HAL open science

Estimation de la volatilité des données financières à haute fréquence : une approche par le Modèle Score-GARCH

Hisseine Saad Mahamat

▶ To cite this version:

Hisseine Saad Mahamat. Estimation de la volatilité des données financières à haute fréquence : une approche par le Modèle Score-GARCH. Economies et finances. Université Montpellier, 2017. Français. NNT : 2017MONTD023 . tel-01730504

HAL Id: tel-01730504

https://theses.hal.science/tel-01730504v1

Submitted on 13 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En SCIENCES ECONOMIQUES

Ecole Doctorale Economie-Gestion De Montpellier (EDEG)

Laboratoire Montpelliérain d'Economie Théorique et Appliquée (LAMETA)

ESTIMATION DE LA VOLATILITE DES DONNEES FINANCIERES A HAUTE FREQUENCE: UNE APPROCHE PAR LE MODELE SCORE-GARCH

Présentée par : **MAHAMAT Hisseine Saad**

Le 24 /11/ 2017

Sous la direction de : **Professeur Michel TERRAZA**

Devant le jury composé de

Walter Briec : Professeur à l'Université de Perpignan	Rapporteur
Zied Ftiti: Professeur à EDC Paris Business School	Rapporteur
Stéphane Mussard : Professeur à l'Université de Nîmes	Examinateur
François Benhmad : Maître de conférences, HDR à l'Université de Montpellier	Examinateur
Michel Terraza : Professeur à l'Université de Montpellier	Directeur de thèse

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude au Professeur Michel TERRAZA, mon directeur de thèse, pour sa grande disponibilité de tous les instants et son soutien au cours de ces trois années. Son exigence et son ouverture scientifique, sa rigueur, son enthousiasme très communicatif, ses critiques et ses encouragements m'ont beaucoup aidé. Ma reconnaissance lui sera à jamais acquise pour tout ce temps qu'il m'a consacré ainsi que les opportunités qu'il m'a donné au cours de ces années.

Mes sincères remerciements au Pr. Walter Briec et Dr. Zied Ftiti pour avoir accepté de rapporter ma thèse ainsi qu'au Pr. Stéphane Mussard et Dr François Benhmad pour avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse. Je tiens à remercier également tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler au cours de ces années de thèse. Je tiens en particulier à exprimer ma plus profonde gratitude à Dr Françoise SEYTE pour sa disponibilité et son temps qu'elle a bien voulu m'accorder durant tout au long cette période.

Je souhaite aussi adresser mes chaleureux remerciements à mes chers parents pour leur soutien inconditionnel, leur dévouement et leur confiance à mon égard. De même, je remercie tous les membres de ma famille et de ma belle-famille, mon épouse « Djimié» qui a toujours été à mes côtés et notre fils « SAAD » qui a été pour moi une vraie source de motivation.

Il m'est également impossible d'oublier mes amis, mes proches et estimés collègues, notamment Dr Christel PEGUY, Dr Ndené KA, Ibrahima BAH, Ayad ASSOIL, Nour WAHBE et Oumar H. NDIAYE pour leurs suggestions, soutiens, compréhensions, patience et leurs gentillesse sur toute cette période, ainsi qu'à tous les autres dont les noms ne sont pas cités ici, mais qui se reconnaitront en ces quelques lignes, pour avoir fait de cette période de réalisation de la thèse, une grande aventure humaine aussi bien enrichissante que plaisante.

Que ce modeste travail témoigne de ma reconnaissance et de mes sentiments les plus profonds envers tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à sa réalisation.

Résumé

Cette thèse a pour objectif principal d'estimer la volatilité des données financières à haute fréquence par le modèle Score-GARCH, dans le contexte de la crise financière récente (2007-2008). La contribution effective de notre thèse couvre trois axes majeurs.

Premièrement, nous avons mis en évidence les faits stylisés observés empiriquement dans les données financières à haute fréquence, dans le cas de quatre actifs financiers de CAC40. Cette étude nous a permis d'analyser la dynamique et l'asymétrie des rendements des actifs financiers à haute fréquence.

Deuxièmement, compte tenu des faits stylisés en relation avec le comportement de la volatilité, nous avons modélisé la volatilité des actifs financiers à haute fréquence par le modèle Score-GARCH, et nous l'avons comparé avec le modèles GARCH asymétriques classiques (modèles de référence).

Le troisième axe propose des mesures du risque (VaR) de marché intra-journalier dans le contexte particulier des données à haute fréquence régulièrement espacées dans le temps (toutes les cinq minutes).

Mots clés : *Estimation, Volatilité de données intra-journalières, dynamique et asymétrie de la volatilité, Score-GARCH, GARCH asymétriques, VaR intra-journalière, trading à haute fréquence, Données financières à haute fréquence.*

Summary

The main objective of this thesis is to estimate the volatility of high-frequency financial data by the Score-GARCH model in the context of the recent financial crisis (2007-2008). The actual contribution of our thesis covers three major axes.

First, we have highlighted the stylized facts observed empirically in high-frequency financial data, in the case of four CAC40 financial assets. This study allowed us to analyze the dynamics and asymmetry of the returns of high-frequency financial assets.

Second, given the stylized facts in relation to the behavior of volatility, we have modeled the volatility of high-frequency financial assets by the Score-GARCH model, and compared it with the classic asymmetric GARCH models (reference models).

The third axis proposes intraday market risk measures (VaR) in the particular context of high frequency data regularly spaced over time (every five minutes).

Keywords: *Estimation, Intra-day data volatility, volatility asymmetry and volatility, Score-GARCH, asymmetric GARCH, intra-day VaR, high frequency trading, high frequency financial data.*

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE : ……1

CHAPITRE I : Processus GARCH Asymétriques et Dynamiques de la Volatilité des cours boursiers à haute fréquence ……7

SECTION I : Concepts de la volatilité boursière à haute fréquence……..10

SECTION II : Modèles GARCH asymétriques sur données à Haute Fréquence……33

CHAPITRE II : Estimations et Validations du modèle Score GARCH …..54

METHODOLOGIE: 58

DONNEES ET ANALYSE PRELIMINAIRE :……..……73

RESULTATS ET DISCUSSIONS :……99

CHAPITRE III : Modèle Score-GARCH et Mesure de la Value-at-Risque sur données à Haute Fréquence……116

METHODOLOGIE :……...……119

RESULTATS ET DISCUSSIONS : ……...……148

CONCLUSION GENERALE :……..156

ANNEXES :……..159

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :……193

TABLE DES MATIERES :.....204

INTRODUCTION GENERALE

Durant les deux dernières décennies, les marchés financiers ont évolué de manière spectaculaire, stimulés par la déréglementation, le décloisonnement et la désintermédiation du système. La multiplication des produits financiers et l'internationalisation des marchés sont venus répondre aux besoins d'allocation optimale de l'épargne au niveau mondial et ont permis le développement des opérations d'arbitrage, de couverture et de spéculation. Cet accroissement de l'offre de produits financiers a fortement modifié les comportements des agents économiques. En effet, jusqu'au début des années 70, une majorité d'épargnants recherchait des placements liquides sans risques et contreparties, faiblement rémunérés. Après les chocs pétroliers, les mouvements inflationnistes qui ont suivi et la multiplication des produits financiers, ont progressivement amené ceux-ci à changer leur profil d'investissement pour rechercher des produits plus risqués mais aussi plus bénéfiques. Parallèlement à cette modification du comportement des agents, les marchés financiers ont effectué des changements structurels importants pour faire face à la demande massive. Pour la plupart, ils sont passés du mode de cotation fixe, où les transactions et les collectes des ordres étaient effectuées sur des intervalles de temps bien précis, où les échanges sont enregistrés de manière quasi continue (chaque seconde pour les titres les plus liquides).

Ce passage de basse à haute fréquence de cotation a été rendu possible grâce au développement de l'informatique et l'arrivée de la technologie numérique qui ont réduit considérablement les coûts de transaction afin que ce soit accessible à tout le monde. Elle a aussi permis de transmettre simultanément les informations en temps réel aux participants des marchés. Ces changements structurels dans les moyens de collecte, de traitement et de transmission de l'information ont eu des implications importantes pour la disponibilité et l'interprétation des données de haute fréquence.

En effet, la cotation en temps continu permet de disposer pratiquement de tous les ensembles de données sur l'activité du marché (prix des actifs, volumes échangés, nombres d'acteurs, nombre de vendeurs, fréquence d'échange, etc.). Ces informations plus proches des processus générateurs des prix des actifs sont sans doute plus appropriées pour les tests empiriques des modèles théoriques de la littérature financière. Ceci d'autant plus que la plupart des études empiriques n'arrivent pas à valider certains résultats théoriques à partir des données dites de basse fréquence, soit journalières, hebdomadaires ou mensuelles ; Fama et French (1996). L'arrivée des données de haute fréquence dans le monde de

finance peut donc combler ce déficit et permettre d'enrichir la littérature sur la modélisation des dépendances entre les actifs de façon significative. Toutefois, des questions qui se posent, ces données sont-elles le reflet ou l'image réelle des dépendances entre l'origine potentielle de risque ? Pourtant elles ont les mêmes caractéristiques que les données de basse fréquence. Ces données peuvent-elles être utilisées sur des modèles de dépendances classiques ? Peuvent-elles mieux rendre compte des comportements des agents sur les marchés ?

Le domaine de l'économétrie financière sur données à haute fréquence a connu plusieurs changement, on s'intéresse au profond renouvellement de ces dernières années dit à la disponibilités des données financières à haute fréquence dans le marchés boursières et à la facilité de procurer à tout moment de grandes quantités souhaités(dimensions) des bases de données avec les fréquences demandées: par exemple des cours historiques portant sur un très grand nombre d'actifs financiers et des portefeuilles de grande dimension.

Un grand nombre d'études principalement anglo-saxonnes portant sur ce type de données a été récemment publié. Elles mettent en avant certaines caractéristiques importantes des prix des actifs financiers, jusqu'alors pratiquement indécelables avec des données de basse fréquence. C'est pourquoi la constitution et l'accès à des bases de données de haute fréquence constituent un enjeu important pour analyser et mieux comprendre les marchés financiers, Wood et al. (1985). C'est en effet une possibilité d'avantage de connaitre les éléments fondamentaux qui influence les marchés boursiers. En se donnant de bonnes indications par rapport à la gestion de ces marchés, les données de haute fréquence permettent de revisiter les modèles traditionnels de la finance et les relations d'équilibre qu'ils sous-tendent. Néanmoins, le traitement de ces données spécifiques ne va pas sans poser un certain nombre de problèmes.

Avec l'arrivée de données à haute fréquence, on peut souligner des problèmes sur la façon de capturer ou d'étudier la volatilité à haute fréquence. D'abord on s'intéresse à la mesure de la volatilité latente à haute fréquence. Elle est pratique et face à corriger, donc cette dimension ne nécessite pas de modèle particulier pour la résoudre. Tant disque la question de la modélisation du dynamique de la volatilité à haute fréquence, pose un souci. Mais via à des techniques de séries temporelles sur les données à haute fréquence, on peut distinguer l'approche de prévision de la volatilité et celle de la mesure de la volatilité à haute fréquence, c'est un moyen de résoudre toute difficulté qui fait face.

En économétrie, la volatilité a été l'un de sujets de recherche le plus utilisés, et elle l'est toujours, l'un des sujets de recherche les plus actifs dans le domaine de la prévision économique en générale et de l'économétrie financière en particulier. L'une de caractéristique principale du processus de la volatilité est le fait qu'elle n'est pas observable. Les premiers travaux sur la volatilité (modèles ARCH/GARCH) ont été conçus pour fournir des estimations anticipatives ou de prévisions, en d'autre terme de la volatilité conditionnelle. Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) ont été introduits par Engle (1982) et leurs extensions GARCH (ARCH généralisés) est due à Bollerslev (1986). Leurs caractérisations reposent essentiellement sur le concept de variance conditionnelle, qui ne dépend que du module des valeurs passées : l'effet sur la volatilité de la date présente des innovations passées positives et négatives est donc identique.

Cette symétrie des modèles GARCH standard est en contradiction avec plusieurs études sur les séries temporelles de cours boursiers qui mettent en évidence une corrélation négative entre le carré des innovations de la date présente et les innovations passées. Pour pallier ce problème, diverses paramétrisations de la variance conditionnelle ont été proposées. L'une des formulations la plus naturelle est d'introduire l'asymétrie en spécifiant la variance conditionnelle en fonction des composantes positives et négatives des innovations passées. L'étude de la volatilité réalisée s'inspire de la méthode de la volatilité étudiée en temps continu qui est lié de manière évidente à l'évolution de la volatilité instantanée courante.

Les mémoires longues sont connues, il peut avoir des biais dans les estimations de la volatilité qui sont dit à ces mémoires longues. Pout maitre fin à ce problème, plusieurs tests ont été proposés afin d'identifier leur présence et de leur appliquer un traitement spécifique. Ces tests statistiques ont été tout d'abord construits pour identifier les problèmes dus aux sauts des données à basse fréquence, on peut citer comme hauteurs : Ait-Sahalia (2002) ; Carr et Wu (2003) ; Johannes (2004) ; Wang (1995) et plein d'autres. Ces tests ont été rapidement étendus à des données à haute fréquence.

Plusieurs chalenges à relever sur le sujet de base de données à haute fréquence actuelle ne sont pas dite à la fréquence de données échantillonnées, à des intervalles de temps particulier ou à la dynamique intra-journalière de l'activité de marché financière. Ils sont surtout rattachés ou expliqué à l'adaptation des modélisations économétriques (estimation

et prévision) et à la problématique des bases de données de très grand échantillon (portefeuilles de plusieurs titres, ou de différents actifs, etc.).

L'incertitude joue un rôle important dans la plupart des problèmes abordés par la théorie financière à haute fréquence. Les diverses théories d'évaluation des actifs financiers à haute fréquence définissent la prime de risque par la covariance entre le rendement futur de l'actif et celui d'un ou de plusieurs portefeuilles de références. Dans le cadre des problèmes d'évaluation d'options, l'incertitude associée au prix futur de l'actif sous-jacent est le déterminant le plus important dans la formation des prix. Lorsque l'on construit des portefeuilles d'arbitrage, on accorde également un rôle important aux valeurs futures des variances et covariances conditionnelles des différents actifs en présences.
Depuis longtemps les études révèlent que, l'incertitude portant sur le prix spéculatif varie au cours du temps. Cependant, ce n'est que récemment les études appliquées en économétrie financière et en économie monétaire utilisent explicitement des modélisations de séries temporelles faisant intervenir des moments du second ordre ou d'ordre supérieur variables. Depuis l'introduction des modèles ARCH, des centaines de travaux de recherche se sont attachés à appliquer ce type de modélisation à des séries financières à haute fréquence.

En économétrie financière en générale et dans le domaine de haute fréquence en particulier, les recherches des mesures réalisées de la volatilité sont de plus en plus sollicitées dans les études, car les mesures réalisées fournissent des résultats beaucoup plus précis et efficaces sur le niveau instantané de la volatilité journalière que les rendements au carré des séries financières souvent étudier. Donc les volatilités réalisées ont été mises en en œuvre dans les études de la volatilité conditionnelle, plus particulièrement pour la modélisation ARCH/GARCH, et dans leurs extensions par la suite. Engel (2002) a été le premier à examiner ce type d'approche, en proposant le modèle GARCH-X qui inclut la variance réalisée dans l'équation de GARCH. Nielsen et al. (2007), ont étendu ce modèle en utilisant la variance réalisée. Ce modèle est cependant considéré comme incomplet ou partiel, car il ne s'intéresse pas à la dynamique des mesures réalisées du processus. Les premières contributions à la détection de sauts dans les données à haute fréquence sont celles de Barndorff-Nielsen et al. (2004), Barndorff et al. (2006), Andersen et al. (2007), Mykland et Zhang (2008) généralisé par la suite par Lee et Hannig (2010) et Boudt et al. (2012), pour n'est pas cité que ces auteurs.

Nombreuses études sur l'asymétrie des données financières à haute fréquence se sont révélées insuffisantes, mais elles ont ouvert un domaine de recherche sur ce sujet. Une étude récente réalisant une modélisation de la volatilité à haute fréquence à l'aide d'un modèle GARCH a été proposée par Hansen, Huang et Shek (2012), désormais Hansen et al (2012). Ces auteurs ont construit un nouveau modèle appelé Realised-GARCH. S'inspire d'une technique légèrement différente de la modélisation jointe des rendements. On peut dire que les points distinguant notre modèle avec les modèles GARCH classiques se précisément la capacité de déterminer la dynamiques de façon précise de sa relation avec la variance conditionnelle. Alors le processus Realised-GARCH prend en compte l'asymétrie des effets dus aux chocs à la manière du modèle EGARCH. L'introduction de la fonction score dans la distribution limite les effets de chocs extrêmes (jumps) sur la l'asymétrie de la volatilité conditionnelle à haute fréquence et de la volatilité réalisée sur données à haute fréquence.

A la suite des multiples crises financières de ces dernières décennies, les institutions financières ont proposé des cadres réglementaires et des indicateurs pour prévenir les crises et leurs effets. Pour cela, l'accent a été particulièrement mis sur la mesure des risques et ceci dans la nécessité de bien comprendre les possibles implications sur la valeur des actifs (sévérité du risque) et la fréquence d'occurrence de ce risque (probabilité). Cette réalité a créé le besoin d'une mesure regroupant à la fois la probabilité et l'impact potentiel d'un certain risque. La Valeur-en-Risque ou VaR en anglais pour Value-at-Risk, qui intègre ces deux axes de l'analyse, est un indicateur très reconnu sur les marchés financiers à haute fréquence ou pas, pour des nécessités réglementaires et aussi pour l'amélioration de la gestion des portefeuilles en offrant une mesure de risque complète et fiable.

D'où, nous étudions trois mesures du risque de marché programmées pour des données à haute fréquence régulièrement espacées dans le temps. On utilise les concepts de la Value-at-Risque (VaR) suivantes : la VaR gaussienne ou normale, la VaR historique et la VaR conditionnelle. La Value-at-Risque d'une manière générale se définie comme la perte maximale prévue pour l'intervalle de temps entre t_i et $t_{i+\Delta}$, défini par une augmentation infinitésimale et déterministe du temps de variation (Δ) où t_i représente le temps de la dernière transaction.

L'objet de cette thèse est de montrer que le modèle Score-GARCH est une mesure pertinente de l'asymétrie de la volatilité sur des données à haute fréquence. Pour cela nous proposons d'introduire une fonction score d'une distribution à queues plus épaisses dans les estimations classiques des modèle GARCH. Le point de différence avec les modèles habituels se localise dans l'introduction d'une équation de mesure asymétrique et robuste aux sauts, qui détermine la dynamique de la mesure réalisée en relation avec la variance conditionnelle sous-jacente.

Afin de répondre à cet objet, nous articulons notre thèse autour de trois chapitres. Dans un **premier chapitre**, nous abordons les éléments fondamentaux de l'économétrie de modèles GARCH Asymétriques, ainsi que les récentes recherches sur la volatilité dans les mesures des risques financiers à partir de données à haute fréquence.

Le deuxième chapitre est une étude empirique qui rassemble plusieurs actifs financiers français, sélectionnés en fonction de leurs caractéristiques et en particulier de la dynamique asymétrique de leur volatilité. Il s'agit d'ALSTOM, de la SOCIETE GENERALE(SG), d'ELECTRICITE DE FRANCE(EDF) et d'ORANGE. Avec une taille des échantillons respectifs s'étalent sur 45 808 données intra journalières (toutes les cinq minutes) soit du 10/01/2012 à 09 :00 au 11/07/2014 18 :00.

Nous présentons dans ce chapitre le modèle Score-GARCH qui est la pierre angulaire de notre recherche. Il nous permet de définir une nouvelle mesure de la volatilité que nous appelons Score GARCH. Notre objectif est de construire une estimation plus précise de la volatilité que nous comparons avec les modèles GARCH Asymétriques de référence sur données à haute fréquence.

Le troisième chapitre utilise les résultats précédents pour proposer des mesures de risque de données à très haute fréquence irrégulièrement espacées dans le temps. Nous appliquons nos résultats à l'estimation de la Value-at-Risque et nous vérifions la qualité prédictive de notre modèle par les mesures techniques de Backtesting.

CHAPITRE I :

Processus GARCH Asymétriques et Dynamique de la Volatilité des cours boursiers à haute fréquence

INTRODUCTION

L'incertitude est au cœur des développements de la théorie économique moderne, et plus particulièrement de la théorie financière. L'incertitude est un des déterminants les plus importants dans la formation des prix des actifs financiers. Une des motivations pour lesquelles la recherche aux développements de nouvelles techniques économétriques des séries temporelles a été très fertile ces dernières années.

Après les résultats des recherches menés par Wold (1938), la recherche en économétrie d'une manière générale, et sur le développement de modèles de séries chronologiques en particulier, ou portant des réponses aux utilisateurs ont était beaucoup développer. Les modèles de séries chronologiques symétriques à paramètres univariés ont connu une période de prospérité grâce aux immenses travaux de Box et Jenkins (1970) et leur célèbre ouvrage devenu populaire, sans doute, avec leur méthodologie : transformation, identification, estimation, validation et prévision.

les modèles dont la variance des erreurs constante, sont limitatifs, précisément dans la modélisation des séries chronologiques financières quelle que soit la fréquence utilisée, ils sont basés quasiment sur les deux premiers moments conditionnels à savoir : moyenne et variance, tandis que les moments d'ordre supérieurs sont traités comme des paramètres de perturbation supposés constants par rapport au temps données, ce qui montre la limite de cette technique de modélisation, malgré ses énormes succès incontestables. Rajoutant encore, la croissance considérable motivée par l'importance accorder aux risques et à l'incertitude ou la probabilité dans la théorie économique contemporaine ont nécessité le développement de nouvelles techniques de traitement des séries temporaires permettant à la variance et à la covariance de dépendre du temps.

Les séries financières à haute fréquence sont caractérisées par la non stationnarité, l'autocorrélation, de l'hétéroscédasticité, des queues de distribution épaisses, les clusters de volatilité, l'effet de levier, et l'asymétrie. Pour prendre en compte ces phénomènes, Engle (1982) et Bollerselv (1986) ont développé les modèles ARCH (AutoRégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques) et GARCH (ARCH Généralisées). Ces modèles GARCH constituent une extension du modèle ARMA, introduit par Box et Jenkins (1971). Selon Berra et Higgins (1993), la modélisation GARCH et ses extensions correspondent à une représentation spécifique du non linéarité, qui permet une modélisation simple de l'incertitude.

Ce premier chapitre consacré à la littérature, nous permettre de mieux appréhender les différentes situation de la volatilité et l'énormes difficultés de la modélisation de la volatilité des rendements d'actifs financiers à haute fréquence, afin de mettre la lumière sur l'incapacité des GARCH classiques à résoudre la volatilité des chroniques à haute fréquence, tout en analysant théoriquement les enjeux de données financières à haute fréquence et leur règlementations. Il est organisé de la manière suivante :

Dans une première section, nous présentons les caractéristiques principales du concept de la volatilité de données financières à haute fréquence, mais d'abord il est judicieux de comprendre le comportement des rendements permet dans une certaine mesure de comprendre celui de la volatilité et d'autre part cela nous permet d'introduire l'intérêt de modéliser la volatilité. En seconde section, nous décrivons théoriquement les extensions GARCH asymétriques et leurs estimations dans la modélisation des actifs financiers à haute fréquence ; afin d'assurer la possibilité ou la fiabilité de la mise en application dans les chapitres qui suivent.

Section I : Concepts de la volatilité boursière à haute fréquence

Le concept de la volatilité est un élément fondamental de l'appréhension des marchés financiers surtout en termes de gestion de risque. « Source : Journal of Econometrics 2004 » À la suite de Engle (1982) et Bollerslev (1986), la littérature économétrique a vu l'émergence des modèles à hétéroscédasticité conditionnelle, tous dérivés des célèbres modèles GARCH et leurs extensions, dont les applications en finance ont connu un grand succès sur données de haute fréquence (quotidienne, hebdomadaire etc.). Vue les fortes variations des cours boursiers (les crises ou les profils imprévus des praticiens) de ces derniers temps, l'estimation de la volatilité des marchés financiers est une mission très importante dans le monde de la finance, qui a préoccupé et attiré l'attention des chercheurs et des académiciens durant ceux dernières décennies.

Le concept de la volatilité du rendement des cours boursiers à haute fréquence est généralement utilisé pour représenter le risque ou comme un instrument de mesure du risque, son estimation soulève beaucoup des difficultés et son interprétation appelle à des diverses précautions dit aux axes ou courant de recherche. Avec l'électronisation des échanges, des bases de données à haute fréquence (intra-journalière) ont commencé à apparaître. Mis à part le résultat des modèles traditionnels, les études sur données à haute fréquence ont mis en avant deux autres sources importantes d'hétéroscédasticité : « un profil saisonnier marqué à l'intérieur de la journée » ; « l'arrivée de nouvelles informations ».

On se pose souvent la question essentielle sur laquelle la recherche en économétrie financière se concentre depuis longtemps, est de savoir s'il est possible d'estimer ou prévenir le risque d'une manière rassurante, tant d'un point de vue théorique, par les reformes et les normalisations strictes, qu'empirique, par les méthodes robustes d'estimation des cours boursiers. Dans ce sens, de nombreux travaux ont souligné ou expliqué la notion de risque par celle de la volatilité des rendements des marchés boursiers. Nous étudions dans la suite les différents concepts de la volatilité dans les marchés boursiers qui permet d'aborder des estimations avec des notions bien détaillés par avant.

1- les Concepts Risque et Volatilité

Beaucoup des études portant sur la distinction entre les notions de risque et probabilités ont vu les jours. Depuis l'intervention de Soros sur le marché boursier, la question sur les risques inhérents aux rendements est devenue de plus en plus fréquente. Dans le domaine de l'économétrie financière, les estimations des variations des cours boursiers permettent ou offre des indices d'évaluation de risque de marché, mais ces estimations ne couvrent pas tous les risques d'une manière certaine, c'est-à-dire il existe toujours des risques non couverts par les estimations ou des biais. La volatilité des rendements est le concept le plus utilisé en économie d'une manière générale et en économétrie financière en particulier pour représenter le risque, pour cet effet, on peut distinguer différentes thermologies de la volatilité, entre autres : la volatilité historique pour une analyse du passé ou du présent, la volatilité implicite ou anticipée contenue dans le prix des options, et la volatilité stochastique ou aléatoire pour les estimations des variations des cours boursiers.

1.1- Accumulation de la volatilité (indicateur de risque)

Pendant les crises économiques, Les cours financiers ont connu, de très fortes variations, c'est-à-dire des hausses et des baisses inattendues. Et donc ces mouvements de spéculations ont tiré l'attention consternant la question de la volatilité des marchés financiers par les chercheurs du monde entier, comme par les praticiens et les autorités de régulation et de contrôle c'est-à-dire les états et les gouvernements. Les études portant sur la question de la volatilité sont justifiées d'autant plus par les chocs boursiers qui ont des conséquences réelles en termes de stabilité économique (pauvreté chômage…).

La volatilité des rendements des titres boursiers, est généralement calculée sur une période glissante, on peut l'expliqué alors comme indicateur de risque. La propriété la plus fréquente dans les études des séries financières est le phénomène d'accumulation des volatilités (volatility clustering), c'est-à-dire le fait qu'il présente des périodes de fortes variations des cours. Ce regroupement des volatilités par grappes est dit généralement aux corrélations des séries financières.

Avec l'arrivée des données à haute fréquence, on peut éviter certains aléas (biais) dus à la prise en compte de prix de clôture ou de prix journalière, tout en sachant que, la disponibilité de données intra-journalières est très récente et la question de longueur de fréquence ou la taille de fréquence demeure toujours d'actualité. Il n'existe pas de critère

empiriquement spécifiés, permettant de justifier la volatilité calculée à partir de la telle ou telle fréquence d'observation est meilleurs que l'autre, mais toute fois, on peut remarquer que plus la fréquence d'observation est élevée plus la volatilité est mieux captée.

Mais toutefois, cette volatilité nécessite des estimations particulières du au faite qu'elle n'est pas observable directement. Les modèles de type GARCH, introduits par Engle (1982) puis généralisés par Bollersev (1986) sont les plus connues en économétrie financières, par leurs capacités de capter au mieux le phénomène de la volatilité. Ces sont des modèles reposant sur une modélisation explicite de la variance conditionnelle des rendements. Logiquement, la fonction de la variance passée présenter par h_t, ce qui permet d'introduire une corrélation entre les rendements et permet de détecter l'anomalie de persistance, voir Avouyi-Dovi et al (2002). De telles modélisations, dont l'efficacité prédictive est confirmée seront développées par la suite.

1.2- Estimateurs de la volatilité

Un grand nombre d'estimateurs de la volatilité à haute fréquence ont été développés. Ces estimateurs ont d'abord été très simples en prenant en compte les valeurs de prix d'ouverture de cours et le prix de clôture de cours de l'actif. Bollen et Inder (2002) font un rappel des principaux estimateurs de la volatilité à haute fréquence. Les rendements journaliers s'écrivent :

$$r_t = \frac{Lnp_t - Lnp_{t-1}}{Lnp_{t-1}}$$

Avec $p_t$est le prix au temps t, est supposé suivre une loi normale avec une volatilité non constante σ_t

$$r_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Les estimateurs donc vont chercher à estimer le paramètre de la volatilité σ_t.

L'un des estimateurs les plus simples est basé sur l'observation que l'espérance de la valeur absolue des rendements est donnée par $E[|r_t|] = \sigma_t\sqrt{2\pi}$. L'estimateur simple de la volatilité est alors défini par :

$$\sigma_t = \frac{|r_t|}{\sqrt{2/\pi}}$$

Ici l'estimateur ne dépend que de la valeur du rendement, soit deux valeurs. C'est évidemment trop peu pour espérer que cet estimateur soit efficient.

Des recherches récentes d'Andersen et al (2001), ont proposé une mesure de la volatilité pour pallier les différentes insuffisances des estimateurs précédents. Leurs estimateur prend en compte un grand nombre de données à haute fréquence comme ils utilisent les rendements minute par minute pour estimer la volatilité intra-journalière. Cet estimateur présente plusieurs avantages, non seulement qu'il prendre en compte une grande quantité d'information sur les rendements, il possède aussi la propriété d'être asymptotique gaussien.

1.3- Estimateur de la volatilité réalisée

En se focalisant sur la théorie de la variation quadratique dans un environnement standard d'absence d'opportunité d'arbitrage et sans fraction. Andersen et al (2001), ont proposé un cadre général pour l'utilisation de données à haute fréquence pour la mesure, la modélisation et la prédiction de la volatilité intra-journalière des rendements d'actifs. Plus précisément, comme l'ont également rappelé Barndorff-Nielsen et Shephard (2002), lorsque le processus de rendements des actifs sous-jacents est une équation de diffusion, la variance réalisée (le carré de la volatilité réalisée) fourni un estimateur convergent de la variation quadratique des rendements, dans la limite de grands échantillons :

Considérons $r(t)$ le processus du logarithme des rendements d'un actif à haute fréquence vérifiant l'équation de diffusion

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$

Avec w(t) est un mouvement brownien standard, μ(t) est une variation finie et σ(t) est strictement positif et de carré intégrable. Ainsi, $\mu(t)$ représente le rendement espéré instantané et $\sigma(t)$ la volatilité des rendements.

En absence d'erreur de mesure, la variation quadratique des rendements peut être arbitrairement approchée de manière satisfaisante par le processus du carré des rendements cumulés. Soit une partition $\left\{t-k+\frac{i}{n}\right\}$ de l'intervalle $\{t-k,t\}$. Alors, la variance réalisée est définie par :

$$VR(t,k;n)=\sum_{i=1}^{n.k} r\left(t-k+\frac{i}{n},\frac{1}{n}\right)$$

Si l'estimateur ci-haut ne requiert pas l'homoscédasticité de la série temporelle des rendements d'actif pendant la période t, on suppose toutefois que les rendements ne sont pas corrélés. Il est souvent nécessaire soit de filtrer les séries brutes des rendements à haute fréquence pour traiter ces corrélations, soit de se concentrer sur une échelle de temps suffisamment grande près de 5 minutes au lieu de 1 minute par exemple. L'inconvénient immédiat de cette dernière approche est de diminuer le nombre d'observations disponibles, ce qui peut avoir pour conséquence de réduire la précision des estimations.

1.4- Les perceptions de risques

La diversité des chercheurs et acteurs financiers des théoriciens aux praticiens qui s'intéressent à l'idée de la volatilité traduisent la diversité des axes de recherches pour résoudre le problème soulevé par cette idée et les débats qui peuvent en générer par la suite.

La volatilité a une grande influence sur le choix d'investissement, les prix des cours boursiers sur le marché et sur les spéculations, on peut dire donc la volatilité est la variable clé dans l'estimation des produits financiers, tels que les actifs boursiers que nous allons étudier. La volatilité du marché financier impacte le comportement des investisseurs, des gestionnaires et des autorités de régularisations dans la détermination de leurs politiques et de leurs stratégies financières. Certains auteurs comme Aglietta et Rigot (2009) ont soulignés, les mesures de risque sont largement fallacieuses dans la mesure où elles ne sont valables que dans un monde gaussien. Dès lors, les données à haute fréquence ne valent pas dans un monde gaussien où les processus stochastiques sous-jacents aux profils de risque peuvent être décrits exhaustivement par la moyenne et par la variance. C'est une hypothèse inadéquate ou inadapté.

Sur les marchés boursiers, chacun à ses propres idées de percevoir le risque, mais le plus emportant est de trouvé le lien entre les concepts théoriques du risque et ses estimations empiriques par les chercheurs qui ont traduit la notion de risque par la volatilité. On peut dire aussi que les autorités de régularisations et les banques préoccupées par les conséquences probables des variations (hausses ou baisses) de la volatilité sur tous types de risques.

Quel que soit le modèle utilisé, il existe toujours le part de risque inévitable, quelques modèles dont les risques inévitables ont été introduits, pour concevoir ou développer des approches opérationnelles pour la finance appliquée.

2- Le passage de la basse a la haute fréquence

Après les chocs pétroliers, les mouvements inflationnistes qui ont suivi et la multiplication des produits financiers, ont progressivement amené ceux-ci à changer leur profil d'investissement pour rechercher des produits plus risqués mais aussi plus rémunérateurs. Parallèlement à cette modification du comportement des agents, les marchés financiers ont opéré des stratégies structurelles importantes au niveau de leurs transactions (offre, demande). Pour la plupart, ils sont passés du mode de cotation fixe, où les transactions et les collectes des informations étaient effectuées sur des intervalles de temps fixés par avance ; à la cotation en continue, où les échanges sont enregistrés de manière quasi continue ou d'une façon continue, c'est-à-dire minutes par minutes ou voir même seconde pour seconde pour les marchés trop liquides.

Le changement du mode de cotation a été rendu possible grâce au développement de l'informatique et l'arrivée de la technologie électronique qu'ont réduit considérablement les prix et le temps mit de collecte et de traitement d'informations. L'arrivée de la technologie a aussi permis la transmission d'informations directement et en temps réel aux participants des marchés. Le passage de basse à la haute fréquence c'est changement structurel dans le processus de collecte, de traitement et de transmission de l'information. Ce changement de mode de cotation a eu aussi des implications directes à la disponibilité et à l'interprétation des données financières de haute fréquence. En effet, la cotation en temps continu permet de disposer pratiquement de tous les ensembles de données sur l'activité du marché (prix des actifs, volumes échangés, nombres d'acteurs, nombre de vendeurs, fréquence d'échange, …).

Ces informations plus proches des processus générateurs des prix des actifs sont sans doute plus appropriées pour les tests empiriques des modèles théoriques de la littérature financière, Ceci d'autant plus que la plupart des études empiriques n'arrivent pas à valider certains résultats théoriques à partir des données dites de basses fréquences (journalières, hebdomadaires ou mensuelles). L'arrivée des données à haute fréquence peut donc combler ce déficit et permettre d'enrichir la littérature sur la modélisation des dépendances entre les actifs de façon robuste. En plus, ces données sont quasiment le reflet réel des dépendances entre les sources potentielles de risque. Les données à haute fréquence ont aussi les mêmes caractéristiques que les données de basse fréquence sauf dans la construction du modèle. Elles permettent de mieux rendre compte des comportements des agents sur les marchés.

De nombreux travaux ont été publiés sur les données à haute fréquences. Ces études mettent en avant certaines caractéristiques importantes des prix des actifs financiers, jusqu'alors pratiquement indécelables avec des données de basse fréquence. C'est pourquoi la constitution et l'accès à des bases de données de haute fréquence constituent un enjeu important pour analyser et mieux comprendre les marchés financiers. C'est en effet une possibilité supplémentaire d'approfondir la connaissance des éléments fondamentaux qui dirigent les prix des actifs.

En se rapprochant des valeurs réelles de prix, les données de haute fréquence permettent de revisiter les modèles traditionnels de la finance et les relations d'équilibre qu'ils sous-tendent. Néanmoins, le traitement de ces données spécifiques ne se fait pas sans difficulté. Les bruits associés aux données sont notamment liés, entre autres, à des problèmes d'ordre organisationnel des marchés qui doit faire l'objet d'un traitement particulier. De plus, les hypothèses distributionnelles classiques c'est-à-dire la normalité des distributions, la linéarité des relations, etc. Plutôt vérifiées en données de basse fréquence, doivent être modifiées pour tenir compte des particularités de la haute fréquence.

2.1- Le trading à haute fréquence

Le monde de marchés financiers a connu des progrès considérables avec le développement des techniques mettant en place l'utilisation des données financières à haute fréquence et des bases de données de grande dimension, en particulier le passage de basse à haute fréquence a conduit à un renouvellement de la recherche économétrique académique

récente sur la question de mesures de risque dans le domaine de la finance de manière particulière.
Le trading à haute fréquence peut se définir comme la mélange entre le trading courant et les innovations récentes de la technologiques dans le domaine financier. Ces derniers temps, les actionnaires, les régulateurs et les chercheurs, ont porté une attention particulière au trading à haute fréquence, du aux visions futuristes de l'activité de trading à haute fréquence et aux projets modernes des marchés financiers.

Des chercheurs académiques ont à la fois étudié les aspects positifs ainsi négatifs de l'activité de trading à haute fréquence. Dans ses publications Menkveld (2013) avait publié concernant la question de l'implication des traders à haute fréquence sur les marchés boursiers. Il occupe en effet une position moderne de détenteur de marchés en fournissant un cours presque continu de liquidité. Brogaard (2010) souligne à son tour également que le THF réduit les coûts de transaction, favorise la révélation des prix et l'efficacité des marchés en réagissant sur différentes places boursières.

Toutefois, Le développement du Trading à Haute Fréquence n'emporte pas que des effets positifs pour le marché. Il existe bien aussi des cas nocifs signalés, les pluparts des études ci-mentionnées font aussi état d'apparition de nouveaux risques. De nombreuses études théoriques et empiriques mettent en évidence l'activité de cette discipline. Les chercheurs Wah et Wellman (2013) ont souligné certains rapproches, en précisant certaines stratégies de Trading à Haute Fréquence peuvent conduire à une manipulation des cours des titres au terme bien précis.

On constate des énormes inconformités sont liées principalement aux caractéristiques du Trading à Haute Fréquence. Gomber et Haferkorn en (2013) soulignent que : des ordres rapides d'annulation, des périodes de détention très courtes et des très faibles marges de transaction, etc.

2.2- instabilité et dynamique du marché à haute fréquence

Plusieurs problèmes techniques (défaillances technologiques) sont dites à la mise en place d'algorithmes, notamment la faillite de Knight Trading et les défiances d'introduction en bourse de grandes firmes comme Facebook aux États-Unis (source : AMF; 2013), fait chuter (crache) de cours boursiers par l'occasion, ce cas de figure a attiré l'attention du

marché sur les risques opérationnels entrainais par le Trading à Haute Fréquence en 2012, avec des répercutions sur la l'assurance des raideurs dans la dynamique de l'allure de la bourse. Cela peut exiger d'analyser les dynamiques à l'œuvre dans un grand nombre des séquences d'interruption de marché et ce au cas par cas, de manière trop grade, afin de détecter l'origine des causes de l'instabilité. En tenant compte des causes de certains d'entre eux, ces séquences de ruptures ont cependant souligné le besoin, pour l'autorité de régularisations, de mettre plus d'effort sur les systèmes de contrôle et de gestion des risques opérationnels sur les marchés à haute fréquence.

Selon l'autorité des marché financiers (AMF), « source : http//www.amf-france.org/.../technique/multimedia » les dysfonctionnements techniques ne sont pas tous dus aux événements descriptifs, certains sont causés par l'évolution des dynamiques des marchés. D'une manière générale, Il est clair que, l'effet de ces techniques essaie de réduire la volatilité moyenne des rendements de marché, notamment sur des horizons de temps très minime, de quelques secondes, Hasbrouck (2012) « source : http//www.amf-france.org/.../technique/multimedia ». Les queues de distribution des rendements semblent aussi avoir grandir leurs épaisseurs : autrement dit, les variations de cours extrêmes ou les sauts sont devenus plus réguliers, en concordance avec une endogénéité plus grande du système de trading, Filimonov et al (2012).

D'autres événements de marché peuvent servir d'exemples de la survenance de telles dynamiques qui ne sont attribuables ni à des défauts techniques, ni à des impacts de liquidité importants ou exogènes, mais plutôt à de nouvelles façons d'acquisition de liquidités, trop rapide à disparaître lorsque la liquidité est initialement insuffisante. D'un notre point de vue, Il convient donc, pour l'autorité de régulation de marché, de ne pas considérer particulièrement les problèmes d'instabilité des marchés résultants de défauts opérationnels, mais aussi de bien prendre en considération les questions soulevées par l'efficience et stabilité des marchés de façon conjointe et globale.

3- Econométrie financière des données à Haute Fréquence

L'évolution du prix de titre boursier, d'une action ou un actif financier par exemple, dans le temps est généralement modélisée à l'aide d'un processus stochastique, symbolisé par $\{x_t\}$ avec $t \in A$, où A est un ensemble d'indices faisant référence au temps et $x_t \in \mathbb{R} \geq 0$ est une variable aléatoire représentant le prix de l'actif au temps t. Si $A = \mathbb{R}$

$ou\ \mathbb{R} \geq 0$, le processus stochastique est dit à temps continu et si $A = \mathbb{Z}\ ou\ \mathbb{N}$, il est dit à temps discret. Cette thèse considère le cas discret où l'évolution de x_{t-1} vers x_t est modélisée par l'entremise d'une variable aléatoire $y_t \in \mathbb{R}$, satisfaisant la relation suivante :

$$x_t = x_{t-1}e^{y_t} \Leftrightarrow y_t = logx_t - logx_{t-1} \tag{8}$$

Cette variable aléatoire représente le rendement composé de manière continue, aussi appelé le rendement en logarithme, sur l'actif pour la période allant de $t-1$ à t.

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t \eta_t \tag{9}$$

Où $\{\eta_t\}$ est une *(v.a.i.i.d)* de moyenne zéro et de variance unitaire, σ_t est la variance conditionnelle et μ_t est la moyenne conditionnelle. On suppose généralement que $\{y_t\}$ est stationnaire au second ordre[1] qu'on peut donc l'écrire: $E[y_t] = \mu$ et $Var[y_t] = \sigma^2, \forall$ t, où $\mu \in (-\infty, \infty)$ et $\sigma \in (0, \infty)$ sont des constantes. Les symboles μ_t et σ_t dénotent des fonctions mesurables par rapport à la tribu qui est engendrée par le vecteur aléatoire $y_{t-1} = (y_1,,,,,y_{t-1})$. Par conséquent, la moyenne conditionnelle du rendement au temps t est $E[y_1 \mid y_{t-1}] = \mu_t$ et sa variance conditionnelle est $Var[y_t \mid y_{t-1}] = {\sigma_t}^2$. Les ratios, moyenne et variance conditionnelles sont donc déterministes étant donné l'information qui peut être observée sur les marchés.

C'est pratique courante en économétrie financière de modéliser les processus $\{\mu_t\}$ et $\{{\sigma_t}^2\}$ séparément. Notons que, le modèle autorégressif, connu sous l'acronyme AR, est populaire pour modéliser la dynamique de la moyenne conditionnelle, tandis que la classe des modèles GARCH est souvent utilisée pour représenter celles de la variance conditionnelle.

[1] Le processus $\{y_t\}$ est dit stationnaire au second ordre si :

(i) $E[{y^2}_{t-1}] < \infty,\ \forall\ t \in \mathbb{Z}$,

(ii) $E[y_t] = \mu\ , \forall\ t \in \mathbb{Z}$,

(iii) $cov[y_{t+h}, y_t] = E[(y_{t+h} - \mu)((y_t - \mu)] = \gamma(h), \forall\ t, h \in \mathbb{Z}$

La fonction $\gamma(.)$ est appelée la fonction d'autocovariance de $\{y_t\}$

3.1- Faits stylisés

Les rendements financiers exposent des dynamiques complexes qui sont difficiles à reproduire avec les modèles économétriques classiques. Ces propriétés statistiques sont appelées les « faits stylisés des rendements financiers » puisqu'elles sont communes à un large éventail de séries chronologiques étudiées en finance. Un modèle économétrique adéquat devrait avoir la capacité de reproduire les faits stylisés suivants :

(1) - ***Autocorrélation des rendements***

On s'intéresse à la fonction d'autocorrélation de la série des rendements logarithmiques :

$$\gamma_h = Corr\ (\sigma_t\, x_{t+h}\,, \sigma_t\, x_t\,) \qquad (10)$$

Elle est approximativement égale à zéro pour $h \geq 1$, Elle présente aussi des autocorrélations positives dans les processus $\{\varepsilon_t^2\}$ et $\{|\varepsilon_t|\}$ Ceci implique une forme de dépendance entre les rendements et la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle, c'est-à-dire $\sigma_t{}^2 \neq \sigma_t$. La fonction d'autocorrélation associée à $\mathrm{Corr}[\varepsilon_{t+h}^2, \varepsilon_t]$ est généralement positive à $h = 1$ et décroît lentement lorsque h augmente. Ces deux propriétés ne sont pas incompatibles mais elles montrent que le bruit blanc n'est pas constitué de variables aléatoires indépendantes.

(2) - ***Stationnarité et ergodicité des rendements***

On remarque que la plupart des études statistiques de séries chronologiques sont basées sur les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité.

Définition 1.1 : Un processus stochastique X_t est strictement stationnaire si pour tout n, tous $t = \overline{1, n}$ et tout h on a l'égalité en loi suivante :

$$(X_{t1}, \dots, X_{tn}) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{t1+h}, \dots, X_{tn+h}) \qquad (11)$$

Définition 1.2 : Un processus stochastique $X_t$stationnaire est dit strictement ergodique si tous les moments généralisés empiriques calculés sur une réalisation convergent vers les moments théoriques, ainsi pour tout nombre entier n et tous décalages $h_1, \dots, h_n$, nous avons :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{t+h1} \dots X_{t+hn} = \mathbb{E}[X_{h1} \dots X_{hn}] \tag{12}$$

Les notions de stationnarité et d'ergodicité au sens strict sont rarement nécessaires en pratique, il suffit généralement de recourir à la stationnarité et à l'ergodicité au sens faible du processus étudié.

Définition 1.3 : Un processus stochastique X_t est dit ***faiblement stationnaire*** si :

- Sa moyenne $\mathbb{E}[X_t]$ indépendant de t.
- L'espérance et la variance sont $< \infty$ et $\mathbb{c}ov[X_t, X_s]$ dépend de $t - s$.

Donc cette dernière définition implique, en particulier, que la variance de X_t est constante et ne dépend pas du temps.

Définition 1.4 : Un processus aléatoire X_t est dit stationnaire au sens faible, si sa moyenne temporelle converge en probabilité vers son espérance mathématique.

$$\lim_{T\to\infty} \hat{X}_T = \mathbb{E}[X], \qquad o\grave{u}\ \hat{X}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \tag{13}$$

Et si sa covariance temporelle converge en probabilité vers la covariance alors

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \hat{X}_T\right)\left(X_{t+h} - \hat{X}_T\right) = \mathbb{c}ov[X_t, X_{t+h}] \tag{14}$$

Lorsque la taille (T) tend vers l'infini, alors le processus X_t est ergodique au sens faible. Donc, on ne peut pas supposer que les propriétés statistiques des séries financières restent constantes au cours du temps. Néanmoins la plupart des tests statistiques effectués pour vérifier la stationnarité des rendements logarithmiques ne rejettent pas cette hypothèse.
Nous admettons les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité, la taille de nos séries financières est suffisamment grande pour pouvoir nous assurer une convergence des moments empiriques. Notons que, la consistance des résultats de prédiction des risques, qui seront présentés dans le chapitre suivant, justifie a posteriori l'hypothèse de stationnarité, En conséquence nous pouvons faire des statistiques de manière raisonnable par des moyennes temporelles sur les données financières.

(3) - ***Regroupement des extrêmes (volatility clustering)***

Une propriété importante observée universellement sur les séries financières est le phénomène d'accumulation des volatilités (volatility clustering) : le fait qu'il semble y avoir des périodes de forte volatilité et d'autre de volatilité plus faible. Ce regroupement des volatilités par paquets est entièrement dû aux corrélations des séries financières. A cause de celles-ci, un grand mouvement, correspondant à une volatilité forte, peut avoir des fortes chances d'être suivi par une variation de même grandeur, mais pas nécessairement dans le même sens, et aussi pour une fluctuation de faible amplitude. Par ailleurs, à cause de l'absence d'échelle caractéristique dans les corrélations, ces périodes de forte ou faible variation n'ont pas non plus d'étendu typique.

(4) - ***Queues de distribution épaisses et asymétrie négative***

La densité inconditionnelle du rendement y_t a des queues plus épaisses que la loi normale, c'est-à-dire, le coefficient d'aplatissement (kurtosis) de cette densité et plus élevé que celui de la loi normale qui est de trois. Le coefficient d'asymétrie ou skewness de la densité des rendements est généralement inférieur à zéro signifiant que les rendements négatifs sont moins nombreux que les rendements positifs, mais ils sont plus extrêmes.

(5) - ***Effet de levier***

Les effets asymétriques dans la dynamique de la volatilité sont souvent cités dans la littérature sous le terme « effet de levier », depuis que Black sur ses publications avait mentionné que les rendements sont négativement corrélés avec les variations de leur volatilité, dans le sens où la volatilité a tendance à croitre en réponse à des nouvelles chutes (rendements nets moins élevés que prévu) et à chuter en réponse à des bonnes nouvelles (rendements nets plus élevés que prévu). Le levier financier peut en effet expliquer cette corrélation négative entre rendement d'aujourd'hui et volatilité de demain mais quel que soit le signe de cette corrélation, celle-ci introduira un certain type d'asymétrie dans la distribution observée. L'existence d'un effet de levier introduit souvent un effet de skewness dans la distribution des rendements.

Par ailleurs, autant les corrélations de la volatilité sont largement documentées, autant les études empiriques qui se sont intéressées aux corrélations entre le rendement et la volatilité sont moins nombreuses, Récemment, Bouchaud et al. (2001) se sont penchés sur ce problème, Ils ont étudié la fonction de levier pour plusieurs actions.

$$\mathcal{L}(t,s) = \frac{\mathbb{E}[\delta_T X_t \, (\delta_T X_s \,)^2]}{\mathbb{E}[(\delta_T X_t \,)^2]} \tag{15}$$

Empiriquement, cette fonction, est nettement négative pour toutes les séries, dans le cas où $t < s$, et elle peut être bien reproduite par une fonction exponentielle. Tandis que la même fonction calculée entre volatilités passées et rendements futurs, ce qui correspond au cas $t > s$, est à peu près nulle. Les auteurs présentent par la suite un modèle qui permettrait d'expliquer le phénomène, Selon eux, cette asymétrie n'aurait pas d'origine économique mais apparaîtrait mécaniquement, par le retard des agents à prendre en compte les niveaux de prix.

Ces faits stylisés indiquent que le plus grand défi de la modélisation des rendements financiers consiste à décrire les dynamiques de la variance conditionnelle, En effet, ces dynamiques sont généralement beaucoup plus complexes que celles de la moyenne conditionnelle, Par conséquent, il est souvent supposé que $\mu_t = \mu, \forall\, t$, une hypothèse qui concorde avec les faits stylisés.

3.2- Distribution des rendements

La première modélisation des cours boursiers décrite dans les chapitres suivants, repose sur l'hypothèse que les rendements logarithmiques suivent une loi normale, Cette modélisation reste encore aujourd'hui au cœur de la théorie financière. Souvent dans les cas empiriques, on observe des distributions de rendements logarithmiques ont des queues de distributions plus épaisses que dans les distributions gaussiennes. Ce constat a été soulevé pour la première fois par Mandelbrot dans étude de prix du coton, et a été depuis lors un point de discussions pour différents marchés. Ce sera encore plus pertinent si l'on considère les rendements sur de petits intervalles de temps, ce qui n'est possible que grâce aux données à haute fréquence.
La décroissance d'une loi de distribution peut être décrite grâce à son exposant de queue.

3.2.1- Propriétés et définitions des rendements

L'objectif des investisseurs ou praticiens est de générer des profits. Les agents de marché financier des actions, s'intéressent d'abord à la situation des cours des actions ou à leurs rentabilités. Les professionnels et les chercheurs ont analysé les séries des prix ou celles des rendements selon deux axes d'analyse : l'un concerne les facteurs influant ou qui ont des rapports directs avec le cours des actions et donc les rendements. L'autre analyse les caractéristiques des séries des rendements. En particulier, l'objectif de ce deuxième axe était de mettre en lumières des éléments permettant d'améliorer la qualité de marché en matière des rendements.

Tout dépend de définition de l'utilisateur, car la fréquence d'une série de rendements se mesure par la longueur de l'intervalle de temps entre t et $t-1$. On peut avoir des données de basse fréquence quand l'intervalle d'échantillonnage est la semaine ou le mois. Et on peut en avoir des hautes fréquences à partir des données journalières ou des données intra-journalières. Il y a des problèmes particuliers aux données à haute fréquence, car les mouvements ou les variations des cours financiers ne sont pas uniformes au cours de la journée. Que se passe-t-il à l'ouverture, à midi, ou à la fermeture par exemple.

- Les rendements fluctuent autour de 0 à court terme. Pour les indices de marché et pour les titres de firmes qui survivent, la moyenne est légèrement positive à long terme.

- La moyenne est nettement plus petite que la volatilité. Par conséquent, connaître la moyenne ne permet pas de prédire avec précision le rendement futur et certainement pas de faire un profit sans prendre des risques.
- Les rendements sont peu autocorrélés (et d'autant moins que la fréquence est basse). Cette propriété implique que les rendements ne sont pas prévisibles à partir de leurs réalisations passées.
- Les grandes variations des rendements soit positives ou négatives ont tendance à se suivre, comme pour les petites variations des rendements également. La volatilité se produit en grappes (volatilité clustering).
- Cela se traduit par une fonction d'autocorrélation (ACF) des carrés des rendements, qui décroît lentement à partir d'une valeur faible mais positive. Cette forme typique de l'ACF est plus prononcée pour une fréquence élevée que faible.
- Cette propriété implique que la volatilité est prévisible dans une certaine mesure mais pas forcément le cas pour les rendements.
- Il y a plus de rendements extrêmes que si la distribution était normale (non-normalité).
- La proportion de rendements extrêmes négatifs est plus élevée que celle de rendements extrêmes positifs (asymétrie négative de la distribution).

Définition 1.5 : on définit l'exposant de queue d'une loi de distribution X_t par le nombre réel q_c, qui peut prendre la valeur infinie, tel que

$$q_c = sup\left\{q;\ \lim_{x} sup\mathbb{p}[X_t\ > x_t\ ]x^q < \infty\right\} \tag{16}$$

La proposition qui suit permet de relier l'existence des moments (d'ordre un et deux en générale) et l'exposant de queue de distribution.

Proposition 1.1 : Soit une variable aléatoire positive, avec q_c vérifie la relation suivante

$$q_c = sup_q\{q;\ \mathbb{E}[X^q] <\ \infty\} \tag{17}$$

On peut classer les distributions en trois types :

- les distributions à queue légère, $q_c = \infty$, où tous les moments de la distributions existent, et la fonction de répartition décroit exponentiellement dans les queues.

- les distributions à queue épaisse (lourde), $q_c < \infty$, se caractérisent par une fonction de répartition qui décroît comme une certaine loi de puissance.

- les distributions bornées, prenant des valeurs continues dans un ensemble borné, et ne possédant donc pas de queue.

D'une manière générale, il existe beaucoup des modèles différents pour les distributions des rendements. Certains supposent que les actifs financiers ont des rendements assez proches des distributions stables, d'autres suggères que les distributions, comme la distribution de student, qui n'appartient pas à la classe des lois dont les distributions stables. Il existe également des modèles conditionnels hétéroscédastiques, voir Engle (1982), Bolerslave (1986) et Black en (1992), et beaucoup d'auteurs présument que ces modèles décrivent mieux les données que les modèles non conditionnels. Tous ces modèles s'accordent sur le caractère à queue épaisse des distributions des rendements. Rejetant une modélisation par un processus gaussien.

3.3- concept de la Volatilité

La volatilité peut se définir comme l'ampleur des fluctuations ou l'amplitude de variation sur une période donnée (minute, heure, jour, semaine) pour un marché ou une valeur. C'est une unité mesurant la propension d'une valeur du marché ou valeur mobilière, qui varie significativement à la hausse ou à la baisse. Plus un titre a tendance à forte variation sur une courte période de temps, plus il sera dit volatile ou trop risqué en d'autre terme.

L'un des problèmes les plus importants dans la prévision de la volatilité est l'identification d'une mesure de la volatilité réalisée. Dans la littérature, il y a plusieurs méthodes d'obtenir les séries de volatilité.

Dans le cas d'une base des données à fréquence quotidienne, on peut approximer la volatilité d'une certaine période comme étant la racine carrée de la somme des carrés des rendements de cette période.

Une mesure de l'agitation du marché au cours du temps peut être obtenue grâce à la volatilité réalisée définie comme suit.

Définition1.1 : supposons donnés des rendements logarithmiques uniformément échantillonnés $x_t = x_\tau$. La volatilité réalisée ou volatilité historique au temps t et à l'échelle τ est définie par :

$$v_t = \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\delta_1 X_{t-n+j}\right|^2\right]^{1/2} \qquad (18)$$

Où j allant de 1 à n, et n est le nombre d'observations de chacune des composantes que l'on fait intervenir, n_τ est la fenêtre de temps sur laquelle on se place.

Si les rendements ont une moyenne différente de zéro (présence d'une tendance), on peut également centrer la volatilité réalisée en la définissant par :

$$v_t = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_1 X_{t-n+j} - \frac{1}{n}\delta_n \mathrm{x_t}\right|^2\right]^{1/2}, où\ n > 1 \qquad (19)$$

Pour un cas particulier, ou $n\ est\ égal$ à 1, les volatilités réalisées sont données par les rendements logarithmiques absolus.

En pratique, les séries des rendements logarithmiques ne sont pas uniformément échantillonnés, et la volatilité réalisée au carré ($v^2[t,t']$) correspondant à l'intervalle de temps $[t,t']$, se calcule en sommant les carrés des rendements logarithmiques.

$$v^2[t,t'] = \sum_{k=1}^{m}(X[s_k] - X[s_{k-1}])^2, \qquad avec\ t = s_0 < \cdots < s_m = t' \qquad (20)$$

Où $s_0, \ldots, s_m$ est la grille d'échantillonnage.

Par exemple, dans le cas des données à haute fréquence la volatilité réalisée journalière est souvent calculée par une somme de rendements logarithmiques intra-journaliers au carré.

3.3.1- La volatilité réalisée

Dans leurs publications, Andersen et Bollerslev (1997) montré que la volatilité réalisée d'un cours boursier ou d'un actif calculé à partir des rendements intra-journaliers c'est-à-dire à haute fréquence, constitue effectivement une mesure beaucoup plus proche de la réalité de la volatilité des actifs et donc fiable « error-free » que les volatilités calculées a partir des données journalières ou hebdomadaires. En effet, la disponibilité des données

intra-journalières crée un intérêt particulier pour cette méthode. Par conséquent, il est tout-à-fait normal de considérer cette volatilité comme observable[2]. La volatilité observable fournie des nouvelles ressources ou d'autre façon de l'appréhender. A cet effet on peut apporter d'analyses, d'optimisations et des prévisions en utilisant des techniques beaucoup simplifier et robuste que les modèles économétriques complexes utilisés lorsque la volatilité est latente ou calculer sous la bases des données dites de basse fréquence. L'idée de la volatilité réalisée est initialement proposée par French et al (1987). Taylor et Xu (1997) ainsi qu'Andersen et Bollerslev (1997) tous ces acteurs ont adhéré à l'idée que la volatilité journalière réalisée peut être construite en additionnant les rendements intra-journaliers au carré. En utilisant les propriétés logarithmiques, nous aurons :

$$R_t^j = \sum_{i=1}^{N} R_{t,i}$$

Donc on suppose qu'un jour peut être divisée en N intervalles de temps équivalents, c'est-à-dire en fonction de la fréquence établie préalablement. Avec le terme $R_{t,i}$ représente le rendement réalisé à l'intervalle i (cinq minutes dans notre cas) du jour t. Et donc la variance réalisée au cours de la journée est donnée par :

$$Var\left({R_{t,i}}/{I_{t-1}}\right) = \sum_{i=1}^{N} Var\left(R_{t,i}/I_{t-1}\right) + 2\sum_{i<j} cov\left[\left(\left(R_{t,i}, R_{t,j}\right)\right)/I_{t-1}\right]$$

Dans le cas où l'historique des rendements $R_{t,i}$ suit un processus de bruit blanc, alors les rendements ne sont pas autoconélés. Nous aurons donc une variance comme suit :

$$Var\left({R_{t,i}}/{I_{t-1}}\right) = N\, Var\left(R_{t,1}\right)$$

L'estimation de la variance $Var\left(R_{t,1}\right)$ devienne:

[2] Andersen et al. Diebold et al (1999). Sous le theme: Understanding, Optimizing, Using and Forecasting: Realized Volatility and Correlation, Risk, pp. 105-108

$$\hat{\sigma}_{t,i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(R_{t,i} - \bar{R}_t\right)^2}{N-1}$$

Avec la moyenne des rendements intra-journaliers est exprimer par $\bar{R}_t$. Supposons que la moyenne journalière des rendements est nulle, chose que nous semble logique :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{N}{N-1}\sum_{j=1}^{N} R_{t,i}^2$$

L'intérêt de calculer la volatilité réalisée à partir de données à haute fréquence peut dépendre aussi du choix de la mode de cotation dont les prix d'actions évoluent selon un processus de diffusion donné. Ce choix, bien qu'adéquate et utile dans plusieurs contextes, devient progressivement moins tolérable à fur et à mesure qu'on s'approche de l'échéance du processus. L'échantillon supposé optimal des fréquences à choisir, ne nous semble pas forcément celui qui possède des fréquences les plus élevées, mais plutôt celui qui engendre des valeurs intermédiaires. Comme tous autres chercheurs, Anderson et Bollerslv aussi ont proposé cette méthode pour le choix l'échantillon optimal de fréquences afin de calculer la volatilité réalisée des actifs financiers à haute fréquence.

3.4- La volatilité stochastique

On suppose que le processus $X_t = \sigma_t^2 Z_t$ avec une volatilité σ_t^2 dépend du paramètre $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ qui est fixé au cours du temps.

Il existe des fonctions stochastiques ψ_t dépendantes des innovations indépendantes, identiquement distribuées, telles que:

$$h(\sigma_{t+1}^2) = \psi_t(h(\sigma_t^2),\ \theta_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

L'objectif est d'étendre dans un cadre le plus général possible les résultats asymptotiques pour l'estimateur du Quasi Maximum de vraisemblance du modèle GARCH obtenus par Berkes et al. Une attention particulière est portée au modèle Score-GARCH :

Le modèle Score-GARCH (1,1) est défini par la formule :

$$log\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \beta_0\, log(\sigma_t^2) + (\gamma_0 z_t + \delta_0|z_t|)$$

Pour le modèle Score-GARCH(1,1), cette condition s'écrit tout simplement $|\beta_0| < 1$.

3.4.1- Inversibilité du modèle

Comme noter précédemment ci-haut, l'estimateur du QMV qui minimise le critère

$$2\hat{L}_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{\hat{\sigma}_t^2(\theta)} + log\left(\hat{\sigma}_t^2(\theta)\right)$$

Où $\hat{\sigma}_t^2(\theta)$ est une approximation de σ_t^2(non observée).

$$h(\sigma_{t+1}^2) = \phi_t\left(h(\sigma_t^2)\right), \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{13}$$

Désormais ϕ_t dépend des observations X_t.

Comparée aux résultats obtenus dans d'autres modèles GARCH univariés, cette condition est restrictive. La stabilité du critère QMV est liée au problème d'inversibilité du modèle Score-GARCH (1,1) pour lequel l'équation s'écrit:

$$\phi_t(x) = \alpha_0 + \beta_0 x + (\gamma_0 X_t + \delta_0|X_t|)exp\left({}^{-x}/_{2}\right) \tag{14}$$

La présence de l'exponentielle dans l'équation récurrente (14) rend cette équation récurrente stochastique instable. Le choix de la valeur initiale $\widehat{g}_1$ peut poser problème. Donc le modèle devient inversible lorsque la loi de distribution asymptotique de $\widehat{g}_t$ ne dépend pas de la condition initiale $\widehat{g}_1$. Cette propriété de stabilité est satisfaite sous les conditions générales sur l'équation récurrente d'inversibilité (voir équation (13)), que nous rappelons dans un cadre général c'est-à-dire que nous avons besoins des versions fonctionnelles de ce résultat dans la suite de notre étude.

3.4.2- L'asymétrie

Les modèles GARCH "classiques" reposent sur une modélisation de la variance conditionnelle comme fonction affine du carré des innovations passées. Cette spécification a le mérite de capter deux caractéristiques importantes des séries financières - succession de périodes calmes et turbulentes, leptokurticité des distributions marginales - tout en étant suffisamment simple pour permettre une étude étendue des propriétés probabilistes et statistiques du modèle. Du point de vue empirique, la modélisation GARCH classique présente une lacune importante, Par construction, en effet, la variance conditionnelle ne dépend que du module des variables passées : l'effet sur la volatilité de la date présente des innovations passées positives et négatives est donc identique. Cette propriété est en contradiction avec de nombreuses études sur les séries d'action, qui mettent en évidence une corrélation négative entre le carré des innovations de la date présente et les innovations passées. Si la distribution conditionnelle était symétrique, cette corrélation serait nulle, Or, on observe une asymétrie marquée : l'accroissement de volatilité dû à une baisse des prix est en générale très significatifs à celui résultant d'une hausse de même grandeur.

Avant de présenter l'extension des modèles GARCH aux cas asymétriques (modèles GARCH Asymétriques) dans lesquels un effet d'asymétrie est introduit, on rappelle les caractéristiques des tests de spécification proposés par Engle et Ng (1993). Ces tests permettent de détecter l'asymétrie potentielle dans la volatilité conditionnelle. Ils reposent sur les quatre équations suivantes :

$$\hat{z}_t^2 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \sqcap_{t-1}^{-} + e_t \tag{21}$$

$$\hat{z}_t^2 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \sqcap_{t-1}^{-} \varepsilon_{t-1} + e_t \tag{22}$$

$$\hat{z}_t^2 = \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 (1 - \sqcap_{t-1}^{-}) \varepsilon_{t-1} + e_t \tag{23}$$

$$z_t^2 = \hat{\alpha}_4 + \hat{b}_1 \sqcap_{t-1}^{-} + \hat{b}_2 \sqcap_{t-1}^{-} \varepsilon_{t-1} + \hat{b}_3 (1 - \sqcap_{t-1}^{-}) \varepsilon_{t-1} + e_t \tag{24}$$

Où $\alpha_i, \beta_i et\ b_i$ sont des paramètres constants inconnus ; $\sqcap_{t-1}^{-}$ est une fonction indicatrice.

On peut réaliser ce test à partir de la statistique $\xi = TR^2$(où T est le nombre d'observation et R^2 le coefficient de détermination de la relation (24)) qui sous l'hypothèse nulle, suit un χ^2 à trois degrés de liberté.

Dans leur version initiale, les modèles GARCH ne permettent pas de tenir compte de l'hypothèse d'asymétrie. Pour pallier ce défaut, plusieurs formulations ont ainsi été proposées. Nous utilisons les extensions GARCH non linaires de façon à tenir en compte de des effets d'asymétrie.

Section II : Modèles GARCH asymétriques sur données à Haute Fréquence

L'étude des modèles GARCH classiques s'accentuent sur une modélisation de la variance conditionnelle comme fonction affine du carré des innovations historiques. Cette particularité a reproduit plusieurs caractéristiques importantes des séries financières qui méritent d'être signaler. Enchaînement de périodes calmes et de fortes variations, autocorrélation des carrés de rendements, mais absence de corrélation des rendements, leptokurticité des distributions marginales etc. tout en étant simplifier afin de permettre une étude parfondue des propriétés statistiques.

L'idée serait de tenir compte des autres moments conditionnels de ce processus. Or, la variance conditionnelle du processus autorégressif AR(1) est égale à σ_{ε}^{2}, tandis que sa variance non conditionnelle est égale à $\sigma_{\varepsilon}^{2} \ / \ (1 - \emptyset)$. Ainsi les variances de prévision conditionnelles et non conditionnelles de processus sont constantes quelle que soit la période d'étude, c'est-à-dire pour une longue ou courte période de prévision. Avec de tels modèles on est dans incapacité de fournir une mesure en cas d'éventuels changements dans les variances des erreurs prévisionnelles, même si l'on souhaite que celles-ci soient affectées par l'évolution passée.

Or à titre d'exemple, le MEDAF approuve en théorie l'espérance conditionnelle du rendement d'un actif financier exposé au risque par rapport à un actif financier non risqué. Donc il est clair que, cette théorie impose une étude paramétrique des variances conditionnelles, afin que cette variance conditionnelle doive évoluer avec le temps.

Dans l'analyse de l'économètre classique, l'estimation des paramètres d'un modèle inclue la variance des erreurs change en fonction du temps, on constate donc un souci du au problème d'hétéroscédasticité, c'est-à-dire que la matrice de variance covariance des erreurs n'est pas définie à un scalaire près, par la matrice identité. Autrement dit, la matrice de variance covariance n'a pas diagonale. C'est-à-dire tous les coefficients ne sont pas identiques pour les différentes perturbations manifestants dans des périodes différentes.

On peut alors accorder une attention particulière à ce problème afin d'obtenir des estimateurs efficaces.

De toutes les manières, cette première approche est moins satisfaisante puisqu'elle nécessite de spécification, a priori causée par l'évolution de la variance.

L'ensemble de la section qui suit va introduire un certain nombre de concepts relatifs à l'estimation de la modélisation GARCH asymétrique et dynamique de séries financières à haut fréquence. Il s'agit d'une problématique essentielle, pour de nombreux champs d'étude de l'économétrie financière contemporaine. Nous intéressons plus particulièrement sur la capacité de ces différents modèles GARCH asymétriques à capter les caractéristiques résultant de la volatilité des données financière à haute fréquence. Le simple fait que les études économétriques s'appuient souvent sur des algorithmes espérance variance souligne l'importance de la construction d'indicateurs de variance correctement spécifiés.

1- Présentation des Modèles GARCH Asymétriques

Le principe général proposé par Engle (1982) sert de mettre en avant l'idée de considérer que la variance conditionnelle dépend de l'ensemble de l'information disponible de l'échantillon étudié. Il considère la spécificité du modèle ARCH(q) où le carré des éléments de la perturbation suit le processus autorégressif AR(q), et donc les modèles ARCH sont des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques, Engle (1982) a donc proposé ces processus afin de résoudre les insuffisances signaler dans les classes précédentes, surtout, dans le cas de séries chronologiques qui présentent des fortes volatilités ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle, tel que les cours boursiers ou d'autre séries financières, en fonction de la périodicité d'études et par des variations asymétriques.

Toutefois, les processus GARCH sont en générale focalisés sur les paramétrisations d'endogènieté de la variance conditionnelle. Les processus GARCH dans leur ensemble, peuvent se décomposer en deux sous-ensembles à savoir : les modèles GARCH linéaires et les modèles GARCH non linéaires. Les premiers processus sont reconnus la spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations. Une des limites de ces modèles est de ne pas rendre compte considérablement de la lente décroissance de la corrélation logarithmique de la volatilité et ni de l'effet de levier.

Cependant, la seconde catégorie peut être corrigée les insuffisances signalées, le modèle GARCH non linéaires présente des formes asymétriques, donc ces approches sont caractérisés par des spécifications asymétriques des perturbations qui ne sont pas prises en considération par les GARCH linéaires, on peut citer entre autres : les modèles $EGARCH(p,\ q), JGR - GARCH(p,\ q), TGARCH(p,\ q)$, etc.

Dans cette section, nous étudions en particulier les estimations des paramètres du processus GARCH asymétriques ou GARCH non linéaires.

Cette catégorie de modèles GARCH asymétriques à pour spécificité d'agir sur les formulations de deux moments conditionnelles, à savoir la moyenne et la variance conditionnelles. Dans les réalisations empiriques, ces deux premiers moments sont souvent caractérisés de façon qu'ils apparaissent sous forme des simples fonctions non paramétrisées ou de paramètres inconnus de valeurs passées du processus. La faite d'estimer ou de faire de repérage de ces moments dans le processus, ne suffit cependant pas sans maitre des hypothèses supplémentaire à fin d'identifier les caractéristiques de la loi conditionnelle du processus.

L'estimation des paramètres d'un modèle, contenus dans un vecteur que l'on dénote par θ, s'effectue après avoir observé une série chronologique de T rendements que l'on dénote par y_t. Afin de simplifier et alléger la notation, il n'y aura pas de distinction entre « variable aléatoire » et « observation » dans la notation puisque le contexte permettra d'identifier cette différence. L'estimation d'un modèle est souvent effectuée avec la méthode du maximum de vraisemblance (maximum likelihood) qui consiste à trouver le vecteur de paramètres maximisant la fonction de vraisemblance du modèle. Pour symboliser cette vraisemblance, nous utilisons la notation, $f(y_t|\,\theta)$ qui représente également la densité de probabilité jointe du vecteur aléatoire y_t évaluée aux valeurs observées des rendements et à la valeur choisie du paramètre θ. L'estimateur du maximum de vraisemblance (maximum likelihood estimator), dénoté par $\widehat{\theta}$, satisfait la relation suivante :

$$\hat{\theta} = arg_{\theta}\, max\, log\, f(\, y_t|\theta)$$

La popularité de la technique du maximum de vraisemblance dans le cadre des modèles GARCH est due à la facilité de calculer cette log-vraisemblance, Si l'on connaît $h_1(\theta)$, il est simple de calculer récursivement $h_t(\theta)$, t va de $2 \ldots T$, par l'entremise de la variance conditionnelle et, donc, d'obtenir la log-vraisemblance donnée en formule ci-haute. La variance $h_1(\theta)$ dépend de $h_0(\theta)$ et ε_0^2 qui sont inconnus et il faut donc faire une hypothèse sur ces valeurs pour calculer $h_1(\theta)$, Dans les applications pratiques, elles sont généralement remplacées par la variance échantillonnale (*sample variance*).

1.1- le Modèle GARCH

La première formulation des modèles à variance conditionnelle hétéroscédastique est le modèle ARCH. Engle (2004) souligne que la spécification de ce modèle tient à sa conception de la recherche d'un modèle économétrique avec une variation dans le temps qui peut être en conformité avec l'hypothèse de Friedman (1977). Dans l'hypothèse de Friedman, la faite que l'inflation et l'incertitude ne sont pas prévisible efficacement, il en résulte que cette incertitude dirige le comportement des investisseurs et serait à l'origine des cycles d'affaires, Cette hypothèse implique que l'incertitude sur le niveau de l'inflation (mesurée par sa variance) varie dans le temps ; d'où le modèle ARCH, dont l'utilisation de nos jours dépasse largement ce cadre originel, les applications financières étant les plus nombreuses.

Selon l'analyse traditionnelle, de Box et Jenkins (1970), la prévision est fondée sur la moyenne conditionnelle de la série à étudier. Par exemple si une variable Z_t suit un processus AR(1) stationnaire :

$$\widehat{Z_t} = \hat{\theta} Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec ε_t indépendant identiquement distribué $(0, \sigma_t^2)$, avec la moyenne conditionnelle de Z_{t+1} devienne θZ_t tandis que sa moyenne inconditionnelle est nulle. Par ailleurs, Engle (1982) souligne que l'amélioration des prévisions issues des séries chronologiques provient tout à fait de l'exploitation de l'information contenue dans la moyenne conditionnelle du processus. La variance conditionnelle du processus AR(1) (σ_t^2) et la variance inconditionnelle $\sigma_t^2/(1-\theta)$ sont constantes quelle que soit la période de prévision. Alors que se passerait-il s'il y a des changements dans les variances des erreurs de prévisions. L'économétrie financière classique présentera certainement des faiblesses pour modéliser ce genre de phénomène car il va sans doute se poser un problème d'hétéroscédasticité, pour la simple raison que la matrice de variance-covariance des erreurs Ω ne sera pas définie à un scalaire près par la matrice identité I (C'est-à-dire $\Omega \neq \sigma^2 I$). C'est pour apporter une réponse à cette problématique que Engle (1982) a introduit le processus ARCH, un modèle économétrique, tenant compte de variances conditionnelles qui varient dans le temps, Plus précisément, les modèles ARCH sont des modèles

autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques et sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle.

Pour bien comprendre le processus ARCH, nous allons présenter ce processus tel qu'il a été introduit par Engel (1982).

La notation P_t représente le prix d'un titre financier à la date $t,\ et$ le terme r_t représente le rendement associé à ce prix, Soit $E(R_t \,|\, f_{t-1};\ \varepsilon)$ représente l'espérance conditionnelle des rendements noté M_t.

Le modèle ARCH avec erreur est spécifié comme suit :

$$r_t = M_t + \varepsilon_t \tag{25}$$

$$\varepsilon_t = Z_t\sqrt{h_t} \tag{26}$$

$$\sigma_t{}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\, \varepsilon_{t-j}^2 \tag{27}$$

Où $\{Z_t\}$ est une séquence de variables indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*) dont la moyenne égale zéro et la variance unitaire, c'est-à-dire centré et réduite. Pour le processus d'innovations devient un bruit blanc qualifié moins fort. Mais n'empêche pas qu'il soit conditionnellement hétéroscédastique, comme $E(r_t|f_{t-1};\ \varepsilon) = \sigma_t{}^2$ ne dépend que du temps de processus, avec $\vartheta = \{e,\ \alpha_0, \alpha_1, \dots,\ \alpha_q\}$ est le vecteur de paramètres sous les restrictions $\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q-1$ et $\alpha_i > 0$ pour assurer la positivité de $\sigma_t{}^2$ (condition suffisante et nécessaire).

Le processus ARCH(q) assume implicitement une écriture de type AR(q) sur ε_t^2, En effet, si on introduit l'innovation $\mu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t{}^2$, on obtient

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\, \varepsilon_{t-i}^2 \tag{28}$$

Dès lors si r_t suit une dynamique de type ARCH(q), les autocorrélations totales dont les retards supérieurs à (q) deviennent nulles pour le carré des innovations (ε_t^2). Alors que dans la pratique, on peut constater qu'il y a une persistance plus ou moins prononcée dans la décroissance des autocorrélations totales dans les innovations (ε_t^2), ce qui revient empiriquement de retenir une valeur (p) plus élevée. L'application ce principe pour la variance conditionnelle a conduit Bollerslev (1986) à la spécification du modèle GARCH.

Les modèles GARCH ont été introduit par Engle et Bollerslev en 1982. Cette classe de modèles est rapidement devenue très populaire pour expliquer les dynamiques des rendements financiers puisqu'elle est en mesure de reproduire une multitude de faits stylisés, Le modèle GARCH (p, q) de Bollerslev modélise la variance conditionnelle dans l'équation précédente par la médiation de la relation paramétrique suivante :

$$\sigma_t{}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Afin de garantir $\sigma_t{}^2 > 0$, les paramètres $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \alpha_p\}$ doivent respecter les contraintes: $\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q,\ \ et\ \ \beta_j \geq 0,\ j = 1, \dots, p,$ Lorsque $\beta_j = 0, j = 1, \dots, p,$ on obtient le modèle ARCH(q) de Engle, notre travail se focalise sur les modèles GARCH Asymétriques du type GARCH(1, 1), soit la formulation la plus populaire en économétrie financière, où la variance conditionnelle admet la forme suivante :

$$\sigma_t{}^2 = \alpha_0 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \qquad (29)$$

Dans ce qui suit, le modèle dit GARCH correspondra au modèle (29) avec $\mu_t = \mu$, $\forall$ t, et où l'évolution de $\sigma_t{}^2$ est donnée par l'équation (28).

Lorsque la condition $\alpha + \beta < 1$ est satisfaite dans le modèle GARCH, on obtient un processus $\{y_t\}$ qui est stationnaire au sens strict ainsi qu'au second ordre. Dans ce cas, la variance inconditionnelle est donnée par l'expression :

$$var[y_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha - \beta}$$

Le modèle GARCH n'induit pas de corrélation dans les rendements, mais il génère une autocorrélation positive dans le processus $\{\varepsilon_t^2\}$ et permet donc de reproduire des périodes de faible et de forte volatilités. De plus, le coefficient d'aplatissement de la distribution inconditionnelle de y_t supérieur ou égal à celui du terme d'erreur η_t. Ceci signifie que le modèle GARCH peut générer une distribution inconditionnelle avec des queues plus épaisses que celles de la loi normale, même si le terme d'erreur suit cette loi.
pour la dynamique du modèle ${\sigma_t}^2$.

$$ {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j {\sigma_{t-j}}^2 \tag{30}$$

Ce qui donne ε_t^2 et donc soit le processus :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j)\varepsilon_{t-i}^2 + \mu_t - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mu_{t-j} \tag{31}$$

Sous cette terme le modèle GARCH ressort alors avec beaucoup de dynamisme et voir le nombre de paramètres limite la structure d'autocorrélation totale empirique de ε_t^2. Notons qu'une condition suffisante garantissant la positivité de ${\sigma_t}^2$ est alors $\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$.
$\beta_0 > 0,\ \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p$ et que le processus de rendement r_t est dit stationnaire au sens faible du terme si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$$

Nombreuses modifications ou extensions au modèle GARCH ont été apparu, Le résultat linéaire au niveau de la volatilité aux variations de prix de cours de marché, motive d'avantage la recherche a apporté ces précisions alternatives à ce processus.

Toutefois, cette équation dans sa forme initiale, montre que la dynamique de la volatilité est liée à la capacité de modèle à capter les impacts de ε_{t-1}^2 sur les rendements peu importe le signe, c'est-à-dire ils peuvent être négatifs comme positifs. Donc cette variation symétrique qu'on l'admet dans le résultat de la volatilité selon les évènements, bonnes nouvelles ($\varepsilon_{t-i} > 0$) et mauvaises nouvelles ($\varepsilon_{t-i} < 0$), ce résultat est diffèrent de constat assez récurant d'une corrélation négative entre rendements et volatilités conditionnelles, c'est-à-dire une baisse de prix d'un cours boursier (rendements négatifs) entraîne une hausse plus marquée de la volatilité qu'une hausse de prix (rendements positifs) de même niveau.

$$var\left[\mathrm{R_t} \middle| \mathrm{f_{t-1}}, \varepsilon_{t-1} < 0\right] - \mathrm{h_{t-1}} > var\left[\mathrm{r_t} \middle| \mathrm{f_{t-1}}, \varepsilon_{t-1} > 0\right] - {\sigma_{t-1}}^2 \qquad (32)$$

Christie (1982) a été l'un des premiers à porter de critiques sur l'effet asymétrique de la volatilité reposent sur la relation entre la variation du levier financier d'un portefeuille ou d'une action et celle de la volatilité de son titre sur le marché financier.

Même si au vue de bon nombre, n'accordent pas beaucoup de différence entre l'asymétrie et le terme de « effet d'asymétrie », il peut en exister un autre processus théorique qui peut bien expliquer le point de divergence entre les deux termes. Il y a deux hypothèses fondamentales sur lesquelles reposent le concept théorique, à savoir la persistance de la volatilité et la relation positive entre rendements espérés et les volatilités conditionnelles. Dans ces deux cas de figure, une augmentation persistante au niveau de la volatilité instantanée incite les agents économiques à revoir leurs prévisions à la hausse consternant le niveau de la volatilité futures.

Le fait que, la volatilité anticipée connait une hausse persistante renforce d'avantage ou accentue les exigences et les sensibilités des agents quant aux rendements espérés de leurs investissements futurs. Avoir des dividendes estimés invariables, on constate alors un repli

ou une baisse des cours immédiate c'est-à-dire le rendement passe au négatif. C'est ce qu'on appelle volatility feedback en d'autre terme.

Dans les modélisations économétriques, de nombreuses extensions ont été apportées aux processus GARCH non linéaires et plus particulièrement sur la prise en compte des phénomènes d'asymétries, l'objectif de la section est de présenter la classe de modèles à travers six (6) spécifications : à savoir les modèles GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, GARCH-X, Power GARCH et IGARCH. Dont les trois premiers constituent la source d'aspiration du modèle Score-GARCH.

1.2- Le modèle EGARCH

Le modèle GARCH exponentiel (EGARCH) désigne Exponentiel-GARCH c'est une extension du GARCH classique introduite par Nelson (1991). Alors ce modèle fait dépendre la variance conditionnelle de l'instant t du celle de la période précédente, c'est à dire des chocs standardisés en (t-1) et de l'écart entre la valeur absolue des chocs standardisés et leur espérance en (t-1). C'est une de famille GARCH asymétrique, a pour objectif d'améliorer la prise en compte de l'asymétrie de la volatilité dans la réponse de la variance conditionnelle à une innovation. En d'autre terme, le processus EGARCH donne une forme d'asymétrie qui tiens compte de la positivité et de la négativité des signes de l'innovation mais aussi d'empileur d'un impact, c'est-à-dire ne dépend non seulement du signe positif ou négatif de l'innovation, mais aussi de gravité de cet impact. L'autre avantage de ce modèle EGARCH par rapport aux GARCH classiques, il n'a pas besoin des instructions préalables de positivité sur les coefficients pour avoir une variance conditionnelle positive.

Le modèle EGARCH donne l'écriture portant sur le logarithme de la variance conditionnelle du processus considéré, Soit les rendements y_t, d'espérance $E(y_t) = \omega$, peut s'écrire sous forme de type EGARCH(p. q). Ce modèle se présente comme suit :

$$y_t = \omega + \varepsilon_t \tag{36}$$

$$\varepsilon_t = Z_t\sqrt{h_t} \tag{37}$$

$$log(h_t) = \alpha + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{38}$$

$$g(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|) \tag{39}$$

Avec le terme z_t désigne un bruit blanc et homoscédastique tel que son espérance $E(z_t)$=0 et la variance $V(z_t) = \sigma_z{}^2$ et où les coefficients $\alpha_i,\ \beta_j,\ \gamma\ et\ \theta$ sont des réels. D'une manière classique, le raciaux h_t signifie la variance conditionnelle de y_t telle que la variance conditionnelle s'écrit $V(y_t|y_{t-i}) = V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) = h_t$ où y_{t-i} désigne l'ensemble des valeurs intérieures ou passées $(y_{t-1}, \dots, y_0)$.

L'espérance de valeur absolue du terme $E|z_{t-i}|$ ne dépend que de la loi sélectionnée préalablement pour $\mathbf{Z_t}$. Dans notre étude, nous avons retenu quelques lois usuelles, qu'on puisse les définir de la manière qui suit :

Pour une loi gaussienne (Normale) :

$$E|z_{t-i}| = \sqrt{2/\pi}$$

Pour la loi de Student (v):

$$E|z_t| = 2\frac{\Gamma(v/2)\sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}(v-1)\Gamma(v/2)}$$

Pour la loi de distribution d'erreurs généralisées (GED(v)):

$$E|z_t| = \frac{\Gamma(2/v)}{\sqrt{\Gamma(1/v)\Gamma(3/v)}}$$

Avec ce terme $\Gamma(.)$ désigne la fonction gamma.

Le modèle EGARCH présente deux avantages par rapport au modèle GARCH standard. Le modèle GARCH classique postule que seule l'amplitude et non le signe des résidus passés a un impact sur la variance conditionnelle, alors que le modèle EGARCH permet une réponse asymétrique de la variance conditionnelle aux chocs positifs ou négatifs des résidus de la période précédente. Pour un modèle EGARCH, le coefficient θ permet de capter les effets asymétriques qui ont en rapport avec le signe de l'innovation z_t. C'est-à-dire si $\theta > 0$ ou respectivement si $\theta < 0$, alors un impact positif sur la variance conditionnelle à la date t se traduira à la date $t + 1$ par une augmentation (respectivement une diminution) de la variance conditionnelle, c'est-à-dire de la volatilité, du processus y_t. Le paramètre γ permet contrôler l'asymétrie liée à la grandeur de l'innovation z_t calculé par l'écart $|z_t| - E|z_t|$. Si le terme est nul ($\gamma = 0$), alors dans ce cas, une innovation positive aura la même conséquence (en terme absolue) sur la variance conditionnelle qu'une innovation négative. En revanche, si $\gamma > 0$ un choc de forte variation va avoir relativement plus de conséquence (en valeur absolue) sur la variance conditionnelle qu'un impact de faible amplitude de variation.

1.3- Le Modèle GJR-GARCH

Une autre approche permettant de capter l'effet d'asymétrie des perturbations sur la variance conditionnelle introduite par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993). La formulation GJR-GARCH est en fait un modèle GARCH avec une variable binaire de plus qui multipliée par le carré du terme d'erreur de la période passée dans l'équation de la variance précédant. De telles manières, la variance conditionnelle suit d'abord un processus de signe positif des termes d'erreur, et puis dans un second temps suit un processus négatifs selon le signe des termes d'erreur.

L'étude de Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) porte également sur le lien entre la prime de risque et la variance conditionnelle des rendements boursiers aux Etats-Unis. Donc le modèle GJR-GARCH (p, q) permet de mieux capter l'effet d'asymétrie des perturbations sur la variance conditionnelle.

Soit un processus y_t, d'espérance $E(y_t) = c$, satisfaisant une représentation de type GJR-GARCH(p, q). Donc le modèle peut s'écrire comme suit :

$$y_t = \omega + \varepsilon_t \tag{43}$$

$$\varepsilon_t = Z_t\sqrt{h_t} \tag{44}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i}^{q}\left(\alpha_i \varepsilon_{i-1}^2 + \varphi_i I_{\varepsilon_{t-i<0}} \varepsilon_{i-1}^2\right) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, h_{t-j} \tag{45}$$

Avec le bruit blanc désigné par le terme z_t il est faible et homoscédastique, tel que avec espérance nulle $(E(z_t) = 0)$ et variance égale $V(z_t) = \sigma_t^2$, où les coefficients α_i et β_j sont des réels et où $I_{\varepsilon_{t-i<0}}$ désigne la fonction indicatrice telle que $I_{\varepsilon_{t-i<0}} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $I_{\varepsilon_{t-i<0}} = 0$ sinon. D'une manière récurrente le h_t explique la variance conditionnelle du modèle y_t tel que $V(y_t|y_{t-i}) = V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) = h_t$ avec y_{t-i} est l'historique du processus, ou en d'autres terme, l'ensemble des valeurs passées $\{y_{t-1}, \dots, y_0\}$.

Ce modèle GJR-GARCH, a pour particularité d'imposer via la fonction indicatrice des contraintes sur les coefficients afin de satisfaire la condition de positivité de la variance conditionnelle h_t donc on aura $\alpha > 0$, $\alpha_i \geq 0$, pour $i =$, à q, $\beta_j \geq 0$, $j = 1$ à p. Pour le paramètre (φ_i) qui définit l'impact asymétrique lié aux signes des innovations intérieurs du processus ε_{t-i}, *si* φ_i est positif (respectivement négatif), aura un impact positif sur les innovations passées à la $t - i$ se manifestera, alors à la date t par une augmentation (respectivement diminution) de la variance conditionnelle, c'est-à-dire de la volatilité engendrer par y_t du processus.

1.4- Le Modèle GARCH-X

Le modèle GARCH-X utilise la volatilité instantanée différée du marché comme variable explicative supplémentaire dans le modèle GARCH classique. C'est un cas particulier du modèle ARCH-factoriel d'Engle, Ng et Rothchild (1990). Cependant, Hwang (2001) soutient que la volatilité instantanée fournit plus d'informations sur les facteurs variables

dans le temps que la volatilité des séries temporelles. Ainsi, nous proposons le modèle simple de volatilité conditionnelle incluant la volatilité instantanée du marché.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i}^{q} (\alpha_i \varepsilon_{i-1}^2 + \varphi_i \varepsilon_{i-1}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, h_{t-j} \qquad (46)$$

Ce modèle évite l'obstacle économétrique d'assurer la positivité de la volatilité conditionnelle dans le modèle ARCH-factoriel, tout en fournissant de meilleurs résultats que le modèle GARCH classique.

1.5- Le Modèle Power GARCH

Taylor et Swert, ont introduit respectivement, en 1986 et en 1989, une extension du modèle GARCH qui considère la déviation standard plutôt que la variance. Ces extensions ont été introduit au nom de modèle Power GARCH.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i}^{q} \alpha_i (| u_{t-i} | - \varphi_i u_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \sigma_{t-i}^2 \qquad (47)$$

Avec $\sigma > 0$; $| \varphi_i | \leq 1$ pour i=1 à r ; $| \varphi_i | = 0$ pour i > 0 et r ≤ p

Le modèle devient symétrique si $\varphi_i = 0$ pour tout i, si $\sigma = 2$ et $\varphi_i = 0$, on retrouve le modèle standard GARCH.

1.6- Le Modèle IGARCH

Le modèle Itegrated GARCH (Integration-GARCH) a été spécifié par Engle et Bollerslev en 1986. En modifiant le modèle GARCH en imposant une contrainte, ils définissent un modèle avec contrainte d'intégration :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \sigma_{t-i}^2 \qquad (48)$$

$$tel\ que\ \sum_{i}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1$$

Le modèle correspond au cas d'une racine unitaire dans le processus de variance conditionnelle. Sont caractérisés par un effet de persistance dans la variance un processus.

Bien que les modèles énumérés ci-dessus permettent d'incorporer l'effet d'asymétrie dans le modèle GARCH, ils ne génèrent pas nécessairement une asymétrie négative dans la distribution inconditionnelle des rendements, He et al ont démontré que cette distribution est symétrique si la moyenne est constante et si la distribution du terme d'erreur η_t est symétrique, peu importe la forme de l'équation utilisée pour modéliser la variance conditionnelle. Par conséquent, pour générer une asymétrie négative, il faut incorporer une moyenne qui varie dans le temps ou une densité asymétrique pour le terme d'erreur. C'est une raison de plus, pour laquelle nous faisons recours à notre nouveau modèle Scor GARCH (voir chapitres suivants) qui prenne en considération tous ces phénomènes.

2- Distributions conditionnelles

Les modèles GARCH dans leur ensemble ne possèdent pas de résolution analytique à la maximisation de la vraisemblance. Il nécessite donc d'opération numérique de la vraisemblance ou du pseudo vraisemblance selon la situation étudiée afin de remédier cette exigence. Dans la pratique, empiriquement parlant, il se pose la question sur la difficulté de la convergence du système d'optimisation choisit et plus spécifiquement du problème du choix de conditions initialement imposées.

2.1- Persistance de la variance conditionnelle

Dans la littérature empirique qui utilise des données financières de haute fréquence temporelle, on évoque souvent la persistance apparente entrainée par les estimations de la fonction de variance conditionnelle. Le clustering de volatilité, mentionné parmi les faits stylisés dans la section ci-haut, est une propriété très importante des rendements financiers.

La persistance de la variance conditionnelle est fortement liée à la présence d'autocorrélation positive dans le processus $\{\varepsilon_t^2\}$, Pour le modèle GARCH, si $\alpha + \beta < 1$, on peut expliquer que:

$$\boldsymbol{Corr}[\varepsilon_{t+h}^2, \varepsilon_t^2]\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{h}}, \quad \boldsymbol{h} > \mathbf{2}$$

Par conséquent, plus que la somme $\alpha + \beta$ s'approche de 1, plus que le modèle GARCH tend à générer des regroupements de rendements avec de faible et de forte amplitudes, c'est-à-dire, un clustering de volatilité. La littérature économétrique a donc adopté la somme $\alpha + \beta$ pour mesurer la persistance de la variance conditionnelle dans le modèle GARCH.

Lorsqu'on considère des séries financières quotidiennes ou hebdomadaires couvrant un horizon de plusieurs années, la somme $\alpha + \beta$ est fréquemment estimée tout juste au-dessous de un. Ceci indique un fort degré de persistance dans la variance des rendements financiers et a conduit les chercheurs à proposer des extensions GARCH qui imposent la contrainte "$\alpha + \beta = 1$".

2.2- Distributions Conditionnelles de GARCH Asymétriques

On peut faire intervenir différentes lois de distributions dans le cadre des procédures de maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres du modèle GARCH et ses extensions. L'estimation d'une représentation GARCH avec des innovations standardisées normales permet de tenir compte de l'excès de Kurtosis des données, néanmoins cette option peut ne pas suffire pour rendre compte de l'ensemble de l'excès de kurtosis. Lorsqu'elles sont combinées avec les modèles GARCH, les densités conditionnelles (lois Student et GED) à queues épaisses peuvent permettre de résoudre complétement (ou presque) le problème de l'excès de kurtosis.

Dans la partie qui suive, nous présentons les différentes propriétés théoriques usuelles des lois de distributions, que nous utiliserions plus tard :

a) La distribution Normale

La densité gaussienne a fait l'objet de beaucoup d'étude dans la littérature du fait de sa simplicité, mais toutefois, il est reconnu que les propriétés de la loi normale, symétrique ne

captent pas certains effets comme les sauts, ou les fortes volatilités, donc elles deviennent incompatibles avec les faits stylisés dont les distributions conditionnelles leptokurtiques et asymétriques, qu'on l'observe généralement sur les rendements des financiers très volatiles, selon Cont (2001). Notons aussi que, les études récentes généralement l'a supposé à tort la normalité de distribution peut tout de même mener à des estimations convergentes des coefficients d'un processus GARCH, on parle du principe du pseudo-maximum de vraisemblance, bien que ces coefficients ne sont pas toujours efficaces.

$$f(z) = \emptyset(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$F(z) = (\Phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Et $\quad F^{-\mathbf{1}}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$

Avec $E|z| = \sqrt{2/\pi}$

Et donc

$$\gamma_{\mathbf{3}} = E[(z - E(z))^3] = 0$$

Puis

$$\gamma_{\mathbf{4}} = E[(z - E(z))^4] = 3$$

Les termes γ_3 et γ_4 désignent respectivement les coefficients de Skewness et de la Kurtosis.

On peut écrire aussi, la log-vraisemblance associée à l'innovation z_t sous une distribution normale:

$$logL(\theta) = -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\log\big(h_t(\theta)\big) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\frac{[z_t - m_t(\theta)]^2}{h_t(\theta)}$$

Avec pour $h_t(\theta)$ désigne la variance conditionnelle du processus GARCH et le terme $m_t(\theta)$ fait référence à l'espérance conditionnelle du processus.

b) La distribution de Student

L'objectif principal de la loi de distribution Student est de porter des améliorations aux niveaux de queue de distribution plus épaisse que celui issu d'une la loi de distribution normale c'est-à-dire distribution leptokurtique. Particulièrement, la Kurtosis de la distribution de Student est déterminée par le degré liberté noté v. Donc, dans le cadre des modélisations GARCH, ce coefficient estimé cherche à porter de précision sur l'excès de Kurtosis, c'est qu'on ne peut pas le détecter avec les modèles GARCH classiques. La loi de Student standardisée trouve sa place dans la famille de lois symétriques et la Skewness est nulle dans la mesure où son degré de liberté est supérieur à trois ($v > 3$). Mais cette distribution devienne leptokurtique dès que son degré de liberté v supérieur à quatre.

On peut formuler la loi Student comme ci-dessous, avec la possibilité de reconduire cette formulation pour une perspective de calcul de la Value-at-Risque associées à une distribution de loi de Student avec v comme degrés de liberté :

$$f(z;v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi v}}\left(1+\frac{z^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}, v > 0$$

$$F(z;v) = G(z;v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi v}}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}} dt, v > 0$$

$$F^{-1}(\alpha) = \sqrt{\frac{(v-2)}{v}}G^{-1}(\alpha;v)$$

$$E|z| = \frac{4\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\sqrt{v-2}}{1+\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(v-1)}$$

La Skewness : $\gamma_3 = 0$, $v > 0$

La Kurtosis : $\gamma_4 = \frac{3v^2}{(v-2)(v-4)}$, $v > 0$

c) Loi General Error Distribution (GED)

Comme la loi student la loi La GED est aussi une loi de la famille symétrique, avec une particularité dite à la flexibilité dans les extrémités de la distribution, avec l'intervention du coefficient v, donc lorsque ce coefficient prend la valeur deux (v = 2), alors dans ce cas, on se retrouve avec une distribution normale standard, dans le cas où le paramètre v strictement inférieur à 2, alors cette distribution donne des queues beaucoup plus épaisses que dans un cas normale ou la distribution leptokurtique, puis lorsque le coefficient v égale à l'unité, en ce moment la distribution GED donne une forme plutôt d'une distribution exponentielle, ou voir même double exponentielle. La distribution GED a des queues plus fines que celles de la distribution normale, lorsque le coefficient v est supérieur à 2, Enfin, on obtient une distribution uniforme, lorsque v tend vers l'infini. L'excès de Kurtosis est donné par le terme suivant :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)\Gamma\left(\frac{5}{v}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{v}\right)\right]^2}$$

Pour le calcul de la VaR associées à une loi GED avec v degrés de liberté, Les formules pratiquent pour une perspective donnée sont les suivantes:

$$f(z;v) = \frac{v\exp\left(-0{,}5|{}^{z}/_{\lambda}|^{v}\right)}{\lambda 2^{(1+{}^{1}/_{v})}\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, v > 0$$

$$F(z;v) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{v}, \frac{1}{2}\left(\frac{-z}{\lambda}\right)^{v}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, & si\ z \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\gamma\left({}^{1}/_{v}, \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{v}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, & si\ z > 0 \end{cases}$$

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} -2\lambda\Gamma^{-1}\left({}^{1}/_{v}, 2\alpha\Gamma\left({}^{1}/_{v}\right)\right), si\ \alpha \leq 0{,}5 \\ 2\lambda\gamma^{-1}\left({}^{1}/_{v}, 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left({}^{1}/_{v}\right)\right), si\ \alpha > 0{,}5 \end{cases}$$

$$E|z| = \lambda 2^{1/v} \frac{\Gamma\left({}^{2}/_{v}\right)}{\Gamma\left({}^{1}/_{v}\right)}$$

L'application de modèles de type GARCH à des séries très longues comme celles que l'on rencontre en finance, conduit en général à estimer une très forte persistance de la volatilité. Cet effet peut être fallacieux et s'expliquer par la nécessité d'obtenir des distributions marginales admettant peu de moments.

Les modèles GARCH Asymétriques permettent d'estimer séparément des propriétés très différentes : persistance des chocs, décroissance des autocorrélations, distributions marginales à queues plus ou moins épaisses, déformation au cours du temps des densités conditionnelles. Ces modèles sont adaptés aux séries sur très longue période avec une succession de phases différentes. Il ne faut évidemment pas perdre de vue que, malgré leur souplesse et leur sophistication, ces modèles ne constituent (comme c'est toujours le cas) qu'une approximation de la réalité.

CONCLUSION

La lecture des différents modèles d'estimation des actifs financiers à haute fréquence est loin d'être unique. Suivant la question posée et l'objectif recherché, la démarche pour aborder le volet, très volumineux de la finance, diffère.
Ce chapitre retrace les grandes lignes de la volatilité des actifs financiers à haute fréquence. Il permet ainsi d'introduire le champ d'analyse de la thèse tant à un spécialiste du domaine qu'à un chercheur en finance en général. Un intérêt particulier a été porté sur le modèle GARCH asymétrique et ses extensions.

La volatilité est une variable clé que l'on retrouve dans la plupart des instruments financiers. Elle joue un rôle central dans la plupart des domaines de la finance. Elle intervient notamment de façon cruciale dans les modèles d'évaluation d'actifs, et de stratégies de couvertures, aussi bien que dans la détermination du prix des options.
L'analyse et la modélisation de la volatilité d'une série est un thème fondamental en finance. Pour preuve en se référant au marché boursier, on remarque que plus la volatilité d'une action importante, plus le risque est élevé et plus les détenteurs de l'action souhaiteront une rentabilité élevée pour accepter de la détenir et de la conserver. Ainsi l'estimation de la volatilité de la rentabilité d'une action fournit une mesure du risque qui y est attaché. Dans le même ordre d'idées, si le processus suivi par la volatilité est correctement spécifié, celui-ci permet de prévoir les rendements.

D'un point de vue statistique les séries financières sont donc objets complexes qui possèdent nombre de propriétés (voir chapitre suivant) aujourd'hui bien connues et résumées sous le nom de « faits stylisés ». Les rendements logarithmiques sont décorrélés, sans être pour autant indépendants.

Par ailleurs. Nous avons vu que les modèles GARCH permettent de capter plusieurs effets importants des séries financières mais qu'il reste impossible, dans cette approche, de se séparer de certains effets. Par exemple si l'on souhaite que les autocorrélations des carrés décroissent suffisamment lentement ($\alpha + \beta$ proche de 1 dans le cas GARCH (1, 1)) cela ne peut être obtenu qu'au prix de l'existence de certains moments de la loi marginale. En pratique. Lorsqu'on ajuste un modèle GARCH (1, 1) à une série financière échantillonnée à haute fréquence (par exemple des variations intra-journalières de prix d'action), on

obtient très généralement des coefficients α et β estimés de somme proche de 1. Cela indique une forte persistance des chocs sur la variance. Cette apparente persistance des chocs peut être due à l'existence de distributions marginales à queues épaisses.
Il est important de noter que ceci n'est pas dû à la forme retenue pour modéliser la variance conditionnelle : la critique s'applique également aux diverses extensions du modèle initial (celles incluant des asymétries). La classe des modèles de type GARCH apparaît donc souvent comme trop contrainte.
A nos jours, les travaux effectués n'arrivent pas à donner des conclusions similaires sur la meilleure et la plus performante méthode de prévision de la volatilité même pour des données de même type et de même fréquence. En outre, le choix d'un modèle de prévision approprié dépend forcément des conditions du marché sur la période d'estimation. Généralement, la plupart des modèles standards utilisés dans la prévision donne les meilleures prévisions pour des rendements qui oscillent au tour de la moyenne. Ces modèles ignorent les mouvements importants des cours causés par l'arrivée des données financières à haute fréquence.

Pendant les périodes de perturbations du marché, un grand pourcentage des rendements est très volatil et se concentre au voisinage des valeurs extrêmes des rendements. Dans la gestion des risques, ce qui importe c'est la modélisation et la prévision du niveau de la volatilité sur cette période qui est caractérisée par un risque très élevé, c'est d'une forte hausse ou baisse des valeurs des actifs.

Afin de pallier ce manque de souplesse, il est important d'essayer d'introduire une source additionnelle d'aléas dans la volatilité. Une nouvelle approche consiste à spécifier ces aléas, à partir d'un processus GARCH asymétrique. Elle est introduite dans le chapitre suivant. Il s'agit de modèle Score-GARCH ou communément appeler Realized-GARCH. Cette Approche consiste à mieux capter l'asymétrie et la dynamique de la volatilité à haute fréquence que les modèles GARCH traditionnels.

CHAPITRE II :

Estimations et Validations du modèle Score-GARCH

INTRODUCTION

S’il existe à nos jours des études détaillées du comportement intra-journalier du marché des trésoreries américain et européen, les équivalents sur le marché boursier français sont plus rares, ce qui constitue un paradoxe puisque ce marché est de taille quasiment équivalente à ses homologues américain et européens. Scalia (1998) documente le comportement intra-journalier de la volatilité sur les Bons du Trésor italien de janvier 1992 à juin 1993.

Les processus GARCH, autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques d’Engle, (1982) et Bollerslev (1986) dans la suite, ont contribué remarquablement au développement de l'économétrie de façon générale en tant que discipline constituante. L’importance particulière de ces modèles réside principalement dans leur capacité à décrire les différentes répercutions résultantes des changements de cotation ou de rendements des actifs de manière générale.

Deux familles GARCH ont était distinguer dans la littérature. Dont la première classe se caractérise par la spécification linéaire ou dite symétrique, proposée par Engle (1982) et Bollerslev (1986), cette spécification suppose que la réponse de la volatilité future aux variations de prix ou de rendements est déterminée uniquement par l'amplitude de ces fluctuations et peu importe le signe. Ainsi, la réaction du marché en termes d'amplitude de fluctuations dans la variabilité des rendements est indépendante de l’origine ou de cause de ce fait, bonne variation (positive) des prix ou respectivement mauvaise variation (négative) des prix. La seconde catégorie étend des réflexions sur le modèle GARCH, intégrant l'asymétrie dans la réponse de la volatilité aux variations de rendements. L'asymétrie introduite pour une finalité de détecter d’une manière générale les irrégularités empiriques selon lesquelles, une variation baissière de prix induirait une augmentation de la volatilité future, tant dis qu’une hausse de prix de même proportion conduirait à une diminution ou à une augmentation de moindre importance de la volatilité.

Economiquement, deux différentes constructions théoriques sous-tendent cette forme d'asymétrie de la volatilité. D'un côté, Black (1976) et Christie (1982) expliquent dans leurs publications, les mouvements asymétriques de la volatilité aux variations de cours boursier, peuvent être justifiés par la liaison de la volatilité du cours boursier avec le levier

financier de bailleurs émetteurs des actions. En effet, lorsque le cours d'une action enregistre de baisse de prix, les poids dépendants de la dette dans l'organisation du capital automatiquement revoient son courbe en hausse. Ainsi cette tendance haussière fait que l'action devienne plus risquée et très volatiles, c'est-à-dire on se retrouve avec une hausse de la volatilité. De même manière, on assiste à une décroissance de la volatilité en cas d'une variation haussière du prix de cours, mais avec une proportion moins élevée.
Le second courant mené par Pindyck (1984), French et al (1987), Campbell et Hentschel (1992), proposent des réflexions alternatives basées sur la variation inter temporelle due à la prime de risque. Donc leurs raisonnements sont basés sur les points suivant : la forte variation de manière récurrente et positive de la volatilité, ou l'augmentation de la volatilité courante entraine une hausse anticipative du niveau de la volatilité future, donc conduisant à une baisse rapide des prix de cours boursiers, les intervenants ajustent alors leur prime de risque et donc exigent des rendements plus élevés que prévu.

Toutefois il existe, très peu de travaux proposant des processus d'extensions GARCH asymétriques sur données à haute fréquence (données intra-journalières), les données généralement utilisées sont des fréquences journalières, hebdomadaires ou mensuelles. Donc cette tendance exigeante d'un côté, avec l'idée selon laquelle la capacité des modèles économétriques à estimer de façon précise la volatilité de cours boursiers, et de l'autre côté, avec une avancée majeure observée au cours des dernières décennies ; en effet, les reformes sur la simplification de milieu de trading sur l'ensemble des places financières facilite désormais l'accessibilité et la disponibilité de données à très haute fréquence. Ces données sont génératrices des informations (prix, volume, nombre de transactions…) à un niveau précis devraient permettre de mieux appréhender le processus générateur des rendements de cours boursiers.

Ce manque à gagner dans la littérature peut être expliqué par l'impossibilité théorique de relier l'asymétrie dans la volatilité des rendements en haute fréquence à des phénomènes de levier financier (ou effet de levier). D'autres travaux dans la littérature expliquent que la persistance de la volatilité est généralement faible dans le cas des données intra-journalières, on peut citer entre autre Ghose et Kroner (1995) et Engle (2000). Aussi, apparaît-il difficile d'associer l'asymétrie de la volatilité (si elle existe) pour des données en haute fréquence à la variation inter-temporelle de la prime de risque. Notre motivation dans le présent travail est donc de spécifier économétriquement une forme des variations

asymétriques de la volatilité, qui a une base théorique dans le domaine des données intra-journalières. Particulièrement, notre approche s'inspire de la ligne conduite de la littérature économétrique des modèles GARCH asymétriques de formation des rendements en présence de dynamique et d'asymétrie d'information.

Dans ce chapitre, nous proposons et étudions une nouvelle variante du modèle GARCH Réalisé que l'on cherche à rendre robuste l'asymétrie et à la dynamique de la volatilité des données à haute fréquence. La nouvelle structure est inspirée par Hansen et al (2012) qui a démontré que les modèles GARCH asymétriques classiques peuvent être gravement perturbés par l'asymétrie importante de la volatilité des rendements empiriquement. Hansen et al (2012) ont proposé un modèle axé sur le score qui peut surmonter le problème. En autorisant seulement les rendements à influencer la volatilité à travers le score d'une distribution t, la dynamique est rendue aberrante robuste d'une manière intuitive.
L'idée principale du chapitre repose sur l'application d'une version (i) asymétrique et (ii) robuste aux sauts, du modèle Score-GARCH initialement introduit par Hansen Huang et Shek. (2012). Premièrement, le modèle appliqué prend en compte l'asymétrie presque de la même façon que qu'un processus EGARCH. Et par la suite, l'approche utilise la fonction Score qui se caractérise par les queues plus épaisses dans le processus GARCH habituel pour but de ralentir les conséquences de chocs fort sur la dynamique de la volatilité.

Le contenu de ce chapitre est organisé comme suit : La première section introduit le modèle Score-GARCH et ses propriétés. La seconde section présente les données utilisées ainsi nous présentons par la suite les résultats des modèles GARCH de références et celui de notre modèle Score-GARCH.

1- Méthodologie :

Le processus de la volatilité sous-jacente des rendements des actifs est pertinent pour une grande variété d'applications, telles que la tarification de l'option et la gestion des risques, les extensions GARCH fument des modèles les plus utilisés pour modéliser les caractéristiques dynamiques de la volatilité. Cela a suscité le développement d'un grand nombre de modèles GARCH et leurs extensions. Dans le cadre du modèle GARCH, l'élément clé est la spécification de la variance conditionnelle. Les modèles GARCH standards utilisent les rendements journaliers (rendements généralement au carrés) pour extraire des informations sur le niveau actuel de volatilité, et cette information est utilisée pour former les attentes concernant la volatilité de la prochaine période. L'implication est que les modèles GARCH sont mal adaptées pour les situations où la volatilité change rapidement à un nouveau niveau. La raison en est qu'un modèle GARCH est lent pour rattraper et il faudra de nombreuses périodes de la variance conditionnelle (impliquée par le modèle GARCH) pour atteindre son niveau.

Dans cette section, nous présentons le modèle Score-GARCH dont la particularité principale réside dans la variance conditionnelle, $h_t = \mathrm{var}(r_t|\mathcal{F}_{t-1})$, où r_t est une série chronologiques de rendements. Dans le modèle $\mathrm{GARCH}(1,1)$, la variance conditionnelle h_t est une fonction de h_{t-1} et de r_{t-1}^2, alors que dans le cas présent (Score-GARCH) h_t dépendra également de x_{t-1}, qui représente une mesure de volatilité réalisée, telle que la variance réalisée. Plus généralement, x_t désignera un vecteur de mesures réalisées, telles que la variance réalisée, la synchronisation intra-journalière, et le rendement au carré. Une équation de mesure, qui lie la mesure réalisée à la volatilité dissimulée (qui pourra se manifester lorsque les causes qui font obstacle à sa manifestation seront disparues), complète le modèle. Ainsi, le modèle Score-GARCH qui consiste à utiliser le Score dans le processus GARCH habituel. Ce modèle spécifie pleinement les propriétés dynamiques des rendements et de la mesure réalisée. Pour simplifier la notation, nous supposerons la moyenne $E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Des spécifications plus générales pour la moyenne conditionnelle, telle qu'une moyenne constante ou le moyen-GARCH introduit par Engle et al. (1987), est adapté en réinterprétant $r_t$comme étant le rendement moins sa moyenne conditionnelle. Le cadre général du modèle Score-GARCH est présenté ci-après.

1.1- La formulation générale du modèle

La structure générale du modèle Score-GARCH (p, q) est donnée par :

$$r_t = \sqrt{h_t z_t} \tag{1}$$

$$h_t = v\left(h_{t-1}, \dots, h_{t-p}, x_{t-1}, \dots, x_{t-q}\right) \tag{2}$$

$$x_t = m(h_t, z_t, u_t) \tag{3}$$

Où $z_t \sim i.i.d.(0,1)$ et $u_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma_u^2)$, avec z_t et u_t sont mutuellement indépendants. Nous considérons les deux premières équations comme l'équation de rendement et l'équation GARCH, qui définissent une classe de modèle GARCH-X. L'acronyme GARCH-X fait référence au fait que x_t est traité comme une variable exogène.
Nous allons nous référer à l'équation (3) comme une équation de mesure, parce que la mesure réalisée x_t, peut être souvent interprétée comme une mesure de la variance (h_t). L'exemple le plus simple d'une équation de mesure est $x_t = h_t + u_t$. L'équation de mesure est une composante importante parce qu'elle "complète (boucle)" le modèle. De plus, l'équation de mesure fournit un moyen simple de modéliser la dépendance conjointe entre r_t et x_t, ce qui est connu pour être empiriquement important. Cette dépendance est modélisée par la présence de z_t dans l'équation de mesure, que nous trouvons très significative dans notre analyse empirique.

Il est intéressant de noter que la plupart (sinon la totalité) des paramètres des modèles GARCH de référence sont combinées dans la structure Score-GARCH. Voir Bollerslev (2009) pour une liste complète de ces modèles. La combinaison peut être obtenue en définissant $x_t = r_t$ ou $x_t = r_t^2$, et l'équation de mesure est redondante pour ces modèles, car elle est réduite à une identité simple. Naturellement, le cas intéressant est quand x_t est une mesure réalisée à haute fréquence ou un vecteur contenant plusieurs mesures réalisées. Ensuite, nous considérons certaines variantes particulières du modèle Score-GARCH.

1.1.1- Spécification du modèle

Le modèle Score-GARCH où GARCH Réalisé (realized-GARCH) de Hansen, Huang et Shek 2012 (HHS 2012) prévoit une bonne méthode pour la modélisation conjointe de

volatilité des rendements et des mesures réalisées de la volatilité. Conformément à ce modèle (HHS (2012)), on utilise la spécification log-linéaire du modèle Score-GARCH. La principale raison de ce choix est que la spécification logarithmique assure automatiquement la positivité de la variance et du noyau réalisé. Contrairement à la forte volatilité des processus GARCH détectée par les mesures réalisées, le modèle Score-GARCH utilise la mesure réalisée de la volatilité observée par l'intermédiaire d'une équation basée sur les polynômes d'Hermite et tronqué au deuxième niveau pour donner une forme quadratique de mesure, qui comprend également la réaction asymétrique aux chocs, ce qui rend une représentation très souple et dynamique.

1.2- Score-GARCH avec une spécification logarithmique

Le modèle GARCH Réalisé avec une spécification log-linéaire simple est caractérisé par les équations GARCH et de mesure suivantes :

$$\log h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log h_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \log x_{t-j} \tag{4}$$

$$logx_t = \xi + \varphi log h_t + \tau(z_t) + u_t, \qquad z_t \sim i.i.d(0,1) \tag{5}$$

Où $z_t = {r_t}/{\sqrt{h_t}} \sim i.i.d.(0,1), u_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma_u^2)$, et $\tau(z)$ est appelé la fonction de levier.

Sans perte de généralité, nous supposons que $E\big(\tau(z_t)\big) = 0$.

Une spécification logarithmique pour l'équation de mesure semble logique dans ce contexte. La raison en est que l'équation (1) implique que :

$$\log r_t^2 = \log h_t + \log z_t^2 \tag{6}$$

Cette équation (6) est une mesure réalisée (Score) avec des écarts types simples de rendement au carré (r_t^2), qu'une mesure plus précise de h_t. Il est donc évident d'explorer des spécifications où $\log x_t$ est exprimé en fonction de $\log h_t$ et z_t, voir l'équation (5). La

forme logarithmique de l'équation de mesure permet de spécifier l'équation GARCH, parce que cela induit une structure ARMA commode.

Dans notre application empirique, nous adoptons une spécification quadratique pour la fonction de levier $\tau(z_t)$ (c'est un polynôme dérivé au 2ème niveau). La variance conditionnelle h_t, est adaptée à $\mathcal{F}_{t-1}$. Donc $\mathcal{F}_t$doit être tel que $x_t \in \mathcal{F}_t$(à moins que $\gamma = 0$). Cette exigence est satisfaite par $\mathcal{F}_t = \sigma(r_t,\ x_t, r_{t-1}, x_{t-1}, \dots)$, Mais $\mathcal{F}_t$ pourrait en principe être encore plus riche que $\sigma(.)$. Nous précisons également que l'équation de mesure n'exige pas que x_t soit une mesure non biaisée de h_t.

Une caractéristique intéressante du modèle Score-GARCH logarithmique est qu'il conserve la structure ARMA qui caractérise des certains modèles GARCH standards. Pour des raisons de généralité, nous obtenons le résultat pour le cas où l'équation GARCH comprend des rendements au carré retardés. Considérons donc l'équation GARCH suivante :

$$\log h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \log x_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \log r_{t-j}^2 \tag{7}$$

où $q = max_i\{(\alpha_i, \gamma_i) \neq (0,0)\}$.

Proposition : On définit x_t la dynamique des rendements réalisé au temps t (5 minutes dans notre cas), $\log\sigma_t^2 = \mathrm{var}(r_t|\mathcal{F}_t)$ la variance conditionnelle globale, où l'ensemble de l'information est définie comme$\mathcal{F}_t = \sigma(r_t, x_t, r_{t-1}, x_{t-1}, \dots)$, et $\log r_t$ est la mesure réalisée (Score) en logarithme. La réaction asymétrique aux chocs vient via le terme $\tau(.)$, Qu'est une fonction basée sur les polynômes d'Hermite et tronqué au deuxième niveau pour donner une forme quadratique simple:

$$\tau(z_t) = \eta_1 z_t + \eta_2(z_t^2 - 1) \tag{8}$$

Ce terme à une propriété très pratique dont l'espérance est nulle $E\big(\tau(z_t)\big) = 0$, dont la fonction constitue également la base pour la création d'un nouveau type de courbe d'impact $v(z_t)$ défini comme suit:

$$v(z) = E[\log\sigma_t | z_{t-1} = z] - E[\log\sigma_t] = \delta_\tau(z)$$

Où $v(z)$ est la volatilité en fonction des innovations normalisées.

$$\log\sigma_t^2 = \mu_\sigma + \sum_{i=1}^{p\vee q}(\delta\alpha_i + \beta_i)\log\sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\, w_{t-j}$$

$$\log r_t = \mu_r + \sum_{i=1}^{p\vee q}(\delta\alpha_i + \beta_i)\log r_{t-1} + w_t - \sum_{j=1}^{q\vee q}\beta_j\, w_{t-j}$$

$$\mu_\sigma = \omega + \xi\sum_{i=1}^{q}\alpha_i, \quad \mu_r = \delta\omega + \left(1 - \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)\xi$$

$$\text{Où } w_t = \tau(z_t) + u_t, \qquad \mu_\sigma = \omega + \xi\sum_{i=1}^{q}\alpha_i \text{ et } \mu_r = \delta\omega + \left(1 - \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)\xi$$

Et les coefficients $\alpha_i = \beta_j = 0$ pour $i > p$ *et* $j < p$. Il est donc possible de montrer que la persistance $\hat{p}$ du processus est donnée par :

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{p}\beta_i + \delta\sum_{i=1}^{q}\alpha_i$$

Tandis que la variance inconditionnelle (à long terme) peut s'écrite comme :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\omega + \xi\sum_{i=1}^{q}\alpha_i}{1 - \hat{p}}$$

Remarque 1. Pour le cas où $p = q = 1$, nous avons $\log h_t = \omega + \beta\log h_{t-1} + \gamma\log x_{t-1}$ et $\log x_t = \xi + \varphi\log h_t + \tau(z_t) + u_t$, de sorte qe $\log h_t \sim AR(1)$ et $\log x_t \sim ARMA\,(1,1)$. Spécifiquement $\log h_t = u_h + \pi\log h_{t-1} + \gamma W_{t-1}$ et $\log x_t = u_x + \pi\log x_{t-1} + W_t - \beta W_{t-1}$ où $\pi = \beta + \varphi\gamma$.

L'équation de mesure induit une structure GARCH qui semble à un EGARCH avec une composante de volatilité stochastique. Prenons le cas de la remarque 1 où $logh_t = \mathrm{u_h} + \pi logh_{t-1} + \gamma\tau(Z_{t-1}) + \gamma \mathrm{u_{t-1}}$notons que $\gamma\tau(Z_{t-1})$ capte l'effet de levier, alors que $\gamma \mathrm{u_{t-1}}$ rajoute une composante stochastique supplémentaire qui ressemble à celle des modèles de volatilité stochastique. Ainsi, le modèle Score-GARCH peut induire une structure de volatilité stochastique souple, similaire à celle de Yu (2008), mais elle possède une structure GARCH dû au fait que $\mathrm{u_{t-1}}$ et $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurables. Il est aussi intéressant de signaler que, pour la prévision (au-delà des prévisions à une étape), le modèle Score-GARCH est un modèle de volatilité stochastique puisque les valeurs futures de $\mathrm{u_t}$ sont inconnues. Cette analogie ne s'applique pas aux prédictions en une seule étape parce que les valeurs retardées, $\tau(Z_{t-1})$ et $\mathrm{u_{t-1}}$, sont connus à l'instant $t-1$.
Un avantage évident de l'utilisation d'une spécification logarithmique est qu'il assure automatiquement une variance positive. Dans ce modèle Score-GARCH, les rendements nuls ne sont pas problématiques, car $logr_{t-1}^2$ n'apparaît pas dans son équation GARCH.

1.2.1- La fonction de levier

La fonction $\tau(z)$ est appelé la fonction de levier parce qu'elle capture la dépendance entre les rendements et la volatilité future, un phénomène qui est appelé l'effet de levier. Nous normalisons ces fonctions par$E\big(\tau(z_t)\big)$, et nous nous concentrons sur ceux qui ont la forme

$$\tau(z_t) = \tau_1 a_1(z_t) + \cdots + \tau_k a_k(z_t), \qquad où\ E\big(a_k(z_t)\big) = 0,\ \ pour\ tout\ k$$

De sorte que la fonction est linéaire dans les paramètres inconnus. Nous verrons que la fonction de levier induit une structure de type EGARCH dans l'équation de GARCH, et nous notons que la forme fonctionnelle utilisée dans Nelson (1991), $\tau(z_t) = \tau_1 z + \tau_+(|z_t| - E|z_t|)$, est dans cette classe de fonctions de levier. Dans notre étude, nous nous concentrons sur les fonctions de levier qui sont construites à partir des polynômes d'Hermite.

$$\tau(z) = \tau_1 z + \tau_2(z^2 - 1) + \tau_3(z^3 - 3z) + \tau_4(z^4 - 6z^2 + 3) + \cdots$$

Et notre choix de base pour la fonction de levier est une forme quadratique simple: $\tau(z_t) = \tau_1 z_1 + \tau_2(z_t^2 - 1)$. Ce choix est commode parce qu'il assure que $E\big(\tau(z_t)\big) = 0$. Pour toute distribution avec $E(z_t) = 0$ et $var(z_t) = 1$. La forme polynomiale est également pratique dans notre analyse de quasi-vraisemblance et dans nos dérivations de la kurtosis des rendements générés par ce modèle.

La fonction de levier $\tau(z)$ est étroitement liée à la courbe d'impact des nouvelles (voir Engle et Ng, 1993), qui détermine comment les chocs positifs et négatifs affectent la volatilité future. Nous pouvons définir la courbe d'impact de nouvelles par$\nu(z) = E(\log h_{t+1}|z_t = z) - E(\log h_{t+1})$.

1.2.2- Score-GARCH avec une spécification linéaire

Dans la suite, nous adoptons une structure linéaire plus proche du modèle GARCH classique de Bollerslev (1986). L'avantage de cette formulation est que l'équation de mesure est simple à interpréter dans ce modèle. Par exemple, si x_t est calculé à partir de données instantanées à haute fréquence et que $\mathrm{r_t}$ est le rendement, alors on peut s'attendre à ce que φ reflète la volatilité de rendement. Le modèle Score-GARCH linéaire est défini par :

$$x_t h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \, x_{t-j}, \qquad et = \xi + \varphi h_t + \tau(z_t) + u_t$$

Comme c'est le cas pour le modèle GARCH (1,1), le modèle Score-GARCH (1,1) avec une spécification linéaire implique que h_t à une représentation $AR\,(1),\ qui\ donne\ h_t = (\omega + \gamma\xi) + (\beta + \gamma\xi)h_{t-1} + \gamma w_{t-1}$, où $w_t = u_t + \tau(z_t)$, et que la mesure réalisée x_t est un $ARMA\,(1,1)$, ce qui est cohérent dans ce contexte avec les propriétés des mesures réalisées.

1.3- Estimation de modèle Score-GARCH par quasi-maximum de vraisemblance

L'utilisation de la méthode du quasi-maximum de vraisemblance est particulièrement intéressante pour les modèles GARCH en général, car elle est valide, asymptotiquement,

pour tout processus GARCH strictement stationnaire c'est-à-dire sous conditions de régularité, sans hypothèse de distribution des moments sur le processus observé.

Dans cette partie, nous étudions les propriétés asymptotiques de l'estimateur quasi-maximum de vraisemblance dans le modèle Score-GARCH (p, q). Dans un premier temps, nous nous limiterons au modèle GARCH standard (le processus observé est un GARCH). Nous allons présenter une procédure itérative de calcul de la log-vraisemblance gaussienne, conditionnellement à des valeurs initiales fixes ou aléatoires. Cette vraisemblance est écrite comme si la loi des variables η_t était normale centrée réduite (on parle de pseudo ou quasi-vraisemblance), mais cette hypothèse n'est pas nécessaire pour la convergence forte de l'estimateur. Elle a évidemment un effet sur la variance de la loi normale asymptotique de l'estimateur. Dans un deuxième temps, nous étendrons l'approche précédente au modèle Score-GARCH.

1.3.1- Quasi-Vraisemblance Conditionnelle

On supposera que les observations $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ constituent une réalisation (de longueur n) d'un processus GARCH (p, q), solution strictement stationnaire non anticipative du modèle

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \sqrt{h_t \eta_t} \\ h_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{0i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{0j} h_{t-j}, \quad \forall\, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Où (η_t)est une suite de variables iid de variance unité, $\omega_0 > 0$, $\alpha_{0i} \geq 0 (i = 1, \ldots, q)$, $\beta_{0j} \geq 0 (j = 1, \ldots, p)$.

Les ordres p et q sont supposés connus. Le vecteur des paramètres

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{p+q+1})' = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$$

Appartient à un espace de paramètres

$$\Theta \subset]0\,, +\infty[\times [0\,, \infty[^{p+q}$$

La vraie valeur du paramètre est inconnue. Elle est notée

$$\theta_0 = \left(\omega_0, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0q}, \beta_{01}, \dots, \beta_{0p}\right)'$$

Pour écrire la vraisemblance du modèle, il faut spécifier une distribution particulière pour la variable aléatoire indépendante identiquement distribuée η_t. On considère généralement la quasi-vraisemblance gaussienne, c'est-à-dire la vraisemblance obtenue à partir d'une loi normale centrée réduite pour les η_t. Nous ne ferons cependant pas l'hypothèse que cette loi constitue la vraie distribution du processus indépendante identiquement distribuée (*i.i.d.*).
La spécification d'une distribution gaussienne pour les variables η_t ne permet pas d'en déduire simplement l'éventuelle loi de distribution de l'échantillon. On travaille alors avec la vraisemblance de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sous conditions de ses valeurs initiales.
Du moment où les valeurs initiales sont $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}$, $\tilde{\sigma}_0^2, \dots, , \tilde{\sigma}_{1-p}^2$ que nous donnons les formes détailler ci-dessous, la vraisemblance conditionnelle gaussienne $L_n(\theta)$ s'écrit:

$$L_n(\theta) = (\theta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right)$$

Où les $\tilde{\sigma}_t^2$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2 \tag{9}$$

Pour une valeur donnée de θ, sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre, la variance non conditionnelle (correspondant à cette valeur de θ) est un choix raisonnable pour les valeurs initiales inconnues :

$$\varepsilon_0^2 = \cdots = \varepsilon_{1-q}^2 = \tilde{\sigma}_0^2 = \cdots = \tilde{\sigma}_{1-p}^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j} \tag{10}$$

De telles valeurs initiales ne conviennent pas notamment pour les modèles GARCH, pour lesquels l'hypothèse de stationnarité au second ordre est abandonnée, car la constante (10) prendrait des valeurs négatives pour certaines valeurs de θ. On peut alors prendre comme valeurs initiales

$$\varepsilon_0^2 = \cdots = \varepsilon_{1-q}^2 = \tilde{\sigma}_0^2 = \cdots = \tilde{\sigma}_{1-p}^2 = \omega$$

Ou encore

$$\varepsilon_0^2 = \cdots = \varepsilon_{1-q}^2 = \tilde{\sigma}_0^2 = \cdots = \tilde{\sigma}_{1-p}^2 = \varepsilon_1^2$$

Un estimateur du QMV de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$de

$$\hat{\theta}_n = arg_{\theta\in\Theta} max L_n(\theta).$$

On voit, en prenant le logarithme, que maximiser la vraisemblance revient à minimiser par rapport à θ

$$\hat{I}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \tilde{\ell}_t, \qquad \text{où } \tilde{\ell}_t = \tilde{\ell}_t(\theta) = \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2} + log\tilde{\sigma}_t^2$$

Et $\tilde{\sigma}_t^2$ est définie en (9). Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance est donc une solution mesurable de l'équation

$$\hat{\theta}_n = arg_{\theta\in\Theta} min \hat{I}_n(\theta)$$

Nous montrerons que le choix des valeurs initiales n'a pas d'importance pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur du QMV. En pratique ce choix peut cependant avoir de l'importance. Notons que d'autres méthodes sont possibles pour générer la suite $\tilde{\sigma}_t^2$; par exemple en prenant $\tilde{\sigma}_t^2 = c_0(\theta) + \sum_{i=1}^{t-1} c_i(\theta)\, \varepsilon_{t-i}^2$ où les $c_i(\theta)$ sont calculés récursivement (voir Berkes et al. 2003). Remarquons que pour calculer $\hat{I}_n(\theta)$, cette procédure nécessite

un nombre d'opérations de l'ordre de n^2, tandis que celle que nous proposons ne requiert qu'un ordre de n opérations.

1.3.2- Équations de vraisemblance

On obtient les équations de vraisemblance en annulant la dérivée par rapport à θ du critère $\hat{I}_n(\theta)$, ce qui donne

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\{\varepsilon_t^2 - \tilde{\sigma}_t^2\}\frac{1}{\tilde{\sigma}_t^4}\frac{\partial\tilde{\sigma}_t^2}{\partial\theta} = 0 \tag{11}$$

Ces équations s'interprètent, pour n grand, comme des relations d'orthogonalité. En effet, comme nous le verrons plus précisément dans la partie suivante, le terme de gauche de l'égalité précédente se comporte asymptotiquement comme

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\{\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2\}\frac{1}{\sigma_t^4}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta}$$

L'influence des valeurs initiales étant nulle lorsque $n \to \infty$. Or, pour la vraie valeur du paramètre, l'innovation de ε_t^2 est $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Donc sous réserve que l'espérance existe, on a

$$E_{\theta 0}\left(v_t\frac{1}{\sigma_t^4(\theta_0)}\frac{\partial\sigma_t^2(\theta_0)}{\partial\theta}\right) = 0$$

Car $\frac{1}{\sigma_t^4(\theta_0)}\frac{\partial\sigma_t^2(\theta_0)}{\partial\theta}$ est une fonction mesurable de ε_{t-i}, i > 0. Ce résultat n'est autre que la version asymptotique de (11) en θ_0, en utilisant le théorème ergodique.

1.3.3 - L'estimateur du QMV dans le modèle Score-GARCH

Nous allons estimer les paramètres du modèle Score-GARCH en utilisant la méthode de quasi-maximum de vraisemblance (QMV). Cette approche suppose que les densités

conditionnelles des innovations z_t sont gaussiennes. On cherche donc à maximiser la log-vraisemblance suivante :

$$L\left((\mathrm{r_t})_{\mathrm{t=1,\dots,T}};\ \Theta\right) = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)}} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\Delta\mathrm{r_t} - \mu(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)^2]}{\sigma^2(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)}\right\}\right]$$

$$= \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} -\ln\sigma(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\frac{[\Delta\mathrm{r_t} - \mu(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)^2]}{\sigma^2(\mathrm{r_{t-1}},\Theta)}$$

Où Θ est la matrice des coefficients à estimés. On aura$\Theta = \{\omega, \alpha, \beta\ et\ \lambda\}$. La distribution considérée est la loi normale même si la vraie distribution n'est pas gaussienne. Voir Gouriéroux (1992). Notons que des conditions suffisantes de régularité permettant d'obtenir des propriétés de convergence et de normalité asymptotiques ont été établies par Weiss (1982) dans le cas des modèles GARCH linéaires. La plus contraignante d'entre elles est la condition d'existence du moment d'ordre quatre pour les résidus. Lumsdaine (1990) montre néanmoins qu'il est possible de s'affranchir cette contrainte dans le cas d'un modèle GARCH (1,1), et que, même dans le cas du modèle Score-GARCH (1,1), les estimateurs du pseudo maximum de vraisemblance des différents paramètres sont convergents et asymptotiquement normaux.

Il faut noter que, lorsque la vraie densité conditionnelle est gaussienne, les estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelle sont asymptotiquement non corrélés : ils peuvent ainsi être estimés séparément sans perte d'efficacité et d'information. Cette propriété donc ne tient plus en dehors de la classe des modèles ARCH/GARCH traditionnels.

L'estimation des moindres carrés est un outil très connu et a fait beaucoup de succès, l'estimation par le quasi maximum de vraisemblance est loin d'être la méthode la plus populaire d'estimation des paramètres, mais c'est un outil indispensable pour de nombreuses techniques de modélisation économétriques, en particulier dans la modélisation non-linéaire avec des données non normales.

1.3.4- Critères de comparaison du modèle

Nous calculons divers critères de comparaison des modèles utilisés. Afin de mesurer la capacité d'ajustement dans l'échantillon et les performances hors échantillon des modèles, nous déterminerons le RMSE[3] (la racine carrée des erreurs au carré), le MAE[4] (la valeur absolue de la moyenne des erreurs) et le coefficient de détermination R^2.

Notons par T le nombre d'erreurs à considérer et ε_t par les erreurs des moyennes conditionnelles de modèle Score-GARCH.

Le RMSE se calcule comme la racine carrée de la moyenne de la somme des erreurs au carré :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} {\varepsilon_t}^2}$$

L'intérêt de la racine carrée est d'exprimer la mesure dans l'unité des observations. Le *Mean Square Error (*MSE) incorpore la variance de l'estimateur et son biais.

Le *Mean Absolute Error* (MAE) ou « écart moyen absolu » est une mesure traditionnelle de performance des prévisions. On l'obtient par l'équation :

$$MAE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |\varepsilon_t|$$

Pour le coefficient de détermination (R^2) peut se calcule avec la formule:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} {\varepsilon_t}^2}{\sum_{t=1}^{T} {\Delta r_t}^2}$$

[3]Signifie en anglais: Root Mean Square Error.
[4]Signifie en anglais : Mean Absolute Error.

Cette valeur nous donne des informations sur la qualité d'ajustement du modèle. Pour les tests de variance conditionnelle, on utilisera :

$$RMSE_{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left({\sigma_t}^2 - \widehat{{\sigma_t}^2}\right)^2}$$

$$MAE_{\sigma^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|{\sigma_t}^2 - \widehat{{\sigma_t}^2}\right|$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left({\sigma_t}^2 - \widehat{{\sigma_t}^2}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}{\sigma_t}^2}$$

a) Critère de détermination du nombre de retard

Il y a plusieurs critères possibles, nous illustrons les plus pertinents

- **Critère d'Akaike**

On choisit le nombre de h (retard) qui minimise la fonction d'Akaike qui est donnée par :

$$AIC(h) = Ln\left(\frac{SCR_h}{T}\right) + \frac{2h}{T}$$

Avec SCR_h égale la somme des carrés des résidus pour le modèle à h retards, T = nombre de d'observation et Ln = logarithme népérien.

- **Critère de Schwarz**

On choisit le nombre de h (retard) qui minimise la fonction de Schwarz qui est donnée par :

$$SC(h) = Ln\left(\frac{SCR_h}{T}\right) + \frac{hLnT}{T}$$

Avec σ^2 la variance prédite par le modèle et les paramètres estimés. Le modèle qui aura le plus petit RMSE et MAE et le R^2 le plus proche de 1 sera le modèle le plus performant.

2- Données et analyse préliminaire

La modélisation appropriée de la volatilité revêt une importance majeure. Tout d'abord, la volatilité en tant que mesure de l'incertitude, demeure un élément clé des décisions d'investissement et du montant de portefeuilles. En outre, étant donné que les investisseurs et les gestionnaires de portefeuille ont des niveaux supportables de risque, la modélisation de la volatilité est d'une importance primordiale dans l'évaluation du marché et dans la gestion du risque financier. En fait cette dernière a joué un rôle majeur depuis les accords 1996, faisant de la modélisation de la volatilité un exercice obligatoire pour les institutions financières à travers le monde. Enfin, la volatilité des marchés financiers peut avoir une grande répercussion sur l'économie dans son ensemble et peut jouer défavorablement sur le climat de confiance des investisseurs. Par conséquent, l'estimation de la volatilité peut servir de mesure de la vulnérabilité des marchés financiers et de l'économie, et peut aider également les décideurs à élaborer des politiques appropriées.

Du point de vue empirique, la modélisation GARCH classique présente une lacune importante. En effet, la variance conditionnelle ne dépend que du module des variables passées. L'effet sur la volatilité de la date présente des innovations passées positives et négatives est donc identique. Cette propriété est en contradiction avec de nombreuses études sur les séries financières, qui mettent en évidence une corrélation négative entre le carré des innovations de la date présente et les innovations passées. Si la distribution conditionnelle était symétrique en les variables passées, cette corrélation serait nulle. Or, on observe une asymétrie marquée. L'accroissement de volatilité dû à une baisse des prix est généralement supérieur à celui résultant d'une hausse de même ampleur. La possibilité de choisir entre ces modèles permet de tenir compte de ces caractéristiques des distributions des rendements financiers.

Nous mettons en application les modèles GARCH de référence, ainsi que le modèle Score-GARCH sur nos quatre actifs financiers sélectionnés à haute fréquence, afin de mesure à quel point ce modèle Score-GARCH capte les faits stylisés mis en évidence dans les modèles de référence. Ensuite, nous allons modéliser et appréhender le comportement de la volatilité de ces actifs.

D'abord pour pouvoir construire un modèle adapté à la réalité des marchés financiers, il faut étudier l'évolution de différents actifs au cours du temps pour ne pas prendre des positions issues de formules inadaptées. Nous allons donc présenter dans cette partie ce

que l'on appelle les faits stylisés des marchés financiers, il s'agit des caractéristiques propres aux séries temporelles financières.

2.1- Présentation des données

La disponibilité récente de données financières à haute fréquence, c'est-à-dire ayant des fréquences correspondantes aux échelles inferieures à un jour, permet de réaliser l'étude des propriétés statistiques des marchés de façons très fine. Avec l'arrivée du trading à haute fréquence, il est possible de disposer de bases de données très détaillées ou très haute fréquence, pour les grandes devises du marché boursier, où toutes les transactions (prix et volume) et les cotations (cours acheteur et cours vendeur) sont enregistrées.
Les données réelles que nous utilisons tout au long de ce travail sont des données à haute fréquence c'est à dire de toutes les cinq minutes, issues du marché des actions de Paris présenté ci-dessous.

La place boursière de paris, ou le CAC 40 est le principal indice boursier sur le marché de paris. Créé par la compagnie des agents de change, il est déterminé à partir de cours de 40 actions cotés en continu sur le premier marché parmi les 100 sociétés les plus capitalisées sur Euronext Paris.

Les valeurs de ses sociétés représentent les différentes branches d'activités économiques exercer en France, donc elles reflètent d'une manière générale la tendance globale de l'économie des grandes entreprises françaises, leur liste est examiner de fonçons régulières pour maintenir une représentativité cohérente.

Le marché de CAC40 fait l'objet d'actualisation (mis à jour) toutes les 30 secondes pendant la journée de 9h00 à 17h30. L'acronyme CAC, qui signifie Compagnie des Agents de Change, dénoté aujourd'hui Cotation Assistées en Continu : l'indice donne donc, en continu, une idée précise de l'évolution du marché.

Les 40 sociétés pondèrent de manière individuelle l'indice en fonction de la quantité de titres disponibles sur le marché. Les pondérations dépendent d'une société à l'autre en fonction de poids de sa capitalisation et des échanges survenus sur la valeur.

Dès qu'une société n'est plus cotée, elle est remplacée immédiatement par une autre des valeurs du CAC.

Il existe une différence entre l'évolution à long terme du CAC40 et celle à long terme de l'ensemble des valeurs cotées sur cette bourse, puisque les valeurs qui ne répondent pas aux exigences finissent par être remplacées dans sa liste par d'autres ayant pris l'avantage sur elles. Ainsi un portefeuille comprenant les 40 valeurs du CAC40 du jour se évoluera progressivement et son évolution ne sera pas forcement celle du CAC 40 trois mois plus tard et ainsi de suite au fil du temps.
L'avancer de la technologie sur le domaine de la recherche scientifique en générale et sur l'économie financière en particulier (la recherche des informations et des profits à très court terme) a conduit les investisseurs à revoir leurs horizons d'investissement. Voilà notre choix pour une base des données à très haute fréquence.

Le choix de cette période n'est pas arbitraire en ce sens où nous essayons de mettre en lumière la suite (les conséquences) de la crise de 2008 survenue aux États-Unis et qui a fortement affecté l'économie mondiale du septembre 2008 à septembre 2014, la faillite de la banque américaine Lehman provoquait un funeste enchaînement mondial entre crise financière et récession économique, puis faisait place entre 2009 et 2012 à une sévère crise de la zone euro. Dans son rapport de 2013 sur la France en 2025, France Stratégie rappelle que le choc de 2008 a précipité le basculement d'un monde à l'autre.

Donc pour ces raisons nous utilisons dans le cadre de cette thèse les prix à haute fréquence (toutes les 5 minutes) d'un ensemble des cours de 4 actifs suivants du CAC40 à savoir :
La Société Générale (SG), Electricité De France (EDF), Alstom et Orange.

Ces séries sont uniformément échantillonnées à échelles de 5 minutes à l'aide d'une interpolation linéaire. Ces cours étaient fournis par la base de données de DataStream. Toutes les séries utilisées comprennent exactement 45807 observations du 10/01/2012 09 :00 jusqu' au 11/07/2014 18 :00, soit 114 points par jour. Ils sont ajustés afin de tenir compte des dividendes et des divisions.

2.2- Analyse Statistique des Données Financières à haute fréquence

Les cours étant mesurés à très haute fréquence (toutes les cinq minutes), la taille des séries sur une même période peut être très différente d'un actif à un autre. En effet, certains titres très liquides peuvent faire l'objet de plusieurs transactions pendant une minute, alors que d'autres, moins liquides, auront peu de transactions. Cette base est appropriée pour prendre en compte l'ensemble d'informations disponibles sur les séries.
Elle nous permet dans la suite d'analyser et de faire ressortir l'effet de la discrétisation des prix sur les plages de rendements.

Nous passons en revue les principales propriétés des séries financières de prix et de rendement. Afin de nous permet au passage d'introduire un certain nombre de définitions essentielles par la suite de notre étude.

2 .2.1- Comportement Empirique des marchés

L'analyse du graphique ci-dessus permet de remarquer les actifs financiers en logarithme à haute fréquence évoluent en moyen dans le même sens, mis appart l'action ALOSTOM. En termes d'évolution, nous pouvons détecter trois phases principales. La première phase est caractérisée par une accalmie, elle s'étale sur la première année, et nous constatons une stagnation des tous les actifs. A partir de la deuxième année, les quatre actifs sont entrés dans une phase de baisse qui a duré jusqu'au 1er trimestre de 2013. Le 2ème trimestre 2013 marque le début de la troisième phase, il s'agit pour nos quatre échantillons d'une phase de hausse pour retrouver leur niveau d'avant-crise.

Tableau 2.1 : descriptif des cours logarithmiques intra-journaliers des indices boursiers

	Min	1er Quartile	Médiane	Moyenne	3ème Quartile	Max	Skewness	Kurtosis
ALSTOM	3,201	3,246	3,286	3,273	3,304	3,363	-0,197	-0,929
SG	3,461	3,563	3,654	3,64	3,712	3,761	-0,324	-1,345
EDF	3,039	3,086	3,209	3,181	3,253	3,316	-0,167	-1,603
ORANGE	1,973	2,074	2,227	2,192	2,273	2,371	-0,436	-1,102

Tab 2.1- *statistique descriptive*

Les statistiques descriptives des séries des cours logarithmiques pour chaque indice dans la période totale de l'étude sont présentées dans le tableau 1. D'après le test de Jarque Bera, l'hypothèse nulle de normalité des cours est rejetée. Les valeurs des statistiques de Ljung-Box d'ordre 15 et 20 montrent la présence d'une autocorrélation significative entre les valeurs boursières. L'hypothèse nulle d'abscence d'autocorrélation entre les cours logarithmiques est rejetée ce qui confirme l'existence d'une dépendance linéaire entre les valeurs de cours.

a) Test de Racine Unitaire

Afin de tester la présence ou non d'une Racine Unitaire dans nos différents actifs étudiés, nous utilisons le test Dickey Fuller Augmenté (ADF). Les tests ADF sont des tests paramétriques permettant de mettre en évidence ou de confirmer le caractère stationnaire ou non d'une chronique choisie, par l'intermédiaire de la détermination d'une tendance, c'est-à-dire déterministe ou stochastique. Ces tests reposent en général sur l'estimation d'un processus autorégressive, avec seule contrainte de choisir l'ordre de retard.

Pour la mise en application de test ADF, il faut au préalable, choisir le nombre de retard p à introduire de sorte à blanchir les résidus. P indique l'ordre de retard est déterminée soit à l'aide de la fonction des autocorrélations partielles, soit à l'aide de la statistique de Box-Pierce, ou voir même à l'aide des critères d'information d'Akaike (AIC) où de Schwartz (SIC).

Cette détermination du nombre de retard, à l'aide de la fonction des autocorrélations partielles, est faite par l'étude de la significativité des coefficients des corrélations partielles. En appliquant cette méthode, tout en se basant sur l'étude de corrélogramme de la série, nous obtenons le retard un pour les série logarithmes de nos observations.

Après avoir déterminé le retard pour toutes les séries, nous adoptons la stratégie séquentielle du test d'ADF pour examiner la stationnarité des variables. Le tableau ci-dessous résume les différents résultats. La première étape consiste à tenter de mettre un modèle sans rien, c'est-à-dire sans constante et sans tendance, dans la deuxième étape on tiendra compte d'une constante, puis dans la dernière étape on prendra en compte la tendance aussi.

Tableau 2.2: 1ère étape de Test Racine Unitaire de Dickey-Fuller Augmented

	Estimate	Std,error	T-value	Pr(>|t|)	test-stat	V. critique 5%
ALSTOM	-0.028972	0.065113	4533.728	2.00E-16	-0.3361	-1.95
SG	1.00E+00	2.15E-06	4643.167	2.00E-16	-1.3435	-1.95
EDF	1.00E+00	2.16E-06	4.63E+05	2.00E-16	-0.1451	-1.95
ORANGE	1.00E+00	3.14E-06	3183.38	2.00E-16	-2.6172	-1.95

Tab : 2.2*-Test ADF sans constante et sans tendance*

La région critique du test (pour un seuil à 5%) est l'ensemble des valeurs inférieures à -1.95. Or on à la statistique de test est de -0.3361, -1.3435, -0.1451 et -2.6172 respectivement pour ALSTOM, SG, EDF et ORANGE, on est alors dans la région d'acceptation du test, donc nous allons retenir l'hypothèse de racine unité, c'est à dire les actifs étudiés ne sont pas stationnaires. Mais peut-être il faudrait juste prendre en compte une constante (voir Annexes pour les autres tests).

Pour nos trois modèles (c'est-à-dire le test ADF sans constante et sans tendance, avec constante, et avec constante et tendance) la valeur du t-stat ajusté d'ADF est supérieure à sa valeur critique respectivement pour les quatre actifs étudiés. Nous acceptons donc l'hypothèse H_0 d'existence au moins d'une racine unitaire, et les probabilités critiques sont toutes supérieures à 0.05, cela confirme bien que l'on accepte l'hypothèse H_0.

Nous pouvons conclure enfin, que les séries des valeurs de clôture (toutes les 5 minutes) de nos 4 actifs ne sont pas stationnaires. Pour rendre les séries stationnaires, nous procédons à la différenciation logarithmique du premier ordre. Nous allons raisonner désormais sur les rendements logarithmiques intra-journaliers (5 minutes).

2.2.2- Evolution de rendement à haute fréquence

Les marchés financiers sont caractérisés par des périodes de fortes volatilités et des périodes de volatilités moindres. Pendant les périodes de hautes volatilités les rendements boursiers (voir le chapitre précédent) ont tendance à se regrouper. Ces regroupements sont plus fréquents lorsque nous observons les données quotidiennes, ils deviennent plus prononcés, lorsque nous avons affaire à des données à haute fréquence, c'est le cas des rendements logarithmiques intra-journaliers que nous étudions ci-dessous.

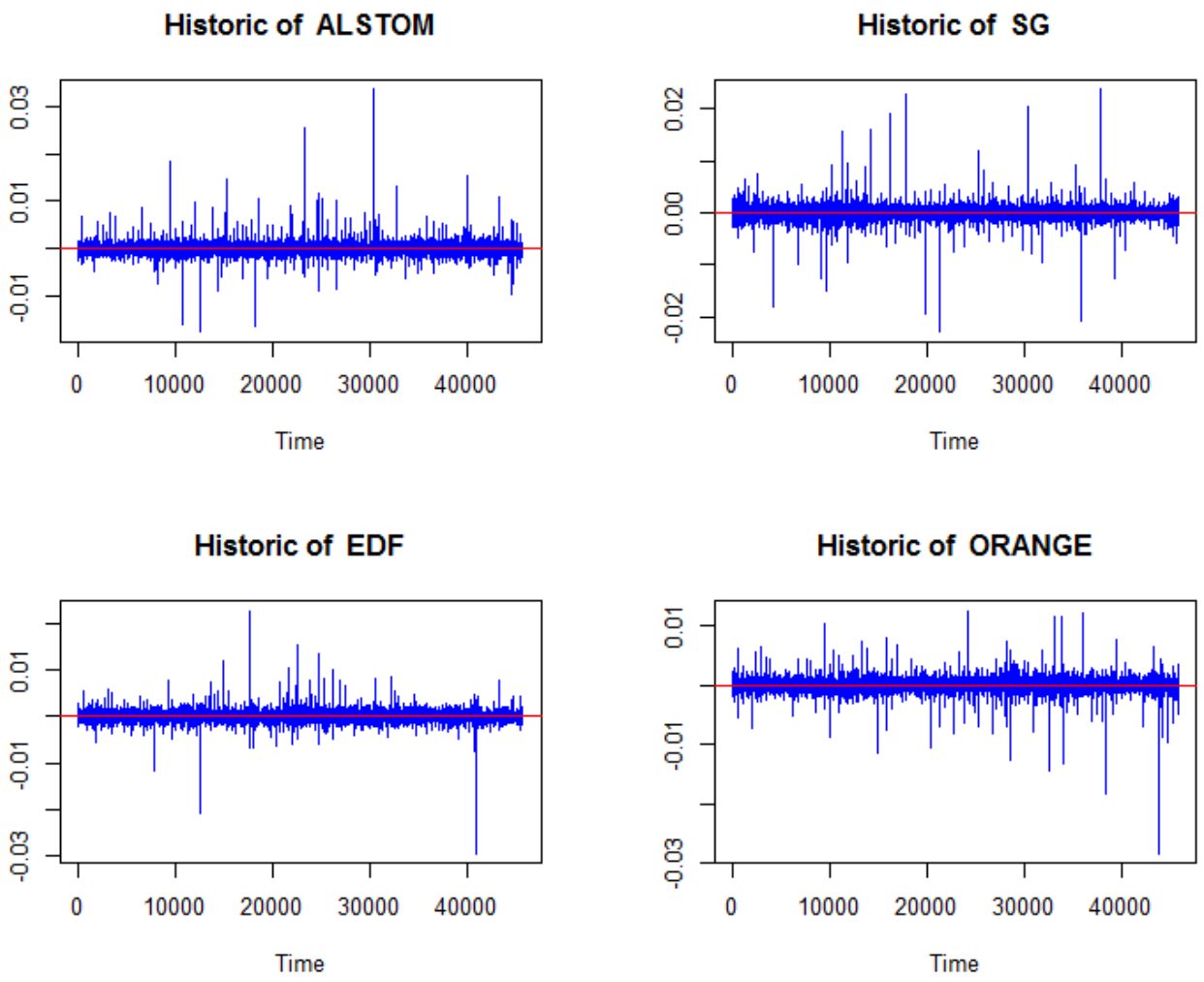


FIG 2.2- *Rendements logarithmiques intra-journaliers de 4 titres*

Les graphiques 2.2 représentent le comportement moyen des rendements à 5 minutes à l'intérieur de la journée. Nous pouvons remarquer sur les figures (FIG 2.2) que les rendements semblent stationnaires autour d'une constante, des fluctuations qui prennent des valeurs tant négatives que positives autour de la moyenne. L'évolution des rendements de nos actifs financiers à haute fréquence indiquent que les séries sont fortement volatiles.

Nous allons essayer maintenant de décliner les propriétés statistiques des rendements intra-journaliers des 4 actifs financiers à haute fréquence dans le tableau-3 ci-dessous.

Tableau 2.3: descriptif des rendements intra-journaliers

Titres	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis	Stat de JB
ALSTOM	-0,017598	0.03358762	7,24E-07	0,00077625	3,043909	6,871	2,20E-16
SG	-0.022889	0.02370211	4,77E-06	0,00081833	0,358539	8,4039	2,20E-16
EDF	-0.029391	0.02258195	3,21E-06	0,00068311	-0,283518	5,2513	2,20E-16
ORANGE	-0.028439	0.0125153	3,39E-06	0,00070912	-2,176685	9,7586	2,20E-16

Tab 2.3- Moyenne, Ecart-type, Skewness, Kurtosis et P-value de statistique de Jarque-Bera des rendements logarithmiques intra-journaliers.

Au premier regard on peut constater que le coefficient de Kurtosis pour les 4 indices boursiers à haute fréquence est élevé et largement supérieur à 3 (valeur de Kurtosis pour une loi normale). Cet excès de Kurtosis témoigne d'une forte probabilité d'occurrence de points extrêmes. En second point, le coefficient de Skewness de nos actifs étudiés est différent de 0 dans la plupart de cas. C'est qui justifie la présence d'une asymétrie dans la distribution, donc il peut être un indicateur de non linéarité, puisque les modèles linéaires gaussiens sont forcément symétriques. Le coefficient de Skewness positif indique que les distributions sont étalées vers la droite, les rendements réagissent davantage à un choc positif qu'à un choc négatif. C'est le cas pour les actifs ALSTOM et SG.

La statistique de Jarque-Bera n'indique pas si les données suivent une loi normale ou pas, mais plutôt si le Kurtosis et le coefficient d'asymétrie des données sont les mêmes que ceux d'une loi normale de même espérance et variance. Alors compte tenu de résultat du tableau (tab.3) ci-haut, les coefficients de Kurtosis et Skewness des distributions des rendements de nos actifs à haute fréquence sont différents à ceux d'une loi normale. Donc comme l'illustre la statistique de Jarque-Bera, les distributions de nos actifs financiers à haute fréquence ne suivent pas une loi normale, c'est qui relève des caractéristiques générales des données financières à haute fréquence.

2.3- Caractéristiques des rendements à haute fréquence

Plusieurs études théoriques et empiriques en économétrie financière ont été consacrées aux fondements théoriques de test de racine unitaires et des implications économiques qui en résultent. Beaucoup d'encre coulés dans ce thème, mais les travaux de Fuller (1976) et Dickey et Fuller (1979) sont considérés comme les références de base. Cependant,

plusieurs extensions ont été apportées à ces travaux. Parmi lesquels on peut citer l'énorme travail élaboré par Phillips et Perron (1988) examine les problèmes liées au non-respect des hypothèses traditionnelles ou de caractéristiques (autocorrélation, hétéroscédasticité, asymétrie,…), établies sur les perturbations dans le cadre des processus comportant une racine unitaire. En d'autres termes, ces auteurs se sont intéressés à l'élimination des biais dus aux propriétés statistiques particulières des perturbations dans la distribution.

D'abord sur les figures [2.3 ci-dessous nous avons présenté la volatilité réalisée des rendements logarithmiques à haute fréquence des quatre actifs. Les comportements intermittents des rendements logarithmiques sont très visibles, on voit clairement que les fortes variations se rassemblent en petits groupes.

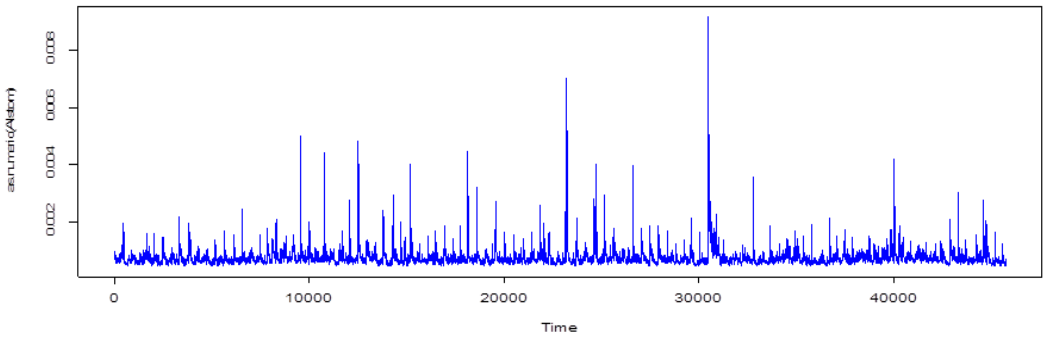


FIG.2.3.1- *Volatilité réalisée des rendements logarithmiques ALSTOM*

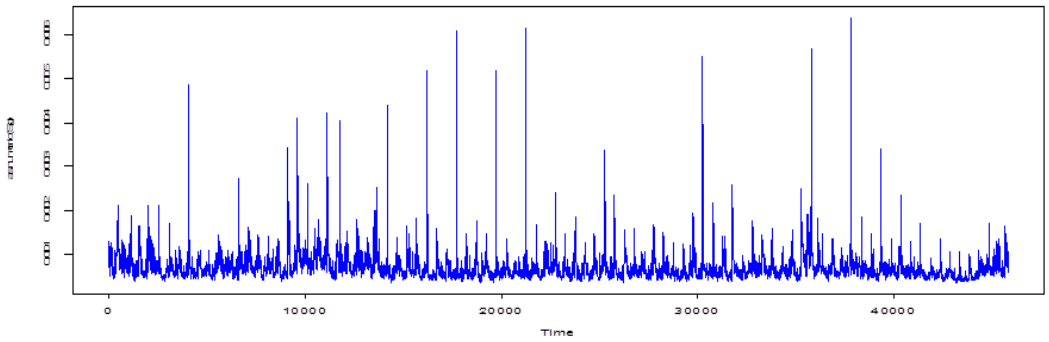


FIG.2.3.2- *Volatilité réalisée des rendements logarithmiques SG*

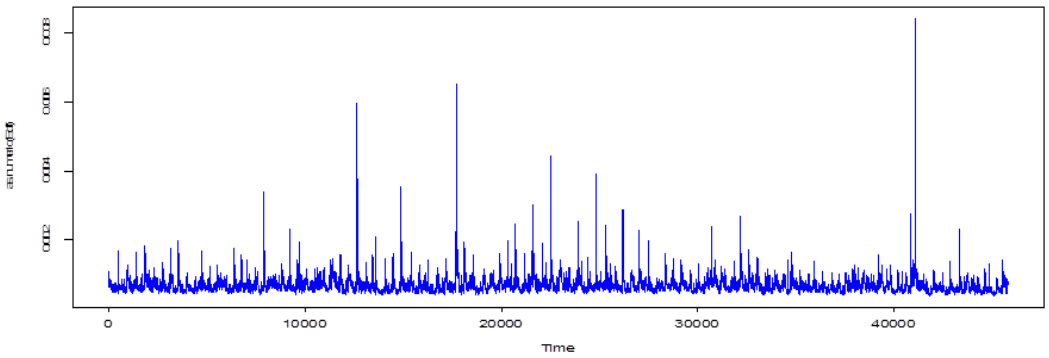


FIG.2.3.3- *Volatilité réalisée des rendements logarithmiques EDF*

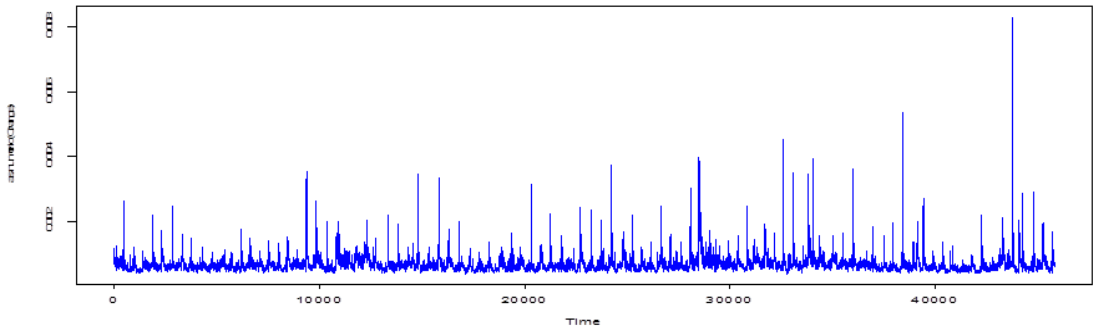


FIG.2.3.4- *Volatilité réalisée des rendements logarithmiques ORANGE*

On observe le regroupement des volatilités par paquets, des volatilités réalisées obtenues par les carrés des rendements logarithmiques à haute fréquence des quatre actifs étudiés.

Pour confirmer la stationnarité des rendements à haute fréquence des 4 actifs financiers étudiés, nous reprenons les tests ADF, KPSS et PP de stationnarité.

2.3.1 - Stationnarité des rendements intra-journaliers

Les tests de stationnarité ci-dessous permettent de vérifier la stationnarité du processus étudié. Il y a deux types de tests différents : les tests de stationnarité, comme le test KPSS, pour lesquels l'hypothèse nulle (H_0) est que la série est stationnaire, et les tests de racine unitaire comme le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF), ou encore le test de Phillips-Perron (PP) pour lesquels l'hypothèse nulle est que la série a été générée par un processus présentant une racine unitaire, et donc, qu'elle n'est pas stationnaire. Dans le tableau ci-après on propose le test KPSS, le test de Dickey-Fuller Augmentée ainsi que le test de Phillips-Perron. Pour chacun de ces tests, les valeurs critiques pour les différents seuils

significatifs sont indiquées dans le tableau ci-dessous. En utilisant ces valeurs critiques ainsi que les règles de décisions, nous obtenons les résultats indiqués dans le tableau.

Tableau 2.4: Tests de stationnarité des rendements à haute fréquence

	ADF		KPSS		PP		Résultats
	VAL_{obs}	VAL_{th}	VAL_{obs}	VAL_{th}	VAL_{obs}	VAL_{th}	
ALOSTOM	-232.529	-3.40990	0.056579	0.146000	-233.248	-3.40990	$VAL_{obs} < VAL_{th} => AH_0$
SG	-216.283	-1.94083	0.056160	0.146000	-216.631	-3.40990	$VAL_{obs} < VAL_{th} => AH_0$
EDF	-113.466	-3.40990	0.166646	0.146000	-231.588	-3.40990	$VAL_{obs} < VAL_{th} => AH_0$
ORANGE	-230.139	-3.40990	0.136401	0.146000	-229.698	-3.40990	$VAL_{obs} < VAL_{th} => AH_0$

Tab 2.4*-Tests de stationnarité des rendements intra-journaliers*

S'agissant de la stationnarité de rendement intra-journalier, nous pouvons dire selon les résultats de différents tests menés ci-haut que les 4 séries de rendements à haute fréquence semblent plutôt stationnaires autour d'une constante.

2.3.2- Persistance de la volatilité conditionnelle

A partir des rendements de nos quatre actifs financiers à haute fréquence, on constate que la volatilité est bien présente sur la totalité des rendements des titres étudiés, comme une simple analyse visuelle permet de la constater. Nous reproduisons aussi les corrélogrammes de tous les titres en annexe du document qui permet de mettre en évidence une relation négative entre deux rendements successifs et qui disparaît au fils du temps. Aussi nous illustrons sur les figures **(2.4)** ci-dessous les volatilités conditionnelles des rendements à haute fréquence.

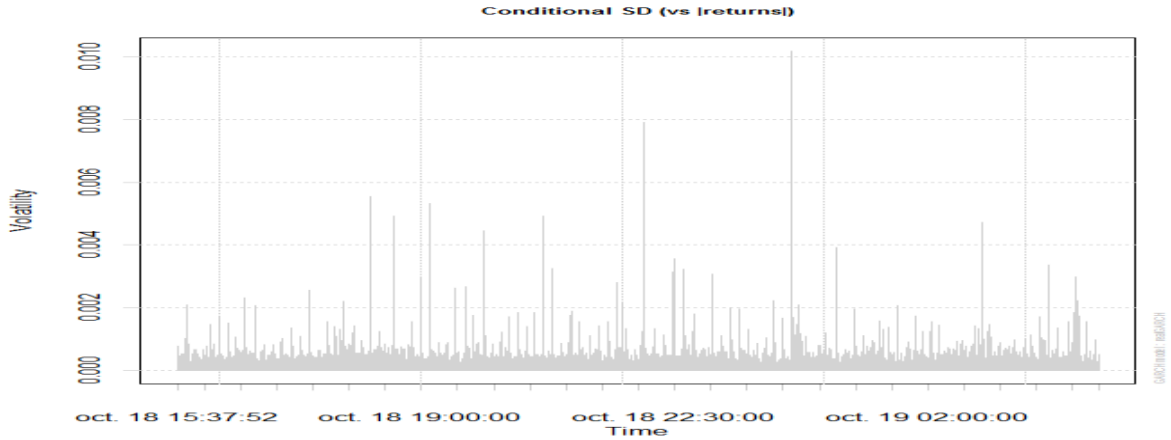


Fig 2.4.1-*Volatilité conditionnelle rendements logarithmiques intra-journaliers d'ALSTOM*

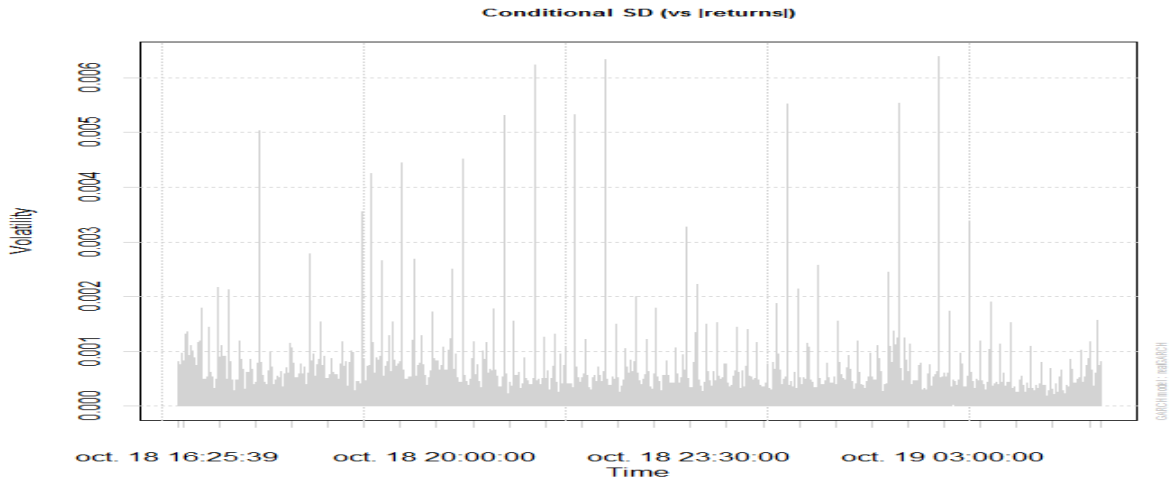


Fig 2.4.2-*Volatilité conditionnelle des rendements logarithmiques intra-journaliers du SG*

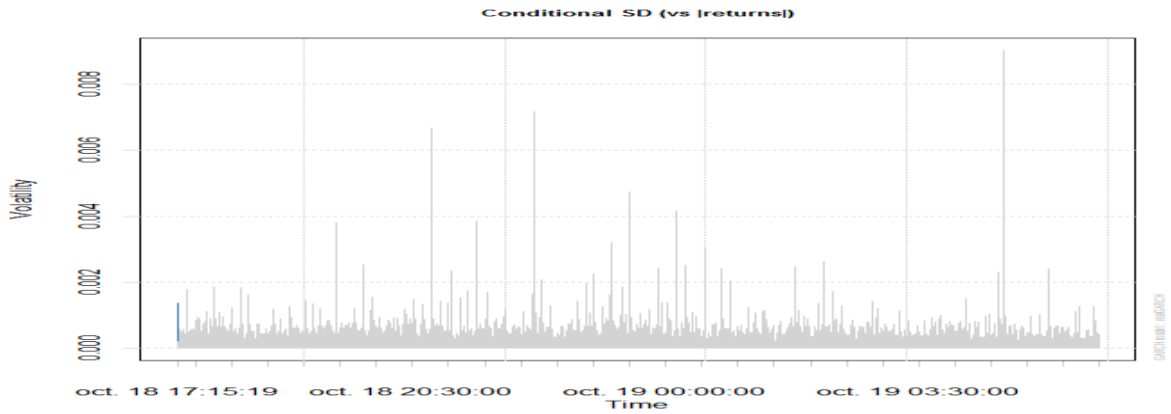


Fig 2.4.3-*Volatilité conditionnelle des rendements logarithmiques intra-journaliers d'EDF*

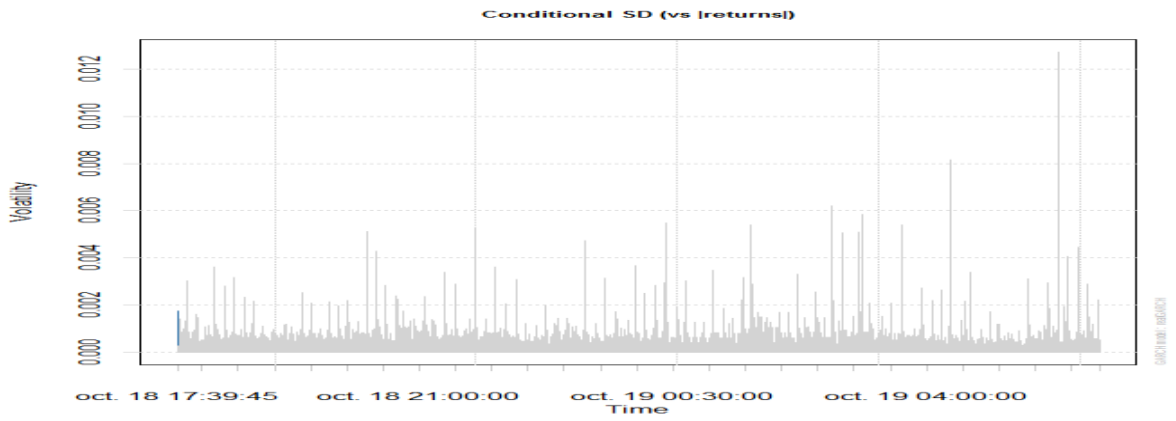


Fig 2.4.4-*Volatilité conditionnelles des rendements logarithmiques intra-journaliers d'Orange*

Nous observons empiriquement que de fortes variations des rendements sont généralement suivies de fortes variations et que de faibles variations sont généralement suivies aussi de faibles variations, nous constatons également un regroupement des extrêmes en cluster ou paquets de volatilités. Ce type de constat peut évoquer la remise en question de l'hypothèse d'homoscédasticité. Le regroupement des volatilités par paquets est dû essentiellement aux corrélations des séries financières à haute fréquence. A cause de cette corrélation, un grand mouvement correspondant à une forte volatilité a des chances d'être suivi par un mouvement de même ampleur, et valable pour un mouvement de faible amplitude. Voir Engle (1982). Plusieurs modèles ont été proposés pour modéliser et décrire le processus de la volatilité. Le plus connu est le modèle GARCH défini par Bollerslev en introduisant les volatilités passées comme variables explicatives des volatilités au moment présent. Beaucoup études ont été menées dans ce sens et ont prouvé la performance de ce modèle. Nous pouvons citer les travaux de Chou (1988), de Day et Lewis (1992), et de Lamoureux et Lastrapes (1993).

2.3.3 : Autocorrélation des rendements à haute fréquence

Il est important de s'intéresser à la fonction d'autocorrélation des séries de rendements, afin d'avoir une notion sur Les principales caractéristiques temporelles de nos différents actifs étudiés.

D'abord la fonction d'autocovariance $\{\gamma(h)\}\, h \in \mathbb{Z}$ mesure la covariance entre une variable et cette même variable à des dates différentes, pour un délai *h*:

$$\gamma(h) = cov(y_t, y_{t-h}) = E[(y_t - E(y_t))(y_{t-h} - E(y_{t-h}))]$$

Elle fournit une information sur la variabilité du processus et sur les liaisons d'ordre temporelles existaient entre les diverses composantes de la série y_t.

La fonction d'autocorrélation alors définie par:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, h \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Avec } \rho(0) = 1 \; et \; |\rho(h)| < 1 \; donc \; |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$$

Le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 (resp. d'ordre k) le coefficient de corrélation linéaire ρ(1) (resp. ρ(k)) calculé entre la série et cette série décalée d'une période (resp. k périodes).

Nous avons présenté les fonctions d'autocorrélations empiriques des rendements logarithmiques intra-journaliers de nos différentes séries sur les figures **(2.5)** ci-dessous.

Figures : Fonctions d'autocorrélations empiriques des rendements à haute fréquence

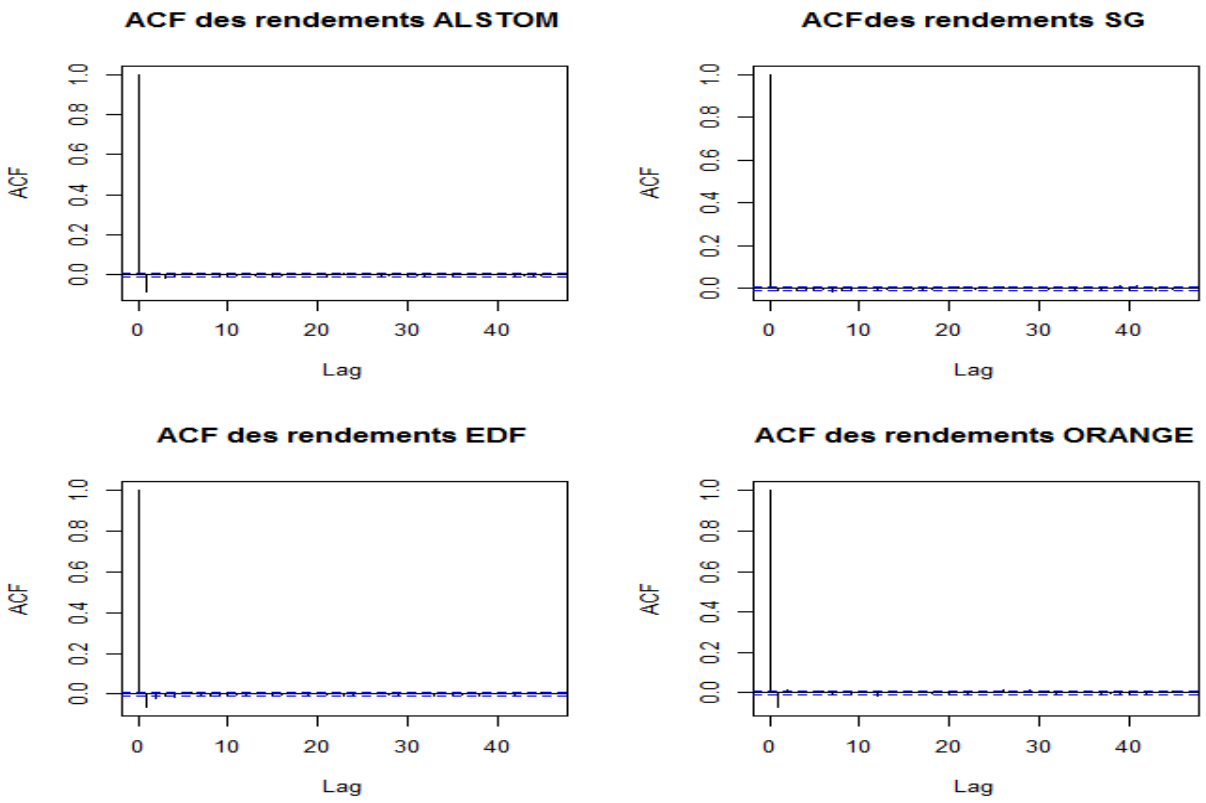


Fig 2.5- *ACF empiriques des rendements à haute fréquence*

Les études de la fonction d'autocorrélation sur les données à haute fréquence, montrent que sur ces tracés, elle décroit de façon exponentiellement rapide avec le temps (h) et peut être significativement considérée comme nulle dès que h est différent de 0. La justification la plus fréquence de cette absence de corrélation invoque le principe d'absence d'arbitrage des marchés liquides. Si de telles corrélation facile à détecter, il serait aisé pour un intervenant de concevoir une stratégie d'arbitrage qui en moyenne lui permettrait de gagner de l'argent. Alors que la mise en œuvre de ces techniques devrait éliminer mécaniquement ces corrélations, au moins pour des temps supérieurs au temps de réaction du marché.

On vérifie aussi l'absence d'autocorrélations des rendements à haute fréquence, par les biais des tests de Box-Pierce et Ljung-Box.
Avec la statistique de Box-Pierce. On note a_k l'autocorrélation d'ordre k du processus $\{Z_t, t \in Z\}$.
$a_1 = \cdots = a_k = 0$ avec l'hypothèse $H_1 : qu'il\ existe\ j \in [1,\ K]$, tel que $a_j \neq 0$. Alors La statistique du test Box-Pierce peut s'écrire sous la forme:

$$Q_{BP} = N \sum_{k=1}^{K} \hat{a}_k{}^2 \quad \overrightarrow{N \to \infty} \quad X^2(k)$$

Dont l'autocorrélation empirique est donnée par le terme $\hat{a}_k$.

En exécutant la statistique de Ljung-Box, définie pour un ordre K, correspond à l'hypothèse nulle $H_0 : a_k = 0, \forall\ k \leq K$ et vérifie:

$$Q_K = T(T+2) \sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{k}}{}^2}{T-k} \quad \overrightarrow{T \to \infty} \quad X^2(k)$$

Sur les figures, l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélations des rendements r_t est acceptée jusqu'à l'ordre maximal testé *K = 40*, d'autant plus que cette même hypothèse est rejetée pour le cas du carré des rendements logarithmiques à l'ordre *K = 1*.

Tableau 2.5: Tests Ljung-Box et Box-Pierce d'indépendance

	Test Ljung-Box		Test Box-pierce	
	Statistique	P-value	Statistique	P-value
ALSTOM	313.7882	2,20E-06	313.8088	2,20E-06
SG	5.1084	2,20E-06	5.1087	2,20E-06
EDF	201.6661	2,20E-06	201.6794	2,20E-06
ORANGE	239.8924	2,20E-06	239.9081	2,20E-06

Tab 2.5- Tests d'indépendance

Les statistiques Q_{BP} et Q_K de Ljung-Box et Box-perce permettent de tester l'hypothèse d'indépendance sérielle d'une série. D'une manière précise cette statistique teste l'hypothèse de nullité des coefficients d'autocorrélation. Elle est basée sur la somme des autocorrélations de la série et elle suit une distribution d'une loi Chi-deux avec *m* degrés de liberté.

2.3.3.1- La mémoire longue

L'étude de la mémoire longue est un aspect capital de la modélisation de la volatilité. En effet, elle fournit modélisation fiable en termes d'efficacité, et par conséquent donne des meilleures prédictions de la volatilité à long terme.

La disponibilité des données financières à haute fréquence a favorisé l'étude des impacts de court et de long terme d'une brusque fluctuation sur la dynamique des séries temporelles financières. Ces études ont permis de mettre en exergue le concept de mémoire longue présente dans les séries économiques et financières. Diebold et Nason (1990) ont prouvé que l'étude de ces séries révèle une dépendance temporelle du risque qui disparaît souvent progressivement.

Nous allons tout d'abord définir mathématiquement le concept de mémoire longue dans les données financières. Contrairement à la fonction d'autocorrélation des rendements logarithmiques, tracée sur les Figures ci-haut, la fonction d'autocorrélation des rendements absolus ou au carré reste très longtemps significativement positive et indique donc l'existence d'une dépendance entre les différents rendements logarithmiques. Rappelons

que le processus à mémoire longue est caractérisé par une fonction d'autocorrélation qui décroit hyperboliquement quand le retard s'accroit. Tandis que les processus à mémoire courte disposent d'une fonction d'autocorrélation qui décroit exponentiellement.

Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel α, tel que $0 < \alpha < 1$, et une constante $C > 0$, vérifiant : $\lim_{K\to\infty} \frac{P_k}{C.k^{-\alpha}} = 1$

Où P_k est la fonction d'autocorrélation avec K le nombre de retard, alors les autocorrélations d'un processus à mémoire longue peuvent vérifier la relation asymptotique suivante:

$P_k \sim C.k^{-\alpha}$ lorsque $k \to \infty$, Les autocorrélations ρ_k décroissent de façon hyperbolique.

a) Outils de détection de la mémoire longue

Il existe plusieurs méthodes de la dépendance de long terme d'une série financière ayant pour objet d'estimer l'exposant de Hurst H comme la méthode R/S et R/S modifié.

1- **Analyse R/S**

A partir de son étude sur le Nil, Hurst (1951) introduit la statistique R/S permettant de détecter la présence d'une mémoire longue. Cette statistique se définit comme l'étendue (R) des sommes partielles des écarts d'une série temporelle à sa moyenne, divisée par l'écart type (S).

Considérons la série temporelle $X_{t=1,\dots,T}$ de moyenne $\bar{X}_t$ la statistique R/S s'écrit :

$$R/_S = \frac{1}{\left[\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\left(X_j - \bar{X}_t\right)^2\right]^{1/2}}\left[\max_{1\le k\le T}\sum_{j=1}^{k}\left(X_j - \bar{X}_t\right) - \min_{1\le k\le T}\sum_{j=1}^{k}\left(X_j - \bar{X}_t\right)\right]$$

Hurt a montré que la statistique R/S est proportionnelle à T^H où H est appelé exposant de Hurst. T étant le nombre d'observations. On obtient donc une estimation de ce dernier avec le terme suivant:

$$H \cong \frac{log\mathrm{R/S}}{logT}$$

Comme nous l'avons précédemment mentionné, l'exposant de Hurst permet une classification des séries en fonction de leur niveau de dépendance.

$$C_H = 2^{2H-1} - 1$$

Donc C_H mesure la corrélation entre la moyenne des observations passées et la moyenne des observations futures dans un passé et futur assez long. Selon la valeur de H, il existe une corrélation négative, positive ou nulle.

$$\begin{cases} Si, H = \frac{1}{2}, \mathrm{C_H} = 0, \text{le processus ne présente aucune dépendance de long terme.} \\ Si \frac{1}{2} < H < 1, \mathrm{C_H} > 0, \qquad le\ processus\ présente\ de\ memoire\ longue. \\ Si\ 0 < H < \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{C_H} < 0, le\ processus\ présente\ de\ l'anti - persistance. \end{cases}$$

A partir de l'analyse R/S, on obtient une estimation de la persistance d'une série. Cependant, il n'existe pas de test de significativité des valeurs estimées.

2- **Analyse R/S modifié**

Tout en restant sensible à la question la mémoire longue, l'analyse R/S modifié, ne varie pas sous une classification générale de processus à mémoire courte. La statistique R/S modifié noter $\widetilde{\mathrm{Q}}_{\mathrm{T}}$ se définit comme :

$$\tilde{Q}_N = \frac{1}{\tilde{Q}_N(q)} \left[\max_{1 \le k \le N} \sum_{j=1}^{k} \left(X_j - \bar{X}_t\right) - \min_{1 \le k \le N} \sum_{j=1}^{k} \left(X_j - \bar{X}_t\right) \right]$$

Dont :

$$\hat{\sigma}_N^2(q) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(X_j - \bar{X}_t\right)^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{q} \omega_j\,(q) \left[\sum_{i=1+j}^{N} \left(X_j - \bar{X}_N\right)\left(X_{i-j} - \bar{X}_N\right) \right]$$

$$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}, q < N$$

Donc la somme des variances individuelles et les auto-covariances sont bien prises en compte par L'analyse R/S modifié. Nous donnons l'estimation du coefficient de Hurst nécessaire pour détecter la mémoire longue.

Tableau 2.6: Estimation de Hurst pour les rendements financiers à haute fréquence

	ALSTOM	SG	EDF	ORANGE
Coefficient H	0.69	0.74	0.66	0.78

Tab 2.6- Estimation du coefficient de Hurst

Les résultats d'estimation présentés dans le tableau 2.6 ci-haut, nous permettent de croire que les 4 rendements financiers présentent des dépendances à long terme c'est-à-dire le coefficient de Hurst supérieur au seuil de 0.05 (H>1/2) par les 4 actifs étudiés. Ceci dit que le coefficient de Hurst révèle des phénomènes de persistance. Si les volatilités des rendements ont augmenté dans le passé, il est fort probable qu'elles continuent dans ce sens. Ces persistances peuvent expliquer aussi une corrélation à long terme entre les événements actuels et dans les futurs. Car, dans chaque observation réside la mémoire des événements qui l'ont précédé.

Figure : Fonctions d'Autocorrélation des rendements au carré

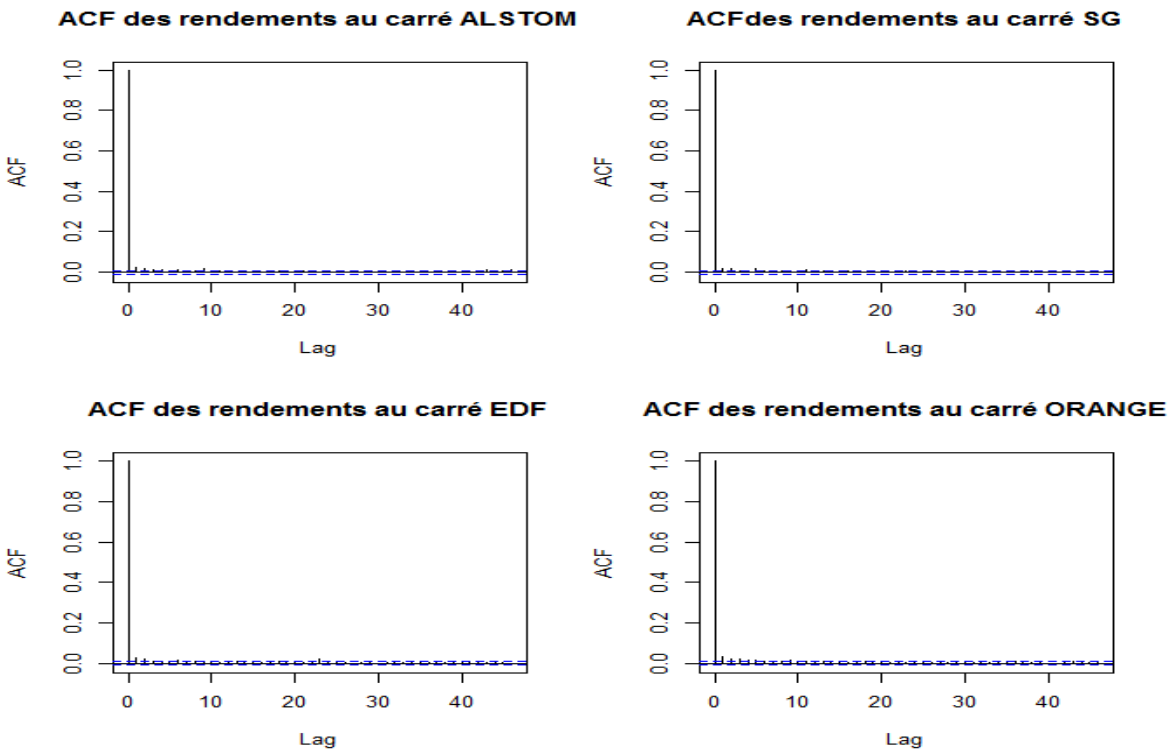


Fig 2.6- *Fonctions d'Autocorrélation des rendements au carré*

Une première indication positive est donnée par la lente décroissance du corrélogramme des rendements au carré. Ainsi, la fonction d'autocorrélation d'un processus à mémoire longue se comporte approximativement comme une fonction hyperbolique.

2.3.4 : Hétéroscédasticité des rendements à haute fréquence

Le concept d'homoscédasticité son contraire étant l'hétéroscédasticité est étudié en économétrie, pour son implication à détecter le cas de la variance des erreurs du modèle n'est pas la même pour toutes les séries observations échantillonnées, alors que généralement, les hypothèses de base en modélisation sont programmées de sorte que les variances sont homogènes et que les erreurs du modèle sont indépendantes et identiquement distribuées. Toutefois l'information contenue dans la partie résiduelle du processus semble marginalisée.

Tout d'abord, avant de modéliser la volatilité des valeurs en question, nous allons tester l'hypothèse d'homoscédasticité par le billet de test du Multiplicateur de Lagrange.

Pour tester une restriction non linaire sur le paramètre d'un modèle, les tests les plus utilisés dans ce domaine sont les tests de Wald, du score, et du rapport de vraisemblance. Le test de score, que l'on appelle également test de Rao ou test du Multiplicateur de Lagrange ou LM pour correspondre à l'acronyme anglo-saxon, présente l'avantage de ne nécessité que l'estimation du modèle contraint, qui est souvent beaucoup plus simple que celle du modèle non contraint.

La forme générale du Multiplicateur de Lagrange d'homoscédasticité conditionnelle est obtenue pour un modèle de régression de la manière suivante:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

Avec μ étant la moyenne des rendements et avec une spécification de famille GARCH pour le terme d''erreur du bruit blanc ε_t définie dans l'équation ci-haut ($r_t = \varepsilon_t \sigma_t$); r_t représente le rendement de d'un actif financier à haute fréquence à l'instant t ; ε_t est un bruit blanc suit la loi gaussienne et σ_t est la volatilité de l'actif financier représentée:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, r_{t-i}^2$$

Soit l'hypothèse nulle :

$$H_0\text{: existence d'homoscédasticité } H_0\text{: } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

Contre l'hypothèse alternative.

$$H_1\text{: } il\ existe\ au\ moins\ i\ telque\ \alpha_i \neq 0$$

Pour nos applications empiriques, nous étudions d'abord les résidus (ε_t) du modèle de régression sélectionné, puis dans un second temps on calcule les résidus élevé au carrée (ε_t^2) puis enfin, on passe à la régression autorégressive des résidus sur p retard où seuls les retards significatifs sont pris en compte.

Tableau 2.7 : Test LM d'homoscédasticité conditionnelle pour les rendements

	LM (valeur observée)	LM (valeur critique)	P-value	Alpha
ALSTOM	23.221	2.524	0.0023	0.05
SG	18.523	4.425	0.0005	0.05
EDF	11.231	1.542	0.0071	0.05
ORANGE	24.214	2.724	0.0024	0.05

Tab 2.7-Test de Multiplicateur de Lagrange (LM) d'homoscédasticité

Les p-values associées aux deux tests sont nettement inférieures au seuil de 0,05. Ceci nous pousse à rejeter l'hypothèse nulle d'homoscédasticité des résidus, confirmant ainsi l'idée qui ressort du graphique.

Tableau 2.8: Test d'homogénéité des variances pour les rendements des actifs

Titres	F. Stat	Proba	nR^2	Proba
ALSTOM	8.160	0.000	45781.30	0.000
SG	2.170	0.000	45797.35	0.000
EDF	5.220	0.000	45802.98	0.000
ORANGE	4.121	0.000	45801.91	0.000

Tab 2.8- Test d'homogénéité des variances pour les rendements des 4 actifs

Le tableau 2.8 ci-haut donne les résultats du test d'homoscédasticité pour les rendements de nos différents actifs financiers à haute fréquence. Nous rejetons encore une fois l'hypothèse d'homoscédasticité, Il convient donc, que les variances ne sont pas homogènes.

Notons que les deux versions des statistiques LM différent assez nettement mais concluent sans ambiguïté au rejet de l'hypothèse d'absence hétéroscédasticité des rendements à haute fréquence pour les 4 séries étudiées.

2.3.5 : Normalité des rendements à haute fréquence

L'étude de la normalité d'une distribution de rendement clarifie la compatibilité et l'efficacité d'une distribution empirique de rendement par rapport à une distribution théorique associé à une loi de probabilité définie. Loin de la simplification, le test de normalité a pour but aussi de valider ou pas une appréhension du processus de formation des données, il permet aussi de savoir si la perception du réel est en adéquations avec ce que nous observons empiriquement. En effet, l'hypothèse de normalité des distributions étend souvent de nombreux tests paramétriques (comparaison de moyennes, résidus de régression, etc.), donc il est important de s'assurer au préalable que la compatibilité de distribution empirique avec l'hypothèse de normalité avant de procéder au test statistique, proprement dit devrait être très important.

Nous présenterons dans un premier temps la technique descriptive, notamment le très populaire graphique de QQ-Plot ou quantile empirique. Et enfin dans un second temps, nous nous étudions le test statistique de Jarque-Bera.

2.3.5.1- Quantiles empiriques

C’est une façon de tester, visuellement, l’adéquation d’une distribution de rendement empirique avec une distribution supposée normale, le cas d’une distribution normale par exemple, qui est souvent évoquer pour comparer la normalité, il s’agit de faire une analyse de quantiles, en traçant simultanément et schématiquement les quantiles empiriques et théoriques , avec le trait plein est la droite d’Henry d’une loi normale. Si les distributions sont identiques, le tracé doit coïncider approximativement avec la droite c’est-à-dire $y = x$. Si le cas contraire elles sont différentes, on doit observer des déviations, pour dire que la distribution empirique des données ne suit pas une loi normale.

Cette méthode d'étude de la normalité d'une distribution s'adapte bien aux variables aléatoires continues. Il existe cependant d'autres moyens de vérifier la normalité d'une distribution observée qui sont basées sur des tests statistiques (test du Khi 2 par exemple). Ces tests présentent l'avantage de pouvoir préciser la normalité d'une distribution avec un pourcentage d'incertitude connu. Ils permettent également d'ajuster des distributions observées concernant des variables aléatoires discrètes à des distributions théoriques discontinues (binomiale, poisson, hypergéométrique...).
Un des intérêts pratiques de tels ajustements est de valider un modèle de distribution de la série étudiée ce qui permet de démontrer par la suite que le phénomène étudié est stable dans le temps. En effet, nous verrons que la normalité de la distribution de la variable aléatoire est une des conditions les plus fréquentes pour l'exécution d'un test statistique. Faire une hypothèse de normalité alors que ce n'est pas le cas, peut entraîner des conclusions totalement fausses. Il est donc utile de se donner les moyens de vérifier ou d'infirmer une telle hypothèse.

Figures : Quantiles empiriques des rendements logarithmiques normalisés

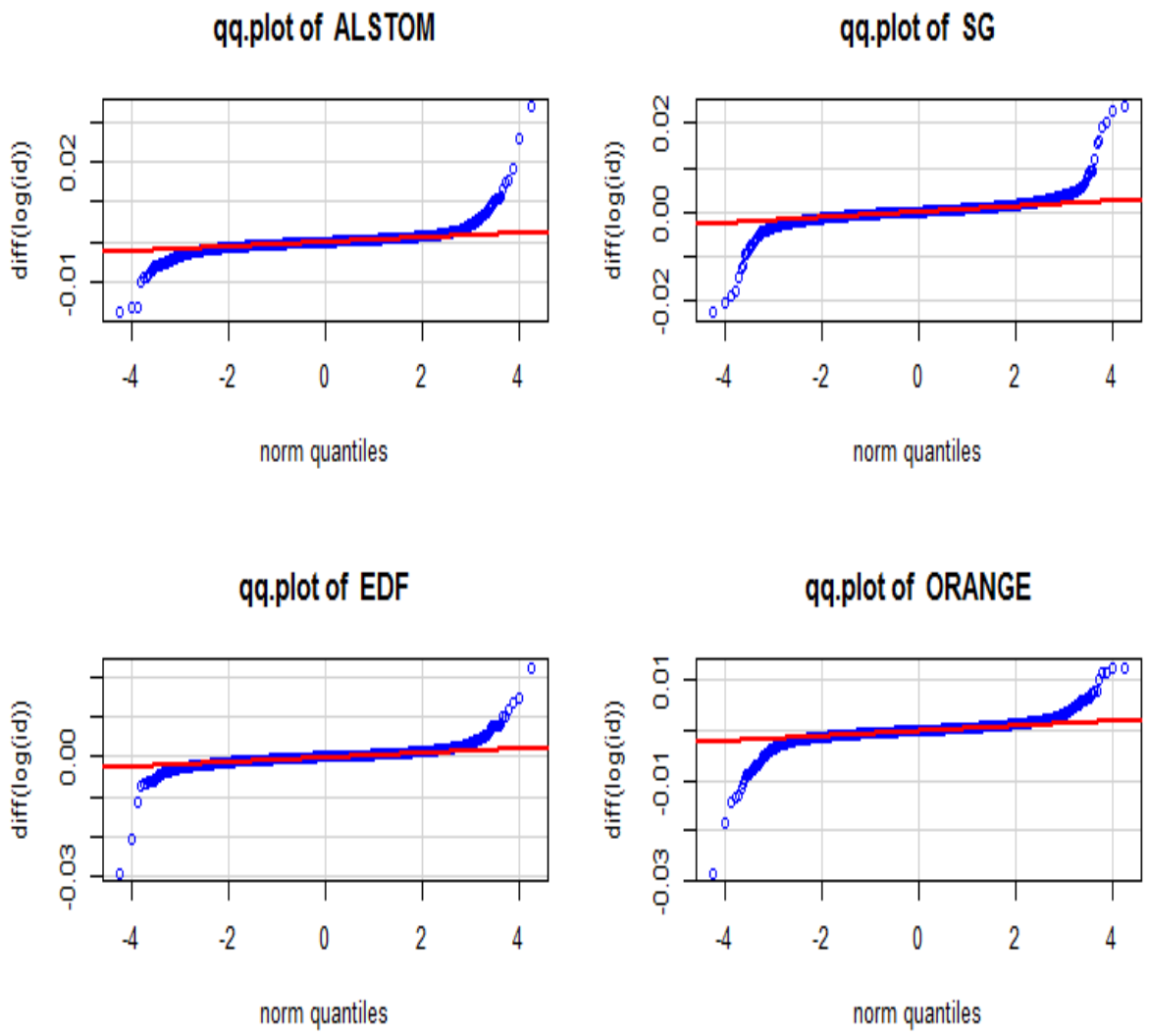


Fig 2.7- *Quantiles empiriques des rendements logarithmiques normalisés par leur écart-type*

Dans la figure 2.3 nous avons soumis à cette analyse les rendements logarithmiques à haute fréquence de 4 actifs, on constate la déviation de traits en bleu par rapport à la normalité(traits pleins), qui se traduit par un tracé non linéaire, est un peu plus fort pour ALSTOM et ORANGE, et moins visible pour les autres.

visiblement on remarque que la droite de Henry décrit ci-dessus, des tracés de normalité par moitié et des écarts à la normalité sont également visibles. Les tracés de normalité par moitié prennent seulement en compte la moitié positive de la courbe normale dans l'analyse, et les tracés d'écarts à la normalité tout en éliminant la tendance linéaire d'une droite de Henry pour rendre plus apparent le défaut d'ajustement.

2.3.5.2- Test de Jarque-Bera

Le test de normalité de Jarque et Bera est fondé sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Il évolue les écarts simultanés de ces coefficients avec les valeurs de référence de la loi normale.

Prenons les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Pearson $\left(\beta_1 = \frac{\mu^3}{\sigma^3}\ et\ \beta_2 = \frac{\mu^4}{\sigma^4}\right)$, la seule différence avec les coefficients de Fisher est que la seconde coefficient n'est pas normalisé, c'est-à-dire $\beta_2 = 3$, pour une loi normale centré réduite.

Supposons que les estimateurs :

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^{2}}$$

La loi conjointe de ces estimateurs est normale, donc on écrit :

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left[\left(\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 24\end{pmatrix}\right)\right]$$

La matrice de variance covariance est une expression simplifiée valable pour les grandes valeurs de n. nous précisons également que la covariance de $\beta_1\ et\ \beta_2$ est nulle. La forme quadratique associée permet de produire la statistique de Jarque et Bera T qui s'écrit :

$$T = n\left(\frac{\beta_1^2}{6} + \frac{(\beta_2 - 3)^2}{24}\right)$$

Elle est distribuée asymptotiquement selon une loi du ki-deux à 2 degrés de liberté, elle prend des valeurs d'autant plus que l'écart entre la distribution empirique et la loi normale est manifeste.

La région critique pour un risque α du test est définie par :

$$RC: T > X^2_{1-\alpha}(2)$$

Tableau 2.9: Test de Jarque Bera pour la normalité des rendements

	Statistique de JB	P-value
ALSTOM	1945,86	2,20E-16
SG	4255,37	2,20E-16
EDF	5114,35	2,20E-16
ORANGE	3768,69	2,20E-16

Tab 2.9-Test de normalité de JB

Dans nos applications, la statistique T de Jarque Bera est largement supérieure à $\chi^2_{0.95}(2)$= 5.99, la distribution observée n'est pas compatible avec une distribution théorique normale.

Dans la suite, nous allons étudier la volatilité conditionnelle en appliquant les modèles GARCH (1.1), GJR-GARCH (1. 1) et EGARCH (1. 1) afin de constater leurs limites de capter l'effet de l'asymétrie et de la dynamique de la volatilité dans les données à haute fréquence.

3- Résultats et discussions

Nous analysons différents aspects de la volatilité des rendements boursiers à haute fréquence. Il s'agit d'abord d'étudier le potentiel explicatif des modèles estimés, Nous étudions en suite successivement la significativité et la pertinence des effets d'asymétrie des chocs de rendements sur la volatilité à haute fréquence. Ainsi s'achève la discussion par une étude détaillée sur les modèles GARCH asymétriques afin de faire un point sur leurs cas limites.

Il faut rappeler que les modèles GARCH sont des modèles paramétriques, en conséquence, ils fonctionnent mieux dans des conditions stables de marché, ils captent difficilement les conditions irrégulières, tels des grandes fluctuations, par exemple, un crash suivi d'un rebond, La variance conditionnelle implique explicitement une dépendance aux observations passées.

D'autre part, l'un des objectifs de la modélisation de la variance est de construire une mesure pour σ_t^2 avec la propriété que les rendements standardisés (au carré) $r_t^2 \ /\sigma_t^2$ ne sont pas autocorrélés. Habituellement l'autocorrélation se manifeste à l'intérieur de la bande de Barlett soit $\pm 2/\sqrt{T}$, quasiment nulle dans 95% du temps.

Dans un premier temps nous allons appliquer le modèle GARCH simple, Le principal inconvénient dans l'application de ce modèle est que sa mise en place requiert l'estimation de plusieurs paramètres non-linéaires. Le modèle de variance dynamique peut se formuler comme :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad avec\ \alpha + \beta < 1$$

La variance non conditionnelle à long-terme est fixée égale à la variance de l'échantillon σ^2 :

$$\sigma^2 \equiv \mathbb{E}[r_{t+1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[r_t^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2],$$

$$= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2, tel\ que$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Le modèle de variance GARCH, implicitement repose sur la variance à long-terme[5].

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

$$= \sigma^2 + \alpha(r_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

La variance de l'échéance passée est la moyenne pondérée de la variance à long-terme.

3.1- Estimation du modèle GARCH (1,1)

Le modèle GARCH (1,1) requiert l'estimation de quatre paramètres$(\mu, \omega, \alpha \; et \; \beta)$. Nous vérifions l'autocorrélation dans la série des rendements avant de passer à l'application de modèle GARCH proprement dit :

$$h_t = \omega + \beta \times h_{t-1} + \alpha \times \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = e_t \times \sqrt{h_t}$$

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

Le paramètre ω simbolise la limite en dessous duquel la volatilité ne peut pas descendre, pour le coefficient α représente l'effet ou l'impact d'un choc sur le rendement. Le paramètre β représente le terme autorégressif du processus, il consiste à expliquer la volatilité instantanée à travers les volatilités passées.

Les modèles GARCH sont classiquement estimés par la méthode d'estimation maximum de vraisemblance. Différentes hypothèses peuvent être retenues concernant les alea antérieurs à ceux de l'échantillon. La plus simple est de supposer qu'ils sont nuls, mais il est plus réaliste de supposer qu'ils sont égaux à leur espérance non conditionnelle.

Nous présentons les estimations GARCH (1, 1) dans le tableau (2.5) suivant :

[5] Pour un traitement plus complet se référer à l'ouvrage de P. Christoffersen

Tableau 2.10: Estimation des paramètres du modèle GARCH (1. 1)

	GARCH (1. 1) Gaussien				GARCH (1. 1) Student				
	ω	α	β	$\alpha+\beta$	ν	ω	α	β	$\alpha+\beta$
ALSTOM	0.0001	0.0741	0.9153	0.9894	-0.0023	0.0003	0.0746	0.9158	0.9904
	[0.7409]	[0.0000]	[0.0000]		[0.8663]	[0.7417]	[0.0000]	[0.0000]	
SG	0.0003	0.0723	0.9058	0.9781	- 0.0008	0.0012	0.0726	0.9049	0.9775
	[0.7999]	[0.0000]	[0.0000]		[0.0000]	[0.7991]	[0.0000]	[0.0000]	
EDF	0.0004	0.0818	0.9056	0.9874	0.0002	0.0017	0.0820	0.9061	0.9881
	[0.8003]	[0.0000]	[0.0000]		[0.0005]	[0.7998]	[0.0000]	[0.0000]	
ORANGE	0.0011	0.0817	0.9058	0.9875	0.0031	0.0021	0.0819	0.9109	0.9928
	[0.8003]	[0.0000]	[0.0000]		[0.0006]	[0.7988]	[0.0000]	[0.0000]	

Tab 2.10- *Estimation des paramètres du modèle GARCH (1, 1)*

Dans le tableau (**Tab 2.10**) ci-haut nous représentons les résultats de l'estimation de paramètres des modèles GARCH (1, 1) avec un bruit blanc gaussien (à gauche) et t-Student (à droite) par la méthode quasi-maximum de vraisemblance pour les séries des rendements logarithmiques intra-journaliers (5 minutes). Le tableau de l'estimation de GARCH (1, 1) montre que les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et positifs. Par conséquent, les coefficients vérifient les contraintes assurant la positivité de la variance.

Le premier terme ω est le coefficient de la volatilité conditionnelle du modèle, il représente le seuil de variance minimal en dessous duquel la variance conditionnelle c'est-à-dire la volatilité ne descend pas. Il est généralement très faible et proche de 0 pour toutes distributions confondues. Le coefficient α est une somme de résidus au carré qui traduit l'impact ou les conséquences des chocs sur la volatilité. Lorsqu'une baisse soudaine (krach) intervient à l'instant t, la valeur des rendements sera en décalage avec sa moyenne, et ainsi donc les résidus sont très élevés.

Le troisième coefficient β représente la somme des variances passées, c'est-à-dire le terme autorégressif du processus qui a pour particularité de calculer ou détecter la persistance de la volatilité. Cette persistance de la volatilité semble très significativement élevée pour toutes les actions, quel que soit la nature distributionnelle des innovations, avec une légère différence entre les 4 actifs étudiés. On peut remarquer aussi un peu partout que la somme

$\alpha + \beta$ est toujours assez proche de l'unité, qui correspond à la limite de stabilité du processus.

Malgré sa performance, le modèle GARCH ne permet pas de tenir compte de l'hypothèse de l'asymétrie de la volatilité à haute fréquence. Pour remédier cette insuffisance ou inefficacité, plusieurs formulations d'extension GARCH ont été proposées dans la littérature en particulier, le modèle Exponentiel GARCH ou EGARCH développé par Nelson (1991). Il a mis en évidence que les mouvements ou fluctuations en baisses et les variations en hausses ont des conséquences différentes sur la dynamique des rendements.

3.2- Estimation du modèle EGARCH

Pour but de résoudre de bien capter la volatilité à haute fréquence, nous allons réorienter notre analyse en intégrant le modèle EGARCH, pour mieux caper le phénomène l'asymétrie dans la dynamique de la volatilité. Nous rappelons que Nelson (1991) a consacré des recherches sur les évolutions asymétriques de la variance, cette recherche a donné naissance au modèle EGARCH. Nous allons intéresser à la modélisation de l'asymétrie de la volatilité en appliquant le modèle EGARCH (1. 1).

L'idée est simple : on suppose que l'impact de l'hétéroscédastitité n'est pas le même en suivant l'erreur précédente, c'est-à-dire les variations peuvent donner de résultats différents. Le modèle EGARCH est l'une des grandes classes de modèles GARCH asymétriques a été proposée par Nelson (1991) s'est intéressé particulièrement aux évolutions asymétriques de la volatilité. Le processus EGARCH donne à la variance conditionnelle la définition suivante :

Définition : un processus ε_t des innovations respectant une représentation EGARCH (p, q) alors le modèle EGARCH s'écrit :

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t}$$

$$log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, g(z_t - i) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, log(h_t - j)$$

Où les résidus normalisés de z_t sont de bruit blanc et où la fonction $g(.)$ vérifie la condition suivante :

$$g(z_t - i) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)$$

Si l'on pose $a_i = \theta\alpha_i$ et $b_i = \alpha_i\gamma$, la variance conditionnelle de ε_t peut donner la forme :

$$lo(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, z_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{b_i}(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, log(h_t - j)$$

Pour un modèle EGARCH (1, 1), nous avons donc la notation suivante:

$$log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-i} + \boldsymbol{b_1}(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) + \sum_{j=1}^{q} \beta_1\, log(h_t - 1)$$

On peut remarquer que :

Remarque 1 : dans l'écriture de la variance conditionnelle h_t du processus ε_t, aucune restriction n'a besoin d'être imposée sur les différents paramètres de l'équation afin d'assurer la positivité de la variance h_t.

Remarque 2 : le terme de la variance conditionnelle h_t fait apparaître un effet de signe, correspondant à $\alpha_1 z_{t-i}$, et un effet d'amplitude mesuré par $b_1(|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|)$.

Nous avons estimé ce modèle pour illustrer la propriété d'asymétrie qui caractérise les séries financières à haute fréquence. Le résultat de l'estimation apparait dans le tableau ci-dessous :

Tableau 2.11: Estimation des paramètres EGARCH (1. 1)

	EGARCH (1. 1) Gaussien				EGARCH (1. 1) Student				
	ω	γ	α	β	ν	ω	γ	α	β
ALSTOM	-1.3013	0.2092	0.0427	0.9081	0.0002	-1.3001	0.2095	0.0442	0.9914
	[0.0000]	[0.0000]	[0.0021]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0034]	[0.0000]
SG	-1.3974	-0.4547	0.0111	0.9001	0.0051	-1.0012	-0.0591	0.0152	0.9019
	[0.0000]	[0.0000]	[0.0021]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0014]	[0.0000]
EDF	-1.0262	- 0.2620	0.0002	0.9279	0.0027	-1.0288	-0.2638	0.0013	0.9281
	[0.0000]	[0.0000]	[0.0001]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]
ORANGE	-1.0940	0.2589	0.0121	0.9236	0.0011	-1.0951	0.0819	0.0139	0.9238
	[0.0000]	[0.0000]	[0.0010]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0014]	[0.0000]

Tab 2.11 - *Estimation des paramètres EGARCH (1. 1)*

Au vu du tableau **2.11**, les paramètres du modèle EGARCH (1.1) sont tous significatifs, mais l'effet d'asymétrie négative persiste. Le résultat de l'estimation montre que pour tous les actifs étudiés, les rendements passés négatifs sont trop volatils que les rendements passés positifs. Il existe une différence légère entre les coefficients des différents actifs.
Malgré sa performance, le modèle EGARCH à son tour ne permet pas de tenir compte de toutes les hypothèses de la dynamique. Donc nous continuons à creuser dans ce sens afin d'aboutir à un résultat meilleur. Pour cela nous allons introduire dans la partie suivante le modèle GJR-GARCH introduit par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) qui donne l'acronyme GJR.

3.3- Estimation du modèle GJR-GARCH

Afin de prendre en compte la modification d'un coefficient selon la survenue d'un évènement de perturbation. C'est l'idée adoptée par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) en partant de l'écriture GARCH (p, q) de base, ont pu apporter l'extension suivante :

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0}\varepsilon_{t-i}^2\right) + \sum_{j=1}^{q}\beta_i\, h_{t-j}$$

Avec z_t représente la variance conditionnelle, $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0}$ désigne la fonction indicatrice lieu aux bruits blancs telle que $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0} = 0$ sinon.
En considérant le cas simple d'un modèle GJR-GARCH (1, 1) tel que :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Ce que l'on peut encore écrire comme :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{pos} \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}\geq 0} \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{neg} \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1}<0} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Permettant de lire directement les coefficients spécifiques afférents aux résidus positifs $\alpha_{pos} = \alpha_1$ ou négatifs, $\alpha_{neg} = \alpha_1 + \gamma_1$.

Nous avons estimé ce modèle GJR-GARCH (1, 1) pour illustrer la propriété dynamique qui caractérise les séries financières à haute fréquence. Le résultat de l'estimation apparait dans le tableau GJR-GARCH (1. 1) ci-dessous :

Tableau 2.12: Estimation des paramètres GJR-GARCH (1. 1)

	GJR-GARCH (1. 1) Gaussien				GJR-GARCH (1. 1) Student				
	ω	γ	α	β	ν	ω	γ	α	β
ALSTOM	0.0001	0.04372	0.05902	0.9067	0.0008	0.0001	0.04570	0.0601	0.9072
	[0.7457]	[0.0000]	[0.0021]	[0.0000]	[0.0189]	[0.7457]	[0.0000]	[0.0034]	[0.0000]
SG	0.0000	0.0026	0.0626	0.9265	-0.0002	0.0000	0.00269	0.0632	0.9268
	[0.8514]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.8514]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]
EDF	0.0000	-0.0043	0.0655	0.9221	0.0017	0.0000	-0.0047	0.0655	0.9226
	[0.8215]	[0.3268]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.8211]	[0.3259]	[0.0000]	[0.0000]
ORANGE	0.0000	0.0111	0.0638	0.9153	0.0022	0.0000	0.0110	0.0631	0.9154
	[0.7391]	[0.0000]	[0.0010]	[0.0000]	[0.0000]	[0.7393]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]

Tab 2.12 - *Estimation des paramètres GJR-GARCH (1. 1)*

La prise en compte de l'asymétrie à l'aide du modèle GJR-GARCH (1. 1) semble encourageante. En effet, la statistique du test joint de symétrie de Angle et Ng est relativement faible dans la plupart des cas, c'est-à-dire nettement inférieur à leur valeur

théorique au seuil de 5%. Il n'y aurait donc pas assez d'asymétrie dans la distribution des résidus. La modélisation de l'asymétrie avec le modèle GJR-GARCH (1. 1) conduit donc à des résultats meilleurs que ces de modèles d'avant (étudiés intérieurement).
On constate que, les résultats de l'estimation par la méthode de Maximum de Vraisemblance sous l'hypothèse d'une distribution de Student sont sensiblement différents de ceux obtenus sous l'hypothèse de normalité de distribution. Ce qui peut mettre en évidence l'influence du choix de la distribution dans la construction des estimateurs de la variance conditionnelle et son espérance conditionnelle aussi.

En outre dans leur version initiale, comme nous l'avons étudié dans la partie précédente, les modèles GARCH Asymétriques de référence ne permettent pas de tenir compte de l'hypothèse d'asymétrie de la volatilité de données financières à haute fréquence de façon complète. Pour corriger ce « défaut », des travaux plus récents ont proposé des extensions de cette approche de façon à tenir en compte de ces effets. Dans la conduite de cette idée, nous étudions dans la partie qui suive de manière empirique l'approche Score-GARCH (1. 1) présentée ultérieurement.

3.4- Estimation de la volatilité à haute fréquence : Score-GARCH

Avec l'objectif d'approfondir notre analyse en introduisant le modèle Score-GARCH qui peut être beaucoup bien précis dans sa capacité de capter l'asymétrie dans la dynamique de la volatilité à haute fréquence. Nous rappelons qu'à travers ce modèle, Hansen et ses collaborateurs(2012) sont intéressés aux évolutions asymétriques de la variance conditionnelle et surtout à la dynamique de la volatilité réalisée à haute fréquence. Nous allons modéliser cette asymétrie de la volatilité à l'aide ce modèle Score-GARCH (1.1) sous différentes distributions à savoir la distribution Gaussiène, la distribution Student et la distribution GED.

Tableau 2.13: Estimation Score-GARCH (1. 1) - distribution Gaussienne

Titres	ALSTOM	SG	EDF	ORANGE
ω	-0.4091	-6.1639	-3.1139	-0.2163
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
α	0.0032	0.0001	0.2965	0.0008
	(0.0000)	(0.9999)	(0.0000)	(0.9787)
β	0.9773	0.6093	0.7030	0.9871
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
γ_1	0.0076	0.0004	-0.0131	-0.0035
	(0.3734)	(0.961)	(0.5050)	(0.6672)
γ_2	-0.0025	-0.0036	-0.5000	-0.0033
	(0.0016)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0008)
δ	0.1000	0.1000	3.3704	0.1000
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
ξ	1.7084	1.7205	0.0011	1.6572
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
LL	228622.8	229577.3	218251.4	214886.9
AIC	-9.9817	-10.023	-9.5288	-9.3819

Tab 2.13-Score-GARCH (1. 1) sous distribution normale

Tableau 2.14: Estimation Score-GARCH (1. 1) - distribution Student

Titres	ALSTOM	SG	EDF	ORANGE
ω	-0.4101	-6.1632	-3.1131	-0.2160
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
α	0.0033	0.0021	0.2966	0.0019
	(0.0000)	(0.9999)	(0.0000)	(0.9787)
β	0.9782	0.6096	0.7130	0.9878
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
γ_1	0.0081	0.0007	-0.0129	-0.0031
	(0.3734)	(0.961)	(0.5050)	(0.6672)
γ_2	-0.0021	-0.0032	-0.5000	-0.0029
	(0.0016)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0008)
δ	0.1000	0.1000	3.3707	0.1000
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
ξ	1.7086	1.7215	0.0018	1.6577
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
LL	228626.1	229571.6	218258.7	214880.7
AIC	-9.9818	-10.124	-8.5289	-9.7811

Tab 2.14-Score-GARCH (1. 1) sous distribution Student

Tableau 2.15: Estimation Score-GARCH (1. 1) - distribution GED

Titres	ALSTOM	SG	EDF	ORANGE
ω	-0.4105	-6.1632	-3.1132	-0.2161
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
α	0.0030	0.0021	0.2965	0.0018
	(0.0000)	(0.9999)	(0.0000)	(0.9787)
β	0.9780	0.6095	0.7129	0.9876
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
γ_1	0.0080	0.0005	-0.0130	-0.0030
	(0.3734)	(0.961)	(0.5050)	(0.6672)
γ_2	-0.0022	-0.0030	-0.5001	-0.0031
	(0.0016)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0008)
δ	0.1000	0.1000	3.3705	0.1000
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
ξ	1.5128	1.6214	0.0017	1.6576
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
LL	22866.5	229521.2	218258.0	214878.4
AIC	-9.9811	-10.141	-8.5273	-9.7848

Tab 2.15-Score-GARCH (1. 1) sous distribution GED

Dans ces formulations β représente le terme autorégressif, α l'effet d'un choc sur les rendements et γ_1 l'impact asymétrique correspondant à l'effet complémentaire ou spécifique d'un choc négatif sur les rendements.

Ainsi on peut aussi dire l'effet d'un choc positif se mesure par le coefficient α et celui d'un choc négative par $(\alpha + \gamma_2)$, dans ce cas de figure on peut supposer que le coefficient γ_1 est positif, comme c'est le cas dans la quasi-totalité de nos résultats. Pour un choc positif, on peut mesurer ses effets en additionnant les coefficients $(\alpha + \gamma_1)$, alors que pour un impact négatif, on peut envisager l'addition des coefficients de la façon suivante $(-\alpha + \gamma_2)$, donc pour ce dernier cas, le coefficient γ_2 prend une forme négative, afin que l'effet d'un choc négatif soit plus fort que celui d'un choc positif.

Le paramètre β (terme Autorégressif) qui représente la somme des variances passées, a pour importance de quantifier la persistance de la volatilité dans la distribution. Ce qui explique, si la volatilité à l'instant t est faible, sa contribution dans la variance conditionnelle à l'instant $t+1$ le sera également, en d'autre terme, il a pour rôle d'expliquer la volatilité présente par la volatilité passé des rendements, ce qui augmente aussi la probabilité d'une variance faible, et réciproquement. Cette persistance semble significativement élevée pour les actifs moins liquides à savoir ALSTOM, EDF et ORANGE, quelle que soit la nature distributionnelle des innovations, avec une différence plus ou moins minime entre les coefficients.

Dans les tableaux (2.11, 2.12 et 2.13) ci-haut, les paramètres du modèle Scor-GARCH (1.1) sont quasiment significatifs, d'autant plus que l'effet d'asymétrie négative existe pour tous les actifs. Cela veut dire que pour tous les actifs financiers étudiés, les rendements passés enregistrent beaucoup de persistance dans son passage aux négatifs, donc ils augmentent plus fortement la volatilité que les rendements passés positifs. Ce constat est remarqué souvent dans la volatilité à haute fréquence, on peut dire même que cela fait partie des propriétés empiriques des séries financières à haute fréquence.

Le terme ω c'est le coefficient de l'équation de la volatilité conditionnelle, il représente la limite de la variance minimale en dessous du quelle la variance conditionnelle ne descende pas. L'importance de cet impact est minime pour l'actif SG par rapport à ALSTOM ou EDF. Cependant, le coefficient α est la somme de résidus au carré quantifiant l'impact des chocs sur la volatilité à haute fréquence, ce coefficient donne des valeurs empiriques assez élevés pour toutes les distributions des actifs étudiés. Lors d'une baisse considérable (krach) à l'instant t, la valeur du coefficient α des rendements est très différente de sa moyenne, et ainsi pour les résidus est grande aussi.
Au vu des tableaux ci-dessus, nous pouvons remarquer que certains baisses considérables (krach) ont impacté significativement la volatilité résultant de l'actif ORANGE, tandis que moins manifester pour les autres valeurs. Il est de 0.0018 pour l'actif ORANGE pour une distribution GED, et de 0.029 pour l'actif EDF pour la même distribution..

En termes de comparaison, parmi les quatre modèles EGARCH, GJR-GARCH et Score-GARCH asymétriques étudiés, c'est le modèle Score-GARCH qui apparait comme une généralisation naturelle des extensions GARCH asymétriques traditionnelles. Alors que

pour le modèle GJR-GARCH porte en effet sur la variance conditionnelle, tant disque pour le modèle EGARCH porte sur le logarithme de la volatilité conditionnelle.

Comme autre indicateur, on retient par fois le degré d'asymétrie relative défini par $\frac{\alpha+\gamma_2}{\alpha}$ par les modèles EGARCH et GJR-GARCH et par $\frac{\alpha-\gamma_2}{\alpha+\gamma_1}$ pour le modèle Score-GARCH. Il peut simplifier la comparaison des effets d'asymétrie pour un modèle donné, lorsque les paramètres estimés $\alpha\ et\ \gamma$ sont significativement différents de zéro. En revanche, les degrés d'asymétrie ne sont pas directement comparables d'un modèle à un autre car ils ne portent pas sur le même directif. Toutefois, ils permettent de comparer les asymétries relatives des différents actifs financiers au sens où on peut définir et rapprocher des hiérarchies (degré d'asymétrie la plus forte vers la plus faible) déduites de différentes approches.

Pour visualiser davantage ce phénomène de volatilité, nous avons estimé l'impact des chocs que-ce-soient positifs ou négatifs sur le processus de la volatilité des rendements à haute fréquence, pour les différentes actifs de notre étude. Nous rappelons que l'effet d'un choc positif peut se mesurer par la somme des coefficients $(\beta+\gamma_1)$ et celui d'un impact négatif par la différence des paramètres $(\beta-\gamma_2)$. Au vue les résultats de nos quatre actifs financiers à haute fréquence, on peut dire que le modèle Score-GARCH (1. 1) avec une distribution des innovations suivant une loi GED est le mieux adapté pour analyser l'asymétrie de la volatilité, c'est-à-dire que ce modèle capte mieux le phénomène de l'asymétrie, il est robuste et efficace en terme de ses résultats.

On peut tirer de cette étude que le modèle Score-GARCH permet de réduire les queues épaisses c'est à dire la leptokuricité (voir Annexe 2) des distributions observées dans les séries financières à haute fréquence, d'une manière plus robuste que les modèles de référence (GARCH, EGARCH et GJR-GARCH) étudiés précédemment. Ce modèle à la capacité de réduire le comportement dit à la haute fréquence (c'est-à-dire le très volatile).

Le modèle Score-GARCH a pu résoudre le problème de faits stylisés (l'absence d'autocorrélation, l'hétéroscédasticité…).

Par ailleurs, selon les statistiques de Ljung-Box calculées avec les résidus, l'hypothèse d'autocorrélation est acceptée au seuil de 1% pour ALSTOM, EDF, ORANGE et au seuil de 5% pour SG. En Revenge, en estimant ces mêmes statistiques avec les carrés des innovations, l'hypothèse d'hétéroscédasticité ne peut être acceptée que pour SG, et dans

une moindre mesure pour EDF. Dans la plupart des cas, le modèle Score-GARCH semble approprié pour rendre compte de l'essentiel de l'hétéroscédasticité.

Le test du rapport de vraisemblance relative à l'hypothèse de nullité jointe des coefficients α et β monte clairement que le modèle Score-GARCH domine largement les modèles de référence (EGARCH et GJR-GARCH). Par conséquent, la dynamique de la volatilité de nos valeurs financières à haute fréquence est mieux tracer par l'approche Score-GARCH. L'introduction du modèle Score-GARCH a permis d'améliorer les résultats de l'estimation initiale. Donc on peut dire que c'est un nouveau résultat qu'on peut l'ajouter dans l'analyse des marchés financiers à haute fréquence.

Conclusion

Notre recherche dans ce chapitre se concentré sur la modélisation de la volatilité des quatre actifs financiers à haute fréquence. L'objectif est d'appliquer de nouvelles techniques pour estimer la volatilité à haute fréquence, et d'apporter une contribution dans le sens d'améliorer les techniques économétriques d'estimation et de prévision de la volatilité à haute fréquence.

Les résultats réalisés dans ce chapitre permettent de mettre en évidence un certain nombre de résultats concernant la volatilité des données financières à haute fréquence. On retrouve les principaux résultats obtenues par les modèles GARCH classique que nous appelons modèles de référence (GARCH, EGARCH et GJR-GARCH). Il apparaît clairement que le résultat obtenu par le modèle Score-GARCH ouvre très nombreux horizons tant à un niveau théorique (troncature, propriétés.) qu'a un niveau empirique (estimation des paramètres, mesurer la volatilité réalisée …).

Tout d'abord, les rendements de nos actifs financiers à haute fréquence semblent autocorélés ; ils sont décrits par une distribution à queue plus épaisse. En outre, rendre endogène la volatilité conditionnelle est indispensable, du fait de la forte hétéroscédasticité des données. Dans la plupart des cas, l'estimation des modèles GARCH asymétriques de référence a permis d'éliminer l'hétéroscédasticité conditionnelle, l'autocorrélation et la mémoire longue des innovations standardisées.
Nous avons constaté que sous le modèle Score-GARCH, les actifs financiers à haute fréquence étudiés capturent presque la totalité de faits stylisés observés empiriquement. Nous pouvons dire aussi que le modèle Score-GARCH est d'un grand intérêt en finance puisque, comme nous avons constaté dans ce chapitre, il reproduit de façon très efficace la quasi-totalité des faits stylisés soulignés. En extrapolant les résultats de quatre actifs échantillonnés, L'étude a montré que le marché financier français n'était pas à l'abri de risque conduisant aux situations de crise financière.

En général, il est nécessaire de recourir à un modèle prenant en compte les effets d'asymétries, c'est-à-dire autorisant une différentiation de l'impact des chocs sur la volatilité selon leur nature (positifs ou négatifs). En effet, un choc négatif se traduit, systématiquement par une augmentation plus forte de la volatilité qu'un choc positif sur

tous les actifs, sauf pour SG (peut-être la raison de sa liquidité) pour lequel l'isolement d'un effet asymétrique ne semble pas pertinent. En outre la représentation la plus adaptée de l'asymétrie et la dynamique de la volatilité de données à haute fréquence est celle du modèle Score-GARCH, qui prend en compte l'asymétrie des fortes volatilités ou effets des chocs, d'une manière semblable mais très efficace que d'un modèle de type EGARCH, il fournit une analyse des chocs immenses de volatilité manifesté sur les distributions des actifs financiers à haute fréquence. L'approche Score-GARCH a dominé largement le modèle GJR-GARCH fondé sur la modélisation de la variance conditionnelle. Tandis que le modèle EGARCH souvent retenu pour l'étude de l'asymétrie, est dominé à son tour par le modèle GJR-GARCH sur les marchés boursiers français à travers nos études. Le modèle EGARCH a des lacunes sur le faite qu'il ne rend pas compte de façon satisfaisante des évolutions observées sur les données à haute fréquence. Et ce le même constat pour le modèle GJR-GARCH aussi.

Le niveau élevé de kurtosis, par rapport à celle de la loi normale, n'est pas pleinement expliqué par l'existence d'une volatilité conditionnelle variant au cours du temps. Il s'est avéré nécessaire de supposer que les innovations standardisées suivent une loi dotéé d'une kurtosis plus forte que celle de la loi normale. Avec une Student par exemple, on obtient un paramètre proche de 1, ce qui correspond à une loi normale. On obtient un résultat similaire avec la loi de GED, cependant dominée par la loi Student. En particulier, pour certains actifs, dans le cas de la loi GED on se retrouve confronté à la non-stationnarité de la variance conditionnelle. En outre, la vraisemblance obtenue à partir de la loi de Student est quasi systématiquement inferieur à celle obtenu à partir de la loi GED par exemple. La domination de la Student ne peut donc pas être remise en cause.

L'étude de la volatilité à haute fréquence présente un intérêt important dans sa manière où elle permet d'apporter d'estimations efficaces des risques des actifs et portefeuilles à haute fréquence. Il est donc important de mesurer avec la meilleure précision la volatilité découlée des rendements à haute fréquence.
De ce fait, il est possible voir même important d'utiliser ces résultats pour l'analyse de risque, nous allons étendre alors notre champs d'étude dans le chapitre suivant sur la prédiction de risque pour mieux appréhender l'analyse de risque financier à haute fréquence et les implications sur la valeur des actifs financiers à haute fréquence et la fréquence d'occurrence de ce risque (probabilité). Cette réalité a créé le besoin d'une

mesure regroupant à la fois la probabilité et l'impact potentiel d'un certain risque. La Value-at-Risk (VaR), qui intègre ces dimensions de l'analyse, est un indicateur très répandu sur les marchés financiers, pour des nécessités réglementaires et aussi pour l'amélioration de la gestion des actifs en offrant une mesure de risque complète et fiable.

CHAPITRE III :

Modèle Score-GARCH et Mesure de la Value-at-Risque sur données à Haute Fréquence

INTRODUCTION

A la suite des multiples crises financières de ces dernières décennies, les institutions financières ont proposé des cadres réglementaires et des indicateurs pour prévenir les crises et leurs effets. Pour cela, l'accent a été particulièrement mis sur la mesure des risques non-diversifiables et ceci dans la nécessité de bien comprendre les possibles implications sur la valeur des actifs (sévérité du risque) et la fréquence d'occurrence de ce risque (probabilité). Cette réalité a créé le besoin d'une mesure regroupant à la fois la probabilité et l'impact potentiel d'un certain risque. La Valeur-en-Risque (*VaR* en anglais pour *Valueat- Risk*), qui intègre ces deux dimensions de l'analyse, est un indicateur très répandu sur les marchés financiers, pour des nécessités réglementaires et aussi pour l'amélioration de la gestion des portefeuilles en offrant une mesure de risque complète et fiable.

La VaR se définit comme la perte maximale attendue à un horizon temporel donné associé à un niveau de confiance donné. Le but de l'utilisation de la VaR est de fournir une estimation dynamique et concrète du risque d'un actif ou d'un portefeuille financiers. Afin de réalisé ce but, il faut avoir un cadre assez général pour s'adapter à des changements de conjoncture et structures dues aux variations des facteurs de risque associés. Le concept de VaR a été popularisé par les amendements du comité de Bâle de 1996 sur les risques de marché dans le cadre du capital de normalisation.

Les autorités administratives en charge de surveillance donnent la possibilité aux banques d'utilisé leurs propres techniques internes de calcul de la VaR pour leurs demandes en capitaux de normalisation comme alternative à la méthodologie conventionnelle. Depuis, cet indicateur est devenu très utile pour le contrôle interne de chaque banque et des gérants de portefeuilles. Celui-ci offre en effet une possibilité supplémentaire d'évaluer et de maitriser l'exposition des placements aux aléas de la conjoncture économique ou des marchés.

En dépit de sévères critiques sur la fiabilité de la mesure, l'utilisation systématique de la VaR a donné un effet positif global sur la qualité de sa manière de gérer le risque dans les institutions financières, intégrant ainsi le degré croissant de complexité des instruments d'investissement au cours des dernières années. Sur le plan académique de recherche, depuis les propositions du cadre réglementaire du Comité de Bâle, la littérature financière sur les mesures et l'évaluation des risques financiers s'est accentuée.

Ces méthodes de calcul de VaR sont le plus souvent utilisées pour des fréquences d'observation journalières, hebdomadaires, mensuelles voire annuelles. Mais, étant donné la disponibilité de nouvelles bases de données plus complètes (données de transactions), une littérature récente propose des modèles de gestion des risques financiers utilisant des données intra-journalières pour des mesures de risque plus sensibles aux mouvements des marchés, voir Dacorogna et al (2001) et Rydberg et Shephard (2003).
Ces données de haute fréquence présentent l'avantage d'être proches du « vrai » processus générateur des prix. Toutefois, la non-linéarité et la non-gaussianité sont des caractéristiques spécifiques de ce type de données, voir McNeil et Frey (2000) et Härdle et al (2003). Pour cela, les moments d'ordre un et deux ne peuvent pas satisfaire à caractériser les facteurs qui influencent les mouvements de prix. La technique de modélisation GARCH que nous appelons modèles de référence, entraîne ainsi une perte d'information lorsque des données financières à haute fréquence sont considérées. Dans ce cas, nous proposons une modélisation Score-GARCH (1, 1) qui semble être une technique plus appropriée.

Nous utiliserons plusieurs mesures d'évaluation du risque d'un titre à partir des distributions homogènes. Il s'agit de la VaR gaussienne (caractérisée par la moyenne et l'écart-type des rendements du titre), de la VaR Historique (percentile des bénéfices ou pertes historiques de l'action) et la VaR conditionnelle (les rendements du titre suivent des distributions résultant d'un processus conditionnelle). Les mesures de VaR seront appliquées sur des données issues d'une modélisation Score-GARCH à haute fréquence.

Pour comparer et analyser la fiabilité des différentes mesures alternatives de VaR proposées, plusieurs procédures de backtesting ont été envisagées. Nous utilisons dans la suite le test de l'intervalle de confiance de Christoffersen (1998) qui est lié au ratio de vraisemblance; il teste conjointement si la proportion d'échecs est conforme à ce qui est anticipé et si les exceptions (échecs dans la prévision) sont indépendantes de toutes autres influences.
Dans ce chapitre, nous partirons de l'idée que si la VaR n'est pas nécessairement une mesure cohérente du risque, elle n'en est pas moins une mesure pertinente. À ce moment, on s'interroge d'abord sur les méthodes d'estimation et de prévision de la VaR. Puis sur la méthode du backtesting ou à l'évaluation de la qualité prédictive des modèles d'estimation de la VaR.

1- Méthodologie

L'évolution des marchés financiers au cours des dernières années a connu l'émergence d'un nouveau type de participants caractérisés par des horizons d'investissements assez courts. Cette évolution est notamment favorisée par l'informatisation des plateformes de trading sur l'ensemble des grandes places financières qui rend aujourd'hui possible la collecte, le traitement et la diffusion de l'information en temps réel de données à haute fréquence. Pour ces nouveaux agents économiques le risque de marché pour l'ensemble des positions ouvertes doit être évalué à très court terme, en minute ou voir même en secondes.

Il existe plusieurs méthodes économétriques permettant de modéliser les queues épaisses des distributions des rendements financiers. Nous souhaitons vérifier si, dans la pratique, notre modèle Score-GARCH (1. 1) permet une estimation précise des risques liés aux queues de distribution. Nous allons donc s'intéresser à la mesure du risque d'un actif financier à haute fréquence ou à la Valut-at-Risque à haute fréquence. Cette mesure est fortement liée aux quantiles élevés de la distribution des pertes: une estimation précise de ces quantiles est donc nécessaire pour mesurer son risque de manière réaliste. De plus, la réglementation Bâle impose aux institutions financières de contrôler quotidiennement leur risque de marché et de mettre en provision un montant proportionnel à leur Valeur-à-Risque. Estimer précisément cette Valeur à-Risque est donc une problématique essentielle pour les institutions financières.

Dans cette section, nous donnons les définitions formelles des mesures de risque de marché et nous étudions les propriétés et la règlementation de la Valeur-à-Risque à haute fréquence.

1.1- Types de risques mesurés par la Value-at-Risque (VaR)

La Value-at-Risque permet de mesurer différents risques, sur différents marchés financiers des changes ou des produits dérivés, et pour différents actifs à risque qui peuvent être actions, obligations, options, etc.

En effet, la diversification d'un portefeuille de titres ou d'actifs permet en variant les types de placements, soit de réduire le risque pour un niveau de rentabilité donné, soit d'améliorer la rentabilité pour un niveau de risque donné. Pour un groupe par exemple, la diversification permet de réduire le risque de volatilité des résultats.

1.1.1- Mesures de risque

Soit $(\Omega; \mathcal{F}; \mathcal{P})$ un espace probabilisé, et G un ensemble de variables aléatoires (v.a.) $\mathcal{F}$-mesurables à valeurs réelles. Supposons que l'on dispose de N actifs financiers. Définissons R comme étant le vecteur aléatoire des rendements sur une période future donnée, dont la i-ième composante R_i est le rendement aléatoire de l'actif i sur cette période, $i \in \{1; \dots; N\}$. Usuellement, on considère des périodes d'une journée, mais dans notre cas, R est le vecteur des rendements intra-journaliers.

Définition 1: Soit $(\Omega; \mathcal{F}; \mathcal{P})$ un espace probabilisé et G un ensemble non vide de variables aléatoires dont les valeurs réelles $\mathcal{F}$-mesurables. On appelle mesure de risque toute fonction $\boldsymbol{\rho} : G \to R$. Artzner et al. (1999) définissent formellement quatre propriétés qu'une « bonne » mesure de risque (ou, pour reprendre leur nomenclature, une mesure de risque cohérente) doit vérifier certains propriétés:

La première de ces propriétés, l'invariance par translation, traduit le fait qu'en ajoutant (resp. en retirant) une quantité α d'argent (quantité qui n'est donc soumise à aucun risque de marché), on réduit (resp. augmente) le risque global du portefeuille d'exactement cette quantité α.
La propriété suivante, la sous-additivité, est une caractéristique importante, si ce n'est essentielle, pour une mesure de risque : elle assure que la fusion de deux actifs ne crée pas de risque additionnel, mais qu'au contraire peut conduire à une réduction du risque global par diversification. La violation d'une telle propriété peut aboutir à des comportements pathologiques. On pourrait en effet décider de diviser une société ou une action en deux entités pour diminuer artificiellement le risque.

La troisième propriété[6], l'homogénéité positive, est une conséquence de la difficulté à liquider rapidement de larges actions. En effet, pour ce type d'actions, la taille des positions peut directement influer sur le risque global à travers le risque de liquidité, et une bonne mesure de risque devrait être capable de prendre en compte un tel risque additionnel.

[6] Pas réalisable simultanément avec les précédentes

Enfin, la dernière propriété, la monotonie, est une caractéristique naturelle pour une mesure de risque : si un actif A génère presque sûrement, dans n'importe quelle situation, de meilleurs rendements qu'un actif B, il semble normal de considérer l'actif A comme étant moins risqué que l'actif B.
D'abord, nous allons passer en revue les différentes notions de risques (voir chapitre I pour les détails) afin de les appréhender dans nos applications.

a. Définition de risque

Tout dépend du contexte étudié, la notion de risque est difficile à concevoir. Dans un contexte général, nous parlons de risque pour traduire une exposition à un danger. En finance, on peut interpréter ce risque à une perte probable de valeur financière. Tout le monde désire connaître quel montant il peut perdre, qu'il s'agisse d'un trader de Wall Street, d'une banque ou encore d'un simple épargnant dans un marché.
La mesure de risque ou Value at Risk est utilisée donc pour mesurer un risque de marché sur une position, pour mesurer un risque d'un portefeuille ou encore utilisée pour déterminer les fonds propres que la banque a besoin pour se couvrir.
La VaR mesure donc différents risques financiers, on peut les classer en quatre catégories: d'abord les **Risques de marché**, sont les pertes éventuelles dues aux fluctuations de valeur d'une position suite au changement des facteurs déterminant de son prix.

Afin de limiter les risques de marché, les accords de Bâle II contraignent les banques à utiliser la value-at-Risque afin de déterminer le montant exact à couvrir. Et en fin les **Risques de liquidité,** sont composé du risque de liquidité d'actifs ou asset liquidity risk en anglais et du risque de liquidité de financement ou cash-flow risk en anglais. Le risque de liquidité est la probabilité de ne pouvoir liquider à son prix un titre financier.

A présent que nous avons défini formellement les concepts (mesures de risque, et les différents termes de risque), nous allons, à travers une présentation de la réglementation Bâle concernant le risque de marché, voir pourquoi la Valeur-à-Risque est une quantité importante pour les institutions financières.

b. Environnement réglementaire

Le Comité de Bâle et la Banque des Règlements Internationaux (BRI). Sont les deux organismes de réglementation et de contrôle font autorité dans le domaine de la réglementation du Risque management concernant la solvabilité des banques en tant que principales gestionnaires de portefeuilles.

Il est créé en 1974, par les gouverneurs des banques centrales de dix grandes puissances économiques (G10) et de la Suisse. Le Comité de Bâle est conçu pour assister l'administration publique afin d'améliorer les surveillances et toute autre usage de communication dans le domaine financier.
Le fonctionnement du comité est en accord avec les conditions fixées, donc mêmes si les perspectifs du comité sont larges. On définit, via une brève la réglementation de Bâle II concernant le risque de marché, voir pourquoi la Valeur-à-Risque est une quantité importante pour les institutions financières.

c. Les accords de Bâle

Chacune des recommandations du Comité de Bâle composée de plusieurs organes, toutefois, elles se focalisent sur sa mission principale, qui est le ratio de fonds propres.

L'un des principes posés par Bâle I est d'imposer un rapport minimum entre les fonds propres dont dispose une banque et les risques qu'elle porte sur les marchés ou sous forme de crédits à ses clients particulier. En 1988, Bâle I a adopté la condition d'avoir un ratio minimum de 8% entre ces deux indicateurs. En 1996, une révision de l'Accord intègre les risques de marché en complément du risque de crédit, s'appelle Bâle II.

En 2004, une adaptation de Bâle II a été opéré, vu la complexité des évolutions du métier bancaire. Le comité de Bâle II a notamment cherché à définir un cadre plus complet dans l'appréciation des risques bancaires réels, à rapprocher le capital réglementaire du capital économique, et à inciter au développement d'un modèle interne de gestion des risques. On peut les développer en points suivant :

Le pilier I des accords de Bâle II impose aux banques de détenir, à tout instant, une quantité minimale de fonds propres proportionnelle à leur exposition au risque de marché. Les banques ont le choix entre deux approches pour déterminer leur risque de marché :

- une approche standardisée, où les actifs des portefeuilles sont classés en différents groupes selon la nature de l'actif et la qualité de l'émetteur, chacun de ces groupes se voyant ensuite associé un certain niveau de risque ;
- une approche par modèle interne où chaque banque, en appliquant un modèle qui lui est propre, va tenter de déterminer de manière plus fine le risque de marché auquel elle fait face.

Pour pouvoir utiliser l'approche par modèle interne, une banque doit disposer d'un processus de gestion des risques vérifiant certaines conditions quantitatives et qualitatives fixées par le Comité de Bâle. En particulier, le service de contrôle des risques doit être indépendant des services de trading, produire des rapports de risque quotidiens, définir des limites d'exposition au risque, et également réaliser un programme régulier de backtesting de ses méthodes d'évaluation du risque.

Le Comité de Bâle a pour mission aussi d'encourager les banques à utiliser l'approche du modèle interne, et la plupart des grandes institutions financières ont adopté cette recommandation. Dans le cadre du modèle interne, la mesure de risque utilisée est la Valeur-à-Risque (VaR) à 99% à horizon 10 jours. Cette Valeur-à-Risque doit être calculée quotidiennement, sur un historique de rendement d'au moins un an. Le Comité de Bâle n'impose pas de méthode particulière pour calculer cette VaR, mais en décrit explicitement trois :

- le modèle Variance/Covariance;
- la méthode historique : on considère les rendements journaliers de l'historique considéré comme autant de scénarios possibles, et on valorise le portefeuille à partir de ces scénarios pour en déduire la VaR souhaitée ;
- la méthode par simulations de Monte-Carlo : les scénarios d'évolution du portefeuille sont ici générés par des simulations de Monte-Carlo.

En outre, les accords de Bâle n'empêchent pas de choisir une autre méthode d'estimation de la Valeur à Risque. Dans tous les cas, le modèle utilisé, ainsi que le processus de contrôle des risques mis en place, devront être validés par l'autorité de contrôle dont dépend la banque.

Accords de Bâle III : En réponse à la crise financière globale ayant débuté durant la moitié de l'année 2007, le Comité de Bâle (Basel Committee on Banking Supervision (2009)) a proposé en juillet 2009 de nouvelles règles pour calculer le montant minimal de fonds propres que les banques doivent détenir pour faire face à leur risque de marché. Ces nouvelles règles, qui prennent place dans le cadre des accords de Bâle II, ont été mises en application fin 2010.

Notons C_t le capital minimal requis à une date t. La règle de calcul de Bâle II originale et celle de la révision de juillet 2009 sont les suivantes :

$$C_{pr-2009,t} = Max\left(VaR_{t-1}, m_c * VaR_{Avg}\right) \quad (1)$$

$$C_{2009,t} = Max\begin{pmatrix} VaR_{t-1}, m_c \\ * VaR_{Avg} \end{pmatrix} + Max\left(sVaR_{t-1}, m_c * sVaR_{Avg}\right) \quad (2)$$

VaR_{t-1} représente la Valeur-à-Risque à 99% à horizon 10 jours du portefeuille considéré, calculée la veille. VaR_{Avg} correspond à la moyenne des Valeurs-à-Risque calculées sur les derniers 60 jours ouvrés.

L'historique utilisé pour calculer ces Valeurs-à-Risque devra obligatoirement être supérieur à douze mois consécutifs.

La révision de juillet 2009 a rajouté l'obligation de calculer des Valeurs-à-Risque stressées notées SVaR. Ces sont toujours des VaR 99% sur 10 jours, mais calculées sur un historique de douze mois consécutifs (soit une année) représentant une période de stress financier, période pertinente par rapport aux facteurs de risque auxquels est soumis le portefeuille considéré. Cette période de stress doit être validée par l'autorité de contrôle. Une période pertinente pour la majorité des portefeuilles serait, par exemple, celle s'étendant de 2007 à 2008 où d'importantes pertes, sur l'ensemble des actifs financiers, ont été enregistrées.

Les facteurs multiplicatifs mc et ms sont définis au cas par cas par l'autorité de surveillance, mais sont au minimum égaux à 3. Pour déterminer ces coefficients, l'autorité de surveillance se base sur les backtestings des précédentes Valeurs-à-Risque calculées par la banque. Ainsi, plus une banque est capable de fournir des mesures précises de son risque, plus ses coefficients mc et ms seront bas et moins le montant de fonds propres

exigé sera élevé. Ainsi, pouvoir quantifier précisément la Valeur-à-Risque d'un portefeuille est un enjeu important pour les institutions financières.

1.1.2- Approche Value-at-risque (VaR)

Pour évaluer l'impact de risques sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille, il est utile d'utiliser une mesure regroupant à la fois la fréquence et l'effet potentiel d'un risque. La Valeur en risque généralement connue sous le nom anglais Value-at-Risque ou VaR est un outil très répandu dans les marchés financiers dû à sa quasi- nécessité réglementaire et à sa promesse implicite d'améliorer la gestion des risques en offrant une mesure complète des risques. La VaR est la perte potentielle maximale, à l'intérieur d'un intervalle de confiance donné, supportée par un établissement ou un particulier sur son portefeuille ou sur son actif financier de positions, dans l'hypothèse d'un évènement défavorable de marché sur un horizon de temps déterminé.

La Value-at-Risque présente l'avantage indiscutable d'être claire et simple à interpréter. Elle permet d'obtenir une vision globale du risque en l'exprimant sous la forme d'une seule valeur, correspondant à la perte maximale encourue. Cependant, cette mesure de risque ne donne aucune information sur la sévérité de la perte, dans le cas de son utilisation pour l'évaluation de rendements des actifs financiers. Elle ne permet pas de connaître l'ampleur des pertes extrêmes au-delà de la Value-at-Risque.

Ainsi, deux positions, que ce soit des portefeuilles dans le cas d'une approche bancaire, ou des centres de profit dans le cas d'une approche autre que le marché financier, peuvent avoir la même Value-at-Risque, et cependant des risques extrêmes complètement différents.

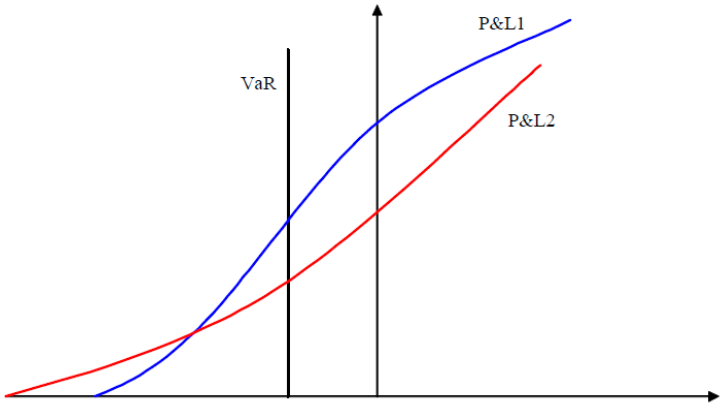


Fig 3.1*- Pertes extrêmes au-delà de la VaR*

Cette mesure de risque peut donc entraîner des agents à prendre de mauvaises décisions d'investissement ou à prendre volontairement plus de risques. Autrement dit, la Value-at-Risque d'un actif financier ou d'un portefeuille est la perte maximale attendue, peut être définie en unité monétaire sur une période donnée et à un seuil de probabilité fixé, sous les conditions normales du marché. Par exemple pour une $VaR_{95\%}$ = 3%, alors dans 95% des cas le portefeuille subira une perte inférieure à 3%.

Quantiles

Avant de définir économétriquement la Value-at-Risque, on étudie d'abord la présentation théorique des quantiles d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire et $\in]0,1[$. Le quantile supérieur d'ordre α de X, noté $q^{\alpha}(X)$, est définit par :

$$q^{\alpha}(X) = inf\{x \in \mathbb{R}: Pr[X \leq x] \geq \alpha\}$$

Le quantile inférieur d'ordre α de X, noté $q_{\alpha}(X)$, est défini par

$$q_{\alpha}(X) = inf\{x \in \mathbb{R}: Pr[X \leq x] > \alpha\}$$

La réciproque est également vraie. Cette propriété est vérifiée en particulier quand la distribution de X est continue.

1.1.3- Utilité de la VaR

La VaR est une méthode de quantification du risque du marché en unité monétaire reliés avec une probabilité et un horizon temporelle.

a- Contextes d'utilisation de la VaR

La VaR est créé et utiliser d'abord en premier par les institutions financières puis par les régulateurs du marché mais aussi par les entreprises non financières. les règlementaires doivent évaluer ces risques financiers afin d'imposer aux institutions financières un seuil minimal de capitaux disponibles. D'autres par, la gestion des risques est utile à toute entreprise exposée à des risques financiers. Les entreprises non financières, comme les multinationales par exemple, utilisent quant à elles la VaR pour se protéger contre le risque de change. La VaR peut donc être utilisé :

- de façon passive de rapport des risques : L'objectif est de mesurer un risque agrégé (la 1ère utilisation par la banque JP Morgan). C'est une mesure du risque simple à interpréter car elle s'exprime sous forme d'un montant maximal de perte, et elle permet de synthétiser en une seule mesure une appréciation sur le risque global.
- de façon défensive ou contrôle des risques : l'idée principale est de déterminer des positions limites à ne pas dépasser, qui seront imposées aux traders ou aux business units. Au-delà de ces limites, il n'est plus possible de prendre une position sans l'autorisation d'un responsable risque. Cette méthode vise à limiter la prise de risque au-delà d'une limite acceptable. Pour être pertinent, le contrôle des risques doit être beaucoup plus général. Les développements informatiques associés, sont donc des applications dites souvent complexes, regroupant beaucoup des informations en provenance de tous les centres d'activités financiers.
- de façon active ou management des risques : La VaR est utilisée dans l'allocation du capital entre les tradings, les business lines, les produits et ou les institutions financières.

A titre d'exemple: Réglementation prudentielle Bâle II et capital réglementaire ; La réglementation Bâle II autorise les banques à déterminer leur capital nécessaire pour répondre au risque de marché par un modèle interne utilisant la VaR (99%, 10j). Le capital réglementaire exigé vaut généralement trois fois la VaR (99%, 10j).

b- Les paramètres de la VaR

La VaR d'un actif financier correspond au montant de pertes maximum sur un horizon temporel donné et avec un niveau de confiance choisi. Elle est caractérisée par les trois paramètres suivants :

1- Le niveau de confiance choisi ou le seuil de probabilité s'élevant à 95% ou 99%.

2- L'intervalle du temps ou l'horizon temporel choisi.

c- Calcul de la VaR

La Value-at-Risque à l'origine c'est un calcul de probabilité. Ces modèles de probabilités sont des lois mathématiques qui permettent d'attacher des probabilités à des variables aléatoires. Ces modèles sont compliqués et n'ont pas besoin d'être maîtriser pour comprendre et calculer une VaR, c'est la raison pour laquelle nous nous limitons sur cette présentation.

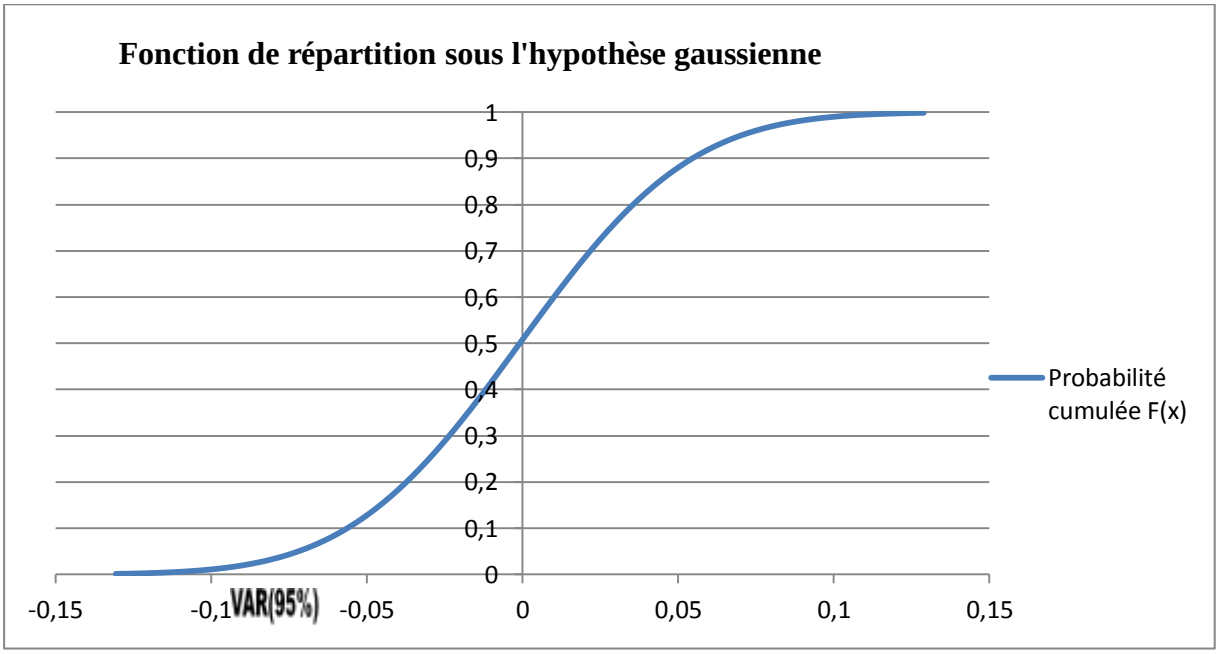


***Fig 3.2**- VaR d'un fractile de la distribution des P&L*

Dans sa définition usuelle, la Value-at-Risque à un niveau de probabilité α, notée VaR_{α}, est la perte maximale que pourra subir une action avec une probabilité α. En termes économétrique, la définition de la VaR est la suivante :

Soit X une variable aléatoire et $\alpha \in]0,1[$. La Value-at-Risque de X au niveau α, notée VaR_α, est définie par :

$$VaR_\alpha = q_\alpha(X)$$

En d'autre terme : la Value-at-Risque au seuil de confiance de $1-p$ (prévue en t pour la date $t+1$ et notée $VaR_{t+1\,|t}(p)$) est par définition égale au quantile d'ordre p de la distribution conditionnelle des rendements $f\,(r_{t+1}\,|v_{t+1}, \mathcal{F}_t, \delta_r)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{VaR_{t+1\,|t}(p)} f\,(r_{t+1}\,|v_{t+1}, \mathcal{F}_t, \delta_r)dr = p$$

Où de manière équivalente

$$Pr[r_{t+1} < VaR_{t+1\,|t}(p)\,|\mathcal{F}_t] = p$$

La méthodologie de l'estimation que nous proposons pour le calcul de la $VaR_{t+1\,|t}(p)$ est la suivante : Nous proposons une méthode de prévision VaR pour les séries financières hétéroscédastiques en appliquant la modélisation GARCH sur les données à haute fréquence. La queue de distribution des résidus standardisés est modélisée en recourant au modèle Score-GARCH (1, 1). Cette méthodologie est illustrée comme suit :
Dans le cadre du modèle Score-GARCH (1, 1), étudié dans la 2ème section du chapitre précèdent, la volatilité $\sigma[t,m,h]$, sachant le passé, est déterministe. Nous avons

$$\Phi_\varepsilon\left(\frac{-VaR_P[t,m,h]}{\sigma[t,m,h]}\right) = p$$

Ça va nous conduit à la relation suivante

$$VaR_P[t,m,h] = -\sigma[t,m,h]{\Phi_\varepsilon}^{-1}(p)$$

Où $\Phi_{\varepsilon}^{-1}(p)$ est le quantile de la loi de probabilité de la variable $\varepsilon[t, m, h]$.

Usuellement, on précise l'horizon temporel de la Value-at-Risque. Si X représente les rendements d'un titre pour une période de k jours (k points de toutes les 5 minutes dans notre cas), on parlera de « Value-at-Risque à horizon k (intra-journalier) ». Il est possible d'avoir un actif ayant une distribution de rendements très asymétrique et pour lesquels la VaR ne respecte pas la propriété de sous-additivité. Par conséquent, la Valeur-à-Risque n'est pas une mesure de risque cohérence pointue au sens stricte du terme.

1.2- Estimation de la VaR

Dans cette sous-section, nous allons présenter différentes techniques d'estimation de la Value-at-Risque. Ces différentes méthodes se répartissent en 3 catégories : les méthodes d'estimation paramétriques, les méthodes d'estimation non paramétriques et les méthodes d'estimation semi-paramétriques. Une telle présentation est importante, elle permet de donner des idées générales sur les différentes méthodes, même si toutes ne seront pas mises en pratique dans cette étude. Cependant il existe aussi des batteries de modèles plus complexes qui s'adressent davantage à un public scientifique.

1.2.1- Estimation paramétrique

Les méthodes d'estimation paramétriques de la VaR reposent sur 3 hypothèses simplificatrices; d'abord les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille suivent une loi normale; deuxièmement la relation entre les variations de valeur du portefeuille et les variations des variables du marché sont linéaires ; et enfin les produits dérivés (Futures, Swaps, …) sont linéaires. (Une exception faite pour les options).

Remarque : Ces hypothèses sont très contraignantes mais on peut corriger la non-normalité des distributions en introduisant des coefficients d'asymétrie (coefficient de Skewness) ou d'aplatissement (coefficient de Kurtosis).

Nous allons décrire théoriquement les trois approches les plus utilisées d'estimation paramétrique de la VaR : d'abord l'approche univariée puis l'approche variance-covariance et la méthode RiskMetrics.

a) Approche univariée

On considère la VAR associée à la distribution des rendements d'un seul actif (change, action, obligation, etc.). En d'autres termes, on considère le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et on calcule la VaR directement sur ce rendement agrégé.

Hypothèse 1 : On suppose que la distribution des rendements à la date t est une distribution normale d'espérance μ et de variance σ^2

$$R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

On cherche donc la valeur de la VAR à la date t pour un taux de couverture de α telle que :

$$\mathrm{P}[\mathrm{R_t} \leq -\mathrm{VaR_t}(\alpha)] = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{R_t} - \mu}{\sigma} \leq \frac{-\mathrm{VaR_t}(\alpha) - \mu}{\sigma}\right] = \alpha$$

D'après l'hypothèse (H_1) :

$$\frac{\mathrm{R_t} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Et par conséquent, si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, alors on aura:

$$\Phi\left(\frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Donc, sous l'hypothèse H_1, la VaR reliée à un seuil de probabilité α est définie par :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Où : μ espérance de la distribution des rendements et σ^2 variance de la distribution des rendements.

Remarque : En réalisant ces calculs sur une distribution intra-journalière des rendements, on exprime une VaR à horizon d'un instant t. Pour passer d'un horizon d'un instant t à un horizon de temps k jours par exemple, alors on utilise la formule suivante:

$$VaR_k = VaR_t\sqrt{k}$$

b) Méthode RiskMetrics

Ce modèle a été développé par la banque JP Morgan au début des années 90. Il diffère de l'approche Variance-covariance au niveau du calcul de la volatilité des rendements du portefeuille.

La volatilité est estimée en utilisant ses valeurs passées ainsi que celles des rendements en accordant plus de poids aux valeurs les plus récentes. Cette idée facilite l'adaptation aux changements de conditions de marché et de pouvoir mieux tenir compte des évènements extrêmes.

On note V_t la volatilité des rendements du portefeuille à la date t :

$$V_t = VaR[R_t(P)]$$

La volatilité conditionnelle des rendements d'un actif ou du portefeuille va avoir une forme de combinaison linéaire des innovations et de la volatilité passées:

$$V_t = \lambda V_{t-1} + (1-\lambda)\left(r_{t-1}(P)\right)^2$$

Où λ est un paramètre de lissage (par exemple $\lambda = 0{,}97$). On aboutit donc à la définition suivante :

Dans le cas d'un portefeuille d'actifs corrélés entre eux, la VaR issue de RiskMetrics définie pour un risque α, on peut l'écrire sous cette forme :

$$VaR_t(\alpha) = -E[R_t(P)] - (V_t)^{\frac{1}{2}}\,\Phi^{-1}(\alpha)$$

Où : V_t est estimée à partir de la formule $V_t = \lambda v_{t-1} + (1-\lambda)\left(r_{t-1}(P)\right)^2$ et λ paramètre de lissage, on fixe souvent $\lambda = 0{,}97$.

Le principal avantage des méthodes d'estimation paramétriques est que les calculs sont simples et rapides, et nécessitent de connaître uniquement la matrice de variance-covariance des résidus issues du modèle Score-GARCH de différents actifs à haute fréquence. Cependant, ces méthodes restent moins pratiques aux portefeuilles non linéaires, aux queues de distribution épaisses et aux distributions asymetriques de rendements.

1.2.2- Estimation non paramétrique par Simulation historique

Nous allons présenter différentes méthodes d'estimation non paramétrique de la Value-at-Risque. Dans ce cas, on n'impose a priori aucune distribution paramétrique de données. On considère une approche univariée de la VaR, le portefeuille est considéré comme un actif particulier possédant un rendement global.

La méthode de simulation historique est l'une des méthodes les plus utilisées actuellement. Tout comme la méthode paramétrique, cette méthode est rapide à mettre en œuvre. Le principe de cette méthode est d'estimer la VaR par le fractile empirique des rendements passés.

Définition : Soit $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ une suite de rendements d'un actif ou d'un portefeuille observés aux instants t allant de 1 *à* T. On dispose d'une série de T réalisations $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$ associée à cette suite de variables aléatoires.

La méthode de simulation historique va donc reposer sur l'hypothèse suivante :

D'abord, la méthode historique ne fixe pas a priori d'hypothèse sur la nature de la distribution des rendements et ne prend alors en compte que les données de l'échantillon pour estimer la VaR. dans ce cas, la qualité des séries historiques est importante. En effet, il existe ainsi un risque non négligeable d'échantillon et il suffit de quelques données manquantes ou aberrantes pour rendre moins pertinent le résultat obtenu.

Hypothèse 1 : On suppose que les rendements $(R_t)_{t=1,\dots,T}$ sont indépendants et identiquement distribués.

$$\forall\ t = 1, \dots, T \qquad f_{R_t}(x) = f_R(x)$$

$$\forall\ t \qquad VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha)$$

Grâce à cette hypothèse, on dispose maintenant d'un échantillon de T réalisations.
L'avantage majeur de la méthode de simulation historique réside dans le fait qu'elle relie simplicité et large application.

Limites de la simulation Historique : La VaR historique est l'estimation d'une VaR associée à une distribution de Perte et profil (P&L) non conditionnelle. En d'autres termes, cette distribution n'est pas calculée sachant un ensemble d'informations disponibles à la date t. Par conséquent la prévision de la VaR selon la méthode de simulation historique sera invariante aux modifications de l'environnement économique. On qualifie donc les prévisions de la VaR selon la méthode de simulation historique de "plates" ou "pratiquement plates".

La prévision de la VaR par simulation historique a pour principe : Utiliser le fractile empirique associé aux observations passées. En effet, puisque les rendements sont indépendantes identiquement distribués, R_{T+1} a la même distribution que $R_1, \dots, R_T$ et donc un estimateur de sa VaR peut être obtenu à partir de l'estimateur de la VaR des rendements précédents.

a- Méthode Bootstrap de Simulation Historique

C'est une méthode stochastique alternative à la simulation historique. L'idée consiste à construire plusieurs échantillons de rendements suivant la même loi que l'échantillon historique. Pour construire ces échantillons, on va tirer au hasard et avec remise des observations dans l'échantillon historique.
A partir de chaque nouvel échantillon ainsi constitué, on estime alors la VaR par la méthode du percentile utilisée dans la simulation historique standard.

Au final, on dispose plusieurs estimations de la VaR et on définit une estimation en faisant la moyenne de ces estimations.

Soit $\left\{\widetilde{r_j^s}\right\}_{j=1}^{T}$ une suite de rendements tirés au hasard avec remise dans l'échantillon des rendements historiques, et soit $\widehat{\mathrm{VaR}}^s(\alpha)$ la VaR d'une simulation historique associée à cet échantillon de rendements du méthode bootstrap (pour α).

$$\widehat{VaR}^s(\alpha) = percentile\left(\left\{\widetilde{r}_j^s\right\}_{j=1}^{T}, 100\alpha\right)$$

Par ailleurs, on peut bâtir un intervalle de confiance pour la VaR pour un risque β donné :

$$IC_{1-\beta}(VaR) = \left[\widehat{VaR}_{[\beta/2]}, \widehat{VaR}_{[1-\beta/2]}\right]$$

Avec

$$\widehat{VaR}_{[\beta/2]} = percentile\left(\left\{\widehat{VaR}^s(\alpha)\right\}_{s=1}^{S}, 100 * (\beta/2)\right)$$

$$\widehat{VaR}_{[1-\beta/2]} = percentile\left(\left\{\widehat{VaR}^s(\alpha)\right\}_{s=1}^{S}, 100 * (1-\beta/2)\right)$$

Remarque : On peut combiner la méthode de Bootstrap avec d'autres méthodes d'estimation de la VaR. Une fois les échantillons bootstrap constitués, on calcule la VaR avec la méthode désirée à partir des nouvelles distributions générées, et on définit une estimation de la VaR en faisant la moyenne des différentes estimations basées sur le ré-échantillonnage.

1.2.3 : Estimation semi-paramétrique

Il est possible de mettre en place une méthode de prédiction de la VaR basée sur une approche intermédiaire et qui réalise un bon compromis entre l'pproche VaR historique (pas de risque de marché) et l'approche paramétrique (limitation de risque d'échantillon), il s'agit d'une VaR semi-paramétrique, dans un environnement de queues de distribution épaisses.

a- Value-at-Risque conditionnelle

Nous avons introduit dans la partie précédente quelle que méthode d'estimation de la VaR sous la forme paramétrique. Il s'agit d'une mesure de risque très utile et assez répandue dans les institutions financières mais qui n'échappe pas de critiques, par exemple ne favorise pas la diversification du portefeuille.

La principale critique faite à l'encontre de la VaR est qu'elle n'est pas une mesure de risque additive. Certains auteurs affirment qu'elle n'additionne pas tous les principes qu'une mesure de risque dite cohérente doit vérifier. Ils montrent ainsi que la VaR ne répond pas à tous les critères d'additivité par exemple. Prenons le cas d'un investisseur qui gère deux actifs différents. Sous certaines conditions, on montre que la VaR de la somme des deux actifs est supérieur à la somme des VaR de chaque actif. Cette caractéristique est contraire au principe de diversification en finance de marché. La deuxième critique de la VaR est due à sa définition même. C'est la mesure d'une perte maximale potentielle avec un certain niveau de confiance. Une VaR à 95 % ne donne aucune idée de l'ampleur de la perte si cette perte potentielle dépasse le quantile fixé à 5 %.

On a donc défini une mesure complémentaire du risque de perte, la VaR conditionnelle ou CVaR pour Conditionnel VaR. C'est une mesure de risque qu'elle a été introduite comme complément à la VaR. Elle favorise la diversification des mécanismes financiers d'un actif ou d'un portefeuille et traite la queue de distribution. Nous appuierons dans la suite sur les travaux d'Acerbi et Tashe (2001) afin de définir la VaR conditionnelle ainsi que ses propriétés.

Nous définissons la Conditionnelle Value at Risque CVaR_α au niveau de risque α par :

$$CVaR_\alpha = E[-X/X < -VaR_\alpha(X)]$$

En d'autres termes, la VaR conditionnelle peut se définir comme l'espérance de la perte lorsque cette perte dépasse la VaR. Puisque la VaR mesure la valeur qui sépare les (1 − α) % de la distribution, on cherche à se focaliser sur la queue de distribution de la perte, les α % restant, dont on ne connaît pas la nature de sa distribution, ni de son espérance. Contrairement à la VaR, la CVaR est une mesure cohérente du risque qui respecte toutes

les conditions. Il s'agit de calculer l'espérance moyenne des rendements sachant que ces rendements sont inférieurs au rendement de la VaR.

b- Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes mesure le risque extrême directement à partir des queues de distribution, contrairement aux autres méthodes qui estiment la distribution dans son ensemble.

Dans un cadre d'analyse, On considère un n-échantillons $X_1, X_2, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition F.
Soit $M_n = max(X_1, \dots, X_n)$ représentant la plus grande perte observée sur les n pertes observées $X_1, \dots, X_n$.
Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes identiquement distribuer, on peut facilement calculer la fonction de répartition de M_n :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x)$$

Cependant, si on considère right-end (extrémité droite) point de F, le point x_F tel que :

$$X_F = sup\,\{x \mid F(x) < 1\}$$

On remarque que :

$$\forall x \leq X_F \quad P(M_n \leq x) = F^n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad car\ F(x) < 1$$

$$\forall x > x_F \quad P(M_n \leq x) = F^n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 1 \quad car\ F(x) = 1$$

La loi de M_n converge donc vers une loi dégénérée prenant seulement les valeurs binaires (0 ou 1) lorsque n tend vers l'infini.

Le principe de la théorie des valeurs extrêmes va donc être d'identifier la famille de loi vers laquelle M_n va converger et d'estimer F par cette fonction, lorsque n tend vers l'infini. On veut donc trouver les distributions limites telles que :

$$lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x) \quad \text{Non dégénérée}$$

c- Théorème limite de Fisher-Tippett

Il s'agit du théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes. On considère des variables aléatoires $(X_n)_n$ iid. S'il existe des constantes $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$ et H une fonction de distribution non dégénérée telle que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x)$$

Alors H appartient à l'un des 3 types suivants de distribution :

Type 1 Fréchet **:** soit $\alpha > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ exp(-x^{-\alpha}), & \quad x > 0 \end{cases}$$

Type 2 reverse Weibull **:** soit $\alpha > 0$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^\alpha) , & \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Type 3 Gumbel **:**

$$\Lambda(x) = exp(-e^{-x})$$

Les fonctions Ψ_α, Φ_α et Λ sont appelées les distributions standards de valeurs extrêmes.

Définition : On dit que la variable aléatoire X (ou la fonction de répartition F) appartient au Maximum Domain of Attraction (MDA) de H, si

$$\exists\, c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \forall x \in \mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x)$$

Dans la pratique, la majorité des lois usuelles appartiennent à l'un des 3 MDA (Maximum Domain of Attraction) de Gumbel, Fréchet ou Weibull.

Proposition : Les distributions Ψ_α, Φ_α et Λ sont des cas particuliers de la distribution

$$H_\xi(x) = exp\left[-\left(1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]$$

Où μ est un paramètre de localisation et σ un paramètre de dispersion.

Le paramètre ξ est couramment appelé « indice de queue » ou « indice de valeur extrême ». Plus cet indice retrouve avec des valeurs grandes en en terme absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale important. On parle alors de queues de distributions épaisses.

d- Méthode des excès et distribution de Pareto généralisée

La méthode des excès est également connue sous le nom de Peaks Over Threshold. Elle permet de modéliser les queues de distribution d'une série de données. A partir de cette distribution, on peut alors estimer la probabilité d'occurrence d'évènements rares, au-delà des plus grandes valeurs observées.

Définition : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et μ un réel suffisamment grand appelé seuil.

On définit les excès au-delà du seuil μ comme l'ensemble des variables aléatoires Y telles que :

$$y_i = x_i - \mu, \quad x_i > \mu$$

On appelle right-end point de F, le point x_F tel que :

$$X_F = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \mid F(x) < 1\}$$

On cherche donc à partir de la distribution F de X, à définir une distribution conditionnelle F_μ par rapport au seuil μ pour les variables aléatoires dépassant ce seuil. On définit alors la distribution conditionnelle des excès F_μ par :

$$F_\mu(y) = P[X - \mu < y \mid X > \mu] = \frac{F(y + \mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}$$

$$\text{Pour } 0 \leq y \leq x_F - \mu$$

$$\Leftrightarrow F_\mu(x) = P[X < x \mid X > \mu] = \frac{F(x) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}$$

$$\text{Pour } x \geq \mu$$

L'objectif de la méthode Peaks Over Threshold est de déterminer avec quelle loi de probabilité, qu'il est possible d'estimer cette distribution conditionnelle des excès.

Ainsi, le risque d'investissement, des pertes extrêmes est d'autant plus important que l'indice de queue correspondant à ses plus faibles rendements (queue de gauche) est élevé.

1.3- Tests de Validations (Backtesting)

Le backtesting est un outil très pratique pour la comparaison et le test de la pertinence des Value at Risque obtenues selon différentes approches. Nous proposons dans cette section une démarche visant à évaluer la capacité des tests standards de backtesting à discriminer différentes prévisions de VaR ne détermine pas souvent la même mesure du risque d'un actif financier. Une estimation de VaR est dite valide si la séquence des violations[7] associées respecte les conditions d'hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance.

En pratique, nous utilisons des différents tests de la VaR sur un même échantillon. Ces tests permettent de distinguer un sous ensemble d'estimations valides (respectivement non valides). En effet, il existe aujourd'hui une très grande variété de méthodes de calcul de la VaR, voir Download (2005). Or, il est reconnu que certains méthodes fournissent généralement pour un même actif ou d'un même portefeuille des mesures significativement différentes de la VaR et donc du risque, Beder (1995).

Maintenant il faut voir, si les méthodes usuelles de backtesting permettent de distinguer (identifier) ces différentes prévisions. Il ne s'agit pas bien évidement d'évaluer la capacité de ces tests à rejeter l'hypothèse de couverture conditionnelle, parce que sur les cas empiriques la vraie mesure de VaR est a priori imprécise. Il s'agit uniquement de tester à partir d'un grand nombre d'expériences, si parmi *N* estimations différentes de VaR issues de différentes méthodes de calcul alternatives, les tests permettent effectivement de rejeter la validité d'au moins quelques-unes de ces estimations.

Pour cette étude, nous considérons quatre tests qui font l'uns des tests les plus utilisés et les plus souvent cités dans la littérature économétrique réservée au backtesting: les tests de ratio de vraisemblance de Christoffersen (1998), les tests de quantiles dynamiques ou Dynamic Quantil en anglais (DQ) d'Engle et Manganelli (2004), les tests de durée de Christoffersen et Pelletier (2004) et le test de couverture non-conditionnelle KUPIEC(1995). Afin d'évaluer la robustesse de nos résultats précédents, ces tests et leurs déclinaisons seront systématiquement appliqués pour discriminer parmi les différentes mesures de VaR étudiées dans la première section du chapitre dont les résultats réalisées

[7] On définit la violation comme une variable dichotomique prenant la valeur un lorsque le rendement de l'actif observé ex-post inférieur à la VaR prédite et zéro dans le cas contraire.

sur les séries résiduelles résultantes du modèle Score-GARCH (voir chapitre II) associés à nos quatre types d'actifs financier à haute fréquence.

1.3.1- Méthodologie Backtesting

A la section précédente, nous avons présenté différentes méthodes d'estimation de la Value-à-Risque. Nous souhaitons à présent tester ces différentes méthodes pour déterminer le niveau de précision de chacune de ces estimations. Pour cela, nous avons réalisé différents backtestings. Dans notre cas, un test consiste à se placer à une certaine date t_0 dans le passé, à estimer la mesure de risque considérée à l'aide des informations disponibles en t_0 (c'est-à-dire à l'aide des historiques de prix jusqu'ent_0), puis à utiliser les informations futures pour déterminer si le risque a été mesuré de manière satisfaisante. En réalisant un grand nombre de backtestings, nous pouvons alors déterminer avec quelle précision une méthode donnée mesure le risque.
La méthodologie utilisée lors de ces tests a été définie de la façon suivante. A partir d'un historique de rendements d'un actif financier, nous utilisons une fenêtre glissante de 114 points (c'est-à-dire 5 minutes équivalent à un point) pour estimer nos mesures de risque à horizon d'abord 5 minutes puis à l'horizon d'une heure et à l'horizon d'un jour. Ces mesures de risque sont ensuite comparées respectivement aux rendements futurs de l'actif à une heure et à un jour. Nous réitérons la procédure au point suivant. Nous remontons ainsi, point par point, tout l'historique disponible.
Nous avons considéré nos quatre différents actifs. Pour chaque actif, nous avons déterminé le nombre de fois où les pertes en t_0 + 1 dépassaient la VaR_α à 1 point (5 min) calculé en t_0. Plus cette fréquence de dépassement est proche de *(1-α)%*, plus l'estimation de la Valeur-à-Risque à 1 point au niveau de probabilité α est précise. La même procédure a été réalisée pour tester les Valeurs-à-Risque à horizon une heure et à l'horizon un jour.

Aux différentes spécifications proposées sont associés différents tests parmi lesquels nous ne retiendrons ici que quatre approches qui constituent aujourd'hui les références de la littérature : le test LR de Christoffersen (1998), le test DQ d'Engle et Manganelli (2004), le test de modèle de durée de Christoffersen et Pelletier (2004) et le test de couverture non-conditionnelle KUPIEC (1995).

a) Test LR de Christoffersen

En (1998), Christoffersen propose sous la condition d'hypothèse alternative de non efficience de la VaR, c'est-à-dire l'hypothèse nulle, un test dans lequel le processus des violations $I_t(\alpha)$ modélisé par une chaîne de Markov acceptant pour matrice des probabilités de transition la forme matricielle qui suit:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

Où les ratios $\pi_{ij} = Pro[I_t(\alpha) = j \mid I_{t-1}(\alpha) = i]$

D'une manière générale, l'introduction de la chaîne de Markov permet d'étudier l'éventuelle dépendance lieu au temps dans la séquence $I_t(\alpha)$. Et aussi, la probabilité d'observer ou pas une violation pour la période en cours peut être liée (ou non) à la présence d'une violation pour un même niveau de couverture α à la période précédente. L'hypothèse alternative d'efficience ou l'hypothèse nulle de convertir conditionnelle est alors définie par l'égalité suivante:

$$H_0 : \Pi = \Pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

En cas d'acceptation l'hypothèse alternative (nulle) traduit un respect de l'hypothèse de couverture non conditionnelle.

Une simple statistique de rapport de vraisemblance de la couverture conditionnelle, notée LR_{cc} permet alors de tester l'hypothèse nulle d'efficience conditionnelle. Sous cette hypothèse nulle de la couverture, on présente la statistique du rapport :

$$LR_{cc} = -2\{lnL[\Pi_\alpha, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)] - lnL[\widehat{\Pi}, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)]\} \xrightarrow[T\to\infty]{} X^2(2)$$

Où $\widehat{\Pi}$ désigne l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de transition sous l'hypothèse alternative et où $lnL[\Pi, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)]$ désigne la logvraisemblance des violations $I_T(\alpha)$ lieu à la matrice de transition (Π). Donc on peut définir:

$$L[\pi_\alpha, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)] = (1-\pi_{01})^{n_{00}}{\pi_{01}}^{n_{01}}(1-\pi_{11})^{n_{10}}{\pi_{11}}^{n_{11}}$$

Ainsi, sous l'hypothèse nulle d'indépendance, la matrice de transition est définie par :

$$H_0: \Pi = \Pi_\pi = \begin{pmatrix} 1-\pi & \pi \\ 1-\pi & \pi \end{pmatrix}$$

Où n_{ij} quantifie le nombre de fois ou le ratio $I_t(\alpha) = j$ apparait, tout en sachant que $I_{t-1}(\alpha) = i$. En suivant cette ligne directive, on peut identifier simplement que l'origine de l'inefficience, généralement dû au fait de non-respect de l'hypothèse d'indépendance et ou au non-respect de l'hypothèse de couverture inconditionnelle. Ainsi dans la même idée, l'auteur rajoute deux autres méthodes statistiques de rapport de vraisemblance, notée LR_{uc} et LR_{IND}, lieux à leurs tours aux deux sous hypothèses. Où le terme (π) de probabilité n'est pas forcement égale au taux de couverture non conditionnelle (α). La statistique de vraisemblance LR_{IND} associée à l'hypothèse nulle d'indépendance des violations est définie par :

$$LR_{IND} = -2\{lnL[\Pi_\pi, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)] - lnL[\widehat{\Pi}, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)]\} \underset{T-\infty}{\longrightarrow} X^2(1)$$

Où $\widehat{\Pi}$ désigne l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de transition sous l'hypothèse d'indépendance.

Ces tests sont statistiquement faciles à mettre en œuvre, même s'ils sont visiblement assez réduits par le fait que : l'hypothèse d'indépendance est testée contre une forme très particulière qui ne prend pas en considération des dépendances d'ordre plus élevé qu'un. Engle et Manganelli (2004) proposent le test de quantile dynamique qui remédié à ces insuffisances.

b) Test de quantile dynamique

Le modèle de régression linéaire liant les violations instantanées aux violations passées du processus est proposé par Engle et Manganelli (2004), pour but de tester l'hypothèse d'efficience conditionnelle.

Soit le processus de violations $\mathrm{Hit}(\alpha) = \mathrm{I_t}(\alpha) - \alpha$, centré sur le taux de couverture inconditionnel associé à :

$$\mathrm{Hit}_t(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha \text{ si } r_t < VaR_{t\,|t-1}(\alpha) \\ 1 - \alpha \qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle linéaire de régression est :

$$\mathrm{Hit}_t(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \mathrm{Hit}_{t-k}(\alpha)$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \gamma_k g[\mathrm{Hit}_{t-k}(\alpha), \mathrm{Hit}_{t-k-1}(\alpha), z_{t-k}, z_{t-k-1} \dots] + \varepsilon_t$$

Avec les résidus: $\varepsilon_t = \begin{cases} 1 - \alpha \text{ avec une probabilité } \alpha \\ -\alpha \text{ avec une probabilité } 1 - \alpha \end{cases}$

$$H_0 : \delta = \beta_k = \gamma_k = 0, \qquad \forall k = 1, \dots, K$$

Les cas de violations instantanées détectés de la *VaR* sont non corrélées voir même indépendantes aux violations passées, du moment où l'implication de l'hypothèse d'indépendance $\beta_k = \gamma_k = 0$, alors que le cas de couverture inconditionnelle est satisfaite dès que le terme constante $\delta = 0$. En effet, sous l'hypothèse alternative $E[Hit_t(\alpha)] = E(\varepsilon_t)$.

$$Pr[I_t(\alpha) = 1] = Pr[I_t(\alpha)] = \alpha$$

Empiriquement, le test de nullité jointe des coefficients correspond donc à un test d'efficience conditionnelle.

c) Test de durée

Une autre approche vient enrichir le domaine des tests de validation de la VaR, cette technique repose sur la modélisation de la durée entre deux violations.

Avec l'hypothèse alternative de violation, Christoffersen et Pelletier supposent aussi que le processus de duration suit une loi de Weibull de coefficient d'échelle noté (b), de coefficient de centrage α et de densité $g(d, b, a)$.

La supposition de Christoffersen et Pelletier permet alors d'estimer un test paramétrique simple de l'hypothèse d'indépendance, puisque si le coefficient d'échelle b est égal à 1, alors la loi de Weibull devienne identique à une loi exponentielle. Une application du test consiste à construire une statistique de ratio de vraisemblance définie par :

$$LR_{cc}{}^{durée} = 2(ll_{nc} - ll_c) \xrightarrow[T\to\infty]{} X^2(2)$$

Avec les ratios ll_c et ll_{nc} pressentes les termes de vraisemblances logarithmiques respectives obtenues pour les lois exponentielle et Weibull respectivement.

1.3.2- Tests de couverture non-conditionnelle (KUPIEC)

L'hypothèse de couverture non-conditionnelle est vérifiée si la probabilité de réalisation anticipative d'une perte en excès par rapport à la Value-at-Risque anticipée précédente est proportionnelle au taux de couverture. Ainsi, les prévisions de la Value-at-Risque pour un taux de couverture α % ne doivent pas conduire à plus de α% de violations, soit :

$$I_t = \begin{cases} 1 \; si \; r_t \; < VaR_t \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Avec I_t une fonction indicatrice permettant de comparer les rendements observées et les Value-at-Risques estimées, r_t correspond au rendement observé en t et VaR_t, la value-at-risque estimée en t à partir de l'ensemble d'information disponible en $t - 1$. Cette fonction

indicatrice est utilisée par KUPIEC (1995) pour construire un test de couverture non conditionnelle qui permet de tester si le nombre de violations enregistrées excède ou non le taux de couverture. Le test de KUPIEC(1995) est construit sur l'hypothèse H_0 suivante : $E(I_t) = \alpha$ où I_t désigne la variable indicatrice définie ci-dessus et α le taux de couverture retenu. La statistique de KUPIEC est donnée par :

$$LR_{uc} = -2ln[(1-\alpha)^{N-X}\alpha^{X}] + 2ln[(1-X/N)^{N-X}(X/N)^{X}] = X^2(1)$$

Où N est le nombre de violations et X le nombre de prévisions. Le rapport X/N correspond au taux d'échec. Si la statistique calculée LR_{uc} est inférieure au $X^2(1)$ alors l'hypothèse H_0 est retenue: les prévisions effectuées respectent l'hypothèse de couverture non conditionnelle.

La puissance ou la capacité des backtestings à sélectionner entre bonnes et mauvaises Value-at-Risque est déterminante à toute procédure de validation de la VaR. Admettons que pour un actif donné, on puisse obtenir N estimations de la VaR à partir de modèles différents et non emboîtés.

La première interprétation possible, elle consiste à croire que ces différentes estimations de VaR sont effectivement toutes valides. Il est en effet, méthodiquement possible qu'on se trouve avec des estimateurs non biaisés du fractile de la distribution conditionnelle des rendements que les tests valideraient dans la suite.
La dernière interprétation consiste à penser que si les estimations de VaR ne sont effectivement pas toutes valides, une telle configuration ne peut être que l'illustration de la faible puissance des différents tests de confirmation. Une capacité signalée faible, on peut la traduire par un non rejet de la première hypothèse (ou hypothèse nulle) de validation et cela valable pour toutes les estimations de risques.
La deuxième interprétation a une compréhension facile, mais elle est beaucoup plus contraignante vis-à-vis de l'autorité administrative des institutions financières.

2- Résultats et discussions

Nous consacrons cette partie aux applications empiriques des VaR mathématiquement définies ci-haut, afin de mettre en exergue l'intérêt des méthodes introduites dans la première partie du ce chapitre pour l'évaluation empirique de la VaR. Plus précisément, nous considérons trois séquences de VaR à 1%, 5% et 10% correspondants respectivement à trois méthodes alternatives d'estimation: une méthode non paramétrique, une méthode semi paramétrique, et une méthode paramétrique.

Comme le modèle Score-GARCH décrit de manière robuste et efficace le comportement statistique des rendements historiques, nous pouvons alors considérer la série des résidus (Z_t) résultantes du modèle Score-GARCH (1. 1) comme étant indépendante et identiquement distribuer. Nous pouvons alors appliquer les méthodes d'estimation des mesures de risque pour en déduire la Valeur-à-Risque $VaR_\alpha(Z)$ et la Valeur-à-Risque Conditionnelle $CVaR_\alpha$ (Z) au niveau de probabilité $\alpha \in]0, 1[$. Il suffit maintenant de relier les mesures de risque des rendements d'un actif (X_t) aux mesures de risque des résidus (Z_t).

Plus précisément, notons $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_t;\ t' \leq t\}$ la tribu engendrée par les informations disponibles sur l'action à l'instant t. Nous avons la relation suivante entre la distribution conditionnelle de X_{t+1} et la distribution des résidus (qui elle est inconditionnelle du fait de l'hypothèse de résidus i.i.d.) :

$$F_{X_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t(x) = Pr[X_{t+1} \leq x \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= Pr[\mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{t+1} \leq x \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= F_Z\big((x - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}\big)$$

On a alors une relation directe entre les quantiles:

$$VaR_\alpha(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR_\alpha(Z)$$

$$E\left[X_{t+1} \middle| X_{t+1} \geq VaR_{\alpha}(X_{t+1})\right]$$
$$= E\left[\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}Z \middle| \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}Z \geq \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}VaR_{\alpha}(Z)\right]$$

$$= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}E[Z \,|\, Z \geq VaR_{\alpha}(Z)]$$

D'où finalement :

$$CVaR_{\alpha}(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}CVaR_{\alpha}(Z)$$

2.1- Application de la VaR

Appliquons à présent les différentes méthodes que nous venons de définir ci-dessus pour calculer la Valeur-à-Risque à 1%, 5% et 10%. Ces études sont réalisées sur les séries résiduelles résultantes du modèle Score-GARCH (1. 1) associés à nos quatre types d'actifs financier à haute fréquence.

Afin d'avoir une idée générale du risque sur l'étendue de la période étudiée, cette partie présente la VaR Gaussienne, la VaR Historique et la VaR conditionnelle obtenues en employant l'ensemble de nos bases de données étendue sur un calcul de VaR sous différentes périodes et différents seuils. Cette procédure permet d'en tirer différents résultats selon la méthodologie employée.

Dans les tableaux ci-dessous, nous présentons les résultats des prédictions de la VaR Historique, de la VaR gaussienne et de la VaR Conditionnelle à différentes échelles, horizons et niveaux de probabilité obtenus à l'aide du modèle Score-GARCH (1. 1) à haute fréquence.

Tableaux 3.1: la VaR sous différents Tests

	G VaR (1%; 5min)	G VaR (5%; 5min)	G VaR (10%; 5min)
ALSTOM	-0,05514898	-0,03904682	-0,02839098
SG	-0,05252376	-0,03715525	-0,02698492
EDF	-0,05226135	-0,03697943	-0,0268664
ORANGE	-0,07505932	-0,05310452	-0,0385756

Tab 3.1.1-*VaR Gaussienne à une période de 5 min et au quantile 1%, 5% et 10%*

	H VaR (1%; 5min)	H VaR (5%; 5min)	H VaR (10%; 5min)
ALSTOM	-0,040302	-0,0231	-0,0173
SG	-0,061276	-0,04001	-0,02704
EDF	-0,048002	-0,02495	-0,0182
ORANGE	-0,079776	-0,04298	-0,03132

Tab 3.1.2-*VaR Historique à une période de 5 min et au quantile 1%, 5% et 10%*

	C VaR (1%; 5min)	C VaR (5%; 5min)	C VaR (10%; 5min)
ALSTOM	-0,07254	-0,08427	-0,01348
SG	-0,03258	-0,07841	-0,07811
EDF	-0,04512	-0,09852	-0,07247
ORANGE	-0,07254	-0,07898	-0,08421

Tab 3.1.3-*VaR Conditionnelle à une période de 5 min et au quantile 1%, 5% et 10%*

Les résultats obtenus pour l'estimation Score-GARCH (1. 1)-Value-at-Risque (Score-GARCH-VaR) à haute fréquence (intra-Journalière) semblent précis et encourageants au vu de la validation statistique réalisée. La procédure est appliquée sur 4 actifs à haute fréquence à savoir : Alstom, SG, EDF et Orange, sur une période du 10/01/2012 à 9h00 au 11/07/2014 à 18h00, soit un échantillon de 45 808 observations. On remarque pour un échantillon donné, les trois estimations de VaR menées sont différentes. Ces illustrations sur les tableaux **3.1.1**, **3.1.2**, et **3.1.3** sont présentés les résultats respectifs de trois estimations de la VaR à 1%, 5% et à 10% sur les séries résiduelles résultants de l'estimation Score-GARCH (1. 1). Ces résultats sont des indicateurs pertinents qui peuvent servir à fixer de manière continue des limites au volume du trading pour des investisseurs dont les horizons d'investissement peuvent parfois être très courts.

Au vu des tableaux, on constate d'abord, des résultats hétérogènes à travers les différents calculs. Tout dépend de l'horizon temporel que nous prenons ou du niveau de confiance

utilisé, tous les actifs semblent plus ou moins risqués les uns que les autres. Un deuxième élément que nous mentionnons concernant ces tableaux sont les plus faibles dispersions des résultats.

Les tableaux donnent les VaR pour quelques niveaux de confiance, calculée avec la VaR normale, la VaR historique et la CVaR sur l'ensemble des données issues du modèle Score-GARCH (1. 1). Nous voyons qu'il y a des différences assez significatives entre les niveaux de risque, et que la VaR conditionnelle donne en moyenne une perte moindre par rapport aux deux autres.

2.2- Application de Backtesting

pour l'estimation des procédures de backtesting, notre idée consiste à ordonner les tests de validation sur des échantillons historiques de séries résiduelles résultantes du modèle Score-GARCH (1. 1) associés à nos quatre types d'actifs financier à haute fréquence pour lesquelles nous avons établi des estimations de VaR selon trois méthodes.

On dispose de trois échantillons d'estimations de VaR à 1%, à 5% et à 10% résultants des précédentes méthodes de calcul retenues dans la partie ci-haute. Pour les échantillons sélectionnés, nous appliquons alors le test de couverture conditionnelle (LR_{cc}) , le test de l'hypothèse nulle d'indépendance des violations (LR_{IND}) et enfin le test de couverture non conditionnelle (LR_{uc}) qui correspond à la statistique de Kupiec (1995). Pour un risque de première espèce (1%, 5% et 10%), il devient possible alors de sélectionner selon les tests appliquées, combien parmi les trois mesures alternatives de VaR peuvent être considérées comme valides. concrètement, après les tests, on peut identifier le nombre de mesures avec lesquelles les tests ne permettent pas de rejeter l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle, ou l'hypothèse d'indépendance ou l'hypothèse de couverture conditionnelle. Cette procédure d'évaluation des procédures backtesting est appliquée sur nos quatre types séries résiduelles résultantes du modèle Score-GARCH (1. 1).

Les tests de l'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle, d'indépendance des violations sont appliqués sur une mesure (Score-GARCH (1. 1)) de VaR à 1%, 5% et à 10% donnent les résultats ci-dessous.

Les résultats obtenus à partir de 500 réplications sont sans équivoque : quel que soit le risque de première espèce retenue, quel que soit l'hypothèse testée, et quel que soit le test utilisé.

Tableaux 3.2 : Validation de différents tests

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,05769	0,03907	0,02841	0,05287	0,03769	0,02769	0,05535	0,03116	0,02532
SG	0,05517	0,03728	0,02711	0,05039	0,03317	0,02317	0,05829	0,03986	0,02528
EDF	0,05169	0,03708	0,02696	0,05011	0,03169	0,02169	0,05466	0,03931	0,02706
ORANGE	0,078692	0,05327	0,03874	0,07199	0,05292	0,03292	0,07716	0,05101	0,03942

Tab 3.2.1-*Validation d'une VaR Gaussienne à une période de 5 min et au quantile 1%, 5% et 10%*

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,19912	0,13993	0,09437	0,17218	0,13399	0,07472	0,18911	0,11986	0,08412
SG	0,18108	0,12847	0,09631	0,17918	0,12784	0,07315	0,17111	0,11478	0,07872
EDF	0,18279	0,12874	0,09937	0,17972	0,12847	0,07931	0,17287	0,11754	0,07951
ORANGE	0,26142	0,18115	0,13908	0,24241	0,16125	0,12901	0,25148	0,17118	0,12964

Tab 3.2.2-*Validation d'une VaR Gaussienne à une période d'une heure et au quantile 1%, 5% et 10%*

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,53331	0,3946	0,29415	0,53459	0,39265	0,292822	0,53014	0,39161	0,2975
SG	0,50901	0,37662	0,28075	0,50621	0,374051	0,28984	0,50015	0,37151	0,28387
EDF	0,50614	0,27917	0,2791	0,50383	0,275597	0,27597	0,50256	0,27234	0,27234
ORANGE	0,72715	0,40107	0,40107	0,7192	0,40864	0,40864	0,72106	0,40359	0,40359

Tab 3.2.3-*Validation d'une VaR Gaussienne à une période d'un jour et au quantile 1%, 5% et 10%*

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,05281	0,03907	0,02841	0,05769	0,03769	0,02769	0,05535	0,07116	0,02207
SG	0,05039	0,03728	0,02712	0,05517	0,03317	0,02317	0,05829	0,03986	0,02952
EDF	0,05001	0,03708	0,02696	0,05989	0,03169	0,02169	0,05139	0,03009	0,02706
ORANGE	0,07199	0,05327	0,03874	0,07692	0,05292	0,03292	0,07168	0,05101	0,03209

Tab 3.2.4-*Validation d'une VaR Historique à une période de 5 min et au quantile 1%, 5% et 10%*

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,18292	0,13534	0,09843	0,18734	0,13203	0,09567	0,1837	0,13707	0,09416
SG	0,17458	0,12917	0,09394	0,17198	0,12559	0,09701	0,17814	0,12921	0,09815
EDF	0,01735	0,12845	0,09341	0,01993	0,12101	0,09642	0,01041	0,12171	0,09915
ORANGE	0,2494	0,18454	0,13421	0,2407	0,18936	0,13135	0,24965	0,18033	0,13069

Tab 3.2.5-*Validation d'une VaR Historique à une période d'une heure et au quantile 1%, 5% et 10%*

	LR_{CC}			LR_{IND}			LR_{UC}		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
ALSTOM	0,53331	0,3946	0,28698	0,53459	0,39265	0,28263	0,53014	0,39161	0,28292
SG	0,50901	0,37662	0,2739	0,50621	0,37051	0,27765	0,50015	0,37151	0,27618
EDF	0,50612	0,37449	0,27236	0,50383	0,37947	0,27144	0,50256	0,37983	0,27324
ORANGE	0,72715	0,53802	0,39129	0,72192	0,53842	0,39794	0,72106	0,53613	0,39127

Tab 3.2.6-*Validation d'une VaR Historique à une période d'un jour et au quantile 1%, 5% et 10%*

Lorsque l'on considère pour un actif financier, l'ensemble des échantillons considérés, il devient plus délicat de mettre en avant les différences existant entre les mesures de VaR. Toutefois dans les Tableaux ci-haut, nous proposons plusieurs indicateurs pour nos actifs sélectionnés, mettant en évidence les divergences dans les estimations de la VaR et dans les violations observées ex-post. Tout d'abord, dans le tableau, sont reportées quatre statistiques permettent d'évaluer les différences observées entre les différentes séquences de violations observées précédemment. Parmi ces statistiques, figure la moyenne des écarts

absolus qui permet de rendre compte du nombre de violations qui n'apparaissent pas aux mêmes dates.
On observe ainsi qu'il existe en moyenne sur les échantillons étudiés, entre 10 et 11 violations associées aux estimations Score-GARCH (1, 1) qui ne coïncident pas avec les violations de prévisions VaR Historique. Rappelons que pour une VaR à 5% par exemple sur un échantillon de 500 observations, on doit observer environ 12 violations. Les spécifications de trois mesures de risque étudiées sont consacrées aux écarts existant entre les fonctions cumulatives des séquences de violations constatées.

Enfin, nous avions pris des échantillons de notre base des données de même taille pour les mesures de VaR calculées. Prenons comme exemple, en considérant le test LR_{CC} de couverture conditionnelle d'Engle et Manganelli (2004), avec une probabilité de 50%, qu'au moins les 5/6 d'estimations de la VaR sont considérées comme valides. Dans 20% des échantillons, ce test ne signale pas le rejet de la validité pour ne serait qu'une estimation prévisionnelle de VaR.

Techniquement parlant, ces résultats ne sont que la conséquence de la faible puissance des tests de validation sur les petits échantillons réalisés. Toutefois, les différents exercices proposés dans la littérature montrent que ces tests présentent des résultats empiriques proches de leur niveau nominal et des puissances relativement faibles. Prenons le cas pour une VaR à 5% et un risque nominal de 10%, le test de couverture conditionnelle LR_{CC} de Christoffersen (1998) présente une puissance de l'ordre de 30% sous différentes alternatives.
En générale, on peut confirmer que pour un échantillon de plusieurs observations donnés, dont la méthode de calcul de la VaR est non valide statistiquement, les tests utilisés permettant de rejeter l'hypothèse de couverture conditionnelle, c'est-à-dire la validité de la VaR, dans à peu près d'un cas sur trois où (1/3), voire un cas sur deux (1/2) pour les estimations les plus robustes.

Le test utilisé, traduit, le fait que cette puissance, implique généralement pour un actif financier à haute fréquence ou un portefeuille donnés, les méthodes actuelles de backtesting ont dans leurs ensembles ont tendance à confirmer la validité d'un grand nombre de tests alternatives du risque pourtant sensiblement différentes.

CONCLUSION

La Value-at-Risque est un outil très puissant et incontournable. Malgré la difficulté d'appréhension de cet indicateur, il représente cependant une excellente approximation d'un risque de perte sur un horizon du temps. Pour que notre analyse de risque soit complète et pertinente, nous avons utilisé la Valut-at-Risque dont les données issues de l'estimation Score-GARCH.

Ce présent travail de recherche s'est attardé des nombreux éléments entrant en ligne de compte lors de la conception et de l'évaluation d'une mesure de risque en finance. Au cours de notre étude, nous avons vérifié la performance de différentes méthodologies utilisées afin de mesurer la Value at Risque. Notre étude nous a permis d'appliquer des différentes approche de calcul de la Value at Risque basées sur le modèle Score-GARCH appliqué sur données à haute fréquence. Les trois méthodes (gaussienne, historique et conditionnelle) ont fourni des résultats comparables. Cependant, la mise en œuvre de ces approches a présenté de légères différences. Nous avons vu que la méthode conditionnelle répondait mieux aux besoins pratiques face auxquels sont confrontés la Valut-at-Risque gaussienne et la Valut-at-Risque historique. Nous avons de cette manière pu constater aussi que parmi nos différentes méthodes, l'approche utilisant la loi normale est la moins précise et ce sans aucune surprise.

Afin de juger quelle méthode de calcul reflète le mieux le risque financier à haute fréquence, nous avons procédé à l'application du backtesting qui consiste à comparer les différentes Valut-at-Risque intra-journalières des résidus découlant du modèle Score-GARCH. Nous notons que retenir un montant de Valut-at-Risque plus important est considéré comme prudent et présente donc un avantage face aux autres.

Nos résultats trouvés ont montré que les procédures utilisées de Backtesting ne sont pas sélectives ou (discriminantes). Ces résultats confirment l'intérêt de la Valut-at-Risque appliquée à l'approche Score-GARCH sur données à haute fréquence, à la fois simples et plus puissantes, car ce test incarne d'une manière très large la validité des estimations non validé à partir de petits échantillons définis.

CONCLUSION GENERALE

A travers cette thèse nous avons proposé des méthodes adaptées à l'exploitation des données de haute fréquence dans les principaux domaines de la littérature financière (gestion de portefeuilles, mesure de risques et distribution des rendements). Ces données de haute fréquence présentent de nombreuses particularités qu'il convenait de caractériser avant d'appliquer les méthodes de la finance quantitative.

L'analyse et la modélisation de la volatilité d'une série est un thème fondamental en finance. Pour preuve en se référant au marché boursier, on remarque que plus la volatilité d'un actif importante, plus le risque est élevé et plus les détenteurs de l'action souhaiteront une rentabilité élevée pour accepter de la détenir et de la conserver. Ainsi l'estimation de la volatilité de rendement d'une action fournit une mesure du risque qui y est attaché. Dans le même ordre d'idées, si le processus suivi par la volatilité est correctement spécifié, celui-ci permet de prévoir le rendement.

Par ailleurs, il est important de noter que les séries financières sont caractérisées par une volatilité non stationnaire et par des phénomènes d'asymétrie qui ne peuvent pas être pris en compte par les modélisations de type ARMA. C'est dans ce contexte, qu'Engle et Granger ont développé les modèles ARCH/GARCH afin de permettre à la variance d'une série de dépendre de l'ensemble d'informations disponible, notamment le temps. Les modèles sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle. C'est dans cette optique que cette étude nous a permis de déterminer la prime de risque des actifs financiers à travers un modèle économétrique qui tient compte de l'asymétrie en l'occurrence le modèle Score-GARCH.

Nous avons essayé dans ce travail d'examiner les performances prédictives du modèle Score-GARCH dans l'estimation de la volatilité sur le marché boursier français et de les comparer avec les performances des méthodes classiques. Les résultats trouvés ont montré que le modèle Score-GARCH sur données à haute fréquence offre des estimations meilleures et supérieures à celles de modèles GARCH de référence.

Dans nos applications empiriques, nous mettons en exergue le fait que la réponse de la volatilité aux variations de prix est plus (resp. moins) prononcée en cas de chocs positifs (resp. négatifs) sur le cours boursier. Par ailleurs, le modèle Score-GARCH domine statistiquement le modèle EGARCH et le modèle GJR-GARCH, ces derniers sont des modèles représentatifs de la classe des spécifications GARCH asymétriques antérieurement proposées. En autre, la dynamique asymétrique de la volatilité en haute fréquence découle généralement plus de l'existence de nouvelles sur le marché que de la nature de ces modèles.

Dans les marchés boursiers, l'arbitrage, l'incertitude et la recherche de profits à très court terme ont conduit bon nombre d'investisseurs ou des traders à réduire leur horizon temporel d'investissements, l'utilisation de la mesure du risque de marché à des horizons intra-journaliers prend une intensité particulière dans le monde de finance d'aujourd'hui. Dans ce cadre d'idée, notre contribution aux problématiques a porté sur l'estimation et la prévision de la Value-at-Risque, elle consiste à proposer une approche économétrique pour l'estimation intra-journalière de la Value-at-Risque. Dans le cadre de la modélisation d'extensions GARCH asymétriques sur des données historiques à haute fréquence, nous avons échantillonnés à des intervalles de temps régulier (cinq minutes dans nos applications), et nous avons appliqué plusieurs approches différentes pour l'estimation et la prévision de la VaR sur données à haute fréquence.

La gestion de risque ne doit pas s'appuyer sur une seule mesure de risque car chaque mesure à ses propres avantages et inconvénients. La réglementation propose de combiner la Value at risque avec une autre mesure de risque, le modèle Score-GARCH dans notre cas, pour avoir une idée plus claire sur la perte potentielle et la perte moyenne au-delà d'un seuil et mieux comprendre le degré d'exposition des actifs aux risques. Comme la gestion des risques est une gestion des évènements rares et extrêmes volatilités, plusieurs travaux ont introduit ces dernières années les données à haute fréquence dans la mesure du risque. L'avantage de ces données c'est qu'elles détectent et localisent assez rapidement les volatilités, et la queue de la distribution réduisant ainsi l'effet des valeurs extrêmes, ce qui entraîne une augmentation de l'espérance mathématique des pertes attendues puisque la queue a un poids plus élevé et donc une meilleure estimation des quantiles.

Au cours de cette étude, nous avons réalisée des tests pourtant sur les mesures de risque sur données à haute fréquence, avec pour objectif d'affiner les mesures traditionnelles, à l'aide des données plus précises et des méthodes de calcul adaptées, des évaluations de performance de différentes méthodologies utilisées afin de mesurer la VaR. Nous avons de cette manière pu constater que parmi nos différentes méthodologies, l'approche utilisant la loi normale est la moins précise. Par contre la VaR conditionnelle répondait mieux aux besoins pratiques face auxquels sont confrontés la VaR gaussienne et la VaR historique. Nos résultats sont particulièrement intéressants lorsque nous changeons d'horizon temporel puisque l'utilisation de Score-GARCH accentue son avantage sur l'utilisation de simples moments historiques.

Toutefois, il est important de noter que le nombre d'observations à utiliser doit être à considérer de manière plus importante lorsque nous utilisons plusieurs méthodologies de mesures de risque sur données à haute fréquence. Un nombre trop faible d'observations peut résulter en une incapacité de l'algorithme à converger de manière significative.

En outre, il existe plusieurs approches dont différentes méthodes d'estimation de la VaR, elles sont plus ou moins approuvées leurs efficacités dans la littérature économétrique. Avec la diversité des modèles d'estimation de la VaR, le problème de la validation semble important. Cette importance est justifiée par le fait que la VaR est l'indicateur (ou instrument) reconnu du niveau d'exposition au risque de marché. Les estimations de la VaR doivent alors font face aux pertes ou rendements négatifs effectifs ex-post. On parle alors de backtesting, qui se défini comme l'évaluation de la qualité prédictive des modèles d'estimation de la VaR.

En termes de perspectives, comme le modèle Score-GARCH est univarié, il peut être facilement étendu à un cadre multivarié sur base de données à haute fréquence. Il existe d'autres possibilité, à exploiter, parmi lesquelles l'utilisation de l'approche par copules dynamiques.

ANNEXES : I

PRESENTATION DE DONNEES :

1.1 : Société Générale (SG)

C'est l'une de plus ancienne banque française, la société générale (SG) créée le 4 mai 1864. Selon notre source « source https://www.societegenerale.fr/ », la société générale est créée par la famille Rothschild entant qu'un groupe industriel, et pour but premier de favoriser le développement de l'industrie française. Le principal d'activité historique de la société générale est donc l'industrie française d'abord et puis le commerce. Toutefois au début du 20ème siècle, la SG se diversifie et propose aux particuliers ses services de placement de titres. Au lendemain de la deuxième guerre mondiale, la société générale devient la première banque française en termes de chiffre d'affaire et de sa taille.

La société générale a été nationalisée en 1945, période durant laquelle la banque profite de la croissance forte en France et s'étend ses activités à l'international. Elle a été introduite en bourse en 1987 juste après sa privatisation. Depuis sa privatisation la société générale n'a cessé de faire de la croissance externe pour se développer à l'international notamment en Europe centrale. Depuis les années 2000 la société générale est toujours un acteur majeur de la finance française et internationale, avec une 9ème place au rang du classement mondial des banques en termes de chiffre d'affaires.

1.2 : Electricité De France (EDF)

En s'appuyant sur les informations de site officiel « source : https://https://www.altaprofits.com//electricite-de-france-isin-fr0010242511/ » de la société, nous présentons les informations suivantes.

L'Electricité de France (EDF) a commencé ses activités depuis le 19ème siècle avec l'apparition de l'éclairage électrique en ville. Plus tard se développent à leur tour l'électrification des campagnes et les premières applications électroménagères.

Electricité de France (EDF) est le numéro un français de la production, de la commercialisation et de la distribution d'électricité. Le chiffre d'affaire par activité se répartit comme suit :

- « Production et vente d'électricité et de gaz naturel (72,4%). Le groupe développe également une activité de négoce d'électricité, de gaz naturel, de charbon et de pétrole ».

- « Gestion de réseaux de distribution d'électricité basse et moyenne tension (21%) : conception, construction, exploitation et maintenance des réseaux. En outre, le groupe développe une activité de gestion de haute et très haute tension (RTE ; mis en équivalence à compter du 31 décembre 2010) ».

- « Prestations de services énergétiques (6,6%) : ingénierie, construction et installation d'unités de cogénération et de production d'énergies renouvelables, exploitation et maintenance de réseaux électriques, gestion d'équipements d'éclairage public et de chauffage urbain, etc. ».

La répartition géographique du chiffre d'affaire est la suivante : France (52,8%), Italie (15,6%), Royaume Uni (15,5%) et autres (16,1%).

L'action EDF a été introduite en Bourse le 21 novembre 2005 au prix de 32 euros. Cette mise en cotation représentait la plus grosse introduction en Bourse des entreprises publiques et a placé le titre à la trentième place de l'indice CAC 40, eu égard à sa capitalisation boursière flottante (négociable en bourse) et à la quatrième place en capitalisation boursière totale.

1.3 : ALSTOM

Notre source d'aspiration d'informations ci-dessous est le site officiel de la société ALSTOM « source : https://www.infinance.fr/.../article-alstom-pre...t-histoire-346.htm».
« La société AlSThom (contraction d'Alsace et de Thomson) a vu le jour en 1928 de la fusion entre : « Thomson-Houston », société franco-américaine spécialisée dans les équipements de traction électrique, et une partie de la SACM (Société alsacienne de constructions mécaniques), spécialisée dans la construction de locomotives ».
Le groupe ALSTOM est divisé en quatre secteurs :
« De 1 Thermal Power spécialisé dans la construction d'infrastructures pour les énergies thermiques. De 2 Renewable Power spécialisé dans les énergies renouvelables. De 3

ALSTOM Transport spécialisé dans les équipements et services de transport ferroviaire. Et 4 en fin ALSTOM Grid spécialisé dans les solutions de transmission d'électricité ».

« ALSTOM fait partie des leaders mondiaux dans les infrastructures de transport ferroviaire, de production et de transmission d'électricité. Avec 30,77 % du capital au 1er février 2011, dont le groupe Bouygues est le principal actionnaire d'Alstom. Ses titres sont cotés sur le compartiment A d'Euronext Paris et entrent dans le calcul du CAC 40. De plus, le 31 juillet 2006, ALSTOM a réintégré le CAC 40, qu'il avait quitté en avril 2002 ».

1.4 : ORANGE

Le site internet officiel de la compagnie « source : https://www.telecom-paristech.fr/.../fiches-partenaires/Fiche_Orange.pdf » est la source de nos informations suivantes :

« D'abord, la société France Télécom a été créée en 1988. Elle est devenue un exploitant de droit public en 1990, puis une société anonyme en 1996. Le groupe Orange, est l'un des premiers opérateurs de télécommunications dans le monde, avec un chiffre d'affaires de 43,5 milliards d'euros en 2012 et 170 000 salariés au 31 mars 2013. Orange est l'un des principaux opérateurs européens du mobile et de l'accès internet ADSL et l'un des leaders mondiaux des services de télécommunications aux entreprises multinationales, sous la marque Orange Business Services ».

Le groupe Orange est un opérateur de télécommunications qui développe et commercialise des équipements et des services pour les particuliers, les professionnels et les entreprises via Orange Business Services.

Il propose notamment les services suivant : téléphonie fixe, téléphonie mobile, accès Internet ADSL et télévision. Les titres France Télécom sont cotés sur le compartiment A d'Euronext Paris et font partie de compte du CAC 40.

Les cours historiques à toutes les cinq minutes

Dans les figures ci-dessous nous avons présenté les cours historiques de nos 4 titres étudiés. Les comportements de l'historique de prix ci-dessous, présentent des caractères erratiques.

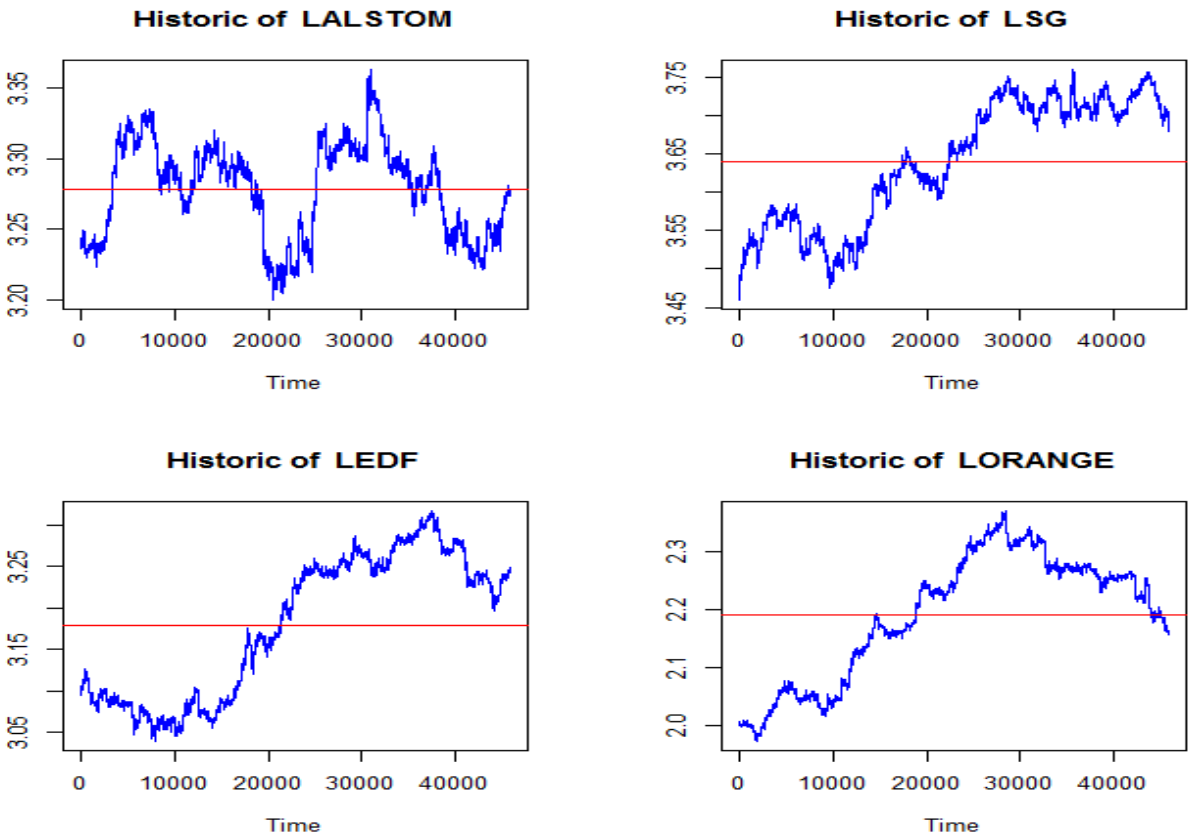


FIG 2.1- *valeurs logarithmiques de clôture (toutes les 5 minutes) de 4 titres, du 10/01/2012 09:00 au 11/07/2014 18:00.*

Les figures 2.1 représentent le comportement des cours boursiers à cinq minutes à l'intérieur de la journée. Ils montrent la présence des tendances peu claires (tantôt baissières tantôt haussières), sur l'ensemble de la période, caractérisée, en premier lieu, par une tendance baissière dans la 1ère partie et, suivie d'une tendance haussière.

Test de Stationnarité (Unit Root Test) Augmented Dickey-Fuller

ADF avec constante

	Estimate	std,error	t-value	Pr(>t)	v. t-stat	v. critique à 5%
ALSTOM	9.997e-01	1.098e-04	9103.424	2,00E-16	-0.8087	-2.86
SG	9.998e-01	1.127e-04	8869.892	2,00E-16	1.4102	-2.86
EDF	9.999e-01	8.008e-05	12485.753	2,00E-16	1.3841	-2.86
ORANGE	1.000e+00	4.905e-05	20386.191	2,00E-16	-1.9017	-2.86

Dans ce tableau deux statistiques de test sont calculées: la première relative à la racine unité, la seconde relative à la constante. On observe ici que la statistique de test pour le test de racine unité (-0.80, 1.41, 1.38 et -1.90 respectivement pour les 4 actifs étudiés) est supérieure à toutes les valeurs critiques associées 5%. On va encore accepter l'hypothèse de racine unité. Mais le modèle était peut-être faux, et peut-être avait-on en fait en tendance linéaire.

	ADF avec tendance					
	Estimate	std,error	t-value	Pr(>t)	v. t-stat	v. critique à 5%
ALSTOM	9.997e-01	1.102e-04	9069.032	2,00E-16	-3.1681	-3.41
SG	9.997e-01	1.171e-04	8534.279	2,00E-16	-1.3753	-3.41
EDF	9.997e-01	8.243e-05	12129.375	2,00E-16	-2.5325	-3.41
ORANGE	9.997e-01	6.448e-05	15506.411	2,00E-16	-2.6797	-3.41

On obtient cette fois trois statistiques, la première relative au test de racine unité, et les deux suivantes aux tests sur la constante, et la dernière sur la tendance c'est-à-dire la pente de l'ajustement linéaire. Là encore, la valeur de test -3.16, -1.37, -2.53 et -2.67 respectivement pour les séries : ALSTOM, SG, EDF, et ORANGE) excède les valeurs critiques : la *p*-value serait ici supérieure à 5%%. On va là encore accepter l'hypothèse de racine unité.

Rendements

Sur les figures **[1.1]** ci-dessous nous avons présenté la volatilité réalisée des rendements logarithmiques intra-journaliers du nos quatre actions (voir chapitre 2) constituent la base des données de cette étude. Les comportements intermittents des rendements logarithmiques sont très visibles, on voit clairement que les fortes variations se rassemblent en petits groupes.

Les volatilités réalisées obtenues par les carrés des rendements logarithmiques intra-journalières de nos quatre actions boursières. On observe le regroupement des volatilités par paquets.

-Fonction d'autocorrélation d'observation

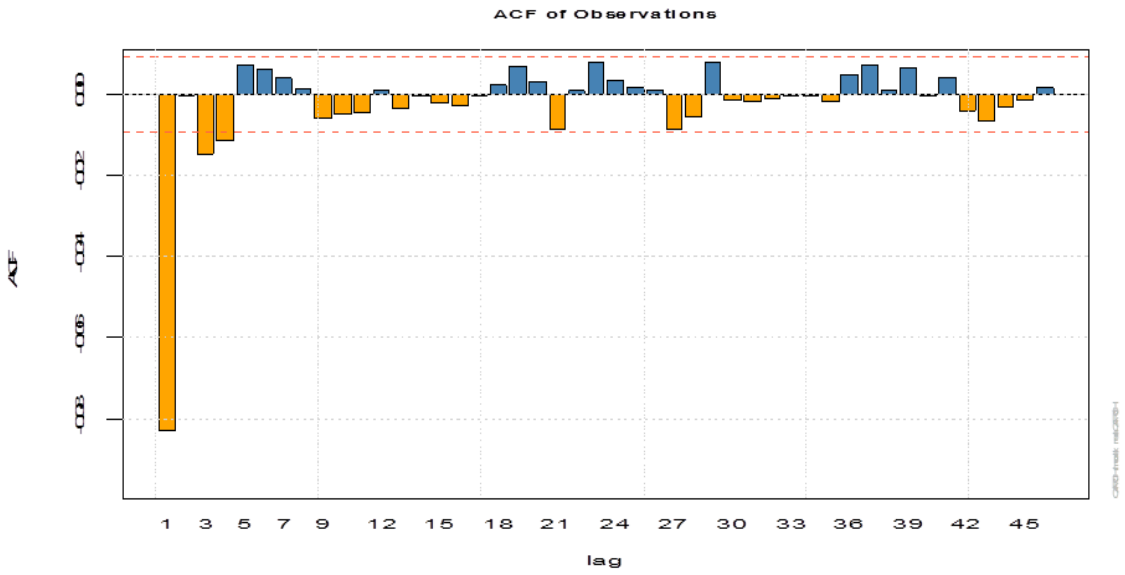


Fig.1.1 : Fonction d'Autocorrélation-ALSTOM

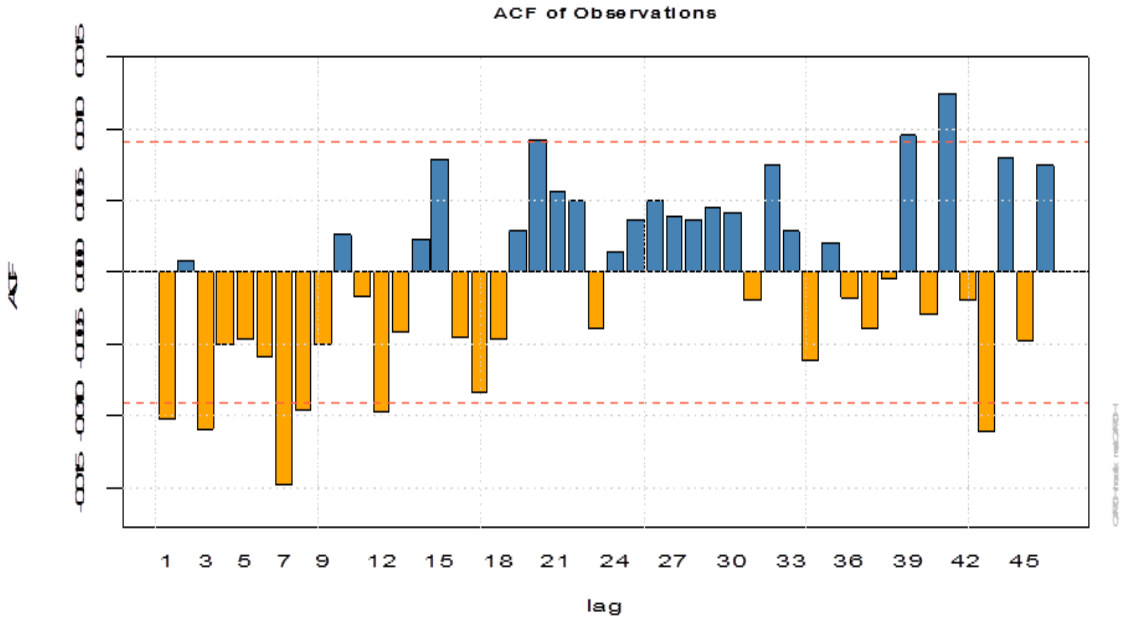


Fig.1.2 : Fonction d'Autocorrélation-SG

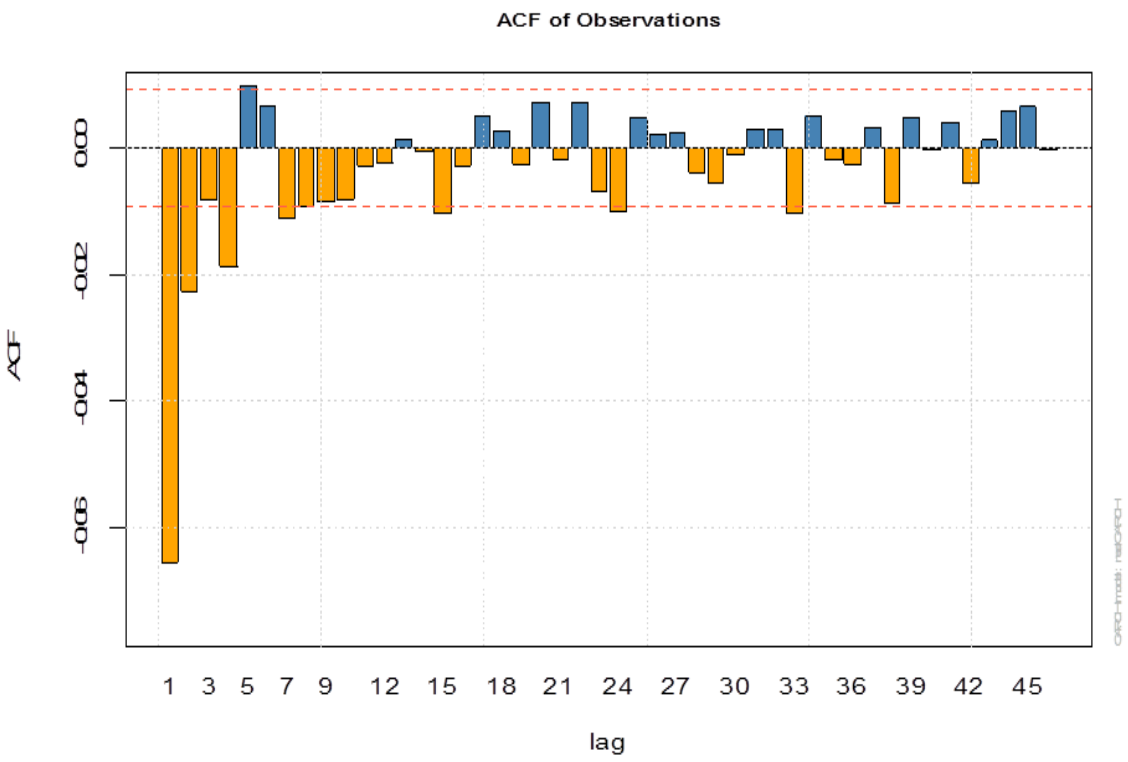


Fig.1.3 : Fonction d'Autocorrélation-EDF

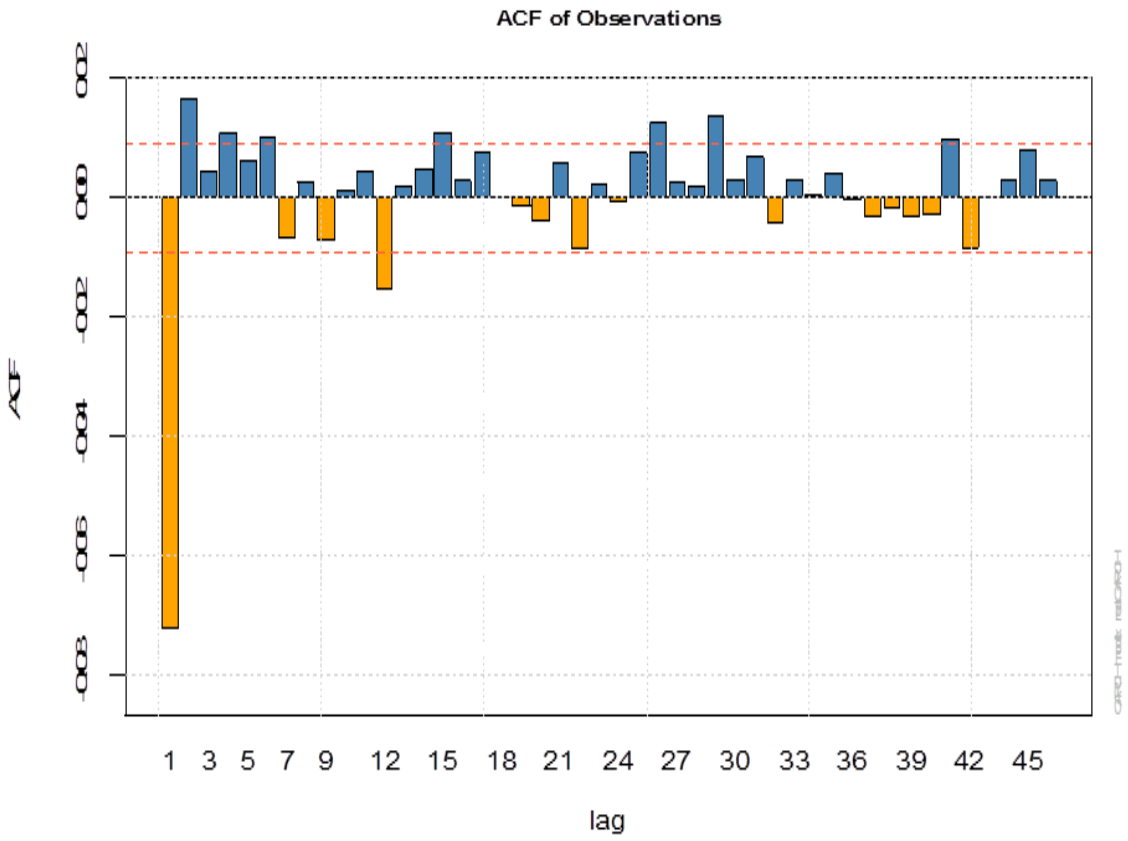


Fig.1.4 : Fonction d'Autocorrélation-ORANGE

-Fonction d'autocorrélation d'observation au carré

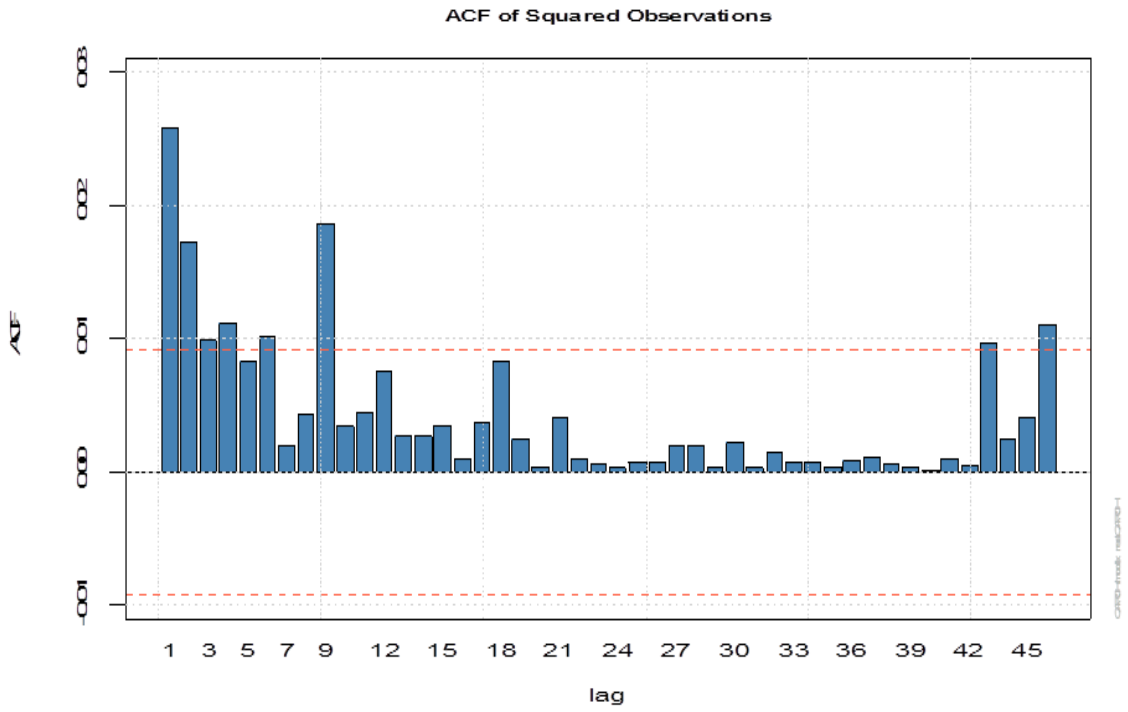


Fig.1.1.1 : Fonction d'Autocorrélation au carré-ALSTOM

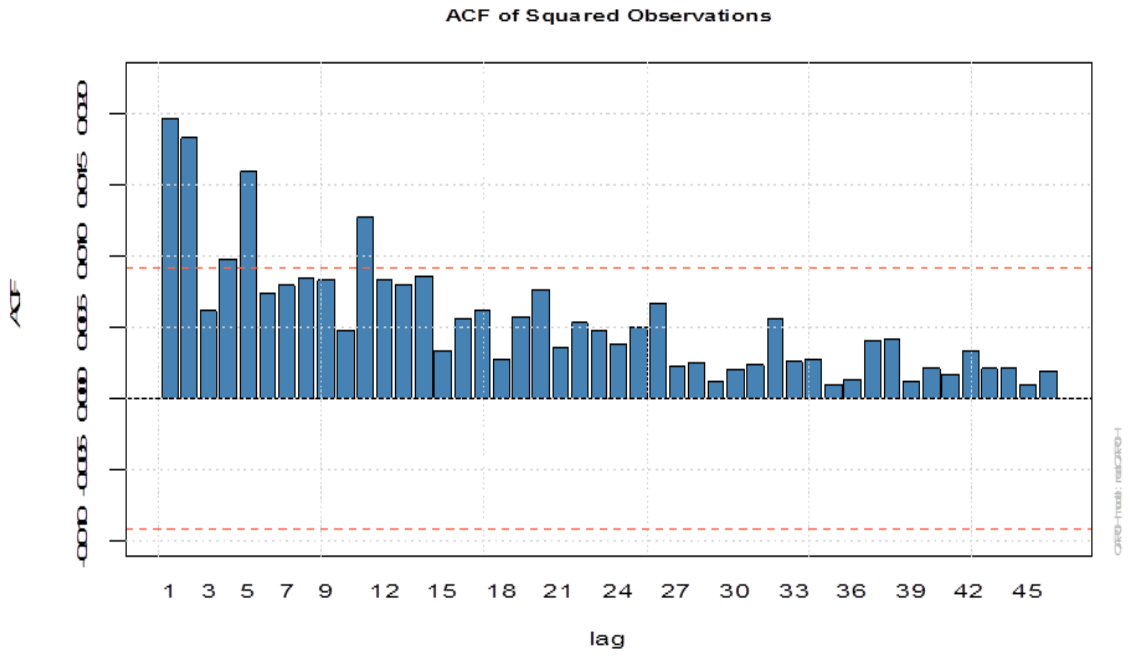


Fig.1.1.2 : Fonction d'Autocorrélation au carré-SG

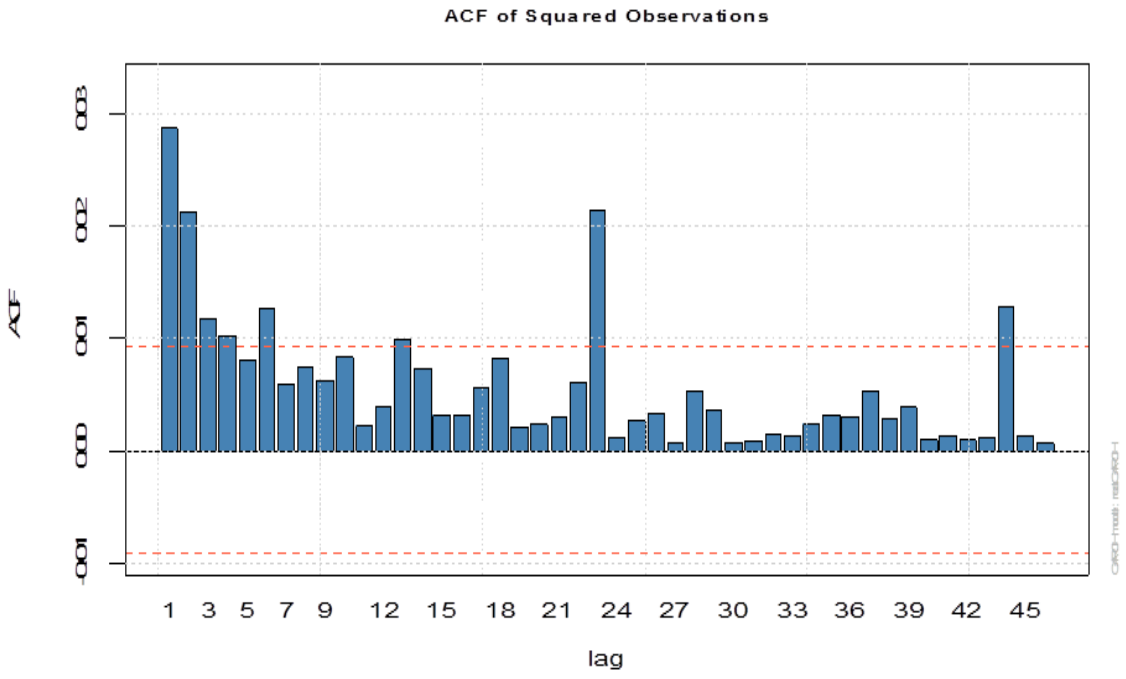


Fig.1.1.3 : Fonction d'Autocorrélation au carré-EDF

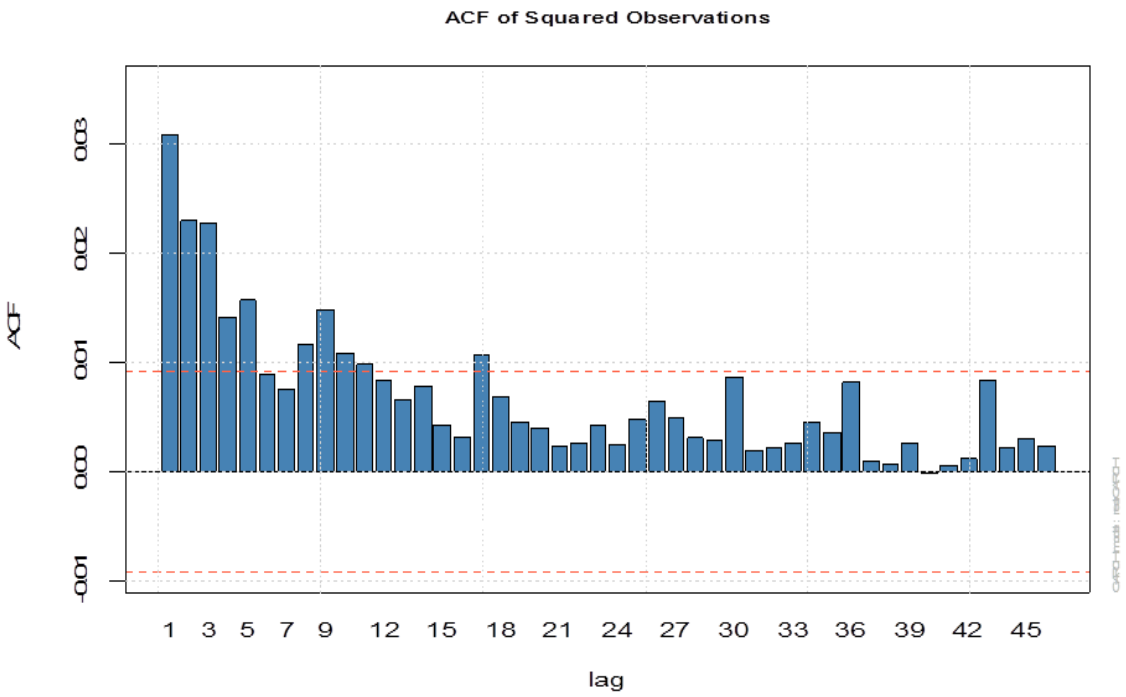


Fig.1.1.4 : Fonction d'Autocorrélation au carré-ORANGE

-Fonction d-Autocorrélation des observations en valeur absolues

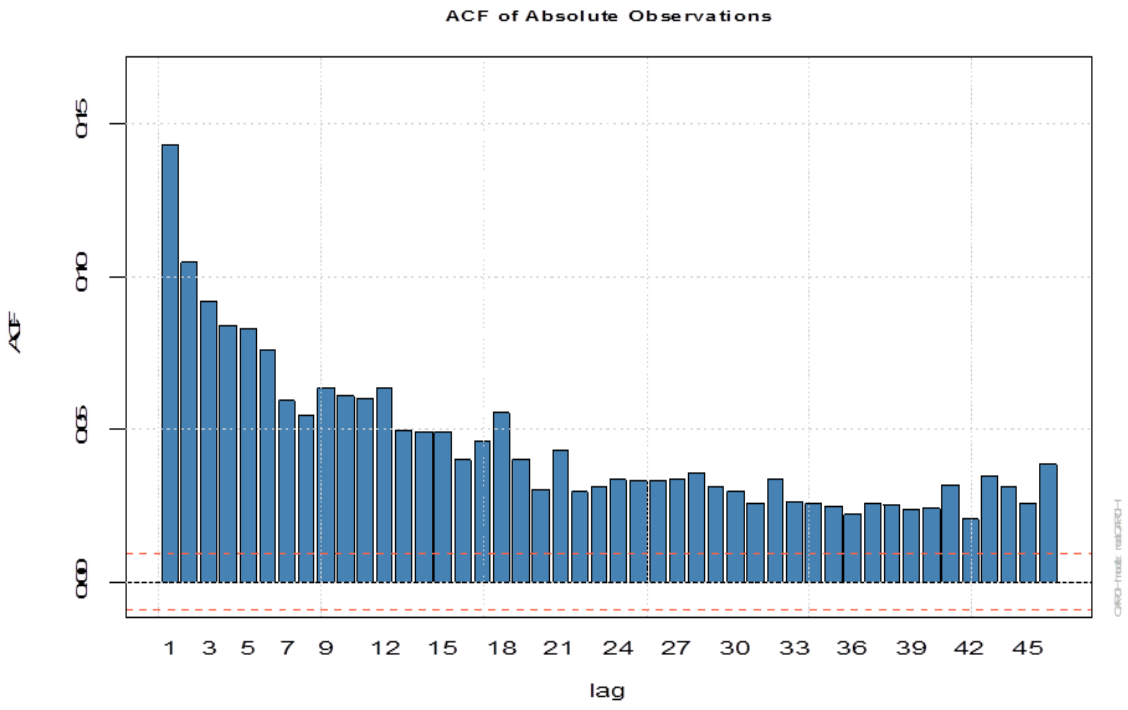


Fig.1.3.1 : Fonction d'Autocorrélation en valeur absolue-ALSTOM

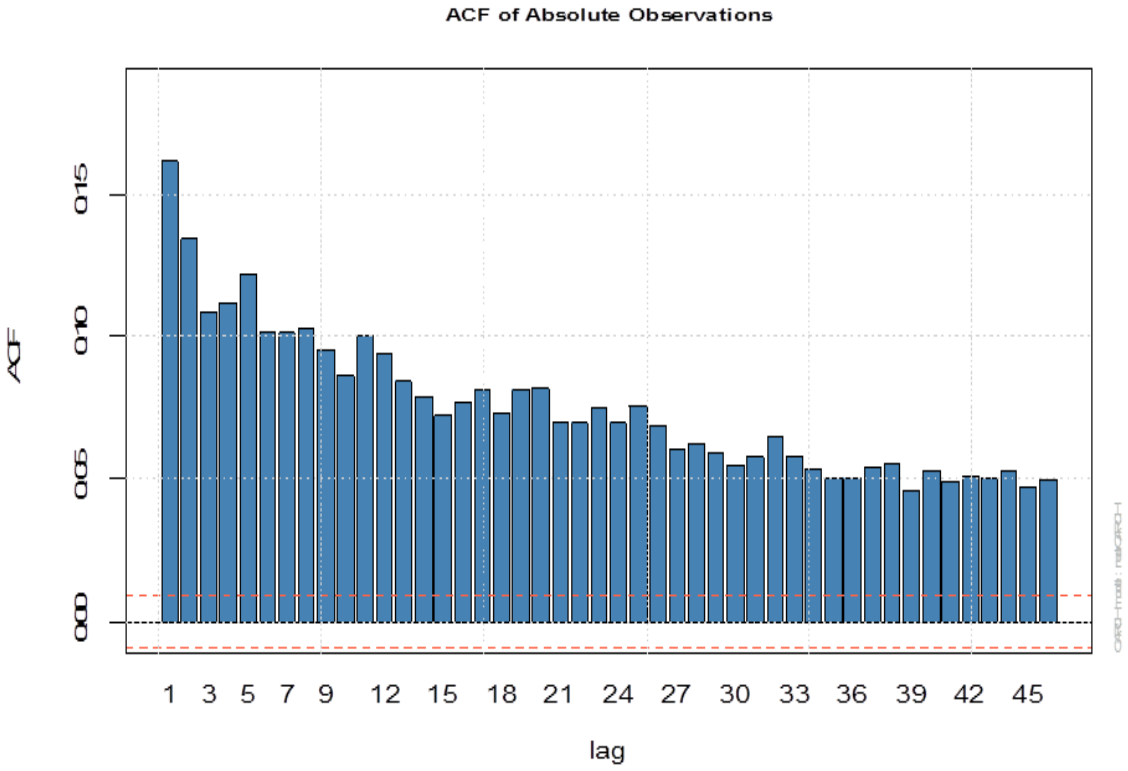


Fig.1.3.2 : Fonction d'Autocorrélation en valeur absolue-SG

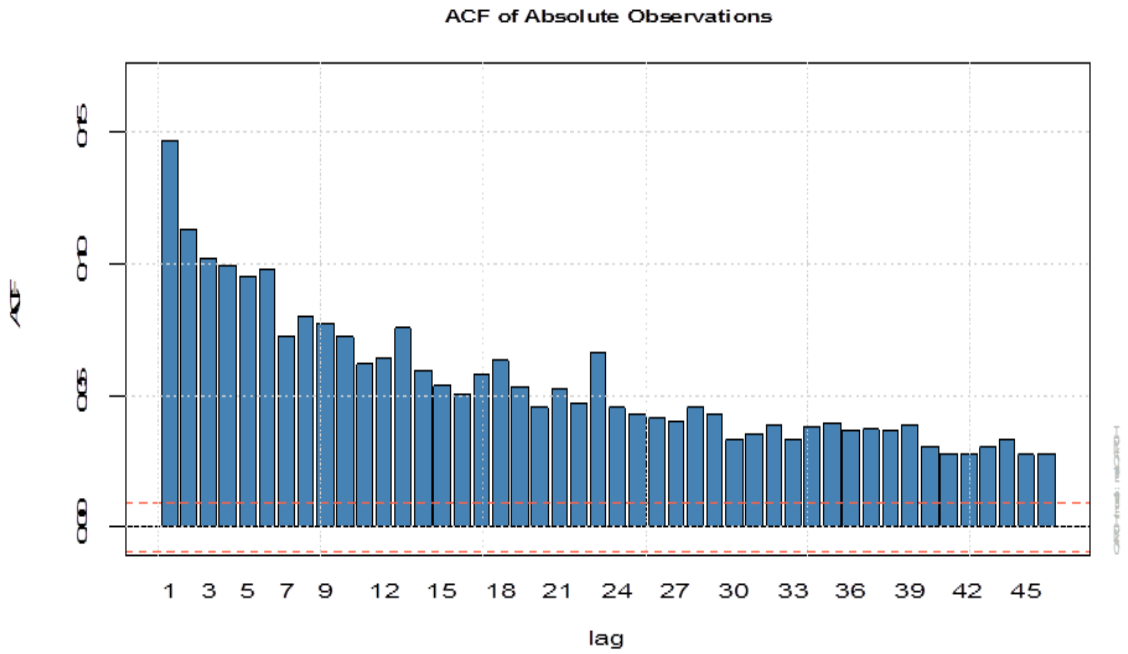


Fig.1.3.3 : Fonction d'Autocorrélation en valeur absolue-EDF

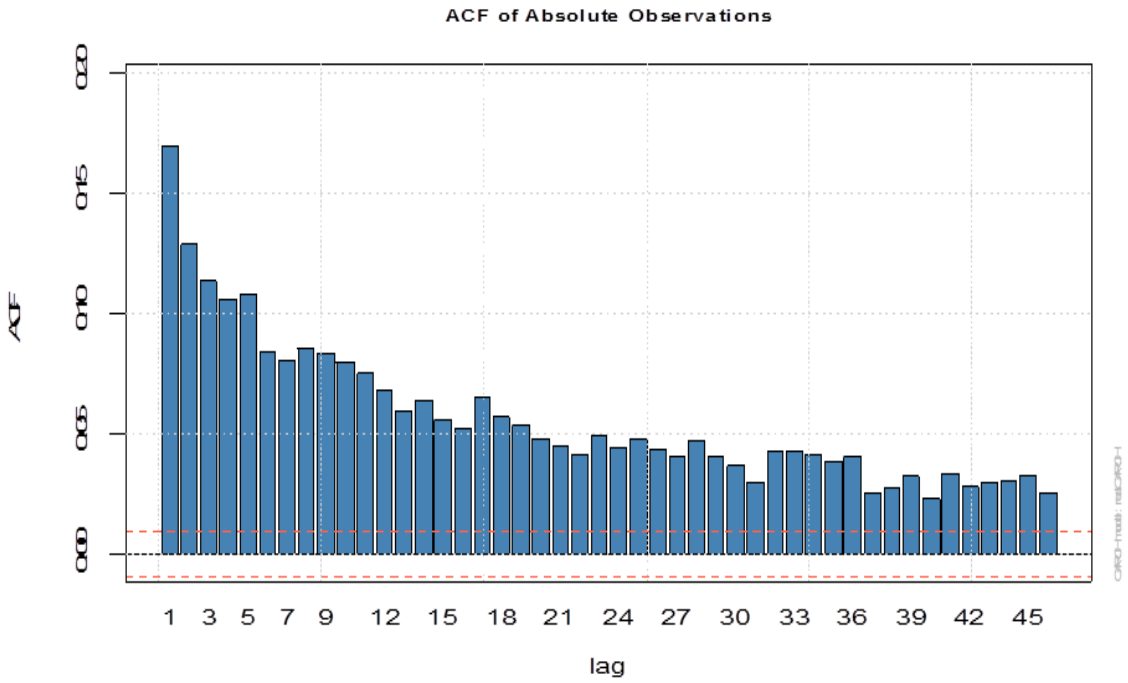


Fig.1.3.4 : Fonction d'Autocorrélation en valeur absolue-ORANGE

-Corrélations- croisées d'observations au carré et observations réelles

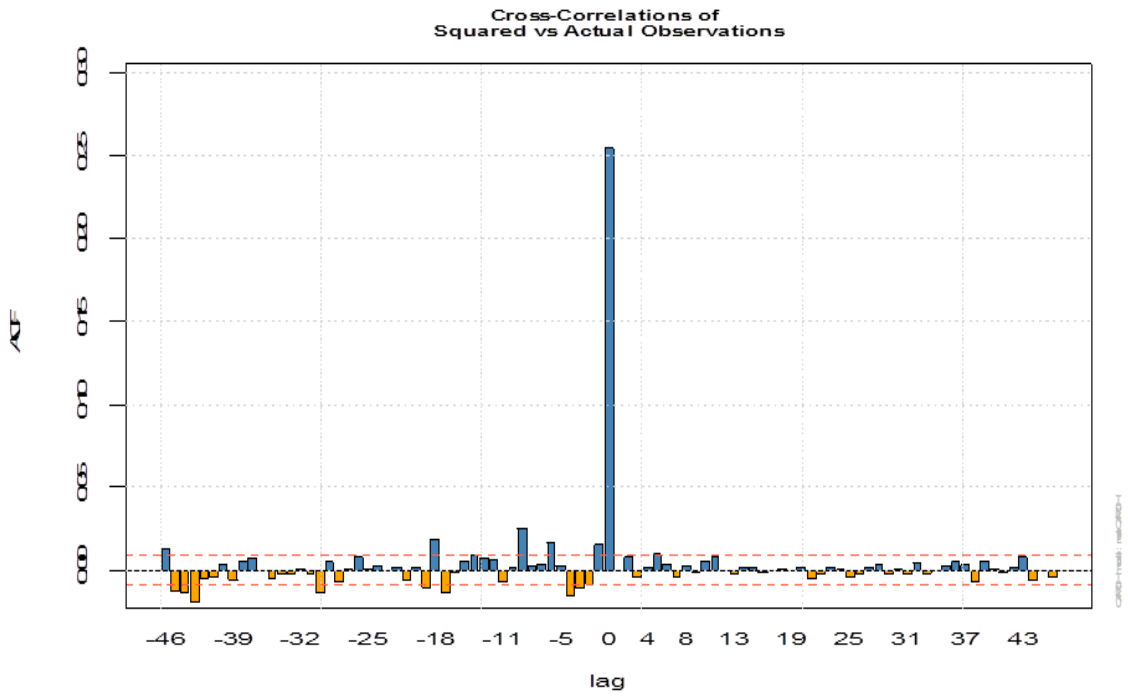


Fig.1.4.1 : Corrélations-croisées -ALSTOM

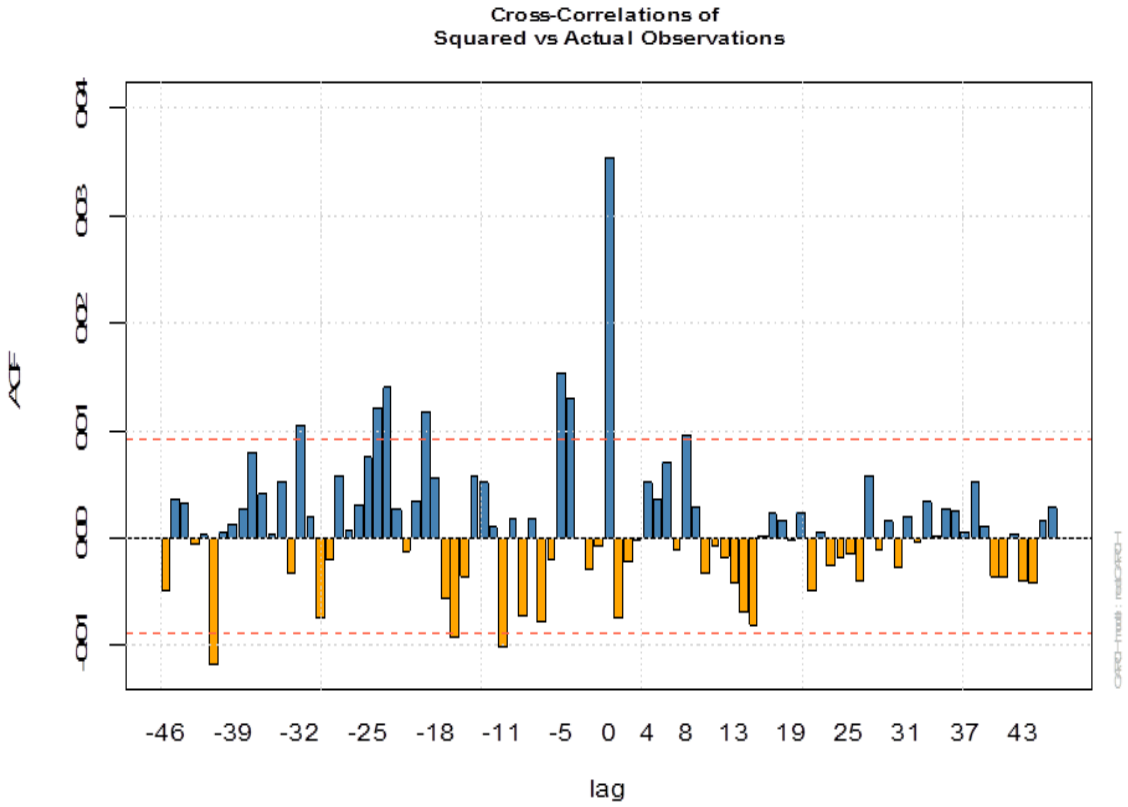


Fig.1.4.2 : Corrélations-croisées -SG

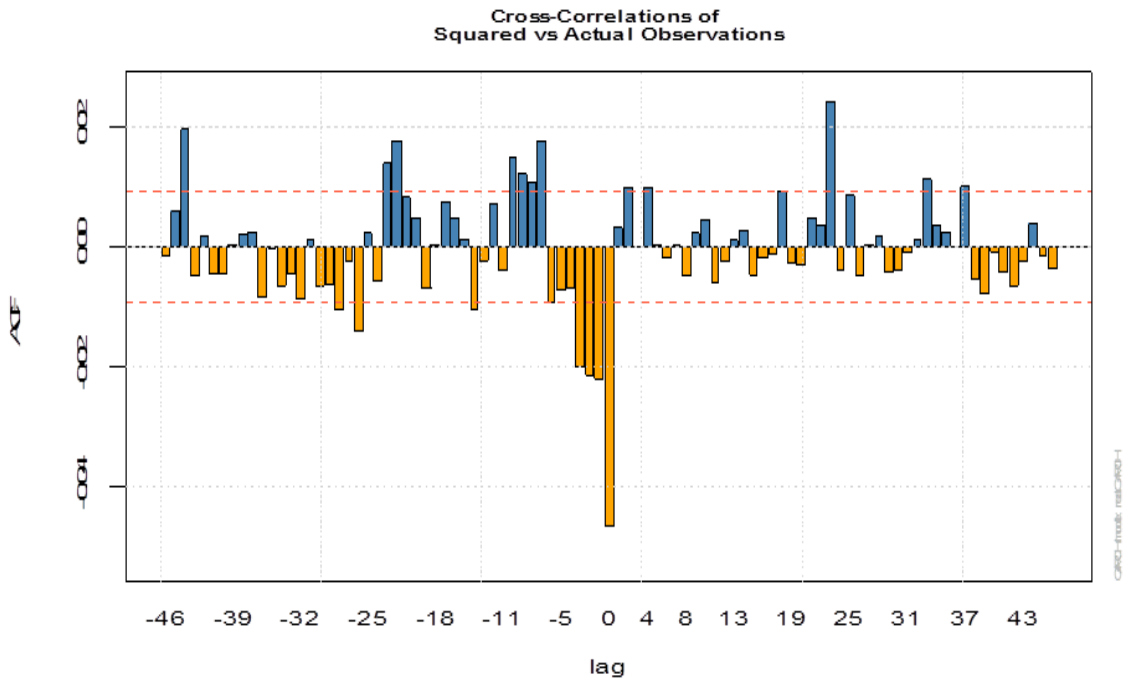


Fig.1.4.3 : Corrélations-croisées -EDF

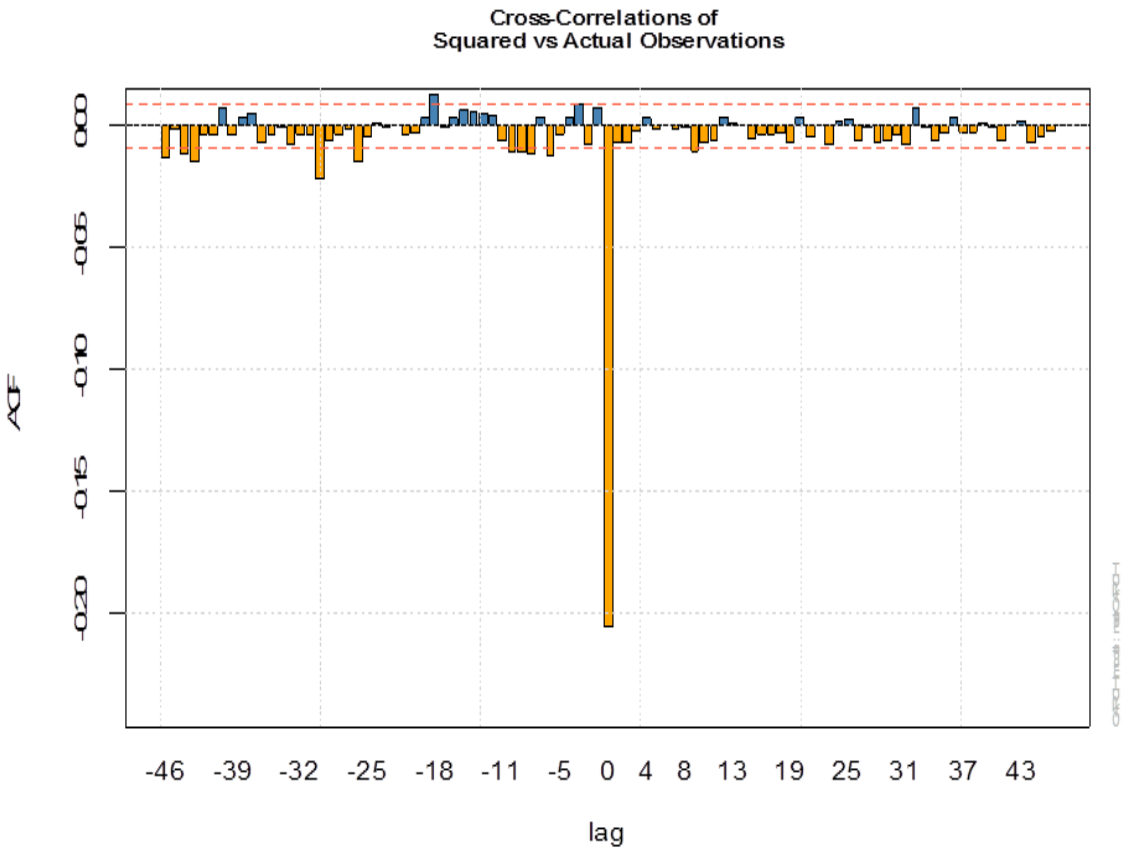


Fig.1.4.4 : Corrélations-croisées -ORANGE

ANNEXES : II

Critères d'information : Estimation Score-GARCH (1. 1)

Information Criteria

	Alstom	SG	EDF	ORANGE
Akaike	-9.9817	-10.023	-9.5288	-9.3819
Bayes	-9.9801	-10.021	-9.5273	-9.3802
Shibata	-9.9817	-10.023	-9.5288	-9.3819
Hannan-Quinn	-9.9812	-10.023	-9.5283	-9.3813

Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus normalisés : Score-GARCH (1. 1)

	Alstom		SG		EDF		ORANGE	
	Statistic	p-value	Statistic		Statistic	p-value	Statistic	p-value
Lag[1]	333.1	0	4.720	0.0298	0.5276	0.4676	262.7	0
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	333.1	0	4.735	0.0479	0.5455	0.6726	269.6	0
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	342.5	0	8.685	0.0199	0.5924	0.6726	276.9	0

Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus aux carrés normalisés : Score-GARCH (1. 1)

	Alstom		SG		EDF		ORANGE	
	Statistic	p-value	Statistic	p-value	Statistic	p-value	Statistic	p-value
Lag[1]	30.39	3.539e-08	17.81	2.439e-05	4.700e-06	0.9983	58.0	2.631e-14
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	48.36	1.869e-13	49.47	6.304e-12	4.857e-06	1.0000	127.0	0.000e+00
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	57.27	8.216e-15	63.12	2.607e-13	5.191e-06	1.0000	152.7	0.000e+00

-TEST DE BIAIS DE SIGNE : Score-GARCH (1. 1)

	ALSTOM		SG		EDF		ORANGE	
	t-value	prob sig	t-value	prob sig	t-value	prob sig	t-value	prob sig
Sign Bias	0.156	8.761e-01	1.308	1.907e-01	0.805	4.222e-01	1.222	2.218e-01
(-) Sign Bias	5.571	2.541e-08 ***	7.628	2.434e-14 ***	8.316	9.348e-17 ***	8.958	3.429e-19 ***
(+) Sign Bias	6.265	3.752e-10 ***	5.140	2.753e-07 ***	9.687	3.583e-22 ***	9.823	9.432e-23 ***
Joint Effect	74.899	3.809e-16 ***	85.533	1.995e-18 ***	163.955	2.568e-35 ***	185.515	5.679e-40 ***

-Variance conditionnelle

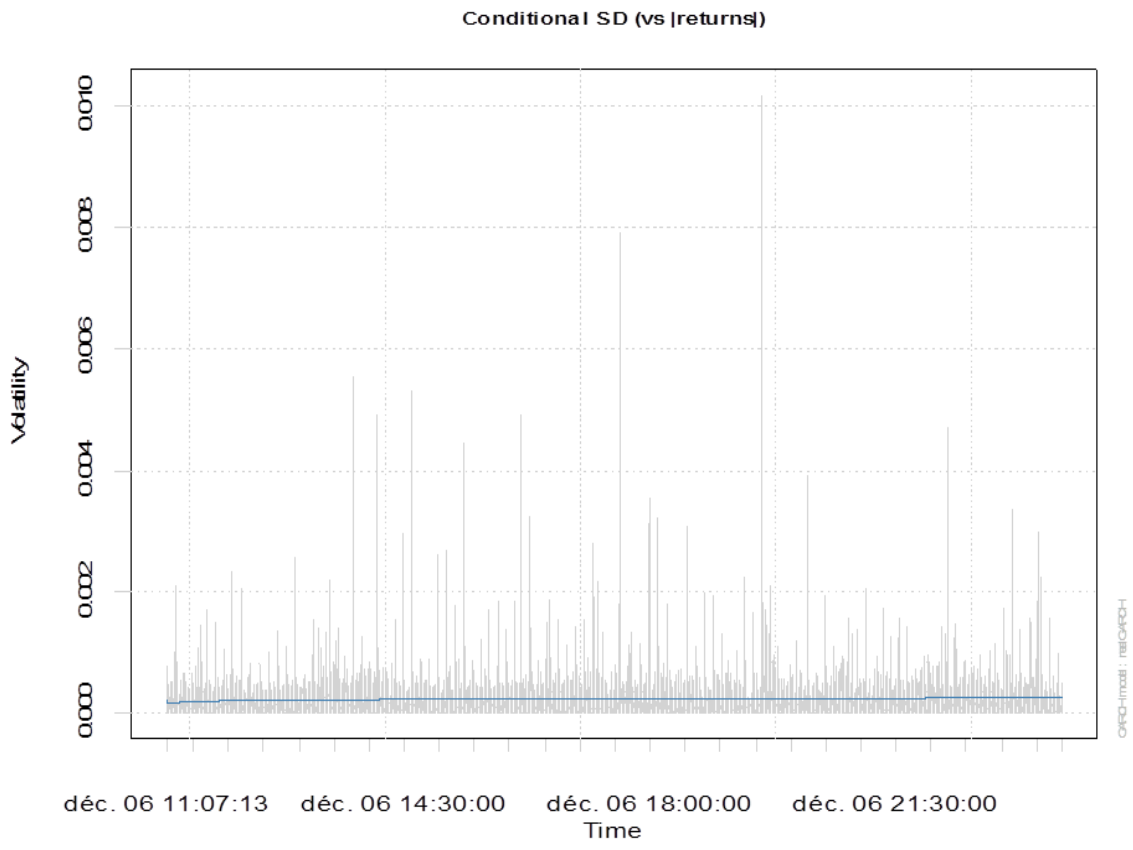


Fig. 2.1: variance conditionnelle-ALSTOM

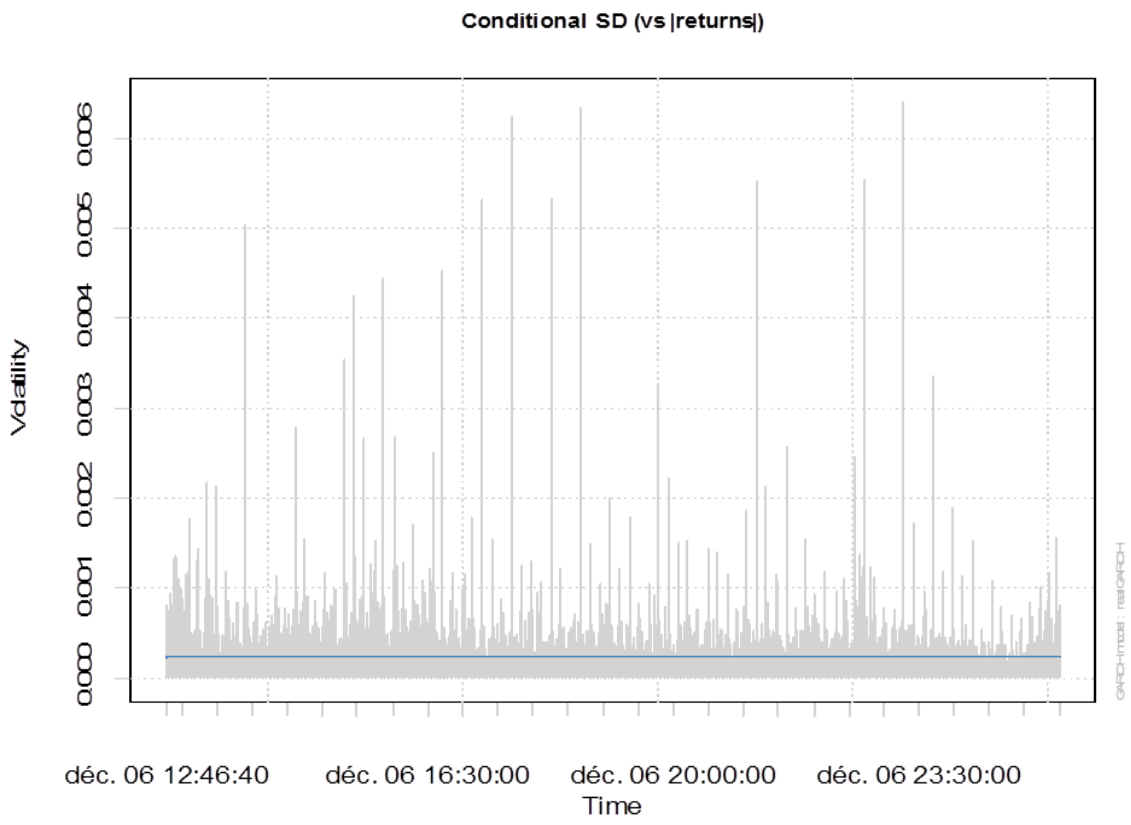


Fig. 2.2: variance conditionnelle-SG

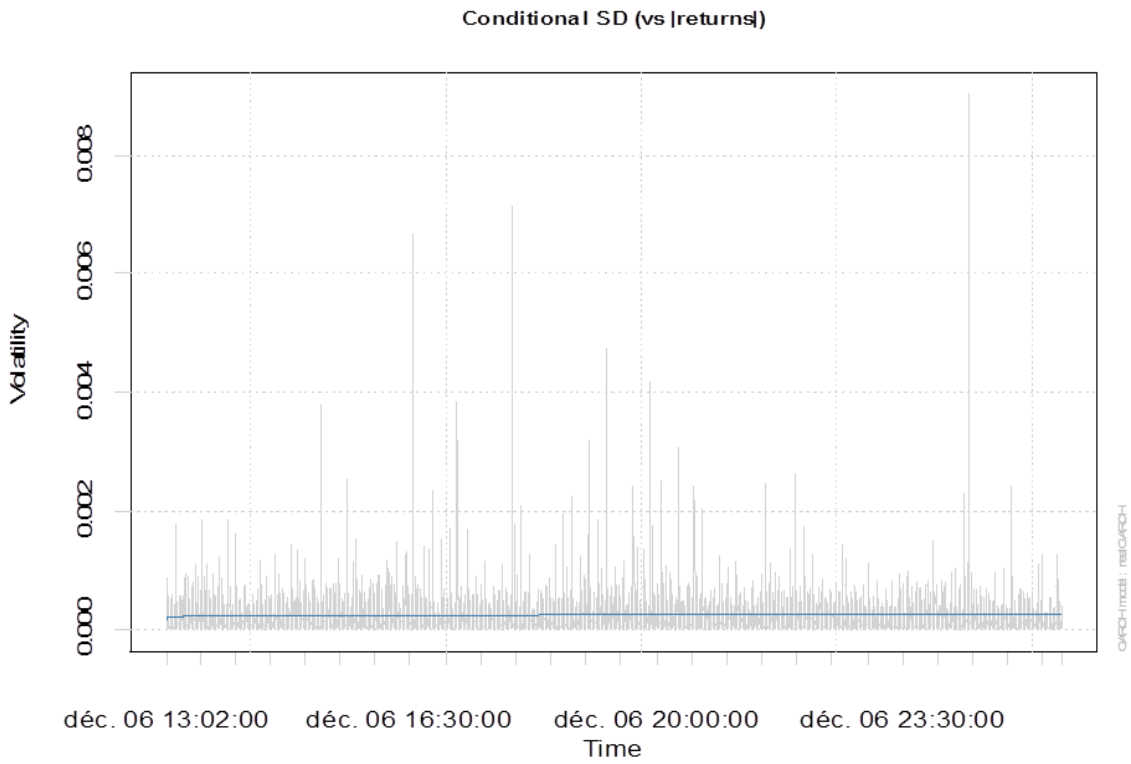


Fig. 2.3: variance conditionnelle-EDF

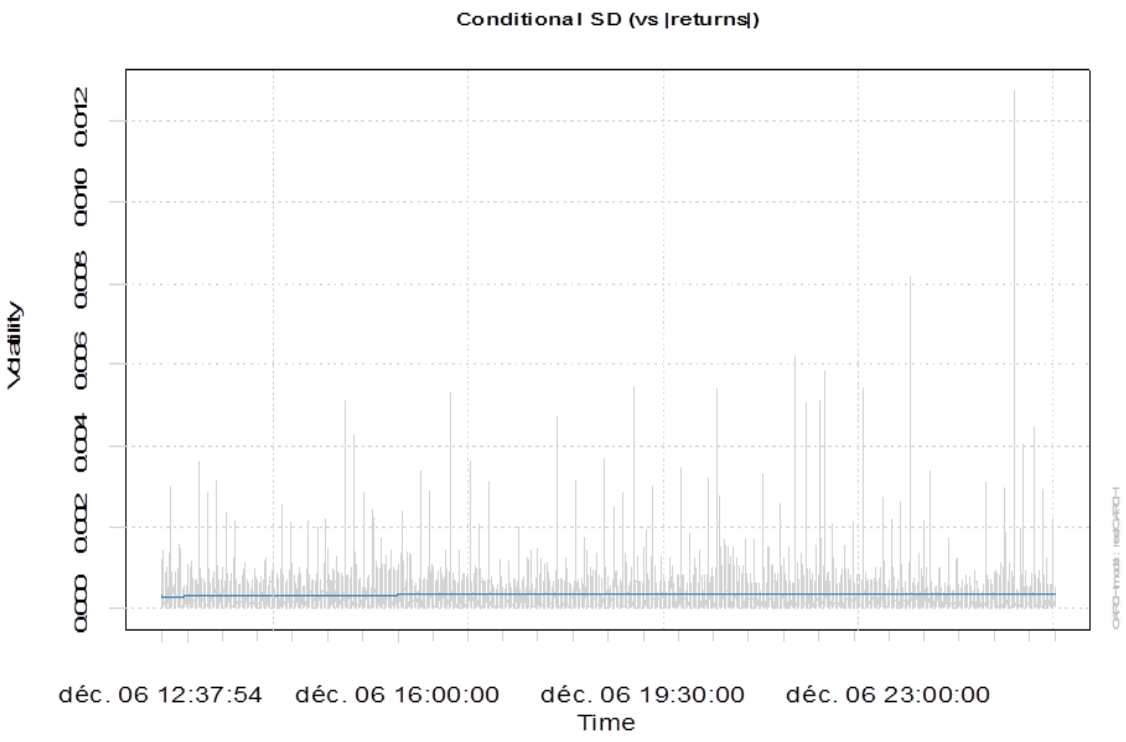


Fig. 2.4: variance conditionnelle-ORANGE

Densité empirique des résidus (Score-GARCH5 (1. 1)) normalisés

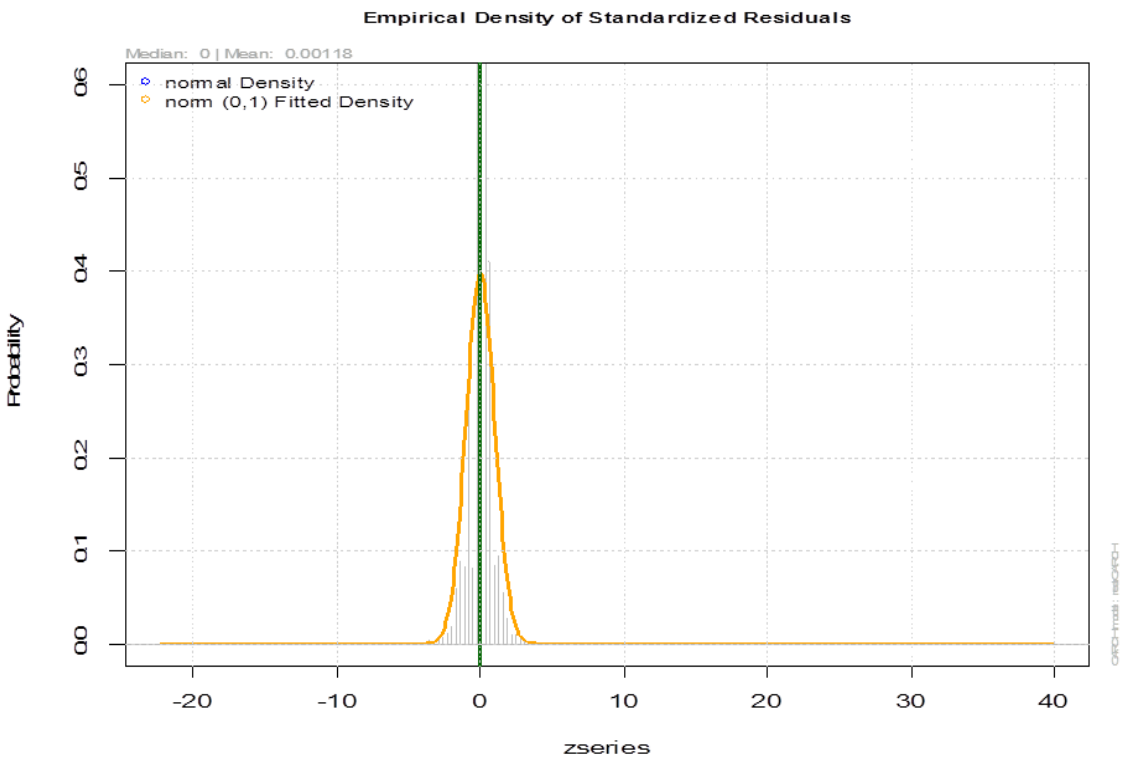


Fig. 3.1: densité empirique-ALSTOM

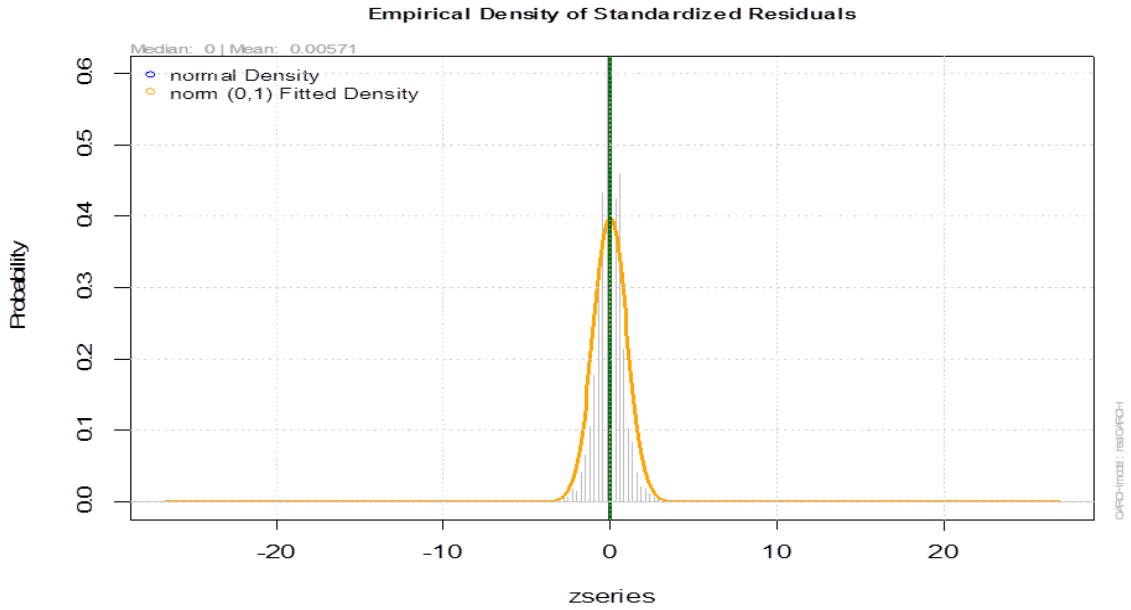


Fig. 3.2: densité empirique-SG

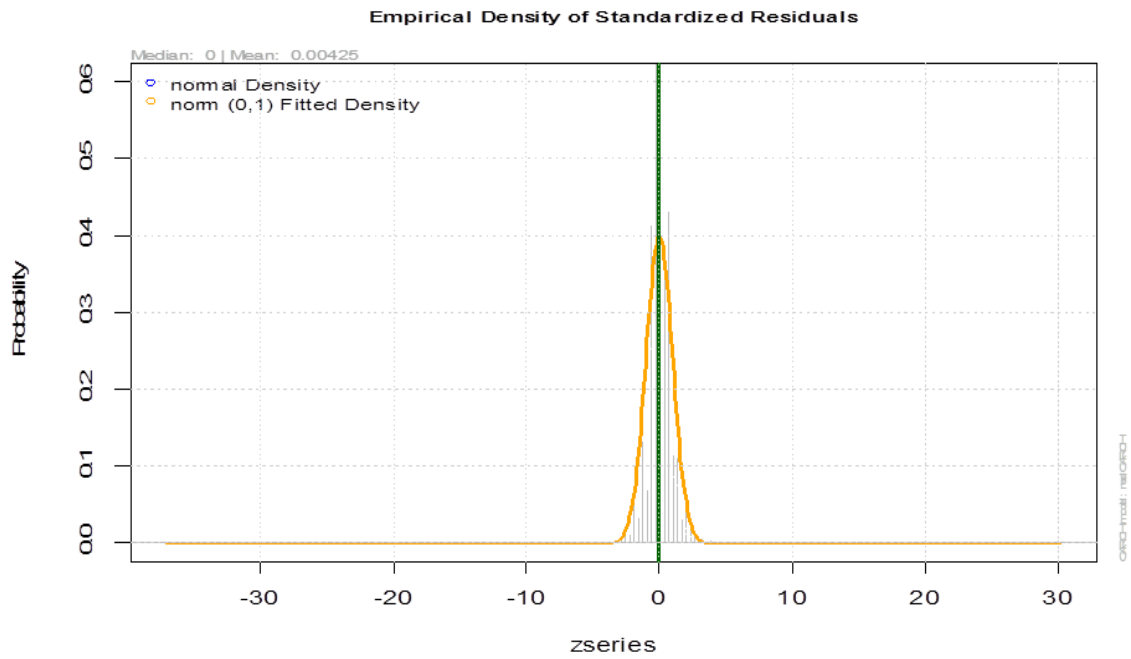


Fig. 3.3: densité empirique-EDF

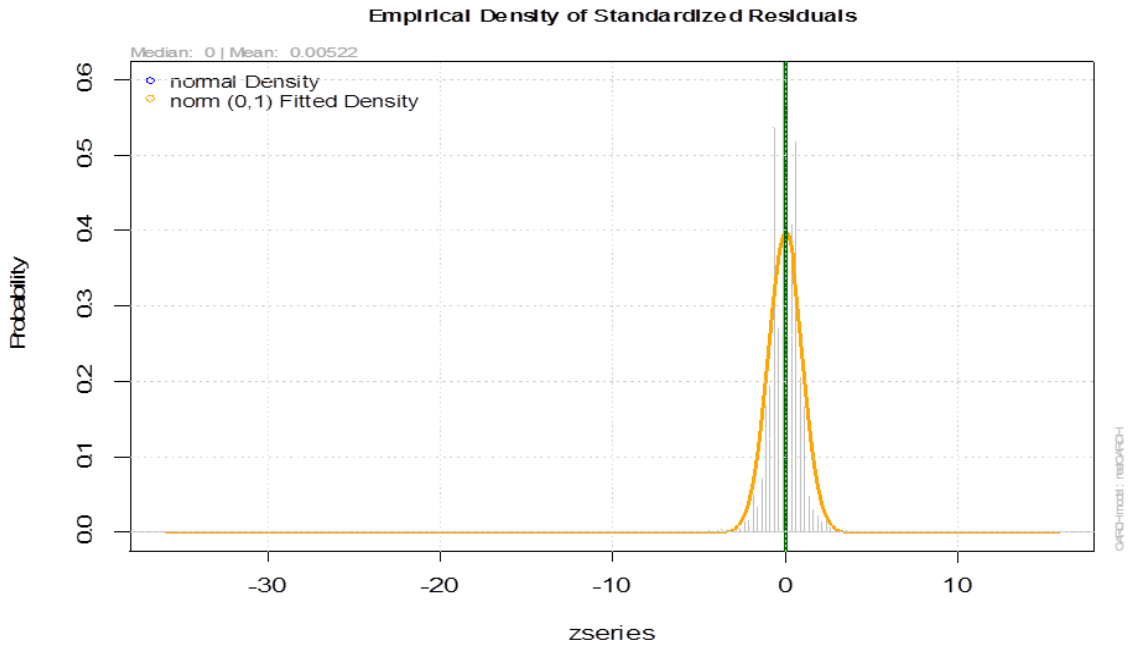


Fig. 3.4: densité empirique-ORANGE

- **QQ-PLOT de résidus : Score-GARCH (1. 1)**

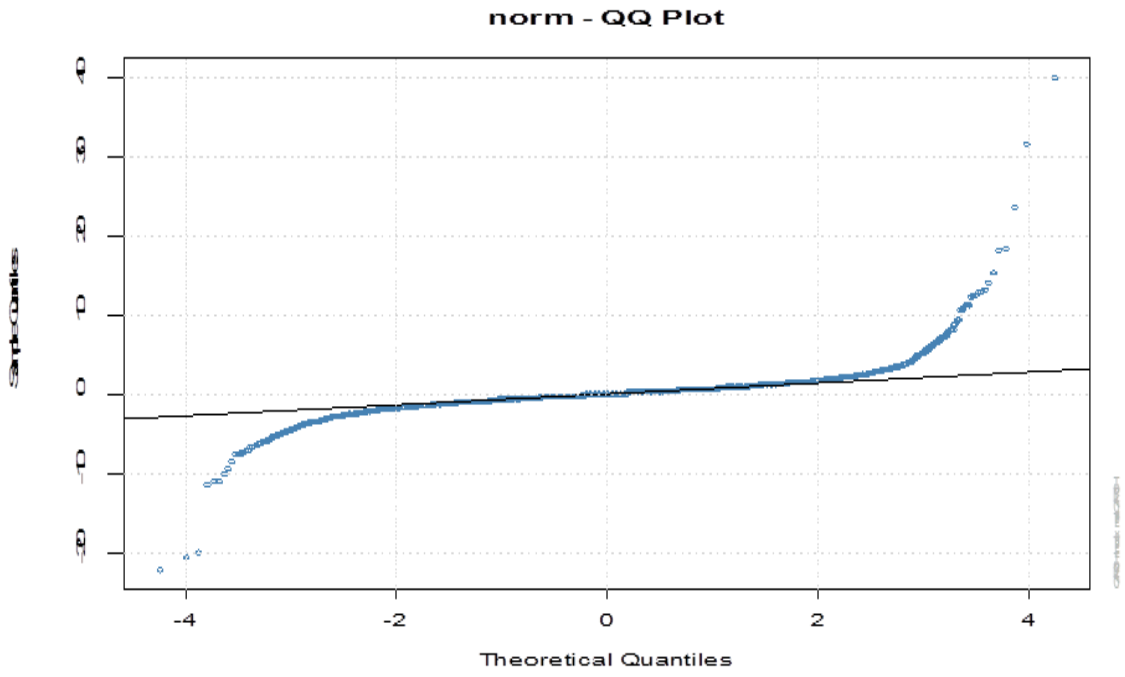


Fig. 4.1: QQ-Plot: ALSTOM

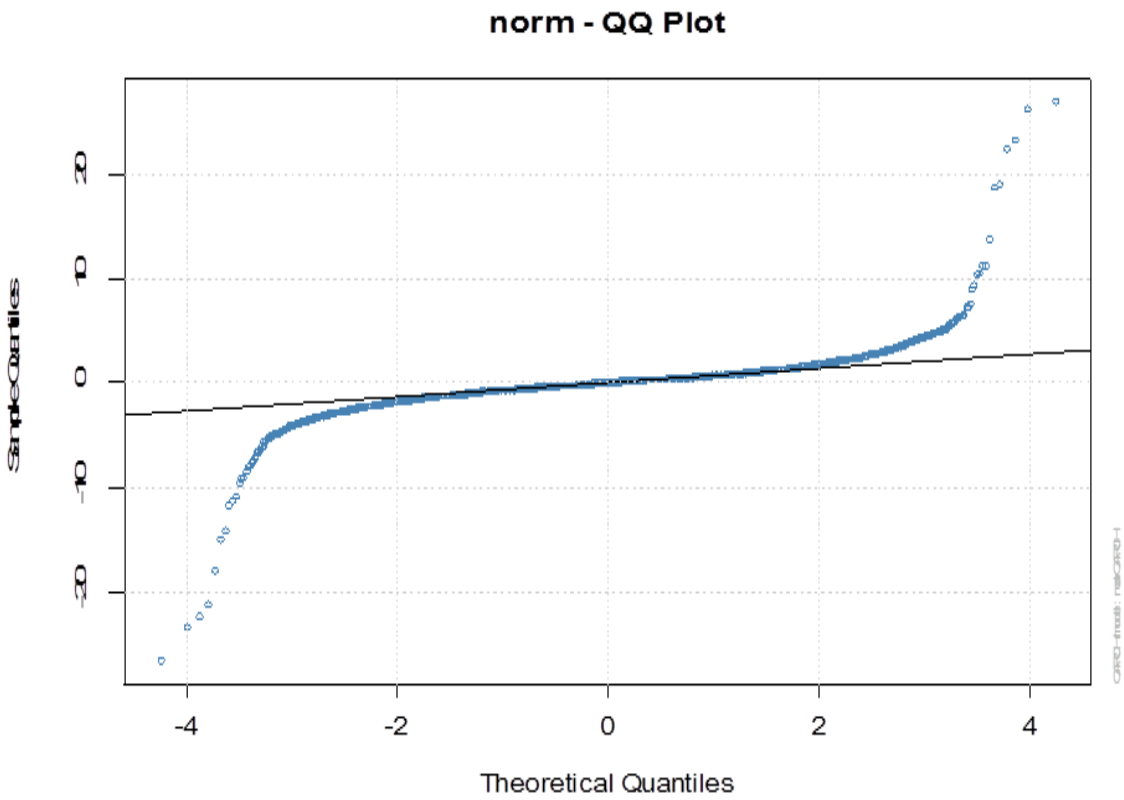


Fig. 4.2: QQ-Plot: SG

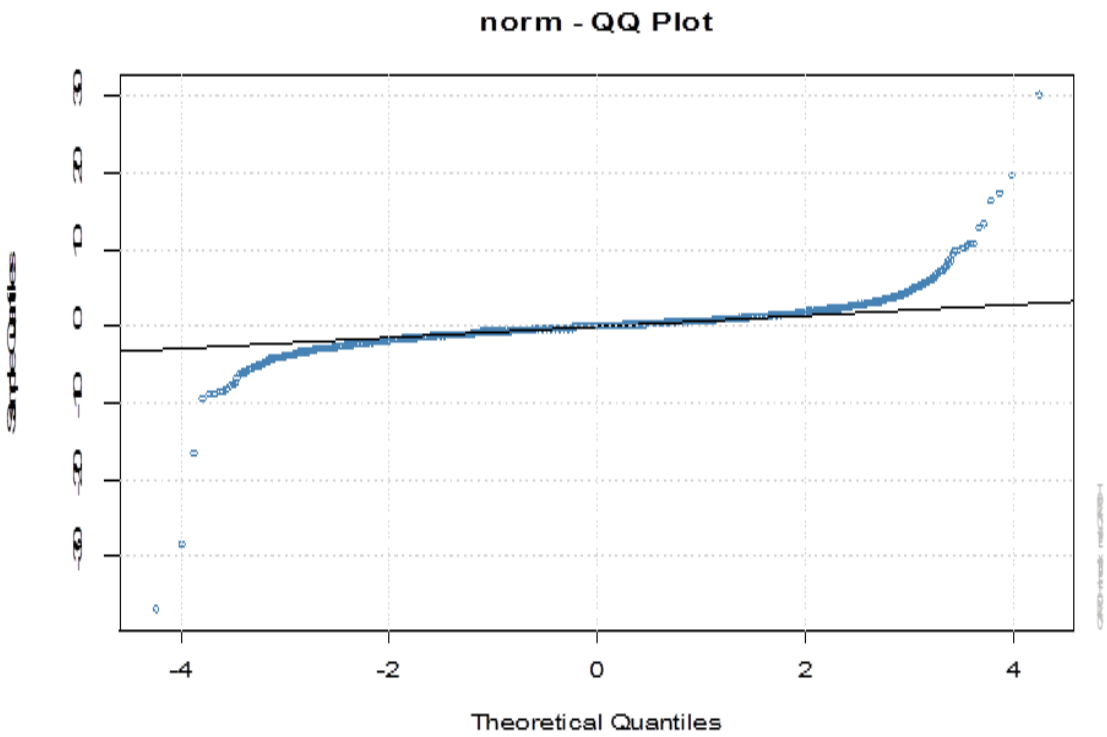


Fig. 4.3: QQ-Plot: EDF

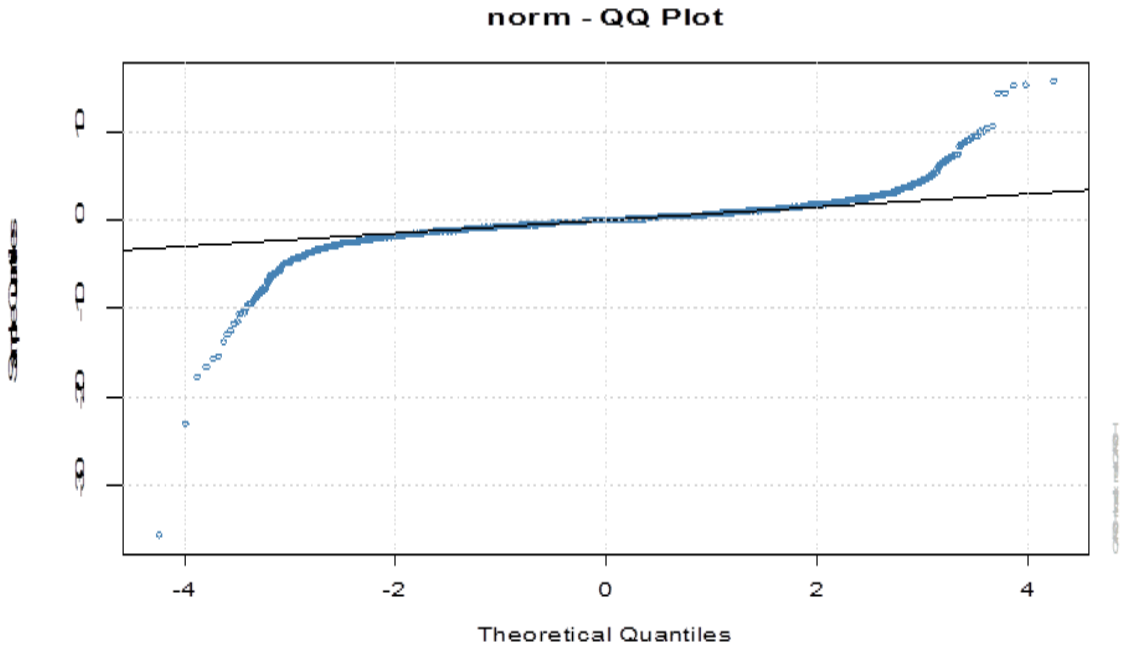
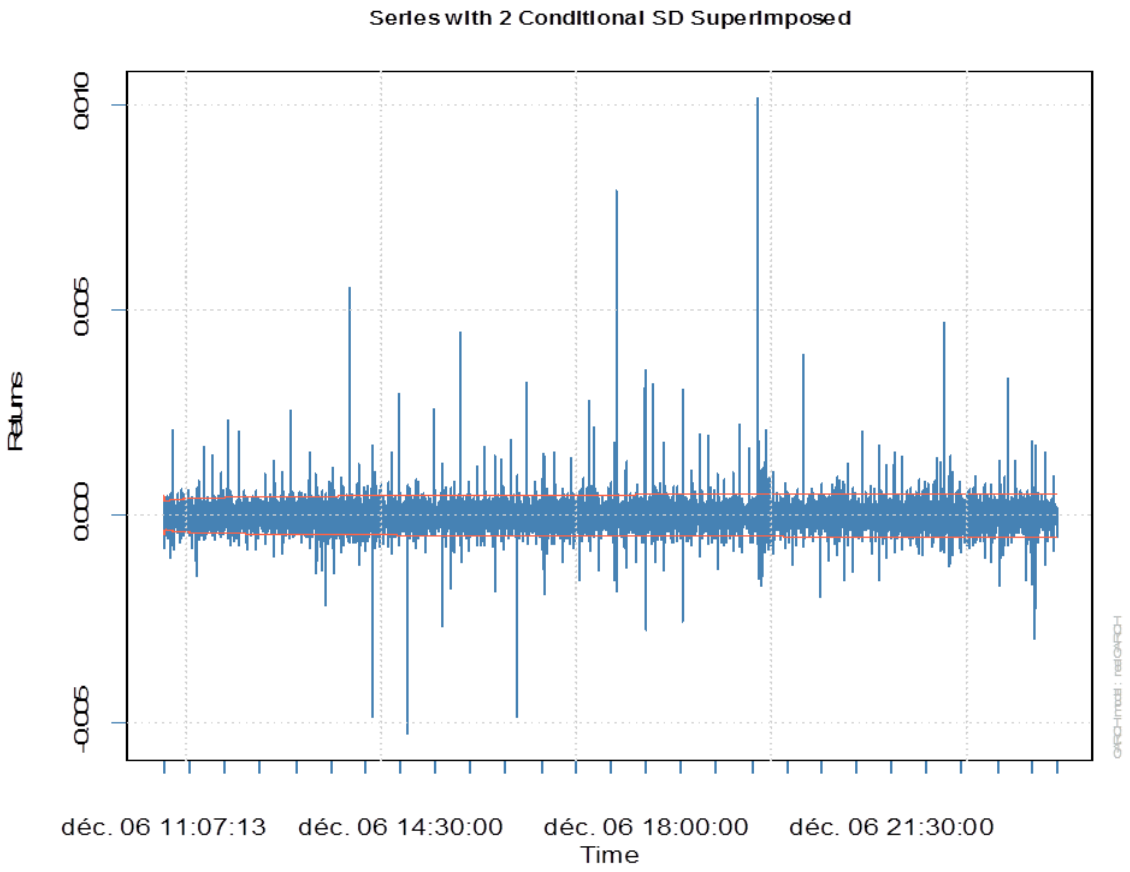
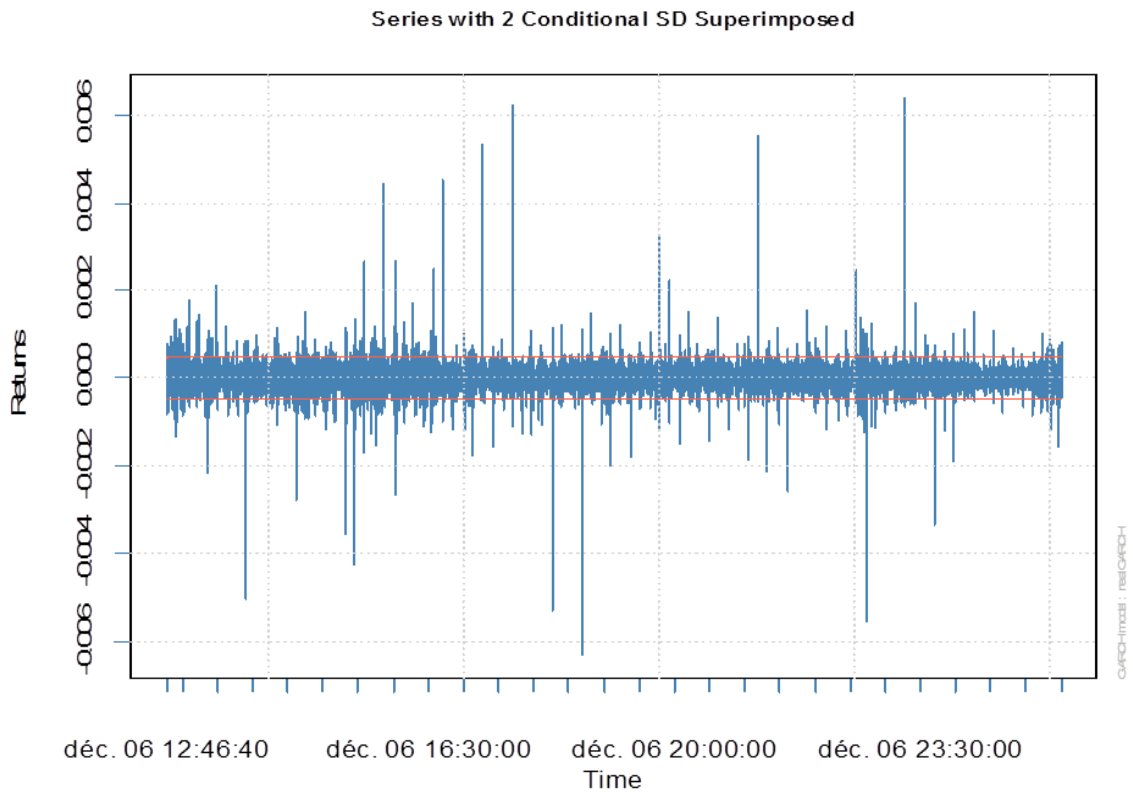


Fig. 4.4: QQ-Plot: ORANGE

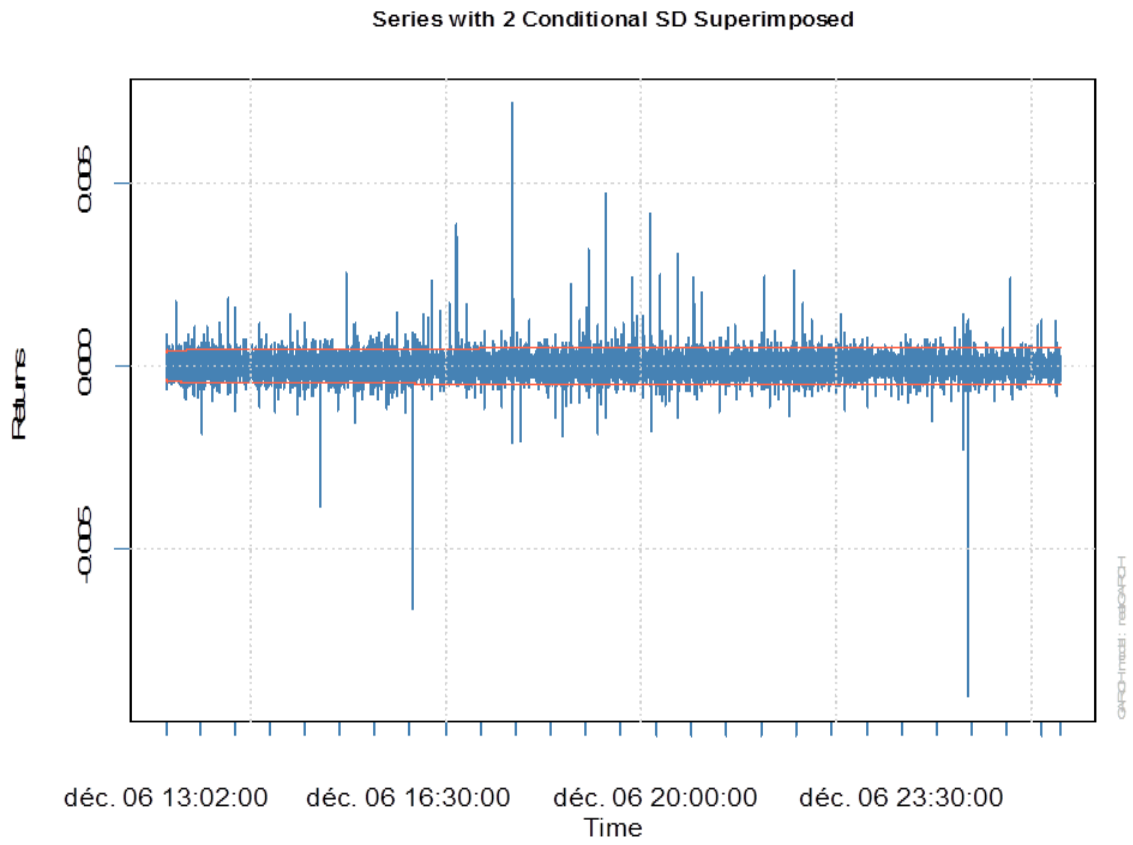
- **Figures 2.5 : Volatilités conditionnelles superposées**



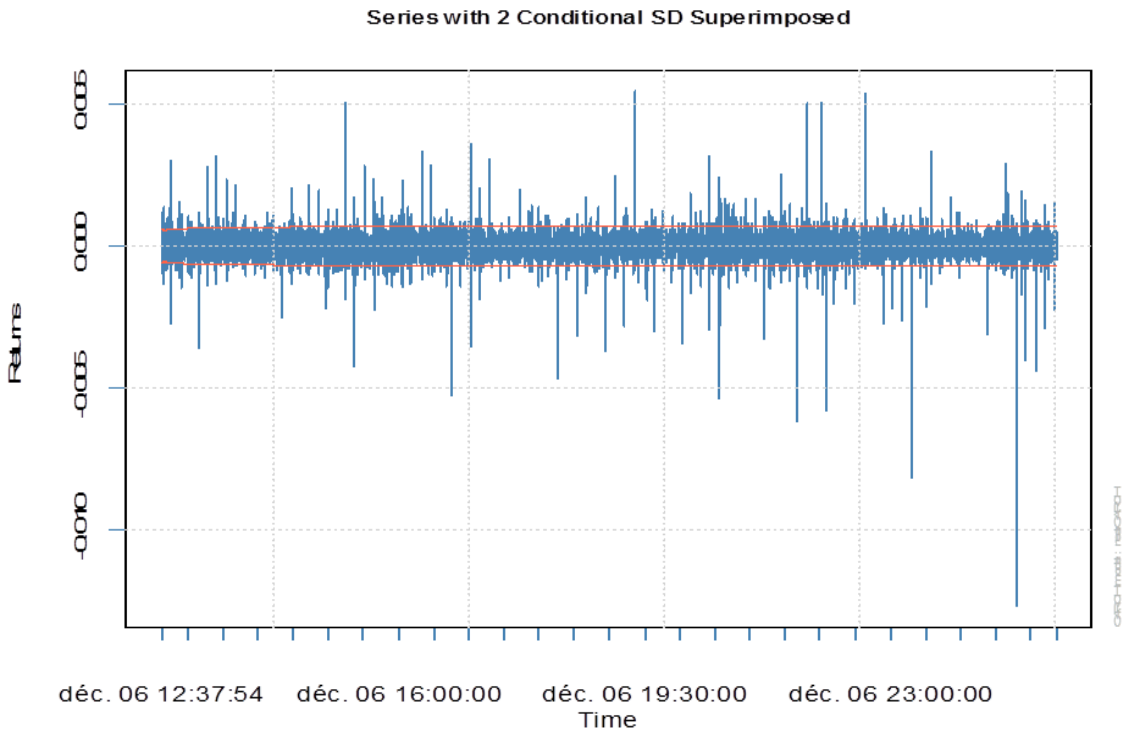
Volatilités conditionnelles superposées - ALSTOM



Volatilités conditionnelles superposées - SG

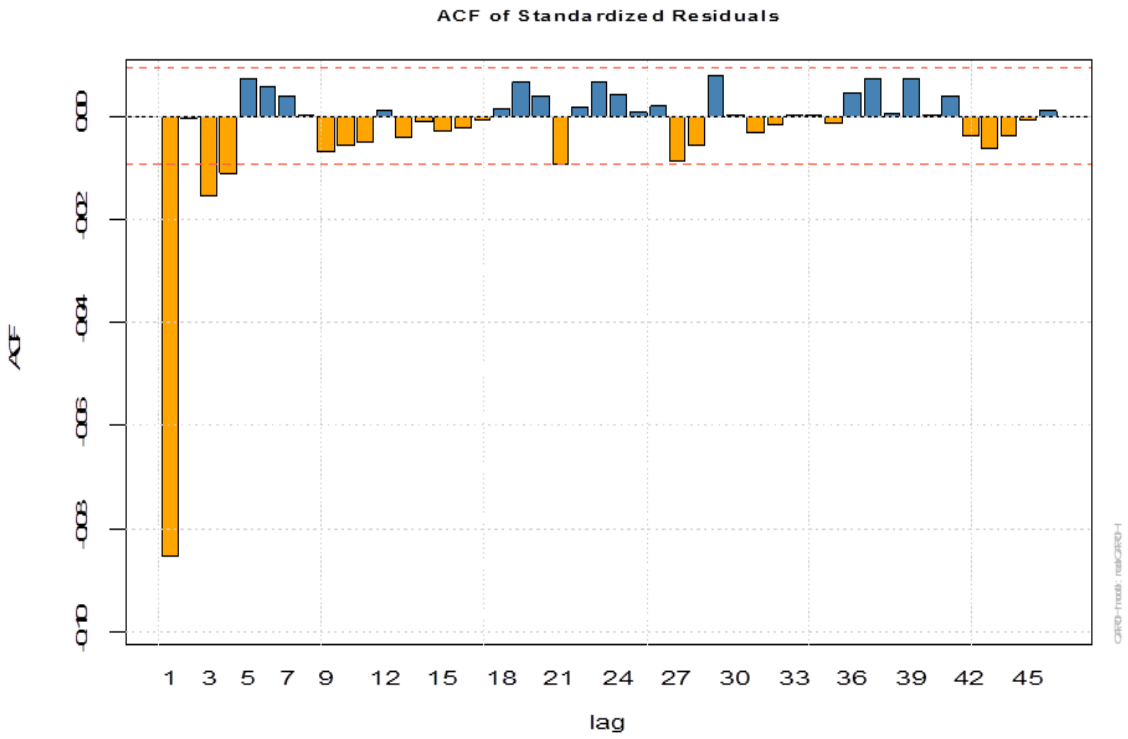


Volatilités conditionnelles superposées - EDF

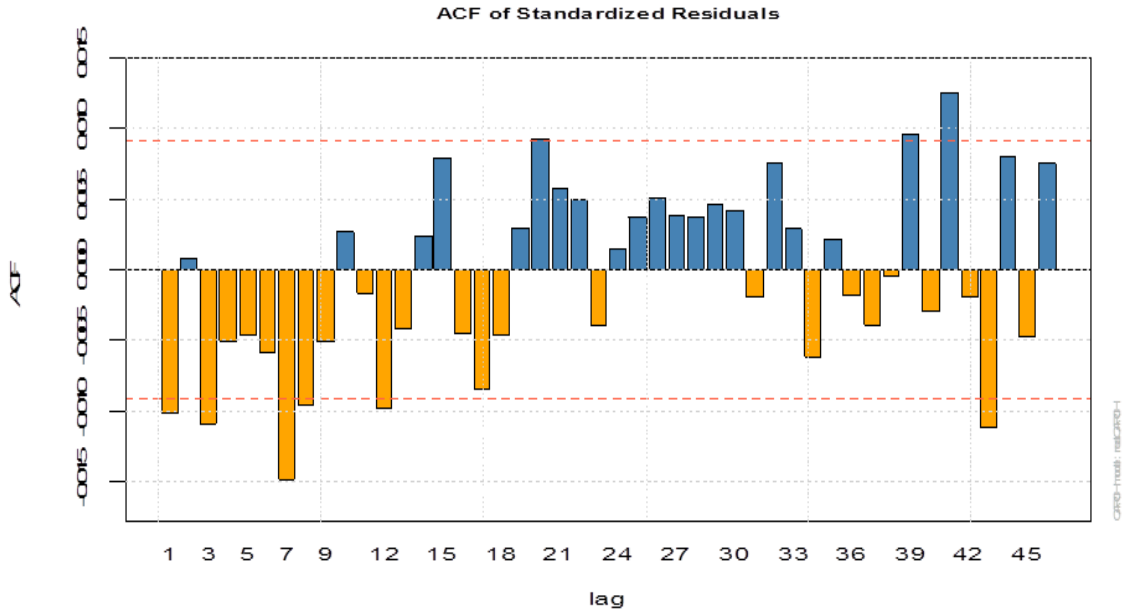


Volatilités conditionnelles superposées -- ORANGE

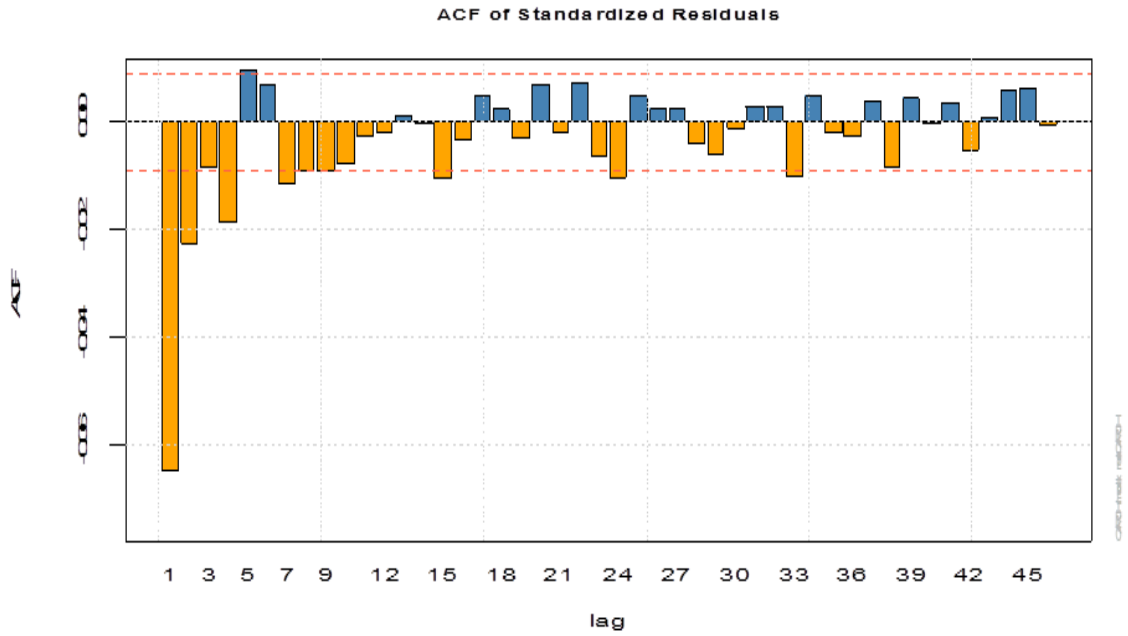
Figures 2.6 : Fonctions d'autocorrélation de résidus Score-GARCH (1. 1)



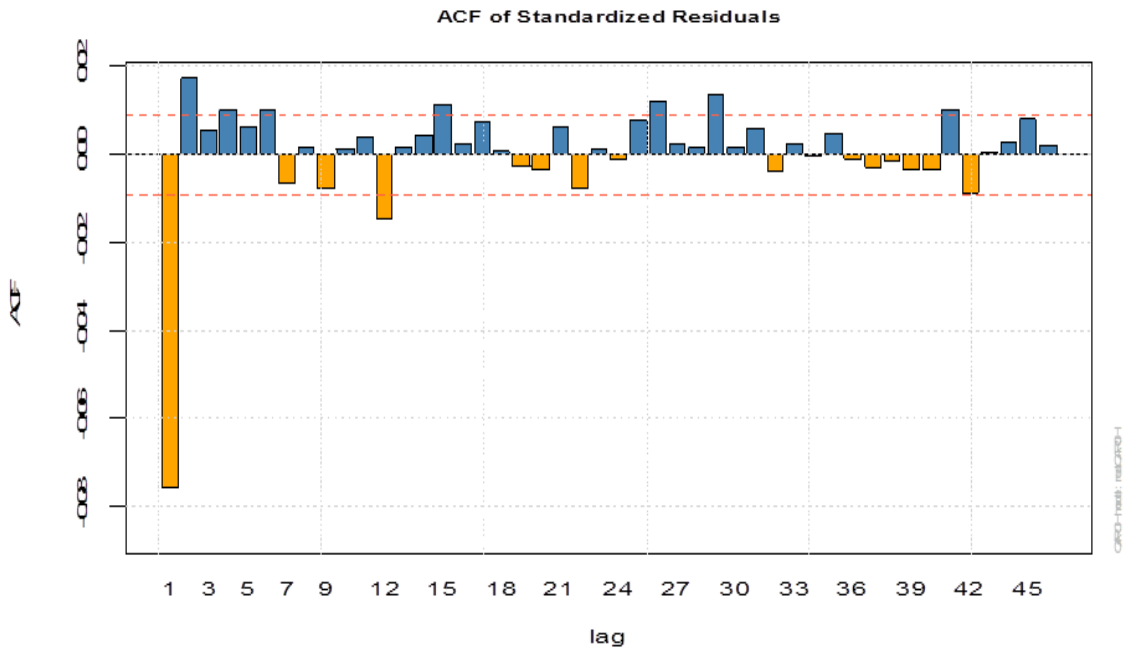
ACF résiduelle - ALSTOM



ACF résiduelle - SG



ACF résiduelle – EDF



ACF résiduelle - ORANGE

- Figures 2.7: Fonction d-Autocorrélation des résidus aux carré

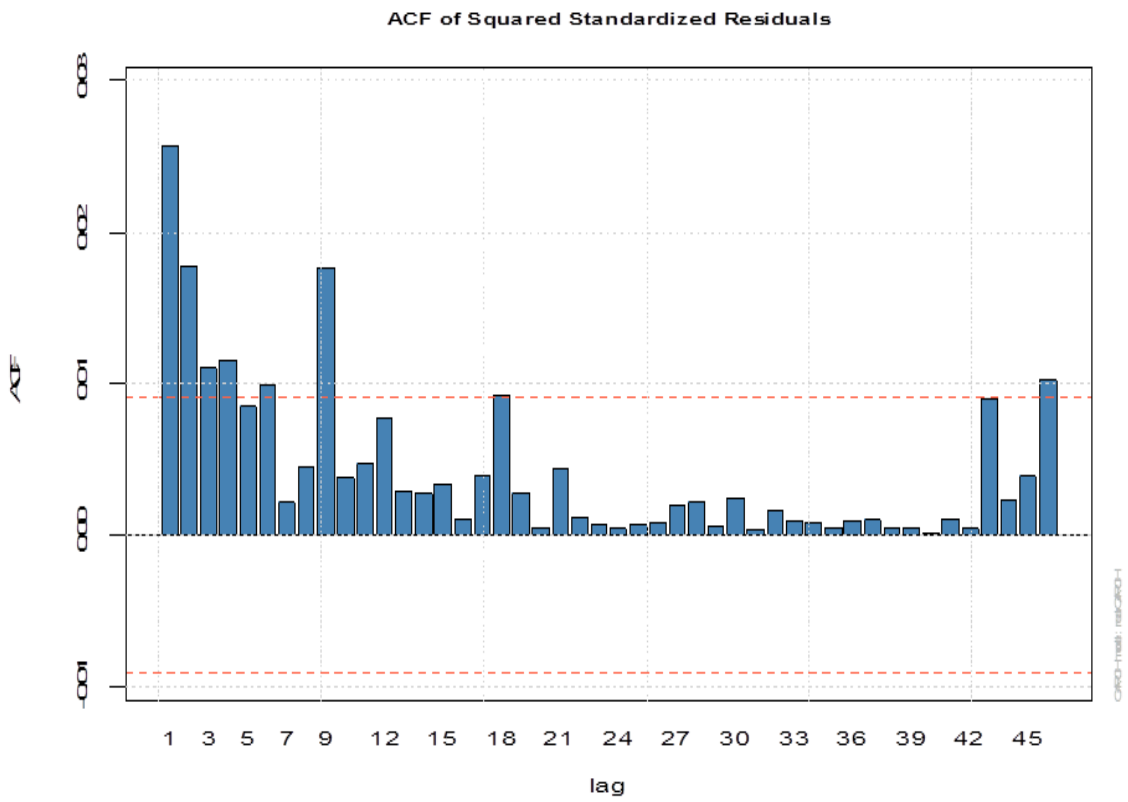


Fig. 7.1: ACF de residus au carré- ALSTOM

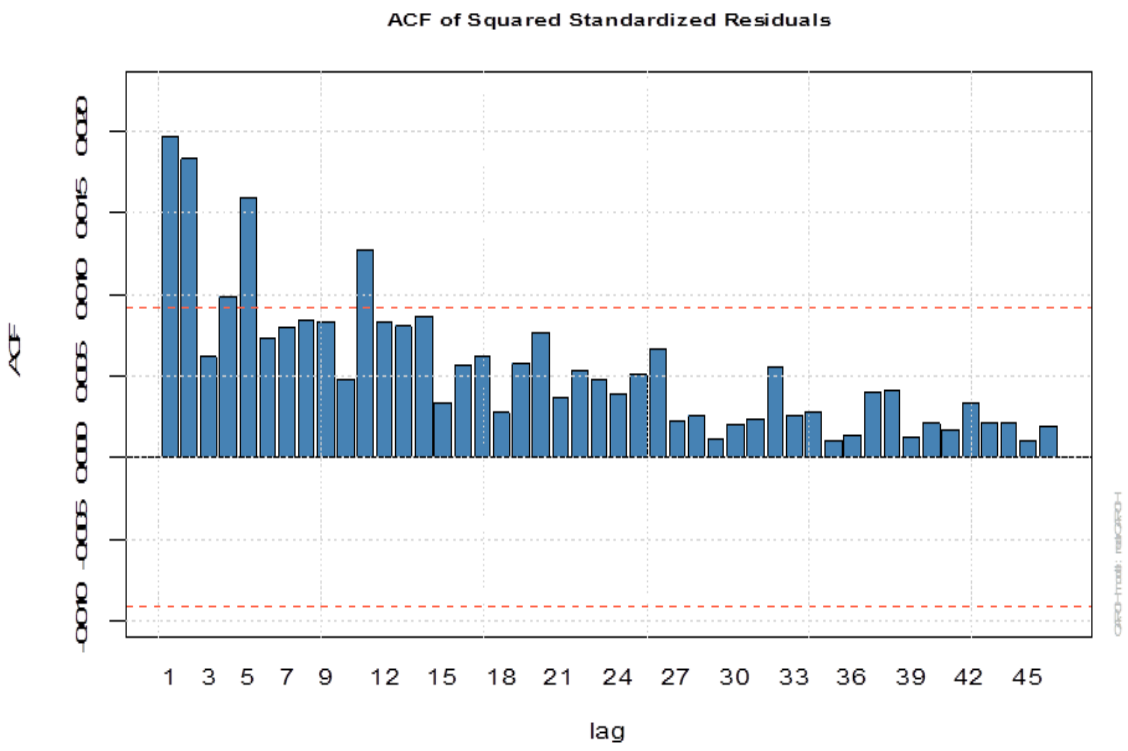


Fig. 7.2: ACF de residus au carré-SG

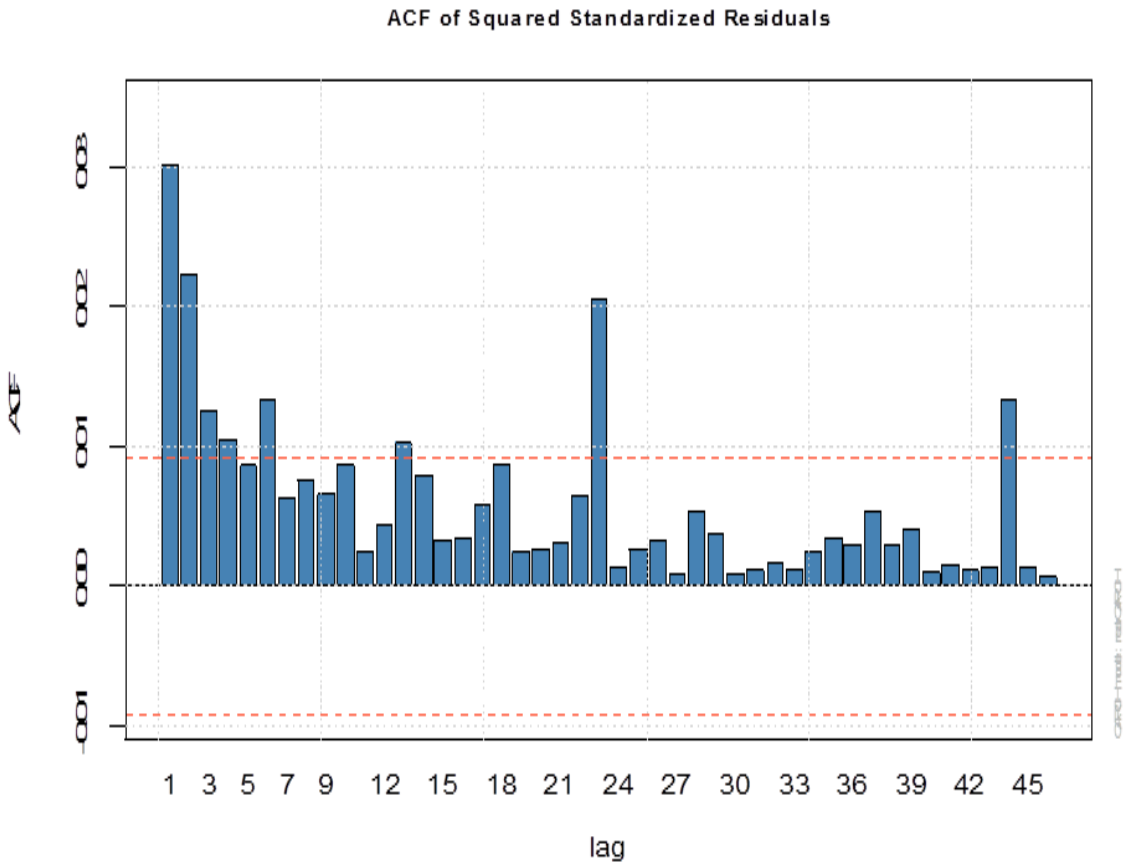


Fig. 7.3: ACF de residus au carré-EDF

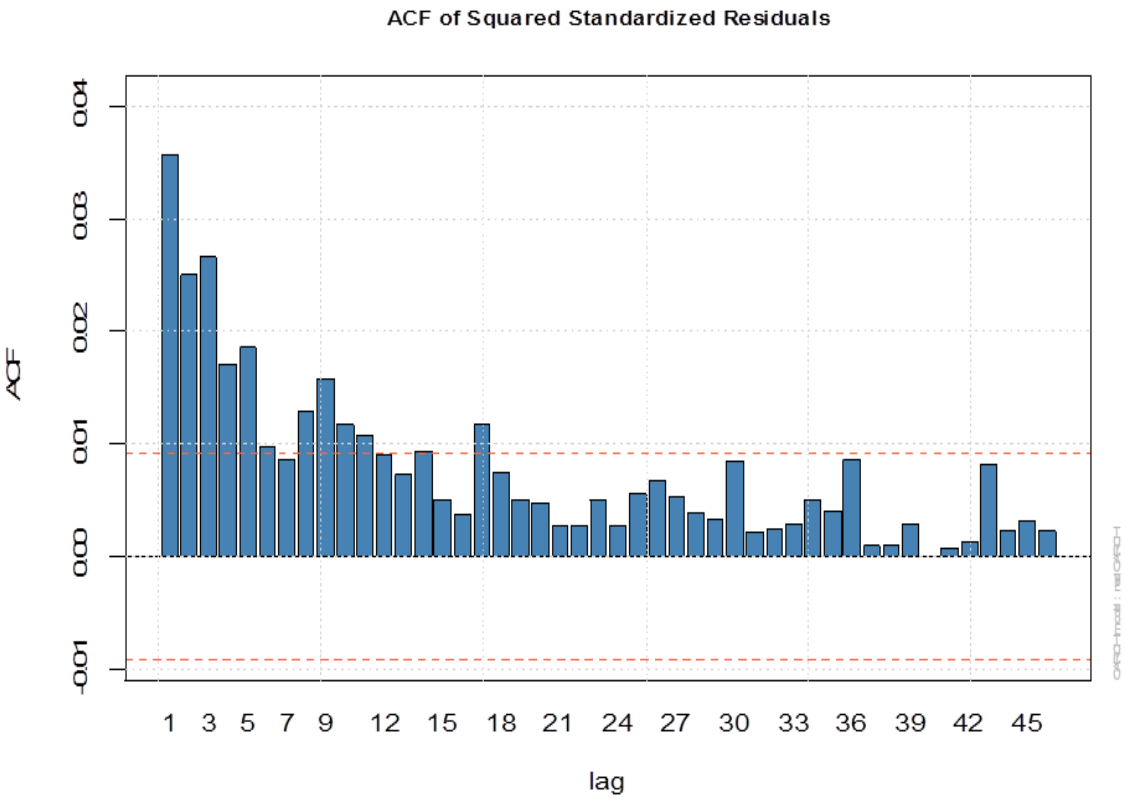


Fig. 7.4: ACF de residus au carré-ORANGE

ANNEXES III

VaR et lien avec la réglementation européenne

Dans le prolongement de la réforme Bâle II pour les banques, l'Union Européenne a établi un nouveau cadre réglementaire en matière de gestion des risques pour les compagnies d'assurance, baptisé « Solvency II ». Par rapport à la directive Solvency I, cette réforme est beaucoup plus sensible aux risques réels supportés par la compagnie. Différents niveaux d'adaptation sont possibles, jusqu'au développement de modèles internes. Solvency II impose ainsi un véritable dispositif de mesure et de supervision du risque.

L'un des piliers de cette réforme détermine des exigences quantitatives à respecter, notamment sur l'harmonisation des provisions et l'instauration de minima de fonds propres. Le Minimum de Solvabilité Requis est l'une de ces exigences. Son objectif est de renforcer les assurances contre la répétition de situations exceptionnelles.

Plusieurs méthodes de calcul sont à l'étude :

Risk-Based Capital

Méthode factorielle, chaque type de risque est couvert par un montant de capital donné.

Value-at-Risk

Montant de capital permettant d'avoir une probabilité de ruine inférieure à 0,5% sur une année, en prenant compte de l'ensemble des risques encourus par l'entité.

Définition probabiliste de la Value-at-Risk

Définition de la VaR

La Value-at-Risk définie pour un taux de couverture de α correspond au quantile d'ordre α de la distribution de profits et pertes (profits and looses, P&L) associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

	VaR Gaussienne (1%; 1h)	VaR Gaussienne(5%; 1h)
ALSTOM	-0,191041671	-0,135262152
SG	-0,181947642	-0,128709562
EDF	-0,181038627	-0,128100503
ORANGE	-0,260013112	-0,183959454

VaR Gaussienne à une période d'une heure et au quantile 1%, 5% et 10%

	VaR Gaussienne (1%; 1j)	VaR Gaussienne(5%; 1j)	VaR Gaussienne(10%; 1j)
ALSTOM	-0,556977396	-0,394353551	-0,286734843
SG	-0,530463974	-0,375249631	-0,272534333
EDF	-0,527813762	-0,373473936	-0,271337339
ORANGE	-0,758061973	-0,536329362	-0,389594463

VaR Gaussienne à une période d'un jour et au quantile 1%, 5% et 10%

	VaR Historique(1%; 1h)	VaR Historique(5%;1h)	VaR Historique(10%;1h)
ALSTOM	-0,139610223	-0,080020747	-0,059928958
SG	-0,212266291	-0,138598706	-0,093669308
EDF	-0,166283806	-0,086429335	-0,063046649
ORANGE	-0,27635217	-0,148887087	-0,108495663

VaR Historique à une période d'une heure et au quantile 1%, 5% et 10%

	VaR Historique(1%; 1j)	VaR Historique(5%; 1j)	VaR Historique(10%; 1j)
ALSTOM	-0,407030248	-0,233298564	-0,174721435
SG	-0,618857265	-0,404081193	-0,273090614
EDF	-0,484796436	-0,251982648	-0,18381099
ORANGE	-0,805698106	-0,434076722	-0,316316495

VaR Historique à une période d'un jour et au quantile 1%, 5% et 10%

Méthode Bootstrap de Simulation Historique

C'est une méthode stochastique alternative à la simulation historique. L'idée consiste à construire plusieurs échantillons de rendements suivant la même loi que l'échantillon historique. Pour construire ces échantillons, on va tirer au hasard et avec remise des observations dans l'échantillon historique.

A partir de chaque nouvel échantillon ainsi constitué, on estime alors la VaR par la méthode du percentile utilisée dans la Simulation Historique standard.

Au final, on dispose de S estimations de la VaR et on définit une estimation en faisant la moyenne de ces estimations.

Soit $\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^{T}$ une suite de rendements tirés au hasard avec remise dans l'échantillon des rendements historiques, et soit $\widehat{VAR}^s(\alpha)$ la VaR-HS associée à cet échantillon de rendements bootstrappés (pour un taux de couverture de α). L'estimateur BHS de la VaR correspond à la moyenne empirique des VaR-HS obtenues à partir des S échantillons bootstrap :

$$\widehat{VAR}(\alpha) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\widehat{VAR}^s(\alpha)$$

avec pour $s = 1, \dots, S$

$$\widehat{VAR}^s(\alpha) = percentile\left(\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^{T}, 100\alpha\right)$$

Par ailleurs, on peut bâtir un intervalle de confiance pour la VaR pour un risque β donné :

$$IC_{1-\beta}(VAR) = \left[\widehat{VAR}_{[\beta/2]}, \widehat{VAR}_{[1-\beta/2]}\right]$$

Avec

$$\widehat{VAR}_{[\beta/2]} = percentile\left(\left\{\widehat{VAR}^s(\alpha)\right\}_{s=1}^{S}, 100 * (\beta/2)\right)$$

$$\widehat{VAR}_{[1-\beta/2]} = percentile\left(\left\{\widehat{VAR}^s(\alpha)\right\}_{s=1}^{S}, 100 * (1-\beta/2)\right)$$

Remarque : On peut combiner la méthode de Bootstrap avec d'autres méthodes d'estimation de la VaR. Une fois les échantillons bootstrap constitués, on calcule la VaR avec la méthode désirée à partir des nouvelles distributions générées, et on définit une estimation de la VaR en faisant la moyenne des différentes estimations basées sur le ré-échantillonnage.

Distribution de Champernowne

L'idée consiste à transformer l'échantillon initial $\{X_1, \dots, X_n\}$ en un nouvel échantillon $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ où $Y_i = F_{\widehat{\alpha},\widehat{M},\widehat{c}}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$. On doit estimer les paramètres α, M, c de cette distribution de telle sorte que la distribution de Champernowne ainsi estimée soit proche de la distribution de l'échantillon original $\{X_1, \dots, X_n\}$. Ainsi, l'échantillon transformé $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ aura une distribution proche de la distribution uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

Ceci peut être justifié par le théorème suivant :

Pour une variable aléatoire de fonction de répartition F, on note G son inverse :

$$G(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\}$$

Si U désigne une variable aléatoire réelle uniforme sur $[0; 1]$, alors $X = G(U)$ a pour fonction de répartition F .

La fonction de répartition de la distribution de Champernowne est :

$$\forall y \geq 0 \qquad F_{\alpha,M,c}(y) = \frac{(y+c)^\alpha - c^\alpha}{(y+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha}$$

où $\alpha > 0$, $c \geq 0$ et $M > 0$

La densité associée est définie par :

$$\forall y \geq 0 \qquad f_{\alpha,M,c}(y) = \frac{\alpha(y+c)^{\alpha-1}((M+c)^{\alpha} - c^{\alpha})}{((y+c)^{\alpha} + (M+c)^{\alpha} - 2c^{\alpha})^2}$$

On remarque que $F_{\alpha,M,c}(M) = \frac{1}{2}$. On estime donc le paramètre M par la médiane empirique de l'échantillon $\{X_1, \dots, X_n\}$. Les estimateurs des deux autres paramètres α et c sont obtenus avec la méthode du maximum de vraisemblance.

Largeur de fenêtre *b*

La constante b correspond à la largeur de fenêtre utilisée dans les estimateurs à noyaux de Padgett, Park et les estimateurs basés sur des noyaux Bêta. On prend :

$$b = \left(\frac{p(1-p)}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aged-weighted HS o Méthode Hybride

Méthodologie de calcul de la VaR Hybride

On considère une largeur de fenêtre T_e ; On associe à chacune des T_e rendements les plus récents $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-T_e}$ une pondération décroissante avec le temps, i.e. plus la rentabilité est ancienne, plus la pondération est faible. Les pondérations sont donc de la forme suivante :

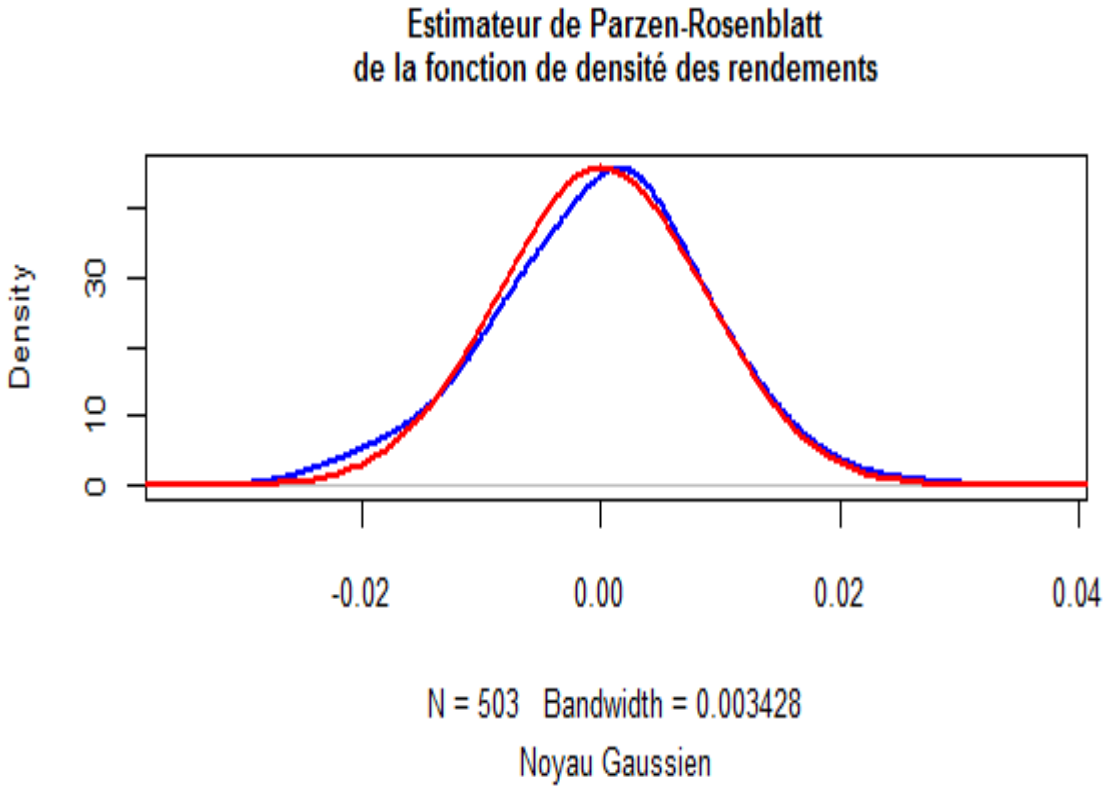
$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T_e}}\ pour\ r_{t-1}, \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T_e}}\right)\lambda\ pour\ r_{t-2}$$

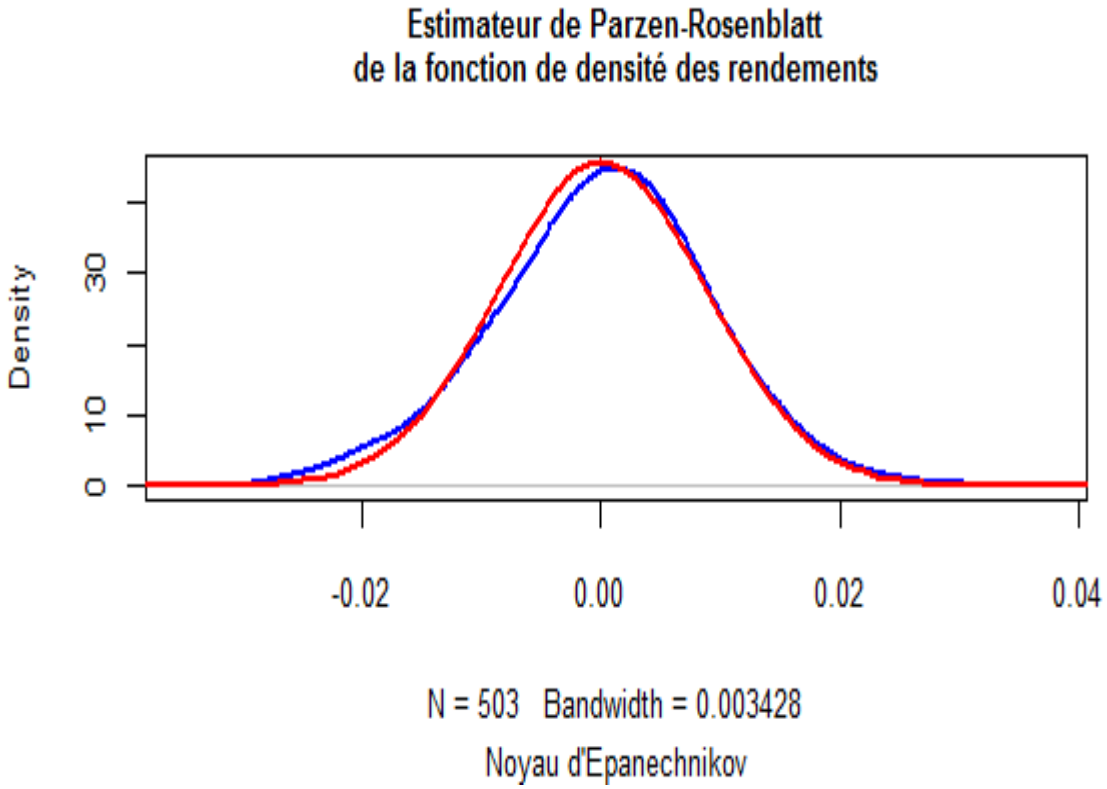
$$\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T_e}}\right)\lambda^2\ pour\ r_{t-3}, \dots, \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{T_e}}\right)\lambda^{T_e-1}\ pour\ r_{t-T_e}$$

$$avec\ 0 < \lambda < 1$$

On ordonne ensuite les rentabilités (et les pondérations qui leur sont associées) dans l'ordre croissant.

On somme les poids ordonnés suivant les niveaux de rentabilité croissants jusqu'à atteindre le taux de couverture de α désiré. La VaR Hybride est alors égale à la rentabilité correspondant au dernier poids utilisé dans la sommation.


Estimateur de Parzen-Rosenblatt
de la fonction de densité des rendements
Density
0
10
30
-0.02
0.00
0.02
0.04
N = 503 Bandwidth = 0.003428
Noyau Gaussien


Estimateur de Parzen-Rosenblatt
de la fonction de densité des rendements
Density
0
10
30
-0.02
0.00
0.02
0.04
N = 503 Bandwidth = 0.003428
Noyau d'Epanechnikov

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(1) A. Benassi, S. Jaffard and D. Roux. 1997. Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators, Revista Mathematica Iberoamerica.

(2) Abdous, K. Goudhi, A. Khoudraji. 1999, Non- parametric estimation of the limit dependence function of multivariate extremes.

(3) Akgiray, V. et G. Booth. 1987. Compound Distribution Models of Stock Returns: An Empirical Comparison, Journal of Financial Research.

(4) Aït-Sahalia. and AL. 1998. Non parametric Estimation of State-price Densities Implicit in Financial Assets Price, Journal of Finance.

(5) Aït-Sahalia, Y. and A. W. Lo. 2000. Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion. Journal of Econometrics.

(6) Alexiey Kozhemyak. 2006. Modélisation de séries financières à l'aide de processus invariants d'échelle. Application à la prédiction du risque. Ecole Polytechnique-Centre de mathématique appliquée.

(7) Alizadeh. and al. 2002. Range-based estimation of stochastic volatility models.

(8) American Academy of Actuaries. 2005. Recommended approach for setting regulatory risk-based capital requirements for variable annuities and similar products.

(9) Andersen and al. 2001. The distribution of exchange rate volatility. Journal of the American Statistical Association 96; correction published in 2003.

(10) Andersen, T. G. Bollerslev, T. Huang, X. 2010. A reduced form framework for modeling volatility of speculative prices based on realized variation measures. Forthcoming in Jounal of Econometrics.

(11) Andersen, T. G. Bollerslev, T. Meddahi, N. 2004. Analytic evaluation of volatility forecasts. International Economic Review.

(12) Andersen, T. G. Bollerslev, T. Meddahi, N. 2005. Correcting the errors: Volatility forecast evaluation using high-frequency data and realized volatilities. Econometrica.

(13) Andersen, T. G. Bollerslev, T. Meddahi, N. 2010. Market microstructure noise and realized volatility forecasting. Journal of Econometrics.

(14) Andrews, D. W. K. 1993, "Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point", Econometrica.

(15) Artzner and al. 1999. Coherent measures of risk. Journal of Mathematical Finance.

(16) Augustyniak.2013 Maximum-likelihood estimation of the Markovswitching GARCH model. Computational Statistics and Data Analysis.

(17) Augustyniak. and al. 2012. An out-of-sample analysis of investment guarantees for equity-linked products: Lessons from the financialcrisis of the late 2000s. North American Actuarial Jr.

(18) AZZALINI, A. et CAPITANIO, A., 2003, Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skewt Distribution, J.Roy.Statist.Soc.

(19) Bakshi, G. C. Cao and Z. Chen, 1997, Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, Journal of Finance.

(20) Bali and al. 2007, A conditional extreme value volatility estimator based on high-frequency returns, Journal of Economic Dynamics and Control.

(21) Barndorff and al. 2008. Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise. Econometrica.

(22) Barndorff and al. 2010. Multivariate realized kernels: consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. Journal of Econometrics forthcoming.

(23) Barndorff and al. 2009. Measuring downside risk - realised semivariance. Oxford University Press.

(24) Watson and al. 2009. Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert Engle. Oxford University Press.

(25) Barndorff and al 2002. Econometric analysis of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models. Journal of the Royal Statistical Society.

(26) Barndorff and al 2004. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion). Journal of Financial Econometrics.

(27) Barndorff and al. 2007. Advances in Economics and Econometrics. Theory and Applications, Ninth World Congress. Econometric Society Monographs. Cambridge University Press.

(28) Barone-Adesi and al. 2008. GARCH Option Pricing Model with Filtered Historical Simulation, Review of Financial Studies.

(29) Barone and al. 1999, VaR without Correlations for Nonlinear Portfolios, Journal of Futures Markets.

(30) Bassi et M.Kafetzaki. 1998, « Risk Management and Quantile Estimation », A Practical Guide to Heavy Tails, Birkhauser.

(31) Battacharya et Gangopadhyay. 1990, Kernel and a Nearest Neighbor Estimation of a Conditional Quantile, Annals of Statistics.

(32) Bauwens, L., Dufays, A. and Rombouts, J. V. 2013. Marginal likelihood for Markov switching and change-point GARCH models. Journal of Econometrics.

(33) Bauwens and Rombouts 2007. Multivariate mixed normal conditional heteroskedasticity. Computational Statistics and Data Analysis.

(34) Bauwens and al. 2010. Theory and inference for a Markov switching GARCH model. The Econometrics Journal.

(35) Billio and al. 2005. Multivariate Markov switching dynamic conditional correlation GARCH representations for contagion analysis. Statistical Methods and Applications.

(36) Black and al. 1973. The Valuation of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy.

(37) Bollerslev and al. 2003. Modeling and forecasting realized volatility. Econometrica.

(38) Bollerslev. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics.

(39) Bollerslev, T. P. 1990. Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. Review of economics and statistics.

(40) Bollerslev and al. 1992, Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances, Econometric Reviews.

(41) Bollerslev and al. 2009. Glossary to ARCH (GARCH). In: Volatility and Time Series Econometrics. Oxford University Press. UK.

(42) Brownless and al. 2010. Comparison of volatility measures: A risk management perspective. Journal of Financial Econometrics.

(43) C. A. Goodhard and al. 1995. High-frequency data in financial markets: issues and applications, Proceedings of the Frist International Conference on High Frequency Data in Finance.

(44) Campbell, J. Y. A. W. Lo, and C. MacKinlay, 1997, The Econometrics of Financial Markets, Princeton, NJ: Princeton University Press.

(45) Campbell, J. Y. et L. Hentschel. 1992. No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. Journal of Financial Economics.

(46) Carlo Acerbi Dirk Tasche. 2001. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value-at-Risk. Wilmott Magazine.

(47) Catania. and. 2015. Model Confidence Set Procedure. R Package.

(48) C. Bruneau et O. De Bandt. 1998. La modélisation VAR structurel : application à la politique monétaire en France ». Banque de France.

(49) Charlotte Lespagnol et Jérôme Teiletche. 2015. La Dynamique De La Volatilité À Très Haute Fréquence Des Taux Longs Euro. Presses universitaires de Grenoble. France.

(50) Chen and AL. 2008. The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. Insurance: Mathematics and Economics.

(51) Chernov, M. and E. Ghysels, 2000. A Study Towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation, Journal of Financial Economics.

(52) Chib. S. 1996. Calculating posterior distributions and modal estimates in Markov mixture models. Journal of Econometrics.

(53) Christoffersen And al. 1998. Evaluating Interval Forecasts. International Economic Review.

(54) Christoffersen P. B. Feunou, K. Jacobs. N. Meddahi. 2010. The economic value of realized volatility. Working paper McGill University.

(55) Christoffersen. P. and K. Jacobs. 2004. Which GARCH Model for Option Valuation. Management Science.

(56) Christophe Hurlin. 2006. Macro-Econométrie Et Méthodes de Moments. Documents et Supports. Université d'Orléans. France.

(57) Cipollini, F. Engle, R. F. Gallo, G. M. 2009. A model for multivariate non-negative valued processes in financial econometrics. Working paper.

(58) Claudia F. 2012. Econometric models for mixed-frequency Data. European university Institute. Department of Economics.

(59) Clauss and al. 2011, Gestion de Portefeuille.

(60) Coles et J. Tawn. 1999. Statistical methods for extreme values. Springer Verlag.

(61) Costinot and al. 2000. Note technique sur l'utilisation des extrêmes unidimensionnels dans la construction des stress scenario. Groupe de recherche opérationnelle. Crédit Lyonnais. Document interne.

(62) Cox and Ross. 1976. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics.

(63) Cox and Ross. 1979. Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics.

(64) Culp and al. 1998. Value at Risk: Uses and Abuses, Journal of Applied Corporate Finance.

(65) Delbaen, and al. 1999. Coherent measures of risks, journal of Mathematical Finance.

(66) Denisa and al. 2016. Volatility During the Financial Crisis Through the Lens of High Frequency Data: A Realized GARCH Approach.

(67) Dionne and al. 2006. Intraday Value at Risk (IVaR) Using Tick-by-Tick Data with Application to the Toronto Stock Exchange. Working Paper.

(68) Dhrymes. P. J. 1984. Mathematics for econometrics. New York; Springer Verlag.

(69) Dunod. And Efron. 1995, Le Bootstrap et ses Applications.

(70) Engle, and Kroner. 1995, Multivariate simultaneous generalized ARCH. Econometric theory.

(71) Engle. 2002, Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. Journal of Business and economic statistics.

(72) Engle, R. Gallo. 2006. A multiple indicators model for volatility using intra-daily data, Journal of Econometrics.

(73) F. Bollerslev and al. 1992, ARCH modelling in finance: A review of the theory and empirical evidence, Journal of Econometrics.

(74) Forsberg. L. Bollerslev, 2002. Bridging the gap between the distributions of realized (ECU) volatility and ARCH modeling (of the EURO): the GARCH-NIG model, Journal of Applied Econometrics.

(75) Frey and MC NEIL. 2000, Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, Journal of Empirical Finance.

(76) G and Giacomini. 2007, Comparing Density Forecasts via Weighted Likelihood Ratio Tests, Journal of Business and Economic Statistics.

(77) Garg and Vipul. 2014. Volatility forecasting performance of two-scale realized volatility. Applied Financial Economics.

(78) Ghysels and al. 2010. News good or bad and its impact on volatility predictions over multiple horizons. Review of Financial Studies.

(79) Hansen and al. 2009. Quadratic Variation by Markov Chains. University of Aarhus Department of Economics Research.

(80) Hansen and al. 2009. Quadratic variation by markov chains. Working paper.

(81) Hansen Huang and Shek (HHS). 2012, Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility, Journal of Applied Econometrics.

(82) Holt, M. T. and S. V. Aradhyula. 1990, Price Risk in Supply Equations: An Application of GARCH Time-Series Models to the U.S. Broiler Market, Southern Economic Journal.

(83) HOSKING, J. and WALLIS, J. 1987, Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution, Technometrics.

(84) Huiyu Huang and al. 2013. Forecasting Value-at-Risk Using High-Frequency Information. Journal Econometrics

(85) J.V. Andersen, Y.Malevergne et D.Sornette, Comprendre et gérer les risques grands et extrêmes Esch, Kieffer, Lopez, Value at Risk, vers un Risk Management moderne.

(86) J. P. Bouchardand M. Potters, theory of financial risk and derivative pricing, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

(87) Jackwerth, J. C. 2000, Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns, Review of Financial Studies.

(88) Jeantheau. T. 1998. Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models; Econometric theory.

(89) Jensen and al. 2004. Asymptotic inference for nonstationary GARCH. Journal of Econometric Theoy.

(90) Kailath. T. 1980, Linear systems. Englewood Clifs, New Jersey: Prentice Hall.

(91) L. Bauwens and P. Giot. 2001, Econometric modelling of stock market intraday activity, Kluwer Academic Publisher, Boston.

(92) Lakhdar Adouka at Al. 2015. GARCH models: Application to the Algerian Exchange Rate. International Journal of Innovation and Applied Studies.

(93) Ledoit O. P. Santa-Clara and M. Wolf. 2003, Flexible Multivariate GARCH Modeling With an Application to International Stock Markets.

(94) Lee. 1991. Are the GARCH models best in out-of-sample performance. Economics Letters.

(95) Lee, S. Hansen, B. E. 1994. Asymptotic theory for the GARCH (1,1) quasi-maximum likelihood estimator. Econometric Theory.

(96) Lumsdaine, R. L. 1996. Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator in IGARCH(1,1) and covariance stationary GARCH(1,1) models. Econometrica.

(97) Manganelli and al. 2001. Value at Risk Models in Finance. European Central Bank, Working.

(98) Maroua Chikhaoui. 2015. Gestion de risque de portefeuille: estimation de la VaR et CVaR. École Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologie. Université Nice Sophia Antipolis. France.

(99) Mc Kay R. Keeffer T.E (Septembre 1996), VaR is a Dangerous Technique, Corporate Finance: Searching for Systems Integration.

(100) Michel and al. 2013. Realized GARCH Option Pricing using the Filtered Historical Simulation Approach. Erasmus Universiteit Rotterdam.

(101) Mohammed Salah Chiadmi. 2015. La volatilité des indices boursiers islamiques dans le contexte de la crise financière. Univercité Mohammed v de Rabat. Maroc.

(102) Olivier Wintenberger. 2012. Contributions à la statistique des processus: estimation, prédiction et extrêmes. Ceremade -Umr 7534. Université Paris-Dauphine. France.

(103) Oomen R. 2002, Modelling Realized Variance when Returns are Serially Correlated, Warwick Business School.

(104) Oomen R. 2002, Statistical Models for High Frequency Security Prices, Warwick Business School.

(105) Pantula, S. G. 1986. Modelling persistence in conditional variances: A comment. Econometric Reviews.

(106) Patrick Kouontchou Kepawou.2008. De L'information En Haute Fréquence : Quatre Essais Empiriques Sur Les Mesures De Risques Et L'évaluation Des Actifs Financiers. Université De Paris I Pantheon-Sorbonne U.F.R. De Sciences Economiques. France.

(107) Parks R. 1967. Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances are both Serially and Contemporaneously Correlated, Journal of the American Statistical Association.

(108) Persson S. 1994. Pricing Life Insurance Contracts under Financial Uncertainty, Norwegian School of Economics and Business Administration.

(109) Peter Tankov. 2012. Contributions à l'étude de discrétisation des processus avec sauts, du risque de liquidité, et du risque de saut dans les marchés financiers. Université Paris Diderot. France.

(110) Pierre Clauss. 2008. Statistique Des Risques Extrêmes: Application À La Mesure Du Risque De Marché. Ensai. Filière Gestion des Risques et Ingénierie Financière. France.

(111) Pong and al. 2004. Forecasting currency volatility: A comparison of implied volatilities and ARFIMA models. Journal of Banking and Finance.

(112) Prateek Sharma and al. 2015. Forecasting stock market volatility using Realized GARCH model:International evidence. The Quarterly Review of Economics and Finance

(113) Protter P. 2004, Stochastic Integration and Differential Equations, Second Edition. Springer-Verlag, New York.

(114) Shephard N. K. Sheppard. 2010, Realising the future: forecasting with high frequency based volatility (HEAVY) models, Journal of Applied Econometrics.

(115) Shuairu Tian and al. 2015 Modeling interest rate volatility: A Realized GARCH approach. Journal of Banking & Finance.

(116) Rachida Hennani 2015. De Bâle I à Bâle III: les principales avancées des accords prudentiels pour un système financier plus résilient. Document De Travail. Université de Montpellier. LAMETA.

(117) Rodgers J. and W. Nicewander. 1988, Thirteen Ways to Look at Correlation Coefficient. The American Statistician.

(118) Rojas S. and J. Moody. 2001. Cross-sectional Analysis of the Returns of iShares MSCI Index Funds using Independant Component Analysis Working Paper, Oregon Graduate Institute of Science and Technology.

(119) Ross S. 1976. The Arbitrage Theory of the Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory.

(120) Ruppert D. 1987. What is Kurtosis? An Influence Approach, The American Statistician.

(121) Rydberg T. and N. Shephard. 2003, Dynamics of Trade-by-trade Price Movements: Decomposition and Models, Journal of Financial Econometrics.

(122) Sanvi Avouyi-Dovi et Eric Jondeau. 1999. la modélisation de la volatilité des bourses asiatiques. Notes d'études et de recherche. Banque de France.

(123) Shanken J. 1992, On the Estimation of Beta Pricing Models, Review of Financial Studies.

(124) Sharpe W. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance.

(125) Smith D. 2007. Conditional Coskewness and Asset Pricing, Journal of Empirical Finance.

(126) Stefan and al. 1999. A comparison of analytical VaR methodologies for portfolios that include options. Working Paper.

(127) Stéphane Daniel. 2012. Trading Haute Frequence Et Manipulation De Cours. Paris Université Panthéon-Assas. France.

(128) Straumann and al. 2006. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: A Stochastic recurrence equation approach. Annals of Statistics.

(129) Szpiro G. 1998, Tick Size, the Compass Rose and Market Nanostructure, Journal of Banking and Finance.

(130) Terasvirta and al. 2009. An introduction to univariate GARCH models. Handbook of Financial Time Series.

(131) Tim B. and al. 1991. les Modèles ARCH en finance: un point sur la théorie et les résultats empiriques. Northwestern University. Annales d'Economie et de Statistique.

(132) Tsai K. 2004. Risk Management via Value-at-Risk, Working Paper, Aventis Pharmaceuticals.

(133) U. Horst. 2001. Financial price fluctuation in a stock market model with many interacting agents, ISE Financial Award Series.

(134) Valle A. 2004. The Skew-Normal Distribution, in A Journey beyond Normality. Genton Ed. Chapman and Hall.

(135) Villar. J. R. and Ortega. 2010. Volatility Models with Leverage Effect, Universidad Carlos III Madrid.

(136) Vipul and al. 2007. Forecasting performance of extreme-value volatility estimators. Journal of Futures Markets.

(137) Voit J. 2003. The Statistical Mechanics of Financial Markets, Second Edition. Springer.

(138) Vorlow C. 2004. Stock Price Clustering and Discreteness: The Compass Rose and Complex Dynamics, Working Paper, University of Durham.

(139) Wagner N. and T. A. Marsh. 2005. Measuring Tail Thickness under GARCH and an Application to Extremal Exchange Rate Changes, Journal of Empirical Finance.

(140) Walid Jbili. 2008. Modélisation asymétrique de titres financiers. Faculté Des Sciences Et De Génie Université Laval. Québec.

(141) Wang R. Hudson and Keasey, 2000, Tick Size and the Compass Rose: Further Insights, Economics Letters.

(142) Wang H. and C. Wang. 2002. Visibility of the Compass Rose in Financial Asset Returns: A Quantitative Study, Journal of Banking & Finance.

(143) Whaley, R.E. 2008, Understanding VIX, Vanderbilt Owen Graduate School of Management, working paper.

(144) Wilfried Paterne M. 2013. Modélisation et Gestion sur les marchés obligataires souverains. Préparée au CREM (UMR CNRS n°6211). Institut de Gestion de Rennes. France.

(145) William Gehin. 2011. Modélisation des queues de distribution des rendements des actifs financiers. Application à la mesure et à la gestion du risque de marché. EURO Institut d'Actuariat.

(146) Woehrmann P. 2007, Discrete Stock Prices and Predictability, Working Paper. National Centre of Competence in Research.

(147) Wood R. and al. 1985. An Investigation of Transactions Data for NYSE Stocks, Journal of Finance.

(148) Zakoian. And al. 1994. Threshold heteroskedastic models, Journal of Economic Dynamics and Control.

(149) Zellner A. 1962. An Efficient Method for Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias, Journal of the American Statistical Association.

(150) Zhang B. 2003. Time-varying Volatilities, CAPM Betas, and Factor Loadings: A High Frequency Data Perspective, Unpublished PhD thesis, Duke University.

(151) Zhang and Chan. 2006. An Adaptive Method for Subband Decomposition ICA, Neural Computation.

(152) Zhou. 1996. High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates. Journalof Business and Economic Statistics.

(153) Zumbach G. F. Corsi et A. Trapletti. 2002, Efficient Estimation of Volatility Using High Frequency Data, Working Paper, Olsen and Associates.

Reference des Textes électroniques

(154) http//www.amf-france.org/.../technique/multimedia

(155) https://www.mja-assas.fr/.../Trading-haute-fré...ne-DANIEL_2012.pdf

(156) http://www.cairn.info/revue-finance-2005-2008.htm

(157) https:// www.lameta.univ-montp1.fr/.../Documents/ES2015-01.pdf

(158) https://www.fondation.banque-france.fr/.../02/resume-these-banulescu.pdf

(159) https://tel.archives-ouvertes.fr/.../tel-00648012/document

(160) https:// www.bis.org/bcbs

(161) https:// www.fbf.fr, www.lesclesdelabanque.fr

(162) https:// www.banque-france.fr

(163) https:// www.marches-financiers.net

(164) https:// www.senat.fr/rap/l09-703-1/l09-703142.html

(165) https:// www.crest.fr/.../givord/courscentrale.pdf

(166) https://www.univ_orleans.fr/.../Econometrie_Financ...Slides.pdf

(167) https://hal.inria.fr/hal-01246153

(168) https://www.recrutement.banque_france.fr/.../12/CCS_AD_2015_01.pdf

(169) https:// www.univ-orleans.fr/.../CH/Thesis_Sessi_complet_Cor.pdf

(170) https://public.econ.duke.edu/.../WorkingPapers_Now_Published/phs_realized_garch_10.pdf

(171) http://www.stanford.edu/people/peter.hansen.

(172) http://www.telecom-paristech.fr/.../fiches partenaires/Fiche_Orange.pdf

(173) http:// www.infinance.fr/.../article-alstom-pre...t-histoire-346.htm

(174) http://www.altaprofits.com/.../electricite-de-france-isin-fr0010242511/societe

(175) http://www.ressources_actuarielles.net/.../$FILE/ISUP__BENSEGHIR_Sanda_V13.pdf

Table de matières

INTRODUCTION GENERALE..... 1
CHAPITRE I :..... 7
Processus GARCH Asymétriques et Dynamique de la Volatilité des cours boursiers à haute fréquence 7
INTRODUCTION..... 8
Section I : Concepts de la volatilité boursière à haute fréquence 10
1- les Concepts Risque et Volatilité 11
2- Le passage de la basse a la haute fréquence..... 15
3- Econométrie financière des données à Haute Fréquence 18
Section II : Modèles GARCH asymétriques sur données à Haute Fréquence 33
1- Présentation des Modèles GARCH Asymétriques..... 34
2- Distributions conditionnelles..... 46
CONCLUSION 52
CHAPITRE II : 54
Estimations et Validations du modèle Score-GARCH 54
INTRODUCTION..... 55
1- Méthodologie :..... 58
1.1- La formulation générale du modèle 59
1.2- Score-GARCH avec une spécification logarithmique 60
1.3- Estimation de modèle Score-GARCH par quasi-maximum de vraisemblance 64
2- Données et analyse préliminaire..... 73
2.1- Présentation des données..... 74
2.2- Analyse Statistique des Données Financières à haute fréquence..... 76
2.3- Caractéristiques des rendements à haute fréquence 80
3- Résultats et discussions 99
3.1- Estimation du modèle GARCH (1,1)..... 100
3.2- Estimation du modèle EGARCH..... 102
3.3- Estimation du modèle GJR-GARCH..... 104
3.4- Estimation de la volatilité à haute fréquence : Score-GARCH 106
Conclusion 113
CHAPITRE III :..... 116
Modèle Score-GARCH et Mesure de la Value-at-Risque sur données à Haute Fréquence..... 116
INTRODUCTION..... 117
1- Méthodologie..... 119

1.1- Types de risques mesurés par la Value-at-Risque (VaR) 119
1.2- Estimation de la VaR..... 130
1.3- Tests de Validations (Backtesting) 141
2- Résultats et discussions 148
2.1- Application de la VaR..... 149
2.2- Application de Backtesting..... 151
CONCLUSION 155
CONCLUSION GENERALE..... 156
ANNEXES : I 159
ANNEXES : II 172
ANNEXES III 186
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... 193
Table de matières……204