaux. La formalisation de ce problème inverse et sa résolution, constituent une preuve de concept ouvrant des perspectives à l'élaboration d'une transformée de Hough revisitée pour la détection 'continue' de lignes dans les images.

Mots-clés. Champs aléatoires, textures orientées, champs tangents, ondelettes monogènes, tenseur de structure, super-résolution, méthodes spectrales, optimisation convexe, algorithmes proximaux.

Abstract

Texture analysis is a component of image processing which holds the interest in the various applications it covers. In medical imaging, the images recorded such as bone X-rays or mammograms show a highly irregular micro-architecture, which invites to consider these textures formation as a realization of a random field. Following Benoit Mandelbrot's pioneer work, many models derived from the fractional Brownian field have been proposed to characterize the fractal behavior of images and to synthesize textures with prescribed roughness. Thus, the parameters estimation of these models has made possible to link the fractal dimension of these images to the detection of bone structure alteration as it is observed in the case of osteoporosis. More recently, other models known as anisotropic random fields have been used to describe phenomena with preferred directions, for example for detecting abnormalities in the mammary tissues.

This thesis deals with the development of new models of anisotropic fields, allowing to locally control the anisotropy of the textures. A first contribution was to define a generalized anisotropic fractional Brownian field (GAFBF), and a second model based on an elementary field deformation (WAFBF), both allowing to prescribe the local orientation of the texture. The study of the local structure of these fields is carried out using the tangent fields formalism. Simulation procedures are implemented to concretely observe the behavior, and serve as a benchmark for the validation of anisotropy detection tools. Indeed, the investigation of local orientation and anisotropy in the context of textures still raises many mathematical problems, starting with the rigorous definition of this orientation. Our second contribution is in this perspective. By transposing the orientation detection methods based on the monogenic wavelet transform, we have been able, for a wide class of random fields, to define an intrinsic notion of orientation. In particular, the study of the two new models of anisotropic fields introduced previously allowed to formally link this notion of orientation with the anisotropy parameters of these models. Connections with directional statistics are also established, in order to characterize the probability distribution of orientation estimators.

Finally, a third part of this thesis was devoted to the problem of the lines detection in images. The underlying model is that of a superposition of diffracted lines (i.e, convoluted by a blur kernel) with presence of noise, whose position and intensity parameters must be recovered with sub-pixel precision. We have developed a method based on the super-resolution paradigm. The reformulation of the problem in the framework of 1-D atoms lead to an optimization problem under constraints, and enables to reconstruct these lines by reaching this precision. The algorithms used to perform the minimization belong to the family of algorithms known as proximal algorithms. This inverse problem modeling, and its resolution, provide a proof of concept opening perspectives to the development of a revised Hough transform for the continuous detection of lines in images.

Keywords. Random fields, oriented textures, tangent fields, monogenic wavelet, structure tensor, super-resolution, spectral method, convex optimisation, proximal algorithms.

Table des matières

Table des matières	ix
Liste des acronymes	1
Liste des symboles	3
Liste des figures	5
Introduction	11
I Modélisation de textures aléatoires anisotropes	21
1 Outils mathématiques pour la modélisation aléatoire	23
1.1 Historique du mouvement brownien	24
1.1.1 Un phénomène de la biologie déterminant pour la physique	24
1.1.2 Travaux d'Einstein sur les mouvements moléculaires	27
1.1.3 D'Einstein à Wiener : l'étude du mouvement brownien comme objet mathématique	28
1.2 Généralités sur les processus stochastiques	30
1.2.1 Définition d'un processus stochastique	30
1.2.2 Lois des processus stochastiques	31
1.2.3 Existence de processus stochastiques	34
1.2.4 Comparaison de processus stochastiques	36
1.2.5 Propriétés des processus	36
1.2.6 Régularité des trajectoires	38
1.3 Espaces gaussiens	38
1.4 Construction du mouvement brownien	40
1.4.1 Définition	40
1.4.2 Base de Haar sur l'espace de Lebesgue	41
1.4.3 Construction de l'isométrie réalisant l'espace de Lebesgue	42
1.4.4 Construction du pré-mouvement brownien	42
1.4.5 Continuité des trajectoires	43
1.4.6 Construction du mouvement brownien en dimension d	44
1.4.7 Propriétés du mouvement brownien	45
1.4.8 Interprétations géométriques	46
1.4.9 Mesure de Wiener	48
1.5 Intégrale de Wiener	51
1.6 Représentations spectrales	53
1.7 Mouvement brownien fractionnaire	55
1.8 Champs aléatoires généralisant le mouvement brownien fractionnaire	64
1.9 Convergence de processus	66

1.9.1	Convergence des variables aléatoires dans \mathbb{R}^d	66
1.9.2	Convergence des variables aléatoires dans un espace polonais	68
1.9.3	Convergence des variables aléatoires dans \mathcal{C}	70
1.9.4	Théorème de Donkster : convergence d'une marche aléatoire	73
1.10	Champs tangents	75
1.11	Références	77
2	État de l'art des modèles de textures aléatoires anisotropes	81
2.1	Modélisation de textures	83
2.1.1	Qu'est-ce qu'une texture ?	83
2.1.2	Méthodes structurelles vs. statistiques	85
2.1.3	Textures directionnelles et champs anisotropes	86
2.2	Différentes classes de champs aléatoires anisotropes	89
2.2.1	Drap brownien fractionnaire	89
2.2.2	Modèle de Bonami et Estrade	90
2.2.3	Modèle de Xue et Xiao	93
2.2.4	Champs stables par autosimilarité matricielle	93
2.3	Simulations numériques de champs aléatoires	95
2.3.1	Méthode de Cholesky pour les champs gaussiens	95
2.3.2	Méthode de Wood et Chan pour les champs gaussiens stationnaires	97
2.3.3	Petit tour d'horizon des autres méthodes de synthèse de champs aléatoires	101
2.3.4	Méthode de Stein appliquée à une classe de champs gaussiens à autosimilarité matricielle	102
2.4	Simulations numériques du champ brownien fractionnaire anisotrope	103
2.4.1	Simulation d'un FBM 1-D par matrices circulantes	104
2.4.2	Simulation des champs browniens fractionnaires anisotropes par « bandes tournantes »	105
2.4.3	Réduction de la complexité par programmation dynamique	108
2.4.4	Exemples de simulations	109
2.5	Références	112
3	Modélisation de champs aléatoires localement anisotropes	121
3.1	Premier modèle : le champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé	123
3.1.1	Définitions	123
3.1.2	Détermination du champ tangent	128
3.1.3	Calcul de la covariance du LAFBF	137
3.2	Simulation du champ brownien fractionnaire anisotrope local	139
3.2.1	Introduction	139
3.2.2	Simulation par la méthode de Cholesky	140
3.2.3	Simulation par les champs tangents	141
3.2.4	Heuristique pour une régularité variable via une méthode de krigeage	143
3.3	Deuxième modèle : déformation d'un champ H-sssi	147
3.3.1	Définition	147
3.3.2	Détermination du champ tangent	147
3.3.3	Simulations	150
3.4	Références	151
II	Caractérisation de l'anisotropie des textures	153
4	Outils mathématiques pour la détection de l'anisotropie	155

4.1	Mise en contexte	156
4.1.1	Motivations	156
4.1.2	Estimation de l'anisotropie	160
4.2	Signal monogène	163
4.2.1	Transformée de Hilbert et signal analytique	163
4.2.2	Transformée de Riesz	166
4.2.3	Transformée en ondelettes monogènes	169
4.3	Tenseur de structure	171
4.3.1	Minimisation par rapport à un ensemble de gradients	171
4.3.2	Application à l'analyse multi-résolution du signal monogène	175
4.3.3	Analyse de superposition de motifs orientés	177
4.4	Transformée de Hough et de Radon	181
4.4.1	Transformée de Radon	181
4.4.2	Transformée de Hough	184
4.4.3	Relations entre les transformées de Hough, Radon, Hilbert et Riesz	186
4.5	Références	188
5	Caractérisation de l'orientation pour les champs gaussiens localisables	197
5.1	Introduction	199
5.2	Orientation d'un champ gaussien à accroissements stationnaires et auto-similaire	201
5.2.1	Représentation spectrale et fonction d'anisotropie	201
5.2.2	Motivation : vers une transformée de Riesz d'un champ H-sssi ?	203
5.2.3	Définition de l'orientation d'un champ H-sssi	205
5.2.4	Lien avec le tenseur de structure des gradients	208
5.2.5	Exemples	209
5.3	Orientation d'un champ aléatoire localisable	216
5.3.1	Définition et exemple	216
5.3.2	Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés	217
5.3.3	Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes déformés	218
	Orientations prescrites par transformation conforme	219
5.3.4	Champ de vecteurs	221
5.4	Détection de l'orientation	223
5.4.1	Interprétation statistique	223
5.4.2	Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par ten- seur de structure	226
5.4.3	Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par la distribution des orientations	227
5.5	Conclusion et perspectives	230
5.6	Références	233
III	Super-résolution de structures orientées	237
6	Décomposition atomique des signaux et super-résolution	239
6.1	Principe de la super-résolution	240
6.1.1	Introduction	240
6.1.2	Points communs et divergences avec la théorie de l'échantillonnage com- primé	242
6.1.3	Utilisation des mesures pour s'extraire de la grille	247
6.2	Décomposition atomique	248
6.2.1	Cadre général : atomes et norme atomique	248

6.2.2	Lien avec les matrices de Toeplitz de rang faible	250
6.2.3	Carathéodory et moments trigonométriques	251
	De la positivité des fonctions en analyse : du théorème de Carathéodory au théorème de Bochner	251
	Représentation de Herglotz et problèmes des moments complets	252
	Problème des moments trigonométriques tronqués	253
6.2.4	Norme atomique caractérisée par un programme semi-défini positif	255
6.3	Références	255
7	Super-résolution convexe de lignes 2-D	259
7.1	Modélisation de lignes diffractées	261
7.1.1	Définition des lignes dans le domaine continu	261
7.1.2	Hypothèses sur le flou et le processus d'échantillonnage	261
7.1.3	Formulation du problème inverse	265
7.2	Présentation du problème d'optimisation	268
7.2.1	Caractérisation des lignes dans le paradigme des normes atomiques	268
7.2.2	Formulation du problème de minimisation	275
7.3	Restauration des lignes par super-résolution	277
7.3.1	Premier algorithme primal-dual	277
7.3.2	Deuxième algorithme primal-dual	283
7.3.3	Hypothèses sur les lignes relaxées	284
7.3.4	Extension au problème de l'inpainting	287
7.4	Extraction des paramètres des lignes et expériences numériques	287
7.4.1	Application d'une méthode d'estimation spectrale type Prony	287
7.4.2	Discussions sur les critères de séparation et de robustesse au bruit	289
7.4.3	Expériences numériques	291
7.5	Conclusion et perspectives	299
7.6	Références	302
	Conclusion et perspectives générales	305
A	Annexes	I
A.1	Topologies faible	I
A.1.1	Rappels de topologie générale	I
A.1.2	Topologie la moins fine rendant continue une famille d'applications	II
A.1.3	Topologie faible	II
A.1.4	Topologie faible *	III
A.2	Théorème de Nyquist-Whittaker-Shannon	IV
A.3	Preuves du théorème de Carathéodory-Toeplitz	VI
A.3.1	Par la représentation de Herglotz	VI
	Représentation de Poisson	VI
	Preuve de la Proposition 6.1 (représentation de Herglotz)	VI
A.3.2	Par les théorèmes de Fejér-Riesz et Riesz-Markov	VII
A.4	Preuve du théorème de Carathéodory-Fejér	XI

Liste des acronymes

Terme	Description	Pages
ACG	loi normale projetée, ou <i>Angular Central Gaussian</i>	232
AFBF	champ brownien fractionnaire anisotrope, ou <i>Anisotropic Fractional Brownian Field</i>	6
BLUE	meilleur estimateur linéaire non biaisé, ou <i>Best Linear Unbiased Estimator</i>	143
BMD	densité de masse osseuse, ou <i>Bone Mass Density</i>	157
CAD	diagnostic assisté par ordinateur, ou <i>Computer-Aided Decision</i>	156
CHV	vecteur circulaire harmonique, ou <i>Circular Harmonic Vector</i>	306
CMWT	transformée en ondelettes monogènes continue, ou <i>Continuous Monogenic Wavelet Transform</i>	170
CS	échantillonnage comprimé, ou <i>Compressed Sensing</i>	242
CWT	transformée en ondelettes continue, ou <i>Continuous Wavelet Transform</i>	169
DA	degré d'anisotropie	159
DFT	transformée de Fourier discrète, ou <i>Discrete Fourier Transform</i>	265
DLI	indice de dispersion longitudinal, ou <i>Dispersion Longitudinal Index</i>	7
DTI	indice de dispersion transversal, ou <i>Dispersion Transverse Index</i>	7
EF	champ élémentaire, ou <i>Elementary Field</i>	109
EFBF	champ brownien fractionnaire étendu, ou <i>Extended Fractional Brownian Field</i>	92
FBF	champ brownien fractionnaire, ou <i>Fractional Brownian Field</i>	5
FBM	mouvement brownien fractionnaire, ou <i>Fractional Brownian Motion</i>	57
FBS	drap brownien fractionnaire, ou <i>Fractional Brownian Sheet</i>	89
FFT	transformée de Fourier rapide, ou <i>Fast Fourier Transform</i>	7
GAFBF	champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé, ou <i>Generalized Anisotropic Fractional Brownian Field</i>	6
H-sssi	champ gaussien auto-similaire d'ordre H et à accroissements stationnaires, ou <i>Gaussian Field with Self-Similarity and Stationary Increments</i>	92
IRM	imagerie à résonance magnétique	86
LAFBF	champ brownien fractionnaire localement anisotrope, ou <i>Locally Anisotropic Fractional Brownian Field</i>	126
MBF	champ brownien multifractionnaire, ou <i>Multifractional Brownian Field</i>	124

Terme	Description	Pages
MBM	mouvement brownien multifractionnaire, ou <i>Multifractional Brownian Motion</i>	139
MIL	moyennes d'intersections de lignes, ou <i>Mean Intersect Lines</i>	158
OSGRF	champ gaussien à auto-similarité matricielle, ou <i>Operator Scaling Gaussian Random Field</i>	93
PAIS	processus stationnaire à accroissements indépendants	29
PSF	fonction d'étalement du point, ou <i>Point Spread Function</i>	8
RIP	propriété d'isométrie restreinte, ou <i>Restricted Isometry Property</i>	8
RMD	déplacement du point médian, ou <i>Random Midpoint Displacement</i>	101
SDP	programme semi-défini positif, ou <i>Semi-Definite Program</i>	247
SVD	décomposition en valeurs singulières, ou <i>Singular Value Decomposition</i>	212
TBM	méthode des bandes tournantes, ou <i>Turning Bands Method</i>	103
TLC	théorème limite central	74
TV	variation totale, ou <i>Total Variation</i>	247
WAFBF	champ brownien fractionnaire anisotrope déformé, ou <i>Warped Anisotropic Fractional Brownian Field</i>	147
WC	loi de Cauchy enroulée, ou <i>Wrapped Cauchy distribution</i>	232

Liste des symboles

Symbole	Description	Page
\mathcal{A}	Dictionnaire d'atomes	248
$\mathbf{a}(f, \phi)$	Atome vecteur d'exponentielles de fréquence f et phase ϕ	248
$\alpha_{i,k}(X)$	Orientation du champ X à échelle i et position \mathbf{k}	228
$B_{\alpha,\delta}^h$	LAFBF de paramètres α , δ et h	126
$(B^H(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$	Mouvement brownien fractionnaire	57
\mathcal{B}	Tribu borélienne	30
$(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$	Mouvement brownien	40
$C_0([0, 1], \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues nulles en zéro	29
$\chi(X)$	Indice de cohérence du champ X	208
$c_{i,k}(f)$	Coefficients d'ondelettes de f correspondant à l'ondelette $\psi_{i,k}$	206
$c_{i,k}^{(\mathcal{R})}(f)$	Coefficients d'ondelettes de f correspondant à l'ondelette $\psi_{i,k}^{(\mathcal{R})}$	206
$c_m(\varphi_1)$	m -ième coefficient de Fourier de φ_1	263
$\text{Conv}(\mathcal{A})$	Enveloppe convexe de \mathcal{A}	249
$\mathcal{C}(T, E)$	Ensemble des applications continues de T dans E	33
$\mathbf{D}_a f$	Opérateur de dilatation de facteur a d'une fonction f	166
$\underline{\underline{(d)}}$	Égalité en distribution	75
$\Delta(T)$	Minimum de séparation des instants $T = \{t_1, \dots, t_K\}$	247
$\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)$	Matrice jacobienne de Φ en \mathbf{x}_0	218
\mathbb{D}	Disque unité	251
\mathcal{E}^T	Tribu produit canonique	32
E^T	Espace des fonctions de T dans E	31
\mathbb{E}	Espérance	29
\mathcal{F}_1	Transformée de Fourier effectuée horizontalement sur l'image	261
\mathcal{F}_2	Transformée de Fourier effectuée verticalement sur l'image	264
$\underline{\underline{(fdd)}}$	Égalité de processus en lois (finies dimensionnelles)	32
\mathcal{F}_M	Opérateur renvoyant les M plus petits coefficients de Fourier	241
f_X	Densité spectrale du champ aléatoire X	201
\mathcal{G}	Espace gaussien	39
\mathcal{H}	Espace de Hilbert	39
$\mathcal{H}s$	Transformée de Hilbert d'un signal s	164
ι_C	Fonction indicatrice du convexe C	276
\mathbf{J}	Tenseur de structure	172
$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace des variables aléatoires de variance finie	38
$\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$	Ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{R}^d	67
$\mu(\Phi, \Psi)$	Cohérence entre les bases Φ et Ψ	243
μ_X	Mesure spectrale du champ aléatoire X	201
$\mathcal{N}(\mathbf{m}_S, \Sigma_S)$	Loi d'un vecteur gaussien indexé par S	33
$\vec{\mathbf{n}}_{i,k}(X)$	Vecteur d'orientation du champ X à échelle i et position \mathbf{k}	227
\otimes	Produit de Kronecker	284

Symbole	Description	Page
\mathbb{P}	Espace quotient $\mathbb{R}/(W\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ plan 2-D périodisé horizontalement	261
$P_{\mathcal{C}}$	Projection sur le convexe \mathcal{C}	283
prox	Opérateur proximal	282
$\psi_{i,\mathbf{k}}$	Ondelette à l'échelle i et translaté de \mathbf{k} à partir de l'ondelette ψ	205
$\psi_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}$	Ondelette à l'échelle i et translaté de \mathbf{k} à partir de l'ondelette $\mathcal{R}\psi$	206
$\mathcal{R}f$	Transformée de Radon d'une fonction f	181
\mathbf{R}	Matrice de covariance	33
\mathbf{R}_{θ}	Opérateur de rotation d'angle θ	88
$\mathcal{R}f$	Transformée de Riesz d'une fonction f	166
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$	Espace de Schwartz	203
$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$	Espace des fonctions de Schwartz à intégrale nulle	203
σ	Tribu engendrée	29
S_X	Fonction d'anisotropie du champ aléatoire X	202
$\mathbf{T}_b f$	Opérateur de translation de paramètre b d'une fonction f	166
\mathbf{T}_N	Opérateur de Toeplitz	250
\mathbb{T}	Tore \mathbb{R}/\mathbb{Z}	241
v_X	Semi-variogramme du champ X	90
$\text{VM}(\mu, \kappa)$	Loi de Von Mises de paramètres μ et κ	228
$\text{VMF}(\alpha, \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2)$	Loi de Von Mises-Fischer	228
$\mathbf{W}(\mathbb{R})$	Espace de Wiener	29
\mathbf{W}	Mesure de Wiener	29
$(X_t)_{t \in T}$	Processus stochastique indexé par T	30
$\ \mathbf{z}\ _{\mathcal{A}}$	Norme atomique du vecteur \mathbf{z}	249
$Z_{\Phi, X}$	Champ de la déformation de X par Φ	218

Liste des figures

1	Exemples d'images concernées par les méthodes de traitement d'image abordées dans cette thèse.	11
1.1	Illustration du mouvement brownien d'une particule de pollen ¹	24
1.2	Particule (en bleu) subissant à deux instants successifs un déplacement dont la direction est donnée par la résultante (en orange) des forces exercées (en rouge) par les molécules qui la bombardent (en gris).	25
1.3	Illustration du mouvement brownien 2-D $t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$	28
1.4	Illustration du mouvement brownien 1-D $t \mapsto B_t^2$, projection sur l'axe des ordonnées du mouvement brownien plan de la Figure 1.3, et distribution gaussienne des accroissements.	29
1.5	Illustration d'un processus aléatoire	31
1.6	Une hélice dans deux espaces de Hilbert \mathcal{H} différents : dans l'espace gaussien \mathcal{G} et dans \mathbb{R}^3 pour comprendre l'analogie.	47
1.7	Illustration du graphe (a) (resp. (c)) et de la traînée (b) (resp. (d)) d'un mouvement brownien 1-D $t \mapsto B_t$ (resp. d'un mouvement brownien 2-D $t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$).	49
1.8	(a) Autumn Rhythm (Number 30) de (b) Jackson Pollock pratiquant le <i>drip painting</i>	49
1.9	(a)-(b) Simulation de N réalisations 1-D et 2-D afin de visualiser le comportement statistique, (c)-(d)-(e)-(f) la distribution des positions dans des coupes révèle le processus de diffusion gaussien.	50
1.10	Réalisations du FBM pour différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$	59
1.11	Vision géométrique des accroissements dans l'espace gaussien selon H	64
2.1	Vue du ciel, de mon balcon.	81
2.2	Exemples de textures stochastiques (a) mer calme, (b) paille, (c) bois, (d) mer agitée; et exemples de textures structurales (e) briques, (f) tissu, (g) cailloux, (h) tapisserie.	84
2.3	Exemples de textures fractales et anisotropes (a) mammographie comportant des tissus conductifs orientés et une tumeur, extraite de www.fda.gov , (b) une coupe d'os ostéoporotique, (c) une photographie de la Guinevere Platinia sur Vénus, extraite de (BARATA et coll., 2015), (d) une photographie de nuages prise par mes soins.	87
2.4	Courbe extraite de (LOVEJOY, 1982) donnant la relation entre l'aire des nuages et de la zone de pluie et leur périmètre en représentation log-log.	87
2.5	Réalisation d'un champ brownien fractionnaire, ou <i>Fractional Brownian Field</i> (FBF) pour $H = 0.5$	88
2.6	En faisant des décalages successifs du vecteur \mathbf{c} on crée une matrice circulante \mathbf{C} qui fait apparaître la matrice Toeplitz \mathbf{R} le long de la diagonale.	98
2.7	En faisant faisant des décalages successifs du vecteur \mathbf{c} on crée une matrice circulante \mathbf{C} qui fait apparaître la matrice Toeplitz \mathbf{R} le long de la diagonale.	99
2.8	Illustration de la méthode des bandes tournantes.	107

2.9	FBF simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3.10^{-2}$ et différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$, ce qui génère des images plus ou moins rugueuses/lisses.	110
2.10	Champ élémentaire simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3.10^{-2}$, $\alpha_0 = \pi/6$, $\delta = 3.10^{-1}$ et différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$	111
2.11	Champ élémentaire simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3.10^{-2}$, $\alpha_0 = \pi/6$, $H = 0.5$ et différentes ouvertures de cône (a)-(d) $\delta = 3.10^{-1}$, (b)-(e) $\delta = 2.10^{-1}$ et (c)-(f) $\delta = 1.10^{-1}$	111
2.12	Interface graphique permettant de simuler des champ brownien fractionnaire anisotrope, ou <i>Anisotropic Fractional Brownian Field</i> (AFBF) pour diverses fonctions h et c	112
3.1	Illustration de la nouvelle classe champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé, ou <i>Generalized Anisotropic Fractional Brownian Field</i> (GAFBF).	125
3.2	(a) Réalisation d'un LAFBF en tout point $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ orienté suivant le champ de vecteur $\mathbf{V}(x_1, x_2) = (-\sin \alpha(x_1, x_2), \cos \alpha(x_1, x_2))$ avec $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ et $\delta = 3.10^{-2}$ et $H = 0.8$ constants, (b) zoom autour d'un point \mathbf{x}_0 illustrant que le LAFBF se comporte localement comme un champ élémentaire, (c) schéma illustrant le rôle joué par les paramètres du modèle α et δ au voisinage d'un point \mathbf{x}_0 , rendant compte respectivement de l'orientation locale de la texture (dictée par celle du cône) et de sa directionnalité (dictée par l'ouverture du cône).	128
3.3	Illustration d'une fonction plateau φ_0	133
3.4	Graphes de la fonction $\theta \mapsto C_{H,-\delta,\delta}(\theta)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ pour différentes ouvertures δ variant de 0 à $\pi/2$, pour $H = 0.2$ (à gauche), $H = 0.5$ (au centre) et $H = 0.7$ (à droite).	139
3.5	Simulation d'un LAFBF de taille 256×256 par la méthode de Cholesky avec $H = 0.2$ et $\delta = 2.10^{-2}$ constants, et pour orientations (a) $\alpha = 0$ constant (EF), (b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ constant (EF), (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$ et (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + 0.2 \times x_2$	141
3.6	Schémas illustrant en chaque point $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ la sélection de bandes par la fonction d'anisotropie locale $c_{\alpha,\delta}$, parmi les n bandes rouges pré-calculées une fois pour toute.	142
3.7	Simulation d'un LAFBF de fonction d'anisotropie locale $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$, avec (a) $H = 0.2$ (sans régularisation), (b) $H = 0.2$ (avec régularisation), (c) $H = 0.5$ (sans régularisation) et (d) $H = 0.5$ (avec régularisation).	143
3.8	Schéma représentant le voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$ et le principe du krigeage.	145
3.9	Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ pour différentes fonctions de Hurst (a) linéaire, (b) radiale, (c) sinusoïdale, ainsi que leurs réalisations respectives (d), (e) et (f).	146
3.10	Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$, une fonction de Hurst h et une ouverture de cône δ , toutes linéaires.	146
3.11	Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x})$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$. (a) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$, (b) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$, (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$, (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$	150
4.1	Une image normale d'un sein (à gauche) présente des tissus glandulaires qui en première approximation peuvent être considérés comme des structures linéaires orientées, qui s'abouchent au mamelon. (À droite) images anormales de seins présentant des distorsions architecturales, les structures linéaires pointent radialement vers le point d'anomalie. Crédits : (MATSUBARA et coll., 2005) & Breast Cancer Resource Center.	157

4.2	Analyse de la structure trabéculaire d'une texture (a) d'un os sain du groupe témoin, les flèches A et B représentent respectivement les trabéculaires longitudinales et transversales, (b) le spectre obtenu par transformée de Fourier rapide, ou <i>Fast Fourier Transform</i> (FFT) et le calcul des angles indice de dispersion longitudinal, ou <i>Dispersion Longitudinal Index</i> (DLI) et indice de dispersion transversal, ou <i>Dispersion Transverse Index</i> (DTI) pour chacun d'eux, (c) texture d'un os du groupe atteint de fractures, (d) le spectre et angles de dispersion correspondant. Même chose ligne d'en dessous pour des textures synthétiques (e)-(h). Crédits : (BRUNET-IMBAULT et coll., 2005).	159
4.3	Quand le cône orienté en α_0 a une ouverture 2δ qui tend vers zéro (a)-(b), il en résulte à la limite (c) une distribution de Diracs le long de la droite d'angle α_0 passant par l'origine.	162
4.4	A gauche un cosinus $A \cos(\phi(t))$ dont la phase varie $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$, représenté par le signal complexe $Ae^{j\phi(t)}$, à droite une fonction modulée en amplitude $s(t) = A(t) \cos(\phi(t))$ et représentée par le signal complexe $A(t)e^{j\phi(t)}$.	163
4.5	Passage à la notation complexe de $\cos(\omega_0 t)$ à $e^{j\omega_0 t}$, illustré du point de vue spectral.	164
4.6	Représentation du signal $s(t) = 1.1 \cos(4\pi t) + 1.8 \sin(14\pi t) + 2.9 \cos(20\pi t)$ sur $[0, 0.6]$, et de sa transformée de Hilbert $\mathcal{H}s(t) = 1.1 \sin(4\pi t) - 1.8 \cos(14\pi t) + 2.9 \sin(20\pi t)$ en quadrature de phase avec le signal s .	165
4.7	Représentation de la phase et de l'amplitude du signal analytique s_a sur $[0, 0.6]$, à partir du signal $s(t) = 1.1 \cos(4\pi t) + 1.8 \sin(14\pi t) + 2.9 \cos(20\pi t)$. La phase de s_a est porteuse d'information sur la structure locale du signal s .	165
4.8	(a) $f(\mathbf{x}) = \cos(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (10, 5)$ (vue 3-D), (b) $\mathcal{R}_1 f(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{\ \mathbf{k}\ } \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ (vue 3-D), (c) $f(\mathbf{x})$ (vue 2-D) et orientations $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, (d) spectre de f , (e) spectre de $\mathcal{R}_1 f$, (g) coupe 1-D de f et $\mathcal{R}_1 f$ en déphasage de $\pi/2$, différence d'amplitude due à $k_1 / \ \mathbf{k}\ \approx 0.89$.	168
4.9	Visualisation des vecteurs d'orientations de Riesz d'une texture oscillante.	169
4.10	Visualisation de la phase φ et de l'orientation θ du signal monogène f_m .	170
4.11	Illustration d'un voisinage simple f . Le niveau de gris ne dépend que d'une coordonnée, donnée par la direction du vecteur \mathbf{n} . f a un niveau de gris constant sur la ligne en pointillés, dont la valeur est donnée par $g(k)$ avec $k = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{n} = \mathbf{x}_2^\top \mathbf{n} = \mathbf{x}_3^\top \mathbf{n}$.	172
4.12	Classification des valeurs propres (JAHNE et JAEHNE, 1995).	174
4.13	Teinte de couleur HSV utilisée pour représenter toutes les directions de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.	177
4.14	Analyse de 3 textures 256×256 avec l'orientation et indice de cohérence sur 3 échelles.	178
4.15	Exemples d'analyse de motifs doublement orientés tirés de (AACH et coll., 2006) (a) sans bruit, (b) avec bruit et (c) avec occultation.	180
4.16	Exemples tiré de (AACH et coll., 2006) de séparation de deux motifs superposés en (a), (b) l'estimation des deux orientations en chaque pixel, (c) extraction du premier motif et (d) extraction du second motif.	180
4.17	Illustration de la transformée de Hough pour trois points A , B et C alignés.	185
4.18	Relations entre les transformées de Radon, Riesz et Hilbert. (À gauche) Opérateurs non locaux; (à droite) opérateurs locaux par rétroprojection de la dérivée des projections de Radon.	186

5.1	Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x})$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire standard de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$, pour les fonctions α suivantes : (a) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$ (en haut à gauche), (b) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ (en haut à droite), (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$ (en bas à gauche), (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$ (en bas à droite).	220
5.2	Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x}))$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire standard de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$, et Φ est la fonction de déformation définie par (5.53) associée à la fonction harmonique $\alpha(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$, avec de gauche à droite $(a, b) = (2, -1)$, $(a, b, c) = (1, 0, \pi/2)$ et $(a, b, c) = (0, 1, \pi/2)$. Les lignes de niveaux de ces deux dernières étant superposées au champ.	222
5.3	Classification des points d'équilibre d'un système d'équations différentielles type (5.54).	223
5.4	(a) Profil fréquentiel de la fonction $\varphi(\lambda)$ définie en (5.64), (b) représentation en Fourier de l'ondelette 2-D $\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\ \boldsymbol{\xi}\)$	227
5.5	(a) Histogramme empirique des angles d'orientation $(\alpha_{i,k}(X))_k$ à i fixé et approximation d'une loi VMF, (b) tracé de deux autres VMF de concentrations κ différentes.	228
6.1	(a) Ouverture circulaire, (b) tâche de Airy, (c) illustration de la microscopie par fluorescence, et (d) intérieur d'une cellule mesurée par ce procédé. Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).	240
6.2	(a) Un point source représenté par une masse de Dirac, (b) illustration de la fonction d'étalement du point, ou <i>Point Spread Function</i> (PSF) et de la limite de résolution de Rayleigh, (c) deux points sources, (d) à la limite d'être distingués par le critère de Rayleigh. Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).	241
6.3	(a) Le signal est une mesure de Diracs et son spectre (c), (b) signal convolué par une PSF et son spectre (d). Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).	241
6.4	(a) Signal exact d'une mesure de Diracs, (b) échantillonnage régulier ou aléatoire du spectre, avec résultat respectif (c)-(d) sur le signal recomposé en spatial par remplissage par des zéros et FFT. Crédits : (LUSTIG et coll., 2008).	244
6.5	(a) Minimisation par la norme $\ \cdot\ _2$, solution $\tilde{\mathbf{x}}$ non parcimonieuse, et (b) minimisation par la norme $\ \cdot\ _1$, qui favorise une solution $\tilde{\mathbf{x}}$ parcimonieuse.	244
6.6	Différences entre l'échantillonnage comprimé et la super-résolution.	246
6.7	(a) L'opérateur de mesures incohérentes Φ , (b)-(c) quels que soient les indices où le vecteur \mathbf{x} est K -parcimonieux, la matrice extraite \mathbf{A}_K des colonnes correspondantes est bien conditionnée par la propriété d'isométrie restreinte, ou <i>Restricted Isometry Property</i> (RIP). (d) L'opérateur de mesures passe-bas \mathcal{F}_c , (e) pour K instants t_k bien séparés, la matrice extraite \mathbf{A}_K est bien conditionnée, (f) en revanche pour des instants rapprochés \mathbf{A}_K est très mal conditionnée. Crédits : Fernandez-Granda.	246
6.8	Norme atomique dans \mathbb{R}^2 correspondant au dictionnaire $\mathcal{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$	249
7.1	Tubulines (protéines) observées par microscopie à fluorescence.	259
7.2	(a) Paramètres (θ, η) caractérisant la position de la ligne dans le plan, (b) convention utilisée pour représenter l'image, résultat de la discrétisation (par l'opérateur d'échantillonnage Δ) avec un pas unitaire sur la ligne floutée $x^\sharp * \phi$, et (c) l'image discrète obtenue $\mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2)$	262
7.3	L'image \mathbf{b}^\sharp de trois lignes floutées avec $\kappa = 1$	265
7.4	Relation entre les variables du problème.	266

7.5	Illustration des deux étapes de la procédure : une phase d'optimisation convexe pour la reconstruction des lignes (en orange) suivie d'une phase d'estimation de leurs paramètres par une méthode de type Prony (en violet).	268
7.6	Illustration avec une image composée d'une combinaison pondérée d'atomes ligne $\mathbf{a}(\theta_k, \eta_k)$ (en gris). Dans le domaine de Fourier, cette décomposition s'écrit comme une combinaison d'atomes d'exponentielles 2-D $\hat{\mathbf{a}}(\theta_k, \eta_k)$. La somme des poids $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, où les α_i sont les amplitudes des lignes, correspond à la norme atomique dans le dictionnaire approprié.	269
7.7	Procédure d'extraction des paramètres des lignes $(\theta_k, \alpha_k, \eta_k)$ par une méthode de type Prony.	290
7.8	Décroissance des erreurs relatives $\frac{\ \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^\sharp\ _{\mathcal{X}}}{\ \hat{\mathbf{x}}^\sharp\ _{\mathcal{X}}}$ et $\frac{\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\ _{\mathcal{Y}}}{\ \hat{\mathbf{y}}\ _{\mathcal{Y}}}$ en fonction du nombre d'itérations en échelle log-log pour la première expérience.	292
7.9	(a) Image dégradée $\hat{\mathbf{y}}$ avec flou ($\kappa = 1$) et bruit fort ($\zeta = 200$), (b) Image dégradée $\hat{\mathbf{y}}$ avec flou ($\kappa = 8$), (c) Image débruitée, et (d) reconstruction des lignes exactes.	293
7.10	(a) Binarisation de \mathbf{b}^\sharp , (d) Version binaire seuillée (ou squelettisée) de \mathbf{b}^\sharp , (b)-(e) Espace de Hough correspondant et estimation des pics, (c)-(f) Lignes estimées superposées à \mathbf{b}^\sharp	293
7.11	Espace de Radon pour (a) l'expérience 1 avec $\kappa = 1$, (b) l'expérience 2 avec $\kappa = 1$ et $\zeta = 200$, (c) l'expérience 1 avec $\kappa = 8$. Les points repérés en vert correspondent aux paramètres exacts des lignes.	294
7.12	Variation de l'erreur relative sur l'estimation des angles en fonction du pas de discrétisation de la transformée de Radon.	295
7.13	(a) Deux lignes proches affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), (b) image débruitée $\mathcal{F}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$, (c) image théorique sans bruit \mathbf{b}^\sharp et (d) estimation des lignes.	295
7.14	(a) Image \mathbf{y} de sept lignes affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), (b) image débruitée $\mathcal{F}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$, (c) image théorique sans bruit \mathbf{b}^\sharp et (d) estimation des lignes.	296
7.15	(a) Image \mathbf{y} de quatre lignes affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), deux étant plutôt verticales (angle dans $[-\pi/4, \pi/4)$) et les deux autres plutôt horizontales, (b) image \mathbf{b}_1 reconstruite, (c) image \mathbf{b}_2 reconstruite.	296
7.16	(a) Une ligne floutée avec $\kappa = 1$ et occultée par un masque, (b) visualisation de la reconstruction \mathbf{b} par <i>inpainting</i> à 2000 itérations, (c) à 10 000 itérations, (d) à convergence. Vue de la reconstruction de $\hat{\mathbf{x}}$ en Fourier.	297
7.17	(a)-(b) <i>Inpainting</i> avec un masque de taille moyenne et sa reconstruction ; (c)-(d) de même avec un masque de grande taille occultant pratiquement toute la ligne.	297
7.18	(a)-(b) Deux lignes occultées par un masque de taille importante et leur reconstruction par <i>inpainting</i> ; (c)-(d) de même avec trois lignes.	298
7.19	(a)-(b) Deux lignes occultées par un masque aléatoire de pixels et leur reconstruction ; (c)-(d) de même avec trois lignes.	298
7.20	(a) Texture de bois orientée, (b) puissance spectrale correspondante, (c) cas limite en distribution d'un champ élémentaire et (d) voisinage simple.	302
7.21	(a) Texture de coraux, (b) séparation horizontale, (c) séparation verticale et (d) texture d'os trabéculaire sur laquelle on souhaiterait appliquer le même type de séparation.	307

Introduction

« Nous sommes dans un siècle de l'image. Pour le bien comme pour le mal, nous subissons plus que jamais l'action de l'image. »

Gaston Bachelard, *La terre et les rêveries de la volonté* (1948)

LE TRAITEMENT MATHÉMATIQUE DES IMAGES est un domaine très actif dont le vaste objet d'étude concerne aussi bien l'amélioration d'images numériques, leur restauration, leur compression, la synthèse d'images possédant des propriétés données, ou encore l'extraction d'information permettant leur interprétation. Le cerveau, et plus spécifiquement le cortex visuel, traite quant à lui l'information visuelle reçue par la rétine *via* différents mécanismes mis en évidence par la discipline des neurosciences. Différentes régions fonctionnelles interviennent dans l'analyse des propriétés de l'information (perception des couleurs, détection du mouvement, de l'orientation, segmentation de formes, etc.), bien souvent dans un compromis entre efficacité et complexité. Le traitement de l'image, qui suit l'étape d'acquisition du signal lumineux par des capteurs CCD et le stockage numérique de l'image sous forme de tableau, a également permis à la machine informatique d'extraire de l'information au travers de la manipulation de ces données numériques par des algorithmes, rendant plus aisée son interprétation par l'homme. Dans certains cas, l'analyse des variations de niveaux de gris des pixels par la machine peut révéler des caractéristiques de l'objet ou de la scène observée que n'aurait pu déceler l'œil humain².

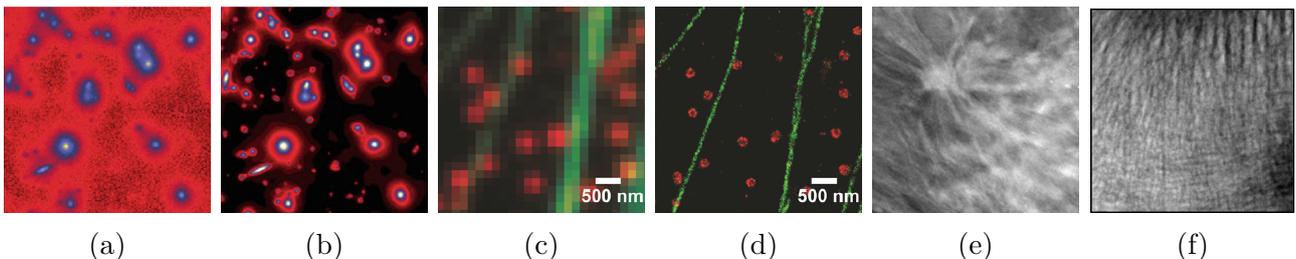


FIGURE 1 – Exemples d'images concernées par les méthodes de traitement d'image abordées dans cette thèse.

- Les images astronomiques collectées par les télescopes (Figure 1a), ou les images issues du microscope observées en biologie (Figure 1c), sont parfois dégradées par les défauts optiques de l'instrument, noyées dans du bruit, ou même simplement affectées par le phénomène de diffraction qui produit une image floue, compromettant ainsi leur interprétation. Des algorithmes, dits de *super-résolution*, sont en mesure de restaurer l'image en

2. De la même manière que ce n'est pas l'homme qui a pu récemment détecter les ondes gravitationnelles par ses sens, mais un algorithme dû à Sergey Klimenko, basé sur une analyse temps-fréquences par ondelettes, dont la prouesse technique fut de repérer un signal, traduisant l'infime variation de longueur des bras de l'interféromètre du LIGO à la vibration de l'espace, immergé dans du bruit dont l'intensité était mille fois supérieure à celle du signal! L'homme en revanche sait en apprécier la beauté.

tenant compte de la **géométrie** des objets présents dans celle-ci (Figure 1b, 1c), permettant ensuite de détecter leur **position** exacte ou encore leur **orientation**.

- En imagerie médicale, les radiographies d'os (Figure 1f) ou les mammographies (Figure 1e) sont des images de **textures**, présentant un double aspect de **régularité** (les variations d'intensité sont susceptibles d'être plus ou moins abruptes) et d'**anisotropie** (la répartition spatiale produit des directions privilégiées). La modélisation et l'extraction de ces caractéristiques sont un enjeu important pour la compréhension du milieu étudié, et s'avèrent parfois discriminantes, en ce sens que ces paramètres estimés sont reliés à la structure du milieu, et permettent typiquement l'évaluation du risque de cancer du sein ou celui de fracture ostéoporotique.

Cette thèse s'inscrit dans cette démarche, en proposant des méthodes d'analyses et de synthèse de structures orientées, s'attachant tantôt à l'étude de la géométrie de l'image, tantôt à celle de ses textures. Le premier volet de la thèse est ainsi consacré à la modélisation de textures anisotropes dans le formalisme des **champs aléatoires**, tandis que le second est dévolu à la super-résolution par une approche **variationnelle**.

Synthèse et analyse de textures anisotropes

L'aspect très irrégulier et complexe des images issues de l'imagerie médicale, suggère de les traiter en tant que textures « aléatoires », présentant néanmoins une forme d'organisation statistique. Ce parti pris d'une approche stochastique des textures, nous invite à les considérer comme la réalisation d'un *champ aléatoire* bidimensionnel. Ces champs aléatoires doivent donc intégrer les propriétés des textures qu'ils modélisent. Par exemple, les images d'os trabéculaires (Figure 1f) possèdent sur les premières échelles une structure fractale (HARBA et coll., 1994), et de même en ce qui concerne les images de mammographies (CALDWELL et coll., 1990). Le modèle fractal sous-jacent de paramètre H utilisé, est le fameux mouvement brownien fractionnaire découvert par KOLMOGOROV (1940), puis défini par MANDELBROT et VAN NESS (1968) au moyen d'une intégrale stochastique. Le *mouvement brownien fractionnaire* est un processus gaussien 1-D, dont les accroissements sont stationnaires, et possède cette propriété fractale d'invariance par changement d'échelle, appelée *auto-similarité* d'ordre H . C'est en effectuant une analyse fractale de lignes extraites dans les radiographies d'os que BENHAMOU et coll. (2001) ont montré que le paramètre H qui encode leur régularité, différait en moyenne d'une cohorte de témoins sains à celle de patients souffrant d'ostéoporose. Toutefois l'écart n'étant pas suffisamment discriminant, les médecins ont souligné une autre différence notable entre ces deux populations, qui tenait en l'organisation spatiale des radiographies, autrement dit au *degré d'anisotropie* de celles-ci, notion qui n'a de sens que pour des champs aléatoires au moins bidimensionnels. Ce constat a ensuite été établi par BRUNET-IMBAULT et coll. (2005) et CHAPPARD et coll. (2005), ce qui appelle à la définition de champs aléatoires 2-D et anisotropes.

Une généralisation 2-D du mouvement brownien fractionnaire est le *champ brownien fractionnaire* défini par l'intégrale stochastique suivante :

$$B^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (1)$$

qui est également à accroissements stationnaires et auto-similaire d'ordre H , donc vérifiant l'invariance d'échelle statistique que l'on formule comme suit :

$$\{B^H(\lambda \mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} = \lambda^H \{B^H(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \quad (\text{en loi}). \quad (2)$$

La synthèse de ce champ bidimensionnel peut être obtenue à partir de sa covariance (qui est explicitement connue), ou à partir de l'algorithme de [STEIN \(2002\)](#). L'inconvénient est que ce champ a le même comportement dans toutes les directions, il est isotrope, et donc n'est pas adapté pour modéliser l'anisotropie de ces structures osseuses, ou d'autres phénomènes présentant des directions privilégiées. Plusieurs modèles anisotropes ont alors vu le jour, les plus connus étant le drap brownien fractionnaire, introduit par [KAMONT \(1995\)](#), et les champs browniens fractionnaires anisotropes par [BONAMI et ESTRADÉ \(2003\)](#), ayant permis à [BIERMÉ et coll. \(2009\)](#) et [RICHARD et BIERME \(2010\)](#) de modéliser et tester l'anisotropie des images de mammographies. Dans cette dernière classe, les champs gaussiens sont supposés à accroissements stationnaires, de façon à disposer d'une représentation spectrale ([YAGLOM, 1957](#)) et à pouvoir ainsi étudier certaines propriétés de ces champs à partir de leur densité spectrale. Ce modèle englobe la classe des champs gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires introduite par [BENASSI et coll. \(1997\)](#), et dans laquelle figure le champ brownien fractionnaire. Les densités spectrales de ces champs sont de la forme $\boldsymbol{\xi} \mapsto \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} C(\boldsymbol{\xi}/\|\boldsymbol{\xi}\|)^2$, où C est une fonction induisant de l'anisotropie par « filtrage fréquentiel » dans l'intégrande de (1). La covariance du champ n'étant en général pas connue, et l'algorithme de Stein ne s'appliquant pas à cette classe de champs, une autre méthode due à [BIERMÉ et coll. \(2015\)](#) et reposant sur des bandes tournantes, permet de simuler efficacement ces champs.

La limite que présentent ces classes de champs anisotropes réside dans le fait que l'anisotropie introduite est *globale* sur toute l'image. Il n'existe pas à notre connaissance de modèles de champs aléatoires dont on saurait contrôler *localement* l'anisotropie. Seule la régularité a été décrite de manière locale dans le modèle réputé du champ brownien multifractionnaire ([PELTIER et VÉHEL, 1995](#)), où le paramètre H est remplacé par une fonction $\mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x})$ dépendant de la position.

Dans cette thèse, nous proposons un modèle de champs anisotropes gaussiens où la régularité h et l'anisotropie C sont localement prescrites par une fonction de la position. Ce champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé prend la forme suivante :

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) . \quad (3)$$

où h et C vérifient certaines hypothèses (\mathcal{H}). Du point de vue de la prise en compte de l'anisotropie en tout point, notre modèle est aux champs auto-similaires à accroissements stationnaires, ce que le champ brownien multifractionnaire est au champ brownien fractionnaire : une version localisée de ce dernier. La démarche consistera donc comme pour le champ brownien multifractionnaire à vérifier que le nouveau modèle se comporte localement comme la classe de champs qu'il généralise, ce qui mathématiquement consiste à calculer ses *champs tangents* ([BENASSI et coll., 1997](#); [FALCONER, 2002, 2003](#)).

Nous proposons également un second modèle, inspiré des travaux de [GUYON et PERRIN \(2000\)](#); [PERRIN et SENOUSI \(1999, 2000\)](#) et défini comme la déformation d'un champ auto-similaire à accroissements stationnaires X , par une fonction continûment différentiable Φ . Ce champ $Z_{\Phi, X}$, appelé champ brownien fractionnaire anisotrope déformé, est donné par :

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x})) , \quad (4)$$

pour lequel on caractérise également ses champs tangents. Nous montrons qu'un choix spécifique de déformation Φ *conforme* permet de prescrire localement l'anisotropie. Enfin des procédures de synthèse de ces deux modèles sont exposées.

Une question importante portant sur l'aspect analyse de texture, concerne la caractérisation de l'anisotropie locale. De fait l'étude de l'orientation locale dans le cadre des textures a été

relativement peu étudiée, et soulève encore de nombreux problèmes mathématiques : une texture est dite anisotrope s'il existe en chaque point une orientation dominante. Toutefois, la difficulté réside dans la définition rigoureuse, et l'estimation robuste, de cette orientation.

Dans le cadre déterministe, la détection d'un contour ou de l'orientation locale d'une image est la plupart du temps basée sur des techniques faisant intervenir le gradient, dans la mesure où il s'agit de déterminer des variations de niveaux de gris dans une région d'intérêt pouvant présenter des directions privilégiées. Bien qu'il semble inévitable d'en passer par la quantification de ce *changement* de niveaux de gris dans une direction donnée pour caractériser l'orientation locale d'un voisinage, plusieurs obstacles sont cependant susceptibles de compromettre son estimation effective. La régularité de l'image d'abord, puisque s'il est question d'un contour « lisse » le calcul du gradient fournira une bonne approximation de l'orientation, tandis que si l'image varie rapidement sur un voisinage de résolution fixée, l'estimation sera moins aisée. Cette remarque suffit à appréhender les difficultés qu'impose le paradigme discret, et montre que le succès de ces méthodes dépend de la sensibilité à l'échelle (un contour lisse est principalement décrit par ses basses fréquences, tandis qu'une micro-texture variant rapidement comportera des hautes fréquences déterminantes), et de manière liée à la robustesse au bruit. De nombreuses méthodes intègrent ainsi une phase de pré-traitement consistant à atténuer le bruit par des filtres passe-bas en amont de l'estimation de l'orientation.

Une approche novatrice consista en la définition du signal monogène d'une image (FELSBURG, 2002; FELSBURG et SOMMER, 2001), basée sur la transformée de Riesz qui opère de façon sous-jacente ce « lissage du gradient ». La représentation sous forme quaternionique (BÜLOW, 1999) permet à partir du signal monogène d'associer à l'image une notion formelle de phase et d'orientation locale. Couplé au formalisme des ondelettes, OLHEDE et METIKAS (2009) et UNSER et coll. (2009) ont proposé des méthodes effectuant ces analyses d'orientation à différentes échelles *via* des ondelettes monogènes, et ont quantifié empiriquement leur *degré de directionnalité*.

Cependant, cette formalisation soulève des questions d'existence et d'unicité qui ne sont pas encore toute résolues. D'autre part, bien que les résultats empiriques de ces estimateurs d'orientation soient prometteurs, il n'existe néanmoins pratiquement aucune analyse de leurs performances, ni de leurs propriétés statistiques. Cette thèse apporte quelques contributions à ces problématiques, en tâchant d'étudier dans quelles mesures il est possible de transposer ces méthodes au cadre stochastique, en les appliquant aux champs aléatoires pour leur étude théorique, et à leurs réalisations pour y détecter l'anisotropie, avec comme objectif de répondre aux questions suivantes :

- Comment définir l'anisotropie et l'orientation locale d'un champ aléatoire ?
- Comment mesurer le degré d'anisotropie ?
- Comment tester l'anisotropie pour savoir si une région est orientée ?

Dans un premier temps, nous interrogeons la possibilité de définir la transformée de Riesz dans le cadre stochastique, et montrons qu'en toute généralité il est difficile de définir la transformée de Riesz d'un champ aléatoire quelconque. OLHEDE et coll. (2014) parviennent à définir une notion de signal monogène aléatoire à partir des covariances des composantes de Riesz, et à tester statistiquement l'unidirectionnalité d'un champ, mais uniquement dans le cas où le champ aléatoire est stationnaire. Nous proposons pour notre part d'utiliser la transformée en ondelettes monogènes sur la classe plus vaste des champs gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires précédemment évoqués. La définition de l'orientation, à l'instar de UNSER et coll. (2009), passe par la définition d'un tenseur de structure formé par les covariances des coefficients d'ondelettes. On montre alors que ces coefficients d'ondelettes aléatoires sont stationnaires, et que l'orientation ainsi définie devient de façon surprenante une quantité

intrinsèque au champ, qui ne dépend ni de l'échelle ni de l'ondelette mais uniquement de la densité spectrale du champ.

Dans un deuxième temps, nous caractérisons les propriétés statistiques de l'estimateur des orientations locales, et apportons un éclairage sur les connexions existantes entre l'approche par tenseur de structure et celle des statistiques directionnelles (MARDIA et JUPP, 2009). Enfin nous étendons la définition de l'orientation locale à la vaste classe des champs gaussiens *localisables*, admettant des champs tangents non triviaux, en attribuant à chaque point l'orientation correspondant à celle de son champ tangent, qui est presque partout auto-similaire à accroissements stationnaires.

Super-résolution de lignes 2-D

Ce second volet de la thèse traite plus spécifiquement de la géométrie des images, par une approche de type variationnelle. L'objectif d'une méthode dite de *super-résolution* est de rétablir des niveaux de détails d'un phénomène, perdus lors de l'acquisition. Elle doit donc être en mesure de reconstruire un objet x , qui aurait par exemple été affecté par un noyau de diffraction ϕ , à partir de sa version dégradée $b = x * \phi$ et d'un bruit additif, en tenant compte de la géométrie de l'objet que l'on cherche à reconstruire. L'exemple typique est celui de la détection de K impulsions 1-D, représentées par une mesure discrète, à partir de sa version convoluée; ou de manière équivalente à partir de sa transformée de Fourier, qui est une somme de K exponentielles complexes, tronquée aux basses fréquences par le noyau ϕ . La super-résolution consiste à résoudre ce problème inverse : reconstruire le signal x et retrouver les positions exactes des impulsions à partir de quelques mesures linéaires basse résolution.

Ce problème classique de reconstruction à partir de données tronquées, a été ces dernières années le lieu d'une grande investigation des signaux 1-D, revisités par l'association de la parcimonie et de la minimisation ℓ_1 . Ce fil conducteur de la parcimonie, dont la maxime méthodologique tient du rasoir d'Ockham, consiste à représenter un signal le plus simplement possible³. Cette connaissance *a priori* sur le signal, lorsqu'elle est mise à profit dans des algorithmes de reconstruction convexe, permet effectivement de retrouver le signal dans son intégralité. L'ingrédient lui conférant cette efficacité est la minimisation par la norme ℓ_1 , qui va promouvoir une solution parcimonieuse parmi toutes celles qui sont consistantes avec les mesures.

Les connexions avec la théorie de l'échantillonnage comprimé (CANDÈS et coll., 2006; CANDÈS et WAKIN, 2008) sont nombreuses puisque c'est cette dernière qui a donné naissance à la théorie de la super-résolution développée par (CANDÈS et FERNANDEZ-GRANDA, 2014). Néanmoins elle s'en distingue sur plusieurs points. Premièrement sur la nature des données dont on dispose pour reconstruire l'objet : la théorie de l'échantillonnage comprimé prélève *aléatoirement* des échantillons sur toute la gamme du spectre et reconstruit l'objet en *interpolant* ces points; tandis que la super-résolution doit composer avec des échantillons *réguliers* sur une portion du spectre correspondant aux basses fréquences, et reconstruit l'objet en *extrapolant* le spectre. Deuxièmement, la théorie de l'échantillonnage comprimé a pour but la reconstruction d'un objet parcimonieux *discret*, là où la théorie de la super-résolution est en charge de retrouver les positions t_k qui varient *continûment* dans $[0, 1]$ et ne sont pas attachées à une grille de discrétisation. Enfin les garanties théoriques de reconstruction diffèrent, dans la mesure où celles de la théorie de l'échantillonnage comprimé reposent sur l'incohérence des mesures, tandis que celles de la super-résolution nécessitent une séparation minimale entre les impulsions. La procédure de reconstruction relève en revanche du même type d'algorithme employé dans l'une et l'autre des théories, à savoir minimiser une norme de type ℓ_1 afin d'induire de la parcimonie dans la solution cherchée parmi tous les signaux candidats consistants avec les données. Les

3. « La simplicité est la sophistication suprême », Léonard de Vinci.

résultats obtenus par ces algorithmes sont parfois spectaculaires dans leur capacité à reconstruire des signaux à partir d'un nombre restreint de données. Ces connaissances ont alimenté un grand nombre de recherches au carrefour du traitement du signal, des mathématiques et de la physique.

Si la littérature foisonne au sujet de la super-résolution 1-D, la recherche concernant la super-résolution d'objets 2-D tels que des contours, en est encore à ses débuts. On mentionnera à ce titre les travaux de [CHEN et coll. \(2012a,b\)](#), [FATEMI et coll. \(2016\)](#), [PAN \(2014\)](#); [PAN et coll. \(2014, 2015, 2017\)](#) et [ONGIE et JACOB \(2015\)](#), qui abordent ce problème sous l'angle des signaux à taux d'innovation fini, connexes à la théorie de la super-résolution ([STROHMER, 2012](#)).

Motivé par la super-résolution de trajectoires de molécules, nous proposons dans cette thèse une méthode de reconstruction de superposition de lignes diffractées et bruitées, permettant de retrouver les paramètres de position et d'intensité des lignes avec une précision sous-pixellique. Le point de départ consiste à remarquer qu'une coupe 1-D de direction fixée d'une superposition de lignes 2-D, correspond à une superposition d'impulsions 1-D. On peut ainsi caractériser une ligne conjointement par la structure qu'elle présente sur l'axe horizontal et vertical, ce qui ramène le problème à de multiples cas de super-résolution 1-D, qu'il s'agit de traiter simultanément pour préserver la structure 2-D. Une relaxation convexe de l'ensemble de ces contraintes aboutit à la formulation d'un problème d'optimisation convexe, que nous résolvons par des algorithmes de types proximaux ([COMBETTES et PESQUET, 2011](#)). L'image solution est alors composée de lignes dépourvues de bruit et de flou, à partir desquelles une méthode paramétrique de type Prony nous permet d'accéder à leurs paramètres avec une précision sous-pixellique.

Plan de la thèse

La thèse s'articule en trois parties. La première partie, regroupant les Chapitres 1 à 3, concerne l'aspect « modélisation » des textures anisotropes dans le formalisme des champs aléatoires, avec le développement de nouveaux modèles. La seconde partie, composée des Chapitres 4 et 5, traite quant à elle de l'aspect « analyse » de l'anisotropie des champs aléatoires. Enfin la troisième partie, composée des Chapitres 6 et 7, est dévolue à la super-résolution 1-D et 2-D. Les chapitres de contribution sont les Chapitres 3, 5 et 7. Venons-en à la description de ce travail, chapitre par chapitre :

Le Chapitre 1 rappelle des notions fondamentales de la théorie des champs aléatoires, comme le mouvement brownien et sa généralisation aux champs browniens fractionnaires, sur lesquels sont basées nos contributions. Nous faisons un effort didactique dans ce chapitre pour en exposer les étapes de leur construction mathématique. Puis, de sorte à être auto-consistant, nous présentons les théorèmes généraux des processus stochastiques utilisés dans le développement de nos nouveaux modèles. Le lecteur familier avec ces notions pourra s'il le souhaite se rendre directement aux chapitres qui suivent.

Le Chapitre 2 fait l'état de l'art des modèles de champs aléatoires anisotropes que l'on peut trouver dans la littérature. Puis, nous exposons différentes méthodes de simulations numériques de champs aléatoires gaussiens. Une attention particulière est accordée à la synthèse des champs browniens fractionnaires anisotropes issus de la classe de [BONAMI et ESTRADA \(2003\)](#). Celle-ci s'appuie sur une méthode dite à bandes tournantes à laquelle [BIERMÉ et coll. \(2015\)](#) se réfèrent pour développer leur procédé de simulation d'une approximation de ces champs. Nous donnons des exemples de réalisations de ces champs anisotropes et fournissons une interface graphique

MATLABTM implémentant cette méthode.

Le Chapitre 3 concentre nos contributions relatives au développement des deux nouveaux modèles de champs aléatoires anisotropes esquissés en introduction. Sur le plan théorique, l'apport principal est centré sur la détermination des champs tangents de ces modèles, dont la preuve est assez technique. On détermine par ailleurs la fonction de covariance d'une sous-classe de la classe des champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés. Enfin des procédures de simulations sont mises en œuvres afin d'observer concrètement le comportement de ces champs, qui serviront de banc d'essai à la validation ultérieure d'outils de détection de l'anisotropie.

Le Chapitre 4 propose un passage en revue de différentes méthodes d'estimation de l'anisotropie dans les images, motivé par deux exemples d'applications issues de l'imagerie médicale, à savoir la détection de l'ostéoporose et la détection d'anomalies dans les tissus mammaires. Nous nous attardons ensuite plus spécifiquement sur l'exposé du signal monogène, du tenseur de structure, et de la procédure de détection des orientations locales de UNSER et coll. (2009), jouant un rôle central dans les résultats de cette thèse. Pour finir, une description des transformées de Radon et de Hough est proposée, dans lesquelles nous tissons les liens qui unissent ces transformées avec celles de Riesz et de Hilbert mises également en avant dans ce chapitre.

Le Chapitre 5 présente nos contributions concernant la caractérisation de l'anisotropie locale des champs aléatoires. Celles-ci répondent aux trois questions soulevées dans l'introduction, avec en premier lieu la définition rigoureuse d'une notion d'orientation locale pour les champs localisables. Celle-ci est d'abord établie pour les champs auto-similaires et à accroissements stationnaires, en transposant l'utilisation de la transformée en ondelettes monogènes (OLHEDE et METIKAS, 2009; UNSER et coll., 2009) à cette classe de champs. Munis de cette notion d'orientation intrinsèque, nous répondons à la seconde question consistant à fournir une mesure de l'anisotropie, en reprenant l'indice de cohérence proposé par UNSER et coll. (2009), dont nous montrons que cette quantité est également intrinsèque au champ, et reliée à la dispersion, c'est-à-dire aux statistiques directionnelles d'ordre 2 de sa densité spectrale. Nous illustrons ces définitions sur des champs élémentaires pour lesquels nous calculons explicitement l'orientation et l'indice de cohérence en fonction des paramètres de la fonction d'anisotropie. Puis nous suivons la même démarche pour définir l'orientation de nos deux modèles de champs aléatoires anisotropes développés au Chapitre 3. Nous terminons par caractériser la loi des estimateurs d'orientation des champs élémentaires, et donnons des pistes de réflexion quant à la mise en oeuvre de tests d'hypothèse pour discriminer la directionnalité.

Le Chapitre 6 fournit les concepts clés inhérents au principe de la super-résolution 1-D, que nous étudierons dans le chapitre suivant. Nous abordons cette problématique à partir du phénomène de diffraction présents dans les instruments optiques et nous décrivons les points communs ainsi que les divergences qui opèrent entre la super-résolution et la théorie de l'échantillonnage comprimé. Nous donnons deux formulations de la super-résolution d'un train d'impulsions convolué, l'une en la présentant comme une décomposition atomique dans un dictionnaire, ce qui nous amène ce formalisme ainsi que la notion de norme atomique qui lui est rattachée (CHANDRASEKARAN et coll., 2012); l'autre en la reliant au problème des moments trigonométriques tronqués d'une mesure sur le cercle unité. Nous retraçons pour cette formulation une brève généalogie des travaux ayant mené à la caractérisation de ce problème. Ce théorème, dû à Carathéodory, établit l'équivalence entre l'existence d'une décomposition atomique, et des considérations de rang et de positivité d'une matrice Toeplitz formée à partir des mesures.

Le Chapitre 7 présente nos contributions à la super-résolution 2-D de lignes dégradées par

de la diffraction et du bruit. On commence par modéliser les lignes de l'image ainsi que les hypothèses portant sur l'opérateur de dégradation, afin que le passage de la formulation continue à la formulation discrète n'engendre pas d'approximation due à l'échantillonnage. Nous formulons ensuite le problème inverse auquel est soumis l'image des lignes dans le domaine de Fourier. Les contraintes qu'il convient d'adjoindre au problème inverse pour établir le problème d'optimisation à résoudre, doit promouvoir des lignes dans l'image solution. Nous caractérisons les lignes en nous ramenant, comme nous l'évoquons plus haut, à des considérations sur les lignes et les colonnes en terme de décomposition atomique 1-D. Le théorème de Carathéodory et une caractérisation de la norme atomique nous permettent d'aboutir à un problème d'optimisation convexe, que l'on résout au moyen d'algorithmes proximaux. Une procédure d'estimation spectrale des paramètres des lignes est réalisée sur la solution, et plusieurs expérimentations numériques sont menées pour rendre compte de l'efficacité, de la précision et des limites de la méthode.

Références

- BENASSI, A., S. JAFFARD et D. ROUX. 1997, «Elliptic Gaussian random processes.», *Revista matemática iberoamericana*, vol. 13, n° 1, p. 19–90. [13](#)
- BENHAMOU, C.-L., S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. OHLEY et L. POTHUAUD. 2001, «Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density : two complementary parameters related to osteoporotic fractures», *Journal of bone and mineral research*, vol. 16, n° 4, p. 697–704. [12](#)
- BIERMÉ, H., L. MOISAN et F. RICHARD. 2015, «A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 24, n° 3, p. 885–904. [13](#), [16](#)
- BIERMÉ, H., F. RICHARD, M. RACHIDI et C.-L. BENHAMOU. 2009, «Anisotropic texture modeling and applications to medical image analysis», dans *ESAIM : Proceedings*, vol. 26, EDP Sciences, p. 100–122. [13](#)
- BONAMI, A. et A. ESTRADÉ. 2003, «Anisotropic analysis of some Gaussian models», *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 9, n° 3, p. 215–236. [13](#), [16](#)
- BRUNET-IMBAULT, B., G. LEMINEUR, C. CHAPPARD, R. HARBA et C.-L. BENHAMOU. 2005, «A new anisotropy index on trabecular bone radiographic images using the fast Fourier transform», *BMC medical imaging*, vol. 5, n° 1, p. 4. [12](#)
- BÜLOW, T. 1999, *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*, Universität Kiel. Institut für Informatik und Praktische Mathematik. [14](#)
- CALDWELL, C. B., S. J. STAPLETON, D. W. HOLDSWORTH, R. A. JONG, W. J. WEISER, G. COOKE et M. J. YAFFE. 1990, «Characterisation of mammographic parenchymal pattern by fractal dimension», *Physics in medicine and biology*, vol. 35, n° 2, p. 235. [12](#)
- CANDÈS, E. J. et C. FERNANDEZ-GRANDA. 2014, «Towards a mathematical theory of super-resolution», *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, n° 6, p. 906–956. [15](#)
- CANDÈS, E. J., J. ROMBERG et T. TAO. 2006, «Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information», *IEEE Transactions on information theory*, vol. 52, n° 2, p. 489–509. [15](#)

- CANDÈS, E. J. et M. B. WAKIN. 2008, «An introduction to compressive sampling», *IEEE signal processing magazine*, vol. 25, n° 2, p. 21–30. [15](#)
- CHANDRASEKARAN, V., B. RECHT, P. A. PARRILO et A. S. WILLSKY. 2012, «The convex geometry of linear inverse problems», *Foundations of Computational mathematics*, vol. 12, n° 6, p. 805–849. [17](#)
- CHAPPARD, C., B. BRUNET-IMBAULT, G. LEMINEUR, B. GIRAUDEAU, A. BASILLAIS, R. HARBA et C.-L. BENHAMOU. 2005, «Anisotropy changes in post-menopausal osteoporosis : characterization by a new index applied to trabecular bone radiographic images», *Osteoporosis international*, vol. 16, n° 10, p. 1193–1202. [12](#)
- CHEN, C., P. MARZILIANO et A. C. KOT. 2012a, «2D finite rate of innovation reconstruction method for step edge and polygon signals in the presence of noise», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, n° 6, p. 2851–2859. [16](#)
- CHEN, C., P. MARZILIANO et A. C. KOT. 2012b, «Step-edge reconstruction using 2D finite rate of innovation principle», dans *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 3833–3836. [16](#)
- COMBETTES, P. L. et J.-C. PESQUET. 2011, «Proximal splitting methods in signal processing», dans *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*, Springer, p. 185–212. [16](#)
- FALCONER, K. J. 2002, «Tangent fields and the local structure of random fields», *Journal of Theoretical Probability*, vol. 15, n° 3, p. 731–750. [13](#)
- FALCONER, K. J. 2003, «The local structure of random processes», *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 67, n° 3, p. 657–672. [13](#)
- FATEMI, M., A. AMINI et M. VETTERLI. 2016, «Sampling and reconstruction of shapes with algebraic boundaries», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, n° 22, p. 5807–5818. [16](#)
- FELSBERG, M. 2002, «Low-level image processing with the structure multivector», . [14](#)
- FELSBERG, M. et G. SOMMER. 2001, «The monogenic signal», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, n° 12, p. 3136–3144. [14](#)
- GUYON, X. et O. PERRIN. 2000, «Identification of space deformation using linear and superficial quadratic variations», *Statistics & probability letters*, vol. 47, n° 3, p. 307–316. [13](#)
- HARBA, R., G. JACQUET, R. JENNANE, T. LOUSSOT, C. BENHAMOU, E. LESPESSAILLES et D. TOURLIÈRE. 1994, «Determination of fractal scales on trabecular bone x-ray images», *Fractals*, vol. 2, n° 03, p. 451–456. [12](#)
- KAMONT, A. 1995, «On the fractional anisotropic Wiener field», *Probability and Mathematical Statistics-PWN*, vol. 16, n° 1, p. 85–98. [13](#)
- KOLMOGOROV, A. N. 1940, «The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space», dans *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 26, p. 115–118. [12](#)
- MANDELBROT, B. B. et J. W. VAN NESS. 1968, «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», *SIAM review*, vol. 10, n° 4, p. 422–437. [12](#)

- MARDIA, K. V. et P. E. JUPP. 2009, *Directional statistics*, vol. 494, John Wiley & Sons. [15](#)
- OLHEDE, S. C. et G. METIKAS. 2009, «The monogenic wavelet transform», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, n° 9, p. 3426–3441. [14](#), [17](#)
- OLHEDE, S. C., D. RAMÍREZ et P. J. SCHREIER. 2014, «Detecting directionality in random fields using the monogenic signal», *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 60, n° 10, p. 6491–6510. [14](#)
- ONGIE, G. et M. JACOB. 2015, «Super-resolution MRI using finite rate of innovation curves», dans *Biomedical Imaging (ISBI), 2015 IEEE 12th International Symposium on*, IEEE, p. 1248–1251. [16](#)
- PAN, H. 2014, «Robust parametric signal estimations», . [16](#)
- PAN, H., T. BLU et P. L. DRAGOTTI. 2014, «Sampling curves with finite rate of innovation», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, n° 2, p. 458–471. [16](#)
- PAN, H., T. BLU et M. VETTERLI. 2015, «Annihilation-driven localised image edge models», dans *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2015 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 5977–5981. [16](#)
- PAN, H., T. BLU et M. VETTERLI. 2017, «Towards generalized FRI sampling with an application to source resolution in radioastronomy», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, n° 4, p. 821–835. [16](#)
- PELTIER, R.-F. et J. L. VÉHEL. 1995, *Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results*, thèse de doctorat, INRIA. [13](#)
- PERRIN, O. et R. SENOUSI. 1999, «Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation», *Statistics & Probability Letters*, vol. 43, n° 4, p. 393–397. [13](#)
- PERRIN, O. et R. SENOUSI. 2000, «Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation», *Statistics & probability letters*, vol. 48, n° 1, p. 23–32. [13](#)
- RICHARD, F. et H. BIERME. 2010, «Statistical tests of anisotropy for fractional Brownian textures. application to full-field digital mammography», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 36, n° 3, p. 227–240. [13](#)
- STEIN, M. L. 2002, «Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 11, n° 3, p. 587–599. [13](#)
- STROHMER, T. 2012, «Measure what should be measured : progress and challenges in compressive sensing», *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 19, n° 12, p. 887–893. [16](#)
- UNSER, M., D. SAGE et D. VAN DE VILLE. 2009, «Multiresolution monogenic signal analysis using the Riesz–Laplace wavelet transform», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, n° 11, p. 2402–2418. [14](#), [17](#)
- YAGLOM, A. M. 1957, «Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes», *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 2, n° 3, p. 273–320. [13](#)

Première partie

Modélisation de textures aléatoires anisotropes

1

Outils mathématiques pour la modélisation aléatoire

« *Le hasard est le plus grand romancier du monde :
Pour être fécond, il n'y a plus qu'à l'étudier.* »

Balzac, *La comédie humaine* (1842)

QU'IL S'AGISSE DU HASARD dans ce qu'il révèle au détour de découvertes fortuites, ou comme concours de circonstances produisant des rencontres prolifiques, il est indéniable que l'un et l'autre ont joué un rôle fondamental dans l'émergence de la discipline des probabilités, en tant qu'étude systématique de l'imprévisibilité de certains phénomènes. Le mouvement brownien en a tout le sel de la sérendipité. Débutant avec la botanique, il va prendre en quelques décennies une dimension mathématique incroyable, et s'immiscer dans toutes les branches scientifiques, en se ramifiant telle une fractale pour mieux nous en faire percevoir les contours et les connexions. Aujourd'hui les probabilités s'invitent partout, dans des domaines aussi variés que la météorologie, la chimie ou la finance.

Toutefois il n'en a pas toujours été ainsi, l'étude de l'incertitude n'ayant pas de toute époque reçue la considération qu'elle méritait, le hasard a pourrait-on dire, été lentement apprivoisé. De Bernoulli et Moivre au XVIII^e siècle, jusqu'à l'axiomatisation de Kolmogorov dans les années 1930, ayant donné lieu à la théorie des probabilités telle qu'on la connaît aujourd'hui, il s'est succédé pléthore de grands noms des mathématiques trouvant leur place dans la formalisation des réflexions sur l'aléa. On se propose en début de ce chapitre de retracer dans les grandes lignes la genèse de ces idées dans la période fin XIX^e - début du XX^e siècle, où celles-ci ont connu une phase d'accélération considérable avec la découverte et l'étude du mouvement brownien.

Le lecteur reconnaîtra dans l'angle de vue adopté, la marque du récit que livre Jean-Pierre Kahane au sujet de cet objet mathématique fascinant. Il fait partie de ces mathématiciens qui savent transmettre leur passion des mathématiques, en faisant vivre son histoire, ce processus à mémoire longue, à travers les trajectoires et les réalisations de ses protagonistes. Décédé au moment où j'écris ces lignes, retracer l'histoire et épouser sa vision esthétique de l'hélice brownienne qu'il affectionne, sera une manière de lui rendre hommage. Après cette introduction seront développés les concepts mathématiques définissant rigoureusement le mouvement brownien, ainsi que d'autres résultats classiques inhérents à ce que l'on appelle communément les *processus stochastiques*, et qui nous permettront de modéliser des textures aléatoires.

1.1 Historique du mouvement brownien

1.1.1 Un phénomène de la biologie déterminant pour la physique

En 1828, le botaniste Robert Brown rapporte dans un célèbre article ([BROWN, 1928](#)) ses observations au microscope portant sur des grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord américaine) en suspension sur l'eau. Il s'aperçoit qu'à l'intérieur des grains de pollen, de petites particules subissent un mouvement erratique et perpétuel. D'autres avant lui, notamment des naturalistes du XVIII^e siècle, avaient remarqué cette agitation chaotique de substances organiques placées dans un fluide, mais en attribuaient la cause à une origine vitale. Le mérite de Brown fut d'établir une étude systématique du mouvement, en multipliant les observations à partir d'autres plantes mais aussi de plantes mortes et autres substances inorganiques, et de constater que ce mouvement incessant restait visible quelle que soit la nature de la substance à condition qu'elle soit broyée suffisamment finement. Ces résultats lui permirent d'exclure l'hypothèse vitaliste en vogue à cette époque. Brown alla plus loin en évacuant également les hypothèses d'influences extérieures (courants d'air ou éclairage échauffant le fluide), qui ne lui semblaient pas pertinentes à la vue du comportement si désordonné des particules et du fait qu'une simple particule continuait de s'agiter dans une goutte d'eau isolée dans de l'huile.

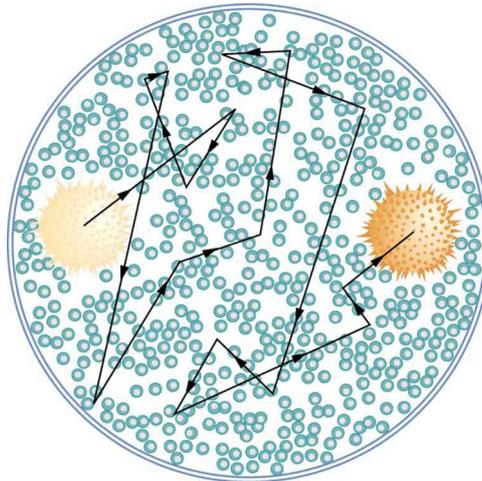


FIGURE 1.1 – Illustration du mouvement brownien d'une particule de pollen¹.

À partir de ces résultats, Brown et ses successeurs ne cherchaient plus à attribuer le mouvement désordonné aux grains eux-mêmes ou à des éléments extérieurs, mais en recherchaient l'explication en faveur d'une cause propre à l'état du fluide dans lequel baignent les grains. L'apport du biologiste a été de sortir le phénomène de la biologie. Le relai était passé aux physiciens et mathématiciens, parmi lesquels Christian Wiener, qui en 1863 réaffirma l'intuition de Brown, mais la justifia par l'hypothèse de vibration de l'éther, non encore démentie à cette date, qu'il relia à la longueur d'onde de la lumière rouge et la taille du plus petit groupe de molécules présent au sein du fluide. Cette hypothèse fut écartée par Mead Bache qui montra que le mouvement était insensible à la couleur de la lumière, que celle-ci fût violette ou rouge. Néanmoins cette piste suggéra que ce sont les molécules du liquide, en perpétuelle agitation,

1. Crédits : openstax College physics <http://cnx.org/content/col11406/1.7>, Chap. 30 « Atomic Physics », licence Creative Commons .

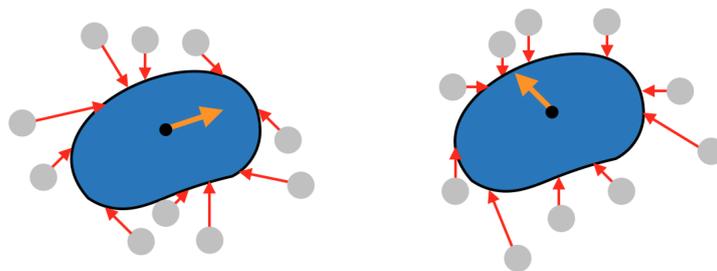


FIGURE 1.2 – Particule (en bleu) subissant à deux instants successifs un déplacement dont la direction est donnée par la résultante (en orange) des forces exercées (en rouge) par les molécules qui la bombardent (en gris).

qui bombardent les grains et les fait se mouvoir de manière erratique, dans une direction puis une autre, au cours du temps.

Seulement de nombreuses objections furent soulevées : d'une part si les molécules qui bombardent sont très nombreuses et agissent de tous les côtés, les collisions sur les particules devraient se compenser et laisser cette dernière immobile. D'autre part si le mouvement ne s'expliquait par aucune cause extérieure, sa persistance était étrange puisqu'en raison des frottements l'énergie cinétique devait se convertir en chaleur et mettre fin au mouvement... Et le fluide n'est pas capable de s'auto-alimenter en transformant son énergie thermique en mouvement donc en travail, en vertu du principe de Carnot. Enfin si le mouvement brownien était bien le reflet de l'agitation des molécules du liquide, alors la théorie cinétique prévoit que l'énergie cinétique moyenne des grains devrait être égale à l'énergie cinétique moyenne des molécules, elle-même proportionnelle à la température : $\frac{3}{2}k_B T^2$. En principe il suffisait de mesurer la vitesse d'une particule au cours du temps. Or ces mesures de vitesses instantanées donnèrent des facteurs d'ordre 100 000 entre les vitesses mesurées par les expérimentateurs, très variées et dispersées, et la valeur prévue par la théorie.

La première objection fut levée à partir de la thermodynamique de Boltzmann et les lois de la statistique, qui se résume par cette citation de Carbonelle :

“ Dans le cas d'une surface ayant une certaine étendue, disent-ils, les chocs moléculaires du liquide, cause de la pression, ne produiront aucun ébranlement du corps suspendu, parce que leur ensemble sollicite également ce corps dans toutes les directions. Mais si la surface est inférieure à l'étendue capable d'assurer la compensation des irrégularités, il n'y a plus lieu de considérer la pression moyenne, il faut reconnaître des pressions inégales et continuellement variables de place en place, que la loi des grands nombres ne ramènera plus à l'uniformité, et dont la résultante ne sera plus nulle, mais changera continuellement d'intensité et de direction. De plus, les inégalités deviendront de plus en plus apparentes à mesure qu'on supposera le corps plus petit, et par suite les oscillations deviendront en même temps de plus en plus vives... ”

Dès lors, déclare Jean Perrin dans son incontournable livre *Les Atomes*, « il est difficile de ne pas penser que ces particules servent simplement à révéler une agitation interne du fluide, et ceci d'autant mieux que qu'elles sont plus petites, de même qu'un bouchon suit mieux qu'un grand bateau les mouvements des vagues de la mer. [...] L'agitation moléculaire échappe à notre perception directe comme le mouvement des vagues de la mer à un observateur trop éloigné. Cependant si quelque bateau se trouve alors en vue, le même observateur pourra voir un balancement qui lui révélera l'agitation qu'il ne soupçonnait pas. ». Cédric Villani résumera à son tour dans sa préface du livre réédité (PERRIN, 2014) :

2. k_B est la constante de Boltzmann prévue dans sa théorie cinétique des gaz à l'équilibre, théorie qui à l'époque n'était pas acceptée par toute la communauté scientifique.

“ Ce que l’on observe avec le mouvement brownien, ce ne sont pas les mouvements erratiques directement, mais les conséquences de ces mouvements erratiques, et le fait que, de temps en temps, les petites molécules vont bombarder la grosse un peu trop dans un certain sens, ou un peu trop dans un autre, par fluctuation statistique. De la même façon que lorsque vous jetez une pièce en l’air un million de fois, vous aurez parfois une suite de cent face qui sortira, parfois une suite de cent pile : lorsque vous avez ces fluctuations, vous les voyez venir, vous pouvez les observer sur cette particule. Point très important : si cela se manifeste sous l’effet de déviation d’évènements rares (qui se répètent dans le même sens), cela sera soumis à cette loi universelle qu’est la distribution gaussienne. ”

Enfin, conclut Perrin, levant la seconde objection :

“ L’équilibre n’existe que de façon moyenne et pour de grandes masses, c’est un équilibre statistique. En réalité tout fluide s’agite indéfiniment et *spontanément* [...] sans cause extérieure. Il est clair que cette agitation n’est pas en contradiction avec la principe de conservation de l’énergie. Il suffit que tout accroissement de vitesse d’un grain s’accompagne d’un refroidissement du fluide en son voisinage immédiat, et de même que toute diminution de vitesse s’accompagne d’un échauffement local, nous apercevons simplement que l’équilibre thermique n’est, lui aussi, qu’un équilibre statistique. Mais on doit observer, que le mouvement brownien, réalité indiscutable, donne la certitude expérimentale aux conclusions par lesquelles Maxwell, Gibbs et Boltzmann, l’ont réduit à exprimer seulement une haute probabilité. ”

En effet, autant une particule peut de temps à autre s’élever spontanément, transformant en travail une partie de la chaleur du milieu ambiant, puisque soumise à ces fluctuations statistiques ; autant imaginer soulever une brique de 1 kg sous l’effet de ces fluctuations, c’est-à-dire attendre qu’un nombre colossal de molécules viennent toutes frapper dans le même sens pour déplacer cette aussi grande masse, a une probabilité tellement insignifiante de se produire que l’on peut affirmer qu’à notre échelle de grandeur et de durée le principe de Carnot ne s’en trouve pas atteint³. Il serait déraisonnable de compter sur le mouvement brownien pour élever des pierres destinées à construire une maison.

Une fois compris les causes physiques de la « danse de la saint-guy dont sont atteintes (sic) les monades que le microscope fait apercevoir dans une goutte d’eau » (dixit Balzac en 1835)⁴, il restait à élucider la troisième objection, c’est-à-dire comprendre pourquoi les vitesses des molécules ne suivaient pas les prédictions de la théorie cinétique. C’est ce qu’élucida Einstein au point de rencontre de ses travaux autour de la thermodynamique, la théorie cinétique et la mécanique statistique.

3. Pour réellement démontrer que le mouvement brownien ne contrevient pas à l’impossibilité de fabriquer un mouvement perpétuel dit de seconde espèce (rappelant le démon de Maxwell), il a fallu attendre les travaux de Szilard en 1929, montrant qu’une telle tentative, par l’information qu’elle requiert, s’accompagnerait d’une production d’entropie de mesure compensant la réduction d’entropie apparente due à l’utilisation cohérente des fluctuations (DUPLANTIER, 2005).

4. Balzac fait ainsi mention de la découverte de Brown dont il est un contemporain. Il est sensible à la métaphysique de Leibniz qui développe sa conception de *monades* (ces atomes de la nature) et d’individualité. Il reprendra à son compte ces représentations dans la *La fille aux yeux d’or*, la citation complète étant celle-ci : « Certains niais s’étonnent de la danse de saint-guy dont sont atteintes (sic) les monades que le microscope fait apercevoir dans une goutte d’eau, mais que dirait ce géant tombé des sphères célestes, s’il s’amuserait à contempler le mouvement de... cette vie parisienne... ». Il est amusant de constater que certaines découvertes scientifiques, avant d’irriguer les autres disciplines voisines, font parfois des détours par les sciences sociales, comme ce fut le cas pour la distribution gaussienne découverte par Moivre, et popularisée par Quetelet en 1846 en l’appliquant à la prédiction du nombre de crimes dans une ville, ce qui soulevait des questions philosophiques difficiles comme celle du libre-arbitre. D’ailleurs, étymologiquement, le mot statistique est dérivé de l’italien *statista* (homme d’État, statiste), et représentait pour certains de l’époque l’ensemble des connaissances que devaient posséder un homme d’État.

1.1.2 Travaux d'Einstein sur les mouvements moléculaires

En 1905, l'année miraculeuse de la physique au cours de laquelle Einstein jeta les bases de la théorie de la relativité et découvrit la raison de l'effet photoélectrique en revenant à la conception corpusculaire de la matière, celui-ci publia également trois articles (EINSTEIN, 1905, 1906a,b) sur les équations du mouvement brownien qui allait résoudre le paradoxe de la dispersion des vitesses des molécules observées et faire triompher la vision atomiste de la matière. Le premier article est une invitation aux expérimentateurs : il s'agit de tester si la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, énoncée pour les gaz par Boltzmann, s'applique aux liquides ; elle entraîne un mouvement de particules en suspension qui doit être observable. Entre le premier et le second article il prend connaissance de l'existence du mouvement brownien. Dans le second il avance que de nouvelles expériences doivent permettre de mesurer la taille des molécules, c'est-à-dire de calculer le nombre d'Avogadro, le nombre de molécules réelles dans une mole de liquide. Enfin le dernier reprend l'étude en partant du mouvement brownien.

Sa démonstration repose sur deux théories en apparence contradictoires. D'une part une représentation continue du milieu liquide, dites *hydrodynamique*, pour expliquer le mouvement de particules en suspension de taille très supérieure à celle des molécules du liquide, s'appuyant sur la fameuse « formule de Stokes », qui donne la force de friction s'opposant au mouvement d'une sphère dans un liquide. Et d'autre part une théorie cinétique de la chaleur corpusculaire appliquée aux gaz, qu'il s'agissait de transposer aux liquides, s'appuyant cette fois sur la notion essentielle de *pression osmotique*, développée par Van't Hoff, et qui permit à Einstein d'opérer ce mariage étonnant. On renvoie le lecteur au très bon article (DUPLANTIER, 2005) pour un exposé des étapes de la démonstration physique et de la genèse historique. L'essentiel réside dans la formule suivante :

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\mu a} \tau, \quad (1.1)$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro, μ la viscosité du liquide, a le rayon de la particule, supposée sphérique, τ le temps correspondant au déplacement Δx , et $\overline{(\Delta x)^2}$ est la moyenne du carré des déplacements, dans une direction donnée, d'un grand nombre de particules pendant un intervalle de temps donné, de durée τ .

La formule exprime un fait curieux : en moyenne, ce ne sont pas les déplacements, mais leurs carrés, qui sont proportionnels au temps écoulé. Rappelons que pour mesurer ces vitesses, les expérimentateurs divisaient naturellement les déplacements effectués par les grains, par les durées respectives et s'attendaient à trouver des valeurs qui s'approchent de la vitesse théorique prédite par la théorie cinétique. Cela aurait été le cas si les déplacements étaient proportionnels à la durée. Or Einstein venait de montrer qu'il n'en était rien : la vitesse calculée en divisant le déplacement observé par sa durée est inversement proportionnelle à la racine carrée de la durée, et croît donc indéfiniment lorsque l'intervalle de temps devient plus court. Ainsi toute tentative de mesurer la vitesse instantanée de la particule conduisait à des résultats erratiques, ce qui explique les échecs répétés des expérimentateurs à obtenir des conclusions bien définies quant à la vitesse des particules en suspension, car ils ne mesuraient simplement pas la bonne quantité. La dernière objection était enfin levée, et grâce à la théorie du mouvement brownien d'Einstein, il devenait possible de tester la réalité des atomes et des molécules. En effet, si l'on connaît la taille des grains, la mesure des déplacements permet *via* la formule (1.1) d'accéder à la constante d'Avogadro R grâce à laquelle on détermine la taille des molécules.

La confirmation expérimentale fut menée par Jean Perrin et ses élèves, qui obtinrent par différentes expérimentations 13 valeurs d'estimation concordantes du nombre d'Avogadro⁵, et décrivent de façon éloquente l'extrême irrégularité des trajectoires des particules :

5. « On est saisi d'admiration devant le miracle de concordances aussi précises à partir de phénomènes

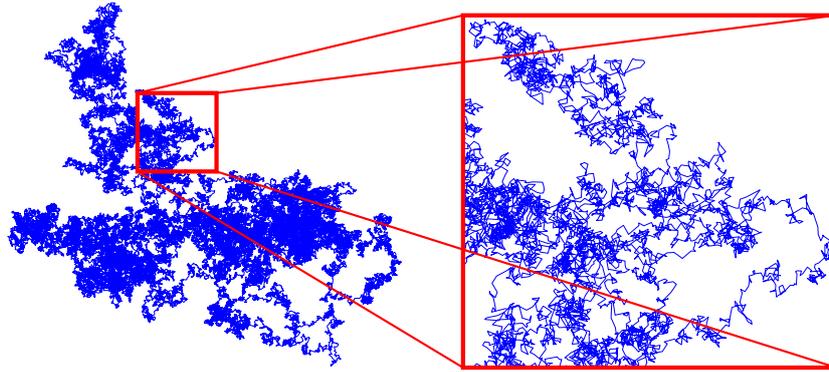


FIGURE 1.3 – Illustration du mouvement brownien 2-D $t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$.

“ On ne peut même plus fixer une tangente, même de façon approchée, à aucun point de la trajectoire, et c’est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l’on regarderait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque la nature les suggère aussi bien que les fonctions à dérivées. ”

Jean Perrin fit également la vérification d’un autre aspect de la théorie d’Einstein, à savoir la distribution gaussienne des déplacements horizontaux et verticaux autour de zéro, prévue par celle-ci à partir du processus de diffusion qui se dégageait de la mise en équation du mouvement des particules. Cette concentration autour de très petits déplacements témoigne de l’irrégularité des trajectoires comme on peut le voir sur la Figure 1.4 qui reproduit une marche aléatoire.

Récapitulons les principales caractéristiques du mouvement Brownien, empiriques (déjà en partie observées en 1888 par Gouy) et formalisées par la théorie d’Einstein :

La réalité physique du mouvement brownien

- (a) Les déplacements futurs sont indépendants du passé, ainsi deux particules browniennes, mêmes proches, ont des trajectoires indépendantes.
- (b) Les déplacements suivent une distribution gaussienne centrée sur $\Delta x = 0$ et dont la variance $\overline{(\Delta x)^2}$ (la moyenne du carré des déplacements dans une direction donnée) est proportionnelle à la durée de déplacement τ d’après la formule d’Einstein (1.1).
- (c) Le mouvement est extrêmement irrégulier, les trajectoires ne possèdent pas de tangente mais sont continues.

1.1.3 D’Einstein à Wiener : l’étude du mouvement brownien comme objet mathématique

Les caractéristiques mises en évidence du mouvement brownien définissaient un nouvel objet mathématique fourni par la nature, qui avait comme propriétés étranges non seulement de n’être dérivable nulle part, comme l’évoquait Jean Perrin en pensant à des fonctions mathématiques très irrégulières comme celle de Weierstrass, mais également d’avoir des accroissements

si différents. D’abord qu’on retrouve la même grandeur, pour chacune des méthodes, en variant autant que possible les conditions de son application, puis que les nombres ainsi définis sans ambiguïté par tant de méthodes coïncident, cela donne à la réalité moléculaire une vraisemblance bien voisine de la certitude. », Jean Perrin.

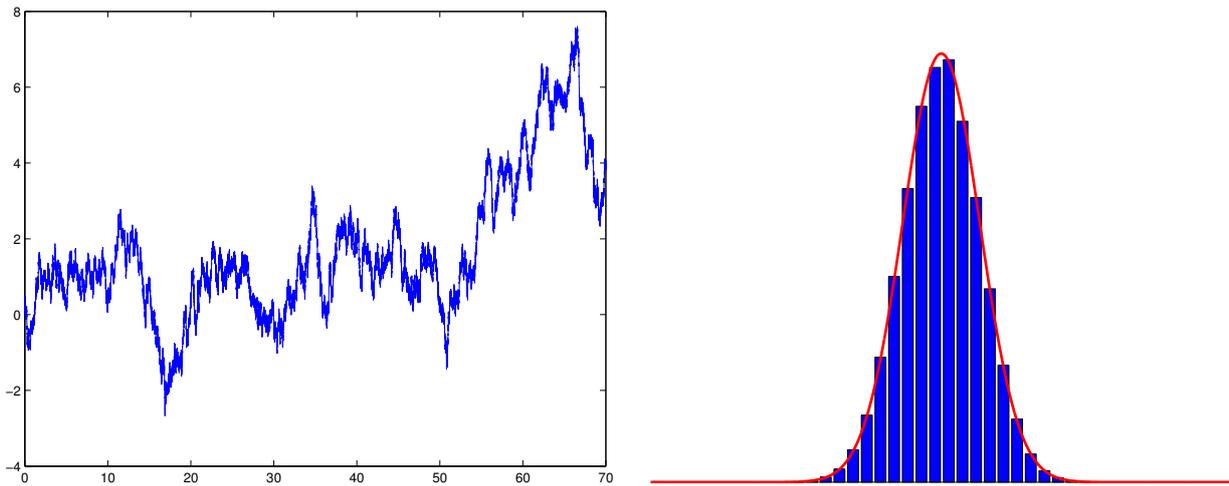


FIGURE 1.4 – Illustration du mouvement brownien 1-D $t \mapsto B_t^2$, projection sur l’axe des ordonnées du mouvement brownien plan de la Figure 1.3, et distribution gaussienne des accroissements.

indépendants qui suivent une loi gaussienne. L’objet mathématique en question, est un cas particulier de ce que l’on nomme aujourd’hui processus de Lévy, lui-même étant un cas particulier de [processus stationnaire à accroissements indépendants \(PAIS\)](#) (*cf.* section 1.2.5). Plus précisément si X_t désigne la position de la particule à l’instant t et la moyenne est désignée par l’espérance \mathbb{E} , alors les propriétés (a)-(b)-(c) précédentes répondent à la formalisation mathématique suivante :

- (a) $\forall s < t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma \{X_u, u \leq s\}$.
- (b) La loi de $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$ (en particulier la loi est gaussienne et caractérisée par $\mathbb{E}[X_t - X_s] = 0$ et $\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = t - s$).
- (c) $(X_t)_t$ est à trajectoires continues et $X_0 = 0$ p.s.

La question à l’époque était de savoir si un tel objet mathématique existait. Ce fut donc au tour des mathématiciens de se pencher sur le mouvement brownien, afin de lui donner une réalité mathématique, c’est-à-dire le définir sur le plan théorique et démontrer ses propriétés. Le mouvement brownien plan (2-D) de la particule observée ($t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$) *cf.* Figure 1.3 est isotrope, et les abscisses ont même comportement que les ordonnées. Ainsi il est commode de s’intéresser dans un premier temps à la construction du mouvement brownien 1-D, qui est une fonction aléatoire $t \mapsto X_t$ vérifiant les propriétés (a)-(b)-(c), puis de l’étendre au cas 2-D en prenant de manière indépendante un brownien 1-D sur chacune des composantes. L’idée, grosso modo, est que ce modèle doit être pour les fonctions ce que la variable aléatoire normale (gaussienne normalisée) est pour les nombres : « the fundamental random function ». En effet en mathématiques lorsque l’on parle d’objet aléatoire, cela signifie que l’on définit une mesure de probabilité sur l’ensemble de tous les objets possibles. Donc de même quand on parle de trajectoire aléatoire, cela présuppose que l’on met une mesure de probabilité sur l’ensemble de tous les chemins possibles. Le mouvement brownien peut donc être vu comme variable aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions continues, soit $\Omega \rightarrow C_0([0, 1], \mathbb{R})$. Cet espace de fonctions, noté aussi $\mathbf{W}(\mathbb{R})$, est l’espace dit de Wiener, du nom du mathématicien Norbert Wiener qui en 1923 a montré dans un article monumental ([WIENER, 1923](#)) que l’on peut définir une mesure de probabilité \mathbf{W} sur l’ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ nulles en 0 (qui représentent les trajectoires), la mesure de Wiener, telle que l’intégrale suivant cette mesure du carré du déplacement entre deux temps t et s soit $t - s$:

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = t - s, \quad (1.2)$$

qui est l'équation d'Einstein normalisée, et que de plus pour tout $s > 0$, les déplacements $X_t - X_s$ ($t > s$) sont indépendants de ce qui s'est passé avant s .

Nous présenterons l'élégante construction du mouvement brownien proposée par Wiener dans la section 1.4. Au préalable, nous commençons par quelques rappels autour de notions fondamentales dont nous aurons besoin dans toute la suite de cette thèse.

1.2 Généralités sur les processus stochastiques

1.2.1 Définition d'un processus stochastique

Les processus stochastiques apparaissent naturellement dans de nombreuses situations où l'on cherche à modéliser des phénomènes aléatoires dépendant du temps :

Définition 1.1 (PROCESSUS STOCHASTIQUE)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus stochastique X indexé par T et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) est une famille d'applications mesurables notée $(X_t)_{t \in T}$ ou $\{X(t)\}_{t \in T}$, où les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) appelé espace des états.

L'ensemble des observations disponibles $x(t)$, constitue une *réalisation* du processus. Un processus stochastique dépend donc à la fois du temps et du hasard, c'est donc une application :

$$\begin{aligned} X &: T \times \Omega \longrightarrow E \\ (t, \omega) &\longmapsto X(t, \omega) \end{aligned} .$$

On peut alors se représenter le processus de deux façons, illustrées par la Figure 1.5 :

- Pour t fixé, l'état du système est une variable aléatoire $\omega \mapsto X(t, \omega)$ désignée par X_t .
- Pour ω fixé, c'est-à-dire pour une évolution particulière du système, les états successifs sont représentés par la fonction $t \mapsto X(t, \omega)$ qui est donc une *trajectoire* ou *réalisation* (décrivant par exemple la position d'une particule).

Vocabulaire :

- Si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$, on dit que X est une *suite aléatoire*.
- Si $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{R}^+$, on dit que X est une *fonction aléatoire*.
- Si $T = \mathbb{Z}^d$ ou $T = \mathbb{R}^d$, on dit que X est un *champ aléatoire*.
- Si T est fini, X est simplement un *vecteur aléatoire*.

Exemple 1.1. On s'intéresse au déplacement dans l'espace d'une particule ponctuelle soumise à des perturbations aléatoires, qui dépend donc bien à la fois du temps et du hasard. Si on se limite à l'intervalle de temps $T = [0, 1]$, l'ensemble naturel des éventualités est $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^3)$: un élément de $\omega \in \Omega$, une trajectoire possible, est une fonction continue $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Comme l'espace dans lequel vit la particule est \mathbb{R}^3 on a $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}^3 . La tribu \mathcal{F} sur Ω est alors la plus petite tribu qui rende mesurables toutes les applications coordonnées :

$$\begin{aligned} E^T = C([0, 1], \mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \omega(t) \end{aligned} .$$

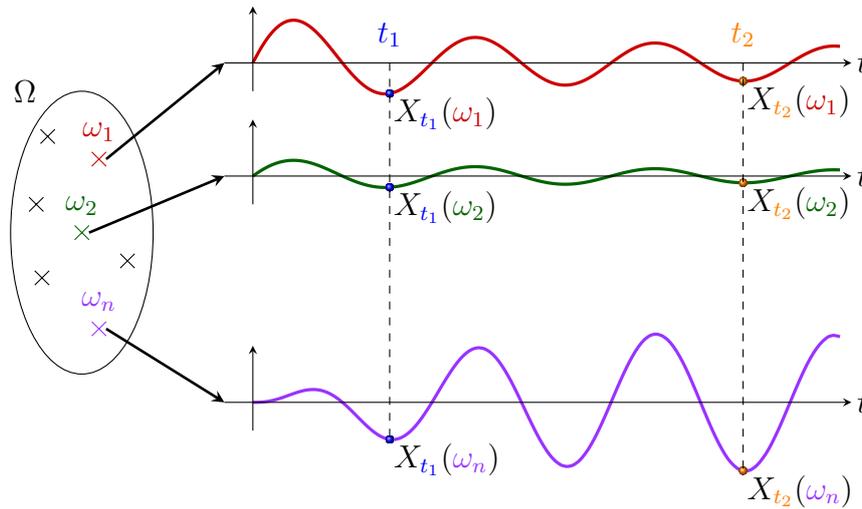


FIGURE 1.5 – Illustration d'un processus aléatoire

Il resterait à construire la probabilité \mathbb{P} , pour laquelle de multiples choix sont possibles. L'exemple le plus important à la fois du point de vue théorique et pour les applications, est la mesure de Wiener, qui est la loi du mouvement Brownien que nous aborderons dans la section 1.4.9. Nous commençons dans la section suivante par définir ce qu'est la loi d'un processus stochastique.

Notons à cet effet qu'il y a également deux manières de considérer un processus stochastique X dans sa forme abstraite $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ (c'est-à-dire sans fixer l'une ou l'autre des variables), à savoir :

- En voyant X comme un arc paramétré par t dans un ensemble de variables aléatoires \mathbb{V} définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) :

$$X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{V} \\ t \longmapsto [\omega \mapsto X(t, \omega)] \quad .$$

- Ou bien en voyant X elle-même comme une « variable aléatoire »⁶ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace de fonctions E^T des applications de T dans E :

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow E^T \\ \omega \longmapsto [t \mapsto X(t, \omega)] \quad .$$

C'est cette dernière représentation qui sera utilisée pour définir la loi du processus.

1.2.2 Lois des processus stochastiques

On se donne un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ dont les X_t sont définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , qu'on voit comme une « variable aléatoire » à valeurs dans un espace de fonctions :

$$X : \Omega \longrightarrow E^T \\ \omega \longmapsto (X_t(\omega))_{t \in T} \quad ,$$

où E^T désignant l'ensemble des applications de T dans E .

Cependant pour mériter le qualificatif de variable aléatoire l'application X doit être mesurable,

6. Les guillemets peuvent être enlevés à condition de vérifier que l'espace d'état est muni d'une tribu qui rend l'application effectivement mesurable.

donc il faut munir E^T d'une tribu qui la rende mesurable. Ceci est toujours possible en considérant la tribu produit $\mathcal{E}^T \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}$, tribu engendrée par les cylindres mesurables de dimension finie, c.-à-d. les sous-ensembles \mathcal{C} de E^T de la forme

$$C = \prod_{t \in T} C_t, \forall t \in T, \text{ avec } C_t \in \mathcal{E} \text{ et } \text{Card}\{t : C_t \neq E\} < \infty .$$

On note aussi $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}^T$, la tribu canonique, qui est de manière équivalente la plus petite tribu qui rende mesurable les applications coordonnées $\pi_t : \omega \mapsto X_t(\omega)$. Il est alors aisé de vérifier que $\omega \mapsto (X_t(\omega))_{t \in T}$ est mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans (E^T, \mathcal{E}^T) . On peut alors définir la loi de X comme suit :

Définition 1.2 (LOI D'UN PROCESSUS STOCHASTIQUE)

Soit un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . On appelle loi du processus stochastique X , la mesure image \mathbb{P}_X de \mathbb{P} par X , mesure sur l'espace produit (E^T, \mathcal{E}^T) , c.-à-d. :

$$\forall A \in \mathcal{E}^T, \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) .$$

Puisque la classe \mathcal{C} des cylindres engende la tribu produit, et est stable par intersection, le théorème de classes monotones assure que la probabilité est déterminée par ses valeurs sur cette classe. Pour un élément $C \in \mathcal{C}$, il y a un nombre fini de valeurs t_1, \dots, t_n telles que $C_t \neq E$, et donc la probabilité $\mathbb{P}_X(C)$ est déterminée par $\mathbb{P}_X(C) = \mathbb{P}[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in C_{t_1} \times \dots \times C_{t_n}]$:

Proposition 1.1 (LOIS FINIES DIMENSIONNELLES)

Soit un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . La loi de X est entièrement déterminée par les lois des sous-vecteurs aléatoires finis $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, c'est-à-dire par les $(\mathbb{P}_{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout n -uplets $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$.

Vocabulaire. On appelle autrement ces lois des sous-vecteurs les *lois finies dimensionnelles*, *lois conjointes* ou encore *lois marginales*.

Définition 1.3 (PROCESSUS ÉGAUX EN LOI)

Si deux processus stochastiques $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ (éventuellement définis sur des espaces probabilisés différents) sont tels que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ a même loi que $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ pour tout n et tout $t_i \in T$, alors d'après la Proposition 1.1 ils ont même loi. On notera⁷

$$X \stackrel{\text{(fdd)}}{=} Y .$$

Donnons un exemple d'une classe de processus importante dans laquelle nos futurs modèles seront construits :

Définition 1.4 (PROCESSUS GAUSSIENS)

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien, si tout sous-vecteur fini $X_S = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ($S = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$) est un vecteur gaussien, c.-à-d. tel que toute

7. (fdd) pour *finite dimensional distribution*, on trouve aussi parfois la notation $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne.

Remarque 1.1. Les lois finies dimensionnelles d'un processus gaussien sont donc des lois de vecteurs gaussiens $\mathcal{N}(\mathbf{m}_S, \Sigma_S)$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f_{\mathbf{m}_S, \Sigma_S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma_S}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_S)^\top \Sigma_S^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_S)}{2}\right). \quad (1.3)$$

Un processus gaussien est donc caractérisé par sa fonction moyenne $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et sa fonction de covariance $\mathbf{R}(s, t) = \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$ qui est symétrique, et telle que pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la matrice $\Sigma_{i,j} = \mathbf{R}(t_i, t_j)$ est positive, en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbf{R}(t_i, t_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbb{E}[(X_{t_i} - m(t_i))(X_{t_j} - m(t_j))] , \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_{t_i} - m(t_i)) \right)^2 \right] \geq 0 . \end{aligned} \quad (1.4)$$

La probabilité P_X sur \mathcal{E}^T est déterminée par les lois finies dimensionnelles. Réciproquement :

Proposition 1.2 (PROCESSUS CANONIQUE)

Pour toute loi de probabilité \mathbb{P}' sur (E^T, \mathcal{E}^T) , il existe un processus correspondant, dit canonique, de loi \mathbb{P}' .

L'inconvénient avec la tribu produit (ou tribu canonique) \mathcal{E}^T , est qu'elle n'est pas assez riche pour rendre mesurables certains évènements dont on aimerait pourtant pouvoir calculer la probabilité, comme par exemple pour $T = [0, 1]$ et $E = \mathbb{R}$:

$$A = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{t \in [0, 1]} f(t) < 1 \right\} \notin \mathcal{E}^T, \quad B = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \exists t \in [0, 1], f(t) = 0 \right\} \notin \mathcal{E}^T, \quad (1.5)$$

du fait que l'ensemble E^T des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} duquel on est parti est bien trop gros. Par ailleurs dans beaucoup de phénomènes aléatoires que l'on veut étudier, les trajectoires (ou réalisations) du processus $t \mapsto X(t, \omega)$ pour ω donné, sont continues (comme par exemple le déplacement d'une particule) :

Définition 1.5 (PROCESSUS STOCHASTIQUE CONTINU)

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique indexé par T et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . X est un processus stochastique continu si ses trajectoires $t \mapsto X(t, \omega)$ sont continues presque sûrement⁸.

Autrement dit la « variable aléatoire » $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$ est à valeurs dans l'ensemble des applications continues de T dans E , noté $\mathcal{C}(T, E)$. Mais pour qu'elle soit véritablement une variable aléatoire, il faut munir cet ensemble d'une tribu convenable. Or si on considère E séparable $\mathcal{C}(T, E)$ possède une topologie naturelle associée à la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ si T est compact, ou à la distance suivante sinon

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min\left(\sup_{0 \leq t \leq n} |f(t) - g(t)|, 1\right). \quad (1.6)$$

8. Pour tout $\omega \in \Omega$ sauf éventuellement un ensemble de mesure nulle.

Cette distance définit une famille d'ouverts et donc une tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$. On vérifie par exemple que sur $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de cette tribu borélienne on a

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0, \sup_{t \in [0, 1]} f(t) < 1 \right\} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}), \quad B = \left\{ f \in \mathcal{C}^0, \exists t \in [0, 1], f(t) = 0 \right\} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}). \quad (1.7)$$

On dispose alors de ce résultat :

Proposition 1.3 (MESURABILITÉ D'UN PROCESSUS STOCHASTIQUE CONTINU)

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique continu. Alors $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$ est mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans $(\mathcal{C}(T, E), \mathcal{B}(\mathcal{C}))$.

Preuve :

Il s'agit de montrer qu'avec la base d'ouverts mentionnés, la trace⁹ de la tribu produit \mathcal{E}^T sur $\mathcal{C}(T, E)$ coïncide avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, ce qui entraîne la mesurabilité :

(i) Montrons que $\mathcal{E}^T \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$: pour tout t , $f \mapsto f(t)$ de \mathcal{C} dans \mathbb{R} est continue puisque lipschitzienne de rapport 1 (en effet on a bien $|f(t) - g(t)| \leq \|f - g\|_\infty$), donc mesurable. Comme \mathcal{E}^T est la plus petite tribu rendant les applications coordonnées mesurables, on a l'inclusion souhaitée.

(ii) Réciproquement, la tribu borélienne est engendrée par les ouverts, donc comme \mathcal{C} est séparable, elle est engendrée par les boules ouvertes, ou encore par les boules fermées. Or toute boule fermée $B(f, \epsilon)$ s'écrit

$$\begin{aligned} B(f, \epsilon) &= \bigcap_{t \in T} \{g \in \mathcal{C} : |f(t) - g(t)| \leq \epsilon\}, \\ &= \bigcap_{n > 0} \bigcap_{T \cap \mathbb{Q}} \left\{ g \in \mathcal{C} : |f(t) - g(t)| \leq \epsilon + \frac{1}{n} \right\}, \end{aligned}$$

par continuité de f et g . Ce qui montre que les boules fermées sont dans la tribu produit \mathcal{E}^T . □

Ainsi on peut énoncer une nouvelle définition de la loi d'un processus stochastique continu, en transportant la mesure par cette variable aléatoire :

Définition 1.6 (LOI D'UN PROCESSUS STOCHASTIQUE CONTINU)

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique indexé par T et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , à trajectoires p.s. continues. La loi du processus à trajectoires p.s. continues est la mesure image de \mathbb{P} par X sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}(T, E)$.

Remarque 1.2. Si on dispose d'un processus stochastique à trajectoires p.s. continues, la mesure image par ce processus définit de fait une mesure sur l'espace des fonctions continues. Par conséquent si on arrive à construire le mouvement brownien comme processus dont les trajectoires sont continues p.s., alors cela définira une mesure, appelée mesure de Wiener que l'on abordera section 1.4.9.

1.2.3 Existence de processus stochastiques

On a vu que la loi d'un processus stochastique est entièrement déterminée par les lois finies dimensionnelles. Inversement on peut se demander si, étant donnée une famille de lois finies dimensionnelles (qui est ce que l'on est en mesure de connaître par l'expérience), on peut construire mathématiquement un processus ayant ces lois conjointes.

On commence par énoncer le théorème suivant :

9. Soit (Ω, \mathcal{B}) un espace mesurable, et soit $\Omega' \subset \Omega$, la tribu-trace de \mathcal{B} sur Ω' est l'ensemble $\{B \cap \Omega' \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Théorème 1.1 (EXISTENCE D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES)

Soit μ une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{E}) un espace mesurable quelconque.

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur cet espace tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi \mathbb{P}_{X_n} de la variable X_n est μ .

En ajoutant une hypothèse sur l'espace de base E , on peut construire des familles i.i.d infinies (mais non nécessairement dénombrables) comme le montre ce second résultat, théorème fondamental dû à Kolmogorov et démontré pour la première fois dans (KOLMOGOROFF, 1933) :

Théorème 1.2 (PROLONGEMENT DE KOLMOGOROV)

Soit E un espace polonais¹⁰ muni de la tribu $\mathcal{B}(E)$ de ses boréliens et T un ensemble d'indices (non nécessairement dénombrable). Soit \mathcal{I} l'ensemble des parties de T , et $(\mathbb{Q}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ une famille de probabilités telles que pour tout sous-ensemble fini I , \mathbb{Q}_I est définie sur $\mathcal{B}(E) \otimes^I$, et qui soit compatible au sens où

$$\forall I, J \in \mathcal{I}, \quad I \subset J, \quad (\mathbb{Q}_J)|_I = \mathbb{Q}_I.$$

Alors il existe une unique probabilité \mathbb{P} sur la tribu borélienne de E^T telle que

$$\forall I \in \mathcal{I}, \quad \mathbb{P}|_I = \mathbb{Q}_I.$$

Donnons une application de ce théorème pour la caractérisation des processus gaussiens. En effet nous avons vu que les lois finies dimensionnelles des processus gaussiens sont déterminées par leur moyenne et leur covariance. Réciproquement montrons que :

Proposition 1.4 (EXISTENCE D'UN PROCESSUS GAUSSIEN)

Étant donnés $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction moyenne et $\mathbf{R} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique qui vérifie pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbf{R}(t_i, t_j) \geq 0. \quad (1.8)$$

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ainsi qu'un processus gaussien $(X_t)_{t > 0}$ défini sur cet espace, de fonction moyenne m et de fonction de covariance \mathbf{R} .

Preuve :

Définissons une famille de probabilité par :

$$\mu_{t_1, \dots, t_n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - m(t_i)) (\Sigma^{-1})_{i,j} (x_j - m(t_j)) \right) dx_1 \cdots dx_n,$$

où $\Sigma_{i,j} = \mathbf{R}(t_i, t_j)$ et où $dx_1 \cdots dx_n$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Par hypothèse sur \mathbf{R} la matrice Σ est symétrique positive, si bien que μ_{t_1, \dots, t_n} est une loi gaussienne d'après (1.4). Il est aisé de vérifier que cette famille est compatible, et donc le théorème de Kolmogorov assure l'existence d'un processus $X = (X_t)_{t > 0}$ tel que ses lois finies dimensionnelles soient les lois gaussiennes μ_{t_1, \dots, t_n} . X ainsi construit est donc un processus gaussien de moyenne m et de covariance \mathbf{R} . □

10. Espace métrisable séparable dont la distance associée le rend complet (cf. section 1.9.2).

Exemple 1.2. La fonction $\mathbf{R}(s, t) = \min(s, t) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}(x)\mathbb{1}_{[0,s]}(x) dx$ est symétrique et vérifie

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbf{R}(t_i, t_j) = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[0,t_i]}(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{[0,t_j]}(x) \right) dx = \int_0^\infty \left| \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[0,t_i]}(x) \right|^2 dx \geq 0.$$

Ainsi il existe un processus gaussien de fonction moyenne nulle et de fonction symétrique $\mathbf{R}(s, t) = \min(s, t)$. Ce processus gaussien n'est rien d'autre que le mouvement brownien.

On donnera une définition alternative du mouvement brownien par isométrie dans la section 1.4. Ceci nous permettra d'introduire plus naturellement les intégrales stochastiques.

1.2.4 Comparaison de processus stochastiques

Définition 1.7 (MODIFICATION DE PROCESSUS)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ deux processus définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $(Y_t)_{t \in T}$ est une modification de $(X_t)_{t \in T}$ si

$$\forall t \in T, \exists N_t \in \mathcal{F}, \text{ tel que } \mathbb{P}(N_t) = 0 \text{ et } \forall \omega \notin N_t, X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$

Autrement dit, pour chaque $t \in T$ il n'y a que sur un ensemble de mesure nulle N_t (différent pour chaque t) que la variable aléatoire Y_t diffère de X_t . Ou encore si on note $A_t = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$ alors $(Y_t)_{t \in T}$ est une modification de $(X_t)_{t \in T}$ si $\forall t \in T, \mathbb{P}(A_t) = 1$.

Définition 1.8 (INDISTINGUABILITÉ DE PROCESSUS)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ deux processus définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ sont indistinguables si

$$\exists N \in \mathcal{F}, \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0 \text{ et } \forall t \in T, \forall \omega \notin N, X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$

Autrement dit, si $A = \{\omega \in \Omega : \forall t \in T, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$, alors $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ sont indistinguables si $\mathbb{P}(A) = 1$ ¹¹.

Il est alors évident que l'on a les implications suivantes :

$$\text{indistinguabilité} \implies \text{modification} \implies \text{mêmes lois finies dimensionnelles}.$$

Remarque 1.3. Il peut être utile étant donné un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$, de le « modifier », c'est-à-dire de trouver un processus $(Y_t)_{t \in T}$ qui est une modification de $(X_t)_{t \in T}$, de sorte que cette *version* de $(X_t)_{t \in T}$ (qui est une « copie » puisque possédant les mêmes lois finies dimensionnelles) ait des propriétés plus intéressantes, typiquement en terme de régularité de ses trajectoires. Nous verrons par exemple après construction du brownien, qu'il s'agira de le modifier de façon à ce que ses trajectoires soient continues.

Les processus stochastiques qui vont nous servir à modéliser un phénomène doivent posséder certaines propriétés qui caractérisent les propriétés physiques du dit phénomène, nous en donnons un aperçu dans la section suivante.

1.2.5 Propriétés des processus

11. Notons que $A = \bigcap_{t \in T} A_t$.

Définition 1.9 (PROCESSUS STATIONNAIRE)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

- $(X_t)_{t \in T}$ est strictement stationnaire si $(X_{t+h})_{t \in T}$ a même loi que $(X_t)_{t \in T}$ pour tout h , ou encore pour toute suite finie d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ dans T , pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout h , les vecteurs $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont même loi que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.
- $(X_t)_{t \in T}$ est faiblement stationnaire (ou stationnaire au second ordre) si
 - (a) Pour tout $t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.
 - (b) Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in T$, $\mathbb{E}[X_t] = m$.
 - (c) Il existe une fonction $\gamma : T \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $s, t \in T$,

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \gamma(t - s) .$$

Remarque 1.4. La stationnarité stricte correspond à l'invariance des lois finies dimensionnelles par translation. Quant à la stationnarité faible, l'espérance et la variance de X_t ne dépendent pas de t , autrement dit le signal « oscille » autour d'une moyenne fixe et dans des bornes fixes ne dépendant pas de t . Les covariances $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \gamma(h)$ ne dépendent pas non plus de t mais uniquement du « délai » h , autrement dit pour un processus stochastique réel, si on coupe la série en deux, la partie gauche et la partie droite ont des comportements similaires. Dans le cas général la stationnarité stricte implique la stationnarité faible. La réciproque n'est pas vraie en général. Dans le cas des processus gaussiens ces deux définitions sont équivalentes.

Définition 1.10 (PROCESSUS À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . $(X_t)_{t \in T}$ est à accroissements indépendants si, pour toute suite finie d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ dans T , les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Exemple 1.3. Le mouvement brownien $(B_t)_{t \leq 0}$, processus gaussien défini par sa moyenne $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et sa covariance $\mathbf{R}(s, t) = \min(s, t)$, n'est pas faiblement stationnaire car la covariance ne dépend pas de $t - s$ (sa variance $\text{Var}(B_t) = t$ dépend de t), mais ses accroissements le sont car $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$. Ainsi la loi des incréments du processus ne dépend pas du temps, et ils sont indépendants. En revanche les v.a. B_t , elles, sont bien corrélées. Nous verrons dans le prochain chapitre que le mouvement brownien fractionnaire d'ordre H a quant à lui des accroissements stationnaires mais non indépendants (sauf pour $H = \frac{1}{2}$).

Définition 1.11 (PROCESSUS AUTOSIMILAIRES)

Soit $\{X(t)\}_{t \in T}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , et $H \in \mathbb{R}$. $\{X(t)\}_{t \in T}$ est dit autosimilaire de paramètre H si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{X(\lambda t)\}_{t \in T} \stackrel{(fdd)}{=} \lambda^H \{X(t)\}_{t \in T} .$$

Vocabulaire. Le paramètre H est appelé *paramètre de Hurst*.

1.2.6 Régularité des trajectoires

Un autre théorème fondamental que l'on doit à Kolmogorov, est le résultat suivant permettant d'étudier la continuité des trajectoires d'un processus. Ce résultat, exposé par Kolmogorov en 1934 au séminaire de l'Université de Moscou, fut rapporté et démontré pour la première fois par (SLUTSKY, 1937) puis étendu par (CHENTSOV, 1956b).

Théorème 1.3 (THÉORÈME DE KOLMOGOROV)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus à valeurs réelles avec $T = [0, 1]$. On suppose qu'il existe trois constantes $(\gamma, c, \epsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ telles que :

$$\forall (s, t) \in T^2, \quad \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\gamma] \leq c |t - s|^\epsilon.$$

Alors il existe Y une modification de X telle que :

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{\epsilon}{\gamma}\right], \quad \mathbb{E} \left[\left(\sup_{(s,t) \in T, s \neq t} \frac{|Y_t - Y_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^\gamma \right] < \infty.$$

En particulier, les trajectoires de Y sont α -höldériennes pour tout $\alpha \in \left[0, \frac{\epsilon}{\gamma}\right]$.

Corollaire 1.1 (CRITÈRE DE CONTINUITÉ DE KOLMOGOROV)

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus à valeurs réelles avec $T = [0, 1]$. On suppose qu'il existe trois constantes $(\alpha, \beta, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ telles que :

$$\forall t \in T, \forall h > 0, \quad \mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^\alpha] \leq ch^{1+\beta}.$$

Alors il existe Y une unique modification de X (à un ensemble négligeable près) qui est presque sûrement à trajectoires continues.

1.3 Espaces gaussiens

Commençons par définir la notion d'espace gaussien :

Définition 1.12 (ESPACE GAUSSIEN)

Un sous-espace gaussien est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constitué de variables aléatoires gaussiennes centrées.

Dans la suite nous utiliserons le lemme élémentaire suivant

Lemme 1.1 (ESPACES DE HILBERT ISOMORPHES)

Soit $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ et $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2})$ deux espaces de Hilbert séparables. Alors \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont isométriquement isomorphes.

Proposition 1.5 (RÉALISATION D'UN ESPACE DE HILBERT COMME ESPACE GAUSSIEN)

Tout espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ séparable se réalise comme espace gaussien. Cela signifie qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} un sous-espace gaussien de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tel qu'il existe une isométrie de $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ sur $(\mathcal{G}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} X &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \\ h &\longmapsto X(h) \sim \mathcal{N}(0, \|h\|_{\mathcal{H}}^2) \end{aligned} .$$

De plus, pour tout couple $(h, h') \in \mathcal{H}^2$, $\mathbb{E}[X(h)X(h')] = \langle h, h' \rangle_{\mathcal{H}}$, et donc $X(h)$ et $X(h')$ sont indépendants si et seulement si h et h' sont orthogonaux.

Preuve :

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . D'autre part, par le Théorème 1.1, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$ qui forme une famille orthonormée de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ¹². Ainsi $\mathcal{G} = \text{Vect}\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace gaussien (donc fermé) de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (qui est complet) donc complet, ainsi c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ restreint à \mathcal{G} . Enfin comme $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est séparable, \mathcal{G} l'est aussi. Par conséquent le lemme 1.1 qui établit un isomorphisme entre deux Hilbert séparables s'applique, et il découle que l'application :

$$\begin{aligned} X &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \\ h &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} g_n \end{aligned} ,$$

est une isométrie.

Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $X(h)$ est bien un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c.-à-d. une classe d'équivalence de variables aléatoires, et $X(h) \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{E}[X(h)^2])$ puisque limite presque sûre de variables gaussiennes, et par isométrie

$$\mathbb{E}[X(h)^2] = \|X(h)\|_{L^2}^2 = \|h\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Plus généralement, puisque X est une isométrie on a

$$\mathbb{E}[X(h)X(h')] = \langle h, h' \rangle_{\mathcal{H}} ,$$

ce qui correspond au fait que $X(h)$ et $X(h')$ sont indépendants si et seulement si h et h' sont orthogonaux. \square

Nous allons maintenant nous intéresser aux mesures gaussiennes :

Définition 1.13 (MESURE GAUSSIENNE)

Dans le cas d'un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} de type $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$, l'application X qui permet de réaliser cet espace comme un espace gaussien $\text{Vect}\{X(h), h \in L^2\}$ est appelée mesure gaussienne d'intensité μ .

Par la suite on notera pour $A \in \mathcal{A}$, $X(A) = X(\mathbf{1}_A)$.

12. Sans avoir recours au théorème de Kolmogorov, on peut fabriquer une telle famille de manière constructive en tirant une v.a. Y uniforme sur $[0, 1]$ (on choisit $\Omega = [0, 1]$, la v.a. identité $Y(\omega) = \omega$ et la mesure de Lebesgue λ), puis on se sert des décimales de Y pour construire une suite de v.a. discrètes indépendantes sur $\{1, 2, \dots, 9\}$. Ensuite on utilise une bijection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ pour numéroter ces décimales et ainsi avoir une infinité dénombrable de suites de v.a. discrètes indépendantes sur $\{1, 2, \dots, 9\}$. Enfin on retransforme ces suites en v.a. de la loi que l'on souhaite. Cf. (OUVRARD, 2004) pour plus de détails.

Lemme 1.2 (PROPRIÉTÉS D'UNE MESURE GAUSSIENNE)

Une mesure gaussienne vérifie les propriétés suivantes :

– $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'évènements deux à deux disjoints, tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < \infty$,

$$X \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X(A_n) .$$

– $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, tels que $\mu(A) < \infty$ et $\mu(B) < \infty$,

$$\mathbb{E} [X(A)X(B)] = \mu(A \cap B) .$$

En particulier, si A et B sont disjoints, $X(A)$ et $X(B)$ sont indépendants.

Preuve :

Les événements étant disjoints, on a :

$$X \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = X \left(\mathbf{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \right) = X \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} \right) ,$$

et X étant continue de L^2 dans $\overline{\text{Vect}(X(h), h \in L^2)}$ il vient

$$X \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} \right) = X \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{A_n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} X \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{A_n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X(A_n) .$$

Par isométrie on a aussi

$$\mathbb{E} [X(A)X(B)] = \mathbb{E} [X(\mathbf{1}_A)X(\mathbf{1}_B)] = \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{L^2} = \int \mathbf{1}_{A \cap B} d\mu = \mu(A \cap B) .$$

Ainsi si A et B sont disjoints, les variables gaussiennes $X(A)$ et $X(B)$ sont indépendantes. □

Remarque 1.5. Les propriétés de l'application $A \mapsto X(A)$ « ressemblent » à celles d'une mesure (dépendant de ω). Néanmoins on peut montrer qu'en général pour ω fixé l'application $A \mapsto X(A)(\omega)$ ne définit pas une mesure.

1.4 Construction du mouvement brownien

1.4.1 Définition

Les propriétés physiques du mouvement brownien présentées section 1.1.3, peuvent être formalisées de la manière suivante :

Définition 1.14 (MOUVEMENT BROWNIEN)

On appelle mouvement brownien en dimension d , tout processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que :

- (i) Le processus $(B_t)_t$ est à accroissements indépendants, et $B_0 = 0$ p.s.,
- (ii) $\forall 0 \leq s \leq t$ les accroissements suivent une loi normale $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)\mathbf{I}_d)$,
- (iii) Le processus $(B_t)_t$ est à trajectoires p.s. continues.

L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.4 (EXISTENCE DU MOUVEMENT BROWNIEN)

Il existe un espace de probabilité convenable et un processus $(B_t)_t$ sur cet espace qui vérifie les conditions de la définition.

Il y a diverses façons de construire le mouvement brownien, que ce soit comme on l'a vu par le critère de Kolmogorov, mais alternativement par la construction dyadique de Paul Lévy (LÉVY et LOÈVE, 1948; MÖRTERS et PERES, 2010), au moyen d'une série de Fourier (PALEY et coll., 1933), par les excursions browniennes (LÉVY et LOÈVE, 1948), ou encore par le biais des marches aléatoires et du théorème de DONSKER (1951) que nous esquisserons à la section 1.9. C'est la construction de WIENER (1923), arrivée à maturité après (PALEY et WIENER, 1934) que l'on se propose de décrire telle qu'elle se présente aujourd'hui. On commencera par le cas $d = 1$ avec t restreint à $[0, 1]$, puis on l'étendra aisément à toute la droite réelle et à d quelconque.

Les conditions (i) et (ii) définissent ce qu'on appelle le *pré-mouvement brownien*. La démonstration se fera en deux étapes : premièrement on construit une isométrie entre deux Hilbert séparables (à savoir l'espace des fonctions intégrables et un sous-espace gaussien) qui permet de définir un processus comme image d'une famille du premier espace vers le second par cette isométrie. On vérifie alors qu'il remplit les conditions du pré-mouvement brownien. Dans un second temps on vérifie que cette construction (à une modification près) donne lieu à un processus dont les trajectoires sont de surcroît p.s. continues.

1.4.2 Base de Haar sur l'espace de Lebesgue

On choisit comme espace de Hilbert de départ \mathcal{H} l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables noté $L^2([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$ où $\mathcal{B}_{[0,1]}$ désigne la tribu borélienne sur $[0, 1]$ et $\lambda_{[0,1]}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. C'est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} fg \, d\lambda_{[0,1]} .$$

Définition 1.15 (FONCTIONS DE HAAR)

On appelle fonctions de Haar la famille de fonctions $(h_m)_{m \geq 0}$ définies sur $[0, 1[$ par :

$$\begin{cases} h_0 \equiv 1, \\ \forall m \geq 1, h_m = c_n \mathbb{1}_{\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[} - c_n \mathbb{1}_{\left[\frac{p+1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{p+1}{2^n}\right[} \end{cases} ,$$

où (n, p) est l'unique couple d'entiers positifs tels que $m = 2^n + p$ avec $p \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ et c_n est choisi de telle sorte que $\int_{[0,1]} |h_m|^2 \, d\lambda_{[0,1]} = 1$.

Un résultat classique est que cette famille des fonctions de Haar $(h_m)_{m \geq 0}$ constitue une base hilbertienne de $L^2([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$, on trouvera une démonstration de ce résultat dû à Haar par exemple dans (CHAGNY, 2008).

1.4.3 Construction de l'isométrie réalisant l'espace de Lebesgue

Muni de la base de Haar $(h_m)_{m \geq 0}$, l'espace de Hilbert séparable $L^2([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$ se réalise d'après la Proposition 1.5 comme espace gaussien. Plus précisément, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une mesure gaussienne d'intensité $\lambda_{[0,1]}$ qui permet d'identifier $L^2([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$ à un sous-espace gaussien $\mathcal{G} = \overline{\text{Vect}\{N_m, m \in \mathbb{N}\}}$ où $(N_m)_{m \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0, 1)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constituant une base hilbertienne de $\mathcal{G} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle_{\mathcal{G}} = \mathbb{E}[XY]$. L'isométrie qui réalise cette identification étant :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &: L^2([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}) \longrightarrow \mathcal{G} \\ f &\longmapsto \mathbf{W}(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, h_m \rangle N_m \end{aligned} \quad (1.9)$$

Comme limite d'une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, on en déduit (résultat classique) que $\mathbf{W}(f)$ est une variable aléatoire gaussienne, et par indépendance des variables et isométrie de \mathbf{W} on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{W}(f), \mathbf{W}(g)) &= \mathbb{E}[\mathbf{W}(f)\mathbf{W}(g)] - \mathbb{E}[\mathbf{W}(f)]\mathbb{E}[\mathbf{W}(g)] = \mathbb{E}[\mathbf{W}(f)\mathbf{W}(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2}, \\ \mathbf{W}(f) &\sim \mathcal{N}(0, \|f\|_2^2). \end{aligned}$$

1.4.4 Construction du pré-mouvement brownien

On définit le processus de Wiener en posant

$$\forall t \in [0, 1], \quad B_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t]}). \quad (1.10)$$

Ainsi B_t est un représentant de la classe d'équivalence $\mathbf{W}([0, t])$. On vérifie alors que ce processus vérifie les conditions (i) et (ii), c.-à-d. est un pré-mouvement brownien :

Proposition 1.6 (PRÉ-MOUVEMENT BROWNIEN)

Le processus $(B_t)_{t \in [0,1]}$ ainsi construit vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Le processus $(B_t)_t$ est à accroissements indépendants, et $B_0 = 0$ p.s.,
- (ii) $\forall 0 \leq s \leq t$ les accroissements suivent une loi normale $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Preuve :

Montrons tout d'abord que les accroissements sont indépendants.

Pour cela fixons nous des temps $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Par linéarité de l'isométrie on a

$$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t_i]}) - \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t_{i-1}]}) = \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t_i]} - \mathbb{1}_{[0,t_{i-1}]}) = \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}),$$

et ainsi

$$\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = \mathbb{E}[\mathbf{W}(\mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]})\mathbf{W}(\mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j]})] = \langle \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}, \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j]} \rangle_{L^2} = 0,$$

puisque les intervalles $]t_{i-1}, t_i]$ sont disjoints. Comme le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est gaussien étant donné que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \mathbf{W}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}\right),$$

est une variable aléatoire gaussienne, on en conclut que les accroissements $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont indépendants. De l'indépendance des accroissements gaussiens on en déduit que le vecteur $(B_{t_0}, \dots, B_{t_n})$ lui-même est un vecteur gaussien puisque toute combinaison linéaire de ses composantes peut se réécrire comme combinaison linéaire des accroissements :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i B_{t_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}),$$

et que cette dernière somme est une variable gaussienne comme somme de variables gaussiennes indépendantes.

$(B_t)_t$ est donc bien un processus gaussien, dont chaque B_t suit une loi gaussienne centrée et dont la variance est comme attendu proportionnelle au temps :

$$\mathbb{E} [B_t^2] = \mathbb{E} [\mathbf{W}(\mathbf{1}_{[0,t]})^2] = \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_2^2 = \int \mathbf{1}_{[0,t]} d\lambda = t.$$

En particulier $\mathbb{E} [B_0^2] = 0$ d'où $B_0^2 = 0$ p.s. et donc $B_0 = 0$ p.s..

De même, pour $t > s$, $B_t - B_s$ est une variable gaussienne centrée de variance :

$$\mathbb{E} [(B_t - B_s)^2] = \|\mathbf{1}_{[0,t]} - \mathbf{1}_{[0,s]}\|_2^2 = \|\mathbf{1}_{[s,t]}\|_2^2 = t - s.$$

□

1.4.5 Continuité des trajectoires

Il y a différentes façons de montrer que les trajectoires sont continues. Nous en mentionnerons deux, l'une faisant appel au critère de continuité de Kolmogorov comme le font (REVUZ et YOR, 2013), l'autre plus directe exposée par exemple par (LE GALL, 2006), consistant à étudier la continuité d'une série aléatoire.

Proposition 1.7 (CONTINUITÉ DES TRAJECTOIRES BROWNIENNES)

$(B_t)_{t \in [0,1]}$ admet une unique modification à trajectoires presque sûrement continues.

Preuve :

Il est aisé de calculer les moments d'ordre pair d'une loi gaussienne $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (par exemple en décomposant sa fonction caractéristique en série entière), qui sont égaux à $\mathbb{E} [X^{2n}] = \frac{\sigma^{2n} (2n)!}{2^n n!}$, si bien que $B_{t+h} - B_t$ qui suit une loi $\mathcal{N}(0, h)$ a pour moments d'ordre pair :

$$\mathbb{E} [(B_{t+h} - B_t)^{2n}] = \frac{h^n (2n)!}{2^n n!},$$

et en particulier pour $n = 2$ on a $\mathbb{E} [(B_{t+h} - B_t)^4] = 3h^2$, donc d'après le Corollaire 1.1 il existe une unique modification continue de $(B_t)_{t \in [0,1]}$ dont les trajectoires sont $(1/2 - \epsilon)$ -höldériennes (pour $\epsilon > 0$), donc a fortiori continues. □

Remarque 1.6. C'est cette modification continue du processus que l'on appelle mouvement brownien (et plus seulement pré-brownien).

Nous esquissons la seconde preuve qui est historiquement plus proche de la démarche de Wiener de l'époque. Elle consiste à travailler sur la série aléatoire qui définit par définition B_t dans la base de l'espace gaussien \mathcal{G} :

$$B_t = \mathbf{W}(\mathbf{1}_{[0,t]}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, h_m \rangle N_m = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t) N_m,$$

où g_m est la primitive de la fonction de Haar h_m que l'on appelle fonction de Schauder. On sait d'après ce qui précède que cette série converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour tout $t \in [0, 1]$, et

LE GALL (2006) montre en majorant le supremum d'une somme finie de termes et en utilisant la classique inégalité de Markov que :

Proposition 1.8 (CONVERGENCE UNIFORME DE LA SÉRIE ALÉATOIRE BROWNIENNE)

La série de fonctions $t \mapsto B_t(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t)N_m(\omega)$, converge uniformément (en t) sur $[0, 1]$, presque sûrement en ω (c.-à-d. sauf sur un ensemble négligeable $A \in \mathcal{F}$).

Ensuite il suffit de choisir un représentant de $B_t = \mathbf{W}(\mathbf{1}_{[0,t]})$ (car comme élément de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ il s'agit rigoureusement d'une classe d'équivalence pour la relation d'égalité presque partout) en définissant $B_t(\omega)$ comme la somme de la série précédente si $\omega \in A^c$ et 0 sinon.¹³ Et donc pour $\omega \in A^c$, soit presque partout, l'application $t \mapsto B_t(\omega)$ est définie comme la somme d'une série de fonctions continues (les $t \mapsto g_m(t)N_m$) qui par convergence uniforme est continue.

Bien entendu toutes les propriétés du pré-mouvement brownien vues à la section précédente sont préservées. Il reste à s'affranchir des restrictions $T = [0, 1]$ et $d = 1$ que nous avons faites pour la démonstration jusqu'ici.

1.4.6 Construction du mouvement brownien en dimension d

Une fois le mouvement brownien $(B_t)_{t \in [0,1]}$ construit, il est aisé de l'étendre à tout \mathbb{R}_+ , en construisant des processus $(B_t^{(1)})_{t \in [0,1]}, (B_t^{(2)})_{t \in [0,1]}, \dots, (B_t^{(k)})_{t \in [0,1]}, \dots$, en prenant à chaque fois une suite de v.a. gaussiennes indépendantes différente, et indépendante des suites précédentes, et en posant :

$$\begin{aligned} B_t &= B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + \dots + B_1^{(k)} + B_{t-k}^{(k+1)} \quad \text{si } t \in [k, k+1[, \\ &= B_k + B_{t-k}^{(k+1)} , \end{aligned}$$

ce qui est naturel avec cette écriture par récurrence où B_k est par somme finie de browniens indépendants un brownien, et $B_{t-k}^{(k+1)}$ représente l'accroissement du brownien entre k et t (et $t - k \in [0, 1]$). On vérifie alors que cette construction de $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est à accroissements indépendants (ce qui est clair par télescopage et indépendance des familles $(B_t^{(k)})_{t \in [0,1]}$), et à trajectoires p.s. continues (puisque somme de processus à trajectoires continues).

Enfin pour étendre la construction en dimension d quelconque il suffit de considérer d mouvements browniens de dimension 1 indépendants $(B_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}, \dots, (B_t^d)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et de poser :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d) .$$

L'exemple de la Figure 1.1 est la réalisation d'un mouvement brownien en dimension $d = 2$.

On peut également caractériser les lois finies dimensionnelles du mouvement brownien en exprimant la densité du vecteur gaussien B_t par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . On rappelle qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, u)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} la fonction :

$$\begin{aligned} g_u &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto g_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right) . \end{aligned}$$

13. Cela revient en réalité à déterminer une modification du processus comme dans la méthode précédente.

Proposition 1.9 (DENSITÉ DU MOUVEMENT BROWNIEN)

Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d})$ est un vecteur gaussien de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d donnée par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto g_{t_1}(x_1)g_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots g_{t_d-t_{d-1}}(x_d - x_{d-1}) ,$$

et les lois finies dimensionnelles sont, pour $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, les probabilités :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d}) \in A_1 \times \cdots \times A_d] \\ &= \int_{A_1} g_{t_1}(x_1) dx_1 \int_{A_2} g_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) dx_2 \cdots \int_{A_d} g_{t_d-t_{d-1}}(x_d - x_{d-1}) dx_d . \end{aligned}$$

Preuve :

Posons $X_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ pour $k \leq d$. Alors X_k suit la loi $\mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$ de densité $g_{t_k - t_{k-1}}$, et les X_k sont indépendantes (car on a construit un brownien dont les accroissements sont indépendants), donc le vecteur (X_1, \dots, X_d) admet pour densité conjointe $(y_1, y_2, \dots, y_d) \mapsto g_{t_1}(y_1)g_{t_2-t_1}(y_2) \cdots g_{t_d-t_{d-1}}(y_d)$. On définit $\varphi : (y_1, y_2, \dots, y_d) \mapsto (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + y_2 + \dots + y_d)$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , qui est linéaire, bijective, de réciproque $\varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_d - x_{d-1})$ et $\det \varphi = 1$. On a $(B_{t_1}, \dots, B_{t_d}) = \varphi(X_1, \dots, X_d)$. Pour toute fonction h mesurable bornée sur \mathbb{R}^d , en appliquant le théorème du changement de variables :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})] &= \mathbb{E}[h \circ \varphi(X_1, \dots, X_d)] , \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h \circ \varphi(y_1, \dots, y_d) g_{t_1}(y_1) g_{t_2-t_1}(y_2) \cdots g_{t_d-t_{d-1}}(y_d) dy_1 \cdots dy_d , \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x_1, \dots, x_d) g_{t_1}(x_1) g_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots g_{t_d}(x_d - x_{d-1}) dx_1 \cdots dx_d . \end{aligned}$$

et les lois finies dimensionnelles s'obtiennent pour $h = \mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_d}$. □

1.4.7 Propriétés du mouvement brownien

Nous donnons ci-après deux propriétés élémentaires du mouvement brownien, à savoir une propriété de Markov simple et une propriété d'invariance par changement d'échelle :

Proposition 1.10 (PROPRIÉTÉ DE MARKOV SIMPLE)

Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors pour tout $s > 0$, le processus $(B_t^s)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad B_t^s = B_{t+s} - B_t ,$$

est un mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma\{B_r, 0 \leq r < s\}$.

Preuve :

En tant qu'accroissements de $(B_t)_t$, B_t^s suit une loi $\mathcal{N}(0, t + s - t) = \mathcal{N}(0, s)$, et ses propres accroissements sont encore des accroissements de $(B_t)_t$ donc sont indépendants. Enfin par composée d'applications continues $t \mapsto B_t(\omega)$ est également continue. Ainsi $(B_t^s)_t$ est aussi un mouvement brownien. Reste à vérifier l'indépendance vis-à-vis de la tribu \mathcal{F}_s , ce qui revient à vérifier l'indépendance de tout sous-vecteur fini extrait de $(B_t^s)_t$ avec tout sous-vecteur fini extrait de $(B_t)_{t < s}$. On prend alors $0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $0 < r_1 < \cdots < r_m < s$ et on considère les vecteurs $V_n = (B_{t_1}^s, \dots, B_{t_n}^s) = (B_{t_1+s} - B_s, \dots, B_{t_n+s} - B_s)$ et $V_m = (B_{r_1}, \dots, B_{r_m})$. Si indépendance il y a le vecteur gaussien $V = (V_n, V_m)$ doit avoir une matrice de covariance diagonale par blocs, et en effet pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$,

$$\text{Cov}(B_{t_i+s} - B_s, B_{r_j}) = \text{Cov}(B_{t_i+s}, B_{r_j}) - \text{Cov}(B_s, B_{r_j}) = \min(t_i + s, r_j) - \min(s, r_j) = r_j - r_j = 0 .$$

□

Remarque 1.7. Cette propriété signifie que le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent. Intuitivement c'est comme si en chaque point $t > 0$ un mouvement brownien « tout neuf » évoluait à partir de cet instant, car les accroissements donc les sauts sont quant à eux sans mémoire.

Proposition 1.11 (PROPRIÉTÉ D'INVARIANCE PAR CHANGEMENT D'ÉCHELLE)

Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d . Pour tout $c > 0$, le processus $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $\tilde{B}_t = cB_{t/c^2}$, est un mouvement brownien.

Preuve :

On a évidemment $\tilde{B}_0 = cB_0 = 0$ p.s., \tilde{B}_t est une variable gaussienne centrée, et le processus $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ continu par composée d'applications continues. De plus,

$$\text{Cov}(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) = \text{Cov}(cB_{t/c^2}, cB_{s/c^2}) = c^2 \min\left(\frac{t}{c^2}, \frac{s}{c^2}\right) = \min(t, s).$$

□

Remarque 1.8. Cette propriété signifie qu'à un facteur de dilatation d'amplitude près, quand on « zoome » sur la courbe $t \mapsto t/c$, on s'aperçoit qu'elle conserve statistiquement la même allure. Le mouvement brownien est autosimilaire !

1.4.8 Interprétations géométriques

Récapitulons les étapes de la construction du mouvement brownien en tant que processus gaussien $B : (t, \omega) \mapsto B_t(\omega)$ (on notera à l'accoutumée $B(t) = B_t$ la variable aléatoire gaussienne), et interprétons la géométriquement à la manière de Kahane dans ses exposés sur l'introduction au mouvement brownien :

1. On construit une isométrie \mathbf{W} entre deux espaces de Hilbert : l'espace des fonctions réelles de carré intégrable $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et un sous-espace gaussien \mathcal{G} de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composé de variables aléatoires gaussiennes indépendantes $(N_m)_{m \leq 0}$ qui l'engendre.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} : L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) &\longrightarrow \mathcal{G} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f &\longmapsto \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, h_m \rangle N_m \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. On définit le pré-mouvement brownien à partir des images par \mathbf{W} des fonctions $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} : L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) &\longrightarrow \mathcal{G} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ \mathbb{1}_{[0,t]} &\longmapsto B_t \end{aligned} .$$

Interprétons $B(t) = B_t = \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t]})$ quand $t \in \mathbb{R}_+$ varie. $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une courbe paramétrée dans \mathcal{G} qui décrit des variables aléatoires gaussiennes (c'est-à-dire B est un processus gaussien), dont le carré de la longueur d'une corde est par isométrie :

$$\|B(t, \cdot) - B(s, \cdot)\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\mathbb{1}_{[0,t]} - \mathbb{1}_{[0,s]}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = |t - s|, \quad (1.12)$$

ce qui est l'équation d'Einstein (1.1) normalisée, dont on voulait que le processus brownien vérifie en effet la propriété (ii) de la Proposition 1.6. Si l'on effectue une translation sur le paramètre t , la courbe glisse isométriquement sur elle-même : on dit que c'est une *hélice*.

3. On peut poursuivre l'exploration de cette courbe, représentée sur la Figure 1.6, pour y lire les propriétés du pré-mouvement brownien. Par exemple, si l'on prend trois points $B_{t_1}, B_{t_2}, B_{t_3}$ sur cette hélice dans l'ordre des paramètres, on a :

$$\|B_{t_3} - B_{t_1}\|_{\mathcal{G}}^2 = t_3 - t_1 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) = \|B_{t_3} - B_{t_2}\|_{\mathcal{G}}^2 + \|B_{t_2} - B_{t_1}\|_{\mathcal{G}}^2 ,$$

ainsi cette relation de Pythagore montre que le triangle $B_{t_1}B_{t_2}B_{t_3}$ est rectangle en B_{t_2} . L'hélice brownienne est donc une figure très remarquable où trois points consécutifs définissent toujours un triangle rectangle ! Ce qui ne peut se réaliser que dans un espace de dimension infinie. Or l'orthogonalité de $B_{t_2} - B_{t_1}$ et $B_{t_3} - B_{t_2}$ dans \mathcal{G} (muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle_{\mathcal{G}} = \mathbb{E}[XY]$), correspond à leur indépendance¹⁴ : les accroissements dans le futur sont indépendants du passé, on dit que le processus est sans mémoire, ce qui remplit la condition (i) de la Proposition 1.6. Le terme d'hélice vient du fait que deux points $X(t)$ et $X(s)$ ($t < s$) de la courbe paramétrée sont toujours à une distance $\|X(t) - X(s)\|_{\mathcal{H}}$ ne dépendant que de l'écart de paramétrisation $t-s$: dans $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, nous l'avons montré avec la courbe $X(t) = B_t$ (Figure 1.6a) on a l'égalité $\|X(t) - X(s)\|_{\mathcal{G}}^2 = t - s$, mais dans $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$, avec une vraie hélice $X(t) = (r \sin t, r \cos t, ct)$ ceci est visuellement explicite puisque la distance entre deux points est $\|X(t) - X(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2 = f(t-s)$ avec $f(u) = 2r^2(1 - \cos u) + c^2u^2$, et on constate bien sur la Figure 1.6b qu'une corde (en pointillés) glisse isométriquement sur la paramétrisation.

4. La dernière étape consistait à vérifier la condition (iii) de la Proposition 1.6, à savoir la continuité des trajectoires de B , ce qui a été fait à l'aide la propriété 1/2-höldérienne qui se lit sur la corde (1.12) et dont le critère de continuité de Kolmogorov assure presque sûrement qu'il en est de même pour les trajectoires (réalisations pour un $\omega \in \Omega$) qui sont donc bien continues ; ou encore directement par convergence uniforme de la série aléatoire qui caractérise B_t dans le membre de droite de (1.11). On pourrait là également en dire plus sur la régularité, puisqu'en réalité bien que continues, PALEY et coll. (1933) ont montré que les trajectoires sont presque sûrement dérivables nulle part , ce qui témoigne de leur extrême irrégularité !

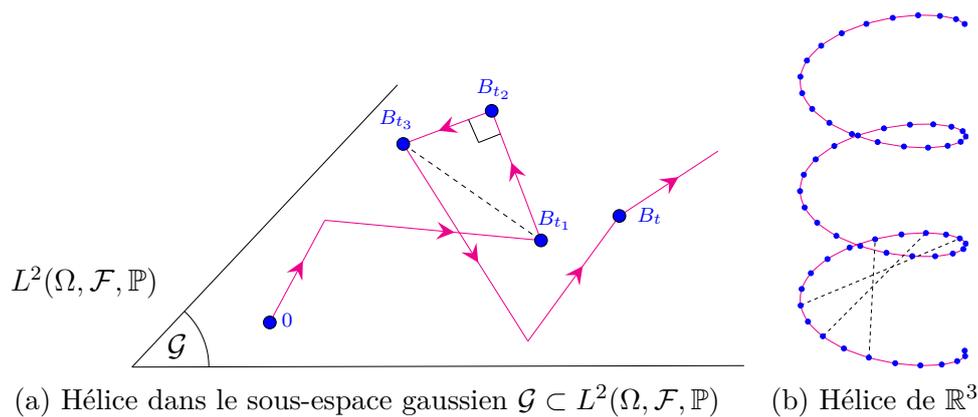


FIGURE 1.6 – Une hélice dans deux espaces de Hilbert \mathcal{H} différents : dans l'espace gaussien \mathcal{G} et dans \mathbb{R}^3 pour comprendre l'analogie.

Ces trajectoires extrêmement irrégulières définissent des fractales semblables à la fameuse fonction de Weierstrass. En réalité les trajectoires $t \mapsto B(t) = B_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ donnent naissance à deux ensembles fractals qu'il s'agit de distinguer :

14. Ce n'est pas un hasard si l'indépendance entre deux variables X et Y gaussiennes est notée $X \perp Y$.

- Le *graphe* \mathcal{G}_B de la fonction $t \mapsto B(t)$ qui est l'ensemble

$$\mathcal{G}_B = \left\{ (t, B(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, t \geq 0 \right\} ,$$

dont la dimension topologique est égale à 1 (c'est une courbe dans un espace de dimension \mathbb{R}^{d+1}), mais dont la dimension fractale (de Hausdorff) est (presque sûrement)

$$\dim_{\mathbf{H}}(\mathcal{G}_B) = 1 + \frac{d}{2} .$$

Par exemple pour un mouvement brownien 1-D $t \mapsto B_t$, le graphe d'une trajectoire est représentée Figure 1.7b et est de dimension de Hausdorff égale à 1.5, c'est-à-dire qu'elle « remplit » plus d'espace que ne le ferait une courbe lisse, elle a une certaine « épaisseur » de par sa forte irrégularité. Pour un mouvement brownien 2-D $t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$, son graphe, illustré Figure 1.7d, est de dimension de Hausdorff égale à 2. Ce qui n'est pas sans rappeler les peintures de Jackson Pollock possédant une dimension fractale (Figure 1.8).

- La *traînée* du mouvement $t \mapsto B_t$ désigne la trace laissée par la particule lors de son mouvement, autrement dit l'ensemble

$$\text{Im } B = \{B(t), t > 0\} ,$$

dont la dimension topologique est égale à 1 (comme courbe dans un espace de dimension \mathbb{R}^d cette fois), mais dont la dimension fractale (de Hausdorff) est (presque sûrement)

$$\dim_{\mathbf{H}}(\text{Im } B) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 2 & \text{si } d \geq 2 \end{cases} .$$

Cela signifie que la traînée du mouvement d'une particule brownienne dans le plan, comme illustrée Figure 1.7c, couvre tout le plan : la particule passera par tous les points du plan.

Considérons maintenant *plusieurs* réalisations du mouvement brownien 1-D et 2-D, et vérifions empiriquement et visuellement qu'elles vérifient les propriétés escomptées. Dans le cas 1-D, en traçant $N = 10000$ réalisations indépendantes de mouvement brownien sur $[0, 1]$ (Figure 1.9a), si l'on considère une coupe verticale, disons en $t_1 = 1/4$, et que l'on observe la répartition des valeurs prises par ces différents browniens à cet instant, on obtient Figure 1.9c un histogramme dont la distribution est gaussienne d'écart type $\sqrt{1/4}$. De même à l'instant $t_2 = 3/4 > t_1$ on a Figure 1.9d que la distribution est gaussienne d'écart type $\sqrt{3/4} > \sqrt{1/4}$. On visualise ainsi la diffusion des particules proportionnellement à \sqrt{t} . De même dans le cas 2-D, en traçant les graphes de $N = 1000$ réalisations en 3D (où l'axe du temps est pris verticalement) sur la Figure 1.9b, et en considérant des coupes aux mêmes instants t_1 et t_2 on visualise également les répartitions gaussiennes d'écart type \sqrt{t} et donc la diffusion des particules dans le plan. On constate bien que s'il est clair que le comportement d'une particule est imprévisible, il n'en reste pas moins que le mouvement collectif de ces particules est quant à lui prévisible, puisqu'il obéit à un processus de diffusion bien déterminé.

1.4.9 Mesure de Wiener

Considérons une réalisation donnée, c.-à-d. une trajectoire continue partant de zéro parmi tous les choix possibles, c.-à-d. dans l'ensemble $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$:

$$\begin{aligned} B & : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \\ \omega & \longmapsto [t \mapsto B_t(\omega)] \end{aligned} \quad (1.13)$$

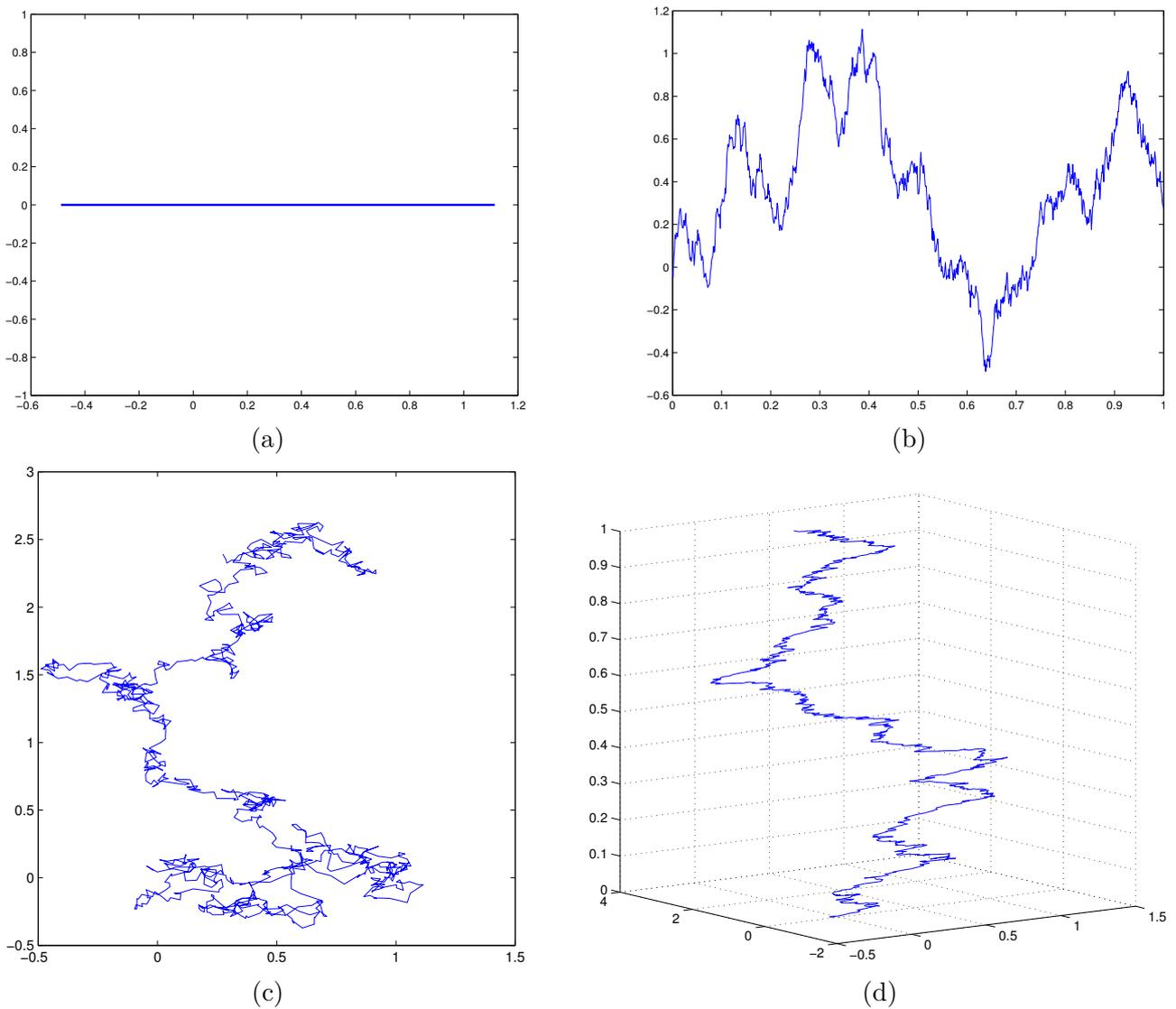
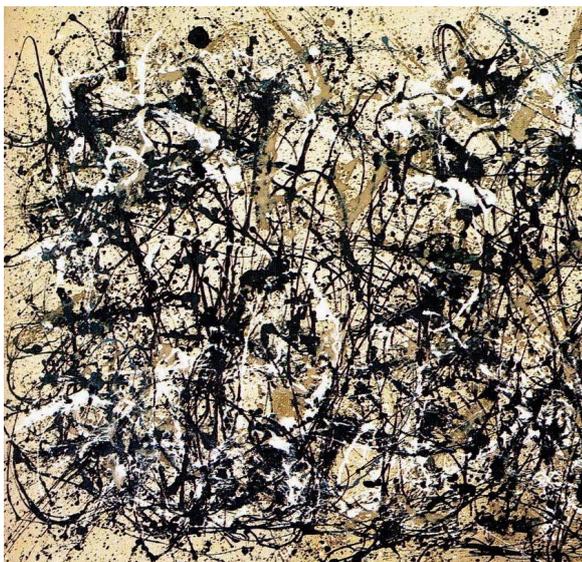


FIGURE 1.7 – Illustration du graphe (a) (resp. (c)) et de la traînée (b) (resp. (d)) d'un mouvement brownien 1-D $t \mapsto B_t$ (resp. d'un mouvement brownien 2-D $t \mapsto (B_t^1, B_t^2)$).



(a)



(b)

FIGURE 1.8 – (a) Autumn Rhythm (Number 30) de (b) Jackson Pollock pratiquant le *drip painting*.

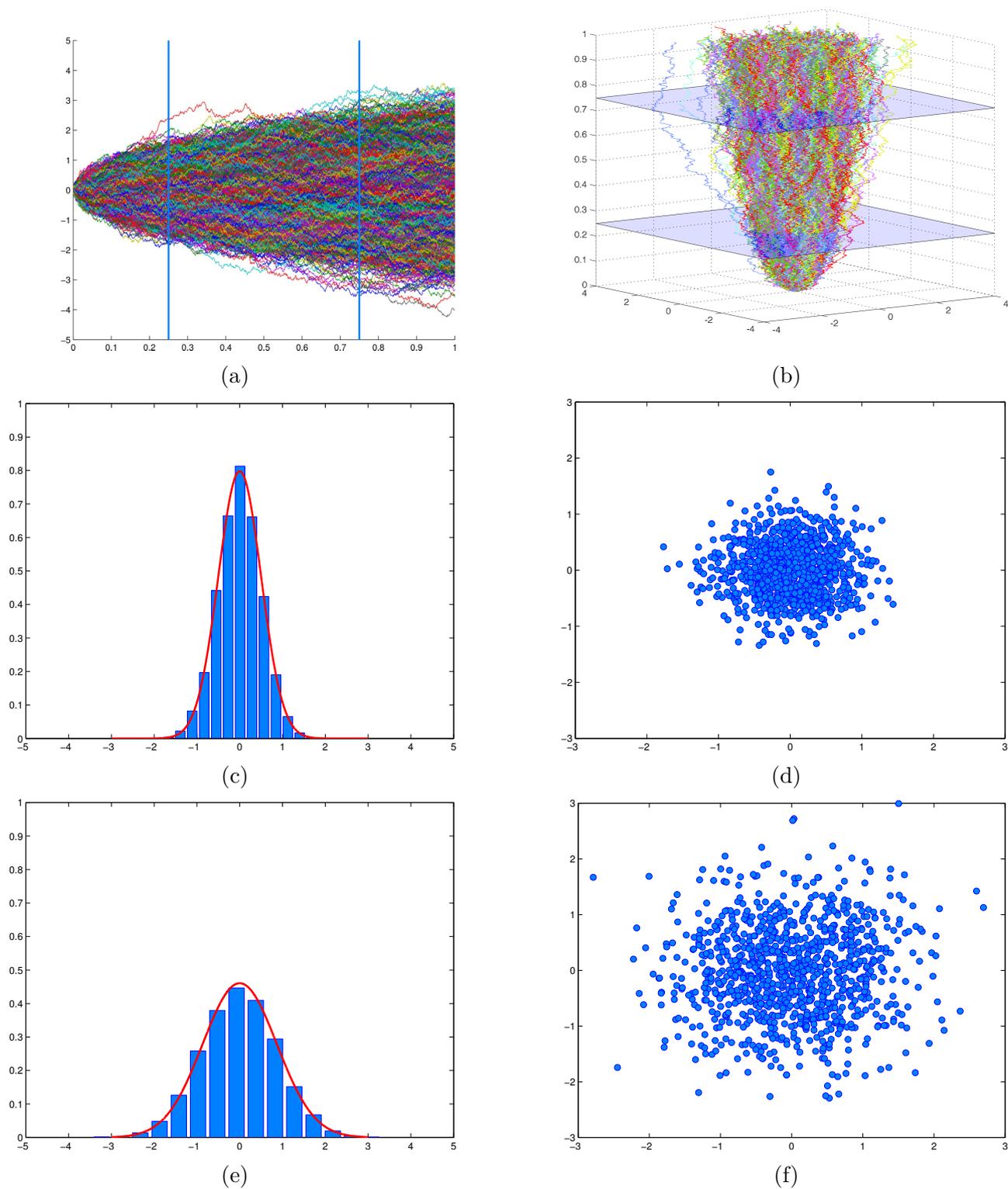


FIGURE 1.9 – (a)-(b) Simulation de N réalisations 1-D et 2-D afin de visualiser le comportement statistique, (c)-(d)-(e)-(f) la distribution des positions dans des coupes révèle le processus de diffusion gaussien.

Ainsi comme le mouvement brownien est à trajectoires continues, la Proposition 1.3 assure que B est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{C}_0))$. Par conséquent elle définit une mesure image \mathcal{W}_0 (Remarque 1.2), appelée *mesure de Wiener*, en transportant la mesure \mathbb{P} sur l'espace d'état :

$$\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{W}_0(f) = \mathbb{P}(B^{-1}(f)) .$$

Cela définit un nouvel espace probabilisé $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{C}_0), \mathcal{W}_0)$, appelé espace de Wiener $\mathbf{W}(\mathbb{R})$, sur lequel on peut définir d'après la Proposition 1.2 un processus canonique, à savoir l'identité $\text{id}_{\mathbf{W}(\mathbb{R})}$, de même loi que B , qui modélise le choix au hasard d'une fonction continue nulle en zéro selon une certaine distribution \mathcal{W}_0 qui correspond à ce qu'on attend d'un mouvement brownien. Plus précisément, puisque les lois finies dimensionnelles de B , $\mathcal{W}_0(C) = \mathbb{P}[(B_{t_1}, \dots, B_{t_d}) \in C]$ caractérisent entièrement \mathcal{W}_0 , et que ces quantités ne dépendent pas du brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ d'après la Proposition 1.9, on en déduit que \mathcal{W}_0 est déterminée de manière unique et est la loi de tous les browniens de dimension d .

1.5 Intégrale de Wiener

L'isométrie \mathbf{W} est une mesure gaussienne, à partir de laquelle on peut définir l'intégrale de Wiener¹⁵ suivante d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$:

$$\int_E f(x) \mathbf{W}(dx) = \int_E f(x) dB(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}(f \mathbf{1}_E), \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad (1.14)$$

avec $f \mathbf{1}_E \in L^2$ car $\|f \mathbf{1}_E\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} < \infty$, et

$$\int_E f(x) \mathbf{W}(x) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_E f(x)^2 dx\right) .$$

On peut montrer différemment qu'il existe une unique isométrie $\mathcal{I} : L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{I}(\mathbf{1}_{[0,t]}) = B_t$, et que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, $\mathcal{I}(f)$ est une variable gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx$, et telle que $\mathbb{E}[\mathcal{I}(f_i)\mathcal{I}(f_j)] = \langle f_i, f_j \rangle_{L^2}$. En effet on commence par établir ces résultats pour une fonction en escalier

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(x),$$

et par linéarité on doit avoir

$$\mathcal{I}(f) = \sum_{i=1}^n c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

qui est une variable gaussienne centrée dont il est facile de calculer la covariance étant donné que les accroissements $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont indépendants, centrés, et de variance $t_{i+1} - t_i$:

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}(f)^2] = \sum_i c_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx = \|f\|_2^2 .$$

Les fonctions en escalier étant denses dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, \mathcal{I} se prolonge par continuité en une unique application vérifiant l'équation ci-dessus. Ou plus simplement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une

15. Notez que l'on intègre la fonction par rapport à un mouvement brownien, motivé par le fait que pour les fonctions en escaliers on peut définir $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[s,t]}(x) dB = \int_s^t dB = B_t - B_s = \mathbf{W}(\mathbf{1}_{[0,t]} - \mathbf{1}_{[0,s]}) = \mathbf{W}(\mathbf{1}_{[s,t]})$, qui est une variable aléatoire gaussienne. On n'intègre pas par rapport à la mesure de Wiener \mathcal{W}_0 , utilisée quant à elle pour les intégrales fonctionnelles type intégrale de Feynman en mécanique quantique.

suite de fonctions en escalier convergent vers f dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R})_+, \lambda)$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et $(\mathcal{I}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ l'est également puisque $\|\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$ par isométrie établie sur les fonctions en escalier, donc elle est convergente car l'espace est complet pour la norme 2, et on pose

$$\mathcal{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(x) dB = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dB ,$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$. Par unicité de l'isométrie on a $\mathcal{I} = \mathbf{W}$ et on retrouve (1.14).

Plus généralement :

Proposition 1.12 (PROCESSUS ISONORMAL)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe quelconque. Il existe un processus gaussien $\{\mathbf{W}(h)\}_{h \in \mathcal{H}}$ indexé par \mathcal{H} , appelé bruit blanc ou processus isonormal, tel que $\mathbb{E}[\mathbf{W}(h)] = 0$ et

$$\mathbf{R}(h_1, h_2) = \text{Cov}[\mathbf{W}(h_1), \mathbf{W}(h_2)] = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} .$$

Preuve :

L'existence est assurée par la Proposition 1.4 dans la mesure où

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbf{R}(h_i, h_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \langle h_i, h_j \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i h_i, \sum_{j=1}^n a_j h_j \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{i=1}^n a_i h_i \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0 .$$

□

De plus on montre que cette isométrie \mathbf{W} est linéaire :

Proposition 1.13 (LINÉARITÉ DU PROCESSUS ISONORMAL)

Le processus isonormal vérifie

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{W}(\alpha h) = \alpha \mathbf{W}(h) , \tag{1.15}$$

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2, \quad \mathbf{W}(h_1 + h_2) = \mathbf{W}(h_1) + \mathbf{W}(h_2) . \tag{1.16}$$

Preuve :

La première relation vient du fait que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(\alpha h) - \alpha \mathbf{W}(h)|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(\alpha h)|^2 \right] + \alpha^2 \mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(h)|^2 \right] - 2\alpha \text{Cov}(\mathbf{W}(\alpha h), \mathbf{W}(h)) , \\ &= \|\alpha h\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\alpha \langle \alpha h, h \rangle_{\mathcal{H}} = 0 , \end{aligned}$$

et la seconde provient de la règle de Pythagore sur \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(h_1 + h_2) - \mathbf{W}(h_1) - \mathbf{W}(h_2)|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(h_1 + h_2)|^2 \right] + \mathbb{E} \left[|\mathbf{W}(h_1) + \mathbf{W}(h_2)|^2 \right] - 2\text{Cov}(\mathbf{W}(h_1 + h_2), \mathbf{W}(h_1) + \mathbf{W}(h_2)) , \\ &= \|h_1 + h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} - 2(\langle h_1 + h_2, h_1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle h_1 + h_2, h_2 \rangle_{\mathcal{H}}) , \\ &= \|h_1 + h_2\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} - \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 - \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 = 0 . \end{aligned}$$

□

Et on peut définir de même l'intégrale de Wiener sur \mathcal{H} par (1.14).

On peut tout à fait définir dans le cas multidimensionnel des intégrales stochastiques sur \mathbb{R}^d . Donnons un aperçu de la construction de cet objet, qui nous permettra dans la section suivante de caractériser des champs aléatoires définis sur \mathbb{R}^d , dont on donnera une représentation spectrale sous forme d'intégrale stochastique.

Soit $\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{F}, \mu(A) < +\infty\}$ et $f \in \mathcal{S}_d$ une fonction élémentaire symétrique à d variables, définie comme suit :

$$f(t_1, \dots, t_d) = \sum_{i_1, \dots, i_d} c_{i_1, \dots, i_d} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \dots \times A_{i_d}},$$

où c_{i_1, \dots, i_d} est égal à 0 si deux indices de i_1, \dots, i_d sont égaux, et les A_i des ensembles disjoints de \mathcal{B}_0 . On définit l'intégrale stochastique multiple pour ces fonctions élémentaires comme étant la quantité :

$$I_d(f) = \sum_{i_1, \dots, i_d} c_{i_1, \dots, i_d} \mathbf{W}(A_{i_1}) \cdots \mathbf{W}(A_{i_d}).$$

Alors on démontre les propriétés suivantes (cf. (RODÓN, 2006) pour la preuve) :

(i) $I_d(f)$ est linéaire,

(ii) $I_d(f) = I_d(\tilde{f})$ où \tilde{f} est la symétrisation de f c.-à-d. :

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(d)}),$$

$$(iii) \mathbb{E}[I_d(f)I_p(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } d \neq p \\ d! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(\Omega^d)} & \text{si } d = p \end{cases}.$$

En prenant $f = g$ dans (iii) on obtient :

$$\mathbb{E}[I_d(f)^2] = d! \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega^d)}^2 \leq d! \|f\|_{L^2(\Omega^d)}^2$$

Il s'en suit que l'opérateur $f \mapsto I_d(f)$ peut s'étendre en un opérateur linéaire et continu de $L^2(\Omega^d)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant les propriétés (i), (ii) et (iii) et on décide d'écrire l'intégrale stochastique

$$\int_{\Omega^d} f(t_1, \dots, t_d) \mathbf{W}(dt_1) \cdots \mathbf{W}(dt_d) \equiv \int_{\Omega^d} f(\mathbf{t}) \mathbf{W}(d\mathbf{t}).$$

1.6 Représentations spectrales

Définition 1.16 (FONCTION DÉFINIE POSITIVE)

Une fonction f sur \mathbb{R}^d à valeurs réelles est dite définie positive si pour tout $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j f(t_i - t_j) \geq 0.$$

Exemple 1.4. Si $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ est un champ gaussien stationnaire, il existe par définition une fonction K , appelée fonction d'autocovariance, telle que la covariance de X s'écrivent $\mathbf{R}(s, t) = K(t - s)$, et la fonction K est de fait définie positive.

Théorème 1.5 (THÉORÈME DE BOCHNER)

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si et seulement si $f(\mathbf{0}) \geq 0$ et il existe une mesure de probabilité symétrique μ sur \mathbb{R}^d telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^d} e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mu(d\boldsymbol{\xi}). \quad (1.17)$$

En d'autres termes¹⁶ il existe un vecteur aléatoire symétrique \mathbf{Z} sur \mathbb{R}^d tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) \mathbb{E} \left[e^{j\langle \mathbf{x}, \mathbf{Z} \rangle} \right]. \quad (1.18)$$

Proposition 1.14 (MESURE SPECTRALE D'UN CHAMP STATIONNAIRE GAUSSIEN)

Si X est un champ stationnaire gaussien centré tel que sa fonction d'autocovariance K est continue¹⁷, alors par le théorème de Bochner il existe une unique mesure finie μ sur \mathbb{R}^d telle que

$$K(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{j\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mu(d\boldsymbol{\xi}).$$

La mesure μ est appelée mesure spectrale du champ X . Si μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\boldsymbol{\xi}$, alors cette densité est appelée densité spectrale de X .

Proposition 1.15 (REPRÉSENTATION SPECTRALE D'UN CHAMP STATIONNAIRE GAUSSIEN)

Soit X_t , $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, un champ stationnaire gaussien centré de fonction d'auto-covariance $K(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[X_{t+\mathbf{h}}X_t]$. Supposons que K est continue et possède comme mesure spectrale $\mu(d\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$. Remarquons que $K(\mathbf{h}) = K(-\mathbf{h})$, et par le théorème de Bochner $K(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{j\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$, soit $f(\boldsymbol{\xi}) = f(-\boldsymbol{\xi})$ qui est une fonction définie positive de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors le champ gaussien défini par

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f(\boldsymbol{\xi})} e^{j\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}),$$

avec $\widehat{\mathbf{W}}$ défini en (1.22) est indistinguable de X et appelé représentation spectrale de X .

Preuve :

Par isométrie on a

$$\mathbb{E}[Y_t Y_s] = \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f(\boldsymbol{\xi})} e^{j\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f(\boldsymbol{\xi})} e^{j\langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\xi}) e^{j\langle \mathbf{t}-\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\boldsymbol{\xi} = K(\mathbf{t}-\mathbf{s}),$$

d'où Y_t et X_t sont centrés et ont même covariance, et donc sont indistinguishables car gaussiens. \square

Il existe un énoncé équivalent pour les champs aléatoires dont seulement les accroissements sont stationnaires :

16. La transformée de Fourier de la mesure finie μ n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de \mathbf{Z} .

17. La continuité de K est liée à la continuité en moyenne quadratique de X , qui sera en général vérifiée. Cette continuité est beaucoup moins contraignante que la continuité des trajectoires qui, elle, sera généralement mise en défaut.

Proposition 1.16 (MESURE SPECTRALE D'UN CHAMP À ACCROISSEMENTS STATIONNAIRES)

Soit X un champ gaussien à accroissements stationnaires. Si de plus $X_0 = 0$ p.s. et la covariance est continue, alors il existe une mesure finie μ sur \mathbb{R}^d , appelée mesure spectrale, satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, \|\xi\|^2) \mu(d\xi) < +\infty, \quad (1.19)$$

et une matrice Σ symétrique définie positive, telles que

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{j\langle \mathbf{t}, \xi \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{s}, \xi \rangle} - 1 \right) \mu(d\xi) + \mathbf{t} \Sigma \mathbf{s}.$$

De même les champs gaussiens à accroissements stationnaires possèdent une représentation spectrale :

Proposition 1.17 (REPRÉSENTATION D'UN CHAMP À ACCROISSEMENTS STATIONNAIRES)

Soit X un champ gaussien à accroissements stationnaires, tel que $X_0 = 0$ p.s., dont la covariance est continue, et de mesure spectrale $\mu(d\xi) = f(\xi) d\xi$. Comme dans le cas stationnaire f est appelée la densité spectrale de X . Alors,

$$Y_{\mathbf{t}} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{j\langle \mathbf{t}, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \widehat{\mathbf{W}}(d\xi) + \langle \mathbf{t}, \mathbf{N} \rangle,$$

où \mathbf{N} est un vecteur gaussien centré de covariance Σ , est indistinguable de X et est appelée représentation spectrale de X .

1.7 Mouvement brownien fractionnaire

Nous avons jusqu'ici rappelé comment le mouvement brownien a émergé et s'est construit à l'intersection de différents domaines : biologie, physique, mathématiques. Un autre aspect important de la théorie du mouvement brownien, est ses liens avec la finance. En effet, la fameuse équation d'Einstein (1.1) décrivant la statistique des carrés des déplacements des particules browniennes en fonction du temps, figurait déjà dans les travaux de thèse de Louis **BACHELIER** (1900), qui proposa un modèle de marche aléatoire permettant de décrire l'évolution de certains cours de la Bourse. Il fit notamment le lien avec l'équation de la chaleur de Fourier et les phénomènes de diffusion (il parle alors de « rayonnement »). Le cours de la bourse peut être assimilé à une particule, dont la trajectoire est déterminée par les millions d'achats ou de ventes qui sont autant d'actions individuelles émanant d'acheteurs qui ne se connaissent pas. Ainsi une fois que le mouvement collectif a provoqué une fluctuation du cours, ce dernier « perd la mémoire » : il peut évoluer indifféremment à la hausse ou à la baisse. Étant donné le nombre d'individus, présentant une diversité d'opinions, qui achètent et qui vendent, le théorème limite central amène à considérer la distribution comme étant normale. Ces constats étaient déjà établis 40 ans auparavant par Jules **REGNAULT** (1863) qui analysa la spéculation de court terme (dit aussi *agiotage*)¹⁸ comme un jeu de type pile ou face¹⁹, et qui par ailleurs conjectura

18. La motivation initiale était d'ordre éthique. Suite aux crises diverses qui avaient frappé le pays après l'effondrement du système Law en 1724, qui furent attribuées à l'agiotage et avaient marqué les esprits, il s'est ensuivi une phase marquée par des périodes spéculatives avec un marché se révélant être un outil efficace de financement de l'économie, dont Regnault cherchera à montrer l'intérêt, tout en étudiant la « bonne » et « mauvaise » spéculation en rapport à son bon fonctionnement.

19. Comme dans un jeu de pile ou face, la hausse ou la baisse des cours boursiers sont indépendantes, et les probabilités de perte ou de bénéfice sont toujours égales à 1/2. Selon ces hypothèses, ni la hausse ni la

la formule (1.1) et la vérifia empiriquement à partir des données sur la rente française :

“ Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse, et cette loi, qui ne paraît pas avoir jamais été soupçonnée jusqu'à présent, nous la formulons ici pour la première fois : l'écart des cours est en raison directe de la racine carrée des temps. ”

Les travaux de JOVANOVIĆ (2000, 2001, 2004, 2009) et WALTER (2013) relatent les apports de Regnault à l'origine de la théorie financière, qui furent poursuivis par Bachelier. En effet Bachelier reprend dans sa thèse les hypothèses et les concepts de Regnault. L'apport considérable de Bachelier se situe sur le plan mathématique : il propose la première formulation mathématique du modèle de marche aléatoire en temps continu, formulation que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de processus de Wiener ou de mouvement brownien. À ce titre, la thèse de Bachelier peut être considérée comme le premier travail de mathématiques financières connu. Toutefois la théorie de la spéculation proposée par Bachelier ne connut qu'un faible retentissement, témoignant d'un intérêt moindre pour ces questions dans la communauté mathématique de l'époque. Ces travaux n'ont ainsi connu pendant un temps qu'une faible dynamique de recherche, ce qui *a posteriori* a fait l'objet d'un grand nombre de commentaires historiques (EKELAND et coll., 2002; TAQQU, 2001).

Il fallut attendre les travaux de Andreï KOLMOGOROFF (1931), Paul Samuelson et son étudiant en thèse KRUIZENGA (1956), et enfin Benoit MANDELBROT (1984, 1989) pour que les apports de Bachelier soient mis en lumière. Mandelbrot avait travaillé sur les occurrences des mots dans un texte, en s'intéressant à la loi de Zipf-Estoup (PETRUSZEWYCZ, 1973), qui décrit la distribution des mots par l'utilisation d'un classement par ordre décroissant d'occurrence de ces derniers. Graphiquement on constate que quelques mots sont extrêmement utilisés, d'autres beaucoup moins. La courbe obtenue plonge très rapidement, puis s'aplatit pour décroître très lentement²⁰. Après avoir apporté des démonstrations de la loi de Zipf-Estoup par la théorie de l'information de Shannon (MANDELBROT, 1953, 1961), Mandelbrot transposa ces observations et outils d'analyse à la distribution des revenus et patrimoines (MANDELBROT, 1960). Ce qui l'amena à rencontrer Houthakker, qui suscita son intérêt pour l'étude des prix des contrats à terme sur le coton à la Bourse de Chicago. La courbe de ces prix avaient exactement la même allure que ceux auxquels s'intéressait Mandelbrot, et les cours de la Bourse devinrent son nouvel objet d'étude. Il cerna deux phénomènes importants (CONT, 2011) dont le modèle de Bachelier ne rendait pas compte et qui n'étaient jusqu'alors pas considérés dans les modèles économétriques :

- Il montra que les cours boursiers ne semblaient pas suivre une loi gaussienne²¹, selon le modèle de Bachelier, mais semblaient obéir à une « loi puissance » (MANDELBROT, 1963). Il introduisit alors la classe des processus de Lévy stables. Ces distributions à queue lourde, contrairement à la loi normale, autorisent le fait que des événements rares puissent se produire, typiquement la présence de discontinuités correspondant à une chute

baisse ne permettent d'anticiper le sens des variations futures. Regnault explique que l'espérance de gain du joueur est nulle. Enfin, ajoute-t-il, le cours actuel reflète toutes les informations publiques disponibles à partir desquelles les intervenants établissent leur évaluation de la valeur du titre. Donc puisque les cours boursiers demeurent indépendants des actions des individus et sont régis par des lois objectives qui transcendent les individus, Regnault conclut à l'équité de la Bourse.

20. Ce type de distribution avait été découvert à la fin du XIX^e siècle, notamment à travers la loi de Pareto (ARNOLD, 2015), qui observa que dans une population le nombre de personnes dont les revenus excèdent x est souvent bien approché par une fonction $Cx^{-\alpha}$ pour certaines constantes C et α positives.

21. Mandelbrot n'était pas le premier à faire ce constat, il cite notamment l'économiste Wesley C. Mitchell qui en 1915 mis en exergue le fait que les cours boursiers ne suivaient pas exactement une distribution gaussienne, mais une distribution dite à « queue lourde » (MITCHELL, 1915). Par exemple, une chute du Dow Jones de 6,8%, comme elle se produisit le 31 août 1998 avait une probabilité de se réaliser équivalente à une fois tous les 100 000 ans selon un modèle gaussien.

brutale des cours boursiers, phénomène qu'il nomme *syndrome de Noé* par allusion au mytique déluge.

- Une autre contribution de Mandelbrot fut de modéliser les dépendances temporelles ou persistances observées dans les cours boursiers, qui se « concentrent » dans le temps, les petites variations sont le plus souvent suivies de petites variations, et les grandes variations suivies par de grandes variations. Il nomma ce phénomène de persistance des variations boursières et leur concentration dans le temps *syndrome de Joseph*. Ces dépendances pouvant parfois être à longue portée. Ainsi le mouvement brownien dont les accroissements sont indépendants s'avère là aussi inadéquat pour modéliser les séries boursières²² (MANDELBROT, 1972, 1971a,b). À partir de ses travaux antérieurs avec Van Ness sur la dépendance à longue portée en hydrologie (MANDELBROT et WALLIS, 1968), Mandelbrot proposa de modifier le modèle brownien de Bachelier (MANDELBROT et VAN NESS, 1968) et popularisa alors le **mouvement brownien fractionnaire**, ou *Fractional Brownian Motion* (FBM) introduit par KOLMOGOROV (1940), qui allait intégrer ces propriétés, et en quelque sorte faire retrouver la mémoire aux cours boursiers. Cette fois les accroissements sont gaussiens mais fortement dépendant même sur des périodes éloignées.

Cette généralisation du mouvement brownien s'obtient en modifiant la formule (1.1) comme suit :

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = |t - s|^{2H}, \quad 0 < H < 1. \quad (1.20)$$

On retrouve le mouvement brownien pour $H = \frac{1}{2}$. En développant le carré dans l'espérance on trouve directement que la covariance est :

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}}{2}.$$

En particulier pour $H = \frac{1}{2}$, on a bien $\frac{1}{2}(t + s - |t - s|) = \min(s, t)$.

Définition 1.17 (MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE)

Soit $0 < H < 1$. Il existe un unique processus gaussien qui est H -autosimilaire, à accroissements stationnaires et tel que $\text{Var}(B_H(1)) = 1$. Le mouvement brownien fractionnaire $(B^H(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien continu centré, et dont la covariance est donnée par

$$\text{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}}{2}. \quad (1.21)$$

22. Les théories et pratiques financières se sont complexifiées au gré des découvertes scientifiques et des crises financières. Bachelier formalisa l'hypothèse de marche aléatoire pour représenter les cours boursiers. Samuelson réhabilita bien plus tard les idées de Bachelier pour montrer que les prix des actifs pouvaient être modélisés par des marches aléatoires. Mandelbrot mis en évidence les lacunes du modèle de Bachelier et montra que les modèles utilisés par les économètres sous-estimaient grandement la fréquence des risques. Ces travaux rencontrèrent une grande résistance de la part des économistes de son temps, et les objets mathématiques nouvellement introduits mirent un certain temps avant de faire partie de la boîte à outils de la modélisation financière, certains modèles gaussiens simplistes continuant à être utilisés en pratique avec une mauvaise gestion du risque. De Regnault à Mandelbrot chacune des marches (aléatoires), permet d'apprécier la façon dont les choix des hypothèses et des instruments théoriques façonnent, parfois durablement, notre représentation des phénomènes étudiés. Comme dit l'adage dérivé d'une citation de Maslow : « Tout ressemble à un clou pour qui ne possède qu'un marteau ». De même aujourd'hui les travaux de synthèse d'Eugène Fama sur l'efficacité informationnelle des marchés financiers, dans la filiation de Regnault d'un équilibre dynamique, sont des hypothèses qui, suite aux crises de 1987 et de 2008, se voient questionnées (GIRAUD, 2014) & (BOULEAU, 2013).

Preuve :

Ci-dessous est établie l'existence du FBM possédant les propriétés de la définition.

Désignons par $\mathbf{R}(s, t)$ la covariance donnée par (1.21), et considérons avec la notation $x_+ = \max(x, 0)$ la fonction :

$$\Phi(t, x) = (t - x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On vérifiera dans la Proposition 1.18 que $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x)^2 dx < +\infty$ pour $H < 1$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x)\Phi(s, x) dx = C_1(H)\mathbf{R}(s, t), \quad \forall t, s \geq 0,$$

où $C_1(H)$ est une constante positive ne dépendant que de H . Ainsi,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbf{R}(h_i, h_j) = \frac{1}{C_1(H)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \int_{\mathbb{R}} \Phi(t_i, x)\Phi(t_j, x) dx = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^n a_i \Phi(t_i, x) \right|^2 dx \geq 0,$$

ce qui prouve l'existence du processus.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que tout processus (X_t) non-dégénéré H -autosimilaire, à accroissements stationnaires et tel que $\text{Var}(X_1) = 1$ a même covariance que le FBM et donc sont indistinguables puisque gaussiens. En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t X_s] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]), \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - \mathbb{E}[X_{t-s}^2]), \\ &= \frac{1}{2} (|t|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] + |s|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] - |t-s|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2]), \\ &= \mathbf{R}(s, t) \mathbb{E}[X_1^2] = \mathbf{R}(s, t), \end{aligned}$$

par stationnarité pour le passage de la première à la deuxième ligne, et par autosimilarité pour la deuxième à la troisième. □

Remarque 1.9. Le principal intérêt du FBM repose sur le fait que ses accroissements ne sont plus indépendants. Ainsi on peut calculer la fonction de corrélation qui mesure la dépendance entre les accroissements $B^H(t) - B^H(0)$ et $B^H(t+h) - B^H(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(B^H(t+h) - B^H(t)) (B^H(t) - B^H(0)) \right] &= \mathbb{E} [B^H(t+h)B^H(t)] - \mathbb{E} [B^H(t)^2], \\ &= \frac{1}{2} (t^{2H} + (t+h)^{2H} - (t+h-t)^{2H}) - t^{2H}, \\ &= \frac{1}{2} ((t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H}). \end{aligned}$$

- Si $H = 1/2$ cette quantité est nulle, on a donc bien des accroissements qui sont décorrélés, donc indépendants puisque gaussiens. On retrouve le mouvement brownien standard, illustré Figure 1.10b.
- Si $H > 1/2$ la fonction de corrélation est positive, donc les accroissements $B^H(t) - B^H(0)$ et $B^H(t+h) - B^H(t)$ tendent à être de même signe. Si $B^H(t)$ a eu tendance à augmenter dans le passé, elle tendra à augmenter dans le futur, et réciproquement. Ce processus est *persistant* : les petites valeurs sont suivies de petites valeurs, et les grandes valeurs de grandes valeurs²³. Les processus persistants ont donc une mémoire à long terme s'accompagnant d'une plus grande régularité comme en atteste la Figure 1.10c.

23. Par exemple, la série annuelle des inondations du Nil avant l'édification du barrage d'Assouan, avait un coefficient H égal à 0.74, traduisant le fait que les années de sécheresses et années de pluies tendaient à se succéder, et provoquer des phases de disettes et d'abondance sur plusieurs années. C'est la raison pour laquelle Mandelbrot avait baptisé ce phénomène *syndrome de Joseph* en référence au récit biblique : « Sept années d'abondance, sept années de vaches maigres ». Ces crues du Nil avaient été étudiées par hydrologue du nom de Hurst, qui avait pour mission de choisir la taille du barrage pour réguler les crues du fleuve et donc réduire

- Si $H < 1/2$ la fonction de corrélation est négative, donc inversement les accroissements tendent à être de signe contraire, si la variable a eu tendance à augmenter dans le passé, elle tendra à diminuer dans le futur, et réciproquement. On parle alors de processus *anti-persistent*, qui est synonyme d'une plus grande irrégularité puisque de petites valeurs succèdent à de grandes valeurs, comme on peut le voir Figure 1.10a.

Ces propriétés peuvent également être interprétées en terme de diffusion comme on l'a vu pour le mouvement brownien standard. Dans le cas d'un FBM de coefficient de Hurst $H > 1/2$ on a un effet de sur-diffusion, tandis que pour $H < 1/2$ on a un effet de sous-diffusion²⁴. Enfin la dimension de Hausdorff du graphe du FBM est (ADLER, 1977; FALCONER, 1990) :

$$\dim_{\mathbf{H}}(\mathcal{G}_{B^H}) = 2 - H \quad p.s. .$$

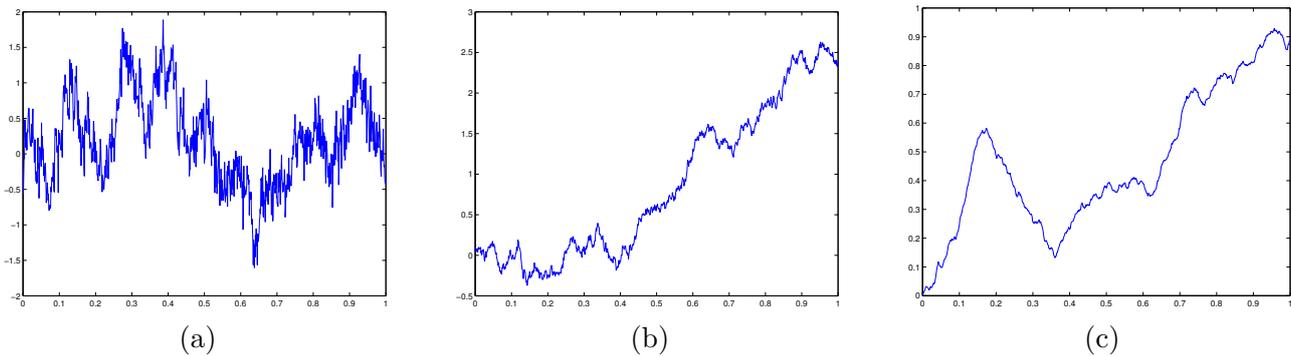


FIGURE 1.10 – Réalisations du FBM pour différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$.

Une autre façon de définir le mouvement brownien fractionnaire est d'utiliser l'intégrale stochastique définie en section 1.5, ou une autre version par la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne à valeurs réelles. Nous exposons les deux types de représentations, dites à moyenne mobile pour la première et harmonisable pour la seconde, en s'appuyant sur (SAMORODNITSKY et TAQQU, 1994).

Proposition 1.18 (REPRÉSENTATION INTÉGRALE PAR MOYENNE MOBILE DU FBM)

Soit $0 < H < 1$. Alors tout mouvement brownien fractionnaire $(B^H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ possède la représentation intégrale

$$B^H(t) = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right) dB_x, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

le risque de famine en Egypte. À partir d'une technique appelée *Rescaled Range Analysis*, qui sera réutilisée par Mandelbrot lui-même, il analysa les données et détermina la valeur du coefficient H , auquel Mandelbrot lui donna plus tard le nom de coefficient de Hurst.

24. On peut lire dans l'ouvrage *Géographie fractale* de DAUPHINÉ (2011), la chose suivante : « Le mouvement brownien, équivalent d'une diffusion normale, se rencontre rarement dans la nature, et encore moins dans les territoires humanisés. Souvent, la diffusion est contrariée ou accélérée par d'innombrables mécanismes. Par exemple les polluants se diffusent plus vite dans une étendue marine animée d'un courant marin ou dans l'air agité par des vents, comme le démontra l'exemple du nuage radioactif de Tchernobyl. Poussé par des vents d'Est, exceptionnels à cette altitude, il menaça l'Europe du Nord et l'Europe occidentale. Inversement, dans une métropole, la diffusion des hommes est entravée et ralentie par de nombreux obstacles : les bâtiments, les voies ferrées ou les fleuves dans les villes estuaires telles Bordeaux ou Nantes. Des entraves similaires existent dans les phénomènes naturels. [...] Et c'est encore plus vrai des phénomènes sociaux, où les effets de mémoire et d'apprentissage sont sans cesse présents. Ce qui se traduit par des formes de mouvements diffusion anormaux. »

où

$$C_1(H) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right)^2 dx + \frac{1}{2H} \right)^{1/2}.$$

Preuve :

Pour que l'intégrale soit bien définie il faut que l'intégrande soit localement de carré sommable. Montrons le pour $x \rightarrow -\infty$, les autres cas étant similaires. Définissons la fonction $g(z) = (1+tz)^{H-1/2}$ pour t fixé, et calculons la limite du quotient suivant :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(t-x)^{H-1/2} - (-x)^{H-1/2}}{(-x)^{H-3/2}} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(t+y)^{H-1/2} - (y)^{H-1/2}}{(y)^{H-3/2}}, \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} y \left[\left(1 + \frac{t}{y} \right)^{H-1/2} - 1 \right], \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = g'(0) = H - 1/2, \end{aligned}$$

avec les changements de variable $y = -x$ et $z = 1/y$. Ainsi quand $x \rightarrow -\infty$ l'intégrande est équivalente à $(H - 1/2)(-x)^{H-3/2}$ qui est intégrable au voisinage de $-\infty$.

Calculons ensuite la variance suivante, pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(t)^2] &= \frac{1}{C_1(H)^2} \int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right)^2 dx, \\ &= \frac{1}{C_1(H)^2} t^{2H-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(1 - \frac{x}{t} \right)_+^{H-1/2} - \left(-\frac{x}{t} \right)_+^{H-1/2} \right)^2 dx, \\ &= \frac{1}{C_1(H)^2} t^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left((1-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right)^2 du, \\ &= \frac{1}{C_1(H)^2} t^{2H} \left[\int_{-\infty}^0 \left((1-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} \right)^2 du + \int_0^1 (1-u)^{2H-1} du \right], \\ &= \frac{1}{C_1(H)^2} t^{2H} \left[\int_0^{+\infty} \left((1+x)^{H-1/2} - (x)^{H-1/2} \right)^2 dx + \frac{1}{2H} \right], \\ &= t^{2H}, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = x/t$ et le fait que $\int_0^1 (1-u)^{2H-1} du = \frac{1}{2H}$. Un raisonnement analogue montre que $\mathbb{E} [B^H(t)^2] = |t|^{2H}$ pour $t < 0$. Posons alors $Z = B^H(t) - B^H(s)$ pour t et s fixés, soit :

$$Z = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (s-x)_+^{H-1/2} \right) dB_x.$$

Sa variance est ainsi égale après changement de variable $u = x - s$ à

$$\mathbb{E} [Z^2] = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-s-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right) dx = |t-s|^{2H}.$$

Finalement,

$$\text{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{1}{2} (\mathbb{E} [B^H(t)^2] + \mathbb{E} [B^H(s)^2] - \mathbb{E} [(B^H(t) - B^H(s))^2]) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

ce qui termine de prouver que l'on retombe bien sur la définition du FBM avec $\text{Var}(B_H(1)) = 1$. On peut également expliciter la constante de normalisation (STOEV et TAQQU, 2006, Lemme 4.1) :

$$C_1(H) = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + H) \Gamma(2 - 2H)}{2H \Gamma(\frac{3}{2} - H)}}.$$

□

Sous cette forme intégrale dite à moyenne mobile, il est aisé de montrer que les trajectoires sont continues. Nous allons maintenant mentionner une autre forme intégrale intéressante, dite

harmonisable, à partir de laquelle nous allons construire nos modèles dans les chapitres suivants. Pour cela nous avons besoin de définir la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne à valeurs réelles. En particulier on a vu que l'isométrie \mathbf{W} définissait une mesure gaussienne, et que l'intégrale de Wiener était définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{W}(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, h_m \rangle_{L^2} N_m = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{m=0}^{\infty} h_m N_m dx ,$$

d'après (1.9), d'où l'expression de la mesure gaussienne à valeurs réelles :

$$\mathbf{W}(dx) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m N_m dx .$$

On définit ensuite sa transformée de Fourier comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \mathbf{W}(x), \quad \forall f \in \mathfrak{F}, \quad (1.22)$$

où \mathfrak{F} est l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui vérifie $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$, autrement dit les fonctions qui ont une transformée de Fourier réelle. Cela assure en effet que la variable $\int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(\xi)$ soit gaussienne et à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \mathbf{W}(x) , \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle \widehat{f}, h_m \rangle_{L^2} N_m , \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, \widehat{h}_m \rangle_{L^2} N_m , \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{\widehat{h}_m(\xi)} d\xi N_m , \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{\mathbf{W}}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\widehat{h}_m(\xi)} N_m d\xi .$$

On pourra consulter (SAMORODNITSKY et TAQQU, 1994, 7.2.2) pour plus de détails. $\widehat{\mathbf{W}}$ n'est plus une mesure gaussienne à proprement parler, mais par l'égalité de Parseval on conserve la propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(\xi) \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \mathbf{W}(x) \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x) \mathbf{W}(x) \right] = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi .$$

Nous pouvons maintenant énoncer la représentation harmonisable du FBM :

Proposition 1.19 (REPRÉSENTATION HARMONISABLE DU FBM)

Soit $0 < H < 1$. Alors tout mouvement brownien fractionnaire $(B^H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ possède la représentation harmonisable

$$B^H(t) = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{jt\xi} - 1}{j\xi} |\xi|^{-(H-1/2)} \widehat{\mathbf{W}}(\xi) , \quad (1.23)$$

ou

$$B^H(t) = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{jt\xi} - 1}{|\xi|^{H+1/2}} \widehat{\mathbf{W}}(\xi) , \quad (1.24)$$

avec la constante de normalisation

$$C_2(H) = \sqrt{\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)}}. \quad (1.25)$$

Preuve :

Le terme $|(e^{jt\xi} - 1)/j\xi|$ étant borné quand $\xi \rightarrow 0$ et se comportant comme $|\xi|^{-1}$ on a que l'intégrande est de carré sommable. L'expression de l'intégrande

$$\xi \mapsto \frac{1}{C_2(H)} \frac{e^{jt\xi} - 1}{j\xi} |\xi|^{-(H-1/2)},$$

provient moralement de la transformée de Fourier de

$$x \mapsto \frac{1}{C_1(H)} \left((t-x)_+^{H-1/2} - (-x)_+^{H-1/2} \right).$$

Une heuristique est esquissée dans (SAMORODNITSKY et TAQQU, 1994), et une preuve formelle est apportée dans (COHEN et ISTAS, 2013). Néanmoins il est possible de procéder autrement en vérifiant que le processus défini par cette représentation intégrale est autosimilaire et à accroissements stationnaires, par unicité du FBM vérifiant ces propriétés. En effet on a

$$\begin{aligned} X_{\alpha t} - X_{\alpha s} &= \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((e^{j\alpha t\xi} - 1) - (e^{j\alpha s\xi} - 1) \right) \frac{|\xi|^{-(H-1/2)}}{j\xi} \widehat{\mathbf{W}}(\xi), \\ &= \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} e^{j\alpha s\xi} \left(e^{j\alpha(t-s)\xi} - 1 \right) \frac{|\xi|^{-(H-1/2)}}{j\xi} \widehat{\mathbf{W}}(\xi), \\ \mathbb{E} [(X_{\alpha t} - X_{\alpha s})^2] &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{j\alpha(t-s)\xi} - 1 \right|^2 |\xi|^{-2H-1} d\xi, \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \alpha^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{j(t-s)\xi} - 1 \right|^2 |\xi|^{-2H-1} d\xi, \\ &= \mathbb{E} [(\alpha^H X_{t-s})^2]. \end{aligned}$$

Ainsi en prenant $\alpha = 1$ on a que $X_t - X_s$ et X_{t-s} sont deux v.a. normales centrées de même variance, donc on en déduit que les accroissements sont stationnaires; et pour $\alpha > 0$ les deux processus gaussiens centrés $(X_{\alpha t})_{t \in \mathbb{R}}$ et $(\alpha^H X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ont même fonction de covariance, donc sont indistinguables. Il reste à montrer que $\mathbb{E} [(B^H(1))^2] = 1$. Pour cela on utilise la relation

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \sin^2(bx) dx = \frac{\Gamma(a) \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{2^{a+1} b^a}, \quad -2 < \operatorname{Re}(a) < 0, \quad b > 0. \quad (1.26)$$

Ainsi on a bien

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{j\xi} - 1}{j\xi |\xi|^{H-1/2}} \right|^2 d\xi &= 2 \int_0^{+\infty} |\xi|^{-2H-1} \left((\cos \xi - 1)^2 + \sin^2 \xi \right) d\xi, \\ &= 8 \int_0^{+\infty} |\xi|^{-2H-1} \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi, \\ &= 8 \frac{\Gamma(-2H) \cos(-\pi H)}{2^{-2H+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2H}}, \\ &= 4\Gamma(-2H) \cos(-\pi H), \\ &= \frac{2 \times 2H\Gamma(-2H) \cos(-\pi H)}{H}, \\ &= \frac{2\Gamma(1-2H) \cos(-\pi H)}{H} \\ &= \frac{2\pi \cos(-\pi H)}{H\Gamma(2H) \sin(2\pi H)}, \\ &= \frac{\pi}{H\Gamma(2H) \sin(\pi H)}, \\ &= C_2(H)^2. \end{aligned}$$

en prenant $a = -2H$ et $b = 1/2$ dans la relation (1.26), et en utilisant dans l'ordre les relations $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $G(z)G(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. On obtient les mêmes résultats avec la deuxième forme (1.24) puisqu'en module elles sont égales, donc de même variance et covariance. \square

Par la suite on notera $C_H \equiv C_2(H)$. Puisque l'on sait maintenant que ces représentations harmonisables définissent bien le FBM, nous avons la relation

$$\mathbb{E} [B^H(t)^2] = \frac{1}{C_H^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{jt\xi} - 1|^2}{|\xi|^{2H+1}} d\xi = |t|^{2H} . \quad (1.27)$$

Par conséquent, par stationnarité, il vient :

$$\mathbf{R}(s, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{R}(s, s) + \mathbf{R}(t, t) - \mathbf{R}(s-t, s-t)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{js\xi} - 1)(e^{-jt\xi} - 1)}{C_H^2 |\xi|^{2H+1}} d\xi .$$

D'où la mesure et densité spectrale suivantes :

$$d\sigma = \frac{1}{C_H^2 |\xi|^{2H+1}} d\xi .$$

Remarque 1.10. La représentation harmonisable (5.6) possède donc une interprétation physique : le facteur $(e^{jt\xi} - 1)/(j\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de $[0, t]$ et assure la stationnarité des accroissements ; le terme $|\xi|^{-(H-1/2)}$ « colore » le bruit gaussien, puisqu'il contribue au terme $|\xi|^{-(H-1/2)}|^2 = \xi^{-(2H-1)}$ dans la densité spectrale, qui diverge aux basses fréquences $\xi \rightarrow 0$ quand $1/2 < H < 1$, n'est pas coloré pour $H = 1/2$, et tend vers zéro pour $0 < H < 1/2$.

Remarque 1.11. Les trajectoires du FBM sont höldériennes d'ordre $\alpha \in [0, H[$. En effet si on fixe $\alpha \in (0, H)$, en utilisant la stationnarité des accroissements et l'autosimilarité on a :

$$\mathbb{E} [|B^H(t) - B^H(s)|^\gamma] = \mathbb{E} [|B^H(t-s)|^\gamma] = |t-s|^{\gamma H} \mathbb{E} [|B^H(1)|^\gamma] ,$$

et en vertu du Théorème 1.3 on a que $\forall \alpha \in [0, \frac{\gamma H}{\gamma}]$ les trajectoires sont α -höldériennes.

Remarque 1.12. La relation $\mathbb{E} [|B^H(t) - B^H(s)|^2] = |t-s|^{2H}$ caractérise toujours une *hélice* dans un espace gaussien, mais en revanche pour $H \neq 1/2$ trois points $B^H(t_1), B^H(t_2), B^H(t_3)$ ne forment plus un triangle rectangle (les accroissements ne sont plus indépendants), comme on peut le voir Figure 1.11 tirée de (KAHANE, 1985) : pour $H < 1/2$ l'angle au sommet temps intermédiaire $B^H(t_2)$ est aigü, ainsi le passé « attire » le futur, tandis que pour $H > 1/2$ l'angle obtu témoigne du fait que le passé « repousse » le futur, ce qui est conforme à ce que nous mentionnons quant à la persistance ou anti-persistance (Remarque 1.9). Terminons par signaler (KAHANE, 1996) qu'il existe d'autres hélices que les hélices browniennes. Par exemple celles introduites par VON NEUMANN et SCHOENBERG (1941), où, considérant μ une mesure positive sur \mathbb{R} telle que $\int |\sin ut|^2 \mu(du) < +\infty$, alors $t \mapsto e^{jut} - 1$ définit une hélice dans $L^2(\mathbb{R}, \mu(du))$ par :

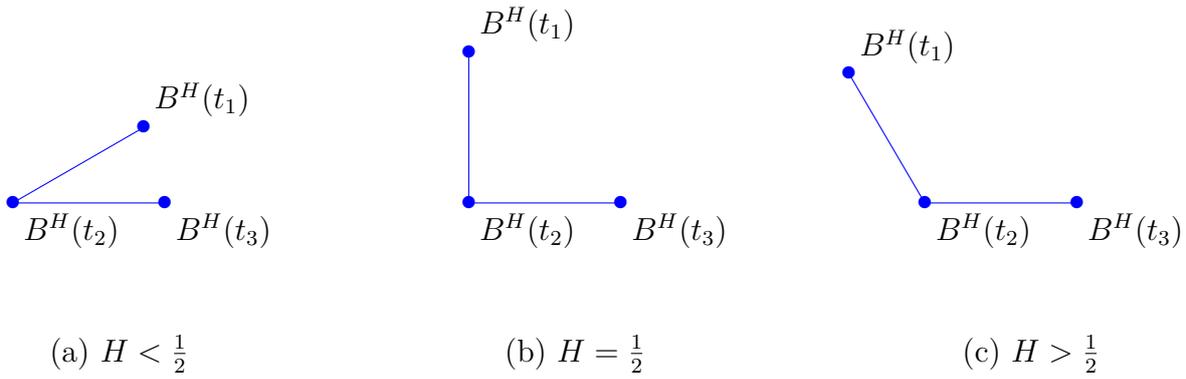
$$\|(e^{jut} - 1) - (e^{jus} - 1)\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 = \psi(t-s) ,$$

avec

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} |e^{jut} - 1|^2 \mu(du) .$$

C'est la forme générale des hélices sur \mathbb{R} . Remarquez qu'en choisissant convenablement la mesure μ , par exemple en prenant $\mu(d\xi) = \frac{d\xi}{C_H^2 |\xi|^{2H+1}}$, on a d'après la formule (1.27) $\psi(t) = |t|^{2H}$, et par isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ sur \mathcal{G} , on obtient un processus (X_t) tel que $X_0 = 0$ et

$$\|X_t - X_s\|_{\mathcal{G}} = |t-s|^{2H} .$$

FIGURE 1.11 – Vision géométrique des accroissements dans l’espace gaussien selon H .

1.8 Champs aléatoires généralisant le mouvement brownien fractionnaire

Nous donnons ci-après des généralisations du mouvement brownien et du mouvement brownien fractionnaire dans le cas où le processus n’est plus indexé par le temps t sur $T = \mathbb{R}$ mais est indexé sur $T = \mathbb{R}^d$, on parle alors de champs aléatoires.

Champ de Wiener-Chensov ou drap brownien

Une première généralisation multidimensionnelle du mouvement brownien peut s’obtenir en adoptant une structure tensorielle. Afin de conserver la notion d’accroissements indépendants on considère l’ordre suivant sur \mathbb{R}^d : $\mathbf{s} \leq \mathbf{t} \Leftrightarrow s_i \leq t_i, \forall i$ et le champ de Wiener-Chensov est un champ gaussien centré de covariance²⁵ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^d (|t_i| + |s_i| - |t_i - s_i|), \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Ce champ, initialement introduit par **CHENTSOV (1956a)**, est autosimilaire, à accroissements rectangulaires indépendants mais n’est pas à accroissements stationnaires. Inconvénient : la définition du champ dépend du choix du système de coordonnées (par exemple, il est nul sur les axes). En particulier, il n’est pas invariant par translation.

Champ brownien de Lévy

Une autre généralisation multidimensionnelle du mouvement Brownien à la dimension supérieure consiste à remplacer la valeur absolue dans le second membre par la norme euclidienne. On obtient alors le champ Brownien de **LÉVY (1945)** qui est un champ gaussien centré à accroissements stationnaires et isotrope.

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{t}\| + \|\mathbf{s}\| - \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|), \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Inconvénient : il n’y pas de généralisation de la propriété d’indépendance des accroissements.

25. Parfois on trouve l’écriture $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^d s_i \wedge t_i$ où $a \wedge b = \min(a, b)$.

Champ brownien fractionnaire (de Lévy)

Le champ brownien de Lévy a ensuite connu une extension au cas fractionnaire d'ordre H , sous le nom de **FBF** initialement introduit par **YAGLOM (1957)** qui en a donné une représentation spectrale, puis a été étudié par **CIESIELSKI et KAMONT (1995)**.

Proposition 1.20 (CHAMP BROWNIEN FRACTIONNAIRE)

Soit $0 < H < 1$. Le champ brownien fractionnaire d'ordre H est un champ gaussien centré de covariance

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{t}\|^{2H} + \|\mathbf{s}\|^{2H} - \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|^{2H} \right), \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier il vérifie

$$\mathbb{E} \left[(B^H(\mathbf{t}) - B^H(\mathbf{s}))^2 \right] = \|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|^{2H}, \quad \forall \mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d,$$

et admet pour représentation harmonisable

$$B^H(\mathbf{t}) = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{j\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+d/2}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}),$$

où la constante de normalisation est (**LACAUX, 2004a,b**) :

$$C_H = \left(\frac{\pi^{(d+1)/2} \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)}{H\Gamma(2H) \sin(H\pi) \Gamma\left(H + \frac{d}{2}\right)} \right)^{1/2}. \quad (1.28)$$

Preuve :

Comme à la Proposition 1.19 où il était voulu, après normalisation, que la variance du **FBM** en $t = 1$ vale 1, il en va de même ici où la constante C_H est telle que $\text{Var}[B^H(\mathbf{t})] = 1$ sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} , il faut donc que

$$C_H^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{j\langle \mathbf{e}_1, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2H+d}} d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2(1 - \cos(\xi_1))}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2H+d}} d\boldsymbol{\xi}.$$

avec $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$ par invariance par rotation du **FBF**, et ξ_1 la première composante de $\boldsymbol{\xi}$. Par un changement de coordonnées en polaire, il vient

$$C_H^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sigma_{d-2}(\mathbb{S}^{d-2})}_{\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{jr} - 1|^2}{r^{1+2H}} dr \right)}_{C_2(H)^2} \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2H} (\sin \theta)^{d-2} d\theta \right)}_{B\left(H + \frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right)},$$

avec le premier terme correspondant à l'aire de hypersphère, le second ayant été calculé à la Proposition 1.19 et valant $C_2(H)^2 = \frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(\pi H)}$, et enfin le dernier correspondant à la définition de la fonction Beta qui vaut

$$B\left(H + \frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(H + \frac{d}{2}\right)}.$$

Le résultat (1.28) s'en déduit. □

Il s'agit d'un champ gaussien centré isotrope, à accroissements stationnaires et autosimilaire d'ordre H : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ B_H(\lambda \mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{(fdd)}{=} \lambda^H \left\{ B_H(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Pour plus de détails sur ces cas standard de champs aléatoires isotropes, se référer à (ADLER, 2010), (KAHANE, 1985), (KHOSHNEVISAN, 2002) ou (SAMORODNITSKY et TAQQU, 1994). Plus généralement pour un récent passage en revue des *champs browniens fractionnaires* définis par intégration fractionnaire d'un bruit blanc :

$$\text{FGF}_s(\mathbb{R}^d) = (-\Delta)^{-s/2}W ,$$

où W est un bruit blanc sur \mathbb{R}^d et $(-\Delta)^{-s/2}$ est le Laplacien fractionnaire, on se référera à (LODHIA et coll., 2016).

1.9 Convergence de processus

La convergence de processus (au sens de la convergence en loi) va nous être utile pour définir la notion de champs tangents dans la section suivante. On traitera dans un premier temps la convergence en loi pour les variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d , puis nous élargirons à la convergence en loi de variables aléatoires à valeurs dans un espace de fonctions (les processus).

1.9.1 Convergence des variables aléatoires dans \mathbb{R}^d

Commençons par rappeler quelques modes de convergence spatiale pour les variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d :

Définition 1.18 (CONVERGENCES SPATIALES DES VARIABLES ALÉATOIRES)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d (ou plus généralement dans un espace métrique), et X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . Toutes ces v.a. sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(i) On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si il existe un événement N de mesure nulle tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \in N^c .$$

(ii) On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0 .$$

(iii) On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^p vers X si les X_n et X sont dans L^p et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0 .$$

On notera respectivement $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Un résultat classique est que la convergence p.s. et L^p entraînent la convergence en probabilité, tandis que la convergence en probabilité entraîne la convergence presque sûre d'une sous-suite.

On dispose d'un autre mode de convergence, plus faible que ceux décrits précédemment, à savoir la *convergence en loi* (dite aussi convergence faible, vague ou étroite²⁶), qui porte non pas

26. De façon générale ces trois notions ne se confondent pas, les topologies vague, faible et étroite sont

sur les variables aléatoires X_n elles-mêmes mais sur leur loi \mathbb{P}_n , autrement dit la convergence en loi est une convergence d'une suite de mesures $\mu_n = \mathbb{P}_n$ de masse 1 sur \mathbb{R}^d . On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures positives de masse finie et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilité (de masse 1) sur \mathbb{R}^d . On a alors la définition suivante :

Définition 1.19 (CONVERGENCE EN LOI DE VARIABLES ALÉATOIRES)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d , de lois μ_n sur \mathbb{R}^d , et X une v.a. de loi μ sur \mathbb{R}^d . On dit que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ (resp. par abus de langage que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X), et on note $\mu_n \Rightarrow \mu$ (resp. par abus de langage $X_n \Rightarrow X$), si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (fonctions continues bornées), on a

$$\mu_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu(f) .$$

Exemple 1.5. Si une suite $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ de \mathbb{R}^d converge vers $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, alors en considérant la masse de Dirac δ on a $\delta_{\mathbf{x}_n} \Rightarrow \delta_{\mathbf{x}}$ puisque pour toute fonction f continue on a

$$\delta_{\mathbf{x}_n}(f) = f(\mathbf{x}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{x}}(f) .$$

Exemple 1.6. Sur \mathbb{R} , la suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \delta_{i/n} ,$$

converge étroitement vers la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$, puisque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b([0, 1], \mathbb{R})$,

$$\mu(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(x) dx = \lambda(f) .$$

En pratique il n'est pas toujours aisé de vérifier la convergence $\mu_n(f)$ sur toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}_b([0, 1], \mathbb{R})$. C'est pourquoi toute la suite consistera à fournir des outils théoriques et pratiques nous permettant de vérifier si une suite de mesure converge étroitement ou non. En particulier dans cette sous-section relative aux variables aléatoire dans \mathbb{R}^d , deux outils s'avèrent intéressants : la fonction de répartition pour $d = 1$, et la fonction caractéristique pour d quelconque.

Définition 1.20 (FONCTION DE RÉPARTITION)

Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, on note $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$ sa fonction de répartition, qui est croissante.

Définition 1.21 (FONCTION CARACTÉRISTIQUE)

Si $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on note $\phi_\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} \mu(d\xi)$ la fonction caractéristique de μ , où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

respectivement les topologies les moins fines (contenant le moins d'ouverts) sur l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures positives de masse finie, rendant continues les applications $\mu \mapsto \int f \mu$ (avec $f \in \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_{0,\infty}$ et \mathcal{C}_b respectivement, qui constituent les fonctions tests continues de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ respectivement à support compact, tendant vers 0 à l'infini et bornées). La topologie la plus fine est l'étroite, puis vient la faible et enfin la vague. Ainsi, une suite convergent étroitement converge faiblement, et une suite convergent faiblement converge vaguement. En revanche sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ (les mesures de probabilités de masse 1), les trois topologies coïncident.

Proposition 1.21

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur \mathbb{R} , et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si

$$F_{\mu_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_{\mu}(x),$$

pour tout x qui est un point de continuité de F_{μ} .

Proposition 1.22

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur \mathbb{R}^d , et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si

$$\phi_{\mu_n}(\mathbf{x}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_{\mu}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Les preuves seront laissées de côté pour ne pas surcharger le chapitre, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de (BILLINGSLEY, 2013). Dans la section qui suit on s'intéresse au cas où les variables aléatoires sont à valeurs dans un espace topologique plus général E , et étudions quels critères caractérisent la convergence étroite.

1.9.2 Convergence des variables aléatoires dans un espace polonais

On se concentre maintenant sur l'étude de l'ensemble $\mathcal{M}_1(E)$ des mesures de probabilités boréliennes sur un espace topologique (E, \mathcal{T}) , que l'on suppose séparable, et dont sa topologie \mathcal{T} peut être définie par une distance d qui en fait un espace complet²⁷, appelé *espace polonais*. La définition de la convergence étroite sur un espace polonais est la même que dans \mathbb{R}^d :

Définition 1.22 (CONVERGENCE ÉTROITE SUR UN ESPACE POLONAI)

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$, et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$. On dit que μ_n converge étroitement vers μ , et on note $\mu_n \Rightarrow \mu$, si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ on a $\mu_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(f)$.

On note $\mathcal{U}_b^d(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues sur (E, d) et bornées, et $\text{BL}^d(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées. Un premier résultat fournissant d'autres caractérisations est le fameux théorème de Portmanteau²⁸ :

Théorème 1.6 (THÉORÈME DE PORTMANTEAU)

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$, et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$. On se donne également une distance d sur E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers μ .

27. Notons qu'on peut trouver deux distances d_1 et d_2 qui sont topologiquement équivalentes, c'est-à-dire qui engendrent la même topologie \mathcal{T} , mais telles que (E, d_1) est complet tandis que (E, d_2) ne l'est pas. Exemple : \mathbb{R} avec $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, on a (\mathbb{R}, d_1) complet et (\mathbb{R}, d_2) non complet.

28. Ce théorème démontré dans le livre (BILLINGSLEY, 2013) est en effet attribué à un certain mathématicien français nommé Jean-Pierre Portmanteau, de l'Université de Felletin, et dont le résultat figurerait dans la référence *Espoir pour l'ensemble vide ?* Or il n'y a aucune référence de ce type nulle part, ni de mathématicien du nom de Portmanteau, il s'agit d'un canular possiblement initié par Billingsley lui-même. En réalité l'énoncé semble remonter à Alexander en 1940. La référence au porte-manteau provient certainement de l'image de l'objet suspendant autant d'habits qu'il n'y a d'énoncés équivalents apparaissant dans l'énoncé du théorème.

2. pour toute fonction $f \in \mathcal{U}_b^d(E, \mathbb{R})$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$.
3. pour toute fonction $f \in BL^d(E, \mathbb{R})$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$.
4. pour tout ouvert O de E , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_n \mu_n(O) \geq \mu(O)$.
5. pour tout fermé F de E , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$.
6. pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(E)$ tel que $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.
7. pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, continue μ -presque partout et bornée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$.

Topologie étroite. $\mathcal{M}_1(E)$ est l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur $(E, \mathcal{B}(E))$. Toute fonction mesurable bornée $f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$ est intégrable contre une mesure de $\mathcal{M}_1(E)$, si bien que $\mathcal{M}_1(E)$ peut être vu comme un sous-ensemble du dual topologique²⁹ de $\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})$, noté

$$\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})' = \{\mu : f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}) \mapsto \mu(f) \in \mathbb{R} \text{ forme linéaire et continue}\} .$$

D'après le premier alinéa de la Proposition A.2 de l'annexe A.1, si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ (donc du dual $\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R})'$ que l'on muni de la topologie faible-*, également appelée *topologie étroite*), et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, la convergence de cette suite pour la topologie faible-*

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \iff \langle \mu_n, f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}),$$

correspond à la définition 1.22 de la convergence étroite. Aussi d'après (A.1), une base de voisinages est donnée par les ensembles

$$\mathcal{V}(\nu) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(E) : |\mu(f_i) - \nu(f_i)| < \epsilon, \forall f_i \in \mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}) \right\} .$$

Remarque 1.13. On peut se demander si la topologie étroite est métrisable, qui est une question importante si l'on veut avoir une caractérisation séquentielle des fonctions continues pour la topologie étroite (et les valeurs d'adhérence sont alors des limites de sous-suites). C'est en effet le cas, et plus encore on montre que $\mathcal{M}_1(E)$ est un espace polonais. La démonstration, ainsi que des exemples de telles métriques complètes comme la distance de Lévy-Prokhorov ou celle de Fortet-Mourier, sont donnés dans (MIERMONT, 2012).

Afin de caractériser la convergence étroite pour les processus dans la sous-section suivante, nous aurons besoin de la notion d'ensemble tendu ainsi que du théorème de Prokhorov qui la relie à la notion d'ensemble relativement compact.

Définition 1.23 (ENSEMBLE TENDU)

Le sous ensemble Γ de $\mathcal{M}_1(E)$ est dit tendu si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subseteq E$ tel que

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \mu(E \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon .$$

Autrement dit, une partie de $\mathcal{M}_1(E)$ est tendue si l'on peut trouver un seul et même compact qui concentre la plupart de la masse de tous les éléments de cette partie. En d'autres termes cela évite une fuite de masse à l'infini. Nous avons alors le théorème suivant :

29. Voir l'annexe A.1 pour des rappels de topologie générale

Théorème 1.7 (THÉORÈME DE PROKHOROV)

$\Gamma \subseteq \mathcal{M}_1(E)$ est une partie relativement compacte³⁰ si et seulement si elle est tendue.

Ce que nous utiliserons dans ce qui va suivre est que dans un espace métrique, pour montrer qu'une suite converge, il suffit de montrer qu'elle prend ses valeurs dans un compact, et que toute sous suite convergente de cette suite converge vers une même limite. On dira qu'une suite de mesures de probabilités $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue si l'ensemble $\{\mu_n, n \geq 1\}$ est tendu.

Proposition 1.23

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$. Supposons que cette suite forme une famille tendue, et qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ telle que toute sous suite convergente de $(\mu_n)_{n \geq 1}$ ait pour limite μ . Alors on a la convergence étroite $\mu_n \Rightarrow \mu$.

1.9.3 Convergence des variables aléatoires dans \mathcal{C}

Enfin dans cette section on traite à proprement parler de la convergence en loi des processus continus, c'est-à-dire des variables aléatoires à valeurs dans l'espace de fonctions $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, 1], E)$. On établit des critères pour caractériser la convergence étroite dans cet espace (restreint sur $[0, 1]$). Puis on l'étendra à $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, E)$ où I est un intervalle non compact. L'espace \mathcal{C} est un espace polonais, c.-à-d. un espace métrique muni de la distance $D(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} d(f(t), g(t))$ où d est une distance sur E , qui est complet pour d une distance complète. L'espace est alors séparable, voir (MIERMONT, 2012).

Dans le but de caractériser la tension pour des familles de mesures sur \mathcal{C} , rappelons la caractérisation des sous ensembles compacts de \mathcal{C} via le théorème d'Arzelà-Ascoli.

Définition 1.24 (ÉQUICONTINUITÉ)

Une partie \mathcal{K} de \mathcal{C} est dite équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{K}$,

$$\forall s, t \in [0, 1], |t - s| < \eta \implies d(f(t), f(s)) \leq \epsilon,$$

ou bien en notant $\omega(f, h) = \sup_{(s, t) \in [0, 1]^2} \{d(f(t), f(s)) : |s - t| \leq h\}$ le module de continuité de f évalué en h , l'équicontinuité de \mathcal{K} se réécrit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \sup_{f \in \mathcal{K}} \omega(f, \eta) \leq \epsilon.$$

Théorème 1.8 (THÉORÈME D'ARZELÀ-ASCOLI)

Une partie \mathcal{K} de \mathcal{C} est relativement compacte si et seulement si

- pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{f(t) \mid f \in \mathcal{K}\}$ est relativement compact,
- la famille \mathcal{K} est équicontinue.

30. Une partie Y d'un espace métrisable X est relativement compacte si toute suite dans Y possède une sous suite qui converge dans X .

Corollaire 1.2

Soit E un espace polonais dont les fermés bornés sont compacts. Alors une partie \mathcal{K} de \mathcal{C} est relativement compacte si et seulement si

- l'ensemble $\{f(0) \mid f \in \mathcal{K}\}$ est relativement compact,
- la famille \mathcal{K} est équicontinue.

Il est clairement difficile de montrer la convergence étroite d'une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ en revenant à la définition, c'est-à-dire en vérifiant que $\mu_n(f)$ converge pour toute fonction f dans une classe de fonctions assez grande. On va donc chercher à établir des critères plus simples, et pour cela nous aurons besoin de la définition suivante. On note $\mu^{t_1, \dots, t_d} = (\pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_d})\mu$.

Définition 1.25 (CONVERGENCE ÉTROITE AU SENS DES MARGINALES)

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$, et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$. On dit que μ_n converge vers μ au sens des marginales de dimension finie si pour tout $0 \leq t_1 < \dots < t_d \leq 1$ on a que $\mu_n^{t_1, \dots, t_d}$ converge étroitement vers μ^{t_1, \dots, t_d} sur \mathbb{R}^d . De même, une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{C} converge vers X au sens des marginales de dimension finie si pour tout $0 \leq t_1 < \dots < t_d \leq 1$, $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_d))$ converge en loi vers $(X(t_1), \dots, X(t_d))$ sur \mathbb{R}^d .

La convergence au sens des marginales de dimension finie est plus facile à vérifier que la convergence étroite sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$, car c'est une notion plus faible. Toutefois en ajoutant une condition tension on a l'équivalence :

Proposition 1.24 (CRITÈRE DE CONVERGENCE ÉTROITE SUR $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$)

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$, et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$. Alors μ_n converge étroitement vers μ si et seulement si

- μ_n converge vers μ au sens des marginales de dimension finie,
- la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue.

Preuve :

Si μ_n converge étroitement vers μ alors naturellement elle converge au sens des marginales de dimension finie. De plus $\{\mu_n, n \geq 1\} \cup \{\mu\}$ est compact, donc est tendu d'après le théorème de Prokhorov. Réciproquement, supposons que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue et converge vers μ au sens des marginales de dimension finie. Alors d'après le théorème de Prokhorov l'ensemble $\{\mu_n, n \geq 1\}$ est relativement compact. Considérons alors $(u_{\psi(n)})_{n \geq 1}$ une sous suite convergente vers une limite μ' , alors μ' est également limite de $u_{\psi(n)}$ au sens des marginales de dimension finie. Donc μ et μ' ont les mêmes marginales de dimension finie, et sont donc égales. On en déduit que μ est la limite de μ_n par la Proposition 1.23. □

Ci-après nous exposons d'autres critères utiles pour vérifier qu'une suite de $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ est tendue.

Proposition 1.25 (CRITÈRE DE TENSION D'UNE SUITE DE MESURES)

Le sous ensemble $\Gamma \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{C})$ est tendu si et seulement si

- pour tout $t \in [0, 1]$, la famille $\{\pi_t \mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendue,

- pour tout $\epsilon > 0, \eta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \mu(\{f : \omega(f, \delta) \geq \eta\}) \leq \epsilon.$$

Si E est un espace dont les fermés bornés sont compacts, alors on peut changer la première hypothèse par le fait que la famille $\{\pi_0 \mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendue.

Corollaire 1.3 (PREMIER CRITÈRE DE TENSION D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES)

Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{C} . Cette suite est uniformément tendue si et seulement si

- pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(X_n(t))_{n \geq 1}$ est tendue,
- pour tout $\epsilon > 0, \eta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \mathbb{P}(\omega(X_n, \delta) \geq \eta) \leq \epsilon.$$

Si E est un espace dont les fermés bornés sont compacts, alors on peut changer la première hypothèse par le fait que la $(X_n(0))_{n \geq 1}$ est tendue.

Le problème de ces caractérisations de la tension est qu'elles font intervenir les modules de continuité $\omega(X_n, \delta)$ qui sont des variables aléatoires difficiles à étudier. Un critère de tension utile nécessite donc d'obtenir des estimées sur le module de continuité qui font intervenir la loi de X_n de la façon la moins compliquée possible, par exemple comme fonction de ses marginales de dimension finie. En voici un premier résultat :

Proposition 1.26 (SECOND CRITÈRE DE TENSION D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES)

Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{C} . Cette suite est uniformément tendue si et seulement si

- pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(X_n(t))_{n \geq 1}$ est tendue,
- pour tout $\epsilon > 0, \eta > 0$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup k \max_{0 \leq i \leq k-1} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq r \leq 1/k} d(X_n(r + i/k), X_n(i/k)) \geq \eta \right) \leq \epsilon.$$

Si E est un espace dont les fermés bornés sont compacts, alors on peut changer la première hypothèse par le fait que la $(X_n(0))_{n \geq 1}$ est tendue.

Un autre critère très important est dû à Kolmogorov, qui ne fait intervenir que les lois marginales de dimension 2 de X_n . On désigne par N_α la norme de Hölder d'exposant α de x , définie par :

$$N_\alpha(x) = \sup_{h>0} \frac{\omega(f, h)}{h^\alpha} = \sup_{s,t \in [0,1], s \neq t} \frac{d(f(t), f(s))}{|t - s|^\alpha}.$$

Proposition 1.27 (CRITÈRE DE COMPACTITÉ DE KOLMOGOROV)

Soit $(X_n)_{n \leq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{C} . On suppose que

- pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(X_n(t))_{n \geq 1}$ est tendue,
- il existe trois constantes $(\beta, \gamma, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ telles que

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} [d(X_n(t), X_n(s))^\gamma] \leq c |t - s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Alors $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue. Plus précisément, pour tout $\alpha \in]0, \beta/\gamma[$ fixé et tout $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(N_\alpha(X_n) \geq M) \leq \epsilon.$$

Pour des intervalles I non compacts, on équipe $\mathcal{C}(I, E)$, et de même $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, de la topologie uniforme sur les compacts, comme définie en (1.6). Ainsi $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ est un espace polonais, et les critères ci-dessus restent valables sur tout compact, on a les propositions suivantes :

Proposition 1.28

Une partie \mathcal{K} de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ est relativement compacte si et seulement si les parties $\mathcal{K}_N = \{f|_{[0, N]} : f \in \mathcal{K}\}$ sont relativement compactes dans $\mathcal{C}([0, N], E)$ pour tout $N \geq 1$.

Proposition 1.29

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue si et seulement si, pour tout $N \geq 1$, la suite des restrictions $((X_n)|_{[0, N]})_{n \geq 1}$, vues comme variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}([0, N], E)$, est tendue.

On étend aussi ces critères à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, voir l'ouvrage (KARATZAS et SHREVE, 2012) :

Proposition 1.30 (CRITÈRE DE COMPACTITÉ DE KOLMOGOROV SUR $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$)

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus continus sur \mathbb{R}^d s'annulant en 0. Supposons que pour tout $T > 0$,

$$\forall (s, t) \in [-T, T]^d, \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} (|Z_n(t) - Z_n(s)|^\gamma) \leq C_0(T) |t - s|^{1+\beta}, \quad (1.29)$$

avec $C_0(T)$ une constante positive pouvant dépendre de T et γ, β des constantes positives. Si, de plus, pour tout compact \mathcal{K} , les marginales de dimension finie de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent étroitement sur \mathcal{K} , alors la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement sur \mathcal{K} .

1.9.4 Théorème de Donkster : convergence d'une marche aléatoire

Soit ξ_1, ξ_1, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On s'intéresse au comportement de la marche aléatoire $(S_n, n \geq 0)$

associée, définie par $S_0 = 0$ et

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \geq 1.$$

Le [théorème limite central \(TLC\)](#)³¹ montre qu'elle converge vers une gaussienne N de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow N.$$

Ceci détermine la position asymptotique de S_n lorsque $n \rightarrow \infty$, on interprète le résultat précédent en disant que la loi de S_n est proche de celle de $\sqrt{n}N$. Si l'on veut une information plus précise sur la *trajectoire* de (S_n) , on peut s'intéresser à la position de la marche à des instants n_1, n_2, \dots, n_k rangés par ordre croissant. On notera par convention $n_0 = 0$. Alors les accroissements

$$S_{n_i} - S_{n_{i-1}} = \xi_{n_{i-1}+1} + \cdots + \xi_{n_i}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

sont indépendants, et ont même loi, respectivement, que $S_{n_i - n_{i-1}}$. Supposons que n_1, \dots, n_k sont des suites (indexées par n) et qu'il existe $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ tels que

$$t_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_i}{n}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

De nouveau en utilisant le TLC (multidimensionnel) on montre que

$$\left(\frac{S_{n_i} - S_{n_{i-1}}}{\sqrt{n}}, 1 \leq i \leq k \right) \Longrightarrow (N_1, \dots, N_k),$$

où les v.a. N_i sont indépendantes, et de loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$. De façon équivalente,

$$\left(\frac{S_{n_i}}{\sqrt{n}}, 1 \leq i \leq k \right) \Longrightarrow (N_1, N_1 + N_2, \dots, N_1 + \cdots + N_k),$$

ce qu'on peut interpréter comme la détermination des positions asymptotiques de la marche aléatoire considérée en un nombre fini d'instant n_1, \dots, n_k . On peut aller encore plus loin au vu des résultats précédents, en considérant naturellement une fonction aléatoire d'un paramètre réel positif t , correspondant à la marche aléatoire dont le temps est renormalisé par n , et l'espace par \sqrt{n} :

$$S_t^{[n]} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \quad t \geq 0.$$

Quand n augmente, la fonction $S_t^{[n]}$ prend la forme d'un brownien unidimensionnel, mais comme $S_t^{[n]}$ est discontinue on va utiliser une version interpolée $S_t^{(n)}$ continue pour que les résultats précédents s'appliquent. Pour cela on considère

$$S_t = (1 - t)S_{[t]} + tS_{\{t\}+1},$$

où $\{t\} = t - [t]$ est la partie fractionnaire de t , et on définit

$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, \quad t \geq 0.$$

31. Démontré pour la première fois par Laplace en 1810, il a longtemps porté son nom. En 1920, Pólya l'a appelé *Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* soit « Théorème limite central du calcul des probabilités », dont le sens est clair : c'est un théorème (de) limite, et il est central dans le calcul des probabilités. La traduction anglaise de *Zentraler Grenzwertsatz* qui est *Central limit theorem*, est ambiguë car on ne voit pas si *Central* se rapporte à *limit* ou à *theorem*. Ce qui a donné lieu à des contresens comme « Théorème central-limite » ou « Théorème de la limite centrale » qui sont d'usage.

Ainsi $S^{(n)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. En reprenant ce qui est fait ci-dessus, on montre sans difficulté la convergence des lois marginales de dimension finie :

$$(S_{t_i}^{(n)}, 1 \leq i \leq k) \implies (B_{t_i}, 1 \leq i \leq k),$$

mais cette convergence n'est pas entièrement satisfaisante, car même si l'on prend des instants t_i très resserrés, cette convergence n'exclut pas *a priori* que le processus $S^{(n)}$ puisse prendre des valeurs anormalement élevées entre deux de ces instants, alors qu'il est naturel de conjecturer que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} S_t^{(n)} \implies \sup_{0 \leq t \leq 1} B_t,$$

ce qui est le même type de problème qui advient lorsqu'on a convergence ponctuelle d'une suite de fonctions, et non convergence uniforme. C'est pour cette raison que nous avons besoin d'un concept de convergence en loi pour des variables aléatoires qui sont des fonctions, muni de la topologie uniforme. Ainsi dans (MIERMONT, 2012) on montre que la suite $(S^{(n)})_{n \geq 1}$ est tendue, ce qui établit la convergence étroite et le théorème de Donsker :

Théorème 1.9 (THÉORÈME DE DONSKER)

La suite $S^{(n)}$ de processus continus converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ de dimension d .

On trouve des démonstrations détaillées dans les ouvrages de référence (BILLINGSLEY, 2013) et (KARATZAS et SHREVE, 2012).

Remarque 1.14. Par le biais de la construction par marches aléatoires, on voit bien l'analogie qui en était faite en introduction au sujet du mouvement brownien : il est pour les fonctions ce que la gaussienne est au nombre. La gaussienne émerge à partir du théorème limite central d'une somme de variables aléatoires indépendantes, tandis que le mouvement brownien résulte aussi d'un théorème limite d'une marche aléatoire renormalisée, le théorème de Donsker, aussi appelé « théorème limite fonctionnel central ».

1.10 Champs tangents

Nous traitons ici de champs aléatoires définis sur \mathbb{R}^d à valeur dans \mathbb{R} . Initialement introduite par (BENASSI et coll., 1997), la notion de champ tangent était liée à l'autosimilarité asymptotique locale. Puis, FALCONER (2002, 2003) généralisa la définition de la façon suivante :

Définition 1.26 (CHAMP TANGENT)

Soit $X = \{X(\mathbf{t})\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$ un champ aléatoire à trajectoires continues. Il admet un champ tangent (ou forme locale) $Y = \{Y(\mathbf{t})\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$ en $\mathbf{t} = \mathbf{x}_0$ si Y s'annule presque sûrement en $\mathbf{t} = 0$ et s'il existe deux suites décroissantes d'échelles convergent vers 0, $(\rho_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\rho_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$, telles que,

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X(\mathbf{x}_0 + \rho_{1,n} \mathbf{t}) - X(\mathbf{x}_0)}{\rho_{2,n}} \right\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(d)}{=} \{Y(\mathbf{t})\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d},$$

où la convergence considérée est la convergence en distribution sur l'espace des fonctions continues munies de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

En particulier, pour $\rho_{2,n} = \rho_{1,n}^H$ avec $H \in (0, 1)$, on retrouve la notion d'autosimilarité asymptotique locale sous une forme faible :

Définition 1.27 (AUTOSIMILARITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE)

Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs. Un champ aléatoire $X = \{X(\mathbf{t})\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$ est dit localement asymptotiquement autosimilaire d'exposant H en \mathbf{x}_0 suivant la famille d'échelles $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si le champ aléatoire

$$\left\{ \frac{X(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{t}) - X(\mathbf{x}_0)}{\rho_n^H} \right\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d},$$

a une limite non triviale quand $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 1.15. Un champ aléatoire, même s'il est gaussien, peut posséder plusieurs champs tangents en un point. Le mouvement brownien fractionnaire lacunaire, par exemple, admet en tout point plusieurs champs tangents comme démontré par (CLAUSEL, 2012).

FALCONER (2002) introduisit la notion d'espace tangent pour définir la notion d'unicité du champ tangent. L'espace tangent de X en \mathbf{x}_0 , noté $\text{Tan}(X, \mathbf{x}_0)$, est l'ensemble de tous les champs tangents de X en \mathbf{x}_0 . Il remarqua que si Y est un champ tangent de X , alors pour tout $\lambda > 0$, et tout champ Y' de même loi que Y , le champ $\lambda Y'$ est aussi un champ tangent de X , de sorte que l'unicité s'il en ait, n'est entendue qu'à une constante multiplicative près et égalité en loi près : on dit qu'il y a unicité du champ tangent Y à X en \mathbf{x}_0 si

$$\text{Tan}(X, \mathbf{x}_0) = \left\{ \lambda Y' : Y' \stackrel{(d)}{=} Y \right\}.$$

Remarque 1.16. Si on a unicité du champ tangent en tout point, alors FALCONER (2002) a montré que les champs tangents sont nécessairement autosimilaires en 0 et sont à accroissements stationnaires presque partout.

Remarque 1.17. En particulier si X est un champ gaussien, et si on a unicité du champ tangent en tout point, alors FALCONER (2002) a montré plus précisément que les champs tangents sont soit « réguliers », soit « fractals » comme un mouvement brownien fractionnaire :

Proposition 1.31 (FORME DES CHAMPS TANGENTS UNIQUES D'UN CHAMP GAUSSIEN)

Soit X un champ gaussien à trajectoires continues. Pour presque tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ où X admet $Y_{\mathbf{x}_0}$ comme unique champ tangent, on a le résultat suivant :

1. Soit il existe un vecteur aléatoire d -dimensionnel $Z_{\mathbf{x}_0}$, tel que presque sûrement,

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot Z_{\mathbf{x}_0}, \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d,$$

où le point \cdot désigne un « produit scalaire » effectuant la somme des produits termes à termes des composantes de \mathbf{t} et de $Z_{\mathbf{x}_0}$.

2. Soit il existe $H \in (0, 1)$ tel que pour tout $\mathbf{t} \neq 0$, $\{Y_{\mathbf{x}_0}(r\mathbf{t})\}_{r \in \mathbb{R}}$ est un multiple scalaire du mouvement brownien fractionnaire d'indice H . Cela signifie que dans chaque direction, le champ $Y_{\mathbf{x}_0}$ est un multiple scalaire du mouvement brownien fractionnaire dont l'indice H est indépendant de la direction considérée.

1.11 Références

- ADLER, R. J. 1977, «Hausdorff dimension and Gaussian fields», *The Annals of Probability*, p. 145–151. 59
- ADLER, R. J. 2010, *The geometry of random fields*, SIAM. 66
- ARNOLD, B. C. 2015, *Pareto distribution*, Wiley Online Library. 56
- BACHELIER, L. 1900, *Théorie de la spéculation*, Gauthier-Villars. 55
- BENASSI, A., S. JAFFARD et D. ROUX. 1997, «Elliptic Gaussian random processes», *Revista matemática iberoamericana*, vol. 13, n° 1, p. 19–90. 75
- BILLINGSLEY, P. 2013, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons. 68, 75
- BOULEAU, N. 2013, «Critique de l’efficience des marchés financiers», <http://www.nicolasbouleau.eu/critique-de-lefficiency-des-marches-financiers/>. 57
- BROWN, R. 1928, «Brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies», *Edinburgh Journal of Science*. 24
- CHAGNY, G. 2008, «Construction du mouvement brownien.», *TER Master 1*. 41
- CHENTSOV, N. 1956a, «Wiener random fields as a function of several parameters», *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 106, n° 4, p. 607–609. 64
- CHENTSOV, N. N. 1956b, «Weak convergence of stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind and the “heuristic” approach to the Kolmogorov-Smirnov tests», *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 1, n° 1, p. 140–144. 38
- CIESIELSKI, Z. et A. KAMONT. 1995, «Levy’s fractional Brownian random field and function spaces», *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 60, n° 1, p. 99–118. 65
- CLAUSEL, M. 2012, «Lacunary fractional Brownian motion», *ESAIM : Probability and Statistics*, vol. 16, p. 352–374. 76
- COHEN, S. et J. ISTAS. 2013, *Fractional fields and applications*, Springer. 62
- CONT, R. 2011, «Benoit Mandelbrot et la modélisation mathématique des risques financiers», *hal-00649050v2*. 56
- DAUPHINÉ, A. 2011, *Géographie fractale*, Lavoisier. 59
- DONSKER, M. D. 1951, «An invariance principle for certain probability limit theorems», AMS. 41
- DUPLANTIER, B. 2005, «Le mouvement brownien ‘divers et ondoyant’», *séminaire Poincaré*, vol. 1, n° 2005, p. 155–212. 26, 27
- EINSTEIN, A. 1905, «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen», *Annalen der physik*, vol. 322, n° 8, p. 549–560. 27

- EINSTEIN, A. 1906a, «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen», *Annalen der Physik*, vol. 324, n° 2, p. 289–306. [27](#)
- EINSTEIN, A. 1906b, «Zur Theorie der Brownschen Bewegung», *Annalen der Physik*, vol. 324, n° 2, p. 371–381. [27](#)
- EKELAND, I., J.-M. COURTAULT et Y. KABANOV. 2002, *Louis Bachelier*, vol. 838, Presses Univ. Franche-Comté. [56](#)
- FALCONER, K. 1990, «Fractal geometry. j», *Mathematical Foundations and Applications*. [59](#)
- FALCONER, K. J. 2002, «Tangent fields and the local structure of random fields», *Journal of Theoretical Probability*, vol. 15, n° 3, p. 731–750. [75](#), [76](#)
- FALCONER, K. J. 2003, «The local structure of random processes», *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 67, n° 3, p. 657–672. [75](#)
- GIRAUD, G. 2014, *Illusion financière (3e édition revue et augmentée)*, Editions de l'Atelier. [57](#)
- JOVANOVIC, F. 2000, «L'origine de la théorie financière : une réévaluation de l'apport de louis bachelier/the origin of financial theory : A revaluation of the contribution of louis bachelier», *Revue d'économie politique*, p. 395–418. [56](#)
- JOVANOVIC, F. 2001, «Pourquoi l'hypothèse de marche aléatoire en théorie financière? les raisons historiques d'un choix éthique», *Revue d'économie financière*, p. 203–211. [56](#)
- JOVANOVIC, F. 2004, «Éléments biographiques inédits sur Jules Regnault (1834-1894), inventeur du modèle de marché aléatoire pour représenter les variations boursières», *Revue d'histoire des sciences humaines*, , n° 2, p. 215–230. [56](#)
- JOVANOVIC, F. 2009, «Le modèle de marche aléatoire dans l'économie financière de 1863 à 1976», *Revue d'histoire des sciences humaines*, , n° 1, p. 51–78. [56](#)
- KAHANE, J.-P. 1985, «Ensembles aléatoires et dimensions», *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 111, p. 65–121. [63](#), [66](#)
- KAHANE, J.-P. 1996, «Le mouvement brownien», *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XIXe Siècle*. [63](#)
- KARATZAS, I. et S. SHREVE. 2012, *Brownian motion and stochastic calculus*, vol. 113, Springer Science & Business Media. [73](#), [75](#)
- KHOSHNEVISAN, D. 2002, *Multiparameter Processes : an introduction to random fields*, Springer Science & Business Media. [66](#)
- KOLMOGOROFF, A. 1931, «Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung», *Mathematische Annalen*, vol. 104, n° 1, p. 415–458. [56](#)
- KOLMOGOROFF, A. 1933, «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung», . [35](#)
- KOLMOGOROV, A. N. 1940, «The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space», dans *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 26, p. 115–118. [57](#)
- KRUIZENGA, R. J. 1956, *Put and call options : a theoretical and market analysis*, thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology. [56](#)
- LACAUX, C. 2004a, *Champs de Lévy multifractionnaires*, thèse de doctorat, Toulouse 3. [65](#)

- LACAUX, C. 2004b, «Series representation and simulation of multifractional lévy motions», *Advances in Applied Probability*, vol. 36, n° 1, p. 171–197. [65](#)
- LE GALL, J.-F. 2006, «Intégration, probabilités et processus aléatoires», *Ecole Normale Supérieure de Paris*. [43](#), [44](#)
- LÉVY, P. 1945, «Calcul des probabilités sur le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences*, vol. 220, n° 13, p. 420–422. [64](#)
- LÉVY, P. et M. LOÈVE. 1948, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, vol. 2, Gauthier-Villars Paris. [41](#)
- LODHIA, A., S. SHEFFIELD, X. SUN, S. S. WATSON et coll.. 2016, «Fractional Gaussian fields : a survey», *Probability Surveys*, vol. 13, p. 1–56. [66](#)
- MANDELBROT, B. 1953, «An informational theory of the statistical structure of language», *Communication theory*, vol. 84, p. 486–502. [56](#)
- MANDELBROT, B. 1960, «The pareto-levy law and the distribution of income», *International Economic Review*, vol. 1, n° 2, p. 79–106. [56](#)
- MANDELBROT, B. 1961, «On the theory of word frequencies and on related markovian models of discourse», *Structure of language and its mathematical aspects*, vol. 12, p. 190–219. [56](#)
- MANDELBROT, B. 1963, «The variation of certain speculative prices», *The journal of business*, vol. 36, n° 4, p. 394–419. [56](#)
- MANDELBROT, B. 1972, «Statistical methodology for nonperiodic cycles : from the covariance to r/s analysis», dans *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 1, number 3*, NBER, p. 259–290. [57](#)
- MANDELBROT, B. 1984, «Les objets fractals», . [56](#)
- MANDELBROT, B. B. 1971a, «Analysis of long-run dependence in economics : the r/s technique», *Econometrica*, vol. 39, p. 68–69. [57](#)
- MANDELBROT, B. B. 1971b, «When can price be arbitrated efficiently ? a limit to the validity of the random walk and martingale models», *The Review of Economics and Statistics*, p. 225–236. [57](#)
- MANDELBROT, B. B. 1989, «Louis bachelier», dans *Finance*, Springer, p. 86–88. [56](#)
- MANDELBROT, B. B. et J. W. VAN NESS. 1968, «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», *SIAM review*, vol. 10, n° 4, p. 422–437. [57](#)
- MANDELBROT, B. B. et J. R. WALLIS. 1968, «Noah, joseph, and operational hydrology», *Water resources research*, vol. 4, n° 5, p. 909–918. [57](#)
- MIERMONT, G. 2012, «Théorèmes limites et processus de Poisson, notes de cours de M2 orsay, 2011–2012», . [69](#), [70](#), [75](#)
- MITCHELL, W. C. 1915, *The making and using of index numbers*, Augustus M. Kelley. [56](#)
- MÖRTERS, P. et Y. PERES. 2010, *Brownian motion*, vol. 30, Cambridge University Press. [41](#)
- OUVARD, J.-Y. 2004, «Probabilités. tome ii, master-agrégation», . [39](#)

- PALEY, R. E. A. C. et N. WIENER. 1934, *Fourier transforms in the complex domain*, vol. 19, American Mathematical Soc. 41
- PALEY, R. E. A. C., N. WIENER et A. ZYGMUND. 1933, «Notes on random functions», *Mathematische Zeitschrift*, vol. 37, n° 1, p. 647–668. 41, 47
- PERRIN, J. 2014, *Atomes (Les)*, CNRS. 25
- PETRUSZEWYCZ, M. 1973, «L’histoire de la loi d’estoup-zipf : documents», *Mathématiques et sciences humaines*, vol. 44, p. 41–56. 56
- REGNAULT, J. 1863, *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, Mallet-Bachelier. 55
- REVUZ, D. et M. YOR. 2013, *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293, Springer Science & Business Media. 43
- RODÓN, D. N. 2006, «The malliavin calculus and related topics», . 53
- SAMORODNITSKY, G. et M. S. TAQQU. 1994, *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance*, vol. 1, CRC press. 59, 61, 62, 66
- SLUTSKY, E. 1937, «Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie», *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, vol. 8, p. 183–199. 38
- STOEV, S. A. et M. S. TAQQU. 2006, «How rich is the class of multifractional brownian motions?», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 116, n° 2, p. 200–221. 60
- TAQQU, M. S. 2001, «Bachelier et son époque : une conversation avec Bernard Bru», *Journal de la société française de statistique*, vol. 142. 56
- VON NEUMANN, J. et I. J. SCHOENBERG. 1941, «Fourier integrals and metric geometry», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 50, n° 2, p. 226–251. 63
- WALTER, C. 2013, «Les origines du modèle de marche au hasard en finance», *Le modèle de marche au hasard en finance*. 56
- WIENER, N. 1923, «Differential-space», *Studies in Applied Mathematics*, vol. 2, n° 1-4, p. 131–174. 29, 41
- YAGLOM, A. M. 1957, «Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes», *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 2, n° 3, p. 273–320. 65

2

État de l'art des modèles de textures aléatoires anisotropes

« *Les plus belles cités, les plus beaux paysages,
Jamais ne contenaient l'attrait mystérieux,
De ceux que le hasard fait avec les nuages.* »

Beaudelaire, *Le Voyage* (1861)

LES NUAGES sont l'archétype des images qu'il est difficile de modéliser et d'analyser de par leurs formes complexes. Sans contour proprement défini, d'un contenu diffus, tantôt rugueux tantôt lisse, parfois dense et compact, d'autres fois clairsemé et étiré, les images de nuages possèdent dans le même temps des propriétés fractales, aléatoires et géométriques. Beaucoup d'autres phénomènes observés concentrent visuellement des caractéristiques hétéroclites, qui peuvent se marier de diverses façons et à différentes échelles. Ceci va nous amener à commenter la notion de texture et à spécifier quel type d'approche et de méthode nous adoptons pour représenter des textures au caractère à la fois aléatoire mais statistiquement ordonné, fractal et anisotrope. Nous présenterons dans une première section différents modèles issus de la littérature et basés sur les outils théoriques des champs aléatoires que nous avons développés dans le Chapitre 1. Dans un deuxième temps nous exposerons plusieurs méthodes de simulations de ces modèles issus de la littérature, et nous investirons plus particulièrement la synthèse dite par bandes tournantes des *champs browniens fractionnaires anisotropes*. Cette classe de champs aléatoires est composée de champs gaussiens à accroissements stationnaires, paramétrés par deux fonctions régissant la régularité et l'anisotropie des textures qu'ils génèrent. Ce modèle motivera la définition de l'orientation d'un champ aléatoire dans le Chapitre 5, et servira de point de départ pour le développement d'une nouvelle classe de champs gaussiens à orientation locale prescrite.



FIGURE 2.1 – Vue du ciel, de mon balcon.

Sommaire

1.1	Historique du mouvement brownien	24
1.1.1	Un phénomène de la biologie déterminant pour la physique	24
1.1.2	Travaux d'Einstein sur les mouvements moléculaires	27
1.1.3	D'Einstein à Wiener : l'étude du mouvement brownien comme objet mathématique	28
1.2	Généralités sur les processus stochastiques	30
1.2.1	Définition d'un processus stochastique	30
1.2.2	Lois des processus stochastiques	31
1.2.3	Existence de processus stochastiques	34
1.2.4	Comparaison de processus stochastiques	36
1.2.5	Propriétés des processus	36
1.2.6	Régularité des trajectoires	38
1.3	Espaces gaussiens	38
1.4	Construction du mouvement brownien	40
1.4.1	Définition	40
1.4.2	Base de Haar sur l'espace de Lebesgue	41
1.4.3	Construction de l'isométrie réalisant l'espace de Lebesgue	42
1.4.4	Construction du pré-mouvement brownien	42
1.4.5	Continuité des trajectoires	43
1.4.6	Construction du mouvement brownien en dimension d	44
1.4.7	Propriétés du mouvement brownien	45
1.4.8	Interprétations géométriques	46
1.4.9	Mesure de Wiener	48
1.5	Intégrale de Wiener	51
1.6	Représentations spectrales	53
1.7	Mouvement brownien fractionnaire	55
1.8	Champs aléatoires généralisant le mouvement brownien fractionnaire	64
1.9	Convergence de processus	66
1.9.1	Convergence des variables aléatoires dans \mathbb{R}^d	66
1.9.2	Convergence des variables aléatoires dans un espace polonais	68
1.9.3	Convergence des variables aléatoires dans \mathcal{C}	70
1.9.4	Théorème de Donkster : convergence d'une marche aléatoire	73
1.10	Champs tangents	75
1.11	Références	77

2.1 Modélisation de textures

2.1.1 Qu'est-ce qu'une texture ?

A priori, toute personne a une idée de ce que représente une *texture*, qu'elle l'associe soit à l'organisation d'un tissage (mode d'entrecroisement des fils) si l'on parle de la texture d'un textile, soit aux caractéristiques de certaines matières composites (dimension, forme, rugosité, etc.) qui constituent la texture des matériaux. Citons encore dans le domaine artistique, la notion de texture musicale. Ou pour finir en ce qui concerne la consistance des aliments (densité, viscosité, dureté, etc.) pour ce qui est de l'aspect culinaire d'une texture. On voit bien que la texture recoupe différents domaines et recouvre différents traits caractéristiques, ce qui rend la recherche d'une définition précise ardue¹. Paul Valéry faisait remarquer avec amusement, dans un texte intitulé *Poésie et pensée abstraite*, la chose suivante :

“ Vous avez certainement observé ce fait curieux, que tel mot, qui est parfaitement clair quand vous l'entendez ou l'employez dans le langage courant, et qui ne donne lieu à aucune difficulté quand il est engagé dans le train rapide d'une phrase ordinaire, devient magiquement embarrassant, introduit une résistance étrange, déjoue tous les efforts de définition aussitôt que vous le retirez de la circulation pour l'examiner à part, et que vous lui cherchez un sens après l'avoir soustrait à sa fonction momentanée ? Il est presque comique de se demander ce que signifie au juste un terme que l'on utilise à chaque instant avec pleine satisfaction. Par exemple, je saisis au vol le mot Temps. Ce mot était absolument limpide, précis, honnête et fidèle dans son service, tant qu'il jouait sa partie dans un propos, et qu'il était prononcé par quelqu'un qui voulait dire quelque chose. Mais le voici tout seul, pris par les ailes. Il se venge. Il nous fait croire qu'il a plus de sens qu'il n'a de fonctions. Il n'était qu'un moyen, et le voici devenu fin, devenu l'objet d'un affreux désir philosophique. Il se change en énigme, en abîme, en tourment de la pensée. [...] Chaque mot, chacun des mots qui nous permettent de franchir si rapidement l'espace d'une pensée, et de suivre l'impulsion de l'idée qui se construit elle-même son expression, me semble une de ces planches légères que l'on jette sur un fossé, ou sur une crevasse de montagne, et qui supportent le passage de l'homme en vif mouvement. Mais qu'il passe sans peser, qu'il passe sans s'arrêter – et surtout qu'il ne s'amuse pas à danser sur la mince planche pour éprouver sa résistance ! Le pont fragile aussitôt bascule ou se rompt, et tout s'en va dans les profondeurs. Consultez votre expérience ; et vous trouverez que nous ne comprenons les autres, et que nous ne nous comprenons nous-mêmes que grâce à la vitesse de notre passage par les mots. Il ne faut point s'appesantir sur eux, sous peine de voir le discours le plus clair se décomposer en énigmes, en illusions plus ou moins savantes. ”

Cette difficulté à caractériser précisément ce qu'est une texture a fait couler beaucoup d'encre, et il semblerait qu'il n'y ait pas encore à l'heure actuelle de consensus qui se soit dégagé au sujet d'une définition qui puisse rendre compte simultanément de toutes les qualités qu'on lui prête. Et pour cause, une telle définition se heurte à l'entreprise délicate de réunir en son sein toute une gamme d'éléments qui composent la texture, dont les propriétés sont contradictoires : les textures intègrent tantôt de la régularité tantôt de l'aléa, on les qualifiera

1. C'est à plus forte raison le cas pour des notions fondamentales comme le *hasard*, Henri Poincaré disait à cet égard : « On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la probabilité. La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe », mais néanmoins n'empêche pas l'élaboration d'une théorie des probabilités. Quand Euclide formalisait la géométrie dans *Les Éléments*, il ne définissait pas non plus précisément ce qu'était un point ou une droite, mais il décrivait comment ces objets interagissaient. De même pour la notion de *temps* qui *depuis tout temps* a suscité de passionnantes réflexions philosophiques sur sa nature (à notre époque contemporaine on pourra citer à titre emblématique la fameuse querelle philosophique opposant Einstein à Bergson), qui ont conduit à différentes conceptualisations du temps. Les physiciens n'ont pas tant cherché à résoudre cette question délicate qu'à chercher la meilleure façon de le représenter. Ce qui est certain c'est que la polysémie de ces mots dans le langage courant, a donné lieu à une utilisation à *toutes les sauces* pour filer la métaphore culinaire. Et en « mal nommant les objets, a ajouté au malheur » d'une bonne définition conceptuelle.

de fines ou grossières, elles s'avèreront plus ou moins homogènes, plus ou moins rugueuses ou régulières, présenteront un certain degré d'anisotropie, etc. Ces caractéristiques sémantiques parfois opposées que l'on attribue à une texture ou à une autre, sont bien illustrées dans l'album de **BRODATZ (1966)**. Une autre difficulté est que, malgré les progrès effectués en physiologie du système nerveux et en sciences cognitives, nous connaissons encore relativement peu de choses sur la façon dont le cerveau humain analyse l'information visuelle, l'identifie, l'interprète et la classe. Ne connaissant pas précisément la nature de l'information que l'être humain capte, ni tous les mécanismes mis en jeu lors de son traitement, il est évident que nous ne savons pas clairement comment une vision artificielle qui reçoit une image *numérique*, devrait analyser et comprendre celle-ci comme le ferait un être humain.

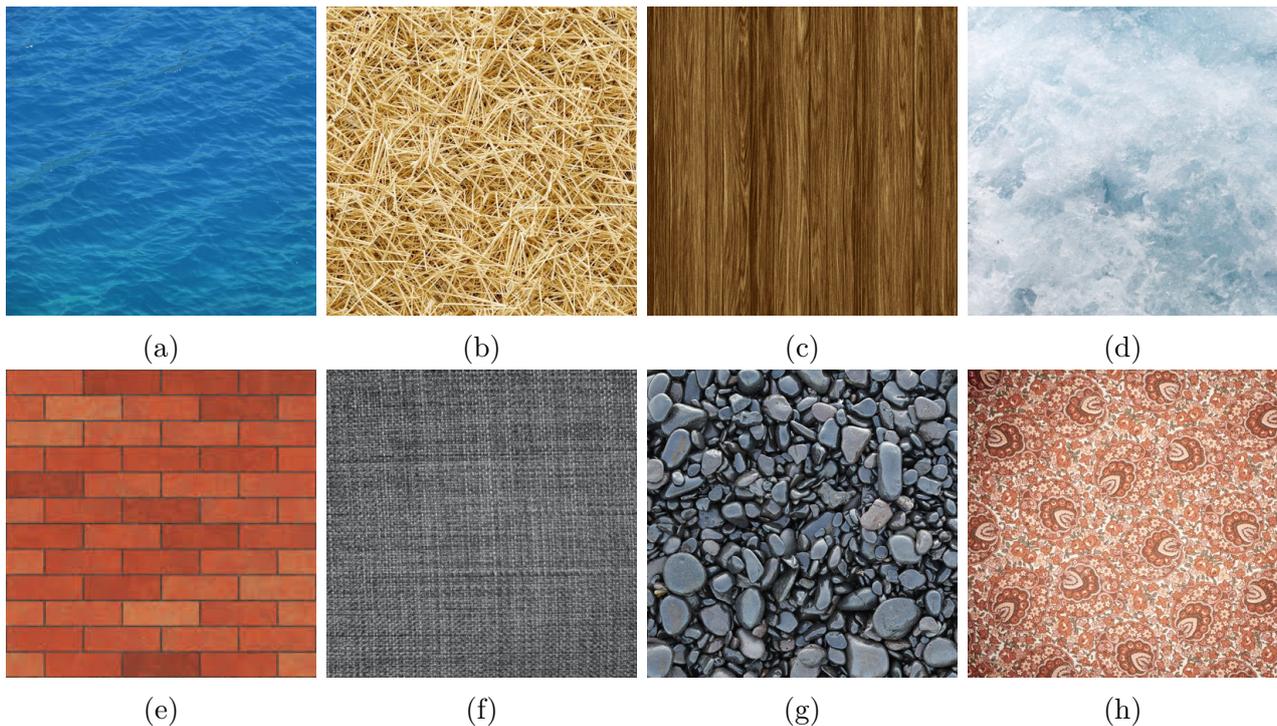


FIGURE 2.2 – Exemples de textures stochastiques (a) mer calme, (b) paille, (c) bois, (d) mer agitée ; et exemples de textures structurales (e) briques, (f) tissu, (g) cailloux, (h) tapisserie.

La conséquence de l'absence d'une définition formelle est que l'on dispose d'une multitude de définitions et de méthodes d'analyse de texture *ad hoc*, mais qui sont relatives à la conception de la texture et aux applications poursuivies par les chercheurs d'un domaine circonscrit. Et même dans un champ scientifique donné, en l'occurrence celui de la modélisation et du traitement de l'image auquel on s'intéresse, **COGGINS (1983)** a recensé de multiples définitions dans la littérature (on peut aussi se référer à (**TUCERYAN et coll., 1993**)), entre lesquelles il est difficile de trancher. Citons en quelques unes importantes, **TAMURA et coll. (1978)** et **HARALICK (1979)** décrivant une texture dans ces termes :

“ We may regard texture as what constitutes a macroscopic region. Its structure is simply attributed to the repetitive patterns in which elements or primitives are arranged according to a placement rule. ”

“ The image texture we consider is nonfigurative and cellular... An image texture is described by the number and types of its (tonal) primitives and the spatial organization or layout of its (tonal) primitives... A fundamental characteristic of texture : it cannot be analyzed without a frame of reference of tonal primitive being stated or implied. For any smooth gray-tone surface, there exists a scale such that when the surface is examined, it has no texture. Then as resolution ”

“ increases, it takes on a fine texture and then a coarse texture. ”

tandis que SKLANSKY (1978) fournit une autre conception :

“ A region in an image has a constant texture if a set of local statistics or other local properties of the picture function are constant, slowly varying, or approximately periodic. ”

On peut également mentionner UNSER (1984), qui dans sa thèse a donné une définition perceptuelle de la texture (cf. LANDY (2014); LANDY et GRAHAM (2004) pour un aperçu des recherches en perception visuelle des textures) inspirée des travaux de GAGALOWICZ (1983) :

“ Une texture est une région d’une image pour laquelle il est possible de définir une fenêtre de dimensions minimales, telle qu’une observation au travers de celle-ci se traduit par une perception (impression) visuelle identique pour toutes les translations possibles de cette fenêtre à l’intérieur de la région considérée. ”

2.1.2 Méthodes structurelles vs. statistiques

Dans ce contexte, il est intéressant de s’interroger sur ce qui constitue un « bon modèle » pour représenter une image de texture. Ceci va naturellement dépendre du type d’image que l’on traite, et des caractéristiques que l’on veut mettre en évidence. Un bon modèle sera à même de *synthétiser* fidèlement des textures possédant des propriétés comparables au type d’image que l’on souhaite modéliser², au travers d’un nombre raisonnable de paramètres ; et de bons outils d’analyse de texture seront ceux en mesure d’*extraire* efficacement ces caractéristiques (ou *attributs*) au moyen de *descripteurs*. Avant de rentrer dans le détail des modèles (présentés dans ce chapitre-ci et le suivant) ainsi que les outils d’analyse utilisés (présenté dans la Partie II), restreignons le champ d’étude à une famille de texture particulière. En effet les diverses pratiques et disciplines qui traitent de textures ont créé deux grandes familles de texture, qui se distinguent dans les définitions données ci-dessus, à savoir la taxinomie suivante :

- **L’approche structurelle.** La texture peut être définie comme la répartition spatiale régulière d’un motif géométrique constant (désigné par *texton* par JULESZ (1975)). On parle dans ce cas de texture déterministe. Une région texturée est alors constituée par la répétition d’un motif originel selon un réseau bidimensionnel caractérisé par une direction et une période particulières. Pour HARALICK (1979) la texture est un phénomène à deux niveaux, le premier concerne la description des primitives dont est composée l’image et qui sont ses propriétés caractéristiques ; le deuxième implique la dépendance spatiale entre ces primitives.
- **L’approche stochastique.** La texture peut être définie comme l’ensemble des propriétés spatiales, périodiques ou non, d’un phénomène se déployant dans le plan de l’image, ce qui s’approche de la définition de SKLANSKY (1978). Dans ce cas on identifie moins de *motifs* réguliers, la géométrie des limites ne participent pas à la texture, seul importe le contenu spatial, exprimé en termes statistiques, et dont le résultat est perçu de manière davantage aléatoire tout en gardant une certaine homogénéité.

2. Il est difficile de juger de la qualité d’une texture synthétisée, puisqu’elle repose essentiellement sur la subjectivité de la perception humaine. C’est donc un problème complexe que d’objectiver cette réponse, car il est compliqué de construire des métriques qui rendraient compte de la *distance* entre deux textures. En revanche on peut établir un protocole visuel simple qui consisterait à superposer un échantillon de la texture synthétisée sur la texture d’origine et déclarer que la synthèse est un succès si l’oeil humain ne parvient pas à la retrouver dans l’image globale. Cf. (PEYRÉ, 2005)

Dans la réalité, les *textures observables* sont rarement totalement de l'une ou l'autre des catégories, mais se trouve être un mélange des deux. Selon les mots de MEYER (2007), une texture correspond à :

« Un subtil équilibre entre répétition et innovation. »

Par la suite nous nous focaliserons sur la famille des textures stochastiques, considérée comme la réalisation d'un champ aléatoire. Nous verrons que ce type de textures est bien adapté pour modéliser le type de phénomène auxquels on s'intéresse. C'est le cas en imagerie médicale où l'on dispose d'images qui possèdent un caractère fractal et sont très irrégulières. Pour ce qui est des textures déterministes, nous renvoyons le lecteur à cette récente publication sur l'état de l'art de l'approche structurale (RAAD et coll., 2017). Notons toutefois que l'aspect déterministe de l'approche structurale n'empêche nullement de modéliser et synthétiser des textures complexes et non régulières, qui hériteraient par exemple du modèle (incluant équations différentielles, décomposition en ondelettes, etc.) d'une géométrie turbulente (PEYRÉ, 2005).

2.1.3 Textures directionnelles et champs anisotropes

Dans de nombreuses applications, les champs aléatoires sont utilisés comme un outil de description de phénomènes spatiaux présentant à la fois un caractère aléatoire en même temps qu'une forme d'organisation statistique. En imagerie médicale, les niveaux de gris d'une image, ou le signal obtenu par *imagerie à résonance magnétique (IRM)*, peuvent être vus comme la réalisation d'un champ aléatoire. En ce qui concerne les surfaces de matériaux à l'échelle microscopique comme l'étude du papier typiquement, ou les surfaces rocheuses ou océanique à une échelle macroscopique, on peut également faire correspondre à chaque point du domaine, la variable aléatoire associée à une certaine grandeur ponctuelle, que ce soit l'épaisseur du papier en question, la hauteur du relief terrestre, l'amplitude des vagues, etc. (FOURNIER, 2014). Les champs aléatoires considérés, donc le choix des modèles adoptés, doivent incorporer et refléter les caractéristiques du phénomène qu'ils modélisent. Visuellement, JULESZ (1962, 1975); JULESZ et coll. (1973) avança l'hypothèse que nous ne pouvions discriminer des textures qui auraient les mêmes statistiques jusqu'à l'ordre 2. Il apporta lui même un contre-exemple quelques années plus tard (JULÉSZ et coll., 1978; JULESZ et coll., 1981), mais ce résultat reste en général vrai dans la plupart des cas. Puisque les deux premières statistiques sont en première estimation suffisantes, on s'en tiendra dans le cadre de ce travail à la classe des champs gaussiens, bien que l'on sache que les images naturelles ne rentrent pas tout à fait dans celui-ci (SRIVASTAVA et coll., 2003; WEISS et FREEMAN, 2007). Il existe un large panel de méthodes qui par une approche statistique permettent de représenter et de simuler des textures aléatoires. On peut citer les champs de Markov, les modèles *spot-noise* (VAN WIJK, 1991), la synthèse par phases aléatoires (GALERNE et coll., 2011), la synthèse par ajustements d'histogrammes (HEEGER et BERGEN, 1995) puis des statistiques d'ordres supérieurs (SIMONCELLI et PORTILLA, 1998) via les ondelettes, récemment remplacées par un dictionnaire d'atomes (TARTAVEL et coll., 2015), méthode qui fait actuellement ses preuves, et que nous utiliserons dans la Partie III.

Les textures auxquelles on s'intéresse sont des images aussi diverses que des nuages, des surfaces géologiques, ou encore des radiographies d'os et de mammographies. Ces formes naturelles ont une morphologie et une irrégularité complexe. LOVEJOY (1982) a montré par exemple que les nuages présentent une structure fractale sur plus de quatre échelles de grandeurs (de 10 à 10^4 km, cf. Figure 2.4). Des constats similaires ont été faits quant aux fractures géologiques (GOUYET, 1992; GOUYET et MANDELROT, 1996). L'estimation de la dimension fractale des images de mammographies (CALDWELL et coll., 1990) a notamment permis de les classer en fonction de leur densité, et à évaluer les risques du cancer du sein (HEINE et MALHOTRA, 2002); et celle des images de coupe d'os fut reliée à l'altération de l'architecture de l'os (BENHAMOU

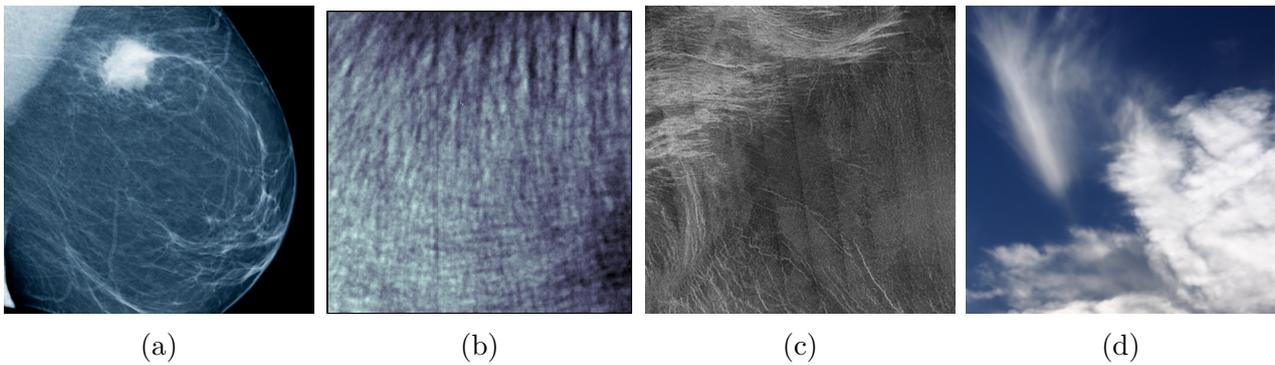


FIGURE 2.3 – Exemples de textures fractales et anisotropes (a) mammographie comportant des tissus conductifs orientés et une tumeur, extraite de www.fda.gov, (b) une coupe d'os ostéoporotique, (c) une photographie de la Guinevere Platina sur Vénus, extraite de (BARATA et coll., 2015), (d) une photographie de nuages prise par mes soins.

et coll., 2001) permettant là aussi une évaluation du risque de fracture. Un autre aspect de ces textures qui s'est avéré être un marqueur intéressant est leur l'anisotropie, c'est-à-dire qu'elles peuvent de surcroît présenter des directions privilégiées, et que celles-ci sont susceptibles de nous renseigner sur une modification du milieu voir une anomalie. Cela s'est révélé être en partie le cas pour ces deux exemples d'applications médicales citées (BIERMÉ et coll., 2009a,b; RICHARD et BIERME, 2010; RICHARD, 2016) et les références qui s'y trouvent.

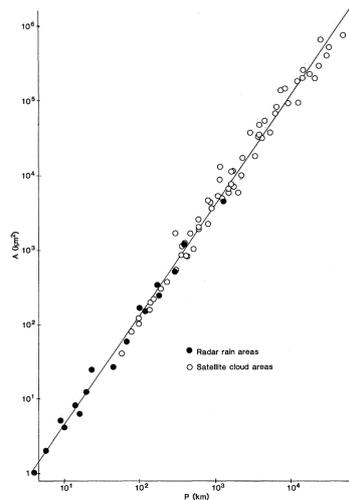


FIGURE 2.4 – Courbe extraite de (LOVEJOY, 1982) donnant la relation entre l'aire des nuages et de la zone de pluie et leur périmètre en représentation log-log.

Cette structure pose alors aux statisticiens et aux probabilistes plusieurs questions :

- Quels modèles théoriques pertinents permettent de prendre en compte ces irrégularités et cette anisotropie ?
- De quelles méthodes disposons nous pour les simuler ?
- Quelles sont les techniques efficaces pour estimer les paramètres du modèle ?

Le caractère fractal des nuages par exemple, et plus précisément l'autosimilarité observée, suggère de modéliser les nuages comme un champ aléatoire qui possède cette propriété. Nous avons présenté dans la section 1.8 le champ brownien fractionnaire (FBF), qui répond à ce

critère. En effet c'est l'unique champ gaussien autosimilaire, isotrope et à accroissements stationnaires, dont on rappelle ici l'expression harmonisable :

$$B^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (2.1)$$

où

$$C_H = \left(\frac{\pi^{3/2} \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)}{H \Gamma(2H) \sin(H\pi) \Gamma(H + 1)} \right)^{1/2}.$$

Ce champ gaussien possède un seul paramètre, le paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$, qui est l'ordre d'autosimilarité du champ et encode la rugosité de la texture : plus H est proche de 0 plus la texture est rugueuse, tandis que plus H est proche de 1 plus celle-ci est lisse. En revanche puisque le FBF est isotrope, il n'est pas adapté pour modéliser des phénomènes fractals présentant des directions privilégiées, et qui sont pourtant fréquents : nous avons évoqué la structure des os et des tissus du sein, les fractures de surfaces (DAVIES et HALL, 1999; PONSON et coll., 2006), on pourrait aussi citer la modélisation de la sédimentation aquifère (BENSON et coll., 2006). Nous avons donc besoin de modèles qui intègrent cette directionalité, que nous commençons par définir.

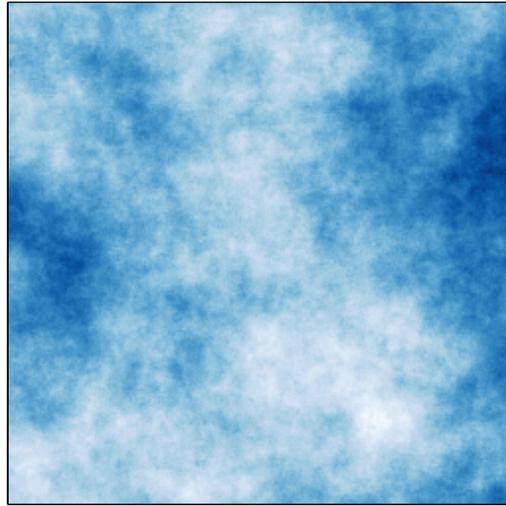


FIGURE 2.5 – Réalisation d'un FBF pour $H = 0.5$.

Intuitivement, un champ aléatoire anisotrope est un champ dont le comportement dépend de la direction considérée. À l'inverse un champ isotrope est un champ dont le comportement est identique quelle que soit la direction à partir de laquelle on l'observe. La définition de l'isotropie est la suivante :

Définition 2.1 (CHAMP ISOTROPE)

Soit X un champ aléatoire défini sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Le champ X est dit isotrope si, pour toute rotation \mathbf{R}_θ de \mathbb{R}^2 , le champ aléatoire $\{X(\mathbf{R}_\theta(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ a même loi que X .

Par conséquent, on définira un champ qui présente une certaine directionnalité par la négative, en affirmant qu'il est non isotrope, ou de préférence on dira que le champ est *anisotrope*.

Comme on s'intéresse aux images de textures, on se cantonnera à la dimension 2, bien que les différentes classes présentées ci-après sont valables pour des champs aléatoires définis sur \mathbb{R}^d . La caractérisation géométrique des champs aléatoires anisotropes est un domaine très actif,

et on pourra consulter des ouvrages de base tels que (ADLER, 2010; ADLER et TAYLOR, 2009; AZAÏS et WSCHEBOR, 2009) pour plus de détails.

Nous allons à présent voir quels sont les modèles dérivés du FBF (2.1) qui ont donné lieu à des champs anisotropes.

2.2 Différentes classes de champs aléatoires anisotropes

2.2.1 Drap brownien fractionnaire

Le premier modèle de champ gaussien anisotrope fut introduit par KAMONT (1995), puis étudié par AYACHE et coll. (2002); LÉGER et PONTIER (1999) pour décrire le caractère anisotrope d'os de patients atteints d'ostéoporose. Il s'agit du *drap brownien fractionnaire*, ou *Fractional Brownian Sheet (FBS)*, qui est une extension anisotrope du modèle de Wiener-Chensov présenté section 1.8, donnant en 2-D une régularité différente H_1 et H_2 suivant les axes. Ainsi il est indexé par un paramètre bidimensionnel $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$, et contrairement au champ brownien fractionnaire (qui est isotrope), c'est un modèle qui permet de tenir compte des caractéristiques géométriques du phénomène étudié suivant les directions. La définition est la suivante :

Définition 2.2 (DRAP BROWNIEN FRACTIONNAIRE)

Le drap brownien fractionnaire B^{H_1, H_2} est un champ gaussien centré, nul sur les axes, et de covariance

$$\mathbb{E} \left[B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) B^{H_1, H_2}(x'_1, x'_2) \right] = \frac{C_1(H_1)^2}{2} \left(|x_1|^{2H_1} + |x'_1|^{2H_1} - |x_1 - x'_1|^{2H_1} \right) \frac{C_1(H_2)^2}{2} \left(|x_2|^{2H_2} + |x'_2|^{2H_2} - |x_2 - x'_2|^{2H_2} \right) .$$

On peut également le définir au choix, à partir d'une représentation mobile ou harmonisable :

Proposition 2.1 (REPRÉSENTATION PAR MOYENNE MOBILE DU FBS)

Le drap brownien fractionnaire peut se représenter sous la forme intégrale suivante :

$$B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{C_1(H_1)C_1(H_2)} \int_{\mathbb{R}^2} f_{H_1}(x_1, u) f_{H_2}(x_2, v) dB(x_1, x_2) ,$$

où $f_{H_1}(x_1, u) = (x_1 - u)_+^{H_1-1/2} - (-x_1)_+^{H_1-1/2}$ et $f_{H_2}(x_2, v) = (x_2 - v)_+^{H_2-1/2} - (-x_2)_+^{H_2-1/2}$.

Remarque 2.1. On a $C_1(H_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{H_1}^2(1, u) du$ et $C_1(H_2) = \int_{\mathbb{R}} f_{H_2}^2(1, v) dv$ dont l'expression $C_1(H)$ est donnée Proposition 1.18. Si $H_1 = H_2 = \frac{1}{2}$ on obtient le drap brownien standard.

Proposition 2.2 (REPRÉSENTATION HARMONISABLE DU FBS)

Le drap brownien fractionnaire peut se représenter sous la forme intégrale suivante :

$$B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{jx_1\xi_1} - 1)(e^{jx_2\xi_2} - 1)}{|\xi_1|^{H_1+1/2} |\xi_2|^{H_2+1/2}} \widehat{\mathbf{W}}(\xi_1, \xi_2) .$$

Remarque 2.2. En définissant les accroissements *rectangulaires* de B^{H_1, H_2} par :

$$\begin{aligned} \Delta_{(h_1, h_2)} B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) &= B^{H_1, H_2}(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - B^{H_1, H_2}(x_1 + h_1, x_2) \\ &\quad - B^{H_1, H_2}(x_1, x_2 + h_2) + B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) , \end{aligned}$$

on a que le **FBS** B^{H_1, H_2} est à accroissements *rectangulaires* stationnaires (mais pas à accroissements stationnaires!). Il est également autosimilaire au sens où le champ

$$\left\{ a_1^{H_1} a_2^{H_2} B^{H_1, H_2} \left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} ,$$

a même loi que B^{H_1, H_2} .

Les propriétés géométriques des draps browniens fractionnaires ont été étudiées dans (**WU et XIAO, 2007**).

2.2.2 Modèle de Bonami et Estrade

La construction des champs browniens fractionnaires anisotropes est basée sur la modification de la densité spectrale (définie Proposition 1.14 du Chapitre 1) d'un champ brownien fractionnaire radialement. **BONAMI et ESTRADÉ (2003)** définissent ainsi une classe de champs gaussiens anisotropes dont les accroissements sont stationnaires. L'intérêt de se limiter à cette classe de champs à accroissements stationnaires réside dans le fait que pour ces champs on dispose d'une représentation sous forme intégrale de la covariance (représentation spectrale vue à la Proposition 1.16) et de pouvoir ainsi étudier certaines propriétés de ces champs en passant par des propriétés de leur densités spectrales ou de leurs variogrammes (ou semi-variogrammes) que nous définissons ci-dessous :

Soit $X = \{X(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ un champ gaussien centré à accroissements stationnaires. Les lois finies dimensionnelles de $\{X(\mathbf{x}) - X(\mathbf{0}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ sont complètement caractérisées par le *semi-variogramme* de X :

Proposition 2.3 (SEMI-VARIOGRAMME)

Un champ gaussien à accroissements stationnaires est caractérisé par son semi-variogramme défini par

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad v_X(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(X(\mathbf{y}) - X(\mathbf{0}))^2 \right] , \quad (2.2)$$

puisque la covariance s'exprime alors en fonction du variogramme :

$$\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Cov}(X(\mathbf{y}) - X(\mathbf{0}), X(\mathbf{z}) - X(\mathbf{0})) = v_X(\mathbf{y}) + v_X(\mathbf{z}) - v_X(\mathbf{y} - \mathbf{z}) .$$

Preuve :

Remarquons que puisque X est à accroissements stationnaires, la variance des accroissements de même taille est constante donc :

$$\begin{aligned} v_X(\mathbf{y} - \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(X(\mathbf{y} - \mathbf{z}) - X(\mathbf{0}))^2 \right] , \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(X(\mathbf{y}) - X(\mathbf{z}))^2 \right] , \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [X(\mathbf{y})^2] + \frac{1}{2} \mathbb{E} [X(\mathbf{z})^2] - \mathbb{E} [X(\mathbf{y})X(\mathbf{z})] . \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$v_X(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(\mathbf{y})^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(\mathbf{0})^2] - \mathbb{E}[X(\mathbf{y})X(\mathbf{0})] , \quad (2.3)$$

$$v_X(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(\mathbf{z})^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(\mathbf{0})^2] - \mathbb{E}[X(\mathbf{z})X(\mathbf{0})] , \quad (2.4)$$

si bien que

$$\begin{aligned} v_X(\mathbf{y}) + v_X(\mathbf{z}) - v_X(\mathbf{y} - \mathbf{z}) &= \mathbb{E}[X(\mathbf{y})X(\mathbf{z})] + \mathbb{E}[X(\mathbf{0})^2] - \mathbb{E}[X(\mathbf{y})X(\mathbf{0})] - \mathbb{E}[X(\mathbf{z})X(\mathbf{0})] , \\ &= \text{Cov}(X(\mathbf{y}) - X(\mathbf{0}), X(\mathbf{z}) - X(\mathbf{0})) . \end{aligned}$$

□

À partir de maintenant on suppose que $X(\mathbf{0}) = 0$ p.s.³ et le variogramme v_X continu (donc la covariance l'est *de facto*). Alors d'après la représentation spectrale des processus à accroissements stationnaires abordée dans la Proposition 1.16 du Chapitre 1, il existe une mesure $\mu(d\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^2} \min(1, \|\boldsymbol{\xi}\|^2) \mu(d\boldsymbol{\xi}) < +\infty , \quad (2.5)$$

telle que le variogramme s'écrive⁴

$$v_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\text{Cov}(X(\mathbf{x}), X(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 \mu(d\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \sin^2\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}{2}\right) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} , \quad (2.6)$$

en utilisant que $\frac{1}{2}|e^{jt} - 1| = \left|\frac{1}{2j}e^{jt/2}(e^{jt/2} - e^{-jt/2})\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \min\left(1, \frac{t}{2}\right)$, d'où $v_X(\mathbf{x})$ est bien définie avec la condition (2.5). Le champ possède alors la représentation harmonisable suivante :

$$X^f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f(\boldsymbol{\xi})^{1/2} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) . \quad (2.7)$$

BONAMI et ESTRADÉ (2003) ont alors montré que

- (i) Deux champs gaussiens à accroissements stationnaires ont même lois finies dimensionnelles si et seulement si ils ont le même variogramme.
- (ii) X^f est autosimilaire si et seulement si f est homogène.
- (iii) X^f est isotrope si et seulement si f est radiale.
- (iv) Le **FBF** est le seul champ à accroissements stationnaires qui soit autosimilaire et isotrope.

Dans la plupart des cas on peut se contenter d'étudier les propriétés des lois finies dimensionnelles, qui sont données par le variogramme. Toutefois, rien ne nous indique pour le moment que les trajectoires de tels champs soient continues. **BONAMI et ESTRADÉ (2003)** ont étudié cette possibilité, ce qui permet dans ce cas d'avoir une égalité en loi dans (i), en imposant une contrainte sur le comportement asymptotique de la densité spectrale $f(\boldsymbol{\xi})$, à savoir pour $m \in (0, +\infty)$, il existe deux constantes $A, B \in (0, +\infty)$ telle que f vérifie la condition :

$$\mathbf{D}(m) : f(\boldsymbol{\xi}) \leq B \|\boldsymbol{\xi}\|^{-(2m+2)} , \quad \forall \|\boldsymbol{\xi}\| > A , \text{ p.p. .}$$

Cette propriété est également suffisante pour relier l'ordre de l'homogénéité asymptotique locale à celui d'autosimilarité asymptotique locale. f est dite *asymptotiquement homogène d'ordre α* ,

3. À défaut on s'y ramène quitte à considérer le champ $Y(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}) - X(\mathbf{0})$.

4. On reconnaîtra ici une fonction non négative au sens de I. Schoenberg, et le lien avec les hélices que nous faisons à la Remarque 1.12.

c.-à-d. $\forall \boldsymbol{\xi}$ p.p., $f_\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \lambda^{-\alpha} f(\lambda \boldsymbol{\xi}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} f_\infty(\boldsymbol{\xi})$. Si f vérifie $\mathbf{D}(m)$ et est asymptotiquement homogène d'ordre $-(2m+2)$ de limite f_∞ , alors X^f est en tout point \mathbf{x}_0 asymptotiquement autosimilaire d'ordre m avec pour champ tangent X^{f_∞} , et leurs versions continues vérifient :

$$\left\{ \frac{\widetilde{X}^f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{h}) - \widetilde{X}^f(\mathbf{x}_0)}{\lambda^m}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \right\} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \left\{ \widetilde{X}^{f_\infty}(\mathbf{h}), \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Les hypothèses sur le variogramme et la condition $\mathbf{D}(m)$ ne sont pas très restrictives, et permettent de décrire une large classe de champs gaussiens à accroissements stationnaires. Des exemples de familles de tels champs sont présentés :

Exemple 2.1. En remplaçant la constante H par une fonction directionnelle $\boldsymbol{\xi} \mapsto h(\boldsymbol{\xi})$ à valeur dans $[a, b] \subset (0, 1)$ qui est constante sur chaque direction, autrement dit $h(\lambda \boldsymbol{\xi}) = h(\boldsymbol{\xi})$, $\forall \lambda$, donc définie sur \mathbb{S}^1 ; en considérant la densité spectrale

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\boldsymbol{\xi})+2}},$$

on définit un **champ brownien fractionnaire étendu**, ou *Extended Fractional Brownian Field (EFBF)* de fonction de Hurst directionnelle h , par la représentation spectrale suivante :

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{\xi})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}).$$

Exemple 2.2. Dans la même veine on peut considérer h comme ci-dessus et la densité spectrale

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^2)^{h(\boldsymbol{\xi})+1}}.$$

Exemple 2.3. Pour deux paramètres H_1 et H_2 constants on peut également considérer

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H_1+1} + \|\boldsymbol{\xi}\|^{H_2+1}} \right)^2.$$

Exemple 2.4. Enfin une sous-classe du modèle de **BONAMI et ESTRADÉ (2003)** sur laquelle nous allons travailler dans le Chapitre 5 en y définissant une notion d'orientation, concerne les densités spectrales de la forme

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{S\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}\right)^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2m+2}},$$

où S est une fonction d'anisotropie définie sur \mathbb{S}^1 qui joue le rôle de filtre fréquentiel. Ces familles de densités empruntées à (**BENASSI et coll., 1997**) caractérisent un **champ gaussien auto-similaire d'ordre H et à accroissements stationnaires**, ou *Gaussian Field with Self-Similarity and Stationary Increments (H-sssi)*.

Le premier et le dernier exemple seront regroupés sous le nom de **AFBF**, et décrit par **BIERMÉ et coll. (2015)** sous cette forme :

Définition 2.3 (CHAMP BROWNIEN FRACTIONNAIRE ANISOTROPE)

Un champ brownien fractionnaire anisotrope X , est un champ gaussien à accroissements stationnaires, dont la densité spectrale s'écrit sous la forme :

$$f(\boldsymbol{\xi}) = c(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2h(\arg \boldsymbol{\xi})-2}, \quad (2.8)$$

avec c et h des fonctions π -périodiques définies sur $(-\pi/2, \pi/2]$ et à valeurs respectives dans \mathbb{R}^+ et dans $(0, 1)$.

Vocabulaire. h est appelée la fonction de Hurst directionnelle, et c la fonction de *topothésie* (DAVIES et HALL, 1999).

2.2.3 Modèle de Xue et Xiao

Dans (XUE et XIAO, 2011), les auteurs développent également une classe de champs anisotropes à accroissements stationnaires, de même en travaillant à partir de la représentation spectrale de ces champs et en étudiant le variogramme. La condition posée sur les densités spectrales, consiste cette fois à vérifier une certaine condition d'encadrement, inhérente au système de coordonnées choisi sur l'ensemble des paramètres du champ. Plus précisément :

Définition 2.4 (CONDITIONS VÉRIFIÉES PAR LA DENSITÉ SPECTRALE)

La fonction f doit vérifier

$$\int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 f(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} < \infty,$$

ainsi que la condition suivante :

(C) Il existe des constantes $(c_1, c_2, c_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $(\beta_1, \beta_2) \in (0, \infty)$ telles que

$$\gamma > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2},$$

et

$$\frac{c_1}{(|\xi_1|^{\beta_1} + |\xi_2|^{\beta_2})^\gamma} \leq f(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{c_2}{(|\xi_1|^{\beta_1} + |\xi_2|^{\beta_2})^\gamma}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{\xi}\| \geq c_3.$$

Sous ces conditions elle définit bien une densité spectrale $\int_{\mathbb{R}^2} \min(1, \|\boldsymbol{\xi}\|^2) f(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} < \infty$.

Ainsi on fait jouer là aussi des rôles différents aux différentes coordonnées, ce qui constitue un modèle de champs anisotropes pouvant être de bons candidats pour l'étude de phénomènes réels. De plus les paramètres du modèle donnent des conditions simples pour qu'un champ vérifiant les hypothèses du modèle soit dérivable en moyenne quadratique dans une certaine direction, différentiable en moyenne quadratique, ou presque sûrement différentiable. Enfin la dimension de Hausdorff d'ensembles liés aux réalisations d'un champ construit suivant ce modèle est déterminé en fonction des paramètres.

2.2.4 Champs stables par autosimilarité matricielle

L'autosimilarité est présente dans de nombreux domaines d'applications, qu'il s'agisse du trafic internet (WILLINGER et coll., 1998), de la modélisation financière XU et GENÇAY (2003), d'hydrologie (BLÖSCHL, 2001; MANDELROT et WALLIS, 1968) ou encore dans la modélisation des précipitations (MENABDE et coll., 1997). D'autres exemples pourront être trouvés dans les ouvrages (ABRY et SELLAN, 1996; VÉHEL et coll., 2012). Introduit dans (BENSON et coll., 2006) pour modéliser la sédimentation aquifère, le *champ gaussien à auto-similarité matricielle*, ou *Operator Scaling Gaussian Random Field (OSGRF)* a été développé dans (BIERMÉ et coll., 2007) pour adapter plus finement le concept d'autosimilarité à l'anisotropie des champs. En effet

la notion d'autosimilarité classique vise à décrire des phénomènes ne possédant pas d'échelles caractéristiques. Si le phénomène étudié possède des comportements d'anisotropie différents suivant les échelles, alors cette notion n'est plus adaptée et nécessite ainsi d'être modifiée pour être compatible avec ces champs anisotropes. C'est le cas typiquement lorsque l'on considère des phénomènes de turbulence (ARNEODO et coll., 2000), ou lors de l'étude de l'écoulement des eaux souterraines (MEERSCHAERT, 2015). Ceci a amené BIERMÉ et coll. (2007) à définir un nouveau modèle de champs stables par autosimilarité matricielle :

Définition 2.5 (CHAMP STABLE PAR AUTOSIMILARITÉ MATRICIELLE)

Un champ aléatoire X est stable par autosimilarité matricielle⁵ si pour une matrice \mathbf{E} de taille 2×2 dont les valeurs propres possèdent une partie réelle positive, et pour $H > 0$ on a

$$\{X(c^{\mathbf{E}}\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \stackrel{(fdd)}{=} \{c^H X(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}, \quad \forall c > 0. \quad (2.9)$$

Remarque 2.3. Le drap brownien fractionnaire présenté en section 2.2.1, vérifie la relation d'autosimilarité matricielle (2.9), pour $\mathbf{E} = \text{diag}(H_1^{-1}, H_2^{-1})$. En revanche il n'est pas à accroissements stationnaires.

En réalité la description d'une invariance d'échelle de ce type remonte aux années 80 où HUDSON et MASON (1982); LAHA et ROHATGI (1981) ont cherché à définir des processus sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R}^d qui soient autosimilaires par rapport à des opérateurs, c'est-à-dire qui vérifient une relation

$$\{X(ct)\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{(fdd)}{=} \{\mathbf{A}(c)X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}, \quad \forall c > 0, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).$$

S'en est suivi un grand nombre de travaux (MAEJIMA et MASON, 1994; MEERSCHAERT et SCHEFFLER, 1999, 2001), puis le cadre fut élargi des processus aux champs anisotropes, en partie en faisant la connexion avec les travaux précurseurs de (SCHERTZER et LOVEJOY, 1985, 1987) sur la turbulence, dont ils voulaient établir une analyse multifractale anisotrope. Pour cela ils modifièrent la notion de mise à l'échelle en introduisant une mise à l'échelle anisotrope par une famille d'opérateurs. De même MOLZ et coll. (1997) construisirent à partir d'une représentation spectrale un champ anisotrope pour modéliser des phénomènes de transport anisotrope. C'est dans ce contexte que BIERMÉ et coll. (2007) ont par la suite formalisé l'approche par opérateur de scaling, et ont proposé une large classe de champs possédant la propriété (2.9) d'autosimilarité matricielle.

Le problème de l'existence de tels champs, pour toute matrice à spectre de partie réelle positive \mathbf{E} , a été traité dans (BIERMÉ et coll., 2007)⁶. Ils proposent en effet une classe particulière de champs aléatoires stables⁷ vérifiant la propriété (2.9) et possédant d'autres propriétés remarquables, comme notamment de posséder des accroissements stationnaires et une densité spectrale continue. Dans le cas gaussien, et dans le cas $d = 2$ qui nous intéresse, ce théorème d'existence à partir de la représentation spectrale donne alors :

5. La notation $c^{\mathbf{E}} = \exp(\mathbf{E} \log c)$ où $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ désigne l'exponentielle de matrice.

6. Les exposant E et H ne sont pas uniques en général, DIDIER et coll. (2017) traitent le problème de caractériser l'ensemble des possibles pour H étant donné E , et réciproquement.

7. Les *champs stables* sont une classe de champs aléatoires généralisant les champs gaussiens, et qui englobent les processus de Lévy. Cf. (SAMORODNITSKY et TAQQU, 1994)

Théorème 2.1 (REPRÉSENTATION HARMONISABLE D'UN OSGRF)

Soit ρ une fonction continue, positive, vérifiant pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, $\rho(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ et \mathbf{E}^\top -homogène, c.-à-d. telle que

$$\forall a > 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \rho(a \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\xi}) = a \rho(\boldsymbol{\xi}),$$

alors le champ gaussien défini par

$$X_\rho(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \rho(\boldsymbol{\xi})^{-H - \frac{\text{Tr}(\mathbf{E})}{2}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (2.10)$$

existe et est stochastiquement continu si $H \in (0, \min_{\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{E})} \text{Re}(\lambda))$. Par ailleurs le champ X vérifie (2.9) et est à accroissements stationnaires.

La difficulté consiste à construire de telles densités spectrales ρ , ce qui est résolu par la proposition suivante :

Proposition 2.4 (CONSTRUCTION DE DENSITÉS SPECTRALES ADMISSIBLES)

La fonction ρ définie par

$$\rho(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathcal{S}_0} \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos \left(\langle \mathbf{x}, r \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\theta} \rangle \right) \right) \frac{dr}{r^2} d\mu(\boldsymbol{\theta}),$$

est continue, positive et \mathbf{E}^\top -homogène. Ici \mathcal{S}_0 est la sphère unité de \mathbb{R}^2 pour une norme bien choisie et μ est une mesure finie sur \mathcal{S}_0 .

Remarque 2.4. **CLAUSEL (2008)** a remarqué que cette classe de densité spectrale considérée dans (**BIERMÉ et coll., 2007**), coïncidait avec la classe des *pseudo-normes*, ce qui a permis de proposer une construction explicite de densités spectrales admissibles (**VEDEL et coll., 2011**). Dans (**CLAUSEL, 2008**) est également proposée une classe plus générale d'*autosimilarité matricielle simultanée* mais dont les accroissements des champs ainsi construits sont à accroissements rectangulaires stationnaires.

Pour un passage en revue des récents développements autour de l'étude des propriétés fractales des champs gaussiens anisotropes on renvoie le lecteur vers (**XIAO, 2013**).

2.3 Simulations numériques de champs aléatoires

Nous avons exposé précédemment différents modèles de textures aléatoires. Dans l'optique de pouvoir caractériser et détecter l'anisotropie nous avons besoin de générer informatiquement ces textures.

2.3.1 Méthode de Cholesky pour les champs gaussiens

Principe général

Un vecteur gaussien $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ centré, c.-à-d. $\mathbb{E}[X_i] = 0$ pour tout i , de taille N est entièrement déterminé par la donnée de sa matrice de covariance \mathbf{R} de taille $N \times N$ dont les coefficients sont $\mathbf{R}_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$. Afin de simuler une réalisation de ce vecteur $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$,

on effectue une décomposition de Cholesky de la matrice de covariance (ce qui est licite car par définition celle-ci est symétrique définie positive) $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$, avec \mathbf{L} une matrice triangulaire supérieure. Cette procédure a une complexité en $O(N^3)$ ce qui très coûteux lorsque N devient grand. Puis on considère un vecteur gaussien $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N)$ dont les composantes Z_i sont des variables centrées indépendantes de variance 1, c.-à-d. $\mathbb{E}[Z_i Z_j] = \delta_{ij}$, et donc

$$\mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top] = \mathbf{I}_N .$$

On forme $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Z}$ et on vérifie que par construction ce vecteur gaussien a pour covariance \mathbf{R} :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top] = \mathbb{E}[(\mathbf{L}\mathbf{Z})(\mathbf{L}\mathbf{Z})^\top] = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{L}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top\mathbf{L}^\top]}_{\text{par linéarité de l'espérance}} = \mathbf{L}\mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top]\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{I}_N\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \mathbf{R} .$$

Simulation d'un champ gaussien 2-D

On souhaite simuler un champ gaussien 2-D X sur le domaine $[0, 1[\times [0, 1[$ en tout point $(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})$, $i, j = 0, \dots, r-1$. Pour cela on remplace la discrétisation du champ 2-D sur la grille de taille $r \times r$ par un vecteur de discrétisation 1-D de taille $N = r^2$, en empilant les colonnes :

$$(X)_{\frac{i}{r}, \frac{j}{r}}^{2D} = \begin{bmatrix} X_{0,0} & X_{0,\frac{1}{r}} & \cdots & X_{0,\frac{r-1}{r}} \\ X_{\frac{1}{r},0} & X_{\frac{1}{r},\frac{1}{r}} & \cdots & X_{\frac{1}{r},\frac{r-1}{r}} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{\frac{r-1}{r},0} & X_{\frac{r-1}{r},\frac{1}{r}} & \cdots & X_{\frac{r-1}{r},\frac{r-1}{r}} \end{bmatrix} \iff (X)_{\frac{i}{r}}^{1D} = \begin{bmatrix} X_{0,0} \\ X_{\frac{1}{r},0} \\ \vdots \\ X_{\frac{r-1}{r},0} \\ X_{0,\frac{1}{r}} \\ X_{\frac{1}{r},\frac{1}{r}} \\ \vdots \\ X_{\frac{r-1}{r},\frac{1}{r}} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{0,\frac{r-1}{r}} \\ X_{\frac{1}{r},\frac{r-1}{r}} \\ \vdots \\ X_{\frac{r-1}{r},\frac{r-1}{r}} \end{bmatrix} .$$

Ainsi la covariance du vecteur $(X)_{\frac{i}{r}}$ est donnée par la grande matrice de taille $N \times N$ suivante :

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \cdots & \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix} \right) & \cdots & \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix} \right) & \cdots & \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r-1}{r} \end{pmatrix} \right) & \cdots & \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ \frac{r-1}{r} \end{pmatrix} \right) \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r-1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{r-1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} \frac{r-1}{r} \\ \frac{r-1}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right]$$

$$\text{avec } \mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} i_1/r \\ j_1/r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_2/r \\ j_2/r \end{pmatrix} \right) = \text{Cov} \left(X_{\frac{i_1}{r}, \frac{j_1}{r}}, X_{\frac{i_2}{r}, \frac{j_2}{r}} \right).$$

On applique alors la méthode de Cholesky $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ et on simule le grand vecteur X de taille r^2 , que l'on remet sous forme d'image en désempilant les colonnes, ce qui se fait sous MATLAB™ *via* la commande :

$$X = \text{reshape}(X, r, r).$$

Remarque 2.5. Souvent le champ considéré vérifiera $X_{0,0} = 0$, ainsi la première ligne et première colonne de \mathbf{R} sera nulle puisque $\mathbf{R} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdot \right) = 0$. Dans ce cas on considèrera la matrice extraite \mathbf{R}_* privée de cette première ligne et colonne :

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_* & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

On applique alors la décomposition de Cholesky à \mathbf{R}_* , ce qui produit une matrice triangulaire inférieure \mathbf{L}_* telle que $\mathbf{R}_* = \mathbf{L}_*\mathbf{L}_*^\top$. On forme alors la matrice

$$\mathbf{L} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 \\ & & \mathbf{L}_* & \vdots \\ & & & 0 \end{array} \right),$$

et on vérifie que l'on a bien $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \mathbf{R}$.

2.3.2 Méthode de Wood et Chan pour les champs gaussiens stationnaires

Une autre méthode de simulation exacte, initialement introduite par **DAVIES et HARTE (1987)** puis généralisée par **WOOD et CHAN (1994)** et **DIETRICH et NEWSAM (1997)**, permet

de réaliser la synthèse d'un processus gaussien stationnaire comportant N échantillons, en $O(N \log N)$. Sa matrice de covariance s'écrit

$$\mathbf{R}_{ij} = r(|i - j|), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

avec r une fonction qui assure que \mathbf{R} est définie positive. L'idée, comme pour la méthode de Cholesky, consiste à déterminer une racine carrée de la matrice de covariance. En général la recherche d'une racine est coûteuse comme nous l'avons vu, mais dans le cas où le processus est stationnaire, et donc sa matrice de covariance \mathbf{R} est de Toeplitz, on a un moyen de calculer plus rapidement cette racine en intégrant \mathbf{R} de taille $N \times N$ dans une matrice circulante \mathbf{C} plus grande de taille $2M \times 2M$ avec $M \geq N - 1$, dont on sait calculer efficacement la racine carrée. La matrice \mathbf{C} considérée, est engendrée par la première ligne \mathbf{c} suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}[k] &= r(k) & k = 0, \dots, N - 1, \\ \mathbf{c}[k] &= \alpha(k) & k = N, \dots, 2M - N + 1, \\ \mathbf{c}[2M - k] &= r(k) & k = 1, \dots, N - 2, \end{aligned}$$

où $\alpha(k)$ est arbitraire. Distinguons deux cas :

- Si $M = N - 1$, alors il n'y a aucun terme supplétif $\alpha(k)$, et la première ligne de \mathbf{C} est

$$\mathbf{c} = [r_0 \quad \cdots \quad r_{N-1} \quad r_{N-2} \quad \cdots \quad r_1],$$

de longueur $N + N - 2 = 2(N - 1) = 2M$ et engendre circulairement la matrice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{R} \\ \uparrow \\ r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-1} & r_{N-2} & \cdots & r_1 \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{N-2} & r_{N-1} & \cdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{N-1} & r_{N-2} & \cdots & r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-2} \\ r_{N-2} & r_{N-1} & \cdots & r_1 & r_0 & \cdots & r_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{N-2} & r_{N-3} & \cdots & r_0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^\top & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.6 – En faisant des décalages successifs du vecteur \mathbf{c} on crée une matrice circulante \mathbf{C} qui fait apparaître la matrice Toeplitz \mathbf{R} le long de la diagonale.

- Si $M > N - 1$, on peut adjoindre $2(M - N + 1)$ termes intermédiaires $\alpha(k)$ dans la première ligne \mathbf{c} , qui est également de longueur $2M$:

$$\mathbf{c} = [r_0 \quad \cdots \quad r_{N-1} \quad \alpha_N \quad \cdots \quad \alpha_{2M-N+1} \quad r_{N-2} \quad \cdots \quad r_1],$$

où on impose seulement que $\alpha_{2M-N+1} = r_{N-1}$, de sorte que la matrice circulante soit celle de la Figure 2.7.

Or on dispose du résultat classique suivant :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} \mathbf{R} \\ \uparrow \\ \boxed{\begin{matrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N-1} & r_{N-2} & \cdots & r_0 \end{matrix}} & \alpha_N & \alpha_{N+1} & \cdots & \alpha_{2M-N+1} & r_{N-2} & r_{N-3} & \cdots & r_2 & r_1 \\
r_{N-1} & \alpha_N & \alpha_{N+1} & \cdots & \alpha_{2M-N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & \cdots & r_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_{N-1} & r_{N-2} & \cdots & r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-1} & \alpha_N & \alpha_{N+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2M-N} \\
\alpha_{2M-N} & r_{N-1} & r_{N-2} & \cdots & r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-1} & \alpha_N & \alpha_{N+1} & \cdots & \cdots & \alpha_{2M-N-2} \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
r_1 & r_2 & \cdots & r_{N-1} & \alpha_N & \alpha_{N+1} & \cdots & r_{N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & \cdots & r_1 & r_0
\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

FIGURE 2.7 – En faisant des décalages successifs du vecteur \mathbf{c} on crée une matrice circulante \mathbf{C} qui fait apparaître la matrice Toeplitz \mathbf{R} le long de la diagonale.

Proposition 2.5 (DIAGONALISATION D'UNE MATRICE CIRCULANTE)

Toute matrice circulante \mathbf{C} de taille $2M \times 2M$ se décompose comme suit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^*,$$

avec $\mathbf{Q}^* = \frac{1}{\sqrt{2M}}\mathbf{F}_{2M}$, $\mathbf{Q} = \sqrt{2M}\mathbf{F}_{2M}^{-1}$ et $[\mathbf{F}_{2M}]_{pq} = e^{-2\pi j \frac{pq}{2M}}$ pour $0 \leq p, q < 2M$, ainsi que

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{F}_{2M}\mathbf{c}). \quad (2.11)$$

Par conséquent \mathbf{C} s'écrit $\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{S}^*$ et admet pour racine carrée $\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$.

Soit alors \mathbf{z} un vecteur aléatoire complexe dont les parties réelles et imaginaires sont de taille $2M$ et de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2M})$, alors $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}\mathbf{z}$ de taille $2M$ est tel que

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^*] &= \mathbb{E}[\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{z}\mathbf{z}^*\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}^*], \\
&= \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbb{E}[\mathbf{z}\mathbf{z}^*]\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}^*, \\
&= \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{I}_{2M}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}^*, \\
&= \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

Comme toute matrice extraite de \mathbf{C} de taille $N \times N$ le long de la diagonale est égale à \mathbf{R} , alors tout sous-vecteur \mathbf{x} de \mathbf{y} de N points a pour loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$.

Remarque 2.6. En toute généralité la matrice \mathbf{S} est complexe. Pour que cette procédure fonctionne, il faut et il suffit que la matrice symétrique \mathbf{C} soit de plus définie positive, de sorte que ses valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_{2M}$ soient positives. Un résultat dû à **DEMBO et coll. (1989)** nous assure l'existence d'un entier $M \geq N - 1$ tel que la matrice \mathbf{C} soit définie positive. Seulement la technique précédente est intéressante uniquement si la matrice \mathbf{C} de taille $2M \times 2M$ n'est pas trop grande devant N . Une heuristique consiste à forcer à zéro les valeurs propres négatives, mais dès lors la simulation n'est plus tout à fait exacte.

Néanmoins dans la pratique, puisque la simulation du vecteur \mathbf{y} va faire intervenir la **FFT**, il est efficace numériquement de prendre $2M$ comme étant une puissance de 2. Puisque $M \geq N - 1$

on considère la plus petite puissance de 2 qui lui est supérieure $M = 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil}$. On forme alors le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} r_0 & \cdots & r_M & r_{M-1} & \cdots & r_1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} r_0 & \cdots & r_{N-1} & \alpha_N & \cdots & \alpha_{2M-N+1} & r_{N-2} & \cdots & r_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

puisque $M \geq N - 1$, et on se ramène de cette manière aux deux cas étudiés précédemment. Les valeurs propres λ_k situées sur la diagonale de $\mathbf{\Lambda}$ s'obtiennent par une FFT sur la ligne \mathbf{c} :

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}) = (\lambda_0, \dots, \lambda_{2M-1}) = \mathbf{F}_{2M} \mathbf{c} = \text{FFT}(\mathbf{c}).$$

Pour un vecteur aléatoire complexe \mathbf{z} dont les parties réelles et imaginaires sont de taille $2M$ et de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2M})$, et idem pour son conjugué $\bar{\mathbf{z}}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{S} \bar{\mathbf{z}}, \\ &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \bar{\mathbf{z}}, \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2M}} \mathbf{F}_{2M}^* \right) (\sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \odot \bar{\mathbf{z}}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \mathbf{F}_{2M} \overline{(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \odot \mathbf{z})}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \overline{\text{FFT}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \odot \mathbf{z})}, \\ &= \text{FFT} \left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2M}} \odot \mathbf{z} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en écrivant $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + j\mathbf{y}_2$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + j\mathbf{S}_2$ et $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2$, on a

$$\mathbf{y} = (\mathbf{S}_1 + j\mathbf{S}_2)(\mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2) = (\mathbf{S}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{S}_2\mathbf{z}_2) + j(\mathbf{S}_1\mathbf{z}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{y}_1 + j\mathbf{y}_2,$$

et

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^* = (\mathbf{S}_1 + j\mathbf{S}_2)(\mathbf{S}_1^T - j\mathbf{S}_2^T) = (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_2^T) + j\underbrace{(\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1^T - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2^T)}_{=0} = \mathbf{C}.$$

Enfin compte tenu du fait que $\mathbb{E}[\mathbf{z}_k \mathbf{z}_l^T] = \delta_{kl} \mathbf{I}_{2M}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{S}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{S}_2\mathbf{z}_2)(\mathbf{z}_1^T \mathbf{S}_1^T - \mathbf{z}_2^T \mathbf{S}_2^T)] = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_2^T = \mathbf{C}, \\ \mathbb{E}[\mathbf{y}_2 \mathbf{y}_2^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{S}_1\mathbf{z}_2 + \mathbf{S}_2\mathbf{z}_1)(\mathbf{z}_2^T \mathbf{S}_1^T + \mathbf{z}_1^T \mathbf{S}_2^T)] = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_2^T = \mathbf{C}, \\ \mathbb{E}[\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{S}_1\mathbf{z}_1 - \mathbf{S}_2\mathbf{z}_2)(\mathbf{z}_2^T \mathbf{S}_1^T + \mathbf{z}_1^T \mathbf{S}_2^T)] = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2^T - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1^T = \mathbf{0}_{2M}, \end{aligned}$$

et donc les parties réelles et imaginaires du vecteur complexe \mathbf{y} sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C})$. Ainsi en considérant par exemple la partie réelle de \mathbf{y} on a

$$\mathbf{y}_1 = \text{Re}\{\mathbf{S}\bar{\mathbf{z}}\} = \text{FFT} \left(\sqrt{\frac{\text{FFT}(\mathbf{c})}{2M}} \odot \mathbf{z} \right) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}).$$

On a donc l'Algorithme 1 suivant, qui est bien de complexité $O(N \log N)$ puisqu'il n'a recours qu'à l'usage de la FFT :

8. La notation \odot désigne le produit de Hadamard où l'on effectue le produit terme à terme des composantes.

Algorithme 1 Simulation d'un champ gaussien stationnaire par la méthode de Wood & Chan

Entrées: N, \mathbf{R}

Sortie: $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$

- 1: Prendre $M = 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil}$.
 - 2: Former le vecteur $\mathbf{c} = [r_0 \ \cdots \ r_M \ r_{M-1} \ \cdots \ r_1]$.
 - 3: Calculer $\boldsymbol{\lambda} = \text{FFT}(\mathbf{c})$ (et forcer la partie réelle au besoin).
 - 4: Générer un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2$ où $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_{2M})$.
 - 5: Calculer le vecteur produit⁸ $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\lambda}{2M}} \odot \mathbf{z}$.
 - 6: Extraire N valeurs consécutives de \mathbf{y} pour obtenir \mathbf{x} .
-

2.3.3 Petit tour d'horizon des autres méthodes de synthèse de champs aléatoires

Comme nous avons pu le voir jusqu'ici, la modélisation des phénomènes naturels ou sociaux par des champs aléatoires est un domaine en constante expansion. C'est la raison pour laquelle il est crucial de disposer de méthodes numériques qui permettent d'effectuer des simulations de ces champs, afin de les confronter aux données réelles de façon à en assurer la validité. Nous venons de voir deux méthodes génériques de synthèse de champs gaussiens, seulement la première est déraisonnablement coûteuse si l'on souhaite traiter des images de taille suffisamment grande ; et la seconde bien que très efficace du point de vue de la complexité, ne concerne que la classe restreinte des champs stationnaires. Nous donnons un aperçu de différentes techniques permettant de simuler une variété de champs gaussiens plus vaste :

- (i) Le **FBF**, qui est isotrope et à accroissements stationnaires, a été synthétisé de diverses façons approchées : en discrétisant la densité spectrale utilisée dans le noyau de l'intégrale stochastique représentant le champ (**SAUPE, 1988**), par des filtres récursifs (**BRUTON et BARTLEY, 1994**), par des ondelettes (**SPANOS et ZELDIN, 1996**), par des méthodes dites de **déplacement du point médian**, ou *Random Midpoint Displacement (RMD)* (**STOKSIK et coll., 1995**) ou à bandes tournantes (**YIN, 1996**) que nous aborderons à la section suivante.
- (ii) Le **FBF** a ensuite été simulé de façon exacte par **STEIN (2002)** qui propose la simulation d'un **FBF** en le représentant par un champ gaussien isotrope localement stationnaire, ce qui lui permet de se ramener à la méthode de **WOOD et CHAN (1994)** exposée précédemment. C'est une simulation exacte et efficace sur une grille régulière.
- (iii) Le **AFBF** a été synthétisé de manière approchée dans (**AYACHE et coll., 2009; BIERMÉ et RICHARD, 2008; SAUPE, 1988**) en discrétisant la représentation spectrale.
- (iv) La méthode des bandes tournantes, qui a donné lieu à une autre simulation du **FBF**, mais qui s'est aussi illustrée pour d'autres champs à accroissements stationnaires (**CHILES et DELFINER, 2009; DIMITRAKOPOULOS, 1990; EMERY, 2008; JOURNAL, 1974; MANTOGLOU et WILSON, 1982; MATHERON, 1973**).
- (iv) Des méthodes génériques basées sur la factorisation de la fonction de covariance, qui doit être explicitement connue (**BROUSTE et coll., 2007; CHAN, 1999**), etc.

L'avantage des méthodes approchées classées en (i) et (iii) est qu'elles sont généralement rapides, mais ont l'inconvénient, dû à la périodisation, la troncation ou autre approximation, de ne plus restituer fidèlement les propriétés statistiques des champs théoriques. La méthode

de **STEIN (2002)** (ii) est intéressante puisqu'elle permet une simulation exacte et efficace, mais la représentation localement stationnaire invoquée n'existe pas toujours pour d'autres champs gaussiens, et la méthode n'est donc pas adaptée dans ces cas là. La méthode (iii) peut s'avérer judicieuse et efficace dans un certain nombre de cas où les champs sont à accroissements stationnaires, mais les garanties de convergence sont parfois difficiles à établir et des artefacts peuvent apparaître sur la réalisation. Enfin les méthodes génériques (iv) ont l'avantage d'être en principe applicable pour une large classe de champs gaussiens, mais restent approchées et requièrent la connaissance explicite de la fonction de covariance, ce dont on ne dispose pas toujours.

Nota Bene. On trouvera une méthode de simulation exacte pour des processus stationnaires gaussiens multivariés dans (**HELGASON et coll., 2011**), et pour ceux à valeurs complexes dans (**COEURJOLLY et PORCU, 2016**). Pour un tour d'horizon plus complet on pourra se référer à (**VANMARCKE, 2010**), et pour des paquets de simulation à (**RIBEIRO JR et coll., 2001**; **SCHLATHER, 2001**).

2.3.4 Méthode de Stein appliquée à une classe de champs gaussiens à autosimilarité matricielle

Nous avons vu dans la section 2.2.4, qu'un champ gaussien à autosimilarité matricielle vérifie (2.9) et possède une représentation harmonisable (2.10) dès lors que ses accroissements sont stationnaires, les parties réelles des valeurs propres de la matrice \mathbf{E} sont positives, et H est inférieur à la plus petite d'entre elles. C'est cette classe que l'on considère par la suite. En général nous ne connaissons pas explicitement la fonction de covariance, et les méthodes de simulation sus-citées s'appliquent mal ou du moins ne dispensent pas de synthèse exacte de tels champs. Jusqu'à un article récent de **BIERMÉ et LACAUX (2017)**, qui proposent dans un premier temps la construction de tels champs en explicitant leur semi-variogramme (et donc leur covariance), puis dans un deuxième temps proposent d'adapter la méthode de **STEIN (2002)** dans l'objectif de simuler ces champs.

Théorème 2.2 (CONSTRUCTION DE SEMI-VARIOGRAMMES EXPLICITES DE OSGRF)

Soit \mathbf{E} une matrice réelle 2×2 diagonalisable, de valeurs propres $a_1^{-1}, a_2^{-1} \in [1, +\infty)$, et des vecteurs propres $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathbf{E}^\top \boldsymbol{\theta}_i = a_i^{-1} \boldsymbol{\theta}_i$, $1 \leq i \leq 2$. Pour $H \in (0, 1]$, on définit la fonction $v_{\mathbf{E}, H}$ par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad v_{\mathbf{E}, H}(\mathbf{x}) = \tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{x})^{2H}, \quad \tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \left(|\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1 \rangle|^{2a_1} + |\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2 \rangle|^{2a_2} \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Alors

1. Il existe un champ gaussien centré $X_{\mathbf{E}, H}$ à accroissements stationnaires, tel que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(X_{\mathbf{E}, H}(\mathbf{x}) - X_{\mathbf{E}, H}(\mathbf{y}))^2 \right] = v_{\mathbf{E}, H}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

autrement dit tel que $v_{\mathbf{E}, H}$ soit le variogramme de ce champ.

2. De plus $X_{\mathbf{E}, H}$ est un champ à autosimilarité matricielle.

Preuve :

Nous esquissons la preuve, qui dans une certaine mesure sera ré-employée section 2.4.2. On reconnaît que les deux termes de $\tau_{\mathbf{E}}^2$ dans (2.12) correspondent au variogramme d'un FBM d'ordre a_i . Par conséquent en considérant deux tels FBM indépendants d'ordre respectivement a_1 et a_2 , le champ défini par

$$Y(\mathbf{x}) = B_1^{a_1}(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1 \rangle) + B_2^{a_2}(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2 \rangle),$$

est de façon immédiate à accroissements stationnaires et de variogramme égal à $\tau_{\mathbf{E}}^2$. Ensuite un argument technique, prouvé par [ISTAS et coll. \(2006\)](#), permet d'affirmer que ce variogramme élevé à la puissance $H \in (0, 1]$, soit $v_{\mathbf{E},H}$, reste un variogramme. Donc un tel champ $X_{\mathbf{E},H}$ à accroissements stationnaires de variogramme $v_{\mathbf{E},H}$ existe, et on vérifie le deuxième point du fait que $\tau_{\mathbf{E}}$ est une fonction \mathbf{E} -homogène. \square

La seconde étape consiste, à la manière de [STEIN \(2002\)](#), à construire une fonction de covariance $K_{\mathbf{E},H}$ dont la périodisée correspond à la covariance d'un champ gaussien $Y_{\mathbf{E},H}$ stationnaire, qui approche celle de $X_{\mathbf{E},H}$ sur un compact. Ainsi la simulation de $X_{\mathbf{E},H}$ s'obtient par la simulation de $Y_{\mathbf{E},H}$ au moyen des matrices circulantes, soit la méthode de [WOOD et CHAN \(1994\)](#) adaptée en 2-D. Plus précisément, soit

$$K_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_H - \tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{x})^{2H} + (1 - c_H)\tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{x})^{2H}, & \text{si } \tau_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = (|x_1|^{2a_1} + |x_2|^{2a_2})^{1/2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et $\overline{K}_{\mathbf{E},H}$ qui périodise $K_{\mathbf{E},H}$ avec une période égale à 2 dans chaque direction.

Théorème 2.3

Supposons que $K_{\mathbf{E},H}$ soit une covariance d'un champ gaussien stationnaire. Alors il existe un champ gaussien stationnaire $Y_{\mathbf{E},H}$ tel que

$$\mathbb{E} \left[(Y_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}) - Y_{\mathbf{E},H}(\mathbf{y}))^2 \right] = \overline{K}_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Soit alors le champ gaussien $Z_{\mathbf{E},H}$ défini par

$$Z_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}) = Y_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}) - Y_{\mathbf{E},H}(\mathbf{0}) + \sqrt{1 - c_H}(B_1^{a_1}(\mathbf{x}) + B_2^{a_2}(\mathbf{x})),$$

on a pour

$$M = \min \left\{ 0 \leq r \leq 1, |r|^{2a_1} + |r|^{2a_2} \leq 1 \right\},$$

l'égalité en loi suivante

$$\left\{ X_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in [0, M]^2 \right\} \stackrel{(fdd)}{=} \left\{ Z_{\mathbf{E},H}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in [0, M]^2 \right\}.$$

2.4 Simulations numériques du champ brownien fractionnaire anisotrope

Cette section est consacrée à la réalisation des champs browniens fractionnaires anisotropes (AFBF) en 2-D, par la [méthode des bandes tournantes, ou *Turning Bands Method \(TBM\)*](#), dont l'implémentation a été proposée par [BIERMÉ et coll. \(2015\)](#). Nous développons plus particulièrement cette implémentation puisque notre nouveau modèle présenté au chapitre suivant sera une extension de cette classe et sa simulation s'appuiera également sur la technique présentée ci-après. Dans la plupart des cas, la fonction de covariance des AFBF n'est pas connue et donc les méthodes génériques basées sur celle-ci ([BROUSTE et coll., 2007](#); [CHAN, 1999](#)) ne s'appliquent pas. De même la discrétisation de la représentation spectrale ([AYACHE et coll., 2009](#);

BIERMÉ et RICHARD, 2008) a fourni des résultats avec des propriétés statistiques affectées par les approximations. Cela a amené les auteurs **BIERMÉ et coll. (2015)** à adapter la **TBM** aux **AFBF**, d'une part en conservant la propriétés statistiques du champ théorique (caractère gaussien, accroissements stationnaires et autosimilarité asymptotique) et en donnant des garanties sur les convergences de la discrétisation, et d'autre part en proposant un algorithme relativement rapide, qui tire profit à la fois de simulation exacte du **FBM** couplée à l'autosimilarité, et de l'usage de la programmation dynamique pour réduire la complexité de la procédure.

La méthode requiert donc la simulation de mouvements browniens fractionnaires 1-D, grâce à l'intégration dans des matrices circulantes, ce que nous commençons par présenter.

2.4.1 Simulation d'un FBM 1-D par matrices circulantes

Dans cette sous-section on se propose de simuler les valeurs d'un **FBM** sur l'intervalle $[0, T]$, sur une grille suffisamment fine pour en percevoir les variations irrégulières, c'est-à-dire aux points $t_k^N = k\frac{T}{N}$, pour $k = 1, \dots, N$ et N très grand. Puisqu'un **FBM** est autosimilaire et à accroissements stationnaires, il est suffisant de simuler les valeurs $B_1^H, B_2^H, \dots, B_N^H$ puis de les multiplier par $(T/N)^H$.

Nous pourrions bien sûr simuler le **FBM** par le biais de sa covariance et de la méthode de Cholesky décrite section 2.3.1, mais comme nous l'avons vu la complexité de cette méthode est souvent rédhibitoire. Une autre méthode de simulation exacte, initialement introduite par **DAVIES et HARTE (1987)** puis généralisée par **WOOD et CHAN (1994)** et **DIETRICH et NEWSAM (1997)**, permet de réaliser la synthèse d'un processus gaussien stationnaire comportant N échantillons, en $O(N \log N)$. Le **FBM** n'est pas stationnaire, en revanche ses accroissements le sont. Ainsi si l'on sait simuler les accroissements

$$\xi_1 = B_1^H, \xi_2 = B_2^H - B_1^H, \dots, \xi_N = B_N^H - B_{N-1}^H,$$

qui forment une suite stationnaire de variables gaussiennes, appelée *bruit gaussien fractionnaire*, dont la matrice de covariance est de Toeplitz

$$\mathbf{R}_{ij} = r(|i - j|), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

avec

$$r[k] = \frac{\sigma^2}{2} (|k+1|^{2H} - |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

alors on disposera des B_i^H en cumulant les accroissements :

$$B_i^H = \sum_{k=1}^i \xi_k.$$

Dans le cas du bruit gaussien fractionnaire, caractérisé par (2.13), **PERRIN et coll. (2002)** ont montré que la matrice circulante \mathbf{C} est définie positive dès que $M = N - 1$, en prouvant que les valeurs propres λ_k , figurant dans $\mathbf{\Lambda}$ et calculée *via* (2.11), sont positives :

$$\lambda_k = r(0) - (-1)^k r(n-1) + 2 \sum_{i=0}^{N-2} r(k) \cos\left(\frac{2\pi ik}{2M}\right) \geq 0.$$

On applique alors aux (ξ_i) et à \mathbf{R} la méthode de Wood et Chan exposée section 2.3.2, et on obtient l'Algorithme 2.

En utilisant la **FFT** la complexité est en $O(N \log N)$. La méthode exposée ci-dessus (**PERRIN et coll., 2002**) est la méthode exacte la plus rapide dont on dispose à l'heure actuelle pour simuler le **FBM**. D'autres méthodes exactes existent comme :

Algorithme 2 Simulation du mouvement brownien fractionnaire**Entrées:** $N, H \in (0, 1), T$ **Sortie:** $(B_i^H)_{1 \leq i \leq N}$

- 1: Prendre $M = 2^{\lceil \log_2(N-1) \rceil}$.
- 2: Former le vecteur $\mathbf{c} = [r_0 \ \cdots \ r_M \ r_{M-1} \ \cdots \ r_1]$.
- 3: Calculer $\boldsymbol{\lambda} = \text{FFT}(\mathbf{c})$ (et forcer la partie réelle au besoin).
- 4: Générer un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + j\mathbf{z}_2$ où $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_{2M})$.
- 5: Calculer le vecteur produit $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\lambda}{2^M}} \odot \mathbf{z}$.
- 6: Prendre la FFT du résultat $\mathbf{y} = \text{FFT}(\mathbf{v})$.
- 7: Faire la somme cumulée de $\text{Re}(\mathbf{y})$ jusqu'à N pour obtenir les $(B_i^H)_{1 \leq i \leq N}$.
- 8: Multiplier au besoin par $(T/N)^H$ pour obtenir la simulation sur $[0, T]$.

- La méthode de **HOSKING (1984)**, de **LEVINSON (1949)** et **DURBIN (1960)** exposée dans (**PELTIER, 1998**) et de complexité $O(N^2 \log N)$.
- La méthode de **ABRY et SELLAN (1996)** basée sur une décomposition en ondelettes.

Par ailleurs des méthodes d'approximation sont également employées suivant la nature du champ à simuler :

- Par discrétisation des représentations spectrales (**MANDELBROT et VAN NESS, 1968**), (**DIEKER et MANDJES, 2003**).
- La méthode par agrégat (**WILLINGER et coll., 1997**).
- La méthode **RMD** (**NORROS et coll., 1999**)
- La méthode de **PAXSON (1997)**, etc.

Pour une étude comparative des méthodes de simulation du **FBM** on pourra se référer à (**COEURJOLLY, 2000**) et (**DIEKER, 2004**).

2.4.2 Simulation des champs browniens fractionnaires anisotropes par « bandes tournantes »

BIERMÉ et coll. (2015) ont proposé une méthode dite à « bandes tournantes », pour simuler la classe des champs browniens fractionnaires anisotropes (**AFBF**), introduits dans (**BONAMI et ESTRADÉ, 2003**), et dont on rappelle l'expression de la densité spectrale issue de la Définition 2.8 :

$$f(\boldsymbol{\xi}) = c(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2h(\arg \boldsymbol{\xi})-2}, \quad (2.14)$$

avec c et h des fonctions π -périodiques définies sur $(-\pi/2, \pi/2]$ et à valeurs respectives dans \mathbb{R}^+ et dans $(0, 1)$.

Remarque 2.7. Pour $c \equiv C$ et $h \equiv H$ constants, on retrouve la définition du **FBF**, qui est isotrope et dont on connaît l'expression du variogramme, qui est analogue à celle que nous avons montré pour le **FBM** (1.27), avec la constante C_H dont la formule est donnée en (1.28) et démontrée dans (**LACAUX, 2004**) :

$$v_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 C \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} d\boldsymbol{\xi} = \frac{C}{2} C_H \|\mathbf{x}\|^{2H}.$$

La plupart du temps on ne dispose pas de l'expression explicite du variogramme d'un **AFBF**. Il est également déconseillé de discrétiser l'intégrale pour simuler X , car dans ces conditions on perdrait les propriétés statistiques du champ. L'idée va plutôt être de simuler des processus 1-D le long des droites d'angle θ passant par l'origine (les bandes tournantes), puis de s'appuyer sur ces dernières pour simuler le champ 2-D (Figure 2.8). Ce qui motive ce procédé réside dans la proposition suivante :

Proposition 2.6 (REPRÉSENTATION POLAIRE DU VARIOGRAMME D'UN **AFBF**)

Soit X un champ gaussien centré à accroissements stationnaires tel que $X(0) = 0$ p.s., et tel que la variogramme est donné par (2.6) et la densité spectrale par (2.14), alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$v_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma(h(\theta))c(\theta) |\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta) \rangle|^{2h(\theta)} d\theta, \quad (2.15)$$

avec $\mathbf{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^\top$ et $\gamma(H)$ donnée par le carré de $C_2(H)$ calculé en (1.25).

Preuve :

On effectue un changement de variable en coordonnées polaires dans l'intégrale du variogramme :

$$\begin{aligned} 2v_X(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 c(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2h(\arg \boldsymbol{\xi})-2} d\boldsymbol{\xi}, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left| e^{jr\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta) \rangle} - 1 \right|^2 c(\theta) r^{-2h(\theta)-1} dr d\theta. \end{aligned}$$

Et en utilisant la relation (1.27) démontrée au Chapitre 1, à savoir

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{jrt} - 1 \right|^2 r^{-2H-1} dr = \frac{1}{2} \gamma(H) |t|^{2H},$$

le résultat suit. □

En posant $\tilde{v}_\theta(t) = \gamma(h(\theta))c(\theta)|t|^{2h(\theta)}$, (2.15) se réécrit

$$v_X(\mathbf{x}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tilde{v}_\theta(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta) \rangle) d\theta, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.16)$$

Autrement dit, le variogramme 2-D $v_X(\mathbf{x})$ s'obtient en faisant « tourner » et en sommant des variogrammes 1-D $\tilde{v}_\theta(t)$. Par ailleurs d'après (1.27), le variogramme d'un **FBM** 1-D d'ordre H s'écrit à une constante près $v_H(t) = \frac{1}{2}|t|^{2H}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, à un facteur multiplicatif près, les \tilde{v}_θ sont des **FBM** 1-D d'ordre $h(\theta)$. Il est alors naturel de considérer le champ simulé suivant :

$$X_{\Theta, \Lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i \gamma(h(\Theta_i))c(\Theta_i)} B_i^{h(\Theta_i)}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\Theta_i) \rangle), \quad (2.17)$$

où les bandes $\Theta = (\Theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont une discrétisation des angles sur lesquelles se projette le point \mathbf{x} (Figure 2.8), $\lambda_i = \Theta_{i+1} - \Theta_i$ la largeur des bandes, et les $B_i^{h(\Theta_i)}$ sont n **FBM** indépendants d'ordre $h(\Theta_i)$, ayant pour variogramme :

$$v_{\Theta, \Lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(h(\Theta_i))c(\Theta_i) v_{h(\Theta_i)}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\Theta_i) \rangle),$$

qui peut être vu comme une approximation par la méthode des rectangles de l'intégrale (2.16).

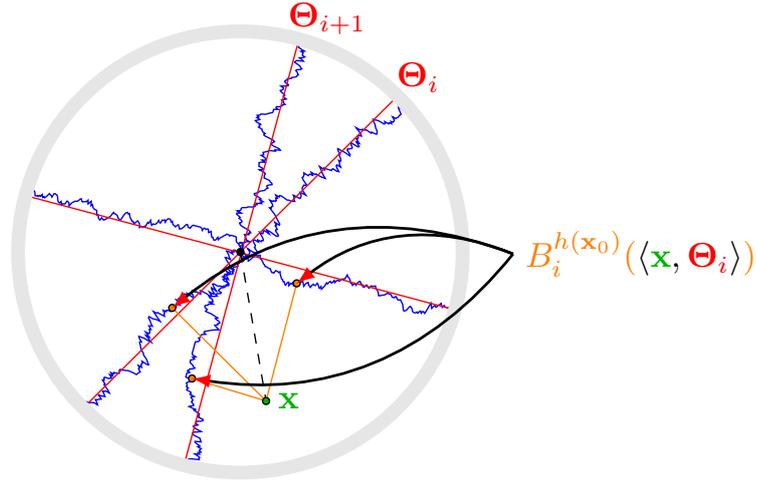


FIGURE 2.8 – Illustration de la méthode des bandes tournantes.

BIERMÉ (2017) propose également une autre façon d'exposer les choses si h était constante $h \equiv H$. Cela consisterait à remarquer que, à partir du variogramme v_H du FBM 1-D et d'une mesure finie μ sur le cercle \mathbb{S}^1 , il est possible de construire un variogramme (c.-à-d. une fonction de type négatif) $v_{H,\mu}$ sur \mathbb{R}^2 par :

$$v_{H,\mu}(\mathbf{x}) = \int_{[0,2\pi]} v_H(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta) \rangle) \mu(d\theta) = \int_{[0,2\pi]} \frac{1}{2} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta) \rangle|^{2H} \mu(d\theta) = C_{H,\mu} \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \|\mathbf{x}\|^{2H} .$$

On note $X_{H,\mu}$ le champ gaussien à accroissements stationnaires qui a pour variogramme $v_{H,\mu}$. On a les résultats suivants :

- Si μ est uniforme sur le cercle, soit $\mu(d\theta) = d\theta$, alors on voit que $v_{H,\mu}$ est invariant par rotation donc $C_{H,\mu}$ est une constante, $X_{H,\mu}$ est isotrope et on retrouve le FBF d'ordre H .
- Si μ_n est une mesure discrète sur \mathbb{S}^1 , soit $\mu_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{\theta_i}$ pour $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi]$, alors

$$v_{H,\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_H(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta_i) \rangle) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Var} \left(B^H(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta_i) \rangle) \right) ,$$

et donc naturellement en considérant n FBM 1-D indépendants B_i^H , le champ

$$X_{H,\mu_n}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} B_i^H(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta_i) \rangle) , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 , \quad (2.18)$$

est un champ gaussien centré à accroissements stationnaires de variogramme $v_{H,\mu}$.

- Si $\mu(d\theta) = c(\theta) d\theta$, une approximation de Riemann (type méthode des rectangles) ou par la méthode des trapèzes, etc. pour un choix convenable de μ_n , permet de définir un champ X_{H,μ_n} qui soit une bonne approximation de $X_{H,\mu}$.

Se pose alors deux problèmes :

1. Le choix de $\Theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui assure la convergence

$$X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}) \rightarrow X(\mathbf{x}) , \quad (2.19)$$

suyant une distance à définir.

2. La simulation des FBM 1-D $B_i^{h(\theta_i)}$ sur des points non équidistants.

Convergence. La preuve de (2.19) utilise la notion de *distance de Kolmogorov* définie par :

$$d_{\text{Kol}}(X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}), X(\mathbf{x})) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}) \leq t) - \mathbb{P}(X(\mathbf{x}) \leq t)| ,$$

et lorsque $d_{\text{Kol}}(X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}), X(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ alors $X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}) \rightarrow X(\mathbf{x})$ au sens des distributions.

BIERMÉ et coll. (2015) ont montré d'une part que

$$d_{\text{Kol}}(X_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x}), X(\mathbf{x})) \leq \frac{|v_X(\mathbf{x}) - v_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x})|}{v_X(\mathbf{x})} ,$$

et d'autre part que l'on peut toujours trouver Θ, Λ et un compact $T \subset \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall \mathbf{x} \in T, \quad |v_X(\mathbf{x}) - v_{\Theta,\Lambda}(\mathbf{x})| \leq C_T \epsilon_{\Theta}^{\min(2H,1)} ,$$

où $H = \min_{\Theta} h(\Theta)$ et $\epsilon_{\Theta} = \max_{i=1,\dots,n+1} (\Theta_i - \Theta_{i-1})$.

Simulation des $B_i^{h(\theta_i)}$. On souhaite simuler $X_{\Theta,\Lambda}$ sur $[0, 1]^2$ que l'on discrétise en une grille régulière $r \times r$. Les points en lesquels on veut estimer X sont ainsi $\mathbf{x} = (k_1/r, k_2/r)^{\top}$ avec $0 \leq k_1, k_2 \leq r$. Choisissons les Θ_i de sorte que $\tan(\Theta_i) = p_i/q_i$ où $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}$. Alors, compte tenu de l'autosimilarité du FBM $B_i^{h(\theta_i)}$, on a :

$$B_i^{h(\theta_i)}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}(\Theta_i) \rangle) = B_i^{h(\theta_i)} \left(\frac{k_1}{r} \cos(\Theta_i) + \frac{k_2}{r} \sin(\Theta_i) \right) = \left(\frac{\cos(\Theta_i)}{r q_i} \right)^{h(\Theta_i)} B_i^{h(\theta_i)}(k_1 q_i + k_2 p_i) ,$$

où les $k_1 q_i + k_2 p_i$ sont entiers. Ainsi on peut se ramener à une synthèse équirépartie des $B_i^{h(\theta_i)}(k)$ pour $0 \leq k \leq r(|p_i| + q_i)$, c'est-à-dire utiliser la méthode efficace des matrices circulantes de la section 2.4.1.

Remarque 2.8. Une version naïve consiste à considérer un échantillonnage régulier des bandes $\Theta_i = \alpha_1 + \frac{i}{n}(\alpha_2 - \alpha_1)$ dans le quadrant défini par les angles α_1 et α_2 , une approximation rationnelle p_i/q_i par fraction continue des $\tan(\Theta_i)$, et enfin on simule les $B_i^{h(\theta_i)}$ de longueur $r(|p_i| + q_i)$. Un problème, d'ordre informatique cette fois, se pose lorsque cette longueur est trop grande, provoquant un dépassement de mémoire. Les auteurs ont proposé une méthode permettant de contrôler la taille des entiers p_i et q_i de façon à réduire la complexité, et ce grâce au recours à la programmation dynamique.

2.4.3 Réduction de la complexité par programmation dynamique

Est considéré l'ensemble des couples d'entiers (p_k, q_k) premiers entre eux, bornés en valeur absolue par un entier naturel N ⁹, et tel que l'angle associé $\tan(\Theta_k) = \frac{p_k}{q_k}$ soit dans le quadrant considéré (α_1, α_2) (choisit en fonction de c) :

$$\mathcal{V}_N = \left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \llbracket -N, N \rrbracket, q \in \llbracket 1, N \rrbracket, \text{pgcd}(p, q) = 1, \alpha_1 < \arctan\left(\frac{p}{q}\right) < \alpha_2 \right\} ,$$

9. En pratique les auteurs prennent $N = 1 + \left\lceil \frac{1}{\tan(\epsilon)} \right\rceil$, qui est empiriquement assez grand.

trié préalablement suivant les Θ_k croissant.

L'idée va être de choisir parmi cet ensemble \mathcal{V}_N , s couples qui minimisent le coût total :

$$C(\Theta) = \sum_{k=1}^s C(r(|p_{i_k}| + q_{i_k})) ,$$

où $C(\ell)$ est le coût de l'algorithme de simulation d'un FBM 1-D, qui est en $O(\ell \log \ell)$, sous la contrainte d'erreur $\epsilon_\Theta \leq \epsilon$. Pour cela ils fixent $0 \leq i \leq n+1$ et considèrent s indices supérieurs à i :

$$i_1 = i, i_2, \dots, i_s = n+1 .$$

Le coût de ce sous-ensemble est noté c_i , et le coût de l'indice i est noté $e_i = C(r(|p_i| + q_i))$. On a alors la relation de récurrence de **BELLMAN (1954)** suivante :

$$c_i = e_i + \min_{j>i, \theta_j \leq \theta_i + \epsilon} c_j .$$

Le coût qui nous intéresse est c_0 . La programmation dynamique consiste à partir de la fin en posant $c_{n+1} = 0$, et à calculer les c_i à rebours, en notant à chaque fois k_i l'indice $j > i$ qui réalise le minimum. La séquence optimale i_1, \dots, i_s est telle que $i_1 = k_0, i_2 = k_{i_1}, \dots, i_s = k_{i_{s-1}}$. En sortie de l'algorithme on dispose donc de s couples $(p_{i_k}, q_{i_k})_{1 \leq k \leq s}$ et donc d'un ensemble $\Theta = (\theta_k)_{1 \leq k \leq s}$ de s angles $\theta_k = \arctan \frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}$ qui minimisent le coût $C(\Theta)$ et telle que l'erreur commise est inférieure à ϵ .

2.4.4 Exemples de simulations

Il est maintenant possible de générer des champs browniens fractionnaires anisotropes de la forme

$$f(\boldsymbol{\xi}) = c(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2h(\arg \boldsymbol{\xi})-2} ,$$

pour différents profils génériques alloués aux fonctions h et c . Une des familles qui va particulièrement nous intéresser dans le nouveau modèle que nous développerons dans le chapitre suivant, est celle que **BIERMÉ et coll. (2015)** ont baptisé de **champ élémentaire, ou Elementary Field (EF)** :

Définition 2.6 (CHAMP ÉLÉMENTAIRE)

On appelle champ élémentaire un champ brownien fractionnaire anisotrope défini par

$$f(\boldsymbol{\xi}) = c(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} ,$$

dont la fonction de Hurst est constante égale à H et la fonction de topothesie est un cône fréquentiel dont l'ouverture est définie par les réels θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \leq \theta_2$:

$$c(\theta) \equiv c_{\theta_1, \theta_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{[\theta_1, \theta_2]}(\theta) , \quad (2.20)$$

que l'on notera aussi parfois

$$c_{\alpha_0, \delta}(\theta) = \mathbb{1}_{[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]}(\theta) .$$

où $\alpha_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ est l'orientation du cône fréquentiel, et $\delta = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}$ sa (demi-)ouverture.

Dans le cas où $\delta = \frac{\pi}{2}$, $c(\theta) = 1$ pour tout θ , et on retrouve $f(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2}$ c'est-à-dire le FBF d'ordre H , représenté Figure 2.9. On observe bien que plus H est proche de 0, plus la texture est rugueuse, et plus H est proche de 1, plus celle-ci est lisse. La texture obtenue s'apparente à un nuage qui ne présente pas de direction privilégiée.

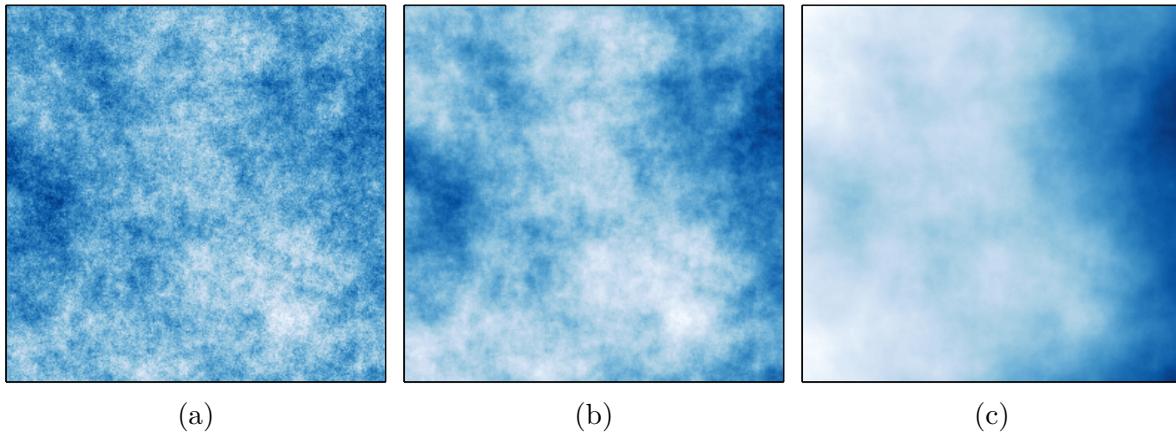


FIGURE 2.9 – FBF simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3.10^{-2}$ et différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$, ce qui génère des images plus ou moins rugueuses/lisses.

On procède de même pour un cône orienté en $\alpha_0 = \pi/6$ et d'ouverture $\delta = 3.10^{-1}$. Les champs élémentaires correspondant sont représentés Figure 2.10, et on s'aperçoit que les textures obtenues sont anisotropes et leur orientation est orthogonale à celle du cône fréquentiel¹⁰; on fait également varier H pour observer les différences de régularités sur ces textures anisotropes. Cette fois la texture s'apparente davantage à un nuage tel que celui représenté Figure 2.3d, c'est-à-dire présentant une direction privilégiée. Enfin en faisant varier l'ouverture du cône δ on constate sur la Figure 2.11 que plus δ est proche de zéro, c'est-à-dire plus le cône est resserré autour de α_0 , et plus l'orientation de la texture est marquée.

Pour visualiser des exemples autres que celui des champs élémentaires, c'est-à-dire pour des choix différents de h et c , on renvoie à l'article d'origine, ou bien à l'interface graphique MATLABTM que nous avons développée à cet égard (Figure 2.12).

Le modèle de Bonami et Estrade, on l'a vu, définit une large classe de champs anisotropes et à accroissements stationnaires, à laquelle les AFBF appartiennent, et dont on dispose d'un procédé de simulation, permettant de rendre compte de différentes formes d'anisotropies encodées dans les fonctions h et c . Ces dernières sont en mesure de conférer à la texture différents degrés d'anisotropie ici ou là, mais sans que l'on sache à proprement parler relier ces orientations aux paramètres du modèle comme cela a été fait pour la régularité $h(\theta)$. En effet la notion de régularité étant définie, BONAMI et ESTRADÉ (2003) ont su en extraire l'information sur chaque ligne radiale en ayant recours à la transformée de Radon (*cf.* section 4.4.1).

10. En effet mathématiquement une ligne de Dirac dans le plan devient après transformée de Fourier une ligne de Dirac orthogonale à la première. Pour un cône resserré sur une direction, on observe de même une TF orientée perpendiculairement à ce dernier, car moralement dans la représentation harmonisable du champ élémentaire (2.7), si l'on oublie un instant la mesure aléatoire, on a à peu de chose près la transformée de Fourier de la densité spectrale f . On assiste à une manifestation physique de ce phénomène en optique ondulatoire, où le principe de Huygens-Fresnel et les conditions de Fraunhofer utilisés dans le calcul de motifs de diffraction, donnent en première approximation une transformée de Fourier. On observe que dans l'expérience de la diffraction par une fente verticale, la figure des fréquences spatiales observées est aussi un motif étendu, mais cette fois dans la direction qui lui est perpendiculaire (modulé par un sinus cardinal du fait de la largeur non nulle de la fente).

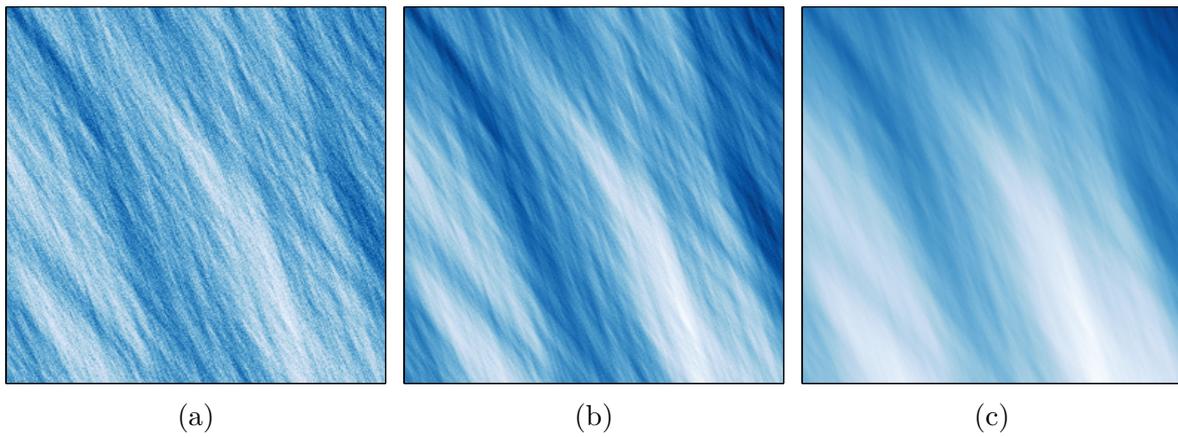


FIGURE 2.10 – Champ élémentaire simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_0 = \pi/6$, $\delta = 3 \cdot 10^{-1}$ et différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$.

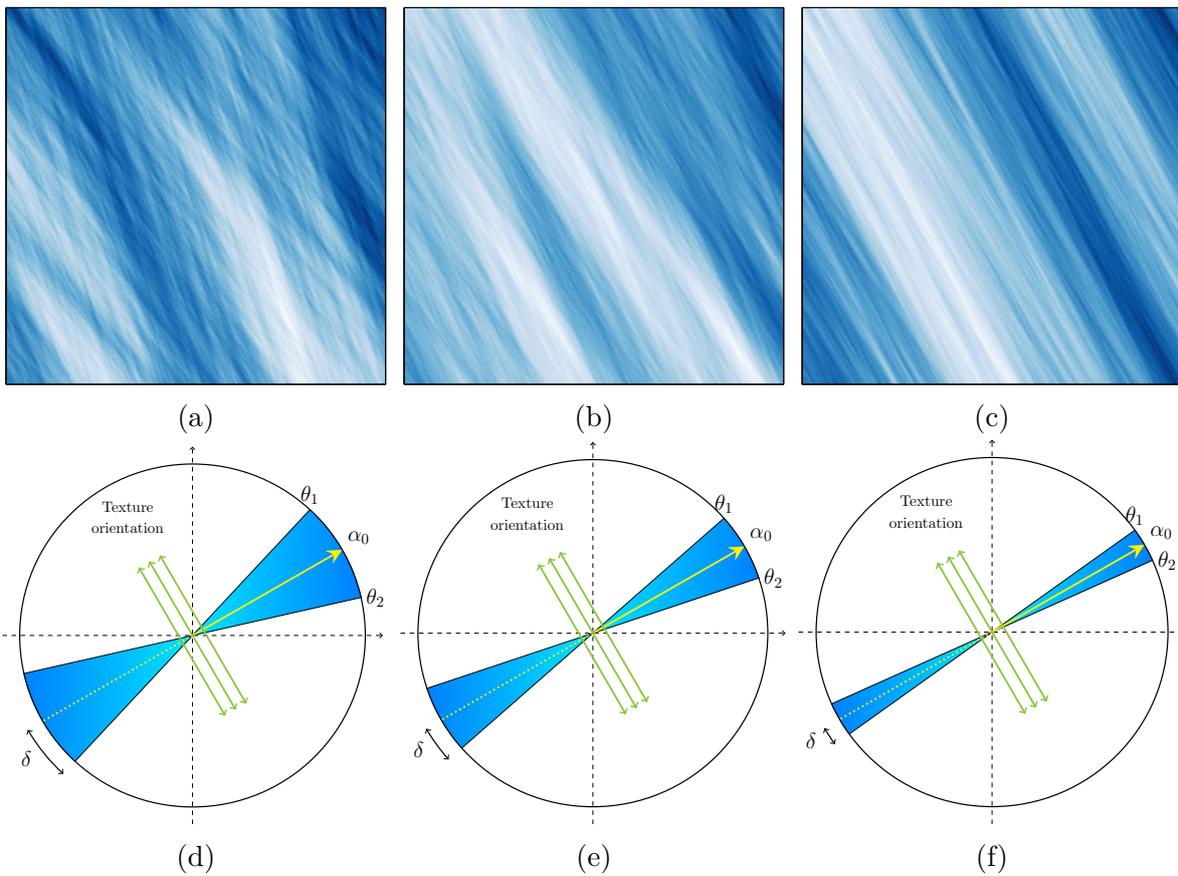


FIGURE 2.11 – Champ élémentaire simulé par bandes tournantes pour $r = 255$, $\epsilon_{\Theta} = 3 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_0 = \pi/6$, $H = 0.5$ et différentes ouvertures de cône (a)-(d) $\delta = 3 \cdot 10^{-1}$, (b)-(e) $\delta = 2 \cdot 10^{-1}$ et (c)-(f) $\delta = 1 \cdot 10^{-1}$.

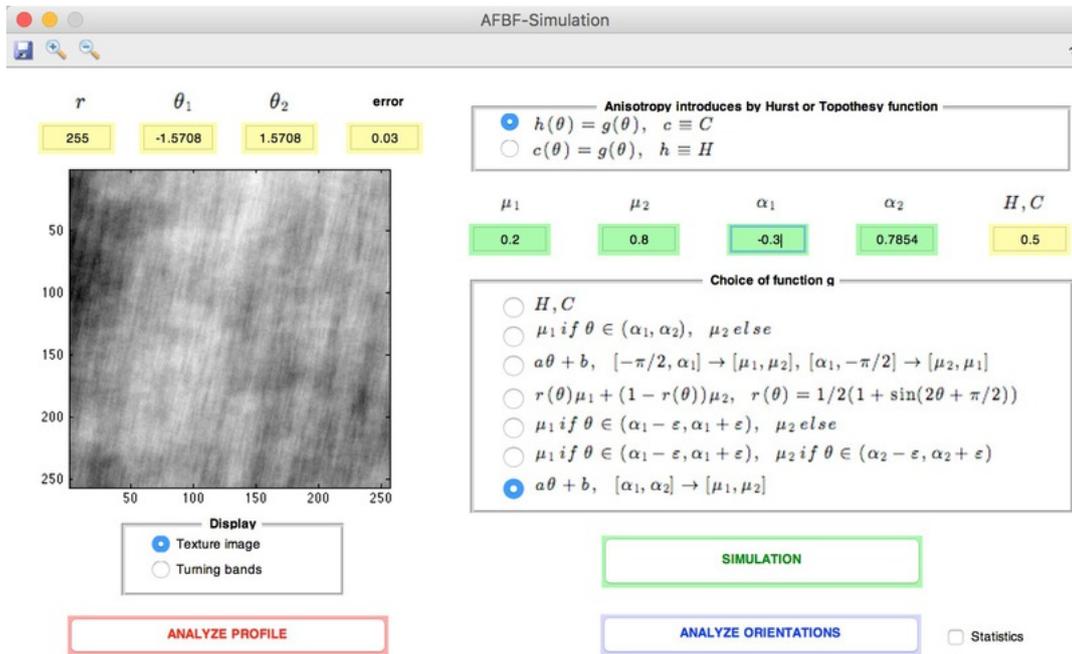


FIGURE 2.12 – Interface graphique permettant de simuler des AFBF pour diverses fonctions h et c .

2.5 Références

- ABRY, P. et F. SELLAN. 1996, «The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer : Remarks and fast implementation», *Applied and computational harmonic analysis*, vol. 3, n° 4, p. 377–383. [93](#), [105](#)
- ADLER, R. J. 2010, *The geometry of random fields*, SIAM. [89](#)
- ADLER, R. J. et J. E. TAYLOR. 2009, *Random fields and geometry*, Springer Science & Business Media. [89](#)
- ARNEODO, A., N. DECOSTER et S. . ROUX. 2000, «A wavelet-based method for multifractal image analysis. i. methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces», *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 15, n° 3, p. 567–600. [94](#)
- AYACHE, A., A. BONAMI et A. ESTRADE. 2009, «Identification and series decomposition of anisotropic gaussian fields», dans *More Progresses In Analysis*, p. 441–450. [101](#), [103](#)
- AYACHE, A., S. LEGER et M. PONTIER. 2002, «Drap brownien fractionnaire», *Potential analysis*, vol. 17, n° 1, p. 31–43. [89](#)
- AZAÏS, J.-M. et M. WSCHBOR. 2009, *Level sets and extrema of random processes and fields*, John Wiley & Sons. [89](#)
- BARATA, M., F. LOPES, P. PINA, E. ALVES et J. SARAIVA. 2015, «Automatic detection of wrinkle ridges in venusian magellan imagery», *Geological Society, London, Special Publications*, vol. 401, n° 1, p. 357–376. [5](#), [87](#)
- BELLMAN, R. 1954, «The theory of dynamic programming», cahier de recherche, RAND CORP SANTA MONICA CA. [109](#)

- BENASSI, A., S. JAFFARD et D. ROUX. 1997, «Elliptic Gaussian random processes.», *Revista matemática iberoamericana*, vol. 13, n° 1, p. 19–90. [92](#)
- BENHAMOU, C.-L., S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. OHLEY et L. POTHUAUD. 2001, «Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density : two complementary parameters related to osteoporotic fractures», *Journal of bone and mineral research*, vol. 16, n° 4, p. 697–704. [86](#)
- BENSON, D. A., M. M. MEERSCHAERT, B. BAEUMER et H.-P. SCHEFFLER. 2006, «Aquifer operator scaling and the effect on solute mixing and dispersion», *Water Resources Research*, vol. 42, n° 1. [88](#), [93](#)
- BIERMÉ, H. 2017, «Introduction to random fields and scale invariance», . [106](#)
- BIERMÉ, H., C.-L. BENHAMOU et F. RICHARD. 2009a, «Parametric estimation for Gaussian operator scaling random fields and anisotropy analysis of bone radiograph textures», dans *Proc. of the International Conference on Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI'09), Workshop on Probabilistic Models for Medical Imaging*, p. 13. [87](#)
- BIERMÉ, H. et C. LACAUX. 2017, «Fast and exact synthesis of some operator scaling Gaussian random fields», . [102](#)
- BIERMÉ, H., M. M. MEERSCHAERT et H.-P. SCHEFFLER. 2007, «Operator scaling stable random fields», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 117, n° 3, p. 312–332. [93](#), [94](#), [95](#)
- BIERMÉ, H., L. MOISAN et F. RICHARD. 2015, «A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 24, n° 3, p. 885–904. [92](#), [103](#), [104](#), [105](#), [108](#), [109](#)
- BIERMÉ, H. et F. RICHARD. 2008, «Estimation of anisotropic Gaussian fields through Radon transform», *ESAIM : Probability and Statistics*, vol. 12, p. 30–50. [101](#), [104](#)
- BIERMÉ, H., F. RICHARD, M. RACHIDI et C.-L. BENHAMOU. 2009b, «Anisotropic texture modeling and applications to medical image analysis», dans *ESAIM : Proceedings*, vol. 26, EDP Sciences, p. 100–122. [87](#)
- BLÖSCHL, G. 2001, «Scaling in hydrology», *Hydrological Processes*, vol. 15, n° 4, p. 709–711. [93](#)
- BONAMI, A. et A. ESTRADÉ. 2003, «Anisotropic analysis of some Gaussian models», *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 9, n° 3, p. 215–236. [90](#), [91](#), [92](#), [105](#), [110](#)
- BRODATZ, P. 1966, *Textures : a photographic album for artists and designers*, Dover Pubns. [84](#)
- BROUSTE, A., J. ISTAS et S. LAMBERT-LACROIX. 2007, «On fractional Gaussian random fields simulations», *Journal of Statistical Software*, vol. 23, n° 1, p. 1–23. [101](#), [103](#)
- BRUTON, L. T. et N. R. BARTLEY. 1994, «Simulation of fractal multidimensional images using multidimensional recursive filters», *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, vol. 41, n° 3, p. 181–188. [101](#)

- CALDWELL, C. B., S. J. STAPLETON, D. W. HOLDSWORTH, R. A. JONG, W. J. WEISER, G. COOKE et M. J. YAFFE. 1990, «Characterisation of mammographic parenchymal pattern by fractal dimension», *Physics in medicine and biology*, vol. 35, n° 2, p. 235. [86](#)
- CHAN, G. 1999, «An effective method for simulating Gaussian random fields», dans *Proceedings of the statistical Computing section*, p. 133–138. [101](#), [103](#)
- CHILES, J.-P. et P. DELFINER. 2009, *Geostatistics : modeling spatial uncertainty*, vol. 497, John Wiley & Sons. [101](#)
- CLAUSEL, M. 2008, *Quelques notions d'irrégularité uniforme et ponctuelle : le point de vue ondelettes*, thèse de doctorat, Paris Est. [95](#)
- COEURJOLLY, J.-F. 2000, «Simulation and identification of the fractional Brownian motion : A bibliographical and comparative study», *Journal of statistical software*, vol. 5, p. 1–53. [105](#)
- COEURJOLLY, J.-F. et E. PORCU. 2016, «Fast and exact simulation of complex-valued stationary Gaussian processes through embedding circulant matrix», *arXiv preprint arXiv :1604.00362*. [102](#)
- COGGINS, J. M. 1983, «A framework for texture analysis based on spatial filtering», . [84](#)
- DAVIES, R. B. et D. HARTE. 1987, «Tests for Hurst effect», *Biometrika*, vol. 74, n° 1, p. 95–101. [97](#), [104](#)
- DAVIES, S. et P. HALL. 1999, «Fractal analysis of surface roughness by using spatial data», *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, vol. 61, n° 1, p. 3–37. [88](#), [93](#)
- DEMBO, A., C. L. MALLOWS et L. A. SHEPP. 1989, «Embedding nonnegative definite Toeplitz matrices in nonnegative definite circulant matrices, with application to covariance estimation», *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, n° 6, p. 1206–1212. [99](#)
- DIDIER, G., M. M. MEERSCHAERT et V. PIPIRAS. 2017, «Exponents of operator self-similar random fields», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 448, n° 2, p. 1450–1466. [94](#)
- DIEKER, A. B. et M. MANDJES. 2003, «On spectral simulation of fractional Brownian motion», *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol. 17, n° 3, p. 417–434. [105](#)
- DIEKER, T. 2004, «Simulation of fractional Brownian motion», *MSc theses, University of Twente, Amsterdam, The Netherlands*. [105](#)
- DIETRICH, C. et G. N. NEWSAM. 1997, «Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix», *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, n° 4, p. 1088–1107. [97](#), [104](#)
- DIMITRAKOPOULOS, R. 1990, «Conditional simulation of intrinsic random functions of order k », *Mathematical geology*, vol. 22, n° 3, p. 361–380. [101](#)
- DURBIN, J. 1960, «The fitting of time-series models», *Revue de l'Institut International de Statistique*, p. 233–244. [105](#)
- EMERY, X. 2008, «A turning bands program for conditional co-simulation of cross-correlated Gaussian random fields», *Computers & Geosciences*, vol. 34, n° 12, p. 1850–1862. [101](#)

- FOURNIER, J. 2014, «Rapport de magistère», . 86
- GAGALOWICZ, A. 1983, *Vers un modèle de textures*, thèse de doctorat. 85
- GALERNE, B., Y. GOUSSEAU et J.-M. MOREL. 2011, «Random phase textures : Theory and synthesis», *IEEE Transactions on image processing*, vol. 20, n° 1, p. 257–267. 86
- GOUYET, J.-F. 1992, «Physique et structures fractales», . 86
- GOUYET, J.-F. et B. MANDELBROT. 1996, *Physics and fractal structures*, Masson Paris. 86
- HARALICK, R. M. 1979, «Statistical and structural approaches to texture», *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, n° 5, p. 786–804. 84, 85
- HEEGER, D. J. et J. R. BERGEN. 1995, «Pyramid-based texture analysis/synthesis», dans *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, p. 229–238. 86
- HEINE, J. J. et P. MALHOTRA. 2002, «Mammographic tissue, breast cancer risk, serial image analysis, and digital mammography : Part 1. tissue and related risk factors», *Academic radiology*, vol. 9, n° 3, p. 298–316. 86
- HELGASON, H., V. PIPIRAS et P. ABRY. 2011, «Fast and exact synthesis of stationary multivariate Gaussian time series using circulant embedding», *Signal Processing*, vol. 91, n° 5, p. 1123–1133. 102
- HOSKING, J. R. 1984, «Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing», *Water resources research*, vol. 20, n° 12, p. 1898–1908. 105
- HUDSON, W. N. et J. D. MASON. 1982, «Operator-self-similar processes in a finite-dimensional space», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 273, n° 1, p. 281–297. 94
- ISTAS, J. et coll.. 2006, «On fractional fields indexed by metric spaces», *Electronic Communications in Probability*, vol. 11, p. 242–251. 103
- JOURNAL, A. G. 1974, «Geostatistics for conditional simulation of ore bodies», *Economic Geology*, vol. 69, n° 5, p. 673–687. 101
- JULESZ, B. 1962, «Visual pattern discrimination», *IRE transactions on Information Theory*, vol. 8, n° 2, p. 84–92. 86
- JULESZ, B. 1975, «Experiments in the visual perception of texture», *Scientific American*, vol. 232, p. 34–43. 85, 86
- JULESZ, B., E. GILBERT, L. SHEPP et H. FRISCH. 1973, «Inability of humans to discriminate between visual textures that agree in second-order statistics—revisited», *Perception*, vol. 2, n° 4, p. 391–405. 86
- JULÉSZ, B., E. GILBERT et J. D. VICTOR. 1978, «Visual discrimination of textures with identical third-order statistics», *Biological Cybernetics*, vol. 31, n° 3, p. 137–140. 86
- JULESZ, B. et coll.. 1981, «Textons, the elements of texture perception, and their interactions», *Nature*, vol. 290, n° 5802, p. 91–97. 86
- KAMONT, A. 1995, «On the fractional anisotropic Wiener field», *Probability and Mathematical Statistics-PWN*, vol. 16, n° 1, p. 85–98. 89

- LACAUX, C. 2004, *Champs de Lévy multifractionnaires*, thèse de doctorat, Toulouse 3. 105
- LAHA, R. et V. ROHATGI. 1981, «Operator self-similar stochastic processes in rd», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 12, n° 1, p. 73–84. 94
- LANDY, M. S. 2014, «Texture analysis and perception», *The new visual neurosciences*, p. 639–652. 85
- LANDY, M. S. et N. GRAHAM. 2004, «73 visual perception of texture», *The visual neurosciences*, vol. 1, p. 1106. 85
- LÉGER, S. et M. PONTIER. 1999, «Drap brownien fractionnaire», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, vol. 329, n° 10, p. 893–898. 89
- LEVINSON, N. 1949, «The Wiener rms error criterion in filter design and prediction, appendix b of Wiener, n.(1949)», *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. 105
- LOVEJOY, S. 1982, «Area-perimeter relation for rain and cloud areas», *Science*, vol. 216, n° 4542, p. 185–187. 5, 86, 87
- MAEJIMA, M. et J. D. MASON. 1994, «Operator-self-similar stable processes», *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 54, n° 1, p. 139–163. 94
- MANDELBROT, B. B. et J. W. VAN NESS. 1968, «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», *SIAM review*, vol. 10, n° 4, p. 422–437. 105
- MANDELBROT, B. B. et J. R. WALLIS. 1968, «Noah, Joseph, and operational hydrology», *Water resources research*, vol. 4, n° 5, p. 909–918. 93
- MANTOGLOU, A. et J. L. WILSON. 1982, «The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method», *Water Resources Research*, vol. 18, n° 5, p. 1379–1394. 101
- MATHERON, G. 1973, «The intrinsic random functions and their applications», *Advances in applied probability*, vol. 5, n° 3, p. 439–468. 101
- MEERSCHAERT, M. M. 2015, «Random field models for hydraulic conductivity in ground water flow», . 94
- MEERSCHAERT, M. M. et H.-P. SCHEFFLER. 1999, «Spectral decomposition for operator self-similar processes and their generalized domains of attraction», *Stochastic processes and their applications*, vol. 84, n° 1, p. 71–80. 94
- MEERSCHAERT, M. M. et H.-P. SCHEFFLER. 2001, *Limit distributions for sums of independent random vectors : Heavy tails in theory and practice*, vol. 321, John Wiley & Sons. 94
- MENABDE, M., A. SEED, D. HARRIS et G. AUSTIN. 1997, «Self-similar random fields and rainfall simulation», *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 102, n° D12, p. 13 509–13 515. 93
- MEYER, Y. 2007, «An interdisciplinary approach to textures and natural images processing», *Workshop à l'Institut Poincaré*. 86

- MOLZ, F., H. LIU et J. SZULGA. 1997, «Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology : A review, presentation of fundamental properties, and extensions», *Water Resources Research*, vol. 33, n° 10, p. 2273–2286. [94](#)
- NORROS, I., P. MANNERSALO et J. L. WANG. 1999, «Simulation of fractional Brownian motion with conditionalized random midpoint displacement», *Advances in Performance Analysis*, vol. 2, n° 1, p. 77–101. [105](#)
- PAXSON, V. 1997, «Fast, approximate synthesis of fractional Gaussian noise for generating self-similar network traffic», *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, vol. 27, n° 5, p. 5–18. [105](#)
- PELTIER, R. F. 1998, *Processus stochastiques fractals avec applications en finance*, thèse de doctorat. [105](#)
- PERRIN, E., R. HARBA, R. JENNANE et I. IRIBARREN. 2002, «Fast and exact synthesis for 1-D fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises», *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 9, n° 11, p. 382–384. [104](#)
- PEYRÉ, G. 2005, *Géométrie multi-échelles pour les images et les textures*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X. [85](#), [86](#)
- PONSON, L., D. BONAMY, H. AURADOU, G. MOUROT, S. MOREL, E. BOUCHAUD, C. GUILLOT et J.-P. HULIN. 2006, «Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces», *International journal of fracture*, vol. 140, n° 1-4, p. 27–37. [88](#)
- RAAD, L., A. DAVY, A. DESOLNEUX et J.-M. MOREL. 2017, «A survey of exemplar-based texture synthesis», *arXiv preprint arXiv :1707.07184*. [86](#)
- RIBEIRO JR, P. J., P. J. DIGGLE et coll.. 2001, «geor : a package for geostatistical analysis», *R news*, vol. 1, n° 2, p. 14–18. [102](#)
- RICHARD, F. et H. BIERME. 2010, «Statistical tests of anisotropy for fractional Brownian textures. application to full-field digital mammography», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 36, n° 3, p. 227–240. [87](#)
- RICHARD, F. J. 2016, «Some anisotropy indices for the characterization of Brownian textures and their application to breast images», *Spatial Statistics*, vol. 18, p. 147–162. [87](#)
- SAMORODNITSKY, G. et M. S. TAQQU. 1994, *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance*, vol. 1, CRC press. [94](#)
- SAUPE, D. 1988, «Algorithms for random fractals», *The science of fractal images*, vol. 71, p. 136. [101](#)
- SCHERTZER, D. et S. LOVEJOY. 1985, «Generalised scale invariance in turbulent phenomena», *PhysicoChemical Hydrodynamics*, vol. 6, p. 623–635. [94](#)
- SCHERTZER, D. et S. LOVEJOY. 1987, «Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades», *J. Geophys. Res*, vol. 92, n° D8, p. 9693–9714. [94](#)
- SCHLATHER, M. 2001, «Simulation and analysis of random fields», *R news*, vol. 1, n° 2, p. 18–20. [102](#)

- SIMONCELLI, E. P. et J. PORTILLA. 1998, «Texture characterization via joint statistics of wavelet coefficient magnitudes», dans *Image Processing, 1998. ICIP 98. Proceedings. 1998 International Conference on*, vol. 1, IEEE, p. 62–66. [86](#)
- SKLANSKY, J. 1978, «Image segmentation and feature extraction», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 8, n° 4, p. 237–247. [85](#)
- SPANOS, P. D. et B. ZELDIN. 1996, «Efficient iterative arma approximation of multivariate random processes for structural dynamics applications», *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 25, n° 5, p. 497–507. [101](#)
- SRIVASTAVA, A., A. B. LEE, E. P. SIMONCELLI et S.-C. ZHU. 2003, «On advances in statistical modeling of natural images», *Journal of mathematical imaging and vision*, vol. 18, n° 1, p. 17–33. [86](#)
- STEIN, M. L. 2002, «Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 11, n° 3, p. 587–599. [101](#), [102](#), [103](#)
- STOKSIK, M. A., R. G. LANE et D. NGUYEN. 1995, «Practical synthesis of accurate fractal images», *Graphical Models and Image Processing*, vol. 57, n° 3, p. 206–219. [101](#)
- TAMURA, H., S. MORI et T. YAMAWAKI. 1978, «Textural features corresponding to visual perception», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 8, n° 6, p. 460–473. [84](#)
- TARTAVEL, G., Y. GOUSSEAU et G. PEYRÉ. 2015, «Variational texture synthesis with sparsity and spectrum constraints», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 52, n° 1, p. 124–144. [86](#)
- TUCERYAN, M., A. K. JAIN et coll.. 1993, «Texture analysis», *Handbook of pattern recognition and computer vision*, vol. 2, p. 235–276. [84](#)
- UNSER, M. 1984, «Description statistique de textures», *Thèse de doctorat*. [85](#)
- VAN WIJK, J. J. 1991, «Spot noise texture synthesis for data visualization», *ACM Siggraph Computer Graphics*, vol. 25, n° 4, p. 309–318. [86](#)
- VANMARCKE, E. 2010, *Random fields : analysis and synthesis*, World Scientific. [102](#)
- VEDEL, B. et coll.. 2011, «Explicit constructions of operator scaling gaussian fields», *arXiv preprint arXiv :1104.0774*. [95](#)
- VÉHEL, J. L., E. LUTTON et C. TRICOT. 2012, *Fractals in engineering : from theory to industrial applications*, Springer Science & Business Media. [93](#)
- WEISS, Y. et W. T. FREEMAN. 2007, «What makes a good model of natural images?», dans *Computer Vision and Pattern Recognition, 2007. CVPR'07. IEEE Conference on*, IEEE, p. 1–8. [86](#)
- WILLINGER, W., V. PAXSON et M. S. TAQQU. 1998, «Self-similarity and heavy tails : Structural modeling of network traffic», *A practical guide to heavy tails : statistical techniques and applications*, vol. 23, p. 27–53. [93](#)
- WILLINGER, W., M. S. TAQQU, R. SHERMAN et D. V. WILSON. 1997, «Self-similarity through high-variability : statistical analysis of ethernet lan traffic at the source level», *IEEE/ACM Transactions on Networking (ToN)*, vol. 5, n° 1, p. 71–86. [105](#)

- WOOD, A. T. et G. CHAN. 1994, «Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]$ », *Journal of computational and graphical statistics*, vol. 3, n° 4, p. 409–432. [97](#), [101](#), [103](#), [104](#)
- WU, D. et Y. XIAO. 2007, «Geometric properties of fractional Brownian sheets», *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 13, n° 1, p. 1–37. [90](#)
- XIAO, Y. 2013, «Recent developments on fractal properties of Gaussian random fields», dans *Further Developments in Fractals and Related Fields*, Springer, p. 255–288. [95](#)
- XU, Z. et R. GENÇAY. 2003, «Scaling, self-similarity and multifractality in fx markets», *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 323, p. 578–590. [93](#)
- XUE, Y. et Y. XIAO. 2011, «Fractal and smoothness properties of space-time Gaussian models», *Frontiers of Mathematics in China*, vol. 6, n° 6, p. 1217–1248. [93](#)
- YIN, Z.-M. 1996, «New methods for simulation of fractional Brownian motion», *Journal of Computational Physics*, vol. 127, n° 1, p. 66–72. [101](#)

3

Modélisation de champs aléatoires localement anisotropes

*« La rêverie des nuages est une rêverie sans responsabilité... un jeu aisé des formes.
Les nuages sont une matière d'imagination pour un pétrisseur paresseux.
On les rêve comme une ouate légère qui se travaillerait elle-même. »*

Bachelard, *L'air et les Songes : Essai sur l'imagination du mouvement* (1943)

DANS CE CHAPITRE, nous présentons nos contributions relatives à deux nouveaux modèles, permettant de représenter et de simuler des champs aléatoires anisotropes. La spécificité du premier modèle réside dans sa faculté à contrôler localement la fonction d'anisotropie, responsable des variations locales d'orientation de la texture que l'on peut ainsi prescrire. Le second modèle de champ anisotrope vise à reproduire des textures localement autosimilaires, par déformation d'un champ élémentaire unidirectionnel. Nous décrivons la structure locale des champs issus de chacun de ces modèles, par la détermination de leur champ tangent respectif. Puis nous exposons des méthodes de simulation générant les textures anisotropes correspondant à ces champs aléatoires. Nous discutons les avantages présentés par le premier ou le second modèle pour la modélisation de phénomènes anisotropes et la synthèse de texture. L'un comme l'autre constitue, d'un point de vue pratique, un banc d'essai intéressant pour tester des outils mathématiques d'analyse des orientations locales de textures, qui seront exposés dans les chapitres suivants. Ce travail a fait l'objet de publications (POLISANO et coll., 2014, 2017).

Sommaire

2.1	Modélisation de textures	83
2.1.1	Qu'est-ce qu'une texture ?	83
2.1.2	Méthodes structurelles vs. statistiques	85
2.1.3	Textures directionnelles et champs anisotropes	86
2.2	Différentes classes de champs aléatoires anisotropes	89
2.2.1	Drap brownien fractionnaire	89
2.2.2	Modèle de Bonami et Estrade	90
2.2.3	Modèle de Xue et Xiao	93
2.2.4	Champs stables par autosimilarité matricielle	93
2.3	Simulations numériques de champs aléatoires	95
2.3.1	Méthode de Cholesky pour les champs gaussiens	95
2.3.2	Méthode de Wood et Chan pour les champs gaussiens stationnaires	97
2.3.3	Petit tour d'horizon des autres méthodes de synthèse de champs aléatoires	101
2.3.4	Méthode de Stein appliquée à une classe de champs gaussiens à autosimilarité matricielle	102
2.4	Simulations numériques du champ brownien fractionnaire anisotrope	103
2.4.1	Simulation d'un FBM 1-D par matrices circulantes	104
2.4.2	Simulation des champs browniens fractionnaires anisotropes par « bandes tournantes »	105
2.4.3	Réduction de la complexité par programmation dynamique	108
2.4.4	Exemples de simulations	109
2.5	Références	112

3.1 Premier modèle : le champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé

3.1.1 Définitions

Notre nouveau modèle de champ gaussien est défini à partir de deux fonctions h de \mathbb{R}^2 dans $[0, 1]$, et C de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}_+ , satisfaisant l'ensemble d'hypothèses suivant :

Hypothèses (\mathcal{H})

- h est β -höldérienne¹, telle que $a = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) > 0$, $b = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) < 1$ et $b < \beta \leq 1$.
- $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est bornée, c.-à-d. $\forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq M$.
- $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est paire et homogène de degré 0 : $\forall \rho > 0$, $C(\mathbf{x}, \rho \boldsymbol{\xi}) = C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.
- $\mathbf{x} \mapsto C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est continue et vérifie : il existe un réel η , avec $\beta \leq \eta \leq 1$ tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, 1)} \|\mathbf{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [C(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \boldsymbol{\Theta}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta})]^2 d\boldsymbol{\Theta} \leq A_{\mathbf{x}} < \infty. \quad (3.1)$$

De plus, $\mathbf{x} \mapsto A_{\mathbf{x}}$ est supposée bornée sur tout compact de \mathbb{R}^2 .

On définit maintenant notre modèle, le **GAFBF**, introduit dans (**POLISANO et coll., 2017**) :

Définition 3.1 (CHAMP BROWNIEN FRACTIONNAIRE ANISOTROPE GÉNÉRALISÉ)

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ et C vérifiant les hypothèses (\mathcal{H}). On définit alors le GAFBF comme le champ gaussien généralisant (**POLISANO et coll., 2014**) par

$$X(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \quad (3.2)$$

Commentons les hypothèses, pour mieux comprendre quelle classe de champs aléatoires (donc de fonction h et C qui les caractérisent) vérifie les critères de la définition :

Remarque 3.1. La fonction h , qui encode la régularité locale du champ X , doit être β -höldérienne soit « un peu plus que continue » (mais elle peut très bien ne pas être dérivable!). Le fait que son coefficient de Hölder β soit inférieur à b le sup des $h(\mathbf{x})$, signifie que la fonction h qui prescrit la régularité locale $h(\mathbf{x})$ au champ X , ne peut pas avoir une irrégularité plus importante que la régularité du champ qu'elle gouverne. C'est donc une hypothèse raisonnable, qui est d'ailleurs faite dans l'article fondateur du mouvement brownien multifractionnaire (3.4) présenté ci-dessous.

1. On rappelle qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite α -höldérienne, avec $\alpha \in]0, 1]$, si il existe une constante A telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq A \|x - y\|_E^\alpha$ (*). Intuitivement cela signifie que f est « un peu plus que continue ». C'est une notion utile pour situer les objets mathématiques intermédiaires entre « continu » et « dérivable ». Plus précisément on a dérivable \implies lipschitzienne (1-höldérienne, presque partout dérivable quand f de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n , théorème de Rademacher) \implies α -höldérienne ($\alpha \leq 1$) \implies β -höldérienne ($\beta \leq \alpha$) \implies continue. Les réciproques étant bien sûr fausses. A noter que si $\alpha > 1$ dans (*), cela implique que f est localement constante sur E (donc constante sur tout intervalle inclus dans E).

Remarque 3.2. Quant à la fonction C , qui encode l'anisotropie locale du champ X , la parité en $\boldsymbol{\xi}$ assure que X soit à valeurs réelles, l'homogénéité de degré 0 signifie simplement qu'à $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ fixé, si on connaît la fonction $\boldsymbol{\Theta} \mapsto C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Theta})$, on connaît alors C dans tout le plan des fréquences car elle est constante sur les droites polaires $\boldsymbol{\xi} = \rho\boldsymbol{\Theta}$. Enfin la dernière hypothèse sur C est une hypothèse plus faible que l'hölderianité, puisque lorsque $\boldsymbol{x} \mapsto C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ est η -hölderienne (avec une régularité au moins égale à celle de h car $\beta \leq \eta$), alors elle vérifie (3.1) avec la même constante $A_{\boldsymbol{x}} \equiv A$ partout. La fonction C doit donc aussi être « un peu plus que continue » (mais pas nécessairement hölderienne!). Notons que dans le cas où elle est dérivable en \boldsymbol{x} , alors elle est hölderienne avec *a fortiori* $\eta = 1 \geq \beta$ et vérifie donc (3.1). On constate ainsi que les hypothèses (\mathcal{H}) ne sont pas restrictives et que les GAFBF définissent une large classe de champs gaussiens à régularité et anisotropie locale variables.

Le GAFBF est une extension de différents modèles classiques :

- Pour $h \equiv H$ et $C \equiv C_H^{-1}$ dans (3.2) on retrouve le traditionnel champ brownien fractionnaire (FBF) (MANDELBROT et VAN NESS, 1968), seul champ gaussien isotrope qui soit à accroissements stationnaires et auto-similaire d'ordre H . Ce champ aléatoire (voir section 1.8) a pour représentation harmonisable (normalisée) :

$$B^H(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_H} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \quad (3.3)$$

- Le cas $h \equiv h(\boldsymbol{x})$ et $C \equiv C_{h(\boldsymbol{x})}^{-1}$ correspond au champ brownien multifractionnaire, ou *Multifractional Brownian Field* (MBF) introduit par PELTIER et LÉVY-VÉHEL (1995) et défini par (3.4), qui a pour propriété de posséder une régularité (c.-à-d. la rugosité de la texture) pouvant potentiellement varier en chaque point. Ce champ n'est plus à accroissements stationnaires, et la propriété d'auto-similarité devient locale et asymptotique :

$$X_h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_{h(\boldsymbol{x})}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.4)$$

- Le cas $h \equiv H$ constant et $C \equiv C(\boldsymbol{\xi})$ mène à la classe des champs gaussiens auto-similaires et à accroissements stationnaires (H-sssi) introduits par (BENASSI et coll., 1997) (voir Exemple 2.4), permettant d'introduire de l'anisotropie. Leur représentation harmonisable est la suivante :

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \frac{C\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}\right)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.5)$$

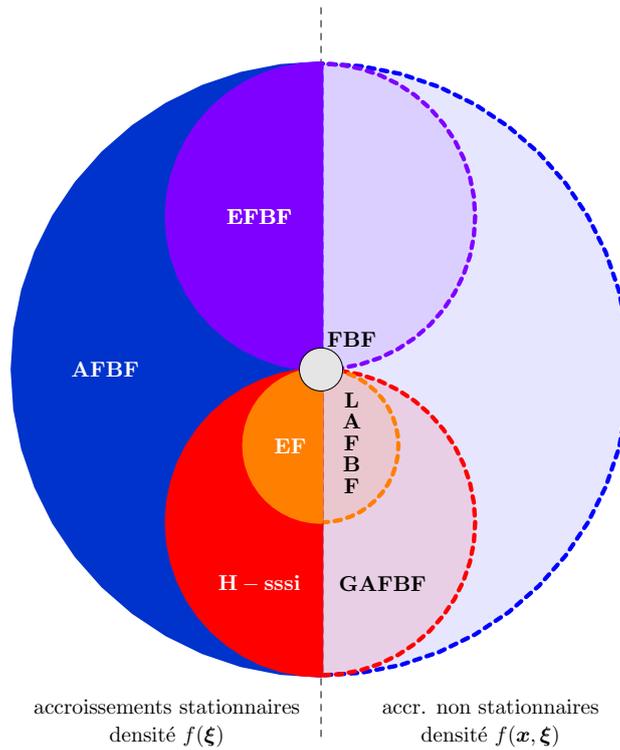
Nous étudierons cette classe plus en détail dans le Chapitre 5. Elle englobe notamment les *champs élémentaires* (EF) introduits dans (BIERMÉ et coll., 2015) et abordés section 2.4.4, où C a la forme d'un cône fréquentiel. Les champs élémentaires sont donc de la forme :

$$Y_{H, \theta_1, \theta_2}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \frac{c_{\theta_1, \theta_2}(\arg \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.6)$$

avec c_{θ_1, θ_2} le cône défini en (2.20), orienté vers $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ et de demi-ouverture $\delta = |\theta_1 + \theta_2|/2$ conformément à la Définition 2.6. Ces champs produisent une texture globalement orientée perpendiculairement à α_0 .

Remarque 3.3. On rappelle que la classe des champs H-sssi est incluse dans la classe des AFBF (Figure 3.1) dont les champs sont définis par

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{\xi})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (3.7)$$


 FIGURE 3.1 – Illustration de la nouvelle classe **GAFBF**.

où les fonctions de topothésie $C(\xi)$ et de Hurst $h(\xi)$ varient simultanément dans le domaine fréquentiel (auquel cas le champ n'est plus strictement auto-similaire). La classe des **AFBF** est elle-même incluse dans la classe des champs à accroissements stationnaires de **BONAMI et ESTRADÉ (2003)** vue à la section 2.2.2. Notre modèle (Figure 3.1 en pointillés rouge), où l'anisotropie locale est induite par $C(\mathbf{x}, \xi)$ et la régularité locale par $h(\mathbf{x})$, englobe donc parmi les champs à accroissements stationnaires uniquement la partie en rouge plein correspondant aux champs **H-sssi**, où l'anisotropie est donnée par $C(\xi)$ et la régularité H est constante. À l'inverse les **AFBF** où C est constante et $h(\arg \xi)$ varie, sont regroupés sous l'appellation de **EFBF** vus dans l'Exemple 2.1, et n'ont quant à eux pas été généralisés dans ce modèle.

Remarque 3.4. Notons que les modèles usuels tels que le champ brownien fractionnaire (**FBF**) ou le champ brownien multifractionnaire (**MBF**), définis respectivement par (3.3) et (3.4), sont normalisés par une constante C_H ou une fonction $C_{h(\mathbf{x})}$ de sorte que la variance du champ soit égale à 1 sur la sphère unité, c.-à-d. $\text{Var}[X(\mathbf{x})] = 1$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1$. Il faut donc nous assurer qu'une telle normalisation ne mette pas en défaut la condition (3.1), d'où le lemme qui suit.

Lemme 3.1 (NORMALISATION DE LA FONCTION D'ANISOTROPIE LOCALE)

Soit $\tilde{C} : (\mathbf{x}, \xi) \mapsto \tilde{C}(\mathbf{x}, \xi)$ une fonction d'anisotropie locale vérifiant les hypothèses (\mathcal{H}) , et en particulier vérifiant (3.1). On définit une fonction de normalisation $N : \mathbf{x} \mapsto N(\mathbf{x})$, supposée C^1 et bornée. Alors la fonction d'anisotropie locale normalisée C définie par :

$$C(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\tilde{C}(\mathbf{x}, \xi)}{N(\mathbf{x})}, \quad (3.8)$$

vérifie les hypothèses (\mathcal{H}) et en particulier (3.1).

Preuve :

Les deux premières hypothèses de (\mathcal{H}) portant sur C sont trivialement vérifiées.

Soit alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, 1)$. Puisque \tilde{C} est bornée par $M_{\tilde{C}}$ et N est supposée C^1 et bornée par $[m_N, M_N]$ sur \mathbb{R}^2 , on a

$$\begin{aligned} |C(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \cdot) - C(\mathbf{x}, \cdot)| &= \left| \frac{\tilde{C}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \cdot)}{N(\mathbf{x} + \mathbf{z})} - \frac{\tilde{C}(\mathbf{x}, \cdot)}{N(\mathbf{x})} \right|, \\ &= \left| \frac{(\tilde{C}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \cdot) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \cdot))N(\mathbf{x}) + (N(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - N(\mathbf{x}))\tilde{C}(\mathbf{x}, \cdot)}{N(\mathbf{x} + \mathbf{z})N(\mathbf{x})} \right|, \\ &\leq \frac{|\tilde{C}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \cdot) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \cdot)| M_N + |N(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - N(\mathbf{x})| M_{\tilde{C}}}{m_N^2}. \end{aligned}$$

D'où en intégrant par rapport à Θ , et en utilisant l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$,

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} |C(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \Theta) - C(\mathbf{x}, \Theta)|^2 d\Theta \\ &\leq \frac{2M_N^2}{m_N^4} \|\mathbf{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} |\tilde{C}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \Theta) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \Theta)|^2 d\Theta, \\ &\quad + \frac{4\pi M_{\tilde{C}}^2}{m_N^4} \|\mathbf{z}\|^{-2\eta} |N(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - N(\mathbf{x})|^2. \end{aligned}$$

Comme N est C^1 elle vérifie par l'inégalité des accroissements finis :

$$\|\mathbf{z}\|^{-2\eta} |N(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - N(\mathbf{x})|^2 \leq \Lambda_{\mathbf{x}}^2 \|\mathbf{z}\|^{2-2\eta} \leq \Lambda_{\mathbf{x}}^2,$$

car $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, 1)$ et $0 \leq \eta \leq 1$. De plus $\mathbf{x} \mapsto \Lambda_{\mathbf{x}}$ est bornée sur tout compact car N est C^1 .

Puisque \tilde{C} vérifie (3.1), il vient donc

$$\sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, 1)} \|\mathbf{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [C(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \Theta) - C(\mathbf{x}, \Theta)]^2 d\Theta \leq \frac{2M_N^2}{m_N^4} \tilde{A}_{\mathbf{x}} + \frac{4\pi M_{\tilde{C}}^2}{m_N^4} \Lambda_{\mathbf{x}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} A_{\mathbf{x}} < \infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

et $A_{\mathbf{x}}$ bornée sur tout compact car $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$ et $\Lambda_{\mathbf{x}}^2$ le sont. □

Le modèle du **GAFBF** généralise un précédent modèle, introduit dans (**POLISANO et coll., 2014**), et baptisé **champ brownien fractionnaire localement anisotrope, ou Locally Anisotropic Fractional Brownian Field (LAFBF)**, dont la définition est la suivante :

Définition 3.2 (CHAMP BROWNIEN FRACTIONNAIRE LOCALEMENT ANISOTROPE)

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ une fonction β -höldérienne vérifiant $a = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) > 0$, $b = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x})$ et $b < \beta \leq \eta \leq 1/2$; et soit α, δ deux fonctions définies sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles et 2η -höldériennes. De plus, on suppose que $0 < \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x}) < \pi$. Le champ brownien fractionnaire localement anisotrope (**LAFBF**) $B_{\alpha, \delta}^h$ avec pour fonction de Hurst h , pour fonction d'orientation α et pour fonction d'ouverture δ , est défini par :

$$B_{\alpha, \delta}^h(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C_{\alpha, \delta}^h(\mathbf{x})} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \frac{c_{\alpha, \delta}(\mathbf{x}, \arg \xi)}{\|\xi\|^{h(\mathbf{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\xi). \quad (3.10)$$

avec la fonction d'anisotropie locale

$$c_{\alpha, \delta}(\mathbf{x}, \cdot) = c_{\alpha(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})}, \quad (3.11)$$

où la fonction π -périodique $\theta \mapsto c_{\theta_1, \theta_2}(\theta)$ est définie sur $(-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$c_{\theta_1, \theta_2}(\theta) = \mathbb{1}_{[\theta_1, \theta_2]}(\theta), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.12)$$

et où $C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})$ est une fonction de normalisation C^1 et bornée, dont la définition sera précisée en (3.34).

Remarque 3.5. La fonction d'anisotropie locale $c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, \cdot)$ est la version *localisée* de la fonction de topothésie des champs élémentaires (EF) définie en (2.20) et (3.12). Ainsi $c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, \cdot)$ peut être vue comme un cône fréquentiel centré en \mathbf{x} , tel que représenté sur la Figure 3.2c.

Proposition 3.1

Le LAFBF $B_{\alpha,\delta}^h$ avec les hypothèses de la Définition 3.2, est un cas particulier de GAFBF. En effet les fonctions h et $C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, \arg \boldsymbol{\xi})}{C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})}$ vérifient (\mathcal{H}) .

Preuve :

- La fonction h vérifie clairement (\mathcal{H}) , où on ajoute la contrainte que $\eta \leq 1/2$ (et donc $\beta \leq 1/2$). Cette contrainte sera nécessaire pour que les fonctions α et δ puissent être 2η -höldériennes avec $\eta \geq \beta$, dont nous verrons que c'est une condition nécessaire pour que C vérifie (\mathcal{H}) . Ceci implique que les valeurs que prend la fonction h sont restreintes à $(0, 1/2)$.

- Puisque $C_{\alpha,\delta}^h$ est C^1 et bornée sur \mathbb{R}^2 , il suffit donc de vérifier d'après le Lemme 3.1 que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{z \in B(\mathbf{0}, 1)} \|z\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [\tilde{C}(\mathbf{x} + z, \Theta) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \Theta)]^2 d\Theta \leq A_x < \infty, \quad (3.13)$$

où

$$\tilde{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, \arg \boldsymbol{\xi}) = c_{\alpha(x) - \delta(x), \alpha(x) + \delta(x)}(\arg \boldsymbol{\xi}).$$

- Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ fixé. Puisque α et δ sont continues, il existe $\nu > 0$ tel que pour $\|z\| < \nu$, les cônes $\tilde{C}(\mathbf{x} + z, \cdot)$ et $\tilde{C}(\mathbf{x}, \cdot)$ s'intersectent. On distingue alors deux cas :

- Dans le cas où il existe un $z \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, \nu)^c$ tel que les fonctions $C(\mathbf{x}, \cdot)$ et $C(\mathbf{x} + z, \cdot)$ ont des supports disjoints, alors la quantité (3.13) peut se calculer géométriquement par la somme des carrés des aires de ces fonctions caractéristiques qui valent respectivement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{C}(\mathbf{x} + z, \Theta)^2 d\Theta &= 2 \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{\alpha(x+z) - \delta(x+z), \alpha(x+z) + \delta(x+z)}(\theta) d\theta = 4\delta(\mathbf{x} + z), \\ \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{C}(\mathbf{x}, \Theta)^2 d\Theta &= 2 \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{\alpha(x) - \delta(x), \alpha(x) + \delta(x)}(\theta) d\theta = 4\delta(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

D'où

$$\|z\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [\tilde{C}(\mathbf{x} + z, \Theta) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \Theta)]^2 d\Theta = \frac{8 \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x})}{\|z\|^{2\eta}} \leq \frac{8\pi}{\nu^{2\eta}} < \infty.$$

- Si $z \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, \nu)$, alors il faut retirer à ces aires leur double intersection. Comme

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{\alpha(x+z) - \delta(x+z), \alpha(x+z) + \delta(x+z)}(\theta) \mathbb{1}_{\alpha(x) - \delta(x), \alpha(x) + \delta(x)}(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{\max(\alpha(x+z) - \delta(x+z), \alpha(x) - \delta(x)), \min(\alpha(x+z) + \delta(x+z), \alpha(x) + \delta(x))}(\theta) d\theta, \\ &= \min(\alpha(\mathbf{x} + z) + \delta(\mathbf{x} + z), \alpha(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})) - \max(\alpha(\mathbf{x} + z) - \delta(\mathbf{x} + z), \alpha(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

et en utilisant les relations $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ il vient

$$\|z\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [\tilde{C}(\mathbf{x} + z, \Theta) - \tilde{C}(\mathbf{x}, \Theta)]^2 d\Theta, \quad (3.14)$$

$$= 2 \cdot \frac{|\alpha_-(\mathbf{x} + z) - \alpha_-(\mathbf{x})| + |\alpha_+(\mathbf{x} + z) - \alpha_+(\mathbf{x})|}{\|z\|^{2\eta}}, \quad (3.15)$$

avec $\alpha_-(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x})$ et $\alpha_+(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})$. Par conséquent si α_- et α_+ sont 2η -höldériennes, alors le sup sur $z \in B(\mathbf{0}, 1)$ de la quantité (3.14) est fini, ce qui est le cas puisque α et δ sont supposées 2η -höldériennes avec $\eta \leq 1/2$, ce qui achève la preuve. \square

Remarque 3.6. Le réel $h(\mathbf{x})$ est un indicateur de la rugosité locale de la texture au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, tandis que (voir (POLISANO et coll., 2014) et Figure 3.2), la fonction $\alpha(\mathbf{x})$ rend compte de l'orientation locale au point \mathbf{x} . Intuitivement, plus l'ouverture du cône $\delta(\mathbf{x})$ est petite au voisinage de \mathbf{x} , plus la texture sera orientée dans la direction $\alpha(\mathbf{x})$ sur ce voisinage. La simulation du LAFBF sera décrite section 3.2, et nous formaliserons la notion d'orientation d'un champ gaussien au Chapitre 5.

Remarque 3.7. La restriction des valeurs de la fonction h à $(0, 1/2)$ sera levée en considérant une régularisée C^∞ de la fonction caractéristique, obtenue comme dans la Remarque 3.9 et illustrée Figure 3.2c et Figure 3.3.

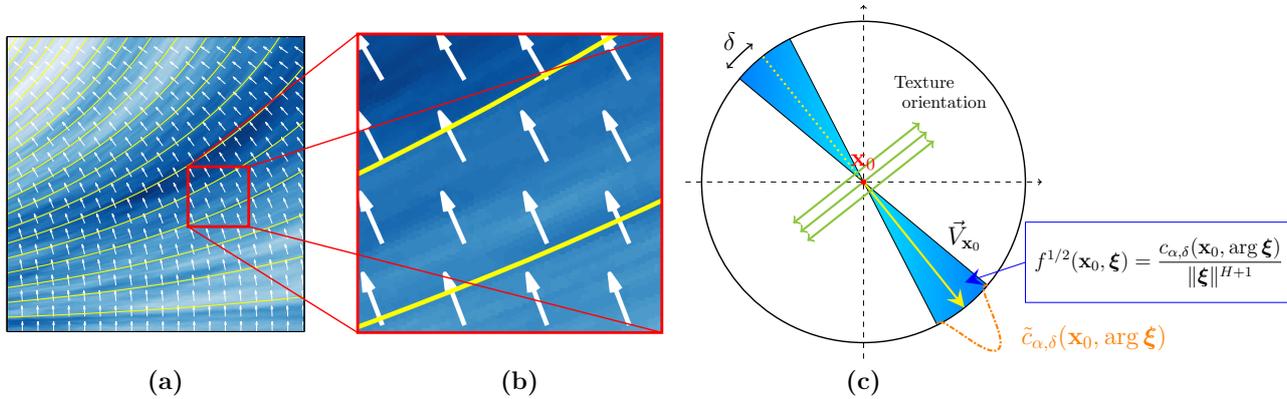


FIGURE 3.2 – (a) Réalisation d'un LAFBF en tout point $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ orienté suivant le champ de vecteur $\mathbf{V}(x_1, x_2) = (-\sin \alpha(x_1, x_2), \cos \alpha(x_1, x_2))$ avec $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ et $\delta = 3 \cdot 10^{-2}$ et $H = 0.8$ constants, (b) zoom autour d'un point \mathbf{x}_0 illustrant que le LAFBF se comporte localement comme un champ élémentaire, (c) schéma illustrant le rôle joué par les paramètres du modèle α et δ au voisinage d'un point \mathbf{x}_0 , rendant compte respectivement de l'orientation locale de la texture (dictée par celle du cône) et de sa directionnalité (dictée par l'ouverture du cône).

3.1.2 Détermination du champ tangent

Énoncé du théorème

Notre principal résultat dans ce chapitre réside dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 (POLISANO ET COLL., 2017)

Le *GAFBF* X défini par (3.2) admet en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, un champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ donné par la représentation harmonisable suivante

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}_0)+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \quad (3.16)$$

En particulier, le *LAFBF*, qui est un *GAFBF* d'après la Proposition 3.1, hérite de cette propriété :

Proposition 3.2 (CHAMP TANGENT DU LAFBF)

Le *LAFBF* $B_{\alpha, \delta}^h$ défini par (3.10) admet en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, un champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ donné par la représentation harmonisable suivante

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\alpha, \delta}^h(\mathbf{x}_0)} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C_{\alpha(\mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x}_0), \alpha(\mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}_0)}(\arg \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}_0)+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (3.17)$$

ce qui correspond à un champ élémentaire (*EF*) $Y_{H, \theta_1, \theta_2}$ défini par (3.6) avec $H = h(\mathbf{x}_0)$, $\theta_1 = \alpha(\mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x}_0)$ et $\theta_2 = \alpha(\mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}_0)$. Ainsi localement le *LAFBF* se comporte comme un champ élémentaire.

L'objet de cette sous-section est de prouver le Théorème 3.1.

Quelques lemmes préliminaires

Nous commençons par établir et prouver différents lemmes qui vont nous être utiles.

Lemme 3.2

Soit h une fonction β -höldérienne, ayant pour constante de Lipschitz Λ_h , définie sur \mathbb{R}^2 et vérifiant

$$0 < a = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}) = b < \beta \leq 1.$$

Alors, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, et tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{y})} - \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{x})} \right| \leq \Lambda_h \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^\beta |\log \|\boldsymbol{\xi}\|| \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{-a-1} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} + \|\boldsymbol{\xi}\|^{-b-1} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \right).$$

Preuve :

Fixons $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ et appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction

$$h \mapsto \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h-1} = \exp(-(h+1) \ln \|\boldsymbol{\xi}\|).$$

On obtient alors

$$\left| \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h_2-1} - \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h_1-1} \right| \leq C |h_1 - h_2| |\log \|\boldsymbol{\xi}\|| \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{-\alpha-1} \right),$$

avec $\alpha = \min(h_1, h_2)$ si $\|\boldsymbol{\xi}\| > 1$ et $\alpha = \max(h_1, h_2)$ si $\|\boldsymbol{\xi}\| < 1$, ce qui aboutit à l'inégalité

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^2)^2, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{y})} - \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{x})} \right| \leq |h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{x})| |\log \|\boldsymbol{\xi}\|| \\ \times \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{-\inf_z h(z)-1} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} + \|\boldsymbol{\xi}\|^{-\sup_z h(z)-1} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \right).$$

Le caractère höldérien de h permet de conclure. □

Lemme 3.3

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ et $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions satisfaisant les hypothèses (\mathcal{H}) . Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ fixé. Alors, il existe une constante $K_{\mathbf{x}} > 0$ dépendant de \mathbf{x} telle que pour tout $(\rho, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ avec $|\rho| \leq 1$ et $\|\mathbf{w}\| \leq 1$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left[f^{1/2}(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \leq K_{\mathbf{x}} |\rho|^{2\beta} \max(\|\mathbf{w}\|^{2\beta}, \|\mathbf{w}\|^{2\eta}) \left[1 + \|\mathbf{x}\|^2 \right]$$

avec

$$f^{1/2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})}} .$$

De plus, la fonction $\mathbf{x} \mapsto K_{\mathbf{x}}$ est bornée sur tout compact.

Preuve :

Observons que

$$\frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) + 1}} - \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}) + 1}} = \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) + 1}} - \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}) + 1}} + \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}) + 1}} - \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}) + 1}} .$$

En utilisant l'inégalité classique $|a - b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left[f^{1/2}(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} , \\ & \leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left[\frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) + 1}} - \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}) + 1}} \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\mathbf{x}) + 2}} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} . \end{aligned}$$

Afin de majorer la dernière intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\mathbf{x}) + 2}} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi}$, on décompose en polaire $\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\Theta}$ avec $(r, \boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ et on utilise l'homogénéité de C . Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\mathbf{x}) + 2}} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} , \\ & = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\left| e^{js} - 1 \right|^2}{s^{2h(\mathbf{x}) + 1}} \left[\int_{\mathbb{S}^1} |\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta} \rangle|^{2h(\mathbf{x})} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}) \right]^2 d\boldsymbol{\Theta} \right] ds , \\ & \leq \|\mathbf{x}\|^{2h(\mathbf{x})} \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\left| e^{js} - 1 \right|^2}{s^{2h(\mathbf{x}) + 1}} ds \right] \left[\int_{\mathbb{S}^1} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\Theta}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}) \right]^2 d\boldsymbol{\Theta} \right] , \end{aligned}$$

où on a posé $s = r \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta} \rangle$ dans la seconde égalité. On utilise maintenant la condition (3.1) des hypothèses (\mathcal{H}) avec $\mathbf{z} = \rho \mathbf{w} \in B(\mathbf{0}, 1)$. D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\mathbf{x}) + 2}} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \leq A_{\mathbf{x}} |\rho|^{2\eta} \|\mathbf{w}\|^{2\eta} \|\mathbf{x}\|^{2h(\mathbf{x})} \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\left| e^{js} - 1 \right|^2}{s^{2h(\mathbf{x}) + 1}} ds \right] .$$

Alors, puisque $\|\mathbf{x}\|^{2h(\mathbf{x})} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 1$ est toujours vraie ($h(\mathbb{R}^2) \subset [0, 1]$), on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{2h(\mathbf{x}) + 2}} \left[C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \leq B_{\mathbf{x}} \|\mathbf{w}\|^{2\eta} |\rho|^{2\eta} \left(\|\mathbf{x}\|^2 + 1 \right) , \quad (3.18)$$

avec

$$B_x = A_x \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|e^{js} - 1|^2}{s^{2h(x)+1}} ds < \infty .$$

Majorons à présent $\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 \left[\frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w})+1}} - \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \right]^2 d\boldsymbol{\xi}$. Puisque C est bornée, et que par le Lemme 3.2 on a pour une certaine constante $\Lambda_{h,C} > 0$ dépendant seulement de h et de C :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 \left[\frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w})+1}} - \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \\ & \leq \Lambda_{h,C} |\rho|^{2\beta} \|\mathbf{w}\|^{2\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 \left[|\log \|\boldsymbol{\xi}\||^2 \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{-2a-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} + \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2b-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \right) \right] d\boldsymbol{\xi} . \end{aligned}$$

Étant donné que $|e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1| \leq \min(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\boldsymbol{\xi}\|, 2)$, on obtient directement que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 \left[\frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w})+1}} - \frac{C(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \leq \tilde{A} |\rho|^{2\beta} \|\mathbf{w}\|^{2\beta} (\|\mathbf{x}\|^2 + 1) , \quad (3.19)$$

avec

$$\tilde{A} = \Lambda_{h,C} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\log \|\boldsymbol{\xi}\||^2 \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{-2a-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 1} + \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2b} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} \right) d\boldsymbol{\xi} \right] .$$

La conclusion suit à partir de (3.18) et (3.19) avec $K_x = 2B_x + 2\tilde{A}$. Le fait que $\mathbf{x} \mapsto K_x$ est borné sur tout compact provient du fait que $\mathbf{x} \mapsto A_x$ est bornée sur tout compact. \square

Preuve du Théorème 3.1

Objectifs de la démonstration

Soit X le champ gaussien défini par (3.2), et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit $Z_{\mathbf{x}_0}$ le champ gaussien

$$Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) = \frac{X(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - X(\mathbf{x}_0)}{\rho^{h(\mathbf{x}_0)}} ,$$

et $Y_{\mathbf{x}_0}$ le champ H-sssi défini par la formule (3.16). Nous allons démontrer que $Y_{\mathbf{x}_0}$ est le champ tangent de X au point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\{Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{h})\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2} \xrightarrow{d} \{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2} ,$$

quand $\rho \rightarrow 0$, au sens de la convergence faible pour les processus stochastiques (expliquée section 1.9). La preuve est découpée en deux parties :

- (i) On commence par montrer que les lois finies dimensionnelles de $Z_{\mathbf{x}_0, \rho}$ convergent vers celles de $Y_{\mathbf{x}_0}$ quand $\rho \rightarrow 0$:

$$(Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{h}_1), \dots, Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{h}_N)) \longrightarrow (Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}_1), \dots, Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}_N)) ,$$

à comprendre également comme la convergence des mesures sur \mathbb{R}^N de ces vecteurs aléatoires de taille N . Le théorème de Lévy énoncé à la Proposition 1.22, nous assure qu'il est équivalent de démontrer la convergence de leur fonction caractéristique, ce qui, dans le cas gaussien, est équivalent à montrer la convergence des matrices de covariances donc de leurs éléments :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathbb{E}[Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) \overline{Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})}] = \mathbb{E}(Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) \overline{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})}) . \quad (3.20)$$

(ii) Dans un deuxième temps, on pose $\rho_n = 1/n \in [0, 1]$ et on montre que la suite de champs aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \stackrel{\text{def}}{=} (Z_{\mathbf{x}_0, \rho_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, satisfait une propriété de tension, qui est remplie si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Kolmogorov énoncé à la Proposition 1.30, tiré de (KARATZAS et SHREVE, 1988, p.64), et rappelé ici :

$$\forall T > 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [-T, T]^2, \quad \sup_{n > 1} \mathbb{E}(|Z_n(\mathbf{u}) - Z_n(\mathbf{v})|^{\gamma_1}) \leq C_0(T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2+\gamma_2}, \quad (3.21)$$

pour une constante positive $C_0(T)$ pouvant dépendre de T et γ_1, γ_2 des constantes universelles.

Remarque 3.8. Comme $Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})$ est un vecteur gaussien, alors pour tout $\gamma_1 > 0$

$$\sup_{\rho \in (0, 1)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{-\gamma_0 \gamma_1} \mathbb{E}[|Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})|^{\gamma_1}],$$

et

$$\left[\sup_{\rho \in (0, 1)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{-2\gamma_0} \mathbb{E}|Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})|^2 \right]^{\gamma_1/2},$$

sont égaux à une constante multiplicative près ne dépendant que de γ_1 . L'inégalité (3.21) est donc vérifiée en considérant $\gamma_1 > 2/\gamma_0$ avec $\gamma_2 = \gamma_0 \gamma_1 - 2$. Il suffira donc de vérifier qu'il existe $0 \leq \gamma_0 \leq 1$ tel que

$$\forall T > 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [-T, T]^2, \quad \sup_{n > 1} \mathbb{E}(|Z_n(\mathbf{u}) - Z_n(\mathbf{v})|^2) \leq C_0(T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2\gamma_0}. \quad (3.22)$$

Remarque 3.9. Puisque la notion de champ tangent est une notion locale en \mathbf{x}_0 , il est équivalent de déterminer le champ tangent de X en \mathbf{x}_0 ou de celui de $\widetilde{X}(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})X(\mathbf{x})$ en \mathbf{x}_0 , où φ est une fonction C^∞ qui vaut 1 sur un voisinage de \mathbf{x}_0 (disons une boule $B(\mathbf{x}_0, a)$ de rayon a) puis décroît de façon C^∞ et s'annule en dehors d'un compact (disons la boule $B(\mathbf{x}_0, b)$). De telles fonctions « plateau » ou *bump* en anglais, se construisent facilement (TU, 2008), à partir d'une fonction 1-D φ_0 illustrée Figure 3.3, on pose ainsi $\varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$. On définit alors

$$\widetilde{Z}_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) = \frac{\widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \widetilde{X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^{h(\mathbf{x}_0)}}.$$

Pour l'étape (i) du calcul de la limite pour \mathbf{u} et \mathbf{v} donnés, cela ne change rien puisqu'à partir d'un certain rang, ρ_n est tel que $\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{v}$ se retrouvent dans la boule $B(\mathbf{x}_0, a)$ sur laquelle $\widetilde{X} = X$.

Pour l'étape (ii), avec $\widetilde{Z}_n(\mathbf{u}) - \widetilde{Z}_n(\mathbf{v}) = \rho_n^{-h(\mathbf{x}_0)}(\widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}) - \widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{v}))$, la majoration suivante

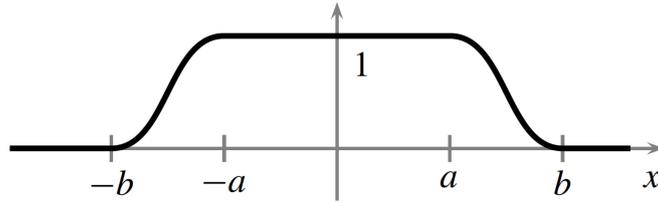
$$\sup_{n > 1} \mathbb{E}(|\widetilde{Z}_n(\mathbf{u}) - \widetilde{Z}_n(\mathbf{v})|^2) \leq C_0(T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2\gamma_0}, \quad (3.23)$$

nécessite de distinguer 3 cas :

- Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont dans $B(\mathbf{x}_0, b)^c$, alors $\widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}) = \widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{v}) = 0$ donc (3.23) est vérifiée.
- Si $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, b)$ et $\mathbf{v} \in B(\mathbf{x}_0, b)^c$, alors

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_n(\mathbf{u}) - \widetilde{Z}_n(\mathbf{v}) &= \rho_n^{-h(\mathbf{x}_0)} \widetilde{X}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}), \\ &= \rho_n^{-h(\mathbf{x}_0)} (\varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}) - \varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{v})) X(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}), \end{aligned}$$

avec $|\varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u}) - \varphi_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{v})|^2 \leq A(T) \rho_n^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ du fait que φ est C^∞ donc lipchitzienne, et $\mathbb{E}[X(\mathbf{x}_0 + \rho_n \mathbf{u})^2] \leq B(T)$ par continuité de la fonction de covariance, sur le compact $[-T, T]^2$. De nouveau (3.23) est vérifiée.

FIGURE 3.3 – Illustration d'une fonction plateau φ_0 .

- Reste à traiter le cas où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont dans $B(\mathbf{x}_0, b)$, c'est-à-dire qu'on pourra se restreindre pour la démonstration au cas où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont dans un voisinage de \mathbf{x}_0 aussi petit que l'on veut. On prendra pour les besoins de la démonstration $b = 1/2$, autrement dit on pourra se restreindre au compact $[-T, T] = [-1/2, 1/2]$.

Démontrons alors les deux conditions (3.20) et (3.21).

Démonstration de l'étape (i)

Prouver (3.20) consiste à montrer que pour $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - X(\mathbf{x}_0))\overline{(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - X(\mathbf{x}_0)))]}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} = \mathbb{E}(Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})\overline{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})}) . \quad (3.24)$$

On se donne un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, et on considère $\rho \leq \rho_0$ tel que $\rho_0\mathbf{u}, \rho_0\mathbf{v} \in B(\mathbf{0}, 1/2)$.

Observons tout d'abord que, par définition de X , on a

$$\mathbb{E}[(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - X(\mathbf{x}_0))\overline{(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - X(\mathbf{x}_0))}] = \int_{\mathbb{R}^2} g_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} , \quad (3.25)$$

où on a posé

$$g_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = \left[\left(e^{j\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - \left(e^{j\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] \\ \times \left[\left(e^{-j\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) - \left(e^{-j\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] ,$$

et $f^{1/2}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) / \|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}$.

En découpant astucieusement l'intégrale en 4 termes, le lecteur vérifiera que l'on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - X(\mathbf{x}_0))\overline{(X(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - X(\mathbf{x}_0))}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\rho\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\rho\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \quad (\mathbf{I}_1) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\rho\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left(1 - e^{j\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \left[f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] \, d\boldsymbol{\xi} \quad (\mathbf{I}_2) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - e^{-j\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} \right) \left(e^{-j\rho\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left[f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \quad (\mathbf{I}_3) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left[f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] \left[f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right] \, d\boldsymbol{\xi} \quad (\mathbf{I}_4) \\ &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 . \end{aligned}$$

Afin de prouver (3.24), on étudie maintenant le comportement de chacune de ces intégrales $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$ quand $\rho \rightarrow 0$.

• Étude du premier terme \mathbf{I}_1

On suppose dans ce qui suit que $\rho > 0$: en effet, puisque $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est paire, le cas $\rho < 0$ s'obtient de façon similaire. Posons dans l'intégrale \mathbf{I}_1 : $\boldsymbol{\zeta} = \rho\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\zeta} = -\rho\boldsymbol{\xi}$ si $\rho < 0$), $d\boldsymbol{\zeta} = \rho^2 d\boldsymbol{\xi}$ et utilisons l'expression de f , alors :

$$\mathbf{I}_1 = \rho^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v})} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}/\rho) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta}/\rho)}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} d\boldsymbol{\zeta}.$$

Par homogénéité de $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_1 &= \rho^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} d\boldsymbol{\zeta}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\rho^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)} = \exp(\ln \rho [h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)]) .$$

En utilisant que h est β -höldérienne, on obtient

$$|h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)| \leq |h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - h(\mathbf{x}_0)| + |h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - h(\mathbf{x}_0)| \lesssim (\|\mathbf{u}\|^\beta + \|\mathbf{v}\|^\beta) |\rho|^\beta .$$

Comme $\beta > 0$ est par hypothèse, et que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^\beta \ln \rho = 0$, on en déduit la limite :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \ln \rho [h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)] = 0, \quad (3.26)$$

d'où $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - 2h(\mathbf{x}_0)} = 1$.

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_1 &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1} \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} d\boldsymbol{\zeta} \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\|\boldsymbol{\zeta}\| \geq 1} \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} d\boldsymbol{\zeta}. \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à chaque intégrale séparément. On commence par borner les deux intégrandes comme suit :

$$\begin{aligned} \forall \|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1, \quad &\left| \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} \right| \leq \frac{M^2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \|\boldsymbol{\zeta}\|^2}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2(b+1)}}, \\ \forall \|\boldsymbol{\zeta}\| \geq 1, \quad &\left| \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta}) C(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) + h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) + 2}} \right| \leq 4M^2 \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2(a+1)}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la première ligne $|e^{jt} - 1| \leq 2 |\sin(t/2)| \leq |t|$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire de \mathbb{R}^2 . Ensuite, puisque $a > 0$ et $b < 1$ par hypothèse, on vérifie facilement que les fonctions $\boldsymbol{\zeta} \mapsto \|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2b}$ and $\boldsymbol{\zeta} \mapsto \|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2(a+1)}$ sont intégrables respectivement sur $\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1$ et $\|\boldsymbol{\zeta}\| \geq 1$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \frac{C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\zeta})^2}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2h(\mathbf{x}_0) + 2}} d\boldsymbol{\zeta} = \mathbb{E}(Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})),$$

puisque les fonctions h et $\mathbf{x} \rightarrow C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ sont continues.

• Étude des autres termes $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$

Nous démontrons maintenant que $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$ sont négligeables par rapport à la première quand ρ est petit. Montrons seulement que \mathbf{I}_2 est négligeable, les autres cas \mathbf{I}_3 et \mathbf{I}_4 se traitant de façon similaire. En utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\rho\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left[f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \right]^2 d\boldsymbol{\xi} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

L'analyse de la première intégrale a déjà été effectuée dans l'étude du cas précédent \mathbf{I}_1 en prenant $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. On obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\rho\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbb{E}[Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})^2]. \quad (3.27)$$

La majoration de la seconde intégrale découle directement du Lemme 3.3. Puisque $\beta \geq \sup_x h(x)$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_2 = 0.$$

La même approche à partir de \mathbf{I}_3 et \mathbf{I}_4 , mène également à

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_3 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbf{I}_4 = 0.$$

ce qui conclut la preuve de (3.24). □

Démonstration de l'étape (ii)

Nous devons à présent montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \stackrel{\text{def}}{=} (Z_{\mathbf{x}_0, \rho_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie (3.21), avec $\rho = \frac{1}{n} \in [0, 1]$, et avec \mathbf{u} et \mathbf{v} restreints à $B(\mathbf{0}, 1/2)$ d'après la Remarque 3.9, donc dans ce qui suit $T = 1/2$. On a alors :

$$\begin{aligned} &Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{\rho^{h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right] \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[(Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v}))^2 \right] \\ &= \frac{1}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ &= \frac{1}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left(f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 - \left(e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \right) f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ &\leq \frac{2}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\rho\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left(f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right)^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \frac{2}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\rho\langle \mathbf{v} - \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de $|a - b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$.

On applique alors le Lemme 3.3 avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, 1)$. On obtient ainsi la majoration suivante pour la première intégrale :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 \left(f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - f^{1/2}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \right)^2 d\boldsymbol{\xi}, \\ & \leq 2 \left(\sup_{\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, 2T)} K_{\mathbf{y}} \right) \left(1 + 2\|\mathbf{x}_0\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|^2 \right) \max \left(\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2\beta}, \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2\eta} \right) |\rho|^{2\beta - 2h(\mathbf{x}_0)}, \\ & \leq K_1 |\rho|^{2\beta - 2h(\mathbf{x}_0)} \max \left(\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2\beta}, \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2\eta} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec $K_1 = 2 \left(\sup_{\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, 2T)} K_{\mathbf{y}} \right) \left(1 + 2\|\mathbf{x}_0\|^2 + 4T^2 \right)$, et $\beta - h(\mathbf{x}_0)$ positif.

Afin de majorer la seconde intégrale on exploite le fait que C est homogène par rapport à la seconde variable et bornée. Posons $\boldsymbol{\zeta} = \rho\boldsymbol{\xi}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ et déduisons

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ & \leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u})} \|C\|_{\infty} \rho^{2h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - 2h(\mathbf{x}_0)} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right|^2 \left(\|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2a-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\zeta}\| > 1} + \|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2b-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1} \right) d\boldsymbol{\zeta}, \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{u} - \mathbf{v})/\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Par les mêmes arguments que dans (3.26) on trouve que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{2(h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - h(\mathbf{x}_0))} = 1,$$

donc elle a une borne supérieure finie $A_1 > 0$, atteinte sur un compact par continuité

$$A_1 = \max_{\rho, \mathbf{v}} \left\{ (\rho, \mathbf{v}) \in [0, 1] \times [-T, T]^2, \rho^{2(h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - h(\mathbf{x}_0))} \right\}.$$

De même on a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v})} = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2(h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - h(\mathbf{x}_0))} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0)}$ et le premier terme tend vers 1, donc la fonction $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2(h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - h(\mathbf{x}_0))}$ atteint également sa borne supérieure $A_2 > 0$. Donc,

$$2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u})} \|C\|_{\infty} \rho^{2h(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - 2h(\mathbf{x}_0)} \leq 2A_1 A_2 \|C\|_{\infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0)}.$$

D'où, utilisant le fait que $\left| e^{j\langle \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right|^2 \leq \min(2, \|\boldsymbol{\Theta}\| \|\boldsymbol{\zeta}\|) = \min(2, \|\boldsymbol{\zeta}\|)$,

$$\frac{2}{\rho^{2h(\mathbf{x}_0)}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \leq K_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0)}, \quad (3.29)$$

avec $K_2 = 2A_1 A_2 \|C\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \min(2, \|\boldsymbol{\zeta}\|^2) (\|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2a-2} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\zeta}\| > 1} + \|\boldsymbol{\zeta}\|^{-2b} \mathbf{1}_{\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1}) d\boldsymbol{\zeta}$.

Puisque K_1, K_2 sont toutes deux des constantes positives ne dépendant que de T , les inégalités (3.28) et (3.29) impliquent que

$$\mathbb{E} \left[(Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v}))^2 \right] \leq K_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2h(\mathbf{x}_0)} \left[1 + \frac{K_1}{K_2} \max \left(\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2(\beta - h(\mathbf{x}_0))}, \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{2(\eta - h(\mathbf{x}_0))} \right) \right],$$

et puisque $\beta - h(\mathbf{x}_0) > 0$ et $\eta - h(\mathbf{x}_0) > 0$, le second facteur atteint ses bornes sur le compact $[-T, T]^2 \times [-T, T]^2$, d'où

$$\sup_{\rho \in (0, 1)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{-2h(\mathbf{x}_0)} \mathbb{E} \left[(Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v}))^2 \right] < \infty.$$

Ce qui démontre l'inégalité (3.21) d'après la Remarque 3.8 avec $\gamma_0 = h(\mathbf{x}_0)$. \square

La démonstration des points (i) et (ii) achève la preuve du Théorème 3.1.

3.1.3 Calcul de la covariance du LAFBF

Covariance d'un champ élémentaire

Une formule explicite de la covariance d'un champ élémentaire (EF) est donnée dans (BIERMÉ et coll., 2015), en utilisant le semi-variogramme. Soit Y_{H,θ_1,θ_2} un champ élémentaire défini par (3.6) :

$$Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \frac{c_{\theta_1,\theta_2}(\arg \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

dont on désigne le semi-variogramme par

$$v_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}) - Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{0}))^2 \right], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 3.3 (SEMI-VARIOGRAMME D'UN CHAMP ÉLÉMENTAIRE)

Le semi-variogramme de Y_{H,θ_1,θ_2} (3.6) est donné par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad v_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}) = 2^{2H-1} \gamma(H) C_{H,\theta_1,\theta_2}(\arg \mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|^{2H}, \quad (3.30)$$

où C_{H,θ_1,θ_2} est une fonction π -périodique définie sur $(-\pi/2, \pi/2]$ par

$$C_{H,\theta_1,\theta_2}(\theta) = \begin{cases} \beta_H \left(\frac{1-\sin(\theta_2-\theta)}{2} \right) + \beta_H \left(\frac{1-\sin(\theta_1-\theta)}{2} \right), & \text{si } \theta_1 \leq \theta + \pi/2 \leq \theta_2 \\ \beta_H \left(\frac{1+\sin(\theta_2-\theta)}{2} \right) + \beta_H \left(\frac{1+\sin(\theta_1-\theta)}{2} \right), & \text{si } \theta_1 \leq \theta - \pi/2 \leq \theta_2 \\ \left| \beta_H \left(\frac{1-\sin(\theta_2-\theta)}{2} \right) - \beta_H \left(\frac{1-\sin(\theta_1-\theta)}{2} \right) \right|, & \text{autrement} \end{cases}, \quad (3.31)$$

et β_H est la fonction Beta incomplète définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \beta_H(t) = \int_0^t u^{H-1/2} (1-u)^{H-1/2} du,$$

et

$$\gamma(H) = \frac{\pi}{H\Gamma(2H) \sin(H\pi)}. \quad (3.32)$$

Remarque 3.10. Pour $(\theta_1, \theta_2) = (-\pi/2, \pi/2)$ il s'agit simplement du FBF, et on retrouve bien la constante de normalisation C_H définie par (1.28) quand $d = 2$. En effet en utilisant le document complémentaire de (BIERMÉ et coll., 2015), on a que

$$C_{H,-\pi/2,\pi/2}(\theta) \equiv \beta_H(1) = B \left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma \left(H + \frac{1}{2} \right)^2}{\Gamma(2H + 1)},$$

ainsi pour $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1$ on a, en utilisant la formule de duplication $\Gamma(z) \Gamma \left(z + \frac{1}{2} \right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$,

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{H,-\pi/2,\pi/2}(\mathbf{x})^2] &= 2 \times v_{H,-\pi/2,\pi/2}(\mathbf{x}), \\ &= 2 \times 2^{2H-1} \gamma(H) C_{H,-\pi/2,\pi/2}(\arg \mathbf{x}), \\ &= \gamma(H) \times 2 \times \frac{2^{2H+1} \Gamma \left(H + \frac{1}{2} \right)^2}{\Gamma(2H + 1)}, \\ &= \frac{\pi^{3/2} \Gamma \left(H + \frac{1}{2} \right)}{H\Gamma(2H) \sin(H\pi) \Gamma(H + 1)} \equiv C_H. \end{aligned}$$

Puisque les champs élémentaires Y_{H,θ_1,θ_2} admettent des accroissements stationnaires, la Proposition 3.3 et la Proposition 2.3 donnent directement accès à l'expression de la covariance :

Proposition 3.4 (COVARIANCE D'UN CHAMP ÉLÉMENTAIRE)

La covariance de Y_{H,θ_1,θ_2} , désignée par r_{H,θ_1,θ_2} , est reliée au semi-variogramme (3.30) par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad r_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Cov}(Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}), Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{y})) \\ &= v_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}) + v_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{y}) - v_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Covariance d'un LAFBF

En nous appuyant sur l'expression de la covariance d'un champ élémentaire, nous en déduisons plus généralement l'expression de la covariance d'un LAFBF.

Proposition 3.5 (COVARIANCE D'UN LAFBF)

Soit $B_{\alpha,\delta}^h$ un LAFBF défini par (3.10), et soit $\theta_1(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x})$, $\theta_2(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x})$. La fonction de covariance de $B_{\alpha,\delta}^h$ est donnée, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, par :

$$\text{Cov}(B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x}), B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})) = \frac{1}{C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})} r_{(h(\mathbf{x})+h(\mathbf{y}))/2, \max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y})), \min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y}))}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \quad (3.33)$$

où r_{H,θ_1,θ_2} est la covariance d'un champ élémentaire Y_{H,θ_1,θ_2} , donnée à la Proposition 3.4.

Preuve :

À partir de la définition (3.10) de $B_{\alpha,\delta}^h$,

$$\begin{aligned} &C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})\mathbb{E}[B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{x})]}(\arg \boldsymbol{\xi})\|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{x})-1} (e^{j\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y})]}(\arg \boldsymbol{\xi})\|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{y})-1} d\boldsymbol{\xi} . \end{aligned}$$

Remarquons que, si $\min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y})) < \max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y}))$ alors

$$\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{x})]}(\arg \boldsymbol{\xi})\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y})]}(\arg \boldsymbol{\xi}) = 0 ,$$

tandis que si $\min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y})) \geq \max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y}))$, on a

$$\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{x})]}(\arg \boldsymbol{\xi})\mathbb{1}_{[\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y})]}(\arg \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1}_{[\max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y})), \min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y}))]}(\arg \boldsymbol{\xi}) ,$$

ce qui, dans cas, implique directement que

$$\begin{aligned} &C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})\mathbb{E}[B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{y})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)(e^{j\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)\mathbb{1}_{[\max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y})), \min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y}))]}(\arg \boldsymbol{\xi})\|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{x})-h(\mathbf{y})-2} d\boldsymbol{\xi} . \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'expression de la covariance d'un champ élémentaire, ce qui aboutit à

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{x}), Y_{H,\theta_1,\theta_2}(\mathbf{y})) &= \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)(e^{j\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)\mathbb{1}_{[\theta_1, \theta_2]}(\arg \boldsymbol{\xi})\|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} d\boldsymbol{\xi} , \\ &= r_{H,\theta'_1,\theta'_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \end{aligned}$$

On pose ensuite $H \equiv \frac{h(\mathbf{x})+h(\mathbf{y})}{2}$, $\theta'_1 \equiv \max(\theta_1(\mathbf{x}), \theta_1(\mathbf{y}))$ et $\theta'_2 \equiv \min(\theta_2(\mathbf{x}), \theta_2(\mathbf{y}))$ dans la dernière équation, et on obtient par identification le résultat voulu. \square

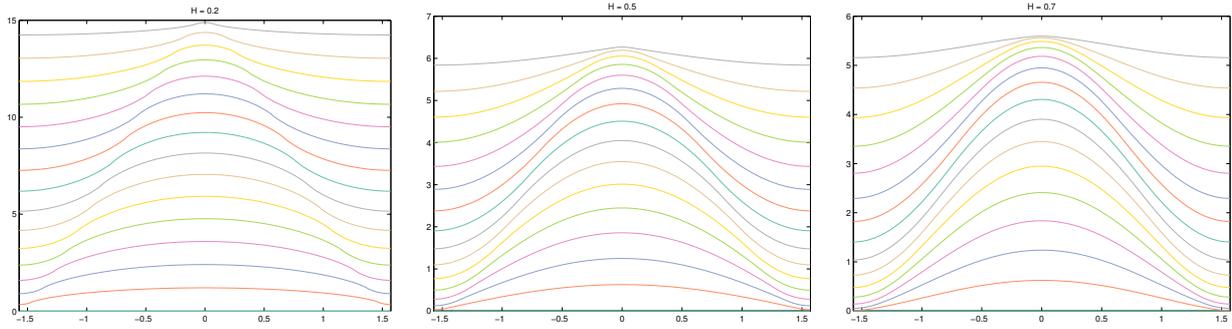


FIGURE 3.4 – Graphes de la fonction $\theta \mapsto C_{H,-\delta,\delta}(\theta)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ pour différentes ouvertures δ variant de 0 à $\pi/2$, pour $H = 0.2$ (à gauche), $H = 0.5$ (au centre) et $H = 0.7$ (à droite).

Par définition on pose :

$$C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x}) = \left(2^{2h(\mathbf{x})} \gamma(h(\mathbf{x})) C_{h(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{x})-\delta(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{x})+\delta(\mathbf{x})}(\arg \mathbf{x}) \right)^{1/2}, \quad (3.34)$$

avec $\gamma(H)$ définie par (3.32) et C_{H,θ_1,θ_2} définie par (3.31). Alors nécessairement on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 (VARIANCE DU LAFBF)

La variance du LAFBF est

$$\text{Var} \left[B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x}) \right] = \frac{2v_{h(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{x})-\delta(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{x})+\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x})}{C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})^2} = \|\mathbf{x}\|^{2h(\mathbf{x})}, \quad (3.35)$$

où le variogramme v est donné par (3.30).

Remarque 3.11. Notons que la fonction C_{H,θ_1,θ_2} ne s'annule jamais dès lors que $\theta_1 \neq \theta_2$, c'est-à-dire dès lors que le cône n'est pas dégénéré (d'aire nulle). Puisque la fonction δ est supposée ne jamais s'annuler, on en déduit que $C_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x})$ ne s'annule jamais et donc que la normalisation est licite. Sur la Figure 3.4 sont représentés différents graphes de $C_{H,-\delta,\delta}$ pour δ qui varie de 0 à $\pi/2$ et H fixé.

3.2 Simulation du champ brownien fractionnaire anisotrope local

3.2.1 Introduction

La synthèse exacte du LAFBF peut s'effectuer *via* la méthode de Cholesky puisque nous avons déterminé dans la section précédente la covariance du LAFBF. L'inconvénient de cette méthode réside dans sa complexité algorithmique qui limite la synthèse de grandes images de textures. Dans le panel des autres méthodes génériques présentées en section 2.3.3, le recours à une méthode approchée connaissant la fonction de covariance était envisageable. Malheureusement la méthode développée par BROUSTE et coll. (2007), n'a pas fourni de résultats satisfaisants en cela que les orientations étaient étrangement peu visibles, voir imperceptibles dans certaines régions de l'image. Nous avons donc opté pour une stratégie plus « locale », basée sur la notion de champ tangent. L'idée originelle vient de la simulation 1-D du mouvement

brownien multifractionnaire, ou *Multifractional Brownian Motion* (MBM), ensuite généralisée au cas 2-D du MBF, comme l'ont proposé PELTIER et LÉVY-VÉHEL (1995), consistant à exploiter la propriété du MBM à se comporter localement comme un FBM. Dit plus exactement, le champ tangent d'un MBM de fonction de Hurst $h(t)$ en un point t_0 est un FBM de paramètre de Hurst $H_0 = h(t_0)$. L'idée consiste donc à simuler une trajectoire du MBM $B^h(t)$ aux points de discrétisations $t_i = \frac{i}{N}$ en simulant N FBM B^{H_i} de paramètres $H_i = h(t_i)$, ayant les mêmes entrées gaussiennes, puis de poser

$$B^h(t_i) = B^{H_i} \left(\frac{i}{N} \right) = B^{h(\frac{i}{N})} \left(\frac{i}{N} \right) .$$

Ces N FBM sont obtenus de manière efficace et exacte par l'Algorithme 1 de WOOD et CHAN (1994) exposé à la section 2.3.2. Une autre méthode de simulation du MBM a été proposée par CHAN et WOOD (1998), et se base sur une technique d'approximation dite de krigeage, qui consiste à tenir compte de la structure de corrélation quand on dispose d'une formule explicite. Les deux méthodes ont été comparées par COEURJOLLY (2000), et fournissent toutes deux une bonne approximation de la trajectoire du MBM.

L'idée de simulation du LAFBF consistera à marier ces deux approches, d'une part en simulant à H fixé un LAFBF dont les orientations sont prescrites par les fonctions α et δ , grâce à l'approche du champ tangent, ce qui sera l'objet de la section 3.2.3. En effet nous avons démontré qu'un LAFBF $B_{\alpha,\delta}^H$ se comportait localement comme un champ élémentaire (EF) Y , d'où l'idée d'assigner (comme pour le MBM) au LAFBF la valeur de son champ tangent en \mathbf{x}_0 :

$$B_{\alpha,\delta}^H(\mathbf{x}_0) \leftarrow Y_{H,\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) . \quad (3.36)$$

D'autre part, pour simuler un LAFBF pour une fonction de régularité h qui varie, l'approche de la méthode de krigeage permettra dans la section 3.2.4, d'interpoler les champs $(B_{\alpha,\delta}^{H_u})_{1 \leq u \leq U}$ obtenus à la première étape pour simuler $B_{\alpha,\delta}^h$.

3.2.2 Simulation par la méthode de Cholesky

Connaissant la fonction de covariance d'un LAFBF, explicité à la Proposition 3.5, nous avons pu, grâce à la méthode exacte de Cholesky exposée à la section 2.3.1, synthétiser des textures de taille 127×127 illustrées Figure 3.5, où H et δ sont constantes et α est une fonction d'orientation. Pour les champs élémentaires Figure 3.5a et 3.5b où α est constante, on retrouve avec la méthode de Cholesky le même type de textures que celles obtenues par la méthode des bandes tournantes (TBM) (cf. Figure 2.10). Pour une fonction d'orientation $\mathbf{x} \mapsto \alpha(\mathbf{x})$ qui ne varie pas trop vite, comme celle utilisée Figure 3.5d, la texture produite hérite bien de ces orientations locales et est qualitativement bonne. En revanche quand la fonction d'orientation a des variations plus marquées, comme c'est le cas sur la Figure 3.5, le résultat n'est plus complètement satisfaisant car des artefacts dûs à ces variations apparaissent. La raison est la suivante : pour deux points \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^2 , les variables aléatoires $B_{\alpha,\delta}^H(\mathbf{x})$ et $B_{\alpha,\delta}^H(\mathbf{y})$ sont indépendantes dès lors que les angles $\alpha(\mathbf{x})$ et $\alpha(\mathbf{y})$ sont espacés de plus de 2δ (les cônes correspondant sont disjoints). Ainsi, la matrice de covariance $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ est très creuse, et \mathbf{L} l'est également. Par conséquent, pour Z un vecteur aléatoire gaussien, le produit $\mathbf{L}Z$ va sélectionner différentes entrées de ce dernier, de manière non continue, ce qui va engendrer ces sauts de niveaux de gris. Cet effet pourrait être estompé si la résolution était plus importante, mais la complexité de la méthode de Cholesky ne permet pas de traiter d'images de grande taille.

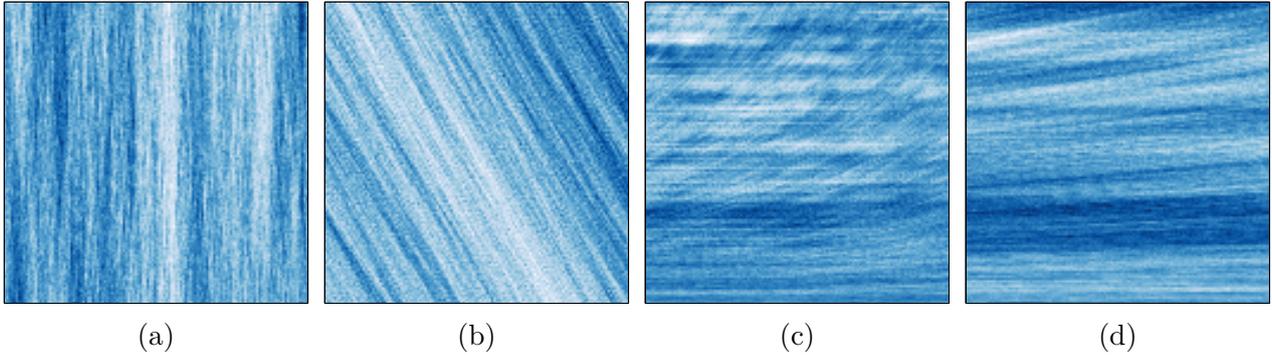


FIGURE 3.5 – Simulation d'un LAFBF de taille 256×256 par la méthode de Cholesky avec $H = 0.2$ et $\delta = 2.10^{-2}$ constants, et pour orientations (a) $\alpha = 0$ constant (EF), (b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ constant (EF), (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$ et (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + 0.2 \times x_2$

3.2.3 Simulation par les champs tangents

Nous avons montré dans la Proposition 3.2, que le LAFBF se comporte localement comme un champ élémentaire Y_{H,θ_1,θ_2} défini par (3.6) avec $H = h(\mathbf{x}_0)$, $\theta_1 = \alpha(\mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x}_0)$ et $\theta_2 = \alpha(\mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}_0)$. On pourrait donc en chaque point \mathbf{x}_0 affecter la valeur du champ tangent correspondant :

$$B_{\alpha,\delta}^h(\mathbf{x}_0) \leftarrow Y_{h(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0). \quad (3.37)$$

La simulation sur le pavé $[0, 1]^2$, que l'on discrétise en une grille régulière $r \times r$, nécessite d'estimer $B_{\alpha,\delta}^h$ en chaque pixel (k_1, k_2) autrement dit en chaque point $\mathbf{x}_0 = (k_1/r, k_2/r)^\top$ avec $0 \leq k_1, k_2 \leq r$. Ce qui nécessiterait de synthétiser r^2 champs élémentaires $Y_{h(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}$ grâce à la méthode des bandes tournantes (TBM) (cf. section 2.4.2), dont chacun d'eux impliquerait la simulation d'autant de FBM d'ordre $h(\mathbf{x}_0)$ qu'il ne comporte de bandes, pour n'en extraire au final qu'une valeur au pixel $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Ceci serait assez coûteux, quand bien même la méthode par bandes tournantes est efficace pour simuler un champ élémentaire.

À la place de cela, nous allons travailler à H constant, et combiner astucieusement la méthode des bandes tournantes avec l'approche des champs tangents qui est locale. En effet on remarque qu'à H constant, le champ tangent $Y_{H,\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}$ est approché via la TBM par un champ discret $Y_{H,\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}^{[n]}$ comportant n bandes, et dont l'expression est donnée en (2.17). D'où d'après (3.37) en affectant au LAFBF la valeur du champ tangent approchée en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, soit $B_{\alpha,\delta}^H(\mathbf{x}_0) \approx Y_{H,\alpha(\mathbf{x}_0)-\delta(\mathbf{x}_0),\alpha(\mathbf{x}_0)+\delta(\mathbf{x}_0)}^{[n]}(\mathbf{x}_0)$, on a :

$$B_{\alpha,\delta}^H(\mathbf{x}_0) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Theta_{i+1} - \Theta_i) \gamma(H) c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}_0, \Theta_i)} \left(\frac{\cos \Theta_i}{r q_i} \right)^H B_i^H(\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\Theta_i) \rangle), \quad (3.38)$$

avec $c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{1}_{[-\delta(\mathbf{x}), \delta(\mathbf{x})]}(\theta - \alpha(\mathbf{x}))$, Θ_i les angles des bandes tournantes, et les B_i^H qui sont n FBM d'ordre H , calculés une fois pour toute par la méthode des matrices circulantes (circFBM) vue section 2.3.2. L'avantage d'être à H constant réside dans le fait que ce sont les mêmes bandes, formées par les n FBM d'ordre H , qui interviennent dans la contribution en \mathbf{x}_0 . Ainsi les étapes de pré-traitement 1,2,3 de l'Algorithme 3, incluant le choix dynamique des bandes (section 2.4.3) et leur tri ainsi que la simulation des n FBM (section 2.3.2), sont effectuées une seule fois. Elles ne dépendent pas des orientations prescrites et peuvent donc être communes à la simulation d'un LAFBF possédant d'autres paramètres d'orientation.

Le reste de l'algorithme s'exécute rapidement et est en $O(r^2 \log n)$, soit quasi linéaire en le nombre de pixels. En effet, à chaque point $\mathbf{x}_0 = (k_1/r, k_2/r)^\top$, la bande Θ_i contribue à $B_{\alpha,\delta}^H(k_1, k_2)$ si et seulement si $c_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}_0, \Theta_i) \neq 0$, c.-à-d. $|\Theta_i - \alpha(\mathbf{x}_0)| \leq \alpha$. Donc puisque le tableau des angles Θ_i est trié, un tel indice i est déterminé par une recherche dichotomique

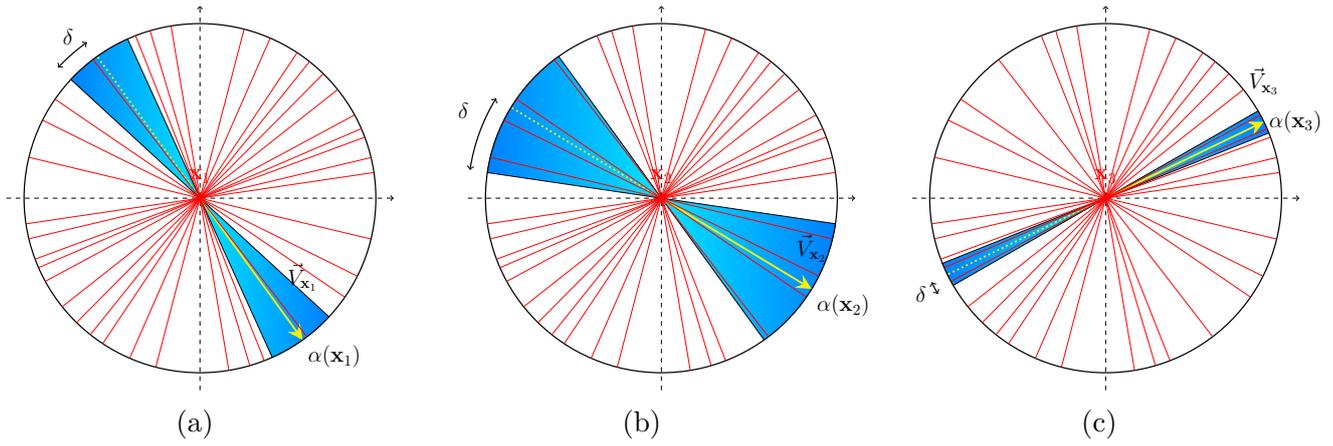


FIGURE 3.6 – Schémas illustrant en chaque point $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ la sélection de bandes par la fonction d'anisotropie locale $c_{\alpha, \delta}$, parmi les n bandes rouges pré-calculées une fois pour toute.

en $O(\log n)$, et les autres se trouvent dans son voisinage. La fonction d'anisotropie $c_{\alpha, \delta}(\mathbf{x}_0, \Theta_i)$ joue donc le rôle de sélecteur de bandes en chaque point \mathbf{x}_0 , comme illustré sur la Figure 3.6. Afin qu'il y ait un nombre suffisant de bandes dans chaque cône $c_{\alpha, \delta}(\mathbf{x}_0, \theta)$, il faut donc le nombre de bandes n sur $[-\pi/2, \pi/2]$ soit suffisamment grand pour que les approximations soient bonnes. Puisque cette étape de pré-traitement est effectuée une seule fois, quelles que soient les différentes orientations testées ultérieurement, il est recommandé de choisir une précision ϵ fine qui engendrera un grand nombre de bandes et sera le seul calcul onéreux permettant toutes les autres simulations.

Algorithme 3 Simulation du LAFBF pour H constant

Entrées: $r = 2^k - 1, H, \alpha_0, \alpha, \epsilon$

Sortie: $B_{\alpha, \delta}^H$ LAFBF de dimension $(r + 1) \times (r + 1)$

- 1: $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n} \leftarrow \text{ChoixDynamiqueDesBandes}(r, \epsilon)$
 - 2: Calculer et trier les angles $(\Theta_i)_{1 \leq i \leq n} : \Theta_i \leftarrow \text{atan2}(p_i, q_i)$
 - 3: Générer n FBM d'ordre $H : B_i^H \leftarrow \text{circFBM}(r(|p_i| + |q_i|), H)$
 - 4: Initialisation : $X \leftarrow 0$
 - 5: **Pour tout** (k_1, k_2) **faire**
 - 6: **Pour** $i = 1$ **à** n **faire**
 - 7: $\omega_i \leftarrow \sqrt{(\Theta_{i+1} - \Theta_i)\gamma(H)c_{\alpha, \delta}((k_1, k_2), \Theta_i)} \left(\frac{\cos \Theta_i}{r q_i}\right)^H$
 - 8: $B_{\alpha, \delta}^H(k_1, k_2) \leftarrow B_{\alpha, \delta}^H(k_1, k_2) + \omega_i B_i^H(k_1 q_i + k_2 p_i)$
 - 9: **Fin Pour**
 - 10: **Fin Pour**
-

Nous avons en pratique considéré pour $C(\mathbf{x}_0, \cdot)$ et $c_{\alpha, \delta}(\mathbf{x}_0, \cdot)$ une version régularisée de la fonction caractéristique, comme mentionné dans la Remarque 3.7 et illustré Figure 3.2, afin de ne pas être limité sur la plage de valeurs que peut prendre la régularité H , et afin d'atténuer les bandes d'artefacts que l'on peut visualiser sur les réalisations, qui sont dues aux approximations numériques de la méthode des rectangles (3.38). En effet, pour deux orientations suffisamment distinctes, la somme (3.38) implique différentes bandes (Θ_i) dans le calcul des contributions, ce qui a pour effet de créer des sauts de niveaux de gris, qui se manifestent ici par des bandes horizontales du fait que le champ de vecteurs des orientations varie selon l'axe horizontal (Ox_1). Ces artefacts sont d'autant plus visibles que les valeurs de H sont proches de 1, comme on peut le constater sur la Figure 3.7.

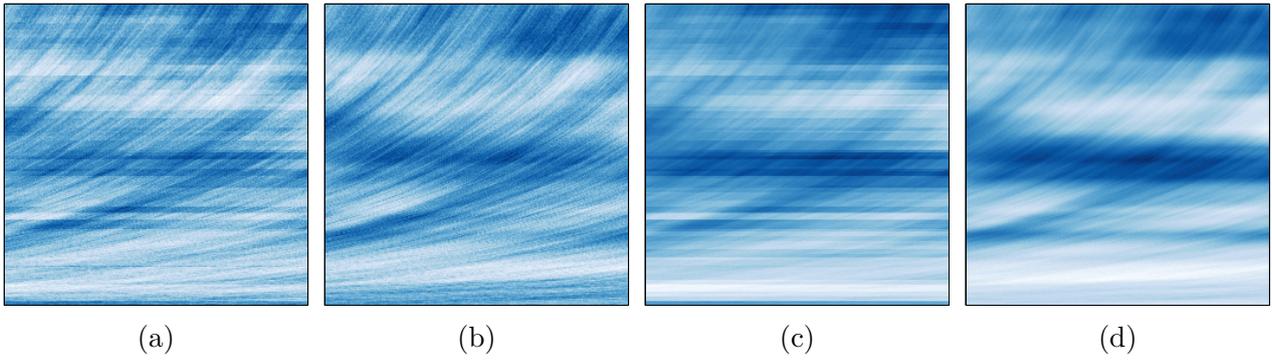


FIGURE 3.7 – Simulation d'un LAFBF de fonction d'anisotropie locale $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$, avec (a) $H = 0.2$ (sans régularisation), (b) $H = 0.2$ (avec régularisation), (c) $H = 0.5$ (sans régularisation) et (d) $H = 0.5$ (avec régularisation).

3.2.4 Heuristique pour une régularité variable via une méthode de krigeage

La seconde étape consiste, une fois obtenues différentes réalisations $(B_{\alpha, \delta}^{H_u})_{1 \leq u \leq U}$ d'une texture localement orientée (gouvernée par α et δ) pour des rugosités H_1, \dots, H_U , à synthétiser le LAFBF $B_{\alpha, \delta}^h$ quand la régularité h varie, par une méthode de krigeage. On commence par en décrire le principe général.

Principe général du krigeage

La méthode de krigeage est une méthode stochastique d'interpolation spatiale qui prévoit la valeur d'un phénomène naturel en des sites non échantillonnés, à partir des données des sites voisins. Elle fut introduite dans **KBIOB (1951)** et baptisée d'après le nom de D.G. Krige, un ingénieur minier sud-africain qui développa cette technique afin d'améliorer l'estimation de la distribution spatiale de minerais à partir d'un ensemble de forages. C'est cependant le mathématicien français **MATHERON (1962, 1963a,b)** qui a formalisé l'approche en utilisant la corrélation entre les forages pour en déterminer la répartition spatiale. Il fut le premier à baptiser la méthode de *krigeage* et à employer le terme de *géostatistique* pour désigner la modélisation statistique de données spatiales.

La valeur interpolée d'un champ aléatoire Z à une position non échantillonnée \mathbf{s}_0 , est calculée à partir d'une combinaison linéaire des positions observées/échantillonnées $Z_i = Z(\mathbf{s}_i)$ dans un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$ de \mathbf{s}_0 , c'est-à-dire

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{i \in \mathcal{V}(\mathbf{s}_0)} \lambda_i Z(\mathbf{s}_i) = \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{Z}.$$

Nous supposons connaître la dépendance spatiale des données, soit la matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ de \mathbf{Z} sur le voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$, donnée par $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j))$ pour $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in \mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$, et le vecteur $\mathbf{c}_0 = \text{Cov}[\mathbf{Z}, Z(\mathbf{s}_0) \cdot (1, \dots, 1)^\top]$. L'objectif est de trouver les poids λ_i pour lesquels on obtient la meilleure estimation linéaire, ce qui est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.6

L'estimateur $\hat{Z}(\mathbf{s}_0)$ est appelé le *meilleur estimateur linéaire non biaisé, ou Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)* de $Z(\mathbf{s}_0)$ si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0$, c'est-à-dire

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{c}_0^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}, \quad (3.39)$$

vérifiant ces propriétés :

- L'erreur de prédiction est non biaisée :

$$\mathbb{E} [\widehat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = 0 ,$$

- L'erreur de prédiction a une variance minimale :

$$\text{Var} [\widehat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] = \min_{\lambda_i} \left(\text{Var} \left[\sum_{i \in \mathcal{V}(\mathbf{s}_0)} \lambda_i Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_0) \right] \right) .$$

Preuve :

La variance de l'erreur de prédiction est :

$$\begin{aligned} \text{Var} [\widehat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] &= \text{Var} [\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{Z} - Z(\mathbf{s}_0)] , \\ &= \text{Var} [\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{Z}] + \text{Var} [Z(\mathbf{s}_0)] - 2\text{Cov} [\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{Z}, Z(\mathbf{s}_0)] , \\ &= \boldsymbol{\lambda}^\top \text{Var} [\mathbf{Z}] \boldsymbol{\lambda} + \text{Var} [Z(\mathbf{s}_0)] - 2\boldsymbol{\lambda}^\top \text{Cov} [\mathbf{Z}, Z(\mathbf{s}_0)] , \\ &= \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} + \sigma^2 - 2\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{c}_0 , \\ &= J(\boldsymbol{\lambda}) , \end{aligned}$$

où $\sigma^2 = \text{Var}[Z(\mathbf{s}_0)]$ et $\mathbf{c}_0 = \text{Cov}[\mathbf{Z}, Z(\mathbf{s}_0)]$, vecteur de taille $1 \times n_0$.

Afin de minimiser la fonction $J(\boldsymbol{\lambda})$ on calcule son gradient :

$$\nabla J(\boldsymbol{\lambda}) = 2\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\mathbf{c}_0 ,$$

qui s'annule pour

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 .$$

De plus la matrice hessienne est $2\boldsymbol{\Sigma}$ qui est positive comme matrice de covariance, d'où $J(\boldsymbol{\lambda})$ est une fonction convexe et le point critique $\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0$ est un minimum global. Donc la prédiction $\widehat{Z}(\mathbf{s}_0)$ de $Z(\mathbf{s}_0)$ est bien donnée par :

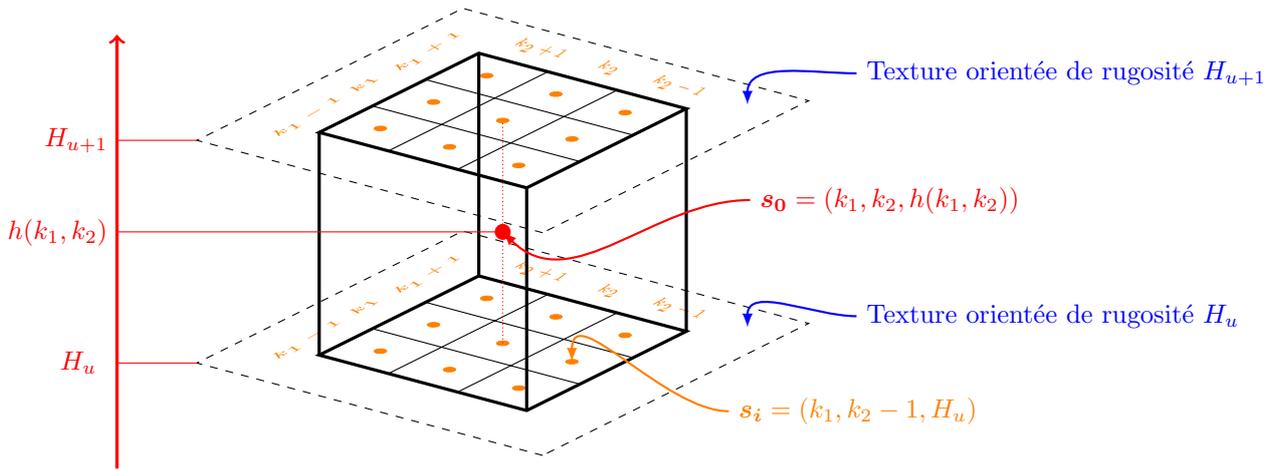
$$\widehat{Z}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{c}_0^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z} .$$

□

Application à l'interpolation du LAFBF

Considérons maintenant le krigeage du LAFBF $B_{\alpha(x,y),\delta(x,y)}^{h(x,y)}(x,y)$ défini pour $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$. Le champ est également échantillonné sur la grille $r^{-1}\mathbb{Z}^2 \cap [0, 1]^2$ avec $r = 2^k - 1$, où sont générés les U LAFBF à paramètres de Hurst constants $H_u, u = 1, \dots, U$, à savoir les $B_{\alpha(k_1,k_2),\delta(k_1,k_2)}^{H_u}(k_1, k_2)$ obtenus en section 3.2.3 pour tous les pixels $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, r\}^2$. Afin d'obtenir une estimation de $B_{\alpha(k_1,k_2),\delta(k_1,k_2)}^{h(k_1,k_2)}(k_1, k_2)$, on recherche au préalable les valeurs qui encadrent $h(k_1, k_2)$ au pixel $(k_1, k_2) : H_u \leq h(k_1, k_2) < H_{u+1}$, puis on effectue le krigeage du champ aléatoire $Z(x, y, H) = B_{\alpha(x,y),\delta(x,y)}^H(x, y)$ à la position non échantillonnée $\mathbf{s}_0 = (k_1, k_2, h(k_1, k_2))$, en considérant le voisinage suivant :

$$\mathcal{V}(\mathbf{s}_0) = \left\{ \begin{array}{lll} (k_1 - 1, k_2 - 1, H_u) & ; & (k_1 - 1, k_2, H_u) & ; & (k_1 - 1, k_2 + 1, H_u) \\ (k_1, k_2 - 1, H_u) & ; & (k_1, k_2, H_u) & ; & (k_1, k_2 + 1, H_u) \\ (k_1 + 1, k_2 - 1, H_u) & ; & (k_1 + 1, k_2, H_u) & ; & (k_1 + 1, k_2 + 1, H_u) \\ (k_1 - 1, k_2 - 1, H_{u+1}) & ; & (k_1 - 1, k_2, H_{u+1}) & ; & (k_1 - 1, k_2 + 1, H_{u+1}) \\ (k_1, k_2 - 1, H_{u+1}) & ; & (k_1, k_2, H_{u+1}) & ; & (k_1, k_2 + 1, H_{u+1}) \\ (k_1 + 1, k_2 - 1, H_{u+1}) & ; & (k_1 + 1, k_2, H_{u+1}) & ; & (k_1 + 1, k_2 + 1, H_{u+1}) \end{array} \right\} .$$

FIGURE 3.8 – Schéma représentant le voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$ et le principe du krigeage.

Soit $\mathbf{s}_i = (x_i, y_i, H_i)$ et $\mathbf{s}_j = (x_j, y_j, H_j)$ dans $\mathcal{V}(\mathbf{s}_0)$, alors la matrice de covariance de taille 18×18 est

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)) = \text{Cov}\left(B_{\alpha(x_i, y_i), \delta(x_i, y_i)}^{H_i}, B_{\alpha(x_j, y_j), \delta(x_j, y_j)}^{H_j}\right) = r_{H, \theta_1, \theta_2}((x_i, y_i), (x_j, y_j)),$$

où $r_{H, \theta_1, \theta_2}$ est la covariance d'un champ élémentaire avec comme paramètres :

$$\begin{aligned} H &= \frac{H_i + H_j}{2}, \\ \theta_1 &= \max(\alpha(x_i, y_i) - \delta(x_i, y_i), \alpha(x_j, y_j) - \delta(x_j, y_j)), \\ \theta_2 &= \min(\alpha(x_i, y_i) + \delta(x_i, y_i), \alpha(x_j, y_j) + \delta(x_j, y_j)), \end{aligned}$$

et \mathbf{c}_0 est le vecteur de taille 1×18 dont les composantes sont $\text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_0))$.

La prédiction $\hat{Z}(\mathbf{s}_0)$ est donnée par

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{c}_0^T \Sigma^{-1} \mathbf{Z},$$

avec \mathbf{Z} le vecteur contenant les 18 voisins $Z(\mathbf{s}_i)$ de $Z(\mathbf{s}_0)$. Nous connaissons de plus la variance de l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{Z}(\mathbf{s}_0) - Z(\mathbf{s}_0)] &= (\mathbf{c}_0^T \Sigma^{-1}) \Sigma (\Sigma^{-1} \mathbf{c}_0) + \sigma^2 - 2\mathbf{c}_0^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_0, \\ &= \sigma^2 - \mathbf{c}_0^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_0. \end{aligned}$$

Exemples de simulations

L'algorithme calcule l'estimation de $\hat{Z}(s_0)$ pour tout pixel \mathbf{s}_0 de l'image. Les résultats obtenus sont exposés Figure 3.9 pour une fonction d'orientation donnée $\mathbf{x} \mapsto \alpha(\mathbf{x})$ (avec δ constante) et 3 fonctions de Hurst $\mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x})$ différentes. La procédure est assez coûteuse car elle requiert pour chaque pixel \mathbf{s}_0 le calcul d'une matrice de covariance Σ de taille 18×18 (ce qui implique sur les entrées autant d'appels à la fonction de covariance $r_{H, \theta_1, \theta_2}$), qu'il faut ensuite inverser. Cette procédure peut être implémentée plus efficacement en parallélisant le traitement et en tenant compte du fait que deux pixels adjacents partagent une majorité d'entrées communes dans leurs matrices de covariances respectives.

Il est également possible de faire varier l'ouverture du cône δ , par exemple de façon linéaire comme sur la Figure 3.10, où la texture produite possède à la fois des variations de l'orientation locale par le biais de la fonction α , des variations de la directionnalité par le biais de la fonction δ , et des variations de régularité par le biais de la fonction h .

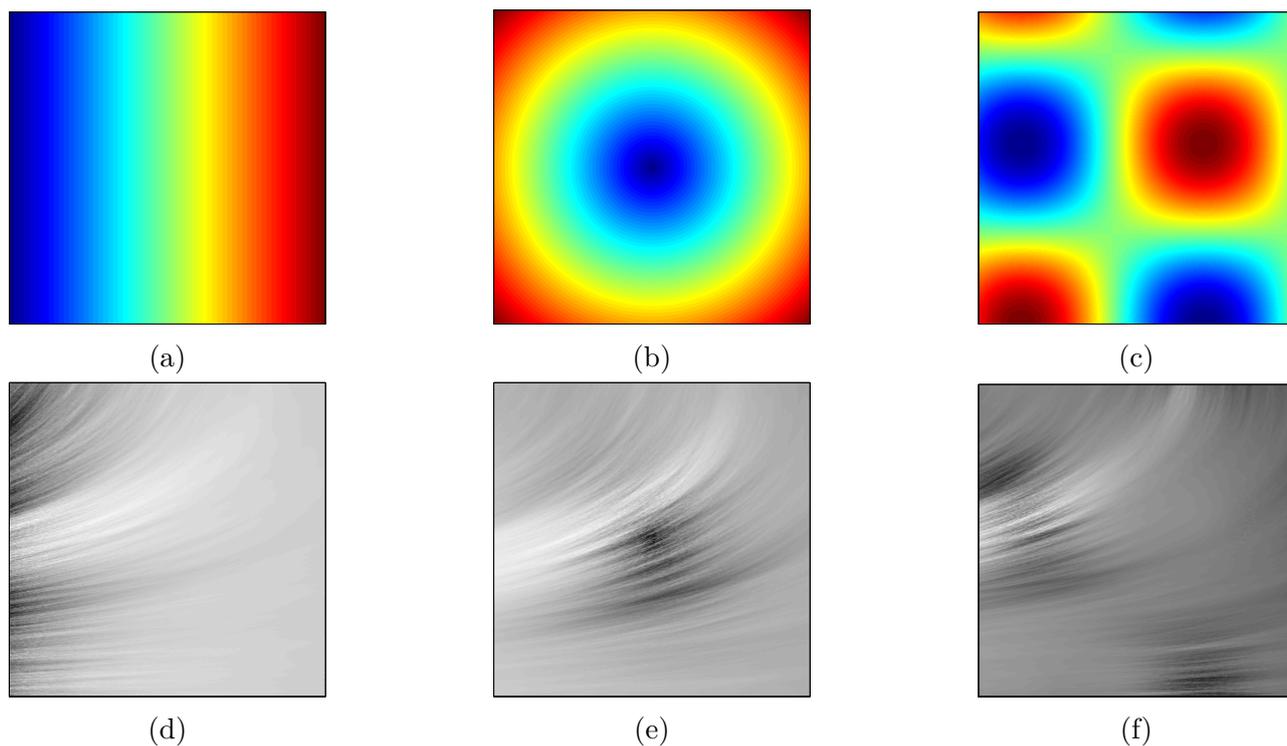


FIGURE 3.9 – Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ pour différentes fonctions de Hurst (a) linéaire, (b) radiale, (c) sinusoidale, ainsi que leurs réalisations respectives (d), (e) et (f).

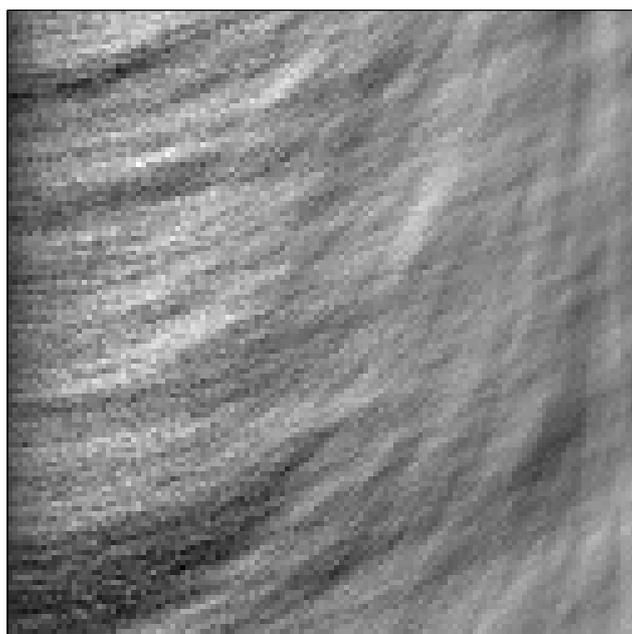


FIGURE 3.10 – Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$, une fonction de Hurst h et une ouverture de cône δ , toutes linéaires.

3.3 Deuxième modèle : déformation d'un champ H-sssi

3.3.1 Définition

Nous proposons un second modèle, introduit dans (POLISANO et coll., 2017), qui se veut une alternative au LAFBF dans le cas où les simulations de ce dernier seraient trop entachées d'artefacts numériques et ne permettraient pas d'estimer correctement les orientations sur ces images. Ce nouveau modèle est dans le même esprit que l'approche proposée par GUYON et PERRIN (2000); PERRIN et SENOUSI (1999, 2000), et qui consiste à considérer un champ résultant de la déformation d'un champ stationnaire. Dans notre perspective, nous définissons le champ brownien fractionnaire anisotrope déformé, ou *Warped Anisotropic Fractional Brownian Field* (WAFBF), construit comme la déformation d'un champ H-sssi (à accroissements stationnaires et auto-similaire) par une fonction continûment différentiable.

Définition 3.3 (CHAMP BROWNIEN FRACTIONNAIRE ANISOTROPE DÉFORMÉ)

Soit X un champ H-sssi et $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continûment différentiable. Le WAFBF $Z_{\Phi, X}$ est défini comme la déformation du champ X par Φ :

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x})) . \quad (3.40)$$

3.3.2 Détermination du champ tangent

Dans cette section nous dressons la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 3.7 (CHAMP TANGENT D'UN WAFBF)

Le champ gaussien $Z_{\Phi, X}$ défini par (3.40) est localisable en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, avec comme champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ défini par

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}) , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 , \quad (3.41)$$

où $\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)$ est la matrice jacobienne de Φ au point \mathbf{x}_0 .

Preuve. Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Puisque X est autosimilaire d'ordre H et à accroissements stationnaires, on a

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) ,$$

avec f une densité spectrale homogène. On a aussi

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) .$$

On pose alors

$$Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) = \frac{Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^h(\mathbf{x}_0)} ,$$

Comme pour la démonstration de la Proposition 3.1 dans la section 3.1.2, on divise la preuve en deux étapes :

- (i) On montre la convergence des lois finies dimensionnelles en passant par la convergence au sens de la covariance :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathbb{E}[Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) \overline{Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})}] = \mathbb{E}(Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) \overline{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})}) . \quad (3.42)$$

- (ii) Dans un deuxième temps, on montre que la suite de champs aléatoires $(Z_{\mathbf{x}_0, \rho})_\rho$ vérifie le critère de Kolmogorov :

$$\forall T > 0, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [-T, T]^2, \quad \sup_{\rho > 0} \mathbb{E}(|Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{u}) - Z_{\mathbf{x}_0, \rho}(\mathbf{v})|^2) \leq C_0(T) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2\gamma_0} , \quad (3.43)$$

pour une constante positive $C_0(T)$ pouvant dépendre de T et γ_1, γ_2 .

Démonstration de l'étape (i)

Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, considérons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^{2H}} \mathbb{E} [(Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)) (Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0))] \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}_0), \xi \rangle} \left(e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0), \xi \rangle} - 1 \right) e^{-j\langle \Phi(\mathbf{x}_0), \xi \rangle} \left(e^{-j\langle \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0), \xi \rangle} - 1 \right) f(\xi) d\xi , \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \rho\xi \right\rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \rho\xi \right\rangle} - 1 \right) f(\xi) d\xi , \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) f(\zeta/\rho) d\zeta/\rho^2 , \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) \rho^{2H+2} f(\zeta) d\zeta/\rho^2 , \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right) f(\zeta) d\zeta . \end{aligned}$$

Afin de calculer la limite de cette quantité quand $\rho \rightarrow 0$, désignons par $g(\rho, \zeta)$ l'intégrande de la dernière intégrale. On a alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho, \zeta) = \left(e^{j\langle \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}, \zeta \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \zeta \rangle} - 1 \right) f(\zeta) .$$

Nous devons maintenant majorer l'intégrande $|g(\rho, \zeta)|$, en utilisant l'inégalité $|e^{jx} - 1| \leq \min(2, |x|)$,

$$\begin{aligned} |g(\rho, \zeta)| &\leq \min \left(2, \left| \left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle \right| \right) \min \left(2, \left| \left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)}{\rho}, \zeta \right\rangle \right| \right) f(\zeta) , \\ &\leq \min \left(2, \frac{1}{\rho} \|\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0)\| \|\zeta\| \right) \min \left(2, \frac{1}{\rho} \|\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}_0)\| \|\zeta\| \right) f(\zeta) , \\ &\leq \min \left(2, \frac{1}{\rho} \sup_{[x_0, x_0 + \rho\mathbf{u}]} \|\Phi'(x)\| \|\rho\mathbf{u}\| \|\zeta\| \right) \min \left(2, \frac{1}{\rho} \sup_{[x_0, x_0 + \rho\mathbf{v}]} \|\Phi'(x)\| \|\rho\mathbf{v}\| \|\zeta\| \right) f(\zeta) , \\ &\leq \min(2, K \|\mathbf{u}\| \|\zeta\|) \min(2, K \|\mathbf{v}\| \|\zeta\|) f(\zeta) \leq \min(2, C \|\zeta\|)^2 f(\zeta) \equiv G(\zeta) . \end{aligned}$$

La seconde inégalité est obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la troisième par l'inégalité des accroissements finis, la quatrième sous l'hypothèse que Φ est continûment différentiable donc $\|\Phi'\| \leq K$, et la cinquième avec $C = K \max(\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|)$. Finalement, on montre que G est

intégrable car :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} G(\zeta) \, d\zeta &= \int_{\mathbb{R}^2} \min(2, C \|\zeta\|)^2 f(\zeta) \, d\zeta, \\ &= \frac{1}{C^2} \int_{\mathbb{R}^2} \min(2, \|\xi\|)^2 f\left(\frac{\xi}{C}\right) \, d\xi, \\ &= \frac{C^{2H+2}}{C^2} \int_{\mathbb{R}^2} \min(2, \|\xi\|)^2 f(\xi) \, d\xi, \\ &\leq C^{2H} \int_{\mathbb{R}^2} \min(4, \|\xi\|^2) f(\xi) \, d\xi < +\infty, \end{aligned}$$

où on a exploité l'homogénéité de f , et la propriété sur la mesure d'un champ à accroissements stationnaires (1.19). D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{2H}} \mathbb{E}[(Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0))(Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0))] = \mathbb{E}[Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})]$$

où on a posé

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}, \xi \rangle} - 1 \right) f^{1/2}(\xi) \widehat{\mathbf{W}}(d\xi),$$

ce qui correspond à la définition du champ tangent (3.41). \square

Démonstration de l'étape (ii)

On montre maintenant la convergence au sens de la convergence faible des processus stochastiques, *via* le critère de Kolmogorov qu'il s'agit de vérifier ici :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\frac{Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^H} - \frac{Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^H} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}), \xi \rangle} - e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}), \xi \rangle} \right|^2 f(\xi) \, d\xi, \\ &= \frac{1}{\rho^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}), \xi \rangle} - 1 \right|^2 f(\xi) \, d\xi, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v})}{\rho}, \zeta \right\rangle} - 1 \right|^2 f(\zeta) \, d\zeta, \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|e^{js} - 1|^2}{s^{2H+1}} \left[\int_{\mathbb{S}^1} \left| \left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v})}{\rho}, \Theta \right\rangle \right|^{2H} S_X(\Theta) \, d\Theta \right] ds, \\ &\leq \left\| \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v})}{\rho} \right\|^{2H} \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|e^{js} - 1|^2}{s^{2H+1}} ds \right] \left[\int_{\mathbb{S}^1} S_X(\Theta) \, d\Theta \right], \end{aligned}$$

avec $s = r \left\langle \frac{\Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v})}{\rho}, \Theta \right\rangle$. Désignons par I_H la première intégrale, et I_S la seconde. Ensuite, puisque Φ est C^1 , on a avec $C_0 = I_H I_S \|\Phi'\|^{2H}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\frac{Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^H} - \frac{Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}) - Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}_0)}{\rho^H} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{I_H I_S}{\rho^{2H}} \left(\sup_{[\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{u}, \mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{v}]} \|\Phi'(\mathbf{x})\| \|\rho(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \right)^{2H}, \\ &\leq I_H I_S \|\Phi'\|^{2H} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2H}, \\ &\leq C_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^{2H}. \end{aligned}$$

On conclut de la même manière qu'à la fin de l'étape 2 de la section 3.1.2, en utilisant le caractère gaussien de $Z_{\mathbf{x}_0, \rho}$. \square

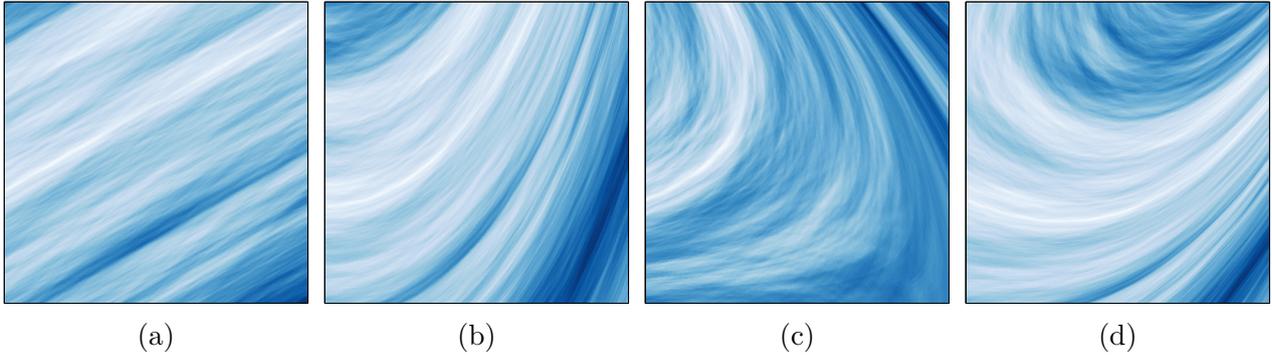


FIGURE 3.11 – Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x})$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$. (a) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$, (b) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$, (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$, (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$.

3.3.3 Simulations

Dans les simulations on choisit pour X un champ élémentaire standard où la fonction d'anisotropie est $C(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{1}_{[-\delta, \delta]}(\arg \boldsymbol{\xi})$, d'orientation $\alpha_0 = 0$ (texture orientée verticalement), et on choisit pour fonction de déformation Φ une rotation locale dont l'expression est :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{x}) x_1 + \sin \alpha(\mathbf{x}) x_2 \\ -\sin \alpha(\mathbf{x}) x_1 + \cos \alpha(\mathbf{x}) x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

et $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que, sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U, \quad \nabla \alpha(\mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{x}_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_{0,2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)x_{0,1} \neq -1, \quad (3.45)$$

de façon à ce que Φ ait une jacobienne de déterminant non nul. Le champ élémentaire X est synthétisé par la méthode des bandes tournantes (TBM)² vue à la section 2.4.2, et le remplissage de l'image déformée s'obtient comme en (2.17) par :

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) \approx X_{\Theta, \Lambda}(\Phi(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i \gamma(h(\Theta_i))c(\Theta_i)} B_i^{h(\Theta_i)}(\langle \Phi(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\Theta_i) \rangle). \quad (3.46)$$

De sorte à visualiser des orientations, on a besoin que la transformation Φ n'envoie pas des points d'un voisinage sur un même pixel, autrement dit il est préférable d'avoir une correspondance un-pour-un, d'où l'hypothèse faite sur Φ . Pour les quatre exemples de fonctions d'orientation considérées dans les simulations qui vont suivre, la condition (3.45) est remplie, ce qui assure que Φ est un C^1 -difféomorphisme sur U .

Dans le cas où α est une fonction constante égale à α_0 , on retrouve pour $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x}))$ un champ élémentaire d'orientation α_0 , comme illustré Figure 3.11a. Pour une fonction α qui varie linéairement suivant x_1 ou x_2 , on remarque que les orientations obtenues sont différentes de celles que nous avons avec la simulation du premier modèle Figure 3.5c et Figure 3.7. Ces différences seront expliquées lorsque nous caractériserons les orientations locales de ces deux modèles dans le Chapitre 5 section 5.3.2 et 5.3.3. Enfin pour une fonction α qui varie de façon quadratique le résultat est celui de la Figure 3.11d. On constate alors qu'il n'y a plus d'artefacts sur les orientations locales comme ceux que l'on observait sur la Figure 3.7. En revanche avec ce modèle il n'est plus possible de contrôler localement la directionnalité, chose qu'il était possible de faire avec le premier modèle en faisant varier localement l'ouverture du cône.

2. Si X est synthétisé par une méthode tierce, on simulera $Z_{\Phi, X}$ au moyen d'une interpolation.

3.4 Références

- BENASSI, A., S. JAFFARD et D. ROUX. 1997, «Elliptic Gaussian random processes», *Revista matemática iberoamericana*, vol. 13, n° 1, p. 19–90. [124](#)
- BIERMÉ, H., L. MOISAN et F. RICHARD. 2015, «A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields», *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 24, n° 3, p. 885–904. [124](#), [137](#)
- BONAMI, A. et A. ESTRADE. 2003, «Anisotropic analysis of some Gaussian models», *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 9, n° 3, p. 215–236. [125](#)
- BROUSTE, A., J. ISTAS et S. LAMBERT-LACROIX. 2007, «On fractional Gaussian random fields simulations», *Journal of Statistical Software*, vol. 23, n° 1, p. 1–23. [139](#)
- CHAN, G. et A. T. WOOD. 1998, «Simulation of multifractional Brownian motion», dans *COMPSTAT*, Springer, p. 233–238. [140](#)
- COEURJOLLY, J.-F. 2000, *Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires. (Statistical inference for fractional and multifractional Brownian motions)*., thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. [140](#)
- GUYON, X. et O. PERRIN. 2000, «Identification of space deformation using linear and superficial quadratic variations», *Statistics & probability letters*, vol. 47, n° 3, p. 307–316. [147](#)
- KARATZAS, I. et S. SHREVE. 1988, *Brownian Motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag. [132](#)
- KBIOB, D. 1951, «A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand», *Journal of Chemical, Metallurgical, and Mining Society of South Africa*. [143](#)
- MANDELBROT, B. B. et J. W. VAN NESS. 1968, «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», *SIAM review*, vol. 10, n° 4, p. 422–437. [124](#)
- MATHERON, G. 1962, *Traité de géostatistique appliquée*, vol. 1, Editions Technip. [143](#)
- MATHERON, G. 1963a, «Principles of geostatistics», *Economic geology*, vol. 58, n° 8, p. 1246–1266. [143](#)
- MATHERON, G. 1963b, «Traité de géostatistique appliquée, le krigeage.», Mémoires du bureau de recherches géologiques et minières. [143](#)
- PELTIER, R. et J. LÉVY-VÉHEL. 1995, «Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results», *Rapport de recherche de l'INRIA n2645*. [124](#), [140](#)
- PERRIN, O. et R. SENOUSI. 1999, «Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation», *Statistics & Probability Letters*, vol. 43, n° 4, p. 393–397. [147](#)
- PERRIN, O. et R. SENOUSI. 2000, «Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation», *Statistics & probability letters*, vol. 48, n° 1, p. 23–32. [147](#)
- POLISANO, K., M. CLAUSEL, V. PERRIER et L. CONDAT. 2014, «Texture modeling by Gaussian fields with prescribed local orientation», *Image Processing (ICIP), 2014 IEEE International Conference on*, p. 6091–6095. [121](#), [123](#), [126](#), [128](#)

- POLISANO, K., M. CLAUSEL, V. PERRIER et L. CONDAT. 2017, «Wavelet-based orientation of localizable Gaussian fields», *arXiv preprint arXiv :1708.00267*. [121](#), [123](#), [129](#), [147](#)
- TU, L. W. 2008, «Bump functions and partitions of unity», *An Introduction to Manifolds*, p. 127–134. [132](#)
- WOOD, A. T. et G. CHAN. 1994, «Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]$ », *Journal of computational and graphical statistics*, vol. 3, n° 4, p. 409–432. [140](#)

Deuxième partie

Caractérisation de l'anisotropie des textures

4

Outils mathématiques pour la détection de l'anisotropie

« *Il n'y a pas de choses simples,
mais il y a une manière simple de voir les choses.* »

Paul Valéry¹

Sommaire

3.1	Premier modèle : le champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé . . .	123
3.1.1	Définitions	123
3.1.2	Détermination du champ tangent	128
3.1.3	Calcul de la covariance du LAFBF	137
3.2	Simulation du champ brownien fractionnaire anisotrope local	139
3.2.1	Introduction	139
3.2.2	Simulation par la méthode de Cholesky	140
3.2.3	Simulation par les champs tangents	141
3.2.4	Heuristique pour une régularité variable via une méthode de krigeage	143
3.3	Deuxième modèle : déformation d'un champ H-sssi	147
3.3.1	Définition	147
3.3.2	Détermination du champ tangent	147
3.3.3	Simulations	150
3.4	Références	151

1. citation attribuée à Paul Valéry par **SIVARDIÈRE (1995)** en introduction de son ouvrage.

4.1 Mise en contexte

4.1.1 Motivations

LE diagnostic assisté par ordinateur, ou *Computer-Aided Decision (CAD)*, est de plus en plus utilisé aujourd'hui en imagerie médicale, avec pour objectif d'aider le praticien à analyser les clichés d'un examen. En radiologie par exemple, dans un premier temps le radiologue analyse seul les images obtenues. Puis la CAD permet d'attirer éventuellement l'attention du clinicien sur certaines zones potentiellement anormales. Le radiologue peut alors ré-examiner les clichés à la lumière de ces indications, et après analyse minutieuse de la zone considérée, juge de par son expérience du degré d'anormalité de celle-ci. La CAD joue donc le rôle de seconde lecture en identifiant automatiquement des régions suspectes. L'analyse se fait généralement en 4 étapes : une étape de pré-traitement pour réduire le bruit, les artefacts, réhausser les contrastes, etc. effectuée par filtrage notamment ; puis une phase de segmentation qui permet d'isoler les différentes structures qui composent l'image ; s'ensuit une analyse individuelle des régions d'intérêts en extrayant leurs caractéristiques propres (position, forme, densité, etc.) ; et enfin une étape de classification permettant d'évaluer la probabilité d'un vrai positif.

Nous décrivons maintenant deux applications médicales où l'on est amené à analyser des images de textures. A chaque fois, la rugosité ou l'anisotropie de l'image est un indicateur de la présence d'une pathologie ou non.

Analyse de mammographies et prévention du cancer du sein

Le cancer du sein est la seconde cause de mortalité chez les femmes. On estime qu'en moyenne une femme sur dix sera exposée à un cancer du sein au cours de sa vie. La détection le plus tôt possible d'une tumeur à ses premiers stades, par le biais principalement de l'examen mammographique, reste le meilleur moyen d'améliorer le pronostic du cancer du sein et de réduire le risque de mortalité. Toutefois l'interprétation des mammographies est compliquée et demande une expertise importante. En effet si la sémiologie radiologique mammaire se résume à trois principales caractéristiques : la densité, les micro calcifications et la désorganisation architecturale (Figure 4.1), en revanche leur répartition spatiale, leur taille, nombre, et forme varient infiniment et peuvent s'associer. D'où la difficulté devant cette diversité microscopique d'établir un diagnostic précis. A ceci viennent s'ajouter des difficultés d'ordre technique, puisque les images de mammographies elles-mêmes sont affectées par du bruit, des artefacts, ont parfois un mauvais contraste, dépendant à la fois du matériel d'acquisition et de la composition du sein (des tissus extrêmement denses rendent la détection d'anomalies moins aisée). Enfin le niveau d'expertise ou d'attention des radiologues devant analyser une quantité importante de mammographies est également un facteur déterminant dans le taux de faux négatifs de ces tests répétitifs. Pour toutes ces raisons des cancers sont susceptibles de ne pas être diagnostiqués par les radiologues. Certaines études estiment entre 10 et 30% la proportion de tumeurs malignes visibles sur les mammographies qui ne seraient pas détectées par les radiologues (ELTER et HORSCH, 2009). D'autres observent que seulement 15 à 34% des femmes devant subir une biopsie, ont effectivement une lésion maligne. Un système de double lecture par différents radiologues des mêmes mammographies a prouvé son efficacité pour améliorer le taux de sélectivité. Malheureusement le déficit d'experts comparé au nombre de mammographies croissant, ainsi que le coût engendré par ce système de double lecture, est un frein à sa mise en application effective. C'est dans ce contexte que la CAD peut avoir un intérêt. La combinaison du diagnostic du médecin couplé au diagnostic assisté par ordinateur, a semble-t-il permis de réduire le

risque de faux-négatifs². Il est donc important de disposer d'outils de détection fiables, qui permettent de détecter de manière précoce des anomalies. Nous allons voir qu'il existe différentes techniques pour détecter ces anomalies et les classifier. En particulier nous nous intéresserons à celles qui permettent de rendre compte de la modification architecturale des tissus (comme les spiculations Figure 4.1 qui témoignent d'anomalies), autrement dit de l'anisotropie locale.

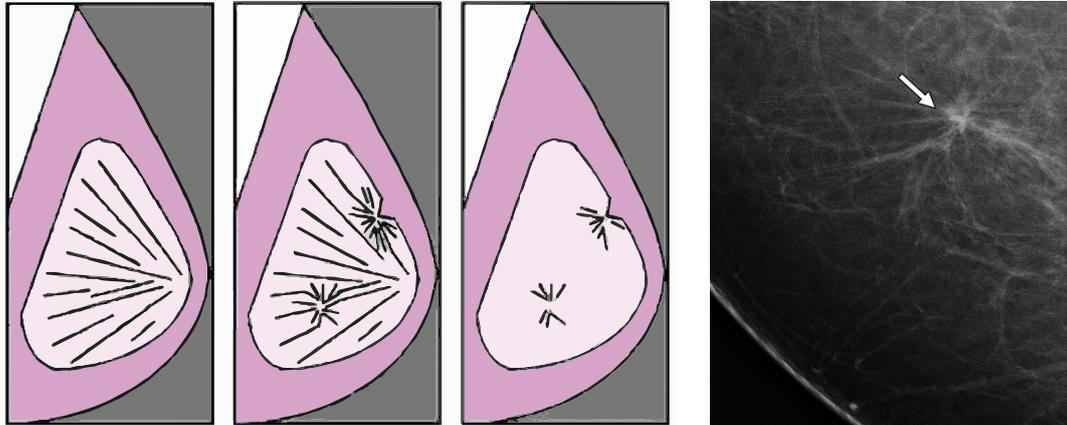


FIGURE 4.1 – Une image normale d'un sein (à gauche) présente des tissus glandulaires qui en première approximation peuvent être considérés comme des structures linéaires orientées, qui s'abouchent au mamelon. (À droite) images anormales de seins présentant des distorsions architecturales, les structures linéaires pointent radialement vers le point d'anomalie. Crédits : (MATSUBARA et coll., 2005) & Breast Cancer Resource Center.

Ostéoporose

L'ostéoporose est une maladie invalidante qui se traduit par une fragilité excessive du squelette, due à une diminution de la masse osseuse et à l'altération de la micro-architecture osseuse. L'ostéodensitométrie biphotonique ou DXA (absorptiométrie biphotonique aux rayons X) est la technique utilisée pour évaluer la déminéralisation osseuse. C'est une procédure non invasive qui permet de quantifier la *densité de masse osseuse*, ou *Bone Mass Density (BMD)* et la comparer à un seuil défini par l'OMS attestant d'une ostéoporose. Tous les individus qui possèdent une faible BMD, et donc considérés par définition comme ayant une ostéoporose (densitométrique), ne présenteront néanmoins pas nécessairement de fractures. Inversement des individus au dessus du seuil d'ostéoporose peuvent présenter un risque accru de fracture et ce pour d'autres raisons à identifier. La micro-architecture osseuse était le chaînon manquant à prendre en compte pour évaluer les propriétés de résistance mécanique de l'os, comme l'ont montré des études (MAJUMDAR, 1998). La micro-architecture est aujourd'hui unanimement considérée comme un

2. En effet plusieurs études (GILBERT et coll., 2008; SKAANE et coll., 2007) montrent effectivement l'impact positif qu'a la CAD pour assister le radiologue, tandis que d'autres font un constat plus mitigé où elle permettrait une détection plus tôt mais augmenterait le taux de faux positifs en particulier chez les jeunes femmes, ce qui est un élément à prendre en considération. D'autres encore rejettent l'hypothèse des améliorations apportées par la CAD (FENTON et coll., 2007; TAYLOR et coll., 2005), mais semblent faire moins consensus que les études montrant l'augmentation de la sensibilité avec la seconde lecture par CAD et dont l'augmentation de faux positifs est faible donc acceptable. Nous n'avons pas les moyens de juger ces assertions. Quoi qu'il en soit l'amélioration des résultats de la CAD en soi ne fait aucun doute, et l'augmentation de la sensibilité ainsi que de la spécificité des tests reste un objectif louable. Il n'est d'ailleurs pas improbable que dans un futur proche les capacités de reconnaissances de formes et d'apprentissage des machines puissent surpasser celles des radiologues dans la détection des anomalies, tout comme l'apprentissage profond a détrôné les plus grands joueurs d'échecs et récemment de jeu de Go. La question essentielle de l'interprétation restera ensuite entière.

facteur de risque complémentaire de la mesure de **BMD**, et est maintenant pris en compte dans la définition même de l'ostéoporose (altération de la densité et de la structure). Jusqu'à peu, l'étude approfondie de la micro-architecture, et donc de la qualité osseuse, ne se concevait que par le biais de la réalisation de prélèvements osseux.

Régularité des textures osseuses

L'analyse de texture osseuse permet, en se basant sur des images de radiographies, d'en tirer certaines conclusions quant à la micro-architecture osseuse, en quantifiant des modifications qualitatives des motifs de textures, par analyse fractale typiquement. Ces motifs de textures peuvent différer selon qu'ils sont extraits d'os solides ou fragilisés. C'est ce qu'ont notamment montré **POTHUAUD et coll. (1998)** en analysant des images d'os provenant de 39 femmes ménopausées présentant des fractures de vertèbres par écrasement, comparé à un groupe témoin de 39 femmes ménopausées sans fracture. En mesurant l'exposant de Hurst moyen H_{mean} à partir de 36 angles différents à l'instar de **JACQUET et coll. (1990)**, ils ont montré que H_{mean} était statistiquement plus faible dans le groupe présentant des fractures que dans le groupe témoin, et ce significativement. L'expérience fut renouvelée dans (**BENHAMOU et coll., 2001**) avec un total de 197 individus dont 107 souffraient de fractures, et la conclusion fut identique.

Anisotropie des structures trabéculaires

Un autre facteur de risque réside dans l'anisotropie des structures trabéculaires, qui diffère elle aussi suivant qu'un individu développe de l'ostéoporose ou non. Dans un cas comme dans l'autre, la micro-architecture de l'os présente un caractère anisotrope à qui l'on doit en partie sa résistance (**VAN DER LINDEN et WEINANS, 2007**). En effet le tissu trabéculaire (Figure 4.2a) est constitué par un ensemble de travées (plaques A et piliers B) dont la répartition est fortement anisotrope : les travées A se disposent parallèlement à la résultante des lignes de contraintes mécaniques qui s'exercent sur les pièces squelettiques et conditionne la micro-architecture trabéculaire ; les piliers transverses B assurent la cohésion de l'ensemble du système. Ainsi la texture du tissu trabéculaire apparaît comme une sorte de treillis imparfait présentant des variations d'orientations. Si on assiste à une perte de directionnalité d'une des composantes, la structure s'en trouve affaiblie, ce qui se passe en cas d'ostéoporose. Pour mesurer cette altération de la micro-architecture comme modification des orientations des travées, plusieurs méthodes ont été proposées (**CHAPPARD, 2012; CHAPPARD et coll., 2008**).

Moyenne d'intersection de lignes

La méthode la plus répandue, qui s'est par la suite étendue à l'estimation de l'anisotropie de bien d'autres milieux poreux, est la méthode des **moyennes d'intersections de lignes, ou Mean Intersect Lines (MIL)** avec la structure, introduite par **WHITEHOUSE (1974)**. L'idée résumée brièvement est la suivante : elle consiste pour une direction fixée $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$, à considérer des lignes d'orientation θ qui coupent la structure poreuse en certains points sur ces lignes, et à calculer la moyenne des longueurs qui séparent deux points dans le vide sur une même ligne. En traçant en polaire cette longueur moyenne en fonction de l'angle θ on obtient un diagramme de rose qui s'approche bien par une ellipse. Déterminer les axes de l'ellipse fournit donc une information sur les directions privilégiées de la structure. Cette méthode s'applique également en 3-D et peut se reformuler en terme de tenseur (**KETCHAM et RYAN, 2004; ODGAARD, 1997**), comme nous le verrons section 4.3, dont les valeurs et vecteurs propres contiennent ces informations géométriques.

Degré d'anisotropie du spectre de Fourier

Une autre méthode consiste à travailler directement à partir du spectre de Fourier. **CHAPARD et coll. (2005)** ont proposé une mesure de l'anisotropie appelée **degré d'anisotropie (DA)**. En effet les deux orientations privilégiées correspondant aux trabéculaires longitudinales et transversales sont discernables sur le spectre de Fourier par des sortes de cônes directionnels d'une certaine ouverture qui ne sont pas sans rappeler ceux des (L)AFBF. On peut donc mesurer ces ouvertures de cône associées à ces deux directions principales du « treillis », appelées respectivement l'**DLI** et l'**DTI**, comme illustré sur la Figure 4.2b et 4.2d . Ils définissent alors le degré d'anisotropie par :

$$DA = \frac{\pi}{DLI + DTI} ,$$

et montrent que cette quantité est significativement plus grande pour un groupe de 39 femmes ménopausées présentant une fracture, que pour le groupe témoin composé de 70 femmes sans fracture. D'autres travaux analogues ont été réalisés pour la détection d'anisotropie (**YI et coll., 2007**). Ces méthodes fonctionnent dans la mesure où ces variations d'orientation restent *globalement* dans un cône directionnel que ce soit sur la composante longitudinale ou transversale, de telle sorte que la structure de treillis se visualise sur l'ensemble de l'image. En revanche dans le cas de la mammographie de petites lésions peuvent advenir ici ou là, et c'est précisément la position et la nature de ces phénomènes locaux qui nous intéresse. La transformée de Fourier n'est alors plus adaptée pour l'étude du local et il devient nécessaire de se tourner vers d'autres méthodes.

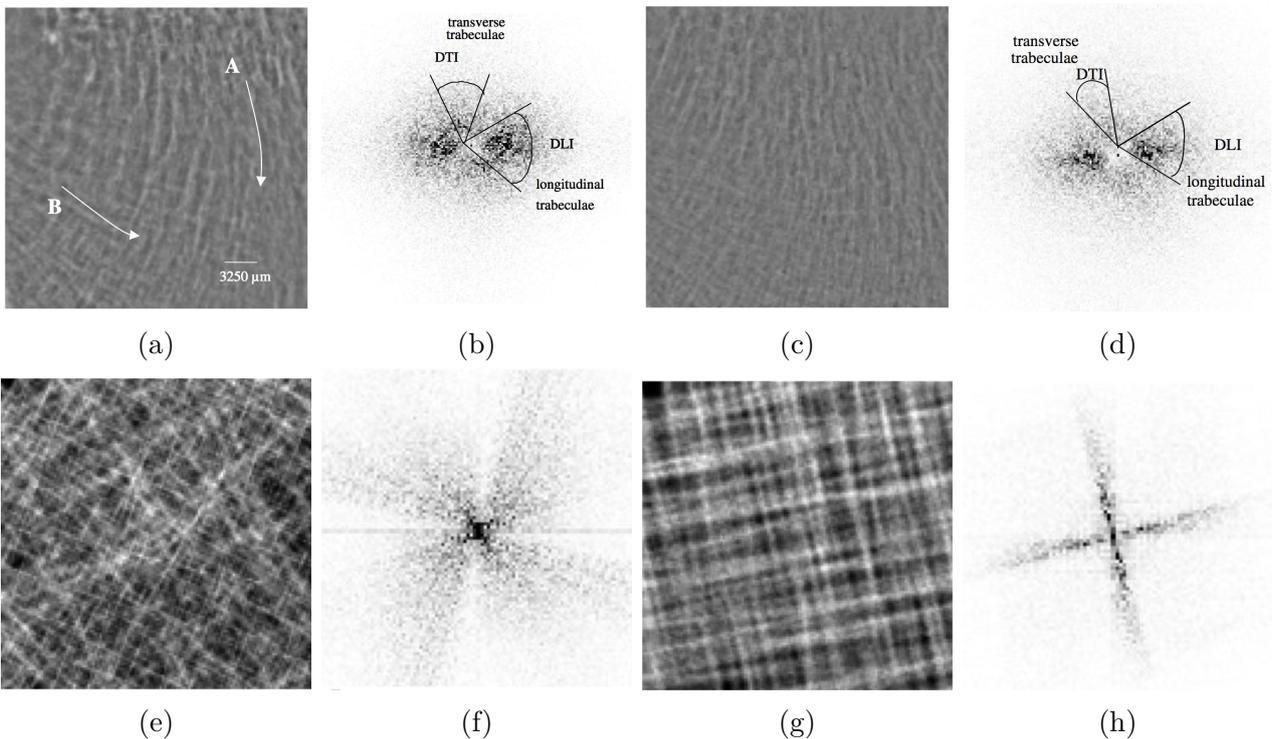


FIGURE 4.2 – Analyse de la structure trabéculaire d'une texture (a) d'un os sain du groupe témoin, les flèches A et B représentent respectivement les trabéculaires longétudinales et transversales, (b) le spectre obtenu par FFT et le calcul des angles DLI et DTI pour chacun d'eux, (c) texture d'un os du groupe atteint de fractures, (d) le spectre et angles de dispersion correspondant. Même chose ligne d'en dessous pour des textures synthétiques (e)-(h). Crédits : (**BRUNET-IMBAULT et coll., 2005**).

4.1.2 Estimation de l'anisotropie

Techniques génériques d'estimation des orientations dans une image

Au Chapitre 2 nous avons mentionné l'incroyable diversité de phénomènes naturels possédant une structure fractale, montrant entre autre que les notions d'auto-similarité d'invariance d'échelle sont pertinentes pour les décrire (LUNDAHL et coll., 1986; PESQUET-POPESCU et VÉHEL, 2002). Ainsi l'analyse fractale se trouve au coeur de toute sorte d'applications biomédicales : dans la structure vasculaire du cerveau (HEINZER et coll., 2006; RISSER et coll., 2007), dans l'étude du cortex en psychologie (BULLMORE et coll., 1994), celle des battements du coeur (TAN et coll., 2009), ou comme nous l'évoquions ci-dessus celles concernant la structure osseuse (POTHUAUD et coll., 1998) ou les mammographies (LI et coll., 1997). Il n'est donc pas étonnant que dans ce contexte l'analyse par ondelettes se soit naturellement invitée parmi les outils d'analyse fractale puisque la théorie des ondelettes repose essentiellement sur les concepts de multi-résolution et de changement d'échelle.

Les ondelettes pour l'analyse des mammographies

L'analyse multi-résolution a été largement utilisée dans ce contexte afin de caractériser et classer des mammographies, (ALARCON-AQUINO et coll., 2009; LAME et SONG, 1992; LIU et coll., 2001; SAKELLAROPOULOS et coll., 2003). Ici nous nous intéressons plus spécifiquement à l'analyse de l'orientation et de l'anisotropie des textures. Différentes classes de méthodes d'analyse multirésolution ont été développées pour l'analyse de l'anisotropie. Citons l'utilisation d'ondelettes directionnelles 2-D, d'ondelettes de Gabor pour la détection d'asymétrie dans les mammographies (FERRARI et coll., 2001; RANGAYYAN et AYRES, 2006), qui ont permis d'extraire un champ de vecteurs d'orientations et d'identifier par portraits de phase les zones de distorsions architecturales. On peut également citer les approches basées sur les curvelets (MA et PLONKA, 2010) ou les ridgelets toutes deux introduites par CANDÈS et DONOHO (1999); CANDÈS et DONOHO (2000), qui ont été appliquées à la classification (DHAHBI et coll., 2015; SELVI et MALMATHANRAJ, 2006; SEMLER et DETTORI, 2006; SEMLER et coll., 2006). L'étude des ridgelets dans le paradigme discret a été effectuée par CARRÉ (2011). Des comparaisons entre l'utilisation d'ondelettes, de ridgelets ou de curvelets pour l'application à la mammographie³ ont été effectuées dans (DETTORI et SEMLER, 2007; ELTOUKHY et coll., 2010; RAMOS et coll., 2012).

Analyse directionnelle et ondelettes

Dans ce qui suit nous présenterons les notions sur lesquelles sont basés nos travaux concernant l'analyse de l'orientation d'une texture. Un outil fondamental est la notion de signal monogène (section 4.2) et les ondelettes associées (section 4.2.3). Nous utiliserons aussi les différentes versions de la notion de tenseur de structure (section 4.3). La notion de signal monogène, combinée avec des familles d'ondelettes diverses a donné naissance à de nouvelles transformées comme celle des curvelets monogènes (STORATH, 2011) ou des shearlets monogènes (HÄUSER et coll., 2014). On renvoie à (JACQUES et coll., 2011) pour une présentation générale des transformées en ondelettes 2-D, et pour les applications à l'analyse directionnelle des images biomédicales on pourra se référer à (PÜSPÖKI et coll., 2016).

3. D'autres travaux à base de réseaux de neurones semblent également prometteur (DHEEBA et coll., 2014). Pour une vue d'ensemble des techniques déployées pour l'analyse de mammographie on pourra se référer au passage en revue (CHENG et coll., 2003, 2010; JALALIAN et coll., 2013; LI et coll., 2016; RANGAYYAN et coll., 2007; TANG et coll., 2009; VAN GINNEKEN et coll., 2001).

Estimation des paramètres d'anisotropie des champs aléatoires

Nous avons mentionné l'intérêt d'outils mathématiques permettant d'obtenir une représentation d'une image, que ce soit par des transformations orthogonales comme la transformée de Fourier, ou par des représentations de la structure locale décrivant ses caractéristiques. Une fois le type de support choisi pour la représentation (quel type d'ondelettes, de descripteurs, de dictionnaire, ...) l'information pertinente est encodée dans ses paramètres, qui sont estimés par des mesures appropriées sur l'image, avec des approches usuelles comme l'application d'opérateurs linéaires (filtres), ou non linéaire dans le cas de la morphologie mathématique, ou encore par des méthodes d'apprentissage. L'avantage de disposer de modèles synthétiques (comme sur la Figure 4.2e et 4.2h qui reproduisent grosso modo la structure de treillis des trébéculaires et illustrent les dispersions DLI et DTI) est que l'on est en mesure de tester les outils mathématiques sur ce modèle, en confrontant les estimations aux paramètres donnés en entrée.

On a vu qu'un certain nombre de phénomènes peuvent être modélisés par un champ aléatoire. Typiquement les images de mammographie ou de coupe d'os ostéoporotiques, ont pu être modélisées par des AFBF. Détecter l'anisotropie de ces structures, revient alors à estimer les paramètres du modèle qui encodent cette anisotropie. Les outils mathématiques décrits précédemment, appliqués au modèle théorique (c'est-à-dire au champ aléatoire et non sur leur réalisation), mènent à des quantités contenant ces paramètres (comme des coefficients d'ondelettes, des vecteurs d'orientation, etc), elles-même pouvant être considérées comme des variables aléatoires que l'on est en mesure d'étudier. Citons quelques exemples de modèles accompagnés de procédures d'estimation de ces paramètres :

- Le modèle de BONAMI et ESTRADÉ (2003) (section 2.2.2) décrivant une vaste classe de champs gaussiens à accroissements stationnaires et dont la densité spectrale f vérifie une condition asymptotique. Les auteurs ont montré que la projection de ces champs suivant une direction (pondération de la transformée de Radon abordée section 4.4.1) permettait de relier le comportement asymptotique de f à la régularité (exposant de Hölder) du champ. Dans la sous-classe des EFBF dont les champs sont caractérisés par une fonction de régularité $\theta \mapsto h(\theta)$, BIERMÉ et RICHARD (2008) ont établi des estimateurs basés sur leur transformée de Radon et des variations quadratiques généralisées, et ont développés des tests d'isotropie à partir de ces derniers (RICHARD et BIERME, 2010). Des applications médicales aux mammographies et aux os ostéoporotiques s'en sont suivi (BIERMÉ et coll., 2009). Mentionnons aussi qu'une méthode *ad hoc* pour identifier $h(\theta)$, basée sur la répartition des accroissements des orientations monogènes (abordées section 4.2.2), est proposée dans (DELECELLE et coll., 2007; PÉRON et coll., 2007). RICHARD (2016a) a ensuite étendu ces tests d'isotropie au cas où on superpose à un AFBF une tendance où les niveaux de gris en basse fréquence peuvent varier. Pour cela l'auteur se place dans le cadre plus général des champs aléatoires intrinsèques (CHILES et DELFINER, 2009; MATHERON, 1973) et utilise les variations quadratiques généralisées dans différentes orientations. Il construit ainsi des indices d'anisotropie qui ont la bonne propriété d'être invariants par rotation, changement d'échelle et changement d'intensité linéaire, puis les applique à la caractérisation de mammographie (RICHARD, 2016b).
- Le modèle des champs gaussiens à auto-similarité matricielle OSGRF (section 2.2.4), qui compose également une vaste classe de champs anisotropes, et sont indexées par un paramètre d'auto-similarité H_0 et un paramètre d'anisotropie α_0 . ABRY et coll. (2012); ROUX et coll. (2016, 2013) ont proposé de les analyser par le biais de la transformée en ondelettes hyperboliques et de l'analyse des propriétés de régularité de leurs trajectoires. Un estimateur de ces paramètres de régularité et d'anisotropie construits à partir des

coefficients d'ondelettes est introduit, et un test d'hypothèse permet de décider si la texture est isotrope ou non.

- Pour la classe des champs stationnaires, [OLHEDE et coll. \(2014\)](#) proposent d'établir une mesure de directionnalité (du même type que celle présentée section 4.3) ainsi qu'un test d'hypothèse d'unidirectionnalité, en se basant sur les statistiques du second ordre du *signal aléatoire monogène*. En effet à partir de la représentation spectrale des champs stationnaires, et du formalisme des quaternions, les auteurs déterminent les expressions des statistiques d'ordre 2 du signal monogène pour des champs isotropes, géométriques et unidirectionnel. Puis, dans le cas d'un champ stationnaire unidirectionnel, ils montrent que l'on peut reformuler cette caractérisation par un problème de minimisation quadratique, dont le minimum atteint correspond au cas d'unidirectionnalité. Ce problème peut lui-même se réécrire en fonction des statistiques d'ordre 2, menant à une mesure de directionnalité valant 1 lorsque la texture est unidirectionnelle, et 0 lorsque celle-ci est isotrope. Enfin en considérant une densité spectrale passe-bande ils fournissent un test d'hypothèse sur l'unidirectionnalité d'une réalisation. Nous en donnons un aperçu plus complet dans la section 5.1.

Détection de lignes dans une image

Un dernier aspect de la question de la détection d'anisotropie est la détection de lignes. En effet, asymptotiquement, détecter une structure orientée et détecter une ligne dans une image revient au même. Nous pouvons l'apercevoir sur le spectre de Fourier des structures orientées de la Figure 4.2 : plus le spectre se situe dans un cône étroit (passage de 4.2f à 4.2h), plus la directionnalité de la structure est nette (passage de 4.2e à 4.2g), ce que l'on avait déjà observé dans nos modèles dérivés du AFBF au précédent chapitre. Dans le chapitre suivant, nous caractérisons et quantifions cette directionnalité. Asymptotiquement, quand l'ouverture du cône autour de sa direction tend vers zéro, la densité spectrale devient une distribution de Diracs le long de cette direction comme illustré Figure 4.3, c'est le cas de l'unidirectionnalité dont nous avons parlé.

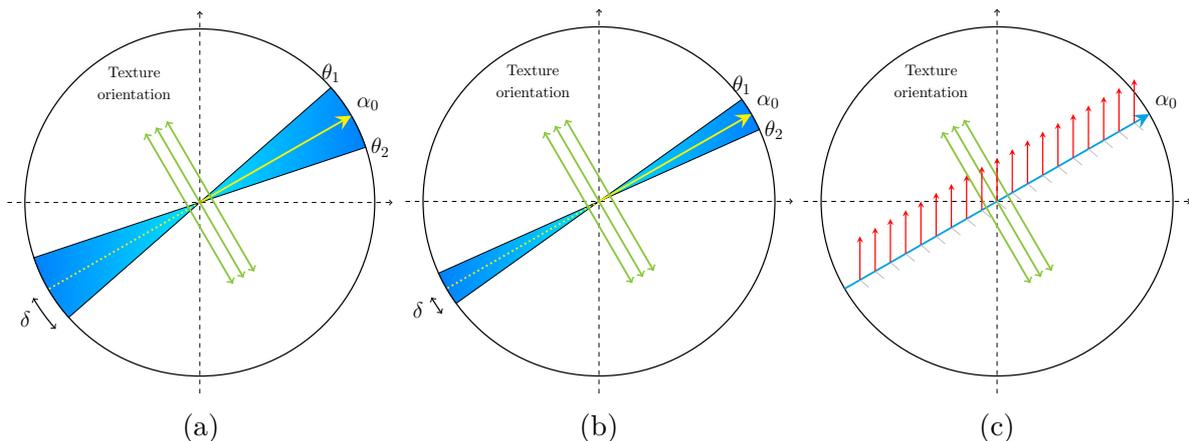


FIGURE 4.3 – Quand le cône orienté en α_0 a une ouverture 2δ qui tend vers zéro (a)-(b), il en résulte à la limite (c) une distribution de Diracs le long de la droite d'angle α_0 passant par l'origine.

Nous verrons dans la section 4.3, que dans le cas déterministe, l'estimation plus robuste d'un motif orienté nécessite de moyenner sur un voisinage les orientations, et que dans le cas idéal d'un voisinage simple, c'est-à-dire unidirectionnel, l'expression en Fourier de ce motif correspond à une ligne convoluée par la fonction de fenêtrage (qui moyenne les orientations), soit une ligne avec une certaine épaisseur. Cela nous amènera à traiter dans la Partie III, de

la détection de lignes floutées par des techniques de super-résolution, que l'on comparera aux méthodes traditionnelles de détection de lignes dans les images que constituent les transformées de Hough et de Radon exposées à la section 4.4.

4.2 Signal monogène

4.2.1 Transformée de Hilbert et signal analytique

En traitement du signal on a souvent affaire à des signaux qui sont modulés en amplitude ou en fréquence, c'est le cas typiquement pour la transmission de la voix (basse fréquence modulée par une porteuse). En électricité aussi on modélise les courants et les tensions par des grandeurs sinusoïdales variables dans le temps. Ces signaux sont de la forme $s(t) = A(t) \cos(\phi(t))$ avec $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$. On a souvent recours à une écriture complexe de tels signaux $\underline{s}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$, qui nous permet entre autre de définir les notions d'impédances et de simplifier les calculs dans les circuits sans avoir besoin de résoudre des équations différentielles portant sur les signaux réels $s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)]$. Bien que *in fine* on se ramène toujours à des signaux réels en physique, la notation complexe constitue un outil plus pratique à manipuler. Elle possède un autre avantage, celui de définir géométriquement la notion de phase, que l'on visualise dans le plan complexe sur la figure ci-dessous :

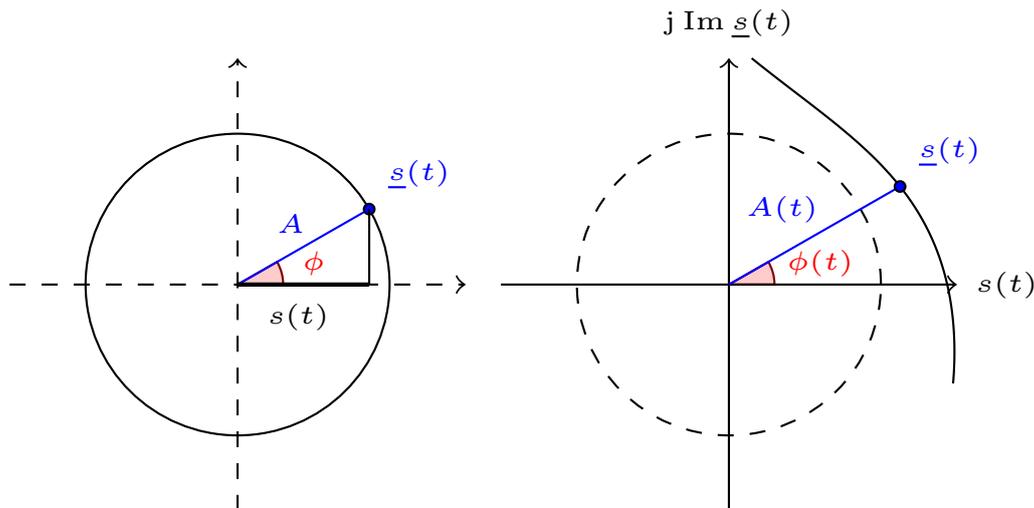


FIGURE 4.4 – À gauche un cosinus $A \cos(\phi(t))$ dont la phase varie $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$, représenté par le signal complexe $Ae^{j\phi(t)}$, à droite une fonction modulée en amplitude $s(t) = A(t) \cos(\phi(t))$ et représentée par le signal complexe $A(t)e^{j\phi(t)}$.

Passer à la notation complexe consiste pour un cosinus de fréquence donnée à associer l'exponentielle complexe de même fréquence, c'est-à-dire :

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) \longrightarrow e^{j\omega_0 t}.$$

On remarque que d'un point de vue spectral cela revient à supprimer la fréquence négative et à multiplier par deux l'amplitude de la fréquence positive (pour conserver l'énergie), comme illustré Figure 4.5.

Pour associer de manière à un signal réel quelconque $s(t)$ unique un signal complexe, permettant de définir de manière non ambiguë une amplitude et une phase, on utilise la transformée de Hilbert, introduite par **HILBERT** (1906, 1953) puis étudiée et formalisée par **HARDY** (1924a,b, 1902, 1909) :

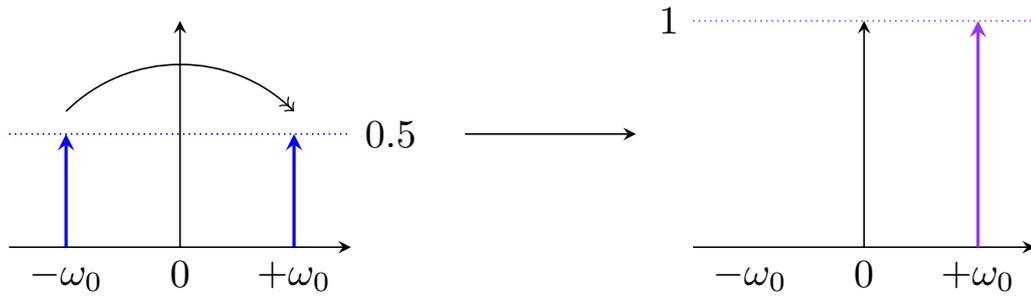


FIGURE 4.5 – Passage à la notation complexe de $\cos(\omega_0 t)$ à $e^{j\omega_0 t}$, illustré du point de vue spectral.

Définition 4.1 (TRANSFORMÉE DE HILBERT)

Le signal analytique d'un signal réel $s(t)$ se définit dans le domaine de Fourier $\hat{s}_A(\omega)$ à partir du spectre $\hat{s}(\omega)$ en supprimant les fréquences négatives et en multipliant les amplitudes par 2 :

$$\hat{s}_a(\omega) = \begin{cases} 2\hat{s}(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

$$= \hat{s}(\omega) + \text{sgn}(\omega)\hat{s}(\omega), \quad (4.2)$$

ce qui dans le domaine temporel correspond à

$$s_a(t) = s(t) + j \left(s(t) * \frac{1}{\pi t} \right) = s(t) + j\mathcal{H}s(t),$$

qui fait intervenir la transformée de Hilbert, définie (en valeur principale de Cauchy) par :

$$\mathcal{H}s(t) = \frac{1}{\pi} \text{v.p} \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau.$$

Remarque 4.1. En particulier la transformée de Hilbert transforme un cosinus en sinus puisque :

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) \longrightarrow e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t).$$

de même \mathcal{H} transforme un sinus en l'opposé d'un cosinus.

Remarque 4.2. La transformée de Hilbert a une réponse impulsionnelle à support infini, donc la valeur du signal analytique en un point nécessite en théorie la donnée du signal entier pour son calcul. Il faut donc veiller aux hypothèses du signal étudié pour que l'approximation numérique soit bonne.

Remarque 4.3. Le signal est qualifié d'« analytique » car il y a un lien fort entre transformée de Hilbert et fonctions analytiques⁴, fonctions sur lesquelles nous reviendrons plus en détail dans les chapitres suivants. Voir à ce propos (DE KNOCK, 2008; FELSBURG et SOMMER, 2001).

Notons également que la transformée de Hilbert est en quadrature avec le signal d'origine, comme en témoigne la Figure 4.6 :

4. Partant de n'importe quelle fonction f définie sur la droite réelle, il est possible de l'étendre en une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur du plan complexe (appelé demi-plan de Poincaré), et ceci au moyen d'une convolution avec le noyau de Poisson. Cette fonction harmonique étant elle-même la partie réelle d'une fonction analytique (complexe), il se trouve que la valeur de sa partie imaginaire sur la frontière de la droite réelle est précisément $\mathcal{H}f$, c'est d'ailleurs de cette manière qu'a été historiquement introduite la transformée de Hilbert.

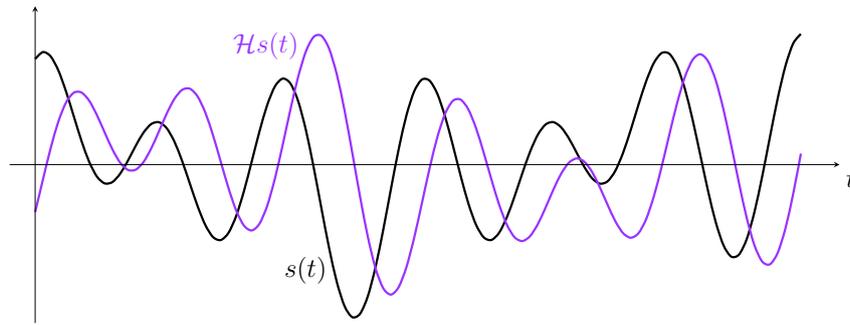


FIGURE 4.6 – Représentation du signal $s(t) = 1.1 \cos(4\pi t) + 1.8 \sin(14\pi t) + 2.9 \cos(20\pi t)$ sur $[0, 0.6]$, et de sa transformée de Hilbert $\mathcal{H}s(t) = 1.1 \sin(4\pi t) - 1.8 \cos(14\pi t) + 2.9 \sin(20\pi t)$ en quadrature de phase avec le signal s .

Nous pouvons alors définir les notions de phase $\phi(t)$ et d’amplitude $a(t)$ du signal analytique dans le plan complexe :

$$s_a(t) = s(t) + j\mathcal{H}s(t) = A(t)e^{j\phi(t)},$$

avec

$$A(t) = \sqrt{s(t)^2 + \mathcal{H}s(t)^2}, \quad \phi(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{H}s(t)}{s(t)}\right).$$

L’amplitude $a(t)$ (qui s’apparente à l’enveloppe du signal) va rendre compte de l’intensité des variations, tandis que la phase $\phi(t)$, et c’est le point intéressant, va être porteuse d’information sur la structure locale du signal. Plus exactement, sur la Figure 4.7, on voit qu’un pic correspond à une phase nulle, qu’un pic inversé est associé à $\phi = \pm\pi$, les inflexions « ascendantes » à $\phi = -\frac{\pi}{2}$ et les inflexions « descendantes » à $\phi = \frac{\pi}{2}$.

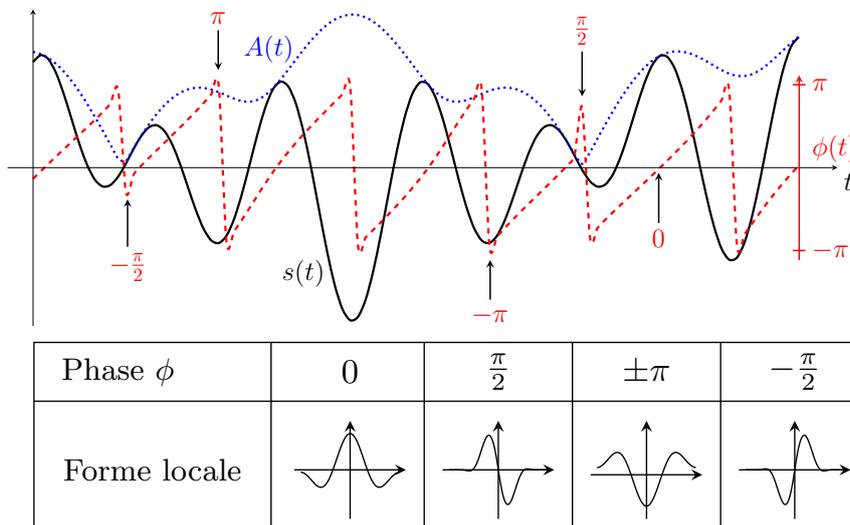


FIGURE 4.7 – Représentation de la phase et de l’amplitude du signal analytique s_a sur $[0, 0.6]$, à partir du signal $s(t) = 1.1 \cos(4\pi t) + 1.8 \sin(14\pi t) + 2.9 \cos(20\pi t)$. La phase de s_a est porteuse d’information sur la structure locale du signal s .

Pour plus de détails sur la transformée de Hilbert on pourra consulter l’ouvrage de KING (2009). On comprend alors l’intérêt de la généralisation de cette méthode à un signal 2-D pour repérer dans une image les orientations des objets.

4.2.2 Transformée de Riesz

Pour un signal 1-D nous avons construit le signal analytique en supprimant les fréquences négatives du signal, donnant lieu à la transformée de Hilbert. Or en 2-D, la notion de fréquence négative n'a pas de sens, c'est pourquoi la recherche d'un signal analytique pour les signaux 2-D reste encore un problème ouvert. Différentes méthodes ont été proposées, en travaillant sur des quadrants du domaine de Fourier plan, on fait ainsi apparaître les notions de transformée de Hilbert totale et partielle (DE KNOCK, 2008). Cependant ce type d'approches n'est valable que pour une certaine classe de signaux, et les notions de phases résultantes sont difficilement interprétables. Plus tard BÜLOW (1999), dans sa thèse, définit le signal quaternionique, qui résout en partie les problèmes des méthodes précédentes mais dont les phases restent peu intuitives. Pour un bon résumé de l'historique de tous ces travaux voir le mémoire de CARRÉ (2011).

Récemment une autre approche plus orientée signal a vu le jour, il s'agit du signal monogène, reposant sur la transformée de Riesz introduite par LARKIN (2001); LARKIN et coll. (2001) que nous commençons par définir. Dans le domaine de Fourier, on a cette fois-ci non plus une multiplication du spectre par $-j\text{sgn}(\omega) = -j\omega/|\omega|$ comme en 1-D, mais une multiplication de chacune des composante du spectre 2-D par $-j\omega_1/\|\boldsymbol{\omega}\|$ et $-j\omega_2/\|\boldsymbol{\omega}\|$ respectivement.

Définition 4.2 (TRANSFORMÉE DE RIESZ)

L'opérateur de Riesz $\mathcal{R}f : f \mapsto (\mathcal{R}_1f, \mathcal{R}_2f)$ est défini sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_1f}(\boldsymbol{\omega}) &= -j \frac{\omega_1}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}_1f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau_1 f(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|^3} d\boldsymbol{\tau} , \\ \widehat{\mathcal{R}_2f}(\boldsymbol{\omega}) &= -j \frac{\omega_2}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}_2f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau_2 f(\mathbf{x} - \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|^3} d\boldsymbol{\tau} , \\ \widehat{\mathcal{R}f}(\boldsymbol{\omega}) &= -j \frac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}f(\mathbf{x}) = (\mathcal{R}_1f(\mathbf{x}), \mathcal{R}_2f(\mathbf{x}))^\top . \end{aligned}$$

L'opérateur de Riesz est un opérateur unitaire et anti-symétrique de $L^2(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire :

Proposition 4.1 (PROPRIÉTÉ DE L'OPÉRATEUR DE RIESZ)

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\langle \mathcal{R}_i f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -\langle f, \mathcal{R}_i g \rangle .$$

De plus, $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2 = -\mathbf{I}$, et

$$\langle \mathcal{R}f, \mathcal{R}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathcal{R}_1f, \mathcal{R}_1g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \langle \mathcal{R}_2f, \mathcal{R}_2g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} .$$

Désignons les opérateurs de dilatation et translation respectivement par $\mathbf{D}_a f = a^{-1}f(a^{-1}\cdot)$ ($a > 0$) et $\mathbf{T}_b f = f(\cdot - \mathbf{b})$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$), ainsi que l'opérateur de rotation d'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ par $\mathbf{R}_\alpha f = f(\mathbf{r}_{-\alpha}\cdot)$, avec la matrice de rotation $\mathbf{r}_{-\alpha}$ d'angle $-\alpha$ suivante :

$$\mathbf{r}_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} .$$

Proposition 4.2 (PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE RIESZ)

L'opérateur de Riesz possède les propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{R}\mathbf{T}_b f = \mathbf{T}_b \mathcal{R}f$ (invariance par translation),
- (ii) $\mathcal{R}\mathbf{D}_a f = \mathbf{D}_a \mathcal{R}f$ (invariance par changement d'échelle),
- (iii) $\mathbf{R}_\alpha(\mathcal{R}f) = \mathbf{r}_\alpha^{-1} \mathcal{R}(\mathbf{R}_\alpha f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \mathcal{R}_1(\mathbf{R}_\alpha f) + \sin \alpha \mathcal{R}_2(\mathbf{R}_\alpha f) \\ -\sin \alpha \mathcal{R}_1(\mathbf{R}_\alpha f) + \cos \alpha \mathcal{R}_2(\mathbf{R}_\alpha f) \end{pmatrix}$,
- (iv) Si $f(\mathbf{x}) = A \cos(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ avec $\mathbf{k} = k(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, alors $\mathcal{R}f(\mathbf{x}) = A \frac{k}{\|\mathbf{k}\|} \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$,
- (v) $\mathcal{R}f = -\nabla_{\mathbb{C}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f$ avec $(-\Delta)^\alpha \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\omega}\|^{2\alpha}$ le Laplacien fractionnaire.

Preuve :

Les trois premiers points se vérifient aisément. Traitons les deux derniers :

(iv) La transformée de Fourier d'un cosinus 2-D de « fréquence » \mathbf{k} est :

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\delta(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}) + \delta(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})) .$$

Par transformée de Fourier inverse, et sachant que $\int \phi(u)\delta(u - a) du = \phi(a)$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i f(\mathbf{x}) &= -j \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\omega_i}{\|\boldsymbol{\omega}\|} e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \delta(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}) d\boldsymbol{\omega} + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\omega_i}{\|\boldsymbol{\omega}\|} e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle} \delta(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) d\boldsymbol{\omega} \right) , \\ &= -j \frac{1}{2} \left(\frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} e^{j\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} - \frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} e^{-j\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \right) , \\ &= \frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} \left(\frac{e^{j\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} - e^{-j\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle}}{2j} \right) , \\ &= \frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle) . \end{aligned}$$

(v) Motivons le propos comme suit. En dérivant deux fois par rapport à chacune des variables

$$f(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 ,$$

et en sommant on obtient

$$\Delta f(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [(j\omega_1)^2 + (j\omega_2)^2] e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{(-\Delta)f}(\boldsymbol{\omega}) = \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) .$$

On généralise alors pour un exposant réel α en définissant le Laplacien fractionnaire en Fourier par

$$\widehat{(-\Delta)^\alpha f}(\boldsymbol{\omega}) = \|\boldsymbol{\omega}\|^{2\alpha} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) .$$

En particulier pour $\alpha = -1/2$ le Laplacien fractionnaire $\widehat{(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f}(\boldsymbol{\omega}) = \|\boldsymbol{\omega}\|^{-1} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$ permet de relier la transformée de Riesz à l'opérateur gradient complexe (Wirtinger) (HUNGER, 2007). En effet le gradient ∇f correspond en Fourier à $-j\boldsymbol{\omega} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$, lequel composé à $\widehat{(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f}$ divise en Fourier par $\|\boldsymbol{\omega}\|$ et permet de retrouver la transformée de Riesz en Fourier à savoir $-j\boldsymbol{\omega} / \|\boldsymbol{\omega}\|$.

□

Remarque 4.4. On constate que cet opérateur transforme un cosinus 2-D en un sinus, donc tout comme la transformée de Hilbert, il déphase de $\frac{\pi}{2}$ le signal (donc « dérive » en un sens, ce qui fait sentir le lien avec ∇) et opère de façon invariante à l'orientation du signal, ce qui fait de la transformée de Riesz une généralisation isotrope de la transformée de Hilbert.

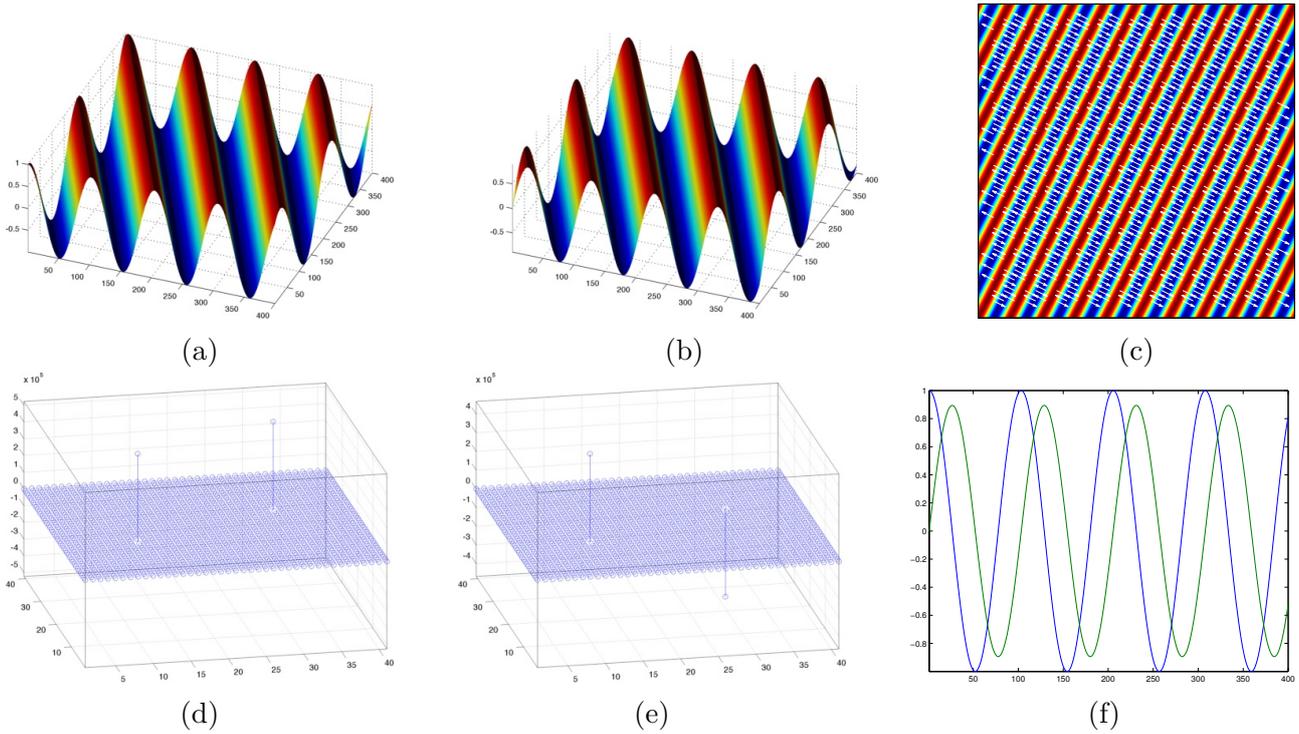


FIGURE 4.8 – (a) $f(\mathbf{x}) = \cos(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (10, 5)$ (vue 3-D), (b) $\mathcal{R}_1 f(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{\|\mathbf{k}\|} \sin(\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ (vue 3-D), (c) $f(\mathbf{x})$ (vue 2-D) et orientations $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, (d) spectre de f , (e) spectre de $\mathcal{R}_1 f$, (f) coupe 1-D de f et $\mathcal{R}_1 f$ en déphasage de $\pi/2$, différence d'amplitude due à $k_1/\|\mathbf{k}\| \approx 0.89$.

Le signal monogène est alors formé en ajoutant les deux autres composantes $\mathcal{R}_1 f$ et $\mathcal{R}_2 f$ à f . Formellement celui-ci est plongé dans une algèbre isomorphe à \mathbb{R}^3 (de même que \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2 pour faciliter l'écriture du signal analytique) de façon à disposer d'une représentation sous forme d'amplitude et de phase. Pour cela on se place sur l'algèbre des quaternions \mathbb{H} munie de sa base canonique $(1, i, j, k)$.

Définition 4.3 (SIGNAL MONOGÈNE)

Le signal monogène f_m ou $\mathcal{M}f$ associé à une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, est donné par :

$$f_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + i\mathcal{R}_1 f(\mathbf{x}) + j\mathcal{R}_2 f(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})e^{\phi(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})},$$

$$A = \|f_m\| = (f^2 + \mathcal{R}_1 f^2 + \mathcal{R}_2 f^2)^{1/2}, \quad \phi(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{\|\mathcal{R}f(\mathbf{x})\|}{f(\mathbf{x})}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}f(\mathbf{x})}{\|\mathcal{R}f(\mathbf{x})\|},$$

où les fonctions A , ϕ et \mathbf{n} sont appelées respectivement amplitude, phase et orientation locale de f .

Remarque 4.5. L'écriture $e^{\phi(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})}$, avec $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \cos\theta(\mathbf{x})i + \sin\theta(\mathbf{x})j$, est à comprendre au sens de l'exponentielle quaternionique, qui est un prolongement de l'exponentielle complexe approprié pour représenter le signal monogène.

Remarque 4.6. Une alternative, proposée par UNSER et coll. (2009), consiste à se ramener à un signal analytique 1-D dans la direction du vecteur \mathbf{n} qui s'obtient via la transformée de Hilbert directionnelle définie par

$$\mathcal{H}_{\theta'} f(\mathbf{x}) = \cos\theta' \mathcal{R}_1(\mathbf{x}) + \sin\theta' \mathcal{R}_2(\mathbf{x}) = \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\theta'} \mathcal{R}f(\mathbf{x}) \right\},$$

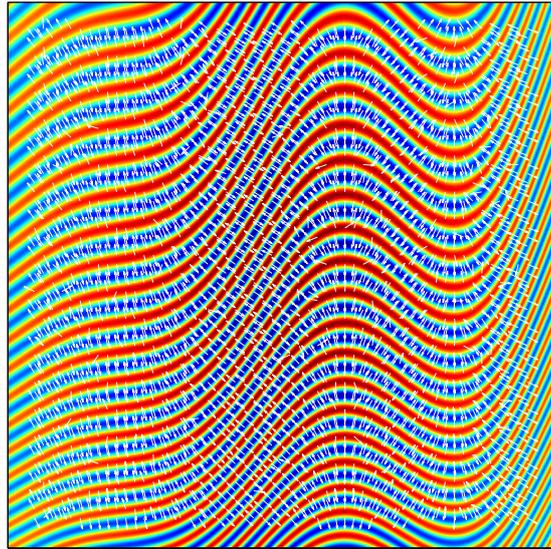


FIGURE 4.9 – Visualisation des vecteurs d'orientations de Riesz d'une texture oscillante.

En posant $r = \sqrt{\mathcal{R}_1 f^2 + \mathcal{R}_2 f^2} = \|\mathcal{R}f\|$, $\mathcal{H}_{\theta'} f$ est maximal en $\theta' = \theta$

$$r(\mathbf{x}) = \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \mathcal{H}_{\theta'} f(\mathbf{x}),$$

soit dans la direction $(\mathcal{R}_1 f/r, \mathcal{R}_2 f/r) = (\cos \theta, \sin \theta) = \mathbf{n}$. Le signal analytique ensuite considéré est la variable complexe $z = f + jr$, qui conduit également à $A = \sqrt{f^2 + r^2}$ et $\phi = \arctan(r/f)$.

De même que le signal analytique donnait lieu à une l'amplitude et une phase en coordonnées polaires, le signal monogène s'écrit comme suit en coordonnées sphériques :

$$f_m = A \begin{pmatrix} f \\ \mathcal{R}_1 f \\ \mathcal{R}_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix}.$$

On a comme précédemment une interprétation géométrique de ces angles : le module va être une mesure d'énergie locale, θ met en évidence une notion de direction locale dominante de la surface, et enfin ϕ va porter une information géométrique similaire à celle décrite dans le cas du signal analytique.

Le signal monogène se prête parfaitement à des sinusôides 2-D (la transformée de Riesz ne fait que les déphaser). Pour des signaux 2-D plus riches, typiquement des images de textures contenant des basses fréquences comme des hautes fréquences, il devient nécessaire pour appliquer ce qui précède à différentes sous-bandes de fréquences, d'effectuer une décomposition en ondelettes. Ce qui conduit à la définition de *transformée en ondelettes monogènes*.

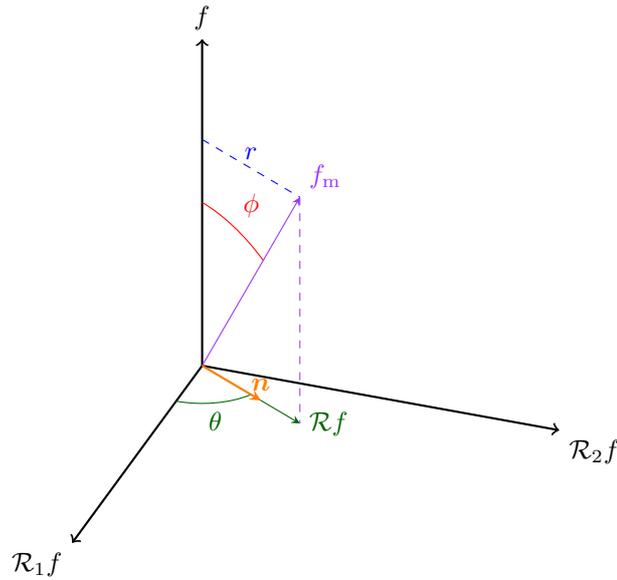
4.2.3 Transformée en ondelettes monogènes

Définition 4.4 (TRANSFORMÉE EN ONDELETTES CONTINUE)

À partir d'une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ admissible, c'est-à-dire telle que

$$c_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega})|}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} d\boldsymbol{\omega} < +\infty,$$

on construit grâce aux opérateurs de translation \mathbf{T}_b , de rotation \mathbf{R}_α et de dilation \mathbf{D}_a , une famille d'ondelettes $\psi_{a,\alpha,b} = \mathbf{T}_b \mathbf{R}_\alpha \mathbf{D}_a \psi$, ainsi la *transformée en ondelettes continue*, ou

FIGURE 4.10 – Visualisation de la phase φ et de l'orientation θ du signal monogène f_m .

Continuous Wavelet Transform (CWT) de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est

$$W_f(a, \alpha, \mathbf{b}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \overline{\psi_{a,\alpha,\mathbf{b}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} .$$

Si l'ondelette est isotrope on notera simplement $\psi_{a,\mathbf{b}}$ et $W_f(a, \mathbf{b})$.

On peut alors définir la transformée en ondelettes continue du signal monogène

$$f_m = \mathcal{M}f = f + \mathcal{R}_1 f \mathbf{i} + \mathcal{R}_2 f \mathbf{j} ,$$

par

$$W_{f_m} = W_f + W_{\mathcal{R}_1 f} \mathbf{i} + W_{\mathcal{R}_2 f} \mathbf{j} . \quad (4.3)$$

Chaque composante de l'ondelette vectorielle $\psi^{(M)} = \mathcal{M}\psi = (\psi, \mathcal{R}_1\psi, \mathcal{R}_2\psi)$ reste admissible, ce qui permet de définir la transformée en ondelettes monogènes :

Définition 4.5 (TRANSFORMÉE EN ONDELETTES MONOGÈNES)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. La transformée en ondelettes monogènes continue, ou Continuous Monogenic Wavelet Transform (CMWT) de f est définie par

$$W_f^{(M)}(a, \alpha, \mathbf{b}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \overline{\psi_{a,\alpha,\mathbf{b}}^{(M)}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} , \quad (4.4)$$

avec $\psi_{a,\alpha,\mathbf{b}}^{(M)} = \mathbf{T}_b \mathbf{R}_\alpha \mathbf{D}_a \psi^{(M)}$.

Remarque 4.7. On a alors une relation très simple, en vertu de l'anti-symétrie unitaire de l'opérateur de Riesz, qui relie la CWT du signal monogène de f par ψ (4.3), et la CMWT de f par $\mathcal{M}\psi$ (4.4), à savoir

$$W_f(a, \alpha, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{r}_\alpha \end{pmatrix} W_f^{(M)}(a, \alpha, \mathbf{b}) . \quad (4.5)$$

Dans le cas où ψ est isotrope il est donc équivalent d'effectuer la transformée en ondelettes de la fonction f à partir de l'ondelette monogène $\psi^{(M)}$ ou d'appliquer d'abord l'opérateur de Riesz à f pour obtenir $F = \mathcal{M}f$ sur laquelle on applique les ondelettes issues de ψ cette fois. C'est une conséquence directe de la Proposition 4.1.

À ce stade, la transformée en ondelettes fournit des coefficients vectoriels $W_f(a, \alpha, \mathbf{b})$ (comme vecteur de Clifford⁵), pour lesquels il est tout à fait possible d'attribuer une notion d'amplitude, de phase et d'orientation, identiquement à ce qui est fait à la Définition 4.3. Nous avons alors à disposition un outil permettant d'analyser sur différentes bandes de fréquences la présence d'information à travers le module, une direction locale dominante à la surface (l'angle θ) et enfin, l'angle φ qui apporte une information structurelle.

4.3 Tenseur de structure

4.3.1 Minimisation par rapport à un ensemble de gradients

Dans cette section nous présentons comme dans (JAHNE et JAEHNE, 1995) le tenseur de structure, qui est une matrice dont le problème aux valeurs propres associé permet d'accéder à l'orientation privilégiée des gradients d'une fonction dans un voisinage donné, ainsi qu'à son degré de directionnalité quantifiant le caractère plus ou moins anisotrope. Commençons par énoncé le cas d'anisotropie idéale, que l'on nomme *voisinage simple*.

Voisinage simple

Un voisinage simple est un groupe de pixels qui localement a un niveau de gris variant dans une seule direction \mathbf{n} qui ne dépend pas de la position \mathbf{x} . Si on oriente le système de coordonnées suivant ce vecteur, le niveau de gris f devient une fonction 1-D g :

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^\top \mathbf{n}),$$

où $\mathbf{x}^\top \mathbf{n}$ désigne le produit scalaire entre \mathbf{x} et \mathbf{n} . Pour vérifier que cette représentation est correcte on peut calculer le gradient et vérifier qu'il est bien proportionnel au vecteur \mathbf{n} :

$$\nabla f(\mathbf{x}^\top \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{x}^\top \mathbf{n})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(\mathbf{x}^\top \mathbf{n})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 g'(\mathbf{x}^\top \mathbf{n}) \\ \mathbf{n}_2 g'(\mathbf{x}^\top \mathbf{n}) \end{pmatrix} = \mathbf{n} g'(\mathbf{x}^\top \mathbf{n}).$$

Remarque 4.8. Dans toute la suite on parlera d'orientation (entre 0 et π) qui est une quantité cyclique, et non de direction (entre 0 et 2π).

Ainsi on représente un voisinage simple par :

- L'orientation du vecteur \mathbf{n} ,
- Sa norme $\|\mathbf{n}\|$ renseignant le caractère plus ou moins unidirectionnel.

5. Le lecteur pourra approfondir le sujet avec la thèse de SOULARD (2011) et le récent article de FLETCHER et SANGWINE (2017) faisant le point sur le développement de la transformée en ondelettes quaternioniques.

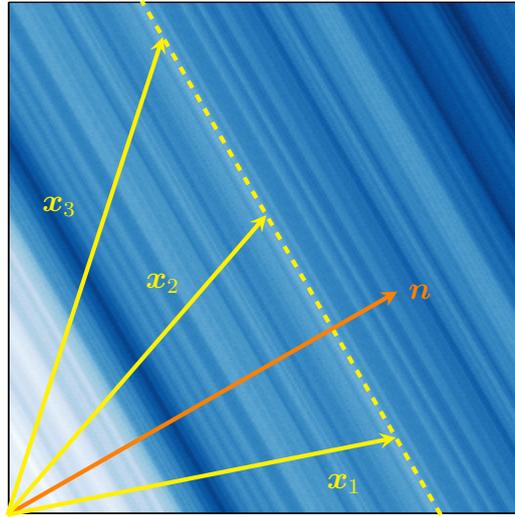


FIGURE 4.11 – Illustration d'un voisinage simple f . Le niveau de gris ne dépend que d'une coordonnée, donnée par la direction du vecteur \mathbf{n} . f a un niveau de gris constant sur la ligne en pointillés, dont la valeur est donnée par $g(k)$ avec $k = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{n} = \mathbf{x}_2^\top \mathbf{n} = \mathbf{x}_3^\top \mathbf{n}$.

L'avantage de cette représentation est que si l'on considère un voisinage d'un pixel \mathbf{x} , dans lequel on dispose de la donnée des gradients $\nabla f(\mathbf{x}')$ en chaque pixel \mathbf{x}' du voisinage, alors on peut estimer l'orientation globale de cette région en faisant la moyenne des vecteurs $\nabla f(\mathbf{x}')$. Si le vecteur résultant est « grand » alors la région présente des orientations homogènes, tandis que dans une région où les orientations seraient aléatoirement distribuées, le vecteur résultant serait « petit ».

Tenseur de structure

La représentation précédente est incomplète, dans la mesure où nous ne sommes pas capable de distinguer une région homogène d'une région isotrope, car dans les deux cas le vecteur moyenne est nul. Une meilleure stratégie consiste à déterminer l'orientation \mathbf{n} qui minimise les écarts avec l'ensemble des directions de gradients $\nabla f(\mathbf{x}')$, en traitant les gradients de direction opposée de manière identique. Le produit scalaire suivant au carré mesure l'écart entre le vecteur \mathbf{n} et un gradient :

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}'), \mathbf{n} \rangle^2 = |\nabla f(\mathbf{x}')|^2 \cos^2(\langle \nabla f(\mathbf{x}'), \mathbf{n} \rangle).$$

En effet cette quantité est d'autant plus grande que l'angle entre \mathbf{n} et $\nabla f(\mathbf{x}')$ est petit. Par conséquent minimiser l'écart de \mathbf{n} à l'ensemble des gradients d'un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ de \mathbf{x} , défini par la fenêtre $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, revient à déterminer le vecteur \mathbf{n} qui maximise la quantité suivante :

$$\text{Maximiser } \int w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\nabla f(\mathbf{x}')^\top \mathbf{n})^2 d\mathbf{x}' \iff \text{Maximiser } \mathbf{n}^\top \mathbf{J} \mathbf{n}, \quad (4.6)$$

où

$$\mathbf{J} = \int w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\nabla f(\mathbf{x}') \nabla f(\mathbf{x}')^\top) d\mathbf{x}', \quad (4.7)$$

est une matrice 2×2 appelée *tenseur de structure*, et dont les composantes sont :

$$\mathbf{J}_{pq} = \int w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'_p} \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'_q} \right) d\mathbf{x}', \quad 1 \leq p, q \leq 2. \quad (4.8)$$

La matrice \mathbf{J} est symétrique réelle donc diagonalisable : il existe une rotation \mathbf{P} du système de coordonnées permettant de représenter la matrice \mathbf{J} sous forme diagonale, c.-à-d. $\mathbf{J} = \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1}$.

Le problème se simplifie alors comme suit :

$$\text{Maximiser } \begin{pmatrix} \mathbf{n}'_1 & \mathbf{n}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}'_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}'_1 \\ \mathbf{n}'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \mathbf{n}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{n}. \quad (4.9)$$

En prenant pour \mathbf{n}' le vecteur unitaire $\mathbf{n}' = (\cos \theta, \sin \theta)$, (4.9) se réécrit :

$$\text{Maximiser } \mathbf{J}'_{11} \cos^2 \theta + \mathbf{J}'_{22} \sin^2 \theta.$$

Sans perte de généralité on peut supposer $\mathbf{J}'_{11} \geq \mathbf{J}'_{22}$. Il est alors clair que le vecteur $\mathbf{n}' = (1, 0)$ maximise le problème, avec comme maximum atteint \mathbf{J}'_{11} . En revenant au système de coordonnées initial, $\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{n}'$. Nous venons de déterminer l'orientation du voisinage simple attendue. Or $\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{n}'$ avec $\mathbf{n}' = (1, 0)$, n'est autre que la première colonne de la matrice \mathbf{P} , autrement dit le vecteur propre de la matrice \mathbf{J} associé à la plus grande valeur propre \mathbf{J}'_{11} .

En conclusion le problème de maximisation se ramène à un problème de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres du tenseur de structure \mathbf{J} . Le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de \mathbf{J} donne l'orientation du voisinage simple.

Classification des valeurs propres

Comme la matrice \mathbf{J} est symétrique positive, ses valeurs propres sont réelles positives. Si une valeur propre λ est nulle alors le niveau de gris ne varie pas dans la direction correspondant au vecteur propre associé \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow \mathbf{n}^\top \mathbf{J} \mathbf{n} = \mathbf{n}(\lambda \mathbf{n}) = 0, \\ &\Rightarrow \int w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\nabla f(\mathbf{x}')^\top \mathbf{n})^2 d\mathbf{x}' = 0, \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{V}(\mathbf{x}), \quad \langle \nabla f(\mathbf{x}'), \mathbf{n}_\lambda \rangle = 0, \\ &\Rightarrow \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{V}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n}_\lambda \perp \nabla f(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Le nombre de valeurs propres nulles, relié directement au rang de la matrice, est donc notre critère de classification. D'où le tableau de la Figure 4.12.

Détermination du vecteur propre n

Donnons une façon explicite d'accéder au vecteur \mathbf{n} associé à la plus grande valeur propre. La matrice de passage \mathbf{P} est une matrice de rotation donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} \cos^2 \theta + \mathbf{J}_{22} \sin^2 \theta - \mathbf{J}_{12} \sin 2\theta & \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\theta + \mathbf{J}_{12} \cos 2\theta \\ \frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\theta + \mathbf{J}_{12} \cos 2\theta & \mathbf{J}_{11} \sin^2 \theta + \mathbf{J}_{22} \cos^2 \theta + \mathbf{J}_{12} \sin 2\theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

par identification on obtient

$$\frac{1}{2}(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22}) \sin 2\theta + \mathbf{J}_{12} \cos 2\theta = 0,$$

soit

$$\tan 2\theta = \frac{2\mathbf{J}_{12}}{\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{11}}.$$

Condition	Rang	Description
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	0	La moyenne quadratique des normes des gradients $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ donc le voisinage local a un niveau de gris constant
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	1	Une valeur propre est nulle, le niveau de gris ne varie pas dans la direction correspondant à \mathbf{n}_{λ_2} . Le voisinage local est un voisinage simple de direction $\mathbf{n}_{\lambda_1} \perp \mathbf{n}_{\lambda_2}$ (les vecteurs propres forment une base orthogonale).
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	2	Les valeurs propres sont toutes deux non nulles, le niveau de gris varie dans toutes les directions. Dans le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2$ on dit que le voisinage est isotrope.

FIGURE 4.12 – Classification des valeurs propres (JAHNE et JAEHNE, 1995).

et l'angle du vecteur \mathbf{n} est :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\mathbf{J}_{12}}{\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{11}} \right).$$

De façon similaire en considérant le vecteur

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{11} \\ 2\mathbf{J}_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

on obtient l'angle de \mathbf{n} en considérant la moitié de l'argument de \mathbf{p} . De fait il n'est pas nécessaire en pratique d'effectuer la diagonalisation de la matrice \mathbf{J} , seule la connaissance du vecteur \mathbf{p} est requise, c'est-à-dire seules deux opérations sont nécessaires (une soustraction et une multiplication). Mais il y a un autre intérêt à considérer ce vecteur, puisque nous verrons qu'il fournit une certaine mesure d'incertitude ou autrement dit une information sur le degré de directionnalité du voisinage considéré.

Indice de cohérence

Comme dit précédemment, une fois le vecteur d'orientation déterminé, reste le problème de distinction entre une région homogène et isotrope, que l'on avait réglé *via* la classification des valeurs propres. Pour une matrice 2×2 les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique $\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})$ soit du polynôme $\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{J})\lambda + \det(\mathbf{J})$, c.-à-d. pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22} \pm \sqrt{(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22})^2 + 4\mathbf{J}_{12}^2}}{2}, \quad (4.11)$$

et dont les vecteurs propres associés sont

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22} \pm \sqrt{(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22})^2 + 4\mathbf{J}_{12}^2} \\ 2\mathbf{J}_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Ainsi

- $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}$ correspond à la moyenne quadratique des gradients.
- $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22})^2 + 4\mathbf{J}_{12}^2}$ correspond à la norme du vecteur \mathbf{p} .

Par conséquent la nature (caractérisée par les valeurs propres) et l'orientation (caractérisée par le vecteur \mathbf{p}) du voisinage local sont entièrement déterminés par la donnée du vecteur :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22} \\ \mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{11} \\ 2\mathbf{J}_{12} \end{pmatrix}.$$

En effet : la première chose à faire est de savoir si la région est homogène en testant si $\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}$ vaut zéro. Si ce n'est pas le cas, alors reste à savoir si la région possède une direction principale ou est isotrope. Pour cela on calcule l'indice de cohérence c , qui n'est rien d'autre que le quotient de la norme du vecteur \mathbf{p} sur la norme du gradient moyen $\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}$, soit :

$$c = \frac{\sqrt{(\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{11})^2 + 4\mathbf{J}_{12}^2}}{\mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (4.13)$$

De cette façon si il existe une direction privilégiée (cas $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$) alors l'indice de cohérence vaut $c = 1$, sinon si la région est isotrope (cas $\lambda_1 = \lambda_2$), alors $c = 0$. L'indice de cohérence variant de 0 à 1, il permet de rendre compte, en synthétisant les cas du tableau 4.12, du degré d'anisotropie du voisinage local.

4.3.2 Application à l'analyse multi-résolution du signal monogène

Il est possible de réinterpréter le signal monogène vu à la section 4.2.2, à partir de la transformée de Hilbert directionnelle, et ce à l'aide d'un tenseur de structure. C'est ce qu'ont fait UNSER et coll. (2009) avant de l'appliquer à de l'analyse multi-résolution d'images. La méthode est identique à ce qui précède, à ceci près que ce ne sont pas les gradients $\nabla f(\mathbf{x}')$ qui sont considérés dans le critère de maximisation, mais le vecteur d'orientation d'angle θ fourni par le signal monogène :

$$f_m(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) \\ \mathcal{R}_1 f(\mathbf{x}) \\ \mathcal{R}_2 f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Afin de reformuler la définition sphérique de l'angle θ en une formulation 1-D, on peut dire qu'il s'agit de l'angle θ' qui minimise l'écart entre le vecteur unitaire $\mathbf{n}(\theta') = (\cos \theta', \sin \theta')^\top$ et l'opérateur de Riesz $\mathcal{R}f(\mathbf{x}) = (\mathcal{R}_1 f(\mathbf{x}), \mathcal{R}_2 f(\mathbf{x}))^\top$. Le minimum est atteint quand ces 2 vecteurs sont alignés, auquel cas leur produit scalaire vaut $\|\mathcal{R}f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\mathcal{R}f_1^2(\mathbf{x}) + \mathcal{R}f_2^2(\mathbf{x})} \stackrel{\text{def}}{=} r(\mathbf{x})$. Ainsi l'orientation recherchée est celle qui réalise le maximum suivant :

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \langle \mathbf{n}(\theta'), \mathcal{R}f(\mathbf{x}) \rangle, \\ &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \left\{ \cos \theta' \mathcal{R}f_1(\mathbf{x}) + \sin \theta' \mathcal{R}f_2(\mathbf{x}) \right\}, \\ &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \mathcal{H}_{\theta'} f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où la fonction

$$\mathcal{H}_{\theta'} f(\mathbf{x}) = \cos \theta' \mathcal{R}f_1(\mathbf{x}) + \sin \theta' \mathcal{R}f_2(\mathbf{x}) = \text{Re} \left\{ e^{-j\theta'} \mathcal{R}f(\mathbf{x}) \right\},$$

est appelée *transformée de Hilbert directionnelle* de f . Ainsi comme précédemment si on veut déterminer l'orientation d'un voisinage local à \mathbf{x} , afin de gagner en robustesse, on va résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{n}, \mathbf{f}(\mathbf{x}') \rangle^2 d\mathbf{x}' &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') |\mathcal{H}_{\theta'} f(\mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' , \\ &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \|\cos \theta' \mathcal{R}f_1(\cdot + \mathbf{x}) + \sin \theta' \mathcal{R}f_2(\cdot + \mathbf{x})\|_w^2 , \\ &= \max_{\theta' \in [-\pi, \pi]} \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \end{pmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ est une matrice symétrique réelle 2×2 dont les composantes sont

$$[\mathbf{J}(\mathbf{x})]_{pq} = \langle \mathcal{R}_p f(\cdot + \mathbf{x}), \mathcal{R}_q f(\cdot + \mathbf{x}) \rangle_w = \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{R}_p f(\mathbf{x}') \mathcal{R}_q f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' . \quad (4.15)$$

On se ramène donc au même problème de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres que dans la partie précédente. **UNSER et coll. (2009)** appliquent ensuite cette technique aux coefficients d'ondelettes qui encodent l'information de l'image sur une base d'ondelettes, pour détecter localement les orientations. Pour cela ils choisissent une paire duale d'ondelettes réelles ψ et $\tilde{\psi}$ générant une base biorthogonale, non séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus 2\mathbb{Z}^2} \langle f, \tilde{\psi}_{i,\mathbf{k}} \rangle_{L^2} \psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) ,$$

avec $\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^i \psi(2^{-i}\mathbf{x} - \mathbf{k}/2)$ et $\psi'_{i,\mathbf{k}}$ construite par biorthogonalité $\langle \tilde{\psi}_{i,\mathbf{k}}, \psi'_{i',\mathbf{k}'} \rangle = \delta_{i-i', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}$. L'opérateur de Riesz \mathcal{R} envoie une base de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur une autre puisque pour toutes $\varphi_j, \varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on a $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \langle \mathcal{R}^* \mathcal{R} \varphi_k, \varphi_l \rangle = \langle \mathcal{R} \varphi_k, \mathcal{R} \varphi_l \rangle$. Donc en notant $\psi' = \mathcal{R}\psi$ et $\tilde{\psi}' = \mathcal{R}\tilde{\psi}$, ils forment aussi une telle base

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus 2\mathbb{Z}^2} \langle g, \tilde{\psi}'_{i,\mathbf{k}} \rangle_{L^2} \psi'_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) .$$

L'ondelette mère ψ est choisie de telle sorte à pouvoir légitimement faire une analyse multi-résolution complexe. Sans rentrer dans les détails techniques, mentionnons qu'ils la construisent à partir de splines polyharmoniques et du Laplacien fractionnaire :

$$\psi(\mathbf{x}) = (-\nabla)^{\gamma/2} \phi_{2\gamma}(\mathbf{D}\mathbf{x}) ,$$

où $\phi_{2\gamma}$ est l'interpolateur de splines harmoniques d'ordre 2γ , qui peut être remplacé par un noyau gaussien (ce qui donne une ondelette type chapeau-mexicain) et \mathbf{D} une matrice de dilatation. Puis ils calculent les coefficients d'ondelettes suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i[\mathbf{k}] &= \langle f, \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle , \\ \mathbf{r}_{i,1}[\mathbf{k}] + j\mathbf{r}_{i,2}[\mathbf{k}] &= \langle f, \mathcal{R}^* \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle . \end{aligned}$$

Par analogie avec (4.15) on forme alors la matrice tenseur de structure $\mathbf{J}_i(\mathbf{k})$ associée à la cellule d'ondelette (i, \mathbf{k}) et de coefficients :

$$[\mathbf{J}_i(\mathbf{k})]_{pq} = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} w[\mathbf{l} - \mathbf{k}] r_{i,p}[\mathbf{k}] r_{i,q}[\mathbf{k}] .$$

La résolution du problème aux valeurs propres correspondant fournit donc une estimation de l'orientation locale à l'échelle i et au point \mathbf{k} , ainsi qu'un indice de cohérence renseignant le degré d'anisotropie⁶.

6. Voir également (**CARRÉ, 2011**, p.179) pour des commentaires sur cette construction, et son extension à la transformée en ondelettes monogènes pour les images en couleur dans (**SOULARD, 2011**).

Sur la Figure 4.14 on teste trois textures : (a) un voisinage simple orienté en $\pi/6$, (b) un champ élémentaire orienté en $\pi/6$ et (c) une superposition en treillis de deux voisinages simples orientés en 0 et $\pi/6$. Pour chacune d'elle on affiche en dessous les orientations en affectant à chaque pixel une couleur codant l'angle (Figure 4.13), et ceci sur les trois premières échelles, ainsi que l'indice de cohérence vaut 1 (couleur blanche) quand le voisinage du pixel est fortement orienté. On constate que pour un voisinage simple (Figure 4.14a) , les orientations sont bien

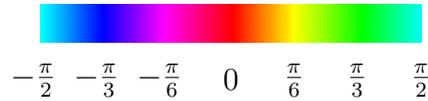


FIGURE 4.13 – Teinte de couleur HSV utilisée pour représenter toutes les directions de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

estimées à toutes les échelles ; pour un champ élémentaire (qui est stochastique), la Figure 4.14b montre que les plus grandes échelles fournissent de meilleures estimations ; enfin sans surprise, quand la texture résulte de la superposition de plusieurs motifs orientés comme en Figure 4.14c, en un pixel deux orientations se concurrencent et l'estimation devient alors plus ou moins arbitraire. Dans cette situation, d'autres méthodes doivent être utilisées, ce qui est l'objet de la section suivante.

4.3.3 Analyse de superposition de motifs orientés

Les idées exposées dans cette section sont tirées de (AACH et coll., 2006). Dans cet article les auteurs travaillent non plus avec \mathbf{n} qui donne l'orientation principale de variation, mais avec le vecteur qui lui est orthogonal $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ qui donne cette fois l'orientation de plus faible variation c.-à-d. l'orientation réelle du « motif ». Avec cette autre terminologie le problème se reformule ainsi : si le motif est orienté suivant $\mathbf{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^\top = (u_x, u_y)^\top$ dans un voisinage \mathcal{V} , alors il est perpendiculaire au gradient : $\mathbf{u}(\theta)^\top \nabla f(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. En définissant l'opérateur de dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{u}(\theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(\theta)} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y}$ la condition d'orthogonalité se réécrit $\partial_{\mathbf{u}(\theta)} f = 0$. On veut alors trouver le vecteur $\mathbf{u}(\theta)$ pour lequel la variation de niveau de gris suivant cet axe soit minimale, en d'autres termes on recherche la direction la « plus orthogonale » à tous les gradients de f dans \mathcal{V} . Le problème s'écrit donc comme dans (4.6) :

$$\text{Minimiser } Q(\theta) = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}(\theta)} \right)^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u}(\theta)^\top \nabla f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} ,$$

où $Q(\theta)$ mesure la variation de niveau de gris dans la direction déterminée par θ ⁷.

Superposition de 2 motifs orientés

Dans le voisinage \mathcal{V} , f est supposée être la somme de deux motifs f_1 et f_2 :

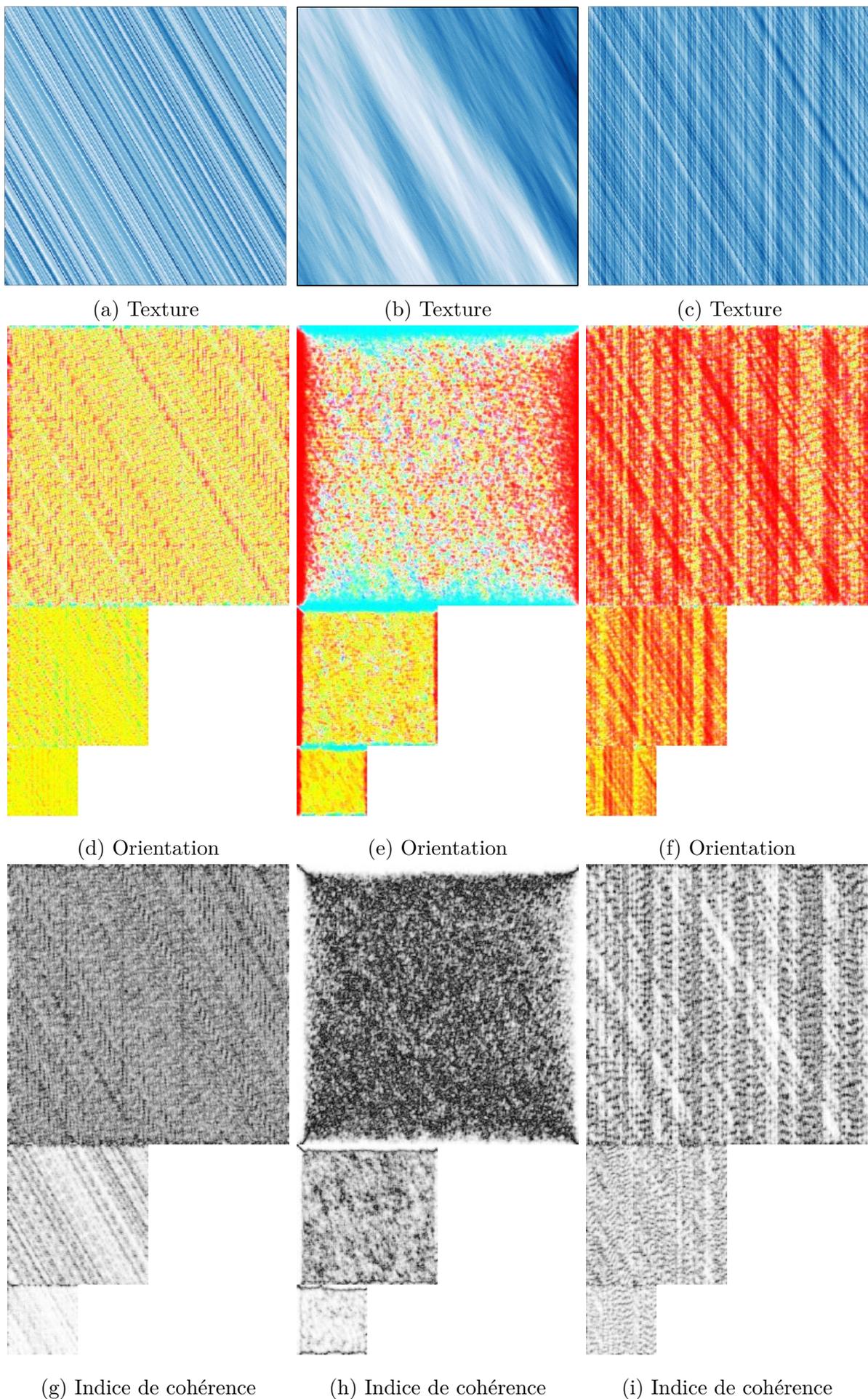
$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) ,$$

où f_1 et f_2 sont respectivement orientés par $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)^\top$ et $\mathbf{v} = (\cos \gamma, \sin \gamma)^\top$. Chacun des motifs obéit donc à :

$$\partial_{\mathbf{u}(\theta)} f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\top \nabla f_1(\mathbf{x}) = 0 , \quad (4.16)$$

$$\partial_{\mathbf{v}(\gamma)} f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^\top \nabla f_2(\mathbf{x}) = 0 . \quad (4.17)$$

7. En pratique une fenêtre centrée en \mathbf{x} est utilisée pour pondérer les contributions comme dans (4.6), mais n'influençant pas le raisonnement celle-ci a été enlevée pour ne pas alourdir les notations.

FIGURE 4.14 – Analyse de 3 textures 256×256 avec l'orientation et indice de cohérence sur 3 échelles.

Il vient alors par commutation des opérateurs de dérivation directionnelle :

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{u}(\theta)}\partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f(\mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{u}(\theta)}[\partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f_1(\mathbf{x}) + \underbrace{\partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f_2(\mathbf{x})}_{=0}] , \\ &= \partial_{\mathbf{v}(\gamma)}[\partial_{\mathbf{u}(\theta)}f(\mathbf{x})] , \\ \frac{\partial f^2}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{v}} &= 0 .\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{u}(\theta)}[\partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f(\mathbf{x})] &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \left[\cos\gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right] , \\ &= (\cos\theta \cos\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\cos\theta \sin\gamma + \sin\theta \cos\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\sin\theta \sin\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} , \\ &= (\cos\theta \cos\gamma, \sin(\theta + \gamma), \sin\theta \sin\gamma)^\top \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) , \\ &= \mathbf{a}^\top \mathbf{d}_2 f ,\end{aligned}$$

avec $\mathbf{a} = (\cos\theta \cos\gamma, \sin(\theta + \gamma), \sin\theta \sin\gamma)^\top = (a, b, c)^\top$ et $\mathbf{d}_2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^\top$. On a donc

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{d}_2 f = 0 .$$

Comme on souhaite minimiser cette quantité sur tout le voisinage, on aboutit au problème :

$$\text{Minimiser } Q_2(\mathbf{a}) = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{a}^\top \mathbf{d}_2 f)^2 \, d\mathbf{x} = \mathbf{a}^\top \mathbf{J} \mathbf{a} ,$$

avec \mathbf{J} la matrice tenseur 3×3 suivante :

$$\mathbf{J} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{d}_2 f)^\top (\mathbf{d}_2 f) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} f_{xx}^2 & f_{xx}f_{xy} & f_{xx}f_{yy} \\ f_{xx}f_{xy} & f_{xy}^2 & f_{xy}f_{yy} \\ f_{xx}f_{yy} & f_{xy}f_{yy} & f_{yy}^2 \end{pmatrix} d\mathbf{x} .$$

Là encore on aboutit à la recherche de valeurs et vecteurs propres de la matrice \mathbf{J} . Le vecteur propre \mathbf{a} correspondant à la plus petite valeur propre λ_3 est le vecteur qui nous intéresse, appelé MOP (« mixed oriented parameters »). Reste à découpler dans $\mathbf{a} = (\cos\theta \cos\gamma, \sin(\theta + \gamma), \sin\theta \sin\gamma) = (a, b, c)$ les paramètres de directions θ et γ . Pour cela notons $z_1 = u_x v_y$ et $z_2 = u_y v_x$. Alors on remarque que

$$\begin{cases} z_1 z_2 = ac \\ z_1 + z_2 = b \end{cases} ,$$

ce qui nous amène à résoudre :

$$z^2 - bz + ac = 0 ,$$

dont z_1 et z_2 sont les solutions. Et on s'aperçoit que les vecteurs formés ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \begin{pmatrix} a \\ z_1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{u_x^2 v_x^2 + u_x^2 v_y^2}} \begin{pmatrix} u_x v_x \\ u_x v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|u_x| \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} u_x \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \pm \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} , \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} \begin{pmatrix} a \\ z_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{u_x^2 v_x^2 + u_y^2 v_x^2}} \begin{pmatrix} u_x v_x \\ u_y v_x \end{pmatrix} = \frac{1}{|v_x| \sqrt{u_x^2 + u_y^2}} v_x \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \pm \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} ,\end{aligned}$$

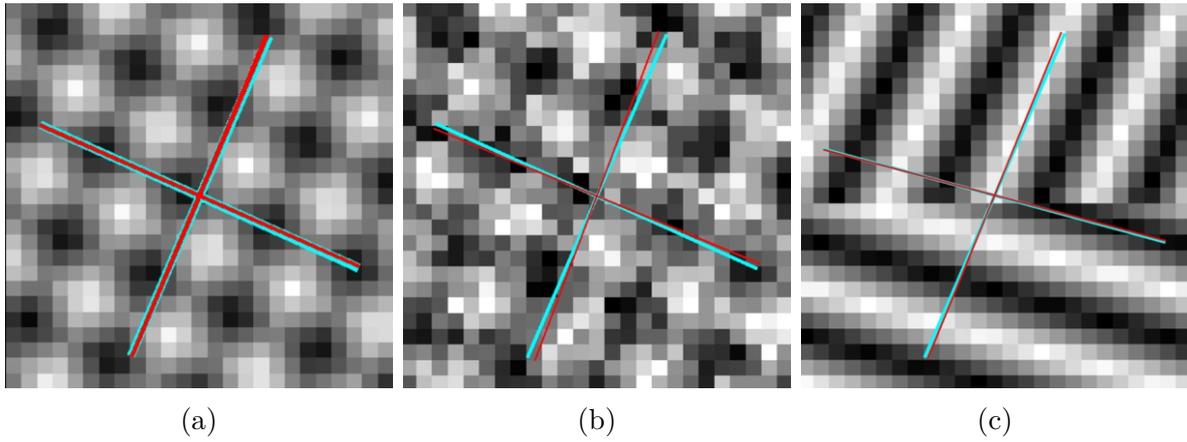


FIGURE 4.15 – Exemples d'analyse de motifs doublement orientés tirés de (AACH et coll., 2006) (a) sans bruit, (b) avec bruit et (c) avec occultation.

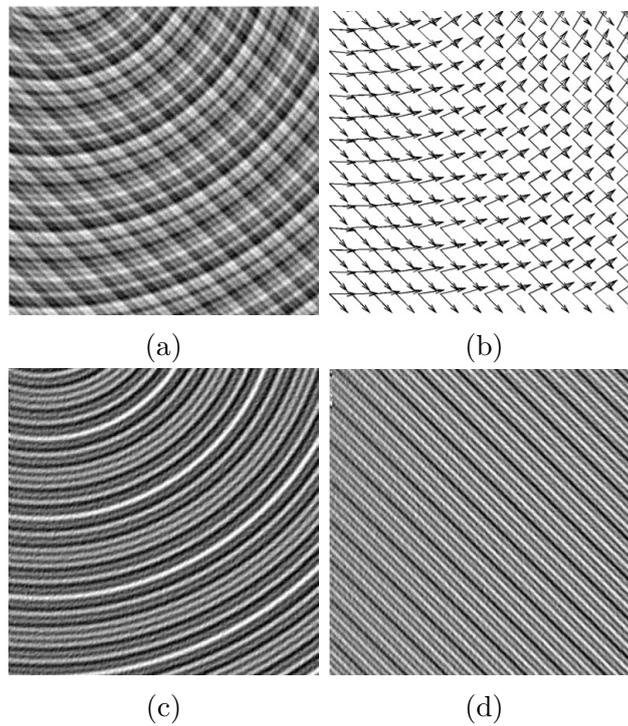


FIGURE 4.16 – Exemples tiré de (AACH et coll., 2006) de séparation de deux motifs superposés en (a), (b) l'estimation des deux orientations en chaque pixel, (c) extraction du premier motif et (d) extraction du second motif.

sont les orientations recherchées. Dès lors il est possible de séparer les signaux en appliquant les dérivées directionnelles selon θ et γ , respectivement, au signal additif. Ce qui en vertu de (4.16) annihile l'un des signaux de $f(\mathbf{x})$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{u}(\theta)}f(\mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{u}(\theta)}f_2(\mathbf{x}), \\ \partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f(\mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{v}(\gamma)}f_1(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

soit une version filtrée de $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$ sur tout le voisinage \mathcal{V} .

Les auteurs de (AACH et coll., 2006) précisent en conclusion que cette méthode, bien que généralisable au cas de N directions, n'est en pratique pas efficace, pour les raisons suivantes :

- Nécessité de calculer des dérivées partielles d'ordre N ,
- Recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur $N \times N$,
- Le polynôme quadratique est remplacé par des polynômes d'ordre N .

4.4 Transformée de Hough et de Radon

4.4.1 Transformée de Radon

RADON (1917) introduisit une transformée intégrale dans des espaces multidimensionnels. C'est n'est qu'à partir des années 50 que la *transformée de Radon* va trouver des applications dans de nombreux domaines, en commençant par l'imagerie médicale pour laquelle elle constitue une pièce maîtresse, mais aussi en optique, en astronomie, en géophysique, ... Elle s'invite dans bien des problèmes où les mesures sont le résultat d'intégration. La *tomographie* est à ce titre une technique d'imagerie permettant de reconstruire le volume d'un objet à partir de plusieurs mesures de projections (en imagerie médicale plusieurs clichés de coupes d'organes traversés par des rayons X permettent typiquement de reconstruire et visualiser l'organe en 3-D). Une bonne introduction « imagée » de la tomographie peut se trouver dans (ZENG, 2010), et pour le formalisme mathématiques de la transformée de Radon on pourra également se référer à (NATTERER, 2001), (TOFT et SØRENSEN, 1996) et (DEANS, 2007). Décrivons le principe de la transformée de Radon, dans le cas 2-D qui nous intéresse.

Si l'on représente par une densité $f(x_1, x_2)$ la fonction d'atténuation (ou d'absorption) du volume traversé (comme les tissus d'un organe), le principe de la tomographie consiste à retrouver f à partir d'un ensemble de mesures dites de projection. On envoie des rayons X à travers l'organe dans une direction donnée, qui sont récupérés par un détecteur qui reçoit le signal atténué. Les axes x_1 et x_2 sont ceux du repère cartésien dans lequel se situe l'objet, et les axes s et t sont liés à une direction du faisceau parallèle de rayons X. Chaque rayon X traverse l'objet dans la direction t , et le détecteur enregistre au point d'abscisse s de son axe propre, l'intégrale du coefficient d'atténuation de long de cette droite parallèle à l'axe t . Ce qui mathématiquement correspond à la définition suivante :

Définition 4.6 (TRANSFORMÉE DE RADON)

Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de densité du plan. La transformée de Radon de f , notée $\mathcal{R}f$, rend compte de la collection de projections de f sous différents angles, projections qui sont le résultat de lignes intégrales orthogonales à la direction θ , paramétrées par t et de décote s , autrement dit des intégrales de f selon les lignes $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = s$. Plus exactement,

les définitions suivantes sont toutes équivalentes :

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s) dx_1 dx_2, \quad (4.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \delta(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle - s) dx_1 dx_2, \quad (4.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt, \quad (4.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\boldsymbol{\theta} + t\boldsymbol{\theta}^\perp) dt, \quad (4.21)$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$, $\boldsymbol{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)^\top$ et $\boldsymbol{\theta}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)^\top$. À θ fixé, la projection $\mathcal{R}f(\cdot, \theta)$ sera notée $\mathcal{R}_\theta f$, qui est une fonction 1-D : $s \mapsto \mathcal{R}_\theta f = \mathcal{R}f(s, \theta)$.

Exemple 4.1. Si f comporte uniquement un point source situé aux coordonnées (a, b) , on a donc $f(x_1, x_2) = \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - b)$. Par conséquent la transformée de Radon de f est

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - b)\delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s) dx_1 dx_2, \\ &= \delta(a \cos \theta + b \sin \theta - s). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{R}f(s, \theta)$ est non nul uniquement si $s = a \cos \theta + b \sin \theta$, donc l'image $\mathcal{R}f(s, \theta)$ ne contient qu'une sinusoïde dans le repère (s, θ) . On nomme à juste propos $(s, \theta) \mapsto \mathcal{R}f(s, \theta)$ le *sinogramme* de f .

Comment alors à partir de toutes ces projections, reconstruire le volume de l'objet ? Autrement dit comment à partir du sinogramme

$$\left\{ \mathcal{R}f(s, \theta), \theta \in [0, \pi[, s \in \mathbb{R} \right\},$$

peut-on retrouver f en tout point du domaine de l'objet, soit

$$\left\{ f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} ?$$

Une façon simple d'épandre ces projections, consiste à attribuer la valeur $\mathcal{R}f_\theta(s)$ à tout point (x_1, x_2) situé sur le rayon de la projection ayant donnée cette valeur, et ainsi additionner toutes les contributions provenant de ces projections. Il s'agit du principe de rétroprojection, qui se formule mathématiquement comme suit :

Définition 4.7 (PRINCIPE DE RÉTROPROJECTION)

L'image de rétroprojection $b(x_1, x_2)$ s'exprime de l'une des manières suivantes :

$$b(x_1, x_2) = \int_0^\pi \mathcal{R}f(s, \theta) \Big|_{s=x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta} d\theta, \quad (4.22)$$

$$= \int_0^\pi \mathcal{R}f(s, \theta) \Big|_{s=\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle} d\theta, \quad (4.23)$$

$$= \int_{\mathbb{S}_{1/2}} \mathcal{R}_\theta f(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle) d\boldsymbol{\theta}, \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta, \quad (4.25)$$

en ayant noté $\mathbb{S}_{1/2}$ la demi-sphère unité du plan.

L'inconvénient de cette méthode, est que l'image $b(x_1, x_2)$ reconstruite n'est pas $f(x_1, x_2)$, mais une version floue de celle-ci. La somme des contributions de chaque projection va en réalité privilégier les basses fréquences⁸. Pour retrouver exactement $f(x_1, x_2)$ il faudra donc au préalable filtrer les fréquences pour atténuer les basses fréquences et réhausser les hautes fréquences, on parlera alors de *retroprojection filtrée*. Pour l'exprimer mathématiquement nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 4.1 (THÉORÈME DE LA COUPE CENTRALE)

La transformée de Fourier 1-D de la projection associée à l'angle θ , correspond à une coupe radiale d'angle θ de la transformée de Fourier 2-D de la densité, soit :

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (4.26)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f(s) e^{-2\pi j s \omega} ds, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s) dx_1 dx_2 \right] e^{-2\pi j s \omega} ds, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s) e^{-2\pi j s \omega} ds \right] dx_1 dx_2, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-2\pi j (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \omega} dx_1 dx_2, \\ &= \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta). \end{aligned}$$

□

On peut alors énoncer le théorème de retroprojection filtrée :

Proposition 4.3 (RÉTROPROJECTION FILTRÉE)

En filtrant les projections en Fourier par un filtre « rampe » $\omega \mapsto |\omega|$, qui va effectivement atténuer les basses fréquences (filtre passe-haut), on obtient :

$$f(x_1, x_2) = \int_0^\pi \mathcal{R}_\theta^F f(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle) d\theta, \quad (4.27)$$

où

$$\mathcal{R}_\theta^F f(s) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\cdot| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\cdot) \right\}(s). \quad (4.28)$$

Preuve :

Partant de la transformée de Fourier inverse en polaire, en notant $\widehat{f}(\omega, \theta) \equiv \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ on a $\widehat{f}(\omega, \theta) =$

8. Ce phénomène est illustré dans (ZENG, 2010).

$\widehat{f}(-\omega, \theta + \pi)$, et $\widehat{f}(\omega, \theta) = \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)$ d'après le Théorème 4.1, on a :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\omega, \theta) e^{j2\pi(\mathbf{x}, \omega\boldsymbol{\theta})} \omega \, d\omega \, d\theta, \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \widehat{f}(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} \, d\omega \, d\theta, \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{j2\pi\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} \, d\omega \, d\theta, \\ &= \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}\{|\cdot| \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\cdot)\}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \, d\theta, \\ &= \int_0^\pi \mathcal{R}_\theta^F f(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \, d\theta, \end{aligned}$$

dont on tire

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{R}f)(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega| \widehat{\mathcal{R}f(\cdot, \theta)}(\omega) e^{j2\pi\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} \, d\omega \right) d\theta,$$

d'où

$$\mathcal{R}^*g(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega| \widehat{g(\cdot, \theta)}(\omega) e^{j2\pi\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} \, d\omega \right) d\theta. \quad (4.29)$$

□

Notons que le filtrage en spatial peut s'obtenir aussi *via* la transformée de Hilbert et une dérivation en remarquant que

$$|\omega| = (2\pi j\omega) \times \left\{ \frac{-j}{2\pi} \text{sgn}(\omega) \right\},$$

et comme la transformée de Fourier inverse du premier terme est l'opérateur de dérivation, et celle du second est $1/(\pi s)$ il vient

$$\mathcal{R}_\theta^F f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{H} \frac{\partial(\mathcal{R}_\theta f)}{\partial s}. \quad (4.30)$$

Remarque 4.9. La transformée de Radon a été utilisée pour la détection du centre et de l'épaisseur d'une ligne par ZHANG et COULOIGNER (2007). Elle a également été étendue à des cas de courbes plus générales (BALLARD, 1981; TOFT, 1996).

4.4.2 Transformée de Hough

On trouvera une introduction à la transformée de Hough dans (BERNARD; HEROUT et coll., 2013; LLADÓS, 2003), et pour un tour d'horizon plus complet on consultera les passages en revue (ILLINGWORTH et KITTLER, 1988; MUKHOPADHYAY et CHAUDHURI, 2015). Pour résumer le fonctionnement de la transformée de Radon, commentons l'illustration qui en est faite Figure 4.17. On dispose de trois points A , B et C qui sont alignés sur une droite en pointillés, dont on souhaiterait que la méthode puisse la détecter. Pour cela on procède de la manière suivante : pour chaque point (x_1, x_2) on va considérer toutes les droites passant par ce point, chacune d'elle étant identifiée par un paramètre ρ (qui est la distance de la droite à l'origine), et un paramètre θ qui donne l'angle du vecteur normal de la droite par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi les droites sont caractérisées par une équation de ce type :

$$\rho = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta. \quad (4.31)$$

Considérons le point A par exemple. Pour toute droite passant par A , donc pour θ variant de -90° à 90° , on calcule ρ *via* (4.31) étant donnés θ et $(x_1, x_2) = (x_A, y_A)$, et ainsi on dispose

du couple (ρ, θ) qui caractérise cette droite. On a donc une correspondance entre les droites de l'image et l'espace des paramètres (ρ, θ) appelé *espace de Hough*. Considérer toutes les droites passant par A (en faisant varier θ et en calculant le ρ correspondant) revient donc à considérer la fonction $\rho_A : \theta \mapsto x_A \cos \theta + x_2 \sin \theta$ qui est une sinusoïde dont on note la courbe \mathcal{C}_A . Plus généralement à chaque point P de l'image lui est associée une fonction $\theta \mapsto \rho_P(\theta)$ dans l'espace des paramètres, dont chaque position de la courbe \mathcal{C}_P correspond à une droite passant par P . Il est alors clair que si une droite de paramètre (ρ^*, θ^*) passe par les 3 points A, B et C , alors l'élément (ρ^*, θ^*) de l'espace des paramètres se retrouve à la fois sur la courbe $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et \mathcal{C}_C , soit à leur intersection !

Par conséquent si on voit dorénavant l'espace de Hough comme une image dont les entrées sont ρ et θ , et que l'on attribue au pixel (ρ, θ) la contribution (c'est-à-dire la valeur du niveau de gris) du pixel de l'image source par lequel passe la droite (ρ, θ) , alors on observera indéniablement que les points d'intersections (ρ^*, θ^*) ont un niveau de gris plus élevé, dans la mesure où ils reçoivent les contributions d'un plus grand nombre de points (qui se trouvent être alignés sur cette droite). On en conclut que la recherche de droites dans l'image source, se ramène à la recherche de pics d'intensité dans l'image représentant l'espace de Hough.

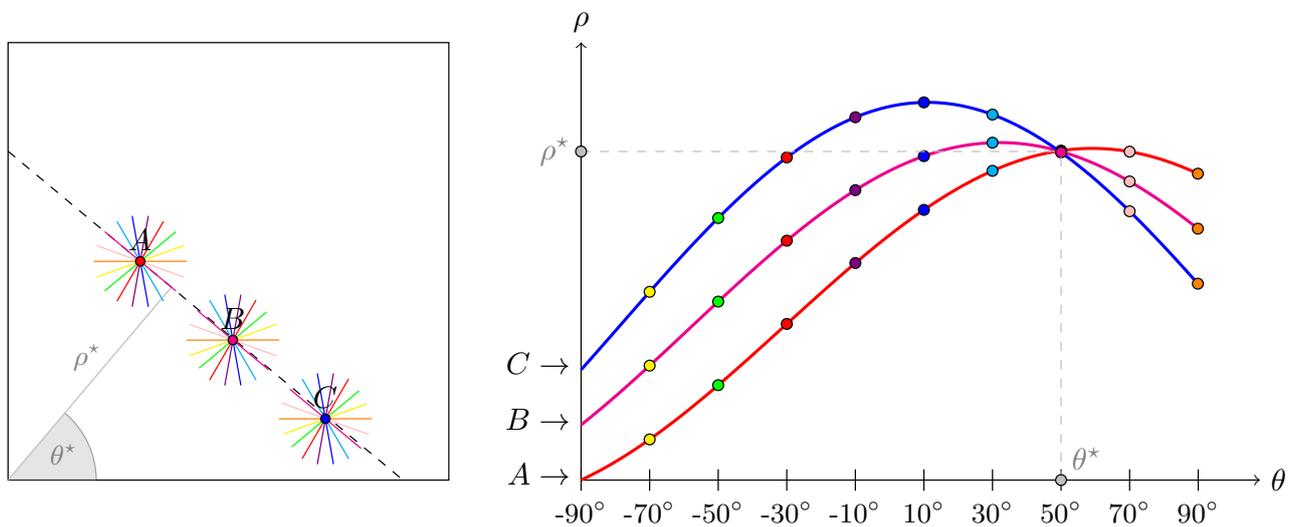


FIGURE 4.17 – Illustration de la transformée de Hough pour trois points A, B et C alignés.

D'un point de vue algorithmique, la transformée de Hough repose essentiellement sur le recours à un *accumulateur*, qui représente une discrétisation de l'espace des paramètres. C'est un tableau à deux entrées (ρ, θ) , qui va enregistrer le nombre de contributions provenant de chaque point (A, B, C, \dots) pour un lot de droites discrétisées suivant les angles θ_i (illustrées de toutes les couleurs à gauche sur la Figure 4.17) où le paramètre ρ est lui aussi quantifié. On obtient ainsi une version pixellisée des sinusoïdes décrites dans l'espace de Hough. Par exemple pour la droite d'angle $\theta = -50^\circ$ représentée en vert dans l'espace source, il correspond selon le point A, B ou C par lequel elle passe, un unique ρ_A, ρ_B et ρ_C qui la caractérise. D'où dans l'espace de Hough les pixel $(-50, \rho_A), (-50, \rho_B)$ et $(-50, \rho_C)$ (en vert) vont recevoir respectivement les niveaux de gris de A, B et C . On réitère le procédé pour une autre droite d'angle différent (donc une abscisse différente dans l'espace de Hough), ce qui dessine les sinusoïdes dans cet espace et fait apparaître les pics qui nous intéressent.

Remarque 4.10. En pratique on ne va pas considérer tous les points de l'image, mais uniquement des points « candidats » à être situés sur une droite, typiquement ceux situés sur des contours, ce qui implique d'effectuer un pré-traitement de l'image de type détection de contours (ou squelettisation, etc.). Un des avantages de la transformée de Hough par rapport à la transformée de Radon (dont on a vu que le sinogramme était également en mesure de révéler la

présence de droites), c'est qu'elle est rapide dans son traitement des formes à identifier, ce qui explique qu'on l'utilise préférentiellement en traitement d'image.

Remarque 4.11. La transformée de Hough souffre quant à elle de certaines approximations, dont certaines ont été résolues dans (TAO et EADES, 2005) (comme les artefacts visibles) et dans (TU, 2014). Notons enfin que des versions randomisées ont été proposées (KIRYATI et coll., 1991; XU et coll., 1990).

4.4.3 Relations entre les transformées de Hough, Radon, Hilbert et Riesz

Sur les 2500 articles foisonnant autour de la transformée de Radon ou de Hilbert, peu mentionnent les liens entre les transformées de Radon et de Hough, car elles sont utilisées dans des disciplines cloisonnées. Il peut être intéressant au contraire de comprendre les connexions qu'il y a entre ces différentes transformées, de sorte qu'il soit possible d'établir des ponts entre divers champs d'étude ou d'application.

Lien entre Riesz et Radon

On peut exprimer la transformée de Riesz en fonction de celle de Radon. Sachant que

$$\widehat{\mathcal{R}}f(\omega\theta) = -j\frac{\omega\theta}{|\omega|}\widehat{f}(\omega\theta) = -j\text{sgn}(\omega)\widehat{\mathcal{R}}_\theta f(\omega)\theta = \widehat{\mathcal{H}\mathcal{R}}_\theta f(\omega)\theta,$$

et compte tenu de (4.29), on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{R}}f(\xi)e^{j2\pi\langle x, \xi \rangle} d\xi, \\ &= \int_{\mathbb{S}_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} |\omega| \widehat{\mathcal{R}}f(\omega\theta)e^{j2\pi\omega\langle x, \theta \rangle} d\omega d\theta, \\ &= \int_{\mathbb{S}_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathcal{H}\mathcal{R}}_\theta f(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega\langle x, \theta \rangle} d\omega) \theta d\theta, \\ &= \mathcal{R}^{-1}\{(\mathcal{H}\mathcal{R}_\theta f)\theta\}(x). \end{aligned}$$

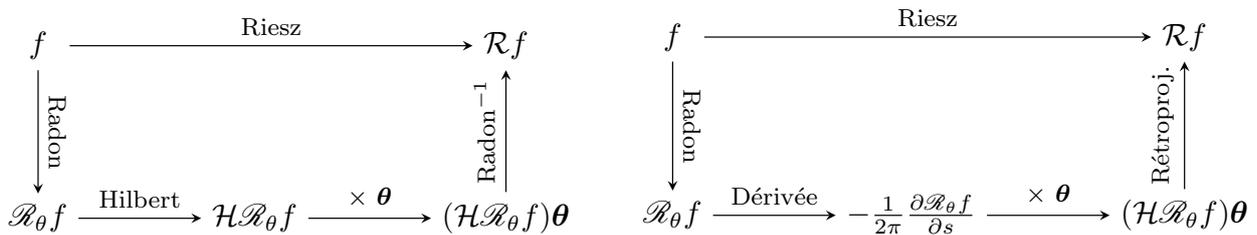


FIGURE 4.18 – Relations entre les transformées de Radon, Riesz et Hilbert. (À gauche) Opérateurs non locaux ; (à droite) opérateurs locaux par rétroprojection de la dérivée des projections de Radon.

Cette relation entre Riesz, Radon et Hilbert illustrée sur la Figure à gauche, a été exposée dans (FELSBERG, 2002, section 4.4.1). L'inconvénient est que les opérateurs \mathcal{H} et \mathcal{R}^{-1} sont non locaux, ce qui induit la connaissance de tout le signal sur lequel ils s'appliquent pour calculer la valeur de Riesz au point x uniquement. En revanche DESBAT et PERRIER (2016) ont récemment montré que si l'on calcule

$$\mathcal{R}f(x) = \int_{\mathbb{S}_{1/2}} \int_{\mathbb{R}} (-j\text{sgn}(\omega)\widehat{\mathcal{R}}_\theta f(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega\langle x, \theta \rangle} d\omega) \theta d\theta,$$

en procédant en deux étapes comme dans le cas de la rétroprojection filtrée à la Proposition 4.3, alors on peut donner une relation locale entre Riesz et Radon :

Proposition 4.4 (RÉTROPROJECTION DE LA DÉRIVÉE)

1. On définit un nouveau filtrage des projections de Radon en Fourier :

$$\mathcal{R}_\theta^{FR}(s) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) (-j) \operatorname{sgn}(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega s} d\omega, \quad (4.32)$$

que l'on peut exprimer comme en (4.30) en fonction de l'opérateur de dérivation :

$$\mathcal{R}_\theta^{FR}(s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{R}_\theta f}{\partial s}(s). \quad (4.33)$$

2. La transformée de Radon est donnée par la rétroprojection :

$$\mathcal{R}f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{S}_{1/2}} \mathcal{R}_\theta^{FR}(\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle) \boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta^{FR}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) (-j) \operatorname{sgn}(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega s} d\omega, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) (-j) \operatorname{sgn}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega) \omega e^{j2\pi\omega s} d\omega, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) \frac{-j}{2\pi j} (2\pi j) \omega e^{j2\pi\omega s} d\omega, \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) (2\pi j \omega) e^{j2\pi\omega s} d\omega, \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{R}_\theta f}{\partial s}(s). \end{aligned}$$

□

Lien entre Radon et Hough

Nous avons vu que la transformée de Radon et la transformée de Hough présentent des similarités, comme le fait qu'elles opèrent toutes les deux des projections dans un espace de paramètres, ou qu'elles sont en mesure de trouver des formes pré-établies dans les images. Cela n'a en réalité rien d'étonnant car plusieurs auteurs ont fait état du fait que la transformée de Hough est *in fine* un cas particulier de la transformée de Radon. Ce lien entre les deux transformées a été pressenti pour la première fois par DEANS (1981) dans un court article, dans laquelle il exhibe des similitudes sur des cas particuliers, où la transformée de Radon peut être utilisée alternativement à celle de Hough pour la détection d'une ligne épaisse.

Vint ensuite la première définition formelle de la transformée de Hough par PRINCEN et coll. (1992), permettant d'analyser de façon plus systématique les similitudes avec la transformée de Radon, dont ils établissent une connexion avec le procédé de *template matching*. En effet l'intégrale (4.18) définissant la transformée de Radon $\mathcal{R}f$ peut-être vue comme la convolution de f avec le noyau $C(\mathbf{x}; (s, \theta)) = \delta(\mathcal{C}(\mathbf{x}; (s, \theta)))$ où \mathcal{C} correspond aux contraintes implicites qui définissent l'équation de la droite de paramètres $\mathbf{p} = (s, \theta)$, à savoir $\mathcal{C}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = 0$ avec $\mathcal{C}(\mathbf{x}; (s, \theta)) = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s$.

$$\mathcal{R}f(s, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - s) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) C(\mathbf{x}; (s, \theta)) d\mathbf{x}. \quad (4.34)$$

Ainsi le rôle de l'opérateur $\mathcal{R}f$ sous cette forme est de calculer le degré de correspondance (produit scalaire) entre l'image f et le template C de paramètre $\mathbf{p} = (s, \theta)$. Rien n'interdit alors de considérer pour le template C autre chose qu'une droite, on peut par exemple considérer un cercle de paramètre $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, r)$ où $\mathcal{C}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - r$. On obtient la transformée de Radon généralisée à la détection de formes diverses caractérisées par l'équation implicite $\mathcal{C}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = 0$.

VAN GINKEL et coll. (2004) ont alors plus clairement mis en évidence le fait que l'écriture (4.34) fournissait un formalisme mathématique qui rendait équivalent la transformée de Radon et de Hough, interprété du point de vue effectif de deux façons différentes, à savoir le paradigme en lecture pour Radon et en écriture pour Hough, pour lesquels on renvoie au papier pour plus de détails sur les distinctions. Ils soulignent également, dans le souci d'obtenir un formalisme rigoureux permettant la comparaison des deux transformées, l'importance des concepts de la théorie des distributions et de celle des fonctions généralisées de GEL'FAND et coll. (2014), pour donner un sens formel aux opérations d'intégration avec les noyaux $C(\mathbf{x}; (s, \theta)) = \delta(C(\mathbf{x}; (s, \theta)))$.

Une formalisation de l'unification plus aboutie, vient d'être proposée par ARAMINI et coll. (2016) pour établir un cadre général et des connexions rigoureuses entre la transformée de Radon généralisée (dans le cadre des fonctions généralisées donc) et la transformée de Hough, par exemple en montrant que pour une certaine classe de fonctions, cette dernière peut bel et bien être vue comme une discrétisation de la première, tendant vers le sinogramme quand le pas de discrétisation tend vers 0 également. Ces travaux ouvrent des perspectives quant à l'inversion du sinogramme utilisée en imagerie médicale (section 4.4.1), en passant par la transformée de Hough qui présentent des avantages en terme de rapidité d'exécution.

4.5 Références

- AACH, T., C. MOTA, I. STUKE, M. MUHLICH et E. BARTH. 2006, «Analysis of superimposed oriented patterns», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, n° 12, p. 3690–3700. [7](#), [177](#), [180](#), [181](#)
- ABRY, P., M. CLAUSEL, S. JAFFARD, S. ROUX et B. VEDEL. 2012, «Hyperbolic wavelet transform : an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures», *arXiv preprint arXiv :1210.1944*. [161](#)
- ALARCON-AQUINO, V., O. STAROSTENKO, J. RAMIREZ-CORTES, R. ROSAS-ROMERO, J. RODRIGUEZ-ASOMOZA, O. J. PAZ-LUNA et K. VAZQUEZ-MUÑOZ. 2009, «Detection of microcalcifications in digital mammograms using the dual-tree complex wavelet transform», *Engineering Intelligent Systems*, vol. 17, n° 1, p. 49. [160](#)
- ARAMINI, R., F. DELBARY, M. C. BELTRAMETTI, M. PIANA et A. M. MASSONE. 2016, «The Radon transform and the Hough transform : a unifying perspective», *arXiv preprint arXiv :1605.09201*. [188](#)
- BALLARD, D. H. 1981, «Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes», *Pattern recognition*, vol. 13, n° 2, p. 111–122. [184](#)
- BENHAMOU, C.-L., S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. OHLEY et L. POTHUAUD. 2001, «Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density : two complementary parameters related to osteoporotic fractures», *Journal of bone and mineral research*, vol. 16, n° 4, p. 697–704. [158](#)
- BERNARD, S. «Extraction de primitives structurelles pour la reconnaissance de symboles : Une approche robuste par transformée de Hough», . [184](#)

- BIERMÉ, H. et F. RICHARD. 2008, «Estimation of anisotropic Gaussian fields through Radon transform», *ESAIM : Probability and Statistics*, vol. 12, p. 30–50. [161](#)
- BIERMÉ, H., F. RICHARD, M. RACHIDI et C.-L. BENHAMOU. 2009, «Anisotropic texture modeling and applications to medical image analysis», dans *ESAIM : Proceedings*, vol. 26, EDP Sciences, p. 100–122. [161](#)
- BONAMI, A. et A. ESTRADÉ. 2003, «Anisotropic analysis of some Gaussian models», *Journal of Fourier analysis and applications*, vol. 9, n° 3, p. 215–236. [161](#)
- BRUNET-IMBAULT, B., G. LEMINEUR, C. CHAPPARD, R. HARBA et C.-L. BENHAMOU. 2005, «A new anisotropy index on trabecular bone radiographic images using the Fast Fourier transform», *BMC medical imaging*, vol. 5, n° 1, p. 4. [7](#), [159](#)
- BULLMORE, E., M. BRAMMER, I. HARVEY, R. PERSAUD, R. MURRAY et M. RON. 1994, «Fractal analysis of the boundary between white matter and cerebral cortex in magnetic resonance images : a controlled study of schizophrenic and manic-depressive patients», *Psychological medicine*, vol. 24, n° 3, p. 771–781. [160](#)
- BÜLOW, T. 1999, *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*, Universität Kiel. Institut für Informatik und Praktische Mathematik. [166](#)
- CANDÈS, E. J. et D. L. DONOHO. 1999, «Ridgelets : A key to higher-dimensional intermittency?», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 357, n° 1760, p. 2495–2509. [160](#)
- CANDES, E. J. et D. L. DONOHO. 2000, «Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges», cahier de recherche, Stanford Univ Ca Dept of Statistics. [160](#)
- CARRÉ, P. 2011, *Construction et analyse de transformées discrètes en ondelettes : spécificité de l'image et de la couleur*, thèse de doctorat, Université de Poitiers. [160](#), [166](#), [176](#)
- CHAPPARD, C. 2012, «Méthodes d'évaluation de la microarchitecture de l'os trabéculaire humain», *médecine/sciences*, vol. 28, n° 12, p. 1111–1115. [158](#)
- CHAPPARD, C., B. BRUNET-IMBAULT, G. LEMINEUR, B. GIRAUDEAU, A. BASILLAIS, R. HARBA et C.-L. BENHAMOU. 2005, «Anisotropy changes in post-menopausal osteoporosis : characterization by a new index applied to trabecular bone radiographic images», *Osteoporosis international*, vol. 16, n° 10, p. 1193–1202. [159](#)
- CHAPPARD, D., M.-F. BASLÉ, E. LEGRAND et M. AUDRAN. 2008, «Trabecular bone microarchitecture : a review», *Morphologie*, vol. 92, n° 299, p. 162–170. [158](#)
- CHENG, H.-D., X. CAI, X. CHEN, L. HU et X. LOU. 2003, «Computer-aided detection and classification of microcalcifications in mammograms : a survey», *Pattern recognition*, vol. 36, n° 12, p. 2967–2991. [160](#)
- CHENG, H.-D., J. SHAN, W. JU, Y. GUO et L. ZHANG. 2010, «Automated breast cancer detection and classification using ultrasound images : A survey», *Pattern recognition*, vol. 43, n° 1, p. 299–317. [160](#)
- CHILES, J.-P. et P. DELFINER. 2009, *Geostatistics : modeling spatial uncertainty*, vol. 497, John Wiley & Sons. [161](#)

- DE KNOCK, B. 2008, *Multidimensional distributions and generalized Hilbert transforms in Clifford analysis*, thèse de doctorat, Ghent University. 164, 166
- DEANS, S. R. 1981, «Hough transform from the Radon transform», *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, , n° 2, p. 185–188. 187
- DEANS, S. R. 2007, *The Radon transform and some of its applications*, Courier Corporation. 181
- DELECHELLE, E., M.-C. PERON et S. GUYOT. 2007, «Circular statistics of fractional fields», *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, n° 4, p. 275–278. 161
- DESBAT, L. et V. PERRIER. 2016, «On locality of Radon to Riesz transform», *Signal Processing*, vol. 120, p. 13–25. 186
- DETTORI, L. et L. SEMLER. 2007, «A comparison of wavelet, ridgelet, and curvelet-based texture classification algorithms in computed tomography», *Computers in biology and medicine*, vol. 37, n° 4, p. 486–498. 160
- DHAHBI, S., W. BARHOUMI et E. ZAGROUBA. 2015, «Breast cancer diagnosis in digitized mammograms using curvelet moments», *Computers in biology and medicine*, vol. 64, p. 79–90. 160
- DHEEBA, J., N. A. SINGH et S. T. SELVI. 2014, «Computer-aided detection of breast cancer on mammograms : A swarm intelligence optimized wavelet neural network approach», *Journal of biomedical informatics*, vol. 49, p. 45–52. 160
- ELTER, M. et A. HORSCH. 2009, «Cadx of mammographic masses and clustered microcalcifications : a review», *Medical physics*, vol. 36, n° 6, p. 2052–2068. 156
- ELTOUKHY, M. M., I. FAYE et B. B. SAMIR. 2010, «A comparison of wavelet and curvelet for breast cancer diagnosis in digital mammogram», *Computers in Biology and Medicine*, vol. 40, n° 4, p. 384–391. 160
- FELSBERG, M. 2002, «Low-level image processing with the structure multivector», . 186
- FELSBERG, M. et G. SOMMER. 2001, «The monogenic signal», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, n° 12, p. 3136–3144. 164
- FENTON, J. J., S. H. TAPLIN, P. A. CARNEY, L. ABRAHAM, E. A. SICKLES, C. D'ORSI, E. A. BERNS, G. CUTTER, R. E. HENDRICK, W. E. BARLOW et coll.. 2007, «Influence of computer-aided detection on performance of screening mammography», *New England Journal of Medicine*, vol. 356, n° 14, p. 1399–1409. 157
- FERRARI, R. J., R. M. RANGAYYAN, J. L. DESAUTELS et A. F. FRÈRE. 2001, «Analysis of asymmetry in mammograms via directional filtering with gabor wavelets», *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 20, n° 9, p. 953–964. 160
- FLETCHER, P. et S. J. SANGWINE. 2017, «The development of the quaternion wavelet transform», *Signal Processing*, vol. 136, p. 2–15. 171
- GEL'FAND, I. M., M. I. GRAEV et N. Y. VILENKIN. 2014, *Integral geometry and representation theory*, vol. 5, Academic press. 188

- GILBERT, F. J., S. M. ASTLEY, M. G. GILLAN, O. F. AGBAJE, M. G. WALLIS, J. JAMES, C. R. BOGGIS et S. W. DUFFY. 2008, «Single reading with computer-aided detection for screening mammography», *New England Journal of Medicine*, vol. 359, n° 16, p. 1675–1684. [157](#)
- VAN GINKEL, M., C. L. HENDRIKS et L. J. VAN VLIET. 2004, «A short introduction to the Radon and Hough transforms and how they relate to each other», *Delft University of Technology*. [188](#)
- HARDY, G. 1924a, «Notes on some points in the integral calculus. lix. on Hilbert transform (continued)», *Mess. Math.*, vol. 54, n° 81-88. [163](#)
- HARDY, G. 1924b, «Notes on some points in the integral calculus. lviii. on Hilbert transform», *Mess. Math.*, vol. 54, n° 20-27. [163](#)
- HARDY, G. H. 1902, «The theory of cauchy’s principal values.(third paper : Differentiation and integration of principal values.)», *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 1, n° 1, p. 81–107. [163](#)
- HARDY, G. H. 1909, «The theory of cauchy’s principal values.(fourth paper : The integration of principal values—continued—with applications to the inversion of definite integrals)», *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, n° 1, p. 181–208. [163](#)
- HÄUSER, S., B. HEISE et G. STEIDL. 2014, «Linearized Riesz transform and quasi-monogenic shearlets», *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, vol. 12, n° 03, p. 1450 027. [160](#)
- HEINZER, S., T. KRUCKER, M. STAMPANONI, R. ABELA, E. P. MEYER, A. SCHULER, P. SCHNEIDER et R. MÜLLER. 2006, «Hierarchical microimaging for multiscale analysis of large vascular networks», *Neuroimage*, vol. 32, n° 2, p. 626–636. [160](#)
- HEROUT, A., M. DUBSKÁ et J. HAVEL. 2013, «Review of Hough transform for line detection», dans *Real-Time Detection of Lines and Grids*, Springer, p. 3–16. [184](#)
- HILBERT, D. 1906, «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung», *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1906, p. 157–228. [163](#)
- HILBERT, D. 1953, «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (teubner, leipzig, 1912)», *Google Scholar*, p. 267–282. [163](#)
- HUNGER, R. 2007, *An introduction to complex differentials and complex differentiability*, Munich University of Technology, Inst. for Circuit Theory and Signal Processing. [167](#)
- ILLINGWORTH, J. et J. KITTLER. 1988, «A survey of the Hough transform», *Computer vision, graphics, and image processing*, vol. 44, n° 1, p. 87–116. [184](#)
- JACQUES, L., L. DUVAL, C. CHAUX et G. PEYRÉ. 2011, «A panorama on multiscale geometric representations, intertwining spatial, directional and frequency selectivity», *Signal Processing*, vol. 91, n° 12, p. 2699–2730. [160](#)
- JACQUET, G., W. OHLEY, M. MONT, R. SIFFERT et R. SCHMUKLER. 1990, «Measurement of bone structure by use of fractal dimension», dans *Engineering in Medicine and Biology Society, 1990., Proceedings of the Twelfth Annual International Conference of the IEEE*, IEEE, p. 1402–1403. [158](#)

- JAHNE, B. et B. JAEHNE. 1995, *Practical handbook on image processing for scientific applications*, CRC Press, Inc. 7, 171, 174
- JALALIAN, A., S. B. MASHOHOR, H. R. MAHMUD, M. I. B. SARIPAN, A. R. B. RAMLI et B. KARASFI. 2013, «Computer-aided detection/diagnosis of breast cancer in mammography and ultrasound : a review», *Clinical imaging*, vol. 37, n° 3, p. 420–426. 160
- KETCHAM, R. et T. RYAN. 2004, «Quantification and visualization of anisotropy in trabecular bone», *Journal of Microscopy*, vol. 213, n° 2, p. 158–171. 158
- KING, F. W. 2009, *Hilbert transforms*, vol. 2, Cambridge University Press Cambridge. 165
- KIRYATI, N., Y. ELДАР et A. M. BRUCKSTEIN. 1991, «A probabilistic Hough transform», *Pattern recognition*, vol. 24, n° 4, p. 303–316. 186
- LAME, A. et S. SONG. 1992, «Multiscale wavelet representations for mammographic feature analysis», dans *Proceedings of SPIE : Conference on Mathematical Methods in Medical Imaging, San Diego, CA*. 160
- LARKIN, K. G. 2001, «Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. ii. stationary phase analysis of the spiral phase quadrature transform», *JOSA A*, vol. 18, n° 8, p. 1871–1881. 166
- LARKIN, K. G., D. J. BONE et M. A. OLDFIELD. 2001, «Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. i. general background of the spiral phase quadrature transform», *JOSA A*, vol. 18, n° 8, p. 1862–1870. 166
- LI, H., K. R. LIU et S.-C. LO. 1997, «Fractal modeling and segmentation for the enhancement of microcalcifications in digital mammograms», *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 16, n° 6, p. 785–798. 160
- LI, Y., H. CHEN, L. CAO et J. MA. 2016, «A survey of computer-aided detection of breast cancer with mammography», *J. Health Med. Inf*, vol. 7, n° 4. 160
- VAN DER LINDEN, J. C. et H. WEINANS. 2007, «Effects of microarchitecture on bone strength», *Current osteoporosis reports*, vol. 5, n° 2, p. 56–61. 158
- LIU, S., C. F. BABBS et E. J. DELP. 2001, «Multiresolution detection of spiculated lesions in digital mammograms», *IEEE transactions on Image Processing*, vol. 10, n° 6, p. 874–884. 160
- LLADÓS, J. 2003, «The Hough transform as a tool for image analysis», *Master degree, Universitat Autònoma de Barcelona*. 184
- LUNDAHL, T., W. J. OHLEY, S. M. KAY et R. SIFFERT. 1986, «Fractional Brownian motion : A maximum likelihood estimator and its application to image texture», *IEEE Transactions on medical imaging*, vol. 5, n° 3, p. 152–161. 160
- MA, J. et G. PLONKA. 2010, «A review of curvelets and recent applications», *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 27, n° 2, p. 118–133. 160
- MAJUMDAR, S. 1998, «A review of magnetic resonance (mr) imaging of trabecular bone microarchitecture : contribution to the prediction of biomechanical properties and fracture prevalence», *Technology and Health Care*, vol. 6, n° 5, 6, p. 321–327. 157

- MATHERON, G. 1973, «The intrinsic random functions and their applications», *Advances in applied probability*, vol. 5, n° 3, p. 439–468. [161](#)
- MATSUBARA, T., D. FUKUOKA, N. YAGI, T. HARA, H. FUJITA, Y. INENAGA, S. KASAI, A. KANO, T. ENDO et T. IWASE. 2005, «Detection method for architectural distortion based on analysis of structure of mammary gland on mammograms», dans *International Congress Series*, vol. 1281, Elsevier, p. 1036–1040. [6](#), [157](#)
- MUKHOPADHYAY, P. et B. B. CHAUDHURI. 2015, «A survey of Hough transform», *Pattern Recognition*, vol. 48, n° 3, p. 993–1010. [184](#)
- NATTERER, F. 2001, *The mathematics of computerized tomography*, SIAM. [181](#)
- ODGAARD, A. 1997, «Three-dimensional methods for quantification of cancellous bone architecture», *Bone*, vol. 20, n° 4, p. 315–328. [158](#)
- OLHEDE, S. C., D. RAMÍREZ et P. J. SCHREIER. 2014, «Detecting directionality in random fields using the monogenic signal», *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 60, n° 10, p. 6491–6510. [162](#)
- PÉRON, M.-C., É. DELÉCHELLE et S. GUYOT. 2007, «Analyse angulaire des champs aléatoires à anisotropie fonctionnelle», dans *21° Colloque GRETSI, Troyes, FRA, 11-14 septembre 2007*, GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images. [161](#)
- PESQUET-POPESCU, B. et J. L. VÉHEL. 2002, «Stochastic fractal models for image processing», *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, n° 5, p. 48–62. [160](#)
- POTHUAUD, L., E. LESPESSAILLES, R. HARBA, R. JENNANE, V. ROYANT, E. EYNARD et C.-L. BENHAMOU. 1998, «Fractal analysis of trabecular bone texture on radiographs : discriminant value in postmenopausal osteoporosis», *Osteoporosis International*, vol. 8, n° 6, p. 618–626. [158](#), [160](#)
- PRINCEN, J., J. ILLINGWORTH et J. KITTLER. 1992, «A formal definition of the Hough transform : properties and relationships», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 1, n° 2, p. 153–168. [187](#)
- PÜSPÖKI, Z., M. STORATH, D. SAGE et M. UNSER. 2016, «Transforms and operators for directional bioimage analysis : a survey», dans *Focus on Bio-Image Informatics*, Springer, p. 69–93. [160](#)
- RADON, J. 1917, «Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte Laengs gewisser Mannigfaltigkeiten», *Berichte Saechsische Acad. Wissenschaft. Math. Phys., Klass*, vol. 69, p. 262. [181](#)
- RAMOS, R. P., M. Z. DO NASCIMENTO et D. C. PEREIRA. 2012, «Texture extraction : An evaluation of ridgelet, wavelet and co-occurrence based methods applied to mammograms», *Expert Systems with Applications*, vol. 39, n° 12, p. 11 036–11 047. [160](#)
- RANGAYYAN, R. M. et F. J. AYRES. 2006, «Gabor filters and phase portraits for the detection of architectural distortion in mammograms», *Medical and biological engineering and computing*, vol. 44, n° 10, p. 883–894. [160](#)
- RANGAYYAN, R. M., F. J. AYRES et J. L. DESAUTELS. 2007, «A review of computer-aided diagnosis of breast cancer : Toward the detection of subtle signs», *Journal of the Franklin Institute*, vol. 344, n° 3, p. 312–348. [160](#)

- RICHARD, F. 2016a, «Tests of isotropy for rough textures of trended images», *Statistica Sinica*. [161](#)
- RICHARD, F. et H. BIERME. 2010, «Statistical tests of anisotropy for fractional Brownian textures. application to full-field digital mammography», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 36, n° 3, p. 227–240. [161](#)
- RICHARD, F. J. 2016b, «Some anisotropy indices for the characterization of Brownian textures and their application to breast images», *Spatial Statistics*, vol. 18, p. 147–162. [161](#)
- RISSER, L., F. PLOURABOUÉ, A. STEYER, P. CLOETENS, G. LE DUC et C. FONTA. 2007, «From homogeneous to fractal normal and tumorous microvascular networks in the brain», *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*, vol. 27, n° 2, p. 293–303. [160](#)
- ROUX, S. G., P. ABRY, B. VEDEL, S. JAFFARD et H. WENDT. 2016, «Hyperbolic wavelet leaders for anisotropic multifractal texture analysis», dans *Image Processing (ICIP), 2016 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 3558–3562. [161](#)
- ROUX, S. G., M. CLAUSEL, B. VEDEL, S. JAFFARD et P. ABRY. 2013, «Self-similar anisotropic texture analysis : The hyperbolic wavelet transform contribution», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, n° 11, p. 4353–4363. [161](#)
- SAKELLAROPOULOS, P., L. COSTARIDOU et G. PANAYIOTAKIS. 2003, «A wavelet-based spatially adaptive method for mammographic contrast enhancement», *Physics in Medicine and Biology*, vol. 48, n° 6, p. 787. [160](#)
- SELVI, S. T. et R. MALMATHANRAJ. 2006, «Segmentation and SVM classification of mammograms», dans *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, IEEE, p. 905–910. [160](#)
- SEMLER, L. et L. DETTORI. 2006, «Curvelet-based texture classification of tissues in computed tomography», dans *Image Processing, 2006 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 2165–2168. [160](#)
- SEMLER, L., L. DETTORI, O. KERR et coll.. 2006, «Ridgelet-based texture classification of tissues in computed tomography», . [160](#)
- SIVARDIÈRE, J. 1995, *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*, Presses universitaires de Grenoble Grenoble. [155](#)
- SKAANE, P., A. KSHIRSAGAR, S. STAPLETON, K. YOUNG et R. A. CASTELLINO. 2007, «Effect of computer-aided detection on independent double reading of paired screen-film and full-field digital screening mammograms», *American journal of roentgenology*, vol. 188, n° 2, p. 377–384. [157](#)
- SOULARD, R. 2011, «Algèbre de Clifford et transformée en ondelettes», *PhD thesis, University of Poitiers*. [171](#), [176](#)
- STORATH, M. 2011, «Directional multiscale amplitude and phase decomposition by the monogenic curvelet transform», *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 4, n° 1, p. 57–78. [160](#)
- TAN, C. O., M. A. COHEN, D. L. ECKBERG et J. A. TAYLOR. 2009, «Fractal properties of human heart period variability : physiological and methodological implications», *The Journal of physiology*, vol. 587, n° 15, p. 3929–3941. [160](#)

- TANG, J., R. M. RANGAYYAN, J. XU, I. EL NAQA et Y. YANG. 2009, «Computer-aided detection and diagnosis of breast cancer with mammography : recent advances», *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, vol. 13, n° 2, p. 236–251. [160](#)
- TAO, X. et A. EADES. 2005, «Errors, artifacts, and improvements in ebsd processing and mapping», *Microscopy and Microanalysis*, vol. 11, n° 1, p. 79–87. [186](#)
- TAYLOR, P., J. CHAMPNESS, R. GIVEN-WILSON, K. JOHNSTON et H. POTTS. 2005, «Impact of computer-aided detection prompts on the sensitivity and specificity of screening mammography.», . [157](#)
- TOFT, P. A. 1996, «Using the generalized Radon transform for detection of curves in noisy images», dans *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996. ICASSP-96. Conference Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, vol. 4, IEEE, p. 2219–2222. [184](#)
- TOFT, P. A. et J. A. SØRENSEN. 1996, *The Radon transform-theory and implementation*, thèse de doctorat, Technical University of DenmarkDanmarks Tekniske Universitet, Department of Informatics and Mathematical ModelingInstitut for Informatik og Matematisk Modellering. [181](#)
- TU, C. 2014, *Enhanced Hough transforms for image processing (Améliorations de la Transformée de Hough en traitement d'images)*, thèse de doctorat, University of Paris-Est, France. [186](#)
- UNSER, M., D. SAGE et D. VAN DE VILLE. 2009, «Multiresolution monogenic signal analysis using the Riesz–Laplace wavelet transform», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, n° 11, p. 2402–2418. [168](#), [175](#), [176](#)
- VAN GINNEKEN, B., B. T. H. ROMENY et M. A. VIERGEVER. 2001, «Computer-aided diagnosis in chest radiography : a survey», *IEEE Transactions on medical imaging*, vol. 20, n° 12, p. 1228–1241. [160](#)
- WHITEHOUSE, W. 1974, «The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone», *Journal of microscopy*, vol. 101, n° 2, p. 153–168. [158](#)
- XU, L., E. OJA et P. KULTANEN. 1990, «A new curve detection method : randomized Hough transform (RHT)», *Pattern recognition letters*, vol. 11, n° 5, p. 331–338. [186](#)
- YI, W.-J., M.-S. HEO, S.-S. LEE, S.-C. CHOI, K.-H. HUH et S.-P. LEE. 2007, «Direct measurement of trabecular bone anisotropy using directional fractal dimension and principal axes of inertia», *Oral Surgery, Oral Medicine, Oral Pathology, Oral Radiology, and Endodontology*, vol. 104, n° 1, p. 110–116. [159](#)
- ZENG, G. L. 2010, *Medical image reconstruction : a conceptual tutorial.*, Springer. [181](#), [183](#)
- ZHANG, Q. et I. COULOIGNER. 2007, «Accurate centerline detection and line width estimation of thick lines using the Radon transform», *IEEE Transactions on image processing*, vol. 16, n° 2, p. 310–316. [184](#)

5

Caractérisation de l'orientation pour les champs gaussiens localisables

« Si haut que nous puissions porter les notions, et nous éloigner ainsi de la sensibilité par l'abstraction, toujours cependant s'y attacheront des représentations sensibles, dont la destinée propre est d'approprier à l'usage de l'expérience des notions qui d'ailleurs ne sont pas dérivées de l'expérience. »

Emmanuel Kant, *Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ?* (1786)

DANS CE CHAPITRE, nous présentons nos contributions pour une définition rigoureuse de la notion de l'orientation locale d'un champ aléatoire localisable. Est désigné par localisable un champ admettant localement un champ tangent. Cette classe de champ est vaste dans la mesure où un grand nombre de modèles aléatoires anisotropes possèdent cette propriété. Dans nos contributions du Chapitre 3, nous en avons étudié un modèle très général incluant plusieurs familles de champs aléatoires connus, modèle baptisé **GAFBF**, dont nous avons montré qu'il admettait en chaque point un champ tangent. Une propriété remarquable des champs gaussiens localisables à trajectoires continues, due à **FALCONER** (2002), est que presque partout leurs champs tangents sont de type fractal, et plus précisément sont des champs gaussiens auto-similaires à accroissements stationnaires, appelés aussi champs **H-sssi**. Ainsi nos travaux de ce chapitre, exposés dans **POLISANO et coll.** (2017), consistent à définir une notion d'orientation pour cette classe de champs **H-sssi**, puis à poser comme orientation locale d'un champ localisable celle de son champ tangent au point considéré. L'idée directrice consiste à appliquer le formalisme du signal monogène aux champs aléatoires, et à transposer la méthode par ondelettes de **UNSER et VAN DE VILLE** (2009) dans le cadre stochastique. Nous calculons la covariance des coefficients d'ondelettes de notre champ aléatoire, ce qui mène à la définition d'un tenseur de structure puis de l'orientation du champ. De façon surprenante, nous montrons que cette quantité est intrinsèque au champ, ne dépendant ni de l'échelle d'analyse ni de l'ondelette utilisée, mais uniquement de l'anisotropie encodée dans la densité spectrale du champ. Nous appliquons cette définition aux modèles anisotropes précédemment étudiés, pour lesquels nous déterminons leur orientation locale; puis dans un second temps nous caractérisons ces orientations et faisons le lien entre tenseur de structure et statistiques circulaires. Ces travaux, parallèles à ceux de **OLHEDE et coll.** (2014), ouvrent des perspectives quant à la définition formelle d'une transformée de Riesz pour les champs aléatoires.

Sommaire

4.1	Mise en contexte	156
4.1.1	Motivations	156
4.1.2	Estimation de l'anisotropie	160
4.2	Signal monogène	163
4.2.1	Transformée de Hilbert et signal analytique	163
4.2.2	Transformée de Riesz	166
4.2.3	Transformée en ondelettes monogènes	169
4.3	Tenseur de structure	171
4.3.1	Minimisation par rapport à un ensemble de gradients	171
4.3.2	Application à l'analyse multi-résolution du signal monogène	175
4.3.3	Analyse de superposition de motifs orientés	177
4.4	Transformée de Hough et de Radon	181
4.4.1	Transformée de Radon	181
4.4.2	Transformée de Hough	184
4.4.3	Relations entre les transformées de Hough, Radon, Hilbert et Riesz	186
4.5	Références	188

5.1 Introduction

Estimation de l'orientation dans le cas déterministe

Dans de nombreuses applications, il est primordial d'être capable d'estimer des orientations dans les images, puisqu'elles apportent une information locale sur sa structure. On peut localement avoir un contour, un aplatissement, une texture unidirectionnelle, isotrope, etc. Nous avons donné un aperçu, dans le chapitre précédent, de l'intérêt de l'extraction de ce type d'information, et donc du développement des outils mathématiques adéquats, en l'illustrant en particulier pour l'imagerie médicale. La plupart de ces méthodes s'appliquent à des images déterministes et partent du principe qu'il y a effectivement une structure orientée à détecter, et en donne une estimation même si ceci n'est pas pertinent car l'image est faiblement ou pas orientée. Il est donc aussi important de quantifier le degré de directionnalité de l'image analysée. UNSER et VAN DE VILLE (2009) ont introduit une mesure dite de cohérence (4.13) comprise entre 0 à 1 pour saisir localement l'aspect plus ou moins directionnel de la texture, comme nous l'avons décrit dans la section 4.3. Leur méthode présente l'avantage d'être robuste sur le plan numérique et est basée sur l'utilisation d'analyses multi-résolution monogènes. Le passage du continu au discret y est parfaitement décrit et des bancs de filtres sont proposés, ce qui rend la méthode numériquement efficace.

Définition et estimation statistique des orientations

Cependant, deux questions restent posées. La première question est de savoir comment à partir de ces indicateurs on pourrait construire un test de directionnalité. Ceci serait utile pour classifier des textures de manière automatique. Par ailleurs, la notion d'orientation locale d'une texture n'a jusqu'ici pas été formalisée¹. Ceci constituera la seconde problématique que nous aborderons, à savoir une formalisation de la notion d'anisotropie locale pour les champs aléatoires localement autosimilaires. En effet dans (UNSER et VAN DE VILLE, 2009), l'indice de cohérence qui mesure le degré d'unidirectionnalité local de la direction estimée (par maximisation de l'intégrale de transformée de Hilbert partielle (4.14) et Remarque 4.6), apparaît comme une mesure *ad-hoc*, qui dépend de l'échelle considérée, et de l'ondelette d'analyse. L'orientation locale estimée à partir des coefficients d'ondelettes n'est donc pas une quantité intrinsèque.

Application du formalisme monogène aux champs aléatoires

Afin de pouvoir répondre à ces deux questions, on va considérer des champs aléatoires anisotropes, dont les propriétés de directionnalité sont encodées dans le modèle. L'anisotropie devient alors une caractéristique inhérente au modèle que l'on peut estimer.

■ Signal monogène aléatoire d'un champ stationnaire

Une première formalisation théorique de la notion de mesure de cohérence se trouve dans les travaux récents de OLHEDE et coll. (2014). Les auteurs ont défini un *signal monogène aléatoire* associé à un champ aléatoire *stationnaire*, et étudient ses statistiques du second ordre. Dans le cas stationnaire, le processus f possède une représentation spectrale (section 1.6), à partir de laquelle il leur est possible d'explicitier les covariances r_{ff} , r_{gg} et r_{hh} , respectivement du signal aléatoire f et de ses composantes de Riesz g et h , ainsi que les fonctions de corrélations croisées r_{fg} , r_{fh} , r_{gh} . Ces fonctions permettent d'exprimer la covariance r_{mm} du signal monogène aléatoire m écrit sous forme d'un *quaternion aléatoire* $m = f + ig + jh + 0k$ (cf. Définition 4.3

1. Difficulté qui est consubstantielle à celle qui pose la définition même de texture, cf. section 2.1.1.

et Remarque 4.5). Les statistiques du second ordre de ce dernier sont complètement caractérisées par adjonction de trois autres matrices de covariances complémentaires $r_{mm^{(\eta)}}$, $r_{mm^{(\eta')}}$ et $r_{mm^{(\eta'')}}$ où $m^{(\eta)} = -\eta m \eta$ (VIA et coll., 2010). Ils les calculent en particulier dans le cas d'un signal aléatoire f unidirectionnel, c.-à-d. tel que sa matrice de covariance est de la forme $r_{ff}(\boldsymbol{\xi}) = C_U(\mathbf{n}^T \boldsymbol{\xi})$ avec $\mathbf{n} = (\cos \nu, \sin \nu)^T$ la direction², et montre qu'il est caractérisé par $m(\mathbf{x}) = m^{(\eta)}(\mathbf{x})$ où $\eta = \cos(\nu)i + \sin(\nu)j$. Ainsi ce qui va déterminer l'orientation et le *degré de directionnalité* est donnée par la minimisation de l'erreur quadratique suivante :

$$\min_{\eta} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} |m(\mathbf{x}) - m^{(\eta)}(\mathbf{x})|^2 \right],$$

qui vaut zéro si $f(\mathbf{x})$ est unidirectionnel, et est plus grand que zéro sinon. Ils montrent par le calcul que le minimum est donné par $r_{mm}(\mathbf{0}) - \max_{\eta} \operatorname{Re}(r_{mm^{(\eta)}}(\mathbf{0}))$ dont ils déterminent l'expression explicite, et définissent ainsi la mesure de directionnalité suivante :

$$\mathcal{U} = \frac{2 \max_{\eta} \operatorname{Re}(r_{mm^{(\eta)}}(\mathbf{0}))}{r_{mm}(\mathbf{0})} - 1 = \frac{\sqrt{(r_{gg}(\mathbf{0}) - r_{hh}(\mathbf{0}))^2 + 4r_{gh}(\mathbf{0})}}{2r_{ff}(\mathbf{0})},$$

qui est similaire à l'indice de cohérence (4.13) utilisé par UNSER et VAN DE VILLE (2009). Puisque cette mesure de directionnalité \mathcal{U} est basée sur une formulation stochastique, et est estimée par $\hat{\mathcal{U}}$ à partir des estimateurs des covariances, cela permet OLHEDE et coll. (2014) de construire un test d'unidirectionnalité.

■ **Notre contribution : caractérisation de l'orientation d'un champ H-sssi par les statistiques des coefficients de la transformée en ondelettes monogènes**

L'intérêt de la méthode développée par OLHEDE et coll. (2014) réside d'une part dans le fait d'avoir formalisé la notion de signal aléatoire monogène d'un champ stationnaire, en effectuant les parallèles avec les signaux analytiques et monogènes déterministes usuels ; et d'autre part d'avoir effectué une analyse statistique de la mesure d'unidirectionnalité. La faiblesse réside dans la restriction de la méthode au cas stationnaire (et pour cause nous verrons en section 5.2.2 qu'il est difficile de définir en toute généralité la transformée de Riesz d'un champ aléatoire quelconque), ainsi que dans la nécessité d'estimer la fréquence de coupure λ_c .

Par conséquent, afin de définir une notion d'orientation intrinsèque pour une classe de champs aléatoires beaucoup plus vaste que celle des champs stationnaires, nous commençons par en donner une définition pour les champs H-sssi basée sur la transformée en ondelettes monogènes à partir d'une ondelette isotrope et d'un tenseur de structure analogue à celui utilisé par UNSER et VAN DE VILLE (2009). Nous montrons dans ce cas que cette notion d'orientation définie à partir de la matrice de covariance des coefficients d'ondelettes aléatoires, ne dépend ni de l'échelle ni du choix de l'ondelette comme c'est normalement le cas dans la procédure de UNSER et VAN DE VILLE (2009), mais ne dépend que de la mesure spectrale du champ déterminée par une fonction d'anisotropie sur \mathbb{S}^1 . Aussi, nous relierons l'interprétation statistique du tenseur de structure donnant l'orientation aux statistiques directionnelles de la fonction d'anisotropie du champ, ce qui permet de justifier du bien fondé de l'emploi du tenseur de structure comme estimateur de l'orientation et d'expliquer pourquoi il n'est guère étonnant que la mesure d'unidirectionnalité établie par OLHEDE et coll. (2014) soit similaire à la mesure de cohérence UNSER et VAN DE VILLE (2009). Puis, nous caractérisons la loi de probabilité des estimateurs d'orientation en fonction des paramètres déterminant la forme de la fonction d'anisotropie. Enfin, nous étendons la notion d'orientation à une classe plus vaste composée des champs localisables, en leur attribuant comme orientation locale celle définie pour leur champ tangent presque partout H-sssi.

2. On reconnaît l'analogie avec les voisinages simples définis section 4.3.

5.2 Orientation d'un champ gaussien à accroissements stationnaires et auto-similaire

5.2.1 Représentation spectrale et fonction d'anisotropie

Classe de champs gaussiens H-sssi

Nous considérons dans cette contribution des champs gaussiens réels centrés bi-dimensionnels. Plus précisément on suppose qu'un tel champ gaussien X vérifie les propriétés suivantes :

- X est stochastiquement continu, sa covariance

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbb{E}[X(\mathbf{x})X(\mathbf{y})] \text{ est continue sur } (\mathbb{R}^2)^2, \quad (5.1)$$

- X est à accroissements stationnaires (cf. Définition 1.9), c.-à-d. pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\{X(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{x})\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2} \stackrel{(fdd)}{=} \{X(\mathbf{h})\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2}, \quad (5.2)$$

- X est auto-similaire d'ordre $H \in (0, 1)$ (cf. Définition 1.11), c.-à-d.

$$\forall c > 0, \quad \{X(c\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \stackrel{(fdd)}{=} \{c^H X(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}, \quad (5.3)$$

où $\stackrel{(fdd)}{=}$ signifie l'égalité en lois finies dimensionnelles.

- Enfin puisque X est supposé stochastiquement continu, l'auto-similarité implique en particulier que

$$X(0) = 0 \text{ p.p. } . \quad (5.4)$$

Vocabulaire. Un champ vérifiant (5.2) et (5.3) est appelé champ H-sssi. Cette classe avait été évoquée dans l'Exemple 2.4.

Représentation spectrale d'un champ gaussien H-sssi

Nous avons énoncé, Proposition 1.16, que les hypothèses (5.1)-(5.2)-(5.4) impliquent qu'il existe une unique mesure de Borel μ_X sur \mathbb{R}^2 satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^2} \min(1, \|\boldsymbol{\xi}\|^2) \mu_X(d\boldsymbol{\xi}) < \infty,$$

telle que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, la covariance s'écrive :

$$\mathbb{E}(X(\mathbf{x})X(\mathbf{y})) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1)(e^{-j\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \mu_X(d\boldsymbol{\xi}). \quad (5.5)$$

avec μ_X la mesure spectrale du champ à accroissements stationnaires X , dont on suppose qu'elle admet une densité spectrale f_X par rapport à la mesure de Lebesgue $\mu_X(d\boldsymbol{\xi}) = f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$, avec f paire puisque X est réel. Nous avons également énoncé, Proposition 1.17, qu'un tel champ à accroissements stationnaires possédait alors la représentation spectrale suivante

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (5.6)$$

avec $\widehat{\mathbf{W}}$ un bruit blanc à valeurs complexes. Par unicité de la densité spectrale, la densité spectrale d'un champ gaussien H-sssi est la suivante (cf. aussi (DOBRUSHIN, 1979)) :

Proposition 5.1 (DENSITÉ SPECTRALE D'UN CHAMP GAUSSIEN H-SSSI)

Soit $H \in (0, 1)$ et X un champ gaussien auto-similaire d'ordre H à accroissements stationnaires, admettant pour densité spectrale f_X . Alors f_X est de la forme

$$f_X(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} S_X \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right),$$

où S_X est une fonction positive homogène définie sur la sphère $\mathbb{S}^1 = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\}$, et est appelée fonction d'anisotropie de X .

Preuve :

Partant de la définition de l'auto-similarité (5.3), pour tout $c > 0$,

$$\{X(c\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \stackrel{(fdd)}{=} \{c^H X(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2},$$

ce qui induit en particulier

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}(X(c\mathbf{x})X(c\mathbf{y})) = c^{2H} \mathbb{E}(X(\mathbf{x})X(\mathbf{y})).$$

Cette égalité implique, en utilisant l'expression intégrale de la covariance (5.5), l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = c^{2H} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

En effectuant le changement de variable $\boldsymbol{\xi} \leftarrow c\boldsymbol{\xi}$ dans la première intégrale, et par unicité de la densité spectrale, on en déduit

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \text{ p.p.}, \quad f_X \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{c} \right) = c^{2H+2} f_X(\boldsymbol{\xi}).$$

Fixons maintenant $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ et posons $c = \|\boldsymbol{\xi}\|$, le résultat s'en déduit directement, à savoir que f_X n'a besoin d'être connue que sur la sphère \mathbb{S}^1 pour être définie partout ailleurs, et que S_X est définie par $\boldsymbol{\xi} \mapsto \|\boldsymbol{\xi}\|^{2H+2} f_X(\boldsymbol{\xi})$. □

Remarque 5.1. Le problème d'estimation de la fonction d'anisotropie a été traité par [ISTAS \(2007\)](#).

Déformation d'un champ gaussien H-sssi par une transformation linéaire

Donnons maintenant l'expression de la densité spectrale d'une déformation d'un champ gaussien H-sssi par une transformation linéaire :

Proposition 5.2 (DENSITÉ SPECTRALE D'UN CHAMP H-SSSI TRANSFORMÉ LINÉAIREMENT)

Soit X un champ gaussien auto-similaire d'ordre H à accroissements stationnaires, admettant pour densité spectrale f_X et une fonction d'anisotropie S_X . Soit \mathbf{L} une matrice réelle 2×2 inversible. On définit $X_{\mathbf{L}}$ par $X_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x})$. Alors $X_{\mathbf{L}}$ est aussi un champ gaussien auto-similaire d'ordre H à accroissements stationnaires, admettant pour

■ densité spectrale

$$f_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\xi}) = |\det(\mathbf{L})| f_X(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2,$$

■ fonction d'anisotropie

$$S_{X_{\mathbf{L}}}(\Theta) = \frac{|\det(\mathbf{L})|}{\|\mathbf{L}^T \Theta\|^{2H+2}} S_X \left(\frac{\mathbf{L}^T \Theta}{\|\mathbf{L}^T \Theta\|} \right) \quad \Theta \in \mathbb{S}^1.$$

Preuve :

La propriété de stationnarité et d'auto-similarité de $X_{\mathbf{L}}$ provient directement de X et de la linéarité de \mathbf{L} . Pour calculer la densité spectrale de $X_{\mathbf{L}}$, observons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}), X_{\mathbf{L}}(\mathbf{y})) &= \text{Cov}(X(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}), X(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y})), \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{x}, (\mathbf{L}^{-1})^T \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{y}, (\mathbf{L}^{-1})^T \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1 \right) f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) \left(e^{-j\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} - 1 \right) f_X(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\zeta}) |\det \mathbf{L}| d\boldsymbol{\zeta}, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $\boldsymbol{\zeta} = (\mathbf{L}^{-1})^T \boldsymbol{\xi}$, qui par identification mène directement à l'expression de $f_{X_{\mathbf{L}}}$, ainsi que celle de $S_{X_{\mathbf{L}}}$. □

5.2.2 Motivation : vers une transformée de Riesz d'un champ H-sssi ?

On considère l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, contenant les fonctions indéfiniment dérivables, et dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide, c'est-à-dire que leur produit par une fonction polynôme quelconque est borné à l'infini. Nous nous plaçons sur le sous-espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ restreint aux fonctions d'intégrale nulle :

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) = \left\{ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Montrons qu'à tout champ gaussien auto-similaire et à accroissements stationnaires peut être associé un champ gaussien généralisé au sens de **GELFAND et coll. (1964)**.

Proposition 5.3 (CHAMP GAUSSIEN GÉNÉRALISÉ ASSOCIÉ À UN CHAMP H-SSSI)

Soit $H \in (0, 1)$ et X un champ gaussien auto-similaire d'ordre H et admettant des accroissements stationnaires. Alors, presque sûrement

$$u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) \mapsto \langle X, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}) X(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

est opérateur linéaire continu bien défini de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$ dans l'espace \mathcal{G} des variables aléatoires gaussiennes. De plus cet opérateur est invariant par translation, c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)^2, \quad \mathbb{E}[\langle X, u(\cdot - \mathbf{b}) \rangle \overline{\langle X, v(\cdot - \mathbf{b}) \rangle}] = \mathbb{E}[\langle X, u \rangle \overline{\langle X, v \rangle}], \quad (5.7)$$

et est H -homogène ce qui signifie que

$$\forall a > 0, \forall (u, v) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)^2, \quad \mathbb{E}[\langle X, a^{-2}u(\cdot/a) \rangle \overline{\langle X, a^{-2}v(\cdot/a) \rangle}] = a^{2H} \mathbb{E}[\langle X, u \rangle \overline{\langle X, v \rangle}]. \quad (5.8)$$

Preuve :

Soit $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$, montrons tout d'abord l'existence de

$$\begin{aligned}
\langle X, u \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{u}(\mathbf{0})) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

La deuxième égalité provient du classique théorème de Fubini stochastique (PIPIRAS et TAQQU, 2010), qui est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) |u(\mathbf{x})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} d\mathbf{x}, \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \min(\|\mathbf{x}\|^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2, 4) f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\|\mathbf{x}\|^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 2\|\mathbf{x}\|^{-1}} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + 4 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 2\|\mathbf{x}\|^{-1}} f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha \|\mathbf{x}\|^2 + \beta)^{1/2} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

par l'existence des deux intégrales stochastiques en $\boldsymbol{\xi}$ puisque par hypothèse $\int \min(\gamma, \|\boldsymbol{\xi}\|^2) \mu_X(d\boldsymbol{\xi}) < +\infty$, et par les propriétés de décroissance de $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$.

Ensuite, puisque $\widehat{u(\cdot - \mathbf{b})}(\boldsymbol{\xi}) = e^{-j\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{b} \rangle} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{u(\cdot/a)}(\boldsymbol{\xi}) = a^2 \widehat{u}(a\boldsymbol{\xi})$ on a pour $(u, v) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)^2$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\langle X, u(\cdot - \mathbf{b}) \rangle \overline{\langle X, v(\cdot - \mathbf{b}) \rangle}], \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u(\cdot - \mathbf{b})}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{v(\cdot - \mathbf{b})}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right)} \right], \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-j\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{b} \rangle} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{+j\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{b} \rangle} \overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})} f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) \overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})} f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\
&= \mathbb{E}[\langle X, u \rangle \overline{\langle X, v \rangle}],
\end{aligned}$$

et de même en posant $\boldsymbol{\zeta} = a\boldsymbol{\xi}$, $d\boldsymbol{\zeta} = a^2 d\boldsymbol{\xi}$ et ainsi par homogénéité de f :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle X, a^{-2}u(\cdot/a) \rangle \overline{\langle X, a^{-2}v(\cdot/a) \rangle}] &= \frac{1}{a^4} \int_{\mathbb{R}^2} a^2 \widehat{u}(a\boldsymbol{\xi}) a^2 \overline{\widehat{v}(a\boldsymbol{\xi})} f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\
&= \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}(\boldsymbol{\zeta}) \overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\zeta})} f_X(\boldsymbol{\zeta}/a) d\boldsymbol{\zeta}, \\
&= \frac{1}{a^2} a^{2H+2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}(\boldsymbol{\zeta}) \overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\zeta})} f_X(\boldsymbol{\zeta}) d\boldsymbol{\zeta}, \\
&= a^{2H} \mathbb{E}[\langle X, u \rangle \overline{\langle X, v \rangle}].
\end{aligned}$$

□

Il serait alors naturel de vouloir définir la transformée de Riesz d'un champ gaussien H-sssi par dualité comme suit :

$$\forall u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2), \quad \langle \mathcal{R}X, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle X, \mathcal{R}u \rangle = \begin{pmatrix} \langle X, \mathcal{R}_1 u \rangle \\ \langle X, \mathcal{R}_2 u \rangle \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

avec d'après (5.9) :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{R}_\ell X, u \rangle &= \langle X, \mathcal{R}_\ell u \rangle, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{R}_\ell u}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(-j \frac{\xi_\ell}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right) \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

et où l'on noterait

$$f_{\mathcal{R}_\ell X}^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \left(-j \frac{\xi_\ell}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}).$$

Malheureusement la sous-classe de Schwartz $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$ n'est pas stable par la transformée de Riesz, $\mathcal{R}_\ell u \notin \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$, et bien que $\langle X, \mathcal{R}_\ell u \rangle$ soit un nombre défini, et caractérisé par l'expression (5.11), nous ne pouvons rien dire de la continuité de $u \mapsto \langle X, \mathcal{R}_\ell u \rangle$. Donc il n'est pas possible de définir comme transformée de Riesz de X une distribution tempérée T de \mathcal{S}'_0 vérifiant $\langle T, u \rangle = \langle X, \mathcal{R}_\ell u \rangle$. Nous garderons toutefois à l'esprit la proximité de l'expression (5.11) de $\langle X, \mathcal{R}_\ell u \rangle$ avec Riesz, comme heuristique pour de futures interprétations. Au lieu de considérer des fonctions dans la classe de Schwartz, nous allons exploiter le formalisme des ondelettes de Riesz possédant des moments nuls, afin d'être malgré tout en mesure de définir une notion d'orientation pour les champs H-sssi.

5.2.3 Définition de l'orientation d'un champ H-sssi

Formulation par les ondelettes de Riesz

Un recours aux ondelettes monogènes pour détecter des orientations locales a été proposé par UNSER et CHENOUEARD (2013). Le point de départ est l'utilisation de bases d'ondelettes isotropes dont l'existence est prouvée dans (HELD et coll., 2010; PAPADAKIS et coll., 2003; PORTILLA et SIMONCELLI, 2000; ROMERO et coll., 2009; UNSER et coll., 2011; VAN DE VILLE et coll., 2005). Pour une implémentation pratique, UNSER et CHENOUEARD (2013) propose de définir une trame d'ondelettes de la façon suivante :

Proposition 5.4 (TRAME D'ONDELETTES ISOTROPES)

Soit $\varphi(\lambda)$ une fonction réelle dont le profil fréquentiel radial est tel que

- $\varphi(\lambda) = 0, \forall \lambda > \pi$.
- $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi(2^j \lambda)|^2 = 1, \forall \lambda$.
- $\forall n = 0, \dots, N, \varphi^{(n)}(0) = 0, \forall \lambda$.

Alors, l'ondelette réelle isotrope ψ définie par sa transformée de Fourier 2-D $\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\|\boldsymbol{\xi}\|)$, génère une trame d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dont les fonctions de base $\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^i \psi(2^i \mathbf{x} - \mathbf{k})$ sont isotropes avec des moments nuls d'ordre N .

La propriété de trame assure que toute fonction f appartenant à $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut se décomposer comme suit

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,\mathbf{k}} \langle f, \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle \psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

avec $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{i,\mathbf{k}} |c_{i,\mathbf{k}}|^2$ où

$$c_{i,\mathbf{k}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle, \quad (5.12)$$

désignent les coefficients d'ondelettes de la fonction f . Les propriétés de la transformée de Riesz établies aux Proposition 4.2 et 4.1, impliquent que si $\{\psi_{i,\mathbf{k}}\}$ est une trame d'ondelettes isotropes de $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $\{\mathcal{R}\psi_{i,\mathbf{k}}\}$ est une trame d'ondelettes à valeurs vectorielles de $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$. De plus, pour tout (i, \mathbf{k}) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$, on a

$$\mathcal{R}\psi_{i,\mathbf{k}} = (\mathcal{R}\psi)_{i,\mathbf{k}},$$

ce qui signifie que la trame d'ondelettes $\{\mathcal{R}\psi_{i,\mathbf{k}}\}$ est générée par une seule ondelette mère $\mathcal{R}\psi$. Les coefficients d'ondelettes de Riesz d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dans la trame d'ondelettes à valeurs vectorielles $\{\mathcal{R}\psi_{i,\mathbf{k}}\}$ sont alors définis par :

$$c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(f) = \begin{pmatrix} c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f) \\ c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(f) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

avec $c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f) = \langle f, \mathcal{R}_1\psi_{i,\mathbf{k}} \rangle$ and $c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(f) = \langle f, \mathcal{R}_2\psi_{i,\mathbf{k}} \rangle$.

Le tenseur de structure à l'échelle $i \in \mathbb{Z}$ est alors défini par la matrice 2×2 suivante de rang 1 :

$$\mathbf{J}_{f,i}^W[\mathbf{k}] = c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(f)c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(f)^* = \begin{pmatrix} |c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f)|^2 & c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f) \cdot \overline{c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(f)} \\ c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f) \cdot c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(f) & |c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(f)|^2 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

laquelle a été filtrée par une fenêtre discrète positive $w[\mathbf{k}]$. Ceci mène à un tenseur de structure d'ondelettes, qui en toute généralité dépend non seulement de l'échelle et de la localisation des indices (i, \mathbf{k}) , mais aussi de l'ondelette ψ considérée.

Soit maintenant $\{\psi_{i,\mathbf{k}}\}$ une ondelette isotrope d'une trame comme définie précédemment, et $\{\psi_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}\}$ l'ondelette de Riesz vectorielle générée par $\mathcal{R}\psi$. Notre notion d'orientation d'un champ H-sssi à partir des ondelettes est basée sur ce résultat préliminaire menant à une nouvelle formulation d'un tenseur de structure.

Théorème 5.1 (TENSEUR DE STRUCTURE D'UN CHAMP H-SSSI – ONDELETTES)

Soit X un champ H-sssi de densité spectrale f_X . Alors, les coefficients d'ondelettes de Riesz de X , $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)$, dans la trame d'ondelettes vectorielles $\{\psi_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}\}$, sont bien définis.

De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la matrice de covariance du vecteur $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}$ donnée par :

$$\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)) = \mathbb{E} \left(\mathbf{J}_{f,i}^W[\mathbf{k}] \right) = \mathbb{E} \left(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)^* \right), \quad (5.15)$$

avec $\mathbf{J}_{X,i}^W[\mathbf{k}]$ défini dans (5.14), s'écrit :

$$\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)) = 2^{-2i(H+1)} \left[\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(r)|^2}{r^{2H+1}} dr \right] \mathbf{J}(X), \quad (5.16)$$

où pour tout $\ell_1, \ell_2 \in \{1, 2\}$,

$$[\mathbf{J}(X)]_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\Theta \in \mathbb{S}^1} \Theta_{\ell_1} \Theta_{\ell_2} S_X(\Theta) d\Theta, \quad (5.17)$$

avec la notation $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$. $\mathbf{J}(X)$ est une matrice 2×2 définie positive, dépendant uniquement de la fonction d'anisotropie S_X . On l'appellera tenseur de structure de X .

Preuve :

Premièrement montrons l'existence p.p. du vecteur gaussien $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)$: Pour $\ell = 1, 2$,

$$\begin{aligned} c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell)}(X) &= \langle X, \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) \right) \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(0) \right) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(\boldsymbol{\xi}) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

La troisième égalité provient du théorème de Fubini stochastique (PIPIRAS et TAQQU, 2010), qui est vérifié puisque

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) |\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} d\mathbf{x}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \min(\|\mathbf{x}\|^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2, 4) f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\|\mathbf{x}\|^2 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 2\|\mathbf{x}\|^{-1}} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + 4 \int_{\|\boldsymbol{\xi}\| > 2\|\mathbf{x}\|^{-1}} f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} |\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha \|\mathbf{x}\|^2 + \beta)^{1/2} |\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < +\infty. \end{aligned}$$

L'existence des deux intégrales stochastiques en $\boldsymbol{\xi}$ est assurée puisque par hypothèse $\int \min(\gamma, \|\boldsymbol{\xi}\|^2) \mu(d\boldsymbol{\xi}) < +\infty$, et par les propriétés d'admissibilité de $\psi_{i,\mathbf{k}}$. La dernière égalité provient du fait que $\widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(\mathbf{0}) = 0$. En effet, comme $\psi_{i,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^i \psi(2^i \mathbf{x} - \mathbf{k}) = 2^i \psi(2^i (\mathbf{x} - 2^{-i} \mathbf{k}))$ on a $\widehat{\psi}_{i,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) = 2^{-i} e^{-j\langle \boldsymbol{\xi}, 2^{-i} \mathbf{k} \rangle} \widehat{\psi}(2^{-i} \boldsymbol{\xi})$, et par définition de la transformée de Riesz,

$$\widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(\boldsymbol{\xi}) = -j \frac{\xi_\ell}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \widehat{\psi}_{i,\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) = -j 2^{-i} e^{-j\langle \boldsymbol{\xi}, 2^{-i} \mathbf{k} \rangle} \frac{\xi_\ell}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \widehat{\psi}(2^{-i} \boldsymbol{\xi}). \quad (5.18)$$

Posons $\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\Theta}$, alors

$$\widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(r\boldsymbol{\Theta}) = -j 2^{-i} e^{-jr\langle \boldsymbol{\Theta}, 2^{-i} \mathbf{k} \rangle} \boldsymbol{\Theta}_\ell \widehat{\psi}(2^{-i} r\boldsymbol{\Theta}),$$

et pour $r = 0$ on a bien

$$\widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}}}(\mathbf{0}) = -j 2^{-i} \boldsymbol{\Theta}_\ell \widehat{\psi}(\mathbf{0}) = 0,$$

puisque $\widehat{\psi}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ par hypothèse.

La matrice de covariance se calcule alors comme suit : en utilisant (5.18), on a pour tout $\ell_1, \ell_2 \in \{1, 2\}$,

$$\mathbb{E}[c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_1)}(X) \overline{c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_2)}(X)}] = 2^{-2i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_{\ell_1} \xi_{\ell_2}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \left| \widehat{\psi}(2^{-i} \boldsymbol{\xi}) \right|^2 f_X(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Posons maintenant $\boldsymbol{\zeta} = 2^{-i} \boldsymbol{\xi}$ et utilisons l'expression de f donnée Proposition 5.1. Ensuite

$$\mathbb{E}[c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_1)}(X) \overline{c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_2)}(X)}] = 2^{-2i(H+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^{2H+2}} \frac{\zeta_{\ell_1} \zeta_{\ell_2}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2} \left| \widehat{\psi}(\boldsymbol{\zeta}) \right|^2 S_X \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|} \right) d\boldsymbol{\zeta}. \quad (5.19)$$

Posons $\boldsymbol{\zeta} = r\boldsymbol{\Theta}$ avec $(r, \boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$. D'où, en se rappelant que ψ est isotrope, $\widehat{\psi}(\boldsymbol{\zeta}) = \varphi(r)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_1)}(X) \overline{c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell_2)}(X)}] &= 2^{-2i(H+1)} \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \int_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{2H+2}} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_1} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_2} |\varphi(r)|^2 S_X(\boldsymbol{\Theta}) r dr d\boldsymbol{\Theta}, \\ &= 2^{-2i(H+1)} \left[\int_{r=0}^{+\infty} \frac{|\varphi(r)|^2}{r^{2H+1}} dr \right] \left[\int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_1} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_2} S_X(\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta} \right], \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

On définit maintenant à partir de ce tenseur de structure une notion d'orientation du champ H -sssi X ainsi qu'un indice de cohérence.

Définition 5.1 (ORIENTATION ET INDICE DE COHÉRENCE D'UN CHAMP H -SSSI)

Soit le tenseur de structure d'un champ gaussien X H -sssi, soit la matrice $\mathbf{J}(X)$ définie au Théorème 5.1 (5.17). Soit λ_1, λ_2 ses deux valeurs propres strictement positives. L'indice de cohérence de X est défini par

$$\chi(X) = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (5.20)$$

L'orientation \vec{n} est le vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre de $\mathbf{J}(X)$.

Remarque 5.2. En vertu du Théorème 5.1, la définition de l'orientation ne dépend ni de l'échelle, ni de la position (ce qui paraît cohérent puisque la propriété des accroissements stationnaires a pour conséquence que le comportement du champ ne dépend pas de l'endroit où on l'observe), ni du choix de l'ondelette. Ce qui fait de cette définition de l'orientation une notion intrinsèque au champ, qui dépend uniquement de la fonction d'anisotropie de ce dernier.

5.2.4 Lien avec le tenseur de structure des gradients

Montrons de façon heuristique que l'on peut mettre l'expression (5.15) sous la forme d'un tenseur de structure tel que celui des gradients (4.7), afin de justifier l'appellation de $\mathbf{J}(X)$.

Proposition 5.5 (FORMULATION PAR UN TENSEUR DE RIESZ)

Soit X un champ H -sssi. Alors, pour toute ondelette $\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\|\boldsymbol{\xi}\|)$, la matrice de covariance Σ du vecteur $(\langle X, \mathcal{R}_1\psi_{i,k} \rangle, \langle X, \mathcal{R}_2\psi_{i,k} \rangle)^\top$ définie en (5.15) et dont l'expression est donnée en (5.16), peut se réécrire sous la forme du tenseur de structure suivant :

$$\Sigma = -\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}X(\mathbf{x}) \mathcal{R}X(\mathbf{x})^* (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right], \quad (5.21)$$

où on a posé $\mathcal{R}X = (\mathcal{R}_1X, \mathcal{R}_2X)$ et comme champ

$$\mathcal{R}_\ell X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \left(-j \frac{\xi_\ell}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}).$$

Remarque 5.3. On parle d'heuristique car comme mentionné dans la section 5.2.2, on ne peut formellement définir la transformée de Riesz de X par le procédé classique de dualité. $\mathcal{R}_\ell X$ n'est pas déterminé de manière unique à partir de X .

Preuve :

En partant de l'expression obtenue en (5.19) on a :

$$\mathbb{E} \left[\langle X, \mathcal{R}_{\ell_1} \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle \overline{\langle X, \mathcal{R}_{\ell_2} \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle} \right] \quad (5.22)$$

$$= 2^{-2i(H+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_{\ell_1} \xi_{\ell_2}}{\|\xi\|^2} \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 f_X(\xi) d\xi, \quad (5.23)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\psi * \psi}(\xi) \left(-j \frac{\xi_{\ell_1}}{\|\xi\|} \right) \overline{\left(-j \frac{\xi_{\ell_2}}{\|\xi\|} \right)} f_X(\xi) d\xi, \quad (5.24)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} 2 \cos(\langle \mathbf{x}, \xi \rangle) (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \left(-j \frac{\xi_{\ell_1}}{\|\xi\|} \right) \overline{\left(-j \frac{\xi_{\ell_2}}{\|\xi\|} \right)} f_X(\xi) d\xi, \quad (5.25)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(- \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \overline{(e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1)} (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \left(-j \frac{\xi_{\ell_1}}{\|\xi\|} \right) f_X^{1/2}(\xi) \overline{\left(-j \frac{\xi_{\ell_2}}{\|\xi\|} \right)} f_X^{1/2}(\xi) d\xi \quad (5.26)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \left(-j \frac{\xi_{\ell_1}}{\|\xi\|} \right) f_X^{1/2}(\xi) \overline{(e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \left(-j \frac{\xi_{\ell_1}}{\|\xi\|} \right) f_X^{1/2}(\xi)} d\xi \right) (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.27)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E} \left[\mathcal{R}_{\ell_1}(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{R}_{\ell_2}(\mathbf{x})} \right] (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.28)$$

$$= - \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}_{\ell_1}(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{R}_{\ell_2}(\mathbf{x})} (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]. \quad (5.29)$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne est dû au fait que $\widehat{\psi}^2$ est réelle paire, donc $\psi * \psi$ l'est également et $\widehat{\psi}^2(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \cos(\langle \mathbf{x}, \xi \rangle) (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Ainsi la ligne suivante vient de $2 \cos(\langle \mathbf{x}, \xi \rangle) = 2 - (e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \overline{(e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1)}$, ainsi que de $\int_{\mathbb{R}^2} (\psi * \psi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. □

On rappelle la propriété (v) de la transformée de Riesz énoncée à la Proposition 4.2 pour les fonctions déterministes, cf. (FELSBURG et SOMMER, 2001; UNSER et VAN DE VILLE, 2009) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\mathbf{x}) &= - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} f(\mathbf{x}), \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(f * \frac{1}{2\pi \|\mathbf{x}\|} \right). \end{aligned}$$

Autrement dit la transformée de Riesz est une version lissée du gradient, donc par analogie la formulation (5.21) est comparable au tenseur de structure de type gradient étudié en (4.7) et moyenné par la fenêtre $w = \psi * \psi$.

5.2.5 Exemples

On présente ci-dessous plusieurs exemples de champs gaussiens H-sssi, en explicitant pour chaque cas leur tenseur de structure et orientation.

Champ brownien fractionnaire

Commençons par le champ brownien fractionnaire (FBF) défini à la Proposition 1.20, qui est isotrope et de représentation harmonisable :

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\|\xi\|^{H+1}} (e^{j\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} - 1) \frac{\widehat{\mathbf{W}}(d\xi)}{2\pi}.$$

On vérifie aisément que ($S_X \equiv \frac{1}{2\pi}$), en posant $\Theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$, que

$$[\mathbf{J}(X)]_{1,1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}, \quad [\mathbf{J}(X)]_{1,2} = [\mathbf{J}(X)]_{2,1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0,$$

et

$$[\mathbf{J}(X)]_{2,2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2},$$

ce qui implique

$$\mathbf{J}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi(X) = 0.$$

N'importe quel vecteur unitaire fait alors office de vecteur d'orientation du FBF, ce qui est consistant avec le caractère isotrope que l'on pouvait observer sur les simulations (Figure 2.9).

Champ élémentaire

Le modèle général des champs browniens fractionnaires anisotropes (AFBF) a été présenté dans la section 2.2.2. On se focalise ici sur le cas particulier des champs élémentaires (Définition 2.6), qui correspondent à un AFBF auto-similaire d'ordre H (la fonction de Hurst est constante égale à H) et dont la fonction de topothésie est un cône fréquentiel orienté vers α_0 , et de demi-ouverture $\delta > 0$. Un champ élémentaire admet la représentation harmonisable suivante ($\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\delta > 0$) :

$$X_{\alpha_0, \delta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f_X^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}), \quad (5.30)$$

avec

$$f_X(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} S_X \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right), \quad (5.31)$$

$$S_X(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{4\delta} \left(\mathbf{1}_{[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]}(\arg \boldsymbol{\Theta}) + \mathbf{1}_{[\alpha_0 + \pi - \delta, \alpha_0 + \pi + \delta]}(\arg \boldsymbol{\Theta}) \right). \quad (5.32)$$

Calculons le tenseur de structure $\mathbf{J}(X)$, à partir de la définition du Théorème 5.1.

Remarque 5.4. Les deux caractéristiques présentes dans la définition de S_X , permettent de vérifier $S_X(-\boldsymbol{\Theta}) = S_X(\boldsymbol{\Theta})$, c.-à-d. de prendre en compte les deux portions symétriques du cône, ou de façon équivalente de rendre compte de la π -périodicité de la fonction de topothésie $\theta \mapsto c_{\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta}(\theta) = S_X(\cos \theta, \sin \theta)$. Ainsi en découpant les intégrales définissant les coefficients de $\mathbf{J}(X)$ en deux intégrales sur des segments de longueur π (représentant deux périodes successives), on a directement par le changement de variable $\theta \leftarrow \theta + \pi$ que ces deux intégrales sont égales, ou autrement dit que la contribution de chacune des portions du cône est identique. Dans les calculs qui suivent nous ne considérerons donc qu'un cône dont la contribution sera doublée.

Commençons par les termes diagonaux :

$$[\mathbf{J}(X)]_{1,1} = \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \Theta_1^2 S_X(\boldsymbol{\Theta}) \, d\boldsymbol{\Theta} = \frac{1}{2\delta} \int_{\alpha_0 - \delta}^{\alpha_0 + \delta} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}.$$

Par la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, on obtient de même

$$[\mathbf{J}(X)]_{2,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}.$$

Les derniers termes sont calculés de la manière suivante :

$$[\mathbf{J}(X)]_{1,2} = [\mathbf{J}(X)]_{2,1} = \frac{1}{2\delta} \int_{\alpha_0 - \delta}^{\alpha_0 + \delta} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sin(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}.$$

Ainsi le tenseur de structure d'un champ élémentaire est

$$\mathbf{J}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} & \frac{1}{2} \sin(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \\ \frac{1}{2} \sin(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha_0) \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\mathbf{J}(X)$ se diagonalise comme suit

$$\mathbf{J}(X) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{pmatrix}^T. \quad (5.33)$$

Notons $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les deux valeurs propres de $\mathbf{J}(X)$,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}, \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta},$$

l'indice de cohérence X est donné par

$$\chi(X) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}. \quad (5.34)$$

L'orientation du champ élémentaire $X_{\alpha_0, \delta}$ étant donnée par le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_1 , on obtient

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Remarque 5.5. Ce résultat est cohérent avec ce que l'on obtenait sur nos simulations (Figure 2.10). Pour $\delta = \pi/2$, on retrouve comme champ élémentaire trivial le FBF qui est isotrope, et on a bien $\chi(X) = \sin(\pi)/\pi = 0$. A l'inverse on remarque que $\chi(X)$ tend vers 1 quand $\delta \rightarrow 0$, ce qui signifie que la cohérence est forte quand le cône des directions autorisées est étroit autour de l'angle α_0 , ce que l'on observait là aussi sur les simulations de la Figure 2.10.

Remarque 5.6. Dans le cas limite $\delta \rightarrow 0$, la densité de fonction S_X tend vers une mesure de Dirac le long de la ligne $\arg \Theta = \alpha_0$ (représentée Figure 4.3), et le tenseur de structure devient dégénéré :

$$\mathbf{J}(X) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha_0 & \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 & \sin^2 \alpha_0 \end{pmatrix},$$

ce qui se diagonalise comme suit :

$$\mathbf{J}(X) = \mathbf{R}_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\alpha_0}^T,$$

menant au même vecteur d'orientation $(\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)^T$. Dans ce cas limite, le tenseur de structure n'est plus inversible.

Somme de deux champs élémentaires

Afin de montrer que notre notion d'orientation est « robuste » au cas de champs à orientations multiples, considérons le modèle suivant ($\alpha_0, \alpha_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\delta > 0$) :

$$X = X_{\alpha_0, \delta} + X_{\alpha_1, \delta},$$

c'est-à-dire une superposition de deux champs élémentaires de même régularité H , de même ouverture mais d'orientation différente $\alpha_0 \neq \alpha_1$. On s'attend alors à ce que l'orientation du champ X soit à mi-chemin entre l'orientation de $X_{\alpha_0, \delta}$ et celle de $X_{\alpha_1, \delta}$. Vérifions qu'il en est

bien ainsi. On suppose que $\delta < |\alpha_1 - \alpha_0|/2$. Cette condition implique que $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \cap [\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta] = \emptyset$ c'est-à-dire que les densités spectrales ont des supports disjoints (les cônes ne se recoupent pas). Alors nous avons

$$\mathbf{J}(X) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} (\cos(2\alpha_0) + \cos(2\alpha_1)) & \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} (\sin(2\alpha_0) + \sin(2\alpha_1)) \\ \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} (\sin(2\alpha_0) + \sin(2\alpha_1)) & 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} (\cos(2\alpha_0) + \cos(2\alpha_1)) \end{pmatrix},$$

dont on vérifie après quelques calculs trigonométriques que $\mathbf{J}(X)$ se diagonalise ainsi

$$\mathbf{J}(X) = \mathbf{R}_{(\alpha_0 + \alpha_1)/2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_0 - \alpha_1) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_0 - \alpha_1) \end{pmatrix} \mathbf{R}_{(\alpha_0 + \alpha_1)/2}^\top,$$

où l'on note la matrice de rotation

$$\mathbf{R}_{(\alpha_0 + \alpha_1)/2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Donc l'indice de cohérence est

$$\chi(X) = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_0 - \alpha_1), \quad (5.36)$$

qui tend vers $\cos(\alpha_0 - \alpha_1)$ quand $\delta \rightarrow 0$. D'où plus α_0 et α_1 sont proches, plus le champ aléatoire X est cohérent et admet une orientation dominante. L'orientation de X est donnée par

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

On retrouve l'orientation dominante de X , correspondant effectivement au demi-angle formé par les orientations de $X_{\alpha_0, \delta}$ et de $X_{\alpha_1, \delta}$. Le cas plus général où les ouvertures des deux champs élémentaires sont distinctes sera traité dans l'exemple 5.5.

Déformation d'un champ élémentaire par une transformation linéaire

Soit \mathbf{L} une matrice 2×2 inversible et $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\delta > 0$. Définissons le champ déformé

$$X_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = X_{\alpha_0, \delta}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}). \quad (5.38)$$

En vertu de la Proposition 5.2, nous disposons d'une expression explicite de la densité spectrale du champ $X_{\mathbf{L}}$ déformé par la transformation linéaire :

$$\begin{aligned} f_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{|\det(\mathbf{L})|}{2\delta} \|\mathbf{L}^\top \boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]}(\arg(\mathbf{L}^\top \boldsymbol{\xi})), \\ &= \frac{|\det(\mathbf{L})|}{2\delta} \|\mathbf{L}^\top \boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\tan(\alpha_0 - \delta), \tan(\alpha_0 + \delta)]}((\mathbf{L}^\top \boldsymbol{\xi})_2 / (\mathbf{L}^\top \boldsymbol{\xi})_1). \end{aligned}$$

Puisque la matrice \mathbf{L} est inversible, elle admet une [décomposition en valeurs singulières, ou Singular Value Decomposition \(SVD\)](#) $\mathbf{L} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}^\top$ où \mathbf{U}, \mathbf{V} sont deux matrices orthogonales, et $\boldsymbol{\Delta}$ une matrice diagonale dont les valeurs propres sont positives. On pourra déduire le cas général d'une matrice \mathbf{L} à partir de ces trois cas spécifiques : $\mathbf{L} \in O_2^+(\mathbb{R})$, $\mathbf{L} \in O_2^-(\mathbb{R})$ et \mathbf{L} diagonale dont les valeurs propres sont positives. Avant de dériver la forme générale d'un vecteur orientation, nous allons considérer l'action de chacun des termes de la [SVD](#).

(i) Considérons le cas où \mathbf{L} est une matrice orthogonale de la forme

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

on a alors

$$f_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\delta} \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\alpha_0+\theta_0-\delta, \alpha_0+\theta_0+\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi}),$$

ce qui implique que l'on peut choisir comme orientation de $X_{\mathbf{L}}$ le vecteur unitaire

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0 + \theta_0) \\ \sin(\alpha_0 + \theta_0) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} = (\mathbf{L}^{-1})^{\top} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

puisque toute matrice orthogonale est égale à la transposée de son inverse.

(ii) Traitons maintenant le cas où \mathbf{L} est une matrice orthogonale de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a cette fois

$$f_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\delta} \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\theta_0-\alpha_0-\delta, \theta_0-\alpha_0+\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi}),$$

ce qui implique que l'on peut choisir comme orientation de $X_{\mathbf{L}}$ le vecteur unitaire

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \alpha_0) \\ \sin(\theta_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} = (\mathbf{L}^{-1})^{\top} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

puisque comme ci-dessus toute matrice orthogonale est égale à la transposée de son inverse.

(iii) Traitons enfin le cas où \mathbf{L} est une matrice diagonale $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Dans ce cas observons que la condition

$$\tan(\alpha_0 - \delta) < \frac{(\mathbf{L}^{\top} \boldsymbol{\xi})_2}{(\mathbf{L}^{\top} \boldsymbol{\xi})_1} < \tan(\alpha_0 + \delta),$$

est équivalente à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tan(\alpha_0 - \delta) < \frac{\xi_2}{\xi_1} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tan(\alpha_0 + \delta)$, c'est-à-dire à

$$\underline{\delta}_{\Delta} < \arg \boldsymbol{\xi} < \bar{\delta}_{\Delta},$$

avec $\underline{\delta}_{\Delta} = \arctan(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tan(\alpha_0 - \delta))$ et $\bar{\delta}_{\Delta} = \arctan(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tan(\alpha_0 + \delta))$. D'où,

$$\begin{aligned} f_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{|\det(\mathbf{L})|}{2\delta} \|\mathbf{L}^{\top} \boldsymbol{\xi}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\underline{\delta}_{\Delta}, \bar{\delta}_{\Delta}]}(\arg \boldsymbol{\xi}), \\ S_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\Theta}) &= \frac{|\det(\mathbf{L})|}{2\delta} \|\mathbf{L}^{\top} \boldsymbol{\Theta}\|^{-2H-2} \mathbf{1}_{[\underline{\delta}_{\Delta}, \bar{\delta}_{\Delta}]}(\arg \boldsymbol{\Theta}). \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que

$$[\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})]_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_1} \boldsymbol{\Theta}_{\ell_2} S_{X_{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta},$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{[\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})]_{1,1}}{|\det(\mathbf{L})|} &= \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \cos^2 \theta S_{X_{\mathbf{L}}}(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \frac{\cos^2 \theta}{(\lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta)^{H+1}} d\theta, \\ \frac{[\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})]_{2,2}}{|\det(\mathbf{L})|} &= \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \sin^2 \theta S_{X_{\mathbf{L}}}(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \frac{\sin^2 \theta}{(\lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta)^{H+1}} d\theta, \\ \frac{[\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})]_{1,2}}{|\det(\mathbf{L})|} &= \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \cos \theta \sin \theta S_{X_{\mathbf{L}}}(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\delta} \int_{\underline{\delta}_{\Delta}}^{\bar{\delta}_{\Delta}} \frac{\cos \theta \sin \theta}{(\lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta)^{H+1}} d\theta. \end{aligned}$$

À présent, définissons $(u_1(\theta), u_2(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et introduisons les fonctions

$$f_{\ell_1, \ell_2} : \theta \mapsto u_{\ell_1}(\theta) u_{\ell_2}(\theta) (\lambda_1^2 u_1(\theta)^2 + \lambda_2^2 u_2(\theta)^2)^{-H-1}, \quad F_{\ell_1, \ell_2} : x \mapsto \int_0^x f_{\ell_1, \ell_2}(\theta) d\theta,$$

$$\nu : \alpha \mapsto \arctan\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tan \alpha\right), \quad G_{\ell_1, \ell_2} : \alpha \mapsto F_{\ell_1, \ell_2}(\nu(\alpha)).$$

Chaque terme du tenseur de structure s'écrit

$$\frac{[\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})]_{\ell_1, \ell_2}}{|\det(\mathbf{L})|} = \frac{G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 + \delta) - G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 - \delta)}{2\delta}.$$

Seuls les termes symétriques diagonaux possèdent une forme close (faisant intervenir des fonctions spéciales). Afin de tirer une conclusion quant à l'orientation, et donc au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})$ qu'il s'agit de caractériser, il est nécessaire d'effectuer un développement limité. Quand le paramètre δ est petit, on a

$$\begin{aligned} \frac{G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 + \delta) - G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 - \delta)}{2\delta} &= G'_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0) + \frac{\delta^2}{12} G'''_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0) + O(\delta^4), \\ &= \nu'(\alpha_0) F'_{\ell_1, \ell_2}(\nu(\alpha_0)) + O(\delta^2), \\ &= \nu'(\alpha_0) f_{\ell_1, \ell_2}(\nu(\alpha_0)) + O(\delta^2). \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 + \delta) - G_{\ell_1, \ell_2}(\alpha_0 - \delta)}{2\delta} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_1^2 \sin^2 \alpha_0} \times \frac{u_{\ell_1}(\nu(\alpha_0)) u_{\ell_2}(\nu(\alpha_0))}{(\lambda_1^2 \cos^2(\nu(\alpha_0)) + \lambda_2^2 \sin^2(\nu(\alpha_0)))^{H+1}} + O(\delta^2).$$

Définissons $C_{H, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_0} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_2^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_1^2 \sin^2 \alpha_0)^{-1} (\lambda_1^2 \cos^2(\nu(\alpha_0)) + \lambda_2^2 \sin^2(\nu(\alpha_0)))^{-H-1}$. Alors, on a pour δ petit,

$$\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}}) = C_{H, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_0} \begin{pmatrix} \cos^2(\nu(\alpha_0)) & \cos(\nu(\alpha_0)) \sin(\nu(\alpha_0)) \\ \cos(\nu(\alpha_0)) \sin(\nu(\alpha_0)) & \sin^2(\nu(\alpha_0)) \end{pmatrix} + O(\delta^2),$$

qui peut se réécrire comme

$$\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}}) = C_{H, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_0} \mathbf{R}_{\nu(\alpha_0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\nu(\alpha_0)}^{\top} + O(\delta^2).$$

Par conséquent $\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{L}} = (\cos \nu(\alpha_0), \sin \nu(\alpha_0))^{\top}$ peut être vu comme une approximation du vecteur propre de $\mathbf{J}(X_{\mathbf{L}})$ associé à la plus grande valeur propre, et donc à une approximation de l'orientation de $X_{\mathbf{L}}$.

Finalement, remarquons que

$$\nu(\alpha_0) = \arctan\left(\frac{\lambda_1 \sin \alpha_0}{\lambda_2 \cos \alpha_0}\right) = \arg\left[\begin{pmatrix} \lambda_2 \cos \alpha_0 \\ \lambda_1 \sin \alpha_0 \end{pmatrix}\right] = \arg\left[\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}\right].$$

Il s'en suit qu'une approximation (à δ^2 près) du vecteur d'orientation de $X_{\mathbf{L}}$ est dans ce cas

$$\vec{\mathbf{n}}_{\mathbf{L}} = \frac{\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{n}}}{\left\| \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{n}} \right\|}, \quad \text{avec } \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Observons que $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de \mathbf{L} . D'où, en divisant le numérateur et le dénominateur de la dernière équation par $\det(\mathbf{L}) = \lambda_1 \lambda_2$, on obtient

$$\vec{n}_{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{L}^{-1} \vec{n}}{\|\mathbf{L}^{-1} \vec{n}\|} = \frac{(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}\|}, \quad (5.41)$$

puisque la matrice diagonale \mathbf{L}^{-1} est égale à sa transposée.

On rassemble maintenant les cas (5.39), (5.40) et (5.41) : en utilisant l'existence de la SVD pour toute matrice, on déduit la proposition suivante

Proposition 5.6 (ORIENTATION D'UN CHAMP GAUSSIEN H-SSSI LINÉAIREMENT DÉFORMÉ)

Soit \mathbf{L} une matrice 2×2 inversible, et $X_{\mathbf{L}}$ le champ gaussien défini par (5.38). Désignons par $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}$ le vecteur d'orientation de X . Alors le vecteur unitaire

$$\vec{n}_{\mathbf{L}} = \frac{(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}\|},$$

est une approximation (à δ^2 près) du vecteur d'orientation de $X_{\mathbf{L}}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{L} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^{\top}$ la SVD \mathbf{L} , avec $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in O_2(\mathbb{R})$ et Δ diagonale aux valeurs propres positives. $X_{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{V}^{-\top} \Delta^{-1} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x})$ est le champ gaussien défini par (5.38). Décomposons les trois opérations comme ceci :

$$X_{\mathbf{L}} = \underbrace{X \circ (\mathbf{V}^{\top})^{-1}}_{X_1} \circ \underbrace{\Delta^{-1}}_{X_2} \circ \mathbf{U}^{-1}.$$

Alors, puisque \mathbf{V}^{\top} est une matrice orthogonale, on a d'après (i) et (ii) que le vecteur d'orientation unitaire de X_1 est

$$\vec{n}_1 = ((\mathbf{V}^{\top})^{-1})^{\top} \vec{n}.$$

D'après (iii), le vecteur d'orientation unitaire (à δ^2 près) de $X_2 = X_1 \circ \Delta^{-1}$ est

$$\vec{n}_2 = \frac{(\Delta^{-1})^{\top} \vec{n}_1}{\|(\Delta^{-1})^{\top} \vec{n}_1\|} = \frac{(\Delta^{-1})^{\top} ((\mathbf{V}^{\top})^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|(\Delta^{-1})^{\top} ((\mathbf{V}^{\top})^{-1})^{\top} \vec{n}\|}.$$

Finalement, d'après de nouveau (i) et (ii), le vecteur d'orientation unitaire (à δ^2 près) de $X_{\mathbf{L}} = X_2 \circ \mathbf{U}^{-1}$ est

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\mathbf{L}} &= \frac{(\mathbf{U}^{-1})^{\top} \vec{n}_2}{\|(\mathbf{U}^{-1})^{\top} \vec{n}_2\|}, \\ &= \frac{(\mathbf{U}^{-1})^{\top} (\Delta^{-1})^{\top} ((\mathbf{V}^{\top})^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|(\mathbf{U}^{-1})^{\top} (\Delta^{-1})^{\top} ((\mathbf{V}^{\top})^{-1})^{\top} \vec{n}\|}, \\ &= \frac{((\mathbf{V}^{\top})^{-1} \Delta^{-1} \mathbf{U}^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|((\mathbf{V}^{\top})^{-1} \Delta^{-1} \mathbf{U}^{-1})^{\top} \vec{n}\|} = \frac{(\mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^{\top})^{\top} \vec{n}}{\|(\mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^{\top})^{\top} \vec{n}\|} = \frac{(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}}{\|(\mathbf{L}^{-1})^{\top} \vec{n}\|}. \end{aligned}$$

□

5.3 Orientation d'un champ aléatoire localisable

On étend à présent la notion d'orientation intrinsèque, définie pour les champs H -sssi, au cadre plus général des *champs gaussiens localisables*. Nous commencerons par définir cette classe de champs aléatoires ainsi que la notion d'orientation qui lui est associée; puis nous l'appliquerons aux deux modèles de champs aléatoires à orientations prescrites que nous avons construits au Chapitre 3.

5.3.1 Définition et exemple

Un champ est H -localisable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ s'il admet un champ tangent en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ sous sa forme faible, dont on rappelle la Définition 1.27 :

Définition 5.2 (CHAMP GAUSSIEN LOCALISABLE)

Soit $H \in (0, 1)$. Le champ $X = \{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ est dit H -localisable au point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ avec comme champ tangent (ou forme locale) le champ aléatoire $Y_{\mathbf{x}_0} = \{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ si

$$\left\{ \frac{X(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0)}{\rho^H} \right\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2} \xrightarrow{d} \{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})\}_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2}, \quad (5.42)$$

quand $\rho \rightarrow 0$, où \xrightarrow{d} est la convergence faible pour les processus stochastiques (cf. BILLINGSLEY (1968) et section 1.9).

Un champ aléatoire $X = \{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ est dit localisable, si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ il est H -localisable en \mathbf{x} , pour un certain $H \in (0, 1)$.

Par ailleurs, on connaît grâce à FALCONER (2002, 2003) la forme des champs tangents, comme nous l'avons mentionné Proposition 1.31. Si X est localisable et à trajectoires continues, et que pour presque tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ le champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ n'est pas trivial (c.-à-d. $Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x} \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{x}_0}$), alors $Y_{\mathbf{x}_0}$ est à accroissements stationnaires et auto-similaire, soit un champ H -sssi, pour lequel on a défini une notion orientation. Il est donc naturel de définir l'orientation du champ localisable X en \mathbf{x}_0 par l'orientation de son champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ H -sssi. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 5.3 (ORIENTATION DES CHAMPS LOCALISABLES)

Soit X un champ gaussien à trajectoires continues. On suppose que X est H -localisable au point \mathbf{x}_0 , de champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$, et que $Y_{\mathbf{x}_0}$ est H -sssi. On est alors en mesure de définir les notions suivantes :

- La fonction d'anisotropie locale $S_{\mathbf{x}_0}$ au point \mathbf{x}_0 du champ gaussien localisable X est la fonction d'anisotropie du champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$.
- Le tenseur de structure locale $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}(X)$ au point \mathbf{x}_0 du champ gaussien localisable X est le tenseur de structure du champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$.
- L'orientation locale au point \mathbf{x}_0 du champ gaussien localisable X est l'orientation du champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$.

À la lumière de ces définitions, on déduit que tout champ localisable X admet une orientation

locale en presque tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 5.1 (Champ brownien multifractionnaire). Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, 1)$ une fonction continûment différentiable dont l'image est un compact $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$. Le champ brownien multifractionnaire (MBF) avec pour fonction multifractionnaire h , est le champ gaussien défini par la représentation harmonisable suivante :

$$X_h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) . \quad (5.43)$$

Il admet en chaque point un tenseur de structure proportionnel à la matrice identité. En particulier, tout vecteur unitaire est une orientation de X_h . En effet, le champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ du MBF au point \mathbf{x}_0 est un FBF d'ordre $h(\mathbf{x}_0)$, dont le tenseur de structure a été déterminé dans l'Exemple 5.2.5.

Fort de cette définition d'orientation d'un champ localisable, nous allons étudier l'orientation des deux classes de champs gaussiens que nous avons introduits et simulés au Chapitre 3, à savoir les *champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés* (GAFBF) et les *champs browniens fractionnaires anisotropes déformés* (WAFBF).

5.3.2 Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés

On rappelle que les champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés (GAFBF) sont définis à partir de deux fonctions $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ et C satisfaisant aux hypothèses (\mathcal{H}) , et possèdent la représentation spectrale

$$X(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) . \quad (5.44)$$

De plus on a démontré au Théorème 3.1 qu'un GAFBF X admettait en tout point \mathbf{x}_0 un champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ défini par

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f_{Y_{\mathbf{x}_0}}^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{j\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\mathbf{x}_0)+1}} \widehat{\mathbf{W}}(d\boldsymbol{\xi}) . \quad (5.45)$$

D'où la proposition suivante s'appliquant au champ localisable X :

Proposition 5.7 (ORIENTATION LOCALE D'UN GAFBF)

Un GAFBF X admet en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ une fonction d'anisotropie $S_{\mathbf{x}_0}$, dont l'expression est

$$S_{\mathbf{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}) = C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\Theta})^2, \quad \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1, \quad (5.46)$$

et son orientation est donnée par le vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre du tenseur de structure local $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}(X)$ défini par

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}(X)]_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \Theta_{\ell_1} \Theta_{\ell_2} S_{\mathbf{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta} = \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \Theta_{\ell_1} \Theta_{\ell_2} C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\Theta})^2 d\boldsymbol{\Theta} . \quad (5.47)$$

Preuve :

Le champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ de X en \mathbf{x}_0 défini par (5.45) est bien un champ gaussien à accroissements stationnaires (étant donnée la forme de sa représentation harmonisable cf. Proposition 1.17) et auto-similaire d'ordre $h(\mathbf{x}_0)$ (notamment car C est homogène de degré 0 en $\boldsymbol{\xi}$ par hypothèse), donc c'est un champ H-sssi pour lequel on sait définir l'orientation par tenseur de structure à partir de sa fonction d'anisotropie, qui d'après la Proposition 5.1 est définie par

$$f_{Y_{\mathbf{x}_0}}(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^{-2h(\mathbf{x}_0)-2} S_{Y_{\mathbf{x}_0}} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \right).$$

Puisqu'ici $f_{Y_{\mathbf{x}_0}}^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\xi}\|^{-h(\mathbf{x}_0)-1} C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})$, en élevant au carré et en identifiant on a le résultat escompté. \square

5.3.3 Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes déformés

On rappelle la Définition 3.3 d'un WAFBF, construit comme la déformation d'un champ élémentaire X avec la fonction d'anisotropie S_X définie en (5.30,5.31), par une fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continûment différentiable :

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x})). \quad (5.48)$$

Le champ gaussien $Z_{\Phi, X}$ défini par (5.48) est localisable en tout point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, avec comme champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}$ défini par

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (5.49)$$

où $\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)$ est la matrice jacobienne de Φ au point \mathbf{x}_0 .

Calcul de l'orientation

Proposition 5.8 (ORIENTATION D'UN WAFBF)

Soit $Z_{\Phi, X}$ un WAFBF défini en (5.48), à partir d'un champ élémentaire X (5.30,5.31). De plus, on suppose que la fonction de déformation est un C^1 -difféomorphisme sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Alors, en tout point $\mathbf{x}_0 \in U$, une approximation (à δ^2 près) de l'orientation locale du WAFBF Z , est donnée par

$$\vec{\mathbf{n}}_Z(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)^\top \vec{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)^\top \vec{\mathbf{n}}\|},$$

où $\vec{\mathbf{n}} = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$ est le vecteur d'orientation unitaire du champ élémentaire X , calculé à la section 5.2.5.

Preuve :

D'après la Définition 5.3, l'orientation locale de $Z_{\Phi, X}$ au point $\mathbf{x}_0 \in U$ est donnée par celle de son champ tangent $Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0) \mathbf{x})$. Or, puisque Φ est un difféomorphisme dans un voisinage de \mathbf{x}_0 , $\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)$ est inversible. Ainsi la Proposition 5.6 appliquée à $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)$ induit directement le résultat. \square

Exemple 5.2 (Rotation locale). On illustre maintenant ce résultat en considérant le cas d'un champ élémentaire standard où $\alpha_0 = 0$, donc où le vecteur orientation $\vec{\mathbf{n}} = (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$ du champ élémentaire X est le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)^\top$. La déformation que nous considérons est une rotation locale gouvernée par une fonction continûment différentiable $\mathbf{x} \mapsto \alpha(\mathbf{x})$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 5.9 (ORIENTATION D'UN EF DÉFORMÉ PAR ROTATION LOCALE)

Soit X un champ élémentaire (EF) standard de fonction d'anisotropie

$$S_X(\Theta) = \frac{1}{4\delta} \left(\mathbb{1}_{[-\delta, \delta]}(\arg \Theta) + \mathbb{1}_{[\pi - \delta, \pi + \delta]}(\arg \Theta) \right),$$

c.-à-d. de vecteur d'orientation $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^\top$, et considérons le champ déformé suivant

$$Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{j\langle \Phi(\mathbf{x}), \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H+1}} S_X \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \right) \widehat{\mathbf{W}}(d\xi),$$

avec

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{x}) x_1 + \sin \alpha(\mathbf{x}) x_2 \\ -\sin \alpha(\mathbf{x}) x_1 + \cos \alpha(\mathbf{x}) x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}) \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

et $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que, sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U, \quad \nabla \alpha(\mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{x}_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) x_{0,2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) x_{0,1} \neq -1. \quad (5.51)$$

Ainsi, pour tout point $\mathbf{x}_0 \in U$ vérifiant (5.51), $Z_{\Phi, X}$ admet comme orientation locale

$$\vec{\mathbf{n}}_Z(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) + \langle \mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0))^\perp, \mathbf{x}_0 \rangle \nabla \alpha(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) + \langle \mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0))^\perp, \mathbf{x}_0 \rangle \nabla \alpha(\mathbf{x}_0)\|}. \quad (5.52)$$

avec $\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) = (\cos(\alpha_0(\mathbf{x}_0)), \sin(\alpha_0(\mathbf{x}_0)))$.

Preuve :

Puisque la fonction α est supposée C^1 , la fonction de déformation Φ (5.50) est aussi C^1 . Sa matrice jacobienne est

$$\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{x}) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \Phi_2(\mathbf{x}) & \sin \alpha(\mathbf{x}) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \Phi_2(\mathbf{x}) \\ -\sin \alpha(\mathbf{x}) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \Phi_1(\mathbf{x}) & \cos \alpha(\mathbf{x}) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \Phi_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est

$$\det \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}) = 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}) x_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(\mathbf{x}) x_1.$$

Sous l'hypothèse (5.51) vérifiée par α , le déterminant est non nul sur l'ouvert U , donc Φ est un C^1 -difféomorphisme sur U . Ainsi, la Proposition 5.8 s'applique, et en tout point $\mathbf{x}_0 \in U$, $Z_{\Phi, X}$ admet comme orientation locale $\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{e}_1 / \|\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0)^\top \mathbf{e}_1\|$, laquelle s'écrit

$$\vec{\mathbf{n}}_Z(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) + \langle \mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0))^\perp, \mathbf{x}_0 \rangle \nabla \alpha(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) + \langle \mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0))^\perp, \mathbf{x}_0 \rangle \nabla \alpha(\mathbf{x}_0)\|}.$$

□

Remarque 5.7. Des exemples de réalisations de $Z_{\Phi, X}$ sur le domaine $[0, 1]^2$ sont illustrés Figure 5.1 pour différentes fonctions α , remplissant la condition (5.51). On remarque que le vecteur d'orientation donné à la Proposition 5.9, est égal à $\mathbf{u}(\alpha(\mathbf{x}_0)) = (\cos \alpha(\mathbf{x}_0), \sin \alpha(\mathbf{x}_0))$ plus un terme dépendant du gradient de α . Par conséquent, nous n'avons pas exactement des orientations prescrites gouvernées par α .

Orientations prescrites par transformation conforme

On inverse maintenant la perspective, en cherchant à construire une fonction de déformation Φ , de façon à obtenir des orientations prescrites par α . Dans cette optique, nous allons recourir à une application conforme, qui possède la particularité de préserver les angles. Le résultat

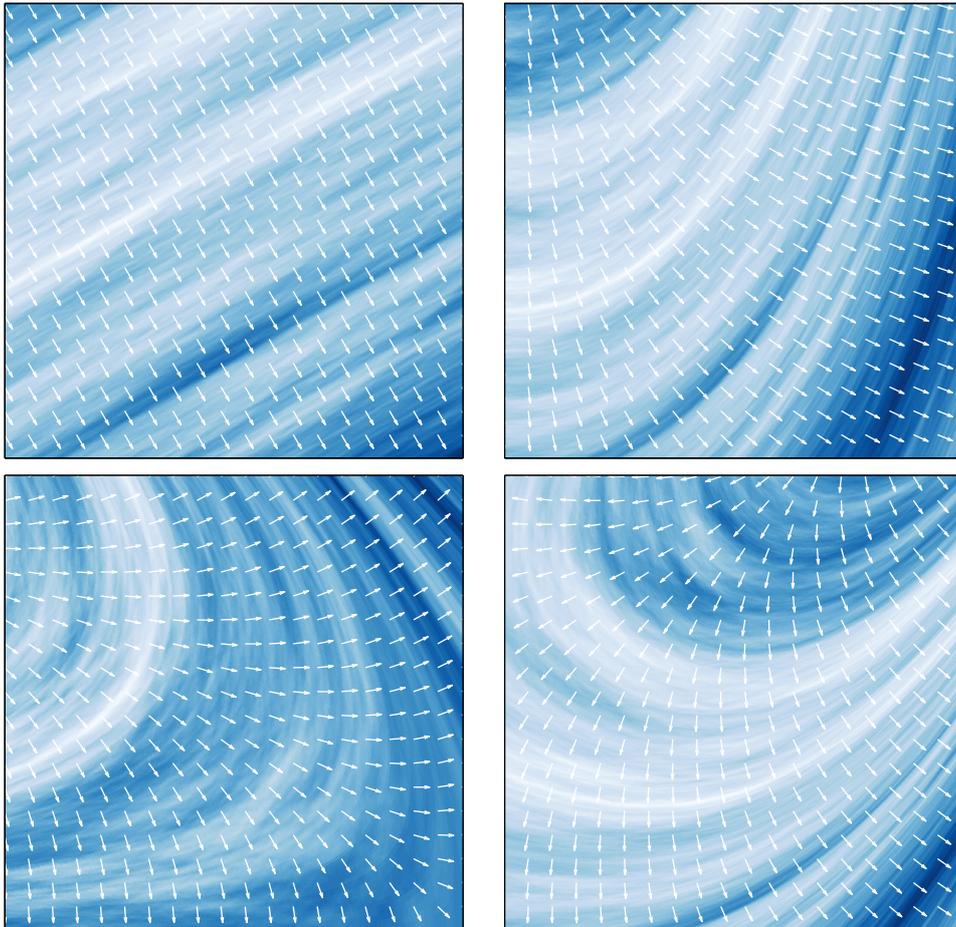


FIGURE 5.1 – Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x})$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire standard de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$, pour les fonctions α suivantes : (a) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$ (en haut à gauche), (b) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ (en haut à droite), (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$ (en bas à gauche), (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$ (en bas à droite).

important établi dans la proposition suivante est que l'on est en mesure de prescrire l'orientation α du champ, si cette fonction d'orientation est supposée harmonique.

Proposition 5.10 (PRESCRIPTION D'ORIENTATION POUR LES FONCTIONS HARMONIQUES)

Soit $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x})$ le champ gaussien (5.48), déformé par une transformation conforme Φ définie comme suit : soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et λ sa fonction conjuguée harmonique telle que $\Psi = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\alpha \end{pmatrix}$ est holomorphe (comme fonction complexe, en identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}). On définit maintenant Φ comme étant une primitive complexe de $\exp(\Psi)$, vue comme une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . Alors en tout point \mathbf{x}_0 , une approximation (à δ^2 près) de l'orientation locale de $Z_{\Phi, X}$ est

$$\vec{n}_Z(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(\mathbf{x}_0)) \\ \sin(\alpha(\mathbf{x}_0)) \end{pmatrix},$$

ce qui est exactement le vecteur d'orientation défini par la fonction d'angle α .

Preuve :

Tout d'abord, l'existence de λ est un résultat classique d'analyse harmonique sur l'existence d'un conjugué harmonique de α (cf. STEIN (1970) par exemple). Ainsi Ψ est holomorphe et $\exp(\Psi)$ l'est également (comme composée de fonctions holomorphes). De surcroît, puisque Φ est une primitive complexe de $\exp(\Psi)$ comme fonction holomorphe sur \mathbb{C} , on a en tout point :

$$\Phi'(\mathbf{x}_0) = \exp(\Psi(\mathbf{x}_0)) = e^{\lambda(\mathbf{x}_0)} e^{-i\alpha(\mathbf{x}_0)},$$

(comme fonction complexe sur \mathbb{C}). De plus, puisque Φ est holomorphe,

$$\Phi'(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = -i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0),$$

ce qui aboutit à la matrice jacobienne suivante :

$$\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x}_0) = \exp(\lambda(\mathbf{x}_0)) \begin{pmatrix} \cos(\alpha(\mathbf{x}_0)) & \sin(\alpha(\mathbf{x}_0)) \\ -\sin(\alpha(\mathbf{x}_0)) & \cos(\alpha(\mathbf{x}_0)) \end{pmatrix},$$

et achève la preuve. □

Exemple 5.3 (Fonctions d'orientations affines). On considère la famille de fonctions harmoniques

$$\alpha(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c,$$

avec a, b, c des constantes réelles. Par la procédure décrite à la Proposition 5.10, on est en mesure de construire une fonction de déformation Φ , dont la formule explicite est

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{\exp(ax_2 - bx_1)}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \sin(ax_1 + bx_2 + c) - b \cos(ax_1 + bx_2 + c) \\ a \cos(ax_1 + bx_2 + c) + b \sin(ax_1 + bx_2 + c) \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Et on vérifie aisément que

$$\mathbf{D}\Phi(\mathbf{x})^\top \mathbf{e}_1 = \exp(ax_2 - bx_1) \begin{pmatrix} \cos(ax_1 + bx_2 + c) \\ \sin(ax_1 + bx_2 + c) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(\mathbf{x}) \\ \sin \alpha(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

5.3.4 Champ de vecteurs

On peut en supplément caractériser les lignes de niveaux correspondant au champ de vecteurs $\vec{n}_Z(\mathbf{x}_0)$, ce qui est équivalent à caractériser les lignes intégrales du champ de vecteurs \mathbf{V}

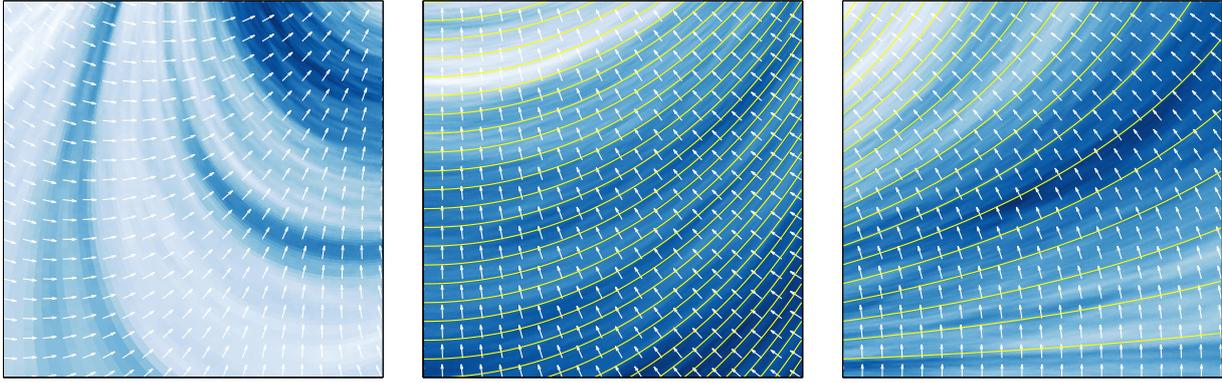


FIGURE 5.2 – Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi, X}(\mathbf{x}) = X(\Phi(\mathbf{x}))$ sur $[0, 1]^2$, où X est un champ élémentaire standard de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$, et Φ est la fonction de déformation définie par (5.53) associée à la fonction harmonique $\alpha(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$, avec de gauche à droite $(a, b) = (2, -1)$, $(a, b, c) = (1, 0, \pi/2)$ et $(a, b, c) = (0, 1, \pi/2)$. Les lignes de niveaux de ces deux dernières étant superposées au champ.

défini par

$$\mathbf{V} : (x, y) \mapsto (-\sin \alpha(x, y), \cos \alpha(x, y)) .$$

Soit $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 , alors la courbe intégrale passant par le point (x_0, y_0) est donnée par

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{V}(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (x_0, y_0) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = -\sin \alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ \gamma_1(0) = x_0 \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = \cos \alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ \gamma_2(0) = y_0 \end{cases} .$$

Reformulé à l'aide d'une fonction à une dimension, cela revient à trouver f telle que $\gamma(t) = (t, f(t))$, et

$$\begin{cases} f'(t) = -\cotan \alpha(t, f(t)) \\ f(0) = y_0 \end{cases} .$$

Dans le cas particulier des fonctions harmoniques $\alpha_1(x, y) = x - \frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2(x, y) = y - \frac{\pi}{2}$, on montre facilement que la fonction paramétrique recherchée est respectivement :

$$\begin{cases} f_1(x) = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + y_0 \\ f_2(x) = \arcsin(\sin(y_0)e^x) \end{cases} .$$

Un exemple de simulation de telles orientations locales prescrites est illustré Figure 5.2, où les variations d'angles sont gouvernées par la fonction $\alpha(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$.

À partir d'une réalisation, les méthodes d'estimation de l'orientation exposées à la section 4.1.2 ou encore dans la section 5.4 suivante, appliquées à cette image de texture, permettent d'extraire un champ de vecteurs d'orientations estimées en chaque pixel. Or un des intérêts de ces champs de vecteurs, comme nous l'avons évoqué section 4.1.2, est qu'ils permettent *via* un portrait de phase de rendre compte du comportement local de ce champ, et donc de déceler des anomalies comme cela est utilisé pour la mammographie (FERRARI et coll., 2001; RANGAYYAN et AYRES, 2006). Un portrait de phase du premier ordre est décrit par un système d'équations différentielles en coordonnées cartésiennes de ce type :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} . \quad (5.54)$$

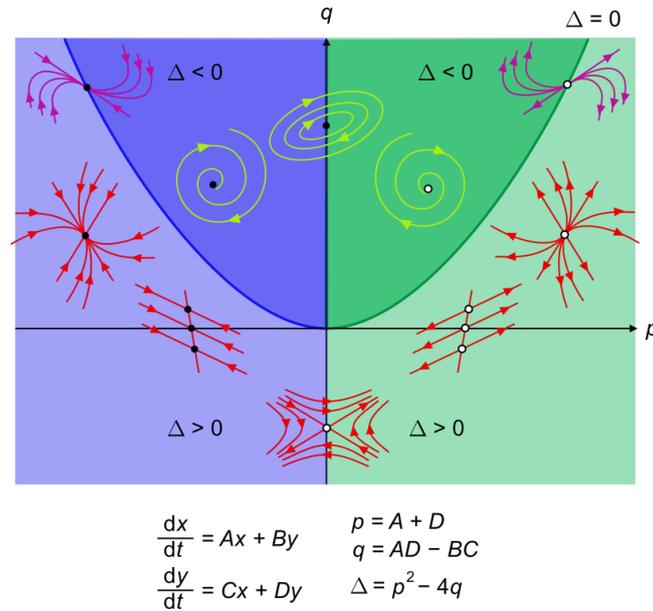


FIGURE 5.3 – Classification des points d'équilibre d'un système d'équations différentielles type (5.54).

Les coefficients de la matrice \mathbf{A} et du vecteur \mathbf{b} déterminent l'apparence du champ d'orientation (un nœud, une selle, une spirale, ...). Il s'agit donc, connaissant les orientations estimées $\tilde{\alpha}(x, y)$ sur un voisinage, d'estimer ces coefficients afin de déterminer un champ de vecteur (5.54) approchant le champ d'orientations estimé. Pour cela SHU et JAIN (1994) partent de

$$\tan \tilde{\alpha}(x, y) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ax + by + e}{cx + dy + f},$$

d'où, en posant $\zeta = \tan \tilde{\alpha}$,

$$(a - c\zeta)x + (b - d\zeta)y + (e - f\zeta) = 0.$$

Il suffit alors de déterminer les constantes (a, b, c, d, e, f) qui minimisent le problème de moindre carré suivant :

$$\min \sum_{i=1}^n ((a - c\zeta_i)x_i + (b - d\zeta_i)y_i + (e - f\zeta_i))^2,$$

parmi les n pixels du voisinage composé des données triplets (x_i, y_i, ζ_i) , sous contrainte que $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$. L'accès aux constantes permet de classifier le type de champ auquel on a affaire sur ce voisinage. En outre dans le cas du modèle LAFBF, nous sommes libres de prescrire l'orientation en tout point, et donc de choisir un champ du type (5.54). Par conséquent il peut constituer un banc d'essai utile pour tester les procédures de détection et de classification des orientations.

5.4 Détection de l'orientation

5.4.1 Interprétation statistique

Dans cette section on se propose de ré-interpréter en termes statistiques les éléments du tenseur de structure \mathbf{J} défini par (5.17), à savoir le vecteur d'orientation \mathbf{n} défini par le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de \mathbf{J} , et l'indice de cohérence défini par (5.20). On a vu dans l'étude générale des tenseurs de structure (section 4.3) que les valeurs propres de

la matrice \mathbf{J} sont reliées à ses coefficients par (4.11). En utilisant l'expression des coefficients (5.17) pour notre application, il vient :

$$p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22} = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta S_X(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta S_X(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) S_X(\theta) d\theta, \quad (5.55)$$

$$p_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{J}_{12} = 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta S_X(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) S_X(\theta) d\theta, \quad (5.56)$$

$$\mathbf{p} = p_1 + jp_2 = \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta, \quad (5.57)$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\mathbf{J}_{11} - \mathbf{J}_{22})^2 + 4\mathbf{J}_{12}^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = |\mathbf{p}| = \left| \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta \right|, \quad (5.58)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22} = \int_0^{2\pi} S_X(\theta) d\theta. \quad (5.59)$$

Le vecteur \mathbf{p} , qui est le même que celui défini dans (4.10), renseigne sur la direction privilégiée \mathbf{n} par la relation $\arg \mathbf{n} = (\arg \mathbf{p})/2$. Une fois établie l'expression de \mathbf{p} en fonction de la densité S_X nous sommes en mesure d'interpréter ces informations en termes statistiques.

Statistiques circulaires

En toute généralité, une densité de probabilité $f(\theta)$ sur le cercle, admet les statistiques circulaires suivantes (MARDIA et JUPP, 2009) :

- Un moment d'ordre 1, donnant le vecteur de direction privilégiée

$$\Phi_1 = \mathbb{E} [e^{j\theta}] = \int_0^{2\pi} e^{j\theta} f(\theta) d\theta \stackrel{\text{def}}{=} \rho e^{j\alpha_0}, \quad (5.60)$$

- α_0 est l'angle donnant l'orientation « moyenne » de la distribution f sur le cercle,
- $\nu = 1 - \rho$ est la dispersion de la distribution.

Plus précisément on a

$$\mathbb{E} [e^{j(\theta - \alpha_0)}] = \int_0^{2\pi} e^{j(\theta - \alpha_0)} f(\theta) d\theta = e^{-j\alpha_0} \mathbb{E} [e^{j\theta}] = e^{-j\alpha_0} \rho e^{j\alpha_0} = \rho, \quad (5.61)$$

et puisque $\rho \in \mathbb{R}_+$ on a $\mathbb{E} [\sin(\theta - \alpha_0)] = 0$, donc $\rho = \mathbb{E} [\cos(\theta - \alpha_0)]$ et

$$\nu = 1 - \rho = 1 - \mathbb{E} [\cos(\theta - \alpha_0)].$$

Cette valeur de dispersion minimise la fonction

$$V(\alpha) = 1 - \mathbb{E} [\cos(\theta - \alpha)] = 1 - \text{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{j(\theta - \alpha)} f(\theta) d\theta \right\} = 1 - \text{Re} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} e^{j(\theta - \alpha_0)} f(\theta) d\theta \right) e^{j(\alpha_0 - \alpha)} \right\},$$

soit avec (5.61)

$$V(\alpha) = 1 - \rho \cos(\alpha_0 - \alpha) = 1 + \rho \left[2 \sin \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{2} \right)^2 - 1 \right] = \nu + 2\rho \sin \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{2} \right)^2,$$

minimal en $\alpha = \alpha_0$.

Dans le cas où les données sont *axiales*, c'est-à-dire que la distribution f est π -périodique, on ne différencie pas le sens d'un vecteur, on tient compte uniquement de l'orientation sur un axe. Dans ces conditions la direction moyenne n'est pas définie, puisque par périodicité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\cos \theta] &= \int_0^\pi \cos \theta f(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \cos \theta f(\theta) d\theta, \\ &= \int_0^\pi \cos \theta f(\theta) d\theta - \int_\pi^{2\pi} \cos(\theta - \pi) f(\theta - \pi) d\theta, \\ &= \int_0^\pi \cos \theta f(\theta) d\theta - \int_0^\pi \cos(\gamma) f(\gamma) d\gamma, \\ &= 0,\end{aligned}$$

et de même $\mathbb{E}[\sin \theta] = 0$. Une astuce consiste alors à effectuer un doublement d'angle, c'est-à-dire à doubler tous les angles de façon à faire correspondre deux points axialement opposés. On se ramène alors à des statistiques circulaires usuelles et on peut définir la direction moyenne de ces nouveaux échantillons $\int e^{j2\theta} f(\theta) d\theta$, qui sera par construction d'un angle double par rapport à celui de l'axe d'origine. Appliqué à la fonction d'anisotropie S_X qui est paire, donc bien une distribution axiale, on a que

$$\int e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta = \mathbf{p} = |\mathbf{p}| e^{j2\alpha_0} = \underbrace{|\mathbf{p}| \cos(2\alpha_0)}_{p_1} + j \underbrace{|\mathbf{p}| \sin(2\alpha_0)}_{p_2}. \quad (5.62)$$

Vérifions que le vecteur propre \mathbf{v}_1 associé à la plus grande valeur propre λ_1 est bien orienté dans la direction α_0 . En remplaçant (5.62) dans la formule donnant l'expression du vecteur propre pour une matrice symétrique 2×2 (4.12), on obtient :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} p_1 + |\mathbf{p}| \\ p_2 \end{pmatrix} = |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\alpha_0) \\ \sin(2\alpha_0) \end{pmatrix} = 2|\mathbf{p}| \cos \alpha_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

De plus, en supposant que $\int_0^{2\pi} S_X(\theta) d\theta = 1$, l'indice de cohérence est

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = |\mathbf{p}| = 1 - \nu.$$

On a ainsi relié notre définition de l'orientation et de l'indice de cohérence d'un champ H-sssi X (Définition 5.1), avec la définition de l'orientation et de la dispersion d'une distribution d'angles fournies par les statistiques circulaires de la densité de probabilité S_X .

Exemple 5.4. Traitons le cas d'un champ élémentaire de densité

$$S_X(\Theta) = \frac{1}{4\delta} \left(\mathbb{1}_{[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]}(\arg \Theta) + \mathbb{1}_{[\alpha_0 + \pi - \delta, \alpha_0 + \pi + \delta]}(\arg \Theta) \right),$$

sous l'angle des statistiques circulaires, et vérifions que l'on trouve le même résultat que celui obtenu par le tenseur de structure :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta, \\ &= \frac{1}{4\delta} \left(\int_{\alpha_0 - \delta}^{\alpha_0 + \delta} e^{j2\theta} d\theta + \int_{\alpha_0 + \pi - \delta}^{\alpha_0 + \pi + \delta} e^{j2\theta} d\theta \right), \\ &= \frac{e^{j2\alpha_0} e^{j2\delta} - e^{-j2\delta}}{2\delta} \frac{1}{2j}, \\ &= \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} e^{j2\alpha_0}.\end{aligned}$$

On a bien un angle double $2\alpha_0$ par rapport à l'orientation \mathbf{n} (5.35) et un indice de cohérence conforme à celui établi en (5.34).

Exemple 5.5. Traitons maintenant le cas de la somme de deux champs élémentaires de densité

$$S_X(\Theta) = \frac{1}{8\delta_0} \left(\mathbb{1}_{[\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0]}(\arg \Theta) + \mathbb{1}_{[\alpha_0 + \pi - \delta_0, \alpha_0 + \pi + \delta_0]}(\arg \Theta) \right) \\ + \frac{1}{8\delta_1} \left(\mathbb{1}_{[\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1]}(\arg \Theta) + \mathbb{1}_{[\alpha_1 + \pi - \delta_1, \alpha_1 + \pi + \delta_1]}(\arg \Theta) \right),$$

avec $\alpha_0 < \alpha_1$ et $[\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0] \cap [\alpha_1 - \delta_1, \alpha_1 + \delta_1] = \emptyset$, de sorte que, d'après l'exemple 5.4 :

$$\mathbf{p} = \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta, \\ = \frac{\sin(2\delta_0)}{4\delta_0} e^{j2\alpha_0} + \frac{\sin(2\delta_1)}{4\delta_1} e^{j2\alpha_1}. \quad (5.63)$$

On assiste ainsi à une « concurrence » entre les deux orientations affectées d'un poids différent. On cherche alors à écrire (5.63) sous forme trigonométrique. Écrivons sous forme factorisée $\mathbf{p} = e^{j2\alpha_0} \left(\frac{\sin(2\delta_0)}{4\delta_0} + \frac{\sin(2\delta_1)}{4\delta_1} e^{j2(\alpha_1 - \alpha_0)} \right)$. D'où, en posant $a = \frac{\sin(2\delta_0)}{4\delta_0}$, $b = \frac{\sin(2\delta_1)}{4\delta_1}$, et $\phi = 2(\alpha_1 - \alpha_0)$, cela revient (à une rotation près) à déterminer l'argument et le module du complexe $a + be^{j\phi}$. En supposant que $0 < \phi < \pi/2$ (les autres cas se traitant de façon similaire), on a

$$0 < \tan \arg(a + be^{j\phi}) = \frac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi} < \frac{b \sin \phi}{b \cos \phi} = \tan \phi,$$

et

$$|\mathbf{p}|^2 = \left| a + be^{j\phi} \right|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi > a^2.$$

Dans le cas particulier où $\delta_0 = \delta_1 = \delta$, soit $a = b$, on obtient $\tan \arg(a + be^{j\phi}) = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \frac{\phi}{2} = \alpha_1 - \alpha_0$, puis en tenant compte de la rotation $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$, l'orientation est donc $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Le module devient quant à lui $|\mathbf{p}|^2 = 2a^2(1 + \cos \phi) = 4a^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ soit $|\mathbf{p}| = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$. On retrouve les résultats déterminés en (5.36) et (5.37).

5.4.2 Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par tenseur de structure

Soit $X_{\alpha_0, \delta}$ un champ élémentaire comme défini en (5.30), et $I_{\alpha_0, \delta}$ une réalisation du champ $X_{\alpha_0, \delta}$ de taille $N \times N$ qu'il s'agit d'analyser. On se place dans une trame d'ondelettes comme construite dans la Proposition 5.4, à partir d'une ondelette réelle isotrope 2-D définie en Fourier $\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\|\boldsymbol{\xi}\|)$, où φ est une fonction réelle 1-D vérifiant les hypothèses de la Proposition 5.4. Un exemple est donné dans (PORTILLA et coll., 2003) par :

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} \log_2\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)\right), & \frac{\pi}{4} < |\lambda| \leq \pi \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}, \quad (5.64)$$

dont la fonction est représentée Figure 5.4a, et en 5.4b l'ondelette isotrope correspondante.

On effectue alors l'analyse par ondelettes de la réalisation $I_{\alpha_0, \delta}$ dans cette trame d'ondelettes. On calcule les coefficients d'ondelettes $c_{i, \mathbf{k}}^{(1)}(I_{\alpha_0, \delta})$ et $c_{i, \mathbf{k}}^{(2)}(I_{\alpha_0, \delta})$, pour différentes échelles i et en tout pixel $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$. Il s'agit ensuite de former la matrice tenseur de structure associée au vecteur $c_{i, \mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(I_{\alpha_0, \delta}) = (c_{i, \mathbf{k}}^{(1)}(I_{\alpha_0, \delta}), c_{i, \mathbf{k}}^{(2)}(I_{\alpha_0, \delta}))^\top$, telle que définie en (5.15), en calculant la dépendance entre les coefficients d'ondelettes donnée par la covariance. Celle-ci nécessite en toute généralité un grand nombre de réalisations pour être approchée, or nous ne disposons que d'une seule réalisation $I_{\alpha_0, \delta}$. Toutefois, nous avons montré au Théorème 5.1 que la matrice

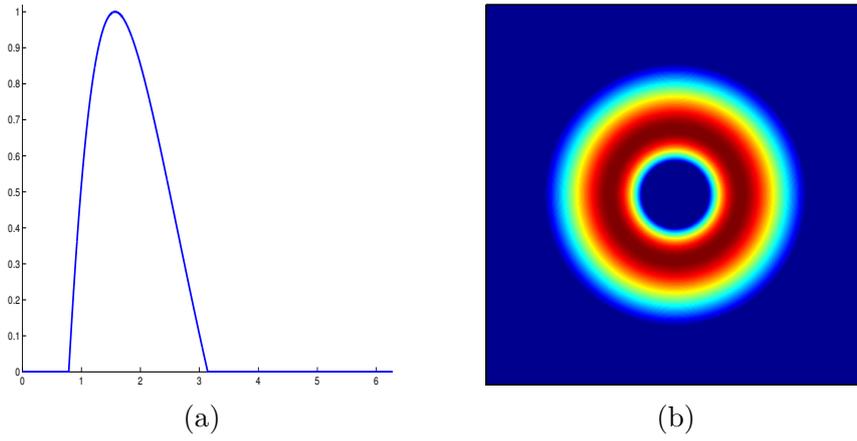


FIGURE 5.4 – (a) Profil fréquentiel de la fonction $\varphi(\lambda)$ définie en (5.64), (b) représentation en Fourier de l'ondelette 2-D $\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\|\boldsymbol{\xi}\|)$.

de variance-covariance $\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X))$ ne dépend pas de la position \mathbf{k} (5.16), c.-à-d. que le vecteur aléatoire $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}$ est stationnaire. Dans ces conditions nous exploitons l'ergodicité qui permet d'estimer les statistiques d'ordre 2 à partir d'une seule réalisation, en remplaçant l'espérance vue comme moyenne des réalisations, par une moyenne spatiale sur les N^2 pixels \mathbf{k} de la réalisation, puisque $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}$ se comporte de la même manière en tout \mathbf{k} . Le lecteur trouvera davantage de détails sur l'ergodicité dans (PAPOULIS et PILLAI, 2002, Chapitre 12). Une fois calculée l'estimation de la matrice de variance-covariance par :

$$\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(I_{\alpha_0,\delta})) \approx \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k} \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} \mathbf{J}_{I_{\alpha_0,\delta,i}}^W[\mathbf{k}],$$

où $\mathbf{J}_{I_{\alpha_0,\delta,i}}^W$ est la matrice définie en (5.14), l'expression de $\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X))$ donnée par (5.16) assure que le tracé de

$$\log_2 [\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X))]_{\ell_1,\ell_2} = -2i(H+1) + \log_2 (c_\varphi [\mathbf{J}(X)]_{\ell_1,\ell_2}), \quad (\ell_1, \ell_2) \in \{1, 2\}^2,$$

avec $c_\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(r)|^2}{r^{2H+1}} dr$, décrit des points alignés sur une droite suivant l'échelle i , de pente $-2(H+1)$ et d'ordonnée à l'origine $\log_2(c_\varphi [\mathbf{J}(X)]_{\ell_1,\ell_2})$. Par une régression linéaire sur les coefficients de la matrice de covariance estimée $\log_2[\Sigma(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(I_{\alpha_0,\delta}))]_{\ell_1,\ell_2}$ suivant i , il est alors possible d'estimer \hat{H} ainsi que les coefficients $[\hat{\mathbf{J}}(X)]_{\ell_1,\ell_2}$ du tenseur de structure. Le vecteur propre de la plus grande valeur propre λ_1 de $\hat{\mathbf{J}}$ donne alors une estimation de l'orientation $\hat{\mathbf{n}}_X$ du champ élémentaire, et l'indice de cohérence $(\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ donne accès à $\sin(2\hat{\delta})/(2\hat{\delta})$.

5.4.3 Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par la distribution des orientations

Dans cette sous-section on s'attèle à caractériser la loi statistique des orientations estimées à partir des coefficients d'ondelettes monogènes. Plus précisément, à partir des coefficients d'ondelettes de Riesz $c_{i,\mathbf{k}}^{(\ell)}(X) = \langle X, \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\mathbf{k}} \rangle$, la Définition 4.3 du signal monogène montre que le vecteur monogène $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X) = (c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X), c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X))^\top$, admet un vecteur d'orientation unitaire en chaque pixel $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ et à chaque échelle i :

$$\vec{\mathbf{n}}_{i,\mathbf{k}}(X) = \frac{c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)}{|c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)|} = \frac{1}{\sqrt{c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X)^2 + c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X)^2}} \begin{pmatrix} c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X) \\ c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{i,\mathbf{k}}(X) \\ \sin \alpha_{i,\mathbf{k}}(X) \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

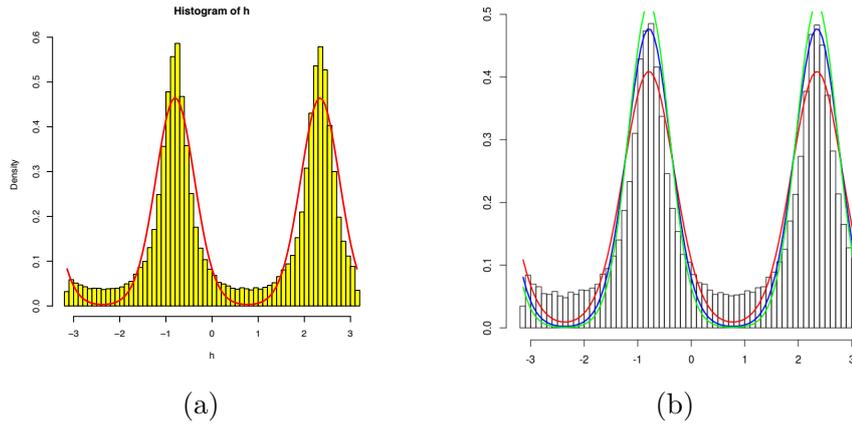


FIGURE 5.5 – (a) Histogramme empirique des angles d'orientation $(\alpha_{i,\mathbf{k}}(X))_{\mathbf{k}}$ à i fixé et approximation d'une loi VMF, (b) tracé de deux autres VMF de concentrations κ différentes.

avec

$$\alpha_{i,\mathbf{k}}(X) = \arctan \left(\frac{c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X)}{c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X)} \right). \quad (5.66)$$

Ainsi, à une échelle i fixée, on peut représenter l'ensemble des angles estimés $\alpha_{i,\mathbf{k}}(I_{\alpha_0,\delta})$ en tout pixel \mathbf{k} sous forme d'histogramme, comme illustré Figure 5.5a. Par les données axiales dont on dispose, on observe deux pics correspondants à l'angle d'orientation dominante α_0 et à son symétrique $\alpha_0 + \pi$, qu'il s'agit d'estimer à partir de l'histogramme en déterminant une loi empirique qui capture cette orientation dominante. Deux solutions s'offrent à nous : la première a été décrite dans la section 5.4.1 des statistiques circulaires, il s'agit de doubler tous les angles pour se ramener à des données unimodales et à étudier les statistiques de cette nouvelle distribution d'angle, typiquement à l'aide d'une densité gaussienne sur le cercle. Une telle loi, appelée loi de Von Mises de paramètres μ et κ , et notée $\text{VM}(\mu, \kappa)$, est caractérisée par la densité de probabilité suivante

$$\rho(\alpha; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[\kappa \cos(\alpha - \mu)],$$

où I_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0, μ la moyenne, et κ la concentration (inverse de la variance). Une seconde option consiste à étudier directement la distribution bimodale, au moyen de deux lois de Von Mises. Une telle loi, appelée loi de mélange de Von Mises-Fisher, et notée $\text{VMF}(\alpha, \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2)$, est caractérisée par la densité de mélange suivante :

$$\rho(\alpha; \mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2) = \beta_1 \rho_1(\alpha; \mu_1, \kappa_1) + \beta_2 \rho_2(\alpha; \mu_2, \kappa_2),$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des densités de loi de Von Mises classique, et $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Grâce au package R^{TM} nommé MOVMF, permettant d'estimer une densité de mélange empirique à partir des données d'angles, nous avons pu obtenir une estimation correcte de l'angle α_0 et tracer la densité (en rouge) Figure 5.5a.

Remarque 5.8. On constate sur cette figure que la densité capture bien l'orientation dominante encodée dans ses paramètres $\mu_1 \approx \alpha_0$ et $\mu_2 \approx \alpha_0 + \pi$, en revanche la dispersion des angles de l'histogramme est mal évaluée par la densité choisie et ses paramètres de concentration κ_1 et κ_2 . En effet, quand bien même on augmenterait ou diminuerait la concentration κ (Figure 5.5b), la décroissance de la distribution des angles décroît bien plus lentement que ne le fait une gaussienne, ce qui suggère que la densité réelle des angles soit à queue lourde.

On va alors caractériser dans la Proposition 5.11 la loi de distribution de ces angles mono-gènes $\alpha_{i,\mathbf{k}}(X)$ lorsque X est un champ élémentaire, et montrer que la fonction de densité de la variable aléatoire $\alpha_{i,\mathbf{k}}(X)$ ne dépend ni de l'échelle i , ni de la position \mathbf{k} , ni encore du choix de l'ondelette ψ ou du coefficient de Hurst H . La densité de $\alpha_{i,\mathbf{k}}(X)$ dépend uniquement des paramètres α_0 et δ de la fonction d'anisotropie S_X . Pour cela commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.1 (LOI D'UN QUOTIENT DE VARIABLES GAUSSIENNES)

Soit un vecteur gaussien $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ caractérisé par la matrice de variance-covariance Σ , que l'on peut factoriser $\Sigma = \mathbf{M}\mathbf{M}^\top$ avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and $\det \mathbf{M} > 0$. Alors, la variable aléatoire X_1/X_2 suit une loi de Cauchy C_z de paramètre complexe $z = (aj + b)/(cj + d)$.

Preuve :

La matrice de variance-covariance Σ , qui est définie positive, peut toujours se factoriser de la sorte $\Sigma = \mathbf{M}\mathbf{M}^\top$, par exemple *via* une décomposition de Cholesky. À partir de cette factorisation, étant donné un vecteur $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ avec Z_1, Z_2 deux i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$, on a $\mathbf{X} \sim \mathbf{M}\mathbf{Z}$. Par ailleurs, la variable aléatoire $Q = Z_1/Z_2$ suit une loi de Cauchy standard C_j . Une loi de Cauchy C_z de paramètre complexe $z = p + jq$ avec $q > 0$, possède la densité de probabilité $x \mapsto q/\pi((x - p)^2 + q^2)$. Donc, à partir de $\mathbf{X} \sim \mathbf{M}\mathbf{Z}$, on obtient

$$\frac{X_1}{X_2} \sim \frac{aQ + b}{cQ + d} = r(Q).$$

D'après (McCULLAGH, 1992) et les références associées, si $Q \sim C_z$ alors $r(Q) \sim C_{r(z)}$. Appliqué pour $z = j$ on obtient que X_1/X_2 suit une loi de Cauchy de paramètre $r(j)$, ce qui prouve le résultat. □

Proposition 5.11 (CARACTÉRISATION DE LA LOI DES ANGLES D'ORIENTATION)

Soit X un champ élémentaire de fonction d'anisotropie

$$S_X(\Theta) = \frac{1}{4\delta} \left(\mathbb{1}_{[-\delta, \delta]}(\arg \Theta) + \mathbb{1}_{[\pi - \delta, \pi + \delta]}(\arg \Theta) \right),$$

et $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X) = (c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X), c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X))^\top$ dans la trame d'ondelettes vectorielles $\{\mathcal{R}\psi_{i,\mathbf{k}}\}$, défini dans (5.13) à partir d'une ondelette isotrope $\hat{\psi}(\xi) = \varphi(\|\xi\|)$. La matrice de covariance de $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X)$ est donnée dans le Théorème 5.1 par :

$$\Sigma \left(c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X) \right) = 2^{-2i(H+1)} c_\varphi \mathbf{J}(X), \quad \text{avec} \quad c_\varphi = \left[\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(r)|^2}{r^{2H+1}} dr \right],$$

et avec comme tenseur de structure $\mathbf{J}(X)$ dont l'expression (5.33) est :

$$\mathbf{J}(X) = \mathbf{R}_{\alpha_0} \text{diag} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 \sin(2\delta)}{2\delta}, \frac{1}{2} - \frac{1 \sin(2\delta)}{2\delta} \right) \mathbf{R}_{\alpha_0}^\top.$$

On définit la variable aléatoire

$$\Omega_{i,\mathbf{k}}(X) = \frac{c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X)}{c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X)},$$

alors on a les résultats suivants :

1. La densité de probabilité de $\Omega_{i,\mathbf{k}}$ est

$$f_\Omega(x; \alpha_0, \delta) = \frac{q(\alpha_0, \delta)}{\pi [(x - p(\alpha_0, \delta))^2 + q(\alpha_0, \delta)^2]}, \quad (5.67)$$

avec

$$p(\alpha_0, \delta) = \frac{\operatorname{sinc}(2\delta) \sin(2\alpha_0)}{1 - \operatorname{sinc}(2\delta) \cos(2\alpha_0)}, \quad q(\alpha_0, \delta) = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sinc}^2(2\delta)}}{1 - \operatorname{sinc}(2\delta) \cos(2\alpha_0)},$$

ne dépendant ni de l'échelle i , de l'ondelette ψ , ni du paramètre de Hurst H .

2. La densité de probabilité de la variable aléatoire $\alpha_{i,\mathbf{k}} = \arctan\left(\frac{1}{\Omega_{i,\mathbf{k}}}\right)$ est

$$f_\alpha(x; \alpha_0, \delta) = (1 + \cotan^2 x) f_\Omega(\cotan x; \alpha_0, \delta) = \frac{q(\alpha_0, \delta)(1 + \cotan^2 x)}{\pi[(\cotan x - p(\alpha_0, \delta))^2 + q(\alpha_0, \delta)^2]}. \quad (5.68)$$

Preuve :

En appliquant le Lemme 5.1 du vecteur gaussien $c_{i,\mathbf{k}}^{(\mathcal{R})}(X) = \left(c_{i,\mathbf{k}}^{(1)}(X), c_{i,\mathbf{k}}^{(2)}(X)\right)^\top$ et la matrice de variance-covariance $\Sigma_i = 2^{-2i(H+1)} c_\varphi \mathbf{J}(X)$ que l'on peut factoriser comme $\Sigma_i = \mathbf{M} \mathbf{M}^\top$ avec

$$\mathbf{M} = 2^{-i(H+1)} c_\varphi^{1/2} \mathbf{R}_{\alpha_0} \operatorname{diag} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)}, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} \right),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{M} = 2^{-i(H+1)} c_\varphi^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} & -\sin \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} \\ \sin \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} & \cos \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} \end{pmatrix},$$

et

$$\det \mathbf{M} = 2^{-2i(H+1)} \frac{c_\varphi}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sinc}^2(2\delta)} > 0, \quad \text{pour } \delta > 0.$$

Par conséquent, on a $\Omega_{i,\mathbf{k}} \sim C_{z(\alpha_0, \delta)}$ avec comme paramètre complexe

$$z(\alpha_0, \delta) = \frac{\cos \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} j - \sin \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)}}{\sin \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)} j + \cos \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2\delta)}} = p(\alpha_0, \delta) + jq(\alpha_0, \delta),$$

avec

$$p(\alpha_0, \delta) = \frac{\operatorname{sinc}(2\delta) \sin(2\alpha_0)}{1 - \operatorname{sinc}(2\delta) \cos(2\alpha_0)}, \quad q(\alpha_0, \delta) = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sinc}^2(2\delta)}}{1 - \operatorname{sinc}(2\delta) \cos(2\alpha_0)}.$$

On en déduit donc (5.67). Afin de prouver (5.68), on explicite maintenant la fonction de répartition de $\alpha_{i,\mathbf{k}}$: puisque $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$ on a

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \mathbb{P}(\alpha_{i,\mathbf{k}} \leq x), \\ &= \mathbb{P}(\arctan(1/\Omega_{i,\mathbf{k}}) \leq x), \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Omega_{i,\mathbf{k}} \leq \cotan x), \\ &= 1 - F_\Omega(\cotan x). \end{aligned}$$

En dérivant on obtient (5.68) la densité de probabilité de $\alpha_{i,\mathbf{k}}$, pour $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. □

5.5 Conclusion et perspectives

Nous tirons le bilan de cette première partie de thèse, ayant consisté à développer de nouveaux modèles anisotropes et à définir et caractériser plus rigoureusement l'anisotropie locale des champs aléatoires.

Un premier modèle très général recouvrant plusieurs classes de champs usuels, nommé **GAFBF**, nous a permis de décrire des champs aléatoires possédant la double faculté de pouvoir faire varier simultanément leurs orientation et régularité locales. Nous avons établi le résultat non trivial que les champs aléatoires issus de ce modèle sont localisables, c'est-à-dire qu'ils admettent un champ tangent en tout point dont nous donnons l'expression. Dans le cas où la fonction gouvernant l'anisotropie (agissant comme sélecteur de fréquence) est une fonction caractéristique de cône dont le centre et l'ouverture varient selon la position, le champ anisotrope est appelé **LAFBF**, et nous avons montré grâce au résultat sur les champs tangents que celui-ci se comporte localement comme un champ élémentaire. En outre, nous avons pu exprimer la fonction de covariance du **LAFBF** en fonction de celle d'un champ élémentaire. Ceci nous a offert deux possibilités de simuler ces champs : soit en utilisant l'expression de la covariance par la méthode exacte de Cholesky ; soit en approchant localement le champ par son champ tangent, qui est un champ élémentaire. Disposant de la méthode efficace des bandes tournantes pour simuler un champ élémentaire, nous avons donné une procédure de synthèse rapide du **LAFBF** à régularité constante, puis une heuristique intégrant la régularité variable, fondée sur une technique de krigeage tirant parti de la covariance. Toutefois, dans un cas comme dans l'autre, apparaissent sur les images générées des artefacts, dûs à la discrétisation et à l'intensité des variations d'orientations.

Afin de remédier à ce problème, nous avons proposé un second modèle par déformation d'un champ **H-sssi**, et en particulier par déformation continûment différentiable d'un champ élémentaire, dont les simulations ont l'avantage de ne pas être affectées par des artefacts. Ce modèle nommé **WAFBF**, dont nous montrons qu'il est lui aussi localisable, est cependant moins riche que le précédent, il ne permet pas le contrôle du niveau de directionnalité de la texture locale, qu'était en mesure de proposer le **LAFBF** (en faisant varier l'ouverture du sélecteur de fréquences), et les orientations locales sont quant à elles plus difficilement contrôlables puisqu'elles sont indirectement obtenues par la nature de la déformation. Pour autant nous avons mis en exergue une famille de déformations, basée sur les transformations conformes, rendant possible de prescrire exactement un ensemble d'orientations locales de la texture.

Dans un second temps, nous avons examiné la question de la définition rigoureuse de l'orientation locale d'un champ aléatoire. Pour des signaux déterministes déjà, une définition et estimation robuste de l'orientation locale n'est pas aisé. Le concept de signal monogène, a permis de donner une description relativement satisfaisante de la structure et orientation locale du signal. Des procédures efficaces de détection se sont développées dans la communauté du traitement du signal, mêlant formalisme monogène et analyse multirésolution. Nous avons étudié la possibilité de les transposer aux champs aléatoires, et plus spécifiquement aux champs **H-sssi**. La difficulté à définir formellement la transformée de Riesz d'un tel champ, à cause de la non-stabilité des fonctions tests par celle-ci et de la régularité des trajectoires, nous a amené à étudier celui-ci dans une trame d'ondelettes de Riesz. L'orientation locale est alors définie comme vecteur propre de la matrice de covariance des coefficients d'ondelettes aléatoires, dont les valeurs propres définissent une mesure de directionnalité. Nous montrons que la notion d'orientation comme celle de directionnalité sont alors intrinsèques au champ, ne dépendant ni de l'échelle, ni de la position, ni de l'ondelette utilisée, mais uniquement de l'anisotropie encodée dans la densité spectrale du champ. En particulier, nous avons calculé pour un champ

élémentaire ces deux quantités dont nous montrons qu'elles sont reliées aux paramètres de la fonction d'anisotropie du champ, ce qui atteste de la consistance de la notion d'orientation d'un champ **H-sssi** ainsi formalisée. Nous avons alors élargi la définition à la classe des champs localisables, en attribuant comme orientation locale en un point, celle de leur champ tangent en ce point, dont il est établi qu'il est presque partout un champ **H-sssi**. L'application aux modèles du **GAFBF** et du **WAFBF**, et par ailleurs les connexions avec les statistiques circulaires des densités spectrales, ont permis d'étayer encore davantage la cohérence de la définition.

Le cadre théorique étant posé, nous avons présenté deux procédures d'estimation de l'orientation d'un champ élémentaire. La première est intimement liée à la définition de l'orientation : il s'agit à partir des coefficients d'ondelettes calculés sur la réalisation, de construire leur matrice de covariance par moyennes spatiales fondées sur l'hypothèse d'ergodicité, puis d'exploiter la dépendance linéaire qui lie les coefficients d'ondelettes à travers les échelles en représentation log-log pour en estimer le tenseur de structure par régression linéaire. L'orientation locale étant alors donnée par le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de ce tenseur. La seconde procédure a consisté à travailler à partir de la distribution des orientations monogènes données par les coefficients d'ondelettes en chaque point et chaque échelle. Après avoir approché ces densités empiriques par une loi de mélange de Von Mises-Fischer, et avoir détecté l'orientation dominante, nous avons montré que cette distribution est en réalité à queue lourde et qu'elle suit à chaque échelle une même loi de Cauchy, dont les paramètres ne dépendent là aussi que des paramètres d'anisotropie du champ élémentaire.

Perspectives

Dans ce dernier chapitre nous avons proposé une formalisation de la notion d'orientation et d'anisotropie locale pour une classe convenable de champs aléatoires. Il reste cependant encore beaucoup à faire, notamment en ce qui concerne la définition rigoureuse de la transformée de Riesz d'un champ aléatoire. Le verrou à surmonter est la non-stabilité de la classe de Schwartz par la transformée de Riesz. L'approche classique qui consisterait à définir la transformée de Riesz pour une distribution tempérée en raisonnant par dualité est ainsi mise en défaut. Une alternative envisageable, serait de considérer un autre espace de fonctions tests stables par l'opérateur de Riesz. En s'inspirant des travaux de **WARD et coll. (2013)** sur les propriétés de décroissance des transformées de Riesz, on pourrait considérer l'espace $L_{N,\infty}(\mathbb{R}^d) = \cap_{M>0} L_{N,M}(\mathbb{R}^d)$ où $L_{N,M}(\mathbb{R}^d)$ est défini dans (**WARD et coll., 2013**, Définition 4.2). La transformée de Riesz étant stable sur $L_{N,\infty}(\mathbb{R}^d)$, il serait intéressant de voir si l'on peut définir la transformée de Riesz du champ par dualité sur cet espace.

Une perspective à plus court terme concerne l'aspect inférence statistique de cette partie qui demande à être approfondie. Dans un premier temps on pourrait chercher à estimer les paramètres $p(\alpha_0, \delta)$ en maximisant une vraisemblance. L'idée serait ensuite d'aboutir à un test d'unidirectionnalité semblable à celui établi par **OLHEDE et coll. (2014)**, en utilisant que

$$\chi(X) = \frac{\lambda_1(\mathbf{J}_X) - \lambda_2(\mathbf{J}_X)}{\lambda_1(\mathbf{J}_X) + \lambda_2(\mathbf{J}_X)} = \left| \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} S_X(\theta) d\theta \right| = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}.$$

Le même objectif pourra être poursuivi à partir d'une **loi de Cauchy enroulée, ou *Wrapped Cauchy distribution* (WC)** (**ARNOLD et SENGUPTA, 2011**), bien adaptée à nos données. Mieux encore, afin d'éviter de calculer les angles (5.66) à partir des vecteurs de coefficients d'ondelettes, et donc d'éviter d'appliquer la fonction arctangente qui amplifie les erreurs, il serait peut-être préférable de travailler directement à partir des vecteurs projetés (5.65), dont la loi est également connue. Il s'agit de la **loi normale projetée, ou *Angular Central Gaussian* (ACG)**, introduite par **KLOTZ (1964)** puis généralisée par **TYLER (1987)**. On en trouvera une présentation détaillée dans (**MARDIA et JUPP, 2009**, sections 3.5.6) avec une connexion entre **ACG** et **WC** à l'équation

(3.5.72). Pour des modèles autres que celui des champs élémentaires on pourra songer à des lois plus flexibles comme la famille de lois de JONES et PEWSEY (2005) utilisée par (DELECHELLE et coll., 2007; PÉRON et coll., 2007) pour estimer la fonction de Hurst directionnelle $h(\theta)$ d'un AFBF, et plus généralement consulter le passage en revue (LEY et VERDEBOUT, 2017).

De même la détection de l'orientation peut potentiellement être rendue plus robuste en ayant recours aux coefficients dominants, tels qu'employés pour l'estimation de paramètres de champs OSGRF avec la transformée en ondelettes hyperboliques (ABRY et coll., 2012; ROUX et coll., 2016, 2013). Enfin une application importante consistera à appliquer ces méthodes de détection d'orientation et d'inférence statistique à des *patches* de taille $n \times n$ d'un LAFBF de taille $N \times N$, qui se comporte localement comme un champ élémentaire, et établir des intervalles de confiance suivant le nombre d'échantillons, donc n^2 pixels du patch, dont on dispose pour l'estimation.

5.6 Références

- ABRY, P., M. CLAUSEL, S. JAFFARD, S. ROUX et B. VEDEL. 2012, «Hyperbolic wavelet transform : an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures», *arXiv preprint arXiv :1210.1944*. 233
- ARNOLD, B. C. et A. SENGUPTA. 2011, «Models for axial data», *Advances in Directional and Linear Statistics*, p. 1–9. 232
- BILLINGSLEY, P. 1968, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, Chichester. 216
- DELECHELLE, E., M.-C. PERON et S. GUYOT. 2007, «Circular statistics of fractional fields», *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, n° 4, p. 275–278. 232
- DOBRUSHIN, R. 1979, «Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields», *Ann. Probab.*, vol. 7, n° 1, p. 1–28. 201
- FALCONER, K. 2002, «Tangent Fields and the local structure of random fields», *J.Theo.Prob.*, vol. 15, p. 731–750. 197, 216
- FALCONER, K. 2003, «The local structure of random processes», *J.London Math. Soc.*, vol. 67, p. 657–672. 216
- FELSBERG, M. et G. SOMMER. 2001, «The monogenic signal», *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 49, n° 12, p. 3136–3144. 209
- FERRARI, R. J., R. M. RANGAYAN, J. L. DESAUTELS et A. F. FRÈRE. 2001, «Analysis of asymmetry in mammograms via directional filtering with gabor wavelets», *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 20, n° 9, p. 953–964. 222
- GELFAND, I. M., N. Â. VILENKIN et A. FEINSTEIN. 1964, «Generalized functions. vol. 4.», . 203
- HELD, S., M. STORAH, P. MASSOPUST et B. FORSTER. 2010, «Steerable wavelet frames based on the Riesz transform», *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 19, n° 3, p. 653–667. 205
- ISTAS, J. 2007, «Identifying the anisotropical function of a d -dimensional Gaussian self-similar process with stationary increments», *Stat. Inf. Stoc. Proc.*, vol. 10, n° 1, p. 97–106. 202
- JONES, M. et A. PEWSEY. 2005, «A family of symmetric distributions on the circle», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 100, n° 472, p. 1422–1428. 232

- KLOTZ, J. 1964, «Small sample power of the bivariate sign tests of blumen and hodges», *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 1576–1582. [232](#)
- LEY, C. et T. VERDEBOUT. 2017, *Modern Directional Statistics*, CRC Press. [232](#)
- MARDIA, K. V. et P. E. JUPP. 2009, *Directional statistics*, vol. 494, John Wiley & Sons. [224](#), [232](#)
- MCCULLAGH, P. 1992, «Conditional inference and cauchy models», *Biometrika*, vol. 79, n° 2, p. 247–259. [229](#)
- OLHEDE, S. C., D. RAMÍREZ et P. J. SCHREIER. 2014, «Detecting directionality in random fields using the monogenic signal», *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 60, n° 10, p. 6491–6510. [197](#), [199](#), [200](#), [232](#)
- PAPADAKIS, M., G. GOGOSHIN, I. KAKADIARIS, D. KOURI et D. HOFFMAN. 2003, «Non-separable radial frame multiresolution analysis in multidimensions», *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 24, n° 7–8, p. 907–928. [205](#)
- PAPOULIS, A. et S. U. PILLAI. 2002, *Probability, random variables, and stochastic processes*, Tata McGraw-Hill Education. [227](#)
- PÉRON, M.-C., É. DELÉCHELLE et S. GUYOT. 2007, «Analyse angulaire des champs aléatoires à anisotropie fonctionnelle», dans *21° Colloque GRETSI, Troyes, FRA, 11-14 septembre 2007*, GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images. [232](#)
- PIPIRAS, V. et M. S. TAQQU. 2010, «Regularization and integral representations of hermite processes», *Statistics & probability letters*, vol. 80, n° 23, p. 2014–2023. [204](#), [207](#)
- POLISANO, K., M. CLAUSEL, V. PERRIER et L. CONDAT. 2017, «Wavelet-based orientation of localizable Gaussian fields», *arXiv preprint arXiv :1708.00267*. [197](#)
- PORTILLA, J. et E. SIMONCELLI. 2000, «A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients», *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 40, n° 1, p. 49–70. [205](#)
- PORTILLA, J., V. STRELA, M. J. WAINWRIGHT et E. P. SIMONCELLI. 2003, «Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain», *IEEE Transactions on Image processing*, vol. 12, n° 11, p. 1338–1351. [226](#)
- RANGAYYAN, R. M. et F. J. AYRES. 2006, «Gabor filters and phase portraits for the detection of architectural distortion in mammograms», *Medical and biological engineering and computing*, vol. 44, n° 10, p. 883–894. [222](#)
- ROMERO, J., S. ALEXANDER, S. BAID, S. JAIN et M. PAPADAKIS. 2009, «The geometry and the analytic properties of isotropic multiresolution analysis», *Adv. Comput. Math.*, vol. 31, n° 1–3, p. 283–328. [205](#)
- ROUX, S. G., P. ABRY, B. VEDEL, S. JAFFARD et H. WENDT. 2016, «Hyperbolic wavelet leaders for anisotropic multifractal texture analysis», dans *Image Processing (ICIP), 2016 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 3558–3562. [233](#)
- ROUX, S. G., M. CLAUSEL, B. VEDEL, S. JAFFARD et P. ABRY. 2013, «Self-similar anisotropic texture analysis : The hyperbolic wavelet transform contribution», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, n° 11, p. 4353–4363. [233](#)

- SHU, C.-F. et R. C. JAIN. 1994, «Vector field analysis for oriented patterns», *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, n° 9, p. 946–950. [223](#)
- STEIN, E. 1970, *Singular Integrals Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, New York, second edition. [221](#)
- TYLER, D. E. 1987, «Statistical analysis for the angular central gaussian distribution on the sphere», *Biometrika*, vol. 74, n° 3, p. 579–589. [232](#)
- UNSER, M. et N. CHENOUDARD. 2013, «A Unifying Parametric Framework for 2D Steerable Wavelet Transforms», *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 6, n° 1, p. 102–135. [205](#)
- UNSER, M., N. CHENOUDARD et D. VAN DE VILLE. 2011, «Steerable Pyramids and Tight Wavelet Frames in $L^2(\mathbb{R}^d)$ », *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 20, n° 10, p. 2705–2721. [205](#)
- UNSER, M. et D. VAN DE VILLE. 2009, «Multiresolution Monogenic Signal Analysis Using the Riesz–Laplace Wavelet Transform», *IEEE Trans. Imag. Proc.*, vol. 18, n° 11, p. 2402–2418. [197](#), [199](#), [200](#), [209](#)
- VAN DE VILLE, D., T. BLU et M. UNSER. 2005, «Isotropic polyharmonic B-splines : Scaling functions and wavelets», *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 14, n° 11, p. 1798–1813. [205](#)
- VÍA, J., D. RAMÍREZ et I. SANTAMARÍA. 2010, «Properness and widely linear processing of quaternion random vectors», *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, n° 7, p. 3502–3515. [200](#)
- WARD, J. P., K. N. CHAUDHURY et M. UNSER. 2013, «Decay properties of Riesz transforms and steerable wavelets», *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 6, n° 2, p. 984–998. [232](#)

Troisième partie

**Super-résolution de structures
orientées**

6

Décomposition atomique des signaux et super-résolution

« *L'analyse mathématique rapproche les phénomènes les plus divers,
et découvre les analogies secrètes qui les unissent.* »

Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Sommaire

5.1	Introduction	199
5.2	Orientation d'un champ gaussien à accroissements stationnaires et auto-similaire	201
5.2.1	Représentation spectrale et fonction d'anisotropie	201
5.2.2	Motivation : vers une transformée de Riesz d'un champ H-sssi ?	203
5.2.3	Définition de l'orientation d'un champ H-sssi	205
5.2.4	Lien avec le tenseur de structure des gradients	208
5.2.5	Exemples	209
5.3	Orientation d'un champ aléatoire localisable	216
5.3.1	Définition et exemple	216
5.3.2	Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes généralisés	217
5.3.3	Application aux champs browniens fractionnaires anisotropes déformés	218
5.3.4	Champ de vecteurs	221
5.4	Détection de l'orientation	223
5.4.1	Interprétation statistique	223
5.4.2	Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par tenseur de structure	226
5.4.3	Procédure d'estimation des paramètres d'un champ élémentaire par la distribution des orientations	227
5.5	Conclusion et perspectives	230
5.6	Références	233

6.1 Principe de la super-résolution

6.1.1 Introduction

LES INSTRUMENTS OPTIQUES possèdent un pouvoir de résolution, c'est-à-dire une capacité à distinguer les détails, limité par la diffraction de la lumière. Ainsi un objet ponctuel donne inmanquablement une image « floue ». Par exemple, avec un microscope d'ouverture circulaire de diamètre D (Figure 6.1a) traversé par une onde monochromatique de longueur d'onde λ , la figure d'interférence visualisée est une tache d'Airy (Figure 6.1b), dont le premier passage par zéro est obtenu pour un angle $\theta \approx 1,22\lambda/D$. Une coupe radiale en 1-D montre qu'un point source, représenté par une masse de Dirac (Figure 6.2a), est transformé en une PSF (Figure 6.2b). La limite ou pouvoir de résolution, est une condition sur la distance entre deux taches d'Airy pour laquelle on est en mesure de distinguer les deux points sources. Si l'on adopte le critère de Rayleigh, deux pics (Figure 6.1c) sont à la limite d'être distingués quand le maximum de l'une des taches correspond à la première annulation de la seconde (Figure 6.1d), autrement dit quand les pics sont séparés de la distance $\lambda_c = \theta \approx 1,22\lambda/D$ (en rouge Figure 6.1b).

Cet obstacle physique est un problème qui apparaît dans un grand nombre d'applications, telle que l'astronomie, l'imagerie médicale et la microscopie. Que l'on observe un corps céleste ou une structure cellulaire, le même phénomène de diffraction produit une image dont les artefacts d'aliasage suppriment les détails, comme on peut le voir sur la Figure 6.1d où les mesures par fluorescence 6.1c de l'intérieur d'une cellule génèrent une image floue et difficilement interprétable. Par conséquent, la *super-résolution* a pour objectif de reconstruire ces détails à partir de mesures de faible résolution. Plus précisément, soit x une représentation haute-résolution d'un objet, l'opération mathématique qui traduit le passage vers un signal basse résolution est une convolution par une PSF passe-bas ϕ , qui dépend du mécanisme d'acquisition, et qui s'écrit :

$$b = x * \phi .$$

Le but d'une méthode de super-résolution est donc de retrouver x à partir de sa version dégradée b , on parle aussi de *déconvolution*. Si la PSF a une fréquence de coupure f_c , alors on voit que le spectre de b est

$$\hat{b} = \hat{x} \hat{\phi} = \hat{x} \Pi_{[-f_c, f_c]} ,$$

où $\Pi_{[-f_c, f_c]}$ est une fonction indicatrice nulle en dehors de $[-f_c, f_c]$. Ainsi, il s'agit de retrouver les *hautes fréquences* d'un signal dont on ne dispose que de *mesures basses fréquences*. De manière générale, ce problème est mal posé, car il y a une infinité de façon d'extrapoler le spectre à

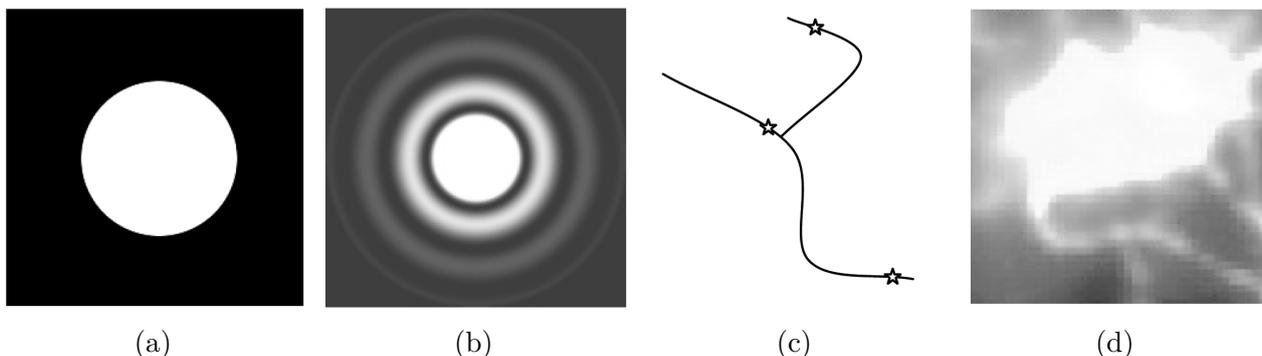


FIGURE 6.1 – (a) Ouverture circulaire, (b) tache de Airy, (c) illustration de la microscopie par fluorescence, et (d) intérieur d'une cellule mesurée par ce procédé. Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).

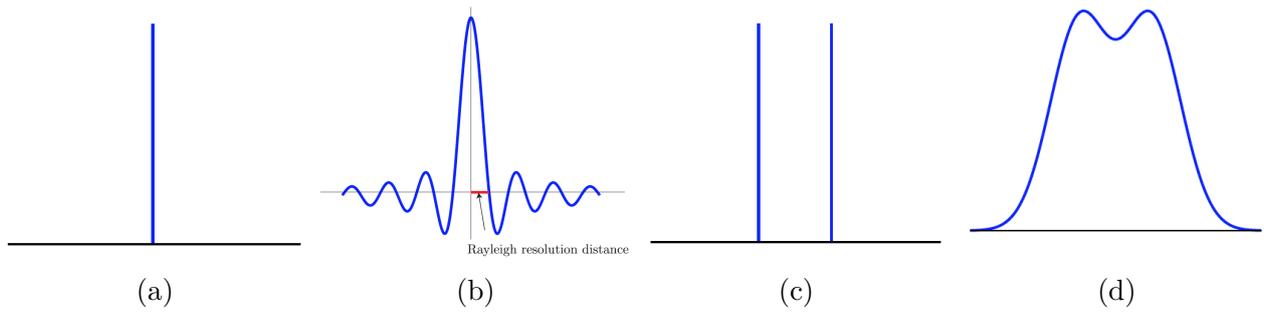


FIGURE 6.2 – (a) Un point source représenté par une masse de Dirac, (b) illustration de la PSF et de la limite de résolution de Rayleigh, (c) deux points sources, (d) à la limite d’être distingués par le critère de Rayleigh. Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).

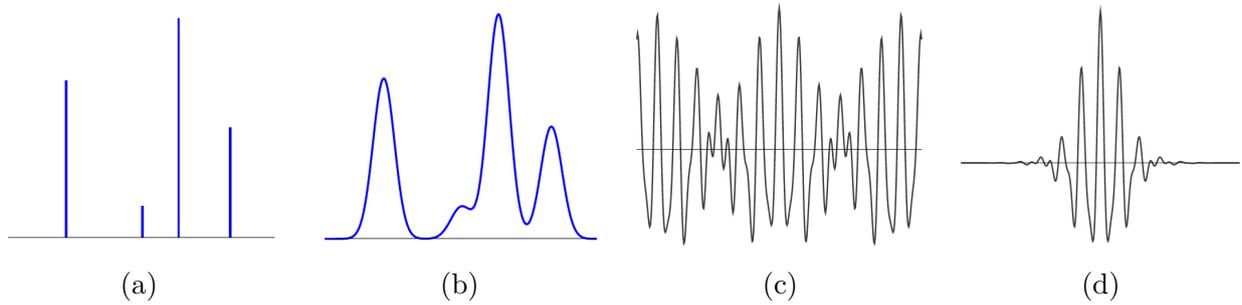


FIGURE 6.3 – (a) Le signal est une mesure de Diracs et son spectre (c), (b) signal convolué par une PSF et son spectre (d). Crédits : (FERNANDEZ-GRANDA, 2014).

partir des basses fréquences. Nous avons donc besoin d’avoir une connaissance *a priori* sur la structure du signal que l’on souhaite reconstruire. Dans ce chapitre, nous nous restreignons au cas 1-D, et nous allons considérer que le signal x est périodisé (ce qui revient à se placer sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) et composé d’une superposition de K points sources, appelés aussi impulsions, que l’on va représenter mathématiquement par une mesure discrète :

$$x = \sum_{k=1}^K c_k \delta_{t_k} ,$$

où δ_t désigne la masse de Dirac, $c_k \in \mathbb{C}$, et $T = \{t_1, \dots, t_K\} \subset [0, 1]$ un ensemble représentant les positions de ces impulsions, comme illustré Figure 6.3a. Les données basse-résolution dont on dispose sont donc

$$b(t) = (x * \phi)(t) = \sum_{t_k \in T} c_k \phi(t - t_k) ,$$

où b est représenté Figure 6.3b. Dans le domaine de Fourier cela se traduit bien par une suppression des hautes fréquences comme en attestent les spectres de x et b Figures 6.3c et 6.3d. Prenons un exemple classique où la PSF ϕ a une transformée de Fourier constante sur $[-f_c, f_c]$, c.-à-d. ϕ est un noyau de Dirichlet. Alors le spectre de b est complètement déterminé par les échantillons discrets suivants :

$$\mathbf{y}(m) = \hat{b}(m) = \int_0^1 e^{-j2\pi mt} x(dt) = \sum_{k=1}^K c_k e^{-j2\pi mt_k} , \quad m \in \mathbb{Z}, |m| \leq f_c , \quad (6.1)$$

ou encore

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}_M x , \quad (6.2)$$

avec $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ et \mathcal{F}_M l’opérateur qui associe à une mesure ou à une fonction ses $M = 2f_c + 1$ plus petits coefficients de Fourier, où f_c est un entier. Accéder à ces données partielles du spectre de

l'objet que l'on cherche à reconstruire est le processus d'acquisition nommé mesures de Fourier, qui consiste donc à corrélérer la mesure ou la fonction avec des sinusoides $\mathbf{y}(m) = \langle x, \varphi_m \rangle$ où $\varphi_m : t \mapsto e^{j2\pi mt}$.

6.1.2 Points communs et divergences avec la théorie de l'échantillonnage comprimé

Principe de l'échantillonnage comprimé

La première analogie que l'on puisse faire entre (6.2) et la théorie de l'échantillonnage comprimé, ou *Compressed Sensing* (CS), est qu'il s'agit dans les deux cas de retrouver un signal *parcimonieux* x , c'est-à-dire représenté par un petit nombre de coefficients, à partir d'un ensemble de M mesures linéaires. Rappelons brièvement les points incontournables du CS. Dans ce paradigme assez général, on mesure un signal f en le corrélant à des fonctions linéaires φ_m données :

$$y_m = \langle f, \varphi_m \rangle ,$$

qui peuvent être de nature quelconque : si les φ_m sont des impulsions alors \mathbf{y} est un vecteur d'échantillons de f dans le temps, dans l'espace, etc. Si ce sont des indicatrices de pixels alors \mathbf{y} est semblable aux images collectées par les capteurs de caméras; si ce sont des sinusoides alors comme précédemment \mathbf{y} est un vecteur de coefficients de Fourier, qui est l'acquisition traditionnellement utilisée en IRM. On souhaite dans ce cas reconstruire l'image $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$, à partir d'un ensemble de mesures $M \ll N$. Les questions qui se posent sont alors les suivantes :

1. Est-il possible de reconstruire exactement un objet discret à partir d'un nombre de mesures significativement plus petit que la dimension de l'espace dans lequel se trouve l'objet (par exemple N est le nombre de pixels inconnus) ?
2. Quel type de mesures permet de capturer au mieux l'information de \mathbf{f} ?
3. Quelle procédure permet de reconstruire l'objet à partir de ces mesures ?

Désignons par Φ la matrice dont les lignes sont les vecteurs $\varphi_1^*, \dots, \varphi_M^*$. Du point de vue de l'algèbre linéaire, le procédé de reconstruction de $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ à partir des mesures \mathbf{y} et de la résolution du système linéaire

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} \in \mathbb{R}^M ,$$

est en général mal posé quand $M < N$ puisqu'il existe une infinité de solutions. Pour que le point 1. ait une chance d'être réalisé, l'idée là aussi va être d'exploiter une structure parcimonieuse. Pour cela on décompose \mathbf{f} dans une base orthogonale

$$f(t) = \sum_{n=1}^N x_n \Psi_n(t) \Leftrightarrow \mathbf{f} = \Psi \mathbf{x} ,$$

dans laquelle il est parcimonieux. On a la définition suivante :

Définition 6.1 (SIGNAL PARCIMONIEUX)

Un signal est K -parcimonieux, s'il est défini par une combinaison linéaire de K vecteurs de base. Sa représentation dans cette base ne comporte ainsi que K composantes non nulles.

Les deux étapes traditionnellement employées que sont l'échantillonnage, puis la compression après avoir transformé les échantillons dans une base adéquate, sont effectuées de façon

simultanée dans le formalisme du CS : il s'agit de reconstruire le vecteur K -parcimonieux \mathbf{x} à partir des mesures

$$\mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{x},$$

autrement dit on souhaite accéder directement au vecteur des coefficients parcimonieux \mathbf{x} (donc au signal compressé) à travers les mesures effectuées $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, où $\mathbf{A} = \Phi\Psi$. La matrice Ψ permet de représenter le signal \mathbf{f} de façon parcimonieuse, une telle base est choisie suivant la nature de l'objet à reconstruire. Pour une image la base des cosinus discrets est une possibilité, mais il en existe d'autres telles que des bases d'ondelettes dans lesquelles \mathbf{f} aura aussi a priori une décomposition (approximativement) parcimonieuse. Une telle base est par la suite fixée. Il reste à choisir un procédé d'échantillonnage Φ tel que \mathbf{A} capte au mieux l'information du signal \mathbf{x} . Pour cela faisons remarquer que si \mathbf{A} possède deux colonnes identiques, disons les deux premières $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, alors la mesure provenant de \mathbf{A}_1 peut s'expliquer par le vecteur $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^\top$, ou $\mathbf{x} = (0, 1, \dots, 0)^\top$, ou encore toute combinaison convexe de ces deux vecteurs, il est donc vain de pouvoir reconstruire un unique signal parcimonieux \mathbf{x} dans ce cas. Ce qui suggère que les colonnes de \mathbf{A} doivent respecter une certaine *incohérence*, mesurée par les corrélations entre les éléments de Φ et Ψ :

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq i, k \leq N} |\langle \varphi_i, \Psi_k \rangle| \in [1, \sqrt{n}].$$

Typiquement, si la base Ψ qui représente le signal \mathbf{f} est celle de Fourier (exponentielles complexes), alors on pourrait considérer simplement pour Φ la base canonique des impulsions $\varphi_k(t) = \delta(t - k)$, pour laquelle la cohérence vaut $\mu(\Phi, \Psi) = 1$, ce qui est le cas d'incohérence maximale. Seulement on sait que dans cette paire de bases, prélever un faible nombre de mesures par un échantillonnage régulier (ce qui revient à périodiser le signal dans le codomaine) a pour conséquence d'après le théorème de Shannon d'induire de l'aliasage, ce qui empêche la reconstruction du signal \mathbf{x} comme illustré sur la Figure 6.4d. L'idée consiste donc à effectuer un échantillonnage stochastique, avec M mesures aléatoires prélevées sur le spectre, ce qui dans le domaine spatial s'apparente à la Figure 6.4c, où la présence des impulsions demeure visible et où les artefacts sont cette fois incohérents donc se présentent comme un bruit additif. De façon surprenante la réponse à la question du point 2. est que ce sont des mesures linéaires, aléatoires et non adaptatives (ne dépendant pas de l'objet mesuré), qui permettent de capturer astucieusement l'information de l'objet. La matrice d'acquisition des mesures Φ est donc une matrice aléatoire dont on sait avec une haute probabilité que sa cohérence avec n'importe quelle base Ψ est faible. La dernière étape consiste à retrouver le signal parcimonieux \mathbf{x} à partir de ces mesures aléatoires. Une heuristique consistant à seuiller itérativement pour supprimer ce bruit d'interférence est décrit Figure 6.4e et 6.4h. Une méthode consisterait à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \quad \text{sous contraintes que } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \iff y_m = \langle \Psi \mathbf{x}, \varphi_m \rangle, \quad \forall m = 1, \dots, M,$$

c'est-à-dire parmi tous les candidats possibles dont les mesures correspondent aux données \mathbf{y} , ne conserver que la solution la plus parcimonieuse possible mesurée par la norme $\|\cdot\|_0$. Or ce problème est combinatoire et prouvé NP-complet, ainsi il est préférable de se ramener à un problème d'optimisation convexe pour lequel on dispose de méthodes de minimisation efficaces. Il est possible d'effectuer une relaxation convexe du problème en remplaçant la norme de comptage $\|\mathbf{x}\|_0$, par une autre norme, convexe, et telle que cette dernière induise de la parcimonie. Avec ces deux contraintes, il est naturel de considérer la norme $\|\mathbf{x}\|_1$, qui est convexe et qui de part la géométrie de sa boule unité induit de la parcimonie, en comparaison par exemple avec la norme $\|\mathbf{x}\|_2$ comme en témoigne la Figure 6.5. Le problème de minimisation convexe devient alors celui-ci :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{sous contraintes que } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \iff y_m = \langle \Psi \mathbf{x}, \varphi_m \rangle, \quad \forall m = 1, \dots, M. \quad (6.3)$$

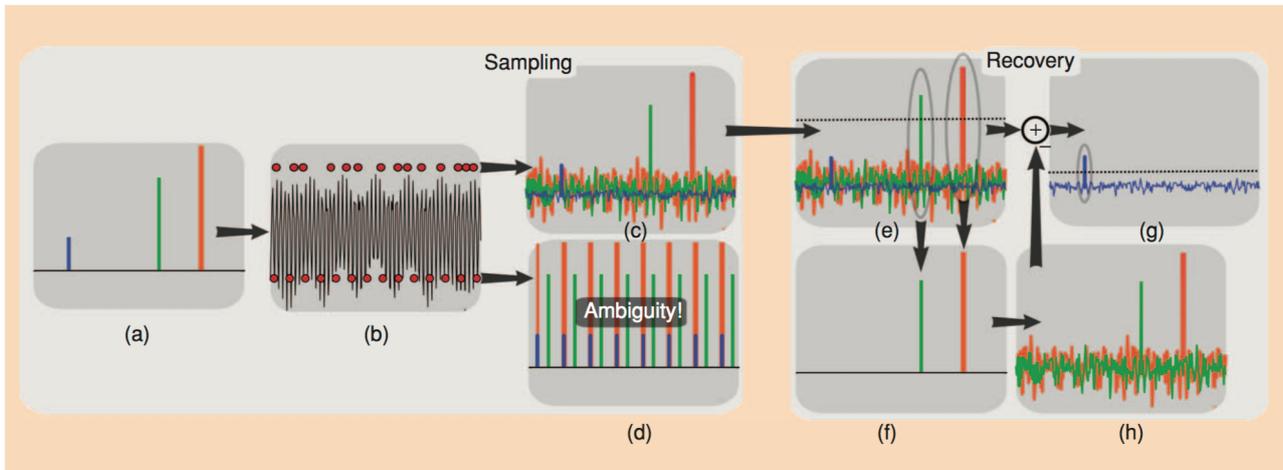


FIGURE 6.4 – (a) Signal exact d’une mesure de Diracs, (b) échantillonnage régulier ou aléatoire du spectre, avec résultat respectif (c)-(d) sur le signal recomposé en spatial par remplissage par des zéros et FFT. Crédits : (LUSTIG et coll., 2008).

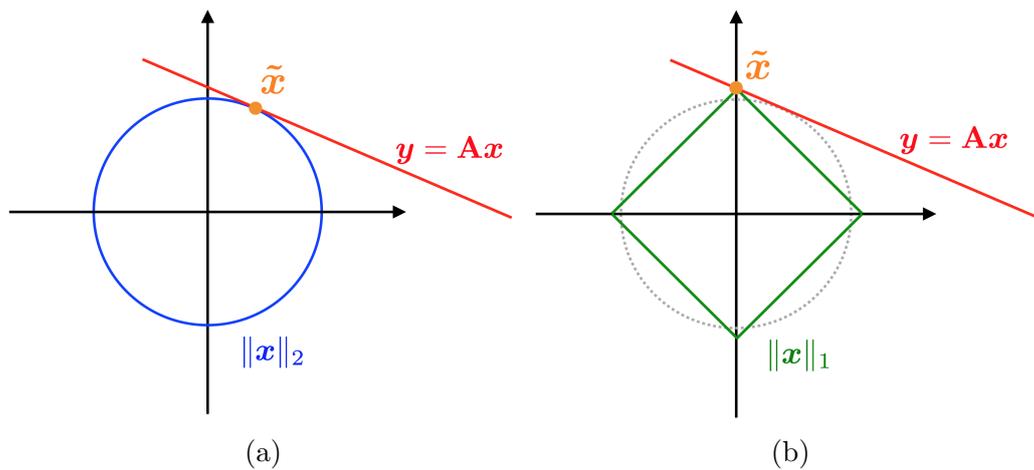


FIGURE 6.5 – (a) Minimisation par la norme $\|\cdot\|_2$, solution \tilde{x} non parcimonieuse, et (b) minimisation par la norme $\|\cdot\|_1$, qui favorise une solution \tilde{x} parcimonieuse.

CANDES et ROMBERG (2007) ont démontré le résultat suivant :

Théorème 6.1 (ÉCHANTILLONNAGE COMPRIMÉ)

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ dont on suppose que le vecteur des coefficients \mathbf{x} dans la base Ψ est K -parcimonieux. Alors en effectuant M mesures dans le domaine de Φ telles que

$$M \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot K \cdot \log N ,$$

la solution du problème (6.3) est exacte avec une grande probabilité.

Pour garantir le même succès de reconstruction dans le cas où \mathbf{x} n'est plus exactement K -parcimonieux mais approximativement K -parcimonieux, et en considérant du bruit éventuel, CANDES et TAO (2005) ont introduit une condition portant sur \mathbf{A} de sorte à rendre la procédure robuste : la RIP. Soit K donné, la matrice \mathbf{A} vérifie la RIP si il existe $\delta_K \in (0, 1)$ tel que toute matrice extraite \mathbf{A}_K issue de K colonnes de \mathbf{A} vérifie pour tout vecteur \mathbf{z} K -parcimonieux :

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}_K \mathbf{z}\| \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{z}\|_2^2 .$$

Lorsque δ_K est proche de 1, l'opérateur \mathbf{A} préserve approximativement les longueurs euclidiennes des vecteurs K -parcimonieux, ce qui assure que ces derniers ne se trouvent pas dans le noyau de \mathbf{A} , ce qui condamnerait la possibilité de les reconstruire. Dit autrement, tout sous ensemble de K colonnes de \mathbf{A} est approximativement orthogonal, et donc l'opérateur est bien conditionné sur la classe des signaux parcimonieux. Dans ces conditions, avec $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ les auteurs montrent que le problème de minimisation ℓ_1 , où la contrainte est remplacée par $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \epsilon$, détermine une solution de manière robuste. Pour plus de détails sur la théorie de l'échantillonnage comprimé, le lecteur pourra se référer à (ELDAR et KUTYNIOK, 2012).

Divergences entre l'échantillonnage comprimé et la super-résolution

Revenons au problème de super-résolution (6.2). Il s'agit de déterminer l'objet \mathbf{x} , qui est K -parcimonieux puisque localisé en K instants t_k , à partir d'un certain nombre M de mesures de Fourier $\mathbf{y} = \mathcal{F}_M \mathbf{x}$. Néanmoins la différence centrale avec le CS est que l'on ne dispose pas d'un ensemble de mesures aléatoires prélevées sur tout le spectre, mais de mesures régulières restreintes aux seules basses fréquences. Ainsi dans le premier cas du CS il s'agissait d'interpoler le signal, tandis que pour la super-résolution il s'agit d'extrapoler le signal aux hautes fréquences (Figure 6.6).

Aussi, dans le paradigme du CS on pouvait choisir l'opérateur d'acquisition Φ de telle sorte que l'on rendait les mesures incohérentes relativement à la base Ψ , or dans la super-résolution celui-ci nous est imposé. L'autre différence cruciale qui est liée, réside dans la structure de corrélation du procédé de mesure. En effet, l'opérateur \mathcal{F}_M peut être vu comme une matrice infinie à M lignes et possédant des colonnes infinies paramétrisées par $t \in [0, 1]$, représentant une sinusoïde de la forme $e^{j2\pi kt}$ pour $-f_c \leq k \leq f_c$ (Figure 6.7d). D'où, pour deux instants proches t_1 et t_2 , les colonnes sont fortement corrélées (Figure 6.7f) :

$$(\mathcal{F}_M)_{t_1} = \begin{pmatrix} e^{-j2\pi f_c t_1} \\ e^{-j2\pi(f_c-1)t_1} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_c t_1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} e^{-j2\pi f_c t_2} \\ e^{-j2\pi(f_c-1)t_2} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_c t_2} \end{pmatrix} = (\mathcal{F}_M)_{t_2} ,$$

et donc le procédé de d'acquisition de mesures ne vérifie plus la RIP.

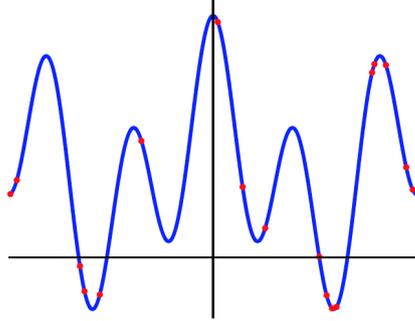
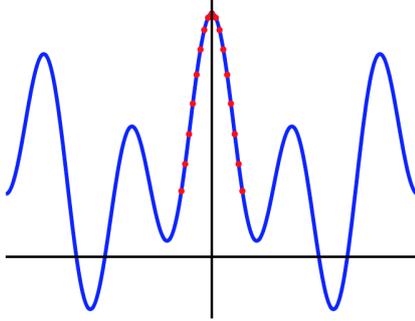
	Échantillonnage comprimé	Super-résolution
Espace	dimension finie	dimension infinie
Objet à reconstruire	mesure discrète $x = \sum_{k=1}^K c_k \delta_{t_k}$	vecteur parcimonieux $x \in \mathbb{C}^N$
Mesures	Aléatoires  interpolation du spectre	Passe-bas  extrapolation du spectre
Résolution	$\min_x \ \mathbf{x}\ _1, \text{ t.q. } \ \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\ _2 \leq \epsilon$	$\min_x \ x\ _{\text{TV}}, \text{ t.q. } \ \mathbf{y} - \mathcal{F}_M x\ _2 \leq \epsilon$
Point clé	Mesures incohérentes degré de parcimonie	Minimum de séparation
Algorithme	Lasso	Programme semi-défini positif

FIGURE 6.6 – Différences entre l'échantillonnage comprimé et la super-résolution.

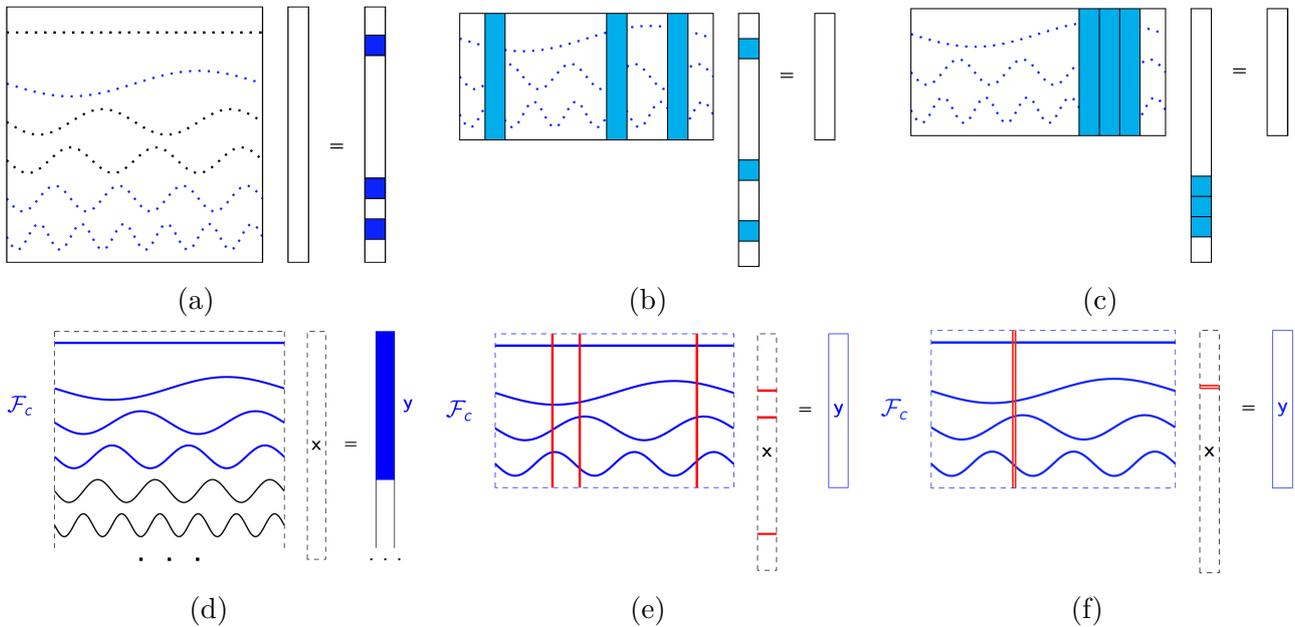


FIGURE 6.7 – (a) L'opérateur de mesures incohérentes Φ , (b)-(c) quels que soient les indices où le vecteur \mathbf{x} est K -parcimonieux, la matrice extraite \mathbf{A}_K des colonnes correspondantes est bien conditionnée par le RIP. (d) L'opérateur de mesures passe-bas \mathcal{F}_c , (e) pour K instants t_k bien séparés, la matrice extraite \mathbf{A}_K est bien conditionnée, (f) en revanche pour des instants rapprochés \mathbf{A}_K est très mal conditionnée. Crédits : Fernandez-Granda.

Ceci suggère que pour pouvoir reconstruire le signal, il ne faut pas que son support soit trop étroit, et qu'il y ait un *minimum de séparation* qui est à vérifier pour pouvoir numériquement retrouver le signal. Ce minimum de séparation est noté

$$\Delta(T) = \inf_{(t,t') \in T^2, t \neq t'} |t - t'| . \quad (6.4)$$

En effet, en calculant les valeurs singulières de la matrice extraite \mathbf{A}_K des colonnes correspondant aux K instants t_k des impulsions, en fonction de $\Delta(T)$, **CANDÈS et FERNANDEZ-GRANDA (2014)** ont montré qu'avec un minimum de séparation en dessous de la limite de Rayleigh $1/f_c$, la matrice \mathbf{A}_K est très mal conditionnée, d'autant plus qu'il y a de points sources. Dans ce cas il est peu probable d'avoir une reconstruction stable dès lors qu'il y a des perturbations, même faibles. Pour un faible nombre de points sources il est possible de descendre en dessous de cette limite, qui dépend bien entendu du niveau de bruit. Nous verrons qu'en l'absence de bruit on dispose même d'une méthode (de Prony), permettant de retrouver la solution exacte.

6.1.3 Utilisation des mesures pour s'extraire de la grille

Supposons que le minimum de séparation soit satisfaisant. Comment retrouver les K positions (et amplitudes) des impulsions à partir des mesures \mathbf{y} ? Une solution s'inspirant du paradigme du **CS**, consisterait à discrétiser le problème sur une grille dans le domaine spatial, et à chercher un vecteur \mathbf{a} correspondant à cette discrétisation, tel que \mathbf{a} soit parcimonieux, et que ses coefficients de Fourier correspondent aux mesures $\mathcal{F}_M \mathbf{a} = \mathbf{y}$. On pourrait alors utiliser les mêmes algorithmes de minimisation ℓ_1 que ceux utilisés pour le **CS**, du type Lasso :

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathcal{F}_M \mathbf{a}\|^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_1 .$$

L'inconvénient de cette méthode, est que l'on est attaché à la grille, et donc que la précision de l'estimation est limitée par cette grille. La transformée de Fourier discrète est typiquement un exemple où les fréquences calculées sont elles aussi dépendantes de la grille. Étant donné que le dictionnaire est continu, que la position d'une impulsion peut varier continûment, nous souhaiterions retrouver de même leur position de façon continue. Dans le but de promouvoir de la parcimonie dans le domaine continu, on a recours à une version continue de la norme ℓ_1 pour les mesures, à savoir la norme de la **variation totale, ou Total Variation (TV)**¹, définie par :

$$\|x\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1, f \in C(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} f(t)x(dt) .$$

Remarque 6.1. Pour une mesure de Diracs $x = \sum_k c_k \delta_{t_k}$, cette norme est égale à la norme ℓ_1 des coefficients : $\|x\|_{\text{TV}} = \sum_k |c_k|$.

La super-résolution *via* la minimisation de la norme **TV** consiste à résoudre le problème d'optimisation

$$\min_{\tilde{x}} \|\tilde{x}\|_{\text{TV}} , \quad \text{sous contrainte que } \mathcal{F}_M \tilde{x} = \mathbf{y} . \quad (6.5)$$

Remarque 6.2. L'espace \mathcal{M} sur lequel s'effectue la minimisation, à savoir l'ensemble des mesures boréliennes finies complexes sur $[0, 1]$, implique que l'on a affaire à un problème convexe de dimension infinie. Pour le résoudre, nous verrons que l'on pourra se ramener à un problème en dimension finie en le réinterprétant avec des matrices *via* un **programme semi-défini positif, ou Semi-Definite Program (SDP)**. Ces **SDP** interviennent également dans le problème dual de (6.5), permettant de prouver le résultat qui suit.

1. À ne pas confondre avec celle des gradients de fonction.

Théorème 6.2 (MINIMISATION PAR LA VARIATION TOTALE)

Soit T le support du signal x . Si le minimum de séparation (6.4) obéit à²

$$\Delta(T) \geq \frac{1.26}{f_c},$$

alors x est l'unique solution de (6.5).

La suite va consister à décrire ce problème dans le formalisme récent des *dictionnaires d'atomes*, en tirant parti de la représentation sous forme de mesures et de résultats d'analyse harmonique tout à fait déterminants.

6.2 Décomposition atomique

6.2.1 Cadre général : atomes et norme atomique

Décomposer sous forme d'atomes

L'idée consiste à exprimer de façon générale une notion de parcimonie pour une classe générique d'objets. Un vecteur K -parcimonieux, on l'a vu, s'écrit comme la combinaison de K vecteurs 1-parcimonieux ne possédant qu'une composante non nulle. Pour les matrices on peut de même quantifier ce nombre de « degrés de liberté » par la notion de *rang* d'une matrice. Dans ce cas, une matrice de rang K se décompose comme combinaison de K matrices de rang 1. Pour un signal à bande limitée, on pourra de même dire qu'il est parcimonieux car il s'écrit comme la somme de K sinusoides complexes, et ainsi de suite. Tous ces cas de figure, s'écrivent comme combinaison d'un petit nombre d'éléments de base \mathbf{a}_k , appelés *atomes*, comme suit :

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \quad c_k \geq 0, \mathbf{a}_k \in \mathcal{A}.$$

Les atomes \mathbf{a}_k des exemples précédents sont respectivement le vecteur 1-parcimonieux, la matrice de rang 1 et l'exponentielle complexe. Ces atomes appartiennent selon la nature des objets étudiés à un dictionnaire spécifique \mathcal{A} . Par exemple, dans le cas des atomes vecteurs d'exponentielles complexes, le dictionnaire est paramétré par un paramètre de fréquence f et de phase ϕ , pouvant varier continûment, d'où :

$$[\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi f i + \phi)}, \quad [\mathbf{a}(f)]_i = e^{j2\pi f i}, \quad i \in I, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{a}(f, \phi) \in \mathbb{C}^{|I|}, \quad f \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi) \}. \quad (6.7)$$

Cette approche unifiée impliquant des *atomes* et un *dictionnaire*, introduit dans (CHANDRA-SEKARAN et coll., 2012), permet de traiter simultanément diverses notions de parcimonie en les transformant en fonctions de pénalité convexe, afin de formuler des problèmes d'optimisation convexe résolvant des problèmes inverses sous-déterminés.

2. De fait, ce n'est pas une réponse totalement positive, dans la mesure où cette procédure ne permet pas de reconstruire des objets dont la distance serait inférieure à la limite de Rayleigh $1/f_c$ (des exemples pathologiques sont constructibles), nous ne sommes pas à proprement parler dans un régime de *super-résolution*. Ce qui n'enlève rien à l'intérêt de la procédure, permettant de reconstruire des spikes séparés, de façon exacte, en dehors de toute grille et ce jusqu'à une résolution proche de la limite de Rayleigh (dont on conjecture qu'il s'agit de la séparation minimale pour ce type de minimisation ℓ_1).

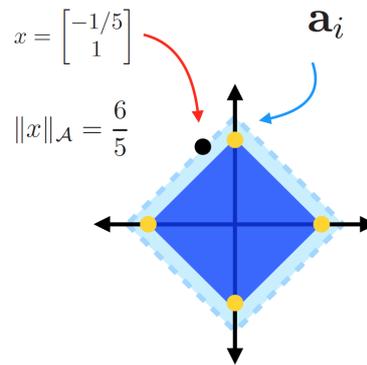


FIGURE 6.8 – Norme atomique dans \mathbb{R}^2 correspondant au dictionnaire $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$.

Norme atomique

CHANDRASEKARAN et coll. (2012) ont introduit un régularisateur universel, appelé *norme atomique*, pour des vecteurs abstraits qui s'écrivent comme combinaison parcimonieuse d'atomes de \mathcal{A} . Ils définissent $\|z\|_{\mathcal{A}}$ comme la jauge de \mathcal{A} :

$$\|z\|_{\mathcal{A}} = \inf \{t > 0 : z \in t\text{conv}(\mathcal{A})\} , \quad (6.8)$$

où $\text{Conv}(\mathcal{A})$ désigne l'enveloppe convexe de \mathcal{A} , dont on suppose que le centroïde est confondu avec l'origine. Alors (6.8) se réécrit :

$$\|z\|_{\mathcal{A}} = \inf \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a : z = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a a, c_a \geq 0, \forall a \in \mathcal{A} \right\} . \quad (6.9)$$

Si de plus \mathcal{A} est symétrique par rapport à l'origine (c.-à-d. $a \in \mathcal{A}$ si et seulement si $-a \in \mathcal{A}$), alors $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ est une norme, appelée *norme atomique* induite par \mathcal{A} .

Remarque 6.3. L'ensemble \mathcal{A} peut être indénombrable, auquel cas on préférera à l'écriture utilisée dans (6.9), celle plus rigoureuse issue du formalisme des mesures, voir infra (6.12).

Exemple 6.1. On montre qu'avec ce formalisme, on retrouve la définition de normes usuelles :

- Le dictionnaire des vecteurs de la base canonique 1-parcimonieux $\{e_i\}_{i=1}^p$, a pour enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{A})$ un polytope croisé (soit la boule unité de la norme ℓ_1), et la norme atomique $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ correspond à la norme ℓ_1 . Cet exemple est illustré Figure 6.8 dans \mathbb{R}^2 , avec $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ (points représentés en jaune). L'enveloppe convexe de ces quatre points correspond bien à la boule unité de ℓ_1 , et la norme atomique d'un point, ici $z = (-1/5, 1)^T$, correspond à la dilatation de facteur t minimale telle que l'enveloppe convexe $t\text{Conv}(\mathcal{A})$ rencontre le point z , ici pour $t = \|z\|_{\mathcal{A}} = 6/5$.
- Le dictionnaire des matrices de rang 1 noté $\mathcal{A} = \{M : \text{rang}(M) = 1, \|M\|_F = 1\}$, a pour enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{A})$ la boule unité pour la *norme nucléaire* (c.-à-d. la somme des modules des valeurs singulières, supposée inférieure à 1), et la norme atomique $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ correspond à la norme nucléaire $\|\cdot\|_*$.
- Le dictionnaire des vecteurs binaires $\mathcal{A} = \{\pm 1\}_{i=1}^p$, a pour enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{A})$ un hypercube, et la norme atomique $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ correspond à la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty}$.

Dans toute la suite on utilisera le dictionnaire des vecteurs d'exponentielles complexes défini par (6.6)-(6.7). Nous verrons que dans ce cas la norme atomique se calcule par SDP. On rappelle que l'enjeu de la super-résolution est de déterminer une procédure permettant de trouver une

mesure \tilde{x} , telle que $\mathcal{F}_M \tilde{x} = \mathbf{y}$, et qui soit la plus parcimonieuse possible de sorte que la procédure fournisse $\tilde{x} = x$ comme solution, où $x = \sum_{k=1}^K c_k \delta_{t_k}$. Remarquons qu'avec la notation des exponentielles, la relation $\mathbf{y}(m) = \sum_{k=1}^K c_k e^{-j2\pi m t_k}$ (6.1) se réécrit :

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k) = \sum_{k=1}^K |c_k| \mathbf{a}(f_k, \phi_k). \quad (6.10)$$

L'objectif est donc, à partir d'un ensemble de mesures stockées dans le vecteur \mathbf{y} , de retrouver la décomposition atomique minimale de \mathbf{y} , qui est réalisée ici pour K atomes (6.10), dont les paramètres de fréquence f_k encodent les positions t_k des spikes.

6.2.2 Lien avec les matrices de Toeplitz de rang faible

On définit l'opérateur de Toeplitz $\mathbf{T}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{M}_N$ défini par :

$$\mathbf{T}_N : \mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1}) \mapsto \begin{pmatrix} z_0 & z_1^* & \cdots & z_{N-1}^* \\ z_1 & z_0 & \cdots & z_{N-2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N-1} & z_{N-2} & \cdots & z_0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Notons que l'opérateur \mathbf{T} établit une bijection entre les vecteurs de \mathbb{C}^N et les matrices hermitiennes. Ainsi il sera équivalent de parler de décomposition atomique de \mathbf{z} ou de $\mathbf{T}(\mathbf{z})$. Remarquons ensuite que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N(\mathbf{a}(f_k)) &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-j2\pi f_k} & \cdots & e^{-j2\pi f_k(N-1)} \\ e^{j2\pi f_k} & 1 & \cdots & e^{-j2\pi f_k(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_k(N-1)} & e^{j2\pi f_k(N-2)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_k} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_k(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-j2\pi f_k} & \cdots & e^{-j2\pi f_k(N-1)} \end{pmatrix}, \\ &= \mathbf{a}(f_k) \mathbf{a}(f_k)^*. \end{aligned}$$

On montre donc que si $\mathbf{z} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k)$ est composé de $1 \leq K \leq N$ atomes, alors

$$\mathbf{T}_N(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{T}(\mathbf{a}(f_k)) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k) \mathbf{a}(f_k)^*.$$

D'où en posant $z_k = e^{j2\pi f_k}$:

$$\mathbf{T}_N(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_K \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \cdots & z_K^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_1^{-1} & \cdots & z_1^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_K^{-1} & \cdots & z_K^{-(N-1)} \end{pmatrix}$$

est de la forme $\mathbf{P}^* \mathbf{D} \mathbf{P}$, donc de rang K puisque les matrices de part et d'autre de la matrice diagonale sont des matrices de Vandermonde de rang plein.

La réciproque est en revanche fautive, si le rang de $\mathbf{T}_N(\mathbf{z})$ est égal à K , il n'est pas garanti que l'on puisse déterminer une décomposition de \mathbf{z} en K atomes. Des hypothèses supplémentaires sur $\mathbf{T}_N(\mathbf{z})$ sont nécessaires pour établir l'équivalence, ce qui fait l'objet de la section suivante. Pour davantage de détails sur les considérations de rang on renvoie à (CONDAT, 2017).

6.2.3 Carathéodory et moments trigonométriques

En identifiant $[0, 1]$ au cercle unité $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, on peut exprimer de façon équivalente le problème en cherchant une mesure sur \mathbb{T} , c.-à-d. $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, telle que

$$y_m = \int_{\mathbb{T}} z^{-m} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-j\omega m} d\mu(e^{j\omega}), \quad m = -M, \dots, M. \quad (6.12)$$

Ces coefficients de Fourier y_m de la mesure μ sont aussi appelés *moments trigonométriques* de μ . Puisque l'on dispose d'un nombre restreint de moments, on s'aperçoit que le problème posé par la super-résolution est relié à celui de l'identification d'une mesure à partir d'un nombre fini de ses moments, ce qui est appelé le *problème des moments tronqués* (CURTO et FIALKOW, 1991). Si on détermine une telle mesure à partir des moments trigonométriques tronqués, on peut alors calculer tous ses moments et retrouver les coefficients de Fourier correspondant aux hautes fréquences, ce qui justifie l'emploi du terme *super-résolution*.

Quelles sont les conditions portant sur les y_m pour qu'une telle mesure existe, qu'elle soit unique et concentrée en un nombre fini de Diracs ? Le théorème de Carathéodory suivant répond à cette question :

Théorème 6.3 (THÉORÈME DE CARATHÉODORY)

Un vecteur $\mathbf{z} = (z_{N-1}^*, \dots, z_1^*, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de longueur $2N - 1$, avec $z_0 \in \mathbb{R}$, est une combinaison positive de $K \leq N$ atomes $\mathbf{a}(f_k)$ si et seulement si $\mathbf{T}_N(\mathbf{z}_+) \succcurlyeq 0$ et est de rang K , où $\mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1})$ est de longueur N . De plus, cette décomposition est unique si $K < N$.

Preuve :

Les théorèmes 6.5 et l'Annexe A.5 ci-après établissent ce résultat. Une preuve simple et concise pourra être trouvée dans un récent article de YANG et XIE (2016). □

Donnons un aperçu de l'historique de ce problème des moments trigonométriques tronqués, afin de mettre en évidence les résultats qui mènent à cette caractérisation et en particulier la raison pour laquelle intervient l'hypothèse de positivité d'une matrice Toeplitz.

De la positivité des fonctions en analyse : du théorème de Carathéodory au théorème de Bochner

La théorie des fonctions analytiques sur la disque unité \mathbb{D} possédant une partie réelle positive, prend racine en 1907 avec l'article de CARATHÉODORY (1907) présentant le problème de fonctions analytiques complexes suivant :

Définition 6.2 (PROBLÈME DE CARATHÉODORY)

Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les complexes c_0, c_1, \dots, c_N , le polynôme

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_N z^N, \quad (6.13)$$

possède-t-il une extension en une fonction analytique $f(z)$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$

$$f(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_N z^N + d_{N+1} z^{N+1} + \dots, \quad (6.14)$$

$$d_n = c_n, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (6.15)$$

et telle que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ sur \mathbb{D} ?

Carathéodory, qui travaillait sur l'étude des ensembles convexes, a sans surprise abordé le problème sous cet angle en remarquant que les c_n formaient un ensemble convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$. Il fournit la condition nécessaire et suffisante suivante : le point $(a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ doit appartenir au plus petit ensemble convexe contenant la courbe paramétrique de représentation $(2 \cos \theta, -2 \sin \theta, \dots, 2 \cos N\theta, -2 \sin N\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

TOEPLITZ (1911) remarqua que cette condition pouvait être reformulée de manière algébrique en terme de positivité de la forme hermitienne suivante :

$$\sum_{p,q=1}^n c_{p-q} u_p \bar{u}_q \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \forall u_p, u_q \in \mathbb{C}, \quad (6.16)$$

et donc de la matrice de Toeplitz qui porte maintenant son nom.

CARATHÉODORY (1911) poursuit son investigation des fonctions harmoniques positives, et donna la caractérisation suivante :

Théorème 6.4 (CARACTÉRISATION D'UNE MATRICE TOEPLITZ POSITIVE)

La matrice Toeplitz $\mathbf{T}_{N+1}(\mathbf{c})$ est positive de rang K , avec $1 \leq K \leq N + 1$, si et seulement si la matrice $\mathbf{T}_{K-1}(\mathbf{c})$ est inversible et il existe des $\epsilon_k \in \mathbb{T}$ et $\rho_k > 0$ pour $k = 1, \dots, K$, $\epsilon_k \neq \epsilon_l$, tels que

$$c_n = \sum_{k=1}^K \rho_k \epsilon_k^n, \quad n = 0, \dots, N.$$

Par ailleurs la même année **HERGLOTZ (1911)** fait le lien entre le résultat de **CARATHÉODORY (1907)** et le problème des moments d'une mesure.

Représentation de Herglotz et problèmes des moments complets

Définition 6.3 (FONCTION DE CARATHEODORY)

Une fonction analytique F sur \mathbb{D} est appelée fonction de Caratheodory si et seulement si $F(0) = 1$ et $\text{Re } F(z) > 0$ sur \mathbb{D} .

Proposition 6.1 (REPRÉSENTATION DE HERGLOTZ)

La représentation de Herglotz dit que si f est une fonction de Caratheodory dont le développement de Taylor est $f(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$, alors il existe une unique mesure μ telle que

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} d\mu(\theta). \quad (6.17)$$

De plus, les coefficients de Taylor c_n correspondent aux moments de μ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} d\mu(\theta) = c_n. \quad (6.18)$$

Preuve :

Annexe [A.3.1](#).

□

En toute généralité, le problème des moments complets s'énonce de la façon suivante :

Définition 6.4 (PROBLÈME DES MOMENTS COMPLETS)

Soit une séquence infinie de nombres complexes c_0, c_1, \dots , et un sous-ensemble $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les c_n existe-t-il une mesure de Borel positive μ sur \mathbb{C} telle que $\text{supp } \mu \subset \mathcal{K}$ et

$$c_n = \int x^n d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N} ? \quad (6.19)$$

Remarque 6.4. Ce problème se décline en plusieurs versions, donnant lieu respectivement aux théorèmes de Stieltjes, Toeplitz, Hamburger et Hausdorff, dans le cas où $\mathcal{K} = [0, +\infty)$, $\mathcal{K} = \mathbb{T}$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{K} = [a, b]$, respectivement. La littérature sur ces problèmes est abondante (ACHIEZER et KREJN, 1962; AKHIEZER, 1965; KREIN et NUDELMAN, 1977; LANDAU, 1987; SARASON, 1987; SHOHAT et TAMARKIN, 1943). Par exemple, quand $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, le théorème de Hamburger implique que (6.19) admet une solution si et seulement si les matrices de Hankel $(c_{p+q})_{p,q=0}^n$ ($n = 0, 1, \dots$) sont positives (SHOHAT et TAMARKIN, 1943, Théorème I.1.2).

Le Théorème 6.4 de Carathéodory, la reformulation (6.16) de Toeplitz, et la représentation 6.1 de Herglotz, donnent ainsi la caractérisation du problème des moments trigonométriques complets :

Théorème 6.5 (CARATHÉODORY-TOEPLITZ)

Une suite de complexes $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ correspond aux moments d'une mesure positive μ sur \mathbb{T} , c.-à-d.

$$c_n = \int e^{-jn\theta} d\mu(\theta), \quad (6.20)$$

si et seulement si les matrices Toeplitz $\mathbf{T}_N(\mathbf{c})$ sont positives pour tout N .

Une autre preuve est fournie en Annexe A.3.2, basée sur le théorème A.2 de (FEJÉR, 1916; RIESZ, 1916) et le théorème A.3 de Riesz-Markov.

Problème des moments trigonométriques tronqués

On définit de même le problème des moments tronqués comme suit :

Définition 6.5 (PROBLÈME DES MOMENTS TRONQUÉS)

Pour $0 \leq N < \infty$, on considère $(c_0, c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ et $K \subset \mathbb{C}$. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les c_n existe-t-il une mesure de Borel positive μ sur \mathbb{C} telle que $\text{supp } \mu \subset K$ et

$$c_n = \int x^n d\mu, \quad \forall 0 \leq n \leq N ? \quad (6.21)$$

Remarque 6.5. Le problème des moments complets n'inclut pas celui des moments tronqués. En revanche il est parfois possible inversement d'utiliser le résultat des moments tronqués pour recouvrir celui des moments complets (LANDAU, 1987, page 5). Les différents problèmes de moments tronqués sont abordés dans (CURTO et FIALKOW, 1991) avec une approche récursive sur les matrices Hankel ou Toeplitz positives.

Le problème qui nous intéresse plus particulièrement est celui de Toeplitz, soit le théorème des moments trigonométriques tronqués (dont on trouve une démonstration dans (CURTO et FIALKOW, 1991)) :

Théorème 6.6 (THÉORÈME DES MOMENTS TRIGONOMÉTRIQUES TRONQUÉS)

Pour $0 \leq N < \infty$, on considère $(c_0, c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Il existe une unique mesure de Borel positive μ sur \mathbb{T} telle que

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} d\mu(\theta), \quad \forall 0 \leq n \leq N. \quad (6.22)$$

si et seulement si les matrices Toeplitz $(c_{p-q})_{p,q=0}^n$ ($n = 0, \dots, N$) sont positives.

À partir de la représentation de Herglotz (Proposition 6.1) et de la caractérisation des matrices Toeplitz positives (Théorème 6.4), CARATHÉODORY et FEJÉR (1911) formulèrent le Théorème A.5 qui établit l'existence et l'unicité d'une combinaison linéaire positive et finie de racines de l'unité pour représenter N complexes c_n donnés, et qui fournit au passage une démonstration du Théorème 6.6 des moments trigonométriques tronqués.

Théorème 6.7 (CARATHÉODORY-FÉJÉR)

Soit $N > 1$ complexes c_1, c_2, \dots, c_N non nuls. Il existe un entier K , $1 \leq K \leq N$, et des constantes ρ_k, ϵ_k ; $k = 1, 2, \dots, K$, tels que $\rho_k > 0$, $|\epsilon_k| = 1$, $\epsilon_k \neq \epsilon_l$ si $k \neq l$, et

$$c_n = \sum_{k=1}^K \rho_k \epsilon_k^n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.23)$$

L'entier K et les constantes ρ_k, ϵ_k sont déterminés de manière unique.

Preuve :

Annexe A.4. Initialement démontrée dans (FISCHER, 1911), une preuve algébrique a également été proposée dans (GRENANDER et SZEGÖ, 1958), que l'on a jugé bon de reproduire en totalité, du fait que les références originales sont en allemand, et que la preuve fournie par GRENANDER et SZEGÖ (1958) est relativement succincte. De plus, elle permet d'appréhender les différents liens qui se tissent entre fonctions analytiques, algèbre linéaire et théorie de la mesure. □

Corollaire 6.1 (DÉCOMPOSITION D'UNE MATRICE TOEPLITZ POSITIVE)

Toute matrice Toeplitz $\mathbf{C} = (c_{p-q})$ positive, admet une factorisation unique $\mathbf{V}^* \mathbf{Q} \mathbf{V}$, où \mathbf{V} est une matrice de Vandermonde de taille $(N+1) \times K$ avec $\mathbf{V}_{k,l} = \epsilon_k^{l-1}$, et \mathbf{Q} une matrice diagonale définie positive de taille $K \times K$ avec $\mathbf{Q}_{k,l} = \rho_k \delta_{k,l}$.

Remarque 6.6. D'autres travaux de Schur (SCHUR, 1917, 1918) viennent compléter le tableau. Pour une présentation des problématiques modernes sur ce sujet, voir (DUREN, 1970; GARNETT, 2007; HOFFMAN, 2007). Les formes de Toeplitz jouèrent un rôle important dans plusieurs approches directes du problème de la phase en cristallographie, avec comme point de départ un article de (KARLE et HAUPTMAN, 1950), suivi par d'autres références répertoriées dans (SHMUELI, 2001, section 1.3.4.2.1.10). Le problème algébrique que pose par exemple la diffusion de neutrons est résumé dans (CERVELLINO et CICCARIELLO, 2005), et utilise une version de Carathéodory généralisée (CICCARIELLO et CERVELLINO, 2006). PISARENKO (1973) a utilisé ce résultat à partir de la démonstration de (GRENANDER et SZEGÖ, 1958) afin de proposer une procédure de reconstruction de fréquences. Enfin pour une analyse historique plus complète de la genèse du théorème spectral (Bochner) et de l'usage de la positivité le lecteur pourra se référer à (STEEN, 1973) et (STEWART, 1976).

6.2.4 Norme atomique caractérisée par un programme semi-défini positif

Terminons ce chapitre en donnant, grâce au théorème de Carathéodory, une caractérisation et un moyen effectif de calcul de la norme atomique, pour le dictionnaire des vecteurs d'exponentielles complexes de composantes $[\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi fi + \phi)}$, avec $i \in I$. On distingue deux cas : celui où le vecteur \mathbf{z} s'écrit comme une décomposition positive d'atomes sans phase ; et celui où la décomposition présente des phases. Plus précisément :

Proposition 6.2 (CARACTÉRISATION DE LA NORME ATOMIQUE DANS LE CAS POSITIF)

Soit un vecteur $\mathbf{z} = (z_{N-1}^*, \dots, z_1^*, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de longueur $2N - 1$, avec $z_0 \in \mathbb{R}$. Si \mathbf{z} admet une décomposition positive en $K < N$ atomes : $\mathbf{z} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k)$, $c_k > 0$, alors cette décomposition est unique et on a :

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K c_k .$$

Dans le cas où la décomposition est signée (avec présence de phases), TANG et coll. (2013) démontrent la proposition suivante :

Proposition 6.3 (CARACTÉRISATION DE LA NORME ATOMIQUE DANS LE CAS SIGNÉ)

Soit un vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{|I|}$, avec I de la forme $I = \{0, \dots, n - 1\}$ ou $I = \{-2M, \dots, 2M\}$, qui se décompose comme $\mathbf{z} = \sum_k c_k \mathbf{a}(f_k, \phi_k)$. Alors la norme atomique de \mathbf{z} est caractérisée par le SDP suivant :

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{|I|}, t \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2|I|} \text{Tr}(\mathbf{T}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}t : \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & t \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\} . \quad (6.24)$$

Remarque 6.7. Nous démontrerons dans la Proposition 7.3 que ce résultat peut être amélioré, par la suppression de la variable t .

6.3 Références

- ACHIEZER, N. I. et M. G. KREJN. 1962, *Some questions in the theory of moments*, vol. 2, American Mathematical Soc. 253
- AKHIEZER, N. I. 1965, *The classical moment problem : and some related questions in analysis*, vol. 5, Oliver & Boyd. 253
- CANDES, E. et J. ROMBERG. 2007, «Sparsity and incoherence in compressive sampling», *Inverse problems*, vol. 23, n° 3, p. 969. 245
- CANDÈS, E. J. et C. FERNANDEZ-GRANDA. 2014, «Towards a mathematical theory of super-resolution», *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, n° 6, p. 906–956. 247
- CANDES, E. J. et T. TAO. 2005, «Decoding by linear programming», *IEEE transactions on information theory*, vol. 51, n° 12, p. 4203–4215. 245

- CARATHÉODORY, C. 1907, «Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen», *Mathematische Annalen*, vol. 64, n° 1, p. 95–115. [251](#), [252](#)
- CARATHÉODORY, C. 1911, «Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 32, n° 1, p. 193–217. [252](#)
- CARATHÉODORY, C. et L. FEJÉR. 1911, «Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 32, n° 1, p. 218–239. [254](#)
- CERVELLINO, A. et S. CICCARIELLO. 2005, «The algebraic approach to the phase problem», *Acta Crystallographica Section A : Foundations of Crystallography*, vol. 61, n° 5, p. 494–500. [254](#)
- CHANDRASEKARAN, V., B. RECHT, P. A. PARRILO et A. S. WILLSKY. 2012, «The convex geometry of linear inverse problems», *Foundations of Computational mathematics*, vol. 12, n° 6, p. 805–849. [248](#), [249](#)
- CICCARIELLO, S. et A. CERVELLINO. 2006, «Generalization of a theorem of Carathéodory», *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 39, n° 48, p. 14911. [254](#)
- CONDAT, L. 2017, «Atomic norm minimization for the decomposition of vectors into complex exponentials», . [250](#)
- CURTO, R. E. et L. A. FIALKOW. 1991, «Recursiveness, positivity, and truncated moment problems», *Houston Journal of Mathematics*, vol. 17, n° 4, p. 603–635. [251](#), [253](#)
- DUREN, P. L. 1970, *Theory of H_p spaces*, vol. 38, IMA. [254](#)
- ELDAR, Y. C. et G. KUTYNIOK. 2012, *Compressed sensing : theory and applications*, Cambridge University Press. [245](#)
- FEJÉR, L. 1916, «Über trigonometrische Polynome», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 146, p. 53–82. [253](#)
- FERNANDEZ-GRANDA, C. 2014, *A Convex-programming Framework for Super-resolution*, thèse de doctorat, Stanford University. [8](#), [240](#), [241](#)
- FISCHER, E. 1911, «Über das Carathéodory'sche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 32, n° 1, p. 240–256. [254](#)
- GARNETT, J. 2007, *Bounded analytic functions*, vol. 236, Springer Science & Business Media. [254](#)
- GRENANDER, U. et G. SZEGÖ. 1958, *Toeplitz forms and their applications*, vol. 321, Univ of California Press. [254](#)
- HERGLOTZ, G. 1911, «Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis», *Leipziger Berichte*, vol. 63, p. 501–511. [252](#)
- HOFFMAN, K. 2007, *Banach spaces of analytic functions*, Courier Corporation. [254](#)

- KARLE, J. T. et H. HAUPTMAN. 1950, «The phases and magnitudes of the structure factors», *Acta Crystallographica*, vol. 3, n° 3, p. 181–187. [254](#)
- KREIN, M. G. et A. NUDELMAN. 1977, «The markov moment problem and extremal problems, volume 50 of translations of mathematical monographs», *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*. [253](#)
- LANDAU, H. J. 1987, *Moments in mathematics*, vol. 37, American Mathematical Soc. [253](#)
- LUSTIG, M., D. L. DONOHO, J. M. SANTOS et J. M. PAULY. 2008, «Compressed sensing mri», *IEEE signal processing magazine*, vol. 25, n° 2, p. 72–82. [8](#), [244](#)
- PISARENKO, V. F. 1973, «The retrieval of harmonics from a covariance function», *Geophysical Journal International*, vol. 33, n° 3, p. 347–366. [254](#)
- RIESZ, F. 1916, «Über ein Problem des Herrn Carathéodory», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 146, p. 83–87. [253](#)
- SARASON, D. 1987, «Moment problems and operators in Hilbert space», dans *Proc. Symp. Appl. Math*, vol. 37, p. 54–70. [253](#)
- SCHUR, J. 1917, «Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 147, p. 205–232. [254](#)
- SCHUR, J. 1918, «Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 148, p. 122–145. [254](#)
- SHMUELI, U. 2001, *International Tables for Crystallography, Reciprocal Space*, vol. B, Springer Science. [254](#)
- SHOHAT, J. A. et J. D. TAMARKIN. 1943, *The problem of moments*, 1, American Mathematical Soc. [253](#)
- STEEN, L. A. 1973, «Highlights in the history of spectral theory», *The American Mathematical Monthly*, vol. 80, n° 4, p. 359–381. [254](#)
- STEWART, J. 1976, «Positive definite functions and generalizations, an historical survey», *Rocky Mountain J. Math*, vol. 6, n° 3. [254](#)
- TANG, G., B. N. BHASKAR, P. SHAH et B. RECHT. 2013, «Compressed sensing off the grid», *IEEE transactions on information theory*, vol. 59, n° 11, p. 7465–7490. [255](#)
- TOEPLITZ, O. 1911, «Über die Fourier'sche entwicklung positiver Funktionen», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, vol. 32, n° 1, p. 191–192. [252](#)
- YANG, Z. et L. XIE. 2016, «Frequency-selective Vandermonde decomposition of Toeplitz matrices with applications», *arXiv preprint arXiv :1605.02431*. [251](#)

7

Super-résolution convexe de lignes 2-D

« Les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité. »

Guillaume d'Ockham, *lex parsimoniae* (1319)

DANS CE CHAPITRE, nous présentons nos travaux relatifs à la détection de lignes 2-D dans les images par des techniques de *super-résolution*. En biologie, pouvoir suivre la trajectoire d'une molécule observée au microscope est important dans la compréhension de leur dynamique, ou d'évènements rares perdus par les approches traditionnelles moyennant un ensemble de molécules. Afin de les détecter, il est nécessaire de marquer ces molécules d'intérêt, typiquement au moyen de fluorophores organiques ; puis après acquisition d'une séquence d'images au cours du temps, de reconstituer la trajectoire de la molécule (Figure 7.1). La résolution spatiale étant limitée par la diffraction, retrouver les positions précises de la molécule est donc un enjeu de taille. En première approximation, la trajectoire se comportant localement comme une droite, nous nous sommes intéressés dans (POLISANO et coll., 2016) au problème de l'estimation sous-pixellique de lignes dégradées par une PSF donnée, et affectées par du bruit. Nous montrons que le problème inverse de retrouver ces lignes à partir de mesures basse résolution peut se formuler par un problème d'optimisation convexe, qui se ramène au cas d'une super-résolution 1-D en minimisant la norme atomique des lignes et des colonnes de l'image pour le dictionnaire des atomes d'exponentielles complexes. Le but étant d'exploiter la parcimonie des lignes dans chacune des deux directions afin d'être en mesure de les reconstruire. La résolution du problème d'optimisation est effectuée au moyen d'algorithmes proximaux, fournissant une image débruitée et sans flou, à partir de laquelle on procède ensuite par une approche paramétrique à une estimation spectrale des paramètres des lignes, améliorée dans (POLISANO et coll., 2017).

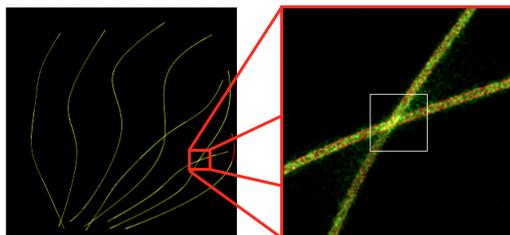


FIGURE 7.1 – Tubulines (protéines) observées par microscopie à fluorescence.

Sommaire

6.1	Principe de la super-résolution	240
6.1.1	Introduction	240
6.1.2	Points communs et divergences avec la théorie de l'échantillonnage comprimé	242
6.1.3	Utilisation des mesures pour s'extraire de la grille	247
6.2	Décomposition atomique	248
6.2.1	Cadre général : atomes et norme atomique	248
6.2.2	Lien avec les matrices de Toeplitz de rang faible	250
6.2.3	Carathéodory et moments trigonométriques	251
6.2.4	Norme atomique caractérisée par un programme semi-défini positif .	255
6.3	Références	255

7.1 Modélisation de lignes diffractées

7.1.1 Définition des lignes dans le domaine continu

On se place dans l'espace quotient $\mathbb{P} = \mathbb{R}/(W\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$, correspondant au plan 2-D sur lequel est induit une périodicité de période W , où W un entier supérieur ou égal à 1. Pour simplifier les notations on supposera W impair et on posera $M = (W - 1)/2$.

Définition 7.1 (LIGNES EXACTES 2-D)

Une ligne de longueur infinie, d'angle $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$ par rapport à la verticale, d'amplitude $\alpha > 0$, et coupant l'axe des abscisses en $\eta \in \mathbb{R}$ par rapport à l'origine, est définie comme la distribution

$$(t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \alpha \delta(\cos \theta(t_1 - \eta) + \sin \theta t_2),$$

où δ est la distribution de Dirac.

On définit alors la distribution x^\sharp , comme la somme de K lignes exactes, pour un entier $K \geq 1$, soit :

$$x^\sharp : (t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \sum_{k=1}^K \alpha_k \delta(\cos \theta_k(t_1 - \eta_k) + \sin \theta_k t_2).$$

Remarque 7.1. La Figure 7.2b indique la convention que l'on adopte pour la représentation des images. À ce stade on supposera que les lignes sont plutôt verticales, c'est-à-dire que pour tout $k = 1, \dots, K$, $\theta_k \in (-\pi/4, \pi/4]$. Nous traiterons le cas général dans la section 7.3.3.

Étant donné qu'une ligne idéale x^\sharp est composée de Diracs, la transformée de Fourier horizontale $\hat{x}^\sharp = \mathcal{F}_1 x^\sharp$ est composée d'une somme d'exponentielles. L'objectif va être de reconstruire \hat{x}^\sharp par une technique de super-résolution, à partir de ses observations au travers d'un opérateur de dégradation \mathbf{A} connu et en la présence de bruit, ce qui est un problème mal posé. Puis, une estimation spectrale de ces exponentielles nous permettra de retrouver les paramètres des lignes. Commençons par caractériser plus précisément l'opérateur de flou \mathbf{A} .

7.1.2 Hypothèses sur le flou et le processus d'échantillonnage

L'image des lignes diffractées \mathbf{b}^\sharp de taille $W \times H$ s'obtient par la convolution de la distribution x^\sharp avec la fonction de flou ϕ , suivi d'un échantillonnage régulier de pas unitaire, désigné par l'opérateur Δ :

$$\mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2), \quad \forall n_1 = 0, \dots, W - 1, \quad n_2 = 0, \dots, H - 1.$$

On considère également que la fonction d'étalement du point ϕ est séparable, c.-à-d. que la fonction $x^\sharp * \phi$ est obtenue après une première convolution horizontale avec φ_1 , puis par une seconde convolution verticale avec φ_2 . Formellement, $x^\sharp * \phi = (x^\sharp * \phi_1) * \phi_2$ avec $\phi_1(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\delta(t_2)$ et $\phi_2(t_1, t_2) = \delta(t_1)\varphi_2(t_2)$, où φ_1 et φ_2 des fonctions de L^1 .

Ainsi, après la première convolution horizontale, en utilisant le fait que $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ pour tout $a \neq 0$, on obtient la fonction suivante :

$$\Psi = x^\sharp * \phi_1 : (t_1, t_2) \mapsto \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k} \varphi_1(t_1 - \eta_k + \tan \theta_k t_2). \quad (7.1)$$

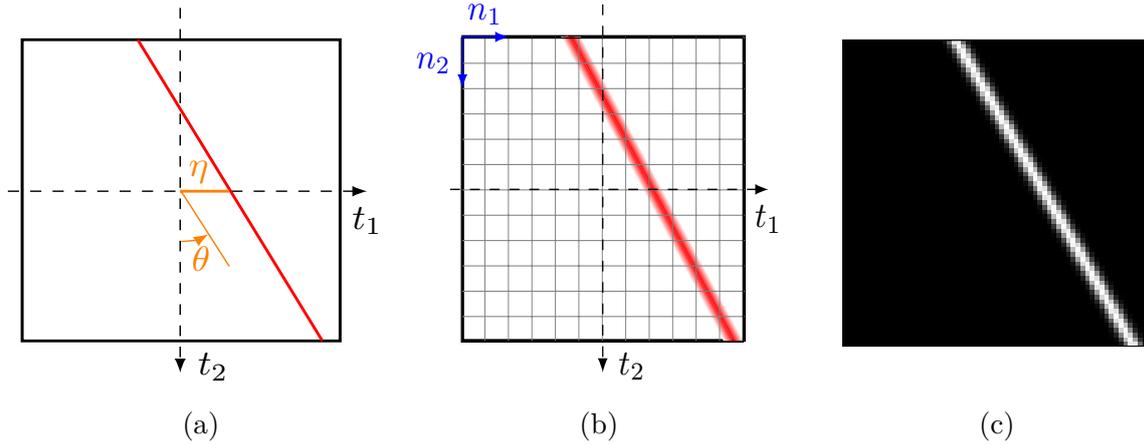


FIGURE 7.2 – (a) Paramètres (θ, η) caractérisant la position de la ligne dans le plan, (b) convention utilisée pour représenter l'image, résultat de la discrétisation (par l'opérateur d'échantillonnage Δ) avec un pas unitaire sur la ligne floutée $x^\sharp * \phi$, et (c) l'image discrète obtenue $\mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2)$.

On montre aussi que, après la seconde convolution verticale, on obtient la fonction

$$x^\sharp * \phi : (t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k \left(\cos \theta_k (t_1 - \eta_k) + \sin \theta_k t_2 \right), \quad (7.2)$$

où

$$\psi_k = \left(\frac{1}{\cos \theta_k} \varphi_1 \left(\frac{\cdot}{\cos \theta_k} \right) \right) * \left(\frac{1}{\sin \theta_k} \varphi_2 \left(\frac{\cdot}{\sin \theta_k} \right) \right), \quad (7.3)$$

si $\theta_k \neq 0$ et $\psi_k = \varphi_1$ sinon.

Remarque 7.2. L'équation (7.2) peut aussi s'interpréter de cette façon : chaque ligne a subi une convolution 1-D avec ψ_k dans la direction qui lui est transversale. On peut également remarquer que si φ_1 et φ_2 sont des gaussiennes de même variance κ^2 , on tire de l'équation (7.3) que ψ_k a aussi pour variance $\kappa^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \kappa^2$.

Dans le but d'éviter toute approximation lorsque l'on passe de la formulation continue à la formulation discrète, on suppose que φ_1 et φ_2 vérifient les propriétés suivantes :

Hypothèses

- (i) $\varphi_1 \in L^1(0, W)$ est supposée W -périodique, bornée, telle que $\frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1 = 1$, et à bande limitée, c'est-à-dire que ses coefficients de Fourier

$$c_m(\varphi_1) = \frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1(t_1) e^{-j \frac{2\pi m}{W} t_1} dt_1,$$

sont nuls pour tout $m \in \mathbb{Z}$ avec $|m| \geq (W + 1)/2 = M + 1$. Le filtre discret

$$\left(\mathbf{g}[n] = \varphi_1(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (7.4)$$

possède alors pour coefficients de Fourier discrets

$$\hat{\mathbf{g}}[m] = \frac{1}{W} \sum_{n=0}^{W-1} \mathbf{g}[n] e^{-j \frac{2\pi m n}{W}} = c_m(\varphi_1).$$

- (ii) $\varphi_2 \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_2 = 1$, et en notant $\text{sinc}(t_2) = \frac{\sin(\pi t_2)}{\pi t_2}$, le filtre discret

$$\left(\mathbf{h}[n] = (\varphi_2 * \text{sinc})(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (7.5)$$

est supposé être à support compact de longueur $2S + 1$, pour $S \in \mathbb{N}$ donné, c.-à-d.

$$\mathbf{h}[n] = 0, \quad \text{si } |n| \geq S + 1.$$

Déduisons de ces hypothèses quelques propriétés vérifiées par φ_1 et φ_2 , et leurs filtres discrets respectifs \mathbf{g} et \mathbf{h} .

Proposition 7.1 (NYQUIST-WHITTAKER-SHANNON)

La fonction φ_1 , qui est W -périodique et à bande limitée, est déterminée par seulement W degrés de libertés. En effet, à partir des échantillons $\mathbf{g}[n] = \varphi_1(n)$, $n = 0, \dots, W - 1$, la fonction φ_1 peut s'exprimer comme la combinaison linéaire de noyaux de Dirichlet $D_M(t) = \sum_{m=-M}^M e^{jmt}$ traduits :

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{W} \sum_{n=0}^{W-1} \mathbf{g}[n] D_M \left(\frac{2\pi(t - nW)}{W} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

Annexe A.2. □

Puisque le noyau de Dirichlet est une fonction normalisée sur $[0, 2\pi]$ ($\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(t) dt = 1$), un changement de variable donne $\frac{1}{W} \int_0^W D_M \left(\frac{2\pi(t - nW)}{W} \right) dt = 1$ et par suite

$$\frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1(t) dt = \frac{1}{W} \sum_{n=-M}^M \mathbf{g}[n] = 1,$$

et ainsi le filtre \mathbf{g} est lui aussi normalisé à 1.

Un calcul simple montre que $\frac{1}{W^2} \int_0^W D_M \left(\frac{2\pi(t-nW)}{W} \right) D_M \left(\frac{2\pi(t-mW)}{W} \right) dt = \delta_{m,n}$, ce qui prouve que

$$\int_0^W \varphi_1(t)^2 dt = \sum_{n=-M}^M \mathbf{g}[n]^2 = \sum_{n=-M}^M \varphi_1(n)^2,$$

et par la relation de Parseval

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(\varphi_1)|^2 = \sum_{m=-M}^M |\hat{\mathbf{g}}[m]|^2 = \frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1(t)^2 dt.$$

Maintenant, nous décrivons le processus d'échantillonnage permettant de passer de la formulation continue à la formulation discrète, basé sur la proposition suivante :

Proposition 7.2

Il est équivalent d'effectuer la convolution verticale $\Psi = x^\sharp * \phi_1$ avec φ_2 , avec $\varphi_2 * \text{sinc}$, ou avec le peigne de Dirac $\gamma : t_2 \mapsto \sum_{n=-S}^S \mathbf{h}[n] \delta(t_2 - n)$, où $\mathbf{h}[n] = (\varphi_2 * \text{sinc})(n)$.

Preuve :

Pour tout $k = 1, \dots, K$, l'hypothèse $\theta_k \in (-\pi/4, \pi/4)$ assure que $|\tan \theta_k| \leq 1$. Donc la fonction $\Psi = x^\sharp * \phi_1$ donnée par (7.1), vue comme une fonction de t_2 à t_1 fixé, est à bande limitée : pour tout $t_1 \in [0, W)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}_2 \Psi : \omega_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x^\sharp * \phi_1)(t_1, t_2) e^{-j2\pi\omega_2 t_2} dt_2$, qui est une distribution (somme de K peignes de Dirac), est nulle pour tout $|\omega_2| \geq 1/2$. En effet, on a

$$[\mathcal{F}_2 \Psi](\omega_2) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\sin \theta_k} \hat{\varphi}_1 \left(\frac{\omega_2}{\tan \theta_k} \right) \exp \left(j2\pi\omega_2 \frac{t_1 - \eta_k}{\tan \theta_k} \right).$$

Puisque $|\tan \theta_k| \leq 1$, on a $|\omega_2 / \tan \theta_k| \geq |\omega_2|$. Ainsi comme $\hat{\varphi}_1$ a un support inclus strictement dans $[-1/2, 1/2]$ ($c_m(\varphi_1) = 0$ pour $|m| \geq M + 1$ et $M/W < 1/2$), alors le support de $\mathcal{F}_2 \Psi$ l'est aussi nécessairement puisque inclus dans celui de $\hat{\varphi}_1$. D'où, $\mathcal{F}_2 \Psi = \mathcal{F}_2 \Psi \cdot \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]} \Leftrightarrow \Psi = \Psi * \text{sinc}$, d'où en spatial $\Psi * \varphi_2 = \Psi * (\varphi_2 * \text{sinc})$. Dans le domaine de Fourier la fonction $h = \varphi_2 * \text{sinc}$ est à bande limitée, donc $[\mathcal{F}_2 \Psi] \hat{h} = [\mathcal{F}_2 \Psi] \hat{h}_{\text{per}}$ où \hat{h}_{per} est une version périodisée du spectre \hat{h} de période 1, ce qui revient à dire

$$\Psi * h = \Psi * \left(\sum_n h[n] \delta(\cdot - n) \right).$$

□

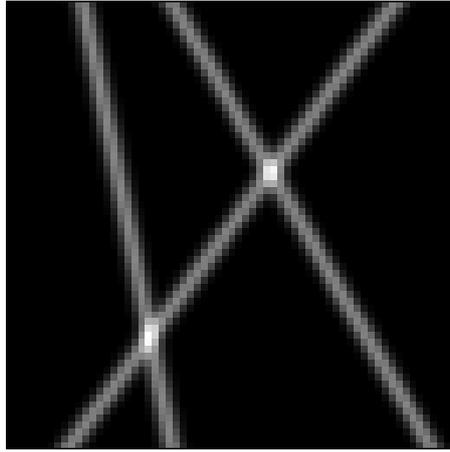
Remarque 7.3. L'hypothèse (ii) implique que le filtre $(\mathbf{h}[n])_n$ est à support compact, tandis que la fonction $h = \varphi_2 * \text{sinc}$ n'est pas à support compact puisqu'à bande limitée. Ce qui implique que la fonction continue h doit s'annuler aux points entiers $t = n$ pour $|n| > S$. Étant donné un filtre à support compact $(\mathbf{h}[n])_{n=-S}^S$, l'unique fonction h à bande limitée vérifiant cette condition est donnée par la formule d'interpolation de Shannon :

$$h(t) = \sum_{n=-S}^S \mathbf{h}[n] \text{sinc}(t - n).$$

Par unicité, on a nécessairement $\varphi_2 * \text{sinc} = h$, et on remarque que $\varphi_2 = h$ est toujours solution de cette équation, et l'on peut en pratique approcher assez finement une PSF par une fonction à bande limitée h avec $2S + 1$ échantillons $\mathbf{h}[n]$ de cette PSF, c'est pourquoi l'hypothèse du support compact n'est pas restrictive.

Maintenant, pour obtenir l'image discrète \mathbf{b}^\sharp de (7.1.2), définissons \mathbf{u}^\sharp en échantillonnant $x^\sharp * \phi_1$ avec un pas unitaire :

$$\mathbf{u}^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi_1)(n_1, n_2), \quad \forall n_1 = 0, \dots, W - 1, \quad n_2 = -S, \dots, H - 1 + S.$$

FIGURE 7.3 – L'image \mathbf{b}^\sharp de trois lignes floutées avec $\kappa = 1$.

Grâce aux hypothèses (i), (ii) et à la Proposition 7.2, nous sommes en mesure d'exprimer \mathbf{b}^\sharp à partir de \mathbf{u}^\sharp en effectuant une convolution discrète verticale avec le filtre \mathbf{h} :

$$\mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] = \sum_{p=-S}^S \mathbf{u}^\sharp[n_1, n_2 - p] \mathbf{h}[p], \quad \forall n_1 = 0, \dots, W-1, \quad n_2 = 0, \dots, H-1.$$

Le procédé d'échantillonnage est alors complètement caractérisé par l'utilisation des filtres discrets $(\mathbf{g}[n])_{n=0}^{W-1}$ et $(\mathbf{h}[n])_{n=-S}^S$. Nous soulignons le fait qu'aucune approximation discrète n'a été faite au cours de ce procédé, en vertu des hypothèses (i) et (ii).

Remarque 7.4. Par la suite on choisira pour filtre \mathbf{h} normalisé une approximation d'une fonction gaussienne de variance κ , c.-à-d. $\varphi_2 : t \mapsto (2\pi\kappa^2)^{-1/2} \exp(-0.5t^2/\kappa^2)$, prise sur le compact $[-S, S]$ avec $S = \lceil 4\kappa \rceil - 1$; et le filtre normalisé $\mathbf{g} = [\mathbf{0}_{M-S}, \mathbf{h}, \mathbf{0}_{M-S}]$ dont la transformée de Fourier discrète, ou *Discrete Fourier Transform (DFT)* correspond à une version interpolée de $\hat{\mathbf{h}}$, approchant la transformée de Fourier continue suivante $\hat{\varphi}_2 : \nu \mapsto e^{-2\pi^2\kappa^2\nu^2}$. On a ainsi

$$\|\hat{\mathbf{g}}\|_\infty = \|\hat{\mathbf{h}}\|_\infty = 1.$$

Un exemple de lignes floutées par ces filtres est fournit Figure 7.3.

7.1.3 Formulation du problème inverse

Caractérisons plus précisément l'image \mathbf{b}^\sharp dans le domaine de Fourier. La Figure 7.4 explicite nos notations plus en détail et illustre les relations entre les variables continues et discrètes.

Premièrement, on considère l'image $\hat{\mathbf{u}}^\sharp$ obtenue par application de DFT 1-D sur chaque ligne \mathbf{u}^\sharp ¹ (7.1.2) :

$$\hat{\mathbf{u}}^\sharp[m, n_2] = \frac{1}{W} \sum_{n_1=0}^{W-1} \mathbf{u}^\sharp[n_1, n_2] e^{-j\frac{2\pi m}{W} n_1}, \quad (7.6)$$

$$\forall m = -M, \dots, M, \quad n_2 = -S, \dots, H-1+S,$$

qui coïncide avec les coefficients de Fourier exacts de $t \mapsto (x^\sharp * \phi_1)(t, n_2)$, d'après l'hypothèse (ii). D'où, à partir de (7.1) et du calcul de $\hat{\mathbf{u}}^\sharp[m, n_2] = \frac{1}{W} \int_0^W (x^\sharp * \phi_1)(t, n_2) e^{-j\frac{2\pi m}{W} t} dt$, on obtient

$$\hat{\mathbf{u}}^\sharp[m, n_2] = \hat{\mathbf{g}}[m] \hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2], \quad \forall m = -M, \dots, M, \quad n_2 = -S, \dots, H-1+S, \quad (7.7)$$

1. On gardera tout du long à l'esprit que la notation $\hat{\mathbf{u}}$ désigne la transformée de Fourier 1-D *horizontale* et non pas la transformée de Fourier 2-D.

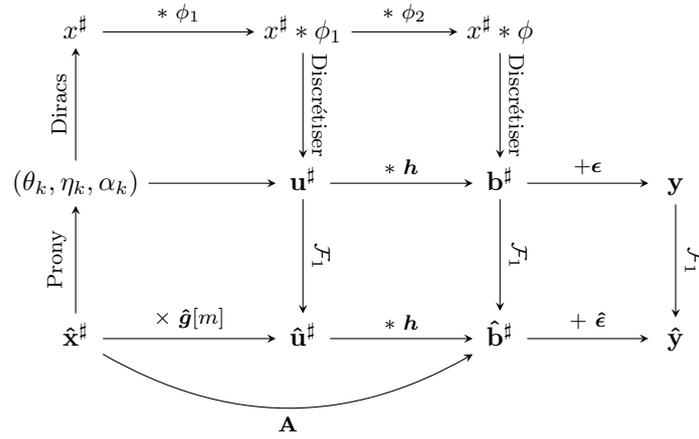


FIGURE 7.4 – Relation entre les variables du problème.

avec

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k} e^{j2\pi(\tan \theta_k n_2 - \eta_k) \frac{m}{W}}. \quad (7.8)$$

Remarque 7.5. L'image $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$ est la version échantillonnée de la fonction continue $\hat{x}^\sharp = \mathcal{F}_1 x^\sharp$, qui est la transformée de Fourier horizontale de x^\sharp (7.1.1).

Maintenant, on applique une DFT 1-D sur les lignes de \mathbf{b}^\sharp (7.1.2), menant à

$$\hat{\mathbf{b}}^\sharp[m, n_2] = \left(\hat{\mathbf{u}}^\sharp[m, :] * \mathbf{h} \right) [n_2], \quad \forall m = -M, \dots, M, \quad n_2 = 0, \dots, H-1. \quad (7.9)$$

Puisque l'image \mathbf{u}^\sharp et le filtre \mathbf{g} sont réels, alors $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$ est hermitienne, donc il suffit de considérer une moitié $\hat{\mathbf{x}}^\sharp[0 : M, :]$ pour déduire sa partie symétrique. Notons au passage que la colonne correspondant à $m = 0$ est réelle et constante égale à $\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k}$. Par la suite on considère donc l'image $\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2]$ de taille $(M+1) \times H_S$, avec $H_S = H + 2S$, à cause de l'ajout de S pixels sur les bords pour prendre en compte la convolution avec le filtre \mathbf{h} . Plus précisément,

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp \in \mathcal{X} = \{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{M+1, H_S}(\mathbb{C}) : \text{Im}(\hat{\mathbf{x}}[0, :]) = 0 \}, \quad (7.10)$$

muni du produit scalaire suivant, où \cdot^* désigne le conjugué complexe :

$$\langle \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \hat{\mathbf{x}}_1[0, n_2] \hat{\mathbf{x}}_2[0, n_2] + 2\text{Re} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \hat{\mathbf{x}}_1[m, n_2] \hat{\mathbf{x}}_2[m, n_2]^* \right). \quad (7.11)$$

On définit aussi l'espace de Hilbert \mathcal{Y} , équivalent à (7.10) pour $S = 0$:

$$\mathcal{Y} = \{ \hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}_{M+1, H}(\mathbb{C}) : \text{Im}(\hat{\mathbf{y}}[0, :]) = 0 \}, \quad (7.12)$$

muni du produit scalaire (7.11) pour $S = 0$, c'est-à-dire :

$$\langle \hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2 \rangle_{\mathcal{Y}} = \sum_{n_2=0}^{H-1} \hat{\mathbf{y}}_1[0, n_2] \hat{\mathbf{y}}_2[0, n_2] + 2\text{Re} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n_2=0}^{H-1} \hat{\mathbf{y}}_1[m, n_2] \hat{\mathbf{y}}_2[m, n_2]^* \right). \quad (7.13)$$

Par la suite nous aurons à traiter avec les lignes et les colonnes de $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$, appartenant respectivement aux espaces de Hilbert notés respectivement \mathcal{X}_l et \mathcal{X}_t , muni des produits scalaires suivants :

$$\langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \rangle_{\mathcal{X}_l} = \mathbf{l}_1[0] \mathbf{l}_2[0] + 2\text{Re} \left(\sum_{m=1}^M \mathbf{l}_1[m] \mathbf{l}_2[m]^* \right), \quad (7.14)$$

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle_{\mathcal{X}_t} = 2\text{Re} \left(\sum_{n_2=1}^{H_S} \mathbf{t}_1[n_2] \mathbf{t}_2[n_2]^* \right). \quad (7.15)$$

Désignons par $\mathbf{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ l'opérateur qui multiplie chaque vecteur ligne $\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :]$ de $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ par le coefficient de Fourier $\hat{\mathbf{g}}[m]$ correspondant pour $m = 0, \dots, M$, et la convolve avec le filtre $\mathbf{h} = [h_{-S}, \dots, h_0, \dots, h_S]$. D'un point de vue matriciel, cela correspond à une multiplication à droite et à gauche par les matrices $\widehat{\mathbf{G}}$ de taille $(M+1) \times (M+1)$ et $\check{\mathbf{H}}$ de taille $H \times H_S$ définies par :

$$\widehat{\mathbf{G}} = \text{diag}(\hat{g}_0, \dots, \hat{g}_M), \quad \check{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} h_{-S} & \cdots & h_S & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{-S} & \cdots & h_S & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{-S} & \cdots & h_S & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{-S} & \cdots & h_S \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

soit :

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{G}}. \quad (7.17)$$

À partir de (7.7) et (7.9), le problème inverse s'écrit :

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp = \hat{\mathbf{b}}^\sharp. \quad (7.18)$$

Finalement, l'image \mathbf{b}^\sharp des lignes floues sont affectées par du bruit, si bien que l'on observe l'image dégradée suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}^\sharp + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, \zeta^2), \quad (7.19)$$

avec ζ le niveau de bruit. Le problème se ramène donc à un problème inverse qu'il s'agit de résoudre. En l'absence de bruit, il est possible de déterminer algébriquement une solution de (7.18) en résolvant pour chaque colonne m le système linéaire réduit suivant : $\hat{\mathbf{g}}[m]\check{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}[m, :] = \hat{\mathbf{b}}^\sharp[m, :]$ où $\check{\mathbf{H}}$ est la matrice de convolution (7.16) correspondant à la convolution verticale avec le filtre \mathbf{h} .

Pour traiter le cas bruité, nous avons besoin de dériver un problème d'optimisation du problème inverse, sous contraintes exploitant la structure parcimonieuse du signal, à savoir que l'image est uniquement composée de lignes :

Stratégie

Problème d'optimisation :

$$\text{Minimiser } \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{Y}}, \quad \text{sous contrainte que } \mathbf{x} \text{ est composée de lignes.} \quad (7.20)$$

La stratégie se décompose en deux temps :

1. Résoudre le problème d'optimisation (7.20) pour retrouver $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$ à partir de $\hat{\mathbf{y}}$.
2. Estimer à partir de $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$ et (7.8) les paramètres K des lignes $(\theta_k, \eta_k, \alpha_k)$.

Ces deux étapes sont résumées sur la Figure 7.5. Dans la section suivante nous nous plaçons dans le formalisme des *atomes* de dictionnaire et de la norme atomique, qui va nous permettre d'exploiter la parcimonie et d'explicitier les contraintes du problème d'optimisation (7.20).

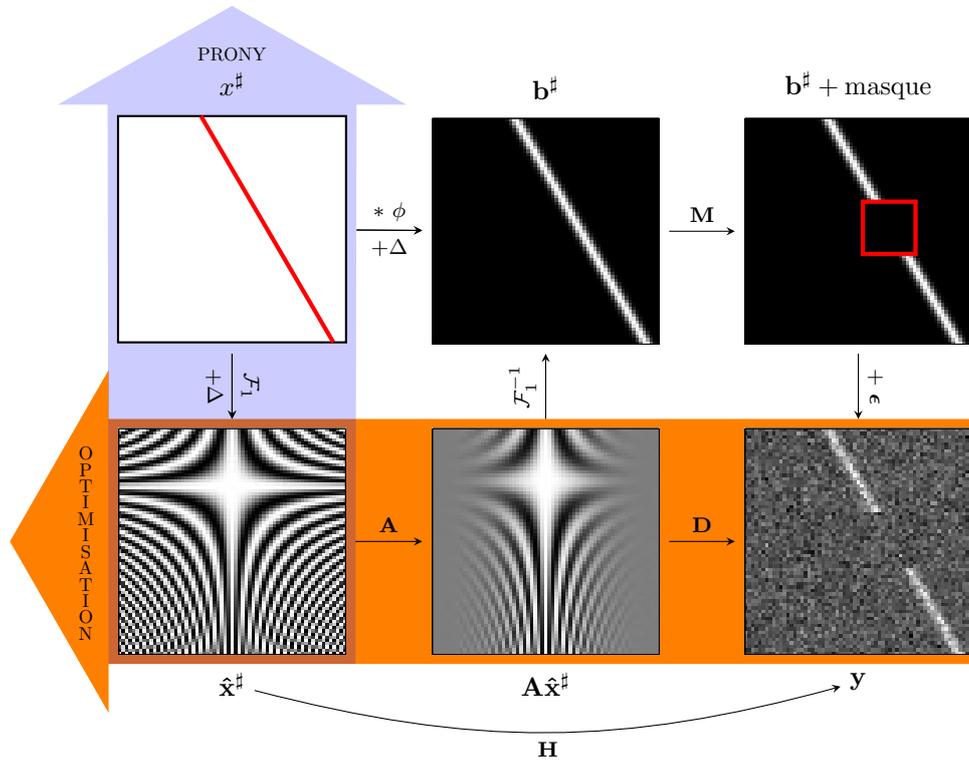


FIGURE 7.5 – Illustration des deux étapes de la procédure : une phase d’optimisation convexe pour la reconstruction des lignes (en orange) suivie d’une phase d’estimation de leurs paramètres par une méthode de type Prony (en violet).

7.2 Présentation du problème d’optimisation

7.2.1 Caractérisation des lignes dans le paradigme des normes atomiques

Des lignes 2-D à des combinaisons d’exponentielles complexes 1-D

En se plaçant dans le paradigme des atomes de dictionnaire, exposé à la section 6.2.1, il paraîtrait naturel de prendre pour atomes les lignes qui composent l’image, soit :

$$\mathbf{a}(\theta_k, \eta_k) = \delta(\cos(\theta_k)(t_1 - \eta_k) + \sin(\theta_k)t_2),$$

pris dans le dictionnaire \mathcal{A}_{2D} indexé par l’angle θ_k et l’offset η_k . Ou bien de façon équivalente dans le domaine de Fourier, de considérer le dictionnaire $\hat{\mathcal{A}}_{2D}$, constitué des atomes d’exponentielles 2-D

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta_k, \eta_k) = \frac{1}{\cos \theta_k} e^{j2\pi(\tan \theta_k n_2 - \eta_k)m/W},$$

comme illustré à la Figure 7.6. L’inconvénient est qu’il n’y a pas, à notre connaissance, de procédure permettant de calculer la norme atomique dans ces dictionnaires 2-D. En revanche, dans le cas 1-D d’un dictionnaire d’exponentielles complexes, on dispose d’une telle procédure *via* le recours à un programme semi-défini positif. L’idée consiste donc à se ramener à un problème 1-D en reformulant le problème sur les lignes et les colonnes à partir du dictionnaire des exponentielles complexes. À partir de maintenant on considère le dictionnaire suivant :

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a}(f, \phi) \in \mathbb{C}^{|I|}, \quad f \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi) \right\},$$

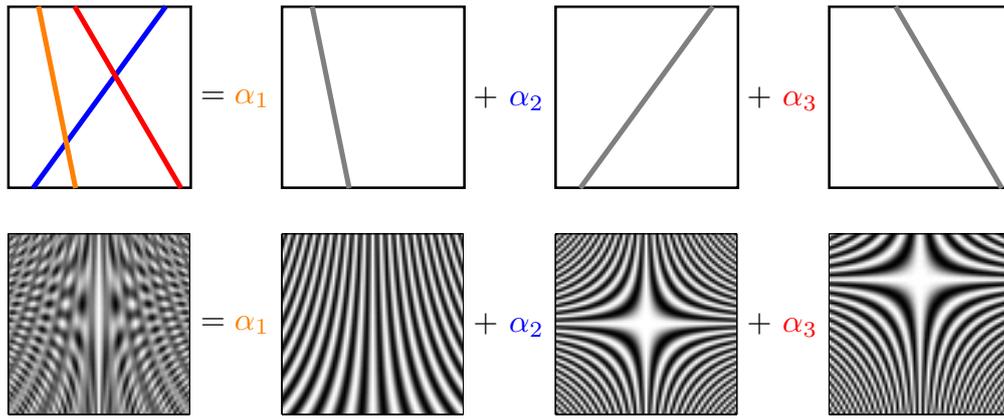


FIGURE 7.6 – Illustration avec une image composée d'une combinaison pondérée d'atomes ligne $\mathbf{a}(\theta_k, \eta_k)$ (en gris). Dans le domaine de Fourier, cette décomposition s'écrit comme une combinaison d'atomes d'exponentielles 2-D $\hat{\mathbf{a}}(\theta_k, \eta_k)$. La somme des poids $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, où les α_i sont les amplitudes des lignes, correspond à la norme atomique dans le dictionnaire approprié.

dans lequel les *atomes* sont les vecteurs de composantes $[\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi f i + \phi)}$, $i \in I$, ou écrits plus simplement $[\mathbf{a}(f)]_i = e^{j2\pi f i}$, $i \in I$, dans le cas où $\phi = 0$. La norme atomique s'écrit

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\substack{c'_k \geq 0 \\ f'_k \in [0, 1[\\ \phi'_k \in [0, 2\pi)}} \left\{ \sum_k c'_k : \mathbf{z} = \sum_k c'_k \mathbf{a}(f'_k, \phi'_k) \right\}.$$

Nous rappelons ci-après le Théorème de Carathéodory, abordé section 6.2.3 et démontré à partir de l'Annexe A.4.

Théorème 7.1 (THÉORÈME DE CARATHÉODORY)

Un vecteur $\mathbf{z} = (z_{N-1}^*, \dots, z_1^*, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de longueur $2N - 1$, avec $z_0 \in \mathbb{R}$, est une combinaison positive de $K \leq N$ atomes $\mathbf{a}(f_k)$ si et seulement si $\mathbf{T}_N(\mathbf{z}_+) \succcurlyeq 0$ et est de rang K , où $\mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1})$ est de longueur N , $\mathbf{T}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est l'opérateur de Toeplitz

$$\mathbf{T}_N : \mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1}) \mapsto \begin{pmatrix} z_0 & z_1^* & \cdots & z_{N-1}^* \\ z_1 & z_0 & \cdots & z_{N-2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N-1} & z_{N-2} & \cdots & z_0 \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

et où $\succcurlyeq 0$ désigne la positivité de la matrice. De plus, cette décomposition est unique si $K < N$.

Nous avons également démontré dans la proposition suivante, une amélioration du résultat de (TANG et coll., 2013, Proposition II.1) dans l'élimination d'une variable inutile, qui permet d'un point de vue pratique d'augmenter la rapidité d'exécution des algorithmes qui mettent en oeuvre ce principe.

Proposition 7.3 (PROGRAMME SEMI-DÉFINI POSITIF DE LA NORME ATOMIQUE)

La norme atomique $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$ est caractérisée par le programme semi-défini positif (SDP)

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, q_0 \geq 0} \left\{ q_0 : \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\},$$

avec $\mathbf{T}'_N : \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ et q_0 le premier élément de $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_{N-1}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^{N-1}$.

Preuve :

Notons

$$\text{SDP}(\mathbf{z}) = \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, q_0 \geq 0} \left\{ q_0 : \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}, \quad (7.22)$$

et montrons que $\text{SDP}(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$ (par double inégalité), puis que le minimum dans (7.22) est atteint.

• Supposons que $\mathbf{z} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ avec $c_k > 0$.

Définissons $\mathbf{q} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k)$, ainsi $q_0 = \sum_{k=1}^K c_k$. Les atomes $\mathbf{a}(f_k)$ ayant pour composantes $[\mathbf{a}(f_k)]_i = e^{j2\pi f_k i}$ pour $i = 0, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N(\mathbf{a}(f_k)) &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-j2\pi f_k} & \dots & e^{-j2\pi f_k(N-1)} \\ e^{j2\pi f_k} & 1 & \dots & e^{-j2\pi f_k(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_k(N-1)} & e^{j2\pi f_k(N-2)} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_k} \\ \vdots \\ e^{j2\pi f_k(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-j2\pi f_k} & \dots & e^{-j2\pi f_k(N-1)} \end{pmatrix}, \\ &= \mathbf{a}(f_k) \mathbf{a}(f_k)^*. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{T}(\mathbf{a}(f_k)) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k) \mathbf{a}(f_k)^* = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k, \phi_k) \mathbf{a}(f_k, \phi_k)^*.$$

Ainsi la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K c_k \begin{pmatrix} \mathbf{a}(f_k, \phi_k) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(f_k, \phi_k) \\ 1 \end{pmatrix}^*,$$

est positive. Comme $q_0 = \sum_{k=1}^K c_k$, on a $\text{SDP}(\mathbf{z}) \leq \sum_{k=1}^K c_k$. Puisque cette inégalité est valable pour n'importe quelle décomposition atomique de \mathbf{z} , on en conclut que $\text{SDP}(\mathbf{z}) \leq \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$.

• Réciproquement, considérons $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N$ un vecteur tel que

$$q_0 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (7.23)$$

En particulier on a $\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) \succcurlyeq 0$. Désignons par r le rang de $\mathbf{T}_N(\mathbf{q})$. Le Théorème 7.1 stipule que $\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) \succcurlyeq 0$ est de rang $r \leq N$ si et seulement il existe $d_k > 0$ et f_k distincts, tels que

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^r d_k \mathbf{a}(f_k), \quad (7.24)$$

$$q_0 = \sum_{k=1}^r d_k. \quad (7.25)$$

Posons les matrices $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ et

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(f_1) & \dots & \mathbf{a}(f_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j2\pi f_1} & e^{j2\pi f_2} & \dots & e^{j2\pi f_r} \\ e^{j2\pi f_1 2} & e^{j2\pi f_2 2} & \dots & e^{j2\pi f_r 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_1(N-1)} & e^{j2\pi f_2(N-1)} & \dots & e^{j2\pi f_r(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Par linéarité de l'opérateur \mathbf{T}_N on a

$$\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^r d_k \mathbf{T}_N(\mathbf{a}(f_k)) = \sum_{k=1}^r d_k \mathbf{a}(f_k) \mathbf{a}(f_k)^* = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^*. \quad (7.26)$$

Puisque la diagonale de $\mathbf{T}_N(\mathbf{a}(f_k))$ n'est composée que de 1, on a :

$$q_0 = \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{T}_N(\mathbf{q})) = \sum_{k=1}^r d_k > 0.$$

On pose $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{C} \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{A} = \mathbf{T}_N(\mathbf{q})$, $\mathbf{B} = \mathbf{z}$ and $\mathbf{C} = q_0$. Une version du complément de Schur donne

$$\mathbf{M} \succcurlyeq 0 \iff [(\mathbf{C} > 0) \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^* \succcurlyeq 0)] \parallel [(\mathbf{C} = 0) \wedge (\mathbf{A} \succcurlyeq 0) \wedge (\mathbf{B} = 0)], \quad (7.27)$$

et la seconde proposition entre crochet est exclue puisque l'on suppose \mathbf{z} non nul. Donc d'après (7.26) et (7.27) :

$$\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) - q_0^{-1}\mathbf{z}\mathbf{z}^* \succcurlyeq 0 \iff \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^* - q_0^{-1}\mathbf{z}\mathbf{z}^* \succcurlyeq 0. \quad (7.28)$$

On définit la matrice carrée \mathbf{V}_r extraite des r premières lignes de \mathbf{V} , qui est une matrice Vandermonde de déterminant

$$\det(\mathbf{V}_r) = \prod_{1 \leq k < l \leq r} (\mathbf{a}(f_l) - \mathbf{a}(f_k)).$$

Puisque l'on suppose $f_k \neq f_l$, $\forall k \neq l$, la matrice \mathbf{V}_r est inversible et $\text{rang}(\mathbf{V}) = r$. Désignons par $\mathbf{v} : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^N$ et $\mathbf{v}^* : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^r$ les endomorphismes correspondant aux matrices \mathbf{V} et \mathbf{V}^* . Nous avons $\text{rang}(\mathbf{v}^*) = \text{rang}(\mathbf{v}) = r$. Par le théorème du rang on a :

$$\text{rang}(\mathbf{v}^*) + \dim(\text{Ker } \mathbf{v}^*) = \dim(\mathbb{C}^N) \implies \dim(\text{Ker } \mathbf{v}^*) = N - r.$$

Ainsi il existe un vecteur $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^N$ tel que $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{V}^*\mathbf{p} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}^*\mathbf{V} = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^* - q_0^{-1}\mathbf{z}\mathbf{z}^*)\mathbf{p} \geq 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{p}^*\mathbf{V})\mathbf{D}(\mathbf{V}^*\mathbf{p}) - q_0^{-1}\mathbf{p}^*\mathbf{z}\mathbf{z}^*\mathbf{p} \geq 0, \\ &\Leftrightarrow q_0^{-1}\|\mathbf{p}^*\mathbf{z}\|_2^2 \leq 0, \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{p}^*\mathbf{z}\|_2^2 = 0, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{p}^*\mathbf{z} = 0, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{p} \perp \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{p} \in \text{Ker } \mathbf{v}^*$, alors $\mathbf{z} \in (\text{Ker } \mathbf{v}^*)^\perp = \text{Im } \mathbf{v}$, donc il existe un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^r$ tel que

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{w} = \sum_{k=1}^r w_k \mathbf{a}(f_k).$$

Ainsi on constate que l'hypothèse (7.23) contraint \mathbf{z} à être dans l'image de \mathbf{V} , et donc à s'exprimer sous la forme d'une combinaison complexe des mêmes atomes que \mathbf{q} . D'où d'après (7.28), on a :

$$\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^* - q_0^{-1}\mathbf{V}\mathbf{w}\mathbf{w}^*\mathbf{V}^* \succcurlyeq 0.$$

Par ailleurs, $\text{Im } \mathbf{v}^* \subset \mathbb{C}^r$ et $\dim(\text{Im } \mathbf{v}^*) = \text{rang}(\mathbf{v}^*) = r = \dim(\mathbb{C}^r)$, donc $\text{Im } \mathbf{v}^* = \mathbb{C}^r$ et \mathbf{v}^* est surjective. Il s'ensuit qu'il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ tel que $\mathbf{V}^*\mathbf{u} = \text{sgn}(\mathbf{w}) = (w_1/|w_1|, \dots, w_r/|w_r|)^\top$, et

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^* - q_0^{-1}\mathbf{V}\mathbf{w}\mathbf{w}^*\mathbf{V}^*)\mathbf{u} \geq 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{u}^*\mathbf{V})\mathbf{D}(\mathbf{V}^*\mathbf{u}) - q_0^{-1}(\mathbf{u}^*\mathbf{V})\mathbf{w}\mathbf{w}^*(\mathbf{V}^*\mathbf{u}) \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \text{sgn}(\mathbf{w})^*\mathbf{D}\text{sgn}(\mathbf{w}) - q_0^{-1}\text{sgn}(\mathbf{w})^*\mathbf{w}\mathbf{w}^*\text{sgn}(\mathbf{w}) \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^r d_k \left| \frac{w_k}{|w_k|} \right|^2 - q_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^r \frac{\bar{w}_k}{|w_k|} w_k \right)^2 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow q_0^2 \geq \left(\sum_{k=1}^r |w_k| \right)^2, \quad (\text{puisque } q_0 = \sum_{k=1}^r d_k), \quad (7.29) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow q_0 \geq \sum_{k=1}^r |w_k| \geq \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}, \quad (7.30)$$

par définition de la norme atomique (7.2.1). En prenant l'infimum il vient $\text{SDP}(\mathbf{z}) \geq \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$.

- Montrons enfin que l'infimum de la forme linéaire $\ell : \mathbf{q} \mapsto q_0$ est atteint sur l'ensemble

$$A(\mathbf{z}) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^{N-1} : \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\},$$

c'est-à-dire,

$$\text{SDP}(\mathbf{z}) = \inf_{\mathbf{q} \in A(\mathbf{z})} \ell(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q} \in A(\mathbf{z})} \ell(\mathbf{q}). \quad (7.31)$$

- (i) Remarquons que ℓ définit une norme sur $A(\mathbf{z})$, puisque $\mathbf{q} \in A(\mathbf{z})$ implique $\mathbf{T}_N(\mathbf{q}) \succcurlyeq 0$ et ainsi

$$\ell(\mathbf{q}) = q_0 = \frac{1}{N} \text{Tr}(\mathbf{T}_N(\mathbf{q})) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \geq 0,$$

avec λ_i les valeurs propres positives de $\mathbf{T}_N(\mathbf{q})$.

- (ii) On montre premièrement que $A(\mathbf{z})$ est non vide puisque $\mathbf{q} = (\|\mathbf{z}\|_2, 0, \dots, 0)^\top \in A(\mathbf{z})$. En effet pour un vecteur $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ donné, $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ et $\mathbf{v}' = (v_0, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on a pour ce vecteur particulier \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \mathbf{v} &= \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + 2 \text{Re} \left(v_N \sum_{i=0}^{N-1} z_i \bar{v}_i \right), \\ &\geq \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 - 2|v_N| \cdot |\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}' \rangle|, \\ &\geq \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 - 2|v_N| \cdot \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{v}'\|_2, \\ &\geq \|\mathbf{z}\|_2 (\|\mathbf{v}'\|_2^2 - 2|v_N| \cdot \|\mathbf{v}'\|_2 + |v_N|^2), \\ &\geq \|\mathbf{z}\|_2 (\|\mathbf{v}'\|_2 - |v_N|)^2, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où $\mathbf{q} = (\|\mathbf{z}\|_2, 0, \dots, 0)^\top \in A(\mathbf{z})$ et $q_0 = \|\mathbf{z}\|_2$, donc d'après (7.30) on a $\text{SDP}(\mathbf{z}) \leq \|\mathbf{z}\|_2$, ce qui montre que $A(\mathbf{z})$ est non vide tout comme l'est l'ensemble $\{\ell(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in A(\mathbf{z})\} \subset \mathbb{R}^+$ qui admet donc une borne inférieure plus petite que $\|\mathbf{z}\|_2$, d'où

$$0 \leq \text{SDP}(\mathbf{z}) = \inf_{\mathbf{q} \in A(\mathbf{z})} \ell(\mathbf{q}) \leq \|\mathbf{z}\|_2.$$

- (iii) À partir de (ii), on a

$$\text{SDP}(\mathbf{z}) = \inf_{\mathbf{q} \in A(\mathbf{z})} \ell(\mathbf{q}) = \inf_{B(\mathbf{z})} \ell(\mathbf{q}),$$

où

$$B(\mathbf{z}) = \{\mathbf{q} \in A(\mathbf{z}), q_0 \leq \|\mathbf{z}\|_2\} \subset A(\mathbf{z}).$$

Maintenant, à partir de (7.24) et (7.25) on montre que $B(\mathbf{z})$ est borné puisque

$$\forall \mathbf{q} \in A(\mathbf{z}), \quad \|\mathbf{q}\|_2 \leq \sum_{k=1}^r d_k \|\mathbf{a}(f_k)\|_2 \leq \sqrt{N} \sum_{k=1}^r d_k = \sqrt{N} q_0,$$

d'où

$$\forall \mathbf{q} \in B(\mathbf{z}), \quad \|\mathbf{q}\|_2 \leq \sqrt{N} q_0 \leq \sqrt{N} \|\mathbf{z}\|_2.$$

Par conséquent,

$$B(\mathbf{z}) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0, \|\mathbf{z}\|_2).$$

- (iv) De plus, $A(\mathbf{z}) = \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \cdot)^{-1}(\mathcal{C})$ est un ensemble fermé du fait que le cône des matrices positives \mathcal{C} est fermé et que l'application $\mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \cdot)$ est linéaire donc continue en dimension finie. Ainsi,

$$B(\mathbf{z}) = A(\mathbf{z}) \cap \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^{N-1} : q_0 \leq \|\mathbf{z}\|_2\}$$

est un ensemble fermé comme intersection de deux fermés.

- (v) À partir de (iii) et (iv), on en conclut que $B(\mathbf{z})$ est un compact et que l'application ℓ , qui est linéaire donc continue, atteint son minimum sur $B(\mathbf{z})$ donc sur $A(\mathbf{z})$, ce qui prouve le résultat (7.31). \square

Remarque 7.6. La matrice $\mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ étant hermitienne, ses valeurs propres $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq N}$ sont réelles, et positives puisque la matrice est positive. On est donc assuré du fait que

$$q_0 = \frac{1}{N+1} \text{Tr}(\mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q})) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \lambda_i,$$

est un réel positif.

On définit également, pour le problème d'optimisation convexe à venir, l'ensemble de matrices complexes

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{M}_{M+1, H_S}(\mathbb{C}) : \text{Im}(\mathbf{q}[:, 0]) = 0\}, \quad (7.32)$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathcal{Q}} = \sum_{m=0}^M \mathbf{q}_1[m, 0] \mathbf{q}_2[m, 0] + 2\text{Re} \left(\sum_{n_2=1}^{H_S-1} \sum_{m=0}^M \mathbf{q}_1[m, n_2] \mathbf{q}_2[m, n_2]^* \right). \quad (7.33)$$

Remarque 7.7. Les colonnes de $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ appartiennent à l'espace de Hilbert \mathcal{Q}_t , à savoir $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^{H_S-1}$, muni du produit scalaire :

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathcal{Q}_t} = \mathbf{q}_1[0] \mathbf{q}_2[0] + 2\text{Re} \left(\sum_{n_2=1}^{H_S-1} \mathbf{q}_1[n_2] \mathbf{q}_2[n_2]^* \right). \quad (7.34)$$

Norme atomique des lignes et colonnes de $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$

Dans le domaine de Fourier, l'image discrète $\hat{\mathbf{x}}$ donnée par (7.8) peut être vue comme une superposition d'atomes. D'une part les lignes \mathbf{l}_{n_2} de la matrice $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$, avec $I = \{0, \dots, H_S - 1\}$ peuvent s'écrire comme combinaison d'atomes :

$$\mathbf{l}_{n_2}^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[:, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2, k}), \quad (7.35)$$

D'autre part, en considérant les colonnes \mathbf{t}_m , avec $I = \{-M, \dots, M\}$:

$$\mathbf{t}_m^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m, k}, \phi_{m, k})^\top, \quad (7.36)$$

où

$$c_k = \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k}, \quad f_{n_2, k} = \frac{\tan \theta_k n_2 - \eta_k}{W}, \quad (7.37)$$

$$\phi_{m, k} = -\frac{2\pi \eta_k m}{W}, \quad f_{m, k} = \frac{\tan \theta_k m}{W}.$$

On définit pour une utilisation ultérieure $\nu_k = \eta_k/W$ et les coefficients $d_{m, k} = c_k e^{j\phi_{m, k}}$, $e_{m, k} = e^{j\phi_{m, k}}$. Les vecteurs $\mathbf{l}_{n_2}^\sharp$ de longueur $W = 2M + 1$ sont des combinaisons positives de K atomes $\mathbf{a}(f_{n_2, k})$, avec $K \leq M$ parce que l'on peut raisonnablement supposer que le nombre de lignes K est plus petit que le nombre de pixels sur la demi-largeur M de l'image. Donc le Théorème 7.1 assure que la décomposition (7.35) est unique, d'où

$$\|\mathbf{l}_{n_2}^\sharp\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K c_k = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[0, n_2], \quad \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \quad (7.38)$$

tandis que, dans la mesure où $d_{m,k}$ est complexe dans (7.36), le Théorème 7.1 n'est plus vérifié, et on a simplement par la Proposition 7.3 :

$$\|\mathbf{t}_m^\#\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{k=1}^K c_k, \quad \forall m = -M, \dots, M. \quad (7.39)$$

Nous venons de voir qu'une superposition de lignes en Fourier sur une grille discrète est une image $\hat{\mathbf{x}}$ dont les lignes et les colonnes sont une combinaison d'atomes du dictionnaire \mathcal{A} d'exponentielles 1-D, et que les normes atomiques de ces lignes et colonnes sont calculables. Afin de montrer que la minimisation des normes atomiques est bien propice à la reconstruction de lignes, donnons la caractérisation d'une ligne seule et sa relaxation convexe liée aux normes atomiques.

Caractérisation d'une ligne et relaxation convexe

Considérons maintenant que $x^\#$ ne contient qu'une seule ligne ($K = 1$), de paramètres (θ, η, α) . On rappelle par (7.8) que $\hat{\mathbf{x}}^\#$ s'écrit suit :

$$\hat{\mathbf{x}}^\#[m, n_2] = c_1 e^{j2\pi((f_1 - f_0)n_2 + f_0)m}, \quad c_1 = \frac{\alpha}{\cos \theta}, \quad f_0 = -\frac{\eta}{W}, \quad f_1 = \frac{\tan \theta - \eta}{W}.$$

Soit $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{|I|-1})$ un vecteur complexe dont les éléments z_i sont réarrangés dans une matrice Toeplitz (de Prony) $\mathbf{P}_K(\mathbf{z})$ de dimension $(|I| - K) \times (K + 1)$ et de rang K , de la façon suivante

$$\mathbf{P}_K(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_K & \cdots & z_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{|I|-1} & \cdots & z_{|I|-K-1} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons la caractérisation suivante de l'image d'une ligne en Fourier :

Proposition 7.4 (CARACTÉRISATION DE L'IMAGE D'UNE LIGNE EN FOURIER)

Une image $\hat{\mathbf{x}}$ est de la forme $\hat{\mathbf{x}}[m, n] = c_1 e^{j2\pi((f_1 - f_0)n + f_0)m}$ si et seulement si les lignes \mathbf{l}_n et les colonnes \mathbf{t}_m de $\hat{\mathbf{x}}$ vérifient $\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_n) \succcurlyeq 0$ et de rang 1, $\mathbf{P}_1(\mathbf{t}_m)$ de rang 1, et $\hat{\mathbf{x}}[0, n] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0]$ pour tout m et tout n .

Preuve :

D'après le Théorème de Carathéodory (Annexe A.4), puisque $\forall n, \mathbf{T}_M(\mathbf{l}_n) \succcurlyeq 0$ et de rang 1, alors il existe $\gamma_n \geq 0$ et $f_n \in [0, 1[$ tels que

$$\mathbf{l}_n[m] = \gamma_n \exp(j2\pi f_n m).$$

Puisque l'on suppose $\hat{\mathbf{x}}[0, n] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] = c_1$, alors $\mathbf{l}_n[0] = \mathbf{l}_0[0] = c_1$ et il vient

$$\mathbf{l}_n[m] = c_1 \exp(j2\pi f_n m). \quad (7.40)$$

Soit m fixé. La matrice de Prony $\mathbf{P}_1(\mathbf{t}_m)$ de taille $2 \times (N - 1)$

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{t}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_m[1] & \mathbf{t}_m[0] \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{t}_m[N-1] & \mathbf{t}_m[N-2] \end{pmatrix},$$

est de rang 1, donc il existe $\lambda_m \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathbf{t}_m[n+1] = \lambda_m \mathbf{t}_m[n], \quad \forall 0 \leq n \leq N-2.$$

Ainsi,

$$\mathbf{t}_m[n] = \lambda_m^n \mathbf{t}_m[0], \quad \forall 0 \leq n \leq N-1.$$

À partir de (7.40) $\mathbf{t}_m[0] = \mathbf{l}_0[m] = c_1 \exp(j2\pi f_0 m)$, $\mathbf{t}_m[1] = \mathbf{l}_1[m] = c_1 \exp(j2\pi f_1 m)$, on obtient

$$\lambda_m = \frac{\mathbf{t}_m[1]}{\mathbf{t}_m[0]} = \frac{\ell_1[m]}{\ell_0[m]} = \exp(j2\pi(f_1 - f_0)m) .$$

Donc on a finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_m[n] &= \lambda_m^n \mathbf{t}_m[0] , \\ &= \exp(j2\pi(f_1 - f_0)m)^n c_1 \exp(j2\pi f_0 m) , \\ &= c_1 \exp[j2\pi((f_1 - f_0)n + f_0)m] . \end{aligned}$$

□

L'idée est ensuite d'établir le problème d'optimisation en effectuant une relaxation convexe de cette caractérisation. On remarque d'une part pour les lignes que de façon générale avec $\mathbf{D} = \text{diag}(c_1, \dots, c_K)$ et $\mathbf{V}_{n_2} = (\mathbf{a}(f_{n_2,1}), \dots, \mathbf{a}(f_{n_2,K}))$, on a :

$$\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\#) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{T}_M(\mathbf{a}(f_{n_2,k})) = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}) \mathbf{a}(f_{n_2,k})^* = \mathbf{V}_{n_2} \mathbf{D} \mathbf{V}_{n_2}^* ,$$

ainsi, la norme nucléaire de $\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\#)$ est

$$\|\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\#)\|_* = \sum_{k=1}^K c_k = \|\mathbf{l}_{n_2}^\#\|_{\mathcal{A}} .$$

La première égalité provient de la SVD d'une matrice $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}$, puisqu'en effet la norme nucléaire correspond à la somme des valeurs singulières. Son utilité comme enveloppe convexe du rang est discutée dans (RECHT et coll., 2010, 2008). Par conséquent, on considère comme relation convexe de la contrainte portant sur le rang de $\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\#)$ dans la Proposition 7.4, une contrainte de minimisation de la norme atomique des lignes $\|\mathbf{l}_{n_2}^\#\|_{\mathcal{A}}$. Puisque le minimum atteint est $c^\# = \sum_{k=1}^K c_k$, et que la norme atomique se lit sur la première colonne $\hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0]$, nous imposant la contrainte $\hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c^\#$. Nous procédons de même pour les colonnes.

Nous n'avons pas su caractériser de même une image composée de $K \geq 2$ lignes, mais la philosophie reste la même : il s'agit de minimiser simultanément la norme atomique de chaque ligne et chaque colonne, de sorte à forcer la solution à être composée de sommes finies d'exponentielles dans les deux directions, et ce de façon la plus parcimonieuse possible. Ce qui nous amène à la formulation du problème de minimisation suivant.

7.2.2 Formulation du problème de minimisation

Étant donné \mathbf{A} défini en (7.17) au moyen des filtres (7.4)-(7.5) et $\hat{\mathbf{y}}$ la transformée de Fourier de l'image dégradée (7.19), on cherche à déterminer une image $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ qui minimise $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}$, pour la norme dérivée du produit scalaire (7.13), et dont les lignes et colonnes satisfont les propriétés (7.38)-(7.39). On fixe une constante c . Alors, le problème d'optimisation sous contraintes ci-dessous définit un estimateur de (7.8) :

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2 , \quad (7.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c , \end{array} \right. \quad (7.42a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}[m, 0] \leq c , \end{array} \right. \quad (7.42b)$$

$$\text{sous contraintes } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 , \end{array} \right. \quad (7.42c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{array} \right. \quad (7.42d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 1, \dots, M , \end{array} \right.$$

où les espaces de Hilbert $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Y}})$ et $(\mathcal{Q}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}})$ sont définis respectivement par (7.10)-(7.11), (7.12)-(7.13) et (7.32)-(7.33); et les opérateurs $\mathbf{T}_{M+1} : \mathcal{X}_t \rightarrow \mathcal{M}_{M+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{T}'_{H_S} : \mathcal{X}_t \times \mathcal{Q}_t \rightarrow \mathcal{M}_{H_S+1}(\mathbb{C})$ sont définis respectivement à partir des lignes et colonnes de $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$, muni des produits scalaires (7.14) et (7.15), à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes héritant du produit scalaire usuel sur les matrices complexes :

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{i,j} \mathbf{M}_{ij}^* \mathbf{N}_{ij}, \quad (7.43)$$

et de norme associée, dite de Frobenius, suivante :

$$\|\mathbf{M}\|_{\text{F}} = \left(\sum_{i,j} |\mathbf{M}_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (7.44)$$

L'expression de ces opérateurs sont données par \mathbf{T}_N et \mathbf{T}'_N définis par (7.21) et (7.2.1).

Remarque 7.8. Ce problème d'estimation pourrait être reformulé sous forme régularisée faisant intervenir un paramètre λ à régler, ce qui serait donc équivalent à notre formulation où c'est le paramètre c qu'il s'agit de calibrer, et qui a le mérite d'avoir une interprétation physique (somme des intensités des lignes).

Nous conservons donc cette formulation et la réécrivons sous une forme plus générique. Désignons par $\mathcal{H} = \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$ l'espace de Hilbert dans lequel évolue la variable d'optimisation $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$, muni du produit scalaire :

$$\langle (\hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{q}_1), (\hat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{q}_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathcal{Q}}. \quad (7.45)$$

Définissons les opérateurs linéaires $L_m^{(1)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{T}_{H_S+1}$ et $L_{n_2}^{(2)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{T}_{M+1}$ par :

$$L_m^{(1)}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]), \quad (7.46)$$

$$L_{n_2}^{(2)}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]). \quad (7.47)$$

Si ι_C désigne la fonction indicatrice d'un ensemble convexe C définie par

$$\iota_C : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C \\ +\infty & \text{if } x \notin C \end{cases},$$

où C est selon : $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ l'ensemble correspondant aux contraintes sur les bords (7.42a)-(7.42b)

$$\mathcal{B} = \left\{ (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{H} : \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, \mathbf{q}[m, 0] \leq c \right\}, \quad (7.48)$$

ou \mathcal{C} le cône des matrices positives. Alors le problème d'optimisation (7.41) sous contraintes peut se réécrire sous cette forme :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}=(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \iota_{\mathcal{B}}(\mathbf{X}) + \sum_{m=1}^M \iota_C(L_m^{(1)}(\mathbf{X})) + \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \iota_C(L_{n_2}^{(2)}(\mathbf{X})) \right\}. \quad (7.49)$$

7.3 Restauration des lignes par super-résolution

7.3.1 Premier algorithme primal-dual

Le problème d'optimisation (7.49) peut être traité dans le cadre général suivant, des algorithmes d'optimisation primaux-duaux dits par « éclatement » (*splitting*), faisant intervenir des termes lisses, proximables et linéaires composites (CONDAT, 2013) :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathbf{L}_i(\mathbf{X})) \right\}, \quad (7.50)$$

avec

- $F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2$, avec $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$,
- $G = \iota_{\mathcal{B}}$ qui est proximable,
- $Q = M + H_S$ termes linéaires composites avec $H_i = \iota_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^{(2)}$ quand $0 \leq i \leq H_S - 1$ et $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i-H_S+1}^{(1)}$ quand $H_S \leq i \leq H_S + M - 1$.

On définit aussi

- $\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{X}) = (\mathbf{L}_1^{(1)}(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{L}_m^{(1)}(\mathbf{X}))$ et $\mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{X}) = (\mathbf{L}_0^{(2)}(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{L}_{H_S-1}^{(2)}(\mathbf{X}))$,
- $\mathbf{L} = (\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)})$,
- $\mathbf{H}\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{Q-1} H_i x_i$, de telle sorte que les termes composites se réécrivent $\mathbf{H} \circ \mathbf{L}$.

On définit sur l'image de $\mathbf{L}^{(1)}$, $\mathbf{L}^{(2)}$ et \mathbf{L} , qui sont des espaces produits cartésiens, un produit scalaire comme somme des produits scalaires définis sur chacun d'entre eux (comme en (7.45)), et dont les normes correspondantes sont notées $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ and $\|\cdot\|_{(1,2)}$. On définit alors les normes d'opérateurs suivantes :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}} \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{Y}}}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{X}}}, \quad (7.51)$$

$$\|\mathbf{L}_i\| = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \frac{\|\mathbf{L}_i(\mathbf{X})\|_{\mathcal{F}}}{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}}, \quad (7.52)$$

$$\|\mathbf{L}^{(j)}\| = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \frac{\|\mathbf{L}^{(j)}(\mathbf{X})\|_{(j)}}{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (7.53)$$

$$\|\mathbf{L}\| = \sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \frac{\|\mathbf{L}(\mathbf{X})\|_{(1,2)}}{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}}, \quad (7.54)$$

Nous établissons maintenant quelques propriétés de ces fonctions, opérateurs et normes précédemment définis.

Lemme 7.1

La norme de l'opérateur \mathbf{A} est :

$$\|\mathbf{A}\| = \|\hat{\mathbf{g}}\|_{\infty} \|\hat{\mathbf{h}}\|_{\infty}. \quad (7.55)$$

Preuve :

$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{G}}) * \mathbf{h}$, où $\hat{\mathbf{G}} = \text{diag}(\hat{g}_{M+1}, \dots, \hat{g}_W)$. Calculons la norme de cet opérateur. Posons $\hat{\mathbf{x}}_k$ la k -ième colonne de $\hat{\mathbf{x}}$, alors en considérant la norme de l'opérateur $f \mapsto f * h$ (en passant en Fourier) on obtient l'inégalité $\|\hat{\mathbf{x}}_k * \mathbf{h}\|_2 \leq \|\hat{\mathbf{h}}\|_\infty \|\hat{\mathbf{x}}_k\|_2$. Ainsi, avec la norme dérivée du produit scalaire (7.11), il vient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{Y}}^2 &= |\hat{g}_{M+1}|^2 \|\hat{\mathbf{x}}_0 * \mathbf{h}\|_2^2 + 2|\hat{g}_{M+2}|^2 \|\hat{\mathbf{x}}_1 * \mathbf{h}\|_2^2 + \dots + 2|\hat{g}_W|^2 \|\hat{\mathbf{x}}_M * \mathbf{h}\|_2^2, \\ &\leq \|\hat{\mathbf{g}}\|_\infty^2 \|\hat{\mathbf{h}}\|_\infty^2 (\|\hat{\mathbf{x}}_0\|_2^2 + 2\|\hat{\mathbf{x}}_1\|_2^2 + \dots + 2\|\hat{\mathbf{x}}_M\|_2^2), \\ &\leq \|\hat{\mathbf{g}}\|_\infty^2 \|\hat{\mathbf{h}}\|_\infty^2 \|\hat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Le filtre h étant passe-bas, l'égalité est atteinte pour une image $\hat{\mathbf{x}}$ dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception d'une qui est constante (non nulle), d'indice m_0 où \hat{g}_{m_0} réalise le maximum $\|\hat{\mathbf{g}}\|_\infty$, ce qui prouve le résultat (7.55). □

Lemme 7.2

L'opérateur adjoint de \mathbf{A} est noté \mathbf{A}^* et défini par $\langle \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{A}^*\hat{\mathbf{z}} \rangle_{\mathcal{X}}$. Son expression matricielle est donnée par

$$\mathbf{A}^*\hat{\mathbf{z}} = \check{\mathbf{H}}^* \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{G}}^*, \quad (7.57)$$

ou de façon alternative par $\mathbf{A}^*\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{G}}^*) * \bar{\mathbf{h}}'$ où \mathbf{h}' est le vecteur \mathbf{h} « renversé ».

Preuve :

À partir de la définition (7.17) on a $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{G}}$, qui correspond à un produit matriciel. Ainsi, pour une matrice \mathbf{M} on conserve la propriété usuelle $\langle \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{M}^*\hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{X}}$ en remarquant que

$$\langle \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle_{\mathcal{M}}^* - \langle \hat{\mathbf{x}}_1[:, 0], \hat{\mathbf{x}}_2[:, 0] \rangle_{\mathbb{C}^{H_S}},$$

et la preuve est directe. □

Proposition 7.5

Pour $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$, le gradient de $F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2$ est

$$\nabla F(\mathbf{X}) = (\mathbf{A}^*(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{0})^\top,$$

qui est β -lipschitzien avec $\beta = \|\hat{\mathbf{g}}\|_\infty^2 \|\hat{\mathbf{h}}\|_\infty^2$.

Preuve :

Soit F_1 et F_2 les applications :

$$\begin{aligned} F_1 : \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X} &\mapsto \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2 \in \mathbb{R}, \\ F_2 : \mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{H} &\mapsto \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Alors, $F : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit $F = F_1 \circ F_2$ et sa différentielle en \mathbf{X}_0 est :

$$(dF)_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}) = (dF_1)_{F_2(\mathbf{X}_0)} \circ (dF_2)_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} F_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2, \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2 + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle_{\mathcal{Y}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathcal{Y}} + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{h}\|_{\mathcal{Y}}^2, \\ &= F_1(\hat{\mathbf{x}}) + \langle \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{A}\mathbf{h} \rangle_{\mathcal{Y}} + o(\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{X}}), \\ &= F_1(\hat{\mathbf{x}}) + \langle \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{X}} + o(\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{X}}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(dF_1)_{\widehat{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}), \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{X}} .$$

De plus, F_2 est linéaire donc $(dF_2)_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}) = F_2(\mathbf{X})$, d'où

$$(dF)_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}_0 - \widehat{\mathbf{y}}), \widehat{\mathbf{x}} \rangle_{\mathcal{X}} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}_0 - \widehat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{X} \right\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

c'est-à-dire :

$$\nabla F(\mathbf{X}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}_0 - \widehat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Par conséquent,

$$\|\nabla F(\mathbf{X}) - \nabla F(\mathbf{X}')\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{A}^*\mathbf{A}(\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}')\|_{\mathcal{X}} \leq \|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\| \|\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}'\|_{\mathcal{X}} .$$

On obtient $\beta = \|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|^2$ et le Lemme 7.1 achève la preuve. \square

On donne dans la proposition suivante les adjoints des opérateurs

$$\mathbf{T}_{M+1} : (\mathcal{X}_l, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_l}) \rightarrow (\mathcal{T}_{M+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}) , \quad (7.58)$$

$$\mathbf{T}'_{H_S} : (\mathcal{X}_t \times \mathcal{Q}_t, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_t} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}_t}) \rightarrow (\mathcal{T}_{H_S+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}) , \quad (7.59)$$

où les produits scalaires est définis par (7.14), (7.15), (7.34) et (7.43).

Proposition 7.6

Pour $\mathbf{M}^{(1)} \in \mathcal{T}_{H_S+1}$ et $\mathbf{M}^{(2)} \in \mathcal{T}_{M+1}$ les opérateurs adjoints de (7.58) et (7.59) appliqués à $\mathbf{M}^{(1)}$ et $\mathbf{M}^{(2)}$ donnent les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{T}_{M+1}^* \mathbf{M}^{(2)} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^M , \\ (\mathbf{z}_1, \mathbf{q}_1) &= \mathbf{T}'_{H_S}{}^* \mathbf{M}^{(1)} \in \mathbb{C}^{H_S} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{H_S-1}) , \end{aligned}$$

et dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2[k] &= \sum_{l=0}^{M-k} \mathbf{M}_{l+k,l}^{(2)} , \quad \forall k = 0, \dots, M , \\ \mathbf{z}_1[k] &= \mathbf{M}_{H_S+1,k}^{(1)} , \quad \mathbf{q}_1[k] = \sum_{l=0}^{H_S-1-k} \mathbf{M}_{l+k,l}^{(1)} + \delta_k \mathbf{M}_{H_S,H_S}^{(1)} , \quad \forall k = 0, \dots, H_S - 1 . \end{aligned}$$

Preuve :

Pour $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{N-1}$ et $\mathbf{M} \in \mathcal{T}_N \subset \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ une matrice Toeplitz hermitienne de dimension N . On a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_N(\mathbf{z}), \mathbf{M} \rangle_{\mathcal{M}} &= \sum_{0 \leq i, j \leq N-1} [\mathbf{T}_N(\mathbf{z})]_{ij}^* \mathbf{M}_{ij} , \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq N-1} z_{j-i} \mathbf{M}_{ij} + \sum_{0 \leq j < i \leq N-1} z_{i-j}^* \mathbf{M}_{ij} , \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1-k} z_k \mathbf{M}_{l,l+k} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1-k} z_k^* \mathbf{M}_{l+k,l} , \\ &\stackrel{(**)}{=} z_0 \left(\sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{M}_{l,l} \right) + 2\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} z_k^* \left(\sum_{l=0}^{N-1-k} \mathbf{M}_{l+k,l} \right) \right\} , \end{aligned}$$

avec (*) le changement de variable $k \leftarrow j - i$ et (**) utilisant $\mathbf{M}_{l,l+k} = \mathbf{M}_{l+k,l}^*$.

Ainsi, en écrivant

$$\mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & q_0 \end{array} \right)$$

on obtient de même pour $\mathbf{M} \in \mathcal{T}_{N+1}$:

$$\langle \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}), \mathbf{M} \rangle_{\mathcal{M}} = 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} z_k^* \mathbf{M}_{N+1,k} \right\} + q_0 \left(\sum_{l=0}^N \mathbf{M}_{l,l} \right) + 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} q_k^* \left(\sum_{l=0}^{N-1-k} \mathbf{M}_{l+k,l} \right) \right\}.$$

Par conséquent, l'opérateur adjoint

$$\mathbf{T}_{M+1} : (\mathcal{X}_l, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_l}) \rightarrow (\mathcal{T}_{M+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}),$$

avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_l}$ défini dans (7.14), et appliqué à la matrice $\mathbf{M}^{(2)} \in \mathcal{T}_{M+1}$, donne le vecteur

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{T}_{M+1}^* \mathbf{M}^{(2)} \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^M,$$

dont les composantes sont :

$$\mathbf{z}_2[k] = \sum_{l=0}^{M-k} \mathbf{M}_{l+k,l}^{(2)}, \quad \forall k = 0, \dots, M.$$

De même, l'opérateur adjoint

$$\mathbf{T}'_{H_S} : (\mathcal{X}_t \times \mathcal{Q}_t, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_t} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}_t}) \rightarrow (\mathcal{T}_{H_S+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}),$$

avec les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}_t}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}_t}$ définis par (7.15)-(7.34), et appliqué à $\mathbf{M}^{(2)} \in \mathcal{T}_{H_S+1}$, donne la paire de vecteurs suivante :

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{q}_1) = \mathbf{T}'_{H_S} \mathbf{M}^{(2)} \in \mathbb{C}^{H_S} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{H_S-1}),$$

dont les composantes sont :

$$\mathbf{z}_1[k] = \mathbf{M}_{H_S+1,k}^{(2)}, \quad \mathbf{q}_1[k] = \sum_{l=0}^{H_S-1-k} \mathbf{M}_{l+k,l}^{(2)} + \delta_k \mathbf{M}_{H_S,H_S}^{(2)}, \quad \forall k = 0, \dots, H_S - 1.$$

□

Donnons maintenant une majoration explicite de la norme d'opérateur $\|\mathbf{L}\|$.

Proposition 7.7

La norme de l'opérateur $\mathbf{L} = (\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)})$, où

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{X}) &= (\mathbf{L}_1^{(1)}(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{L}_M^{(1)}(\mathbf{X})), \\ \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{X}) &= (\mathbf{L}_0^{(2)}(\mathbf{X}), \dots, \mathbf{L}_{H_S-1}^{(2)}(\mathbf{X})), \end{aligned}$$

et avec $\mathbf{L}_m^{(1)}$ et $\mathbf{L}_{n_2}^{(2)}$ définis par (7.46)-(7.47), est donnée par :

$$\|\mathbf{L}\|^2 \leq \|\mathbf{L}^{(1)}\|^2 + \|\mathbf{L}^{(2)}\|^2 = \|\mathbf{T}'_{H_S}\|^2 + \|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 = (H_S + 1) + (M + 1).$$

Preuve :

Premièrement, calculons la norme d'opérateur $\|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 = \sup_{z \in \mathcal{X}_t} \frac{\|\mathbf{T}_{M+1}(z)\|_F^2}{\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2}$.

Par définition, on a $\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2 = z_0^2 + 2|z_1|^2 + \dots + 2|z_M|^2$. De plus, on obtient

$$\|\mathbf{T}_{M+1}(z)\|_F^2 = (M+1)z_0^2 + 2M|z_1|^2 + 2(M-1)|z_2|^2 + \dots + 2|z_M|^2 \leq (M+1)\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2,$$

avec égalité quand $z = (1, 0, \dots, 0)$, d'où

$$\|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 = M+1. \quad (7.60)$$

Décomposons maintenant l'opérateur \mathbf{T}'_{H_S} comme suit :

$$\mathbf{T}'_{H_S}(z, \mathbf{q}) = \underbrace{\begin{pmatrix} & & z_0 \\ & \mathbf{0} & \vdots \\ & & z_{H_S-1} \\ z_0^* & \dots & z_{H_S-1}^* & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_1(z)} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathbf{T}_{H_S}(\mathbf{q}) & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_2(\mathbf{q})}.$$

Nous avons directement $\|\mathbf{T}_1(z)\|_F^2 = \|z\|_{\mathcal{X}_t}^2$, c.-à.-d. $\|\mathbf{T}_1\| = 1$. Par ailleurs, on a

$$\|\mathbf{T}_2(\mathbf{q})\|_F^2 = (H_S+1)q_0^2 + 2(H_S-1)|q_1|^2 + \dots + 2|q_{H_S-1}|^2 \leq (H_S+1)\|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2,$$

avec égalité quand $\mathbf{q} = (1, 0, \dots, 0)$, d'où $\|\mathbf{T}_2\|^2 = H_S+1$.

Puis, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{T}'_{H_S}(z, \mathbf{q})\|_F^2}{\|(z, \mathbf{q})\|_{\mathcal{X}_t \times \mathcal{Q}_t}^2} &= \frac{\|\mathbf{T}_1(z)\|_F^2 + \|\mathbf{T}_2(\mathbf{q})\|_F^2}{\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2 + \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2}, \\ &\leq \frac{\|\mathbf{T}_1\|^2 \|z\|_{\mathcal{X}_t}^2 + \|\mathbf{T}_2\|^2 \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2}{\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2 + \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2}, \\ &\leq \alpha \|\mathbf{T}_1\|^2 + (1-\alpha) \|\mathbf{T}_2\|^2, \\ &\leq \max(\|\mathbf{T}_1\|^2, \|\mathbf{T}_2\|^2) = \|\mathbf{T}_2\|^2, \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2}{\|z\|_{\mathcal{X}_t}^2 + \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Q}_t}^2}$ et est atteinte quand $z = \mathbf{0}$ et $\mathbf{q} = (1, 0, \dots, 0)$, d'où

$$\|\mathbf{T}'_{H_S}\|^2 = H_S+1.$$

On est alors en mesure d'en dériver les normes d'opérateurs (7.53) :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{X}) \right\|_{(1)}^2 &= \sum_{m=1}^M \left\| \mathbf{L}_m^{(1)}(\mathbf{X}) \right\|_F^2, \\ &\leq \|\mathbf{T}'_{H_S}\|^2 \sum_{m=1}^M \left(\|\hat{\mathbf{x}}[m, :]\|_{\mathcal{X}_t}^2 + \|\mathbf{q}[m, :]\|_{\mathcal{Q}_t}^2 \right), \\ &\leq \|\mathbf{T}'_{H_S}\|^2 \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

avec égalité quand $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}[0, :] = \mathbf{0}$ et $\mathbf{q}[m, :] = (1, 0, \dots, 0)$ pour tout $m \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

De même, on a

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{X}) \right\|_{(2)}^2 &= \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \left\| \mathbf{L}_{n_2}^{(2)}(\mathbf{X}) \right\|_F^2, \\ &\leq \|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \|\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]\|_{\mathcal{X}_t}^2, \\ &\leq \|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

avec égalité quand $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ et $\widehat{\mathbf{x}}[:, n_2] = (1, 0, \dots, 0)$ pour tout $n_2 \in \llbracket 0, H_S - 1 \rrbracket$.

On en conclut que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}^{(1)}\|_{(1)}^2 &= \|\mathbf{T}'_{H_S}\|^2 = H_S + 1, \\ \|\mathbf{L}^{(2)}\|_{(2)}^2 &= \|\mathbf{T}_{M+1}\|^2 = M + 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}(\mathbf{X})\|_{(1,2)}^2 &= \|\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{X})\|_{(1)}^2 + \|\mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{X})\|_{(2)}^2, \\ &\leq \left(\|\mathbf{L}^{(1)}\|_{(1)}^2 + \|\mathbf{L}^{(2)}\|_{(2)}^2 \right) \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

Afin de résoudre le problème (7.49), on propose dans un premier temps l'Algorithme 4, employant une méthode primale-duale introduite dans POLISANO et coll. (2016). En s'appuyant sur (CONDAT, 2013, Théorème 5.1) et en prenant $\rho_n \equiv \rho = 1$, nous savons que la méthode converge vers une solution $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0, \dots, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{Q-1})$ du problème (7.50), dès lors que les paramètres $\tau > 0$ et $\sigma > 0$ de l'Algorithme 4 sont tels que

$$\frac{1}{\tau} - \sigma \|\mathbf{L}\|^2 > \frac{\beta}{2}.$$

On choisit pour cela $0 < \tau < 2$ et

$$\sigma = (H_S + M + 2)^{-2} (1/\tau - \beta/1.9).$$

Algorithme 4 Algorithme d'éclatement primal-dual appliqué à (7.50)

Entrées: $\hat{\mathbf{y}}$ transformée de Fourier horizontale de l'image dégradée y

Sortie: $\tilde{\mathbf{x}}$ solution du problème d'optimisation (7.41)

- 1: Initialiser les variables primales et duales à zéro : $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}_{i,0} = \mathbf{0}$, $\forall i \in \llbracket 1, Q \rrbracket$
 - 2: **Pour** $n = 1$ à Nombre d'itérations **faire**
 - 3: $\mathbf{X}_{n+1} = \text{prox}_{\tau G}(\mathbf{X}_n - \tau \nabla F(\mathbf{X}_n) - \tau \sum_{i=0}^{Q-1} \mathbf{L}_i^* \boldsymbol{\xi}_{i,n})$,
 - 4: $\mathbf{X}_{n+1} = \rho_n \tilde{\mathbf{X}}_{n+1} - (1 - \rho_n) \mathbf{X}_n$,
 - 5: **Pour** $i = 0$ à $Q - 1$ **faire**
 - 6: $\boldsymbol{\xi}_{i,n+1} = \text{prox}_{\sigma H_i^*}(\boldsymbol{\xi}_{i,n} + \sigma \mathbf{L}_i(2\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n))$,
 - 7: $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{i,n+1} = \rho_n \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{i,n+1} + (1 - \rho_n) \boldsymbol{\xi}_{i,n}$,
 - 8: **Fin Pour**
 - 9: **Fin Pour**
-

On détaille maintenant les termes intervenants dans les lignes 3 et 6 de l'Algorithme 4, impliquant le calcul d'opérateurs proximaux et d'opérateurs adjoints. Pour plus de détails concernant l'analyse convexe, la théorie des opérateurs monotones et les méthodes proximales d'éclatement, voir (BAUSCHKE et COMBETTES, 2011; BOYD et VANDENBERGHE, 2004; COMBETTES et PESQUET, 2011; PARIKH et coll., 2014).

Posons $\bar{x}_0 = \frac{1}{H_S} \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \widehat{\mathbf{x}}[0, n_2]$, on a $\forall m, n_2$:

$$\text{prox}_{\tau G}(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \bar{x}_0 & \text{si } \bar{x}_0 \leq c \\ \widehat{\mathbf{x}}[0, n_2] = c & \text{autrement} \\ \mathbf{q}[m, 0] = c & \text{si } \mathbf{q}[m, 0] > c \end{cases}.$$

Soit $P_{\mathcal{C}}$ l'opérateur de projection sur \mathcal{C} , par l'identité de Moreau :

$$\text{prox}_{\sigma H_i^*}(\mathbf{M}) = \mathbf{M} - \sigma \text{prox}_{\frac{H_i}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{M}\right) = \mathbf{M} - P_{\mathcal{C}}(\mathbf{M}) .$$

Finalement, nous avons besoin de calculer les opérateurs adjoints L_i^* où les L_i sont définis en (7.46)-(7.47), ce qui revient à caractériser les adjoints de $\mathbf{T}_{M+1} : \mathcal{X}_l \rightarrow \mathcal{M}_{M+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{T}'_{H_S} : \mathcal{X}_t \times \mathcal{Q}_t \rightarrow \mathcal{M}_{H_S+1}(\mathbb{C})$, avec les produits scalaires (7.14) et (7.15). Les variables duales $(\xi_{i,n})_i$ dans l'Algorithme 4 réfèrent à des matrices Toeplitz hermitiennes $\mathbf{M}_m^{(1)} \in \mathcal{T}_{H_S+1}$ ou $\mathbf{M}_{n_2}^{(2)} \in \mathcal{T}_{M+1}$. Par définition, les opérateurs adjoints renvoient les images $(\mathbf{z}_m^{(1)}, \mathbf{q}_m^{(1)}) = L_m^{(1)*}\mathbf{M}_m^{(1)}$ et $(\mathbf{z}_{n_2}^{(2)}, \mathbf{q}_{n_2}^{(2)}) = L_{n_2}^{(2)*}\mathbf{M}_{n_2}^{(2)}$. D'après les définitions (7.46)-(7.47), pour une variable $\mathbf{X} = (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$ les opérateurs $L_m^{(1)}$ et $L_{n_2}^{(1)}$ agissent respectivement sur la m -ième colonne des images $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$ et sur la n_2 -ième ligne de l'image $\hat{\mathbf{x}}$ seulement, donc on voit facilement en ce qui concerne les adjoints que $\mathbf{q}_{n_2}^{(2)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{z}_{n_2}^{(2)}$ (resp. $\mathbf{z}_m^{(1)}, \mathbf{q}_m^{(1)}$) est nulle à l'exception de la ligne n_2 correspondante (resp. colonne m) où

$$\mathbf{z}_{n_2}^{(2)}[:, n_2] = \mathbf{T}_{M+1}^* \mathbf{M}_{n_2}^{(2)} , \quad (7.61)$$

$$(\mathbf{z}_m^{(1)}[m, :], \mathbf{q}_m^{(1)}[m, :]) = \mathbf{T}'_{H_S}^* \mathbf{M}_m^{(1)} , \quad (7.62)$$

avec l'expression des opérateurs adjoints \mathbf{T}_{M+1}^* and $\mathbf{T}'_{H_S}^*$ donnée par la Proposition 7.6. Donc, les opérations sur $\mathbf{X}_n = (\hat{\mathbf{x}}_n, \mathbf{q}_n)$ avant application du $\text{prox}_{\tau G}$ à la ligne 3, consistent en une étape de descente de gradient $\mathbf{X}_n - \tau \nabla F(\mathbf{X}_n)$, suivies par une mise à jour de toutes ses lignes et colonnes causée par les termes $-\tau \sum_{i=0}^{Q-1} L_i^* \xi_{i,n}$, dont les expressions sont données par (7.61) et (7.62).

7.3.2 Deuxième algorithme primal-dual

Notons que dans l'équation (4), τ doit être inférieur à $2/\beta$, ce qui constitue une limite en terme de vitesse de convergence de l'algorithme. Afin d'y remédier nous avons développé un second algorithme, similaire à (4), mais dont le terme d'attache aux données $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}$ s'active à travers son opérateur proximal au lieu de son gradient. Autrement dit on considère le problème d'optimisation dans une version relaxée de l'algorithme de **CHAMBOLLE et POCK (2011)** :

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \{G(\mathbf{X}) + \mathbf{H}(\mathbf{L}(\mathbf{X}))\} , \quad (7.63)$$

avec

- $G = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \cdot -\hat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2$ qui est proximal,
- $\mathbf{H}\mathbf{x} = \sum_{i=0}^Q H_i x_i$,
- $H_i = \iota_{\mathcal{C}}$ pour $i < Q$, où $L_i = L_i^{(2)}$ quand $0 \leq i \leq H_S - 1$, $L_i = L_{i-H_S+1}^{(1)}$ quand $H_S \leq i \leq Q - 1$, et $H_Q = \iota_{\mathcal{B}}$ avec $L_Q = \text{Id}$.

Dorénavant, $\|\mathbf{L}\|^2 \leq H_S + M + 3$.

Soit $\tau > 0$ et $\sigma > 0$ tels que $\tau\sigma\|\mathbf{L}\|^2 = 1$, alors la méthode primale-duale fournie par l'Algorithme (5) e introduite dans **POLISANO et coll. (2017)**, avec $F = 0$ et le poids $\rho_n \equiv \rho = 1.9$, est une version sur-relaxée de l'algorithme de Chambolle–Pock, et converge vers une solution $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{Q-1})$ du problème (7.50) (**CONDAT, 2013**, Théorème 5.3).

Algorithme 5 Algorithme d'éclatement primal-dual appliqué à (7.63)

Entrées: $\hat{\mathbf{y}}$ transformée de Fourier horizontale de l'image dégradée y

Sortie: $\tilde{\mathbf{x}}$ solution du problème d'optimisation (7.41)

- 1: Initialiser toutes les variables primales et duales à zéro.
 - 2: **Pour** $n = 1$ à Nombre d'itérations **faire**
 - 3: $\tilde{\mathbf{X}}_{n+1} = \text{prox}_{\tau G}(\mathbf{X}_n - \tau \sum_{i=0}^{Q-1} \mathbf{L}_i^* \boldsymbol{\xi}_{i,n}),$
 - 4: $\mathbf{X}_{n+1} = \rho_n \tilde{\mathbf{X}}_{n+1} - (1 - \rho_n) \mathbf{X}_n$
 - 5: **Pour** $i = 0$ à $Q - 1$ **faire**
 - 6: $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{i,n+1} = \text{prox}_{\sigma H_i^*}(\boldsymbol{\xi}_{i,n} + \sigma \mathbf{L}_i(2\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n)),$
 - 7: $\boldsymbol{\xi}_{i,n+1} = \rho_n \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{i,n+1} + (1 - \rho_n) \boldsymbol{\xi}_{i,n}$
 - 8: **Fin Pour**
 - 9: **Fin Pour**
-

L'Algorithme (5) nécessite de calculer $\text{prox}_{\tau G}$. Puisque l'on a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \text{prox}_{\tau G}(\hat{\mathbf{x}}) &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p} = \nabla(\tau G)(\mathbf{p}), \\ &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p} = \tau \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{p} - \hat{\mathbf{y}}), \\ &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} + \tau \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}^* \mathbf{A}) \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

alors l'opérateur proximal possède l'expression suivante :

$$\text{prox}_{\tau G}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1}(\hat{\mathbf{x}} + \tau \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{y}}).$$

dont on propose ci-dessous deux méthodes pour calculer l'inverse matriciellement.

Puisque $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \check{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}\check{\mathbf{G}}$, on montre que $\mathbf{A}^* \hat{\mathbf{y}} = \check{\mathbf{H}}^\top \hat{\mathbf{y}} \check{\mathbf{G}}$ et par suite :

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}^* \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = \tau \check{\mathbf{H}}^\top \check{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{Q} = \check{\mathbf{G}}\check{\mathbf{G}}.$$

Les matrices carrées \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont de dimension $p = H_S$ et $q = M + 1$. Il s'agit de résoudre $(\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}^* \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}$, c.-à-d. $\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q} = \mathbf{z}$. Ce type de système peut être résolu au moyen du produit de Kronecker :

$$\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q} = \mathbf{z} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I}_{pq,pq} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}^\top) \text{Vec}(\hat{\mathbf{x}}) = \text{Vec}(\mathbf{z}),$$

où $\text{Vec}(\hat{\mathbf{x}})$ désigne le procédé de vectorisation de la matrice $\hat{\mathbf{x}}$ formée par empilement des colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$ en un seul vecteur colonne, et $\mathbf{I}_{pq,pq} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}^\top$ est une matrice carrée de dimension pq qui peut être inversée, donnant accès à $\text{Vec}(\hat{\mathbf{x}})$ puis à $\hat{\mathbf{x}}$. Au final, l'opérateur $\text{prox}_{\tau G}$ n'est rien d'autre qu'une multiplication matrice-vecteur de grande dimension.

Une alternative consiste à travailler sur les colonnes $\hat{\mathbf{x}}_m$ de $\hat{\mathbf{x}}$, dans la mesure où l'opérateur \mathbf{A} agit sur celles-ci :

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}^* \mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I} + |\hat{\mathbf{g}}[m]|^2 \mathbf{P})\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{z}_m, \quad \forall m = 0, \dots, M.$$

Cette fois, l'opérateur $\text{prox}_{\tau G}$ induit $M + 1$ produits matrice-vecteur de dimension p plus petite, ce qui s'est avéré plus efficace en pratique.

7.3.3 Hypothèses sur les lignes relaxées

À présent nous levons la restriction initialement faite dans la Remarque 7.1 sur les lignes, en considérant une image \mathbf{b}^\sharp contenant des lignes d'orientations quelconques, ce qui est une amélioration de nos précédentes contributions (POLISANO et coll., 2016). Nous pouvons en

effet décomposer l'image en la somme de deux images $\mathbf{b}^\sharp = \mathbf{b}_1^\sharp + \mathbf{b}_2^\sharp$, avec \mathbf{b}_1^\sharp (resp. \mathbf{b}_2^\sharp) contenant les lignes verticales (resp. les lignes horizontales) de l'image \mathbf{b}^\sharp . Identiquement à ce qui précède on est donc en droit de définir $\widehat{\mathbf{x}}_1^\sharp$ de dimension $(M+1) \times H_S$ et $\widehat{\mathbf{x}}_2^\sharp$ de dimension $W_S \times (P+1)$ avec $W_S = W + 2S$ and $P = (H-1)/2$ tels que $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}_1^\sharp = \widehat{\mathbf{b}}_1^\sharp$ et $\widetilde{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{x}}_2^\sharp = \widehat{\mathbf{b}}_2^\sharp$, où $\mathbf{g}_2 = [\mathbf{0}_{P-S}, \mathbf{h}, \mathbf{0}_{P-S}]$ et $\widetilde{\mathbf{A}}$ désigne l'opérateur qui multiplie chaque vecteur ligne $\widehat{\mathbf{x}}_2^\sharp[:, n_2]$ par le coefficient de Fourier correspondant $\widehat{\mathbf{g}}_2[n_2]$ puis convolue par le filtre \mathbf{h} , c.-à-d. $\widetilde{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{x}}_2 = (\widetilde{\mathbf{G}}_2\widehat{\mathbf{x}}_2) * \mathbf{h}$ avec $\widetilde{\mathbf{G}}_2 = \text{diag}(\widehat{\mathbf{g}}_2[P+1], \dots, \widehat{\mathbf{g}}_2[H])$. On définit aussi l'opérateur de symétrie hermitienne \mathbf{S}_1 (resp. \mathbf{S}_2) qui à chaque ligne $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_M]$ (resp. colonne $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_P]$) associe le vecteur étendu en adjoignant la partie symétrique comme suit : $[\overline{v_M}, \dots, v_0, \dots, v_M]$ (resp. $[\overline{v_P}, \dots, v_0, \dots, v_P]$). Soit $\mathbf{X}_1 = (\widehat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{q}_1)$ et $\mathbf{X}_2 = (\widehat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{q}_2)$ les variables d'optimisation appartenant aux espaces $\mathcal{H}_1 = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Q}_2$. On pose aussi $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Alors le terme d'attache aux données est maintenant :

$$F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}_1^{-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathcal{F}_2^{-1} \mathbf{S}_2 \widetilde{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}\|_{\mathbb{F}}^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}\|_{\mathbb{F}}^2,$$

avec $\mathbf{A}_1 = \mathcal{F}_1^{-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_2 = \mathcal{F}_2^{-1} \mathbf{S}_2 \widetilde{\mathbf{A}}$, où \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2) désigne la transformée de Fourier selon les lignes (resp. colonnes).

Proposition 7.8

Le gradient de F est

$$\nabla F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^* (\mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}) \\ \mathbf{A}_2^* (\mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad (7.65)$$

qui est Lipschitz-continu de constante de Lipschitz $\beta = \frac{1}{\min(W, H)}$.

Preuve :

Calculons la différentielle :

$$\begin{aligned} & F(\mathbf{X}_1 + \mathbf{h}_1, \mathbf{X}_2 + \mathbf{h}_2) \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{y}, \mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{M}}, \\ &= F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2, \mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2, \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2, \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

et

$$|\langle \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathcal{M}}| \leq \|\mathbf{A}_1\| \|\mathbf{A}_2\| \|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Avec le produit scalaire défini sur l'espace produit on a $\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}^2$ et ainsi

$$\frac{\|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}}{\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}}{\sqrt{\|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}^2}} \leq \frac{\|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1} \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2}}{\|\mathbf{h}_1\|_{\mathcal{H}_1}} = \|\mathbf{h}_2\|_{\mathcal{H}_2} \rightarrow 0,$$

d'où il s'ensuit que $|\langle \mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathcal{M}}| = o(\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|_{\mathcal{H}})$, et on en déduit :

$$\nabla F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^* (\mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}) \\ \mathbf{A}_2^* (\mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs adjoints sont donnés par $\widetilde{\mathbf{A}}^* \mathbf{z} = (\overline{\mathbf{G}_2 \mathbf{z}}) * \overline{\mathbf{h}'}$, $(\mathcal{F}_1^{-1})^* = \frac{1}{W} \mathcal{F}_1$ et $(\mathcal{F}_2^{-1})^* = \frac{1}{H} \mathcal{F}_2$, $\mathbf{S}_1^*(v_{-M}, \dots, v_0, \dots, v_M) = (v_0, \dots, v_M)$ et $\mathbf{S}_2^*(v_{-P}, \dots, v_0, \dots, v_P) = (v_0, \dots, v_P)$.

Déterminons la constante de Lipschitz du gradient ∇F :

$$\begin{aligned} \|\nabla F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) - \nabla F(\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2)\|^2 &= \frac{1}{4} \|\mathbf{A}_1^* (\mathbf{A}_1 (\widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{x}}'_1) + \mathbf{A}_2 (\widehat{\mathbf{x}}_2 - \widehat{\mathbf{x}}'_2))\|_{\mathcal{X}_1}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \|\mathbf{A}_2^* (\mathbf{A}_1 (\widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{x}}'_1) + \mathbf{A}_2 (\widehat{\mathbf{x}}_2 - \widehat{\mathbf{x}}'_2))\|_{\mathcal{X}_2}^2. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Nous avons besoin de majorer chacun des termes. Traitons le premier C_1 , le second C_2 s'obtient de la même manière. En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} C_1 &\leq \frac{1}{4}(\|\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1\| \|\widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{x}}'_1\|_{\mathcal{X}_1} + \|\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_2\| \|\widehat{\mathbf{x}}_2 - \widehat{\mathbf{x}}'_2\|_{\mathcal{X}_2})^2, \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1\|^2 \|\widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{x}}'_1\|_{\mathcal{X}_1}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_2\|^2 \|\widehat{\mathbf{x}}_2 - \widehat{\mathbf{x}}'_2\|_{\mathcal{X}_2}^2. \end{aligned} \quad (7.67)$$

On a $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^*\| = 1$, $\|\mathbf{S}_i \widehat{\mathbf{x}}_i\|_{\mathbb{F}} = \|\widehat{\mathbf{x}}_i\|_{\mathcal{X}}$, pour $i \in \{1, 2\}$; c.-à-d., $\|\mathbf{S}_i\| = 1$, et $\|\mathcal{F}_i^{-1} \mathbf{v}\|_2^2 = \frac{1}{N^2} \|\mathbf{v}\|_2^2$, c.-à-d. $\|\mathcal{F}_i^{-1}\| = \frac{1}{N}$. D'où, $\|\mathbf{A}_1\| \leq \frac{1}{W}$, $\|\mathbf{A}_1^*\| \leq 1$, $\|\mathbf{A}_2\| \leq \frac{1}{H}$ and $\|\mathbf{A}_2\| \leq 1$. Par conséquent, on obtient

$$C_1 \leq \frac{1}{2W^2} \|\widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{x}}'_1\|_{\mathcal{X}_1}^2 + \frac{1}{2H^2} \|\widehat{\mathbf{x}}_2 - \widehat{\mathbf{x}}'_2\|_{\mathcal{X}_2}^2,$$

et de même pour la majoration de C_2 . Donc on a :

$$\|\nabla F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) - \nabla F(\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2)\|^2 \leq \beta^2 (\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}'_1\|^2 + \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}'_2\|^2), \quad \beta = \frac{1}{\min(W, H)}.$$

□

Les contraintes du problème d'optimisation (4) restent identiques pour $\widehat{\mathbf{x}}_1^\sharp$, et agissent de façon similaire sur $\widehat{\mathbf{x}}_2^\sharp$ après rotation. On définit

$$\mathbf{L}_m^{(3)}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{T}_{P+1}(\widehat{\mathbf{x}}_2[m, :]), \quad (7.68)$$

$$\mathbf{L}_{n_2}^{(4)}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{T}'_{W_S}(\text{fliplr}(\widehat{\mathbf{x}}_2[:, n_2]), \text{fliplr}(\mathbf{q}_2[:, n_2])). \quad (7.69)$$

Les contraintes aux bords de $\widehat{\mathbf{x}}_1$ et $\widehat{\mathbf{x}}_2$ sont données respectivement par :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ (\widehat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{q}_1) \in \mathcal{H}_1 : \widehat{\mathbf{x}}_1[0, n_2] = \widehat{\mathbf{x}}_1[0, 0] \leq c_1, \mathbf{q}_1[m, 0] \leq c_1 \right\}, \quad (7.70)$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ (\widehat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{q}_2) \in \mathcal{H}_2 : \widehat{\mathbf{x}}_2[m, 0] = \widehat{\mathbf{x}}_2[0, 0] \leq c_2, \mathbf{q}_2[P, n_2] \leq c_2 \right\}. \quad (7.71)$$

De même, les produits scalaires sur les espaces \mathcal{X}_2 et \mathcal{Q}_2 sont :

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{X}_2} = \sum_{m=0}^{W_S-1} \mathbf{z}_1[m, 0] \mathbf{z}_2[m, 0]^* + 2\text{Re} \left(\sum_{n_2=1}^P \sum_{m=0}^{W_S-1} \mathbf{z}_1[m, n_2] \mathbf{z}_2[m, n_2]^* \right), \quad (7.72)$$

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle_{\mathcal{Q}_2} = 2\text{Re} \left(\sum_{n_2=0}^P \sum_{m=0}^{W_S-1} \mathbf{z}_1[m, n_2] \mathbf{z}_2[m, n_2]^* \right). \quad (7.73)$$

et donc les adjoints des opérateurs restent identiques.

Comme précédemment, on définit

- $\mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{X}_2) = (\mathbf{L}_0^{(3)}(\mathbf{X}_2), \dots, \mathbf{L}_{W_S-1}^{(3)}(\mathbf{X}_2)),$

- $\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{X}_2) = (\mathbf{L}_0^{(4)}(\mathbf{X}_2), \dots, \mathbf{L}_P^{(4)}(\mathbf{X}_2)),$

- $\mathbf{L} = (\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}, \mathbf{L}^{(3)}, \mathbf{L}^{(4)}).$

De nouveau un simple calcul aboutit à

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}\|^2 &\leq \|\mathbf{L}^{(1)}\|^2 + \|\mathbf{L}^{(2)}\|^2 + \|\mathbf{L}^{(3)}\|^2 + \|\mathbf{L}^{(4)}\|^2 \\ &\leq (H_S + 1) + (M + 1) + (P + 1) + (W_S + 1). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2) = \arg \min_{(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \in \mathcal{H}} & \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{y}\|_{\mathbb{F}}^2 \right. \\
& + \iota_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{X}_1) + \sum_{m=1}^M \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{L}_m^{(1)}(\mathbf{X}_1)) + \sum_{n_2=0}^{H_S-1} \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{L}_{n_2}^{(2)}(\mathbf{X}_1)) \\
& \left. + \iota_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{X}_2) + \sum_{m=0}^{W_S-1} \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{L}_m^{(3)}(\mathbf{X}_2)) + \sum_{n_2=1}^P \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{L}_{n_2}^{(4)}(\mathbf{X}_2)) \right\}. \quad (7.74)
\end{aligned}$$

7.3.4 Extension au problème de l'inpainting

On considère maintenant le cas où un masque binaire est appliqué à l'image, comme sur la Figure 7.5. Plus précisément, l'opération $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ est une multiplication de Hadamard de la matrice \mathbf{x} avec la matrice binaire \mathbf{M} , dont les coefficients nuls sont les indices où l'on ne dispose pas de la valeur des pixels. Il est clair qu'avec le produit scalaire de Frobenius on a $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}$. Le terme d'attache aux données devient $F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{M} \mathcal{F}_1^{-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{F}}^2$, dont le gradient est calculé comme précédemment, avec $\beta = 1/W$ (puisque $\|\mathcal{F}_1^{-1}\| = 1/W$ et $\|\mathbf{M}\| = 1$). Les contraintes restent identiques à celles de (7.42a), et la méthode se transpose aisément à ce cas de figure.

À ce stade, nous avons rempli la première étape de (7.20) illustrée Figure 7.5, c.-à-d. que nous sommes en mesure de reconstruire l'image $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$ en Fourier à partir de l'image dégradée \mathbf{y} . On peut dès lors réduire le flou en considérant d'autres filtres \mathbf{g}_r et \mathbf{h}_r avec une PSF plus faible, et visualiser le résultat sur l'image \mathbf{b}_r obtenue en appliquant à la solution $\hat{\mathbf{x}}$ le nouvel opérateur de flou \mathbf{A}_r c.-à-d. $\hat{\mathbf{b}}_r = \mathbf{A}_r \hat{\mathbf{x}}$.

Remarque 7.9. Pour une variance κ trop faible, la gaussienne du flou vertical $\varphi_2 : t \mapsto (2\pi\kappa^2)^{-1/2} \exp(-t^2/(2\kappa^2))$ est si comprimée en zéro, que sa transformation de Fourier $\hat{\varphi}_2 : \nu \mapsto \exp(-2\pi^2\kappa^2\nu^2)$ s'étale quant à elle sur toutes les fréquences du spectre. Ainsi d'une part le filtre $\mathbf{g} = [\mathbf{0}_{M-S}, \mathbf{h}, \mathbf{0}_{M-S}]$ interpole peu d'échantillons \mathbf{h} de la gaussienne φ_2 , et d'autre part le vecteur $\hat{\mathbf{g}}$ de longueur $2M+1 = W$ ne contient pas une plage suffisamment large des fréquences de $\hat{\varphi}_2$ du fait de la lente décroissance. Par conséquent, φ_1 étant à bande limitée, elle ne prélève qu'une partie des fréquences, et cette coupure introduit des oscillations qui apparaissent comme des artefacts dans l'image \mathbf{b}_r .

Dans la section suivante nous présentons la méthode employée pour mener la seconde étape illustrée Figure 7.5, à savoir l'estimation spectrale des paramètres des lignes présentes dans la solution $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$.

7.4 Extraction des paramètres des lignes et expériences numériques

7.4.1 Application d'une méthode d'estimation spectrale type Prony

L'objectif consiste à estimer les paramètres $(\theta_k, \alpha_k, \eta_k)$, qui caractérisent les K lignes, à partir de la solution du problème de minimisation $\hat{\mathbf{x}}$, symétrisée en $m = -M, \dots, -1$. Déterminer les paramètres d'une somme finie de sinusoides est un problème classique d'estimation

spectrale (STOICA, 1993; STOICA et MOSES, 2005). La méthode que nous détaillons ci-après est une extension (RAHMAN et YU, 1987) de la méthode de PRONY (1795). Il existe pléthore de méthodes dérivées de la méthode de Prony, parmi les plus connues les méthodes MUSIC (SCHMIDT, 1986) et root-MUSIC (BARABELL, 1983), ESPRIT (ROY et coll., 1986) ou encore la méthode matrix pencil (HUA et SARKAR, 1990). Nous avons implémenté chacune de ces méthodes, et avons produit une étude comparée².

Décrivons la version améliorée de la méthode de Prony (RAHMAN et YU, 1987), basée sur une propriété d'annihilation (BLU, 2009) et de recherche de vecteurs propres. Soit $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{|I|-1})$ un vecteur complexe, dont les composantes sont :

$$z_i = \sum_{k=1}^K d_k \left(e^{j2\pi f_k} \right)^i, \quad \forall i = 0, \dots, |I| - 1, \quad (7.75)$$

avec $d_k \in \mathbb{C}$, $f_k \in [-1/2, 1/2)$ et $\zeta_k = e^{j2\pi f_k}$. Le polynôme annihilateur est défini par $H(\zeta) = \prod_{l=1}^K (\zeta - \zeta_l) = \sum_{l=0}^K h_l \zeta^{K-l}$ avec $h_0 = 1$, et PRONY (1795) remarqua que pour tout $r = K, \dots, |I| - 1$, on a

$$\sum_{l=0}^K h_l z_{r-l} = \sum_{l=0}^K h_l \left(\sum_{k=1}^K d_k \zeta_k^{r-l} \right) = \sum_{k=1}^K d_k \zeta_k^{r-K} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^K h_l \zeta_k^{K-l} \right)}_{H(\zeta_k)=0} = 0. \quad (7.76)$$

En réarrangeant les éléments z_i dans la matrice de Toeplitz $\mathbf{P}_K(\mathbf{z})$ de dimensions $(|I| - K) \times (K + 1)$ et de rang K comme suit :

$$\mathbf{P}_K(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_K & \cdots & z_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{|I|-1} & \cdots & z_{|I|-K-1} \end{pmatrix},$$

et (7.76) peut se réécrire avec $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_K)$ comme :

$$(\mathbf{z} * \mathbf{h})(r) = 0, \quad \forall r = K, \dots, |I| - 1 \iff \mathbf{P}_K \mathbf{h} = 0.$$

Ainsi la méthode se ramène à chercher un vecteur singulier à droite de la matrice \mathbf{P}_K associé à la valeur singulière zéro, ce qui fournit le vecteur $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_K)$ et donc le polynôme $H(\zeta) = \sum_{l=0}^K h_l \zeta^{K-l}$, dont les racines sont les complexes $\zeta_k = e^{j2\pi f_k}$ et donc $f_k = \arg(\zeta_k)/(2\pi)$. Les amplitudes complexes se retrouvent de même en écrivant (7.75) matriciellement $\mathbf{z} = \mathbf{U} \mathbf{d}$ où $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_K)$ et \mathbf{U} est la matrice de dimensions $|I| \times K$ suivante :

$$\mathbf{U} = \left(\mathbf{a}(f_1) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(f_K) \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j2\pi f_1} & \cdots & e^{-j2\pi f_K} \\ e^{-j2\pi f_1 \times 2} & \cdots & e^{-j2\pi f_K \times 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j2\pi f_1 (|I|-1)} & \cdots & e^{-j2\pi f_K (|I|-1)} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on récupère les amplitudes par une approximation des moindres carrés :

$$\mathbf{d} = (\mathbf{U}^* \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^* \mathbf{z}.$$

Appliquée au colonnes de $\hat{\mathbf{x}}^\sharp$, la procédure, exposée dans (POLISANO et coll., 2016), est la suivante :

2. Rapport et toolbox MATLAB™ disponibles sur ma page web.

Estimation spectrale des paramètres de ligne

- À partir des colonnes $m = 1, \dots, M$:
 1. Calculer les fréquences estimées $\tilde{f}_{m,k} = \arg(\zeta_{m,k})/(2\pi)$, où $(\zeta_{m,k})_k$ sont les racines du polynôme $\sum_{k=0}^K h_{m,k} \zeta^k$ avec $\mathbf{h}_m = [h_{m,0}, \dots, h_{m,K}]^T$ étant les vecteurs singuliers à droite de $\mathbf{P}_K(\tilde{\mathbf{x}}[m, :])$ avec $I = \{0, \dots, H_S - 1\}$, correspondant à la valeur singulière zéro (la plus petite valeur en pratique).
 2. Former la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_m = [\mathbf{a}(\tilde{f}_{m,1}) \cdots \mathbf{a}(\tilde{f}_{m,K})]$, et calculer les amplitudes complexes $\tilde{\mathbf{d}}_m = [\tilde{d}_{m,1}, \dots, \tilde{d}_{m,K}]^T$ en résolvant le système des moindres carrés suivant : $\tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{U}}_m \tilde{\mathbf{d}}_m = \tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{x}}[m, :]$.
 3. Calculer $\tilde{\theta}_{m,k} = \arctan(W \tilde{f}_{m,k}/m)$ à partir de (7.37).
 4. Calculer $\tilde{\alpha}_{m,k} = |\tilde{d}_{m,k}| \cos \tilde{\theta}_{m,k}$.
 5. Calculer $\tilde{e}_{m,k} = \tilde{d}_{m,k}/|\tilde{d}_{m,k}|$.
- Pour $k = 1, \dots, K$:
 6. Trier les fréquences $\tilde{f}_{m,k}$ selon k , et appliquer la même permutation sur les autres tableaux. Calculer la moyenne de tous les angles estimés $\tilde{\theta}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{\theta}_{m,k}$ et des amplitudes $\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{\alpha}_{m,k}$.
 7. Calculer la fréquence $\tilde{\nu}_k$ comme précédemment à partir de $\mathbf{P}_K(\tilde{\mathbf{e}}_k)$ avec $\tilde{\mathbf{e}}_k = (\tilde{e}_{m,k})_m$ et $I = \{-M, \dots, M\}$, ainsi que l'offset horizontal $\tilde{\eta}_k = W \tilde{\nu}_k/(2\pi)$.

Remarque 7.10. Les étapes 6 et 7 sont réalisables dans la mesure où les fréquences $\tilde{f}_{m,k}$ triées sont en correspondance avec les angles $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_k \leq \dots \leq \theta_K$ dans cet ordre, pour tout m , ce qui autorise à calculer la moyenne selon m . Il n'aurait pas été possible de faire de même suivant les lignes $\tilde{f}_{n_2,k} = (\tan(\tilde{\theta}_k)n_2 - \tilde{\eta}_k)/W$ à cause de la relation affine qui ne préserve pas l'ordre, typiquement on peut trouver deux lignes n et n' telles que $\tilde{f}_{n,k_1} \leq \tilde{f}_{n,k_2}$ et $\tilde{f}_{n',k_1} \geq \tilde{f}_{n',k_2}$.

Remarque 7.11. De même le calcul des *offsets* η_k par la méthode de Prony à partir des amplitudes complexes $\tilde{d}_{m,k}$ et non à partir des lignes, est nécessaire pour préserver la correspondance avec les angles estimés $\tilde{\theta}_k$. En effet, si à la place nous avons effectué la méthode de Prony sur les lignes en vue d'extraire les fréquences $\tilde{f}_{n_2,k} = (\tan(\tilde{\theta}_k)n_2 - \tilde{\eta}_k)/W$, non seulement l'estimation n'aurait pas été uniquement déterminée puisque ces fréquences appartiennent à un intervalle de longueur supérieure à 1 : $\tilde{f}_{n_2,k} \in [-(H_S + M)/W, (H_S + M)/W]$, et nous aurions de plus perdu la correspondance entre $\tilde{f}_{n_2,k}$ et les angles $\tilde{\theta}_k$ estimés en amont.

La procédure d'estimation des paramètres est résumée Figure 7.7.

7.4.2 Discussions sur les critères de séparation et de robustesse au bruit

La procédure précédente figurait dans notre travail préliminaire (POLISANO et coll., 2016), mais souffre d'une certaine sensibilité au bruit résiduel. En effet suivant le critère d'arrêt de l'algorithme d'optimisation la solution peut ne pas avoir tout à fait convergé vers la solution exacte, et il subsiste du bruit. S'il est établi que les méthodes de type Prony, en l'absence de bruit, sont

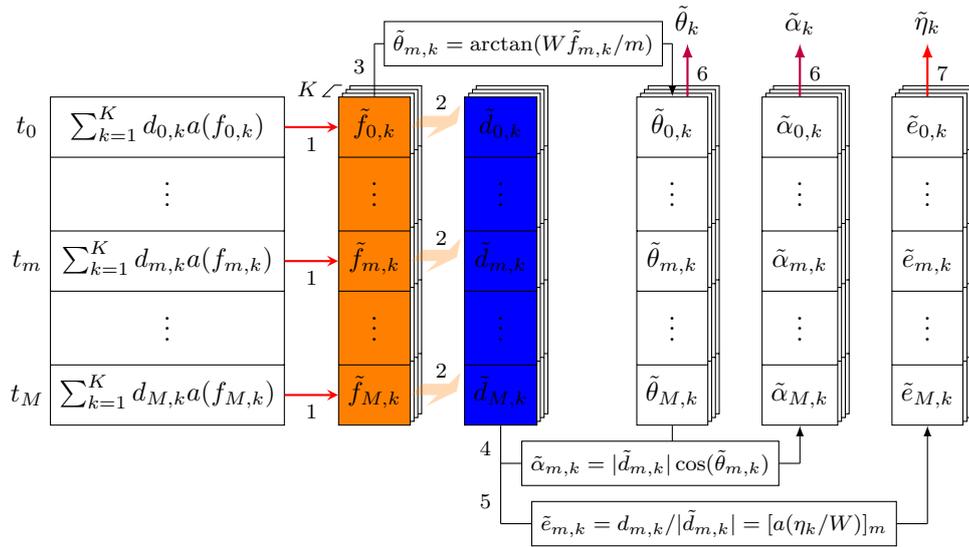


FIGURE 7.7 – Procédure d’extraction des paramètres des lignes $(\theta_k, \alpha_k, \eta_k)$ par une méthode de type Prony.

capables de retrouver les fréquences d’une somme finie de sinusoides avec une précision infinie si le nombre d’échantillons $|I|$ est supérieur à $2K$, il n’en est plus ainsi dans le cas bruité. Il s’ensuit que les estimées $\tilde{f}_{m,k}$ sont frappées d’une incertitude $\epsilon_{m,k}$, c.-à-d. $\tilde{f}_{m,k} = f_{m,k} + \epsilon_{m,k}$, due à l’instabilité du calcul des racines du polynôme en présence de bruit, et alors l’erreur commise sur l’estimation de l’angle $\tilde{\theta}_{m,k} = \arctan(W \tilde{f}_{m,k}/m) = \arctan(W f_{m,k}/m + W \epsilon_{m,k}/m) \approx \theta_{m,k} + W \epsilon_{m,k}/m$, est amplifiée par l’arctangente d’un facteur W/m et fournit de mauvais résultats, en particulier pour de faibles valeurs de m . Ainsi la moyenne $\tilde{\theta}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{\theta}_{m,k}$ ne fournit pas une estimation robuste des angles $\tilde{\theta}_k$.

Nous avons amélioré dans (POLISANO et coll., 2017) la robustesse au bruit en effectuant à la place une régression linéaire des fréquences $\{f_{m,k}\}_{1 \leq m \leq M}$ étant donné que

$$\tilde{f}_{m,k} = \frac{\tan \theta_k}{W} m + \epsilon_{m,k}, \quad (7.77)$$

dans le but d’estimer la pente $\tan \theta_k$. L’erreur $\epsilon_{m,k}$ commise sur l’évaluation des fréquences exactes $f_{m,k}$ n’est pas du même ordre de grandeur selon les valeurs de m . En effet, pour de petites valeurs de m , les fréquences $f_{m,k} = \frac{\tan \theta_k}{W} m$, sont proches les unes des autres sur le cercle unité, et les méthodes d’estimation spectrale échouent à identifier correctement les fréquences lorsque la séparation de celles-ci est trop petite, en particulier lorsque le nombre de fréquences K est grand et que le bruit résiduel est non négligeable. Par conséquent, il est préférable d’effectuer la régression linéaire sur les valeurs de m les plus élevées, de sorte à « espacer » ces fréquences sur le cercle unité.

Remarque 7.12. Il faut également s’assurer que pour les dernières valeurs de m les deux fréquences aux extrémités opposées, disons $f_{m,1} \leq 0$ et $f_{m,K} \geq 0$, ne sont pas trop proches respectivement de $-\pi$ et π , ce qui violerait de nouveau le critère de séparation.

Les paramètres des angles $\tilde{\theta}_k$ sont maintenant estimés de façon plus robuste. On conserve à l’identique la procédure d’estimation des *offsets* $\tilde{\eta}_k$.

Remarque 7.13. Notons qu’il est possible de récupérer les *offsets* $\tilde{\eta}_k$ en appliquant la méthode d’estimation spectrale sur la ligne centrale ($n_2 = 0$) de l’image puisque $\mathbf{l}_0[m] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \eta_k m/W}$ et que l’argument de l’exponentielle complexe est déterminé de manière unique, donnant une meilleure estimation des $\tilde{\eta}_k$ à condition qu’ils soient suffisamment séparés, mais où l’on perdrait

de nouveau la correspondance avec les angles $\tilde{\theta}_k$. Plusieurs méthodes sont envisageables pour recréer ces correspondances, de façon combinatoire en testant tous les appariements possibles et en conservant la combinaison qui minimise l'erreur d'attache aux données ; ou par exemple une heuristique plus rapide consiste à effectuer une transformée de Radon et à lire sur le sinogramme la position des pics d'intensité sur les colonnes $\theta = \tilde{\theta}_k$, donnant une estimation certes grossière des $\tilde{\eta}_k$, mais qui permet de reconnecter les estimations fines aux angles $\tilde{\theta}_k$.

Enfin en ce qui concerne les amplitudes c_k , prises comme module des $\tilde{d}_{m,k}$, ce calcul fournissait également un résultat approximatif, puisqu'elles étaient calculées à partir de l'estimée $\tilde{\mathbf{x}}$ dont les amplitudes ont été tronquées à cause du choix du paramètre $c < c^*$ permettant la suppression du bruit. Il est plus approprié d'évaluer les amplitudes à partir des atomes 2-D $\frac{1}{\cos \tilde{\theta}_k} \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_k, \tilde{\eta}_k)$ que l'on forme après estimation des angles $\tilde{\theta}_k$ et *offsets* $\tilde{\eta}_k$, puis d'effectuer une méthode des moindres carrés sur l'image bruitée $\tilde{\mathbf{y}}$:

$$(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_K) = \arg \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_K} \left\| \sum_{k=1}^K \alpha_k \hat{\mathbf{I}}_k - \tilde{\mathbf{y}} \right\|^2, \quad \hat{\mathbf{I}}_k = \mathbf{A} \cdot \frac{1}{\cos \tilde{\theta}_k} \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_k, \tilde{\eta}_k). \quad (7.78)$$

La nouvelle procédure est donc la suivante :

Estimation spectrale des paramètres de ligne

- À partir des colonnes $m = 1, \dots, M$:
 - Calculer $\tilde{f}_{m,k} = \arg(\zeta_{m,k})/(2\pi)$, où $(\zeta_{m,k})_k$ sont les racines du polynôme $\sum_{k=0}^K h_{m,k} \zeta^k$ avec $\mathbf{h}_m = [h_{m,0}, \dots, h_{m,K}]^T$ étant un vecteur singulier de $\mathbf{P}_K(\tilde{\mathbf{x}}[m, :])$ avec $I = \{0, \dots, H_S - 1\}$, correspondant à la valeur singulière zéro (la plus petite en pratique).
- Pour $k = 1, \dots, K$:
 - Effectuer une régression linéaire sur les fréquences $\{\tilde{f}_{m,k}\}_m$ (7.77) afin d'estimer $\tilde{\theta}_k$.
- À partir des colonnes $m = 1, \dots, M$:
 - Former la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_m = [\mathbf{a}(\tan \tilde{\theta}_1 m/W) \cdots \mathbf{a}(\tan \tilde{\theta}_K m/W)]$, et calculer les amplitudes complexes $\tilde{\mathbf{d}}_m = [d_{m,1}, \dots, d_{m,K}]^T$ en résolvant le système des moindres carrés suivant :

$$\tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{U}}_m \tilde{\mathbf{d}}_m = \tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{x}}[m, :].$$
- Pour $k = 1, \dots, K$:
 - Calculer la fréquence $\tilde{\nu}_k$ avec Prony à partir de $\mathbf{P}_K(\tilde{\mathbf{e}}_k)$ avec $\tilde{\mathbf{e}}_k = (\tilde{e}_{m,k})_m$ et $\tilde{e}_{m,k} = \tilde{d}_{m,k}/|\tilde{d}_{m,k}|$ pour $I = \{-M, \dots, M\}$, ainsi que l'*offset* horizontal $\tilde{\eta}_k = W\tilde{\nu}_k/(2\pi)$.
 - Déterminer les amplitudes $\tilde{\alpha}_k$ par débiaisage comme expliqué en (7.78).

7.4.3 Expériences numériques

On considère une image de taille $W = H = 65$ relativement petite, ce qui d'une part limite le temps de calcul, et d'autre part montre l'intérêt de la méthode en cherchant à reconstruire de manière exacte des lignes dans une image basse résolution (en fréquence et en nombre de pixels). On prend en compte trois lignes de paramètres : $(\theta_1, \eta_1, \alpha_1) = (-\pi/5, 0, 255)$, $(\theta_2, \eta_2, \alpha_2) = (\pi/16, -15, 255)$ et $(\theta_3, \eta_3, \alpha_3) = (\pi/6, 10, 255)$.

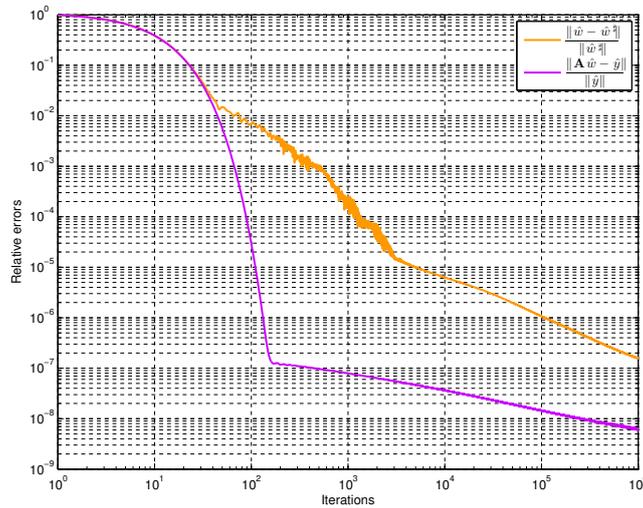


FIGURE 7.8 – Décroissance des erreurs relatives $\frac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}^\sharp\|_{\mathcal{X}}}{\|\widehat{\mathbf{x}}^\sharp\|_{\mathcal{X}}}$ et $\frac{\|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}}{\|\widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}}$ en fonction du nombre d'itérations en échelle log-log pour la première expérience.

Expérience n°1 : cas d'un noyau de flou sans bruit

La première expérience consiste à reconstruire ces lignes lorsqu'elles sont convoluées par une gaussienne de variance κ et en l'absence de bruit. Illustrons la méthode avec $\kappa = 1$ (Figure 7.9c). L'algorithme d'optimisation est lancé avec 10^6 itérations. Les erreurs relatives entre la solution estimée et la solution exacte (visible Figure 7.6) en Fourier $\frac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}^\sharp\|_{\mathcal{X}}}{\|\widehat{\mathbf{x}}^\sharp\|_{\mathcal{X}}}$, et entre l'image de la solution par l'opérateur \mathbf{A} et l'image dégradée $\frac{\|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}}{\|\widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}}$, sont représentées au cours de l'exécution de l'algorithme sur la Figure 7.8. Quant à la seconde étape d'estimation des paramètres, les erreurs relatives entre les paramètres exacts des lignes et les estimés sont indiquées dans la première colonne du Tableau 7.1, où $\Delta_{\theta_i}/\theta_i = |\theta_i - \widehat{\theta}_i|/|\theta_i|$, $\Delta_{\alpha_i}/\alpha_i = |\alpha_i - \widehat{\alpha}_i|/|\alpha_i|$ et $\Delta_{\eta_i} = |\eta_i - \widehat{\eta}_i|$. Bien que l'algorithme soit lent à atteindre une grande précision, nous insistons sur le fait que la convergence vers la solution exacte $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$ est garantie quand les lignes ne sont pas trop proches les unes des autres. Au bout des 10^6 itérations, et après estimation spectrale des paramètres, la précision atteinte sur ces derniers est de l'ordre de 10^{-7} , ce qui valide la détection sous-pixelique des lignes et permet de reconstruire les lignes de manière exacte comme en Figure 7.9d.

De même avec un flou important ($\kappa = 8$), les lignes diffractées étant représentées Figure 7.9b, l'algorithme lancé sur 10^5 itérations converge vers la solution exacte, et conduit à une erreur d'estimation des paramètres de l'ordre de 10^{-4} (deuxième colonne du Tableau 7.1).

Expérience n°2 : cas bruité

On réitère ensuite l'expérience en présence d'un bruit fort ($\zeta = 200$), où l'image des trois lignes dégradées est illustrée Figure 7.9a. L'algorithme est très lent à converger vers la solution exacte, toutefois la plus grosse partie du débruitage s'effectue dès les premières centaines d'itérations, si bien qu'au bout de quelques secondes les lignes nous apparaissent visuellement débarrassées du bruit, et ne pouvant distinguer à l'oeil nu des différences avec la Figure 7.9c si on ré-applique à la solution $\widehat{\mathbf{x}}$ l'opérateur de flou \mathbf{A} et une transformée de Fourier horizontale inverse. Par exemple en prenant $c = 700$, il suffit de $2 \cdot 10^3$ itérations pour supprimer le bruit, et l'erreur d'estimation des paramètres est de l'ordre de 10^{-2} (troisième colonne du Tableau 7.1) précision pour laquelle nous ne distinguons sensiblement aucune différence entre la ligne reconstruite et la ligne exacte Figure 7.9d.

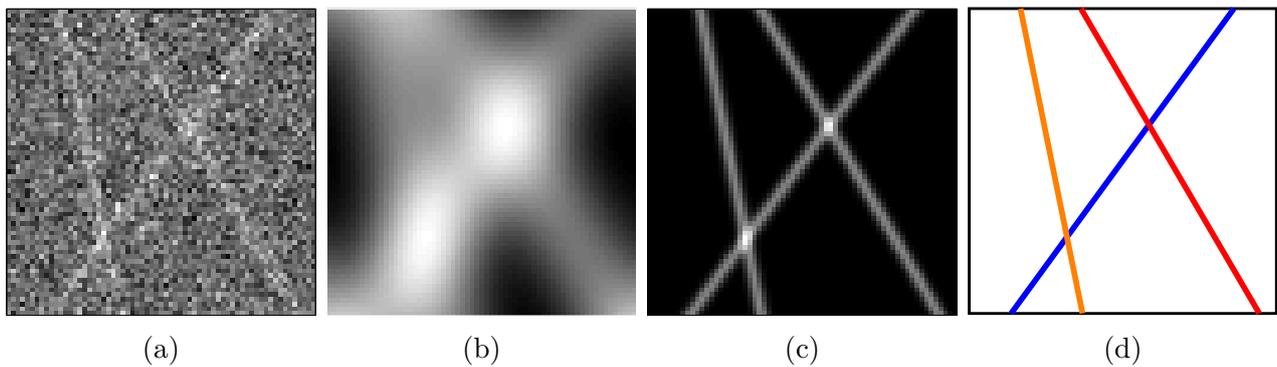


FIGURE 7.9 – (a) Image dégradée \hat{y} avec flou ($\kappa = 1$) et bruit fort ($\zeta = 200$), (b) Image dégradée \hat{y} avec flou ($\kappa = 8$), (c) Image débruitée, et (d) reconstruction des lignes exactes.

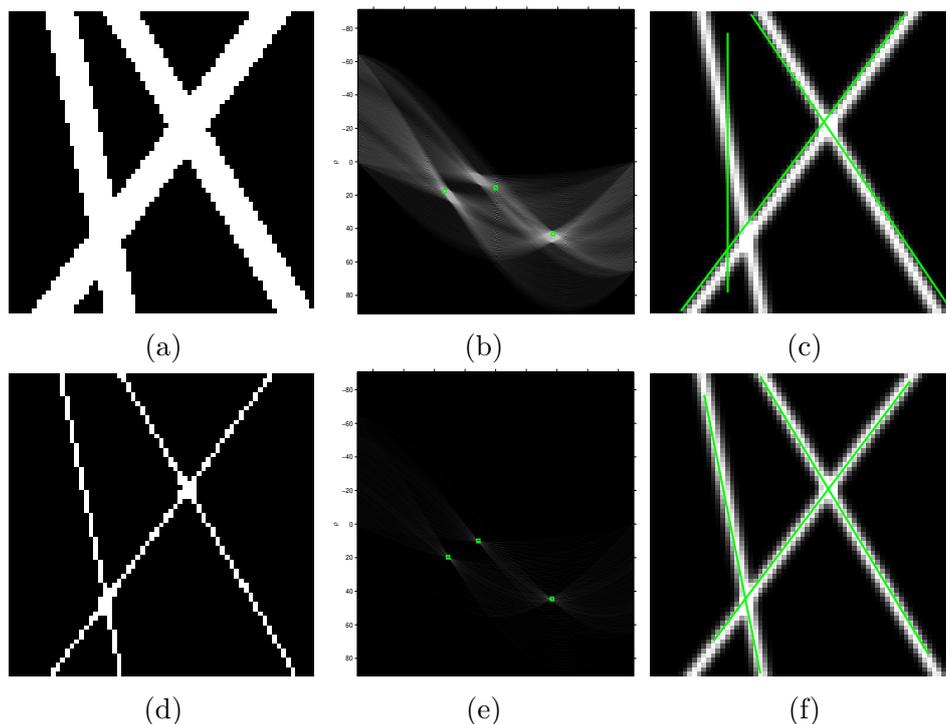


FIGURE 7.10 – (a) Binarisation de \mathbf{b}^\sharp , (d) Version binaire seuillée (ou squelettisée) de \mathbf{b}^\sharp , (b)-(e) Espace de Hough correspondant et estimation des pics, (c)-(f) Lignes estimées superposées à \mathbf{b}^\sharp .

Comparaison avec les transformées de Hough et de Radon

— *Comparaison avec la transformée de Hough dans le cas non bruité*

La transformée de Hough est bien adaptée pour le problème de la détection de lignes dans les images, qu'elle convertit en un problème de détection de pics dans un espace de paramètres, comme nous l'avons exposé à la section 4.4.2. La transformation étant généralement réalisée sur une image binaire suite à un pré-traitement par un détecteur de contours ou un seuillage de la luminance. Dans nos exemples de lignes convoluées, cette étape de pré-traitement n'est pas pertinente en raison de l'épaisseur que possède ces lignes floues. Pour le détecteur de contours cela créerait davantage de lignes qu'il y en a, et quant au seuillage de la luminance (effectué par la fonction MATLAB™ `IM2BW`) que l'on peut visualiser Figure 7.10a, le résultat obtenu après transformée de Hough et détection de pics Figure 7.10b et 7.10c, montre que l'estimation des lignes échoue, soit en raison de l'épaisseur importante de la zone du pic, soit en raison d'artefacts qui avaient été en partie traités par TAO et EADES (2005).

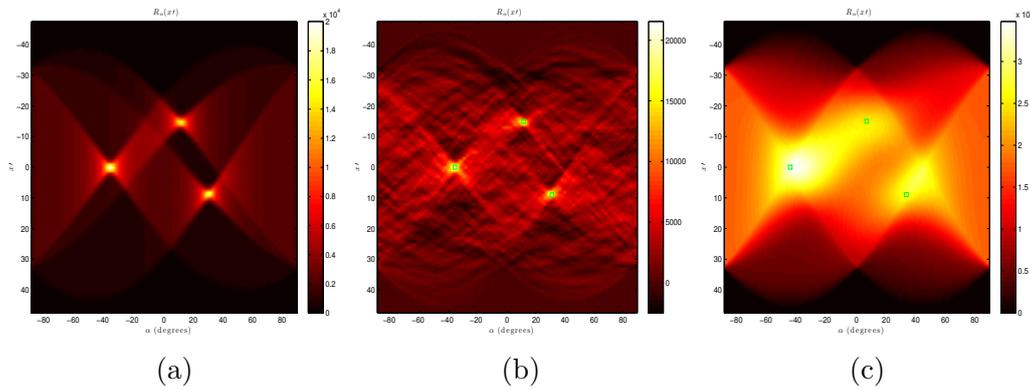


FIGURE 7.11 – Espace de Radon pour (a) l’expérience 1 avec $\kappa = 1$, (b) l’expérience 2 avec $\kappa = 1$ et $\zeta = 200$, (c) l’expérience 1 avec $\kappa = 8$. Les points repérés en vert correspondent aux paramètres exacts des lignes.

Ainsi, de manière à disposer d’une image binaire des lignes avec une moindre épaisseur, il est possible d’appliquer un seuil plus important directement sur les niveaux de gris de l’image, ou bien d’effectuer une squelettisation des lignes (dans le cas où les amplitudes seraient différentes). Le résultat d’un tel seuillage est illustré Figure 7.10d. La détection de pic est maintenant opérante Figure 7.10e, et l’estimation des lignes est acceptable sur la Figure 7.10f, avec une erreur de l’ordre de 10^{-2} pour θ_k , et de 10^{-1} pour η_k . Cette précision n’est pas significativement améliorée si on augmente la discrétisation de l’espace de Hough. Ainsi la précision sous-pixellique obtenue par notre algorithme ne peut pas être atteinte par cette méthode. L’autre inconvénient est que cette stratégie n’opère plus dans le cas d’un flou et/ou de bruit important.

— *Comparaison avec la transformée de Radon avec et sans bruit*

La transformée de Radon (*cf.* section 4.4.1) est intimement liée à la transformée de Hough comme esquissé à la section 4.4.3, qui peut être vue comme une « discrétisation » de la transformée de Radon. Cette dernière, bien que moins rapide, se prête donc également bien à la détection de lignes, dans des images facilement exploitables en niveaux de gris et sans obligation de seuillage. De plus, elle ne souffre pas des problèmes d’artefacts mentionnés précédemment. En l’absence de bruit, et pour $\kappa = 1$, la transformée de Radon fournit d’assez bons résultats Figure 7.11a, avec des erreurs d’estimation de l’ordre de 10^{-1} pour η_k , et une meilleure précision que Hough de l’ordre de 10^{-3} pour θ_k . La méthode reste relativement robuste en présence de bruit (Figure 7.11b). Néanmoins le facteur limitant est très clairement l’intensité du flou, qui du fait de l’épaisseur des lignes floutées « étale » également la zone du pic et fournit une médiocre estimation des paramètres (Figure 7.11c). En outre la diminution du pas de discrétisation pour gagner en précision atteint rapidement un plafond comme en témoigne la Figure 7.12. Autrement dit on se heurte inéluctablement à la précision du pixel.

En résumé, la transformée de Radon est dans ce cas d’application plus adaptée que la transformée de Hough à la détection de lignes dégradées. Néanmoins ces deux méthodes sont dépendantes de la résolution, et donc contraintes par une limite discrète qui fixe le niveau de précision atteignable. Au contraire, notre méthode de super-résolution permet potentiellement d’atteindre une précision infinie sur les paramètres en l’absence de bruit, et d’atteindre des précisions en deçà du pixel y compris en présence de bruit.

Expérience n°3 : cas de lignes proches

On considère deux lignes de paramètres proches $(\theta_1, \eta_1, \alpha_1) = (-0.73, -1, 255)$ et $(\theta_2, \eta_2, \alpha_2) = (-0.75, 1, 255)$, qu’il est difficile de distinguer à l’oeil nu. Un tel cas de figure est inextricable

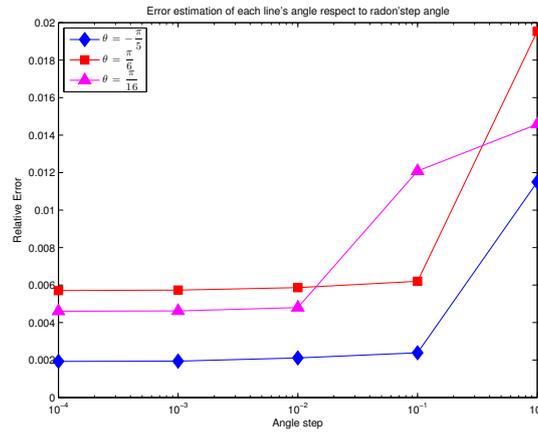


FIGURE 7.12 – Variation de l’erreur relative sur l’estimation des angles en fonction du pas de discrétisation de la transformée de Radon.

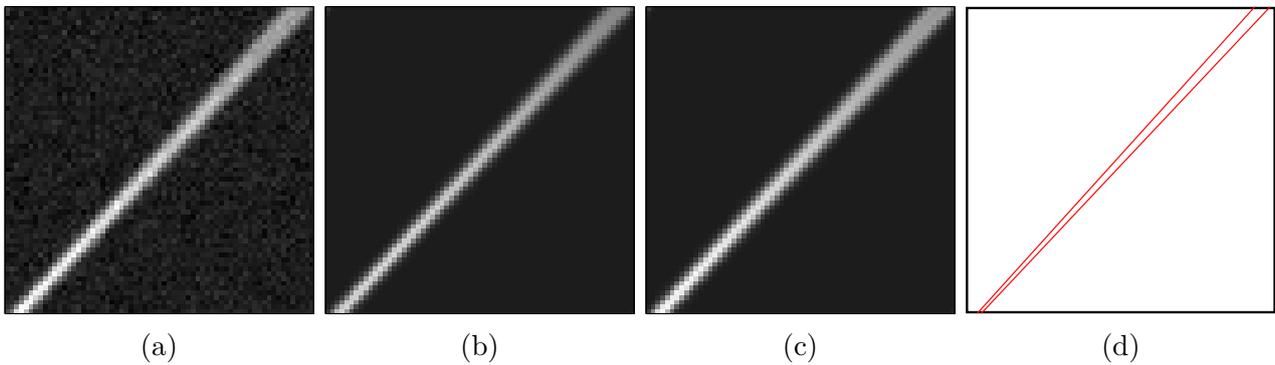


FIGURE 7.13 – (a) Deux lignes proches affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), (b) image débruitée $\mathcal{F}_1^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$, (c) image théorique sans bruit \mathbf{b}^\sharp et (d) estimation des lignes.

avec les méthodes de Hough ou de Radon, les pics y seraient en effet fusionnés. Pour un niveau de bruit modeste ($\zeta = 20$), notre algorithme parvient à parfaitement débruiter l’image (nous n’observons visuellement aucune différence entre la solution en sortie de l’algorithme de la Figure 7.13b et l’image d’origine \mathbf{b}^\sharp de la Figure 7.13c exempt de bruit. De surcroît la procédure d’estimation des paramètres sur l’image débruitée est en mesure de séparer ces deux lignes, comme illustré Figure 7.13d, les paramètres estimés étant $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\eta}_1, \tilde{\alpha}_1) = (-0.725, -0.7, 237)$ et $(\tilde{\theta}_2, \tilde{\eta}_2, \tilde{\alpha}_2) = (-0.753, 0.6, 251)$.

Expérience n°4 : cas de multiples lignes avec différentes intensités

Un exemple plus complet est illustré Figure 7.14a, avec sept lignes d’intensités différentes (dont les paramètres sont donnés dans le Tableau 7.2) affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$). On exécute l’algorithme avec $c = 0.8c^*$, $\tau = 1$, $\sigma = (\tau(M + H_S + 2))^{-1}$, et après seulement 2.10^3 itérations l’image reconstruite est débruitée comme en atteste la Figure 7.14b, indiscriminée avec la vérité terrain Figure 7.14d. L’estimation des lignes est correctement réalisée Figure 7.14d, et les erreurs commises sont de l’ordre de 10^{-2} (cf. Tableau 7.3).

Expérience n°5 : cas du sélecteur d’angles

On dispose de quatre lignes affectées par du flou ($\kappa = 1$) et de telle sorte que deux d’entre elles sont plutôt verticales (c.-à-d. leur angle appartient dans $[-\pi/4, \pi/4]$), tandis que les deux autres sont plutôt horizontales. L’algorithme étendu exposé à la section 7.3.3 fournit le résultat

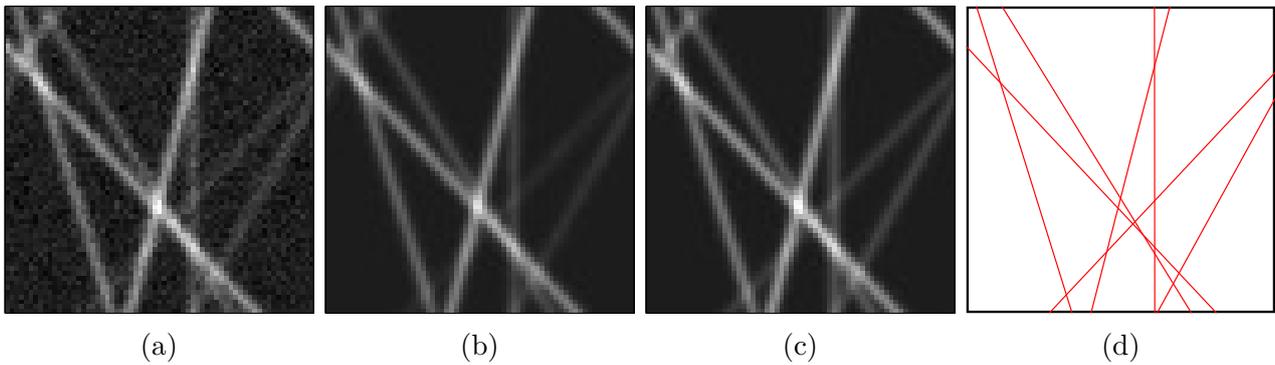


FIGURE 7.14 – (a) Image \mathbf{y} de sept lignes affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), (b) image débruitée $\mathcal{F}_1^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$, (c) image théorique sans bruit \mathbf{b}^\sharp et (d) estimation des lignes.

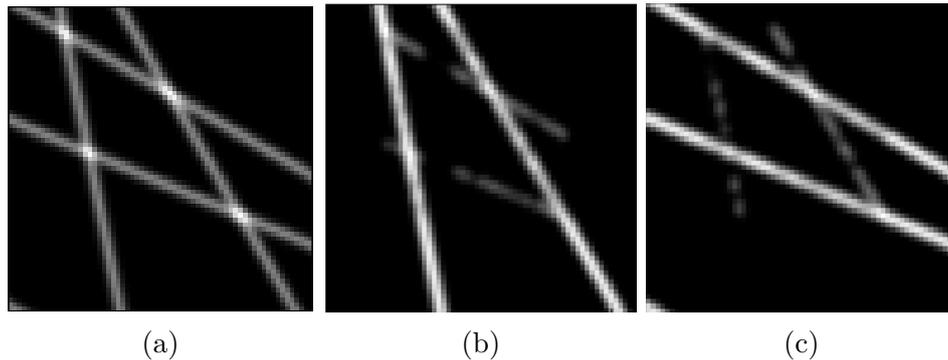


FIGURE 7.15 – (a) Image \mathbf{y} de quatre lignes affectées par du flou ($\kappa = 1$) et du bruit ($\zeta = 20$), deux étant plutôt verticales (angle dans $[-\pi/4, \pi/4]$) et les deux autres plutôt horizontales, (b) image \mathbf{b}_1 reconstruite, (c) image \mathbf{b}_2 reconstruite.

de la Figure 7.15. Il parvient à agir comme sélecteur d'angles selon l'horizontalité et la verticalité, avec dans l'image reconstruite \mathbf{b}_1 les lignes plutôt verticales sur la Figure 7.15b, et dans l'image reconstruite \mathbf{b}_2 les lignes plutôt horizontales sur la Figure 7.15c. Malheureusement le temps de calcul de convergence étant démesurément long, l'arrêt de l'algorithme à un temps raisonnable ne permet pas d'observer la séparation complète des lignes horizontales vs. verticales, il subsiste une trace de leur présence dans les deux images \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 . Ceci étant le principe de séparation est constaté et tend à se réaliser au fil des itérations, ce qui valide la procédure présentée à la section 7.3.3.

Expérience n°6 : cas de l'inpainting

On considère des lignes occultées par un masque \mathbf{M} tel que décrit dans la section 7.3.4. Dans la Figure 7.16 on occulte une portion de la ligne floutée ($\kappa = 1$) en appliquant un masque carré \mathbf{M} en son milieu. On exécute l'algorithme d'optimisation, et on observe Figure 7.16a-7.16d, l'évolution de la reconstruction à $n = 2 \cdot 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$ itérations. On constate que la méthode est en mesure de reconstruire la portion de ligne occultée grâce à l'information disponible hors du masque et des contraintes d'optimisation liées à la structure de ligne. On visualise de même Figure 7.16e-7.16h le procédé de « diffusion » de l'information au sein de la zone occultée en Fourier. Deux autres simulations sur cette ligne ont été effectuées Figure 7.17 : (a) avec un masque de taille moyenne occultant la partie inférieure de la ligne, et la reconstruction est plutôt bonne en (b) avec une sensible apodisation dans la zone occultée ; (c) avec un masque de grande taille occultant la quasi-totalité de la ligne, et dont la reconstruction s'avère plus lente et difficile. Le même type d'expérience est menée pour une image contenant deux et trois lignes Figure 7.18a et 7.18c, avec des masques consécutifs, et dont les reconstruc-

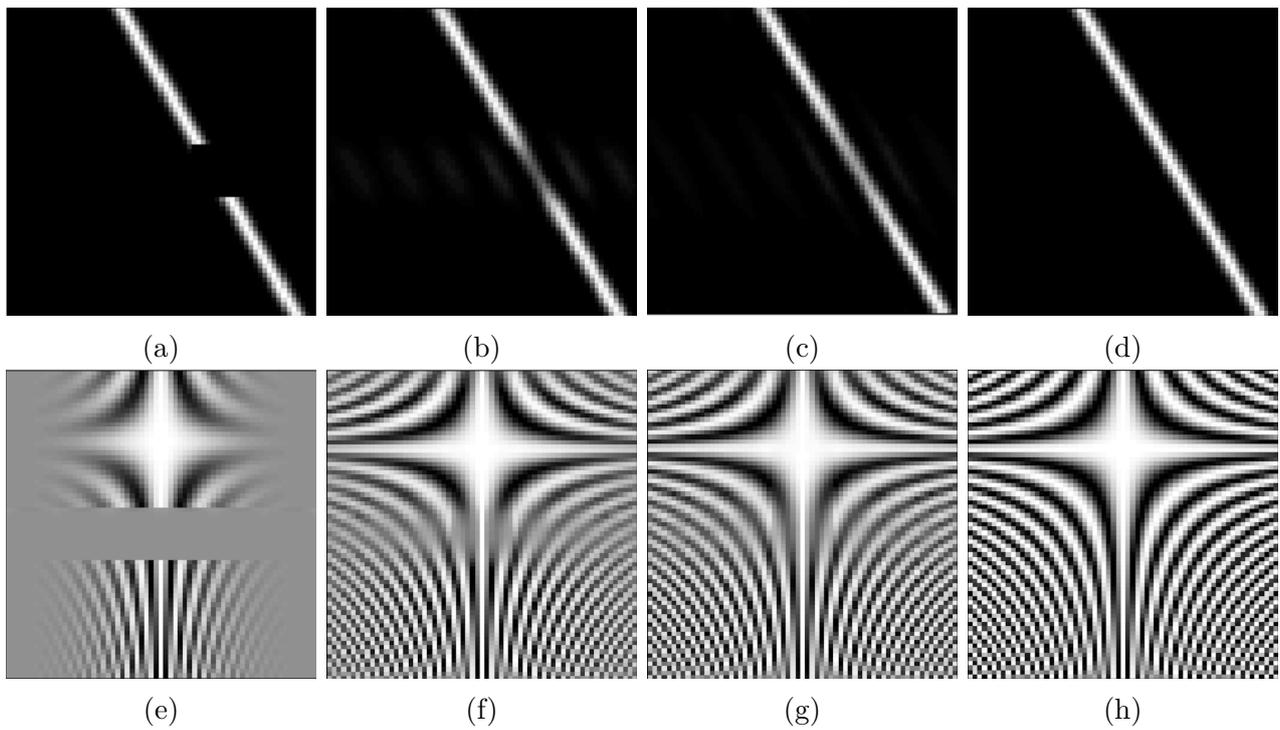


FIGURE 7.16 – (a) Une ligne floutée avec $\kappa = 1$ et occultée par un masque, (b) visualisation de la reconstruction \mathbf{b} par *inpainting* à 2000 itérations, (c) à 10 000 itérations, (d) à convergence. Vue de la reconstruction de $\hat{\mathbf{x}}$ en Fourier.

tions respectives 7.18b et 7.18d sont réussies. Enfin un dernier exemple est illustré Figure 7.19 avec un masque dont les entrées binaires ont été tirées aléatoirement, et la méthode parvient à reconstituer les lignes.

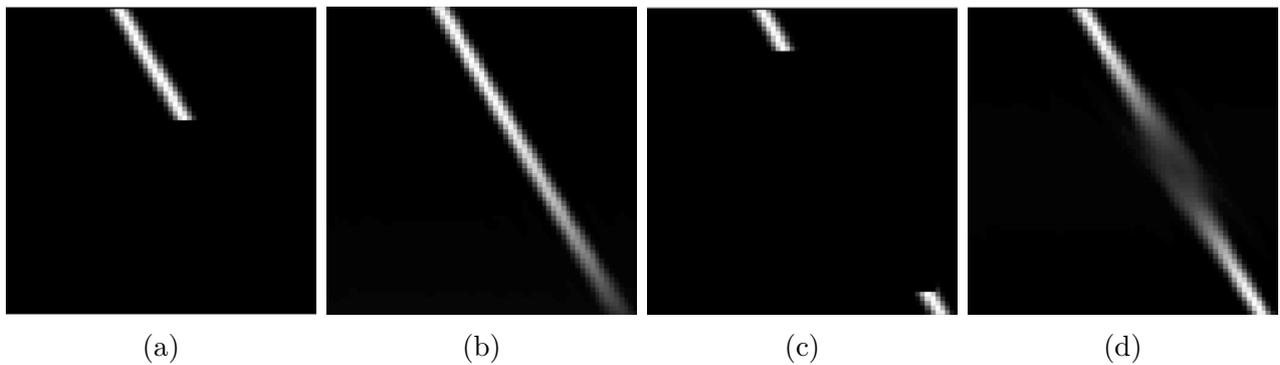


FIGURE 7.17 – (a)-(b) *Inpainting* avec un masque de taille moyenne et sa reconstruction ; (c)-(d) de même avec un masque de grande taille occultant pratiquement toute la ligne.

TABLEAU 7.1 – Erreurs relatives de l'estimation des paramètres des lignes

	Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
Δ_θ/θ	$(10^{-7}, 3.10^{-6}, 7.10^{-7})$	$(10^{-2}, 6.10^{-2}, 9.10^{-2})$	$(6.10^{-7}, 9.10^{-5}, 8.10^{-6})$
Δ_α/α	$(10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7})$	$(10^{-2}, 9.10^{-2}, 2.10^{-1})$	$(4.10^{-5}, 2.10^{-5}, 2.10^{-5})$
Δ_η	$(4.10^{-6}, 7.10^{-6}, 7.10^{-6})$	$(5.10^{-2}, 4.10^{-2}, 3.10^{-2})$	$(5.10^{-5}, 10^{-4}, 3.10^{-4})$

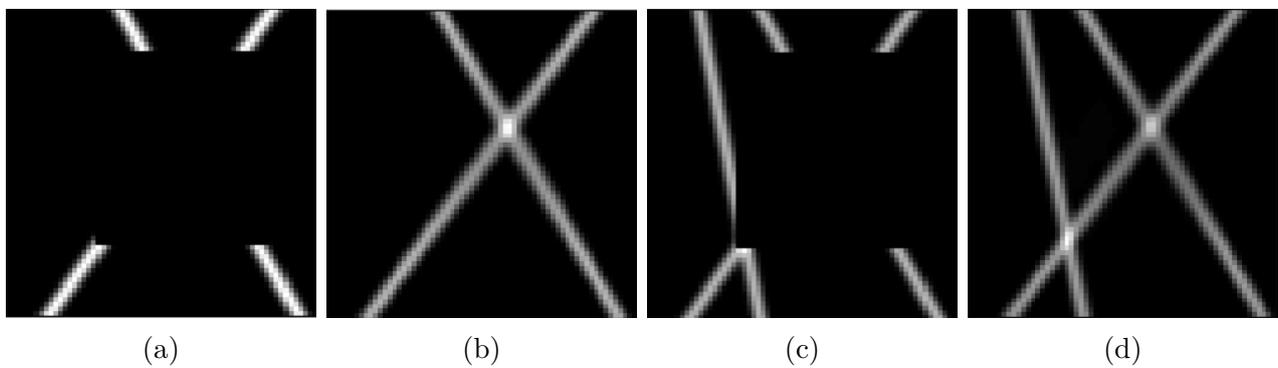
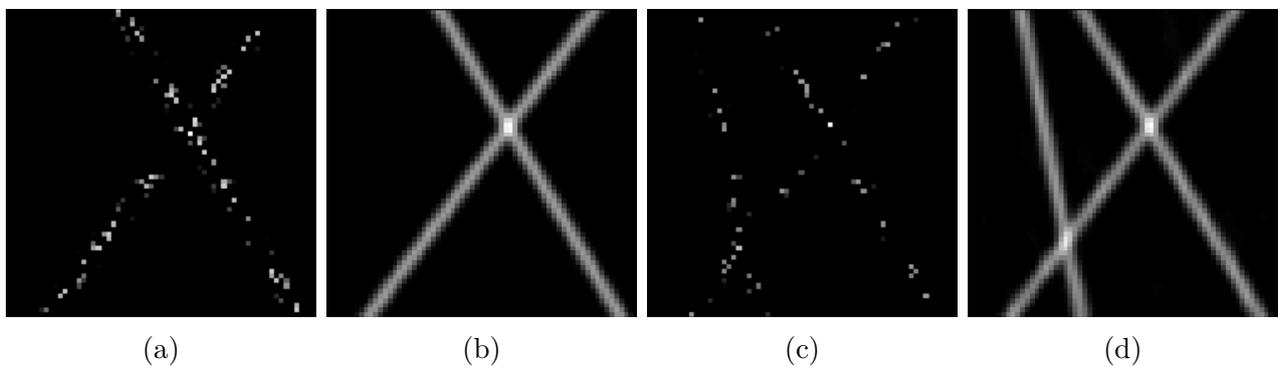
FIGURE 7.18 – (a)-(b) Deux lignes occultées par un masque de taille importante et leur reconstruction par *inpainting*; (c)-(d) de même avec trois lignes.

FIGURE 7.19 – (a)-(b) Deux lignes occultées par un masque aléatoire de pixels et leur reconstruction; (c)-(d) de même avec trois lignes.

TABLEAU 7.2 – Angles, *offsets* et amplitudes des sept lignes

θ_k	-0.75	-0.5	-0.25	10^{-3}	0.3	0.55	0.75
η_k	15	25	2	7	-20	-5	-10
α_k	60	80	255	100	180	120	240

TABLEAU 7.3 – Erreurs relatives de l'estimation des paramètres des lignes

$\Delta\theta$	1.10^{-2}	2.10^{-2}	1.10^{-3}	2.10^{-3}	5.10^{-3}	5.10^{-3}	1.10^{-3}
$\Delta\eta$	5.10^{-1}	7.10^{-2}	4.10^{-2}	1.10^{-1}	1.10^{-2}	2.10^{-2}	1.10^{-2}
$\Delta\alpha/\alpha$	4.10^{-2}	5.10^{-2}	5.10^{-3}	4.10^{-2}	6.10^{-3}	1.10^{-2}	4.10^{-3}

7.5 Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode de reconstruction de lignes 2-D dégradées, par une approche de super-résolution convexe. À partir d'hypothèses raisonnables sur les fonctions décrivant le comportement d'une PSF pré-déterminée, nous avons modélisé en détail l'opérateur de dégradation (flou) des distributions représentant les lignes exactes, ainsi que le procédé d'échantillonnage pour lequel nous soulignons qu'aucune approximation discrète ne fut faite en vertu de ces hypothèses. Il s'agissait alors de retrouver les lignes exactes à partir d'une image discrète dégradée par cet opérateur, ce qui est un problème inverse, qui en présence d'un bruit additif se ramène à la minimisation d'une norme quantifiant l'attache aux données.

Ce problème mal posé nécessitait la connaissance d'*a priori* supplémentaires pour fonctionner, comme la structure particulière des objets que l'on cherche à reconstruire. Nous avons donc formulé un problème d'optimisation *sous contraintes*, où les contraintes traduisaient le fait que l'on recherche une superposition de lignes dans l'image. Pour cela, nous avons utilisé un formalisme récent consistant à représenter le signal dans un dictionnaire d'*atomes* continu, de la façon la plus parcimonieuse possible, mesurée par une *norme atomique*. Il aurait été naturel de considérer pour atome une ligne indexée par ses paramètres dans le dictionnaire de façon continue, seulement l'expression de la norme atomique pour ces atomes en 2-D nous ait apparu compliquée à établir.

Plutôt, nous avons considéré que ces lignes pouvaient se voir dans chaque dimension (horizontale et verticale) comme une somme d'impulsions de Diracs, ou de façon équivalente, après une transformée de Fourier dans une direction, comme une somme finie d'exponentielles. L'idée a donc consisté à se ramener au cas 1-D, où l'on traduit dans les contraintes le fait que sur chaque ligne et chaque colonne doit figurer une somme finie d'exponentielles, lesquelles constituent les atomes 1-D. Dans ce dictionnaire, il existe des méthodes pour calculer les normes atomiques, ce qui nous permet de formuler un problème d'optimisation convexe, sous contraintes de minimisation de ces normes sur les lignes et colonnes. Lorsqu'une seule ligne est présente dans l'image, nous en donnons une caractérisation qui assure que la formulation convexe correspond bien à une relaxation ajustée du problème. Dans le cas où plusieurs lignes se superposent, nous n'avons pas de garanties théoriques de convergence de l'algorithme, qui dépend à la fois du niveau de bruit et de séparation des lignes, soulevant déjà beaucoup de questions pour des trains d'impulsion en 1-D.

La procédure de restauration des lignes exactes se décompose alors en deux étapes : une première phase consiste en la résolution du problème d'optimisation convexe, que nous avons effectuée *via* des algorithmes primaux-duaux. Les résultats se sont révélés très bons en pratique, nous avons montré sur plusieurs expérimentations, que ces algorithmes étaient en mesure de débruiter et de déconvoluer les lignes de façon notable. Si à la place on tentait de résoudre indépendamment des problèmes de super-résolution 1-D sur chaque ligne par exemple, alors en

cas de faible séparation, et selon le niveau de bruit, nous assisterions à de mauvaises estimations, fusions d'impulsions, voir apparition de solution composée d'une infinité d'impulsions. Ces cas de figure ne seraient pas si marginaux, puisque susceptible de se produire au voisinage de chaque croisements de lignes. Au contraire, en contraignant l'image sur chaque ligne et chaque colonne, notre méthode a la faculté de conserver la structure globale des lignes tout au long de la minimisation, et ainsi de les débruiter et les déconvoluer sans en altérer la structure.

La seconde phase consiste à partir de la solution de l'algorithme délivrant la version restaurée des lignes, à savoir les sommes finies d'exponentielles (sans flou ni bruit) dans chacune des directions, d'extraire les fréquences qui les composent de sorte à retrouver les paramètres des lignes (angle, ordonnée à l'origine et intensité) encodée dans ces fréquences. Pour cela, nous avons recours à des méthodes de type Prony capables d'extraire ces informations d'une somme finie d'exponentielles. Nous montrons que lorsque la première phase fournit une solution correctement débruitée, et dont les lignes ne sont pas trop proches les unes des autres, l'estimation des paramètres par ces méthodes fournit d'excellents résultats et mène à la détection de précision sous-pixellique désirée, auxquelles les méthodes usuelles basées sur la transformée de Hough ou de Radon ne peuvent prétendre.

Limites de la méthode

La principale limite de la méthode exposée, réside dans la lente convergence de l'algorithme vers une solution complètement débruitée. Ainsi en arrêtant l'algorithme après un temps raisonnable d'exécution, il se trouve qu'un bruit résiduel subsiste, et par conséquent la méthode de Prony employée à la deuxième phase qu'on applique à chaque colonne, peut ne plus être stable et fournir des estimations erronées. Nous avons implémenté d'autres méthodes plus élaborées comme MUSIC, ESPRIT, Matrix pencil, ..., qui dans certains cas améliorent la sensibilité de l'estimation. On pourrait préférer aux méthodes paramétriques de cette deuxième phase une nouvelle minimisation de type LASSO, dont des travaux récents ([DENOYELLE et coll., 2015](#)) ont établi des critères de reconstruction portant sur la séparation versus niveau de bruit. Malheureusement ils s'appliquent à des amplitudes positives, ce dont nous ne disposons pas sur les colonnes où l'on effectue l'estimation spectrale sur des exponentielles avec phases.

Ainsi, quelle que soit la méthode, la question de la séparation de fréquences proches reste problématique. On sent bien qu'il manque dans cette deuxième phase d'estimation paramétrique la prise en compte de la structure 2-D de ces exponentielles. Nous traitons de façon indépendante des colonnes dont les fréquences des exponentielles complexes qui les composent sont proportionnelles entre elles. Il faudrait exploiter ces relations de dépendance pour rendre l'estimation plus robuste.

Enfin une dernière limite prend source dans la périodicité des lignes reconstruites, dont il s'agit de se défaire.

Perspectives

- Pour supprimer la périodicité, il suffirait de considérer une image dupliquée, deux fois plus grande (ou quatre fois si on se place dans le cas de lignes d'inclinaison quelconque), d'effectuer la reconstruction puis d'extraire la zone centrale de la taille d'origine. Seulement en traitant des images plus grandes, on augmente d'autant le temps de calcul, ce qui comme on l'a vu pose problème pour atteindre une convergence suffisante.
- Une première chose simple consisterait donc à améliorer la vitesse d'exécution du programme, ce qui peut en partie être réalisé en le réécrivant en C/C++, et en parallélisant à

chaque itération les opérations effectuées sur toutes les lignes et toutes les colonnes (impliquant chacune une [SVD](#)). De préférence il serait souhaitable de reformuler différemment le problème d'optimisation afin d'accélérer sa convergence intrinsèque. Peut-être est-ce réalisable en étudiant la formulation duale, qui s'avère parfois utile pour établir des garanties de convergence, et pour traiter la positivité des matrices Toeplitz de façon efficace par le biais de [FFT](#).

- Concernant la deuxième phase d'extraction des fréquences, on notera au préalable que nous avons considéré que le nombre K de lignes était connu (contrairement au problème d'optimisation de la première phase qui y est aveugle). Cela dit, on pourra facilement employer des variantes des méthodes utilisées dans le cas où K est inconnu ([POTTS et TASCHE, 2013](#)).
- Par ailleurs nous avons effectué, pour nous prémunir dans une certaine mesure d'une séparation minimale trop faible, une régression linéaire des fréquences qui débutait à un indice de colonne m suffisamment grand, c'est-à-dire tel que les K fréquences $(f_{m,k})_k$ soient suffisamment « espacées ». Ce procédé qui s'apparente à un « zoom » semble lié aux travaux de ([BATENKOV, 2015](#)), qui traitent effectivement la méthode de Prony dans le cas d'un cluster de fréquences proches par une décimation, et qui pourraient potentiellement améliorer la robustesse de la détection.
- Il pourrait être intéressant d'essayer également de résoudre le problème de correspondance des angles avec les *offsets* dès lors que l'on travaille sur les lignes plutôt que sur les colonnes (Remarque [7.11](#)). Car alors nous disposerions de méthodes de super-résolution non paramétriques ([DENOYELLE et coll., 2015](#)) qui pourraient s'appliquer sur ces lignes où les exponentielles sont sans phase, donc d'amplitudes positives.
- Enfin surtout il faudrait étudier une possibilité de prendre en compte la structure 2-D dans son ensemble pour obtenir une estimation robuste des paramètres. Il existe des procédures d'estimation spectrale 2-D, mais s'appliquant à la détection d'impulsions ou exponentielles 2-D ([SACCHINI et coll., 1993](#); [SAHNOUN et coll., 2016](#)). Seulement dans notre cas la structure est plus complexe dans la mesure où l'argument des exponentielles varie en (n_2, m) comme une hyperbole (équation [\(7.8\)](#) et Figure [7.6](#)). Une piste à approfondir consisterait à regarder si l'on peut à partir des lignes, se ramener à une détection d'impulsions 2-D, par exemple au travers de la transformée de Radon qui envoie des lignes sur des points.
- Une dernière piste d'étude consisterait à appliquer la super-résolution 2-D de lignes à l'image de la puissance spectrale (Figure [7.20b](#)) d'une texture unidirectionnelle (Figure [7.20a](#)). En effet, plus une texture est orientée, plus elle s'approche d'un voisinage simple (*cf.* section [4.3.1](#)) et plus son spectre tend vers une mesure de Diracs le long d'une ligne (Figure [7.20](#) et [4.3](#)). Pour un voisinage simple de dimension finie, on montre que le spectre est convolué par un noyau, ce qui donne une certaine épaisseur à la ligne. On pourrait ainsi envisager une mise en correspondance des deux parties en appliquant notre méthode de super-résolution à ce type de textures.

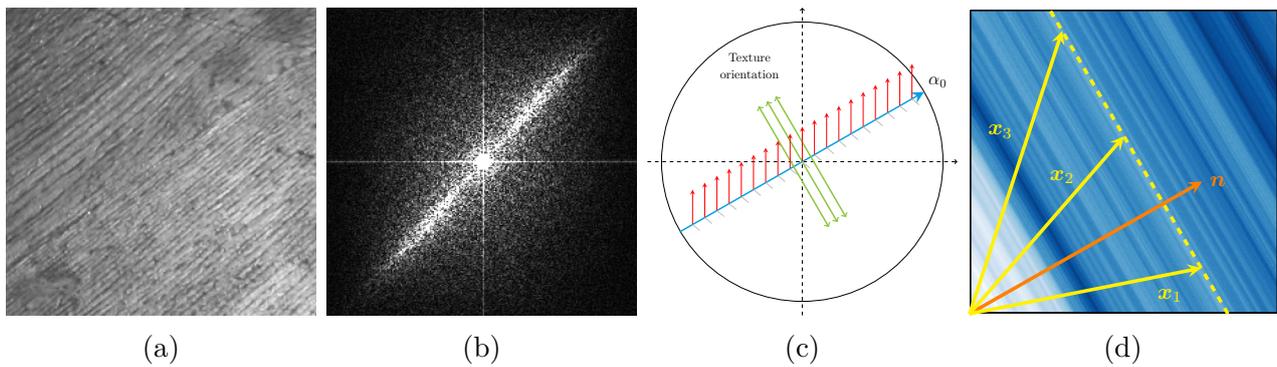


FIGURE 7.20 – (a) Texture de bois orientée, (b) puissance spectrale correspondante, (c) cas limite en distribution d'un champ élémentaire et (d) voisinage simple.

7.6 Références

- BARABELL, A. 1983, «Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms», dans *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'83.*, vol. 8, IEEE, p. 336–339. [288](#)
- BATENKOV, D. 2015, «Accurate solution of near-colliding prony systems with fixed structure via decimation and homotopy continuation», *preprint*. [301](#)
- BAUSCHKE, H. H. et P. L. COMBETTES. 2011, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer Science & Business Media. [282](#)
- BLU, T. 2009, «The generalized annihilation property : A tool for solving finite rate of innovation problems», dans *SAMPTA '09*, p. Special-Session. [288](#)
- BOYD, S. et L. VANDENBERGHE. 2004, *Convex optimization*, Cambridge university press. [282](#)
- CHAMBOLLE, A. et T. POCK. 2011, «A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging», *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 40, n° 1, p. 120–145. [283](#)
- COMBETTES, P. L. et J.-C. PESQUET. 2011, «Proximal splitting methods in signal processing», dans *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*, Springer, p. 185–212. [282](#)
- CONDAT, L. 2013, «A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear composite terms», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 158, n° 2, p. 460–479. [277](#), [282](#), [283](#)
- DENOYELLE, Q., V. DUVAL et G. PEYRÉ. 2015, «Support recovery for sparse deconvolution of positive measures», *arXiv preprint arXiv :1506.08264*. [300](#), [301](#)
- HUA, Y. et T. K. SARKAR. 1990, «Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise», *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, n° 5, p. 814–824. [288](#)
- PARIKH, N., S. P. BOYD et coll.. 2014, «Proximal algorithms», *Foundations and Trends in optimization*, vol. 1, n° 3, p. 127–239. [282](#)

- POLISANO, K., L. CONDAT, M. CLAUSEL et V. PERRIER. 2016, «Convex super-resolution detection of lines in images», *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 29 Aug. – 2 Sept. 2016, p. 336–340. 259, 282, 284, 288, 289
- POLISANO, K., L. CONDAT, M. CLAUSEL et V. PERRIER. 2017, «A convex approach to super-resolution and regularization of lines in images», Research report, Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK). URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01599010>. 259, 283, 290
- POTTS, D. et M. TASCHE. 2013, «Parameter estimation for nonincreasing exponential sums by Prony-like methods», *Linear Algebra and its Applications*, vol. 439, n° 4, p. 1024–1039. 301
- PRONY, R. 1795, «Essai experimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures», *Journal de l'Ecole Polytechnique Floréal et Plairial, an III*, vol. Volume 1, cahier 22, p. 24–76. 288
- RAHMAN, M. et K.-B. YU. 1987, «Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction», *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 35, n° 10, p. 1440–1454. 288
- RECHT, B., M. FAZEL et P. A. PARRILO. 2010, «Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization», *SIAM review*, vol. 52, n° 3, p. 471–501. 275
- RECHT, B., W. XU et B. HASSIBI. 2008, «Necessary and sufficient conditions for success of the nuclear norm heuristic for rank minimization», dans *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, IEEE, p. 3065–3070. 275
- ROY, R., A. PAULRAJ et T. KAILATH. 1986, «Esprit—a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise», *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. 34, n° 5, p. 1340–1342. 288
- SACCHINI, J. J., W. M. STEEDLY et R. L. MOSES. 1993, «Two-dimensional Prony modeling and parameter estimation», *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 41, n° 11, p. 3127–3137. 301
- SAHNOUN, S., K. USEVICH et P. COMON. 2016, «Optimal choice of Hankel-block-Hankel matrix shape in 2-D parameter estimation : the rank-one case», dans *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2016 24th European*, IEEE, p. 321–325. 301
- SCHMIDT, R. 1986, «Multiple emitter location and signal parameter estimation», *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 34, n° 3, p. 276–280. 288
- STOICA, P. 1993, «List of references on spectral line analysis», *Signal Processing*, vol. 31, n° 3, p. 329–340. 288
- STOICA, P. et R. MOSES. 2005, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, NJ. 288
- TANG, G., B. N. BHASKAR, P. SHAH et B. RECHT. 2013, «Compressed sensing off the grid», *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 59, n° 11, p. 7465–7490. 269
- TAO, X. et A. EADES. 2005, «Errors, artifacts, and improvements in ebsd processing and mapping», *Microscopy and Microanalysis*, vol. 11, n° 1, p. 79–87. 293

Conclusion et perspectives générales

« Dieu fait le monde en calculant mais ses calculs ne tombent pas juste (Deleuze).
Il y a toujours un reste et dans ce reste c'est l'infini qui s'engouffre jusqu'à faire
exploser les citadelles les plus solides. »

Alain Renaud-Alain¹, *Interfaces et sensorialités* (2003)

LES TRAVAUX DE CETTE THÈSE ont eu pour objet la synthèse et l'analyse de structures orientées, abordant deux volets actifs du traitement mathématique de l'image que sont l'analyse de texture, et l'analyse de la géométrie. Chacun sollicite des domaines, des outils et des méthodes très divers.

La première partie de la thèse a été consacrée à l'élaboration de nouveaux modèles de textures anisotropes, se fondant sur une approche stochastique de la description de la texture. Les apports de la théorie des champs aléatoires nous ont permis de définir deux modèles généraux dont les paramètres contrôlent l'orientation locale : d'une part le **GAFBF**, conçu comme une version localisée de la classe des champs **H-sssi**, au même titre que le champ brownien multifractionnaire est une version localisée du champ brownien fractionnaire; d'autre part le **WAFBF**, qui résulte de la déformation d'un champ **H-sssi**. Le premier est gouverné par une fonction d'anisotropie qui dépend de la position, tandis que le second est déterminé par une fonction de déformation différentiable. Nous avons étudié la structure locale de ces deux familles de champs anisotropes, au moyen du formalisme des champs tangents, et avons fourni des procédures et exemples de simulations, dont les résultats ont été discutés dans la conclusion 5.5.

Après avoir conduit cette démarche de modélisation de champs aléatoires anisotropes, nous nous sommes tournés vers la caractérisation de l'anisotropie, avec pour objectif de répondre aux problèmes soulevés dans l'introduction. En ce qui concerne la définition rigoureuse de l'orientation locale d'un champ aléatoire, nous avons proposé d'adapter la transformée en ondelettes monogènes développée par **OLHEDE et METIKAS (2009)** et **UNSER et coll. (2009)** aux champs **H-sssi**. À partir des coefficients d'ondelettes du champ vus comme variables aléatoires, nous avons calculé leur matrice de covariance appelée tenseur de structure. Nous avons alors montré que l'orientation, définie comme vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre du tenseur de structure, était une quantité intrinsèque au champ **H-sssi**.

Pour la mesure de l'anisotropie, qui fondait l'autre question centrale soulevée dans l'introduction, le tenseur de structure permet de l'évaluer, au travers de ses valeurs propres. La consistance de la notion d'orientation ainsi définie, est confortée par les divers exemples de champs aléatoires pour lesquels nous avons explicitement calculé l'orientation locale et la mesure de

1. Là où nous cherchions au Chapitre 2 une définition *technique* de la *texture*, le philosophe Renaud-Alain questionne le concept d'*image numérique* « dans une approche plus globale de l'image à la fois anthropologique, esthétique et épistémologique. Sur la base d'alliance ou plutôt d'alliage organique de la pensée de l'Information (lorsque, comme dit Deleuze, « les forces de l'homme composent avec le silicium ») viennent aujourd'hui s'instituer à la fois une nouvelle formation de savoir (la raison digitale) et une nouvelle formation de culture : le « tout numérique ». Ce changement de paradigme est une affaire trop sérieuse pour être abandonnée aux seuls informaticiens et mathématiciens, il doit avoir la philosophie qu'il mérite. Injecter dans cet univers le point de vue de l'imaginaire, c'est parler art, culture là où les inerties de l'époque sortent leur revolver quand on les force à s'interroger sur elles-mêmes, quand on refuse les pièges et la myopie inculte du technicisme » (Renaud-Alain).

directionnalité, en fonction des paramètres du modèle. Plus généralement, nous avons relié ces quantités aux statistiques d'ordre 2 de la densité spectrale du champ, établi des connexions avec des résultats de statistiques directionnelles et caractérisé la loi de l'estimateur des orientations. Enfin, nous avons proposé une définition très générale de l'orientation, pour la classe des champs localisables : nous définissons l'orientation locale du champ en un point, comme étant l'orientation de son champ tangent non trivial en ce point, qui se trouve être un champ H -sssi.

Ces contributions ont permis d'apporter une compréhension plus éclairée de la notion d'anisotropie pour les champs aléatoires, en renforçant le cadre théorique, et en ouvrant de nouvelles perspectives pour donner une définition à la transformée de Riesz d'un champ aléatoire. Toutefois, la détection effective de l'anisotropie a encore besoin d'être étayée et validée par d'autres simulations numériques, qui sont en cours d'expérimentation.

Le deuxième volet de la thèse s'est intéressé à la détection de structures géométriques dans une image. Nous nous sommes placés dans le paradigme de la super-résolution. Dans ce contexte, les méthodes exploitent la parcimonie liée à la géométrie de l'objet à reconstruire, couplée à une minimisation ℓ_1 permettant de la favoriser. L'étude de ces méthodes a été intensivement menée pour les signaux 1-D, avec de nombreuses applications. Peu de travaux concernent la super-résolution des signaux 2-D.

C'est dans cette perspective que se sont inscrits nos travaux, dont l'objet a été d'élaborer une méthode de super-résolution de lignes 2-D dans l'image, qui auraient été dégradées par un flou de diffraction et du bruit. Nous avons décomposé celle-ci en deux phases : la première réalisant un problème de minimisation convexe permettant de promouvoir des lignes dans la solution, par minimisation de normes atomiques sur les lignes et les colonnes ; la seconde effectuant sur la solution une estimation spectrale des paramètres des lignes par une méthode paramétrique. Le bon fonctionnement de la méthode est illustré par plusieurs expériences numériques, dans lesquelles l'algorithme est en mesure de restaurer des lignes quand la diffraction et le niveau de bruit sont importants, ou quand une région est occultée (problème d'*inpainting*). Ses faiblesses résident d'une part dans la convergence lente vers la solution exacte ; d'autre part dans la deuxième phase de détection des paramètres, où les méthodes de type Prony appliquées sur les colonnes ne tiennent pas compte de la structure 2-D, et présentent donc de l'instabilité lorsque des lignes sont trop proches et que le bruit n'a pas été complètement supprimé à la première étape. Enfin il serait souhaitable dans le futur de disposer de garanties théoriques de convergence vers la solution exacte, dans la mesure où nous n'avons pas démontré (hors mis pour le cas d'une ligne) que la relaxation convexe était ajustée à une caractérisation de K lignes dans l'image ($K > 1$). Ces travaux constituent *in fine* une preuve de concept, dans laquelle on valide le principe de la super-résolution pour des lignes 2-D, et ouvrent différentes perspectives desquelles on pourrait imaginer concevoir une version super-résolue de la transformée de Hough.

Perspectives générales

Des perspectives propres à chaque partie ont déjà été mentionnées section 5.5 et 7.5. Énumérons quelques autres pistes de recherche pour l'une et l'autre des problématiques, ainsi que d'éventuels ponts à créer entre celles-ci.

Concernant l'analyse de l'anisotropie, nous avons souligné l'importance théorique d'adapter les outils de détection d'orientation locale aux champs aléatoires, et la question de la transformée de Riesz d'un champ reste une question ouverte. Quant à l'analyse des textures résultantes, d'autres stratégies que celles calquées sur UNSER et coll. (2009) semblent possibles. Un descripteur local des images qui apparaît prometteur est le vecteur circulaire harmonique, ou

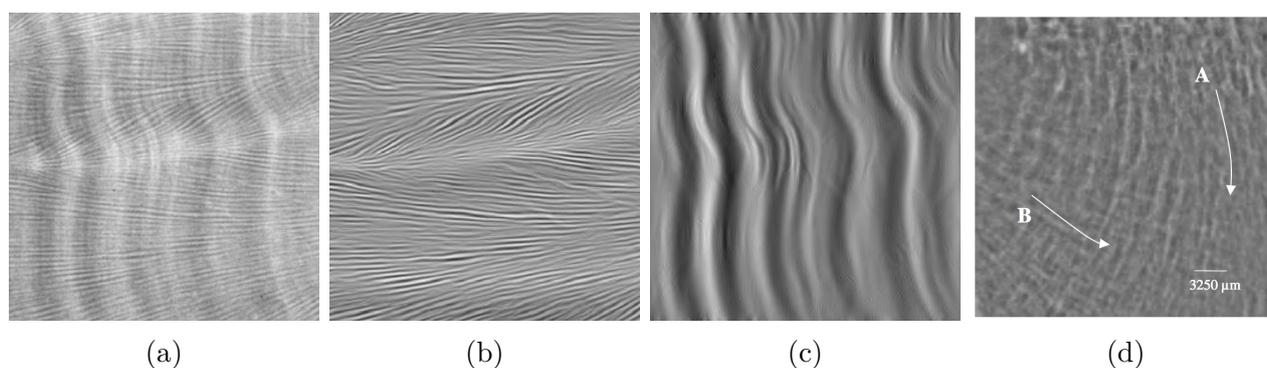


FIGURE 7.21 – (a) Texture de coraux, (b) séparation horizontale, (c) séparation verticale et (d) texture d’os trabéculaire sur laquelle on souhaiterait appliquer le même type de séparation.

Circular Harmonic Vector (CHV), reposant sur les transformées de Riesz d’ordres supérieurs de l’image. Celui-ci décrit les symétries de la structure locale de l’image. Il serait intéressant à ce titre, d’examiner les travaux de [MARCHANT et JACKWAY \(2011, 2013\)](#); [MARCHANT \(2016\)](#), qui ont notamment appliqué ce descripteur à un modèle multi-sinusoïdal décrivant la structure de coraux analysés par rayons X sur la Figure 7.21a. Une méthode de super-résolution y est d’ailleurs incorporée, et l’utilisation d’une base d’ondelettes a permis de séparer l’image en différentes classes de directions comme en témoignent les Figures 7.21b et 7.21c. Dans le même ordre d’idée, les travaux de [CLAUSEL et coll. \(2015\)](#) autour du *synchrosqueezing* en ondelettes monogènes seraient adaptés à cette fin de séparation de signaux. On pourrait envisager d’appliquer ces méthodes aux textures représentant les os trabéculaires, de sorte à séparer d’un côté les trabéculaires longitudinales et de l’autre les transversales. Il serait alors possible d’améliorer l’estimation des indices de dispersion *DLI* et *DTI* introduits par [CHAPPARD et coll. \(2005\)](#) (Figure 4.2b), puisque le spectre de Fourier des images séparées ne serait alors constitué que d’un seul « cône » de fréquences. Une alternative consisterait à modéliser les textures séparées par un champ élémentaire, une déformation de celui-ci (ou tout autre déformation pertinente [FOURNIER \(2017\)](#)), afin d’affiner encore la détection par la caractérisation statistique de l’anisotropie que nous avons menée dans cette thèse. Cette procédure pourrait permettre d’estimer avec plus d’exactitude l’indice de dispersion qui témoigne de la présence ou non d’ostéoporose. Enfin on pourrait imaginer la possibilité de développer un test d’hypothèse pour décider si la texture résultante provient d’un os sain ou malade.

Pour prolonger les perspectives relatives à la super-résolution de lignes 2-D, l’extension à la super-résolution de courbes est naturellement un aspect attrayant que l’on souhaiterait explorer. Une première possibilité serait d’appliquer notre algorithme de minimisation convexe sur des voisinages locaux de la courbe (telle que la trajectoire d’une molécule approchée par une droite). Celui-ci serait en mesure de supprimer du bruit sans dégrader la structure linéaire, et une *PSF* plus faible pourrait être appliquée à l’image solution des lignes restaurée dans le domaine de Fourier, de façon à réduire la diffraction. Bien que l’algorithme soit assez lent dans les exemples que nous avons donnés dans le Chapitre 7, son application à des *patches* de petites dimensions le serait beaucoup moins, ce qui rend l’amélioration des courbes diffractées possible en temps fini. D’autre part nous avons souligné que l’estimation spectrale des paramètres de la seconde étape de notre méthode, serait plus robuste pour la séparation de lignes par la prise en compte de la structure 2-D des exponentielles d’« hyperboles ». Une recherche d’annihilation 2-D est peut-être envisageable. C’est la démarche qui est abordée dans les travaux préliminaires de [ONGIE et JACOB \(2015a,b, 2016\)](#) et qui mérite d’être étudiée.

7.7 Références

- CHAPPARD, C., B. BRUNET-IMBAULT, G. LEMINEUR, B. GIRAUDEAU, A. BASILLAIS, R. HARBA et C.-L. BENHAMOU. 2005, «Anisotropy changes in post-menopausal osteoporosis : characterization by a new index applied to trabecular bone radiographic images», *Osteoporosis international*, vol. 16, n° 10, p. 1193–1202. [307](#)
- CLAUSEL, M., T. OBERLIN et V. PERRIER. 2015, «The monogenic synchrosqueezed wavelet transform : a tool for the decomposition/demodulation of AM–FM images», *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 39, n° 3, p. 450–486. [307](#)
- FOURNIER, J. 2017, «Identification and isotropy characterization of deformed random fields through excursion sets», *arXiv preprint arXiv :1705.08318*. [307](#)
- MARCHANT, R. et P. JACKWAY. 2011, «Generalised Hilbert transforms for the estimation of growth direction in coral cores», dans *Digital Image Computing Techniques and Applications (DICTA), 2011 International Conference on*, IEEE, p. 660–665. [307](#)
- MARCHANT, R. et P. JACKWAY. 2013, «Modelling line and edge features using higher-order riesz transforms», dans *International Conference on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, Springer, p. 438–449. [307](#)
- MARCHANT, R. G. R. 2016, *Local feature analysis using higher-order Riesz transforms*, thèse de doctorat, James Cook University. [307](#)
- OLHEDE, S. C. et G. METIKAS. 2009, «The monogenic wavelet transform», *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, n° 9, p. 3426–3441. [305](#)
- ONGIE, G. et M. JACOB. 2015a, «Recovery of piecewise smooth images from few fourier samples», dans *Sampling Theory and Applications (SampTA), 2015 International Conference on*, IEEE, p. 543–547. [307](#)
- ONGIE, G. et M. JACOB. 2015b, «Super-resolution MRI using finite rate of innovation curves», dans *Biomedical Imaging (ISBI), 2015 IEEE 12th International Symposium on*, IEEE, p. 1248–1251. [307](#)
- ONGIE, G. et M. JACOB. 2016, «Off-the-grid recovery of piecewise constant images from few fourier samples», *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 9, n° 3, p. 1004–1041. [307](#)
- UNSER, M., D. SAGE et D. VAN DE VILLE. 2009, «Multiresolution monogenic signal analysis using the Riesz–Laplace wavelet transform», *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, n° 11, p. 2402–2418. [305](#), [306](#)



Annexes

A.1 Topologies faible

Cette annexe s'appuie sur la référence (Brezis,1983).

A.1.1 Rappels de topologie générale

Étant donné un ensemble Ω et un sous-ensemble \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω), on dit que \mathcal{T} définit une *topologie* sur Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \mathcal{T}$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}, \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$,

(iii) $\forall \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ avec $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}, \forall i \in I, \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$.

Le couple (Ω, \mathcal{T}) est appelé *espace topologique* et les éléments de \mathcal{T} sont appelés les *ouverts* de la topologie. Un sous-ensemble $F \in \mathcal{P}(\Omega)$ est dit *fermé* si son complémentaire dans Ω est un ouvert. La topologie est dite *grossière* si les seuls ouverts de Ω sont l'ensemble vide \emptyset et Ω lui-même, et est dite *discrète* si toutes les parties de Ω sont des ouverts. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω est *convergente* pour la topologie \mathcal{T} s'il existe $x \in \Omega$ vérifiant

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}, \text{ tel que } x \in \mathcal{O}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in \mathcal{O}.$$

Autrement dit, tel que tout ouvert de \mathcal{T} contenant x contienne tous les éléments de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $x_n \rightarrow x$. On dit que l'espace topologique (Ω, \mathcal{T}) est *séparé* si pour tout $x_1 \neq x_2$ il existe $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$ disjoints tels que $x_1 \in \mathcal{O}_1$ et $x_2 \in \mathcal{O}_2$. Un *voisinage* d'un point est une partie de l'espace qui contient un ouvert qui comprend ce point. Soit $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application entre deux espaces topologiques $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$, on dit que f est *continue* en $x_1 \in \Omega_1$ si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_1)$ est un voisinage de x_1 , et qu'elle est continue sur A si elle est continue en chaque point de A .

A.1.2 Topologie la moins fine rendant continue une famille d'applications

Soit X un ensemble, et soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$ on se donne une application $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$. On cherche à munir X d'une topologie qui rende continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i \in I}$, et si possible construire la topologie \mathcal{T} la *moins fine* c.-à-d. avec le minimum d'ouverts (autrement dit la topologie la plus « économique ») qui rende continue toutes les $(\varphi_i)_{i \in I}$. Bien sûr si X est muni de la topologie discrète (tout sous-ensemble de X est ouvert) alors chaque φ_i est continue, mais alors cette topologie est loin d'être économique : pour $\mathcal{O}_i \in Y_i$ un ouvert, alors $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ est nécessairement un ouvert pour la topologie discrète. Lorsque \mathcal{O}_i décrit la famille des ouverts de Y_i , les $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ constituent une famille de sous-ensembles de X , que l'on désigne par la famille $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. La topologie \mathcal{T} est la topologie la moins fine telle que les U_λ soient des ouverts, construite comme suit : on considère d'abord les intersections finies $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \in \Lambda$ finie, qui est une famille de sous-ensembles de X stable par intersections finies ; puis on considère les réunions quelconques des éléments de cette famille, et on vérifie que cette famille \mathcal{T} est stable par réunion quelconque et intersection finie. Muni de cette topologie on vérifie alors que pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X :

$$x_n \rightarrow x \iff \varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x), \quad \forall i \in I.$$

A.1.3 Topologie faible

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, c'est-à-dire un espace topologique dont la topologie naturelle (dite *topologie forte*) est celle qui est engendrée par la métrique (la norme) $\|\cdot\|$ en considérant les boules ouvertes. On note E' son espace dual topologique c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de E^* (le dual algébrique) formé des formes linéaires continues. Soit $f \in E'$, on note $\langle f, x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ le produit scalaire dans la dualité E', E . On désigne par $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit le dual E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} . On peut donc appliquer ce qui précède à $X = E$, $Y_i = \mathbb{R}$ et $I = E'$, pour définir une topologie moins fine sur E , que l'on appelle *topologie faible* :

Définition A.1 (TOPOLOGIE FAIBLE SUR E)

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

En gros, on prend la topologie initiale et on garde le minimum d'ouverts qui laissent continues les applications du dual topologique (donc on garde intacte la continuité des éléments qu'on avait avec la topologie initiale). D'après la construction qui est donnée dans la section précédente, pour $x_0 \in E$ on obtient une base de voisinages de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$ en considérant tous les ensembles de la forme

$$\mathcal{V}(x_0) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \epsilon, \forall i \in I\},$$

où I est fini, $f_i \in E'$ et $\epsilon > 0$. Aussi on notera $x_n \rightharpoonup x$ pour dire que x_n converge (faiblement) vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ (qui est toujours séparée). On a alors la proposition suivante :

Proposition A.1 (CONVERGENCES FAIBLES)

- (i) $x_n \rightharpoonup x \iff \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in E',$
- (ii) Si $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$,
- (iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|,$
- (iv) $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et $f_n \rightarrow f$ fortement dans $E' \Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$

A.1.4 Topologie faible *

On précise que dans la dernière assertion de la Proposition A.1, la convergence forte dans le dual E' est à comprendre pour la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} |\langle f, x \rangle| .$$

De même le bidual E'' , c'est-à-dire le dual de E' , peut être muni de la norme

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle \xi, f \rangle| .$$

Par ailleurs on a une injection canonique $\iota : E \rightarrow E''$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' dans \mathbb{R} constitue une forme linéaire continue sur E' , donc est un élément de E'' noté $\iota(x)$. On a ainsi :

$$\langle \iota(x), f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \quad \forall x \in E, \forall f \in E' .$$

Il est clair que ι est linéaire et que ι est une isométrie puisque

$$\|\iota(x)\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle \iota(x), f \rangle| = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_E .$$

Il se peut que ι ne soit pas surjective. Par injectivité on peut identifier E à un sous-espace de E'' .

Sur E' deux topologies sont déjà définies :

- la topologie forte (associée à la norme de E'),
- la topologie faible $\sigma(E', E'')$ construite précédemment.

On va définir une troisième topologie sur E' , à savoir la *topologie faible ** que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$ on considère l'application $\varphi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x \in E}$ de E' dans \mathbb{R} , et on peut appliquer la construction de la section A.1.2 avec $X = E', Y_i = \mathbb{R}$ et $I = E$:

Définition A.2 (TOPOLOGIE FAIBLE *)

La *topologie faible **, désignée aussi par $\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Par l'injection ι on peut dire que $E \subset E''$, donc la construction de la topologie faible $\sigma(E', E'')$, où E'' est plus gros que E , génère davantage d'ensembles $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$, $i \in I$ et $I = E''$ et donc d'ouverts, que pour la topologie faible * $\sigma(E', E)$, où $I = E \subset E''$. Donc la topologie faible * possède moins d'ouverts donc est moins fine que la topologie faible, et elle est également séparée.

Remarque A.1. Le lecteur s'étonnera peut-être de cet « acharnement » à vouloir appauvrir les topologies. La raison est la suivante : si une topologie possède moins d'ouverts, elle possède par contre plus de compacts. Et par exemple, la boule unité de E' a la propriété remarquable d'être compacte pour la topologie faible $*$ là où elle ne l'est jamais en dimension infinie pour la topologie forte. Or les ensembles compacts jouent un rôle fondamental quand on cherche à établir des théorèmes d'existence. D'où l'importance de cette topologie

On obtient une base de voisinages d'un point $f_0 \in E'$ pour la topologie faible $*$ en considérant tous les ensembles de la forme :

$$\mathcal{V}(f_0) = \{f \in E' : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \epsilon, \forall i \in I\}, \quad (\text{A.1})$$

où I est fini, $x_i \in E$ et $\epsilon > 0$. On a aussi les propositions suivantes :

Proposition A.2 (CONVERGENCES FAIBLES $*$)

- (i) $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E, E')$ $\iff \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in E,$
- (ii) Si $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$,
Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$ faiblement pour $\sigma(E', E)$.
- (iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|,$
- (iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ et $x_n \rightarrow x$ fortement dans $E \Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$

A.2 Théorème de Nyquist-Whittaker-Shannon

Théorème A.1 (NYQUIST-WHITTAKER-SHANNON)

Soit f une fonction T -périodique et de coefficients de Fourier $c_m(f) = 0$ pour $|m| \geq M + 1$, alors f peut être reconstruite à partir d'un échantillonnage régulier $\{f(ka), k = 0, 1, \dots, 2M\}$, avec $a = \frac{T}{2M+1}$ le taux d'échantillonnage, de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} f(ka) D_M \left(\frac{2\pi}{T} (x - ka) \right), \quad (\text{A.2})$$

où D_M est le noyau de Dirichlet :

$$D_M(x) = \sum_{m=-M}^M e^{jmx} = \frac{\sin \left(\left(M + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (\text{A.3})$$

Preuve :

La fonction f est T -périodique et a un nombre fini de coefficients de Fourier, d'où sa série de Fourier qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{m=-M}^M c_m(f) e^{j2\pi \frac{m}{T} x}. \quad (\text{A.4})$$

Pour $p \in \{-M, \dots, M\}$, calculons la somme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2M} f(ka) e^{-j2\pi \frac{p}{T} ka} &= \sum_{k=0}^{2M} \left[\sum_{m=-M}^M c_m(f) e^{j2\pi \frac{m}{T} ka} \right] e^{-j2\pi \frac{p}{T} ka}, \quad (\text{A.5}) \\ &= \sum_{m=-M}^M c_m(f) \left[\sum_{k=0}^{2M} \exp \left(j2\pi \frac{k}{2M+1} (m-p) \right) \right], \\ &= (2M+1) c_p(f). \end{aligned}$$

La transformée de Fourier discrète des échantillons est reliée aux coefficients de Fourier. Plus précisément, si on définit $\mathbf{g}[k] = f(ka)$ et la DFT :

$$\hat{\mathbf{g}}[k] = \frac{1}{2M+1} \sum_{i=0}^{2M} g[i] e^{-j2\pi \frac{ik}{2M+1}}. \quad (\text{A.6})$$

alors

$$(\mathbf{g}[0], \mathbf{g}[1], \dots, \mathbf{g}[2M]) \xrightarrow{\text{DFT}} (\hat{\mathbf{g}}[0], \hat{\mathbf{g}}[1], \dots, \hat{\mathbf{g}}[2M]) = (c_{-M}(f), \dots, c_M(f)). \quad (\text{A.7})$$

Finalement, on montre la formule de reconstruction suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=-M}^M \left[\frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} f(ka) \exp \left(-j2\pi \frac{m}{T} ka \right) \right] \exp \left(j2\pi \frac{m}{T} x \right), \quad (\text{A.8}) \\ &= \frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} f(ka) \left[\sum_{m=-M}^M \exp \left(j \frac{2\pi}{T} (x-ka) \right) \right], \\ &= \frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} f(ka) D_M \left(\frac{2\pi}{T} (x-ka) \right), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Dans le cas qui nous intéresse à la section, φ_1 est W -périodique et $c_m(\varphi_1) = 0$ pour $|m| \geq M+1$ avec $2M+1 = W$, donc $a = 1$ et en appliquant le théorème :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{W-1} \varphi_1(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{W \sin \left(\frac{\pi(x-n)}{W} \right)}. \quad (\text{A.9})$$

On a $\mathbf{g}[n] = \varphi_1(n)$ et $\hat{\mathbf{g}}[n] = c_{n-M}$ pour $n = 0, 1, \dots, 2M$. De façon à considérer des échantillons de φ_1 centrés à l'origine, on lui préfère cette formule équivalente :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=-M}^M \varphi_1(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{W \sin \left(\frac{\pi(x-n)}{W} \right)}, \quad (\text{A.10})$$

puisque un vecteur d'échantillons décalés de $M \in \mathbb{Z}$, a la DFT suivante :

$$(\mathbf{g}[n-M])_{n=0, \dots, 2M} \xrightarrow{\text{DFT}} (e^{-j2\pi \frac{Mm}{2M+1}} \hat{\mathbf{g}}[m])_{m=0, \dots, 2M}, \quad (\text{A.11})$$

ainsi dans la seconde ligne de (A.8), remplaçant $c_m(f)$ par $e^{+j2\pi \frac{Mm}{2M+1}} c_m(f)$, il est équivalent de translater de $+M$ dans le noyau de Dirichlet :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{2M} \varphi_1(n-M) \frac{\sin \pi(x-n+M)}{W \sin \left(\frac{\pi(x-n+M)}{W} \right)}, \quad (\text{A.12})$$

et on retrouve le résultat par le changement de variable $n \leftarrow n - M$.

A.3 Preuves du théorème de Carathéodory-Toeplitz

Le théorème 6.5 est aussi connu sous le nom de *problème des moments trigonométriques complet*.

A.3.1 Par la représentation de Herglotz

Représentation de Poisson

Proposition A.3 (REPRÉSENTATION DE POISSON)

Toute fonction analytique g dans un voisinage de \mathbb{D} avec $g(0)$ réel, admet une représentation de Poisson, pour $z \in \mathbb{D}$:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} \right) \operatorname{Re} g(e^{j\theta}) d\theta . \quad (\text{A.13})$$

Preuve :

Supposons que g est analytique, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $a_0 = g(0)$ réel. Alors en remarquant que

$$\frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} = \frac{1 + ze^{-j\theta}}{1 - ze^{-j\theta}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-jn\theta} , \quad (\text{A.14})$$

qui converge uniformément pour $e^{j\theta} \in \mathbb{T}$ et z appartenant à un sous-ensemble compact de \mathbb{D} , il vient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} \right) \operatorname{Re} g(e^{j\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} g(e^{j\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \times 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} \operatorname{Re} g(e^{j\theta}) d\theta \right) , \quad (\text{A.15})$$

$$= a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} (g(e^{j\theta}) + \overline{g(e^{j\theta})}) d\theta \right) , \quad (\text{A.16})$$

$$= a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k e^{j(k-n)\theta} + \bar{a}_k e^{-j(n+k)\theta}) d\theta \right) , \quad (\text{A.17})$$

$$= a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-n)\theta} d\theta + \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(n+k)\theta} d\theta \right) , \quad (\text{A.18})$$

$$= a_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n (2\pi a_n + 0) , \quad (\text{A.19})$$

$$= g(z) . \quad (\text{A.20})$$

□

Preuve de la Proposition 6.1 (représentation de Herglotz)

Preuve :

Soit f une fonction de Carathéodory, dont le développement de Taylor en $z = 0$ est $f(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$. Pour $0 \leq r < 1$, on définit la mesure

$$d\mu_r = \operatorname{Re} f(re^{j\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} . \quad (\text{A.21})$$

Ainsi,

$$\operatorname{Re} f(re^{j\theta}) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n r^n e^{jn\theta} + \bar{c}_n r^n e^{-jn\theta}) . \quad (\text{A.22})$$

On définit $c_{-n} = \bar{c}_n$ et $c_0 = 1$. Ainsi d'après ce qui précède on a, pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} d\mu_r(\theta) = c_n r^{|n|}, \quad (\text{A.23})$$

et d'autre part la représentation de Poisson (Proposition A.3) appliquée à la fonction analytique $g(z) = f(rz)$ donne

$$f(rz) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} d\mu_r(\theta). \quad (\text{A.24})$$

Soit $h(\theta)$ un polynôme de Laurent défini *infra* (Définition A.3), on a d'après (A.23)

$$\mu_r(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\mu_r(\theta) = \sum_{n=k}^{\ell} c_n r^{|n|} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \sum_{n=k}^{\ell} c_n. \quad (\text{A.25})$$

Par ailleurs notons $f_r(\theta) = h(\theta) \operatorname{Re} f(re^{j\theta})$ qui tend simplement vers $f_1(\theta) = h(\theta) \operatorname{Re} f(e^{j\theta})$ par continuité quand $r \rightarrow 1$, et $\theta \mapsto f_r(\theta)$ est bornée en module par une constante $A > 0$ sur le compact $[-\pi, \pi]$, soit $|f_r(\theta)| \leq A$ et $\theta \mapsto A$ intégrable sur $[-\pi, \pi]$, ainsi par convergence dominée,

$$\mu_r(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta) d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\mu(\theta) = \mu(h), \quad (\text{A.26})$$

donc μ_r converge faiblement vers μ sur l'ensemble des polynômes de Laurent, avec $\mu(\theta) = \operatorname{Re} f(e^{j\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ qui vérifie donc en particulier pour $h(\theta) = e^{-jn\theta}$, d'après (A.25),

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\theta} d\mu(\theta) = c_n. \quad (\text{A.27})$$

Puisque les polynômes de Laurent sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on en déduit que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ on a également

$$\mu_r(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\mu_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) d\mu = \mu(\varphi), \quad (\text{A.28})$$

c.-à-d. une convergence faible, qui appliquée à $\varphi(\theta) = \frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z}$, continue en θ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donne le résultat recherché :

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 1} f(rz) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} d\mu_r(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{j\theta} + z}{e^{j\theta} - z} d\mu(\theta), \quad (\text{A.29})$$

pour une unique mesure μ sur \mathbb{T} . □

A.3.2 Par les théorèmes de Fejér-Riesz et Riesz-Markov

Définition A.3 (POLYNÔME DE LAURENT)

Un polynôme de Laurent f est une combinaison linéaire finie d'une suite $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ vue comme une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n z^n, \quad (\text{A.30})$$

avec $\alpha_\ell \neq 0 \neq \alpha_k$. Le nombre $\ell - k$ est appelé le degré de f .

Commençons par faire quelques remarques préliminaires. Le polynôme Q défini par $Q(z) = z^{-k} f(z)$ est de degré $\ell - k$ avec $Q(0) \neq 0$, donc f possède précisément $\ell - k$ zéros. On suppose

par la suite que f est réelle sur \mathbb{T} , c'est-à-dire $f(e^{j\theta}) = \overline{f(e^{j\theta})}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, alors vient

$$\sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n e^{jn\theta} = \overline{\sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n e^{jn\theta}} = \sum_{n=k}^{\ell} \overline{\alpha_n} e^{-jn\theta} = \sum_{n=-\ell}^{-k} \overline{\alpha_{-n}} e^{jn\theta}. \quad (\text{A.31})$$

Notons que si $0 < k \leq \ell$, autrement dit si f est un polynôme de degré 1 ou plus, alors puisque les intervalles $[-\ell, -k]$ et $[k, \ell]$ sont disjoints et que la famille de complexes $\{e^{jn\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre (pour cela il suffit de remarquer qu'en dérivant $n - 1$ fois et en évaluant en $\theta = 0$ on fait apparaître un système de Vandermonde) il s'ensuit que tous les α_n sont nuls et donc $f = 0$. On traite donc le cas où $k \leq 0 \leq \ell$. On distingue alors deux cas $-\ell \leq k \leq 0$ ou $k \leq -\ell \leq 0$:

$$\sum_{n=-\ell}^k \overline{\alpha_{-n}} e^{jn\theta} + \sum_{n=k}^{-k} (\overline{\alpha_{-n}} - \alpha_n) e^{jn\theta} + \sum_{n=-k}^{\ell} (-\alpha_n) e^{jn\theta} = 0, \quad \text{si } -\ell \leq k \leq 0, \quad (\text{A.32})$$

$$\sum_{n=k}^{-\ell} \alpha_n e^{jn\theta} + \sum_{n=-\ell}^{\ell} (\alpha_n - \overline{\alpha_{-n}}) e^{jn\theta} + \sum_{n=\ell}^{-k} (-\overline{\alpha_{-n}}) e^{jn\theta} = 0, \quad \text{si } k \leq -\ell \leq 0. \quad (\text{A.33})$$

La liberté de la famille des complexes $\{e^{jn\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ implique dans les deux cas que $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$ pour tout $n \in [\max(k, -\ell), \min(-k, \ell)]$ et nul en dehors, d'où nécessairement $\ell = -k = \min(-k, \ell)$. Ainsi si f est réelle sur \mathbb{T} , alors elle s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=-\ell}^{\ell} \alpha_n z^n, \quad (\text{A.34})$$

et $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$, donc f est de degré pair 2ℓ . Par ailleurs remarquons que pour tout $z = e^{j\theta} \in \mathbb{T}$ nous avons $f(1/z) = \overline{f(\bar{z})}$ du fait de l'hypothèse que f est réelle sur \mathbb{T} , ainsi les deux fonctions complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto f(1/z)$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ qui sont également des polynômes de Laurent, donc des fonctions analytiques, coïncident sur \mathbb{T} . Autrement dit la différence $\delta f : z \mapsto f(1/z) - \overline{f(\bar{z})}$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nulle sur \mathbb{T} , et le principe du maximum nous donne que δf est nulle sur \mathbb{D} , et par unicité du prolongement analytique sur tout $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Par conséquent,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{f(\bar{z})}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.35})$$

Remarquons que cette équation est équivalente à

$$\sum_{n=-\ell}^{-k} \alpha_n z^n = \sum_{n=k}^{\ell} \overline{\alpha_n} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.36})$$

ce qui implique $k = -\ell$ et $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$.

Montrons désormais que si $g(\theta) = f(e^{j\theta})$ est réelle positive, les zéros de $f(z) = z^{-\ell} Q(z)$ sont d'ordre pair sur \mathbb{T} . Soit $z_0 = e^{j\theta_0} \in \mathbb{T}$ un zéro de f de multiplicité $m_0 \in \mathbb{N}$, c.-à-d. $Q(z) = (z - z_0)^{m_0} R(z)$ où R est un polynôme de degré $2\ell - m_0$ et $R(z_0) \neq 0$. Nous voulons montrer que nécessairement m_0 est pair. Au préalable remarquons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, on a les équivalences

$$(z - z_0)^m \mid Q \iff \forall 0 \leq p < m, \quad Q^{(p)}(z_0) = 0, \quad (\text{A.37})$$

$$\iff \forall 0 \leq p < m, \quad f^{(p)}(z_0) = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$; , \quad (\text{A.39})$$

$$\iff \forall 0 \leq p < m, \quad g^{(p)}(\theta_0) = 0. \quad (\text{A.40})$$

La première équivalence est la caractérisation usuelle d'une racine d'ordre m , la seconde découle directement de la formule de Leibniz $f^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (z^{-\ell})^{(p-k)} Q^{(k)}(z)$, et la troisième provient des dérivations itérées de la composée $g(\theta) = f(e^{j\theta})$, $g'(\theta) = je^{j\theta} f'(e^{j\theta})$, et ainsi de suite, dont une formule explicite peut être donnée par la formule de Faà di Bruno. Ecrivons le développement de Taylor de la fonction g en θ à l'ordre m :

$$g(\theta + h) = g(\theta) + hg'(\theta) + \frac{h^2}{2}g''(\theta) + \frac{h^3}{3}g^{(3)}(\theta) + \dots + \frac{h^m}{m!}g^{(m)}(\theta) + o(h^m). \quad (\text{A.41})$$

Puisque g est réelle, nécessairement ses dérivées successives sont également réelles, puisque $\frac{1}{h}(g(\theta + h) - g(\theta)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(\theta)$, puis récursivement en formant les taux d'accroissements pour g'' et ainsi de suite. En particulier, le développement limité en $\theta = \theta_0$ à l'ordre $m = m_0$ nous donne

$$g(\theta_0 + h) = \frac{h^{m_0}}{m_0!}g^{(m_0)}(\theta_0) + o(h^{m_0}), \quad (\text{A.42})$$

et étant donné que g est positive, si m_0 était impair on aurait alors *a fortiori* $g^{(m_0)}(\theta_0) = 0$ (sans quoi h^{m_0} changerait de signe et $g(\theta_0 + h)$ également), ce qui par la chaîne d'équivalence précédente signifierait que $(z - z_0)^{m_0+1} | Q$, d'où la contradiction avec le fait que Q est de multiplicité exactement m_0 . On en conclut que m_0 est nécessairement pair.

Les démonstrations des théorèmes de Fejér-Riesz et Carathéodory-Toeplitz qui suivent sont tirées de (Barry2015, *Comprehensive courses*, Partie 4, p.316).

Théorème A.2 (FEJÉR-RIESZ)

Si f est un polynôme de Laurent avec $f(e^{j\theta}) \geq 0$ pour tout $e^{j\theta} \in \mathbb{T}$, alors il existe un polynôme P non nul sur \mathbb{D} tel que

$$f(z) = P(z)\overline{P(1/\bar{z})}. \quad (\text{A.43})$$

En particulier,

$$f(e^{j\theta}) = |P(e^{j\theta})|^2. \quad (\text{A.44})$$

Preuve :

D'après ce qui précède, f est de degré 2ℓ et possède donc 2ℓ zéros dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Puisque $f(e^{j\theta})$ est lisse et positive sur \mathbb{T} , ses zéros sont d'ordre pair sur \mathbb{T} . En effet, une fonction $\theta \mapsto g(\theta)$ \mathcal{C}^1 réelle positive telle que $g(\theta_0) = 0$ vérifie nécessairement $g'(\theta_0) = 0$. Appliqué à $g(\theta) = f(e^{j\theta})$ qui est bien \mathcal{C}^1 car combinaison linéaire de cosinus et réelle positive par hypothèse, on a étant donné un zéro $e^{j\theta_0}$ de f sur \mathbb{T} donc du polynôme Q , $f'(e^{j\theta_0}) = 0$. Ainsi en dérivant $f(z) = z^{-\ell}Q(z)$ il vient $f'(z) = -\ell z^{-\ell-1}Q(z) + z^{-\ell}Q'(z)$, d'où

$$f'(e^{j\theta_0}) = -\ell e^{-j(\ell+1)\theta_0} \underbrace{Q(e^{j\theta_0})}_{=0} + e^{-j\ell\theta_0} Q'(e^{j\theta_0}) = 0 \implies Q'(e^{j\theta_0}) = 0. \quad (\text{A.45})$$

Par (A.35), si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ est un zéro $f(z_0) = 0$, alors $f(1/\bar{z}_0) = 0$. Ainsi, les zéros de Q sont $z_1, \dots, z_\ell \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et $\{1/\bar{z}_i\}_{i=1}^\ell$, c'est-à-dire,

$$Q(z) = c \prod_{i=1}^{\ell} (z - z_i)(z - \bar{z}_i^{-1}) = c \prod_{i=1}^{\ell} (-\bar{z}_i^{-1}) \prod_{i=1}^{\ell} (z - z_i)(1 - \bar{z}_i z), \quad (\text{A.46})$$

soit

$$f(z) = z^{-\ell}Q(z) = c \prod_{i=1}^{\ell} (-\bar{z}_i^{-1}) \prod_{i=1}^{\ell} (z - z_i) \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_i \right). \quad (\text{A.47})$$

Définissons

$$P(z) = \left[c \prod_{i=1}^{\ell} (-\bar{z}_i^{-1}) \right]^{1/2} \prod_{i=1}^{\ell} (z - z_i), \quad (\text{A.48})$$

alors

$$f(z) = e^{j\psi} P(z) \overline{P(1/\bar{z})}, \quad (\text{A.49})$$

avec

$$e^{j\psi} = \left[c \prod_{i=1}^{\ell} (-\bar{z}_i^{-1}) \right]^{1/2} \left[\bar{c} \prod_{i=1}^{\ell} (-z_i^{-1}) \right]^{-1/2}, \quad (\text{A.50})$$

qui est bien de norme 1, et puisque f et $P(z) \overline{P(1/\bar{z})}$ sont positifs sur \mathbb{T} , $e^{j\psi} = 1$. □

Théorème A.3 (REPRÉSENTATION DE RIESZ-MARKOV)

Soit L une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(K)$. Il existe une mesure de Borel μ sur K qui représente L au sens suivant :

$$\forall f \in \mathcal{C}(K), \quad L(f) = \int f \, d\mu. \quad (\text{A.51})$$

Définition A.4 (FORME LINÉAIRE POSITIVE)

Soit un espace métrique compact (K, d) , et l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions réelles continues sur K . On dit qu'une forme linéaire L sur $\mathcal{C}(K)$ est positive si $L(\varphi) \geq 0$ pour toute fonction $\varphi \geq 0$ sur K .

Théorème A.4 (CARATHEODORY-TOEPLITZ)

Une suite $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ correspond aux moments d'une mesure positive μ sur $\partial\mathbb{D}$, c.-à-d.

$$c_n = \int e^{jn\theta} \, d\mu(\theta), \quad (\text{A.52})$$

si et seulement si elle est définie positive.

Preuve :

Le sens direct est clair, en effet :

$$\sum_{i,k} \zeta_i \zeta_k c_{k-j} = \int \left| \sum_n \zeta_n e^{jn\theta} \right|^2 \, d\mu(\theta) \geq 0. \quad (\text{A.53})$$

Montrons la réciproque. Définissons la forme linéaire L , sur l'ensemble des polynômes de Laurent, par

$$L\left(\sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n z^n\right) = \sum_{n=k}^{\ell} \alpha_n c_n. \quad (\text{A.54})$$

Plaçons nous sur le compact \mathbb{T} , et considérons un polynôme de Laurent f qui est réel et positif sur \mathbb{T} , $f(e^{j\theta}) \geq 0$. Ainsi, le théorème (A.2) de Fejér-Riesz assure qu'il est de la forme $f(z) = P(z) \overline{P(1/\bar{z})}$, où $P(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \zeta_i z^{i-1}$ est un polynôme non nul sur \mathbb{T} . D'où

$$f(z) = \sum_{i,k} \bar{\zeta}_i \zeta_k z^{k-i}, \quad (\text{A.55})$$

et donc

$$L(f) = \sum_{i,k} \bar{\zeta}_i \zeta_k c_{k-i} \geq 0, \quad (\text{A.56})$$

d'après l'hypothèse. De plus, puisque les polynômes de Laurent sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (par le théorème d'approximation de Weierstrass), on en déduit que L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par conséquent, d'après le théorème de représentation A.3, il existe une mesure de Borel μ telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \quad L(f) = \int f(e^{j\theta}) \, d\mu(\theta). \quad (\text{A.57})$$

En particulier, en prenant $f(z) = z^n$, on a $L(z^n) = c_n$ et on obtient (A.52). □

A.4 Preuve du théorème de Carathéodory-Fejér

Ce théorème est aussi connu sous le nom de *problème des moments trigonométriques tronqués*.

Théorème A.5 (CARATHÉODORY-FÉJER)

Soit $N > 1$ complexes c_1, c_2, \dots, c_N non nuls. Il existe un entier M , $1 \leq K \leq M$, et des constantes ρ_k réelles, ϵ_k complexes ; $k = 1, 2, \dots, L$, tels que $\rho_k > 0$, $|\epsilon_k| = 1$, $\epsilon_k \neq \epsilon_l$ si $k \neq l$, et

$$c_n = \sum_{k=1}^M \rho_k \epsilon_k^n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.58})$$

L'entier M et les paramètres ρ_k , ϵ_k sont déterminés de manière unique.

Preuve :

(a) On définit pour les valeurs négatives $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, et on définit c_0 de telle sorte que la forme hermitienne suivante

$$\sum_{0 \leq p, q \leq N} c_{p-q} u_p \bar{u}_q, \quad (\text{A.59})$$

ait pour minimum zéro avec $\sum |u_n|^2 = 1$. Notons \mathbf{C} la matrice de taille $(N+1) \times (N+1)$ dont les éléments sont $\mathbf{C}_{p,q} = c_{p-q}$, formant ainsi une matrice Toeplitz hermitienne dont les éléments diagonaux sont c_0 . Cette valeur est choisie de sorte que

$$\mathbf{u}^* \mathbf{C} \mathbf{u} = \sum_{0 \leq p, q \leq N} c_{p-q} u_p \bar{u}_q \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{N+1}. \quad (\text{A.60})$$

Soit μ une valeur propre de \mathbf{C} et \mathbf{u}_μ un vecteur propre associé, on a $\mathbf{u}_\mu^* \mathbf{C} \mathbf{u}_\mu = \mu \|\mathbf{u}_\mu\|^2 \geq 0$, ainsi ses valeurs propres (réelles car \mathbf{C} hermitienne) sont positives (et au moins une est nulle puisque le minimum est atteint). Comme elles ne peuvent pas être toutes nulles (autrement tous les c_n seraient nuls), et puisque leur somme (la trace de (A.59)) correspond à $(n+1)c_0$, on en conclut que c_0 doit être strictement positif. Ainsi d'un point de vue matriciel la valeur $c_0 > 0$ est choisie de telle sorte que \mathbf{C} soit singulière, c.-à-d. $\det(\mathbf{C}) = 0$ et positive. Montrons que ce choix de c_0 est unique. Pour cela notons $\hat{\mathbf{C}}$ la matrice identique à \mathbf{C} partout sauf sur la diagonale où les éléments sont nuls :

$$\hat{\mathbf{C}}_{p,q} = \begin{cases} c_{p-q}, & \text{si } p \neq q, \\ 0, & \text{si } p = q. \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

Cette matrice est hermitienne et ses valeurs propres sont réelles : $\chi_1 \leq \dots \leq \chi_{N+1}$ et $\sum_{n=1}^{N+1} \chi_n = 0$ car la trace de $\hat{\mathbf{C}}$ est nulle. D'où, $\chi_1 < 0$ et $\chi_{N+1} > 0$. On note ν_1 la multiplicité de la valeur propre χ_1 . On voit qu'il suffit de prendre $c_0 = -\chi_1 > 0$, en effet $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} - \chi_1 \mathbf{I}_{N+1}$ a pour valeurs propres les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$\det(\mathbf{C} - z \mathbf{I}_{N+1}) = \det(\hat{\mathbf{C}} - (\chi_1 + z) \mathbf{I}_{N+1}), \quad (\text{A.62})$$

autrement dit les valeurs propres de $\hat{\mathbf{C}}$ décalées de $-\chi_1$, soit : $0 = (\chi_1 - \chi_1) \leq (\chi_2 - \chi_1) \leq \dots \leq (\chi_{N+1} - \chi_1)$ et la matrice est bien positive, possédant une valeur propre nulle de multiplicité ν_1 . La première étape consiste donc à former la matrice $\hat{\mathbf{C}}$, à calculer sa plus petite valeur propre χ_1 et à considérer la matrice $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} - \chi_1 \mathbf{I}_{N+1}$ qui est par construction positive. Prouvons alors (A.58) pour $n = 0, 1, 2, \dots, N$ et telle que $c_0 = \sum_{k=1}^M \rho_k$, qui sera alors valable pour les indices négatifs.

(b) Pour cela notons $z = e^{jx}$ et définissons l'opérateur linéaire L qui envoie z^n sur c_n :

$$L(z^n) = L(e^{jn x}) = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (\text{A.63})$$

Ainsi L est définie pour tout polynôme trigonométrique de degré N : $P_{\mathbf{u}}(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_N z^N$ avec $z = e^{jx}$ et $\mathbf{u} = (u_n)_{n=0}^N$, et la forme hermitienne (A.59) peut se réécrire :

$$L(|P_{\mathbf{u}}(z)|^2), \quad z = e^{jx}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{N+1}. \quad (\text{A.64})$$

En effet, on a :

$$L(|P_{\mathbf{u}}(z)|^2) = L(P_{\mathbf{u}}(z) \overline{P_{\mathbf{u}}(z)}), \quad (\text{A.65})$$

$$= L \left(\left(\sum_{p=0}^N u_p z^p \right) \left(\sum_{q=0}^N \bar{u}_q z^{-q} \right) \right), \quad (\text{A.66})$$

$$= L \left(\sum_{0 \leq p, q \leq N} z^{p-q} u_p \bar{u}_q \right), \quad (\text{A.67})$$

$$= \sum_{0 \leq p, q \leq N} L(z^{p-q}) u_p \bar{u}_q, \quad (\text{A.68})$$

$$= \sum_{0 \leq p, q \leq N} c_{p-q} u_p \bar{u}_q \geq 0. \quad (\text{A.69})$$

(c) On note $\mathbf{C}^{(h)}$ la sous matrice carrée de \mathbf{C} de taille h , D_h son déterminant, et μ_h la plus petite valeur propre de $\mathbf{C}^{(h)}$. On a :

$$\mu_h = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{h+1}, \|\mathbf{u}\|_2=1} \mathbf{u}^* \mathbf{C}^{(h)} \mathbf{u}, \quad (\text{A.70})$$

$$= \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{h+1}, \|\mathbf{u}\|_2=1} \sum_{0 \leq p, q \leq h} c_{p-q} u_p \bar{u}_q, \quad (\text{A.71})$$

$$= \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{h+1}, \|\mathbf{u}\|_2=1} L(|u_0 + u_1 z + \dots + u_h z^h|^2), \quad z = e^{jx}. \quad (\text{A.72})$$

Comme on recherche le minimum sur un plus petit nombre de coefficients h , on a évidemment :

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_N = 0. \quad (\text{A.73})$$

Puisque $\mu_0 = \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}, \|\mathbf{u}\|_2=1} \mathbf{u}^* c_0 \mathbf{u} = c_0 > 0$, il existe un entier M , $1 \leq M \leq N$, tel que $\mu_{M-1} > 0$, $\mu_M = 0$.

Par suite, on a :

$$L(|g_{M-1}(z)|^2) > 0, \quad L(|g_M(z)|^2) \geq 0, \quad L(|G(z)|^2) = 0, \quad (\text{A.74})$$

où g_{M-1} est un polynôme quelconque de degré $M-1$, g_M un polynôme quelconque de degré M , et G un polynôme particulier de degré M qui réalise le minimum. Les mineurs de \mathbf{C} d'ordre h , soit les déterminants D_h (égaux au produit des valeurs propres, dont la plus petite est μ_h) sont strictement positifs pour $h \leq M-1$ et nuls pour $h \geq M$, ce qui caractérise le fait que \mathbf{C} est de rang M . Puis par le théorème du rang :

$$M = \text{rg } \mathbf{C} = N + 1 - \dim(\text{Ker } \mathbf{C}) = N + 1 - \nu_1. \quad (\text{A.75})$$

L'étape suivante consiste à expliciter le polynôme G qui réalise le minimum. Soit p un entier, pour tout complexe ϵ on considère le polynôme $G(z) + \epsilon z^p$, qui vérifie

$$L(|G(z) + \epsilon z^p|^2) \geq 0. \quad (\text{A.76})$$

Comme pour tout polynôme g_N de degré N on a $L(|g_N(z)|^2) \geq 0$, on doit d'une part avoir $p \leq N$, mais aussi puisque $L(|G(z) + \epsilon z^p|^2) = L(|z^p| \cdot |G(z)z^{-p} + \epsilon|^2) = L(|G(z)z^{-p} + \epsilon|^2)$ car $|z| = 1$. Ce dernier polynôme est de degré $M-p \leq N$, soit $p \geq M-N$.

$$L(|G(z) + \epsilon z^p|^2) \geq 0, \quad -(N-M) \leq p \leq N, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.77})$$

Par linéarité de l'opérateur L , on a :

$$L(|G(z) + \epsilon z^p|^2) = L(|G(z)|^2) + L(G(z) \bar{\epsilon} z^p) + L(\overline{G(z)} \epsilon z^p) + L(|\epsilon|^2), \quad (\text{A.78})$$

$$= \bar{\epsilon} L(G(z) z^p) + \epsilon L(\overline{G(z)} z^p) + L(|\epsilon|^2), \quad (\text{A.79})$$

$$= 2 \text{Re} \{ \epsilon L(G(z) z^p) \} + |\epsilon|^2 c_0, \quad (\text{A.80})$$

$$= c_0 (2 \text{Re} \{ \epsilon L(G(z) z^p) / c_0 \} + |\epsilon|^2), \quad (\text{A.81})$$

$$= c_0 (2 \text{Re} \{ \epsilon \cdot \xi_p \} + |\epsilon|^2), \quad (\text{A.82})$$

avec le complexe $\xi_p = L(G(z)\bar{z}^p)/c_0$. Si $\xi_p \neq 0$ alors en choisissant $\epsilon = -\bar{\xi}_p$ on aurait

$$c_0 (2 \operatorname{Re} \{\epsilon \cdot \xi_p\} + |\epsilon|^2) = -c_0 |\xi_p|^2 < 0, \quad (\text{A.83})$$

ce qui contredirait (A.77). D'où $\xi_p = 0$ pour tout p , et la caractérisation de G suivante :

$$L(G(z)\bar{z}^p) = 0, \quad -(N - M) \leq p \leq N. \quad (\text{A.84})$$

On considère ces équations pour $0 \leq p < M$, qui déterminent le polynôme G de manière unique (à un facteur multiplicatif près). En effet, soit G_1 est un autre polynôme de degré M satisfaisant $L(|G_1(z)|^2) = 0$ et les équations (A.84) pour $0 \leq p < M$, alors on peut déterminer deux complexes a et b tels que $aG(z) + bG_1(z)$ soit de degré $M - 1$, et

$$L(|aG(z) + bG_1(z)|^2) = |a|^2 L(|G(z)|^2) + 2 \operatorname{Re} \left\{ a\bar{b} L(G(z)\overline{G_1(z)}) \right\} + |b|^2 L(|G_1(z)|^2) = 0, \quad (\text{A.85})$$

puisque $L(|G(z)|^2) = L(|G_1(z)|^2) = 0$ et $L(G(z)\overline{G_1(z)}) = \sum_{p=0}^M v_p L(G(z)\bar{z}^p) = 0$. Ce qui contredit (A.74), sauf si $aG(z) + bG_1(z) = 0$, d'où l'unicité à un facteur près. Cherchons donc à expliciter le polynôme G où le coefficient dominant est 1, c'est-à-dire on fixe $u_M = 1$. La caractérisation (A.84) pour $0 \leq p < M$ s'écrit :

$$\begin{cases} u_0 c_0 + u_1 c_1 + \cdots + u_{M-1} c_{M-1} & = & -c_M \\ u_0 c_{-1} + u_1 c_0 + \cdots + u_{M-1} c_{M-2} & = & -c_{M-1} \\ & \vdots & \\ u_0 c_{-(M-1)} + u_1 c_{-(M-2)} + \cdots + u_{M-1} c_0 & = & -c_1 \end{cases}, \quad (\text{A.86})$$

qui est un système de M équations à M inconnues, qui s'écrit sous forme matricielle faisant intervenir la matrice $\mathbf{C}^{(M-1)}$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{M-1} \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-(M-1)} & c_{-(M-2)} & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_M \\ c_{M-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.87})$$

dont le déterminant D_{M-1} est strictement positif, donc la matrice $\mathbf{C}^{(M-1)}$ est inversible. Si l'on note $\mathbf{C}_p^{(M-1)}$ la matrice où est remplacée la p -ième colonne de $\mathbf{C}^{(M-1)}$ par le vecteur $-(c_M, c_{M-1}, \dots, c_1)^\top$, alors la règle de Cramer donne :

$$u_p = \frac{\det(\mathbf{C}_p^{(M-1)})}{D_{M-1}}, \quad (\text{A.88})$$

qui correspond donc à des mineurs, et l'on peut ainsi réécrire le polynôme G sous la forme suivante (échangeant la colonne p en dernière colonne) :

$$G(z) = D_{M-1}^{-1} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{M-1} & c_M \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{M-2} & c_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{-(M-1)} & c_{-(M-2)} & \cdots & c_0 & c_1 \\ 1 & z & \cdots & z^{M-1} & z^M \end{vmatrix}, \quad (\text{A.89})$$

qui est bien normalisé avec un coefficient dominant égal à 1. Remarquons qu'une autre procédure est recevable pour caractériser le polynôme G , ceci en considérant les équations (A.84) pour $0 \leq p \leq M$:

$$\begin{cases} u_0 c_0 + u_1 c_1 + \cdots + u_{M-1} c_{M-1} + u_M c_M & = & 0 \\ u_0 c_{-1} + u_1 c_0 + \cdots + u_{M-1} c_{M-2} + u_M c_{M-1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ u_0 c_{-(M-1)} + u_1 c_{-(M-2)} + \cdots + u_{M-1} c_0 + u_M c_1 & = & 0 \\ u_0 c_{-M} + u_1 c_{-(M-1)} + \cdots + u_{M-1} c_{-1} + u_M c_0 & = & 0 \end{cases}, \quad (\text{A.90})$$

soit $\mathbf{C}^{(M)} \mathbf{u} = 0$ en notant $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_M)$, qui est donc l'unique vecteur propre (à un coefficient multiplicatif près) associé à la valeur propre nulle, puisque le sous-espace propre est de dimension 1. Une fois \mathbf{u} déterminé on peut le normaliser de sorte que $u_M = 1$.

(d) Notons $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M$ les zéros de ce polynôme G . Il est démontré par la suite que :

$$|\epsilon_k| = 1, \quad \epsilon_k \neq \epsilon_l \text{ si } k \neq l. \quad (\text{A.91})$$

De plus, il va être démontré que (A.58) est vérifié avec ces zéros jouant le rôle des ϵ_k et

$$\rho_k = L(G_k(z)) = L(|G_k(z)|^2) > 0, \quad G_k(z) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \frac{G(z)}{z - \epsilon_k}. \quad (\text{A.92})$$

(e) Fixons nous un ϵ_k . Afin de prouver la première partie de (A.91), à savoir $|\epsilon_k| = 1$, on considère des complexes arbitraires v_0, v_1 et le polynôme de degré $M - 1$ suivant :

$$Q(z) = \frac{G(z)}{z - \epsilon_k} = \prod_{l=0, l \neq k}^{M-1} (z - \epsilon_l). \quad (\text{A.93})$$

Remarquons alors que :

$$|Q(z)|^2 \cdot |v_0 + v_1 z|^2 = |Q(z)|^2 v_0 \bar{v}_0 + (|Q(z)|^2 \bar{z}) v_0 \bar{v}_1 + (|Q(z)|^2 z) \bar{v}_0 v_1 + (|Q(z)|^2 |z|^2) \bar{v}_1 v_1, \quad (\text{A.94})$$

et puisque $|z| = 1$ et $L(\bar{P}(z)) = \overline{L(P(z))}$ pour tout polynôme P , il vient :

$$L(|Q(z)|^2 \cdot |v_0 + v_1 z|^2) = L(|Q(z)|^2) v_0 \bar{v}_0 + \overline{L(|Q(z)|^2 z)} v_0 \bar{v}_1, \quad (\text{A.95})$$

$$+ L(|Q(z)|^2 z) \bar{v}_0 v_1 + L(|Q(z)|^2) \bar{v}_1 v_1, \quad (\text{A.96})$$

$$= \sum_{0 \leq p, q \leq 1} \gamma_{p-q} v_p \bar{v}_q, \quad (\text{A.97})$$

avec $\gamma_0 = L(|Q(z)|^2) > 0$ (A.74), $\gamma_1 = L(|Q(z)|^2 z)$ et $\gamma_{-1} = \bar{\gamma}_1$, c.-à-d. :

$$\gamma_n = L(|Q(z)|^2 z^n), \quad n = 0, \pm 1. \quad (\text{A.98})$$

Or le polynôme $Q(z) \cdot (v_0 + v_1 z)$ est de degré M , donc toujours d'après (A.74)

$$L(|Q(z)|^2 \cdot |v_0 + v_1 z|^2) = \sum_{0 \leq p, q \leq 1} \gamma_{p-q} v_p \bar{v}_q \geq 0, \quad (\text{A.99})$$

avec l'égalité atteinte pour le polynôme $G(z)$, c'est-à-dire lorsque $v_0 + v_1 z = z - \epsilon_k$. Cela signifie que la matrice Toeplitz Γ associée à $\{\gamma_n\}_{n=-1}^1$ est positive et de déterminant $\det(\Gamma) = 0$, soit $\gamma_0^2 - \gamma_1 \bar{\gamma}_1 = 0$ donc $\gamma_0 = |\gamma_1|$. Cette nouvelle suite $\{\gamma_n\}_{n=-1}^1$ vérifie donc les conditions de (a) et en remarquant que la relation (A.98) définit un nouvel opérateur linéaire L_1 comme en (b), qui à z^n associe les éléments de la suite γ_n par $L_1(z^n) = L(|Q(z)|^2 z^n) = \gamma_n$ pour $n = 0, \pm 1$, et L_1 est bien défini pour tout polynôme trigonométrique $g_1(z) = v_0 + v_1 z$ de degré 1, et on a :

$$L_1(|g_1(z)|^2) = L(|Q(z)|^2 \cdot |v_0 + v_1 z|^2) \geq 0, \quad (\text{A.100})$$

$$L_1(|g_0(z)|^2) = L(|Q(z)|^2 \cdot |v_0|^2) = |v_0|^2 \gamma_0 > 0, \quad (\text{A.101})$$

$$L_1(|z - \epsilon_k|^2) = L(|Q(z)|^2 \cdot |z - \epsilon_k|^2) = L(|G(z)|^2) = 0, \quad (\text{A.102})$$

autrement dit la suite $\{\gamma_n\}_{n=-1}^1$ et l'opérateur L_1 vérifient les mêmes conditions (A.74) obtenues au point (c) pour $M = 1$, et le polynôme $z - \epsilon_k$ joue ici le rôle qu'a G pour l'opérateur L . Ayant obtenu précédemment l'expression générique de ce polynôme, et son unicité à un facteur, on en déduit que ϵ_k est racine de $\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0$, d'où $\epsilon_k = \gamma_1 / \gamma_0$, et comme $\gamma_0 = |\gamma_1|$ on en déduit que $|\epsilon_k| = 1$.

(f) Pour prouver la seconde partie de (A.91) on suppose $M \geq 2$, et on considère de même l'opérateur suivant :

$$L_2(|v_0 + v_1 z + v_2 z^2|^2) = L\left(\left|\frac{G(z)}{(z - \epsilon_k)(z - \epsilon_l)}\right|^2 |v_0 + v_1 z + v_2 z^2|^2\right) = \sum_{0 \leq p, q \leq 2} \delta_{p-q} v_p \bar{v}_q \geq 0, \quad (\text{A.103})$$

avec l'égalité réalisée pour $v_0 + v_1 z + v_2 z^2 = (z - \epsilon_k)(z - \epsilon_l)$. De nouveau la matrice Toeplitz associée à la suite $\{\delta_n\}_{n=-2}^2$ est positive et de déterminant nul, soit :

$$\begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_{-1} & \delta_0 & \delta_1 \\ \delta_{-2} & \delta_{-1} & \delta_0 \end{vmatrix} = 0 \iff (\delta_0^2 - |\delta_1|^2) \delta_0 - (\delta_0 \delta_1 - \delta_{-1} \delta_2) \delta_{-1} + (|\delta_1|^2 - \delta_0 \delta_2) \delta_{-2} = 0, \quad (\text{A.104})$$

$$\iff \delta_0^4 - 2|\delta_1|^2 \delta_0^2 + \delta_2 \delta_{-2} \delta_0 + \delta_1^2 \delta_{-2} \delta_0 - \delta_0^2 |\delta_2|^2 = 0, \quad (\text{A.105})$$

$$\iff \delta_0^4 - 2|\delta_1|^2 \delta_0^2 + |\delta_1|^4 = |\delta_1|^4 - \delta_2 \delta_{-2} \delta_0 - \delta_1^2 \delta_{-2} \delta_0 + \delta_0^2 |\delta_2|^2, \quad (\text{A.106})$$

$$\iff (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)^2 = |\delta_1^2 - \delta_0 \delta_2|^2, \quad (\text{A.107})$$

avec $\delta_0 > 0$ et $\delta_0 > |\delta_1|$, et comme précédemment ϵ_k et ϵ_l sont racines de l'équation :

$$\begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_{-1} & \delta_0 & \delta_1 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0 \iff (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)z^2 - (\delta_0\delta_1 - \delta_{-1}\delta_2)z + (|\delta_1|^2 - \delta_0\delta_2) = 0. \quad (\text{A.108})$$

Il faut montrer que ces racines sont distinctes, c.-à-d. que le discriminant est non nul :

$$\Delta = (\delta_0\delta_1 - \delta_{-1}\delta_2)^2 - 4(\delta_0^2 - |\delta_1|^2)(\delta_1^2 - \delta_0\delta_2) \neq 0. \quad (\text{A.109})$$

D'après (A.104), le complexe $\frac{\delta_1^2 - \delta_0\delta_2}{\delta_0^2 - |\delta_1|^2}$ est de module 1, donc de la forme e^{jt} , ainsi

$$\delta_1\delta_2 = \delta_1^2 + (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)e^{jt}. \quad (\text{A.110})$$

Par suite on a

$$(\delta_0^2 - |\delta_1|^2) \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} - \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_0} e^{jt} \right) = \delta_0\delta_1 - |\delta_1|^2 \frac{\delta_1}{\delta_0} - \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_0} (\delta_0^2 - |\delta_1|^2) e^{jt}, \quad (\text{A.111})$$

$$= \delta_0\delta_1 - |\delta_1|^2 \frac{\delta_1}{\delta_0} - \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_0} (\delta_0\delta_2 - \delta_1^2). \quad (\text{A.112})$$

$$= \delta_0\delta_1 - \delta_{-1}\delta_2. \quad (\text{A.113})$$

Par conséquent le discriminant se réécrit :

$$\Delta = (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)^2 \left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_0} - \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_0} e^{jt} \right)^2 + 4e^{jt} \right], \quad (\text{A.114})$$

$$= 4e^{jt} (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)^2 \left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_0} e^{-jt/2} - \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_0} e^{jt/2} \right)^2 + 1 \right], \quad (\text{A.115})$$

$$= 4e^{jt} (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)^2 \left[r^2 j^2 \left(\frac{e^{ju} - e^{-ju}}{2j} \right)^2 + 1 \right], \quad (\text{A.116})$$

$$= 4e^{jt} (\delta_0^2 - |\delta_1|^2)^2 (1 - r^2 \sin^2 u) \neq 0, \quad (\text{A.117})$$

avec $\frac{\delta_1}{\delta_0} e^{-jt/2} = r e^{ju}$ avec $r = \frac{|\delta_1|}{\delta_0} < 1$ car $\delta_0 > |\delta_1|$.

(g) Montrons alors que $\rho_k = L(G_k(z)) = L(|G_k(z)|^2) > 0$ où $G_k(z) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \frac{G(z)}{z - \epsilon_k}$.

En prolongeant G_k par continuité on a $G_k(\epsilon_k) = \lim_{z \rightarrow \epsilon_k} \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \frac{G(z) - G(\epsilon_k)}{z - \epsilon_k} = 1$, et $G_k(\epsilon_l) = 0$ si $l \neq k$. On reconnaît ainsi l'expression des polynômes de Lagrange. Puis,

$$L(G_k(z)(\overline{G_k(z)} - 1)) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} L \left(G(z) \frac{\overline{G_k(z)} - 1}{z - \epsilon_k} \right) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} L(G(z)\overline{h(z)}), \quad (\text{A.118})$$

où

$$h(z) = \frac{G_k(z) - 1}{z - \epsilon_k} = -\epsilon_k z \frac{G_k(z) - G_k(\epsilon_k)}{z - \epsilon_k}. \quad (\text{A.119})$$

Comme $G_k(z) - G_k(\epsilon_k)$ est un polynôme de degré $M - 1$ ayant pour racine ϵ_k , alors $\frac{G_k(z) - G_k(\epsilon_k)}{z - \epsilon_k}$ est un polynôme de degré $M - 2$ et $h(z)$ un polynôme de degré $M - 1$. Or d'après (A.84) on a $L(G'(z)z^p) = 0$ pour tout $0 \leq p < M$, par conséquent :

$$L(G(z)\overline{h(z)}) = 0 \iff L(G_k(z)) = L(|G_k(z)|^2). \quad (\text{A.120})$$

Puisque $G_k(z)$ est de degré $M - 1$ on a d'après (A.74), $L(|G_k(z)|^2) > 0$, d'où

$$\rho_k = L(G_k(z)) = L(|G_k(z)|^2) > 0. \quad (\text{A.121})$$

(h) Soit $f(z)$ un polynôme de degré N , il existe un polynôme $q(z)$ de degré $N - M$ et un polynôme $r(z)$ de degré $M - 1$ tels que

$$f(z) = G(z)q(z) + r(z), \quad (\text{A.122})$$

avec $f(\epsilon_k) = r(\epsilon_k)$ puisque $G(\epsilon_k) = 0$, donc r doit interpoler les valeurs $f(\epsilon_k)$ en les racines ϵ_k de G , ce que fait précisément l'interpolation par les polynômes de Lagrange G_k :

$$r(z) = \sum_{k=1}^M f(\epsilon_k) G_k(z). \quad (\text{A.123})$$

Or $L(G(z)q(z)) = 0$ car q est de degré $N - M$ d'après (A.84), on en conclut que

$$L(f(z)) = L(r(z)) = \sum_{k=1}^M f(\epsilon_k) L(G_k(z)) = \sum_{k=1}^M \rho_k f(\epsilon_k), \quad (\text{A.124})$$

et en prenant $f(z) = z^n$ on obtient le résultat escompté (A.58).

(k) Enfin montrons que les quantités M , ϵ_k et ρ_k sont uniques. Supposons (A.58) vérifiée pour $-N \leq n \leq N$ et ces quantités. Alors la forme hermitienne (A.59) s'écrit :

$$\sum_{0 \leq p, q \leq N} c_{p-q} u_p \bar{u}_q = \sum_{0 \leq p, q \leq N} \left(\sum_{k=1}^M \rho_k \epsilon_k^{p-q} \right) u_p \bar{u}_q, \quad (\text{A.125})$$

$$= \sum_{k=1}^M \rho_k \left(\sum_{0 \leq p, q \leq N} (\epsilon_k^p u_p) (\bar{\epsilon}_k^q \bar{u}_q) \right), \quad (\text{A.126})$$

$$= \sum_{k=1}^M \rho_k |u_0 + u_1 \epsilon_k + \dots + u_M \epsilon_k^M|^2. \quad (\text{A.127})$$

Montrons que les ϵ_k sont racines du polynôme $G(z)$ de formule explicite donnée en (A.89), ce qui prouvera l'unicité de la décomposition. Si les ϵ_k sont les racines d'un polynôme $G(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_M z^M$ de degré M , alors d'une part

$$u_0 + u_1 \epsilon_k + \dots + u_M \epsilon_k^M = 0, \quad (\text{A.128})$$

et d'autre part

$$u_0 c_{-p} + u_1 c_{-p+1} + \dots + u_M c_{-p+M} = \sum_{k=1}^M \rho_k (u_0 \epsilon_k^{-p} + u_1 \epsilon_k^{-p+1} + \dots + u_M \epsilon_k^{-p+M}), \quad (\text{A.129})$$

$$= \sum_{k=1}^M \rho_k \epsilon_k^{-p} (u_0 + u_1 \epsilon_k + \dots + u_M \epsilon_k^M), \quad (\text{A.130})$$

$$= \sum_{k=1}^M \rho_k \epsilon_k^{-p} G(\epsilon_k). \quad (\text{A.131})$$

On a alors un système de $M + 1$ équations à $M + 1$ inconnues :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_M \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-(M-1)} & c_{-(M-2)} & \dots & c_1 \\ 1 & \epsilon_k & \dots & \epsilon_k^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.132})$$

dont le déterminant est nécessairement nul, sinon tous les coefficients u_p seraient nuls. Ce qui prouve que les $\epsilon_k = e^{j\omega_k}$ sont racines du polynôme $G(z)$ défini en (A.89). Enfin par le point précédent on a $\rho_k = L(G_k(z))$ avec

$$G_k(z) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \frac{G(z)}{z - \epsilon_k} = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \prod_{l=0, l \neq k}^{M-1} (z - \epsilon_l) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \sum_{l=0}^{M-1} a_l z^l, \quad (\text{A.133})$$

donc ρ_k s'exprime explicitement par

$$\rho_k = L(G_k(z)) = \frac{1}{G'(\epsilon_k)} \sum_{l=0}^{M-1} a_l \epsilon_k^l, \quad (\text{A.134})$$

où

$$a_l = (-1)^{M-1-l} \sigma_{M-1-l}, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq M-1} \epsilon_{i_1} \epsilon_{i_2} \dots \epsilon_{i_k}. \quad (\text{A.135})$$

Pour des applications numériques on préférera à cette formule la résolution d'un système d'équations qui sera plus robuste :

$$\sum_{k=1}^M \rho_k \cos \omega_k n = \operatorname{Re} \{c_n\} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^M \rho_k \sin \omega_k n = \operatorname{Im} \{c_n\}, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (\text{A.136})$$

et l'on sait que si les ω_k sont de modules distincts, alors les matrices contenant les cosinus (resp. les sinus) sont de déterminants non nuls, donc inversibles. Si ça n'est pas le cas, alors par exemple si $\omega_1 = -\omega_2$ et les autres de modules différents, alors on a

$$\rho_1 \sin \omega_1 n + \rho_2 \sin \omega_2 n = (\rho_2 - \rho_1) \sin \omega_2 n, \quad (\text{A.137})$$

$$\rho_1 \cos \omega_1 n + \rho_2 \cos \omega_2 n = (\rho_2 + \rho_1) \cos \omega_2 n, \quad (\text{A.138})$$

et en notant $\rho_2 - \rho_1 = \tilde{\rho}_2$ et $\rho_2 + \rho_1 = \hat{\rho}_2$, puis en résolvant les deux systèmes réduits en cosinus et sinus, qui sont inversibles, on détermine les valeurs tous les ρ_k ainsi que $\tilde{\rho}_2$ et $\hat{\rho}_2$, puis ρ_1 et ρ_2 . Cette méthode est applicable pour plusieurs paires de fréquences qui ne diffèrent que d'un signe. □