



HAL
open science

Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction : mots tassés et diagrammes de dissection

Cécile Mammez

► **To cite this version:**

Cécile Mammez. Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction : mots tassés et diagrammes de dissection. Combinatoire [math.CO]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2017. Français. NNT : 2017DUNK0459 . tel-01729065

HAL Id: tel-01729065

<https://theses.hal.science/tel-01729065>

Submitted on 12 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université du Littoral Côte d'Opale

École doctorale **Ecole Doctorale Régionale SPI 72**

Unité de recherche **Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville**

Thèse présentée par **Cécile Mammez**

Soutenue le **27 novembre 2017**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université du Littoral Côte d'Opale

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Combinatoire algébrique**

Titre de la thèse

Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction: mots tassés et diagrammes de dissection

Thèse dirigée par Loïc FOISSY

Composition du jury

<i>Président de jury</i>	Frédéric PATRAS	Directeur de Recherche à l'Université Nice Sophia Antipolis
<i>Rapporteurs</i>	Claudia MALVENUTO Dominique MANCHON	Professeure Associée à l'Université de Rome Chargé de Recherche à l'Université Clermont-Auvergne
<i>Examineurs</i>	Jean-Christophe NOVELLI Shalom ELIAHOU Jean FROMENTIN	Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale Maître de Conférences à l'Université du Littoral Côte d'Opale
<i>Directeur de thèse</i>	Loïc FOISSY	Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale

Université du Littoral Côte d'Opale

École doctorale **Ecole Doctorale Régionale SPI 72**

Unité de recherche **Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville**

Thèse présentée par **Cécile Mammez**

Soutenue le **27 novembre 2017**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université du Littoral Côte d'Opale

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Combinatoire algébrique**

Titre de la thèse

Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction: mots tassés et diagrammes de dissection

Thèse dirigée par Loïc FOISSY

Composition du jury

<i>Président de jury</i>	Frédéric PATRAS	Directeur de Recherche à l'Université Nice Sophia Antipolis
<i>Rapporteurs</i>	Claudia MALVENUTO Dominique MANCHON	Professeure Associée à l'Université de Rome Chargé de Recherche à l'Université Clermont-Auvergne
<i>Examineurs</i>	Jean-Christophe NOVELLI Shalom ELIAHOU Jean FROMENTIN	Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale Maître de Conférences à l'Université du Littoral Côte d'Opale
<i>Directeur de thèse</i>	Loïc FOISSY	Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale

Université du Littoral Côte d'Opale

Doctoral School **Ecole Doctorale Régionale SPI 72**

University Department **Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville**

Thesis defended by **Cécile Mammez**

Defended on **27th November, 2017**

In order to become Doctor from Université du Littoral Côte d'Opale

Academic Field **Mathematics**

Speciality **Algebraic combinatorics**

Thesis Title

Two examples of Hopf algebras with a selection-quotient coproduct: packed words and dissection diagrams

Thesis supervised by Loïc FOISSY

Committee members

<i>Committee President</i>	Frédéric PATRAS	Senior Researcher at Université Nice Sophia Antipolis
<i>Referees</i>	Claudia MALVENUTO	Associate Professor qualified as Full Professor at Université de Rome
	Dominique MANCHON	Junior Researcher at Université Clermont-Auvergne
<i>Examiners</i>	Jean-Christophe NOVELLI	Professor at Université Paris-Est Marne-la-Vallée
	Shalom ELIAHOU	Professor at Université du Littoral Côte d'Opale
	Jean FROMENTIN	Associate Professor at Université du Littoral Côte d'Opale
<i>Supervisor</i>	Loïc FOISSY	Professor at Université du Littoral Côte d'Opale

Mots clés : Algèbres de Hopf combinatoires, permutations, mots tassés, produit de battage, coproduit semi-direct, fonctions quasi-symétriques, diagrammes de dissection, coliberté, algèbres pré-Lie, algèbres enveloppantes

Keywords: Combinatorial Hopf algebras, permutations, packed words, shuffle product, semi-direct coproduct, quasi-symmetric functions, dissection diagrams, cofreedom, pre-Lie algebras, enveloping algebras

Cette thèse a été préparée au

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville

Maison de la Recherche Blaise Pascal

50, rue Ferdinand Buisson

CS 80699

62228 Calais Cedex

France

☎ (33)(0)3 21 46 55 89

Site <http://www-lmpa.univ-littoral.fr/>



Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction: mots tassés et diagrammes de dissection

Résumé

Ce manuscrit est consacré à l'étude de la combinatoire de deux algèbres de Hopf d'extraction-contraction. La première est l'algèbre de Hopf de mots tassés **WMat** introduite par Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa dont l'objectif était la construction d'un modèle de coproduit d'extraction-contraction pour les mots tassés. Nous explicitons certains sous-objets ou objets quotients ainsi que des applications vers d'autres algèbres de Hopf. Ainsi, nous considérons une algèbre de permutations dont le dual gradué possède un coproduit de déconcaténation par blocs et un produit de double battage décalé. Le double battage engendre la commutativité de l'algèbre qui est donc distincte de celle de Malvenuto et Reutenauer. Nous introduisons également une algèbre de Hopf engendrée par les mots tassés de la forme $x_1 \dots x_1$. Elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives. Son dual gradué est donc isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques. Nous considérons également une algèbre de Hopf de compositions et donnons son interprétation en termes de coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf.

Le deuxième objet d'étude est l'algèbre de Hopf de diagrammes de dissection \mathcal{H}_D introduite par Dupont en théorie des nombres. Nous cherchons des éléments de réponse concernant la nature de sa cogèbre sous-jacente. Est-elle colibre ? La dimension des éléments primitifs de degré 3 ne permet pas de conclure. Le cas du degré 5 permet d'établir la non-coliberté dans le cas où le paramètre de \mathcal{H}_D vaut -1 . Nous étudions également la structure pré-Lie du dual gradué \mathcal{H}_D^{\otimes} . Nous réduisons le champ de recherche à la sous-algèbre pré-Lie non triviale engendrée par le diagramme de dissection de degré 1. Cette algèbre pré-Lie n'est pas libre.

Mots clés : Algèbres de Hopf combinatoires, permutations, mots tassés, produit de battage, coproduit semi-direct, fonctions quasi-symétriques, diagrammes de dissection, coliberté, algèbres pré-Lie, algèbres enveloppantes

Two examples of Hopf algebras with a selection-quotient coproduct: packed words and dissection diagrams

Abstract

This thesis deals with the study of combinatorics of two Hopf algebras. The first one is the packed words Hopf algebra **WMat** introduced by Duchamp, Hoang-Nghia, and Tanasa who wanted to build a coalgebra model for packed words by using a selection-quotient process. We describe certain sub-objects or quotient objects as well as maps to other Hopf algebras. We consider first a Hopf algebra of permutations. Its graded dual has a block deconcatenation coproduct and double shuffle product. The double shuffle product is commutative so the Hopf algebra is different from the Malvenuto and Reutenauer one. We analyse then the Hopf algebra generated by packed words looking like $x_1 \dots x_1$. This Hopf algebra and non commutative symmetric functions are isomorphic. So its graded dual and quasi-symmetric functions are isomorphic too. Finally we consider a Hopf algebra of compositions and give its interpretation in terms of a semi-direct coproduct structure.

The second object we study is the Hopf algebra of dissection diagrams \mathcal{H}_D introduced by Dupont in number theory. We study the cofreedom problem. We can't conclude with homogenous primitive elements of degree 3. With the degree 5 case, we can say that \mathcal{H}_D is not cofree with the parameter -1 . We study the pre-Lie algebra structure of \mathcal{H}_D 's graded dual too. We consider in particular the sub-pre-Lie algebra generated by the dissection diagram of degree 1. It is not a free pre-Lie algebra.

Keywords: Combinatorial Hopf algebras, permutations, packed words, shuffle product, semi-direct coproduct, quasi-symmetric functions, dissection diagrams, cofreedom, pre-Lie algebras, enveloping algebras

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville

Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228 Calais Cedex – France

Remerciements

J'aimerais profiter de l'occasion qui m'est offerte pour exprimer ma gratitude envers quelques personnes.

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Monsieur Loïc Foissy, d'avoir accepté de me guider durant mes trois années de doctorat. J'ai pu, grâce à lui, travailler sur un sujet qui m'a particulièrement enthousiasmée et m'a permis de m'épanouir. Je lui sais également gré de tous ses précieux conseils que ce soit dans les domaines scientifiques, pédagogiques et administratifs.

Je remercie Madame Claudia Malvenuto et Monsieur Dominique Manchon de m'avoir fait l'honneur et le plaisir d'être mes rapporteurs. Un très grand merci également à Messieurs Frédéric Patras, Jean-Christophe Novelli, Shalom Eliahou et Jean Fromentin d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je suis très reconnaissante envers tous les membres de jury pour leurs encouragements, leurs remarques et leurs suggestions. Je remercie particulièrement Jean Fromentin pour sa collaboration dans la programmation de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection.

Merci à tous les membres du laboratoire de m'avoir accueillie et intégrée au sein du LMPA. Merci pour leur gentillesse et leurs conseils. Je n'oublie pas non plus Isabelle Buchard et Gaëlle Compiègne. Un grand merci à Lisette Jager, Alain Ninet et Anthony Mansuy.

Je tiens à remercier toute ma famille et mes amis pour leur présence et leur soutien tout au long de mes études. Leurs paroles réconfortantes m'ont été d'un grand secours pour pallier les aléas de la thèse.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont eu la gentillesse de venir m'écouter pendant ma soutenance.

Sommaire

Résumé	xi
Remerciements	xiii
Sommaire	xv
Introduction	1
1 Algèbres de Hopf combinatoires	5
2 Etude de l'algèbre de Hopf de mots tassés WMat	17
3 Etude de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection	81
Bibliographie	139
A Compléments sur le chapitre 2	145
B Compléments sur le chapitre 3	155
Table des matières	181

Introduction

Une algèbre de Hopf est un espace vectoriel muni d'une structure de bigèbre, *i.e.* d'algèbre associative unitaire et de cogèbre coassociative counitaire compatibles entre elles, et possédant un antipode, *i.e.* un inverse pour l'identité en considérant le produit de convolution des endomorphismes de \mathcal{H} . Cette structure intervient dans de nombreux domaines tels que la renormalisation en théorie des champs quantiques [17, 8], l'étude des fonctions quasi-symétriques [40, 60, 61, 38, 20, 19], l'analyse différentielle [42, 41].

Mais, en réalité, d'où viennent-elles ? Quelles étapes importantes ont mené au formalisme de sa définition ?

Il me semble primordial de commencer par des éléments de réponse à ces deux questions. Les intérêts y sont tout trouvés : satisfaire une curiosité historique et se rappeler qu'une notion ne se définit jamais de façon formelle et théorique au premier essai. Elle apparaît en filigrane et grandit petit à petit grâce aux différentes contributions.

Le bref historique qui va suivre est tiré de l'article intitulé « The beginnings of the theory of Hopf algebras » et écrit en 2009 par Andruskiewitsch et Ferrer Santos.

La fondation de la théorie est attribuée à Heinz Hopf, mathématicien allemand du 20^e siècle (on peut trouver une biographie dans [74, 36]). Il en pose les premiers jalons en topologie algébrique [47] en 1941 lors de l'étude de l'homologie des groupes de Lie compacts. L'expression « algèbre de Hopf » apparaît pour la première fois en 1953 dans l'introduction d'un article de Borel [7] où l'auteur étudie la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes. Borel y donne également une définition d'algèbre de Hopf mais elle ne fait mention ni de la coassociativité du coproduit ni de l'existence de l'antipode.

Au séminaire « Sophus Lie » de l'année 1955-1956, dans son deuxième exposé [12], Cartier donne une définition abstraite d'une algèbre de Hopf sous le nom d'hyperalgèbre (cette dénomination a été suggérée par Dieudonné). En fait, la définition d'hyperalgèbre selon Cartier correspond à la définition actuelle d'une bigèbre graduée connexe cocommutative. Il ne fait pas d'explicite référence à l'antipode mais, avec le caractère gradué connexe, ceci est automatique.

Pour Milnor et Moore, une algèbre de Hopf est une bigèbre graduée. En 1965, dans la section 5 de [68], ils énoncent et démontrent le théorème de structure maintenant connu sous le nom de théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore liant, en caractéristique 0, les algèbres de Hopf graduées, connexes et cocommutatives avec l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des éléments primitifs.

A partir de 1966, le formalisme se stabilise. Kostant [49] définit le produit de convolution des endomorphismes et l'existence de l'antipode devient un des axiomes des algèbres de Hopf. On a alors la notion d'algèbre de Hopf dans sa version actuelle et ainsi utilisée par Sweedler, Abe, Montgomery [87, 1, 71].

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des algèbres de Hopf par le biais de la combinatoire algébrique. Elle consiste en l'étude de deux algèbres de Hopf d'extraction-contraction :

celles des mots tassés de Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa [21] et celle des diagrammes de dissection de Dupont [23]. Ce manuscrit se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à quelques généralités. Nous commençons par rappeler la définition d’algèbre de Hopf, de sous-algèbre de Hopf, de quotient et de morphisme d’algèbres de Hopf. Viennent ensuite quelques rappels sur la notion d’algèbre enveloppante et le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore. Puis, nous nous attardons sur quelques exemples d’algèbres de Hopf classiques. Tout d’abord, nous présentons l’algèbre de Hopf des arbres enracinés de Connes et Kreimer \mathcal{H}_{CK} [17] provenant de la théorie des champs quantiques. Nous considérons par la suite l’algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques **QSym** [40, 60] introduite par Gessel et étudiée par Malvenuto. Elle provient de l’étude des P-partitions. Les fonctions symétriques sont présentées comme sous-objet de **QSym**. Elle sera vue comme algèbre de coordonnées du groupe des séries formelles de constante égale à 1 dans le chapitre 3. Nous nous intéressons également à l’algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives **NSym** introduite par Gelfand, Krob, Lascoux, Leclerc, Retakh et Thibon [38]. Il s’agit du dual gradué de **QSym**. Le dernier exemple est l’algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres introduite par Malvenuto et Reutenauer [60, 61] et leur permettant de décrire l’algèbre de Solomon [85], et donc **NSym**, comme sous-objet. Le chapitre se termine avec la description d’un procédé de construction de morphismes élaboré par Aguiar, Bergeron et Sottile [2].

Le deuxième chapitre est dédié à l’étude de l’algèbre de Hopf de mots tassés **WMat** introduite par Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa [21]. Pour cela, nous commençons par considérer **WMat** à proprement parler (absence de coliberté, antipode, description de **WMat** en termes de compositions ensemblistes étendues, description du dual). Nous nous intéressons ensuite à une sous-algèbre de Hopf de permutations, notée \mathcal{SH} , dont le dual \mathcal{SH}^{\otimes} est isomorphe, de façon non triviale, à une algèbre de Hopf \mathcal{SQSym} introduite par Hivert, Novelli et Thibon. Il est également possible de définir sur \mathcal{SH}^{\otimes} une structure de quadri-algèbre et donc une double structure d’algèbre dendriforme. Nous introduisons par la suite, **SPW**, l’algèbre de Hopf des mots tassés stricts obtenue en quotientant **WMat** par le biidéale engendré par les mots contenant la lettre x_0 . L’étude se porte plus particulièrement sur sa sous-algèbre de Hopf **ISPW** des mots tassés stricts croissants engendrée par les classes des mots de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_1 \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_k \text{ fois}}$.

Son caractère cocommutatif pousse à se tourner vers ses éléments primitifs. Nous en décrivons quelques familles. Nous montrons ensuite le caractère isomorphe entre **ISPW** et l’algèbre de Hopf **NSym** des fonctions symétriques non commutatives. Une algèbre de Hopf quotient de compositions étendues notée \mathcal{C}_e est introduite. Elle est obtenue en associant à un mot tassé w le $\text{sup}(w)$ -uplet des fréquences d’apparition des lettres $x_0, x_1, \dots, x_{\text{sup}(w)}$. Elle n’est pas cocommutative mais est liée à **ISPW**. Cela permet d’établir des conditions sur ses éléments primitifs. Il est également possible d’exprimer \mathcal{C}_e comme un coproduit semi-direct d’algèbres de Hopf. Cette construction met à jour une coaction permettant par la suite de définir deux actions de groupes. Nous terminons ce chapitre par la construction d’un isomorphisme explicite entre **ISPW**[⊗] et **QSym** (conduisant à deux isomorphismes explicites inverses l’un de l’autres entre **ISPW** et **NSym** et à l’expression d’éléments primitifs dans **NSym**) ainsi que par la construction de quelques morphismes d’algèbres de Hopf entre **WMat** et **QSym** selon le procédé explicité par Aguiar, Bergeron et Sottile et rappelé dans le chapitre 1.

Le troisième chapitre concerne l’étude de l’algèbre de Hopf \mathcal{H}_D des diagrammes de dissection de Dupont [23] dont nous rappelons la définition. Les échelles forment une sous-algèbre de Hopf isomorphe à celle des fonctions symétriques vue comme algèbre de coordonnées du groupe des séries formelles de constante égale à 1. Les corolles constituent la version en termes de

diagrammes de dissection de l'algèbre de Hopf de Faà di Bruno. L'antipode de \mathcal{H}_D est explicitée. Nous nous intéressons ensuite à l'étude de la coliberté de \mathcal{H}_D . Les éléments primitifs de degré 3 ne permettent pas de conclure. Il est néanmoins possible de déterminer la non coliberté de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D lorsque son paramètre vaut -1 . Nous conjecturons la coliberté de \mathcal{H}_D sauf pour un ensemble dénombrable de paramètres. L'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D^{\otimes} est connexe et cocommutative donc isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses éléments primitifs. Ceux-ci peuvent être munis d'une structure pré-Lie. Ceci pousse à considérer la structure de Oudom et Guin de \mathcal{H}_D^{\otimes} . Grâce à l'unique morphisme d'algèbres de Hopf φ , défini sur l'algèbre de Grossman et Larson, à valeurs dans \mathcal{H}_D , envoyant l'arbre de degré 1 sur le diagramme de dissection de degré 1 et respectant les structures pré-Lie, nous obtenons une sous-algèbre pré-Lie non triviale et non libre. Nous nous intéressons également au noyau non trivial de φ et conjecturons qu'il est engendré par les forêts enracinées possédant au moins un sommet à au moins trois descendants. Le chapitre se termine par la construction de morphismes définis sur \mathcal{H}_D et à valeurs dans **QSym** grâce au procédé de Aguiar, Bergeron et Sottile.

Algèbres de Hopf combinatoires

L'objectif de ce chapitre est de tout d'abord rappeler la notion d'algèbre de Hopf dans son formalisme actuel (*c.f.* [87, 1, 71, 48, 80]). Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à quelques algèbres de Hopf de référence, à savoir celle des arbres enracinés de Connes et Kreimer, celle des fonctions quasi-symétriques, celle des fonctions symétriques, celle des fonctions quasi-symétriques libres et celle des fonctions symétriques non commutatives. Nous terminerons avec la présentation d'un procédé établi par Aguiar, Bergeron et Sottile montrant les fonctions quasi-symétriques **QSym**, munies d'un caractère particulier ζ_Q , comme objet terminal dans la catégorie des algèbres de Hopf combinatoires et permettant ainsi de construire des morphismes à valeurs dans **QSym**.

1.1 Définition d'une algèbre de Hopf

Pour respecter la cohérence avec les travaux qui vont suivre, considérons un corps \mathbb{K} de caractéristique nulle.

1.1.1 Algèbres et cogèbres

Définition 1. Une algèbre est un triplet (\mathcal{A}, m, η) où \mathcal{A} est un espace vectoriel muni de deux applications linéaires, un produit $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et une unité $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$, vérifiant les deux propriétés suivantes.

1. Le produit m est associatif i.e. $m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m)$ ce qui se traduit en diagramme commutatif par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m \otimes Id} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ Id \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathcal{A} \end{array}$$

2. L'axiome d'unité est satisfait i.e. $m \circ (\eta \otimes Id) = m \circ (Id \otimes \eta)$ ce qui se traduit en diagramme commutatif par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\eta \otimes Id} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{Id \otimes \eta} & \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow & \downarrow m & \swarrow & \\ & & \mathcal{A} & & \end{array}$$

Exemple. Soit V un espace vectoriel. On pose $T\langle V \rangle = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$. Par commodité, un élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ est simplement noté $v_1 \dots v_n$. On définit le produit de concaténation m par :

$$m : \begin{cases} T\langle V \rangle \otimes T\langle V \rangle & \longrightarrow & T\langle V \rangle \\ v_1 \dots v_n \otimes w_1 \dots w_s & \mapsto & v_1 \dots v_n w_1 \dots w_s. \end{cases}$$

Munie de ce produit $T\langle V \rangle$ est une algèbre associative appelée algèbre tensorielle de V .

Définition 2. Soient $(\mathcal{A}_1, m_1, \eta_1)$ et $(\mathcal{A}_2, m_2, \eta_2)$ deux algèbres. Un morphisme d'algèbres est une application linéaire $f : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ telle que $f \circ m_1 = m_2 \circ (f \otimes f)$ et $f \circ \eta_1 = \eta_2$. En termes de diagrammes commutatifs, ceci se traduit par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{m_1} & \mathcal{A}_1 \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{m_2} & \mathcal{A}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta_1} & \mathcal{A}_1 \\ & \searrow \eta_2 & \downarrow f \\ & & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

Définition 3. Une cogèbre est un triplet $(\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$ où \mathcal{C} est un espace vectoriel muni de deux applications linéaires, un coproduit $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et une co-unité $\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{K}$, vérifiant les deux propriétés suivantes.

1. Le coproduit Δ est coassociatif i.e. $(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$ ce qui se traduit en diagramme commutatif par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes Id \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{Id \otimes \Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \end{array} .$$

2. L'axiome de co-unité est satisfait i.e. $(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ ce qui se traduit en diagramme commutatif par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\varepsilon \otimes Id} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{Id \otimes \varepsilon} & \mathcal{C} \otimes \mathbb{K} \\ & \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array} .$$

Exemple. On considère l'algèbre tensorielle $T\langle V \rangle$ d'un espace vectoriel V . Pour tout entier naturel n , tout élément $u = v_1 \dots v_n \in V^{\otimes n}$ et tout sous-ensemble $I = \{i_1 < \cdots < i_s\}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $[n] \setminus I = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I = \{j_1 < \cdots < j_{n-s}\}$, $u_I = v_{i_1} \dots v_{i_s}$ et $u_{[n] \setminus I} = v_{j_1} \dots v_{j_{n-s}}$. On définit sur $T\langle V \rangle$ l'application Δ par :

$$\Delta : \begin{cases} T\langle V \rangle & \longrightarrow & T\langle V \rangle \otimes T\langle V \rangle \\ u & \mapsto & \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} u_I \otimes u_{[n] \setminus I} \end{cases}$$

Munie de ce coproduit, $T\langle V \rangle$ est une cogèbre coassociative.

Définition 4. Soient $(\mathcal{C}_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ $(\mathcal{C}_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ deux cogèbres. Un morphisme de cogèbres est une application linéaire $f : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ telle que $(f \otimes f) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ f$ et $\varepsilon_2 \circ f = \varepsilon_1$. En termes

de diagrammes commutatifs, ceci se traduit par :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\Delta_1} & \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_1 \\
 f \downarrow & & \downarrow f \otimes f \\
 \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\Delta_2} & \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}_2
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathbb{K} \\
 & \searrow f & \uparrow \varepsilon_2 \\
 & & \mathcal{C}_2
 \end{array}$$

Définition 5. Soient (\mathcal{A}, m, η) une algèbre, \mathcal{I} un sous-espace vectoriel de \mathcal{A} , $(\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre et \mathcal{J} un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} .

1. \mathcal{I} est une sous-algèbre de \mathcal{A} si $m(\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ et $\eta(\mathbb{K}) \subset \mathcal{I}$.
2. \mathcal{J} est une sous-cogèbre de \mathcal{C} si $\Delta(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$.
3. \mathcal{I} est un idéal bilatère de \mathcal{A} si $m(\mathcal{I} \otimes \mathcal{A} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. L'espace \mathcal{A}/\mathcal{I} est une algèbre quotient si et seulement si \mathcal{I} est un idéal bilatère.
4. \mathcal{J} est un coidéal bilatère de \mathcal{C} si $\Delta(\mathcal{J}) \subset (\mathcal{J} \otimes \mathcal{C} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{J})$ et $\varepsilon(\mathcal{J}) = 0$. L'espace \mathcal{C}/\mathcal{J} est une cogèbre quotient si et seulement si \mathcal{J} est un coidéal bilatère.

Exemple. On considère l'algèbre tensorielle $T\langle V \rangle$ d'un espace vectoriel V . On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{I} = \langle v_1 v_2 - v_2 v_1, v_1, v_2 \in V \rangle$. C'est trivialement un idéal et un coidéal. L'espace $S(V) = T\langle V \rangle / \mathcal{I}$, appelé algèbre symétrique de V , peut donc être muni d'une structure d'algèbre (produit d'union disjointe) et de cogèbre.

1.1.2 Bigèbres et Algèbres de Hopf

Définition 6. Une bigèbre est un quintuplet $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tel que :

1. le triplet (\mathcal{H}, m, η) soit une algèbre,
2. le triplet $(\mathcal{H}, \Delta, \varepsilon)$ soit une cogèbre,
3. les applications m et η soient des morphismes de cogèbres ce qui est équivalent à exiger que les applications Δ et ε soient des morphismes d'algèbres.

Exemples. Soit V un espace vectoriel. L'algèbre tensorielle $T\langle V \rangle$ et l'algèbre symétrique $S(V)$, munies des produits et coproduits définis précédemment, sont des bigèbres.

Proposition 7. Soient $(\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre et (\mathcal{A}, m, η) une algèbre. On définit sur l'espace vectoriel $\text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ des morphismes linéaires de \mathcal{C} dans \mathcal{A} le produit de convolution suivant :

$$\star : \begin{cases} \text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \otimes \text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \\ f \otimes g & \longmapsto & f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \end{cases}$$

Le triplet $(\text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A}), \star, \varepsilon\eta)$ est une algèbre.

Définition 8. Une algèbre de Hopf est un quintuplet $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ tel que :

1. le quintuplet $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ soit une bigèbre,
2. l'application identité Id possède un inverse S , appelé antipode, pour le produit de convolution \star défini sur $\text{hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Exemples. On considère un espace vectoriel V , son algèbre tensorielle $T\langle V \rangle$ et son algèbre symétrique $S(V)$. On définit deux applications S_1 et S_2 par :

$$S_1 : \begin{cases} T\langle V \rangle & \longrightarrow & T\langle V \rangle \\ v_1 \dots v_n & \mapsto & (-1)^n v_n \dots v_1 \end{cases}$$

et

$$S_2 : \begin{cases} S(V) & \longrightarrow & S(V) \\ v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n} & \mapsto & (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n}. \end{cases}$$

L'application S_1 (respectivement S_2) est l'antipode de la bigèbre $T\langle V \rangle$ (respectivement $S(V)$). Les bigèbres $T\langle V \rangle$ et $S(V)$ sont donc des algèbres de Hopf.

Définition 9. Soient V un espace vectoriel, $A = (A, m, \eta)$ une algèbre, $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre et $H = (\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre.

1. On dit que V est gradué s'il s'écrit sous la forme $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ où pour tout entier naturel n l'espace vectoriel V_n est un sous-espace vectoriel de V de dimension finie.
2. Le dual gradué de V est le sous-espace vectoriel du dual V^* de V défini par $V^{\otimes} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^*$.
3. On dit que A est graduée si l'espace A sous-jacent est gradué et si les applications m, η sont homogènes de degré zéro.
4. On dit que C est graduée si l'espace C sous-jacent est gradué et si les applications Δ et ε sont homogènes de degré zéro.
5. On dit que H est graduée si elle est graduée comme algèbre et comme cogèbre.
6. Si H est une algèbre de Hopf graduée en tant que bigèbre alors H est une algèbre de Hopf graduée.

Proposition 10. Soient (A, m, η) une algèbre graduée et (C, Δ, ε) une cogèbre graduée et $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf graduée. On note m^*, η^*, Δ^* et ε^* les transposées respectives de m, η, Δ et ε .

1. Le triplet $(A^{\otimes}, m^*, \eta^*)$ est une cogèbre.
2. Le triplet $(C^{\otimes}, \Delta^*, \varepsilon^*)$ est une algèbre.
3. Le quintuplet $(\mathcal{H}^{\otimes}, m^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ est une algèbre de Hopf.

Définition 11. Soit $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre graduée. On dit qu'elle est connexe si \mathcal{H}_0 est de dimension 1.

Exemples. Soit V un espace vectoriel gradué. L'algèbre de Hopf $T\langle V \rangle$ (respectivement $S(V)$) est naturellement graduée par la longueur des mots (respectivement des monômes). Elles sont également connexes.

Proposition 12. Soit $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre graduée connexe. L'existence de l'antipode S est alors automatique et S est homogène de degré zéro. Cela signifie que $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf graduée connexe.

Démonstration. Ceci est démontré par Sweedler dans [87, lemme 9.2.3]. □

Définition 13. Soient $(\mathcal{H}_1, m_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{H}_2, m_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ deux algèbres de Hopf graduées connexes. Un morphisme d'algèbres de Hopf graduées $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ homogène de degré 0 est une application linéaire telle que :

1. pour tout entier naturel n , $f|_{(\mathcal{H}_1)_n} \subset (\mathcal{H}_2)_n$,
2. f soit un morphisme d'algèbres et de cogèbres i.e un morphisme de bigèbres. On a alors automatiquement $f \circ S_1 = S_2 \circ f$ en notant S_1 (respectivement S_2) l'antipode de \mathcal{H}_1 (respectivement \mathcal{H}_2).

Définition 14. Soit $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf graduée connexe et \mathcal{I} un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} .

1. \mathcal{I} est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{H} si \mathcal{I} est à la fois une sous-algèbre et une sous-cogèbre.
2. \mathcal{H}/\mathcal{I} est une algèbre de Hopf quotient si \mathcal{I} est un biidéale i.e. si \mathcal{I} est à la fois un idéal et un coidéale.

1.1.3 Algèbre enveloppante, théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore

Définition 15. Une algèbre de Lie est un couple $(\mathfrak{g}, \{-, -\})$ où \mathfrak{g} est un espace vectoriel et $\{-, -\}$ est un crochet de Lie i.e. un produit vérifiant :

1. la propriété d'antisymétrie. Pour tout couple $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, on a : $\{x, y\} = -\{y, x\}$.
2. la relation de Jacobi. Pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathfrak{g}^3$, on a :

$$\{x, \{y, z\}\} + \{z, \{x, y\}\} + \{y, \{z, x\}\} = 0.$$

Exemples.

1. Soit (\mathcal{A}, m) une algèbre. On appelle crochet associé à m et on note $\{-, -\}$ le produit tel que :

$$\{x, y\} = m(x \otimes y) - m(y \otimes x) \text{ pour tout couple } (x, y) \in \mathcal{A}^2.$$

L'algèbre \mathcal{A} , munie de $\{-, -\}$, est une algèbre de Lie.

2. Soit $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf. On appelle espace des primitifs de \mathcal{H} et on note $\text{Prim}(\mathcal{H})$ le sous-espace vectoriel de \mathcal{H} défini par

$$\text{Prim}(\mathcal{H}) = \text{Vect} \left(h \in \mathcal{H}, \Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h \right).$$

L'espace des éléments primitifs est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{H} .

Définition 16. Soit $(g, \{-, -\})$ une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante de g est l'algèbre quotient

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle x \otimes y - y \otimes x - \{x, y\} \rangle.$$

Théorème 17 (théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore). Soit $(\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf graduée, connexe et cocommutative. Elle est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathcal{H} .

Démonstration. Ce théorème est prouvé par Milnor et Moore dans [68, section 5]. □

Remarque. Le théorème ci-dessus a également été démontré par Cartier [12][11, théorème 3.8.1]. Une version de ce théorème en caractéristique p a été prouvée par Quillen [79].

1.2 Quelques algèbres de Hopf classiques

Dans cette section, nous présenterons quelques exemples d'algèbres de Hopf. Il s'agit de modèles classiques en combinatoire algébrique. Elles apparaîtront également dans les chapitres suivants.

1.2.1 Algèbre de Hopf commutative de Connes et Kreimer

L'algèbre de Hopf des forêts enracinées \mathcal{H}_{CK} que nous présentons à été introduite par Dür [24, chapitre 1 paragraphe 2 et chapitre 4 paragraphe 3] dans le cadre de la théorie des algèbres d'incidence. Schmitt [83], qui classe les algèbres de Hopf d'incidence, reprend cet exemple et prouve que son dual gradué (déjà présenté dans [24, chapitre 4 paragraphe 3]) et l'algèbre de Hopf de Grossman et Larson [42] (voir chapitre 3, section 3.2.2) sont isomorphes [83, section 16]. Connes et Kreimer réintroduisent \mathcal{H}_{CK} dans [17, section 2] comme outil pour la renormalisation en théorie des champs quantiques. En effet, les diagrammes de Feynman représentent les interactions entre les particules et indexent des intégrales mal définies responsables de la divergence ultraviolette. L'objectif de la renormalisation est de contrebalancer cette divergence ultraviolette et nécessite la compréhension combinatoire des diagrammes de Feynman. Il est possible de munir ces diagrammes d'une structure d'algèbre de Hopf [50, section 3]. Dans [17, section 2], Connes et Kreimer décrivent cette structure en terme d'arbres enracinés gradués par le nombre de sommets. Broadhurst et Kreimer [8, section 5 et table 3] donnent les dimensions des espaces d'éléments primitifs de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Moerdijk [69, section 3] donne une construction d'algèbre de Hopf sur les opérades de Hopf. L'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer en est un cas particulier [69, exemple 3.6]. Le dual gradué $\mathcal{H}_{CK}^{\otimes}$ de \mathcal{H}_{CK} est, par le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses primitifs. Il est également isomorphe à l'algèbre de Hopf de Grossman et Larson [42, 76, 45]. Foissy [31, 32] introduit et étudie une version non commutative et décorée de l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer. Cette algèbre de Hopf est libre, colibre, autoduale. Il montre qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf de Loday et Ronco [59] en utilisant la notion d'algèbre dendriforme introduite dans [57]. Holtkamp [46] donne une autre démonstration de ce résultat en version non décorée.

On rappelle ici la définition de l'algèbre de Hopf commutative de Connes et Kreimer [17]. Pour cela on suit [26].

Définition 18. 1. Un arbre enraciné est un couple $t = (G, x)$, où G est un arbre, c'est-à-dire un graphe fini, connexe, sans cycle, et x est un sommet de G . Le sommet x est appelé racine de l'arbre enraciné t . L'ensemble des classes d'isomorphie des arbres enracinés est noté $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$; l'ensemble des classes d'isomorphie des arbres enracinés à n sommets est noté $\mathcal{T}_{\mathbb{R}n}$.

2. Soit t un arbre enraciné. On appelle degré de t le nombre de sommets qu'il possède.

Exemples. Représentons les arbres enracinés de degré inférieur ou égal à 4. Par convention, on représentera toujours un arbre enraciné avec une racine dessinée « en bas ».

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbb{R}1} &= \{\bullet\}, & \mathcal{T}_{\mathbb{R}2} &= \{\downarrow\}, \\ \mathcal{T}_{\mathbb{R}3} &= \left\{ \begin{array}{c} \vee \\ \downarrow \end{array}, \downarrow\downarrow \right\}, & \mathcal{T}_{\mathbb{R}4} &= \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{W}, \downarrow\vee, \vee\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Définition 19. 1. Une forêt enracinée F est une union disjointe d'arbres enracinés. La forêt vide sera notée 1 ou $()$.

2. Le degré d'une forêt enracinée est la somme des degrés des arbres enracinés qui la composent. On notera \mathcal{F}_R l'ensemble des forêts enracinées et \mathcal{F}_{R_n} l'ensemble des forêts enracinées de degré n .

Exemples. Représentons les forêts enracinées de degré compris entre 1 et 4.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{R_1} &= \{ \cdot \}, & \mathcal{F}_{R_2} &= \{ \downarrow, \dots \}, \\ \mathcal{F}_{R_3} &= \{ \vee, \downarrow\downarrow, \downarrow\dots, \dots \}, & \mathcal{F}_{R_4} &= \left\{ \mathbb{V}, \downarrow\vee, \vee\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow, \vee\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Le produit est donné par la multiplication des forêts ; l'unité est la forêt vide 1 . Nous considérons donc l'algèbre $\mathbb{K}[\mathcal{T}_R]$ des polynômes en les indéterminées les éléments de \mathcal{T}_R .

Afin de pouvoir expliciter le coproduit, commençons par rappeler la notion de coupe et de coupe admissible.

Définition 20. Soit t un arbre enraciné.

1. Une coupe de t est un choix non vide c d'arêtes de t . La forêt obtenue en ôtant ces arêtes est notée $W^c(t)$. Si c contient toutes les arêtes de t alors c est appelée coupe totale.
2. Une coupe c est dite admissible si elle est différente de la coupe totale et si tout trajet de la racine à une feuille de t rencontre au plus une arête coupée. Si c est admissible, la composante de $W^c(t)$ contenant la racine de t est notée $R^c(t)$. Le produit des autres composantes de $W^c(t)$ est noté $P^c(t)$. L'ensemble des coupes admissibles de t est noté $\text{Adm}(t)$.

Exemple. Pour l'arbre $t = \downarrow\vee$, on a :

coupe c	$\downarrow\vee$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\vee$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\vee$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$
Admissible?	oui	oui	oui	non	oui	oui	non
$W^c(t)$	$\downarrow\downarrow$	$\cdot\vee$	$\downarrow\cdot$	$\dots\downarrow$	$\downarrow\dots$	$\dots\downarrow$	\dots
$R^c(t)$	\downarrow	\vee	\downarrow	\times	\cdot	\downarrow	\times
$P^c(t)$	\downarrow	\cdot	\cdot	\times	$\downarrow\cdot$	\dots	\times

TABLEAU 1.1 – Coupes vs coupes admissibles.

Définition 21. On définit le coproduit $\Delta : \mathbb{K}[\mathcal{T}_R] \rightarrow \mathbb{K}[\mathcal{T}_R] \otimes \mathbb{K}[\mathcal{T}_R]$ de la façon suivante. Soit t un arbre.

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \text{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Il est étendu aux forêts enracinées en morphisme d'algèbres.

Exemple. Déterminons la valeur du coproduit en $t = \downarrow V$.

$$\Delta(\downarrow V) = \downarrow V \otimes 1 + 1 \otimes \downarrow V + \downarrow \cdot \otimes \cdot + \cdot \otimes \downarrow + \cdot \otimes \downarrow \cdot + \cdot \otimes \downarrow \cdot \cdot + \dots \otimes \downarrow \cdot \cdot \cdot.$$

Théorème 22. On note \mathcal{H}_{CK} l'algèbre $\mathbb{K}[\mathcal{T}_{\mathbb{R}}]$ munie de l'union disjointe et du coproduit Δ . C'est une algèbre de Hopf appelée algèbre de Hopf commutative de Connes et Kreimer.

1.2.2 Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques et fonctions symétriques non commutatives

Considérons l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques **QSym** [40] définie comme sur-
algèbre des fonctions symétriques, l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives **NSym**, introduite dans [38] et étudiée dans [51, 22, 52, 53, 20, 19], le dual gradué de **QSym** ainsi que l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres (ou algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer) [60, 61] librement engendrée par les permutations, colibre et autoduale.

L'algèbre des fonctions quasi-symétriques, notée **QSym**, a été introduite par Gessel [40] suite au développement de la théorie des P-partitions par Stanley [86]. Malvenuto et Reutenauer [60, chapitre 4] [61] étudient la structure d'algèbre de Hopf de **QSym**. Ils explicitent l'antipode [60, chapitre 4, corollaire 4.20] [61, corollaire 2.3] également déterminée par Ehrenborg [25, section 3, proposition 3.4]. Malvenuto et Reutenauer s'intéressent également au dual gradué **QSym**^{*} de **QSym**. En effet, les auteurs définissent les fonctions quasi-symétriques libres [60, chapitre 5, section 5.2] [61, section 3], les munissent de deux structures d'algèbres de Hopf isomorphes et duales, expriment l'algèbre Σ des descentes de Solomon [85, 37] comme sous-
algèbre de Hopf et montrent que Σ et le dual gradué de **QSym** sont isomorphes [60, chapitre 5, théorème 5.18] [61, théorème 3.3]. Une réalisation polynomiale notée **FQSym** de l'algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer est donnée dans [20, 19]. Nous utiliserons la notation **FQSym** pour la suite. Duchamp, Hivert et Thibon donnent une autre démonstration de l'autodualité des fonctions quasi-symétriques libres [20, section 3.2, corollaire 3.5] (sachant qu'une troisième preuve est donnée par Foissy [29, section 1, corollaire 6]). Les auteurs s'intéressent également à ses éléments primitifs et émettent la conjecture qu'ils forment une algèbre de Lie libre [20, section 3.4, conjecture 3.8]. Cette conjecture est résolue par Foissy [27, section 4, corollaire 40] en exprimant **FQSym** en termes d'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer décorée grâce à sa structure bidendriforme. Loday et Ronco [59] définissent une algèbre de Hopf d'arbres binaires plans comme sous-
algèbre de **FQSym**. Poirier et Reutenauer [77, section 3] utilisent les deux structures d'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres pour définir deux algèbres de Hopf sur le \mathbb{Z} -module ayant les tableaux de Young standard pour base.

Fonctions quasi-symétriques

Rappelons la construction de **QSym** détaillée dans [60, 61]. On considère $Y = \{y_1 < y_2 < \dots\}$ un ensemble infini, dénombrable et totalement ordonné d'indéterminées commutant deux à deux. On pose $\mathbb{K}[[Y]]$ l'algèbre des séries formelles sur Y . On considère dans $\mathbb{K}[[Y]]$ le sous-espace vectoriel

$$\mathbf{QSym} = \text{Vect} \left(M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = \sum_{y_{i_1} < \dots < y_{i_k}} y_{i_1}^{\alpha_1} \dots y_{i_k}^{\alpha_k}, k \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k \right).$$

L'espace **QSym** est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[[Y]]$ pour le produit habituel des séries formelles. Dans le cas de **QSym** il s'écrit comme un produit de battage contractant.

Exemple. Considérons les éléments $M_{(1)}$ et $M_{(2)}$. On a :

$$M_{(1)}M_{(2)} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} y_i \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{N}^*} y_j^2 \right) = \sum_{i < j} y_i y_j^2 + \sum_{j < i} y_j^2 y_i + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} y_i^3 = M_{(1,2)} + M_{(2,1)} + M_{(3)}.$$

Le coproduit de déconcaténation Δ fait de **QSym** une cogèbre colibre compatible avec la structure d'algèbre. Ainsi, **QSym** est une algèbre de Hopf.

Exemples. Considérons les éléments $M_{(1)}$ et $M_{(2,1,3)}$. Donnons leur coproduit.

$$\begin{aligned} \Delta(M_{(1)}) &= M_{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes M_{(1)}, \\ \Delta(M_{(2,1,3)}) &= M_{(2,1,3)} \otimes 1 + M_{(2)} \otimes M_{(1,3)} + M_{(2,1)} \otimes M_{(3)} + 1 \otimes M_{(2,1,3)}. \end{aligned}$$

Fonctions symétriques

On rappelle la définition de la sous-algèbre de Hopf des fonctions symétriques. On note $Comp(n, \alpha)$ l'ensemble des compositions de n issues de la partition $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k)$. On pose :

$$S_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = \sum_{\beta \in Comp(n, \alpha)} M_\beta.$$

On note $Part(n)$ l'ensemble des partitions de n et l'on considère le sous-espace vectoriel Sym de **QSym** défini par :

$$Sym = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (Sym)_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Vect}(S_\alpha, \alpha \in Part(n), n \in \mathbb{N}^*).$$

Il est appelé espace vectoriel des fonctions symétriques.

Exemples. On considère les partitions $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(2, 1, 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{(1,1)} &= M_{(1,1)}, \\ S_{(2,1)} &= M_{(1,2)} + M_{(2,1)}, \\ S_{(2,1,1)} &= M_{(1,1,2)} + M_{(1,2,1)} + M_{(2,1,1)}. \end{aligned}$$

Proposition 23. *Les fonctions symétriques Sym forment une sous-algèbre de Hopf de **QSym**.*

Remarques.

1. Cette description des fonctions symétriques est utilisée dans la section 2.3.2 du chapitre 2 ainsi que dans la section 3.3.1 du chapitre 3.
2. Il existe d'autres descriptions de l'algèbre des fonctions symétriques. Nous rappellerons et utiliserons sa description d'algèbre de Hopf de coordonnées d'un groupe dans la section 3.1.2 du chapitre 3.

Fonctions symétriques non commutatives

Rappelons les opérations de l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non-commutatives **NSym**. Pour cela, dualisons celles de **QSym**. Notons $(M_{\alpha \vdash n}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la base duale de la base $(M_{\alpha \vdash n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de **QSym**. Les fonctions symétriques non commutatives sont librement engendrées par la famille $(M_{(n)}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Par dualité, le produit de **NSym** est donné par la concaténation des compositions.

Exemple. Considérons les éléments $M_{(1,3,2,2,1)}^*$ et $M_{(4,1,4)}^*$. Leur produit vaut :

$$M_{(1,3,2,2,1)}^* M_{(4,1,4)}^* = M_{(1,3,2,2,1,4,1,4)}^*.$$

Pour déterminer le coproduit de **NSym**, il suffit de connaître sa valeur pour les éléments de la famille $(M_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit donc n un entier naturel non nul. La valeur de $\Delta(M_n^*)$ est donnée par :

$$\Delta(M_n^*) = M_n^* \otimes 1 + 1 \otimes M_n^* + \sum_{s=1}^{n-1} M_s^* \otimes M_{(n-s)}^*.$$

Exemples. Considérons les éléments $M_{(3)}^*$ et $M_{(1,2)}^*$, et calculons leur coproduit réduit.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(M_{(3)}^*) &= M_{(1)}^* \otimes M_{(2)}^* + M_{(2)}^* \otimes M_{(1)}^*, \\ \tilde{\Delta}(M_{(1,2)}^*) &= M_{(1)}^* \otimes M_{(2)}^* + M_{(2)}^* \otimes M_{(1)}^* + M_{(1,1)}^* \otimes M_{(1)}^* + M_{(1)}^* \otimes M_{(1,1)}^*. \end{aligned}$$

Fonctions quasi-symétriques libres : algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer

Rappelons la définition de l'algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer que l'on notera **FQSym**. On considère sa version en termes de produit de battage décalé et de déconcaténation décalée. On rappelle que les permutations forment une base de **FQSym**. On la note $(F_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, n \in \mathbb{N}^*}$ où σ est écrit sous forme d'un mot *i.e.* $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$. Le produit de **FQSym** est défini par le morphisme suivant :

$$\bar{\sqcup} : \begin{cases} \mathbf{FQSym} \otimes \mathbf{FQSym} & \longrightarrow \mathbf{FQSym} \\ F_{\tau_1} \otimes F_{\tau_2} & \mapsto F_{\tau_1 \bar{\sqcup} \tau_2} = F_{\tau_1 \sqcup \bar{\tau}_2} \end{cases}$$

où (τ_1, τ_2) est un couple de $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2}$, le mot $\bar{\tau}_2$ est donné par $\bar{\tau}_2 = (n_1 + \tau_2(1)) \dots (n_1 + \tau_2(n_2))$, la permutation τ est donnée par la concaténation $\tau_1 \bar{\tau}_2$ et l'élément $F_{\tau_1 \bar{\sqcup} \tau_2}$ est défini par

$$F_{\tau_1 \bar{\sqcup} \tau_2} = \sum_{\sigma \in \text{Bat}(n_1, n_2)} F_{\gamma_1 \dots \gamma_{n_1+n_2}}$$

avec $\gamma_i = \tau \circ \sigma^{-1}(i)$ pour tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ et

$$\text{Bat}(n_1, n_2) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}, \sigma(1) < \dots < \sigma(n_1) \text{ et } \sigma(n_1+1) < \dots < \sigma(n_1+n_2)\}.$$

Exemple. Considérons les mots 12 et 21. On a :

$$F_{12} \bar{\sqcup} F_{21} = F_{1243} + F_{1423} + F_{1432} + F_{4123} + F_{4132} + F_{4312}.$$

Le coproduit de \mathbf{FQSym} est donné par :

$$\bar{\Delta} : \begin{cases} \mathbf{FQSym} & \longrightarrow \mathbf{FQSym} \otimes \mathbf{FQSym} \\ F_\tau & \mapsto F_\tau \otimes 1 + 1 \otimes F_\tau + \sum_{k=1}^{n-1} F_{\text{Std}(\tau(1)\dots\tau(k))} \otimes F_{\text{Std}(\tau(k+1)\dots\tau(n))} \end{cases}$$

où τ est un élément de \mathfrak{S}_n et $\text{Std}(w)$ est le standardisé d'un mot w donné.

Exemple. Considérons le mot 45321. On a :

$$\Delta(F_{45321}) = F_{45321} \otimes 1 + F_{3421} \otimes F_1 + F_{231} \otimes F_2 + F_{12} \otimes F_{321} + F_1 \otimes F_{4321} + 1 \otimes F_{45321}.$$

1.3 Morphismes d'algèbres de Hopf à valeurs dans \mathbf{QSym} selon Aguiar, Bergeron et Sottile

L'objectif de cette section est de présenter un procédé de construction de morphismes établi par Aguiar, Bergeron et Sottile dans [2]. Il permet, pour n'importe quelle algèbre de Hopf graduée connexe \mathcal{H} , de définir un morphisme d'algèbre de Hopf de \mathcal{H} vers les fonctions quasi-symétriques.

Définition 24. Soit $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf. Un caractère ζ de \mathcal{H} est un morphisme d'algèbres unitaires défini sur \mathcal{H} et à valeurs dans \mathbb{K} i.e., $\zeta(1) = 1$ et, pour tous les éléments a et b de \mathcal{H} , l'image de ab par ζ est un scalaire vérifiant $\zeta(ab) = \zeta(a)\zeta(b)$.

Exemple. Considérons l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} des forêts enracinées de Connes et Kreimer (cf. section 1.2.1 de ce chapitre). L'application ζ , définie par :

$$\zeta : \begin{cases} \mathcal{H}_{\text{CK}} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{\text{R}} & \mapsto 1, \end{cases}$$

est un caractère sur les forêts enracinées.

Pour employer le procédé qui va suivre, nous utiliserons la définition d'algèbre de Hopf combinatoire suivante.

Définition 25. Une algèbre de Hopf combinatoire est un couple (\mathcal{H}, ζ) où \mathcal{H} est une algèbre de Hopf graduée connexe et ζ est un caractère de \mathcal{H} .

Exemple. Considérons l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques (cf. section 1.2.2 de ce chapitre). On définit l'application ζ_Q par :

$$\zeta_Q : \begin{cases} \mathbf{QSym} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Le couple (\mathbf{QSym}, ζ_Q) est une algèbre de Hopf combinatoire au sens de la définition précédente.

Définition 26. Soient $(\mathcal{H}, \zeta_{\mathcal{H}})$ et $(\mathcal{H}', \zeta_{\mathcal{H}'})$ deux algèbres de Hopf combinatoires. Une application $\Psi : (\mathcal{H}, \zeta_{\mathcal{H}}) \longrightarrow (\mathcal{H}', \zeta_{\mathcal{H}'})$ est un morphisme d'algèbres de Hopf combinatoires s'il s'agit d'un morphisme d'algèbres de Hopf homogène de degré 0 vérifiant $\zeta_{\mathcal{H}'} \circ \Psi = \zeta_{\mathcal{H}}$.

Enonçons maintenant le théorème de construction de morphismes 4.1 de [2].

Théorème 27. *Soit (\mathcal{H}, ζ) une algèbre de Hopf combinatoire. Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf combinatoires*

$$\Psi : (H, \zeta) \longrightarrow (\mathbf{QSym}, \zeta_Q).$$

Plus précisément, pour tout élément $h \in (H)_n$ de degré n , $\Psi(h) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(w) M_\alpha$ où, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, ζ_α est la composée

$$H \xrightarrow{\Delta^{(k-1)}} H^{\otimes k} \rightarrow (H)_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes (H)_{\alpha_k} \xrightarrow{\zeta^{\otimes k}} \mathbb{K}.$$

Démonstration. Ce théorème est démontré par Aguiar, Bergeron et Sottile dans [2]. La démonstration présentée repose sur le fait que le dual gradué \mathbf{NSym} de \mathbf{QSym} est librement engendré par la famille $(M_{(n)}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et le fait que ζ et ζ_Q soient multiplicatifs. \square

Par ce théorème, Aguiar, Bergeron et Sottile ont montré que le couple (\mathbf{QSym}, ζ_Q) est un objet terminal dans la catégorie des algèbres de Hopf combinatoires. Ainsi, si \mathcal{H} est une algèbre de Hopf graduée connexe et $\kappa : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{QSym}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf alors κ est le morphisme obtenu à partir du théorème précédent en munissant \mathcal{H} du caractère $\zeta_Q \circ \kappa$.

Remarque. Ce procédé de construction sera utilisé dans la section 2.3 du chapitre 2. Il permettra entre autres de fournir un isomorphisme explicite entre les fonctions quasi-symétriques et une algèbre de Hopf de mots tassés stricts croissants notée $\mathbf{ISPW}^\circledast$ ainsi que d'expliquer des éléments de type groupe dans le complété de l'algèbre de Hopf de mots tassés \mathbf{WMat} introduite par Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa dans [21]. Il sera également utile dans la section 3.3 du chapitre 3. Nous présenterons trois morphismes définis sur l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D des diagrammes de dissection de Dupont [23] et à valeur dans \mathbf{QSym} . On donnera une description du premier dans le cas où le paramètre est égal à 1. Pour les deux autres nous expliciterons l'image de quelques familles de diagrammes.

Etude de l'algèbre de Hopf de mots tassés **WMat**

Le procédé d'extraction-contraction est largement utilisé dans la construction de cogèbres : on peut par exemple penser à la théorie des nombres avec l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection introduite par Dupont dans [23, chapitre 2], à la théorie des champs quantiques avec l'algèbre de Hopf d'arbres enracinés de Connes et Kreimer [17, 18], l'algèbre de Hopf des arbres de Calaque, Ebrahimi-Fard et Manchon [10], l'algèbre de Hopf des diagrammes orientés de Manchon [64], à la théorie des champs quantiques non commutatifs [88] ou encore la théorie des modèles de gravité quantique n -dimensionnels [67]. . . Dans leur article intitulé « A selection-quotient process for packed word Hopf algebra » [21], Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa souhaitent construire un modèle d'algèbre de Hopf d'extraction-contraction pour les mots tassés et introduisent l'algèbre de Hopf **WMat**. Outre sa construction, ils prouvent également qu'elle est librement engendrée par un ensemble appelé ensemble des irréductibles. Ils graduent cette nouvelle algèbre en fonction de la longueur des mots tassés, explicitent la dimension des espaces vectoriels engendrés par les éléments d'un degré donné et calculent le nombre de mots tassés irréductibles de degré fixé.

L'objectif de ce chapitre est de mieux comprendre cette algèbre de Hopf, soit dans sa globalité, soit en considérant des sous-objets ou des objets quotients, ainsi que d'établir quelques morphismes d'algèbres de Hopf entre **WMat** et les fonctions quasi-symétriques **QSym**.

Pour cela, nous nous intéressons dans une première section au coproduit et à l'antipode de **WMat** (propositions 28 à 30). La non coliberté de cette algèbre de Hopf est établie et une interprétation en termes de compositions ensemblistes étendues est donnée. Ses opérations sont ensuite dualisées afin de déterminer celles de son dual **WMat**^{*}.

Dans la deuxième section, l'accent est mis sur des objets associés à **WMat**. Nous débutons par une algèbre de Hopf de permutations cocommutative, notée **SH**. Elle est à la fois un sous-objet et un objet quotient de **WMat**. Son produit est toujours une concaténation décalée et son coproduit consiste essentiellement à partitionner en deux sous-ensembles les lettres d'un mot w donné. Son dual **SH**^{*}, de par son caractère colibre et commutatif, est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf, à l'algèbre **QSym** introduite par Hivert, Novelli et Thibon dans [44]. La structure d'algèbre est donnée par un double battage et la structure de cogèbre par une déconcaténation décalée. En se focalisant sur l'algèbre sous-jacente de **SH**^{*}, il est aisé de constater l'existence d'une structure de quadri-algèbre. Une réalisation polynomiale de l'algèbre **SH**^{*} est également donnée. Nous définissons ensuite une algèbre de Hopf de mots tassés stricts, **SPW**, comme quotient cocommutatif de **WMat** par le biidéale formé par les mots tassés contenant la

lettre x_0 . Notre attention se porte plus particulièrement sur sa sous-algèbre de Hopf des mots tassés stricts croissants, **ISPW**. Elle est librement engendrée par les classes des mots de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}$ et a pour base les classes des mots tassés de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_1 \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_k \text{ fois}}$. Le coproduit de la classe d'un mot de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_1 \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_k \text{ fois}}$ est obtenu en partitionnant en deux sous-ensembles les k mots de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n_i \text{ fois}}$. De par son caractère cocommutatif, **ISPW**

s'écrit, d'après le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, comme algèbre enveloppante de ses primitifs. On détermine alors l'existence d'une base particulière pour les éléments primitifs (proposition 44) ainsi que quelques éléments primitifs (propositions 45 à 47). L'étude de **ISPW**[®] permet d'affirmer qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques (proposition 52) et donc, **ISPW** et l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives sont isomorphes (proposition 53). Nous introduisons par la suite une algèbre de Hopf de compositions étendues notée \mathcal{C}_e . Elle s'obtient en identifiant chaque mot tassé w avec chaque mot tassé w_σ obtenu par permutation des lettres de w . On en donne une base dont les vecteurs sont de la forme $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où α_0 est un entier naturel éventuellement nul et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des entiers naturels non nuls. La composition étendue $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ représente la classe du mot tassé $w_\alpha = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_1 \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_n \text{ fois}}$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'entier α_i correspond à la

fréquence d'apparition $|w_\alpha|_{x_{\alpha_i}}$ de la lettre x_{α_i} dans le mot w_α . Le produit de deux compositions étendues est obtenu par somme des fréquences d'apparition de la lettre x_0 et concaténation des fréquences des autres lettres. Le coproduit est obtenu à partir de $\Delta(w_\alpha)$ dans **WMat**. L'étude des deux opérations de \mathcal{C}_e montre qu'elle est munie d'une structure de coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf (propositions 59 à 61). Cette structure permet de mettre à jour deux actions de groupes (propositions 62 et 64). On considère ensuite les éléments primitifs de \mathcal{C}_e . Ils sont liés à ceux de **ISPW**. Ceci fait l'objet des propositions 66 à 72. La section se clôt par un diagramme récapitulatif liant **SPW**, **ISPW** et \mathcal{C}_e .

Dans la dernière section, trois isomorphismes explicites (le premier entre **ISPW**[®] et **QSym**, les deux suivants entre **ISPW** et **NSym**) sont donnés, des éléments primitifs de **NSym** sont explicités et cinq morphismes d'algèbres de Hopf entre **WMat** et **QSym** sont établis. Pour cela, nous utilisons un procédé introduit par Aguiar, Bergeron et Sottile dans [2]. Deux morphismes retiennent particulièrement l'attention :

$$\Psi_3 : \mathbf{WMat} \longrightarrow \mathbf{QSym} \quad \text{et} \quad \Psi_5 : \mathbf{WMat} \longrightarrow \mathbf{QSym}.$$

En effet, Ψ_3 permet d'obtenir un morphisme surjectif de \mathcal{SH} dans Sym et Ψ_5 permet de construire, par dualité, une famille d'éléments de type groupe dans le complété de **WMat**[®].

Ce chapitre fait l'objet d'une publication [62] soumise.

2.1 Algèbre de Hopf des mots tassés

Commençons par rappeler la construction de **WMat** [21] ainsi que quelques notations utiles dans la suite du chapitre. Rappelons également l'existence d'une famille de mots tassés qui engendrent librement l'algèbre de Hopf : les irréductibles. Par la suite, l'objectif est de mettre à jour quelques particularités de **WMat**. Nous explicitons alors quelques valeurs remarquables du produit et du coproduit et établissons la non-coliberté de la cogèbre associée à **WMat**. Une

autre écriture des opérations de l'algèbre de Hopf est proposée en regardant chaque mot tassé comme composition ensembliste étendue de ses positions. Nous terminons par la présentation du dual gradué de \mathbf{WMat} que l'on note \mathbf{WMat}^{\otimes} .

2.1.1 Algèbre de Hopf \mathbf{WMat}

Notations

Soit \mathbb{K} un corps commutatif de caractéristique 0. On considère un alphabet infini, dénombrable, totalement ordonné $X = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ et l'on note X^* l'ensemble des mots formés à partir de X .

Pour tout entier naturel n non nul, tout mot $w = x_{k_1} \dots x_{k_n} \in X^*$ et tous les entiers naturels i et s , on pose :

$$\begin{aligned} |w| &= n, & |w|_{x_i} &= \text{Card}\{s \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k_s = i\}, \\ \text{Alph}(w) &= \{x_i \mid |w|_{x_i} \neq 0\}, & \text{IALph}(w) &= \{i \in \mathbb{N} \mid |w|_{x_i} \neq 0\}, \\ \text{sup}(w) &= \text{sup}(\text{IALph}(w)), & T_s(w) &= x_{u_1} \dots x_{u_n} \text{ où } u_j = \begin{cases} k_j + s & \text{si } k_j \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on pose $\text{IALph}(w) \setminus \{0\} = \{j_1 < \dots < j_s\}$ (avec $s = \text{sup}(w)$), on peut définir le mot tassé $\text{pack}(w) = x_{p_1} \dots x_{p_n}$ où $p_j = \begin{cases} m & \text{si } k_j = j_m \\ 0 & \text{si } k_j = 0 \end{cases}$ et $\text{pack}(X^*) = \{\text{pack}(w) \mid w \in X^*\}$.

Exemples. $\text{pack}(x_3x_7x_1x_8) = x_2x_3x_1x_4$ et $\text{pack}(x_{50}x_7x_0x_8) = x_3x_1x_0x_2$.

On définit le produit de concaténation décalée suivant :

$$* : \begin{cases} \text{pack}(X^*) \otimes \text{pack}(X^*) & \longrightarrow & \text{pack}(X^*) \\ u \otimes v & \longmapsto & u * v = uT_{\text{sup}(u)}(v). \end{cases}$$

Exemple. $x_2x_1x_0 * x_0x_1x_0x_3x_2 = x_2x_1x_0x_0x_3x_0x_5x_4$.

On définit le coproduit d'extraction-contraction suivant :

$$\Delta : \begin{cases} \text{pack}(X^*) & \longrightarrow & \text{pack}(X^*) \otimes \text{pack}(X^*) \\ w & \longmapsto & \Delta(w) = \sum_{I+J=\{1, \dots, |w|\}} \text{pack}(w[I]) \otimes \text{pack}(w[J]/w[I]) \end{cases}$$

où

$I + J$ désigne l'union disjointe de I et J ,

$$w[I] = x_{k_{i_1}} \dots x_{k_{i_l}}, \text{ si } I = \{i_1 < \dots < i_l\},$$

$$w[J]/w[I] = \tilde{x}_{k_{j_1}} \dots \tilde{x}_{k_{j_{|w|-l}}} \text{ avec } J = \{j_1 < \dots < j_{|w|-l}\} \text{ et } \tilde{x}_{k_{j_t}} = \begin{cases} x_{k_{j_t}} & \text{si } k_{j_t} \notin \text{Alph}(w[I]), \\ x_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour une meilleure lisibilité, on définit le coproduit réduit par :

$$\tilde{\Delta} : \begin{cases} \text{pack}(X^*) \setminus \mathbb{K} & \longrightarrow \text{pack}(X^*) \otimes \text{pack}(X^*) \\ w & \mapsto \tilde{\Delta}(w) = \Delta(w) - w \otimes 1 - 1 \otimes w. \end{cases}$$

Il est coassociatif, non unitaire.

Exemples. Donnons la valeur du coproduit réduit pour les mots tassés $x_1x_2x_0$ et $x_1x_2x_1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x_1x_2x_0) &= x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 + x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_0 \otimes x_1 \\ &= 2x_1 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_1x_2 + x_1x_2 \otimes x_0 + 2x_1x_0 \otimes x_1, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}(x_1x_2x_1) = x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 + x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0.$$

Remarque. Si l'on ne considère que les mots tassés sans répétition de lettres d'indice non nul (par exemple $x_1x_2x_0$) il n'y a, dans leur coproduit, aucune contraction. On se contente de tasser les mots obtenus après extraction. Dans ce cas le coproduit est cocommutatif. En revanche, si l'on considère les mots tassés avec répétition de lettres d'indice non nul (par exemple $x_1x_2x_1$), la contraction réside dans le fait que certains indices des lettres des éléments droits des tenseurs deviennent nuls. Ceci empêche la cocommutativité du coproduit.

L'espace $\mathbf{WMat} = (\text{Vect}(\text{pack}(X^*)), *, 1_{X^*}, \Delta, \varepsilon)$ (où 1_{X^*} et ε désignent respectivement l'unité et la co-unité) est l'algèbre de Hopf des mots tassés sur laquelle nous allons travailler. On rappelle (cf. [21, proposition 2]) que \mathbf{WMat} est librement engendrée par

$$\text{Irr}(\mathbf{WMat}) = \left\{ w \in \text{pack}(X^*) \mid \forall u, v \in \text{pack}(X^*), (w = u * v) \implies (u = 1 \text{ ou } v = 1) \right\}.$$

Tout mot $w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat})$ est dit irréductible.

Dans la suite, sauf mention contraire, $w \in \mathbf{WMat}$ ou $w \in (\mathbf{WMat})_n$ sous-entendra toujours que w est un mot tassé ou un mot tassé de longueur n .

Valeurs remarquables du coproduit

En s'intéressant au coproduit, on obtient la proposition suivante :

Proposition 28. 1.
$$\Delta(\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n \text{ fois}}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-k \text{ fois}}.$$

2.
$$\Delta(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}) = 1 \otimes \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-k \text{ fois}}.$$

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

$$\Delta(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_n \text{ fois}}) = \sum_{s=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} \sum_{l=s}^{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}} \sum_{\substack{k_{i_1} + \dots + k_{i_s} = l \\ 1 \leq k_{i_j} \leq \alpha_{i_j}}} \binom{\alpha_{i_1}}{k_{i_1}} \dots \binom{\alpha_{i_s}}{k_{i_s}} \omega_{\alpha, s, i, k}$$

où

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha,s,i,k} &= \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_{i_1} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_s \dots x_s}_{k_{i_s} \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_{\rho_1} \dots x_{\rho_1}}_{\alpha_1 - k_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{\rho_n} \dots x_{\rho_n}}_{\alpha_n - k_n \text{ fois}}, \\ \{u_1 < \dots < u_{n-s}\} &= \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_s\}, \\ \rho_j &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_s\}, \\ \eta & \text{si } j = u_\eta \in \{u_1, \dots, u_{n-s}\}, \end{cases} \\ k_j &= 0, \text{ pour } j \in \{u_1, \dots, u_{n-s}\}.\end{aligned}$$

4. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

$$\Delta(\underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_n \text{ fois}} \dots \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}) = \sum_{s=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} \sum_{l=s}^{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}} \sum_{\substack{k_{i_1} + \dots + k_{i_s} = l \\ 1 \leq k_{i_j} \leq \alpha_{i_j}}} \binom{\alpha_{i_1}}{k_{i_1}} \dots \binom{\alpha_{i_s}}{k_{i_s}} \nu_{\alpha,s,i,k}$$

où

$$\begin{aligned}\nu_{\alpha,s,i,k} &= \underbrace{x_s \dots x_s}_{k_{i_s} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_{i_1} \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_{\rho_n} \dots x_{\rho_n}}_{\alpha_n - k_n \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{\rho_1} \dots x_{\rho_1}}_{\alpha_1 - k_1 \text{ fois}}, \\ \{u_1 < \dots < u_{n-s}\} &= \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_s\}, \\ \rho_j &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_s\}, \\ \eta & \text{si } j = u_\eta \in \{u_1, \dots, u_{n-s}\}, \end{cases} \\ k_j &= 0, \text{ pour } j \in \{u_1, \dots, u_{n-s}\}.\end{aligned}$$

$$5. \Delta(x_1 \dots x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{x_1 \dots x_k}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_1 \dots x_{n-k}}_{n-k \text{ fois}}.$$

$$6. \Delta(x_n \dots x_1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{x_k \dots x_1}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_{n-k} \dots x_1}_{n-k \text{ fois}}.$$

Démonstration. Les deux premières formules sont immédiates. La troisième est obtenue à partir de la deuxième et le fait que le coproduit soit un morphisme d'algèbres. La quatrième s'établit en utilisant l'endomorphisme de cogèbres suivant :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbf{WMat} \\ x_{k_1} \dots x_{k_n} & \longmapsto x_{k_n} \dots x_{k_1}. \end{cases}$$

Les deux dernières formules sont des cas particuliers des deux précédentes. \square

Exemples. Illustrons la proposition précédente avec deux exemples. On ne donne que les coproduits réduits.

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(x_1 x_1 x_2 x_2 x_2) &= 2x_1 \otimes x_0 x_1 x_1 x_1 + 3x_1 \otimes x_1 x_1 x_0 x_0 + x_1 x_1 \otimes x_1 x_1 x_1 + 3x_1 x_1 \otimes x_1 x_1 x_0 \\ &+ 6x_1 x_2 \otimes x_0 x_0 x_0 + 3x_1 x_1 x_2 \otimes x_0 x_0 + 6x_1 x_2 x_2 \otimes x_0 x_0 + x_1 x_1 x_1 \otimes x_1 x_1 \\ &+ 2x_1 x_2 x_2 x_2 \otimes x_0 + 3x_1 x_1 x_2 x_2 \otimes x_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x_3x_3x_2x_2x_1) = & x_1 \otimes x_2x_2x_1x_1 + 2x_1 \otimes x_2x_2x_0x_1 + 2x_1 \otimes x_0x_2x_2x_1 + 2x_2x_1 \otimes x_1x_1x_0 \\ & + 2x_2x_1 \otimes x_0x_1x_1 + 4x_2x_1 \otimes x_0x_0x_1 + 2x_1x_1 \otimes x_2x_2x_1 + 4x_3x_2x_1 \otimes x_0x_0 \\ & + 2x_2x_2x_1 \otimes x_1x_1 + 2x_2x_2x_1 \otimes x_0x_1 + 2x_2x_1x_1 \otimes x_0x_1 + 2x_3x_3x_2x_1 \otimes x_0 \\ & + 2x_3x_2x_2x_1 \otimes x_0 + x_2x_2x_1x_1 \otimes x_1. \end{aligned}$$

Utilisation du coproduit pour prouver l'absence de coliberté

On souhaite montrer que **WMat** n'est pas colibre. Pour cela on considère les éléments primitifs de la cogèbre des mots tassés. Soit $F_{\mathbf{WMat}}$ la série formelle de **WMat**. On a, par calcul direct du nombre de mots tassés :

$$F_{\mathbf{WMat}}(h) = 1 + 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ (\alpha_1 \dots \alpha_k) \models n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} h^n = 1 + 2h + 6h^2 + 26h^3 + \dots$$

Si **WMat** était colibre la série formelle $F_{\text{Prim}(\mathbf{WMat})}$ de ses éléments primitifs serait égale à :

$$F_{\text{Prim}(\mathbf{WMat})}(h) = 1 - \frac{1}{F_{\mathbf{WMat}}(h)} = 2h + 2h^2 + 10h^3 + \dots$$

Cherchons alors une base de $\text{Prim}(\mathbf{WMat})_3$, l'espace des éléments primitifs de degré 3, par calcul direct. On obtient :

$$\text{Prim}(\mathbf{WMat})_3 = \text{Vect}(V_1, \dots, V_{12})$$

où V_1, \dots, V_{12} sont les vecteurs linéairement indépendants suivants :

$$\begin{aligned} V_1 &= -x_0x_1x_2 + 2x_1x_0x_2 - x_1x_2x_0, & V_2 &= -x_0x_2x_1 + 2x_1x_0x_2 - 2x_1x_2x_0 + x_2x_1x_0, \\ V_3 &= x_1x_0x_2 - x_1x_2x_0 - x_2x_0x_1 + x_2x_1x_0, & V_4 &= -x_1x_2x_3 - 2x_3x_2x_1 + 3x_3x_1x_2, \\ V_5 &= -x_1x_3x_2 - x_3x_2x_1 + 2x_3x_1x_2, & V_6 &= -x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 + 2x_3x_1x_2, \\ V_7 &= -x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2, & V_8 &= -x_1x_2x_1 + x_2x_1x_2, \\ V_9 &= -x_1x_2x_2 + 2x_2x_1x_2 - x_2x_2x_1, & V_{10} &= -x_2x_1x_1 + 2x_1x_2x_1 - x_1x_1x_2, \\ V_{11} &= -x_0x_1x_1 + 2x_1x_0x_1 - x_1x_1x_0, & V_{12} &= -x_1x_0x_0 + 2x_0x_1x_0 - x_0x_0x_1. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\dim(\text{Prim}(\mathbf{WMat})_3) = 12 \neq 10 = \langle 1 - \frac{1}{F_{\mathbf{WMat}}}, h^3 \rangle.$$

L'algèbre de Hopf **WMat** n'est donc pas colibre.

Utilisation du produit et du coproduit dans le calcul de l'antipode

Par itération du coproduit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout mot $w \in (\mathbf{WMat})_n$ et tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on obtient :

$$\Delta^{(k)}(w) = \sum_{I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, |w|\}} \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]). \quad (2.1)$$

Utilisons cette formule pour déterminer l'antipode. On obtient la proposition suivante :

Proposition 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé. En w , l'antipode vaut :

$$S(w) = \sum_{k=1}^{|w|} (-1)^k \sum_{\substack{I_1 + \dots + I_k = \{1, \dots, |w|\} \\ \forall j, I_j \neq \emptyset}} \text{pack}(w[I_1] * w[I_2]/w[I_1] * \dots * w[I_k]/w[I_1 + \dots + I_{k-1}]).$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé. Pour démontrer la proposition énoncée on utilise le coproduit itéré explicité par la formule 2.1 ainsi que le fait que $S * id = \varepsilon$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} S(w) &= - \sum_{\substack{I_1 + I_2 = \{1, \dots, |w|\} \\ I_2 \neq \emptyset}} S(\text{pack}(w[I_1])) * \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \\ &= \sum_{\substack{I_1 + I_2 + I_3 = \{1, \dots, |w|\} \\ I_2 \neq \emptyset \\ I_3 \neq \emptyset}} S(\text{pack}(w[I_1])) * \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) * \text{pack}(w[I_3]/w[I_1 + I_2]) \\ &= \sum_{k=1}^{|w|} (-1)^k \sum_{\substack{I_1 + \dots + I_k = \{1, \dots, |w|\} \\ I_j \neq \emptyset}} \text{pack}(w[I_1]) * \dots * \text{pack}(w[I_k]/w[I_1 + \dots + I_{k-1}]) \\ &= \sum_{k=1}^{|w|} (-1)^k \sum_{\substack{I_1 + \dots + I_k = \{1, \dots, |w|\} \\ I_j \neq \emptyset}} \text{pack}(w[I_1] * w[I_2]/w[I_1] * \dots * w[I_k]/w[I_1 + \dots + I_{k-1}]). \end{aligned}$$

D'où le résultat énoncé. □

L'image de certains mots tassés par l'antipode est remarquable comme l'illustre la proposition suivante.

Proposition 30. 1. $S(\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n \text{ fois}}) = (-1)^n \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n \text{ fois}}$.

2. $S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-k \text{ fois}}$.

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. On a :

$$S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_n \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_1 \text{ fois}}) = (-1)^{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \sum_{s=n}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = s \\ 1 \leq k_j \leq \alpha_j}} (-1)^s \binom{\alpha_1}{k_1} \dots \binom{\alpha_n}{k_n} \omega_{\alpha, k}$$

où

$$\omega_{\alpha, k} = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1 \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_1 - k_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_n - k_n \text{ fois}}$$

4. $S(x_1 \dots x_n) = (-1)^n x_1 \dots x_n$.

5. $S(x_n \dots x_1) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{n, \alpha}$

où

$$w_{n,\alpha} = x_{\alpha_1} \dots x_1 x_{(\alpha_1+\alpha_2)} \dots x_{(\alpha_1+1)} \dots x_{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)} \dots x_{(\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+1)}.$$

6. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$S(x_i \dots x_1 x_{i+1} \dots x_n) = \sum_{k=1}^i \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models i} (-1)^{(n+i+k)} \frac{i!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} x_1 \dots x_{n-i} T_{n-i}(w_{n,\alpha})$$

où

$$T_{n-i}(w_{n,\alpha}) = x_{(\alpha_1+n-i)} \dots x_{(1+n-i)} \dots x_{(\alpha_1+\dots+\alpha_k+n-i)} \dots x_{(\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+1+n-i)}.$$

7. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$S(x_1 \dots x_{n-i} x_n \dots x_{n-i+1}) = \sum_{k=1}^i \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models i} (-1)^{(n+i+k)} \frac{i!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{i,\alpha} x_{i+1} \dots x_n.$$

Démonstration. 1. On montre cette première formule par récurrence sur la longueur des mots ne contenant que des lettres d'indice nul et en considérant le fait que $\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n+1 \text{ fois}}$ s'écrive

$$x_0 * \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n+1 \text{ fois}}$$

$$S(x_0) = -x_0, \quad S(\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n+1 \text{ fois}}) = S(\underbrace{x_0 \dots x_0}_n) S(x_0) = (-1)^{n+1} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n+1 \text{ fois}}.$$

2. Comme dans le cas précédent, on effectue une récurrence sur la longueur des mots ne possédant que des lettres d'indice égal à 1, en considérant le fait que $S \star id = \varepsilon$.

$$\begin{aligned} S(x_1) &= -x_1, \\ S(x_1 x_1) &= -x_1 x_1 - 2S(x_1) * x_0 = -x_1 x_1 + 2x_1 x_0, \\ S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_n) &= -\underbrace{x_1 \dots x_1}_n - \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_s) * \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-s \text{ fois}} \\ &= -\underbrace{x_1 \dots x_1}_n - \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^{s+1} \sum_{k=1}^s \binom{s}{k} (-1)^k (\underbrace{x_1 \dots x_1}_k \underbrace{x_0 \dots x_0}_{s-k \text{ fois}}) * \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-s \text{ fois}} \\ &= -\underbrace{x_1 \dots x_1}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=k}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{s}{k} (-1)^{(k+s+1)} \underbrace{x_1 \dots x_1}_k \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-k \text{ fois}}. \end{aligned}$$

Or

$$\binom{n}{s} \binom{s}{k} = \frac{n!}{s!(n-s)!} \frac{s!}{k!(s-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(s-k)!(n-s)!} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k}.$$

Donc

$$-\sum_{s=k}^{n-1} \binom{n-k}{s-k} (-1)^{s+1} = (-1)^k \sum_{s=0}^{n-k-1} \binom{n-k}{s} (-1)^s = (-1)^{n+1}.$$

D'où

$$S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n-k \text{ fois}}.$$

3. Pour montrer cette formule, on utilise le fait que l'antipode est un anti-morphisme d'algèbres. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. On a :

$$\begin{aligned} S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_n \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_1 \text{ fois}}) &= S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_n} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1}) \\ &= S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1}) \dots S(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_n}) \\ &= \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left[(-1)^{\alpha_j+1} \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} (-1)^{k_j} \binom{\alpha_j}{k_j} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_j} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_j-k_j} \right] \\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \sum_{k_1=1}^{\alpha_1} \dots \sum_{k_n=1}^{\alpha_n} (-1)^{\sum_{j=1}^n k_j} \binom{\alpha_1}{k_1} \dots \binom{\alpha_n}{k_n} \omega_{\alpha, k} \\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \sum_{s=n}^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=s \\ 1 \leq k_j \leq \alpha_j}} (-1)^s \binom{\alpha_1}{k_1} \dots \binom{\alpha_n}{k_n} \omega_{\alpha, k} \end{aligned}$$

où

$$\omega_{\alpha, k} = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1 \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_1-k_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n \text{ fois}} \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_n-k_n \text{ fois}}.$$

4. Ceci est le cas particulier de la formule précédente où $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$.
5. On effectue une récurrence sur la longueur du mot en considérant le fait que $S \star id = \varepsilon$.

$$\begin{aligned} S(x_2 x_1) &= -x_2 x_1 - 2S(x_1) * x_1 \\ &= -x_2 x_1 + 2x_1 x_2, \\ S(x_n \dots x_1) &= - \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} S(x_s \dots x_1) * x_{n-s} \dots x_1 \\ &= -x_n \dots x_1 - \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} \sum_{k=1}^s (-1)^k \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models s} \frac{s!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{s, \alpha} * x_{n-s} \dots x_1 \\ &= -x_n \dots x_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s=k}^{n-1} \binom{n}{s} (-1)^k \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models s} \frac{s!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{s, \alpha} * x_{n-s} \dots x_1 \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{n, \alpha}. \end{aligned}$$

6. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $i = 1$ ou n on retrouve 4 et 5. Considérons $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. On utilise le fait que S soit un anti-morphisme ainsi que les formules 4 et 5 déjà établies.

$$\begin{aligned}
S(x_i \dots x_1 x_{i+1} \dots x_n) &= S(x_1 \dots x_{n-i}) * S(x_i \dots x_1) \\
&= (-1)^{n+i} x_1 \dots x_{n-i} * \left(\sum_{k=1}^i (-1)^k \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models i} \frac{i!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} w_{i, \alpha} \right) \\
&= \sum_{k=1}^i \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models i} (-1)^{(n+i+k)} \frac{i!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} x_i \dots x_{n-i} T_{n-i}(w_{i, \alpha}).
\end{aligned}$$

7. On procède de la même façon que dans le cas précédent :

$$S(x_1 \dots x_{n-i} x_n \dots x_{n-i+1}) = S(x_i \dots x_1) * S(x_1 \dots x_{n-i}).$$

□

Exemples. Voici quelques exemples de valeurs remarquables de l'antipode.

$$\begin{aligned}
S(x_1 x_1 x_1) &= -x_1 x_1 x_1 + 3x_1 x_1 x_0 - 3x_1 x_0 x_0, \\
S(x_1 x_1 x_2 x_2 x_2) &= x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 - 2x_1 x_1 x_1 x_2 x_0 - 3x_1 x_1 x_0 x_2 x_2 + 6x_1 x_1 x_0 x_2 x_0 \\
&\quad + 3x_1 x_0 x_0 x_2 x_2 - 6x_1 x_0 x_0 x_2 x_0, \\
S(x_1 \dots x_{15}) &= -x_1 \dots x_{15}, \\
S(x_3 x_2 x_1) &= -x_3 x_2 x_1 + 3x_1 x_3 x_2 + 3x_2 x_1 x_3 - 6x_1 x_2 x_3, \\
S(x_2 x_1 x_3 x_4) &= -x_1 x_2 x_4 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 x_4, \\
S(x_1 x_2 x_4 x_3) &= -x_2 x_1 x_3 x_4 + 2x_1 x_2 x_3 x_4.
\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des mots tassés. En réalité, les éléments qui permettent la construction de l'algèbre et de la cogèbre **WMat** sont les indices des lettres qui interviennent dans les différents mots tassés considérés. Concentrons-nous donc sur ce point et essayons de décrire les opérations de **WMat** grâce à des compositions ensemblistes que l'on qualifiera d'étendues.

Algèbre de Hopf **WMat** et Algèbre de Hopf des compositions ensemblistes étendues

On cherche une description de **WMat** en fonction de compositions ensemblistes étendues. Pour cela, comme dans [73], on regarde chaque mot en fonction des positions où apparaissent chaque lettre distincte. On définit alors l'espace des compositions ensemblistes étendues :

$$\mathcal{CE}_e = \text{Vect} \left((I_0 | \dots | I_s), I_0 + \dots + I_s = \llbracket 1, n \rrbracket, I_j \neq \emptyset, j \in \llbracket 1, s \rrbracket, s \in \llbracket 1, n \rrbracket, n \in \mathbb{N} \right).$$

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $(I_0 | \dots | I_s)$ de \mathcal{CE}_e tel que $I_0 + \dots + I_s = \llbracket 1, n \rrbracket$ est appelé composition ensembliste étendue de n . On définit l'application linéaire suivante :

$$\mathcal{B} : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathcal{CE}_e \\ w = x_{i_1} \dots x_{i_n} & \longmapsto (I_0 | \dots | I_{\text{sup}(w)}) \end{cases}$$

où, pour tout entier j de l'intervalle $\llbracket 0, \sup(w) \rrbracket$, on a :

$$I_j = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{i_k} = x_j\}.$$

Cette application est une bijection. On peut donc munir \mathcal{CE}_e d'une structure d'algèbre de Hopf et ainsi avoir une autre manière d'écrire les opérations de **WMat**.

Commençons par décrire le produit de l'algèbre \mathcal{CE}_e . Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, des entiers naturels non nuls et, $(I_0 | \dots | I_s)$ et $(J_0 | \dots | J_p)$, des compositions ensemblistes étendues de n et m respectivement. Le produit de concaténation décalé de $(I_0 | \dots | I_s)$ et $(J_0 | \dots | J_p)$ se définit par :

$$(I_0 | \dots | I_s) * (J_0 | \dots | J_p) = (I_0 \cup T_n(J_0) | I_1 | \dots | I_s | T_n(J_1) | \dots | T_n(J_p))$$

où, pour tous les entiers naturels $k, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ tels que $\gamma_1 < \dots < \gamma_t$,

$$T_k(\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}) = \{\gamma_1 + k, \dots, \gamma_t + k\} \text{ et } T_k(\emptyset) = \emptyset.$$

Exemples.

$$\begin{aligned} (\{2\} | \{1, 4\} | \{3\}) * (\emptyset | \{2\} | \{3, 4\} | \{1, 5, 6\}) &= (\{2\} | \{1, 4\} | \{3\} | \{6\} | \{7, 8\} | \{5, 9, 10\}), \\ (\emptyset | \{2\} | \{3, 4\} | \{1, 5, 6\}) * (\{2\} | \{1, 4\} | \{3\}) &= (\{8\} | \{2\} | \{3, 4\} | \{1, 5, 6\} | \{7, 10\} | \{9\}), \\ (\{2\} | \{1, 3\}) * (\{1, 3\} | \{2\}) &= (\{2, 4, 6\} | \{1, 3\} | \{5\}). \end{aligned}$$

Remarque. Du fait de la bijection \mathcal{B} , le produit de \mathcal{CE}_e n'est pas commutatif et \mathcal{CE}_e est librement engendrée par $\mathcal{B}(\text{Irr}(\mathbf{WMat}))$.

Considérons maintenant la cogèbre \mathcal{CE}_e . Elle est munie du coproduit d'extraction-contraction suivant. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(I_0 | \dots | I_s)$ une composition ensembliste étendue de n . Le coproduit de $(I_0 | \dots | I_s)$ se définit par :

$$\Delta((I_0 | \dots | I_s)) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq s \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s}} \sum_{\substack{I_0^{(1)} + I_0^{(2)} = I_0 \\ I_{i_j}^{(1)} + I_{i_j}^{(2)} = I_{i_j} \\ I_{i_j}^{(1)} \neq \emptyset, j \in \llbracket 1, r \rrbracket}} (\tilde{I}_0^{(1)} | \tilde{I}_{i_1}^{(1)} | \dots | \tilde{I}_{i_r}^{(1)}) \otimes (\tilde{I}_0^{(2)} \cup \bigcup_{j=1}^r \tilde{I}_{i_j}^{(2)} | \tilde{I}_{\gamma_1} | \dots | \tilde{I}_{\gamma_{s-r}})$$

où

$$\begin{aligned} \{\gamma_1 < \dots < \gamma_{s-r}\} &= \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_r\}, \\ I_k^{(1)} &= \{a_{k,1}^{(1)} < \dots < a_{k,1}^{(p_{k,1})}\} \text{ pour } k \in \{0, i_1, \dots, i_r\}, \\ I_k^{(2)} &= \{a_{k,2}^{(1)} < \dots < a_{k,2}^{(p_{k,2})}\} \text{ pour } k \in \{0, i_1, \dots, i_r\}, \\ I_{\gamma_l} &= \{a_{\gamma_l}^{(1)} < \dots < a_{\gamma_l}^{(p_{\gamma_l})}\} \text{ pour } l \in \llbracket 1, s-r \rrbracket, \\ \tilde{I}_k^{(1)} &= \{\tilde{a}_{k,1}^{(1)} < \dots < \tilde{a}_{k,1}^{(p_{k,1})}\} \text{ pour } k \in \{0, i_1, \dots, i_r\}, \\ \tilde{I}_k^{(2)} &= \{\tilde{a}_{k,2}^{(1)} < \dots < \tilde{a}_{k,2}^{(p_{k,2})}\} \text{ pour } k \in \{0, i_1, \dots, i_r\}, \\ \tilde{I}_{\gamma_l} &= \{\tilde{a}_{\gamma_l}^{(1)} < \dots < \tilde{a}_{\gamma_l}^{(p_{\gamma_l})}\} \text{ pour } l \in \llbracket 1, s-r \rrbracket. \end{aligned}$$

Pour $k \in \{0, i_1, \dots, i_r\}$ et $l \in \llbracket 1, s-r \rrbracket$, les ensembles $\tilde{I}_k^1, \tilde{I}_k^2, \tilde{I}_{\gamma_l}$ ont été construits de sorte que :

$$\begin{aligned} & \text{pack}(x_{a_{0,1}}^{(1)} \dots x_{a_{0,1}}^{(p_{0,1})} x_{a_{i_1,1}}^{(1)} \dots x_{a_{i_1,1}}^{(p_{i_1,1})} \dots x_{a_{i_r,1}}^{(1)} \dots x_{a_{i_r,1}}^{(p_{i_r,1})}) \\ &= x_{\tilde{a}_{0,1}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{0,1}}^{(p_{0,1})} x_{\tilde{a}_{i_1,1}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{i_1,1}}^{(p_{i_1,1})} \dots x_{\tilde{a}_{i_r,1}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{i_r,1}}^{(p_{i_r,1})}, \\ & \text{pack}(x_{a_{0,2}}^{(1)} \dots x_{a_{0,2}}^{(p_{0,2})} x_{a_{i_1,2}}^{(1)} \dots x_{a_{i_1,2}}^{(p_{i_1,2})} \dots x_{a_{i_r,2}}^{(1)} \dots x_{a_{i_r,2}}^{(p_{i_r,2})} x_{a_{\gamma_1}}^{(1)} \dots x_{a_{\gamma_1}}^{(p_{\gamma_1})} \dots x_{a_{\gamma_{s-r}}}^{(1)} \dots x_{a_{\gamma_{s-r}}}^{(p_{\gamma_{s-r}})}) \\ &= x_{\tilde{a}_{0,2}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{0,2}}^{(p_{0,2})} x_{\tilde{a}_{i_1,2}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{i_1,2}}^{(p_{i_1,2})} \dots x_{\tilde{a}_{i_r,2}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{i_r,2}}^{(p_{i_r,2})} x_{\tilde{a}_{\gamma_1}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{\gamma_1}}^{(p_{\gamma_1})} \dots x_{\tilde{a}_{\gamma_{s-r}}}^{(1)} \dots x_{\tilde{a}_{\gamma_{s-r}}}^{(p_{\gamma_{s-r}})}. \end{aligned}$$

Exemples. Pour une meilleure lisibilité, on ne donne dans les exemples que les coproduits réduits.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\{\{3\}|\{1\}|\{2\}\}) &= 2(\emptyset|\{1\}) \otimes (\{2\}|\{1\}) + (\{1\}) \otimes (\emptyset|\{1\}|\{2\}) \\ &\quad + (\emptyset|\{1\}|\{2\}) \otimes (\{1\}) + 2(\{2\}|\{1\}) \otimes (\emptyset|\{1\}), \\ \tilde{\Delta}(\{\emptyset|\{1,3\}|\{2\}\}) &= (\emptyset|\{1\}) \otimes (\{2\}|\{1\}) + (\emptyset|\{1\}) \otimes (\emptyset|\{1,2\}) + (\emptyset|\{1\}) \otimes (\{1\}|\{2\}) \\ &\quad + (\emptyset|\{1\}|\{2\}) \otimes (\{1\}) + (\emptyset|\{1,2\}) \otimes (\emptyset|\{1\}) + (\emptyset|\{2\}|\{1\}) \otimes (\{1\}). \end{aligned}$$

Remarque. Du fait de la bijection \mathcal{B} , le coproduit est cocommutatif sur la sous-algèbre de Hopf engendrée par l'ensemble $\{(I_0 | \dots | I_s) \in \mathcal{CE}_e, s \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq k \leq s, |I_k| = 1\}$.

2.1.2 Algèbre de Hopf duale **WMat**[⊗]

L'algèbre de Hopf **WMat** étant graduée connexe, son dual gradué est une algèbre de Hopf que l'on notera **WMat**[⊗]. On considère $(Z_w)_{w \in \mathbf{WMat}}$ la base duale des mots tassés. Par transposition des opérations de **WMat** on obtient celles de **WMat**[⊗]. Commençons par la structure la plus facile à décrire, à savoir celle de cogèbre.

Proposition 31. *Le coproduit de **WMat**[⊗] est l'application suivante :*

$$\Delta : \begin{cases} \mathbf{WMat}^{\otimes} & \longrightarrow & \mathbf{WMat}^{\otimes} \otimes \mathbf{WMat}^{\otimes} \\ Z_w & \mapsto & \Delta(Z_w) = \sum_{i=0}^k Z_{w_1 * \dots * w_i} \otimes Z_{w_{i+1} * \dots * w_k} \end{cases}$$

où $w_1 * \dots * w_k$ est l'unique décomposition de w en produit d'éléments irréductibles de **WMat**.

Démonstration. Soient $w, m_1, m_2 \in \mathbf{WMat}$ des mots tassés. On a :

$$\Delta(Z_w)(m_1 \otimes w_2) = Z_w(m_1 * m_2) = Z_w(m_1 T_{\text{sup}(m_1)} m_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = m_1 * m_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, d'après [21], on sait qu'il existe un unique entier naturel k et un unique k -uplet de mots tassés irréductibles (w_1, \dots, w_k) tels que $w = w_1 * \dots * w_k$. Ainsi,

$$\Delta(Z_w) = \sum_{i=0}^k Z_{w_1 * \dots * w_i} \otimes Z_{w_{i+1} * \dots * w_k}.$$

□

Exemples. Considérons le mot $x_2x_1x_3 = x_2x_1 * x_1$ et le mot irréductible $x_2x_1x_2$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta(Z_{x_2x_1x_3}) &= 1 \otimes Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_2x_1x_3} \otimes 1, \\ \Delta(Z_{x_2x_1x_2}) &= Z_{x_2x_1x_2} \otimes 1 + 1 \otimes Z_{x_2x_1x_2}.\end{aligned}$$

Examinons maintenant la structure d'algèbre de \mathbf{WMat}^{\otimes} . Soient $w_1, w_2 \in \mathbf{WMat}$ des mots tassés. On définit les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}C_1 &: x_0 \notin \text{Alph}(w_1) \cup \text{Alph}(w_2), \\ C_2 &: \left(\text{Alph}(w_1) \setminus \{x_0\} \right) \cap \left(\text{Alph}(w_2) \setminus \{x_0\} \right) \neq \emptyset \text{ et } x_0 \in \text{Alph}(w_1) \cup \text{Alph}(w_2), \\ C_3 &: w_1 = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n_1 \text{ fois}}, \\ C_4 &: w_2 = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n_2 \text{ fois}}.\end{aligned}$$

Définissons maintenant la structure d'algèbre de \mathbf{WMat}^{\otimes} .

Proposition 32. *Le produit de \mathbf{WMat}^{\otimes} est l'application*

$$m : \begin{cases} \mathbf{WMat}^{\otimes} \otimes \mathbf{WMat}^{\otimes} & \longrightarrow \mathbf{WMat}^{\otimes} \\ Z_{w_1} \otimes Z_{w_2} & \mapsto Z_{w_1} Z_{w_2} \end{cases}$$

telle que

$$Z_{w_1} Z_{w_2} = \begin{cases} \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(s_1, s_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_1 * w_2) \circ \mu^{-1}} & \text{si } C_1, \\ \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(s_1, s_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_1 \tilde{w}_2) \circ \mu^{-1}} & \text{si } C_2, \\ \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} Z_{(w_1 * w_2) \circ \mu^{-1}} & \text{si } C_3, \\ \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} Z_{(w_1 \tilde{w}_2) \circ \mu^{-1}} & \text{si } C_4, \end{cases}$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, $n_i = |w_i|$, $s_i = \text{sup}(w_i)$,

$$\text{Bat}(n_1, n_2) = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}, \sigma(1) < \dots < \sigma(n_1) \text{ et } \sigma(n_1+1) < \dots < \sigma(n_1+n_2) \},$$

$$\tilde{w}_2 = \sum_{w \in \Gamma_{(w_1, w_2)}} w$$

avec

$$\Gamma_{(w_1, w_2)} = \left\{ w \in \mathbf{WMat}, |w| = n_2, w[\{i\}] = \begin{cases} T_{s_1}(w_2[\{i\}]) & \text{si } w_2[\{i\}] \neq x_0, \\ x_j \text{ avec } j \in \text{IAlph}(w_1) \cup \{0\} & \text{sinon} \end{cases} \right\}$$

et $w_1 \tilde{w}_2$ désigne la concaténation de w_1 et de \tilde{w}_2 .

Démonstration. Soient $w_1, w_2, w \in \mathbf{WMat}$ des mots tassés. Pour $i \in \{1, 2\}$, on pose : $n_i = |w_i|$ et $s_i = \text{sup}(w_i)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
Z_{w_1} Z_{w_2}(w) &= (Z_{w_1} \otimes Z_{w_2}) \circ \Delta(w) \\
&= \sum_{I+J=\{1, \dots, |w|\}} Z_{w_1}(\text{pack}(w[I])) Z_{w_2}(\text{pack}(w[J]/w[I])) \\
&= \sum_{\substack{I+J=\{1, \dots, |w|\}, \\ |I|=n_1, \\ |J|=n_2}} Z_{w_1}(\text{pack}(w[I])) Z_{w_2}(\text{pack}(w[J]/w[I])) \\
&= \sum_{\substack{I+J=\{1, \dots, |w|\}, \\ |I|=n_1, \\ |J|=n_2}} \delta_{w_1, \text{pack}(w[I])} \delta_{w_2, \text{pack}(w[J]/w[I])} \\
&= \begin{cases} \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(s_1, s_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_1 * w_2) \circ \mu^{-1}}(w) & \text{si } C_1, \\ \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(s_1, s_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_1 \tilde{w}_2) \circ \mu^{-1}}(w) & \text{si } C_2, \\ \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} Z_{(w_1 * w_2) \circ \mu^{-1}}(w) & \text{si } C_3, \\ \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} Z_{(w_1 \tilde{w}_2) \circ \mu^{-1}}(w) & \text{si } C_4. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Exemples. Voici quelques exemples de produits d'éléments de \mathbf{WMat}^{\otimes} . On illustre toutes les configurations possibles. On les présente dans l'ordre suivant : deux mots vérifiant la condition C_1 , puis la condition C_3 , puis la condition C_4 et enfin, la condition la plus complexe, C_2 . Dans le dernier exemple, pour une meilleure lisibilité, on ne développe pas le calcul du fait du nombre de termes dans les produits de battage.

$$\begin{aligned}
Z_{x_1} Z_{x_1 x_1} &= Z_{x_1 \sqcup x_2 x_2} + Z_{x_2 \sqcup x_1 x_1} \\
&= Z_{x_1 x_2 x_2} + Z_{x_2 x_1 x_2} + Z_{x_2 x_2 x_1} + Z_{x_2 x_1 x_1} + Z_{x_1 x_2 x_1} + Z_{x_1 x_1 x_2}, \\
Z_{x_0} Z_{x_1} &= Z_{x_0 \sqcup x_1} = Z_{x_1 x_0} + Z_{x_0 x_1}, \\
Z_{x_1} Z_{x_0} &= Z_{x_1 \sqcup x_0} + Z_{x_1 \sqcup x_1} = Z_{x_1 x_0} + Z_{x_0 x_1} + 2Z_{x_1 x_1}, \\
Z_{x_1 x_0} Z_{x_0 x_1} &= Z_{x_1 x_0 \sqcup x_0 x_2} + Z_{x_1 x_0 \sqcup x_1 x_2} + Z_{x_2 x_0 \sqcup x_0 x_1} + Z_{x_2 x_0 \sqcup x_2 x_1}.
\end{aligned}$$

Après avoir considéré les algèbres de Hopf \mathbf{WMat} et \mathbf{WMat}^{\otimes} dans leur globalité, intéressons-nous maintenant à leur structure interne et tirons-en de nouvelles algèbres de Hopf.

2.2 Quelques algèbres de Hopf associées

Dans cette section, on s'intéresse à la mise en évidence d'algèbres de Hopf liées à \mathbf{WMat} en tant que sous-algèbre de Hopf ou algèbre de Hopf quotient.

On commence par considérer l'espace vectoriel engendré par les mots tassés issus de permutations (ex : $x_2 x_1$, $x_3 x_2 x_4 x_1$). Il s'agit en réalité d'une sous-algèbre de Hopf de \mathbf{WMat} , notée \mathfrak{SH} . Elle peut également être vue comme algèbre de Hopf quotient de \mathbf{WMat} . Par dualité, on

obtient une algèbre de Hopf, à la fois quotient et sous-objet de \mathbf{WMat}^{\otimes} , possédant une structure de quadri-algèbre ainsi qu'une double structure d'algèbre dendriforme. En tant qu'algèbre de Hopf, \mathfrak{SH}^{\otimes} est isomorphe à \mathfrak{QSym} introduite par Hivert, Novelli et Thibon dans [44]. On détermine un isomorphisme jusqu'en degré 4. Enfin, on donne une réalisation polynomiale de l'algèbre \mathfrak{SH}^{\otimes} .

On considère par la suite l'espace vectoriel engendré par les mots tassés ne contenant pas de lettres d'indice nul. Il forme une sous-algèbre de \mathbf{WMat} mais n'en est pas une sous-cogèbre. Il est toutefois possible de l'interpréter comme une algèbre de Hopf quotient. On s'intéresse plus particulièrement à son sous-objet des mots tassés stricts croissants, \mathbf{ISPW} . On en détermine des éléments primitifs. On explicite également les opérations de \mathbf{SPW}^{\otimes} et de \mathbf{ISPW}^{\otimes} . Ceci permet ainsi d'établir que \mathbf{ISPW}^{\otimes} est isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques notées \mathbf{QSym} . Ainsi \mathbf{ISPW} est isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives notées \mathbf{NSym} .

Le troisième cas d'étude concerne l'espace vectoriel engendré par les mots tassés croissants pouvant posséder des lettres d'indice nul. Dans ce cas, il ne s'agit ni d'une sous-algèbre ni d'une sous-cogèbre, mais il est interprétable comme algèbre de Hopf quotient. On décide de considérer cette dernière sous sa forme d'algèbre de Hopf de compositions étendues \mathcal{C}_e . Elle peut être décrite comme coproduit semi-direct d'une algèbre de Hopf tensorielle $C = T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$ par une algèbre de Hopf de polynôme $H = \mathbb{K}\langle(1)\rangle$. Cette construction met en évidence une coaction ρ de C dans $C \otimes H$. Cette coaction permet, par transposition, d'obtenir une action de H^{\otimes} sur C^{\otimes} . Elle fournit également une action du groupe des caractères $Char(H)$ de H sur celui des caractères $Char(C)$ de C . On s'intéresse par la suite aux éléments primitifs de \mathcal{C}_e . Ils sont, d'une certaine façon, liés à ceux de \mathbf{ISPW} . On peut ainsi donner les éléments primitifs de \mathcal{C}_e jusqu'en degré 7. On explicite également les opérations de \mathcal{C}_e^{\otimes} .

Enfin, cette section se conclut par un diagramme permettant de lier les algèbres de Hopf \mathbf{SPW} , \mathbf{ISPW} et \mathcal{C}_e .

2.2.1 Algèbre de Hopf de permutations

Algèbre de Hopf \mathfrak{SH}

On s'intéresse au sous-espace vectoriel de \mathbf{WMat} suivant :

$$\mathfrak{SH} = \text{Vect} \left(w \in \mathbf{WMat}, \text{IAlph}(w) = \{1, \dots, |w|\} \right) = \text{Vect} \left(\underbrace{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}}_{\text{noté } w_{\sigma}}, n \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}_n \right).$$

Pour des raisons pratiques on identifiera parfois les éléments de \mathfrak{SH} et les permutations, c'est-à-dire :

$$w_{\sigma} = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} = \sigma(1) \dots \sigma(n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \sigma.$$

Par calcul direct, on obtient que \mathfrak{SH} est une sous-algèbre de Hopf de \mathbf{WMat} .

Exemples et contre-exemples. Quelques exemples et contre-exemples d'éléments de \mathfrak{SH} .

$$x_1 x_2 x_3 \in \mathfrak{SH}, x_3 x_1 x_2 + 8x_1 x_2 \in \mathfrak{SH}, x_1 x_1 x_2 + 7x_2 x_1 x_3 \notin \mathfrak{SH}, x_5 x_0 x_3 x_1 x_4 x_2 - x_1 \notin \mathfrak{SH}.$$

Proposition 33. \mathfrak{SH} est librement engendrée par $\mathfrak{SH} \cap \text{Irr}(\mathbf{WMat})$.

Démonstration. Considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $w_\sigma = x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_n}$.

Alors :

il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ et un unique $(w_1, \dots, w_k) \in \text{Irr}(\mathbf{WMat})^k$ tels que $w = w_1 * \dots * w_k$.

Supposons qu'il existe un entier $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tel que $w_{i_0} \notin \mathfrak{S}_{|w_{i_0}|}$. On a alors deux possibilités :

1. soit $x_0 \in \text{Alph}(w_{i_0})$ et alors $x_0 \in \text{Alph}(w_\sigma)$. Ceci est exclu.
2. soit il existe un entier $s \in \{1, \dots, |w_{i_0}|\}$, tel que $|w_{i_0}|_{x_s} \geq 2$. Cela implique alors que le mot w_σ contient au moins deux lettres d'indice $s + \sum_{u=1}^{i_0-1} \text{sup}(w_u)$. Ceci est exclu.

On obtient donc que pour tout entier $i \in \{1, \dots, k\}$, $w_i \in \mathfrak{S}_{|w_i|}$. □

Décrivons le produit et le coproduit adaptés à la sous-algèbre de Hopf \mathfrak{SH} . En ce qui concerne le produit, il s'écrit comme restriction de celui de **WMat**, *i.e.* :

$$* : \begin{cases} \mathfrak{SH} \otimes \mathfrak{SH} & \longrightarrow & \mathfrak{SH} \\ w_\sigma \otimes w_\tau & \mapsto & w_\sigma * w_\tau = w_\sigma T_{|w_\sigma|}(w_\tau). \end{cases}$$

Exemples. Considérons les mots $x_2x_1x_3$ et $x_5x_1x_4x_3x_2$.

$$x_2x_1x_3 * x_5x_1x_4x_3x_2 = x_2x_1x_3x_8x_4x_7x_6x_5,$$

$$x_5x_1x_4x_3x_2 * x_2x_1x_3 = x_5x_1x_4x_3x_2x_7x_6x_8.$$

En ce qui concerne le coproduit de \mathfrak{SH} , la restriction de celui de **WMat** s'écrit sous la forme :

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{SH} & \longrightarrow & \mathfrak{SH} \otimes \mathfrak{SH} \\ w_\sigma & \mapsto & \Delta(w_\sigma) = \sum_{I+J=\{1,\dots,n\}} \text{pack}(w[I]) \otimes \text{pack}(w[J]). \end{cases}$$

Exemple. Pour une meilleure lisibilité, on ne donne que le coproduit réduit dans l'exemple suivant.

$$\tilde{\Delta}(x_3x_1x_2) = 2x_1 \otimes x_2x_1 + x_1 \otimes x_1x_2 + 2x_2x_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_1.$$

Remarques.

1. Déterminer le coproduit d'un mot $w_\sigma \in \mathfrak{SH}$ consiste à partitionner les lettres de ce mot en deux sous-ensembles et ce, de toutes les façons possibles. Ce coproduit est donc cocommutatif, ce qui implique que la cogèbre \mathfrak{SH} n'est pas colibre.
2. L'algèbre de Hopf \mathfrak{SH} est graduée, connexe et cocommutative; elle est donc, d'après le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Prim}(\mathfrak{SH})$. D'après 2.1.1, il vient que $\text{Prim}(\mathfrak{SH})_3$ est l'espace vectoriel $\text{Prim}(\mathfrak{SH})_3 = \text{Vect}(V_4, V_5, V_6, V_7)$.
3. L'algèbre de Hopf \mathfrak{SH} est différente de celle des fonctions quasi-symétriques libres **FQSym** (*cf.* section 1.2.2 du chapitre 1) puisque cette dernière n'est pas cocommutative.

Proposition 34. *L'algèbre de Hopf \mathfrak{SH} peut être vue comme une algèbre de Hopf quotient de **WMat**.*

Démonstration. Il suffit de considérer la surjection canonique $\Pi_{\mathfrak{SH}} : \mathbf{WMat} \longrightarrow \mathfrak{SH}$. Son noyau est un biidéal de Hopf. □

Algèbre de Hopf \mathfrak{SH}^{\otimes}

D'après la proposition 34, \mathfrak{SH}^{\otimes} est à la fois une algèbre de Hopf quotient et une sous-algèbre de Hopf de \mathbf{WMat}^{\otimes} . Pour la suite, on choisira de considérer \mathfrak{SH}^{\otimes} comme un sous-objet de \mathbf{WMat}^{\otimes} . On notera la base duale des mots tassés issus de permutations soit par $(Z_{w_\sigma})_{w_\sigma \in \mathfrak{SH}}$, soit par $(Z_\sigma)_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ n \in \mathbb{N}^*}}$ où, $Z_{w_\sigma} = Z_\sigma$ suivant ce qui est le plus adapté.

Description des opérations de \mathfrak{SH}^{\otimes} . Le coproduit de \mathfrak{SH}^{\otimes} est la restriction de celui de \mathbf{WMat}^{\otimes} à \mathfrak{SH}^{\otimes} .

Exemple. On considère le mot tassé $x_3x_1x_2x_5x_4x_6 = x_3x_1x_2 * x_2x_1 * x_1$. Son coproduit réduit vaut :

$$\tilde{\Delta}(Z_{x_3x_1x_2x_5x_4x_6}) = Z_{x_3x_1x_2} \otimes Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_3x_1x_2x_5x_4} \otimes Z_{x_1}.$$

Le plus intéressant concerne le produit de \mathfrak{SH}^{\otimes} . En effet, comme \mathfrak{SH} est cocommutative, \mathfrak{SH}^{\otimes} est commutative. De plus, le produit de \mathfrak{SH}^{\otimes} est la restriction à \mathfrak{SH}^{\otimes} de celui de \mathbf{WMat}^{\otimes} , ce qui revient à ne considérer que la condition C_1 décrite dans 2.1.2. Il s'écrit donc :

$$m : \begin{cases} \mathfrak{SH}^{\otimes} \otimes \mathfrak{SH}^{\otimes} & \longrightarrow & \mathfrak{SH}^{\otimes} \\ Z_{\sigma_1} \otimes Z_{\sigma_2} & \mapsto & Z_{\sigma_1} Z_{\sigma_2} = \sum_{\tau, \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}} \end{cases}$$

où n_1 et n_2 sont les entiers naturels non nuls tels que $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}$.

Exemple. Considérons les éléments Z_{x_1} et $Z_{x_2x_1}$.

$$\begin{aligned} Z_{x_1} Z_{x_2x_1} &= Z_{x_1 \sqcup x_3x_2} + Z_{x_2 \sqcup x_3x_1} + Z_{x_3 \sqcup x_2x_1} \\ &= 3Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_1x_3x_2} + 2Z_{x_3x_1x_2} + 2Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_2x_1x_3}. \end{aligned}$$

Remarque. La structure d'algèbre de Hopf de \mathfrak{SH}^{\otimes} est la même que celle construite par Aguiar et Mahajan à partir du monoïde de Hopf des ordres linéaires et d'un foncteur de Fock [4, Partie III, chapitre 15, exemple 15.17]. On retrouve également cette structure dans les travaux de Vargas [91] sous le nom d'algèbre de Hopf de super-battages.

Structure de quadri-algèbre et d'algèbre dendriforme sur \mathfrak{SH}^{\otimes} .

Rappels. Commençons par quelques rappels sur les quadri-algèbres, les algèbres dendriformes et les algèbres de Zinbiel aussi appelées algèbres dendriformes commutatives ou encore algèbres de Leibniz duales.

Les algèbres dendriformes ont été introduites par Loday [57]. Elles permettent d'écrire certains produits associatifs comme somme d'un produit gauche et d'un produit droit. Cela permet donc de casser l'associativité et d'obtenir des relations de compatibilité souvent plus faciles à vérifier. Dans [59], Loday et Ronco, grâce à une structure dendriforme, définissent une algèbre de Hopf d'arbres binaires appelée algèbre de Loday et Ronco. Elle est librement engendrée par

l'arbre binaire à un seul sommet interne $\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$. Foissy démontre [32, proposition 31] que l'algèbre de Hopf de Loday et Ronco décorée est isomorphe à l'algèbre de Hopf des arbres enracinés plans décorés. Cette démonstration repose sur les caractères dendriformes des deux objets. Aguiar et

Sottile [5] étudient le dual gradué de l'algèbre de Loday et Ronco. La structure bidendriforme est introduite par Foissy [27]. En plus de scinder l'associativité, elle scinde également la coassociativité. Foissy explicite également la structure bidendriforme de l'algèbre de Malvenuto et Reutenauer **FQSym** ainsi que celle de l'algèbre de Hopf des arbres enracinés plans décorés de Connes et Kreimer. Des versions analogues au théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore sont prouvées : par Ronco [82] pour les algèbres dendriformes, par Chapoton [15] pour les bigèbres dendriformes et par Foissy [27] pour les bigèbres bidendriformes. Le cas bidendriforme implique [27, théorème 39] que **FQSym** est isomorphe à une algèbre de Hopf d'arbres enracinés plans décorés.

Les algèbres de Zinbiel ont été définies par Loday [56, 57]. Elles sont équivalentes aux algèbres dendriformes commutatives et sont liées aux algèbres de Leibniz (les opérades \mathcal{Zinb} et \mathcal{Leib} sont duales dans la dualité de Koszul). Livernet [55] remplace les algèbres de Lie et les algèbres commutatives par les algèbres de Leibniz et les algèbres de Zinbiel pour définir une théorie non commutative des homotopies rationnelles. Chapoton [14, théorème 5.9] démontre que l'opérade \mathcal{Zinb} est anticyclique (il existe une action du groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} sur le \mathfrak{S}_n -module $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier naturel n). Vallette [90, théorème 20] donne une description de \mathcal{Zinb} en fonction des opérades $\mathcal{PréLie}$ et \mathcal{Com} grâce au produit de Manin.

En considérant une algèbre dendriforme et en scindant les produits gauche et droit en deux lorsque cela est possible, on obtient une quadri-algèbre. Aguiar et Loday introduisent cette notion dans [3]. Ils déterminent une structure de quadri-algèbre sur les algèbres infinitésimales et s'intéressent à la quadri-algèbre libre à un générateur [3, corollaire 3.3, section 4]. Vallette [90, corollaires 48 et 52, théorème 51] prouve les conjectures émises par Aguiar et Loday dans [3, conjectures 4.2, 4.5 et 4.6] concernant les opérades \mathcal{Quad} et $\mathcal{Quad}^!$. Foissy présente la quadri-algèbre libre à un générateur comme sous objet de **FQSym** [30, corollaire 7] et définit la notion de quadri-bigèbre en détaillant l'exemple de **FQSym** [30, section 3].

Définition 35. Une quadri-algèbre \mathcal{Q} est un espace vectoriel muni de quatre opérations $\searrow, \nearrow, \swarrow$ et \nwarrow , définies sur $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}$, à valeurs dans \mathcal{Q} , et, vérifiant les axiomes suivants : pour tout $x, y, z \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} (x \swarrow y) \swarrow z &= x \swarrow (y \cdot z), & (x \nearrow y) \swarrow z &= x \nearrow (y \prec z), & (x \wedge y) \nearrow z &= x \nearrow (y \succ z), \\ (x \swarrow y) \nwarrow z &= x \swarrow (y \wedge z), & (x \searrow y) \swarrow z &= x \searrow (y \swarrow z), & (x \vee y) \nearrow z &= x \searrow (y \nearrow z), \\ (x \prec y) \swarrow z &= x \swarrow (y \vee z), & (x \succ y) \swarrow z &= x \searrow (y \swarrow z), & (x \cdot y) \searrow z &= x \searrow (y \searrow z), \end{aligned}$$

où, pour tout $x, y \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} x \prec y &= x \swarrow y + x \swarrow y, & x \wedge y &= x \nearrow y + x \swarrow y, \\ x \succ y &= x \nearrow y + x \searrow y, & x \vee y &= x \searrow y + x \swarrow y, \end{aligned}$$

et

$$x \cdot y = x \swarrow y + x \swarrow y + x \nearrow y + x \searrow y = x \prec y + x \succ y = x \wedge y + x \vee y.$$

Définition 36. Une algèbre dendriforme est un espace vectoriel \mathcal{D} muni de deux opérations, un produit gauche $\prec: \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et un produit droit $\succ: \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, vérifiant les axiomes suivants : $\forall x, y, z \in \mathcal{D}$,

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

Proposition 37. Soit $(\mathcal{Q}, \searrow, \nearrow, \swarrow, \nwarrow)$ une quadri-algèbre alors, $(\mathcal{Q}, \swarrow + \nwarrow, \nearrow + \searrow)$, i.e. $(\mathcal{Q}, \prec, \succ)$, et $(\mathcal{Q}, \nearrow + \swarrow, \searrow + \nwarrow)$, i.e. $(\mathcal{Q}, \wedge, \vee)$, sont des algèbres dendriformes.

Définition 38. Une algèbre de Zinbiel est un espace vectoriel \mathcal{Z} muni d'une opération binaire définie sur $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z}$, à valeur dans \mathcal{Z} telle que :

$$\text{pour tout } x, y, z \in \mathcal{Z}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot (z \cdot y).$$

Proposition 39. Soit (\mathcal{Z}, \cdot) une algèbre de Zinbiel. Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{Z}^2$ on pose $x \prec y = x \cdot y$ et $x \succ y = y \cdot x$. On obtient alors que $(\mathcal{Z}, \prec, \succ)$ est une algèbre dendriforme. Réciproquement, si $(\mathcal{D}, \prec, \succ)$ est une algèbre dendriforme commutative (i.e. pour tout élément $(x, y) \in \mathcal{D}^2$, $x \succ y = y \prec x$), alors (\mathcal{D}, \cdot) est une algèbre de Zinbiel.

Cas de \mathfrak{SH}^* . Introduisons d'abord les notations suivantes. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\text{Bat}_1(n_1, n_2) = \{\rho \in \text{Bat}(n_1, n_2), \rho^{-1}(1) = 1\},$$

$$\text{Bat}_2(n_1, n_2) = \{\rho \in \text{Bat}(n_1, n_2), \rho^{-1}(1) = n_1 + 1\}.$$

Soient $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}$. Définissons sur \mathfrak{SH}^* les produits suivants :

$$Z_{\sigma_1} \swarrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_1(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_1(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}}, \quad Z_{\sigma_1} \nwarrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_1(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_2(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}},$$

$$Z_{\sigma_1} \nearrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_2(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_1(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}}, \quad Z_{\sigma_1} \searrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_2(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_2(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}}.$$

Exemples. Considérons les mots tassés x_2x_1 et x_1 . On a alors :

$$Z_{x_2x_1} \swarrow Z_{x_1} = Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1},$$

$$Z_{x_2x_1} \nwarrow Z_{x_1} = Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_2x_3x_1},$$

$$Z_{x_2x_1} \nearrow Z_{x_1} = Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_3x_1x_2},$$

$$Z_{x_2x_1} \searrow Z_{x_1} = Z_{x_1x_3x_2}.$$

A partir des produits précédents on construit :

$$Z_{\sigma_1} \prec Z_{\sigma_2} = Z_{\sigma_1} \swarrow Z_{\sigma_2} + Z_{\sigma_1} \nwarrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_1(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}},$$

$$Z_{\sigma_1} \succ Z_{\sigma_2} = Z_{\sigma_1} \nearrow Z_{\sigma_2} + Z_{\sigma_1} \searrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}_2(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}}.$$

$$Z_{\sigma_1} \wedge Z_{\sigma_2} = Z_{\sigma_1} \swarrow Z_{\sigma_2} + Z_{\sigma_1} \nearrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_1(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_{\sigma_1} * w_{\sigma_2}) \circ \mu^{-1}},$$

$$Z_{\sigma_1} \vee Z_{\sigma_2} = Z_{\sigma_1} \nwarrow Z_{\sigma_2} + Z_{\sigma_1} \searrow Z_{\sigma_2} = \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(n_1, n_2), \\ \mu \in \text{Bat}_2(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_{\sigma_1} * w_{\sigma_2}) \circ \mu^{-1}}.$$

Exemples. On considère toujours les mots tassés x_2x_1 et x_1 . On a alors :

$$\begin{aligned} Z_{x_2x_1} \prec Z_{x_1} &= Z_{x_2x_1x_3} + 2Z_{x_2x_3x_1} + 2Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_3x_1x_2}, \\ Z_{x_2x_1} \succ Z_{x_1} &= Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_1x_3x_2}, \\ Z_{x_2x_1} \wedge Z_{x_1} &= Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_1} + 2Z_{x_3x_1x_2} + 2Z_{x_3x_2x_1}, \\ Z_{x_2x_1} \vee Z_{x_1} &= Z_{x_3x_2x_1} + Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_1x_3x_2}. \end{aligned}$$

Par calcul direct, on obtient que $(\mathfrak{SH}, \swarrow, \searrow, \nearrow, \nwarrow)$ est une quadri-algèbre. Il s'ensuit que $(\mathfrak{SH}, \prec, \succ)$ et $(\mathfrak{SH}, \wedge, \vee)$ sont des algèbres dendriformes. On vérifie facilement que deux permutations σ_1 et σ_2 quelconques satisfont les relations $\sigma_1 \searrow \sigma_2 = \sigma_2 \nwarrow \sigma_1$ et $\sigma_1 \swarrow \sigma_2 = \sigma_2 \nearrow \sigma_1$. Cela signifie que la quadri-algèbre $(\mathfrak{SH}, \swarrow, \searrow, \nearrow, \nwarrow)$ est commutative. Par conséquent, les algèbres dendriformes $(\mathfrak{SH}, \prec, \succ)$ et $(\mathfrak{SH}, \wedge, \vee)$ le sont également. Les espaces (\mathfrak{SH}, \prec) et (\mathfrak{SH}, \wedge) sont donc des algèbres de Zinbiel.

En revanche, les algèbres dendriformes ne respectent pas les compatibilités décrites dans [27] vis-à-vis du coproduit (*cf.* les contre-exemples 1 et 3) ; même en utilisant le coproduit co-opposé Δ^{cop} (*cf.* les contre-exemples 2 et 3).

Contre-exemples.

1. Considérons les mots tassés Z_{x_1} et $Z_{x_1x_2}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(\underbrace{Z_{x_1} \prec Z_{x_1x_2}}_{\text{noté } Z_{(1,12)}^\prec}) &= \Delta(Z_{x_1x_2x_3} + Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_3x_1x_2}) \\ &= Z_{(1,12)}^\prec \otimes 1 + Z_{x_1} \otimes Z_{x_1x_2} + Z_{x_1x_2} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_1} + 1 \otimes Z_{(1,12)}^\prec \\ &= \Delta^{cop}(Z_{x_1}) \prec \Delta^{cop}(Z_{x_1x_2}). \end{aligned}$$

2. Considérons les mots tassés $Z_{x_2x_1}$ et $Z_{x_2x_1x_3}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta(\underbrace{Z_{x_2x_1} \prec Z_{x_2x_1x_3}}_{\text{noté } Z_{(21,213)}^\prec}) &= Z_{(21,213)}^\prec \otimes 1 + 1 \otimes Z_{(21,213)}^\prec + Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_2x_1x_3} \\ &\quad + Z_{x_2x_1x_4x_3} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_2x_4x_3x_1} \otimes Z_{x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_1x_4x_2} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_3x_4x_1x_2} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_3x_2x_4x_1} \otimes Z_{x_1} \\ &\quad + Z_{x_4x_1x_3x_2} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_4x_3x_1x_2} \otimes Z_{x_1} + 3Z_{x_4x_3x_2x_1} \otimes Z_{x_1} \\ &\quad + Z_{x_4x_2x_1x_3} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_3x_4x_2x_1} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_4x_2x_3x_1} \otimes Z_{x_1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Delta(Z_{x_2x_1}) \prec \Delta(Z_{x_2x_1x_3}) &= Z_{(21,213)}^\prec \otimes 1 + 1 \otimes Z_{(21,213)}^\prec \\ &\quad + Z_{x_2x_1x_3} \otimes Z_{x_2x_1} + Z_{x_2x_1} \otimes (Z_{x_2x_1} \prec Z_{x_1}). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \Delta(Z_{x_2x_1} \prec Z_{x_2x_1x_3}) &\neq \Delta(Z_{x_2x_1}) \prec \Delta(Z_{x_2x_1x_3}), \\ \Delta(Z_{x_2x_1} \prec Z_{x_2x_1x_3}) &\neq \Delta^{cop}(Z_{x_2x_1}) \prec \Delta^{cop}(Z_{x_2x_1x_3}). \end{aligned}$$

3. Considérons maintenant les mots tassés $Z_{x_2x_1x_3}$ et Z_{x_1} . On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta(\underbrace{Z_{x_2x_1x_3} \wedge Z_{x_1}}_{\text{noté } Z_{(213,1)}^\wedge}) &= Z_{(213,1)}^\wedge \otimes 1 + 1 \otimes Z_{(213,1)}^\wedge + 2Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_1x_2} \\ &+ 2Z_{x_2x_1x_3} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_2x_1} + Z_{x_2x_3x_1} \otimes Z_{x_1} \\ &+ 2Z_{x_3x_1x_2} \otimes Z_{x_1} + 2Z_{x_3x_2x_1} \otimes Z_{x_1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Delta(Z_{x_2x_1x_3}) \wedge \Delta(Z_{x_1}) &= (Z_{x_2x_1x_3} \otimes 1 + Z_{x_2x_1} \otimes Z_{x_1} + 1 \otimes Z_{x_2x_1x_3}) \wedge (Z_{x_1} \otimes 1 + 1 \otimes Z_{x_1}) \\ &= (Z_{x_2x_1x_3} \wedge Z_{x_1}) \otimes 1 + Z_{x_2x_1}Z_{x_1} \otimes Z_{x_1} + Z_{x_2x_1} \otimes (Z_{x_1} \wedge Z_{x_1}) \\ &+ Z_{x_1} \otimes Z_{x_2x_1x_3} + 1 \otimes (Z_{x_2x_1x_3} \wedge Z_{x_1}) \\ &= Z_{(213,1)}^\wedge \otimes 1 + 1 \otimes Z_{(213,1)}^\wedge \\ &+ (Z_{x_2x_1x_3} + 2Z_{x_2x_3x_1} + 3Z_{x_3x_2x_1} + 2Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_1x_3x_2}) \otimes Z_{x_1} \\ &+ Z_{x_2x_1} \otimes (Z_{x_2x_1} + Z_{x_1x_2}) + Z_{x_1} \otimes Z_{x_2x_1x_3}. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \Delta(Z_{x_2x_1x_3} \wedge Z_{x_1}) &\neq \Delta(Z_{x_2x_1x_3}) \wedge \Delta(Z_{x_1}), \\ \Delta(Z_{x_2x_1x_3} \wedge Z_{x_1}) &\neq \Delta^{\text{cop}}(Z_{x_2x_1x_3}) \wedge \Delta^{\text{cop}}(Z_{x_1}). \end{aligned}$$

Algèbres de Hopf \mathfrak{SH}^\otimes et \mathfrak{SQSym} . L'objectif de ce paragraphe est de lier l'algèbre de Hopf \mathfrak{SH}^\otimes et l'algèbre de Hopf de permutations \mathfrak{SQSym} introduite par Hivert, Novelli et Thibon dans la section 3.1 de [44]. Pour cela, rappelons d'abord la construction de \mathfrak{SQSym} . On considère l'ensemble infini d'indéterminées commutant deux à deux $\{x_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}^*\}$. On note $R = \mathbb{K}[x_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}^*]$ et on pose \mathcal{L} son idéal engendré par les relations

$$x_{ij}x_{ik} = 0 \text{ pour tous } (i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^3.$$

Dans R/\mathcal{L} , on pose

$$\mathfrak{SQSym} = \text{Vect} \left(M_\sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1 i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_n i_{\sigma(n)}}, \sigma \in \mathfrak{S}_n, n \in \mathbb{N}^* \right).$$

Sur \mathfrak{SQSym} , on définit le produit

$$m : \begin{cases} \mathfrak{SQSym} \otimes \mathfrak{SQSym} & \longrightarrow \mathfrak{SQSym} \\ M_{\sigma_1} \otimes M_{\sigma_2}, (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} & \mapsto M_{\sigma_1} M_{\sigma_2} = \sum_{\tau \in \text{Bat}(n_1, n_2)} M_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_{n_2}) \circ \tau^{-1}}, \end{cases}$$

ainsi que le coproduit

$$\Delta : \begin{cases} \mathfrak{SQSym} & \longrightarrow \mathfrak{SQSym} \otimes \mathfrak{SQSym} \\ M_\sigma \in (\mathfrak{SQSym})_n & \mapsto \Delta(M_\sigma) = \sum_{\substack{(\tau_1, \tau_2) \\ \tau_1 * \tau_2 = \sigma}} M_{\tau_1} \otimes M_{\tau_2}, \end{cases}$$

où on rappelle que $*$ représente le produit de concaténation décalée des permutations.

Exemples. Donnons quelques exemples pour illustrer les deux opérations.

$$\begin{aligned} M_{123}M_{123456} &= \binom{9}{3} M_{123456789} = 84M_{123456789}, \\ M_{12}M_{21} &= M_{1243} + M_{1324} + M_{1432} + M_{2134} + M_{3214} + M_{4231}, \\ \Delta(M_{12435}) &= M_{12435} \otimes 1 + M_1 \otimes M_{1324} + M_{12} \otimes M_{213} + M_{1243} \otimes M_1 + 1 \otimes M_{12435}. \end{aligned}$$

L'espace \mathfrak{SQSym} , muni de ce produit et de ce coproduit, est une algèbre de Hopf commutative colibre.

Proposition 40. *Les algèbres de Hopf \mathfrak{SH}^{\otimes} et \mathfrak{SQSym} sont isomorphes.*

Démonstration. On sait que les algèbres de Hopf \mathfrak{SH}^{\otimes} et \mathfrak{SQSym} ont même série de Poincaré-Hilbert et qu'elles sont toutes les deux graduées connexes commutatives et colibres. Elle sont donc isomorphes. \square

Construisons un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\varphi : \mathfrak{SQSym} \longrightarrow \mathfrak{SH}^{\otimes}$ entre \mathfrak{SH}^{\otimes} et \mathfrak{SQSym} jusqu'en degré 4. En degré 1 et 2 on prend :

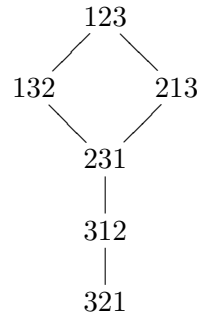
$$\varphi(M_1) = Z_{x_1}, \quad \varphi(M_{12}) = Z_{x_1x_2} + Z_{x_2x_1}, \quad \varphi(M_{21}) = Z_{x_2x_1}.$$

En degré 3, en utilisant le fait que $M_1M_{12} = 3M_{123}$ et que $M_1M_{21} = M_{132} + M_{213} + M_{321}$, on peut poser :

$$\begin{aligned} \varphi(M_{123}) &= Z_{x_1x_2x_3} + Z_{x_1x_3x_2} + Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{132}) &= Z_{x_1x_3x_2} + Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{213}) &= Z_{x_2x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{231}) &= Z_{x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{312}) &= Z_{x_3x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{321}) &= Z_{x_3x_2x_1}. \end{aligned}$$

Au vu de ces choix, il est possible de définir, pour n compris entre 1 et 3, un ordre partiel \preceq sur les permutations de \mathfrak{S}_n . Ainsi, si l'on considère une permutation $\sigma = \sigma(1)\dots\sigma(n)$ avec n compris entre 1 et 3, on peut définir $\varphi(M_\sigma)$ de la manière suivante : $\varphi(M_\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma \preceq \tau} Z_{w_\tau}$.

En degré 3, on obtient le poset (ensemble partiellement ordonné) suivant :



Malheureusement, en degré 4, il n'est plus possible d'étendre l'ordre partiel choisi de telle sorte que $\varphi(M_\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_4 \\ \sigma \preceq \tau}} Z_{w_\tau}$. Posons a, b, c, d, e et f les coefficients en $Z_{x_4x_2x_3x_1}$ respectivement de

$\varphi(M_{1243}), \varphi(M_{1324}), \varphi(M_{1432}), \varphi(M_{2134}), \varphi(M_{3214})$ et $\varphi(M_{4231})$. Du fait que φ soit un morphisme d'algèbres et que :

$$\begin{aligned} M_{12}M_{21} &= M_{1243} + M_{1324} + M_{1432} + M_{2134} + M_{3214} + M_{4231}, \\ M_1M_{321} &= M_{1432} + M_{3214} + 2M_{4231}, \end{aligned}$$

on obtient que : $\begin{cases} a + b + d = 4 \\ f = 1 \end{cases}$. Les coefficients a, b et d ne peuvent donc pas être simultanément égaux à 1. En degré 4, on peut choisir la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(M_{4321}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1}, \\ \varphi(M_{4312}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2}, \\ \varphi(M_{4231}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_2x_3x_1}, \\ \varphi(M_{4213}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3}, \\ \varphi(M_{4132}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2}, \\ \varphi(M_{4123}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3}, \\ \varphi(M_{3421}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1}, \\ \varphi(M_{3412}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_3x_4x_1x_2}, \\ \varphi(M_{3241}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1}, \\ \varphi(M_{3214}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4}, \\ \varphi(M_{3142}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2}, \\ \varphi(M_{3124}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + 2Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_3x_1x_2x_4}, \\ \varphi(M_{2431}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1}, \\ \varphi(M_{2413}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3}, \\ \varphi(M_{2341}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_4x_1}, \\ \varphi(M_{2314}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_3x_1x_2x_4} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} \\ &\quad + 2Z_{x_2x_3x_4x_1} + Z_{x_2x_3x_1x_4}, \\ \varphi(M_{2143}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2} \\ &\quad + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} + Z_{x_2x_1x_4x_3}, \\ \varphi(M_{2134}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + 2Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\ &\quad + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_3x_1x_2x_4} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_{x_2x_3x_4x_1} + Z_{x_2x_3x_1x_4} + Z_{x_2x_1x_4x_3} + Z_{x_2x_1x_3x_4}, \\
\varphi(M_{1432}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_1x_4x_3x_2}, \\
\varphi(M_{1423}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1} \\
& + Z_{x_2x_4x_1x_3} + Z_{x_1x_4x_3x_2} + Z_{x_1x_4x_2x_3}, \\
\varphi(M_{1342}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} \\
& + Z_{x_2x_3x_4x_1} + Z_{x_1x_4x_3x_2} + Z_{x_1x_4x_2x_3} + Z_{x_1x_3x_4x_2}, \\
\varphi(M_{1324}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} + 2Z_{x_3x_4x_1x_2} \\
& + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_3x_1x_2x_4} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_4x_1} \\
& + Z_{x_2x_3x_1x_4} + Z_{x_1x_4x_3x_2} + Z_{x_1x_4x_2x_3} + Z_{x_1x_3x_4x_2} + Z_{x_1x_3x_2x_4}, \\
\varphi(M_{1243}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + 2Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\
& + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_4x_1} + Z_{x_2x_1x_4x_3} \\
& + Z_{x_1x_4x_3x_2} + Z_{x_1x_4x_2x_3} + Z_{x_1x_3x_4x_2} + Z_{x_1x_2x_4x_3}, \\
\varphi(M_{1234}) &= Z_{x_4x_3x_2x_1} + Z_{x_4x_3x_1x_2} + Z_{x_4x_2x_3x_1} + Z_{x_4x_2x_1x_3} + Z_{x_4x_1x_3x_2} + Z_{x_4x_1x_2x_3} + Z_{x_3x_4x_2x_1} \\
& + Z_{x_3x_4x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_4x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_4} + Z_{x_3x_1x_4x_2} + Z_{x_3x_1x_2x_4} + Z_{x_2x_4x_3x_1} + Z_{x_2x_4x_1x_3} \\
& + Z_{x_2x_3x_4x_1} + Z_{x_2x_3x_1x_4} + Z_{x_2x_1x_4x_3} + Z_{x_2x_1x_3x_4} + Z_{x_1x_4x_3x_2} + Z_{x_1x_4x_2x_3} + Z_{x_1x_3x_4x_2} \\
& + Z_{x_1x_3x_2x_4} + Z_{x_1x_2x_4x_3} + Z_{x_1x_2x_3x_4}.
\end{aligned}$$

Réalisation polynomiale de l'algèbre \mathfrak{SH}^{\otimes} . Il est possible de donner pour certaines algèbres \mathcal{H} une réalisation polynomiale. Cela passe par l'établissement d'un morphisme injectif de \mathcal{H} vers une algèbre \mathcal{A} . Cette dernière est souvent une algèbre tensorielle (*e.g.* [20, section 3.1], [73, section 2.1], [72, section 3.8], [44], [78, section 3] ou encore [34]), mais peut également être une algèbre symétrique comme dans la définition classique de l'algèbre de Hopf **QSym** (*cf.* [60, 61]). On peut même ainsi obtenir une réalisation d'algèbre de Hopf en construisant une cogèbre par dédoublement d'alphabet.

Ici, le choix d'une algèbre tensorielle ou d'une algèbre symétrique ne semble pas convenir. En effet, dans ces deux cas, le produit obtenu est un simple battage. Or, pour \mathfrak{SH}^{\otimes} , le battage est double. Nous allons donc considérer à la place une algèbre de battage. Ce choix ne permettra plus d'obtenir une cogèbre compatible par dédoublement d'alphabet. En effet, il implique une cogèbre de déconcaténation alors que le coproduit de \mathfrak{SH}^{\otimes} est une déconcaténation par blocs.

Soit donc $A = \{a_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, un alphabet auxiliaire infini, dénombrable et totalement ordonné par l'ordre des entiers naturels. On pose A^* l'ensemble de tous les mots obtenus à partir de A et l'on considère l'algèbre de battage $\text{Sh}(A)$ muni du produit de battage habituel.

Proposition 41. *On définit l'application :*

$$r_A : \begin{cases} \mathfrak{SH}^{\otimes} & \longrightarrow \text{Sh}(A) \\ Z_{\sigma} & \mapsto G_{\sigma} = \sum_{\substack{w \in A^* \\ \text{Std}(w) = \sigma}} w, \end{cases}$$

où pour tout mot $w \in A^*$, la notation $\text{Std}(w)$ correspond à la standardisation de w . L'application r_A est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. Soient $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}$ deux permutations. On a alors :

$$\begin{aligned}
G_{\sigma_1} G_{\sigma_2} &= \sum_{\substack{w_1 = a_{i_1} \dots a_{i_{n_1}} \in A^* \\ \text{Std}(w_1) = \sigma_1}} \sum_{\substack{w_2 = a_{i_{n_1+1}} \dots a_{i_{n_1+n_2}} \in A^* \\ \text{Std}(w_2) = \sigma_2}} a_{i_1} \dots a_{i_{n_1}} \sqcup a_{i_{n_1+1}} \dots a_{i_{n_1+n_2}} \\
&= \sum_{\substack{w_1 = a_{i_1} \dots a_{i_{n_1}} \in A^* \\ \text{Std}(w_1) = \sigma_1}} \sum_{\substack{w_2 = a_{i_{n_1+1}} \dots a_{i_{n_1+n_2}} \in A^* \\ \text{Std}(w_2) = \sigma_2}} \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} a_{i_{\mu^{-1}(1)}} \dots a_{i_{\mu^{-1}(n_1+n_2)}} \\
&= \sum_{\substack{w = w_1 w_2 \in A^* \\ w_1 = a_{i_1} \dots a_{i_{n_1}} \\ w_2 = a_{i_{n_1+1}} \dots a_{i_{n_1+n_2}} \\ \text{Std}(w_1) = \sigma_1 \text{ et } \text{Std}(w_2) = \sigma_2}} \sum_{\mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} a_{i_{\mu^{-1}(1)}} \dots a_{i_{\mu^{-1}(n_1+n_2)}} \\
&= \sum_{\tau, \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)} G_{\tau \circ (\sigma_1 * \sigma_2) \circ \mu^{-1}}.
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Algèbre de Hopf quotient des mots tassés stricts croissants

Une algèbre de Hopf intermédiaire, celle des mots tassés stricts SPW

On considère le sous-espace vectoriel \mathcal{I} de \mathbf{WMat} défini par :

$$\mathcal{I} = \langle w \in \mathbf{WMat}, x_0 \in \text{Alph}(w) \rangle.$$

Il est immédiat que \mathcal{I} est un biidéale de Hopf. $\mathbf{SPW} = \mathbf{WMat}/\mathcal{I}$ est donc une algèbre de Hopf quotient. Par commodité, on écrira toujours les éléments de \mathbf{SPW} sous forme de combinaison linéaire de mots tassés w tels que $x_0 \notin \text{Alph}(w)$ et non sous forme de combinaison linéaire de classes. L'algèbre de Hopf \mathbf{SPW} sera appelée algèbre de Hopf des mots tassés stricts.

Exemples. Quelques exemples d'éléments de \mathbf{SPW} .

$$x_1 x_3 x_2 x_1 \in \mathbf{SPW}, x_1 x_1 - x_1 \in \mathbf{SPW}, \overline{x_2 x_2 x_1 - x_0 x_1} = x_2 x_2 x_1 \in \mathbf{SPW}.$$

Proposition 42. \mathbf{SPW} est librement engendrée par $\mathbf{SPW} \cap \text{Irr}(\mathbf{WMat})$.

Démonstration. Considérons un mot tassé non vide $w \in \mathbf{SPW}$. On voit w comme un mot tassé de \mathbf{WMat} tel que $x_0 \notin \text{Alph}(w)$. On sait que :

il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ et un unique $(w_1, \dots, w_k) \in \text{Irr}(\mathbf{WMat})^k$ tels que $w = w_1 * \dots * w_k$.

Supposons qu'il existe un entier $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tel que $x_0 \in \text{Alph}(w_{i_0})$. Alors $x_0 \in \text{Alph}(w)$, ce qui est exclu. □

Proposition 43. Dans \mathbf{SPW} le produit s'exprime de la façon suivante :

$$* : \begin{cases} \mathbf{SPW} \otimes \mathbf{SPW} & \longrightarrow \mathbf{SPW} \\ u \otimes v & \longmapsto uT_{\text{sup}(u)}(v). \end{cases}$$

Quant au coproduit, il s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbf{SPW} & \longrightarrow \mathbf{SPW} \otimes \mathbf{SPW} \\ w & \mapsto \Delta(w) = \sum_{\substack{I+J=\{1,\dots,|w|\} \\ \text{Alph}(w[I]) \cap \text{Alph}(w[J]) = \emptyset}} \text{pack}(w[I]) \otimes \text{pack}(w[J]). \end{cases}$$

Exemples. Donnons quelques exemples pour illustrer les deux opérations de **SPW** décrites dans la proposition précédente.

$$\begin{aligned} x_2x_1x_2x_3x_1 * x_2x_2x_3x_1 &= x_2x_1x_2x_3x_1x_5x_5x_6x_4, \\ \Delta(x_1x_1x_1) &= x_1x_1x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1x_1x_1, \\ \Delta(x_2x_1x_2) &= x_2x_1x_2 \otimes 1 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_1x_2. \end{aligned}$$

Remarques.

1. Par définition, la cogèbre **SPW** est cocommutative.
2. la série formelle $F_{\mathbf{SPW}}$ de **SPW** est donnée par la séquence A000670 de [84] :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{SPW}}(h) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (\alpha_1 \dots \alpha_k) \models n}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} h^n = 1 + h + 3h^2 + 13h^3 + 75h^4 + 541h^5 + 4683h^6 \dots \\ &= 1 + \frac{F_{\mathbf{WMat}}(h) - 1}{2}. \end{aligned}$$

La série formelle des générateurs de **SPW** en tant qu'algèbre est donnée par la séquence A095989 de [84], à savoir :

$$1 - \frac{1}{F_{\mathbf{SPW}}(h)} = h + 2h^2 + 8h^3 + 48h^4 + 368h^5 + 3376h^6 \dots$$

3. **SPW** est une algèbre de Hopf graduée connexe cocommutative ; elle est donc isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ avec $\mathfrak{g} = \text{Prim}(\mathbf{SPW})$. La série génératrice $F_{\text{Prim}(\mathbf{SPW})}$ des primitifs de **SPW** est donc la séquence A095993 de [84] :

$$F_{\text{Prim}(\mathbf{SPW})}(h) = h + 2h^2 + 10h^3 + 59h^4 + 446h^5 + 3965h^6 + \dots$$

On connaît les espaces vectoriels $\text{Prim}(\mathbf{SPW})_2$ et $\text{Prim}(\mathbf{SPW})_3$. Il s'agit de :

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\mathbf{SPW})_2 &= \text{Vect}(x_1x_1, x_1x_2 - x_2x_1), \\ \text{Prim}(\mathbf{SPW})_3 &= \text{Vect}(W_1, \dots, W_{10}) \end{aligned}$$

où W_1, \dots, W_{10} sont les vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} W_1 &= x_1x_1x_1, & W_6 &= x_2x_1x_1 - x_1x_1x_2, \\ W_2 &= x_2x_1x_1 - x_1x_2x_1, & W_7 &= -x_1x_2x_3 - 2x_3x_2x_1 + 3x_3x_1x_2, \\ W_3 &= x_2x_1x_1 - x_1x_2x_2, & W_8 &= -x_1x_3x_2 - x_3x_2x_1 + 2x_3x_1x_2, \\ W_4 &= x_2x_1x_1 - x_2x_1x_2, & W_9 &= -x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 + 2x_3x_1x_2, \\ W_5 &= x_2x_1x_1 - x_2x_2x_1, & W_{10} &= -x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2. \end{aligned}$$

4. Dans **SPW** les seuls mots tassés primitifs sont de la forme $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Algèbre de Hopf des mots tassés stricts croissants **ISPW**

On considère maintenant le sous-espace vectoriel de **SPW** défini par :

$$\mathbf{ISPW} = \text{Vect} \left(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_n \text{ fois}} \in \mathbf{SPW}, (n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1} \right).$$

Il s'agit d'une sous-algèbre de Hopf de **SPW**. Elle sera appelée algèbre de Hopf des mots tassés stricts croissants. Elle est librement engendrée par $\left\{ \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et est isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses éléments primitifs. On montrera dans la proposition 53 que l'algèbre de Hopf **ISPW** et l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives sont isomorphes. Un isomorphisme explicite sera donné dans la proposition 78 de la section 2.3.

On peut facilement calculer la série formelle de **ISPW**. En effet, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left| \{w \in (\mathbf{ISPW})_n, w \text{ mot tassé}\} \right| = \left| \{\alpha \vDash n\} \right| = 2^{n-1}.$$

On obtient donc :

$$F_{\mathbf{ISPW}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} h^n.$$

Ainsi, la série formelle des primitifs est donnée par la séquence A059966 de [84] :

$$F_{\text{Prim}(\mathbf{ISPW})} = h + h^2 + 2h^3 + 3h^4 + 6h^5 + 9h^6 + 18h^7 + 30h^8 + 56h^9 + 99h^{10} + \dots$$

L'objectif maintenant est de déterminer quelques familles d'éléments primitifs de **ISPW**.

Lemme 44. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit d_n comme étant la dimension de $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})_n$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{d_n})$ de $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})_n$ telle que chaque élément de \mathcal{B} soit associé à une seule partition de n . Plus précisément, pour tout entier $i \in \{1, \dots, d_n\}$, il existe une unique partition $(\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{k_i})$ de n telle que*

$$e_i \in \text{Vect} \left(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_{\sigma(1)} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{k_i} \dots x_{k_i}}_{\alpha_{\sigma(k_i)} \text{ fois}}, \sigma \in \mathfrak{S}_{k_i} \right).$$

Exemple. Considérons les mots tassés stricts croissants de degré 3. On obtient facilement que $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs $x_1 x_1 x_1$ et $x_1 x_1 x_2 - x_1 x_2 x_2$. Le nombre 3 possède trois partitions ((3), (1,2) et (1,1,1)) et quatre compositions ((3), (1,2), (2,1) et (1,1,1)). Le mot $x_1 x_1 x_1$ est formé d'un bloc de trois lettres identiques. Il est donc associé à la partition (3). La somme $x_1 x_1 x_2 - x_1 x_2 x_2$ est la combinaison linéaire d'un mot dont la taille des blocs de lettres distinctes est régie par la composition (2,1) et d'un mot régi par la composition (1,2). On associe donc l'élément à la partition (1,2). Les partitions du type $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \geq 2 \text{ fois}}$ ne sont associées à aucun élément primitif non nul.

Démonstration. On sait que $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})$, muni du crochet $\{-, -\}$ associé au produit de concaténation décalé, est l'algèbre de Lie librement engendrée par l'ensemble $\left\{ \underbrace{x_1 \dots x_1}_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. \square

Proposition 45. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet d'entiers naturels non nuls deux à deux distincts. Dans \mathbf{ISPW} , on définit l'élément

$$\mathcal{Pr}_\beta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} w_{\beta, \tilde{\sigma}_k}$$

où

$$\tilde{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \sigma(1)+1 & \dots & \sigma(n-1)+1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n,$$

$$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_{k-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & k & k+2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1,$$

$$w_{\beta, \tilde{\sigma}_k} = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_{\tilde{\sigma}_k(1)} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\beta_{\tilde{\sigma}_k(n)} \text{ fois}}.$$

\mathcal{Pr}_γ est un élément primitif.

Exemple. Voici un exemple d'élément primitif de \mathbf{ISPW} défini dans la proposition précédente.

$$\begin{aligned} \mathcal{Pr}_{(3,1,4)} &= x_1 x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_3 x_3 - 2x_1 x_2 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 x_3 + x_1 x_2 x_2 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 \\ &\quad + x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_2 x_3 - 2x_1 x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3 + x_1 x_1 x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_3 \\ &= \mathcal{Pr}_{(3,4,1)}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Commençons par montrer le résultat pour $\mathcal{Pr}_{(1, \dots, n)}$. Par calcul direct, on a :

$$\mathcal{Pr}_{(1, \dots, n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \left\{ \dots \{x_1, \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\sigma(1)+1 \text{ fois}}, \dots\}, \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\sigma(n-1)+1 \text{ fois}} \right\}$$

où $\{-, -\}$ désigne le crochet de Lie associé au produit. Pour démontrer le résultat dans le cas de \mathcal{Pr}_β , où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^*$ est un n -uplet d'entiers naturels non nuls deux à deux distincts, il suffit de considérer l'endomorphisme d'algèbre de Hopf suivant :

$$\Lambda_\beta : \begin{cases} \mathbf{ISPW} & \longrightarrow & \mathbf{ISPW} \\ \underbrace{x_1 \dots x_1}_k \text{ fois} & \mapsto & \begin{cases} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_k \text{ fois}} & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ \underbrace{x_1 \dots x_1}_k \text{ fois} & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

On obtient alors que $\Lambda_\beta(\mathcal{Pr}_{(1, \dots, n)}) = \mathcal{Pr}_\beta$. \square

Remarque. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet d'entiers deux à deux distincts. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le n -uplet $\gamma_i = (\beta_i, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$. Grâce à l'écriture de $\mathcal{P}r_{\gamma_i}$ en fonction du crochet de Lie, il vient :

1.

$$S_\beta = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}r_{\gamma_i} = 0,$$

2. l'espace vectoriel engendré par les éléments $\mathcal{P}r_{\gamma_i}$ est de dimension $n - 1$ si $n \geq 2$.

Proposition 46. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Posons $\rho = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ et $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Appelons γ le θ -uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\theta) = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\beta_n, \dots, \beta_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}$. Dans **ISPW**, on définit l'élément

$$\mathcal{P}r_\gamma = \frac{1}{\alpha_2! \dots \alpha_n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\rho} \sum_{k=1}^{\alpha_1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha_1 - 1}{k - 1} \sum_{s=0}^{\rho} (-1)^s \binom{\rho}{s} w_{\gamma, \tilde{\sigma}_{k,s}}$$

où

$$\tilde{\sigma}_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_1 & \alpha_1 + 1 & \dots & \theta \\ 1 & \dots & \alpha_1 & \sigma(1) + \alpha_1 & \dots & \sigma(\rho) + \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta,$$

$$\tilde{\sigma}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_1 - k + 1 & \alpha_1 - k + 2 & \dots & \theta - k + 1 & \theta - k + 2 & \dots & \theta \\ 1 & \dots & \alpha_1 - k + 1 & \sigma(1) + \alpha_1 & \dots & \sigma(\rho) + \alpha_1 & \alpha_1 - k + 2 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta,$$

$$\tau_{k,s} = (\alpha_1 - k + s \quad \alpha_1 - k + s + 1) \in \mathfrak{S}_\theta \text{ pour } 1 \leq k \leq \alpha_1 \text{ et } 1 \leq s \leq \rho,$$

$$\tilde{\sigma}_{k,s} = \tilde{\sigma}_{k,s-1} \circ \tau_{k,s} \in \mathfrak{S}_\theta \text{ pour } 1 \leq k \leq \alpha_1 \text{ et } 1 \leq s \leq \rho,$$

$$w_{\gamma, \tilde{\sigma}_{k,s}} = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\gamma_{\tilde{\sigma}_{k,s}(1)} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_\theta \dots x_\theta}_{\gamma_{\tilde{\sigma}_{k,s}(\theta)} \text{ fois}}.$$

$\mathcal{P}r_\gamma$ est un élément primitif.

Exemples. Donnons quelques exemples d'éléments primitifs construits à partir de cette proposition.

$$\mathcal{P}r_{(1,1,2,2)} = x_1 x_2 x_3 x_3 x_4 x_4 - 2x_1 x_2 x_2 x_3 x_4 x_4 + 2x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_4 - x_1 x_1 x_2 x_2 x_3 x_4,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}r_{(2,2,1,3)} &= x_1 x_1 x_2 x_2 x_3 x_4 x_4 x_4 - 2x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_4 x_4 x_4 + 2x_1 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 x_4 x_4 \\ &\quad - x_1 x_2 x_2 x_2 x_3 x_3 x_4 x_4 + x_1 x_1 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3 x_4 - 2x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3 x_3 x_4 \\ &\quad + 2x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_3 x_4 x_4 + x_1 x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_4 x_4. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Pour tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, \alpha_1 \rrbracket$ on pose $\theta_i = i + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ et on appelle γ_i le θ_i -uplet $\gamma_i = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{i \text{ fois}}, \underbrace{(\beta_2, \dots, \beta_2)}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\beta_n, \dots, \beta_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}$.

Il est immédiat que $\mathcal{P}r_{\gamma_1} = \frac{1}{\alpha_2! \dots \alpha_n!} \Lambda_\beta(\mathcal{P}r_{(1, \dots, \theta_1)})$. Pour tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, \alpha_1 - 1 \rrbracket$ on a

$$\mathcal{P}r_{\gamma_{i+1}} = \underbrace{\{x_1 \dots x_1\}}_{\beta_1 \text{ fois}}, \mathcal{P}r_{\gamma_i}$$

où $\{-, -\}$ est le crochet de Lie associé au produit de **ISPW**. \square

Remarque. Le procédé de détermination d'éléments primitifs explicité dans la proposition 46 permet d'obtenir une base de $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})_n$ pour $1 \leq n \leq 6$.

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_1 &= \text{Vect}(x_1), & \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_4 &= \text{Vect}(T_1, T_2, T_3), \\ \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_2 &= \text{Vect}(x_1x_1), & \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_5 &= \text{Vect}(R_1, \dots, R_6), \\ \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_3 &= \text{Vect}(x_1x_1x_1, x_1x_1x_2 - x_1x_2x_2), & \text{Prim}(\mathbf{ISPW})_6 &= \text{Vect}(U_1, \dots, U_9) \end{aligned}$$

où T_1, T_2, T_3 sont les vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} T_1 &= x_1x_1x_1x_1, \\ T_2 &= x_1x_1x_1x_2 - x_1x_2x_2x_2, \\ T_3 &= x_1x_1x_2x_3 - 2x_1x_2x_2x_3 + x_1x_2x_3x_3, \end{aligned}$$

R_1, \dots, R_6 sont les vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} R_1 &= x_1x_1x_1x_1x_1, & R_4 &= x_1x_1x_1x_2x_3 - 2x_1x_2x_2x_2x_3 + x_1x_2x_3x_3x_3, \\ R_2 &= x_1x_1x_1x_1x_2 - x_1x_2x_2x_2x_2, & R_5 &= x_1x_1x_2x_2x_3 - 2x_1x_1x_2x_3x_3 + x_1x_2x_2x_3x_3, \\ R_3 &= x_1x_1x_1x_2x_2 - x_1x_1x_2x_2x_2, & R_6 &= x_1x_1x_2x_3x_4 - 3x_1x_2x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4x_4. \end{aligned}$$

et U_1, \dots, U_9 sont les vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1x_1x_1x_1x_1x_1, \\ U_2 &= x_1x_1x_1x_1x_1x_2 - x_1x_2x_2x_2x_2x_2, \\ U_3 &= x_1x_1x_1x_1x_2x_2 - x_1x_1x_2x_2x_2x_2, \\ U_4 &= x_1x_1x_1x_1x_2x_3 - 2x_1x_2x_2x_2x_2x_3 + x_1x_2x_3x_3x_3x_3, \\ U_5 &= x_1x_2x_2x_3x_3x_3 - 2x_1x_1x_2x_3x_3x_3 + x_1x_1x_2x_2x_2x_3 \\ &\quad + x_1x_2x_2x_2x_3x_3 - 2x_1x_1x_1x_2x_3x_3 + x_1x_1x_1x_2x_2x_3, \\ U_6 &= x_1x_1x_2x_3x_3x_3 - 2x_1x_2x_2x_3x_3x_3 + x_1x_2x_2x_2x_3x_3 \\ &\quad + x_1x_1x_2x_2x_2x_3 - 2x_1x_1x_1x_2x_2x_3 + x_1x_1x_1x_2x_3x_3, \\ U_7 &= x_1x_2x_3x_3x_4x_4 - 2x_1x_2x_2x_3x_4x_4 + 2x_1x_1x_2x_3x_3x_4 - x_1x_1x_2x_2x_3x_4, \\ U_8 &= x_1x_1x_1x_2x_3x_4 - 3x_1x_2x_2x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_3x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4x_4x_4, \\ U_9 &= x_1x_1x_2x_3x_4x_5 - 4x_1x_2x_2x_3x_4x_5 + 6x_1x_2x_3x_3x_4x_5 \\ &\quad - 4x_1x_2x_3x_4x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5x_5. \end{aligned}$$

En degré 7, la proposition 46 permet d'obtenir 17 vecteurs linéairement indépendants sur 18. Notons $\{-, -\}$ le crochet de Lie de $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})$. Pour obtenir une base de $\text{Prim}(\mathbf{ISPW})_7$, il ne manque que par exemple $u = \{x_1x_1x_1, \mathcal{Pr}_{(2,1,1)}\}$ *i.e.*

$$\begin{aligned} u &= x_1x_1x_1x_2x_2x_3x_4 - 2x_1x_1x_1x_2x_3x_3x_4 + x_1x_1x_1x_2x_3x_4x_4 \\ &\quad - x_1x_1x_2x_3x_4x_4x_4 + 2x_1x_2x_2x_3x_4x_4x_4 - x_1x_2x_3x_3x_4x_4x_4. \end{aligned}$$

Proposition 47. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Posons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\theta) = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\beta_n, \dots, \beta_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}$ où θ est l'entier

$\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Dans **ISPW**, on définit l'élément

$$\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\theta} \sum_{i=1}^{\alpha_1} (-1)^{\sigma^{-1}(i)-1} \binom{\theta-1}{\sigma^{-1}(i)-1} w_{\gamma, \sigma}$$

où

$$w_{\gamma, \sigma} = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\gamma_{\sigma(1)} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_\theta \dots x_\theta}_{\gamma_{\sigma(\theta)} \text{ fois}}.$$

L'élément $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$ est primitif dans **ISPW**.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Posons $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\theta) = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\beta_n, \dots, \beta_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}$.

Considérons l'élément $\mathcal{P}r_{\Lambda_{(1, \dots, \theta)}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}r_{\Lambda_{(1, \dots, \theta)}} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\theta} (-1)^{\sigma^{-1}(1)-1} \binom{\theta-1}{\sigma^{-1}(1)-1} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\sigma(1) \text{ fois}} \dots \underbrace{x_\theta \dots x_\theta}_{\sigma(\theta) \text{ fois}} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\theta-1}} \sum_{k=0}^{\theta-1} (-1)^k \binom{\theta-1}{k} w_{\tilde{\tau}_k} \\ &= \mathcal{P}r_{(1, \dots, \theta)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \theta \\ 1 & \tau(1)+1 & \dots & \tau(\theta-1)+1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta, \\ \tilde{\tau}_k &= \tilde{\tau}_{k-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & \theta \\ 1 & \dots & k+1 & k & k+2 & \dots & \theta \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta \text{ pour } 1 \leq k \leq \theta-1, \\ w_{\tilde{\tau}_k} &= \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\tilde{\tau}_k(1) \text{ fois}} \dots \underbrace{x_\theta \dots x_\theta}_{\tilde{\tau}_k(\theta) \text{ fois}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}r_{\Lambda_{(1, \dots, \theta)}}$ est un élément primitif de **ISPW**.

Grâce à l'endomorphisme d'algèbre de Hopf Λ_γ défini par :

$$\Lambda_\gamma : \begin{cases} \mathbf{ISPW} & \longrightarrow & \mathbf{ISPW} \\ \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k \text{ fois}} & \longmapsto & \begin{cases} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\gamma_k \text{ fois}} & \text{si } 1 \leq k \leq \theta, \\ \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k \text{ fois}} & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

on a : $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = \frac{1}{(\alpha_1-1)! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \Lambda_\gamma(\mathcal{P}r_{\Lambda_{(1, \dots, \theta)}})$. L'élément $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$ est donc primitif dans **ISPW**. \square

Exemple. Posons $\gamma = (1, 1, 3, 3, 3)$. L'élément $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$ est primitif dans **ISPW**.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = & -3x_1x_2x_3x_3x_3x_4x_4x_4x_5x_5x_5 + 7x_1x_2x_2x_2x_3x_4x_4x_4x_5x_5x_5 + 2x_1x_1x_1x_2x_3x_4x_4x_4x_5x_5x_5 \\ & -3x_1x_2x_2x_2x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_5 - 8x_1x_1x_1x_2x_3x_3x_3x_4x_5x_5x_5 + 2x_1x_1x_1x_2x_2x_2x_3x_4x_5x_5x_5 \\ & + 2x_1x_2x_2x_2x_3x_3x_3x_4x_4x_4x_5 - 3x_1x_1x_1x_2x_3x_3x_3x_4x_4x_4x_5 + 7x_1x_1x_1x_2x_2x_2x_3x_4x_4x_4x_5 \\ & - 3x_1x_1x_1x_2x_2x_2x_3x_3x_3x_4x_5. \end{aligned}$$

Remarques. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Posons $\gamma = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(\beta_n, \dots, \beta_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}$.

1. Si $\alpha_1 = 1$, les éléments $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$ et $\mathcal{P}r_\gamma$ sont égaux.
2. Si $(n = 2 \text{ et } \alpha_1 = \alpha_2 = 2)$ ou $(n = 3, \alpha_1 = 2 \text{ et } \alpha_2 = \alpha_3 = 1)$, *i.e.* $\gamma = (\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2)$ ou $\gamma = (\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, on a alors : $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = -2\mathcal{P}r_\gamma$.
3. Si $n = 2$ et $\alpha_2 = 1$, *i.e.* $\gamma = \underbrace{(\beta_1, \dots, \beta_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \beta_2$, on a alors $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = (-1)^{\alpha_1+1}\mathcal{P}r_\gamma$.
4. Si $(n = 2, \alpha_1 \geq 2 \text{ et } \alpha_2 \geq 3)$ ou $(n = 3, \alpha_1 \geq 2 \text{ et } \alpha_2 + \alpha_3 \neq 2)$ ou $(n \geq 4 \text{ et } \alpha_1 \geq 2)$, il n'existe pas de scalaire $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = k\mathcal{P}r_\gamma$. En effet, en posant $\alpha_3 = 0$ dans le cas $n = 2$ la multiplicité du mot tassé

$$\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_2 \text{ fois}} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_1 \text{ fois}}^{\alpha_1} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_2 \text{ fois}}^{\alpha_2-1} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_3 \text{ fois}}^{\alpha_3} * \dots * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_n \text{ fois}}^{\alpha_n}$$

est nulle dans $\mathcal{P}r_\gamma$ alors qu'elle est non nulle, puisqu'égale à $(-1)^{\alpha_1} \binom{\theta-2}{\alpha_1} - 1$, dans $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$.

5. Si $(n = 2, \alpha_1 \geq 3 \text{ et } \alpha_2 = 2)$ ou $(n = 3, \alpha_1 \geq 3 \text{ et } \alpha_2 = \alpha_3 = 1)$, il n'existe pas de scalaire $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma} = k\mathcal{P}r_\gamma$. En effet, en posant $\alpha_3 = 0$ dans le cas $n = 2$, la multiplicité du mot tassé

$$\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_1 \text{ fois}} * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_2 \text{ fois}} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_1 \text{ fois}}^{\alpha_1-1} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_1 \text{ fois}}^{\alpha_2-1} * \underbrace{(x_1 \dots x_1)}_{\beta_3 \text{ fois}}^{\alpha_3}$$

est nulle dans $\mathcal{P}r_\gamma$ alors qu'elle est non nulle, puisqu'égale à $\theta - 1 + (-1)^\theta$, dans $\mathcal{P}r_{\Lambda_\gamma}$.

Algèbres de Hopf **SPW**[®] et **ISPW**[®]

L'objectif ici est de présenter les opérations des algèbres de Hopf **SPW**[®] et **ISPW**[®].

Cas de **SPW[®].** Notons $(Z_w)_{\substack{w \in \mathbf{SPW} \\ w \text{ mot tassé}}}$ la base duale des mots tassés stricts.

Proposition 48. *Le coproduit de la cogèbre **SPW**[®] est donné par l'application suivante :*

$$\Delta : \begin{cases} \mathbf{SPW}^{\otimes} & \longrightarrow & \mathbf{SPW}^{\otimes} \otimes \mathbf{SPW}^{\otimes} \\ Z_w & \longmapsto & \Delta(Z_w) = \sum_{i=0}^k Z_{w_1 * \dots * w_i} \otimes Z_{w_{i+1} * \dots * w_k} \end{cases}$$

où $w_1 * \dots * w_k$ est l'unique décomposition de w en produit d'éléments irréductibles de **WMat**.

Exemple. Un exemple pour illustrer le coproduit de \mathbf{SPW}^{\otimes} .

$$\Delta(Z_{x_2x_1x_1x_3x_3x_3}) = Z_{x_2x_1x_1x_3x_3x_3} \otimes 1 + Z_{x_2x_1x_1} \otimes Z_{x_1x_1x_1} + 1 \otimes Z_{x_2x_1x_1x_3x_3x_3}.$$

Proposition 49. Le produit de l'algèbre \mathbf{SPW}^{\otimes} est défini par l'application :

$$m : \begin{cases} \mathbf{SPW}^{\otimes} \otimes \mathbf{SPW}^{\otimes} & \longrightarrow \mathbf{SPW}^{\otimes} \\ Z_{w_1} \otimes Z_{w_2} & \longmapsto \sum_{\substack{\tau \in \text{Bat}(s_1, s_2), \\ \mu \in \text{Bat}(n_1, n_2)}} Z_{\tau \circ (w_1 * w_2) \circ \mu^{-1}} \end{cases}$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, $n_i = |w_i|$ et $s_i = \text{sup}(w_i)$.

Exemple. Un exemple de valeur du produit de \mathbf{SPW}^{\otimes} .

$$\begin{aligned} Z_{x_2x_1}Z_{x_1x_1} &= Z_{x_2x_1 \sqcup x_3x_3} + Z_{x_3x_1 \sqcup x_2x_2} + Z_{x_3x_2 \sqcup x_1x_1} \\ &= Z_{x_2x_1x_3x_3} + Z_{x_2x_3x_1x_3} + Z_{x_2x_3x_3x_1} + Z_{x_3x_2x_1x_3} + Z_{x_3x_2x_3x_1} + Z_{x_3x_3x_2x_1} \\ &+ Z_{x_3x_1x_2x_2} + Z_{x_3x_2x_1x_2} + Z_{x_3x_2x_2x_1} + Z_{x_2x_3x_1x_2} + Z_{x_2x_3x_2x_1} + Z_{x_2x_2x_3x_1} \\ &+ Z_{x_3x_2x_1x_1} + Z_{x_3x_1x_2x_1} + Z_{x_3x_1x_1x_2} + Z_{x_1x_3x_2x_1} + Z_{x_1x_3x_1x_2} + Z_{x_1x_1x_3x_2}. \end{aligned}$$

Cas de \mathbf{ISPW}^{\otimes} . Notons $(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{\alpha_n \text{ fois}})_{(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}}$ la base duale des mots tassés stricts croissants.

Proposition 50. Le coproduit de la cogèbre \mathbf{ISPW}^{\otimes} est donné par l'application suivante :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbf{ISPW}^{\otimes} & \longrightarrow \mathbf{ISPW}^{\otimes} \otimes \mathbf{ISPW}^{\otimes} \\ \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_n \dots x_n}}_{\alpha_n \text{ fois}} & \longmapsto \sum_{i=0}^n \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_i \dots x_i}}_{\alpha_i \text{ fois}} \otimes \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\alpha_{i+1} \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_{n-i} \dots x_{n-i}}}_{\alpha_n \text{ fois}} \end{cases}$$

Exemple. Un exemple pour illustrer le coproduit de \mathbf{ISPW}^{\otimes} .

$$\Delta(Z_{x_1x_1x_2x_3x_3x_3}) = Z_{x_1x_1x_2x_3x_3x_3} \otimes 1 + Z_{x_1x_1} \otimes Z_{x_1x_2x_2x_2} + Z_{x_1x_1x_2} \otimes Z_{x_1x_1x_1} + 1 \otimes Z_{x_1x_1x_2x_3x_3x_3}.$$

Proposition 51. Le produit de l'algèbre \mathbf{ISPW}^{\otimes} est défini par l'application :

$$m : \begin{cases} \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_p \dots x_p}}_{\alpha_p \text{ fois}} \otimes \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\beta_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_q \dots x_q}}_{\beta_q \text{ fois}} & \longrightarrow \mathbf{ISPW}^{\otimes} \\ & \longmapsto \sum_{\tau \in \text{Bat}(p, q)} \underbrace{Z_{x_1 \dots x_1}}_{\gamma_{\tau-1}(1) \text{ fois}} \dots \underbrace{Z_{x_{p+q} \dots x_{p+q}}}_{\gamma_{\tau-1}(p+q) \text{ fois}} \end{cases}$$

où

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in \{1, \dots, p\}, \\ \beta_{i-p} & \text{si } i \in \{p+1, \dots, p+q\}. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $w_1 = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_p \dots x_p}_{\alpha_p \text{ fois}}$ et $w_2 = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_q \dots x_q}_{\beta_q \text{ fois}}$ des mots tassés stricts croissants. Considérons un mot tassé strict croissant $w = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\theta_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_s \dots x_s}_{\theta_s \text{ fois}}$ et calculons

$(Z_{w_1} Z_{w_2})(w)$. On a :

$$\begin{aligned} (Z_{w_1} Z_{w_2})(w) &= \sum_{k=0}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s} Z_{w_1} \underbrace{(x_1 \dots x_1 \dots x_k \dots x_k)}_{\theta_{i_1} \text{ fois}} Z_{w_2} \underbrace{(x_1 \dots x_1 \dots x_{s-k} \dots x_{s-k})}_{\theta_{u_{s-k}} \text{ fois}} \\ &= \sum_{k=0}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s} \delta_{p,k} \delta_{\theta_{i_1}, \alpha_1} \dots \delta_{\theta_{i_k}, \alpha_p} \delta_{q, s-k} \delta_{\theta_{u_1}, \beta_1} \dots \delta_{\theta_{u_{s-k}}, \beta_q} \end{aligned}$$

où $\{u_1 < \dots < u_{s-k}\} = \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. □

Exemples. Quelques exemples de valeurs du produit de \mathbf{ISPW}^{\otimes} .

$$\begin{aligned} Z_{x_1 x_1} Z_{x_1 x_1} &= 2 Z_{x_1 x_1 x_2 x_2}, \\ Z_{x_1 x_2 x_2} Z_{x_1 x_1} &= 2 Z_{x_1 x_2 x_2 x_3 x_3} + Z_{x_1 x_1 x_2 x_3 x_3}. \end{aligned}$$

Isomorphisme entre \mathbf{ISPW}^{\otimes} et \mathbf{QSym} . Considérons l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques notée \mathbf{QSym} (cf. section 1.2.2 du chapitre 1) et réécrivons maintenant les opérations de \mathbf{ISPW}^{\otimes} en terme de compositions. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n -uplet $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, posons $Z_{(k_1, \dots, k_n)} = Z_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}}$. Le produit et le coproduit de

\mathbf{ISPW}^{\otimes} se réécrivent de la façon suivante : pour tous les entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, tout n -uplet $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et tout m -uplet $(l_1, \dots, l_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$,

$$\begin{aligned} Z_{(k_1, \dots, k_n)} Z_{(l_1, \dots, l_m)} &= Z_{(k_1, \dots, k_n) \sqcup (l_1, \dots, l_m)}, \\ \Delta(Z_{(k_1, \dots, k_n)}) &= Z_{(k_1, \dots, k_n)} \otimes 1 + 1 \otimes Z_{(k_1, \dots, k_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} Z_{(k_1, \dots, k_i)} \otimes Z_{(k_{i+1}, \dots, k_n)}. \end{aligned}$$

Proposition 52. *Les algèbres de Hopf \mathbf{QSym} et \mathbf{ISPW}^{\otimes} sont isomorphes.*

Démonstration. On sait que les algèbres de Hopf \mathbf{QSym} et \mathbf{ISPW}^{\otimes} ont même série de Poincaré-Hilbert et qu'elles sont graduées, connexes, colibres et commutatives. Elles sont donc isomorphes. □

Remarque. Un isomorphisme explicite entre \mathbf{ISPW}^{\otimes} et \mathbf{QSym} sera donné dans la section 2.3 par la proposition 77.

Considérons maintenant l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non-commutatives \mathbf{NSym} (cf. section 1.2.2 du chapitre 1). Il s'agit du dual gradué de \mathbf{QSym} . On a alors la proposition suivante :

Proposition 53. *Les algèbres de Hopf \mathbf{NSym} et \mathbf{ISPW} sont isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de dualiser la proposition précédente. □

Remarque. Un isomorphisme explicite entre \mathbf{NSym} et \mathbf{ISPW} sera donné dans la section 2.3 par la proposition 78.

2.2.3 Algèbre de Hopf des compositions étendues

Algèbre de Hopf \mathcal{C}_e

Construction de \mathcal{C}_e . On appelle espace vectoriel des compositions étendues, l'espace \mathcal{C}_e défini par :

$$\mathcal{C}_e = \text{Vect} \left((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^k, k \in \mathbb{N} \right).$$

On définit l'application linéaire surjective suivante :

$$\Pi : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathcal{C}_e \\ w = x_{i_1} \dots x_{i_s} & \mapsto (|w|_{x_0}, \dots, |w|_{x_{\text{sup}(w)}}). \end{cases}$$

Pour $w = x_{i_1} \dots x_{i_s} \in \mathbf{WMat}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ on pose $w_\sigma = x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(s)}}$. Le noyau de l'application Π est l'espace vectoriel $\mathcal{J} = \ker(\Pi) = \langle w - w_\sigma, w \in \mathbf{WMat}, \sigma \in \mathfrak{S}_{|w|} \rangle$.

Proposition 54. \mathcal{J} est un biidéale de Hopf de \mathbf{WMat} .

Démonstration. Soit $v, w \in \mathbf{WMat}$ deux mots tassés, $\sigma \in \mathfrak{S}_{|w|}$. On appelle α, β, k et s les entiers respectifs $\text{sup}(v), \text{sup}(w), |v|$ et $|w|$. On a :

$$v * (w - w_\sigma) = v * w - v * w_\sigma = vT_\alpha(w) - vT_\alpha(w_\sigma) = u - u_{\tilde{\sigma}}$$

où

$$u = vT_\alpha(w) \text{ et } \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+s \\ 1 & \dots & k & k+\sigma(1) & \dots & k+\sigma(s) \end{pmatrix}$$

et

$$(w - w_\sigma) * v = u' - u'_{\tilde{\sigma}'}$$

où

$$u' = wT_\beta(v) \text{ et } \tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s & s+1 & \dots & s+k \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(s) & s+1 & \dots & s+k \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que \mathcal{J} est un idéal de \mathbf{WMat} .

Considérons maintenant $\Delta(w - w_\sigma)$.

$$\begin{aligned} \Delta(w - w_\sigma) &= \Delta(w) - \Delta(w_\sigma) \\ &= \sum_{I+J=\{1, \dots, |w|\}} \left(\text{pack}(w[I]) \otimes \text{pack}(w[J]/w[I]) - \text{pack}(w_\sigma[I]) \otimes \text{pack}(w_\sigma[J]/w[I]) \right) \\ &= \sum_{I+J=\{1, \dots, |w|\}} \left(\text{pack}(w[I]) \otimes \text{pack}(w[J]/w[I]) - \text{pack}(w_\sigma[U_I]) \otimes \text{pack}(w_\sigma[V_J]/w[U_I]) \right) \end{aligned}$$

où $U_I = \sigma^{-1}(I)$ et $V_J = \sigma^{-1}(J)$. On a donc $\Delta(w - w_\sigma) \in \mathcal{J} \otimes \mathbf{WMat} + \mathbf{WMat} \otimes \mathcal{J}$. Ainsi, \mathcal{J} est un coidéale.

Au final, \mathcal{J} est un biidéale de Hopf de \mathbf{WMat} . □

$\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$ est donc une bigèbre graduée, c'est donc une algèbre de Hopf quotient de \mathbf{WMat} . En identifiant maintenant $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$ et \mathcal{C}_e , on peut munir \mathcal{C}_e d'une structure d'algèbre de Hopf. Reste alors à décrire ses opérations.

Proposition 55. *Le produit de l'algèbre \mathcal{C}_e est donné par l'application :*

$$* : \begin{cases} \mathcal{C}_e \otimes \mathcal{C}_e & \longrightarrow \mathcal{C}_e \\ (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \otimes (\beta_0, \dots, \beta_k) & \mapsto (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_k). \end{cases}$$

Exemples. Donnons quelques exemples pour le calcul du produit de l'algèbre \mathcal{C}_e .

$$\begin{aligned} (0, 1, 4, 2) * (3, 2, 2) &= (3, 1, 4, 2, 2, 2), \\ (3, 2, 2) * (0, 1, 4, 2) &= (3, 2, 2, 1, 4, 2), \\ (2, 3, 4, 1, 2) * (12, 3, 14, 4) &= (14, 3, 4, 1, 2, 3, 14, 4). \end{aligned}$$

Remarque. L'algèbre \mathcal{C}_e ne peut être libre du fait de l'existence de la lettre x_0 dans l'alphabet de **WMat**. Les éléments (α_0) pour $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ sont centraux. Si on considère la sous-algèbre \mathcal{C} engendrée par les éléments de la forme $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$, celle-ci est alors libre : il s'agit de l'algèbre tensorielle $T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$.

Proposition 56. *Le coproduit de la cogèbre \mathcal{C}_e est donné par l'application :*

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}_e & \longrightarrow \mathcal{C}_e \otimes \mathcal{C}_e \\ (\alpha_0, \dots, \alpha_p) & \mapsto \sum_{a=0}^{\alpha_0} \sum_{n=0}^p \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p} \sum_{s=n}^{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} \sum_{\substack{k_{i_1} + \dots + k_{i_n} = s \\ 1 \leq k_{i_j} \leq \alpha_{i_j}}} c_{\alpha, a, n, I, s, K_I} t_{\alpha, a, n, I, s, K_I} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} c_{\alpha, a, n, I, s, K_I} &= \binom{\alpha_0}{a} \binom{\alpha_{i_1}}{k_{i_1}} \cdots \binom{\alpha_{i_n}}{k_{i_n}}, \\ t_{\alpha, a, n, I, s, K_I} &= (a, k_{i_1}, \dots, k_{i_n}) \otimes (\alpha_0 - a + \sum_{j=1}^n (\alpha_{i_j} - k_{i_j}), \alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_{p-n}}), \\ \{u_1 < \dots < u_{p-n}\} &= \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_n\}. \end{aligned}$$

Exemples. Donnons quelques exemples pour le calcul du coproduit de la cogèbre \mathcal{C}_e . On ne donne que les coproduits réduits.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}((1, 1, 1)) &= (1) \otimes (0, 1, 1) + 2(0, 1) \otimes (1, 1) + (0, 1, 1) \otimes (1) + 2(1, 1) \otimes (0, 1), \\ \tilde{\Delta}((0, 2, 1)) &= (0, 1) \otimes (0, 2) + 2(0, 1) \otimes (1, 1) + (0, 2) \otimes (0, 1) + 2(0, 1, 1) \otimes (1). \end{aligned}$$

Remarques.

1. La cogèbre \mathcal{C}_e n'est pas colibre. En effet,

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_1 &= \text{Vect}((1), (0, 1)), \\ \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_2 &= (0), \\ \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_3 &= \text{Vect}((0, 1, 2) - (0, 2, 1)) \end{aligned}$$

Or, la série formelle de \mathcal{C}_e étant égale à $F_{\mathcal{C}_e}(h) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n h^n = \frac{1}{1-2h}$, on a $1 - \frac{1}{F_{\mathcal{C}_e}(h)} = 2h$.

Donc, si \mathcal{C}_e était colibre, on aurait $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)_3 = (0)$; ce qui n'est pas le cas.

2. Les seules compositions étendues primitives sont celles de degré 1, *i.e.* (1) et (0, 1).

Structure de coproduit semi-direct. L'objectif de ce paragraphe est de décrire la structure d'algèbre de Hopf de \mathcal{C}_e en fonction de celle de l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[(1)]$ et de celle de l'algèbre tensorielle $T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$. Pour cela, nous allons établir un isomorphisme entre \mathcal{C}_e et le coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf $\mathbb{K}[(1)] \rtimes T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$.

Rappels. Commençons par quelques rappels sur le coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf (*cf.* [70]). Considérons donc $(H, m_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ et $(C, m_C, \eta_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ deux algèbres de Hopf. On suppose que C possède une structure de H -comodule à droite donnée par le morphisme :

$$\rho : \begin{cases} C & \longrightarrow C \otimes H \\ c & \longmapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}. \end{cases}$$

On définit la volte ν par :

$$\nu : \begin{cases} H \otimes C & \longrightarrow C \otimes H \\ h \otimes c & \longmapsto c \otimes h. \end{cases}$$

On appelle Id_H (respectivement Id_C) la fonction identité de H (respectivement C).

Définition 57. 1. C est une comodule-algèbre si m_C et η_C sont des morphismes de H -comodules *i.e.*

$$\rho \circ \eta_C = (\eta_C \otimes \eta_H) \circ \rho_{|\mathbb{K}} \text{ et } \rho \circ m_C = (m_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho).$$

2. C est une comodule-cogèbre si Δ_C et ε_C sont des morphismes de H -comodules *i.e.*

$$(\varepsilon_C \otimes Id_H) \circ \rho = \eta_H \circ \varepsilon_C \text{ et } (\Delta_C \otimes Id_H) \circ \rho = (Id_C \otimes Id_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho) \circ \Delta_C.$$

3. C est une comodule-bigèbre si elle est à la fois une comodule-algèbre et une comodule-cogèbre.

Sur $H \otimes C$ on définit les morphismes suivants :

$$\bar{m} = (m_H \otimes m_C) \circ (Id_H \otimes \nu^{-1} \otimes Id_C),$$

$$\bar{\eta} = \eta_H \otimes \eta_C,$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_C,$$

$$\bar{\Delta} = (Id_H \otimes Id_C \otimes m_H \otimes Id_C) \circ (Id_H \otimes \nu \otimes Id_H \otimes Id_C) \circ (\Delta_H \otimes \rho \otimes Id_C) \circ (Id_H \otimes \Delta_C).$$

Théorème 58. Supposons que H soit une algèbre de Hopf commutative et que l'algèbre de Hopf C soit une comodule-bigèbre. On obtient alors que $(H \otimes C, \bar{m}, \bar{\eta}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ est une algèbre de Hopf notée $H \rtimes C$ et appelée coproduit semi-direct de C par H .

Démonstration. Il s'agit du théorème 2.14 énoncé et démontré par Molnar dans [70]. \square

Interprétation de \mathcal{C}_e en terme d'un coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf. Interprétons \mathcal{C}_e comme le coproduit semi-direct d'une algèbre de Hopf C par une algèbre de Hopf H . Pour cela posons $H = \mathbb{K}[(1)]$ et $C = T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$. Commençons par expliciter les opérations de ces deux algèbres de Hopf.

Cas de H . L'algèbre de Hopf H est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[X]$. Son produit $*_H$ est donc donné par le produit habituel des polynômes *i.e.* :

$$*_H : \begin{cases} H \otimes H & \longrightarrow H \\ (k) \otimes (l) & \mapsto (k) *_H (l) = (1)^k *_H (1)^l = (k+l). \end{cases}$$

Le coproduit Δ_H rend (1) primitif. Il est ainsi complètement déterminé.

Exemples. Illustrons les deux opérations de H par des exemples.

$$\begin{aligned} [3(2) - 4(1) + 6] *_H [(1) - 1] &= [3(1)^2 - 4(1) + 6] *_H [(1) - 1] = 3(3) - 7(2) + 10(1) - 6, \\ \Delta_H((3) - 2(1) + 4) &= [(3) - 2(1)] \otimes 1_H + 1_H \otimes [(3) - 2(1)] \\ &\quad + 4 \cdot 1_H \otimes 1_H + 3(1) \otimes (2) + 3(2) \otimes (1). \end{aligned}$$

Cas de C . L'algèbre de Hopf C est isomorphe à celle des fonctions symétriques non commutatives **NSym**. Son produit $*_C$ est donc donné par concaténation *i.e.* :

$$*_C : \begin{cases} C \otimes C & \longrightarrow C \\ (0, n_1, \dots, n_k) \otimes (0, m_1, \dots, m_s) & \mapsto (0, n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_s). \end{cases}$$

Son coproduit Δ_C est complètement déterminé en rendant primitifs ses générateurs *i.e.* :

$$\Delta_C : \begin{cases} C & \longrightarrow C \otimes C \\ (0, n), n \in \mathbb{N}^* & \mapsto (0, n) \otimes 1_C + 1_C \otimes (0, n). \end{cases}$$

Exemples. Illustrons les deux opérations de C par des exemples.

$$\begin{aligned} (0, 2, 3, 1) *_C (0, 9, 4, 6) &= (0, 2, 3, 1, 9, 4, 6), \\ \Delta_C((0, 1, 2)) &= (0, 1, 2) \otimes 1_C + (0, 1) \otimes (0, 2) + (0, 2) \otimes (0, 1) + 1_C \otimes (0, 1, 2). \end{aligned}$$

Proposition 59. On définit l'application suivante :

$$\rho : \begin{cases} C & \longrightarrow C \otimes H \\ (0, n_1, \dots, n_q) & \mapsto \sum_{s=q}^{n_1+\dots+n_q-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_q=s \\ 1 \leq k_j \leq n_j}} \binom{n_1}{k_1} \dots \binom{n_q}{k_q} (0, k_1, \dots, k_q) \otimes \left(\sum_{j=1}^q n_j - k_j \right) \\ & \quad + (0, n_1, \dots, n_q) \otimes 1_H. \end{cases}$$

(C, ρ) est un H -comodule à droite.

Exemples. Donnons quelques exemples de valeurs de ρ .

$$\begin{aligned} \rho((0, n)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes (n-k) + (0, n) \otimes 1_H \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*, \\ \rho((0, 3)) &= 3(0, 1) \otimes (2) + 3(0, 2) \otimes (1) + (0, 3) \otimes 1_H, \\ \rho((0, 2, 2)) &= 4(0, 1, 1) \otimes (2) + 2(0, 1, 2) \otimes (1) + 2(0, 2, 1) \otimes (1) + (0, 2, 2) \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(0, n_1, \dots, n_q) \in C \setminus \{1_C\}$. Calculons $\rho((0, n_1, \dots, n_q))$ à partir de $\rho((0, n_j))$, pour $j \in \{1, \dots, q\}$. Posons d'abord $\theta = n_1 + \dots + n_q$. On a :

$$\begin{aligned} \rho((0, n_1)) \dots \rho((0, n_q)) &= \prod_{j=1}^q \left[\sum_{k_j=1}^{n_j-1} \binom{n_j}{k_j} (0, k_j) \otimes (n_j - k_j) + (0, n_j) \otimes 1_H \right] \\ &= \sum_{s=q}^{\theta-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_q=s \\ 1 \leq k_j \leq n_j}} \binom{n_1}{k_1} \dots \binom{n_q}{k_q} (0, k_1, \dots, k_q) \otimes (\theta - s) \\ &\quad + (0, n_1, \dots, n_q) \otimes 1_H \\ &= \rho((0, n_1, \dots, n_q)). \end{aligned}$$

Ainsi $\rho \circ m_C = (m_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho)$ i.e. ρ est un morphisme d'algèbres de C dans $C \otimes H$. Donc, pour montrer que $(Id_C \otimes \Delta_H) \circ \rho = (\rho \otimes Id_H) \circ \rho$ et que $(Id_C \otimes \varepsilon_H) \circ \rho = Id_C$ il suffit de le vérifier pour les éléments $(0, n)$ tels que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(0, n) \in C \setminus \{1_C\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} (Id_C \otimes \Delta_H) \circ \rho((0, n)) &= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{l=1}^{n-k-1} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} (0, k) \otimes (l) \otimes (n-k-l) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes 1_H \otimes (n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes (n-k) \otimes 1_H \\ &\quad + (0, n) \otimes 1_H \otimes 1_H \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\rho \otimes Id_H) \circ \rho((0, n)) &= \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \binom{n}{k} (0, l) \otimes (k-l) \otimes (n-k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes 1_H \otimes (n-k) + \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} (0, s) \otimes (n-s) \otimes 1_H \\ &\quad + (0, n) \otimes 1_H \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Or, en posant $\text{Som} = \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \binom{n}{k} (0, l) \otimes (k-l) \otimes (n-k)$ on a

$$\begin{aligned} \text{Som} &= \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-l-1} \binom{k+l}{l} \binom{n}{k+l} (0, l) \otimes (k) \otimes (n-k-l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-l-1} \binom{n}{l} \binom{n-l}{k} (0, l) \otimes (k) \otimes (n-k-l). \end{aligned}$$

On obtient donc $(\rho \otimes Id_H) \circ \rho = (Id_C \otimes \Delta_H) \circ \rho$.

De plus, $(Id_C \otimes \varepsilon_H) \circ \rho((0, n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \varepsilon_H((n-k)) + (0, n) \varepsilon_H(1_H) = (0, n)$. On a donc $(Id_C \otimes \varepsilon_H) \circ \rho = Id_C$. \square

Proposition 60. *C est une comodule-bigèbre.*

Démonstration. Structure de comodule-algèbre. $\rho(1_C) = 1_C \otimes 1_H$ par définition. Dans la démonstration de la proposition 59, nous avons déjà prouvé l'égalité entre les morphismes $\rho \circ m_C$ et $(m_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho)$.

Structure de comodule-cogèbre. Il est immédiat que $(\varepsilon_C \otimes Id_H) \circ \rho = \eta_H \circ \varepsilon_C$. Soit maintenant $(0, n) \in C \setminus \{1_C\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} (\Delta_C \otimes Id_H) \circ \rho((0, n)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes 1_C \otimes (n-k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 1_C \otimes (0, k) \otimes (n-k) \\ &\quad + (0, n) \otimes 1_C \otimes 1_H + 1_C \otimes (0, n) \otimes 1_H \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g((0, n)) &= (Id_C \otimes Id_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho) \circ \Delta_C((0, n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (0, k) \otimes 1_C \otimes (n-k) + (0, n) \otimes 1_C \otimes 1_H \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 1_C \otimes (0, k) \otimes (n-k) + 1_C \otimes (0, n) \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Donc, $(\Delta_C \otimes Id_H) \circ \rho((0, n)) = (Id_C \otimes Id_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho) \circ \Delta_C((0, n))$. Comme ρ et Δ_C sont des morphismes d'algèbres, l'égalité précédente suffit pour montrer l'égalité entre $(\Delta_C \otimes Id_H) \circ \rho$ et $(Id_C \otimes Id_C \otimes m_H) \circ (Id_C \otimes \nu \otimes Id_H) \circ (\rho \otimes \rho) \circ \Delta_C$. \square

D'après le théorème 58 page 53, on peut considérer l'algèbre de Hopf coproduit semi-direct $H \rtimes C$.

Théorème 61. *L'application*

$$\Upsilon : \begin{cases} \mathcal{C}_e & \longrightarrow H \rtimes C \\ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) & \mapsto (\alpha_0) \otimes (0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Le fait que Υ soit un isomorphisme d'algèbres est immédiat. Dans cette démonstration notons $\Delta_{\mathcal{C}_e}$ (respectivement $\bar{\Delta}$) le coproduit de \mathcal{C}_e (respectivement le coproduit de $H \rtimes C$). Montrons que $(\Upsilon \otimes \Upsilon) \circ \Delta_{\mathcal{C}_e} = \bar{\Delta} \circ \Upsilon$. Comme Υ , $\Delta_{\mathcal{C}_e}$ et $\bar{\Delta}$ sont des morphismes d'algèbres, il suffit de le montrer pour (1) et tout élément de \mathcal{C}_e de la forme $(0, n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Pour (1), c'est immédiat. Soit maintenant n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \circ \Upsilon((0, n)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} [1_H \otimes (0, k)] \otimes [(n-k) \otimes 1_C] \\ &\quad + [1_H \otimes (0, n)] \otimes [1_H \otimes 1_C] + [1_H \otimes 1_C] \otimes [1_H \otimes (0, n)] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \Upsilon \otimes \Upsilon((0, k) \otimes (n-k)) + \Upsilon \otimes \Upsilon((0, n) \otimes 1_{\mathcal{C}_e}) + \Upsilon \otimes \Upsilon(1_{\mathcal{C}_e} \otimes (0, n)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{\Delta} \circ \Upsilon((0, n)) = (\Upsilon \otimes \Upsilon) \circ \Delta_{C_e}((0, n))$. \square

Actions liées à la structure de coproduit semi-direct. Pour définir la structure de coproduit semi-direct de $C = T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$ sur $H = \mathbb{K}[[1]]$, nous avons eu recours à une coaction à droite ρ , à savoir :

$$\rho : \begin{cases} C & \longrightarrow C \otimes H \\ (0, n_1, \dots, n_q) & \mapsto \sum_{s=q}^{n_1+\dots+n_q-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_q=s \\ 1 \leq k_j \leq n_j}} \binom{n_1}{k_1} \dots \binom{n_q}{k_q} (0, k_1, \dots, k_q) \otimes \left(\sum_{j=1}^q n_j - k_j \right) \\ & + (0, n_1, \dots, n_q) \otimes 1_H. \end{cases}$$

Cette coaction permet de mettre à jour deux actions : l'une de H^\otimes sur C^\otimes , l'autre des caractères de H sur ceux de C .

Action duale de ρ . Transposons l'opération ρ afin d'obtenir une action à gauche de H^\otimes sur C^\otimes . Avant de décrire cette action, notons d'abord $(Z_{(0, n_1, \dots, n_s)})_{(s, (n_1, \dots, n_s)) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{N}^*)^s}$ et $(Z_{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ les bases duales respectives de C^\otimes et H^\otimes .

Proposition 62. *L'action duale de ρ est donnée par le morphisme :*

$$\rho^* : \begin{cases} C^\otimes \otimes H^\otimes & \longrightarrow C^\otimes \\ Z_{(0, n_1, \dots, n_s)} \otimes Z_{(k)} & \mapsto \sum_{\substack{\delta_1+\dots+\delta_s=k \\ \delta_i \in \mathbb{N}}} \binom{n_1+\delta_1}{n_1} \dots \binom{n_s+\delta_s}{n_s} Z_{(0, n_1+\delta_1, \dots, n_s+\delta_s)}, \\ 1_{C^\otimes} \otimes Z_{(k)} & \mapsto 0. \end{cases}$$

Démonstration. On le démontre par calcul direct. \square

Exemples. Quelques exemples pour illustrer l'action explicitée ci-dessus.

$$\begin{aligned} \rho^*(Z_{(0, n_1, \dots, n_s)} \otimes 1_{H^\otimes}) &= Z_{(0, n_1, \dots, n_s)}, \\ \rho^*(Z_{(0, 5, 23, 4)} \otimes Z_{(1)}) &= Z_{(0, 6, 23, 4)} + Z_{(0, 5, 24, 4)} + Z_{(0, 5, 23, 5)}, \\ \rho^*(Z_{(0, 5, 23, 4)} \otimes Z_{(2)}) &= Z_{(0, 7, 23, 4)} + Z_{(0, 5, 25, 4)} + Z_{(0, 5, 23, 6)} + Z_{(0, 6, 24, 4)} + Z_{(0, 6, 23, 5)} + Z_{(0, 5, 24, 5)}. \end{aligned}$$

Action des caractères de $\mathbb{K}[[1]]$ sur ceux de $T\langle(0, n), n \in \mathbb{N}^*\rangle$. Notons $Char(H)$ et $Char(C)$ les caractères de H et C respectivement. On désigne par $\mathbb{K}[[X]]_+$ l'espace vectoriel des séries formelles sans terme constant.

Proposition 63. *Définissons les morphismes :*

$$\begin{aligned} \omega_H : \begin{cases} (\mathbb{K}, +) & \longrightarrow (Char(H), +) \\ \lambda & \mapsto \begin{cases} H & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (1) & \mapsto \lambda, \end{cases} \end{cases} \\ \omega_C : \begin{cases} (\mathbb{K}[[X]]_+, +) & \longrightarrow (Char(C), +) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n & \mapsto \begin{cases} C & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (0, s) & \mapsto s! a_s, \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\bar{\omega}_C : \begin{cases} (\mathbb{K}[[X]]_+, +) & \longrightarrow & (Char(C), +) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n & \mapsto & \begin{cases} C & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (0, s) & \mapsto & \frac{a_s}{s!}. \end{cases} \end{cases}$$

Ces trois applications sont des isomorphismes de groupes.

Démonstration. Direct. □

Grâce aux isomorphismes ω_H , ω_C et $\bar{\omega}_C$, donner une action de $Char(H)$ sur $Char(C)$ revient à donner une action de \mathbb{K} sur $\mathbb{K}[[X]]_+$.

Proposition 64. Soit Ω l'application :

$$\Omega : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[[X]]_+ & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X]]_+ \\ (\lambda, a) & \mapsto & \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\omega}_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} [(\omega_C(a) \otimes \omega_H(\lambda)) \circ \rho]((0, n)) X^n \right) ((0, s)) X^s \end{cases}$$

où ρ désigne la coaction $\rho : C \longrightarrow C \otimes H$ définie dans le paragraphe précédent. Il s'agit de l'application

$$\Omega : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[[X]]_+ & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X]]_+ \\ (\lambda, a) & \mapsto & ae^{\lambda X}. \end{cases}$$

Elle définit donc une action de \mathbb{K} sur $\mathbb{K}[[X]]_+$ et, par suite, une action de $Char(H)$ sur $Char(C)$.

Démonstration. Soient λ un élément de \mathbb{K} , a une série formelle sans terme constant et n un entier naturel non nul. Posons $b = \sum_{s=1}^{\infty} b_s X^s = \Omega(\lambda, a)$. On a alors :

$$(\omega_C(a) \otimes \omega_H(\lambda)) \circ \rho((0, n)) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k! a_k \lambda^{n-k} = n! \sum_{k=1}^n a_k \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Or,

$$(\omega_C(a) \otimes \omega_H(\lambda)) \circ \rho((0, n)) = n! b_n.$$

On obtient donc que $b_n = \langle ae^{\lambda X}, X^n \rangle$. Ainsi $b = ae^{\lambda X}$ et l'application Ω définit une action. □

Intéressons-nous maintenant aux éléments primitifs de \mathcal{C}_e et déterminons-en quelques propriétés.

Etude des éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

Proposition 65. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ et $u = \sum_{s=1}^k \mu_s(\beta_{s,0}, \dots, \beta_{s,p_s})$ un élément primitif de $(\mathcal{C}_e)_n$. Supposons qu'il existe un entier $s \in \{1, \dots, k\}$ tel que $(\beta_{s,0} \neq 0$ et $p_s \geq 1)$ ou $(\beta_{s,0} \geq 2$ et $p_s = 0)$. On a alors : $\mu_s = 0$.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ et $u = \sum_{s=1}^k \mu_s(\beta_{s,0}, \dots, \beta_{s,p_s})$ un élément de $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)_n$.

Cas $\beta_{s,0} \neq 0$ et $p_s \geq 1$. Le coefficient c_s de $(1) \otimes (\beta_{s,0} - 1, \beta_{s,1}, \dots, \beta_{s,p_s})$ dans $\Delta(u)$ est donc nul. Or $c_s = \beta_{s,0} \mu_s$. Donc $\mu_s = 0$.

Cas $\beta_{s,0} \geq 2$ et $p_s = 0$. Le coefficient c_s de $(1) \otimes (\beta_{s,0} - 1)$ dans $\Delta(u)$ est donc nul. Or $c_s = \beta_{s,0}\mu_s$. Donc $\mu_s = 0$. □

Pour obtenir des informations supplémentaires sur $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)$, regardons, pour la proposition suivante, \mathcal{C}_e sous sa version $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$. Dans $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$, on identifie les classes avec les mots tassés $\underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_0 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_k \dots x_k}_{\alpha_k \text{ fois}}$ ($k, \alpha_0 \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 66. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $u = \sum_{s=1}^k \mu_s \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_{s,1} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{p_s} \dots x_{p_s}}_{\beta_{s,p_s} \text{ fois}}$ un élément de \mathcal{C}_e .

$$u \in \text{Prim}(\mathbf{WMat}/\mathcal{J}) \Rightarrow u \in \text{Prim}(\mathbf{ISPW}).$$

Démonstration. Dans la démonstration, les coproduits de $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$ et \mathbf{ISPW} seront notés $\Delta_{\mathbf{WMat}/\mathcal{J}}$ et $\Delta_{\mathbf{ISPW}}$ respectivement. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $u = \sum_{s=1}^k \mu_s \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_{s,1} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{p_s} \dots x_{p_s}}_{\beta_{s,p_s} \text{ fois}}$ un élément de \mathcal{C}_e . Supposons que u soit primitif dans $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$. Alors, pour tout $s \in \{1, \dots, k\}$ et tout k -uplet $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in (\{0, 1\})^k \setminus \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$, le coefficient du tenseur

$$\underbrace{(x_1 \dots x_1)^{\epsilon_1}}_{\beta_{s,1} \text{ fois}} * \dots * \underbrace{(x_1 \dots x_1)^{\epsilon_{p_s}}}_{\beta_{s,p_s} \text{ fois}} \otimes \underbrace{(x_1 \dots x_1)^{1-\epsilon_1}}_{\beta_{s,1} \text{ fois}} * \dots * \underbrace{(x_1 \dots x_1)^{1-\epsilon_{p_s}}}_{\beta_{s,p_s} \text{ fois}}$$

dans $\Delta_{\mathbf{WMat}/\mathcal{J}}(u)$ est nul. Or, dans \mathbf{ISPW} , le coproduit de u est égal à :

$$\Delta_{\mathbf{ISPW}}(u) = \sum_{s=1}^k \sum_{l=0}^{p_s} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq p_s} \mu_s \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_{s,i_1} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_l \dots x_l}_{s, \beta_{i_l} \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\beta_{s,u_1} \text{ fois}} \dots \underbrace{x_{p_s-l} \dots x_{p_s-l}}_{\beta_{s,u_{p_s-l}} \text{ fois}}$$

où $\{u_1 < \dots < u_{p_s-l}\} = \llbracket 1, p_s \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$. u est donc primitif dans \mathbf{ISPW} . □

Exemple. Considérons l'élément $u = (0, 1, 1, 2) - 2(0, 1, 2, 1) + (0, 2, 1, 1)$. Il est primitif dans \mathcal{C}_e . Dans \mathbf{ISPW} , u correspond à l'élément $w = x_1 x_2 x_3 x_3 - 2x_1 x_2 x_2 x_3 + x_1 x_1 x_2 x_3$. D'après la proposition 46, w est bien primitif dans \mathbf{ISPW} .

L'objectif maintenant est donc d'étudier la réciproque de la proposition précédente. Elle s'avère être fausse. En effet, si l'on considère les éléments primitifs de \mathbf{ISPW} établis dans les propositions 45 à 47, seule une sous-famille particulière permet d'obtenir des éléments primitifs dans \mathcal{C}_e . Pour le démontrer, définissons les éléments de \mathcal{C}_e induits par les propositions 46 et 47.

Définition 67. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet d'entiers deux à deux distincts. On note $\rho = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ et $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On appelle γ le θ -uplet $\gamma = (\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\beta_n, \dots, \beta_n}_{\alpha_n \text{ fois}})$.

On note Γ_γ et Γ_{Λ_γ} les éléments de \mathcal{C}_e définis par :

$$\Gamma_\gamma = \frac{1}{\alpha_2! \dots \alpha_n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\rho} \sum_{k=1}^{\alpha_1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha_1 - 1}{k - 1} \sum_{s=0}^{\rho} (-1)^s \binom{\rho}{s} u_{\gamma, \tilde{\sigma}_{k,s}}$$

où

$$\tilde{\sigma}_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_1 & \alpha_1 + 1 & \dots & \theta \\ 1 & \dots & \alpha_1 & \sigma(1) + \alpha_1 & \dots & \sigma(\rho) + \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta,$$

$$\tilde{\sigma}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_1 - k + 1 & \alpha_1 - k + 2 & \dots & \theta - k + 1 & \theta - k + 2 & \dots & \theta \\ 1 & \dots & \alpha_1 - k + 1 & \sigma(1) + \alpha_1 & \dots & \sigma(\rho) + \alpha_1 & \alpha_1 - k + 2 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\theta,$$

$$\tau_{k,s} = (\alpha_1 - k + s \quad \alpha_1 - k + s + 1) \in \mathfrak{S}_\theta \text{ pour } 1 \leq k \leq \alpha_1 \text{ et } 1 \leq s \leq \rho,$$

$$\tilde{\sigma}_{k,s} = \tilde{\sigma}_{k,s-1} \circ \tau_{k,s} \in \mathfrak{S}_\theta \text{ pour } 1 \leq k \leq \alpha_1 \text{ et } 1 \leq s \leq \rho,$$

$$u_{\gamma, \tilde{\sigma}_{k,s}} = (0, \gamma_{\tilde{\sigma}_{k,s}(1)}, \dots, \gamma_{\tilde{\sigma}_{k,s}(\theta)}),$$

et

$$\Gamma_{\Lambda_\gamma} = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\theta} \sum_{i=1}^{\alpha_1} (-1)^{\sigma^{-1}(i)-1} \binom{\theta-1}{\sigma^{-1}(i)-1} (0, \gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(\theta)}).$$

Pour énoncer la proposition suivante introduisons une nouvelle notation. Soient κ un entier non nul et $\gamma = (0, \gamma_1, \dots, \gamma_\kappa)$ une composition étendue. On définit l'ensemble d'éléments distincts L_γ par :

$$L_\gamma = \{(0, \gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(\kappa)}), \sigma \in \mathfrak{S}_\kappa\}.$$

Proposition 68. Soient k un entier naturel non nul, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ et $(\beta_1 < \dots < \beta_k)$ deux k -uplets d'entiers naturels non nuls, $\beta = (0, \underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\beta_k, \dots, \beta_k}_{\alpha_k \text{ fois}})$ une composition étendue

et $u = \sum_{\omega \in L_\beta} \mu_\omega \omega$ un élément de \mathcal{C}_e . Supposons que u soit un élément de $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)$. Posons $\beta_0 = 0$.

S'il existe un entier $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ vérifiant $\beta_i \geq \beta_{i-1} + 2$, alors l'élément u est nul.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$, $\beta = (0, \underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} < \dots < \underbrace{\beta_k, \dots, \beta_k}_{\alpha_k \text{ fois}})$

et $u = \sum_{\omega \in L_\beta} \mu_\omega \omega$ des éléments de \mathcal{C}_e . Posons $\beta_0 = 0$. Supposons que u soit primitif et qu'il existe $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $\beta_i \geq \beta_{i-1} + 2$. Ecrivons β sous la forme $\beta = (0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k})$ avec $\gamma_j = \beta_l$ où l est l'unique entier tel que $j \in \{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} + 1), \dots, (\alpha_1 + \dots + \alpha_l)\}$. Posons $M = \max\{l \in \{1, \dots, (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)\}, \gamma_l = \beta_i\}$.

Soit $\omega \in L_\beta$. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}$ tel que $\omega = (0, \gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)})$. Comme u est primitif, le coefficient c_ω de $(0, \gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_M - 1, \dots, \gamma_{\sigma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}) \otimes (1)$ dans $\Delta(u)$ est nul. Or $c_\omega = \beta_i \mu_\omega$. Donc $\mu_\omega = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $\omega \in L_\beta$, on obtient que $u = 0$. \square

Corollaire 69. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet d'entiers deux à deux distincts. On suppose que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le n -uplet $(\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)})$ vérifie la condition $(\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)}) \neq (1, \dots, n)$. On pose $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et on appelle γ le θ -uplet $\gamma = (\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\beta_n, \dots, \beta_n}_{\alpha_n \text{ fois}})$.

Les éléments Γ_γ et Γ_{Λ_γ} ne sont pas des éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

Contre-exemples. Les éléments suivants ne sont pas primitifs dans \mathcal{C}_e .

$$\Gamma_{(1,3,5)} = (0, 1, 3, 5) - 2(0, 3, 1, 5) + (0, 3, 5, 1) + (0, 1, 5, 3) - 2(0, 5, 1, 3) + (0, 5, 3, 1),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(1,1,3,6)} &= (0, 1, 1, 3, 6) - 2(0, 1, 3, 1, 6) + 2(0, 3, 1, 6, 1) - (0, 3, 6, 1, 1) \\
&\quad + (0, 1, 1, 6, 3) - 2(0, 1, 6, 1, 3) + 2(0, 6, 1, 3, 1) - (0, 6, 3, 1, 1), \\
\Gamma_{\Lambda_{(1,1,3,3,3)}} &= -3(0, 1, 1, 3, 3, 3) + 7(0, 1, 3, 1, 3, 3) + 2(0, 3, 1, 1, 3, 3) - 3(0, 1, 3, 3, 1, 3) \\
&\quad - 8(0, 3, 1, 3, 1, 3) + 2(0, 3, 3, 1, 1, 3) + 2(0, 1, 3, 3, 3, 1) - 3(0, 3, 1, 3, 3, 1) \\
&\quad + 7(0, 3, 3, 1, 3, 1) - 3(0, 3, 3, 3, 1, 1).
\end{aligned}$$

Proposition 70. Soient n un entier naturel tel que $n \geq 3$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet et $\varsigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On pose $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et on appelle γ le θ -uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\theta) = (\underbrace{\varsigma(1), \dots, \varsigma(1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\varsigma(n), \dots, \varsigma(n)}_{\alpha_n \text{ fois}})$.

Les éléments Γ_γ et Γ_{Λ_γ} ne sont pas des éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

Démonstration. Soient n un entier naturel tel que $n \geq 3$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ un n -uplet et $\varsigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation.

- Supposons $n \geq 4$ ou $n = 3$ avec $\varsigma(1) \neq 2$. Soient $i, j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tels que $\varsigma(j) = \varsigma(i) + 1$. Considérons le tenseur

$$(0, \underbrace{\varsigma(1), \dots, \varsigma(1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\varsigma(j), \dots, \varsigma(j)}_{\alpha_j - 1 \text{ fois}}, \varsigma(j) - 1, \dots, \underbrace{\varsigma(n), \dots, \varsigma(n)}_{\alpha_n \text{ fois}}) \otimes (1).$$

Déterminons maintenant c_γ (respectivement c_{Λ_γ}) sa multiplicité dans $\Delta(\Gamma_\gamma)$ (respectivement dans $\Delta(\Gamma_{\Lambda_\gamma})$). On a :

$$\begin{aligned}
c_\gamma &= (\alpha_i + 1)\varsigma(j), \\
c_{\Lambda_\gamma} &= (\alpha_i + 1)\varsigma(j) \sum_{i=1}^{\alpha_1} (-1)^{i-1} \binom{\theta - 1}{i - 1} = (-1)^{\alpha_1 - 1} (\alpha_i + 1)\varsigma(j) \binom{\theta - 2}{\alpha_1 - 1}.
\end{aligned}$$

Les éléments Γ_γ et Γ_{Λ_γ} ne sont donc pas des éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

- Supposons $n = 3$ avec $\varsigma(1) = 2$. Sans perte de généralité, on peut considérer que $\varsigma(2) = 1$ et que $\varsigma(3) = 3$. Intéressons-nous aux tenseurs

$$\begin{aligned}
t_1 &= (0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_1 - 1 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{\alpha_3 \text{ fois}}) \otimes (1), \\
t_2 &= (0, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{\alpha_3 - 1 \text{ fois}}, 2) \otimes (1).
\end{aligned}$$

Déterminons c_γ (respectivement c_{Λ_γ}) la multiplicité de t_1 (respectivement t_2) dans $\Delta(\Gamma_\gamma)$ (respectivement $\Delta(\Gamma_{\Lambda_\gamma})$). On a alors :

$$c_\gamma = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^{\alpha_2} (-1)^i \binom{\theta - 1}{i} = (-1)^{\alpha_2} 2 \binom{\theta - 2}{\alpha_2} & \text{si } \alpha_1 = 1, \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} c_{\Lambda_\gamma} &= 3 \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} + 3 \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{\alpha_1-1} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} + (-1)^{\theta-1} \right) \\ &= 3\alpha_1 \left((-1)^{\alpha_1-1} \binom{\theta-2}{\alpha_1-1} + (-1)^{\theta-1} \right). \end{aligned}$$

Comme $\alpha_1 \neq \theta - 1$, le scalaire c_{Λ_γ} ne peut être nul que si $\alpha_1 = 1$ et θ est un entier pair. On sait que, si $\alpha_1 = 1$, les éléments Γ_γ et Γ_{Λ_γ} sont égaux. La multiplicité du tenseur t_1 permet de conclure.

Ainsi, les éléments Γ_γ et Γ_{Λ_γ} ne sont pas des éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

□

Contre-exemples. Les éléments suivants ne sont pas primitifs dans \mathcal{C}_e .

$$\begin{aligned} \Gamma_{(2,1,3)} &= (0, 2, 1, 3) - 2(0, 1, 2, 3) + (0, 1, 3, 2) + (0, 2, 3, 1) - 2(0, 3, 2, 1) + (0, 3, 1, 2), \\ \Gamma_{(1,1,2,3)} &= (0, 1, 1, 2, 3) - 2(0, 1, 2, 1, 3) + 2(0, 2, 1, 3, 1) - (0, 2, 3, 1, 1) \\ &\quad + (0, 1, 1, 3, 2) - 2(0, 1, 3, 1, 2) + 2(0, 3, 1, 2, 1) - (0, 3, 2, 1, 1). \end{aligned}$$

Proposition 71. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple tel que α_2 vérifie $\alpha_2 \geq 2$. On appelle γ_1 et γ_2 les $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -uplets $\gamma_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}})$ et $\gamma_2 = (\underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}})$ respectivement. Les éléments

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_1} &= \sum_{k=1}^{\alpha_1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha_1-1}{k-1} \sum_{s=0}^{\alpha_2} (-1)^s \binom{\alpha_2}{s} (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1-k \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{s \text{ fois}}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-s \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ fois}}) \\ \Gamma_{\gamma_2} &= \sum_{k=1}^{\alpha_2} (-1)^{k-1} \binom{\alpha_2-1}{k-1} \sum_{s=0}^{\alpha_1} (-1)^s \binom{\alpha_1}{s} (0, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-k \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1-s \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-1 \text{ fois}}), \end{aligned}$$

ainsi que les éléments $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_1}}$ et $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_2}}$ ne sont pas primitifs dans \mathcal{C}_e .

Démonstration. Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple tel que α_2 vérifie $\alpha_2 \geq 2$ et γ_1, γ_2 les $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -uplets $\gamma_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}})$, $\gamma_2 = (\underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}})$ respectivement.

Cas de $\Delta(\Gamma_{\gamma_1})$. On détermine c_{γ_1} , le coefficient de $(0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, 2, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-2 \text{ fois}}) \otimes (1)$. Il vaut :

$$c_{\gamma_1} = 2 \left(1 + \binom{\alpha_2}{2} \right) \neq 0.$$

Γ_{γ_1} n'est donc pas primitif dans \mathcal{C}_e .

Cas de $\Delta(\Gamma_{\gamma_2})$. On détermine c_{γ_2} , le coefficient de $(\underbrace{0, 1, \dots, 1}_{\alpha_1+1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-1 \text{ fois}}) \otimes (1)$. Il vaut :

$$c_{\gamma_2} = 2(\alpha_2 - 1)(-1)^{\alpha_2-2}(-1)^{\alpha_1} + 2(-1)^{\alpha_2-1} \sum_{s=0}^{\alpha_1} (-1)^s \binom{\alpha_1}{s} = 2(-1)^{\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_2 - 1) \neq 0.$$

Γ_{γ_2} n'est donc pas primitif dans \mathcal{C}_e .

Cas de $\Delta(\Gamma_{\Lambda_{\gamma_1}})$ et de $\Delta(\Gamma_{\Lambda_{\gamma_2}})$. Si $\alpha_1 = 1$ ou si $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2)$, on sait que, pour $i \in \{1, 2\}$, il existe un scalaire p_i tel que $\mathcal{P}r_{\Lambda_{\gamma_i}} = p_i \mathcal{P}r_{\gamma_i}$. Les deux cas précédents permettent d'affirmer que $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_1}}$ et $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_2}}$ ne sont pas primitifs dans \mathcal{C}_e . Supposons alors $\alpha_1 \neq 1$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (2, 2)$, considérons le tenseur $t = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2-1 \text{ fois}}) \otimes (1)$ et déterminons sa multiplicité $c_{\Lambda_{\gamma_1}}$ (respectivement $c_{\Lambda_{\gamma_2}}$) dans $\Delta(\Gamma_{\Lambda_{\gamma_1}})$ (respectivement $\Delta(\Gamma_{\Lambda_{\gamma_2}})$). En posant $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_{\Lambda_{\gamma_1}} &= 2 \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} + 2 \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{\alpha_1-1} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} + (-1)^{\theta-1} \right) \\ &= 2\alpha_1 \left((-1)^{\alpha_1-1} \binom{\theta-2}{\alpha_1-1} + (-1)^{\theta-1} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{\Lambda_{\gamma_2}} &= 2 \sum_{i=\alpha_1}^{\theta-1} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} + 2 \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} \left((-1)^k \binom{\theta-1}{k} + \sum_{i=\alpha_1}^{\theta-2} (-1)^i \binom{\theta-1}{i} \right) \\ &= 2\alpha_1 \left((-1)^{\alpha_1} \binom{\theta-2}{\alpha_1-1} + (-1)^\theta \right). \end{aligned}$$

Comme $\alpha_1 \neq 1$ et $\alpha_1 \neq \theta - 1$, les deux scalaires sont non nuls. Les éléments $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_1}}$ et $\Gamma_{\Lambda_{\gamma_2}}$ ne sont donc pas primitifs dans \mathcal{C}_e . □

Contre-exemples. Les éléments suivants ne sont pas primitifs dans \mathcal{C}_e .

$$\begin{aligned} \Gamma_{(2,2,1,1)} &= (0, 2, 2, 1, 1) - 2(0, 2, 1, 2, 1) + 2(0, 1, 2, 1, 2) - (0, 1, 1, 2, 2), \\ \Gamma_{(1,1,2,2,2)} &= (0, 1, 1, 2, 2, 2) - 3(0, 1, 2, 1, 2, 2) + 3(0, 1, 2, 2, 1, 2) - 2(0, 1, 2, 2, 2, 1) \\ &\quad + 3(0, 2, 1, 2, 2, 1) - 3(0, 2, 2, 1, 2, 1) + (0, 2, 2, 2, 1, 1), \\ \Gamma_{\Lambda_{(1,1,1,2,2)}} &= 3(0, 1, 1, 1, 2, 2) - 7(0, 1, 1, 2, 1, 2) + 3(0, 1, 2, 1, 1, 2) - 2(0, 2, 1, 1, 1, 2) \\ &\quad - 2(0, 1, 1, 2, 2, 1) + 8(0, 1, 2, 1, 2, 1) + 3(0, 2, 1, 1, 2, 1) - 2(0, 1, 2, 2, 1, 1) \\ &\quad - 7(0, 2, 1, 2, 1, 1) + 3(0, 2, 2, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Proposition 72. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'élément

$$\Gamma_{(2,1,\dots,1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (0, \underbrace{1, \dots, 1}_k, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}).$$

La famille $(\Gamma_{(2,1,\dots,1) \in (\mathbb{N})^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'éléments primitifs de \mathcal{C}_e .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les seuls tenseurs pouvant potentiellement intervenir dans le coproduit réduit de $\Gamma_{(2,1,\dots,1)}$ sont ceux du type

$$\begin{aligned} & (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) \otimes (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{u \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{v \text{ fois}}) \text{ avec } (s, u, v) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{N})^2 \text{ et } s + u + v = n, \\ & (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{u \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{v \text{ fois}}) \otimes (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) \text{ avec } (s, u, v) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{N})^2 \text{ et } s + u + v = n, \\ & (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) \otimes (1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1-s \text{ fois}}) \text{ avec } 1 \leq s \leq n+1. \end{aligned}$$

D'après les propositions 66 (page 59) et 46 (page 45), on sait que les coefficients des tenseurs $(0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) \otimes (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{u \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{v \text{ fois}})$ et $(0, \underbrace{1, \dots, 1}_{u \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{v \text{ fois}}) \otimes (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}})$ sont nuls. Il ne reste donc qu'à déterminer le coefficient c_s du tenseur $t_s = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) \otimes (1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1-s \text{ fois}})$ pour tout entier s de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u \in \llbracket 0, s \rrbracket$. On s'intéresse à l'élément $\omega_k = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k \text{ fois}})$.

Il est possible, à partir de cet élément, d'obtenir le tenseur t_s . Il suffit d'extraire, dans ω_k , un nombre u de positions à gauche de la $(k+1)$ -ième et $s-1-u$ positions à droite. Cela ajoute des conditions supplémentaires sur u , à savoir $s+k-n-1 \leq u \leq k$. On peut maintenant calculer c_s .

$$\begin{aligned} c_s &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{u=\max(0, s+k-n-1)}^{\min(s-1, k)} 2 \binom{k}{u} \binom{n-k}{s-1-u} \\ &= 2 \sum_{u=0}^{s-1} \sum_{k=u}^{n+u+1-s} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{u} \binom{n-k}{s-1-u} \\ &= 2 \frac{n!}{(n+1-s)!} \sum_{u=0}^{s-1} \frac{(-1)^u}{u!(s-1-u)!} \sum_{k=0}^{n+1-s} (-1)^k \frac{(n+1-s)!}{k!(n+1-s-k)!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Gamma_{(2,1,\dots,1)}$ est donc primitif dans \mathcal{C}_e . □

Exemples. Les éléments suivants sont primitifs dans \mathcal{C}_e .

$$\begin{aligned} \Gamma_{(2,1,1)} &= (0, 2, 1, 1) - 2(0, 1, 2, 1) + (0, 1, 1, 2), \\ \Gamma_{(2,1,1,1)} &= (0, 2, 1, 1, 1) - 3(0, 1, 2, 1, 1) + 3(0, 1, 1, 2, 1) - (0, 1, 1, 1, 2), \\ \Gamma_{(2,1,1,1,1)} &= (0, 2, 1, 1, 1, 1) - 4(0, 1, 2, 1, 1, 1) + 6(0, 1, 1, 2, 1, 1) \\ &\quad - 4(0, 1, 1, 1, 2, 1) + (0, 1, 1, 1, 1, 2). \end{aligned}$$

Corollaire 73. Les propositions 66 à 72 permettent d'établir que :

$$\begin{aligned} \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_4 &= \text{Vect}(\Gamma_{(1,1,2)}), & \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_5 &= \text{Vect}(\Gamma_{(1,1,1,2)}), \\ \text{Prim}(\mathcal{C}_e)_6 &= \text{Vect}(\Gamma_{(1,1,1,1,2)}). \end{aligned}$$

Remarque. On connaît également l'espace vectoriel $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)_7$. En effet, l'élément u défini par $u = (0, 3, 2, 1, 1) - 2(0, 3, 1, 2, 1) + (0, 3, 1, 1, 2) - (0, 2, 1, 1, 3) + 2(0, 1, 2, 1, 3) - (0, 1, 1, 2, 3)$ n'est pas un élément primitif de \mathcal{C}_e . On obtient alors que $\text{Prim}(\mathcal{C}_e)_7 = \text{Vect}(\Gamma_{(2,1,1,1,1,1)})$ grâce aux propositions précédentes.

Algèbre de Hopf duale \mathcal{C}_e^{\otimes}

On s'intéresse à \mathcal{C}_e^{\otimes} le dual de Hopf gradué de \mathcal{C}_e . Grâce à l'isomorphisme Π entre $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$ et \mathcal{C}_e , on peut également voir \mathcal{C}_e^{\otimes} comme $(\mathbf{WMat}/\mathcal{J})^{\otimes}$ donc comme une sous-algèbre de Hopf de \mathbf{WMat}^{\otimes} . On note $(Z_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{C}_e}$ la base duale des compositions étendues.

Décrivons les opérations de l'algèbre de Hopf \mathcal{C}_e^{\otimes} . Commençons par la structure la plus simple : celle de cogèbre.

Proposition 74. *Le coproduit de la cogèbre \mathcal{C}_e^{\otimes} est défini par :*

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}_e^{\otimes} & \longrightarrow \mathcal{C}_e^{\otimes} \otimes \mathcal{C}_e^{\otimes} \\ Z_{(\alpha_0, \dots, \alpha_s)} & \mapsto \sum_{a=0}^{\alpha_0} \sum_{u=0}^s Z_{(a, \alpha_1, \dots, \alpha_u)} \otimes Z_{(\alpha_0 - a, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_s)} \end{cases}$$

Démonstration. Soient $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p), \eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathcal{C}_e$ des compositions étendues. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(Z_{\alpha})(\nu \otimes \eta) &= Z_{\alpha}(\nu_0 + \eta_0, \nu_1, \dots, \nu_p, \eta_1 \dots \eta_k) \\ &= \delta_{\alpha_0, \nu_0 + \eta_0} \delta_{\alpha_1, \nu_1} \dots \delta_{\alpha_p, \nu_p} \delta_{\alpha_{p+1}, \eta_1} \dots \delta_{\alpha_s, \eta_k} \\ &= \sum_{a=0}^{\alpha_0} \sum_{u=0}^s \left(Z_{(a, \alpha_1, \dots, \alpha_u)} \otimes Z_{(\alpha_0 - a, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_s)} \right) (\nu \otimes \eta) \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta(Z_{(\alpha_0, \dots, \alpha_s)}) = \sum_{a=0}^{\alpha_0} \sum_{u=0}^s Z_{(a, \alpha_1, \dots, \alpha_u)} \otimes Z_{(\alpha_0 - a, \alpha_{u+1}, \dots, \alpha_s)}.$$

□

Exemples. Considérons les compositions étendues $(0, 2, 1, 1, 2)$ et $(3, 2, 2, 4)$. On détermine leur coproduit réduit. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(Z_{(0,2,1,1,2)}) &= Z_{(0,2)} \otimes Z_{(0,1,1,2)} + Z_{(0,2,1)} \otimes Z_{(0,1,2)} + Z_{(0,2,1,1)} \otimes Z_{(0,2)}, \\ \tilde{\Delta}(Z_{(1,2,3)}) &= Z_{(0,2)} \otimes Z_{(1,3)} + Z_{(0,2,3)} \otimes Z_{(1)} + Z_{(1)} \otimes Z_{(0,2,3)} + Z_{(1,2)} \otimes Z_{(0,3)}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la structure d'algèbre de \mathcal{C}_e^{\otimes} .

Proposition 75. *Le produit de l'algèbre \mathcal{C}_e^{\otimes} est défini par :*

$$m : \begin{cases} \mathcal{C}_e^{\otimes} \otimes \mathcal{C}_e^{\otimes} & \longrightarrow \mathcal{C}_e^{\otimes} \\ Z_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p)} \otimes Z_{(\beta_0, \dots, \beta_q)} & \mapsto \sum_{\mu=0}^{\beta_0} \sum_{\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in K_{p, \beta_0 - \mu}} c_{\mu, \gamma} Z_{(\alpha_0 + \mu, (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_p + \gamma_p) \sqcup (\beta_1, \dots, \beta_q))} \end{cases}$$

où

$$K_{p, m} = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{N}^p, \gamma_1 + \dots + \gamma_p = m \right\} \text{ pour } m \in \mathbb{N},$$

$$c_{\mu,\gamma} = \binom{\alpha_0 + \mu}{\alpha_0} \binom{\alpha_1 + \gamma_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\alpha_p + \gamma_p}{\alpha_p},$$

$$Z_{(\alpha_0 + \mu, (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_p + \gamma_p)) \sqcup (\beta_1, \dots, \beta_q)} = \sum_{\tau \in \text{Bat}(p,q)} Z_{(\alpha_0 + \mu, \varphi_{\tau-1(1)}, \dots, \varphi_{\tau-1(p)}, \varphi_{\tau-1(p+1)}, \dots, \varphi_{\tau-1(p+q)})},$$

avec

$$\varphi_i = \begin{cases} \alpha_i + \gamma_i & \text{si } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \\ \beta_{i-p} & \text{si } i \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p), \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q), \nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathcal{C}_e$ des compositions étendues. On a :

$$(Z_\alpha Z_\beta)(\nu) = \sum_{a=0}^{\nu_0} \sum_{n=0}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq s} \sum_{t=n}^{\nu_{i_1} + \dots + \nu_{i_n}} \sum_{\substack{k_{i_1} + \dots + k_{i_n} = t \\ 1 \leq k_{i_j} \leq \nu_{i_j}}} \binom{\nu_0}{a} \binom{\nu_{i_1}}{k_{i_1}} \cdots \binom{\nu_{i_n}}{k_{i_n}} Z_\alpha(v_{a,I,K}) Z_\beta(w_{a,I,K})$$

où

$$v_{a,I,K} = (a, k_{i_1}, \dots, k_{i_n}),$$

$$w_{a,I,K} = (\nu_0 - a + \sum_{j=1}^n (\nu_{i_j} - k_{i_j}), \nu_{u_1}, \dots, \nu_{u_{s-n}}),$$

$$\{u_1 < \dots < u_{s-n}\} = \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_n\}.$$

Or

$$Z_\alpha(v_{a,k,i}) Z_\beta(w_{a,k,i}) \neq 0 \iff \begin{cases} a = \alpha_0 \\ s = p + q \\ n = p \\ k_{i_j} = \alpha_j, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ \nu_{u_j} = \beta_j, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ \nu_0 + \sum_{j=1}^p \nu_{i_j} = \beta_0 + \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \\ 0 < \alpha_j \leq \nu_{i_j}, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \end{cases}$$

On obtient donc :

$$Z_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p)} Z_{(\beta_0, \dots, \beta_q)} = \sum_{\mu=0}^{\beta_0} \sum_{\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in K_{p, \beta_0 - \mu}} c_{\mu,\gamma} Z_{(\alpha_0 + \mu, (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_p + \gamma_p)) \sqcup (\beta_1, \dots, \beta_q)}$$

où

$$K_{p,m} = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{N}^p, \gamma_1 + \dots + \gamma_p = m \right\},$$

$$c_{\mu,\gamma} = \binom{\alpha_0 + \mu}{\alpha_0} \binom{\alpha_1 + \gamma_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\alpha_p + \gamma_p}{\alpha_p},$$

$$Z_{(\alpha_0 + \mu, (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_p + \gamma_p)) \sqcup (\beta_1, \dots, \beta_q)} = \sum_{\tau \in \text{Bat}(p,q)} Z_{(\alpha_0 + \mu, \varphi_{\tau-1(1)}, \dots, \varphi_{\tau-1(p)}, \varphi_{\tau-1(p+1)}, \dots, \varphi_{\tau-1(p+q)})},$$

avec

$$\varphi_i = \begin{cases} \alpha_i + \gamma_i & \text{si } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \\ \beta_{i-p} & \text{si } i \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket. \end{cases}$$

□

Exemples. Considérons les compositions étendues $(0, 1)$ et $(1, 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} Z_{(0,1)}Z_{(0,1)} &= 2Z_{(0,1,1)}, \\ Z_{(0,1)}Z_{(1,1)} &= 2Z_{(0,2,1)} + 2Z_{(0,1,2)} + 2Z_{(1,1,1)}. \end{aligned}$$

Les deux sous-sections précédentes ont permis de s'intéresser à trois algèbres de Hopf particulières : **SPW**, **ISPW** et \mathcal{C}_e . Elles sont liées les unes aux autres. On rappelle que \mathcal{I} et \mathcal{J} sont les biidéaux de **WMat** suivants :

$$\mathcal{I} = \langle w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}), x_0 \in \text{Alph}(w) \rangle, \quad \mathcal{J} = \langle w - w_\sigma, w \in \mathbf{WMat}, \sigma \in \mathfrak{S}_{|w|} \rangle.$$

Appelons \mathcal{G} et \mathcal{G}' les biidéaux de Hopf respectifs de $\mathbf{WMat}/\mathcal{J}$ et \mathcal{C}_e suivants :

$$\mathcal{G} = \langle \overline{x_0 \dots x_0 x_1 \dots x_1 \dots x_s \dots x_s} \in \mathbf{WMat}/\mathcal{J} \rangle, \quad \mathcal{G}' = \langle (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathcal{C}_e, \alpha_0 \geq 1 \rangle.$$

Rappelons que l'on appelle Π la surjection canonique de **WMat** dans \mathcal{C}_e . Les biidéaux \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont isomorphes. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{WMat} & \longrightarrow & \mathbf{SPW} = \mathbf{WMat}/\mathcal{I} \\ \downarrow \Pi & & \uparrow \\ \mathcal{C}_e \simeq \mathbf{WMat}/\mathcal{J} & & \mathbf{ISPW} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_e/\mathcal{G}' \simeq \frac{\mathbf{WMat}/\mathcal{J}}{\mathcal{G}} & & \end{array}$$

Jusqu'à présent, l'étude ne s'est portée que sur des algèbres de Hopf induites par **WMat**, c'est-à-dire soit des sous-algèbres de Hopf soit des algèbres de Hopf quotient de **WMat**. Recherchons maintenant des morphismes possibles de **WMat** vers les fonctions quasi-symétriques.

2.3 Quelques morphismes à valeurs dans l'algèbre de Hopf **QSym** des fonctions quasi-symétriques

Dans cette section, l'objectif est d'explicitier un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre \mathbf{ISPW}^\otimes et **QSym** (cf. paragraphe 2.2.2), et donc un isomorphisme entre **NSym** et **ISPW**, ainsi que de construire des morphismes d'algèbres de Hopf entre **WMat** et **QSym** selon le procédé décrit par Aguiar, Bergeron et Sottile dans [2, théorème 4.1] et rappelé dans la section 1.3 du chapitre 1.

Nous commencerons par considérer l'algèbre de Hopf combinatoire $(\mathbf{ISPW}^\otimes, \zeta)$ pour un certain caractère ζ que nous préciserons afin d'explicitier un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre \mathbf{ISPW}^\otimes et **QSym**. Par transposition de cette application nous aurons un isomorphisme

d'algèbres de Hopf explicite entre **NSym** et **ISPW**. Ensuite, nous nous intéresserons à l'algèbre de Hopf combinatoire **WMat** que nous munirons de cinq caractères différents. Deux morphismes ainsi construits retiendront l'attention : Ψ_3 , car son image est *Sym*, et Ψ_5 , car sa transposée permet d'obtenir des éléments de type groupe dans le complété de **WMat**[®].

2.3.1 Isomorphisme entre **ISPW**[®] et **QSym**, isomorphisme entre **ISPW** et **NSym**

Le procédé explicité par Aguiar, Bergeron et Sottile permet de définir un isomorphisme d'algèbres de Hopf Ψ entre **ISPW**[®] et **QSym**. Pour cela, on utilisera l'écriture en composition des éléments de **ISPW**[®] *i.e.*, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n -uplet $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, l'élément $Z_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{k_1 \text{ fois}} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{k_n}}$ est noté $Z_{(k_1, \dots, k_n)}$.

Proposition 76. *L'application*

$$\zeta : \begin{cases} \mathbf{ISPW}^{\otimes} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ Z_{(k_1, \dots, k_n)} & \longmapsto \frac{1}{n!} \end{cases}$$

est un caractère de **ISPW**[®].

Démonstration. Le produit de deux compositions $Z_{(k_1, \dots, k_n)}$ et $Z_{(l_1, \dots, l_m)}$ de **ISPW**[®] est une somme de $\binom{n+m}{n}$ compositions de longueur $n+m$. Ainsi,

$$\zeta(Z_{(k_1, \dots, k_n)} Z_{(l_1, \dots, l_m)}) = \frac{\binom{n+m}{n}}{(n+m)!} = \frac{1}{n!m!} = \zeta(Z_{(k_1, \dots, k_n)}) \zeta(Z_{(l_1, \dots, l_m)}).$$

□

Proposition 77. *L'application Ψ , définie par*

$$\Psi : \begin{cases} \mathbf{ISPW}^{\otimes} & \longrightarrow \mathbf{QSym} \\ Z_{(k_1, \dots, k_n)} & \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(s_1, \dots, s_{i+1}) \models n} \frac{1}{s_1! \dots s_{i+1}!} M_{(k_1 + \dots + k_{s_1}, \dots, k_{(s_1 + \dots + s_{i+1}) + \dots + k_n}),} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Soient $Z_{(k_1, \dots, k_n)}$ un élément de **ISPW**[®] et i un entier naturel de l'intervalle $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Notons $\tilde{\Delta}^i$, le coproduit réduit $\tilde{\Delta}$ itéré i fois. On sait que :

$$\tilde{\Delta}^i(Z_{(k_1, \dots, k_n)}) = \sum_{(s_1, \dots, s_{i+1}) \models n} Z_{(k_1, \dots, k_{s_1})} \otimes \dots \otimes Z_{(k_{(s_1 + \dots + s_{i+1})}, \dots, k_n)}.$$

On considère alors le caractère ζ défini dans la proposition précédente et le procédé de Aguiar, Bergeron et Sottile donne l'application Ψ . Cette dernière est donc un morphisme d'algèbres de Hopf graduées. En considérant la base $(Z_{(k_1, \dots, k_n)})_{(n, k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}}$, le fait que Ψ soit un isomorphisme est immédiat. □

Proposition 78. *L'application Ψ^* , définie par*

$$\Psi^* : \begin{cases} \mathbf{NSym} & \longrightarrow \mathbf{ISPW} \\ M_{(k_1, \dots, k_n)}^* & \mapsto \sum_{i=n}^{k_1 + \dots + k_n} \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_n = i \\ \forall j, 1 \leq s_j \leq k_j}} \sum_{\substack{(u_1^{(1)}, \dots, u_{s_1}^{(1)}) \models k_1 \\ \vdots \\ (u_1^{(n)}, \dots, u_{s_n}^{(n)}) \models k_n}} \frac{1}{s_1! \dots s_n!} w_U, \end{cases}$$

avec $w_U = \underbrace{x_1 \dots x_1}_{u_1^{(1)} \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{u_{s_1}^{(1)} \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{u_1^{(n)} \text{ fois}} * \dots * \underbrace{x_1 \dots x_1}_{u_{s_n}^{(n)} \text{ fois}}$, est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. Il suffit de transposer l'application Ψ précédente. \square

Proposition 79. *On note ici les mots tassés stricts croissants sous forme de compositions. On définit l'application Ψ_{inv}^* par :*

$$\Psi_{inv}^* : \begin{cases} \mathbf{ISPW} & \longrightarrow \mathbf{NSym} \\ (k_1, \dots, k_n) & \mapsto \sum_{i=n}^{k_1 + \dots + k_n} \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_n = i \\ \forall j, 1 \leq s_j \leq k_j}} \sum_{\substack{(u_1^{(1)}, \dots, u_{s_1}^{(1)}) \models k_1 \\ \vdots \\ (u_1^{(n)}, \dots, u_{s_n}^{(n)}) \models k_n}} \frac{(-1)^{n+s_1+\dots+s_n}}{s_1 \dots s_n} M_{(u_1^{(1)}, \dots, u_{s_n}^{(n)})}^*. \end{cases}$$

Il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. On écrit les mots tassés stricts croissants sous forme de compositions. Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\Psi^* \circ \Psi_{inv}^*((n)) = \sum_{l=1}^n \sum_{(m_1, \dots, m_l) \models n} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \sum_{i=l}^n \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_l = i \\ \forall j, 1 \leq s_j \leq m_j}} \sum_{\substack{(u_1^{(1)}, \dots, u_{s_1}^{(1)}) \models m_1 \\ \vdots \\ (u_1^{(l)}, \dots, u_{s_l}^{(l)}) \models m_l}} \frac{1}{s_1! \dots s_l!} (u_1^{(1)}, \dots, u_{s_l}^{(l)}).$$

Pour toute composition (k_1, \dots, k_p) de n on a alors :

$$c_p = Z_{(k_1, \dots, k_p)}(\Psi^* \circ \Psi_{inv}^*((n))) = \sum_{l=1}^p (-1)^{l+1} \sum_{(s_1, \dots, s_l) \models p} \frac{1}{s_1! \dots s_l!}.$$

La série génératrice f des coefficients $(c_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est égale à $f = X$. Ainsi $\Psi^* \circ \Psi_{inv}^*((n)) = (n)$ et le morphisme Ψ_{inv}^* est l'application inverse de Ψ^* . \square

Corollaire 80. *Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que pour $i \neq j$ on ait $\beta_i \neq \beta_j$. Posons $\gamma = (\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\beta_n, \dots, \beta_n}_{\alpha_n \text{ fois}})$. On considère les éléments*

\mathcal{Pr}_γ et $\mathcal{Pr}_{\Lambda_\gamma}$ définis dans les propositions 46 et 47. Leurs images $\Psi_{inv}^*(\mathcal{Pr}_\gamma)$ et $\Psi_{inv}^*(\mathcal{Pr}_{\Lambda_\gamma})$ sont des éléments primitifs de \mathbf{NSym} .

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n , l'élément

$$\mathcal{P}r_{(n)}^{\mathbf{NSym}} = \sum_{k=1}^n \sum_{(u_1, \dots, u_k) \models n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M_{(u_1, \dots, u_k)}^*$$

est primitif dans **NSym**.

2.3.2 Quelques morphismes de **WMat** dans **QSym**

Utilisons maintenant le procédé de Aguiar, Bergeron et Sottile pour introduire cinq morphismes d'algèbres de Hopf définis sur **WMat** et à valeurs dans **QSym**. Pour chaque entier $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, le i -ème caractère de **WMat** utilisé est noté ζ_i et l'on appelle Ψ_i le morphisme d'algèbres Hopf qui lui est associé.

Remarque. Etant donné que les algèbres de Hopf **ISPW**^{*} et **QSym** sont isomorphes et que, pour tout entier naturel n non nul, $\dim(\mathbf{ISPW}^*)_n < \dim(\mathbf{WMat})_n$, les morphismes d'algèbres de Hopf graduées de **WMat** à valeurs dans **QSym** ne peuvent pas être injectifs.

Premier morphisme

On considère le caractère suivant :

$$\zeta_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{WMat} \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}) \longmapsto 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{WMat} \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \longmapsto 1. \end{array} \right.$$

Proposition 81. Soit $w \in \mathbf{WMat}$ un mot tassé de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\Psi_1(w) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} M_\alpha.$$

Remarque. Pour un mot tassé w de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ donné, son image par Ψ_1 ne dépend que de sa longueur n .

Démonstration. On sait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout mot tassé $w \in (\mathbf{WMat})_n$,

$$\Delta^{(k)}(w) = \sum_{I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, n\}} \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]),$$

ce qui se réécrit :

$$\Delta^{(k)}(w) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \models n \\ I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, n\} \\ |I_i| = \alpha_i}} \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]).$$

Donc

$$\Psi_1(w) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \models n \\ I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, n\} \\ |I_i| = \alpha_i}} M_\alpha = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n \\ I_1 + \dots + I_k = \{1, \dots, n\} \\ |I_i| = \alpha_i}} M_\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \binom{n}{\alpha_1} \cdots \binom{n - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1})}{\alpha_k} M_\alpha = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} M_\alpha.$$

□

Proposition 82. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$P_n = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} M_\alpha.$$

On a alors :

$$\text{Im}(\Psi_1) = \text{Vect} \left(P_n, n \in \mathbb{N}^* \right) = \mathbb{K}[P_1] = \mathbb{K}[M_{(1)}] \subsetneq \mathbf{QSym}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} M_{(1)}^n &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \right)^n = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = P_n. \end{aligned}$$

□

Deuxième morphisme

On considère le caractère suivant :

$$\zeta_2 : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } w = x_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\zeta_2 : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \mathbf{WMat} & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } w = \underbrace{x_0 \cdots x_0}_{n \text{ fois}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 83. *Soit $w \in \mathbf{WMat}$ un mot tassé de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$\Psi_2(w) = \begin{cases} \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} M_\alpha & \text{si } w = \underbrace{x_0 \cdots x_0}_{n \text{ fois}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} P_n & \text{si } w = \underbrace{x_0 \cdots x_0}_{n \text{ fois}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Troisième morphisme

On considère le caractère suivant :

$$\zeta_3 : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } w = x_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 84. Soit $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé. On a :

$$\Psi_3(w) \neq 0 \iff (\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, w = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) \iff w \in \mathfrak{SH}.$$

Démonstration. Soit $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé.

Cas 1. $x_0 \in \text{Alph}(w)$. On a alors que, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$, $\Delta^{(k)}(w)$ possède dans chaque tenseur un mot v tel que $x_0 \in \text{Alph}(v)$. On a donc $\Psi_3(w) = 0$.

Cas 2. Il existe $a \in \text{Alph}(w)$ tel que $|w|_a \geq 2$. Alors pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$, $\Delta^{(k)}(w)$ possède dans chaque tenseur un mot v tel que : soit $|v|_a \geq 2$, soit $x_0 \in \text{Alph}(v)$. On a donc $\Psi_3(w) = 0$.

Cas 3. On suppose w de la forme $w = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$.

Pour $1 \leq k \leq n-2$ on a $\Delta^{(k)}(w) \in \mathbf{WMat}^{\otimes k+1} \not\subseteq \mathbf{WMat}^{\otimes n}$. De plus, on sait que $\Delta^{(n-1)}(w) = n! \underbrace{x_1 \otimes \dots \otimes x_1}_{n \text{ fois}}$. Donc $\Psi_3(w)$ s'écrit $\Psi_3(w) = n! M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}) + u$ où u est un élément de **QSym** dont le coefficient en $M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})$ est nul. Ainsi $\Psi_3(w) \neq 0$.

□

L'image du morphisme Ψ_3 est liée à la sous-algèbre de Hopf de **QSym** des fonctions symétriques Sym (cf. section 1.2.2 du chapitre 1).

Lemme 85.

$$\text{Im}(\Psi_3) \subseteq Sym.$$

Démonstration. Il suffit de considérer les faits que $\text{Im}(\Psi_3) = \Psi_3(\mathfrak{SH})$, que \mathfrak{SH} est une cogèbre à la fois coassociative et cocommutative et que Sym est la plus grande sous-cogèbre coassociative et cocommutative de **QSym**. □

Remarque. Soit α une composition d'un entier n et w un mot tassé de $(\mathfrak{SH})_n$. Si le coefficient en M_α de $\Psi_3(w)$ est non nul, alors, pour tout raffinement β de la composition α , le coefficient en M_β de $\Psi_3(w)$ est également non nul. Illustrons ceci par l'exemple suivant. Considérons $\alpha = (3, 1)$, $\beta = (2, 1, 1)$ et le mot tassé $w = x_4 x_1 x_2 x_3 \in \mathfrak{SH}$. La composition β est bien un raffinement de α et on a :

$$\Psi_3(x_4 x_1 x_2 x_3) = (M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 4(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)}.$$

Les coefficients en M_α et M_β sont bien non nuls.

Proposition 86. 1. L'application Ψ_3 a pour image $\Psi_3(\mathbf{WMat}) = Sym$.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a : $\Psi_3(\sigma) = \Psi_3(\sigma^{-1})$.

Démonstration. 1. Soit $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k)$ une partition de n .

Considérons le mot suivant :

$$w_\alpha = x_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + 1)} \dots x_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)} x_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-2} + 1)} \dots x_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})} \dots x_1 \dots x_{\alpha_1}.$$

Alors $\Psi_3(w_\alpha) = c_\alpha M_\alpha + u$ où $c_\alpha \neq 0$ et u est un élément de **QSym** dont le coefficient en M_α est nul.

Soit $\beta = (\beta_1 \geq \dots \geq \beta_s)$ une autre partition de n telle que $s \leq k$.

Alors, il existe un entier i de l'intervalle $\llbracket 1, s \rrbracket$ tel que pour tout entier naturel non nul j vérifiant $j < i_1$ on ait : $\beta_j = \alpha_j$ et $\beta_{i_1} \neq \alpha_{i_1}$.

Si $\beta_{i_1} > \alpha_{i_1}$ alors le coefficient en M_β de $\Psi_3(w_\alpha)$ est nul.

Si $\beta_{i_1} < \alpha_{i_1}$ alors il existe $i_2 \in \llbracket i_1 + 1, s \rrbracket$ tel que $\beta_{i_2} > \alpha_{i_2}$. Le coefficient en M_β de $\Psi_3(w_\alpha)$ est alors nul.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $s \in \{2, \dots, n-1\}$. On suppose qu'il existe $i_1 < \dots < i_s$ tels que $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_s)$. Alors, en posant $k_1 = \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_s) = k_s$, on a :

$$\sigma^{-1}(k_1) < \dots < \sigma^{-1}(k_s).$$

On a donc $\Psi_3(\sigma) = \Psi_3(\sigma^{-1})$.

□

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé. On peut déterminer $\Psi_3(w)$ à partir du produit de \mathbf{WMat}^\otimes . On a :

$$\Psi_3(w) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \left(Z_{x_1 \dots x_{\alpha_1}} \dots Z_{x_1 \dots x_{\alpha_k}} \right) (w) M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}.$$

Exemple. Considérons le mot tassé $w = x_2 x_1 x_3$. Par calcul direct de Ψ_3 , on obtient :

$$\Psi_3(x_2 x_1 x_3) = 2(M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 6M_{(1,1,1)}.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \varrho &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models 3} Z_{x_1 \dots x_{\alpha_1}} \dots Z_{x_1 \dots x_{\alpha_k}} M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \\ &= Z_{x_1 x_2 x_3} M_{(3)} + Z_{x_1 x_2} Z_{x_1} M_{(2,1)} + Z_{x_1} Z_{x_1 x_2} M_{(1,2)} + Z_{x_1}^3 M_{(1,1,1)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Z_{x_1 x_2} Z_{x_1} &= 3Z_{x_1 x_2 x_3} + 2Z_{x_1 x_3 x_2} + Z_{x_3 x_1 x_2} + 2Z_{x_2 x_1 x_3} + Z_{x_2 x_3 x_1}, \\ Z_{x_1}^3 &= 2(Z_{x_1 x_2} Z_{x_1} + Z_{x_2 x_1} Z_{x_1}) \\ &= 6(Z_{x_1 x_2 x_3} + Z_{x_1 x_3 x_2} + Z_{x_2 x_1 x_3} + Z_{x_2 x_3 x_1} + Z_{x_3 x_1 x_2} + Z_{x_3 x_2 x_1}). \end{aligned}$$

On a alors : $\varrho(w) = 2(M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 6M_{(1,1,1)} = \Psi_3(w)$.

Quatrième morphisme

On considère le caractère suivant

$$\zeta_4 : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}) & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } w = x_0 \text{ ou } w = x_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Remarques.

1. Le morphisme Ψ_4 coïncide avec Ψ_2 sur les mots de la forme $\underbrace{x_0 \dots x_0}_{n \text{ fois}}$ et avec Ψ_3 sur les permutations. On obtient donc que $Sym \subset \text{Im}(\Psi_4)$.
2. Pour $1 \leq n \leq 4$, l'espace vectoriel $\Psi_4((\mathbf{WMat})_n)$ est l'espace vectoriel $(\mathbf{QSym})_n$. En ce qui concerne les degrés 1 et 2, le résultat est immédiat. Pour le degré 3, il suffit de considérer

$$\begin{aligned}\Psi_4(x_0x_0x_1) &= M_{(3)} + 3(M_{(1,2)} + M_{(2,1)}) + 6M_{(1,1,1)}, \\ \Psi_4(x_1x_1x_0) &= 2(M_{(1,2)} + M_{(2,1)}) + 6M_{(1,1,1)}, \\ \Psi_4(x_2x_1x_1) &= 2M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)}, \\ \Psi_4(x_2x_1x_1) &= M_{(1,1,1)}.\end{aligned}$$

En degré $n = 4$, considérons les résultats suivants :

mot tassé w	image par Ψ_4							
	$M_{(4)}$	$M_{(3,1)}$	$M_{(1,3)}$	$M_{(2,2)}$	$M_{(2,1,1)}$	$M_{(1,2,1)}$	$M_{(1,1,2)}$	$M_{(1,1,1,1)}$
$x_1x_2x_3x_4$	1	4	4	6	12	12	12	24
$x_4x_1x_2x_3$		1	1		6	6	6	24
$x_1x_1x_1x_1$			4			12	12	24
$x_3x_4x_1x_2$				2	4	4	4	24
$x_1x_1x_2x_2$				2	8	8	4	24
$x_4x_3x_1x_2$					2	2	2	24
$x_2x_2x_1x_1$						8	4	24
$x_4x_3x_2x_1$								24

En posant $w_4 = x_3x_4x_1x_2$, $w_5 = x_1x_1x_2x_2$, $w_6 = x_4x_3x_1x_2$ et $w_8 = x_4x_3x_2x_1$, on peut également noter que $\Psi_4(\frac{1}{4}(w_4 - w_5) + \frac{1}{2}(w_6 - w_8)) = M_{(1,1,2)}$. L'espace vectoriel $\Psi_4((\mathbf{WMat})_4)$ est donc l'espace $(\mathbf{QSym})_4$.

Proposition 87. *Soit $w \in \mathbf{WMat}$ un mot tassé. Posons $s = \text{sup}(w)$. Soient p un entier naturel non nul et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une composition. Si $\alpha_1 > s + |w|_{x_0}$ alors le coefficient en M_α de $\Psi_4(w)$ est nul.*

On a, en particulier, la valeur remarquable de Ψ_4 suivante :

$$\Psi_4(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}) = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ \alpha_1 = 1}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} M_\alpha.$$

Démonstration. Soit $w \in \mathbf{WMat}$ un mot tassé. Posons $s = \text{sup}(w)$. Soient p un entier naturel non nul et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une composition. Supposons l'inégalité $\alpha_1 > s + |w|_{x_0}$ satisfaite. Considérons dans $\Delta^{(p-1)}$ les tenseurs de la forme $w_1 \otimes \dots \otimes w_p \in (\mathbf{WMat})_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes (\mathbf{WMat})_{\alpha_p}$. Comme $\alpha_1 > s + |w|_{x_0}$, il existe un indice $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que $|w_1|_{x_i} \geq 2$. On a donc $\zeta_4(w_1) = 0$. D'où le fait que le coefficient en M_α de $\Psi_4(w)$ soit nul.

La valeur de $\Psi_4(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}})$ se démontre par calcul direct. En effet, pour $1 \leq k \leq n-1$, on sait que :

$$\begin{aligned} & \Delta^{(k)}(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{n \text{ fois}}) \\ &= \sum_{I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, n\}} \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]) \\ &= \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \otimes \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_2 \text{ fois}} \otimes \dots \otimes \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_p \text{ fois}} \end{aligned}$$

et que $\zeta_4(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l \geq 2 \text{ fois}}) = 0$. On obtient donc la formule énoncée. \square

Cinquième morphisme

On considère le caractère suivant :

$$\zeta_5 : \begin{cases} \mathbf{WMat} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \in \text{Irr}(\mathbf{WMat}) & \mapsto \begin{cases} a & \text{si } w = x_0, \\ b & \text{si } w = x_1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{K}.$$

Remarque. En général, l'application Ψ_5 , obtenue à partir du caractère ζ_5 défini ci-dessus, n'est pas surjective. En effet, pour $(a, b) \in (\mathbb{K}^*)^2$, notons $\Psi_{3,b}$ et $\Psi_{2,b}$ les morphismes d'algèbres de Hopf tels que $\Psi_{3,b}(w) = b^n \Psi_3(w)$ et $\Psi_{2,a}(w) = a^n \Psi_2(w)$ pour $w \in (\mathbf{WMat})_n$. L'application $\Psi_{3,b}$ (respectivement $\Psi_{2,b}$) est le morphisme Ψ_5 dans le cas particulier où $a = 0$ (respectivement $b = 0$). Ces morphismes ne sont pas surjectifs. Dans le cas $a = 0$ et $b \neq 0$, le morphisme Ψ_5 , qui correspond à $\Psi_{3,b}$, a pour image Sym .

Proposition 88. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé. On pose $s_1^w = \text{sup}(w)$ et $s_2^w = |w| - \text{sup}(w)$. On a alors :

$$\Psi_5(w) = a^{s_2^w} b^{s_1^w} \Psi_4(w).$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $w \in (\mathbf{WMat})_n$ un mot tassé, $s_1^w = \text{sup}(w)$ et $s_2^w = |w| - \text{sup}(w)$. On sait que, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\Delta^{(k)}(w) = \sum_{I_1 + \dots + I_{k+1} = \{1, \dots, n\}} \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]).$$

Pour $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{k+1}$ une partition de $\{1, \dots, n\}$ posons :

$$t_{(I_1, \dots, I_{k+1})} = \text{pack}(w[I_1]) \otimes \text{pack}(w[I_2]/w[I_1]) \otimes \dots \otimes \text{pack}(w[I_{k+1}]/w[I_1 + \dots + I_k]).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le tenseur $t_{(I_1, \dots, I_{k+1})}$ contribue dans $\Psi_5(w)$.

2. Pour tout $u \in \{1, \dots, k+1\}$, il existe des entiers n_u et s_u non tous nuls tels que :

$$\text{pack}(w[I_u]/w[I_1 + \dots + I_{u-1}]) = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{n_u - s_u \text{ fois}} \sqcup x_1 \dots x_{s_u}.$$

Supposons que $t_{(I_1, \dots, I_{k+1})}$ contribue dans $\Psi_5(w)$. Le tenseur $t_{(I_1, \dots, I_{k+1})}$ contient alors s_1^w lettres différentes de x_0 et s_2^w fois la lettre x_0 . On obtient donc :

$$\Psi_5(w) = a^{s_2^w} b^{s_1^w} \Psi_4(w).$$

□

Considérons maintenant l'application transposée de Ψ_5 . Il s'agit d'un morphisme défini sur $\mathbf{QSym}^{\otimes} = \mathbf{NSym}$ (cf. paragraphe 2.2.2) à valeurs dans \mathbf{WMat}^{\otimes} . Il est donné par :

$$\Psi_5^* : \begin{cases} \mathbf{NSym} & \longrightarrow \mathbf{WMat}^{\otimes} \\ M_{(n)}^* & \longmapsto \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k Z_{x_0^{n-k}} Z_{x_1 \dots x_k} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k Z_{x_0^{n-k} \sqcup x_1 \dots x_k}. \end{cases}$$

Rappelons que, pour un couple de mots tassés $(w_1, w_2) \in \mathbf{WMat}^2$, on pose $\Gamma_{(w_1, w_2)}$ l'ensemble :

$$\Gamma_{(w_1, w_2)} =$$

$$\left\{ w \in \mathbf{WMat}, |w| = n_2, w[\{i\}] = \begin{cases} T_{\text{sup}(w_1)}(w_2[\{i\}]) & \text{si } w_2[\{i\}] \neq x_0, \\ x_j \text{ avec } j \in \text{IAIph}(w_1) \cup \{0\} & \text{sinon} \end{cases} \right\}.$$

Soient un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et un k -uplet d'entiers $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$. On définit l'ensemble $Bat(n_1, \dots, n_k)$ par :

$$Bat(n_1, \dots, n_k) =$$

$$\left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_{n_1 + \dots + n_k}, \forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \sigma(n_1 + \dots + n_j + 1) < \dots < \sigma(n_1 + \dots + n_{j+1}) \right\}.$$

On peut maintenant donner la proposition suivante.

Proposition 89. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un n -uplet d'entiers non nuls. On a :

$$1. \Psi_5^*(M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}) = n! \left(\sum_{\substack{w \in (\mathbf{WMat})_n \\ w \text{ mot tassé}}} a^{s_2^w} b^{s_1^w} Z_w \right),$$

$$2. \Psi_5^*(M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^*) = \sum_{k=0}^{\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_n = k \\ \forall j, 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j}} \sum_{\substack{\mu \in Bat(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \\ \forall j, 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j \\ \tau \in Bat(\beta_1, \dots, \beta_n)}} a^{\theta - k} b^k Z_{\tau \circ (w_1 \dots w_{2n}) \circ \mu^{-1}} \text{ où}$$

$$\gamma_{2j} = \beta_j, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$\gamma_{2j+1} = \alpha_{j+1} - \beta_{j+1}, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

$$s_{2j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i & \text{si } j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \\ 0 & \text{si } j = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
w_{2j} &= T_{s_{2j}}(x_1 \dots x_{\beta_j}), \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\
m_{2j} &= x_1 \dots x_{\beta_1 + \dots + \beta_j}, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\
m_{2j+1} &= \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\gamma_{2j+1} \text{ fois}} \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \\
w_1 &= \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_1 - \beta_1 \text{ fois}}, \\
w_{2j+1} &= \sum_{\omega \in \Gamma(m_{2j}, m_{2j+1})} \omega, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\
w_1 \dots w_{2n} &\text{ est la concaténation des mots } w_1, \dots, w_{2n}.
\end{aligned}$$

Démonstration. 1. Cette égalité est montrée par récurrence sur n .

$$\begin{aligned}
\Psi_5^*(M_{(1)}^*) &= aZ_{x_0} + bZ_{x_1}, \\
\Psi_5^*(\underbrace{M_{(1, \dots, 1)}^*}_{n+1 \text{ fois}}) &= \Psi_5^*((M_1^*)^{n+1}) \\
&= \Psi_5^*(M_1^*) \Psi_5^*((M_1^*)^n) \\
&= \left(aZ_{x_0} + bZ_{x_1} \right) n! \left(\sum_{\substack{w \in (\mathbf{WMat})_n \\ w \text{ mot tassé}}} a^{s_2^w} b^{s_1^w} Z_w \right) \\
&= n! \left(\sum_{\substack{w \in (\mathbf{WMat})_n \\ w \text{ mot tassé}}} a^{s_2^w+1} b^{s_1^w} Z_{x_0} Z_w \right) + n! \left(\sum_{\substack{w \in (\mathbf{WMat})_n \\ w \text{ mot tassé}}} a^{s_2^w} b^{s_1^w+1} Z_{x_1} Z_w \right) \\
&= (n+1)! \left(\sum_{\substack{w \in (\mathbf{WMat})_{n+1} \\ w \text{ mot tassé}}} a^{s_2^w} b^{s_1^w} Z_w \right).
\end{aligned}$$

2. Par calcul direct :

$$\begin{aligned}
\Psi_5^*(M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^*) &= \Psi_5^*(M_{(\alpha_1)}^*) \dots \Psi_5^*(M_{(\alpha_n)}^*) \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} a^{(\alpha_j - \beta_j)} b^{\beta_j} \underbrace{Z_{x_0} \dots x_0}_{\alpha_j - \beta_j \text{ fois}} Z_{x_1 \dots x_{\beta_j}} \right) \\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} a^{((\alpha_1 + \dots + \alpha_n) - (\beta_1 + \dots + \beta_n))} b^{(\beta_1 + \dots + \beta_n)} \left(\prod_{j=1}^n \underbrace{Z_{x_0} \dots x_0}_{\alpha_j - \beta_j \text{ fois}} Z_{x_1 \dots x_{\beta_j}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_n = k \\ \forall j, 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j}} \sum_{\substack{\mu \in \text{Bat}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \\ \tau \in \text{Bat}(\beta_1, \dots, \beta_n)}} a^{\theta - k} b^k Z_{\tau \circ (w_1 \dots w_{2n}) \circ \mu^{-1}}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 90. *Considérons a et b comme des indéterminées et définissons le polynôme Q_n*

de $\mathbb{K}[a, b]$ par :

$$Q_n = \sum_{v \in \mathbf{WMat}, \text{ mot tassé}} (\Psi_5^*(M^*(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})))(v).$$

On a alors :

$$Q_n = n! \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{s_0^{(p)} + \dots + s_p^{(p)} = n-p \\ \forall i, 0 \leq s_i^{(p)} \leq n-p}} \frac{n!}{s_0!(s_1^{(p)} + 1)! \dots (s_p^{(p)} + 1)!} a^{n-p} b^p.$$

Proposition 91. Soit un couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ quelconque. Dans le complété de \mathbf{WMat}^{\otimes} , l'élément $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k Z_{x_0^{n-k} \sqcup x_1 \dots x_k}$ est de type groupe.

Démonstration. Dans le complété de \mathbf{NSym} , $\sum_{n=0}^{\infty} M_{(n)}^*$ est de type groupe donc, comme Ψ_5^* est un morphisme d'algèbres de Hopf, $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_5^*(M_{(n)}^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k Z_{x_0^{n-k} \sqcup x_1 \dots x_k}$ est donc de type groupe dans le complété de \mathbf{WMat}^{\otimes} . \square

Rappelons maintenant un résultat classique sur les éléments de type groupe. On en redonne la démonstration pour le confort du lecteur.

Proposition 92. Soit H une algèbre de Hopf de produit m et coproduit Δ . On pose $G(H)$ l'ensemble de ses éléments de type groupe. L'ensemble $(G(H), m)$ est un groupe. De plus, pour tout élément $\rho \in G(H)$, son inverse est donné par l'antipode i.e. $\rho^{-1} = S(\rho)$.

Démonstration. Soient x, y deux éléments de type groupe dans une algèbre de Hopf H . On a alors $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = (xy) \otimes (xy)$. L'élément xy est donc de type groupe. Considérons maintenant $S(x)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta(S(x)) &= (S \otimes S) \circ \Delta^{op}(x) = S(x) \otimes S(x), \\ x &= (\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta(x) = \varepsilon(x)x, \\ \varepsilon(x) &= S \star Id(x) = m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(x) = S(x)x = Id \star S(x) = xS(x). \end{aligned}$$

L'élément $S(x)$ est donc de type groupe et est l'inverse de x pour le produit m . \square

Intéressons-nous au cas du complété de \mathbf{WMat}^{\otimes} .

Proposition 93. Soient a et b des éléments de \mathbb{K} . Dans le complété de \mathbf{WMat}^{\otimes} , considérons l'élément suivant :

$$V = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n} \sum_{k=0}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \sum_{\substack{\beta_1 + \dots + \beta_n = k \\ \forall j, 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j}} \sum_{\substack{\mu \in \text{Bat}(\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \\ \tau \in \text{Bat}(\beta_1, \dots, \beta_n)}} (-1)^n a^{\theta-k} b^k Z_{\tau \circ (w_1 \dots w_{2n}) \circ \mu^{-1}}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_{2j} &= \beta_j, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \gamma_{2j+1} &= \alpha_{j+1} - \beta_{j+1}, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \\ \theta &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \end{aligned}$$

$$s_{2j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i & \text{si } j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \\ 0 & \text{si } j = 0, \end{cases}$$

$$w_{2j} = T_{s_{2j}}(x_1 \dots x_{\beta_j}), \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$m_{2j} = x_1 \dots x_{\beta_1 + \dots + \beta_j}, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket,$$

$$m_{2j+1} = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\gamma_{2j+1} \text{ fois}}, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

$$w_1 = \underbrace{x_0 \dots x_0}_{\alpha_1 - \beta_1 \text{ fois}},$$

$$w_{2j+1} = \sum_{\omega \in \Gamma_{(m_{2j}, m_{2j+1})}} \omega, \text{ pour tout entier } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket,$$

$w_1 \dots w_{2n}$ est la concaténation des mots w_1, \dots, w_{2n} .

L'élément V est de type groupe et correspond à l'inverse de l'élément Z défini dans la proposition 91. Ainsi $V = S(Z)$.

Démonstration. On sait que, dans le complété de \mathbf{NSym} , l'élément $N = \sum_{n=0}^{\infty} M_{(n)}^*$ est de type groupe. Son inverse est l'élément $S(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n} (-1)^n M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^*$. L'application Ψ_5^* est un morphisme d'algèbres de Hopf et l'on a $V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n} (-1)^n \Psi_5^*(M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^*)$. \square

Etude de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection

L'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection a été introduite par Dupont [23, chapitre 2]. Elle provient de la théorie des nombres. Dupont s'intéresse au problème du calcul du coproduit de l'algèbre de Hopf fondamentale dans la catégorie des structures de Hodge-Tate mixtes. En introduisant les diagrammes de dissection, son objectif est de calculer ce coproduit en une famille particulière : celle des polylogarithmes motiviques de dissection.

L'auteur définit un diagramme de dissection de degré n comme étant un $(n + 1)$ -gone dans lequel sont inscrites n cordes ne s'intersectant pas et formant un arbre enraciné plan. Il munit les diagrammes de dissection d'une structure d'algèbre de Hopf sur le corps des rationnels. La structure d'algèbre est donnée par celle de l'algèbre symétrique donc par union disjointe de diagrammes. La structure de cogèbre est donnée par un coproduit à paramètre de type extraction-contraction [23, sections 2.1.2 et 2.1.3]. L'auteur considère le cas où le paramètre vaut -1 . Il introduit ensuite une version décorée de cette algèbre de Hopf et définit la compatibilité entre la décoration et la contraction d'arêtes dans les graphes orientés [23, section 2.1.4]. Les décorations sont des éléments d'un groupe abélien Λ . L'auteur considère le cas où Λ est le groupe des nombres complexes. Ces décorations permettent de définir des hyperplans dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ [23, section 2.3.1]. Il peut ainsi définir le polylogarithme de dissection $I(D)$ attaché au diagramme de dissection D comme une intégrale absolument convergente sur un simplexe d'une forme différentielle (période) [23, définition 2.3.5]. La forme différentielle est obtenue à partir des décorations des cordes de D ; le simplexe est obtenu à partir des décorations des côtés de D [23, section 2.3.2]. L'auteur en donne une version motivique $I^{\mathcal{H}}(D)$ [23, section 2.4.1] et en détermine son coproduit [23, section 2.4.2, théorème 2.4.9].

L'objectif de ce chapitre est de mieux comprendre la combinatoire de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection non décorés notée \mathcal{H}_D .

Nous commençons par rappeler la construction de l'algèbre de Hopf et reprenons les deux familles présentées par Dupont : celle des échelles et celle des corolles. Elles forment des sous-algèbres de Hopf. Nous les présentons en termes d'algèbre de Hopf de coordonnées de groupes. L'algèbre de Hopf des échelles est celle des fonctions symétriques ; l'algèbre de Hopf des corolles est celle de Faà di Bruno. Nous nous intéressons ensuite à l'éventuelle coliberté de la cogèbre des diagrammes de dissection et donnons une base d'éléments primitifs en degré 3. Ceci ne permet pas de conclure sur la coliberté. La programmation de \mathcal{H}_D en collaboration avec Jean Fromentin (*cf.* section B.3 de l'annexe B) a permis d'établir que, pour le paramètre -1 , il n'y a pas de

coliberté. Cette première section se conclut avec le calcul de l'antipode.

La deuxième section est consacrée à l'étude de \mathcal{H}_D en liant cette dernière à des algèbres de Hopf d'arbres enracinés. Le choix d'envoyer un diagramme de dissection sur l'arbre enraciné plan sous-jacent ne convient pas : le morphisme obtenu ne sera pas un morphisme de cogèbres. Dupont [23, remarque 2.1.15] fait allusion à une structure pré-Lie sur les diagrammes de dissection. L'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D^{\otimes} est graduée, connexe et cocommutative donc isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_D)$ de ses primitifs \mathfrak{g}_D . Au sens de Loday et Ronco, \mathcal{H}_D est une algèbre de Hopf combinatoire commutative-associative-libre droite. Ceci implique qu'il existe une structure pré-Lie sur \mathfrak{g}_D . On peut ainsi utiliser le théorème de structure de Oudom et Guin [75, proposition 2.7 - théorème 2.12] concernant les algèbres enveloppantes des algèbres pré-Lie. Après rappel de la définition d'algèbre pré-Lie, de l'énoncé du théorème de Oudom et Guin ainsi que de la définition de l'algèbre de Grossman et Larson, nous présentons l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D^{\otimes} ainsi que la structure pré-Lie de \mathfrak{g}_D . Vient ensuite la description de l'unique morphisme d'algèbre de Hopf φ respectant les structures de Oudom et Guin de \mathcal{H}_{GL} et \mathcal{H}_D^{\otimes} et envoyant l'arbre enraciné $t = \bullet$ de degré 1 sur $D = \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}$.

Ce morphisme repose sur un procédé d'insertion de cordes (propositions 131, 133, 138 et 140). Nous établissons que l'algèbre pré-Lie engendrée par $\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}$ n'est pas libre (corollaire 128) et que c'est une sous-algèbre pré-Lie stricte de \mathfrak{g}_D (lemme 123). Nous conjecturons que le noyau de φ est le biidéal de Hopf engendré par les arbres enracinés possédant au moins un sommet de fertilité supérieure ou égale à trois (conjecture 129). Les propositions 135, 142 et 143 sont les premiers pas vers la résolution de cette conjecture.

Dans la dernière section, nous définissons des morphismes d'algèbres de Hopf de \mathcal{H}_D à valeurs dans les fonctions quasi-symétriques \mathbf{QSym} selon un procédé introduit par Aguiar, Bergeron et Sottile [2, théorème 4.1]. Trois morphismes sont ici présentés. Une description du premier est donnée lorsque le paramètre de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D vaut 1. Pour les deux suivants, seules les images de quelques familles particulières de diagrammes de dissection sont établies. Ce chapitre fait l'objet d'une publication [63] en cours d'écriture.

3.1 Algèbre de Hopf des diagrammes de dissection

3.1.1 Rappels

On considère un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique 0. On rappelle quelques notations ainsi que la construction de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère un $(n+1)$ -gone régulier orienté (dans le sens indirect ou sens des aiguilles d'une montre), noté Π_n avec un sommet particulier appelé racine. Les $n+1$ sommets de Π_n sont représentés sur un cercle, la racine étant dessinée en bas. Une corde de Π_n est un segment entre deux sommets.

Définition 94. *Un diagramme de dissection de degré n est un ensemble de n cordes de Π_n qui ne s'intersectent pas et tel que le graphe formé ne contienne aucun cycle.*

Dans la suite, un diagramme D sera toujours un diagramme de dissection et l'ensemble de ses cordes sera noté $\mathcal{C}(D)$.

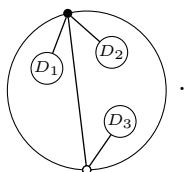
Lemme 95. *Le nombre de diagrammes de dissection de degré $n \in \mathbb{N}$ est donné par*

$$d_n = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n},$$

avec la relation de récurrence,

$$\forall n \geq 1, d_n = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 \geq 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 = n-1}} d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3}.$$

Démonstration. Rappelons les idées de la démonstration de ce lemme explicitées par Dupont dans [23, lemme 2.1.1]. Elle utilise le fait que pour un diagramme de dissection D de degré n donné, il existe un unique triplet (D_1, D_2, D_3) de diagrammes de degrés respectifs (i_1, i_2, i_3) tels que $i_1 + i_2 + i_3 = n - 1$ et D soit le diagramme



Le sommet coloré en noir désigne le premier sommet (toujours dans le sens indirect) lié à la racine. Cette façon de considérer les diagrammes permet, en posant $d(h) = \sum_{n \geq 0} d_n h^n$, d'obtenir

$$d(h) = 1 + hd(h)^3.$$

Par la suite, par inversion de Lagrange, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

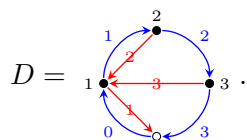
$$d_n = \frac{1}{n} \langle (1+h)^{3n}, h^{n-1} \rangle = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

où $\langle (1+h)^{3n}, h^{n-1} \rangle$ désigne le coefficient de h^{n-1} dans $(1+h)^{3n}$. □

Dans la suite, nous noterons \mathcal{D} l'espace vectoriel engendré par les diagrammes de dissection. La série formelle d ([84, séquence A001764]) rappelée dans la démonstration précédente est la série formelle de \mathcal{D} .

Pour un diagramme D de degré n , l'orientation dans le sens indirect permet de numéroter les sommets et d'orienter naturellement les côtés de Π_n (arcs de cercle entre les sommets) ainsi que les cordes de D . NB : On notera parfois 0 la racine.

Exemple.

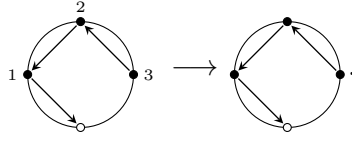


On peut donc effectuer l'identification

$$\mathcal{C}(D) \simeq \{1, \dots, n\} \simeq \mathcal{S}^+ \text{ où } \mathcal{S}^+ = \{\text{côtés de } \Pi_n\} \setminus \{\text{côté } 0\}.$$

Par la suite, pour ne pas alourdir les diagrammes, nous n'écrirons plus l'orientation des côtés, la numérotation des côtés, la numérotation des cordes et parfois même la numérotation

des sommets. En reprenant le diagramme D précédent, cela donne :



Un diagramme de dissection D et un sous-ensemble C de $\mathcal{C}(D)$ de cardinal p étant donnés, les cordes appartenant à C partitionnent le polygone $\Pi_{\deg(D)}$ en $p + 1$ faces. Pour toute face α , on note $\mathcal{S}_C(\alpha)$ les côtés de $\Pi_{\deg(D)}$ appartenant à la face α . On appelle alors $\mathcal{S}_C^+(D)$ l'ensemble $\mathcal{S}_C^+(D) = \sqcup_{\alpha} \mathcal{S}_C^+(\alpha)$ où $\mathcal{S}_C^+(\alpha) = \mathcal{S}_C(\alpha) \setminus \{\min(\mathcal{S}_C(\alpha))\}$.

Proposition 96. *Définissons sur \mathcal{H}_D deux opérations; un produit m , qui est l'union disjointe, et un coproduit Δ d'extraction-contraction. On a alors :*

$$m : \begin{cases} \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_D & \longrightarrow \mathcal{H}_D \\ D_1 \otimes D_2 & \mapsto D_1 D_2 \end{cases}$$

et

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{H}_D & \longrightarrow \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_D \\ D & \mapsto \sum_{C \subset \mathcal{C}(D)} x^{k_C(D)} q_C(D) \otimes r_C(D) \end{cases}$$

où

1. $x \in \mathbb{K}$ est un scalaire,
2. $q_C(D)$ est le produit de diagrammes obtenu après contraction des cordes contenues dans C ,
3. $r_C(D)$ est le diagramme obtenu en conservant les cordes contenues dans C et en contractant les côtés de $\Pi_{\deg(D)}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}_C^+(D)$,
4. $k_C(D)$ est le nombre de changements d'orientation nécessaires sur les cordes contenues dans C pour orienter $r_C(D)$.

On appelle $1_{\mathcal{H}_D}$ l'unité de \mathcal{H}_D et ε sa co-unité. L'espace $(\mathcal{H}_D, m, 1_{\mathcal{H}_D}, \Delta, \varepsilon)$ est alors une algèbre de Hopf.

Démonstration. Ceci est prouvé par Dupont dans [23, proposition 2.1.11]. □

Exemple. Considérons le diagramme de dissection $D = \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array}$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \otimes 1 + \left(x \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right) \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \otimes \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} + (1+x) \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right) + 1 \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \circ \end{array} \end{aligned}$$

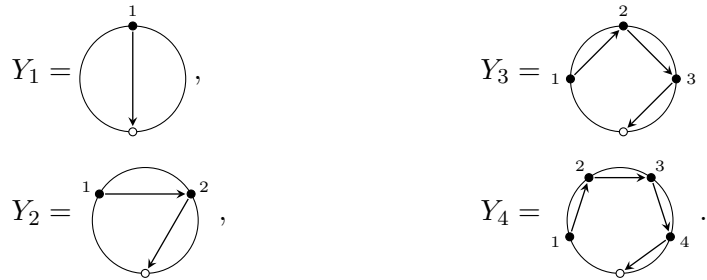
3.1.2 Echelles et corolles : deux sous-algèbres de Hopf de \mathcal{H}_D

Dupont [23, exemples 2.1.14] présente deux familles de diagrammes de dissection dont le coproduit est remarquable : les échelles et les corolles. En fait, ces deux familles forment deux sous-algèbres de Hopf chacune isomorphe à une algèbre de Hopf de coordonnées d'un groupe. Nous rappellerons donc la définition de ces deux familles et expliciterons l'algèbre de Hopf des coordonnées avec laquelle elle est isomorphe.

Echelles et algèbre de Hopf des fonctions symétriques

Soit n un entier naturel non nul. L'échelle de degré n est le diagramme de dissection noté Y_n , de degré n , défini par : pour tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, la corde i rend les sommets i et $i + 1$ voisins et la corde n rend le sommet n et la racine voisins. L'échelle de degré 0 est le diagramme vide *i.e.* $Y_0 = 1$.

Exemples. Donnons en exemples les échelles de degré 1, 2, 3 et 4.



Pour tout entier naturel n l'évaluation du coproduit en Y_n vaut :

$$\Delta(Y_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Y_k \otimes Y_{n-k}.$$

Il est donc immédiat que l'espace engendré par les unions disjointes d'échelles forme une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{H}_D . On la note \mathcal{E}_Y . Dupont [23, exemples 2.1.14, 1] note la ressemblance entre le coproduit de \mathcal{E}_Y et celui des fonctions symétriques vues comme algèbre de Hopf de coordonnées d'un groupe. On explicite un isomorphisme entre les deux algèbres de Hopf.

Considérons le groupe $G_0 = \langle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n h^n \in \mathbb{K}[[h]] \rangle$ engendré par les séries formelles de constante égale à 1 et muni du produit habituel. Pour tout entier naturel n non nul on appelle

fonction de n -ième coordonnée la fonction Σ_n définie par : $\Sigma_n : \begin{cases} \mathbb{K}[[h]] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ Q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n h^n & \longmapsto q_n. \end{cases}$

On s'intéresse à l'algèbre de Hopf $Sym = \mathbb{K}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots]$ munie de son produit habituel et du coproduit Δ_{G_0} défini par : pour toute fonction $f \in Sym$ et tous les éléments P et Q de G_0 , $\Delta_{G_0}(f)(P \otimes Q) = f(PQ)$.

Proposition 97. *Les algèbres de Hopf \mathcal{E}_Y et Sym sont isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de considérer le morphisme d'algèbres de Hopf ω_1 défini par :

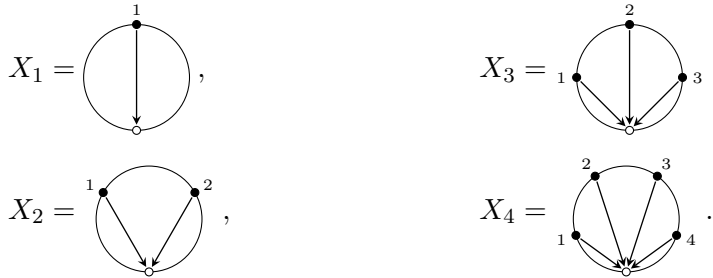
$$\omega_1 : \begin{cases} Sym & \longrightarrow \mathcal{E}_Y \\ \Sigma_n & \longmapsto \frac{1}{n!} Y_n. \end{cases}$$

□

Corolles et algèbre de Hopf de Faà di Bruno

La deuxième famille remarquable présentée par Dupont est celle des corolles. Pour tout entier naturel non nul n , la corolle de degré n est l'unique diagramme de dissection de degré n , noté X_n , rendant tous ses sommets voisins avec la racine. La corolle X_0 de degré 0 est la corolle vide *i.e.* $X_0 = 1$.

Exemples. Donnons les corolles non vides de degré inférieur ou égal à 4.



Le coproduit évalué en la corolle de degré n est donné par :

$$\Delta(X_n) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{i_0 + \dots + i_k = n-k \\ i_j \geq 0}} X_{i_0} \dots X_{i_k} \right) \otimes X_k.$$

Il est donc immédiat que l'espace engendré par les unions disjointes de corolles forme une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{H}_D . On la note \mathcal{C}_X .

Rappelons maintenant la construction de l'algèbre de Hopf de Faà di Bruno. On considère le groupe $G_1 = \langle h + \sum_{n=1}^{\infty} q_n h^{n+1} \in \mathbb{K}[[h]] \rangle$ engendré par les séries formelles de constante nulle, tangentes à l'identité, muni de la composition habituelle \circ des séries formelles. Pour tout entier naturel n non nul on appelle toujours fonction de n -ième coordonnée la fonction Σ_n définie

$$\text{par : } \Sigma_n : \begin{cases} \mathbb{K}[[h]] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ Q = h + \sum_{n=1}^{\infty} q_n h^{n+1} & \longmapsto q_n. \end{cases} \quad \text{On s'intéresse maintenant à l'algèbre de Hopf}$$

$\mathcal{H}_{FdB} = \mathbb{K}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots]$ munie de son produit habituel et du coproduit Δ_{G_1} défini par : pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_{FdB}$ et tous les éléments P et Q de G_1 , $\Delta_{G_1}(f)(P \otimes Q) = f(Q \circ P)$. Cette dernière est l'algèbre de Hopf de Faà di Bruno.

Proposition 98. *Les algèbres de Hopf \mathcal{C}_X et \mathcal{H}_{FdB} sont isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de considérer le morphisme d'algèbres de Hopf ω_2 défini par :

$$\omega_2 : \begin{cases} \mathcal{H}_{FdB} & \longrightarrow \mathcal{C}_X \\ \Sigma_n & \mapsto X_n. \end{cases}$$

□

3.1.3 Etude de la coliberté de \mathcal{H}_D ; éléments primitifs de degré inférieur à 3

L'objectif de cette section est d'étudier la coliberté de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D . Déterminons d'abord, quel que soit le scalaire $x \in \mathbb{K}$, une base de l'espace vectoriel $\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_2$ (respectivement $\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_3$) des éléments primitifs de degré 2 (respectivement de degré 3). Ceci ne permettra pas de conclure sur la coliberté.

Notons $F_{\mathcal{H}_D}$ la série formelle de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection. Par définition, $F_{\mathcal{H}_D}(h) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-h^n)^{d_n}}$ où, pour chaque entier n , l'entier d_n est le nombre de diagrammes de dissection de degré n . Si \mathcal{H}_D est colibre, alors la série formelle de primitifs de \mathcal{H}_D notée $F_{\text{Prim}(\mathcal{H}_D)}$ vérifie la relation : $F_{\text{Prim}(\mathcal{H}_D)} = 1 - \frac{1}{F_{\mathcal{H}_D}}$. Sous l'hypothèse de coliberté, on obtient donc :

$$F_{\text{Prim}(\mathcal{H}_D)}(h) = h + 3h^2 + 9h^3 + 40h^4 + 185h^5 + \dots \quad (3.1)$$

Essayons de voir si les dimensions des espaces vectoriels engendrés par les éléments primitifs de degré 2 et 3 contredisent cette hypothèse. Commençons d'abord par donner une base de $\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_2$. On a $\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_2 = \text{Vect}(V_1, V_2, V_3)$ où (V_1, V_2, V_3) et le triplet de vecteurs indépendants :

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+x) \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \circ \end{array} - 2 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagup \\ \circ \end{array}, \\ V_2 &= \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagup \\ \circ \end{array}, \\ V_3 &= \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \diagdown \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \downarrow \\ \circ \end{array}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant aux primitifs de degré 3. Introduisons d'abord quelques notations.

Définition 99. On appelle \mathcal{D}^+ l'espace vectoriel engendré par les diagrammes de dissection non vides. Soit U un élément de \mathcal{H}_D .

1. On pose $l(U)$ sa projection sur \mathcal{D}^+ , $q(U)$ sa projection sur $(\mathcal{D}^+)^2$, $t(U)$ sa projection sur $(\mathcal{D}^+)^3$ et $r(U)$ la quantité $U - l(U) - q(U) - t(U)$.
2. On appelle partie linéaire de $\Delta(U)$ la projection de $\Delta(U)$ sur $\mathcal{D}^+ \otimes \mathcal{D}^+$. On la note $\delta(U)$.
3. La partie linéaire opposée de $\Delta(U)$ est notée $\delta^{op}(U)$ et représente la partie linéaire de $\nu \circ \Delta(U)$ où ν est la volte de \mathcal{H}_D .
4. On appelle partie quadratique de $\Delta(U)$ la projection de $\Delta(U)$ sur $(\mathcal{D}^+)^2 \otimes \mathcal{D}^+$. On la note $\mathcal{Q}(U)$.

5. La partie quadratique opposée de $\Delta(U)$ est notée $\mathcal{Q}^{op}(U)$ et est la partie quadratique $\nu \circ \Delta(U)$.

Lemme 100. Soit p un élément primitif de degré 3. Il s'écrit alors $p = l(p) + q(p) + t(p)$ et l'on a :

$$\begin{aligned} m \circ \delta(l(p)) &= -2q(p), \\ \mathcal{Q}(l(p)) &= 0, \\ t(p) &= k \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \text{ où } k \in \mathbb{K}, \\ m \circ \mathcal{Q}(t(p)) &= -3t(p). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit p un élément primitif de degré 3. On a l'égalité $m \circ \delta(l(p)) = -2q(p)$ par commutativité du produit de \mathcal{H}_D . Par définition de $t(p)$, comme p est de degré 3, il existe un

scalaire k dans \mathbb{K} tel que $t(p) = k \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}$. De même, il existe des scalaires k_1, k_2

et k_3 dans \mathbb{K} tels que $q(p) = k_1 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + k_2 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + k_3 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}$. On obtient donc que $\mathcal{Q}(t(p)) = \mathcal{Q}^{op}(t(p))$ et que $\mathcal{Q}(q(p)) = \mathcal{Q}^{op}(q(p))$. Ainsi $\mathcal{Q}(l(p)) = 0$. \square

Lemme 101. Soit p un élément de degré 3 et primitif. Il vient que $l(p)$ est un élément de $\text{Vect}(U_1, \dots, U_9)$ où U_1, \dots, U_9 sont les vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, & U_2 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - x^2 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \\ U_3 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, & U_4 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \\ U_5 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - (1+x) \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, & U_6 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \\ U_7 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, & U_8 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \quad U_9 = \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}. \end{aligned}$$

Proposition 102. Une base de $\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_3$ est alors donnée par la famille de vecteurs $\{V_1, \dots, V_9\}$ où :

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - (1+x) \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - (1+x^2) \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \\ &+ x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + (x^2+1) \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \\ V_2 &= \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - x^2 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + x \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} - (1+x)^2 \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + x(x-1) \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^2 \text{ (diagram)} + \frac{x^3 - x^2 + 5x + 1}{3} \text{ (diagram)}, \\
V_3 = & \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} - (x-2) \text{ (diagram)} + (x-1) \text{ (diagram)}, \\
V_4 = & \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} - (x-1) \text{ (diagram)} \\
& + (x-1) \text{ (diagram)}, \\
V_5 = & \text{ (diagram)} - (1+x) \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} - 2 \text{ (diagram)} + 2(1+x) \text{ (diagram)} \\
& - (1+x) \text{ (diagram)}, \\
V_6 = & \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)}, \\
V_7 = & \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} + (x-1) \text{ (diagram)} \\
& - (x-1) \text{ (diagram)}, \\
V_8 = & \text{ (diagram)} - 2 \text{ (diagram)} - \text{ (diagram)} + 2 \text{ (diagram)}, \\
V_9 = & \text{ (diagram)} - 3 \text{ (diagram)} + 2 \text{ (diagram)}.
\end{aligned}$$

Les bases obtenues pour les espaces vectoriels des éléments primitifs de degré 2 et 3 ne contredisent pas la formule 3.1. L'étude de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D a fourni l'occasion de la programmer en C++. Ce travail de programmation a été effectué en collaboration avec Jean Fromentin (*cf.* section B.3 de l'annexe B). Ce programme a permis d'établir l'absence de coliberté lorsque le paramètre x est égal à -1 . En effet, dans le cas $x = -1$, les dimensions des espaces vectoriels des éléments primitifs coïncident jusqu'en degré 4 mais en degré 5, une base comporte 187 vecteurs linéairement indépendants et non pas 185. Le cas $x = -1$ ne sert pas de modèle pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ car, pour $x = -2$, $\dim(\text{Prim}(\mathcal{H}_D)_5) = 185$.

Conjecture 103. *L'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D est colibre sauf pour un ensemble dénombrable de paramètres.*

3.1.4 Calcul de l'antipode

On cherche ici à déterminer une formule close pour l'antipode. Pour cela, il est nécessaire de comprendre le coproduit itéré. Grâce à la coassociativité, il suffit de s'intéresser aux morphismes du type $\Delta^k = (\Delta \otimes \underbrace{Id \otimes \cdots \otimes Id}_{k-1 \text{ fois}}) \circ \cdots \circ (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$ où k est un entier non nul. Une itération

du coproduit de ce type implique une succession de contractions et de restes. La contraction supprime des cordes donc modifie leur numérotation. Le reste modifie l'orientation des cordes et donc leur numérotation. Nous allons donc établir des fonctions permettant de conserver la numérotation des cordes.

Soient D un diagramme de dissection de degré non nul n et a une corde de D . Suivant la valeur de $q_{\{a\}}(D)$ on définit une fonction de renumérotation des cordes de $q_{\{a\}}(D)$. On observe deux cas.

1. Supposons d'abord que $q_{\{a\}}(D)$ soit un diagramme ; ce qui signifie que a rend le sommet n et la racine voisins ou qu'il existe un entier i de l'intervalle $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que a rende les sommets i et $i+1$ voisins. Posons s le numéro porté par a grâce à son orientation. On définit la fonction :

$$N_{s,D} : \begin{cases} \llbracket 1, n-1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto & \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < s, \\ \alpha + 1 & \text{si } \alpha \geq s. \end{cases} \end{cases}.$$

Par abus, la notation $q_{\{a\}}(D)$ représentera aussi le diagramme de dissection $q_{\{a\}}(D)$ dont les cordes sont renumérotées par $N_{s,D}$.

2. Supposons maintenant que $q_{\{a\}}(D)$ soit le produit de deux diagrammes D_1 (dont le côté numéro 0 est celui de D) et D_2 de degrés respectifs non nuls n_1 et n_2 . On a alors deux possibilités : soit il existe un entier j de l'intervalle $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$ tel que a rende le sommet j et la racine voisins, soit il existe un entier i de l'intervalle $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et un entier u de l'intervalle $\llbracket 2, n-i \rrbracket$ tels que a rende les sommets i et $i+u$ voisins. Trois cas s'offrent alors :

- (a) La corde a rend les sommets i et $i+u$ voisins et est numérotée par i (i est donc non nul). On a alors $n_1 = n-u$ et $n_2 = u-1$. On définit les fonctions de renumérotation suivantes :

$$N_{i,i+u,D_1} : \begin{cases} \llbracket 1, n-u \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto & \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < i, \\ \alpha + u & \text{si } \alpha \geq i. \end{cases} \end{cases}.$$

et

$$N_{i,i+u,D_2} : \begin{cases} \llbracket 1, u-1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto & \alpha + i. \end{cases}$$

- (b) La corde a rend les sommets i et $i+u$ voisins, est numérotée par $i+u$ et i est non nul. On a alors $n_1 = n-u$ et $n_2 = u-1$. On définit les fonctions de renumérotation suivantes :

$$N_{i+u,i,D_1} : \begin{cases} \llbracket 1, n-u \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto & \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \leq i, \\ \alpha + u & \text{si } \alpha \geq i+1. \end{cases} \end{cases}.$$

et

$$N_{i+u,i,D_2} : \begin{cases} \llbracket 1, u-1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto & \alpha + i. \end{cases}$$

- (c) La corde a rend le sommet j et la racine voisins (a est numérotée par j). On a alors

$n_1 = j - 1$ et $n_2 = n - j$. On définit les fonctions de renumérotation suivantes :

$$N_{0,j,D_1} : \begin{cases} \llbracket 1, j-1 \rrbracket & \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto \alpha \end{cases}$$

et

$$N_{0,j,D_2} : \begin{cases} \llbracket 1, n-j \rrbracket & \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ \alpha & \mapsto \alpha + u. \end{cases}$$

La notation $q_{\{a\}}(D)$ représentera également le produit de diagrammes $q_{\{a\}}(D)$ dont les cordes sont renumérotées par $N_{i,i+u,D_1}$ et $N_{i,i+u,D_2}$ ou, N_{i+u,i,D_1} et N_{i+u,i,D_2} ou, N_{0,j,D_1} et N_{0,j,D_2} suivant le numéro de la corde a .

Considérons maintenant un diagramme de dissection D de degré non nul n et un ensemble non vide $C = \{i_1, \dots, i_p\}$ inclus dans l'ensemble $\mathcal{C}(D) = \{1, \dots, n\}$ des cordes de D . On sait que contracter toutes les cordes appartenant à C revient à contracter dans D chaque corde successivement. On continuera donc d'appeler $q_C(D)$ l'élément $q_C(D)$ de \mathcal{H}_D dont les cordes ont été successivement renumérotées par les fonctions précédentes.

Proposition 104. *Soient n un entier naturel non nul et D un diagramme de dissection de degré n . La valeur de l'antipode S en le diagramme D est :*

$$S(D) = \sum_{s=1}^n (-1)^s \sum_{P \in \Pi_D(s)} x^{k_P(D)} \prod_{i=1}^s r_{C_i}(q_{P_{i-1}}(D))$$

où

$\Pi_D(s)$ est l'ensemble des s -uplets (C_1, \dots, C_s) d'ensembles non vides formant une partition de $\mathcal{C}(D)$,

$P_0 = \emptyset$ pour tout élément P de $\Pi_D(s)$,

$P_i = \bigcup_{u=1}^i C_u$ pour tout élément P de $\Pi_D(s)$ et tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, s \rrbracket$,

$k_P(D) = k_{C_1}(q_{P_0}(D)) + \dots + k_{C_s}(q_{P_{s-1}}(D))$.

Si, pour tout entier p , l'on note X_p et Y_p la corolle et l'échelle de degré p respectivement, on a, en particulier :

$$S(X_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \sum_{\substack{i_{j,0} + \dots + i_{j,p_j} = \alpha_j \\ p_j = \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_k \\ j \in \{1, \dots, k-1\} \\ \forall m, i_{u,m} \geq 0}} X_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} X_{i_{j,0}} \dots X_{i_{j,p_j}},$$

$$S(Y_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \frac{k!}{u_1! \dots u_s!} Y_{\alpha_{u_1}}^{u_1} \dots Y_{\alpha_{u_s}}^{u_s},$$

où pour chaque k -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, partition de n , on a :

$$s = \text{Card}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\},$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= \max \{i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall j \leq i, \alpha_j = \alpha_1\}, \\
m_{l+1} &= \max \{i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall m_l + 1 \leq j \leq i, \alpha_j = \alpha_{(u_l+1)}\} \text{ pour } 0 \leq l \leq s-1, \\
u_1 &= m_1 \text{ et } u_{l+1} = m_{l+1} - m_l.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soient n un entier naturel non nul et D un diagramme de dissection de degré n . Pour tout entier s de l'intervalle $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ on pose

$$\tilde{\Pi}_D(s) = \{(C_1, \dots, C_{s+1}) \in \mathcal{C}(D)^{s+1}, (C_1, \dots, C_s) \in \Pi_D(s) \text{ ou } (C_1, \dots, C_{s+1}) \in \Pi_D(s+1)\}.$$

On utilise le fait que l'antipode soit l'inverse de l'identité pour le produit de convolution. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
S(D) &= - \sum_{\substack{C_1 \subset \mathcal{C}(D) \\ C_1 \neq \emptyset}} x^{k_{C_1}(D)} S(q_{C_1}(D)) r_{C_1}(D) \\
&= \sum_{\substack{C_1 \subset \mathcal{C}(D) \\ C_1 \neq \emptyset}} x^{k_{C_1}(D)} \sum_{\substack{C_2 \subset \mathcal{C}(D) \setminus C_1 \\ C_2 \neq \emptyset}} x^{k_{C_2}(q_{C_1}(D))} S(q_{C_1 \cup C_2}(D)) r_{C_2}(q_{C_1}(D)) r_{C_1}(D) \\
&= (-1)^u \sum_{P \in \tilde{\Pi}_D(u)} x^{k_P(D)} S(q_{P_u}(D)) \prod_{i=1}^u r_{C_i}(q_{P_{i-1}}(D)) \\
&= \sum_{s=1}^n (-1)^s \sum_{P \in \Pi_D(s)} x^{k_P(D)} \prod_{i=1}^s r_{C_i}(q_{P_{i-1}}(D)).
\end{aligned}$$

□

Exemples. Donnons quelques exemples de valeurs de l'antipode.

$$\begin{aligned}
S\left(\begin{array}{c} \circ \\ \nearrow \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ \searrow \\ \circ \end{array}\right) &= - \begin{array}{c} \circ \\ \nearrow \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ \searrow \\ \circ \end{array} + (1+x) \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \searrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \leftarrow \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \nearrow \\ \circ \end{array} \\
&\quad - (2x+3) \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \\
S\left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}\right) &= - \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} + 5 \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \searrow \\ \circ \end{array} - 5 \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array}.
\end{aligned}$$

Le programme Maxima suivant détermine, pour un entier naturel n non nul donné, la valeur de $S(Y_n)$.

```

antipodeYn(n) := block([res],
  if equal(n,0) then res:1
  else res:expand(-sum(combination(n,k)*
                      antipodeYn(k)*Y[n-k],k,0,n-1)),
  return(res)
);

```

Exemple. Donnons les valeurs de $S(Y_n)$ pour n compris entre 1 et 4.

n	$S(Y_n)$
1	$-Y_1$
2	$-Y_2 + 2Y_1^2$
3	$-Y_3 + 6Y_1Y_2 - 6Y_1^3$
4	$-Y_4 + 8Y_1Y_3 + 6Y_2^2 - 36Y_1^2Y_2 + 24Y_1^4$

TABLEAU 3.1 – Valeur de $S(Y_n)$ pour n compris entre 1 et 4.

Remarque. Regardons l’algèbre de Hopf de Faà di Bruno en termes d’algèbre de Hopf de coordonnées du groupe des difféomorphismes formels G_1 . Pour tout entier naturel n non nul, l’antipode S en la fonction coordonnée Σ_n est donné par :

$$\forall P \in G_1, S(\Sigma_n)(P) = \Sigma_n(P^{-1})$$

où P^{-1} est l’inverse de P pour la composition des séries formelles [35, section 4.3].

3.2 Diagrammes de dissection et arbres enracinés

L’objectif de cette section est d’étudier \mathcal{H}_D en s’appuyant sur des algèbres de Hopf d’arbres enracinés.

Un diagramme de dissection de degré n est naturellement associé à un arbre enraciné. Il suffit de considérer l’arbre enraciné inscrit dans son $(n + 1)$ -gone régulier. En toute rigueur, au vu de la nature du coproduit de \mathcal{H}_D , il est souhaitable de considérer l’arbre enraciné plan sous-jacent. Dans les faits, il n’est pas nécessaire de conserver le caractère plan pour conclure. Cela pousse donc à s’intéresser à une algèbre de Hopf d’arbres enracinés graduée par le nombre d’arêtes et non le nombre de sommets. On peut alors penser à l’algèbre de Hopf des arbres enracinés munie du produit de contraction introduite dans [10]. Malheureusement, le choix d’associer à un diagramme de dissection son arbre enraciné sous-jacent ne convient pas. Un tel morphisme ne respecte pas la structure de cogèbre. Le contre-exemple donné fournit également un contre-exemple dans le cas plan.

Il est plus judicieux de s’intéresser au dual gradué \mathcal{H}_D^{\otimes} de l’algèbre de Hopf des diagrammes de dissection. Dupont fait allusion à une structure pré-Lie sur l’espace de ses primitifs [23, remarque 2.1.15]. On s’intéresse donc à cette structure. Comme \mathcal{H}_D^{\otimes} est de plus isomorphe à l’algèbre enveloppante de ses primitifs \mathfrak{g}_D , il est possible d’appliquer le théorème de structure de Oudom et Guin [75, proposition 2.7 - théorème 2.12]. On construit l’unique morphisme γ pré-Lie de l’algèbre pré-Lie libre $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R}$ engendrée par \cdot vers \mathfrak{g}_D . On peut facilement déterminer que l’algèbre pré-Lie engendrée par le diagramme de degré 1 n’est pas libre et qu’elle n’engendre pas toute l’algèbre pré-Lie \mathfrak{g}_D . On étend γ en un morphisme d’algèbres de Hopf et on émet une conjecture sur son noyau.

3.2.1 Algèbres pré-Lie et théorème de structure de Oudom et Guin

Les algèbres pré-Lie (parfois appelées algèbres de Vinberg) ont été introduites en 1963 par Vinberg [92] dans l’étude des cônes homogènes convexes et par Gerstenhaber [39, section 2] en théorie des déformations. L’opérateur *PréLie* définissant les algèbres pré-Lie a été introduite et décrite en fonction de l’opérateur des arbres enracinés par Chapoton et Livernet [16, théorème 1.9]. Les auteurs donnent également une description de l’algèbre pré-Lie libre à un générateur

(et même à un nombre quelconque de générateurs) en termes d'arbres enracinés [16, corollaire 1.10]. Ceci leur permet d'établir, à isomorphisme près, la dualité entre l'algèbre de Connes et Kreimer [17] et l'algèbre de Grossman et Larson [42]. Foissy prouve que l'algèbre pré-Lie libre à un générateur est libre comme algèbre de Lie [28, théorème 8.4]. Chapoton, grâce à la théorie des opérades, démontre ce résultat pour toute algèbre pré-Lie libre [13, corollaire 5.3]. Il prouve également l'anticyclicité de l'opérade *PréLie* [14]. Livernet [54, théorème 3.4] établit la liberté des « algèbres de Hopf pré-Lie » munies de la relation de compatibilité $\Delta(x \circ y) = \Delta(x) \circ y + x \otimes y = x^{(1)} \circ y \otimes x^{(2)} + x^{(1)} \otimes x^{(2)} \circ y + x \otimes y$. Oudom et Guin [75, proposition 2.7 - théorème 2.12] construisent pour une algèbre pré-Lie \mathfrak{g} quelconque une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ceci généralise la construction de l'algèbre enveloppante de l'algèbre pré-Lie libre des arbres enracinés engendrée par \bullet (algèbre de Grossman et Larson). Loday et Ronco [58, théorèmes 5.3 et 5.8] montrent l'existence d'une structure pré-Lie pour les algèbres de Hopf combinatoires commutatives-associatives-libres droites. Une opérade peut être munie d'une structure pré-Lie. Burgunder, Delcroix-Oger et Manchon [9, théorème 3.1] montrent qu'une opérade n'est jamais libre en tant qu'algèbre pré-Lie. De nouvelles structures sont également définies. Mansuy définit l'opérade quadratique *Com-PréLie* et prend pour exemple l'algèbre des arbres enracinés munis à la fois du produit de greffe et de la greffe en la racine [66, section 4.2]. Foissy [33, définition 17 et théorème 20] présente l'algèbre *Com-préLie* libre à un générateur comme l'algèbre des arbres partitionnés munie de l'union disjointe et du produit de greffe. Comme autre structure, on peut également citer l'opérade quadratique *PostLie* introduite par Vallette [89, section A.2]. Une algèbre post-Lie \mathcal{A} est munie d'une opération binaire \circ et d'un crochet de Lie $\{-, -\}$ compatibles. Si $(\mathcal{A}, \{-, -\})$ est abélienne alors (\mathcal{A}, \circ) est une algèbre pré-Lie. La notion d'algèbre post-Lie est donc une généralisation de la notion d'algèbre pré-Lie.

Définition 105. Une algèbre pré-Lie à gauche est un couple (\mathfrak{g}, \circ) où \mathfrak{g} est un espace vectoriel et $\circ : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un produit interne avec les compatibilités suivantes : pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z = y \circ (x \circ z) - (y \circ x) \circ z.$$

Exemple. Prenons l'exemple classique de l'algèbre $\mathfrak{g} = \{P(X)\partial, P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ des dérivations de $\mathbb{K}[X]$ où ∂ désigne la dérivation par rapport à X . On définit le produit \circ par

$$\circ : \begin{cases} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \longrightarrow \mathfrak{g} \\ P(X)\partial \otimes Q(X)\partial & \longmapsto (P(X)\partial Q(X))\partial. \end{cases}$$

Le produit de deux dérivations $P(X)\partial$ et $Q(X)\partial$ n'est pas la composition habituelle des polynômes (\mathfrak{g} n'est pas stable sous cette opération) mais l'unique dérivation envoyant X sur $P(X)Q'(X)$. Soient $P(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$ des polynômes. On a :

$$P(X)\partial \circ (Q(X)\partial \circ R(X)\partial) - (P(X)\partial \circ Q(X)\partial) \circ R(X)\partial = P(X)Q(X)\partial^2 R(X)\partial.$$

Ceci est symétrique en $P(X)$ et $Q(X)$. La relation de compatibilité des algèbres pré-Lie est donc vérifiée.

Proposition 106. Soit (\mathfrak{g}, \circ) une algèbre pré-Lie. On définit le crochet $\{-, -\}$ par :

$$\{-, -\} : \begin{cases} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \longrightarrow \mathfrak{g} \\ x \otimes y & \longmapsto x \circ y - y \circ x. \end{cases}$$

Muni de ce crochet, \mathfrak{g} est une algèbre de Lie notée \mathfrak{g}_{Lie} .

Démonstration. L'antisymétrie du crochet est immédiate. Regardons la relation de Jacobi. Soient x, y et z des éléments de \mathfrak{g} . On a :

$$\begin{aligned} \{x, \{y, z\}\} + \{z, \{x, y\}\} + \{y, \{z, x\}\} &= x \circ (y \circ z) + (z \circ y) \circ x - x \circ (z \circ y) - (y \circ z) \circ x \\ &\quad + z \circ (x \circ y) + (y \circ x) \circ z - z \circ (y \circ x) - (x \circ y) \circ z \\ &\quad + y \circ (z \circ x) + (x \circ z) \circ y - y \circ (x \circ z) - (z \circ x) \circ y \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 107. *Soit \mathfrak{g} une algèbre pré-Lie. On considère les assertions suivantes :*

1. *L'algèbre pré-Lie \mathfrak{g} est libre.*
2. *L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est libre.*
3. *L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est libre.*

L'assertion 1 implique l'assertion 2. Les assertions 2 et 3 sont équivalentes.

Démonstration. Soit \mathfrak{g} une algèbre pré-Lie.

1. L'assertion (1 \implies 2) a été démontrée par Chapoton [13, corollaire 5.3].
2. Soit V un système minimal de générateurs de \mathfrak{g} . Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie libre alors l'algèbre tensorielle $T\langle V \rangle$ vérifie les caractéristiques de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{g})$. Par unicité de l'algèbre enveloppante, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{g}) \simeq T\langle V \rangle$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{g})$ est donc libre. Si l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{g})$ est libre alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathfrak{g}) \simeq T\langle V \rangle$. En utilisant la propriété universelle des algèbres enveloppantes et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on obtient que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est libre. On pourra se référer au livre de Reutenauer [81, chapitre 0] sur les algèbres de Lie libres.

□

Remarque. L'implication (2 \implies 1) est fausse. En effet, considérons l'algèbre tensorielle $T\langle \text{Vect}(z_1, \dots, z_n) \rangle$ munie du produit de concaténation, du coproduit rendant z_i primitif pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et graduée par la longueur des mots. On appelle $\{-, -\}$ le crochet de Lie associé au produit de concaténation. L'algèbre de Lie $\text{Prim}(T\langle \text{Vect}(z_1, \dots, z_n) \rangle)$ est libre. Pour tous les éléments homogènes $u, v \in T\langle \text{Vect}(z_1, \dots, z_n) \rangle$, on pose $u \circ v = \frac{\deg(v)}{\deg(u) + \deg(v)} \{u, v\}$. Le produit \circ définit une structure d'algèbre pré-Lie à gauche sur $\text{Prim}(T\langle \text{Vect}(z_1, \dots, z_n) \rangle)$. Elle n'est pas libre puisque pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_i \circ z_i = 0$.

Définition 108. *Soit (\mathfrak{g}, \circ) une algèbre pré-Lie. On considère l'algèbre de Hopf symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ munie de son coproduit Δ habituel. On étend le produit \circ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Soient donc des éléments a, b, c et x tels que $a, b, c \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$. On pose alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \circ a = a, \\ a \circ 1 = \varepsilon(a)1, \\ (xa) \circ b = x \circ (a \circ b) - (x \circ a) \circ b, \\ a \circ (bc) = \sum_a (a^{(1)} \circ b)(a^{(2)} \circ c). \end{array} \right.$$

Sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, on définit un produit \star par :

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \\ a \otimes b \mapsto a \star b = \sum_a a^{(1)}(a^{(2)} \circ b). \end{array} \right.$$

Théorème 109. *L'espace $(\mathcal{S}(\mathfrak{g}), \star, \Delta)$ est une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_{Lie} .*

Démonstration. Ce théorème a été établi et démontré par Oudom et Guin dans [75, proposition 2.7 - théorème 2.12]. \square

3.2.2 Algèbres de Hopf d'arbres enracinés

Algèbre des arbres enracinés de Calaque, Ebrahimi-Fard et Manchon

Calaque, Ebrahimi-Fard et Manchon [10, sections 4.1 et 4.2] introduisent une algèbre de Hopf d'arbres enracinés graduée par le nombre d'arêtes et non pas par le nombre de sommets. Manchon et Saïdi [65, théorème 13] réutilisent cette structure afin d'explicitier l'interaction entre la loi pré-Lie d'insertion [10, section 4.3] et la loi-pré-Lie de greffe. Mansuy [66, section 4.3] donne une version non commutative de l'algèbre de Hopf de contraction des arbres enracinés. Rappelons la définition de l'algèbre de Hopf de Calaque, Ebrahimi-Fard et Manchon. Pour cela, considérons l'algèbre $\mathbb{K}[\mathcal{T}_R]$ engendrée par les forêts enracinées. Le produit de deux forêts enracinées F_1 et F_2 est l'union disjointe de F_1 et F_2 .

Définition 110. *Soient F une forêt enracinée différente de \cdot , $E(F)$ l'ensemble de ses arêtes et e un sous-ensemble de $E(F)$. On appelle*

1. $Part_e(F)$ la forêt enracinée obtenue en conservant tous les sommets de F et les arêtes de e ,
2. $Cont_e(F)$ la forêt enracinée obtenue en contractant les arêtes de e et en identifiant les extrémités des arêtes appartenant à e .

Exemple. Soit t l'arbre enraciné $t = \mathring{\vee}$. L'ensemble e correspond aux arêtes colorées en rouge. On a alors : $Part_e(t) = \cdot \mathring{\vee}$ et $Cont_e(F) = \mathring{\cdot}$.

On considère $\mathcal{F}_R^{(C)}$ l'algèbre $\mathbb{K}[\mathcal{T}_R]$ quotientée par l'idéal $\langle \cdot, -1 \rangle$. Pour toute forêt enracinée F et tout sous-ensemble e de $E(F)$, on continue d'appeler $Part_e(F)$ (respectivement $Cont_e(F)$) l'image de $Part_e(F)$ (respectivement $Cont_e(F)$) dans $\mathcal{F}_R^{(C)}$.

Théorème 111. *Le triplet $(\mathcal{F}_R^{(C)}, m, \Delta)$ où m désigne l'union disjointe et Δ est l'opération telle que pour toute forêt F , $\Delta(F) = \sum_{e \subset E(F)} Part_e(F) \otimes Cont_e(F)$, est une algèbre de Hopf.*

Démonstration. Ceci est prouvé dans [10, section 4.1]. \square

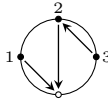
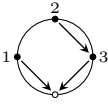
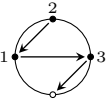
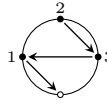
Exemple. Considérons toujours l'arbre enraciné $\mathring{\vee}$. On a :

$$\Delta\left(\mathring{\vee}\right) = \mathring{\vee} \otimes 1 + \mathring{\cdot} \otimes \mathring{\cdot} + 2\mathring{\cdot} \otimes \mathring{\vee} + \mathring{\cdot} \otimes \mathring{\cdot} + \mathring{\vee} \otimes \mathring{\cdot} + \mathring{\cdot} \otimes \mathring{\cdot} + 1 \otimes \mathring{\vee}.$$

Soit $x \in \mathbb{K}$ un scalaire. On appelle κ le morphisme d'algèbres défini par :

$$\kappa : \begin{cases} \mathcal{H}_D & \longrightarrow \mathbb{K}[\mathcal{T}_R] \\ D \text{ diagramme} & \longmapsto t_D \text{ arbre sous-jacent à } D. \end{cases}$$

L'application κ n'est pas un morphisme de cogèbres. En effet, considérons les diagrammes de

dissection $D_1 =$  , $D_2 =$  , $D_3 =$  et $D_4 =$  . On a alors

$$\kappa(D_1) = \mathcal{V} = \kappa(D_2) \text{ et } \kappa(D_3) = \mathcal{V} = \kappa(D_4).$$

Or,

$$(\kappa \otimes \kappa) \circ \Delta(D_1) = \mathcal{V} \otimes 1 + \left(x \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) \otimes \mathcal{V} + \mathcal{V} \otimes \left((1+x) \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) + 1 \otimes \mathcal{V},$$

$$(\kappa \otimes \kappa) \circ \Delta(D_2) = \mathcal{V} \otimes 1 + \left(2 \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) \otimes \mathcal{V} + \mathcal{V} \otimes \left(2 \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) + 1 \otimes \mathcal{V}$$

$$(\kappa \otimes \kappa) \circ \Delta(D_3) = \mathcal{V} \otimes 1 + \left((1+x) \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) \otimes \mathcal{V} + (2+x) \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} + 1 \otimes \mathcal{V},$$

$$(\kappa \otimes \kappa) \circ \Delta(D_4) = \mathcal{V} \otimes 1 + \left(2 \mathcal{V} + x \mathcal{V} \right) \otimes \mathcal{V} + \mathcal{V} \otimes \left((1+x) \mathcal{V} + \mathcal{V} \right) + 1 \otimes \mathcal{V}.$$

Remarque. Le contre-exemple précédent montre que, quelle que soit l'algèbre de Hopf de forêts enracinées, quel que soit le paramètre $x \in \mathbb{K}$ de l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D , l'application envoyant un diagramme de dissection sur son arbre enraciné plan ou non plan sous-jacent n'est pas un morphisme de cogèbres.

Algèbre de Hopf \mathcal{H}_{GL} des arbres enracinés de Grossman et Larson

L'algèbre de Hopf de Grossman et Larson, notée \mathcal{H}_{GL} , a été introduite dans [42] comme outil en théorie des opérateurs différentiels [41, 43]. Elle est graduée, connexe, cocommutative et non commutative. Par le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, elle est donc isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses primitifs. Panaite [76] montre l'existence d'un lien entre \mathcal{H}_{GL} et le dual gradué $\mathcal{H}_{CK}^{\otimes}$ de l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer (*cf.* section 1.2.1 du chapitre 1). Il est corrigé par Hoffman [45]. Les deux algèbres de Hopf ne sont pas égales mais isomorphes en caractéristique nulle. Dans $\mathcal{H}_{CK}^{\otimes}$ les greffes font apparaître des coefficients de symétrie non présents dans \mathcal{H}_{GL} . Chapoton et Livernet [16, corollaire 1.10] montrent que l'algèbre pré-Lie des arbres sous-jacente à l'algèbre de Grossman et Larson est libre et donnent ainsi une autre preuve de l'existence d'un isomorphisme entre \mathcal{H}_{GL} et $\mathcal{H}_{CK}^{\otimes}$. Oudom et Guin [75, proposition 2.7 - théorème 2.12] utilisent le cas de \mathcal{H}_{GL} comme modèle pour établir un théorème de structure concernant l'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie.

Rappelons la définition de l'algèbre de Grossman et Larson. Nous adoptons le même point de vue que Oudom et Guin. Posons $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R} = \text{Vect}(t, t \in \mathcal{T}_R)$.

Définition 112. Sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R}$ on définit le produit suivant :

$$\circ : \begin{cases} \mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R} \otimes \mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R} \\ t_1 \otimes t_2 & \longmapsto & \sum_{s \in V(t_2)} \tau_{t_1, t_2, s} \end{cases}$$

où $\tau_{t_1, t_2, s}$ est l'arbre enraciné obtenu en greffant t_1 sur le sommet s de t_2 .

Théorème 113. *L'algèbre $(\mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R}, \circ)$ est l'algèbre pré-Lie à gauche libre engendrée par l'arbre enraciné \cdot .*

Démonstration. Il s'agit du corollaire 1.10 établi et démontré par Chapoton et Livernet dans [16]. \square

Exemples. Considérons les arbres $t_1 = \downarrow$ et $t_2 = \downarrow\downarrow$. On a :

$$\downarrow \circ \downarrow = \downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow, \quad \downarrow \circ \downarrow\downarrow = \downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow.$$

Proposition 114. *Sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R})$, le produit \star , obtenu grâce au produit pré-Lie \circ et à la construction de Oudom et Guin, est donné par :*

$$\star : \begin{cases} \mathcal{H}_{\text{GL}} \otimes \mathcal{H}_{\text{GL}} & \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{GL}} \\ t_1 \dots t_n \otimes t_{n+1} \dots t_{n+m} & \longmapsto \sum_{\sigma: I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow V(t_{n+1} \dots t_{n+m})} (t_1 \dots t_n, t_{n+1} \dots t_{n+m}, \sigma) \end{cases}$$

où

$V(t_{n+1} \dots t_{n+m})$ est l'ensemble des sommets de la forêt $t_{n+1} \dots t_{n+m}$,

$(t_1 \dots t_n, t_{n+1} \dots t_{n+m}, \sigma)$ désigne la forêt enracinée obtenue en greffant l'arbre t_i sur le sommet $\sigma(i)$ pour tout élément i de I .

Exemples. Considérons les arbres enracinés \cdot , \downarrow et $\downarrow\downarrow$. On a :

$$\begin{aligned} \downarrow\downarrow \star \downarrow &= \downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow, \\ \cdot \star \downarrow &= 2 \downarrow\cdot + 2 \downarrow\cdot + \downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow + 2 \downarrow\downarrow + \dots \downarrow, \\ \downarrow \star \cdot &= 2 \downarrow\cdot + \dots \downarrow. \end{aligned}$$

Algèbre de Hopf quotient des arbres sous-binaires

Définition 115. 1. *Un arbre enraciné t est dit sous-binaire si tous ses sommets sont de degré au plus 2. L'ensemble des arbres enracinés sous-binaires est noté \mathcal{T}_{SB} .*

2. *Une forêt enracinée F est dite sous-binaire si tous les arbres enracinés qui la composent sont sous-binaires. L'ensemble des forêts enracinées sous-binaires est noté \mathcal{F}_{SB} .*

Proposition 116. *Considérons l'espace vectoriel défini par $\mathcal{I} = \text{Vect}(F, F \in \mathcal{F}_R \setminus \mathcal{F}_{\text{SB}})$. C'est un bi-idéal de Hopf de \mathcal{H}_{GL} .*

Démonstration. Commençons par montrer que \mathcal{I} est un idéal. Pour cela, il suffit de montrer que, si t et τ sont des éléments de $\mathcal{T}_R \setminus \mathcal{T}_{\text{SB}}$ et \mathcal{T}_R respectivement, alors $t \star \tau$ et $\tau \star t$ sont des éléments de \mathcal{I} . Ceci est immédiat puisque $t \star \tau = t \circ \tau + t\tau$ et que $\tau \star t = \tau \circ t + \tau t$. De plus, \mathcal{I} est un co-idéal puisque pour tout arbre enraciné t , l'élément t est primitif. \square

Proposition 117. *L'espace vectoriel $\text{SBT} = \text{Vect}(F, F \in \mathcal{F}_{\text{SB}})$ est une algèbre de Hopf quotient de \mathcal{H}_{GL} .*

Démonstration. Il suffit de considérer la surjection canonique

$$\Pi_{\mathbf{SBT}} : \begin{cases} \mathcal{H}_{\text{GL}} & \longrightarrow \mathbf{SBT} \\ F \in \mathcal{F}_{\text{R}} & \mapsto \begin{cases} F & \text{si } F \in \mathcal{F}_{\text{SB}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On a alors que le biidéal de Hopf \mathcal{I} est le noyau de $\Pi_{\mathbf{SBT}}$. □

Remarque. De manière duale, l'espace vectoriel **SBT** des forêts enracinées sous-binaires peut être vu comme une sous-algèbre de Hopf de celle des forêts enracinées de Connes et Kreimer.

3.2.3 Algèbre de Hopf duale des diagrammes de dissection

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ étant graduée et connexe, son dual gradué $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ est une algèbre de Hopf graduée connexe. L'objectif de cette sous-section est donc d'étudier sa structure. Jusqu'à la définition du crochet de Lie $[-, -]$, nous suivons la même démarche que dans [26, chapitre 7, section 7.3]

Proposition 118. *L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$ où $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est l'algèbre de Lie $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes})$ des primitifs de $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$.*

Démonstration. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ étant graduée, connexe et cocommutative, on obtient le résultat grâce au théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore. □



Notons $(Z_{F_D})_{F_D \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}}$ la base duale des diagrammes de dissection. On sait que l'espace des générateurs de l'algèbre de Lie $\text{Prim}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes})$ est $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} = ((1) + \text{Ker}(\varepsilon))^{\perp}$. Donc une base de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est donnée par $(Z_D)_{D \in \mathcal{D}}$. Pour connaître les opérations de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$, il suffit de les définir pour Z_D avec un diagramme de dissection D quelconque. Pour le coproduit, c'est très simple puisque, pour tout D , l'élément Z_D est primitif. En ce qui concerne le produit, on a la proposition suivante :

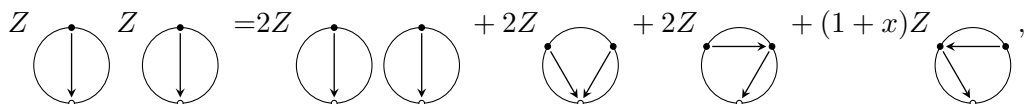
Proposition 119. *Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection non vides de degrés respectifs n_1 et n_2 et x un scalaire. Le produit de Z_{D_1} par Z_{D_2} est défini par :*

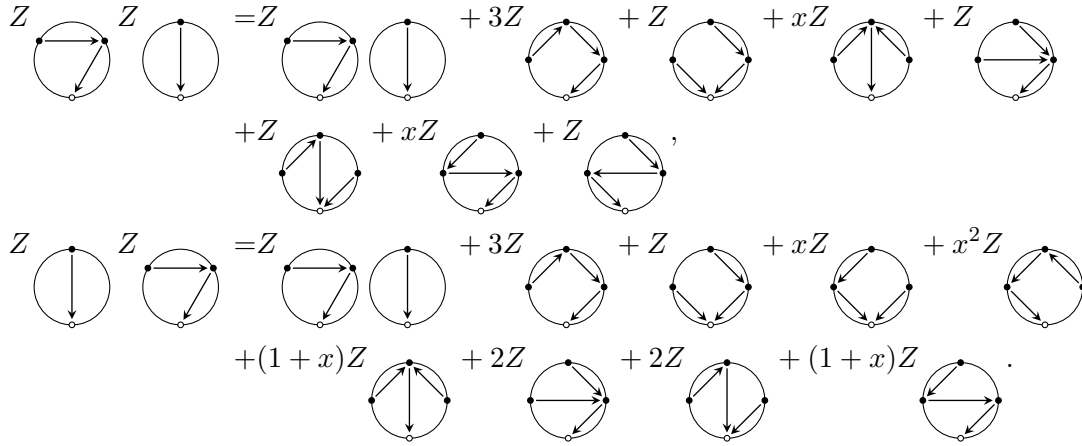
$$Z_{D_1} Z_{D_2} = (1 + \delta_{D_1, D_2}) Z_{D_1 D_2} + \sum_{D \in \mathcal{D}} c(D_1, D_2; D) Z_D$$

où pour tout diagramme de dissection D , le coefficient $c(D_1, D_2; D)$ est un polynôme Q_D , dépendant du diagramme D et évalué en x . Plus précisément, si on note n l'entier $n_1 + n_2$, on a :

$$Q_D(x) = (Z_{D_1} \otimes Z_{D_2}) \circ \Delta(D).$$



Exemples. Considérons les diagrammes  et . On a :

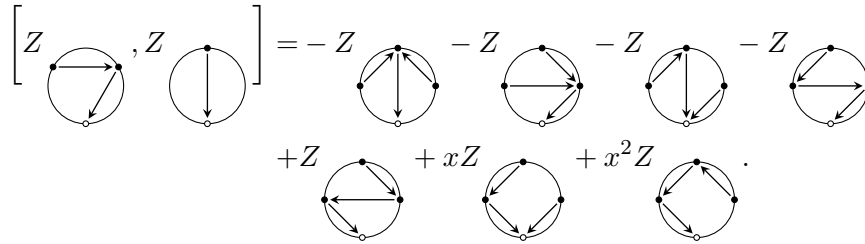
$$Z \otimes Z = 2Z \otimes Z + 2Z \otimes Z + 2Z \otimes Z + (1+x)Z \otimes Z,$$




Corollaire 120. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} = \text{Prim}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes})$ muni du crochet $[-, -]$ défini par : pour tous les diagrammes de dissection D_1 et D_2 ,

$$[Z_{D_1}, Z_{D_2}] = \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(c(D_1, D_2; D) - c(D_2, D_1; D) \right) Z_D.$$

Exemple. Considérons toujours les diagrammes  et . On a :



L'objectif est maintenant de définir une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ et munie d'une structure de Oudom et Guin afin de pouvoir établir un morphisme entre \mathcal{H}_{GL} et $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ grâce à une structure pré-Lie.

Proposition 121. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} = \text{Prim}(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$, muni du produit \circ défini par :

$$\circ : \begin{cases} \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \otimes \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} & \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \\ Z_{D_1} \otimes Z_{D_2} & \longmapsto \sum_{D \in \mathcal{D}} c(D_1, D_2; D) Z_D, \end{cases}$$


est une algèbre pré-Lie à gauche.

Démonstration. Pour cela, rappelons la notion d'algèbre de Hopf combinatoire commutative-associative-libre droite introduite par Loday et Ronco dans [58, définitions 3.16, 4.1, 4.16 et 5.7]. Une algèbre de Hopf combinatoire commutative-associative-libre droite est une algèbre de Hopf (H, m, Δ) associative commutative libre engendrée par $\text{Gén}(H)$ et telle que, pour $h \in \text{Gén}(H)$, on ait $\Delta(h) = \sum_h h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ avec $h^{(2)} \in \text{Gén}(H)$. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ est donc une algèbre de

Hopf combinatoire commutative-associative-libre droite. D'après Loday et Ronco [58, théorèmes 5.3 et 5.8], le couple $(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}, \circ)$ est une algèbre pré-Lie à gauche. \square

Proposition 122. *On considère l'algèbre de Hopf $\mathcal{S} = (\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}), \star, \Delta)$ où $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$ est l'algèbre symétrique des diagrammes de dissection, le produit \star est construit à partir du produit pré-Lie \circ défini sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et de la définition 108, le coproduit Δ est le coproduit habituel de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$. Les algèbres de Hopf \mathcal{S} et $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ sont isomorphes.*

Démonstration. Ceci est l'application directe du théorème 109 et de la proposition 118. Pour la suite, on identifiera $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ à l'algèbre de Hopf obtenue par le théorème de structure de Oudom et Guin. \square

Lemme 123. *L'algèbre de pré-Lie engendrée par le diagramme  est un sous-objet non trivial de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. Pour tout entier naturel n le nombre de forêts enracinées de degré n est au plus égal au n -ième nombre de Catalan C_n . Notons d_n le nombre de diagrammes de degré n . On a :

$$\frac{d_n}{C_n} = \frac{(n+1) \binom{3n}{n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} = \frac{(3n)!(n+1)!}{(2n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+2) \dots (3n)}{(n+2) \dots (2n)}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, le nombre de diagrammes de dissection de degré n est strictement supérieur au nombre de forêts enracinées de degré n . \square

3.2.4 Définition d'un morphisme d'algèbres de Hopf de \mathcal{H}_{GL} vers $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$

On cherche ici à décrire un morphisme d'algèbres de Hopf entre les arbres enracinés de Grossman et Larson et le dual de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection. Pour cela, nous allons utiliser la structure pré-Lie des deux algèbres, les structures de Grossman et Larson et de $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ qui en découlent ainsi qu'un procédé d'insertion de cordes. Dans un souci de simplification d'écriture, pour toute union disjointe de diagrammes de dissection U , l'élément Z_U de $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ sera simplement noté U .

Remarque. Si $f : \mathcal{H}_{\text{GL}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{D}}^{\otimes}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf graduées homogène de degré $k \geq 0$ alors, d'après le lemme 123, ce morphisme n'est pas surjectif.

Définition 124. *On appelle γ l'unique morphisme pré-Lie suivant :*

$$\gamma : \begin{cases} \mathfrak{g}_{\mathcal{T}_R} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \\ \cdot & \longmapsto & \text{Diagramme d'un cercle avec une flèche verticale descendante à l'intérieur.} \end{cases}$$

Il reste maintenant à prolonger le morphisme pré-Lie γ en morphisme d'algèbres de Hopf. Pour cela, rappelons d'abord la définition de l'opérateur de greffe.

Définition 125. L'opérateur de greffe noté B est défini par :

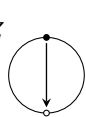
$$B : \begin{cases} \mathbb{K}[\mathcal{T}_R] & \longrightarrow \mathfrak{g}\mathcal{T}_R \\ t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_R & \mapsto \text{l'arbre obtenu en greffant } t_1, \dots, t_n \text{ sur une racine commune.} \end{cases}$$

Exemple. $B(t_1, t_2) = {}^{t_1}\mathbf{V}^{t_2} = {}^{t_2}\mathbf{V}^{t_1} = B(t_2, t_1)$.

Proposition 126. L'unique prolongement φ de γ , construit grâce à la structure de Oudom et Guin de \mathcal{H}_{GL} , est défini par :


$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{H}_{GL} & \longrightarrow \mathcal{H}_D^{\otimes} \\ t_1 \dots t_n & \mapsto \varphi(t_1) \dots \varphi(t_n) \\ t & \mapsto L(\varphi(t_1) \dots \varphi(t_k)) \end{cases}$$

où $t_1 \dots t_k$ est la forêt telle que $t = B(t_1 \dots t_k)$ et L désigne l'application linéaire suivante :

$$L : \begin{cases} \mathcal{H}_D & \longrightarrow \mathcal{D} \\ D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D} & \mapsto \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 \dots D_n} \circ Z \right) (G)G. \end{cases}$$


Corollaire 127. Soit t un arbre enraciné. Si t possède au moins un sommet de fertilité strictement supérieure à 2 alors $\gamma(Z_t) = 0$. Le morphisme φ n'est donc pas injectif.

Démonstration. Soit D un diagramme de dissection et a une corde de D . L'élément $q_{\{a\}}(D)$ ne peut être l'union disjointe que d'au plus deux diagrammes. \square

Corollaire 128. L'algèbre pré-Lie engendrée par  n'est pas libre.

Conjecture 129. On appelle \mathcal{N} l'espace vectoriel défini par :

$$\mathcal{N} = \text{Vect}(F \in \mathcal{F}_R, \exists s \in V(F), \text{fert}(s) \geq 3)$$

i.e. l'espace vectoriel engendré par les forêts non sous-binaires. Alors, \mathcal{N} est le noyau du morphisme d'algèbres de Hopf φ .

Considérons alors maintenant comme espace de départ l'algèbre de Hopf quotient **SBT** des arbres enracinés sous-binaires. On gardera la notation φ pour ce nouveau morphisme. On a :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{SBT} & \longrightarrow \mathcal{H}_D^{\otimes} \\ B(t) \in \mathcal{T}_{SB} & \mapsto L(\varphi(t)), \\ B(t_1 t_2) \in \mathcal{T}_{SB} & \mapsto L(\varphi(t_1) \varphi(t_2)), \\ t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{SB} & \mapsto \varphi(t_1) \dots \varphi(t_n), \end{cases}$$

où L désigne l'application linéaire suivante :

$$L : \begin{cases} \mathcal{D}^+ \otimes \mathbb{K} \oplus \mathcal{D}^+ \otimes \mathcal{D}^+ & \longrightarrow \mathcal{D}^+ \\ D \otimes 1 & \mapsto \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_D \circ Z \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) (G)G, \\ D_1 \otimes D_2 & \mapsto \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 D_2} \circ Z \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) (G)G. \end{cases}$$

Exemples. Considérons l'arbre enraciné $t = \mathbf{!}$. On sait que $t = B(\cdot)$. Par calcul direct, on obtient alors que :

$$\varphi(t) = L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \swarrow \\ \circ \end{array} + (1+x) \begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array}.$$

Considérons l'arbre enraciné $t = \mathbf{V}$. On sait que $t = B(\cdot\cdot)$. Par calcul direct, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) \\ &= 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array} + 2x \begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \swarrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array} \\ &+ 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array} + 2x \begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \swarrow \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'arbre enraciné $t = \mathbf{!V}$. Ecrivons t en fonction de l'opérateur de greffe B et de l'arbre enraciné de degré 1. On obtient alors $t = B(\mathbf{!}\cdot) = B(B(\cdot)\cdot)$. Ainsi, on obtient que :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= L\left(L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) \\ &= 2L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) + 2L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \downarrow \swarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right) + (1+x)L\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right). \end{aligned}$$

Lemme 130. Soit t un arbre sous-binaire de degré n non nul. Son image $\varphi(t)$ est alors homogène de degré n .

Démonstration. Ceci est vrai par construction. □

L'objectif est donc maintenant de déterminer $L(D)$ ainsi que $L(D_1 D_2)$ pour tous les diagrammes de dissection D , D_1 et D_2 . Il s'agit en réalité de formaliser la construction de diagrammes de dissection par l'insertion d'une corde dans un ou deux diagrammes. Pour cela, introduisons quelques notations supplémentaires. Soient D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$ et i un entier appartenant à l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$.

- L'entier i représente le sommet i (ou la racine, si $i = 0$). Le sommet i est parfois noté $S_{D,i}$.
- On appelle fertilité du sommet i le nombre de cordes de D ayant le sommet i parmi ses extrémités. On la note $f_D(i)$.
- L'ensemble des cordes de D , numérotées suivant le sens direct et ayant le sommet i parmi ses extrémités, est défini par : $A_{D,i} = \{a_{D,1}^i, \dots, a_{D,f_D(i)}^i\}$.
- Soient $u < v$ des entiers compris entre 0 et n . Une corde liant les sommets u et v est notée $\{u, v\}$. Comme le diagramme est naturellement orienté, on ne rappelle pas l'orientation de la corde $\{u, v\}$ dans sa notation.
- Considérons un entier $t \in \llbracket 0, f_D(i) \rrbracket$. On définit alors les deux sous-ensembles de cordes suivants : $A_{D,i}^{t,1} = \{a_{D,1}^i, \dots, a_{D,t}^i\}$ et $A_{D,i}^{t,2} = \{a_{D,t+1}^i, \dots, a_{D,f_D(i)}^i\}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le diagramme considéré, on oubliera de rappeler son nom dans les notations.

Exemples. Illustrons sur deux exemples la manière de nommer les cordes issues d'un même sommet d'un diagramme de dissection. Dans le premier exemple, on considère un sommet qui n'est pas la racine du diagramme ; on le colore en rouge. Dans le second, on considère la racine du diagramme ; on la colore en jaune. Dans les deux cas, les cordes issues du sommet considéré sont colorées en rouge. Pour alléger les notations, la s -ième corde issue du sommet i sera notée s à la place de $a_{D,s}^i$.



Insertion d'une corde en un sommet d'un diagramme de dissection D

Considérons D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$. On souhaite insérer une corde supplémentaire dans D de toutes les façons possibles. Pour cela, on commence par choisir un sommet i de D , on partitionne les cordes ayant le sommet i comme extrémité afin de scinder ce dernier en deux. On obtient alors deux nouveaux sommets : s_1 et s_2 . L'objet obtenu n'est pas un diagramme de dissection. Il suffit de construire la corde entre s_1 et s_2 pour avoir à nouveau un diagramme de dissection. Par cette méthode, on peut ainsi construire tous les diagrammes G de degré $n + 1$ possédant au moins une corde a telle que le contracté $q_{\{a\}}(G)$ soit le diagramme D .

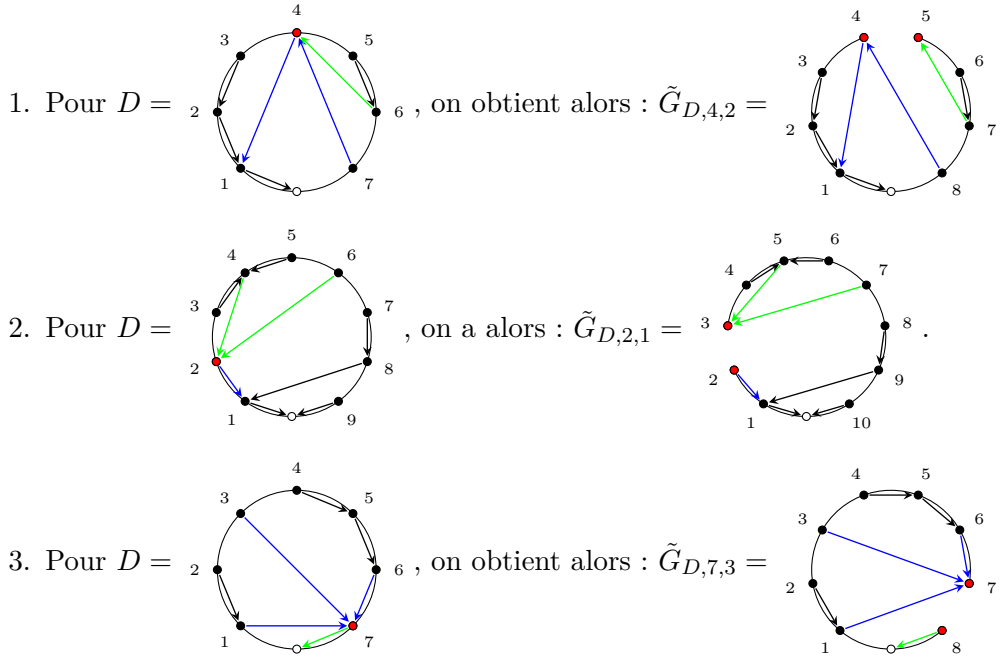
Le sommet de D choisi n'est pas la racine. Choisissons un sommet de D qui ne soit pas sa racine. Pour cela, il suffit de considérer un entier i de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $t \in \llbracket 0, f(i) \rrbracket$ un entier permettant de partitionner les cordes de D ayant le sommet i parmi ses extrémités. On

définit la fonction suivante :

$$\phi_{i,t} : \begin{cases} \mathcal{C}(D) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n+1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u, v\} & \text{si } (u \leq i-1 \text{ et } v \leq i-1) \\ & \text{ou } (u \leq i-1, v = i \text{ et } \{u, v\} \in A_i^{t,1}), \\ \{u, v+1\} & \text{si } (u \leq i-1, v = i \text{ et } \{u, v\} \in A_i^{t,2}) \\ & \text{ou } (u = i \text{ et } \{u, v\} \in A_i^{t,1}), \\ \{u+1, v+1\} & \text{si } (u = i \text{ et } \{u, v\} \in A_i^{t,2}) \text{ ou } u \geq i+1. \end{cases} \end{cases}$$

A partir de cette fonction, considérons un diagramme $\tilde{G}_{D,i,t}$ de degré $n+1$, ouvert entre les sommets i et $i+1$ tel que $\mathcal{C}(\tilde{G}_{D,i,t}) = \phi_{i,t}(\mathcal{C}(D))$. Le diagramme $\tilde{G}_{D,i,t}$ n'est pas un diagramme de dissection mais il va servir d'intermédiaire pour définir le mécanisme d'insertion de cordes.

Exemples. Considérons quelques diagrammes de dissection D et donnons leur diagramme ouvert obtenu $\tilde{G}_{D,i,t}$. Le sommet i à scinder est coloré en rouge, les cordes de D contenues dans l'ensemble $A_{D,i}^{t,1}$ sont colorées en bleu et celles contenues dans $A_{D,i}^{t,2}$ sont colorées en vert.



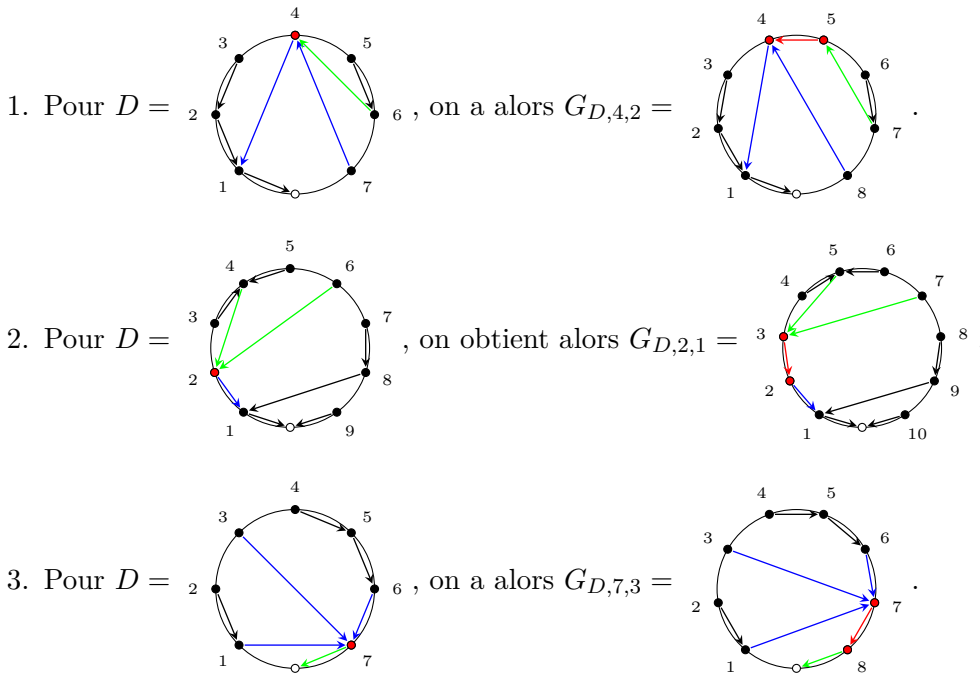
Il est maintenant possible de définir un endomorphisme homogène de degré 1 d'insertion de l'espace vectoriel des diagrammes de dissection. Pour cela considérons un entier naturel non nul i (choix du sommet où a lieu l'insertion) et un entier naturel t (partition des cordes issues du sommet i). Définissons l'application $\Gamma_{i,t}$ par :

$$\Phi_{i,t} : \begin{cases} (\mathcal{D})_n & \longrightarrow (\mathcal{D})_{n+1} \\ D & \mapsto \begin{cases} G_{D,i,t} \text{ tel que } \mathcal{C}(G_{D,i,t}) = \phi_{i,t}(\mathcal{C}(D)) \cup \{i, i+1\} & \text{si } i \leq n \text{ et } t \leq f_D(i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Remarques. Soient un diagramme de dissection D , un sommet i et un entier t de l'intervalle $\llbracket 0, f_D(i) \rrbracket$.

1. L'orientation de la corde $\{i, i+1\}$ du diagramme de dissection $G_{D,i,t} = \Phi_{i,t}(D)$ est aisément déterminable. En effet, considérons l'ensemble $A_{D,i}$. Il existe un unique entier $l(i)$ tel que la corde $a_{D,l(i)}^i$ porte le numéro i . On a alors deux cas. Si $t \leq l(i) - 1$ alors la corde $\{i, i+1\}$ de $G_{D,i,t}$ sera orientée de i vers $i+1$ et portera donc le numéro i . En revanche, si $t \geq l(i)$, la corde $\{i, i+1\}$ de $G_{D,i,t}$ sera orientée de $i+1$ vers i et portera donc le numéro $i+1$.
2. La somme des applications du type $\Phi_{i,t}$ sera appelée opération 1.

Exemples. Reprenons les trois diagrammes utilisés précédemment en exemple et réalisons une insertion de corde en gardant le même code couleur. La corde insérée est colorée en rouge.



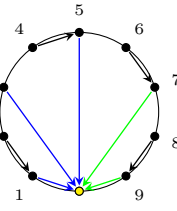
Le sommet de D choisi est la racine. Maintenant le sommet considéré est la racine du diagramme D . Soit $\tau \in \llbracket 0, f(0) \rrbracket$ un entier permettant de partitionner les cordes ayant la racine comme extrémité. On sait alors qu'il existe un unique entier s de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la corde $a_{D,\tau}^0$ s'écrive $\{0, s\}$. Choisissons un élément $\lambda \in \{0, 1\}$. On définit alors deux fonctions.

Cas 1 : $\lambda = 0$. On note $\phi_{0,\tau}^\lambda$ la fonction :

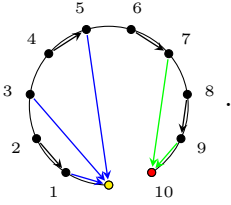
$$\phi_{0,\tau}^\lambda : \begin{cases} \mathcal{C}(D) & \longrightarrow \{\{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n+1\} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u, v\} & \text{si } u \geq 1 \text{ ou } (u = 0 \text{ et } v \leq s-1), \\ \{v, n+1\} & \text{si } u = 0 \text{ et } v \geq s. \end{cases} \end{cases}$$

Posons $\tilde{G}_{D,0,\tau}^\lambda$ le diagramme de degré $n+1$, ouvert entre la racine et le sommet $n+1$ tel que $\mathcal{C}(\tilde{G}_{D,0,\tau}^\lambda) = \phi_{0,\tau}^\lambda(\mathcal{C}(D))$. La fonction $\phi_{0,\tau}^\lambda$ permet la construction d'un diagramme ouvert par création du sommet numéro $n+1$.

Exemple. On choisit le diagramme $D =$



obtient alors : $\tilde{G}_{D,0,2}^0 =$

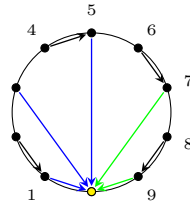


Cas 2 : $\lambda = 1$. On définit alors la fonction $\phi_{0,\tau}^\lambda$ par :

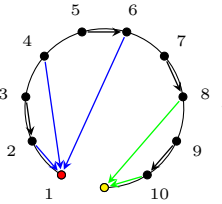
$$\phi_{0,\tau}^\lambda : \begin{cases} \mathcal{C}(D) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n+1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u+1, v+1\} & \text{si } u \geq 1 \text{ ou } (u=0 \text{ et } v \leq s-1), \\ \{u, v+1\} & \text{si } u=0 \text{ et } v \geq s. \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce cas, le diagramme $\tilde{G}_{D,0,\tau}^\lambda$ de degré $n+1$ est ouvert entre la racine et le sommet numéro 1 et $\mathcal{C}(\tilde{G}_{D,0,\tau}^\lambda) = \phi_{0,\tau}^\lambda(\mathcal{C}(D))$. La construction du diagramme ouvert $\tilde{G}_{0,\tau}^\lambda$ repose alors sur celle de son sommet numéro 1 et non plus du numéro $n+1$.

Exemple. On reprend le diagramme $D =$



mais cette fois, $\lambda = 1$. On obtient alors : $\tilde{G}_{D,0,2}^1 =$



Définissons maintenant l'endomorphisme homogène de degré 1 d'insertion en la racine. Pour cela considérons un entier naturel τ (partition des cordes issues de la racine) et λ un élément de $\{0, 1\}$. Définissons l'application $\phi_{0,\tau}^\lambda$ par :

$$\Phi_{0,\tau}^\lambda : \begin{cases} (\mathcal{D})_n & \longrightarrow (\mathcal{D})_{n+1} \\ D & \mapsto \begin{cases} G_{0,\tau}^\lambda(D) & \text{si } \tau \leq f_D(0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

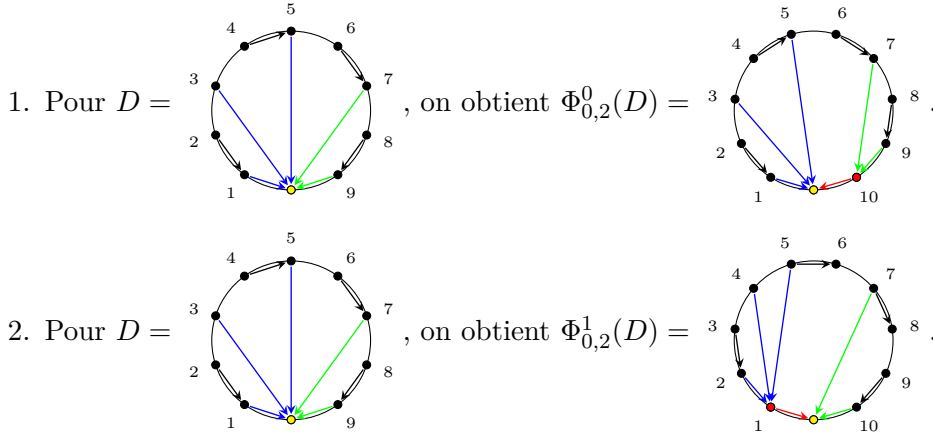
où l'ensemble des cordes du diagramme de dissection $G_{0,\tau}^\lambda(D)$ est :

$$\mathcal{C}(G_{0,\tau}^\lambda(D)) = \phi_{0,\tau}^\lambda(\mathcal{C}(D)) \cup \{ \{0, (1-\lambda)n+1\} \}.$$

Remarques. Soient un diagramme de dissection D , un entier τ de l'intervalle $\llbracket 0, f_D(0) \rrbracket$ et λ un élément de $\{0, 1\}$.

1. La corde insérée permettant de construire $G_{D,0,\tau}^\lambda$ est automatiquement orientée. En effet, soit $\lambda = 0$ et alors on a construit la corde $\{0, n+1\}$ (corde numéro $n+1$), soit $\lambda = 1$ et alors on a construit la corde $\{0, 1\}$ (corde numéro 1) de $G_{D,0,\tau}^\lambda$.
2. La somme des applications du type $\Phi_{0,t}^\lambda$ sera appelée opération 2.

Exemples. Reprenons les deux exemples précédents. La corde insérée est colorée en rouge.



Détermination de $L(D)$ pour D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$.

Proposition 131. Soient D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$, i et j deux entiers de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$, t_i (respectivement t_j) un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f(i) \rrbracket$ (respectivement de l'intervalle $\llbracket 0, f(j) \rrbracket$), τ_1 et τ_2 deux entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f(0) \rrbracket$, et λ_1 et λ_2 deux éléments de $\{0, 1\}$. On a alors :

1. $(\Phi_{i,t_1}(D), \{i, i+1\}) = (\Phi_{j,t_2}(D), \{j, j+1\}) \iff (i = j \text{ et } t_1 = t_2)$,
2. $(\Phi_{0,\tau_1}^{\lambda_1}(D), \{0, (1 - \lambda_1)n + 1\}) = (\Phi_{0,\tau_2}^{\lambda_2}(D), \{0, (1 - \lambda_2)n + 1\}) \iff (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ et } \tau_1 = \tau_2)$,
3. $(\Phi_{i,t_1}(D), \{i, i+1\}) \neq (\Phi_{0,\tau_1}^{\lambda_1}(D), \{0, (1 - \lambda_1)n + 1\})$.

Démonstration. Soient D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$, i et j deux entiers de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$, t_i (respectivement t_j) un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f(i) \rrbracket$ (respectivement de l'intervalle $\llbracket 0, f(j) \rrbracket$), τ_1 et τ_2 deux entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f(0) \rrbracket$, et λ_1 et λ_2 deux éléments de $\{0, 1\}$.

1. Il suffit de montrer l'implication :

$$(\Phi_{i,t_1}(D), \{i, i+1\}) = (\Phi_{i,t_2}(D), \{i, i+1\}) \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Pour cela, notons p_1 (respectivement p_2) le sommet i du diagramme $\Phi_{i,t_1}(D)$ (respectivement du diagramme $\Phi_{i,t_2}(D)$) et intéressons-nous à sa fertilité $f(p_1)$ (respectivement $f(p_2)$). On a alors $f(p_1) = t_1 + 1$ et $f(p_2) = t_2 + 1$. Si l'on suppose que les couples $(\Phi_{i,t_1}(D), \{i, i+1\})$ et $(\Phi_{i,t_2}(D), \{i, i+1\})$ sont égaux, l'implication est alors triviale.

2. Posons $\lambda = \lambda_1$. Pour établir l'équivalence souhaitée, il suffit de prouver l'implication :

$$(\Phi_{0,\tau_1}^\lambda(D), \{0, (1 - \lambda)n + 1\}) = (\Phi_{0,\tau_2}^\lambda(D), \{0, (1 - \lambda)n + 1\}) \Rightarrow \tau_1 = \tau_2.$$

Pour cela, procédons de la même façon que pour le point précédent. Notons p_1 (respectivement p_2) la racine du diagramme $\Phi_{0,\tau_1}^\lambda(D)$ (respectivement du diagramme $\Phi_{0,\tau_2}^\lambda(D)$) et intéressons-nous à sa fertilité $f(p_1)$ (respectivement $f(p_2)$). Posons $f(0) = f_D(0)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(p_1) &= \delta_{\lambda,0} (f(0) - \tau_1 + 1) + \delta_{\lambda,1} (\tau_1 + 1), \\ f(p_2) &= \delta_{\lambda,0} (f(0) - \tau_2 + 1) + \delta_{\lambda,1} (\tau_2 + 1). \end{aligned}$$

3. Ceci est trivial puisque l'entier i est non nul. □

Corollaire 132. *Soit D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$. Posons σ_D le nombre de couples distincts (G, a) , où G est un diagramme de dissection de degré $n + 1$ et a est une corde de la forme $a = \{u, v\}$ avec $0 \leq u < v \leq n + 1$, obtenus à partir des opérations 1 et 2 appliquées à D . On a alors :*

$$\sigma_D = 3n + 2 + f_D(0).$$

Démonstration. Soit D un diagramme de dissection de degré $n \geq 1$. Par calcul direct, on obtient que :

$$\begin{aligned} \sigma(D) &= \overbrace{\sum_{i=1}^n (f_D(i) + 1)}^{\text{obtenus par l'opération 1}} + \overbrace{2(f_D(0) + 1)}^{\text{obtenus par l'opération 2}} \\ &= (3n - f_D(0)) + 2(f_D(0) + 1) \\ &= 3n + 2 + f_D(0). \end{aligned}$$

□

Proposition 133. *Soit D un diagramme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$L(D) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ t \in \llbracket 0, f_D(i) \rrbracket}} x^{k_{\{a_i\}}(\Phi_{i,t}(D))} \Phi_{i,t}(D) + \sum_{\tau \in \llbracket 0, f_D(0) \rrbracket} [\Phi_{0,\tau}^0(D) + \Phi_{0,\tau}^1(D)],$$

avec $a_i = \{i, i + 1\}$. Ceci peut se réécrire de la manière suivante :

$$L(D) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ t \in \llbracket 0, l(i) - 1 \rrbracket}} \Phi_{i,t}(D) + x \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ t \in \llbracket l(i), f_D(i) \rrbracket}} \Phi_{i,t}(D) + \sum_{\tau \in \llbracket 0, f_D(0) \rrbracket} [\Phi_{0,\tau}^0(D) + \Phi_{0,\tau}^1(D)],$$

où pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $l(i)$ est l'unique entier de l'intervalle $\llbracket 1, f_D(i) \rrbracket$ tel que la corde $a_{D,l(i)}^i$ du diagramme D soit numérotée par i .

Démonstration. Par construction, les diagrammes construits à partir des opérations 1 et 2 interviennent dans $L(D)$.

Soit maintenant $(G, a) \in (\mathcal{D})_{n+1} \times \mathcal{C}(G)$ tel que $q_{\{a\}} = D$. Ecrivons a sous la forme $a = \{i, j\}$ avec $\{i, j\} \in \{\{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n + 1\}$.

Cas 1 : $i \neq 0$. $q_{\{a\}}(G) = D$ (un seul diagramme) donc $j = i + 1$. On obtient donc

$$(G, a) = (\Phi_{i,t}(D), \{i, i + 1\}) \text{ avec } t = f_G(i) - 1.$$

Cas 2 : $i = 0$. $q_{\{a\}}(G) = D$ (un seul diagramme) donc $j \in \{1, n + 1\}$. On obtient donc

$$(G, a) = \begin{cases} (\Phi_{0,\tau}^1(D), \{0, 1\}) \text{ avec } \tau = f_G(0) - 1 & \text{si } j = 1, \\ (\Phi_{0,\tau}^0(D), \{0, n + 1\}) \text{ avec } \tau = f_G(n + 1) - 1 & \text{si } j = n + 1. \end{cases}$$

□

Corollaire 134. *Supposons que $x \in \mathbb{N}$. Soit D un diagramme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\sigma_{L(D)}$ le nombre de termes dans $L(D)$ comptés avec leur multiplicité. On a :*

$$\sigma_{L(D)} = 3nx + (1 - x) \sum_{i=1}^n l(i) + (2 - x)f_D(0) + 2$$

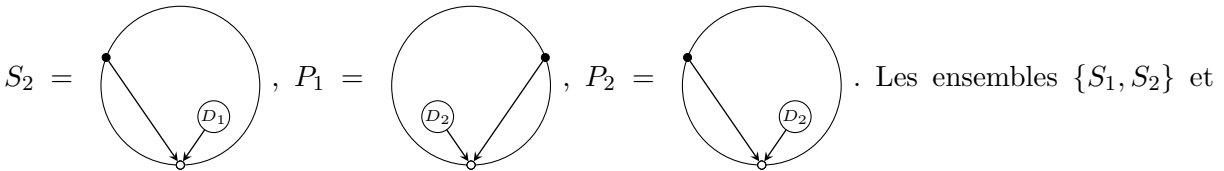
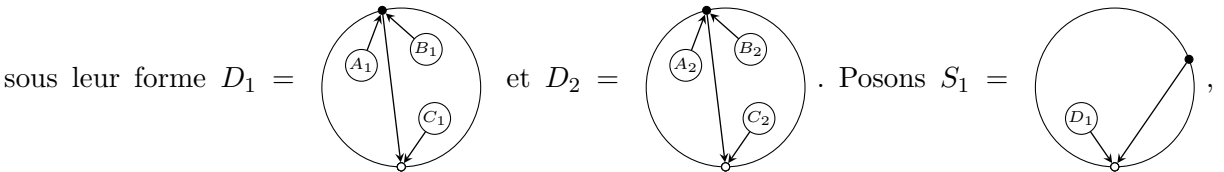
où, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $l(i)$ est l'unique entier de l'intervalle $\llbracket 1, f_D(i) \rrbracket$ tel que la corde $a_{l(i)}^i$ du diagramme D soit numérotée par i .

Démonstration. La preuve se fait par calcul direct. □

Proposition 135. *Soit x un élément de \mathbb{K} . Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection non vides. On a alors l'équivalence :*

$$L(D_1) = L(D_2) \iff D_1 = D_2.$$

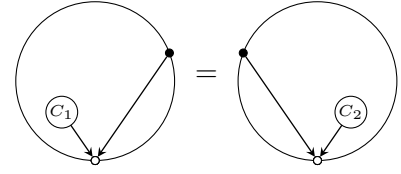
Démonstration. Soit x un élément de \mathbb{K} . Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection. On rappelle que $f_{D_1}(0)$ (respectivement $f_{D_2}(0)$) est la fertilité de D_1 (respectivement D_2) en sa racine. On sait que, pour tout entier naturel non nul n , le projeté de $L(D_1)$ (respectivement $L(D_2)$) sur l'espace vectoriel des diagrammes de dissection de fertilité n en la racine est non nul si $n \leq f_{D_1}(0) + 1$ (respectivement $n \leq f_{D_2}(0) + 1$) et nul si $n \geq f_{D_1}(0) + 2$ (respectivement $n \geq f_{D_2}(0) + 2$). Ainsi, si D_1 et D_2 n'ont pas même fertilité en la racine, on obtient automatiquement que $L(D_1)$ et $L(D_2)$ sont distincts. Choisissons donc D_1 et D_2 de telle sorte qu'ils aient la même fertilité en la racine et supposons que $L(D_1)$ et $L(D_2)$ soient égaux. Ecrivons D_1 et D_2



Commençons d'abord en considérant le cas $S_1 = S_2$ ou le cas $S_1 \neq S_2$ avec $S_1 = P_1$. L'égalité $S_1 = P_1$ implique que les diagrammes de dissection D_1 et D_2 sont égaux.

Considérons maintenant le cas $S_1 \neq S_2$ avec $S_1 = P_2$. On obtient alors que les diagrammes de

dissection A_1, A_2, B_1, B_2 sont tous vides ainsi que les égalités



et . Par récurrence sur leur fertilité en la racine, on obtient que

$C_1 = C_2$. Ainsi les diagrammes de dissection D_1 et D_2 sont égaux. \square

Proposition 136. *On suppose que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit D un diagramme de dissection de degré n supérieur ou égal à 2. Alors il existe au moins un diagramme de dissection G de degré $n - 1$, un scalaire strictement positif c_D , un entier naturel non nul k , des diagrammes de dissection D_1, \dots, D_k non vides, tous distincts de D , et un élément U de $\text{Vect}(D_1, \dots, D_k)$ tels que $L(G)$ s'écrive sous la forme $L(G) = c_D D + U$. Définissons le couplage*

$$\langle -, - \rangle : \begin{cases} \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_D & \longrightarrow \mathbb{K} \\ D_1 \dots D_k \otimes G_1 \dots G_l & \longmapsto Z_{D_1 \dots D_k}(G_1 \dots G_l). \end{cases}$$

La proposition se réécrit alors de la façon suivante : pour tout diagramme de dissection D de degré $n \geq 2$, il existe un diagramme de dissection G de degré $n - 1$ tel que $\langle D, L(G) \rangle \neq 0$.

Démonstration. Soient x un scalaire strictement positif et D un diagramme de dissection de degré n supérieur ou égal à 2. En utilisant le fait que D possède n cordes qui ne s'intersectent pas, on obtient qu'il existe une corde a de D rendant deux sommets consécutifs voisins. Posons alors $G = q_{\{a\}}(D)$. Il s'agit d'un diagramme de dissection de degré $n - 1$ et $L(G)$ est bien de la forme souhaitée. \square

Proposition 137. *On suppose que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soient n un entier naturel et $e_n \in \mathcal{T}_R$ l'échelle de degré n . Alors, pour tout diagramme de dissection D de degré n , $(\varphi(e_n))(D)$ est non nul, i.e. il existe un scalaire strictement positif c_D , un entier naturel non nul k , des diagrammes de dissection D_1, \dots, D_k non vides, tous distincts de D et un élément U de $\text{Vect}(D_1, \dots, D_k)$ tels que $\varphi(e_n)$ s'écrive $\varphi(e_n) = c_D D + U$. En utilisant le couplage défini dans la proposition précédente, le résultat se reformule de la façon suivante : pour tout entier naturel n et tout diagramme de dissection D de degré n le scalaire $\langle D, \varphi(e_n) \rangle$ est strictement positif.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n . Le résultat est trivialement vrai pour e_1 . Supposons qu'il soit vrai pour un certain rang n supérieur ou égal à 1. Ecrivons $\varphi(e_n)$ sous la forme $\varphi(e_n) = \sum_{\substack{G \in (\mathcal{D})_n \\ \text{diagramme}}} a_G G$ où tous les scalaires a_G sont strictement positifs. On a

alors :

$$\varphi(e_{n+1}) = \varphi(e_n) \circ \left(\begin{array}{c} \circ \\ \updownarrow \\ \circ \end{array} \right) = \sum_{\substack{G \in (\mathcal{D})_n \\ \text{diagramme}}} a_G L(G) = \sum_{\substack{D \in (\mathcal{D})_{n+1} \\ \text{diagramme}}} b_D D$$

et, d'après la proposition précédente, les scalaires b_D sont tous strictement positifs. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$. Ainsi l'assertion est vérifiée pour tout entier n strictement positif. \square

Remarque. Supposons que le paramètre x soit égal à 1. Soient un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et i un entier de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. On peut calculer, de façon récursive, le nombre $s_{n,i}$ de diagrammes de dissection, comptés avec multiplicité, de degré n et de fertilité i

en la racine apparaissant dans $\varphi(e_n)$. Pour cela, on considère le fait que $\varphi(e_n) = L^{n-1} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \end{array} \right)$

et on s'intéresse à la fertilité de la racine des diagrammes obtenus par les opérations 1 et 2. Soit donc D un diagramme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et G un diagramme obtenu en appliquant l'opération 1 ou l'opération 2 à D . Par définition, l'opération 1 n'a aucune influence sur $f_D(0)$ donc $f_G(0) = f_D(0)$. Considérons maintenant l'opération 2. Soit $t \in \llbracket 0, f_D(0) \rrbracket$ et $\lambda \in \{0, 1\}$. On a alors :

$$f_G(0) = \begin{cases} f_D(0) - t + 1 & \text{si } \lambda = 0, \\ t + 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Soient n un entier naturel non nul et i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le programme Maxima suivant calcule les coefficients $s_{n,i}$.

```
list_nb_termes_echelle(n):=block([res,nbpf,m,j,k],
  if equal(n,1) then
    res:[1]
  else (
    nbpf:append(list_nb_termes_echelle(n-1),[0]),
    m:length(nbpf),
    res:[nbpf[1]*(3*n-2)+2*sum(nbpf[k],k,2,m)],
    res:append(res,create_list(nbpf[j]*(3*n-1-j)
      +2*(sum(nbpf[k],k,j+1,m)+nbpf[j-1]),j,2,m))
  ),
  return(res)
);
```

Pour les échelles de degré inférieur ou égal à 7, on obtient :

n	$s_{n,1}$	$s_{n,2}$	$s_{n,3}$	$s_{n,4}$	$s_{n,5}$	$s_{n,6}$	$s_{n,7}$
1	1						
2	4	2					
3	32	20	4				
4	368	252	72	8			
5	5 448	3 920	1 312	224	16		
6	98 112	72 800	26 688	5 568	640	32	
7	2 075 584	1 572 480	611 776	143 808	20 800	1 728	64

TABLEAU 3.2 – Valeur de $s_{n,i}$ pour tous les entiers naturels n (compris entre 1 et 7) et i (compris entre 1 et n).

Soit n un entier naturel non nul. Posons s_n le nombre total de diagrammes de dissection, comptés avec multiplicité, apparaissant dans $\varphi(e_n)$. Pour les échelles de degré inférieur ou égal à 9, on obtient :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_n	1	6	56	700	10 920	203 840	4 426 240	109 549 440	3 043 040 000

TABLEAU 3.3 – Valeur de s_n pour les entiers naturels n compris entre 1 et 9.

Insertion d'une corde dans deux diagrammes de dissection pour n'en former qu'un seul

Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 . Un sommet i de D_1 , un sommet j de D_2 , des entiers $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket$ et $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$ étant choisis, on souhaite insérer une corde supplémentaire suivant les étapes suivantes. Tout d'abord, grâce aux fonctions d'ouverture décrites dans le paragraphe 3.2.4, on obtient à partir de D_1 et D_2 deux diagrammes ouverts. Ensuite, on renumérote les sommets des deux diagrammes pour les « recoller » puis, on insère une corde supplémentaire pour former un diagramme de dissection. Comme un diagramme de dissection ne possède qu'une seule racine, l'un des deux sommets choisis est obligatoirement une racine. Pour pouvoir utiliser la fonction d'ouverture en la racine, on introduira un entier $\lambda \in \{0, 1\}$.

On considère la racine de D_1 ($i = 0$) et un sommet $j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket$ de D_2 . Considérons la racine de D_1 , un entier $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ (partition des cordes de D_1 ayant la racine comme extrémité), un entier $\lambda \in \{0, 1\}$ (position de la racine dans le diagramme ouvert $\tilde{G}_{0,t}^\lambda$ obtenu à partir de D_1), un sommet de D_2 différent de la racine (donc un entier $j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket$) et un entier $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$ (partition des cordes de D_2 ayant j comme extrémité). La racine du diagramme de dissection $G_{D_1, D_2, t, j, \tau}^\lambda$ obtenu après insertion de corde sera donnée par celle de D_2 .

D'après le paragraphe 3.2.4, on peut considérer, grâce à la fonction $\phi_{0,t}^\lambda$ (respectivement $\phi_{j,\tau}$) le diagramme ouvert $\tilde{G}_{D_1, 0, t}^\lambda$ muni de son ensemble de cordes $\phi_{0,t}^\lambda(\mathcal{C}(D_1))$ (respectivement $\tilde{G}_{D_2, j, \tau}$ muni de son ensemble de cordes $\phi_{j,\tau}(\mathcal{C}(D_2))$).

Pour la renumérotation des cordes, sachant que la racine de $G_{D_1, D_2, t, j, \tau}^\lambda$ provient de celle de D_2 , considérons les fonctions :

$$\gamma_{D_1, t}^\lambda : \begin{cases} \phi_{t, \lambda}^0(\mathcal{C}(G_1)) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u + j - \lambda, v + j - \lambda\} & \text{si } u \geq 1, \\ \{j + \lambda(n_1 + 1), v + j - \lambda\} & \text{si } u = 0 \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\gamma_{D_2, j, \tau} : \begin{cases} \phi_{j, \tau}(\mathcal{C}(G_2)) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u, v\} & \text{si } u \leq j \text{ et } v \leq j, \\ \{u, v + n_1\} & \text{si } u \leq j \text{ et } v \geq j + 1, \\ \{u + n_1, v + n_1\} & \text{si } u \geq j + 1. \end{cases} \end{cases}$$

Ces deux fonctions permettent d'obtenir un diagramme de degré $n_1 + n_2 + 1$ qui n'est pas un diagramme de dissection puisqu'il ne possède que $n_1 + n_2$ cordes. Il ne reste qu'à construire la corde $\{j, j + n_1 + 1\}$.

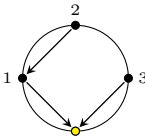
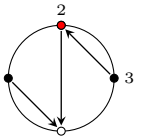
Définissons maintenant un morphisme de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans \mathcal{D} , homogène de degré 1. Pour cela considérons deux entiers naturels t et τ , un élément λ de $\{0, 1\}$, un entier naturel non nul j et

considérons l'application :

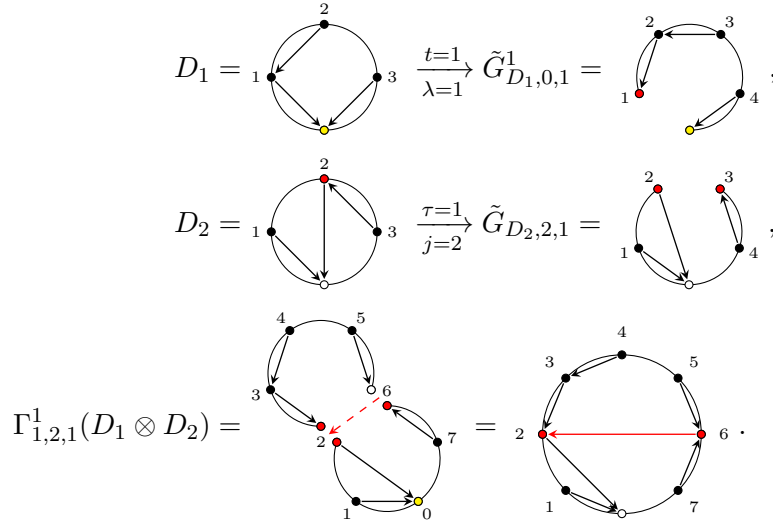
$$\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda : \begin{cases} (\mathcal{D})_{n_1} \otimes (\mathcal{D})_{n_2} & \longrightarrow (\mathcal{D})_{n_1+n_2+1} \\ D_1 \otimes D_2 & \mapsto \begin{cases} G_{D_1, D_2, t, j, \tau}^\lambda & \text{si } t \leq f_{D_1}(0), j \leq n_2 \text{ et } \tau \leq f_{D_2}(j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

où l'ensemble des cordes du diagramme de dissection $G_{t,j,\tau}^\lambda$ est :

$$\mathcal{C}(G_{D_1, D_2, t, j, \tau}^\lambda) = \gamma_{D_1, t}^\lambda(\phi_{0,t}^\lambda(\mathcal{C}(D_1))) \cup \gamma_{D_2, j, \tau}(\phi_{j,\tau}(\mathcal{C}(D_2))) \cup \{\{j, j+n_1+1\}\}.$$

Exemple. Considérons $D_1 =$  et $D_2 =$  et posons $\lambda = 1, t = 1,$

$j = 2$ et $\tau = 1$. On commence par déterminer $\tilde{G}_{D_1, 0, 1}^1$ et $\tilde{G}_{D_2, 2, 1}$ en gardant le même code couleur que dans le paragraphe 3.2.4. Enfin, on effectue l'insertion de corde. On écrit d'abord $\Gamma_{1,2,1}^1(D_1 \otimes D_2)$ de telle sorte que l'on puisse identifier la renumérotation et l'insertion effectuée (l'ancienne racine de D_1 redevient blanche puisqu'elle n'est plus racine dans $\Gamma_{1,2,1}^1(D_1 \otimes D_2)$ et la corde ajoutée est en pointillés rouges), puis on en donne l'écriture habituelle. On obtient alors :



Remarques. Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection de degrés respectifs n_1 et n_2 non nuls ainsi que des entiers $\lambda \in \{0, 1\}$, $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket$ et $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$.

1. Il n'est pas nécessaire de considérer les deux valeurs possibles de λ . En effet, par calcul direct, on obtient que $\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda(D_1 \otimes D_2) = \Gamma_{t,j,\tau}^{1-\lambda}(D_1 \otimes D_2)$.
2. L'orientation de la corde $\{j, j+n_1+1\}$ insérée est immédiate. En effet, considérons dans $\mathcal{C}(D_2)$ le sous-ensemble $A_{D_2, j}$. Il existe un unique entier $l(j)$ tel que la corde $a_{D_2, l(j)}^j$ de D_2 porte le numéro j . On a alors deux cas. Si $\tau \leq l(j) - 1$ alors la corde $\{j, j+n_1+1\}$ de $\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda(D_1 \otimes D_2)$ sera orientée de j vers $j+n_1+1$ et portera donc le numéro j . En revanche, si $\tau \geq l(j)$, la corde $\{j, j+n_1+1\}$ de $\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda(D_1 \otimes D_2)$ sera orientée de $j+n_1+1$ vers j et portera donc le numéro $j+n_1+1$.

3. Appelons ν la volte envoyant le tenseur $D_1 \otimes D_2$ sur le tenseur $D_2 \otimes D_1$. La somme des applications $\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda$ et du type $\Gamma_{t,j,\tau}^\lambda \circ \nu$ sera appelée opération 3.

On considère les racines de D_1 et de D_2 . Maintenant, pour D_2 , comme pour D_1 , on considère la racine. Soient un entier $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ (partition des cordes de D_1 ayant la racine pour extrémité), un entier $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$ (partition des cordes de D_2 ayant la racine pour extrémité) et deux entiers $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, 1\}$ (position de la racine des diagrammes $\tilde{G}_{D_1,0,t}^{\lambda_1}$ et $\tilde{G}_{D_2,0,\tau}^{\lambda_2}$ obtenus à partir des fonctions d'ouverture définies dans le paragraphe 3.2.4). Imposons, toujours sans perte de généralité, que la racine du diagramme $G_{D_1,D_2,t,\tau}^{\lambda_1,\lambda_2}$ obtenu après insertion de corde soit donnée par celle de D_2 . Définissons les deux cas suivants.

Cas 1 : Posons $\lambda = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 1 - \lambda = 1$. D'après le paragraphe 3.2.4, on peut considérer, grâce à la fonction $\phi_{0,t}^1$ (respectivement $\phi_{0,\tau}^0$) le diagramme ouvert $\tilde{G}_{D_1,0,t}^1$ muni de son ensemble de cordes $\phi_{0,t}^1(\mathcal{C}(D_1))$ (respectivement $\tilde{G}_{D_2,0,\tau}^0$ muni de son ensemble de cordes $\phi_{0,\tau}^0(\mathcal{C}(D_2))$).

Pour la renumérotation des cordes, sachant que la racine de $G_{D_1,D_2,t,\tau}^{1,1}$ provient de celle de D_2 , considérons les fonctions :

$$\gamma_{D_1,t}^1 : \begin{cases} \phi_{0,t}^1(\mathcal{C}(D_1)) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u + n_2, v + n_2\} & \text{si } u \geq 1, \\ \{u, v + n_2\} & \text{si } u = 0 \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\gamma_{D_2,\tau}^0 : \begin{cases} \phi_{0,\tau}^0(\mathcal{C}(D_2)) & \longrightarrow \{ \{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1 \} \\ \{u, v\} & \mapsto \{u, v\}. \end{cases}$$

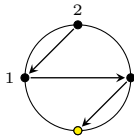
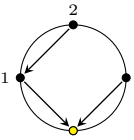
Ces deux fonctions permettent d'obtenir un diagramme de degré $n_1 + n_2 + 1$ qui n'est pas un diagramme de dissection puisqu'il ne possède que $n_1 + n_2$ cordes. Il ne reste qu'à construire la corde $\{0, n_2 + 1\}$.

Définissons maintenant un morphisme de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans \mathcal{D} , homogène de degré 1. Pour cela considérons deux entiers naturels t et τ , éventuellement nuls, et considérons l'application :

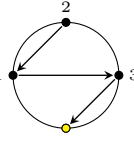
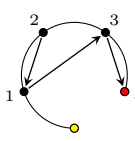
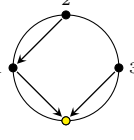
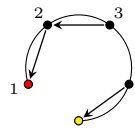
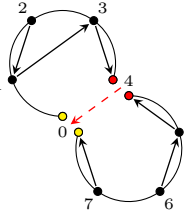
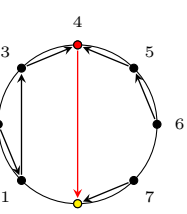
$$\Gamma_{t,\tau}^0 : \begin{cases} (\mathcal{D})_{n_1} \otimes (\mathcal{D})_{n_2} & \longrightarrow (\mathcal{D})_{n_1+n_2+1} \\ D_1 \otimes D_2 & \mapsto \begin{cases} G_{D_1,D_2,t,\tau}^{1,0} & \text{si } t \leq f_{D_1}(0) \text{ et } \tau \leq f_{D_2}(0), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{C}(G_{D_1,D_2,t,\tau}^{1,0}) = \gamma_{D_1,t}^1(\phi_{0,t}^1(\mathcal{C}(D_1))) \cup \gamma_{D_2,\tau}^0(\phi_{0,\tau}^0(\mathcal{C}(D_2))) \cup \{ \{0, n_2 + 1\} \}.$$

Exemple. Considérons $D_1 =$  et $D_2 =$  et posons $t = 1$ et $\tau = 1$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \text{} \xrightarrow[\lambda_1=0]{t=1} \tilde{G}_{D_1,0,t}^0 = \text{, \\
 D_2 &= \text{} \xrightarrow[\lambda_2=1]{\tau=1} \tilde{G}_{D_2,0,\tau}^1 = \text{, \\
 \Gamma_{t,\tau}^1(D_1 \otimes D_2) &= \text{ = \text{.
 \end{aligned}$$

Remarques. Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection de degrés respectifs n_1 et n_2 non nuls ainsi que des entiers $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, 1\}$, $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ et $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$.

1. Par calcul direct on a :

$$\Gamma_{t,\tau}^0(D_1 \otimes D_2) = \Gamma_{\tau,t}^1(D_2 \otimes D_1) \text{ et } \Gamma_{t,\tau}^1(D_1 \otimes D_2) = \Gamma_{\tau,t}^0(D_2 \otimes D_1).$$

2. Les cas $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0)$ et $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1)$ sont inutiles. En effet, posons,

$$\tilde{\gamma}_{D_1,t}^0 : \begin{cases} \phi_{0,t}^0(\mathcal{C}(D_1)) & \longrightarrow \{\{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1\} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u + n_2 + 1, v + n_2 + 1\} & \text{si } v \leq n_1, \\ \{0, u + n_2 + 1\} & \text{si } v = n_1 + 1, \end{cases} \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}_{D_1,t}^1 : \begin{cases} \phi_{0,t}^1(\mathcal{C}(D_1)) & \longrightarrow \{\{u, v\}, 0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1\} \\ \{u, v\} & \mapsto \begin{cases} \{u - 1, v - 1\} & \text{si } u \geq 1, \\ \{v - 1, n_1 + 1\} & \text{si } u = 0, \end{cases} \end{cases}$$

et $G_{D_1, D_2, t, \tau}^{0,0}$ et $G_{D_1, D_2, t, \tau}^{1,1}$ les diagrammes de dissection de degré $n_1 + n_2 + 1$ tels que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(G_{D_1, D_2, t, \tau}^{0,0}) &= \tilde{\gamma}_{D_1,t}^0(\phi_{0,t}^0(\mathcal{C}(D_1))) \cup \gamma_{D_2,\tau}^0(\phi_{0,\tau}^0(\mathcal{C}(D_2))) \cup \{\{0, n_2 + 1\}\}, \\
 \mathcal{C}(G_{D_1, D_2, t, \tau}^{1,1}) &= \tilde{\gamma}_{D_1,t}^1(\phi_{0,t}^1(\mathcal{C}(D_1))) \cup \gamma_{D_2,\tau}^1(\phi_{0,\tau}^1(\mathcal{C}(D_2))) \cup \{\{0, n_1 + 1\}\}.
 \end{aligned}$$

On a alors : $G_{D_1, D_2, t, \tau}^{0,0} = G_{D_1, D_2, t, \tau}^{1,0}$ et $G_{D_1, D_2, t, \tau}^{1,1} = G_{D_1, D_2, t, \tau}^{0,1}$.

3. La somme des applications du type $\Gamma_{t,\tau}^\lambda$ sera appelée opération 4.

Détermination de $L(D_1 D_2)$ où $(D_1, D_2) \in (\mathcal{D})_{n_1} \times (\mathcal{D})_{n_2}$ et $n_1, n_2 \geq 1$.

Proposition 138. *Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 , i un entier de l'intervalle $\llbracket 1, n_1 \rrbracket$, ϱ un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket$, p un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$, j, j_1 et j_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 1, n_2 \rrbracket$, τ , respectivement τ_1 , respectivement τ_2 un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$, respectivement $\llbracket 0, f_{D_2}(j_1) \rrbracket$, respectivement $\llbracket 0, f_{D_2}(j_2) \rrbracket$, ω, ω_1 et ω_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$, t, t_1 et t_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ et $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ des éléments de $\{0, 1\}$.*

Supposons que D_1 et D_2 soient distincts. On a alors les assertions suivantes :

1. $(\Gamma_{t_1, j_1, \tau_1}^1(D_1 \otimes D_2), \{j_1, j_1 + n_1 + 1\}) = (\Gamma_{t_2, j_2, \tau_2}^1(D_1 \otimes D_2), \{j_2, j_2 + n_1 + 1\})$ est équivalent à $(j_1 = j_2, t_1 = t_2$ et $\tau_1 = \tau_2)$,
2. $(\Gamma_{t_1, \omega_1}^{\lambda_1}(D_1 \otimes D_2), \{0, \lambda_1 n_1 + (1 - \lambda_1) n_2 + 1\}) = (\Gamma_{t_2, \omega_2}^{\lambda_2}(D_1 \otimes D_2), \{0, \lambda_2 n_1 + (1 - \lambda_2) n_2 + 1\})$ est équivalent à $(t_1 = t_2, \omega_1 = \omega_2$ et $\lambda_1 = \lambda_2)$,
3. $(\Gamma_{t_1, j_1, \tau_1}^1(D_1 \otimes D_2), \{j, j + n_1 + 1\}) \neq (\Gamma_{t_2, \omega_2}^{\lambda}(D_1 \otimes D_2), \{0, \lambda_2 n_1 + (1 - \lambda_2) n_2 + 1\})$,
4. $(\Gamma_{t, j, \tau}^1(D_1 \otimes D_2), \{j, j + n_1 + 1\}) \neq (\Gamma_{p, i, \varrho}^1(D_2 \otimes D_1), \{i, i + n_2 + 1\})$.

Supposons que D_1 et D_2 soient égaux. Posons donc $D = D_1 = D_2$. On a alors les assertions suivantes :

5. $(\Gamma_{t_1, j_1, \tau_1}^1(D \otimes D), \{j_1, j_1 + n_1 + 1\}) = (\Gamma_{t_2, j_2, \tau_2}^1(D \otimes D), \{j_2, j_2 + n_1 + 1\})$ est équivalent à $(j_1 = j_2, t_1 = t_2$ et $\tau_1 = \tau_2)$,
6. $(\Gamma_{t, \omega}^{\lambda}(D \otimes D), \{0, n_1 + 1\}) = (\Gamma_{\omega, t}^{1-\lambda}(D \otimes D), \{0, n_1 + 1\})$,
7. $(\Gamma_{t_1, j_1, \tau_1}^1(D \otimes D), \{j, j + n_1 + 1\}) \neq (\Gamma_{t_2, \omega_2}^{\lambda}(D \otimes D), \{0, n_1 + 1\})$.

Démonstration. Soient D_1 et D_2 deux diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 , i un entier de l'intervalle $\llbracket 1, n_1 \rrbracket$, ϱ un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket$, p un entier de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$, j, j_1 et j_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 1, n_2 \rrbracket$, τ , respectivement τ_1 , respectivement τ_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$, respectivement $\llbracket 0, f_{D_2}(j_1) \rrbracket$, respectivement $\llbracket 0, f_{D_2}(j_2) \rrbracket$, ω, ω_1 et ω_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$, t, t_1 et t_2 des entiers de l'intervalle $\llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ et $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ des éléments de $\{0, 1\}$.

Supposons que D_1 et D_2 soient distincts.

1. Pour montrer ce point, il suffit de prouver l'implication :

$$\Gamma_{t_1, j, \tau_1}^1(D_1 \otimes D_2) = \Gamma_{t_2, j, \tau_2}^1(D_1 \otimes D_2) \Rightarrow (t_1 = t_2 \text{ et } \tau_1 = \tau_2).$$

Supposons donc que $K_1 = \Gamma_{t_1, j, \tau_1}^1(D_1 \otimes D_2)$ et $K_2 = \Gamma_{t_2, j, \tau_2}^1(D_1 \otimes D_2)$ soient égaux. Notons $p_1(j)$ (respectivement $p_2(j)$) le sommet j du diagramme K_1 (respectivement du diagramme K_2) et intéressons-nous à sa fertilité $f_1(j)$ (respectivement $f_2(j)$). On a alors :

$$f_1(j) = f_{D_1}(0) - t_1 + \tau_1 + 1 = f_{D_1}(0) - t_2 + \tau_2 + 1 = f_2(j).$$

Considérons maintenant l'ensemble de cordes $A_{K_1, j}$ (respectivement $A_{K_2, j}$) ainsi que la corde $a = \{j, j + n_1 + 1\}$. On sait que : $a = a_{K_1, \tau_1+1}^j = a_{K_2, \tau_2+1}^j$. On obtient donc que $t_1 = t_2$ et que $\tau_1 = \tau_2$.

2. Supposons que les diagrammes de dissection $\Gamma_{t_1, \omega_1}^{\lambda_1}(D_1 \otimes D_2)$ et $\Gamma_{t_2, \omega_2}^{\lambda_2}(D_1 \otimes D_2)$ soient égaux et que les cordes $\{0, \lambda_1 n_1 + (1 - \lambda_1) n_2 + 1\}$ et $\{0, \lambda_2 n_1 + (1 - \lambda_2) n_2 + 1\}$ soient égales. Supposons par l'absurde que λ_1 et λ_2 sont différents. On obtient alors que $n_1 = n_2$. Sans perte de généralité, on peut poser $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. Notons $K_1 = \Gamma_{t_1, \omega_1}^{\lambda_1}(D_1 \otimes D_2)$ et

$K_2 = \Gamma_{t_2, \omega_2}^{\lambda_2}(D_1 \otimes D_2)$. Considérons le sous-graphe de K_1 (respectivement K_2) formé par les sommets appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n_1 + 1\}$ et contractons la corde $\{0, n_1 + 1\}$. Comme K_1 et K_2 sont égaux, les diagrammes obtenus doivent être égaux. Or, dans le cas de K_1 (respectivement K_2) le diagramme obtenu est D_2 (respectivement D_1). On obtient alors $D_1 = D_2$, ce qui est exclu. Les entiers λ_1 et λ_2 sont donc égaux. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Posons p_1 (respectivement p_2) la racine de K_1 (respectivement K_2) et intéressons-nous à leur fertilité f_1 (respectivement f_2). On a alors :

$$f_1 = f_{D_2}(0) - \omega_1 + t_1 + 1 = f_{D_2}(0) - \omega_2 + t_2 + 1 = f_2.$$

Considérons maintenant les ensembles de cordes $A_{K_1,0}$ (respectivement $A_{K_2,0}$) ainsi que la corde $a = \{0, n_2 + 1\}$. On sait que : $a = a_{K_1, t_1+1}^0 = a_{K_2, t_2+1}^0$. On obtient donc que $t_1 = t_2$ et que $\omega_1 = \omega_2$.

3. Ce point est immédiat puisque j est non nul.
4. Raisonnons par l'absurde et supposons alors qu'il existe des entiers $j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket$ (respectivement $i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$), $t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket$ et $\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$ (respectivement $p \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket$ et $\varrho \in \llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket$) tels que

$$(\Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2), \{j, j + n_1 + 1\}) = (\Gamma_{p,i,\varrho}^1(D_2 \otimes D_1), \{i, i + n_2 + 1\}).$$

Alors $i = j$ et $n_1 = n_2$. Notons $K_1 = \Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2)$ et $K_2 = \Gamma_{p,i,\varrho}^1(D_2 \otimes D_1)$. Considérons le sous-graphe de K_1 (respectivement K_2) formé par les sommets appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, j\} \cup \{j + n_1 + 1, \dots, j + 2n_1 + 1\}$ et contractons la corde $\{j, j + n_1 + 1\}$. Comme K_1 et K_2 sont égaux, les diagrammes obtenus doivent être égaux. Or, dans le cas de K_1 (respectivement K_2) le diagramme obtenu est D_2 (respectivement D_1). On obtient alors $D_1 = D_2$, ce qui est exclu.

Supposons maintenant que D_1 et D_2 soient égaux et posons $D = D_1 = D_2$.

5. Il suffit de considérer la preuve du point 1.
6. Ceci est vrai par construction.
7. Ceci est immédiat car j est non nul.

□

Corollaire 139. Soient D_1 et D_2 des diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 . Définissons σ_D le nombre de couples distincts (G, a) , où G est un diagramme de dissection de degré $n_1 + n_2 + 1$ et a est une corde de la forme $a = \{u, v\}$ avec $0 \leq u < v \leq n_1 + n_2 + 1$, obtenus à partir des opérations 3 et 4 appliquées à D_1 et D_2 . On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma(D_1, D_2) &= \begin{cases} (f_{D_2}(0) + 1) \sum_{i=0}^{n_1} (f_{D_1}(i) + 1) + (f_{D_1}(0) + 1) \sum_{j=0}^{n_2} (f_{D_2}(j) + 1) & \text{si } D_1 \neq D_2, \\ (f_{D_2}(0) + 1) \sum_{i=0}^{n_1} (f_{D_1}(i) + 1) & \text{si } D_1 = D_2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f_{D_2}(0) + 1)(3n_1 + 1) + (f_{D_1}(0) + 1)(3n_2 + 1) & \text{si } D_1 \neq D_2, \\ (f_{D_1}(0) + 1)(3n_1 + 1) & \text{si } D_1 = D_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Calcul direct.

□

Proposition 140. *Soient D_1 et D_2 des diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 . On a alors :*

$$L(D_1 D_2) = \sum_{\substack{t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket \\ \tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket}} x^{k_{\{a_j, n_1\}}(\Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2))} \Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2) \\ + \sum_{\substack{\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \\ t \in \llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket}} x^{k_{\{a_i, n_2\}}(\Gamma_{\tau,i,t}^1(D_2 \otimes D_1))} \Gamma_{\tau,i,t}^1(D_2 \otimes D_1) + \sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\} \\ t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket \\ \tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket}} \Gamma_{t,\tau}^\lambda(D_1 \otimes D_2)$$

avec

$$a_{j,n_1} = \{j, j + n_1 + 1\} \text{ et } a_{i,n_2} = \{i, i + n_2 + 1\}.$$

Ceci peut se réécrire de la manière suivante :

$$L(D_1 D_2) = \sum_{\substack{t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket \\ \tau \in \llbracket 0, l_2(j) - 1 \rrbracket}} \Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2) + x \sum_{\substack{t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket \\ \tau \in \llbracket l_2(j), f_{D_2}(j) \rrbracket}} \Gamma_{t,j,\tau}^1(D_1 \otimes D_2) \\ + \sum_{\substack{\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \\ t \in \llbracket 0, l_1(i) - 1 \rrbracket}} \Gamma_{\tau,i,t}^1(D_2 \otimes D_1) + x \sum_{\substack{\tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \\ t \in \llbracket l_1(i), f_{D_1}(i) \rrbracket}} \Gamma_{\tau,i,t}^1(D_2 \otimes D_1) + \sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\} \\ t \in \llbracket 0, f_{D_1}(0) \rrbracket \\ \tau \in \llbracket 0, f_{D_2}(0) \rrbracket}} \Gamma_{t,\tau}^\lambda(D_1 \otimes D_2)$$

où, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \llbracket 1, n_2 \rrbracket$, $(l_1(i), l_2(j))$ est l'unique couple d'entiers de $\llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket \times \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$ tel que la corde $a_{D_1, l_1(i)}^i$ de D_1 soit numérotée par i et la corde $a_{D_2, l_2(j)}^j$ de D_2 soit numérotée par j .

Démonstration. On rappelle que Id désigne l'identité et que l est la projection sur \mathcal{D}^+ . Par définition, on sait que :

$$L(D_1 D_2) = \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 D_2 \circ \text{Diagramme}} \right) (G) G \\ = \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 \circ (D_2 \circ \text{Diagramme})} - Z_{(D_1 \circ D_2) \circ \text{Diagramme}} \right) (G) G \\ = \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left((Z_{D_1} \otimes Z_{D_2} \otimes Z_{\text{Diagramme}}) \circ (Id \otimes \Delta) \circ \Delta \right) (G) G \\ - \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left((Z_{D_1} \otimes Z_{D_2} \otimes Z_{\text{Diagramme}}) \circ (\Delta \otimes Id) \circ (l \otimes Id) \circ \Delta \right) (G) G$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 D_2} \otimes Z \right) \left(\Delta(G) \right) G & \text{si } D_1 \neq D_2, \\ 2 \sum_{\substack{G \in \mathcal{D} \\ G \text{ diagramme}}} \left(Z_{D_1 D_2} \otimes Z \right) \left(\Delta(G) \right) G & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, les diagrammes obtenus à partir des opérations 3 et 4 interviennent dans $L(D_1 D_2)$.

Soit maintenant $(G, a) \in (\mathcal{D})_{n_1+n_2+1} \times \mathcal{C}(G)$ un couple diagramme-corde tel que $q_{\{a\}}(G) = D_1 D_2$. Ecrivons a sous la forme $a = \{i, j\}$ avec $0 \leq i < j \leq n_1 + n_2 + 1$. Il existe $\nu \in \llbracket 1, f_G(i) \rrbracket$ tel que $a_\nu^i = \{i, j\}$. $q_a(G) = D_1 D_2$ donc $j = i + n + 1$ avec $n \in \{n_1, n_2\}$.

Cas 1 : $i \neq 0$. Considérons le sous-graphe S de G contenant les sommets

$$\{0, \dots, i\} \cup \{j, \dots, n_1 + n_2 + 1\}.$$

On obtient donc

$$(G, a) = \begin{cases} (\Gamma_{t,i,\tau}^1(D_1 \otimes D_2), \{i, i + n_1 + 1\}) \text{ avec } t = f_{D_1}(0) - f_G(i) + \nu \text{ et } \tau = \nu - 1 & \text{si } q_{\{a\}}(S) = D_2, \\ (\Gamma_{\tau,i,t}^1(D_2 \otimes D_1), \{i, i + n_2 + 1\}) \text{ avec } t = \nu - 1 \text{ et } \tau = f_{D_2}(0) - f_G(i) + \nu & \text{si } q_{\{a\}}(S) = D_1. \end{cases}$$

Cas 2 : $i = 0$. Considérons le sous-graphe S de G contenant les sommets $\{0, \dots, j\}$. On obtient donc

$$(G, a) = \begin{cases} (\Gamma_{t,\tau}^1(D_1 \otimes D_2), \{0, n_2 + 1\}) \text{ avec } t = f_{D_1}(0) - f_G(0) + \nu \text{ et } \tau = \nu - 1 & \text{si } q_{\{a\}}(S) = D_2, \\ (\Gamma_{t,\tau}^0(D_1 \otimes D_2), \{0, n_1 + 1\}) \text{ avec } t = \nu - 1 \text{ et } \tau = f_{D_2}(0) - f_G(0) + \nu & \text{si } q_{\{a\}}(S) = D_1. \end{cases}$$

□

Corollaire 141. *On suppose que $x \in \mathbb{N}$. Soient D_1 et D_2 des diagrammes de dissection de degrés non nuls respectifs n_1 et n_2 . Notons $\sigma_{L(D_1 D_2)}$ le nombre de termes dans $L(D_1 D_2)$ comptés avec leurs multiplicités. On a alors :*

$$\sigma_{L(D_1 D_2)} = (f_{D_2}(0) + 1) \left[x(3n_1 + 1) + (1 - x) \sum_{i=1}^{n_1} l_1(i) + (1 - x)(f_{D_1}(0) + 1) \right] \\ + (f_{D_1}(0) + 1) \left[x(3n_2 + 1) + (1 - x) \sum_{j=1}^{n_2} l_2(j) + (1 - x)(f_{D_2}(0) + 1) \right]$$

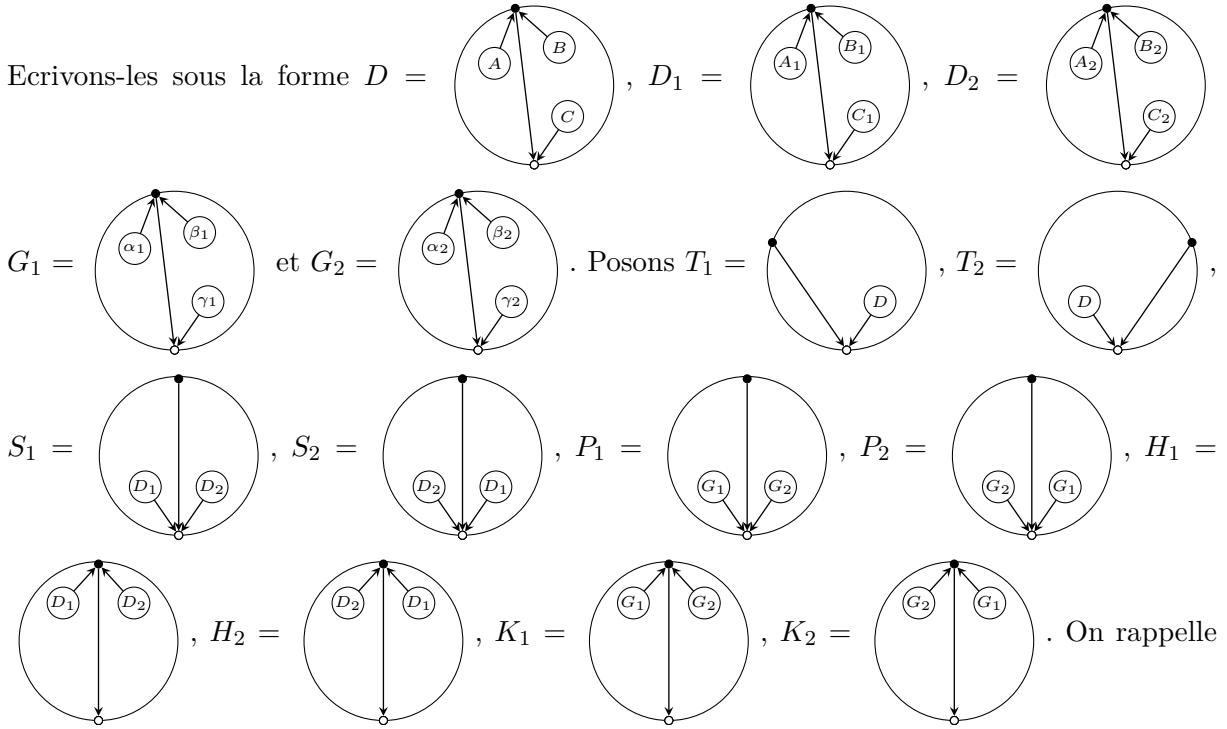
où, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \llbracket 1, n_2 \rrbracket$, $(l_1(i), l_2(j))$ est l'unique couple d'entiers de $\llbracket 0, f_{D_1}(i) \rrbracket \times \llbracket 0, f_{D_2}(j) \rrbracket$ tel que la corde $a_{D_1, l_1(i)}^i$ de D_1 soit numérotée par i et la corde $a_{D_2, l_2(j)}^j$ de D_2 soit numérotée par j .

Proposition 142. *Soit x un élément de \mathbb{K} . Soient D, D_1, D_2, G_1 et G_2 cinq diagrammes de dissection non vides. On a alors :*

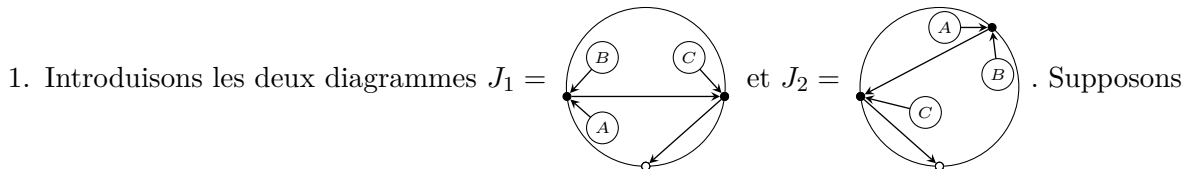
1. $L(D) \neq L(G_1 G_2)$,

2. $L(D_1D_2) = L(G_1G_2) \iff ((D_1, D_2) = (G_1, G_2) \text{ ou } (D_1, D_2) = (G_2, G_1)).$

Démonstration. Soit x un élément de \mathbb{K} . Soient D, D_1, D_2, G_1 et G_2 cinq diagrammes de dissection. Considérons la fertilité de leur racine. De la même manière que dans la démonstration de la proposition 135, si $f_D(0) \neq f_{G_1}(0) + f_{G_2}(0)$ et si $f_{D_1}(0) + f_{D_2}(0) \neq f_{G_1}(0) + f_{G_2}(0)$ on obtient automatiquement que $L(D) \neq L(G_1G_2)$ et que $L(D_1D_2) \neq L(G_1G_2)$. Considérons donc maintenant D, D_1, D_2, G_1 et G_2 tels que $f_D(0) = f_{G_1}(0) + f_{G_2}(0)$ et $f_{D_1}(0) + f_{D_2}(0) = f_{G_1}(0) + f_{G_2}(0)$.



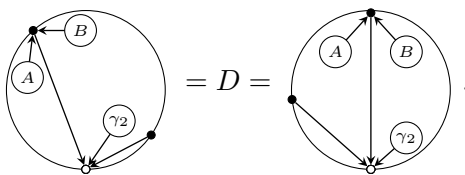
que pour tout entier naturel n , on note X_n la corolle de degré n .



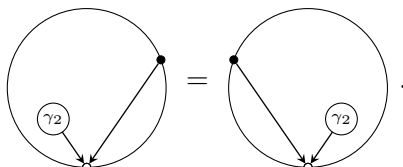
par l'absurde que $L(D)$ et $L(G_1G_2)$ soient égaux. On a donc $f_D(0) \geq 2$. Deux cas se présentent alors :

- (a) Considérons d'abord le cas où $f_{G_1}(0)$ et $f_{G_2}(0)$ sont tous les deux différents de 1. On obtient alors qu'il existe un entier $i \in \{1, 2\}$ tel que $J_1 = K_i$. Ceci est impossible.
- (b) Considérons le cas où il existe au moins un entier $i \in \{1, 2\}$ tel que $f_{G_i}(0) = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 1$. Le diagramme γ_1 est donc vide. Utilisons maintenant l'égalité entre les ensembles $\{T_1, T_2\}$ et $\{P_1, P_2\}$. On a alors deux possibilités.
 - i. Supposons que les couples (T_1, T_2) et (P_1, P_2) soient égaux. On obtient alors que les diagrammes α_1 et β_1 sont vides, que $G_1 = X_1$, $A = \alpha_2$ et que $B = \beta_2$. On a

en plus la chaîne d'égalités

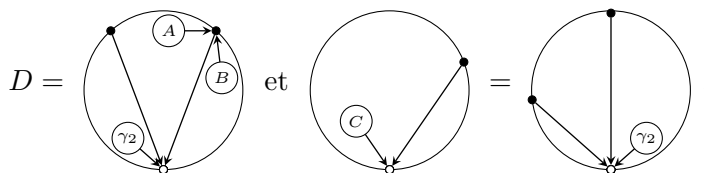


On obtient donc que les diagrammes A et B sont vides ainsi que l'égalité

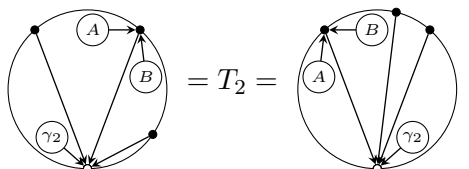


Il existe donc un entier naturel n tel que $\gamma_2 = X_n$. Ainsi $D = X_{n+2}$, $G_1 = X_1$ et X_{n+1} . Ceci est impossible car dans ce cas $L(D) \neq L(G_1G_2)$.

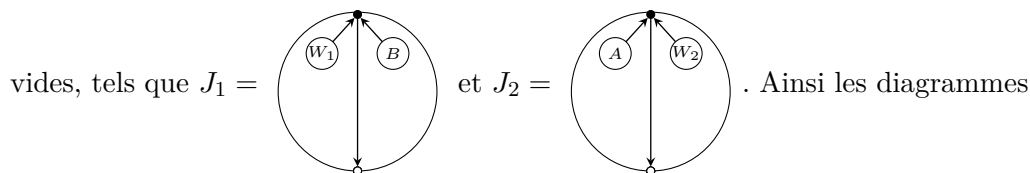
- ii. Supposons que les couples (T_1, T_2) et (P_2, P_1) soient égaux. On obtient alors que les diagrammes α_2 et β_2 sont vides, que $A = \alpha_1$ et que $B = \beta_1$. On a en plus les égalités



On obtient donc la chaîne d'égalités



Si γ_2 est vide alors A et B sont également vides. On obtient ainsi $D = X_2$ et $G_1 = G_2 = X_1$, ce qui est absurde. Le diagramme γ_2 est donc non vide. Comme, pour tous les entiers i et j de $\{1, 2\}$, les diagrammes J_i et K_j sont distincts, on obtient qu'il existe des diagrammes de dissection W_1 et W_2 , tous les deux non



vides, tels que $J_1 =$ et $J_2 =$. Ainsi les diagrammes A et B sont vides et on obtient que D , G_1 et G_2 sont des corolles. Il y a donc une contradiction.

Ainsi, $L(D)$ et $L(G_1G_2)$ sont distincts.

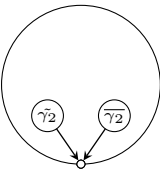
- 2. Supposons que $L(D_1D_2)$ et $L(G_1G_2)$ soient égaux. Trois cas sont à considérer.

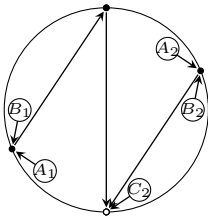
- (a) Supposons d'abord que $f_{D_1}(0)$, $f_{D_2}(0)$, $f_{G_1}(0)$ et $f_{G_2}(0)$ soient tous égaux à 1. L'éga-

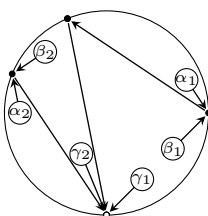
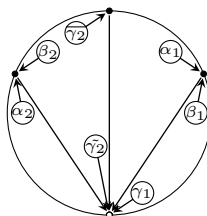
lité entre les ensembles $\{S_1, S_2\}$ et $\{P_1, P_2\}$ donne immédiatement le résultat.

- (b) Supposons que $f_{D_1}(0)$, $f_{D_2}(0)$, $f_{G_1}(0)$ et $f_{G_2}(0)$ soient des entiers naturels non nuls tous différents de 1. L'égalité entre les ensembles $\{H_1, H_2\}$ et $\{K_1, K_2\}$ donne le résultat.
- (c) Supposons $f_{D_1}(0) = 1$ et que $f_{D_2}(0) \neq 1$. Les ensembles $\{S_1, S_2\}$ et $\{P_1, P_2\}$ sont égaux. On peut supposer, sans perte de généralité, que $S_1 = P_1$ et $S_2 = P_2$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on a alors $A_i = \alpha_i$ et $B_i = \beta_i$.

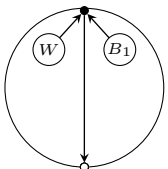
Montrons maintenant qu'il existe un unique entier $i \in \{1, 2\}$ tel que $f_{G_i}(0) = 1$. Il suffit de prouver l'existence, l'unicité sera automatique. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $f_{G_1}(0)$ et $f_{G_2}(0)$ différents de 1. Intéressons-nous à Ω_1 (respectivement Ω_2) l'ensemble des diagrammes de dissection de fertilité $f_{D_1}(0) + f_{D_2}(0)$ en la racine construits afin d'établir $L(D_1 D_2)$ (respectivement $L(G_1 G_2)$). En écri-

vant γ_2 sous la forme $\gamma_2 =$  avec $\overline{\gamma_2}$ de fertilité 1 en la racine, on

obtient alors que le diagramme $\Omega_{1,1} =$  est égal au diagramme

$\Omega_{2,1} =$  ou au diagramme $\Omega_{2,2} =$ . On obtient

donc que $B_2 = \beta_2$ est vide et que $A_2 (= \alpha_2)$ et D_1 sont de même degré. Considérons alors les diagrammes K_1 et K_2 . S'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $K_1 = H_i$ ou $K_2 = H_i$ alors au moins l'un des couples (G_1, G_2) et (G_2, G_1) est égal au couple (D_i, D_{-i+3}) . Il y a donc contradiction. Il existe donc un diagramme de dissection W non vide tel

que $K_1 =$ . On a alors $\deg(D_1) > \deg(B_1) = \deg(G_2) > \deg(\alpha_2) + 1 >$

$\deg(D_1)$ et donc contradiction.

Ainsi, il existe un unique $i \in \{1, 2\}$ tel que $f_{G_i}(0) = 1$. Si $i = 1$, il est immédiat que les couples (G_1, G_2) et (D_1, D_2) sont égaux. Si $i = 2$, on obtient alors que le diagramme

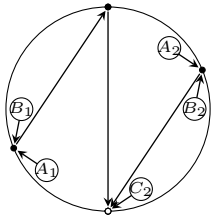
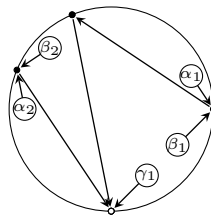
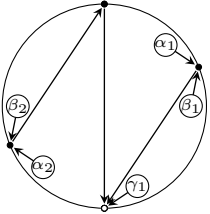
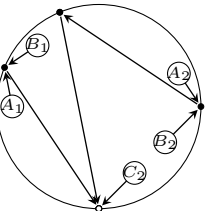
$\Omega_{1,1} =$  est égal au diagramme $\Omega_{2,1} =$  ou au

diagramme $\Omega_{2,2} =$ . De plus, on a $f_{\gamma_1}(0) = f_{C_2}(0)$. Les diagrammes

γ_1 et C_2 sont donc égaux. Si $\Omega_{1,1} = \Omega_{2,2}$, on obtient alors $A_1 = A_2 = \alpha_1 = \alpha_2$ et $B_1 = B_2 = \beta_1 = \beta_2$. Ainsi $(D_1, D_2) = (G_2, G_1)$. Si $\Omega_{1,1} \neq \Omega_{2,2}$ alors $\Omega_{1,1} = \Omega_{2,1}$ et

$\Omega_{2,2} =$ . Ceci est impossible.

On a ainsi montré l'assertion

$$L(D_1 D_2) = L(G_1 G_2) \iff ((D_1, D_2) = (G_1, G_2) \text{ ou } (D_1, D_2) = (G_2, G_1)).$$

□

Remarque. Supposons que le paramètre x soit égal à 1. Considérons un arbre enraciné sous-binaire t de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier i de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il est possible de calculer le nombre $s_{t,i}$ de diagrammes de dissection, comptés avec multiplicité, de degré n et de fertilité i en la racine apparaissant dans $\varphi(t)$. En effet, si t est de degré au moins 2 alors, il existe soit un arbre sous-binaire t' soit une forêt sous-binaire $t_1 t_2$ de degré $n - 1$ tel que soit $t = \uparrow^{t'} = B(t')$ soit $t = \uparrow^{t_1} \mathbf{V}^{t_2} = B(t_1 t_2)$.

Supposons d'abord que t soit de la forme $B(t')$ et que l'on connaisse $s_{t',i}$ pour tout i de l'intervalle $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Alors les entiers $s_{t,1}, \dots, s_{t,n}$ sont obtenus grâce au programme Maxima suivant :

```
list_nb_termes_fert_greffe(L) := block([res, nbpf, m, j, k],
  nbpf : append(L, [0]),
  m : length(nbpf),
  res : [nbpf[1] * (3*m - 2) + 2 * sum(nbpf[k], k, 2, m)],
  res : append(res, create_list(nbpf[j] * (3*m - 1 - j)
    + 2 * (sum(nbpf[k], k, j + 1, m)
      + nbpf[j - 1]), j, 2, m)),
  return(res)
);
```

Supposons maintenant que t soit de la forme $B(t_1 t_2)$ et que l'on connaisse $s_{t_1,i}$ et $s_{t_2,j}$ pour

tout couple d'entiers (i, j) du pavé $\llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \llbracket 1, n_2 \rrbracket$ où n_1 (respectivement n_2) est le degré de t_1 (respectivement t_2). Alors les entiers $s_{t,1}, \dots, s_{t,n}$ sont obtenus grâce au programme Maxima suivant :

```
list_nb_termes_fert_grefe2(L1, L2) := block([m1, m2, nbpf1,
                                             nbpf2, m, res, i, j, k],
  m1: length(L1),
  m2: length(L2),
  nbpf1: append(L1, create_list(0, j, 1, m2+1)),
  nbpf2: append(L2, create_list(0, j, 1, m1+1)),
  m: m1+m2+1,
  res: [(3*m2-1)*nbpf2[1]*sum((k+1)*nbpf1[k], k, 1, m)
        +(3*m1-1)*nbpf1[1]*sum((k+1)*nbpf2[k], k, 1, m)
        +2*sum(sum(nbpf1[j]*nbpf2[k], k, 1, m), j, 1, m)],
  res: append(res,
    [(3*m2-2)*nbpf2[2]*sum((k+1)*nbpf1[k], k, 1, m)
     +(3*m1-2)*nbpf1[2]*sum((k+1)*nbpf2[k], k, 1, m)
     +4*sum(sum(nbpf1[j]*nbpf2[k], k, 1, m), j, 1, m)]),
  res: append(res,
    create_list((3*m2-j)*nbpf2[j]*sum((k+1)*nbpf1[k], k, 1, m)
      +(3*m1-j)*nbpf1[j]*sum((k+1)*nbpf2[k], k, 1, m)
      +2*(sum(sum(sum(nbpf1[i]*nbpf2[k], k, j-1-a, m), i, a, m), a, 1, j-2)
      +sum(sum(nbpf1[i]*nbpf2[k], k, j-1, m), i, 1, m)
      +sum(sum(nbpf1[i]*nbpf2[k], k, 1, m), i, j-1, m)), j, 3, m)),
  return(res)
);
```

Ainsi, de façon récursive on peut, pour tout arbre enraciné t de degré n non nul et tout entier naturel non nul au plus égal à n , connaître les entiers $s_{t,i}$. Pour cela, on appelle L la liste donnant la décomposition de t grâce à l'opérateur de greffe et on utilise le programme Maxima suivant :

```
list_nb_termes(L) := block([m, res],
  m: length(L),
  if m>2 then
    res: [0],
  if equal(L, [1]) then
    res: [1],
  if equal(m, 2) and equal(L, [[1], [1]]) then
    res: [10, 4, 2],
  if equal(m, 1) and notequal(L, [1]) then
    res: list_nb_termes_grefe(list_nb_termes(L[1])),
  if equal(m, 2) and notequal(L, [[1], [1]]) then
    res: list_nb_termes_grefe2(list_nb_termes(L[1]),
                               list_nb_termes(L[2])),
  return(res)
);
```

Donnons en exemple les résultats obtenus pour les arbres enracinés sous-binaires de degré

inférieur ou égal à 5.

t	.	!	V	!	∨	Y	!	∨	∨	∨	∨	Y	!
$s_{t,1}$	1	4	10	32	80	112	368	272	632	904	1 160	1 632	5 448
$s_{t,2}$		2	4	20	40	60	252	120	368	504	680	1 000	3 920
$s_{t,3}$			2	4	16	24	72	68	120	208	264	392	1 312
$s_{t,4}$					4	4	8	16	48	56	72	88	224
$s_{t,5}$								4	8	8	8	8	16

TABLEAU 3.4 – Valeur de $s_{t,i}$ pour tout arbre enraciné sous-binaire t de degré $n \leq 5$ et tout entier i compris entre 1 et n .

Pour tout arbre enraciné t , posons s_t le nombre total de diagrammes de dissection, comptés avec multiplicité, apparaissant dans $\varphi(t)$. Pour les arbres enracinés sous-binaires de degré inférieur ou égal à 5 on obtient :

t	.	!	V	!	∨	Y	!	∨	∨	∨	∨	Y	!
s_t	1	6	16	56	140	200	700	480	1 176	1 680	2 184	3 120	10 920

TABLEAU 3.5 – Valeur de s_t pour tout arbre enraciné sous-binaire t de degré $n \leq 5$.

Proposition 143. *Soit un entier naturel non nul n . Il existe une base \mathcal{B}_1 des forêts sous-binaires et une base \mathcal{B}_2 de l’algèbre des diagrammes de dissection telles que la matrice dans ces bases du morphisme φ restreint aux éléments homogènes de degré n soit triangulaire par blocs.*

Démonstration. Soit n un entier naturel non nul et t un arbre sous binaire de degré n . On note $m(t)$ le nombre de sommets de t ayant deux descendants. Pour toute union disjointe de diagrammes $U = D_1 \dots D_k$ l’entier k est appelé longueur de U et est noté $\mu(U)$. Soit D un diagramme de dissection de degré n . On pose $m(D) = \max\{\mu(q_C(D)), C \in \mathcal{C}(D)\}$. Par définition de l’application L , si $m(D) < m(t)$ alors $Z_D(\varphi(t)) = 0$. □

Corollaire 144. *Soit un entier naturel n non nul. On rappelle que e_n désigne l’arbre échelle de degré n , Y_n désigne le diagramme échelle de degré n et X_n désigne la corolle de degré n . Soit t un arbre sous-binaire. On a $Z_{Y_n}(\varphi(t)) = \begin{cases} n! & \text{si } t = e_n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Z_{X_n}(\varphi(t)) \neq 0$. Plus précisément, $Z_{X_n}(\varphi(t)) = 2^{\text{int}(t)}$ où $\text{int}(t)$ est le nombre de sommets internes, i.e. le nombre de sommets ayant au moins un descendant.*

Démonstration. Il ne reste que la dernière égalité à prouver. Elle se démontre par récurrence sur le degré. □

3.3 Morphismes de \mathcal{H}_D dans \mathbf{QSym}

Dans cette section, l’objectif est de construire des morphismes d’algèbres de Hopf entre \mathcal{H}_D et l’algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques \mathbf{QSym} , selon un procédé décrit par

Aguiar, Bergeron et Sottile et rappelé dans la section 1.3 du chapitre 1. On construira trois morphismes à partir de trois caractères. Le premier ne différencie pas les diagrammes. On décrit le morphisme obtenu lorsque le paramètre x vaut 1. Le deuxième caractère annule tous les diagrammes de dissection de degré supérieur ou égal à deux. Le dernier caractère annule tous les diagrammes sauf éventuellement certaines échelles. On donnera l'image de familles particulières de diagrammes de dissection.

Commençons par une remarque sur la non injectivité dans le cas où H est l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D .

Remarque. Si $f : \mathcal{H}_D \rightarrow \mathbf{QSym}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf graduées homogène de degré 0 alors f n'est pas injectif. En effet, considérons un entier naturel n non nul. On appelle $d_n = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$ le nombre de diagrammes de dissection de degré n et $q_n = 2^{n-1}$ la dimension de \mathbf{QSym}_n . On pose $u_n = \frac{d_n}{q_n}$. On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)!n!(2n+1)!2^{n-1}}{2^n(n+1)!(2n+3)!(3n)!} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{2(2n+3)(2n+2)} > 1.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est alors strictement croissante avec $u_1 = 1$. Comme d_n est inférieur à la dimension de \mathcal{H}_{D_n} , on obtient que $\dim(\mathcal{H}_{D_n}) > \dim(\mathbf{QSym}_n)$ si $n \geq 2$.

3.3.1 Premier choix de ζ

On considère le caractère suivant

$$\zeta_1 : \begin{cases} \mathcal{H}_D & \rightarrow \mathbb{K} \\ U & \mapsto 1. \end{cases}$$

On note Ψ_1 le morphisme construit à partir de ζ_1 grâce au procédé de Aguilar, Bergeron et Sottile.

Exemples. Etablissons l'image par Ψ_1 des diagrammes de dissection de degré $n \leq 3$.

$$\begin{aligned} \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) &= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right) = M_{(2)} + 2M_{(1,1)}, \\ \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} \right) &= M_{(2)} + (1+x)M_{(1,1)}, \\ \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \end{array} \right) &= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \end{array} \right) \\ &= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 24} \\ \text{Diagram 25} \end{array} \right) \\ &= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_{(3)} + 3M_{(2,1)} + 3M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)}, \\
\Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) &= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) \\
&= \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = \Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) \\
&= M_{(3)} + (2+x)M_{(2,1)} + (2+x)M_{(1,2)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)}, \\
\Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) &= M_{(3)} + (1+2x)M_{(2,1)} + (1+x+x^2)M_{(1,2)} + (1+2x)(1+x)M_{(1,1,1)}, \\
\Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) &= M_{(3)} + (1+2x)M_{(2,1)} + (2+x)M_{(1,2)} + (2+x)(1+x)M_{(1,1,1)}.
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Les valeurs de $\Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right)$ et de $\Psi_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right)$ impliquent que, pour $x \neq 1$, $Im(\Psi_1)$ n'est pas un sous-espace de Sym .
2. Les résultats en degrés 2 et 3 impliquent que le morphisme d'algèbres de Hopf Ψ_1 ne peut pas être surjectif dans le cas où x est un élément de $\{-1, 1\}$.

Proposition 145. *Supposons que $x = 1$. Alors, $Im(\Psi_1) \subsetneq Sym$. De plus, pour tout diagramme de dissection $D \in \mathcal{D}$ degré $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\Psi_1(D) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} M_\alpha.$$

Démonstration. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall D \in (\mathcal{D})_n$ diagramme,

$$\Delta(D) = \sum_{C \subset \mathcal{C}(D)} q_C(D) \otimes r_C(D).$$

Donc, en utilisant les fonctions de renumérotation définies dans la sous-section 3.1.4 on a :

$$\Delta^{(k)}(D) = \sum_{C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{k+1} = \mathcal{C}(D)} q_{C_1}^{(k)}(D) \otimes r_{C_2}^{(k)}(D) \otimes \dots \otimes r_{C_{k+1}}(D);$$

ce qui se réécrit :

$$\Delta^{(k)}(w) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \models n \\ C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{k+1} = \mathcal{C}(D) \\ |C_i| = \alpha_i}} q_{C_1}^{(k)}(D) \otimes r_{C_2}^{(k)}(D) \otimes \dots \otimes r_{C_{k+1}}(D).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Psi_1(D) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \models n \\ C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{k+1} = \mathcal{C}(D) \\ |C_i| = \alpha_i}} M_\alpha \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n \\ C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k = \mathcal{C}(D) \\ |C_i| = \alpha_i}} M_\alpha \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \binom{n}{\alpha_1} \dots \binom{n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\alpha_k} M_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} M_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 146. *Pour $x = 1$ on a :*

$$\text{Im}(\Psi_1) = \mathbb{K}[M_1].$$

Remarque. Comme les échelles et les corolles forment deux sous-cogèbres indépendantes du paramètre x , pour tout entier naturel n et tout scalaire $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Psi_1(Y_n) = \Psi_1(X_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} M_\alpha = M_{(1)}^n.$$

3.3.2 Deuxième choix de ζ

On considère une suite $B = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de \mathbb{K} . On considère le caractère $\zeta_{2,B}$ défini par :

$$\zeta_{2,B} : \begin{cases} \mathcal{H}_D \longrightarrow \mathbb{K} \\ D \text{ diagramme} \longmapsto \begin{cases} b_n & \text{si } D = Y_n, \\ 1 & \text{si } D = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Intéressons-nous à deux suites particulières.

Le scalaire b_1 est non nul et la suite $(b_n)_{n \geq 2}$ est nulle

Dans ce cas, l'application $\zeta_{2,B}$ sera simplement notée ζ_{2,b_1} . Appelons Ψ_{2,b_1} le morphisme d'algèbres de Hopf associé à $\zeta_{2,B}$ par le procédé de Aguiar, Bergeron et Sottile.

Lemme 147. *Pour connaître Ψ_{2,b_1} , il suffit de connaître $\Psi_{2,1}$. Plus précisément, soit un entier naturel n et U un élément de \mathcal{H}_D de degré n . On a alors : $\Psi_{2,b_1}(U) = b_1^n \Psi_{2,1}$.*

Démonstration. Ceci est vrai par définition de ζ_{2,b_1} et construction de Ψ_{2,b_1} . □

Intéressons-nous donc maintenant au morphisme $\Psi_{2,1}$.

Lemme 148. Soit n un entier naturel non nul et D un diagramme de dissection de degré n . Pour toute composition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de n , on sait qu'il existe un polynôme $Q_{D,\alpha}$ à coefficients dans \mathbb{K} tel que $\Psi_{2,1}(D)$ s'écrive :

$$\Psi_{2,1}(D) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} Q_{D,\alpha} M_\alpha.$$

Soit maintenant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ une composition de n . Supposons que $Q_{D,\alpha}$ soit non nul. On a alors $\alpha_k = 1$ et $1 \leq \alpha_i \leq 1 + \sum_{s=1}^{k-i} \alpha_{i+s}$ pour tout entier i de l'intervalle $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Le morphisme $\Psi_{2,1}$ n'est donc pas surjectif.

Démonstration. Ceci provient du fait que, si D est un diagramme de dissection et l'ensemble C est un singleton, alors $q_C(D)$ est le produit d'au plus deux diagrammes de dissection. \square

L'image de certains diagrammes de dissection par le morphisme $\Psi_{2,1}$ est facilement déterminable. Introduisons une nouvelle notation. Pour tout entier naturel n non nul on appelle \bar{Y}_n le diagramme de dissection de degré n tel que pour tout entier de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ la corde i soit orientée de i vers $i-1$.

Proposition 149. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soient u et v deux entiers naturels éventuellement nuls tels que $n = u + v$. On a :

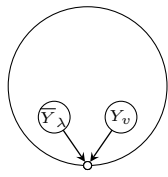
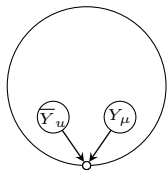
$$\Psi_{2,1} \left(\text{Diagramme avec } \bar{Y}_u \text{ et } \bar{Y}_v \right) = \begin{cases} \frac{n!}{u!} \prod_{k=0}^{u-1} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}} & \text{si } u \neq 0, \\ n! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}} & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

2. En posant $u = v = n-3$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi_{2,1} \left(\text{Diagramme avec } \bar{Y}_v \text{ et } \bar{Y}_u \right) &= (n-2)! \sum_{p=0}^{n-3} (n-2-p) M_{\underbrace{(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)}_{p \text{ fois } \quad n-2-p \text{ fois}}} + n! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}, \\ \Psi_{2,1} \left(\text{Diagramme avec } \bar{Y}_u \text{ et } \bar{Y}_v \right) &= (n-2)! \sum_{p=0}^{n-3} (n-2-p) M_{\underbrace{(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)}_{p \text{ fois } \quad n-2-p \text{ fois}}} + n! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Ces résultats se montrent par récurrence sur le degré des diagrammes.

1. Si u ou v est nul, le résultat est immédiat. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que pour tout couple d'entiers non nuls (u, v) vérifiant $u + v = n$ on ait le résultat énoncé. Soit donc un couple d'entiers non nuls (u, v) tel que $u + v = n$, posons $\lambda = u + 1$,

$\mu = v + 1$ et considérons les diagrammes $D_1 =$  et $D_2 =$ . On

a alors :

$$\begin{aligned} \Psi_{2,1}(D_1) &= (1 + ux) \frac{n!}{u!} \prod_{k=0}^{u-1} (1 + kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} + v \frac{n!}{(u+1)!} \prod_{k=0}^u (1 + kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} \\ &= \frac{(n+1)!}{(u+1)!} \prod_{k=0}^u (1 + kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}}. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient :

$$\Psi_{2,1}(D_2) = \frac{(n+1)!}{u!} \prod_{k=0}^{u-1} (1 + kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}}.$$

2. Pour les diagrammes de la forme  ou de la forme  la dé-

monstration est identique. Il s'agit toujours d'une récurrence sur le degré. On sait que

$$\Psi_{2,1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \right) = M_{(2,1)} + 6M_{(1,1,1)}. \text{ On suppose qu'il existe un entier } n \text{ tel que le}$$

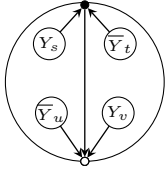
résultat soit vrai en degré n et, en posant $\mu = v + 1 = n - 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi_{2,1} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) &= (n-1)(n-2)! \sum_{p=0}^v (n-2-p) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_p \text{ fois}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}} \\ &\quad + (n-1)n! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} + (n-1)! \sum_{p=0}^{n-2} M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_p \text{ fois}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}} \\ &\quad + n(n-1)! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{v+4 \text{ fois}}} + n! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} \\ &= \sum_{p=0}^{n-2} (n-1-p)(n-1)! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_p \text{ fois}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}} + (n+1)! M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}}. \end{aligned}$$

□

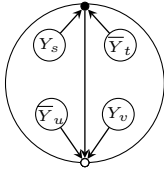
Lemme 150. Soit n un entier naturel non nul et (s, t, u, v) un quadruplet d'entiers naturels

tels que $s + t + u + v = n - 1$. On note $g_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}(D)$ le coefficient de $M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}$ dans $\Psi_{2,1}(D)$

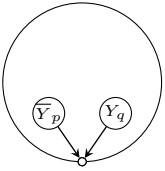
avec $D =$ . On a alors :

$$g_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}} = \begin{cases} \frac{n!}{u!(t+1)!} \prod_{l=0}^{u-1} (1+lx) \prod_{k=0}^t (1+kx) & \text{si } u \neq 0, \\ \frac{n!}{(t+1)!} \prod_{k=0}^t (1+kx) & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Si $n \in \{1, 2, 3\}$ le résultat est trivial. Supposons l'énoncé vrai pour un certain degré n non nul. Soit (u, v, s, t) un quadruplet d'entiers naturels tel que $u + v + s + t = n$ et on

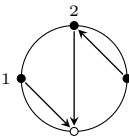
considère le diagramme D de degré $n + 1$ tel que $D =$ . Soit a une corde de D .

Considérons l'élément $q_{\{a\}}(D)$ de degré n . S'il s'agit d'un diagramme de dissection alors $q_{\{a\}}(D)$ est de la forme de l'énoncé sinon, $q_{\{a\}}(D)$ est le produit de deux diagrammes de dissection de

la forme . □

Proposition 151. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On a :*

$$\Psi_{2,1} \left(\text{Diagram with } Y_u \text{ and a chord} \right) = \sum_{p=0}^{n-3} \left[(n-2-p) \prod_{k=0}^{n-3} (1+kx) \right] M_{\underbrace{(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)}_{p \text{ fois } \quad n-2-p \text{ fois}}} + \frac{n(n-1)(1+x)}{2} \prod_{k=0}^{n-3} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}}.$$

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence sur le degré. Pour  , on a :

$$\Psi_{2,1} \left(\text{Diagram with nodes 1, 2, 3} \right) = M_{(2,1)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)}.$$

Supposons le résultat vrai pour un certain degré

n . Posons $\lambda = n - 2$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \Psi_{2,1} \left(\text{Diagram} \right) &= [1 + (n - 2)x] \sum_{p=0}^{n-3} \left[(n - 2 - p) \prod_{k=0}^{n-3} (1 + kx) \right] M(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}) \\
 &+ [1 + (n - 2)x] \frac{n(n - 1)(1 + x)}{2} \prod_{k=0}^{n-3} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ fois}}) \\
 &+ \sum_{p=0}^{n-2} \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}) + n \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ fois}}) \\
 &+ xn \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ fois}}) \\
 &= \sum_{p=0}^{n-2} \left[(n - 1 - p) \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) \right] M(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{n-1-p \text{ fois}}) \\
 &+ \frac{(n + 1)n(1 + x)}{2} \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ fois}}).
 \end{aligned}$$

□

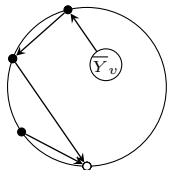
Proposition 152. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On a :

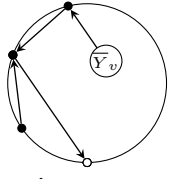
$$\begin{aligned}
 \Psi_{2,1} \left(\text{Diagram 1} \right) &= \Psi_{2,1} \left(\text{Diagram 2} \right) = \\
 &\sum_{s=1}^{n-2} P_s(n, x) \prod_{k=0}^{n-s-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-2-s \text{ fois}}, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{s \text{ fois}}) + n \prod_{k=0}^{n-2} (1 + kx) M(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})
 \end{aligned}$$

où les polynômes $P_s \in \mathbb{K}[n, x]$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
 P_1(n, x) &= 1, \\
 P_s(n, x) &= (n - 2)xP_{s-1}(n - 1, x) + \prod_{k=3}^{s+1} [1 + (n - k)x] \text{ pour } s \in \llbracket 2, n - 2 \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence sur le degré. Démontrons l'énoncé pour

les diagrammes de la forme . La preuve est identique pour ceux de la forme



. On sait que $\Psi_{2,1} \left(\begin{matrix} 2 \\ 1 \quad 3 \end{matrix} \right) = M_{(2,1)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)}$. Supposons le résultat

vrai pour un certain degré $n \geq 3$. Posons $\mu = v + 1 = n - 2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Psi_{2,1} \left(\begin{matrix} \text{Diagram} \\ \bar{Y}_\mu \end{matrix} \right) &= \prod_{k=0}^{n-1} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} + (n-1)xn \prod_{k=0}^{n-2} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} \\ &+ (n-1)x \sum_{s=2}^{n-1} \left[P_{s-1}(n, x) \prod_{k=0}^{n-1-s} (1+kx) \right] M_{\underbrace{(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)}_{n-1-s \text{ fois } \quad s \text{ fois}}} \\ &+ n \prod_{k=0}^{n-2} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ fois}}} + \sum_{s=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-2} (1+kx) M_{\underbrace{(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)}_{n-1-s \text{ fois } \quad s \text{ fois}}}. \end{aligned}$$

□

Le programme Maxima suivant détermine le polynôme P_s grâce à la relation de récurrence établie dans la proposition précédente.

```
calcul_poly_P(s,n):=block([res],
  if equal(s,1) then res:1
  else (
    res:(n-2)*x*calcul_poly_P(s-1,n-1)+prod(1+(n-k)*x,k,3,s+1),
    res:rat(res,x)
  ),
  return(res)
);
```

Donnons les polynômes P_s pour s compris entre 1 et 5.

s	$P_s(n, x)$
1	1
2	$(2n - 5)x + 1$
3	$(26 - 18n + 3n^2)x^2 + (3n - 9)x + 1$
4	$(-154 + 142n - 42n^2 + 4n^3)x^3 + (71 - 42n + 6n^2)x^2 + (4n - 14)x + 1$
5	$(1044 - 1160n + 465n^2 - 80n^3 + 5n^4)x^4 + (-580 + 465n - 120n^2 + 10n^3)x^3 + (155 - 80n + 10n^2)x^2 + (5n - 20)x + 1$

TABLEAU 3.6 – Polynômes P_s pour s compris entre 1 et 5.

Remarque. Par définition, pour tout entier naturel non nul s , la constante du polynôme P_x est égale à 1. Pour tout entier $s \geq 2$, le coefficient en x de P_s est égal à $sn - \frac{s(s+3)}{2}$.

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est quelconque

Appelons $\Psi_{2,B}$ le morphisme d'algèbres de Hopf associé à la suite B par le processus de Aguiar, Bergeron et Sottile.

Remarques.

1. Comme les échelles forment une sous-algèbre de Hopf telle que pour tout entier naturel non nul n et tout ensemble $C \in \mathcal{C}(Y_n)$ le contracté $q_C(Y_n)$ soit un diagramme de dissection, on a alors

$$\Psi_{2,B}(Y_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \prod_{i=1}^k b_{\alpha_i} M_{\alpha}.$$

Dans le cas où B est la suite constante égale à 1 on a simplement $\Psi_{2,B}(Y_n) = \Psi_1(Y_n)$.

2. Soit n un entier naturel non nul et D un diagramme de dissection de degré n . On écrit $\Psi_{2,1}(D)$ et $\Psi_{2,B}(D)$ sous la forme

$$\Psi_{2,1}(D) = \sum_{\alpha \models n} g_{\alpha}(D) M_{\alpha}, \quad \Psi_{2,B}(D) = \sum_{\alpha \models n} w_{\alpha}(D) M_{\alpha}.$$

On a alors $w_{(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})}(D) = b_1^n g_{(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})}(D)$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On a alors $\Psi_{2,B}(X_n) = b_1^n \Psi_{2,1}(X_n) = \Psi_{2,b_1}(X_n)$.

Proposition 153. *Soit n un entier naturel non nul. Pour toute composition $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de n et tout entier s de l'intervalle $\llbracket 0, k-2 \rrbracket$ on pose $\theta_s = \sum_{i=0}^s \alpha_{k-s+i}$ et $\rho_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0, \\ \sum_{i=1}^s \alpha_{k-s+i} & \text{sinon.} \end{cases}$*

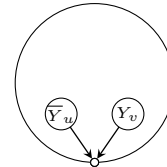
On a :

$$\Psi_{2,B}(\bar{Y}_n) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n \\ \alpha_1=1}} \prod_{s=0}^{k-2} \left(\delta_{\alpha_{k-s}, 1} [1 + (n - \theta_s)x] + \bar{\delta}_{\alpha_{k-s}, 1} \binom{n-1-\rho_s}{\alpha_{k-s}} x^{\alpha_{k-s}} \right) \prod_{i=1}^k b_{\alpha_i} M_{\alpha}$$

où pour tout couple d'entiers (u, v) , on pose $\bar{\delta}_{u,v} = \begin{cases} 1, & \text{si } u \neq v \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Démonstration. Ceci provient du fait que, pour tout entier naturel non nul n et tout ensemble

$C \in \mathcal{C}(\bar{Y}_n)$, on a $q_C(\bar{Y}_n)$ de la forme \bar{Y}_p et $r_C(\bar{Y}_n)$ de la forme



avec u ou v

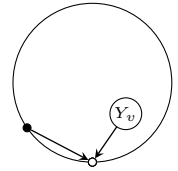
éventuellement nul. □

Proposition 154. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $v = n - 1$. On*

$a :$

$$\Psi_{2,B} \left(\text{Diagram with } Y_v \right) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \\ \alpha_1=1}} \sum_{\tau \in \text{Bat}(1,k)} \frac{(n-1)!}{\alpha_2! \dots \alpha_k!} \prod_{i=1}^{k+1} b_{\alpha_i} M_{(\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\tau^{-1}(k+1)})}.$$

Démonstration. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $W_n =$



Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{C}(W_n)$. On note $|C|$ son cardinal. Trois cas sont possibles.

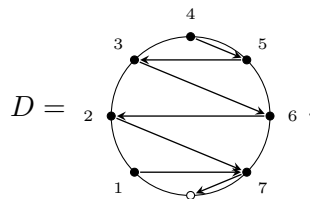
Cas $C = \{\{0, 1\}\}$. On a alors $q_C(W_n) = Y_{n-1}$ et $r_C(W_n) = Y_1$.

Cas $\{0, 1\} \notin C$. On a alors $q_C(W_n) = W_{n-|C|}$ et $r_C(W_n) = Y_{|C|}$.

Cas $\{\{0, 1\}\} \subsetneq C$. On a alors $q_C(W_n) = Y_{n-|C|}$ et $r_C(W_n) = W_{|C|}$.

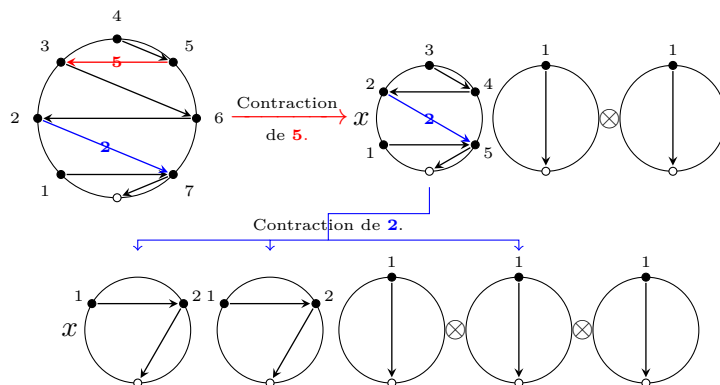
□

Remarque. La compréhension de l'apparition des échelles dans les coproduits itérés d'un diagramme D donné n'est pas triviale. Considérons par exemple la suite B constante et égale à 1 ainsi que le diagramme de degré 7 suivant :

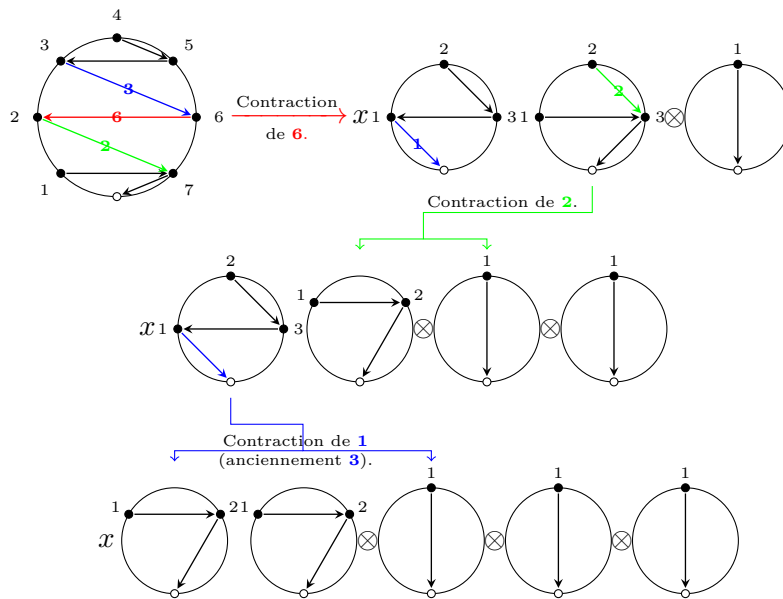


A chaque itération du coproduit, on ne s'intéresse dans cet exemple qu'aux produits tensoriels obtenus en ne contractant qu'une seule corde. Suivant le choix de la première corde à contracter dans D , le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un produit tensoriel d'échelles varie. Prenons pour exemple les cas des cordes n° 5 et n° 6 du diagramme D .

1. On contracte la corde n° 5 de D . On peut alors obtenir un produit tensoriel ne contenant que des échelles avec une seule itération supplémentaire. On a, par exemple,



2. On contracte la corde n° 6 de D . Il faut au moins encore deux itérations pour obtenir un produit tensoriel ne contenant que des échelles. On effectue, par exemple, les contractions suivantes :



Bibliographie

- [1] E. Abe, *Hopf algebras*. T. 74. Cambridge Tracts in Mathematics. Translated from the Japanese by Hisae Kinoshita and Hiroko Tanaka. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980, p. xii+284. ISBN : 0-521-22240-0.
- [2] M. Aguiar, N. Bergeron et F. Sottile, *Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn-Sommerville relations*, *Compos. Math.* 142.1 (2006), p. 1–30. ISSN : 0010-437X.
- [3] M. Aguiar et J.-L. Loday, *Quadri-algebras*, *J. Pure Appl. Algebra* 191.3 (2004), p. 205–221. ISSN : 0022-4049.
- [4] M. Aguiar et S. Mahajan, *Monoidal functors, species and Hopf algebras*. T. 29. CRM Monograph Series. With forewords by Kenneth Brown and Stephen Chase and André Joyal. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, p. lii+784. ISBN : 978-0-8218-4776-3.
- [5] M. Aguiar et F. Sottile, *Structure of the Loday-Ronco Hopf algebra of trees*, *J. Algebra* 295.2 (2006), p. 473–511. ISSN : 0021-8693.
- [6] N. Andruskiewitsch et W. Ferrer Santos, *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, *Acta Appl. Math.* 108.1 (2009), p. 3–17. ISSN : 0167-8019.
- [7] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, *Ann. of Math. (2)* 57 (1953), p. 115–207. ISSN : 0003-486X.
- [8] D. J. Broadhurst et D. Kreimer, *Towards cohomology of renormalization : bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees*, *Comm. Math. Phys.* 215.1 (2000), p. 217–236. ISSN : 0010-3616.
- [9] E. Burgunder, B. Delcroix-Oger et D. Manchon, *An operad is never free as a pre-Lie algebra*, *ArXiv e-prints* (2017). eprint : 1702.01949.
- [10] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series*, *Adv. in Appl. Math.* 47.2 (2011), p. 282–308. ISSN : 0196-8858.
- [11] P. Cartier, *A primer of Hopf algebras*. Frontiers in number theory, physics, and geometry. II, Springer, Berlin, 2007, p. 537–615.
- [12] P. Cartier, *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*. Séminaire “Sophus Lie” de la Faculté des Sciences de Paris, 1955-56. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1957.
- [13] F. Chapoton, *Free pre-Lie algebras are free as Lie algebras*, *Canad. Math. Bull.* 53.3 (2010), p. 425–437. ISSN : 0008-4395.
- [14] F. Chapoton, *On some anticyclic operads*, *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), p. 53–69. ISSN : 1472-2747.

- [15] F. Chapoton, *Un théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen pour les bigèbres dendri-formes et les algèbres braces*, *J. Pure Appl. Algebra* 168.1 (2002), p. 1–18. ISSN : 0022-4049.
- [16] F. Chapoton et M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, *Internat. Math. Res. Notices* 8 (2001), p. 395–408. ISSN : 1073-7928.
- [17] A. Connes et D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*. Quantum field theory : perspective and prospective (Les Houches, 1998), t. 530. NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, p. 59–108.
- [18] A. Connes et D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, *Comm. Math. Phys.* 210.1 (2000), p. 249–273. ISSN : 0010-3616.
- [19] G. H. E. Duchamp, F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions VII : Free quasi-symmetric functions revisited*, *Ann. Comb.* 15.4 (2011), p. 655–673. ISSN : 0218-0006.
- [20] G. Duchamp, F. Hivert et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions VI : Free quasi-symmetric functions and related algebras*, *Internat. J. Algebra Comput.* 12.5 (2002), p. 671–717. ISSN : 0218-1967.
- [21] G. Duchamp, N. Hoang-Nghia et A. Tanasa, *A selection-quotient process for packed word Hopf algebra*. Algebraic informatics, t. 8080. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Heidelberg, 2013, p. 223–234.
- [22] G. Duchamp, A. Klyachko, D. Krob et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions III : Deformations of Cauchy and convolution algebras*, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 1.1 (1997). Lie computations (Marseille, 1994), p. 159–216. ISSN : 1365-8050.
- [23] C. Dupont, « Périodes des arrangements d’hyperplans et coproduit motivique ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, 2014.
- [24] A. Dür, *Möbius functions, incidence algebras and power series representations*. T. 1202. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986, p. xii+134. ISBN : 3-540-16771-4.
- [25] R. Ehrenborg, *On posets and Hopf algebras*, *Adv. Math.* 119.1 (1996), p. 1–25. ISSN : 0001-8708.
- [26] L. Foissy, *Algèbres de Hopf Combinatoires*.
- [27] L. Foissy, *Bidendriform bialgebras, trees and free quasi-symmetric functions*, *J. Pure Appl. Algebra* 209.2 (2007), p. 439–459. ISSN : 0022-4049.
- [28] L. Foissy, *Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees*, *J. Algebra* 255.1 (2002), p. 89–120. ISSN : 0021-8693.
- [29] L. Foissy, *Free and cofree Hopf algebras*, *J. Pure Appl. Algebra* 216.2 (2012), p. 480–494. ISSN : 0022-4049.
- [30] L. Foissy, *Free quadri-algebras and dual quadri-algebras*, *ArXiv e-prints* (avr. 2015).
- [31] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. I*, *Bull. Sci. Math.* 126.3 (2002), p. 193–239. ISSN : 0007-4497.
- [32] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. II*, *Bull. Sci. Math.* 126.4 (2002), p. 249–288. ISSN : 0007-4497.

- [33] L. Foissy, *The Hopf algebra of Fliess operators and its dual pre-Lie algebra*, *Comm. Algebra* 43.10 (2015), p. 4528–4552. ISSN : 0092-7872.
- [34] L. Foissy, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Polynomial realizations of some combinatorial Hopf algebras*, *J. Noncommut. Geom.* 8.1 (2014), p. 141–162. ISSN : 1661-6952.
- [35] A. Frabetti et D. Manchon, *Five interpretations of Faà di Bruno’s formula*. Faà di Bruno Hopf algebras, Dyson-Schwinger equations, and Lie-Butcher series, t. 21. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. Eur. Math. Soc., Zürich, 2015, p. 91–147.
- [36] G. Frei et U. Stambach, *CHAPTER 38 - Heinz Hopf*. History of Topology, sous la dir. d’I. James. Amsterdam : North-Holland, 1999, p. 991–1008. ISBN : 978-0-444-82375-5.
- [37] A. M. Garsia et C. Reutenauer, *A decomposition of Solomon’s descent algebra*, *Adv. Math.* 77.2 (1989), p. 189–262. ISSN : 0001-8708.
- [38] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, *Adv. Math.* 112.2 (1995), p. 218–348. ISSN : 0001-8708.
- [39] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, *Ann. of Math. (2)* 78 (1963), p. 267–288. ISSN : 0003-486X.
- [40] I. M. Gessel, *Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions*. Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983), t. 34. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, p. 289–317.
- [41] R. Grossman et R. G. Larson, *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators*, *Israel J. Math.* 72.1-2 (1990). Hopf algebras, p. 109–117. ISSN : 0021-2172.
- [42] R. Grossman et R. G. Larson, *Hopf-algebraic structure of families of trees*, *J. Algebra* 126.1 (1989), p. 184–210. ISSN : 0021-8693.
- [43] R. Grossman et R. G. Larson, *Symbolic computation of derivations using labelled trees*, *J. Symbolic Comput.* 13.5 (1992), p. 511–523. ISSN : 0747-7171.
- [44] F. Hivert, J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Commutative combinatorial Hopf algebras*, *J. Algebraic Combin.* 28.1 (2008), p. 65–95. ISSN : 0925-9899.
- [45] M. E. Hoffman, *Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355.9 (2003), 3795–3811 (electronic). ISSN : 0002-9947.
- [46] R. Holtkamp, *Comparison of Hopf algebras on trees*, *Arch. Math. (Basel)* 80.4 (2003), p. 368–383. ISSN : 0003-889X.
- [47] H. Hopf, *Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen*, *Ann. of Math. (2)* 42 (1941), p. 22–52. ISSN : 0003-486X.
- [48] C. Kassel, *Quantum groups*. T. 155. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, p. xii+531. ISBN : 0-387-94370-6.
- [49] B. Kostant, *Groups over Z* . Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 90–98.
- [50] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2.2 (1998), p. 303–334. ISSN : 1095-0761.
- [51] D. Krob, B. Leclerc et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions II : Transformations of alphabets*, *Internat. J. Algebra Comput.* 7.2 (1997), p. 181–264. ISSN : 0218-1967.

- [52] D. Krob et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at $q=0$* , *J. Algebraic Combin.* 6.4 (1997), p. 339–376. ISSN : 0925-9899.
- [53] D. Krob et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions V : A degenerate version of $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* , *Internat. J. Algebra Comput.* 9.3-4 (1999). Dedicated to the memory of Marcel-Paul Schützenberger, p. 405–430. ISSN : 0218-1967.
- [54] M. Livernet, *A rigidity theorem for pre-Lie algebras*, *J. Pure Appl. Algebra* 207.1 (2006), p. 1–18. ISSN : 0022-4049.
- [55] M. Livernet, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, *manuscripta mathematica* 96.3 (1998), p. 295–315. ISSN : 1432-1785.
- [56] J.-L. Loday, *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, *Math. Scand.* 77.2 (1995), p. 189–196. ISSN : 0025-5521.
- [57] J.-L. Loday, *Dialgebras*. Dialgebras and related operads, t. 1763. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 2001, p. 7–66.
- [58] J.-L. Loday et M. Ronco, *Combinatorial Hopf algebras*. Quanta of maths, t. 11. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, p. 347–383.
- [59] J.-L. Loday et M. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*, *Adv. Math.* 139.2 (1998), p. 293–309. ISSN : 0001-8708.
- [60] C. Malvenuto, « Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l’algèbre des descentes ». Thèse de doct. Université du Québec à Montréal, Laboratoire de Combinatoire et d’Informatique Mathématique, 1994.
- [61] C. Malvenuto et C. Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, *J. Algebra* 177.3 (1995), p. 967–982. ISSN : 0021-8693.
- [62] C. Mammez, *A propos de l’algèbre de Hopf des mots tassés WMat*, (2017). Soumis.
- [63] C. Mammez, *A survey on the Hopf algebra of dissection diagrams*. En cours d’écriture.
- [64] D. Manchon, *On bialgebras and Hopf algebras or oriented graphs*, *Confluentes Math.* 4.1 (2012), p. 1240003, 10. ISSN : 1793-7442.
- [65] D. Manchon et A. Saïdi, *Lois pré-Lie en interaction*, *Comm. Algebra* 39.10 (2011), p. 3662–3680. ISSN : 0092-7872.
- [66] A. Mansuy, *Preordered forests, packed words and contraction algebras*, *J. Algebra* 411 (2014), p. 259–311. ISSN : 0021-8693.
- [67] F. Markopoulou, *Coarse graining in spin foam models*, *Classical Quantum Gravity* 20.5 (2003), p. 777–799. ISSN : 0264-9381.
- [68] J. W. Milnor et J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, *Ann. of Math. (2)* 81 (1965), p. 211–264. ISSN : 0003-486X.
- [69] I. Moerdijk, *On the Connes-Kreimer construction of Hopf algebras*. Homotopy methods in algebraic topology (Boulder, CO, 1999), t. 271. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, p. 311–321.
- [70] R. K. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, *J. Algebra* 47.1 (1977), p. 29–51. ISSN : 0021-8693.

- [71] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*. T. 82. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, p. xiv+238. ISBN : 0-8218-0738-2.
- [72] J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Hopf algebras and dendriform structures arising from parking functions*, *Fund. Math.* 193.3 (2007), p. 189–241. ISSN : 0016-2736.
- [73] J.-C. Novelli et J.-Y. Thibon, *Polynomial realizations of some trialgebras. 18th Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'06)*. 1. (12 pp.) 2006, p. 243–254.
- [74] J. O'Connor et E. F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive*. URL : <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>.
- [75] J.-M. Oudom et D. Guin, *On the Lie envelopping algebra of a pre-Lie algebra*, *Journal of K-theory : K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology* 2 (août 2008), p. 147–167.
- [76] F. Panaite, *Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees*, *Lett. Math. Phys.* 51.3 (2000), p. 211–219. ISSN : 0377-9017.
- [77] S. Poirier et C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, *Ann. Sci. Math. Québec* 19.1 (1995), p. 79–90. ISSN : 0707-9109.
- [78] J.-B. Priez, *Lattice of combinatorial Hopf algebras : binary trees with multiplicities. 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013)*. Sous la dir. d'A. Goupil et G. Schaeffer. T. AS. DMTCS Proceedings. Paris, France : Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2013, p. 1137–1148.
- [79] D. G. Quillen, *On the associated graded ring of a group ring*, *J. Algebra* 10 (1968), p. 411–418. ISSN : 0021-8693.
- [80] D. E. Radford, *Hopf algebras*. T. 49. Series on Knots and Everything. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012, p. xxii+559. ISBN : 978-981-4335-99-7; 981-4335-99-1.
- [81] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*. T. 7. London Mathematical Society Monographs. New Series. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993, p. xviii+269. ISBN : 0-19-853679-8.
- [82] M. Ronco, *A Milnor-Moore theorem for dendriform Hopf algebras*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332.2 (2001), p. 109–114. ISSN : 0764-4442.
- [83] W. R. Schmitt, *Incidence Hopf algebras*, *J. Pure Appl. Algebra* 96.3 (1994), p. 299–330. ISSN : 0022-4049.
- [84] N. J. A. Sloane, *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*. 1964. URL : <http://www.oeis.org>.
- [85] L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, *J. Algebra* 41.2 (1976), p. 255–264. ISSN : 0021-8693.
- [86] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 119. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972, p. iii+104.
- [87] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969, p. vii+336.

-
- [88] A. Tanasa et D. Kreimer, *Combinatorial Dyson-Schwinger equations in noncommutative field theory*, *J. Noncommut. Geom.* 7.1 (2013), p. 255–289. ISSN : 1661-6952.
- [89] B. Vallette, *Homology of generalized partition posets*, *J. Pure Appl. Algebra* 208.2 (2007), p. 699–725. ISSN : 0022-4049.
- [90] B. Vallette, *Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture*, *J. Reine Angew. Math.* 620 (2008), p. 105–164. ISSN : 0075-4102.
- [91] Y. Vargas, *Hopf algebra of permutation pattern functions. 26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2014)*. Sous la dir. de L. J. Billera et I. Novik. T. AT. DMTCS Proceedings. Chicago, United States : Discrete Mathematics et Theoretical Computer Science, 2014, p. 839–850.
- [92] E. B. Vinberg, *The theory of homogeneous convex cones*, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* 12 (1963), p. 303–358. ISSN : 0134-8663.

Compléments sur le chapitre 2

A.1 Valeur du coproduit de WMat pour les mots tassés de degré inférieur ou égal à 3

En degré 1.

$$\begin{aligned}\Delta(x_0) &= x_0 \otimes 1 + 1 \otimes x_0, \\ \Delta(x_1) &= x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1.\end{aligned}$$

En degré 2.

$$\begin{aligned}\Delta(x_0x_0) &= x_0x_0 \otimes 1 + 2x_0 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_0, \\ \Delta(x_1x_1) &= x_1x_1 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_1, \\ \Delta(x_0x_1) &= x_0x_1 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_1, \\ \Delta(x_1x_0) &= x_1x_0 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_0, \\ \Delta(x_1x_2) &= x_1x_2 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_1x_2, \\ \Delta(x_2x_1) &= x_2x_1 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_1.\end{aligned}$$

En degré 3.

$$\begin{aligned}\Delta(x_0x_0x_0) &= x_0x_0x_0 \otimes 1 + 3x_0 \otimes x_0x_0 + 3x_0x_0 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_0x_0, \\ \Delta(x_1x_1x_1) &= x_1x_1x_1 \otimes 1 + 3x_1 \otimes x_0x_0 + 3x_1x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_1x_1, \\ \Delta(x_0x_0x_1) &= x_0x_0x_1 \otimes 1 + 2x_0 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_0x_0 + x_0x_0 \otimes x_1 + 2x_0x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_0x_1, \\ \Delta(x_0x_1x_0) &= x_0x_1x_0 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_0 + x_0 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_0x_0 \\ &\quad + x_0x_0 \otimes x_1 + x_0x_1 \otimes x_0 + x_1x_0 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_1x_0, \\ \Delta(x_1x_0x_0) &= x_1x_0x_0 \otimes 1 + 2x_0 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_0x_0 + x_0x_0 \otimes x_1 + 2x_1x_0 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_0x_0, \\ \Delta(x_0x_1x_1) &= x_0x_1x_1 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_1 + 2x_1 \otimes x_0x_0 + 2x_0x_1 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_1x_1, \\ \Delta(x_1x_0x_1) &= x_1x_0x_1 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_1 + 2x_1 \otimes x_0x_0 \\ &\quad + x_1x_0 \otimes x_0 + x_0x_1 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_0x_1, \\ \Delta(x_1x_1x_0) &= x_1x_1x_0 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_1 + 2x_1 \otimes x_0x_0 + 2x_1x_0 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_1x_0, \\ \Delta(x_1x_1x_2) &= x_1x_1x_2 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_1x_1 + 2x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_1x_1x_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1x_2x_1) &= x_1x_2x_1 \otimes 1 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&\quad + x_1x_2 \otimes x_0 + x_2x_1 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_1x_2x_1, \\
\Delta(x_2x_1x_1) &= x_2x_1x_1 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + 2x_2x_1 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_1x_1, \\
\Delta(x_2x_2x_1) &= x_2x_2x_1 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_1x_1 + 2x_2x_1 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_2x_1, \\
\Delta(x_2x_1x_2) &= x_2x_1x_2 \otimes 1 + x_1 \otimes x_1x_1 + x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_0x_1 \\
&\quad + x_2x_1 \otimes x_0 + x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_1x_2, \\
\Delta(x_1x_2x_2) &= x_1x_2x_2 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1x_0 + x_1 \otimes x_1x_1 + 2x_1x_2 \otimes x_0 + x_1x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_1x_2x_2, \\
\Delta(x_0x_1x_2) &= x_0x_1x_2 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_2 + 2x_1 \otimes x_0x_1 + 2x_0x_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_1x_2, \\
\Delta(x_0x_2x_1) &= x_0x_2x_1 \otimes 1 + x_0 \otimes x_2x_1 + 2x_1 \otimes x_0x_1 + 2x_0x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_0x_2x_1, \\
\Delta(x_1x_0x_2) &= x_1x_0x_2 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_1x_0 \\
&\quad + x_1x_0 \otimes x_1 + x_0x_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_0x_2, \\
\Delta(x_2x_0x_1) &= x_2x_0x_1 \otimes 1 + x_0 \otimes x_2x_1 + x_1 \otimes x_0x_1 + x_1 \otimes x_1x_0 \\
&\quad + x_1x_0 \otimes x_1 + x_0x_1 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_2x_0x_1, \\
\Delta(x_1x_2x_0) &= x_1x_2x_0 \otimes 1 + x_0 \otimes x_1x_2 + 2x_1 \otimes x_1x_0 + 2x_1x_0 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_2x_0, \\
\Delta(x_2x_1x_0) &= x_2x_1x_0 \otimes 1 + x_0 \otimes x_2x_1 + 2x_1 \otimes x_1x_0 + 2x_1x_0 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_0 + 1 \otimes x_2x_1x_0, \\
\Delta(x_1x_2x_3) &= x_1x_2x_3 \otimes 1 + 3x_1 \otimes x_1x_2 + 3x_1x_2 \otimes x_0 + 1 \otimes x_1x_2x_3, \\
\Delta(x_1x_3x_2) &= x_1x_3x_2 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_2x_1 + 2x_1x_2 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_1x_3x_2, \\
\Delta(x_2x_1x_3) &= x_2x_1x_3 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_1x_2 + x_1 \otimes x_2x_1 + 2x_1x_2 \otimes x_1 + x_2x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_1x_3, \\
\Delta(x_2x_3x_1) &= x_2x_3x_1 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_2x_1 + x_1 \otimes x_1x_2 + 2x_2x_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_1 + 1 \otimes x_2x_3x_1, \\
\Delta(x_3x_1x_2) &= x_3x_1x_2 \otimes 1 + 2x_1 \otimes x_2x_1 + x_1 \otimes x_1x_2 + 2x_2x_1 \otimes x_1 + x_1x_2 \otimes x_1 + 1 \otimes x_3x_1x_2, \\
\Delta(x_3x_2x_1) &= x_3x_2x_1 \otimes 1 + 3x_1 \otimes x_2x_1 + 3x_2x_1 \otimes x_1 + 1 \otimes x_3x_2x_1.
\end{aligned}$$

A.2 Valeur du morphisme Ψ_3 pour les mots tassés de degré inférieur ou égal à 4

En degrés 1 et 2.

$$\begin{aligned}
\Psi_3(x_1) &= M_{(1)}, \\
\Psi_3(x_1x_2) &= M_{(2)} + 2M_{(1,1)}, \\
\Psi_3(x_2x_1) &= 2M_{(1,1)}.
\end{aligned}$$

En degré 3.

$$\begin{aligned}
\Psi_3(x_1x_2x_3) &= M_{(3)} + 3(M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 6M_{(1,1,1)}, \\
\Psi_3(x_1x_3x_2) &= 2(M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 6M_{(1,1,1)} = \Psi_3(x_2x_1x_3), \\
\Psi_3(x_2x_3x_1) &= (M_{(2,1)} + M_{(1,2)}) + 6M_{(1,1,1)} = \Psi_3(x_3x_1x_2), \\
\Psi_3(x_3x_2x_1) &= 6M_{(1,1,1)}.
\end{aligned}$$

En degré 4.

$$\Psi_3(x_1x_2x_3x_4) = M_{(4)} + 4(M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 6M_{(2,2)} + 12(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)})$$

$$\begin{aligned}
& +24M_{(1,1,1,1)}, \\
\Psi_3(x_1x_2x_4x_3) &= 2(M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 4M_{(2,2)} + 10(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_1x_3x_2x_4) = \Psi_3(x_2x_1x_3x_4), \\
\Psi_3(x_4x_1x_2x_3) &= (M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 4(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_2x_3x_4x_1) = \Psi_3(x_1x_3x_4x_2) = \Psi_3(x_1x_4x_2x_3) \\
&= \Psi_3(x_3x_1x_2x_4) = \Psi_3(x_2x_3x_1x_4), \\
\Psi_3(x_3x_4x_1x_2) &= 2M_{(2,2)} + 4(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)}, \\
\Psi_3(x_2x_1x_4x_3) &= 4M_{(2,2)} + 8(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)}, \\
\Psi_3(x_3x_1x_4x_2) &= 2M_{(2,2)} + 6(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_2x_4x_1x_3), \\
\Psi_3(x_4x_1x_3x_2) &= 4(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_2x_4x_3x_1) = \Psi_3(x_3x_2x_4x_1) = \Psi_3(x_4x_2x_1x_3), \\
\Psi_3(x_1x_4x_3x_2) &= 6(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_3x_2x_1x_4), \\
\Psi_3(x_4x_2x_3x_1) &= 2(M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}) + 24M_{(1,1,1,1)} \\
&= \Psi_3(x_3x_4x_2x_1) = \Psi_3(x_4x_3x_1x_2), \\
\Psi_3(x_4x_3x_2x_1) &= 24M_{(1,1,1,1)}.
\end{aligned}$$

A.3 Valeur du morphisme Ψ_4 pour quelques mots de degré 5

$$\begin{aligned}
\Psi_4(x_0x_0x_0x_1x_1) &= 2(M_{(4,1)} + M_{(1,4)}) + 6(M_{(2,3)} + M_{(3,2)}) \\
&+ 14(M_{(3,1,1)} + M_{(1,3,1)} + M_{(1,1,3)}) + 24(M_{(2,2,1)} + M_{(2,1,2)} + M_{(1,2,2)}) \\
&+ 54(M_{(2,1,1,1)} + M_{(1,2,1,1)} + M_{(1,1,2,1)} + M_{(1,1,1,2)}) + 120M_{(1,1,1,1,1)}, \\
\Psi_4(x_1x_1x_1x_2x_2) &= 6M_{(2,3)} + 6M_{(1,3,1)} + 12M_{(1,1,3)} + 18(M_{(2,2,1)} + M_{(2,1,2)} + M_{(1,2,2)}) \\
&+ 36M_{(2,1,1,1)} + 42M_{(1,2,1,1)} + 48M_{(1,1,2,1)} + 54M_{(1,1,1,2)} + 120M_{(1,1,1,1,1)}, \\
\Psi_4(x_1x_2x_3x_4x_4) &= 2(M_{(4,1)} + M_{(1,4)}) + 6(M_{(3,2)} + M_{(2,3)}) \\
&+ 24(M_{(2,2,1)} + M_{(2,1,2)} + M_{(1,2,2)}) + 14(M_{(3,1,1)} + M_{(1,3,1)} + M_{(1,1,3)}) \\
&+ 54(M_{(2,1,1,1)} + M_{(1,2,1,1)} + M_{(1,1,2,1)} + M_{(1,1,1,2)}) + 120M_{(1,1,1,1,1)}, \\
\Psi_4(x_4x_4x_1x_2x_3) &= 2M_{(1,4)} + 6M_{(2,1,2)} + 12M_{(1,2,2)} + 8M_{(3,1,1)} + 8M_{(1,3,1)} + 14M_{(1,1,3)} \\
&+ 18M_{(2,1,1,1)} + 30M_{(1,2,1,1)} + 42M_{(1,1,2,1)} + 54M_{(1,1,1,2)} + 120M_{(1,1,1,1,1)}, \\
\Psi_4(x_3x_3x_3x_1x_2) &= 3M_{(1,4)} + 3M_{(2,1,2)} + 18M_{(1,2,2)} + 12M_{(1,3,1)} + 18M_{(1,1,3)} \\
&+ 6M_{(2,1,1,1)} + 36M_{(1,2,1,1)} + 54M_{(1,1,2,1)} + 60M_{(1,1,1,2)} + 120M_{(1,1,1,1,1)}, \\
\Psi_4(x_2x_2x_2x_2x_1) &= 4M_{(1,4)} + 12M_{(1,2,2)} + 16M_{(1,3,1)} + 20M_{(1,1,3)} \\
&+ 48M_{(1,2,1,1)} + 60M_{(1,1,2,1)} + 60M_{(1,1,1,2)} + 120M_{(1,1,1,1,1)}.
\end{aligned}$$

A.4 Programmes

Lors de l'étude de l'algèbre de Hopf **WMat** nous avons programmé avec Maxima les fonctions suivantes.

A.4.1 Produit de battage de deux mots, de deux sommes de mots et produit de battage itéré

La fonction suivante permet de calculer le produit de battage de deux mots. Elle prend en entrées les mots w_1 et w_2 et renvoie la liste des mots constituant le produit battage de w_1 et w_2 .

```
prod_shuffle(w1,w2):=block([n1,n2,u1,u2,temp,res,i,j,
                          v1a,v1b,v2a,v2b,P1,P2],
/*----- taille des mots L1 et L2 -----*/
n1:length(w1), n2:length(w2),
/*----- utilisation de la commutativité du produit.
Le mot d'une seule lettre sera toujours à gauche -----*/
if n1<=n2 then (u1:w1, u2:w2)
else (u1:w2, u2:w1, temp:n1, n1:n2, n2:temp),
/*----- initialisation du résultat à retourner -----*/
res:[],
/*----- appel récursif -----*/
if equal(n1,1) then (
/*----- Cas limite w1 est une lettre -----*/
res:create_list(append(append(create_list(u2[j],j,1,i),u1),
                          create_list(u2[j],j,i+1,n2)),i,0,n2)
)
else (
/*-----  $ua(\text{shuffle})vb=(u(\text{shuffle})vb)a+(ua(\text{shuffle})v)b$ 
où  $u$  et  $v$  sont des mots et  $a$  et  $b$  sont des lettres -----*/
v1a:create_list(u1[i],i,1,n1-1),
v1b:[u1[n1]],
v2a:create_list(u2[i],i,1,n2-1),
v2b:[u2[n2]],
P1:prod_shuffle(v1a,u2),
P1:create_list(append(P1[i],v1b),i,1,length(P1)),
P2:prod_shuffle(u1,v2a),
P2:create_list(append(P2[i],v2b),i,1,length(P2)),
res:append(P1,P2)
),
/*----- retour du résultat -----*/
return(res)
);
```

La fonction `prod_shuffle2` permet de calculer le produit de battage de deux sommes de mots. Elle prend en entrées deux listes, L_1 (correspond à la première somme de mots) et L_2 (correspond à la deuxième somme de mots). Elle renvoie le produit de battage de L_1 et de L_2 sous forme de liste. Elle utilise la fonction `prod_shuffle` définie précédemment.

```

prod_shuffle2(L1,L2):=block([res,i,j,k],
  if listp(L1[1]) then
    if listp(L2[1]) then
      /*----- L1 et L2 ne sont pas des mots -----*/
      res:create_list(prod_shuffle(L1[i],L2[j])[k],i,1,length(L1),
        j,1,length(L2),k,1,length(prod_shuffle(L1[i],L2[j])))
    else
      /*----- L2 est un mot mais pas L1 -----*/
      res:create_list(prod_shuffle(L1[i],L2)[k],i,1,length(L1),
        k,1,length(prod_shuffle(L1[i],L2)))
  else
    if listp(L2[1]) then
      /*----- L1 est un mot mais pas L2 -----*/
      res:create_list(prod_shuffle(L1,L2[j])[k],j,1,length(L2),
        k,1,length(prod_shuffle(L1,L2[j])))
    else
      /*----- L1 et L2 sont des mots -----*/
      res:prod_shuffle(L1,L2),
      /*----- retour du résultat -----*/
      return(res)
);

```

La fonction `prod_shuffle3` permet de calculer la composée de produit de battage. Elle prend en entrée une liste de listes `L` (correspond à une liste de mots). Elle renvoie la composée `L[1](shuffle)L[2]...(shuffle)L[taille de L]` sous forme de liste. Elle utilise la fonction `prod_shuffle2`.

```

prod_shuffle3(L):=block([L1,n,i,res],
  /*----- initialisations -----*/
  L1:L, n:length(L), res:[],
  /*----- cas limites : taille(L)=1 et taille(L)=2 -----*/
  if equal(n,1) then res:L
  else (
    if equal(n,2) then res:prod_shuffle2(L[1],L[2])
    else (
      /*----- taille(L) ne vaut ni 1 ni 2 -----*/
      L1:create_list(L[i],i,1,n-2),
      /*----- appel récursif -----*/
      res:prod_shuffle3(append(L1,[prod_shuffle2(L[n-1],L[n])]))
    )
  ),
  /*----- retour du résultat -----*/
  return(res)
);

```

A.4.2 Construction des mots tassés stricts et des mots tassés

La fonction `spwords` prend en paramètre un entier naturel non nul n (degré des mots tassés) et renvoie la liste des mots tassés stricts (écrits sous forme de liste) de degré n .

```
spwords(n):=block([res,P,s,U,d,i,j],
/*----- initialisation -----*/
res:[],
/*----- cas limite : le degré vaut 1 -----*/
if equal(n,1) then res:[[1]]
else (
/*----- appel récursif -----*/
P:spwords(n-1),
s:length(P),
U:create_list(prod_shuffle([lmax(P[i])+j],P[i]),j,0,1,i,1,s),
d:create_list(length(U[i]),i,1,2*s),
res:unique(create_list(U[i][j],i,1,2*s,j,1,d[i]))
),
/*----- retour du résultat -----*/
return(res)
);
```

La fonction `mots_tasses` prend en paramètre un entier naturel non nul n et construit les mots tassés de degré n . Elle utilise la fonction `spwords`.

```
mots_tasses(n):=block([P,res],
/*----- mots tassés stricts de degré n -----*/
P:spwords(n),
/*----- mots tassés de degré n restant -----*/
res:append(P,P-1),
/*----- retour du résultat -----*/
return(res)
);
```

A.4.3 Produit de l'algèbre de Hopf $W\text{Mat}^{\otimes}$

La fonction `battages` sert à déterminer tous les (n_1, n_2) -battages *i.e.* les applications de $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ strictement croissantes sur $\llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et sur $\llbracket n_1, n_1 + n_2 \rrbracket$. Elle prend en entrées deux entiers naturels non nuls et renvoie une liste.

```
battages(n1,n2):=block([L,i,res,j],
/*----- prod_shuffle([1,...,n1],[n1+1,...,n1+n2]) -----*/
L:prod_shuffle(create_list(i,i,1,n1),
create_list(i,i,n1+1,n1+n2)),
/*----- inverse des permutations données par L -----*/
res:create_list(create_list(sublist_indices(L[i],
lambda([x],x=j))[1],j,1,n1+n2),i,1,length(L)),
/*----- retour du résultat -----*/
return(res)
);
```

La fonction `fonction_battage` prend en entrées un battage `b` un mot `w` et renvoie le mot image par `b` en laissant inchangées les lettres d'indice nul de `w`.

```
fonction_battage(b,w):=block([res],
  res:create_list(if w[i]>0 then b[w[i]] else 0,i,1,length(w)),
  return(res)
);
```

La fonction `fonction_battage2` permet de calculer l'image par un battage `b` d'une somme de mots `L`. Elle utilise `fonction_battage` et renvoie le même résultat que cette dernière si `L` est un mot.

```
fonction_battage2(b,L):=block([res,i],
  if listp(L[1]) then
    /*----- L n'est pas un mot tassé -----*/
    res:create_list(fonction_battage(b,L[i]),i,1,length(L))
  else
    /*----- cas limite : L est un mot tassé -----*/
    res:fonction_battage(b,L),
    /*----- retour du résultat -----*/
    return(res)
);
```

La fonction `construction` prend en entrées deux mots `w1` et `w2` et renvoie une liste correspondant à tous les mots tassés possibles en remplaçant certaines lettres d'indice non nul de `w2` par une lettre de `w1`.

```
construction(w1,w2):=block([L,n,m,res,i,j,k,t],
  L:sublist_indices(w2,lambda([x],x=0)),
  n:length(L),
  m:lmax(w1)+1,
  res:create_list(floor(i/m^(n-1)),i,0,m^n-1),
  t:create_list(mod(floor(i/m^(n-2)),m),i,0,m^n-1),
  res:create_list(append([res[i]],[t[i]]),i,1,m^n),
  for k:3 thru n do(
    t:create_list(mod(floor(i/m^(n-k)),m),i,0,m^n-1),
    res:create_list(append(res[i],[t[i]]),i,1,m^n)
  ),
  res:create_list(create_list(if member(j,L) then
    res[i][sublist_indices(L,lambda([x],x=j))[1]]
    else w2[j],j,1,length(w2)),i,1,m^n),
  return(res)
);
```

La fonction `produit_dual` permet de calculer le produit de deux mots dans **WMat**[®]. Elle prend en entrée deux mots représentés par les listes `w1` et `w2`. Elle renvoie une liste correspondant au produit dans **WMat**[®] de ces deux mots. La fonction `produit_dual` utilise les fonctions `prod_shuffle`, `prod_shuffle2`, `battages`, `fonction_battage` et `construction`.

```
produit_dual(w1,w2):=block([res,n,w2b,i,B,j,C,c,k],
  res:0,
```



```

n:combination(length(w1)+length(w2),length(w1)),
/*----- décalage des lettres de w2 -----*/
w2b:create_list(if w2[i]>0 then w2[i]+lmax(w1) else 0,
                i,1,length(w2)),
/*----- calcul du produit -----*/
if is(lmin(w2)>0) then (
  if is(lmax(w1)=0) then
    /*----- condition C3 avec w2 sans x0 -----*/
    res:prod_shuffle(w1,w2b)
  else (
    /*----- condition C2 avec w2 sans x0 ou
                condition C1 si lmin(w1)>0 -----*/
    B:battages(lmax(w1),lmax(w2)),
    res:create_list(prod_shuffle2(fonction_battage(B[i],w1),
    fonction_battage(B[i],w2b))[j],i,1,length(B),j,1,n)
  )
)
else (
  if is(lmax(w1)=0) then
    /*----- condition C3 avec
                w2 contenant la lettre x0 -----*/
    res:prod_shuffle(w1,w2b)
  else (
    C:construction(w1,w2b),
    c:length(C),
    if lmax(w2)>0 then (
      /*----- condition C2 et w2 contient x0 -----*/
      B:battages(lmax(w1),lmax(w2)),
      res:create_list(prod_shuffle2(fonction_battage(B[i],w1),
      fonction_battage2(B[i],C[j]))[k],
      i,1,length(B),j,1,c,k,1,n)
    )
    else(
      /*----- condition C4 -----*/
      res:create_list(prod_shuffle2(w1,C[j])[k],j,1,c,k,1,n)
    )
  )
),
return(res)
);

```

La fonction `produit_dual2` permet de calculer le produit de deux éléments de **WMat**[®]. Elle prend en entrées deux listes, `L1` (premier élément) et `L2` (deuxième élément). Elle renvoie une liste de mots correspondant au produit des deux éléments. Elle utilise la fonction `produit_dual`.

```

produit_dual2(L1,L2):=block([res,i,j,k],
  if listp(L1[1]) then
    if listp(L2[1]) then

```

```

/*----- L1 et L2 ne sont pas des mots tassés -----*/
res:create_list(produit_dual(L1[i],L2[j])[k],i,1,length(L1),
                j,1,length(L2),k,1,length(produit_dual(L1[i],L2[j])))
else
/*----- L2 est un mot tassé et L1 ne l'est pas -----*/
res:create_list(produit_dual(L1[i],L2)[k],i,1,length(L1),
                k,1,length(produit_dual(L1[i],L2)))
else
if listp(L2[1]) then
/*----- L1 est un mot tassé et L2 ne l'est pas -----*/
res:create_list(produit_dual(L1,L2[j])[k],j,1,length(L2),
                k,1,length(produit_dual(L1,L2[j])))
else
/*----- L1 et L2 sont des mots tassés -----*/
res:produit_dual(L1,L2),
return(res)
);

```

La fonction `produit_dual3` prend en entrée une liste `L` d'éléments de **WMat**[®]. Elle renvoie une liste correspondant au produit `L[1](produit_dual2)L[2]... (produit_dual2)L[taille de L]`. Elle utilise la fonction `produit_dual2`.

```

produit_dual3(L):=block([L1,n,res,i],
/*----- initialisation -----*/
L1:L, n:length(L), res:[],
/*----- cas limite : n=1 -----*/
if equal(n,1) then (res:L)
else (
/*----- cas limite : n=2 -----*/
if equal(n,2) then (res:produit_dual2(L[1],L[2]))
else (
/*----- n est différent de 1 et 2 -----*/
L1:create_list(L[i],i,1,n-2),
res:append(L1,[produit_dual2(L[n-1],L[n])]),
res:produit_dual3(res)
)
),
/*----- retour du résultat -----*/
return(res)
);

```

La fonction `reduction` permet d'écrire les résultats en fonction de la base duale des mots tassés. Elle prend en entrée une liste dont chaque élément est une liste représentant un mot. Elle retourne une liste `res` dont chaque élément est une liste de longueur deux (une entrée pour la multiplicité et une autre pour le mot tassé). Les secondes entrées des éléments de la liste `res` sont deux à deux distinctes.

```

reduction(L1,s):=block([L,c,i,res],
L:unique(L1),

```

```

c:create_list(length(sublist_indices(L1,
                                lambda([x],x=L[i]))) ,i,1,length(L)),
res:create_list(append([[(-1)^s*c[i]]],[L[i]]],i,1,length(c)),
return(res)
);

```

A.4.4 Image par Ψ_5^* de M_α^* avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n$

La fonction `phi_etoile` prend en paramètre un entier naturel non nul n et renvoie l'image de $M_{(n)}^*$ par le morphisme Ψ_5^* .

```

phi_etoile(n):=block([res,i,j,k],
res:create_list(prod_shuffle(create_list(0,j,1,i),
                                create_list(j,j,1,n-i))[k],i,1,n-1,k,1,combination(n,i)),
res:append(append([create_list(i,i,1,n)],res),
                                [create_list(0,i,1,n)]),
return(res)
);

```

La fonction `phi_etoile2` prend en paramètre un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers naturels non nuls et renvoie l'image de $M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^*$ par le morphisme Ψ_5^* .

```

phi_etoile2(M):=block([m,res],
m:length(M), res:[],
if equal(m,1) then
res:phi_etoile(M[1])
else(
res:phi_etoile2(create_list(M[i],i,1,m-1)),
res:produit_dual2(res,phi_etoile(M[m]))
),
return(res)
);

```


$$\begin{aligned}
 & + \left(\text{diagram}_1 + x \text{diagram}_2 + x \text{diagram}_3 \right) \otimes \text{diagram}_4, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_5 \right) &= \text{diagram}_6 \otimes 1 + \left(x \text{diagram}_7 + \text{diagram}_8 + \text{diagram}_9 \right) \otimes \text{diagram}_{10}, \\
 & + \text{diagram}_{11} \otimes \left((1+x) \text{diagram}_{12} + \text{diagram}_{13} \right) + 1 \otimes \text{diagram}_{14}, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_{15} \right) &= \text{diagram}_{16} \otimes 1 + \left(\text{diagram}_{17} + \text{diagram}_{18} + \text{diagram}_{19} \right) \otimes \text{diagram}_{20}, \\
 & + \text{diagram}_{21} \otimes \left(2 \text{diagram}_{22} + \text{diagram}_{23} \right) + 1 \otimes \text{diagram}_{24}, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_{25} \text{diagram}_{26} \right) &= \text{diagram}_{27} \text{diagram}_{28} \otimes 1 + \text{diagram}_{29} \otimes \text{diagram}_{30} + 2 \text{diagram}_{31} \text{diagram}_{32} \otimes \text{diagram}_{33}, \\
 & + 2 \text{diagram}_{34} \otimes \text{diagram}_{35} \text{diagram}_{36} + \text{diagram}_{37} \otimes \text{diagram}_{38} + 1 \otimes \text{diagram}_{39} \text{diagram}_{40}, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_{41} \text{diagram}_{42} \right) &= \text{diagram}_{43} \text{diagram}_{44} \otimes 1 + \text{diagram}_{45} \otimes \text{diagram}_{46} \\
 & + (1+x) \text{diagram}_{47} \text{diagram}_{48} \otimes \text{diagram}_{49} + (1+x) \text{diagram}_{50} \otimes \text{diagram}_{51} \text{diagram}_{52} \\
 & + \text{diagram}_{53} \otimes \text{diagram}_{54} + 1 \otimes \text{diagram}_{55} \text{diagram}_{56}, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_{57} \text{diagram}_{58} \right) &= \text{diagram}_{59} \text{diagram}_{60} \otimes 1 + \text{diagram}_{61} \otimes \text{diagram}_{62} + 2 \text{diagram}_{63} \text{diagram}_{64} \otimes \text{diagram}_{65}, \\
 & + 2 \text{diagram}_{66} \otimes \text{diagram}_{67} \text{diagram}_{68} + \text{diagram}_{69} \otimes \text{diagram}_{70} + 1 \otimes \text{diagram}_{71} \text{diagram}_{72}, \\
 \Delta \left(\text{diagram}_{73} \text{diagram}_{74} \text{diagram}_{75} \right) &= \text{diagram}_{76} \text{diagram}_{77} \text{diagram}_{78} \otimes 1 + 3 \text{diagram}_{79} \text{diagram}_{80} \otimes \text{diagram}_{81} \\
 & + 3 \text{diagram}_{82} \otimes \text{diagram}_{83} \text{diagram}_{84} + 1 \otimes \text{diagram}_{85} \text{diagram}_{86} \text{diagram}_{87}.
 \end{aligned}$$

B.2 Valeur du morphisme $\Psi_{2,A}$ pour les diagrammes de dissection de degré inférieur ou égal à 3 lorsque A est la suite constante égale à 1

En degré 2

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = M_{(2)} + 2M_{(1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = 2M_{(1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = (1+x)M_{(1,1)}.$$

En degré 3

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = M_{(3)} + 3M_{(2,1)} + 3M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = M_{(2,1)} + M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = xM_{(1,2)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = x^2M_{(1,2)} + (1+2x)(1+x)M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = M_{(2,1)} + 6M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = xM_{(2,1)} + (1+x)(2+x)M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = (1+x)M_{(2,1)} + (1+x)M_{(1,2)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)}$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = 2M_{(2,1)} + 2M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \circ \end{array} \right) = 2M_{(2,1)} + 2M_{(1,2)} + 6M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = M_{(2,1)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = (1+x)M_{(2,1)} + (1+x)M_{(1,2)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)},$$

$$\Psi_{2,A} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right) = (1+x)M_{(2,1)} + 3(1+x)M_{(1,1,1)}.$$

B.3 Programmes

Nous présentons maintenant le code C++ programmant l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_D . Ce travail a été effectué en collaboration avec Jean Fromentin. Les programmes suivants permettent de construire les digrammes de dissection, de construire son algèbre symétrique, de calculer le coproduit d'un élément de l'algèbre, de déterminer une base des éléments primitifs de degré $n \leq 15$ fixé. Pour ces programmes, le paramètre x de l'algèbre de Hopf est codé comme un entier et peut prendre les valeurs de l'intervalle $[-2^{31}, 2^{31} - 1]$.

```
#ifndef DIAGRAM_HPP
#define DIAGRAM_HPP

#include <cstdint>
#include <cassert>
#include <iostream>
#include <initializer_list>
#include <map>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include "fmpz_poly.h"

using namespace std;

typedef uint8_t uint8;
typedef uint32_t uint32;
typedef uint64_t uint64;

typedef int16_t int16;

//*****
//* Early declarations *
//*****

struct DiagramCoproductData;
class DiagramTensor;
class DiagramTensorVector;

//*****
//* Class declarations *
//*****

//-----
// Chord
```



```

//-----
class Chord{
public:
    uint8 mi,ma,d;
    uint8& min();
    uint8& max();
    uint8& src();
    uint8& tar();
    uint8 src() const;
    uint8 tar() const;
    uint8& dir();
    Chord();
    Chord(uint8 s,uint8 t);
    bool operator<(const Chord&C) const;
};

//-----
// Data
//-----

class Data{
public:
    union{
        uint8 array[8];
        uint64 hash;
    };
    int get(int i) const;
    void set(int i,int v);
};

//-----
// Diagram
//-----

class Diagram:public Data{
private:
    // Compute partial left term n of coproduct term c
    // n is the number of the treated chord
    static void compute_partial_left_term(int n,DiagramCoproductData& data);

    // Compute right term of coproduct term c
    static void compute_right_term(DiagramCoproductData& data);

    // Compute DiagramTensor from a DiagramCoproductData
    static void compute_tensor(DiagramCoproductData& data);

    // Reorient chord of the right diagram given by C
    static void reorient(DiagramCoproductData& data);

    // Sort chords C of coproduct term c
    static void sort_chords(DiagramCoproductData& data);
public:
    // Make the unique diagram of degree 0
    Diagram();

    // Make a diagram from a list of integers

```

```

Diagram(const initializer_list<int>& l);

// Clear diagram
void clear();

// Compute term c of the coproduct
void compute_coproduct_term(DiagramCoproductData& data,int c) const;

// Return the coproduct of the diagram
DiagramTensorVector coproduct() const;

// Return the degree of the diagram
int degree() const;

// Test if the diagram is a path tree
bool is_path_tree() const;

// Set the degree of the diagram
void set_degree(int d);

// Set the target of vertex i in [1,degree]
void set_target(int i,int t);

// Return the target of vertex i in [1,degree]
int target(int i) const;

bool operator<(const Diagram& D) const;
bool operator==(const Diagram& D) const;
bool operator!=(const Diagram& D) const;
};

ostream& operator<<(ostream& os,const Diagram& D);

//-----
// DiagramProduct
//-----

class DiagramProduct:public vector<Diagram>{
public:
    DiagramProduct();
    DiagramProduct(const Diagram& D);
    DiagramTensorVector coproduct() const;
    void multiply_by(const Diagram& D);
    void multiply_by(const DiagramProduct& P);
    bool operator<(const DiagramProduct& P) const;
};

ostream& operator<<(ostream& os,const DiagramProduct& P);

//-----
// DiagramTensor
//-----

class DiagramTensor{
private:

```

```

    DiagramProduct l,r;
public:
    DiagramTensor();
    void clear();
    DiagramProduct& left();
    const DiagramProduct& left() const;
    DiagramProduct& right();
    const DiagramProduct& right() const;
    bool operator<(const DiagramTensor& T) const;
    friend void multiply(DiagramTensor& R,const DiagramTensor& T1,const
        DiagramTensor& T2);
};

void multiply(DiagramTensor& R,const DiagramTensor& T1,const DiagramTensor&
    T2);
ostream& operator<<(ostream& os,const DiagramTensor& T);

//-----
// DiagramCoproductData
//-----

struct DiagramCoproductData{
    Chord C[16];
    Chord C2[16];
    Chord Cbar[16];
    Data side;
    char info[16];
    DiagramTensor tensor;
    uint8 degree,n_c,n_cbar,power,n_left;
};

//-----
// Polynom
//-----

class Polynom{
public:
    fmpz_poly_t p;
    Polynom();
    Polynom(int d); //create x^d
    Polynom(const Polynom&);
    void clear();
    void operator+=(const Polynom& P);
};

void multiply(Polynom& R,const Polynom& P,const Polynom& Q);

ostream& operator<<(ostream& os,const Polynom& P);

//-----
// DiagramVector
//-----

class DiagramProductVector:public map<DiagramProduct,Polynom>{
public:
    DiagramProductVector();
    void add(const Polynom& P,const DiagramProduct& T);
};

```

```

ostream& operator<<(ostream& os,const DiagramProductVector& V);
//-----
// DiagramTensorVector
//-----

class DiagramTensorVector:public map<DiagramTensor,Polynom>{
public:
    DiagramTensorVector();
    void add(const Polynom& P,const DiagramTensor& T);
};

void multiply(DiagramTensorVector& R,const DiagramTensorVector& V1,const
    DiagramTensorVector& V2);
ostream& operator<<(ostream& os,const DiagramTensorVector& V);

//*****
//* Inline definitions *
//*****

//-----
// Chord
//-----

inline
Chord::Chord(){
}

inline
Chord::Chord(uint8 s,uint8 t){
    mi=std::min(s,t);
    ma=std::max(s,t);
    d=(s==mi)?1:-1;
}

inline uint8&
Chord::min(){
    return mi;
}

inline uint8&
Chord::max(){
    return ma;
}

inline uint8&
Chord::src(){
    return (d==1)?mi:ma;
}

inline uint8&
Chord::tar(){
    return (d==1)?ma:mi;
}

inline uint8
Chord::src() const{
    return (d==1)?mi:ma;
}

```

```

}

inline uint8
Chord::tar() const{
    return (d==1)?ma:mi;
}

inline bool
Chord::operator<(const Chord& C) const{
    if(ma==C.ma) return mi>C.mi;
    else return ma<C.ma;
}

inline ostream& operator<<(ostream& os,const Chord& c){
    return os<<(int)c.src()<<"->"<<(int)c.tar();
}

//-----
// Diagram
//-----

inline
Diagram::Diagram(){
    hash=0;
}

inline void
Diagram::clear(){
    hash=0;
}

inline int
Diagram::degree() const{
    return get(0);
}

inline int
Diagram::target(int i) const{
    assert(0<i and i<16);
    return get(i);
}

inline void
Diagram::set_degree(int d){
    set(0,d);
}

inline void
Diagram::set_target(int i,int t){
    assert(0<=i and i<16 and 0<=t and t<16);
    set(i,t);
}

inline bool
Diagram::operator<(const Diagram& D) const{
    return hash<D.hash;
}
}

```

```

inline bool
Diagram::operator==(const Diagram& D) const{
    return hash==D.hash;
}

inline bool
Diagram::operator!=(const Diagram& D) const{
    return hash!=D.hash;
}

//-----
// DiagramProduct
//-----

inline DiagramProduct::DiagramProduct(){
}

inline DiagramProduct::DiagramProduct(const Diagram &D){
    push_back(D);
}

inline void
DiagramProduct::multiply_by(const Diagram &D){
    auto it=upper_bound(begin(),end(),D);
    insert(it,D);
}

//-----
// DiagramTensor
//-----

inline DiagramProduct&
DiagramTensor::left(){
    return l;
}

inline const DiagramProduct&
DiagramTensor::left() const{
    return l;
}

inline DiagramProduct&
DiagramTensor::right(){
    return r;
}

inline const DiagramProduct&
DiagramTensor::right() const{
    return r;
}

inline
DiagramTensor::DiagramTensor(){
    clear();
}

inline void

```

```

DiagramTensor::clear(){
    l.clear();
    r.clear();
}

inline bool
DiagramTensor::operator<(const DiagramTensor& T) const{
    if(l<T.l) return true;
    if(T.l<l) return false;
    if(r<T.r) return true;
    return false;
}

//-----
// DiagramTensorVector
//-----

inline
DiagramTensorVector::DiagramTensorVector(){
}

//-----
// DiagramProductVector
//-----

inline
DiagramProductVector::DiagramProductVector(){
}

//-----
// Polynom
//-----

inline
Polynom::Polynom(){
    fmpz_poly_init(p);
    fmpz_poly_zero(p);
}

inline
Polynom::Polynom(int d){
    fmpz_poly_init(p);
    fmpz_poly_zero(p);
    fmpz_poly_set_coeff_si(p,d,1);
}

inline
Polynom::Polynom(const Polynom& P){
    fmpz_poly_init(p);
    fmpz_poly_set(p,P.p);
}

inline void
Polynom::clear(){
    fmpz_poly_zero(p);
}

```

```

inline void
Polynom::operator+=(const Polynom& P){
    fmpz_poly_add(p,p,P.p);
}

inline void
multiply(Polynom& R,const Polynom& P,const Polynom& Q){
    fmpz_poly_mul(R.p,P.p,Q.p);
}

#endif

```

```

#include "diagram.hpp"

//*****
//* Data *
//*****

//-----
// int Data::get(int)
//-----

int Data::get(int i) const{
    if(i<8) return array[i]&0x0F;
    return array[i-8]>>4;
}

//-----
// void Data::set(int,int)
//-----

void Data::set(int i,int v){
    uint8 c=array[i%8];
    if(i<8){
        c&=0xF0;
        c+=v;
    }
    else{
        c&=0x0F;
        c+=(v<<4);
    }
    array[i%8]=c;
}

//*****
//* Diagram *
//*****

//-----
// Diagram(initializer_list<int>)
//-----

Diagram::Diagram(const initializer_list<int>& l){
    int d=(int)l.size();
}

```



```

    assert(d<16);
    set_degree(d);
    int s=0;
    for(initializer_list<int>::iterator it=l.begin();it!=l.end();++it){
        int t=*it;
        assert(0<=t and t<=d);
        set_target(++s,t);
    }
}

//-----
// void Diagram::computeCoproductTerm(DiagramCoproductData&,int)
//-----

void
Diagram::compute_coproduct_term(DiagramCoproductData& data,int c) const{
    data.n_c=0;
    data.n_cbar=0;
    data.tensor.clear();
    for(int i=1;i<=data.degree;++i){
        Chord chord(i,target(i));
        if(c&(1<<(i-1))) data.C[data.n_c++]=chord;
        else data.Cbar[data.n_cbar++]=chord;
    }
    sort_chords(data);
    // Determine polygon sides
    data.side.hash=0x1111111111111111*data.n_c; //set all entries to n_c
    for(int i=0;i<data.n_c;++i){
        int minc=data.C[i].mi;
        int maxc=data.C[i].ma;
        for(int v=minc;v<maxc;++v){
            if(data.side.get(v)==data.n_c) data.side.set(v,i);
        }
    }
    // Compute right diagram
    compute_right_term(data);
    //Compute left diagrams
    data.n_left=0;
    for(int i=0;i<data.degree;++i) data.info[i]=-1;
    for(int n=0;n<=data.n_c;++n){
        compute_partial_left_term(n,data);
    }
}

//-----
// static void Diagram::compute_partial_left_term(int,DiagramCoproductData&)
//-----

void Diagram::compute_partial_left_term(int n,DiagramCoproductData& data){
    Diagram D;
    D.set_degree(data.n_cbar);
    int d=0;
    if(n==data.n_c){
        for(int i=0;i<data.n_cbar;++i){
            if(data.info[i]==-1){
                ++d;
                D.set_target(data.Cbar[i].src(),data.Cbar[i].tar());
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    if(d!=0){
        D.set_degree(d);
        data.tensor.left().multiply_by(D);
    }
    return;
}
Chord& c=data.C[n];
int cmi=c.mi;
int cma=c.ma;
int l=c.ma-c.mi;
for(int i=0;i<data.n_cbar;++i){
    if(data.info[i]==-1){
        int mi=data.Cbar[i].mi;
        int ma=data.Cbar[i].ma;
        if(data.info[i]==-1 and mi>=cmi and ma>=cmi and mi<=cma and ma<=cma){
            ++d;
            data.Cbar[i].mi-=cmi;
            if(data.Cbar[i].ma==cma){
                data.Cbar[i].ma=0;
                swap(data.Cbar[i].mi,data.Cbar[i].ma);
                data.Cbar[i].d*=-1;
            }
            else{
                data.Cbar[i].ma-=cmi;
            }
            data.info[i]=n;
            D.set_target(data.Cbar[i].src(),data.Cbar[i].tar());
        }
        else{
            if(data.Cbar[i].mi>=cma) data.Cbar[i].mi-=1;
            if(data.Cbar[i].ma>=cma) data.Cbar[i].ma-=1;
        }
    }
}
for(int i=0;i<data.n_c;++i){
    if(data.C[i].mi>=cma) data.C[i].mi-=1;
    if(data.C[i].ma>=cma) data.C[i].ma-=1;
}
if(d!=0){
    D.set_degree(d);
    data.tensor.left().multiply_by(D);
}
return;
}

//-----
// static void Diagram::compute_right_term(DiagramCoproductData&)
//-----

void
Diagram::compute_right_term(DiagramCoproductData& data){
    data.power=0;
    if(data.n_c==0) return;
    int flag=0;
    char image[16];
    for(int i=0;i<=data.degree;++i){
        image[i]=__builtin_popcount(flag);
    }
}

```

```

    flag|=(1L<<data.side.get(i));
}
for(int i=0;i<data.n_c;++i){
    data.C2[i].mi=image[data.C[i].mi];
    data.C2[i].ma=image[data.C[i].ma];
    data.C2[i].d=data.C[i].d;
    if(data.C2[i].ma==data.n_c+1) data.C2[i].ma=0;
//Reorient diagram
reorient(data);
Diagram D;
D.set_degree(data.n_c);
for(int i=0;i<data.n_c;++i){
    D.set_target(data.C2[i].src(),data.C2[i].tar());
}
data.tensor.right().multiply_by(D);
}

//-----
// DiagramTensorVector Diagram::coproduct()
//-----

DiagramTensorVector
Diagram::coproduct() const{
    DiagramTensorVector result;
    DiagramCoproductData data;
    data.degree=degree();
    int clim=(1<<data.degree);
    for(int c=0;c<clim;++c){
        compute_coproduct_term(data,c);
        result.add(Polynom(data.power),data.tensor);
    }
    return result;
}

//-----
// bool Diagram::is_path_tree()
//-----

bool
Diagram::is_path_tree() const{
    int d=degree();
    for(int i=1;i<d;++i){
        if(target(i)!=i+1) return false;
    }
    if(d>0) return target(d)==0;
    return true;
}

//-----
// static void Diagram::reorient(DiagramCoproductData&)
//-----

void
Diagram::reorient(DiagramCoproductData& data){
    char info_vertex[16]={1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
    char info_chord[16]={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
    int nv=1; //number of visited vertex
    int c=5;

```

```

while(c>0){
  --c;
  for(int i=0;i<=data.n_c;++i){
    //Look for an unexplored vertex
    if(info_vertex[i]==1){
      //Look for a chord j->i with vertex j unvisited
      for(int k=0;k<data.n_c;++k){
        if(info_chord[k]==0 and data.C2[k].tar()==i){
          info_chord[k]=1;
          info_vertex[data.C2[k].src()]=1;
          ++nv;
        }
      }
      info_vertex[i]=2; // vertex i is now explored
    }
  }
  if(nv>data.n_c) break; //Exploration is done

  //There is unvisited vertices by an exploration from root
  //Look for chord i->j with vertex i visited and vertex j unvisited
  for(int k=0;k<data.n_c;++k){
    if(info_chord[k]==0 and info_vertex[data.C2[k].src()]>0){
      info_vertex[data.C2[k].src()]=1; //force future exploration
      ++data.power;
      data.C2[k].d*=-1; //change orientation
    }
  }
}

//-----
// static void Diagram::sort_chords (DiagramCoproductData&)
//-----

void
Diagram::sort_chords(DiagramCoproductData& data){
  for(int i=0;i<data.n_c-1;++i){
    for(int j=i+1;j<data.n_c;++j){
      if(data.C[j]<data.C[i]){
        swap(data.C[i],data.C[j]);
      }
    }
  }
}

//*****
//* DiagramProduct *
//*****

bool
DiagramProduct::operator<(const DiagramProduct& P) const{
  if(size()!=P.size()) return size()<P.size();
  for(int i=0;i<size();++i){
    if(at(i)<P[i]) return true;
    if(P[i]<at(i)) return false;
  }
  return false;
}

```

```

DiagramTensorVector
DiagramProduct::coproduct() const{
    if(empty()){
        DiagramTensorVector V;
        Polynom P(0);
        V.add(P,DiagramTensor());
        return V;
    }
    DiagramTensorVector V=front().coproduct();
    for(int i=1;i<size();++i){
        DiagramTensorVector W;
        multiply(W,V,at(i).coproduct());
        V.swap(W);
    }
    return V;
}

//*****
/* DiagramTensor *
//*****

void
DiagramProduct::multiply_by(const DiagramProduct &D){
    for(auto i=0;i<D.size();++i){
        multiply_by(D[i]);
    }
}

//*****
/* DiagramProductVector *
//*****

void
DiagramProductVector::add(const Polynom& P,const DiagramProduct& T){
    auto it=find(T);
    if(it==end()){ // T not yet present
        emplace(T,P);
    }
    else{
        it->second+=P;
    }
}

//*****
/* DiagramTensorVector *
//*****

void
DiagramTensorVector::add(const Polynom& P,const DiagramTensor& T){
    auto it=find(T);
    if(it==end()){ // T not yet present
        emplace(T,P);
    }
}

```

```

    else{
        it->second+=P;
    }
}

//*****
//* Display functions *
//*****

//-----
// ostream& operator<<(ostream&, const Diagram&)
//-----

ostream& operator<<(ostream& os, const Diagram& D){
    int d=D.degree();
    if(d==0) return os<<"()";
    os<<'('<<D.target(1);
    for(int i=2;i<=d;++i) os<<','<<D.target(i);
    return os<<')';
}

//-----
// ostream& operator<<(ostream&, const DiagramProduct&)
//-----

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramProduct& P){
    if(P.empty()) return os<<'1';
    for(auto i=0;i<P.size();++i) os<<P[i];
    return os;
}

//-----
// ostream& operator<<(ostream&, const DiagramTensor&)
//-----

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramTensor& T){
    return os<<"\033[31m"<<T.left()<<"\033[36m\u2297\033[34m"<<T.right()<<"
    \033[0m";
}

//-----
// ostream& operator<<(ostream& os, const Polynom& P)
//-----

ostream& operator<<(ostream& os, const Polynom& P){
    fmpz_poly_print_pretty(P.p, "x");
    return os;
}

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramProductVector& V){
    if(V.empty()) return os<<'0';
    auto it=V.begin();
    os<<it->second<<','<<it->first;
    for(++it;it!=V.end();++it){
        os<<'+'<<it->second<<','<<it->first;
    }
    return os;
}

```

```

}

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramTensorVector& V){
    if(V.empty()) return os<<'0';
    auto it=V.begin();
    os<<it->second<<'.'<<it->first;
    for(++it;it!=V.end();++it){
        os<<'+'<<it->second<<'.'<<it->first;
    }
    return os;
}

//-----
// void multiply(DiagramTensor& R, const DiagramTensor& T1, const DiagramTensor
& T2)
//-----

void
multiply(DiagramTensor& R, const DiagramTensor& T1, const DiagramTensor& T2){
    R.left()=T1.left();
    R.left().multiply_by(T2.left());
    R.right()=T1.right();
    R.right().multiply_by(T2.right());
}

//-----
// void multiply(DiagramTensorVector&, const DiagramTensorVector&, const
DiagramTensorVector&)
//-----

void
multiply(DiagramTensorVector& R, const DiagramTensorVector& V1, const
DiagramTensorVector& V2){
    R.clear();
    DiagramTensor T;
    Polynom P;
    for(auto it1=V1.begin();it1!=V1.end();++it1){
        for(auto it2=V2.begin();it2!=V2.end();++it2){
            multiply(T, it1->first, it2->first);
            multiply(P, it1->second, it2->second);
            R.add(P, T);
        }
    }
}
}

```

```

#ifndef GENERATION_HPP
#define GENERATION_HPP

#include <set>
#include "diagram.hpp"

using namespace std;

template<class T> ostream& operator<<(ostream& os, const set<T>& v);

class DiagramGenerator{
private:

```

```

    int dmax;
    set<Diagram>* diagrams;
    void generate_diagrams(int i);
public:
    DiagramGenerator(int d=0);
    int degree_max() const;
    const set<Diagram>& operator[](int i) const;
    friend ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramGenerator& DG);
};

class DiagramProductGenerator{
private:
    const DiagramGenerator& DG;
    int dmax;
    set<DiagramProduct>* products;
    void generate_products(int i);
public:
    DiagramProductGenerator(const DiagramGenerator& DG, int d=0);
    const set<DiagramProduct>& operator[](int i) const;
    friend ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramProductGenerator& DG);
};

inline
DiagramGenerator::DiagramGenerator(int d){
    dmax=d;
    diagrams=new set<Diagram>[d+1];
    diagrams[0].insert(Diagram());
    for(int i=1;i<=d;++i) generate_diagrams(i);
}

inline int
DiagramGenerator::degree_max() const{
    return dmax;
}

inline const set<Diagram>&
DiagramGenerator::operator[](int i) const{
    return diagrams[i];
}

inline
DiagramProductGenerator::DiagramProductGenerator(const DiagramGenerator& _DG,
    int d):DG(_DG){
    assert(d<=DG.degree_max());
    dmax=d;
    products=new set<DiagramProduct>[d+1];
    products[0].insert(DiagramProduct());
    for(int i=1;i<=d;++i) generate_products(i);
}

inline const set<DiagramProduct>&
DiagramProductGenerator::operator[](int i) const{
    return products[i];
}

template<class T>
inline ostream&
operator<<(ostream& os, const set<T>& v){

```



```

    if(v.empty()) return os<<"{}";
    auto it=v.begin();
    os<<'{'<<*it;
    for(++it;it!=v.end();++it){
        os<<','<<*it;
    }
    return os<<'}';
}
#endif

#include "generation.hpp"

void
DiagramGenerator::generate_diagrams(int n){
    Diagram D;
    for(int n1=0;n1<n;++n1){
        for(auto it1=diagrams[n1].begin();it1!=diagrams[n1].end();++it1){
            int rho=n1+1;
            D=*it1;
            D.set_degree(n);
            D.set_target(rho,0);
            for(int i=1;i<=n1;++i){
                if(D.target(i)==0) D.set_target(i,rho);
            }
            for(int n2=0;n2<n-n1;++n2){
                for(auto it2=diagrams[n2].begin();it2!=diagrams[n2].end();++it2){
                    Diagram D2=*it2;
                    for(int i=1;i<=n2;++i){
                        D.set_target(rho+i,rho+D2.target(i));
                    }
                    int n3=n-1-n1-n2;
                    for(auto it3=diagrams[n3].begin();it3!=diagrams[n3].end();++it3){
                        Diagram D3=*it3;
                        for(int i=1;i<=n3;++i){
                            int t=D3.target(i);
                            if(t==0) D.set_target(rho+n2+i,0);
                            else D.set_target(rho+n2+i,rho+n2+t);
                        }
                        diagrams[n].insert(D);
                    }
                }
            }
        }
    }
}

void
DiagramProductGenerator::generate_products(int n){
    DiagramProduct P;
    for(int i=0;i<=n;++i){
        auto V=DG[i];
        auto W=products[n-i];
        for(auto it1=W.begin();it1!=W.end();++it1){
            for(auto it2=V.begin();it2!=V.end();++it2){
                P=*it1;
                P.multiply_by(*it2);
                products[n].insert(P);
            }
        }
    }
}

```

```

    }
  }
}

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramGenerator& DG){
  os<<' ['<<DG.diagrams[0].size();
  for(int d=1;d<=DG.dmax;++d){
    os<<', '<<DG.diagrams[d].size();
  }
  return os<<']';
}

ostream& operator<<(ostream& os, const DiagramProductGenerator& DG){
  os<<' ['<<DG.products[0].size();
  for(int d=1;d<=DG.dmax;++d){
    os<<', '<<DG.products[d].size();
  }
  return os<<']';
}

#ifdef LINEAR_ALGEBRA_HPP
#define LINEAR_ALGEBRA_HPP

#include "generation.hpp"
#include "fmpz_poly_mat.h"

class Basis{
public:
  map<DiagramTensor,int> index_tensor;
public:
  Basis(const DiagramProductGenerator& PG,int d);
  int get_index(const DiagramTensor& T) const;
};

void kernel(int d);
void kernel(int d,int x);

inline int
Basis::get_index(const DiagramTensor& T) const{
  return index_tensor.at(T);
}

#endif

#include "linear_algebra.hpp"

Basis::Basis(const DiagramProductGenerator& PG,int d){
  int index=0;
  for(int dl=0;dl<=d;++dl){
    const set<DiagramProduct>& SL=PG[dl];
    const set<DiagramProduct>& SR=PG[d-dl];
    for(auto itl=SL.begin();itl!=SL.end();++itl){
      for(auto itr=SR.begin();itr!=SR.end();++itr){

```

```

        DiagramTensor T;
        T.left()*=itl;
        T.right()*=itr;
        if(not T.left().empty() and not T.right().empty()){
            index_tensor[T]=index;
            ++index;
        }
    }
}
}
}

void kernel(int d){
    cout<<"Compute kernel for degree "<<d<<endl;
    fmpz_poly_mat_t K,M;
    DiagramGenerator D(d);
    DiagramProductGenerator DP(D,d);
    Basis basis(DP,d);
    const set<DiagramProduct>& S=DP[d];
    fmpz_poly_mat_init(M,basis.index_tensor.size(),S.size());
    fmpz_poly_mat_init(K,S.size(),S.size());
    int c=0;
    cout<<"Number of products : "<<S.size()<<endl;
    cout<<"Number of tensor : "<<basis.index_tensor.size()<<endl;
    cout<<"Computing matrix ... "<<endl;
    for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){
        const DiagramProduct& P=*it;
        DiagramTensorVector V=P.coproduct();
        for(auto itv=V.begin();itv!=V.end();++itv){
            const DiagramTensor& T=itv->first;
            if(not T.left().empty() and not T.right().empty()){
                const Polynom& p=itv->second;
                int r=basis.get_index(T);
                fmpz_poly_set(fmpz_poly_mat_entry(M,r,c),p.p);
            }
        }
        ++c;
    }
    cout<<"Computing kernel ..."<<endl;

    int ker_dim=fmpz_poly_mat_nullspace(K,M);
    cout<<"Kernel dimension : "<<ker_dim<<endl;
    Polynom coeff;
    slong dmax=0;
    for(int i=0;i<ker_dim;++i){
        cout<<endl<<"=====> Vector "<<i<<" <====="<<endl;
        //Compute gcd
        int j=0;
        Polynom gcd;
        for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){

            fmpz_poly_set(coeff.p,fmpz_poly_mat_entry(K,j,i));
            fmpz_poly_gcd(gcd.p,gcd.p,coeff.p);
            ++j;
        }
        //Compute vector

        DiagramProductVector V;

```

```

    j=0;
    for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){

        fmpz_poly_set(coeff.p,fmpz_poly_mat_entry(K,j,i));
        fmpz_poly_div(coeff.p,coeff.p,gcd.p);
        if(not fmpz_poly_is_zero(coeff.p)){
            V.add(coeff,*it);
            dmax=max(dmax,fmpz_poly_degree(coeff.p));
        }
        ++j;
    }
}

void kernel(int d,int x){
    cout<<"Compute kernel for degree "<<d<<endl;
    fmpz_mat_t K,M;
    fmpz_t X;
    fmpz_init(X);
    fmpz_set_si(X,x);
    DiagramGenerator D(d);
    DiagramProductGenerator DP(D,d);
    Basis basis(DP,d);
    const set<DiagramProduct>& S=DP[d];
    fmpz_mat_init(M,basis.index_tensor.size(),S.size());
    fmpz_mat_init(K,S.size(),S.size());
    int c=0;
    cout<<"Number of products : "<<S.size()<<endl;
    cout<<"Number of tensor : "<<basis.index_tensor.size()<<endl;
    cout<<"Evaluate for x = "<<x<<endl;
    for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){
        const DiagramProduct& P=*it;
        DiagramTensorVector V=P.coproduct();
        for(auto itv=V.begin();itv!=V.end();++itv){
            const DiagramTensor& T=itv->first;
            if(not T.left().empty() and not T.right().empty()){
                const Polynom& p=itv->second;
                int r=basis.get_index(T);
                fmpz_poly_evaluate_fmpz(fmpz_mat_entry(M,r,c),p.p,X);
            }
        }
        ++c;
    }
    int ker_dim=fmpz_mat_nullspace(K,M);
    cout<<"Kernel dimension : "<<ker_dim<<endl;
    fmpz_t coeff;
    fmpz_init(coeff);
    cout<<endl;
    for(int i=0;i<ker_dim;++i){
        cout<<"=====> Vector "<<i<<" <====="<<endl;
        //Compute gcd
        fmpz_t gcd;
        fmpz_init_set_ui(gcd,0);
        int j=0;
        for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){
            fmpz_set(coeff,fmpz_mat_entry(K,j,i));

            fmpz_gcd(gcd,gcd,coeff);

```

```
    ++j;
  }
  fmpz_print(gcd);
  cout<<endl;
  DiagramProductVector V;
  j=0;
  for(auto it=S.begin();it!=S.end();++it){
    fmpz_set(coeff,fmpz_mat_entry(K,j,i));
    if(not fmpz_is_zero(coeff)){
      Polynom p;
      fmpz_divexact(coeff,coeff,gcd);
      fmpz_poly_set_coeff_fmpz(p.p,0,coeff);
      V.add(p,*it);
    }
    ++j;
  }
}
```

Table des matières

Résumé	xi
Remerciements	xiii
Sommaire	xv
Introduction	1
1 Algèbres de Hopf combinatoires	5
1.1 Définition d'une algèbre de Hopf	5
1.1.1 Algèbres et cogèbres	5
1.1.2 Bigèbres et Algèbres de Hopf	7
1.1.3 Algèbre enveloppante, théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore	9
1.2 Quelques algèbres de Hopf classiques	10
1.2.1 Algèbre de Hopf commutative de Connes et Kreimer	10
1.2.2 Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques et fonctions symétriques non commutatives	12
1.3 Procédé de Aguiar, Bergeron et Sottile	15
2 Etude de l'algèbre de Hopf de mots tassés WMat	17
2.1 Algèbre de Hopf des mots tassés	18
2.1.1 Algèbre de Hopf WMat	19
2.1.2 Algèbre de Hopf duale WMat [®]	28
2.2 Quelques algèbres de Hopf associées	30
2.2.1 Algèbre de Hopf de permutations	31
2.2.2 Algèbre de Hopf quotient des mots tassés stricts croissants	41
2.2.3 Algèbre de Hopf des compositions étendues	51
2.3 Morphismes à valeur dans QSym	67
2.3.1 Isomorphisme entre ISPW [®] et QSym , isomorphisme entre ISPW et NSym	68
2.3.2 Quelques morphismes de WMat dans QSym	70
3 Etude de l'algèbre de Hopf des diagrammes de dissection	81
3.1 Algèbre de Hopf des diagrammes de dissection	82
3.1.1 Rappels	82
3.1.2 Echelles et corolles : deux sous-algèbres de Hopf de \mathcal{H}_D	85
3.1.3 Etude de la coliberté de \mathcal{H}_D ; éléments primitifs de degré inférieur à 3	87
3.1.4 Calcul de l'antipode	89

3.2	Diagrammes de dissection et arbres enracinés	93
3.2.1	Algèbres pré-Lie et théorème de structure de Oudom et Guin	93
3.2.2	Algèbres de Hopf d'arbres enracinés	96
3.2.3	Algèbre de Hopf duale des diagrammes de dissection	99
3.2.4	Définition d'un morphisme d'algèbres de Hopf de \mathcal{H}_{GL} vers \mathcal{H}_D^{\otimes}	101
3.3	Morphismes de \mathcal{H}_D dans QSym	127
3.3.1	Premier choix de ζ	128
3.3.2	Deuxième choix de ζ	130
Bibliographie		139
A Compléments sur le chapitre 2		145
A.1	Valeur du coproduit de WMat pour les mots tassés de degré inférieur ou égal à 3	145
A.2	Valeur du morphisme Ψ_3 pour les mots tassés de degré inférieur ou égal à 4	146
A.3	Valeur du morphisme Ψ_4 pour quelques mots de degré 5	147
A.4	Programmes	148
A.4.1	Produit de battage de deux mots, de deux sommes de mots et produit de battage itéré	148
A.4.2	Construction des mots tassés stricts et des mots tassés	150
A.4.3	Produit de l'algèbre de Hopf WMat [⊗]	150
A.4.4	Image par Ψ_5^* de M_α^* avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \models n$	154
B Compléments sur le chapitre 3		155
B.1	Valeur du coproduit de \mathcal{H}_D pour les éléments de degré inférieur ou égal à 3	155
B.2	Valeur du morphisme $\Psi_{2,A}$ pour les diagrammes de dissection de degré inférieur ou égal à 3 lorsque A est la suite constante égale à 1	158
B.3	Programmes	159
Table des matières		181

Deux exemples d'algèbres de Hopf d'extraction-contraction: mots tassés et diagrammes de dissection

Résumé

Ce manuscrit est consacré à l'étude de la combinatoire de deux algèbres de Hopf d'extraction-contraction. La première est l'algèbre de Hopf de mots tassés **WMat** introduite par Duchamp, Hoang-Nghia et Tanasa dont l'objectif était la construction d'un modèle de coproduit d'extraction-contraction pour les mots tassés. Nous explicitons certains sous-objets ou objets quotients ainsi que des applications vers d'autres algèbres de Hopf. Ainsi, nous considérons une algèbre de permutations dont le dual gradué possède un coproduit de déconcaténation par blocs et un produit de double battage décalé. Le double battage engendre la commutativité de l'algèbre qui est donc distincte de celle de Malvenuto et Reutenauer. Nous introduisons également une algèbre de Hopf engendrée par les mots tassés de la forme $x_1 \dots x_1$. Elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives. Son dual gradué est donc isomorphe à l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques. Nous considérons également une algèbre de Hopf de compositions et donnons son interprétation en termes de coproduit semi-direct d'algèbres de Hopf.

Le deuxième objet d'étude est l'algèbre de Hopf de diagrammes de dissection \mathcal{H}_D introduite par Dupont en théorie des nombres. Nous cherchons des éléments de réponse concernant la nature de sa cogèbre sous-jacente. Est-elle colibre? La dimension des éléments primitifs de degré 3 ne permet pas de conclure. Le cas du degré 5 permet d'établir la non-coliberté dans le cas où le paramètre de \mathcal{H}_D vaut -1 . Nous étudions également la structure pré-Lie du dual gradué \mathcal{H}_D^* . Nous réduisons le champ de recherche à la sous-algèbre pré-Lie non triviale engendrée par le diagramme de dissection de degré 1. Cette algèbre pré-Lie n'est pas libre.

Mots clés : Algèbres de Hopf combinatoires, permutations, mots tassés, produit de battage, coproduit semi-direct, fonctions quasi-symétriques, diagrammes de dissection, coliberté, algèbres pré-Lie, algèbres enveloppantes

Two examples of Hopf algebras with a selection-quotient coproduct: packed words and dissection diagrams

Abstract

This thesis deals with the study of combinatorics of two Hopf algebras. The first one is the packed words Hopf algebra **WMat** introduced by Duchamp, Hoang-Nghia, and Tanasa who wanted to build a coalgebra model for packed words by using a selection-quotient process. We describe certain sub-objects or quotient objects as well as maps to other Hopf algebras. We consider first a Hopf algebra of permutations. Its graded dual has a block deconcatenation coproduct and double shuffle product. The double shuffle product is commutative so the Hopf algebra is different from the Malvenuto and Reutenauer one. We analyse then the Hopf algebra generated by packed words looking like $x_1 \dots x_1$. This Hopf algebra and non commutative symmetric functions are isomorphic. So its graded dual and quasi-symmetric functions are isomorphic too. Finally we consider a Hopf algebra of compositions and give its interpretation in terms of a semi-direct coproduct structure.

The second object we study is the Hopf algebra of dissection diagrams \mathcal{H}_D introduced by Dupont in number theory. We study the cofreeness problem. We can't conclude with homogenous primitive elements of degree 3. With the degree 5 case, we can say that \mathcal{H}_D is not cofree with the parameter -1 . We study the pre-Lie algebra structure of \mathcal{H}_D 's graded dual too. We consider in particular the sub-pre-Lie algebra generated by the dissection diagram of degree 1. It is not a free pre-Lie algebra.

Keywords: Combinatorial Hopf algebras, permutations, packed words, shuffle product, semi-direct coproduct, quasi-symmetric functions, dissection diagrams, cofreeness, pre-Lie algebras, enveloping algebras

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville

Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228 Calais Cedex – France