



**HAL**  
open science

# Optimisation de forme de matériaux et structures architecturés par la méthode des lignes de niveaux avec prise en compte des interfaces graduées

Alexis Faure

► **To cite this version:**

Alexis Faure. Optimisation de forme de matériaux et structures architecturés par la méthode des lignes de niveaux avec prise en compte des interfaces graduées. Matériaux composites et construction. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAI047 . tel-01730767

**HAL Id: tel-01730767**

**<https://theses.hal.science/tel-01730767v1>**

Submitted on 13 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE DE GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie Civil, Electrochimie**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Alexis FAURE**

Thèse dirigée par **Rafael ESTEVEZ, Professeur UJF**  
et codirigée par **Guillaume PARRY, Maître de conférences Grenoble INP**

préparée au sein **du Laboratoire de Science et Ingénierie des Matériaux  
et des Procédés (SIMaP)**  
et de **l'École doctorale d'Ingénierie - Matériaux Mécanique Energétique  
Environnement Procédé Production (I-MEP2)**

### **Optimisation de forme de matériaux et struc- tures architecturés par la méthode des lignes de niveaux avec prise en compte des interfaces graduées**

Thèse soutenue publiquement le **9 octobre 2017**,  
devant le jury composé de :

**M. Olivier PANTZ**

Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis, Rapporteur

**M. Boris DESMORAT**

Maître de conférence HDR, Institut d'Alembert, Rapporteur

**M. Yves BRECHET**

Professeur, Grenoble INP, Examineur

**M. Grégoire ALLAIRE**

Professeur, École Polytechnique, Président du Jury

**M. Anthony GRAVOUIL**

Professeur, INSA Lyon, Examineur

**M. Rafael ESTEVEZ**

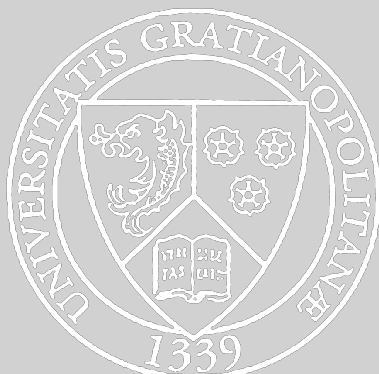
Professeur, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**M. Guillaume PARRY**

Maître de conférence HDR, Grenoble INP, Co-encadrant de thèse

**M. Georgios MICHAILIDIS**

Docteur, Ingénieur développement, Invité







## Remerciements

Une thèse ne se fait pas toute seule, il faut travailler de manière constante, s'investir, se passionner même. Mais tout cela n'est pas suffisant, si une thèse ne se fait pas toute seule, elle ne se fait surtout pas *seul* !

Sur ce plan là j'ai été généreusement servi ! Et j'ai de fait beaucoup de personnes à remercier.

D'abord le laboratoire qui m'a accueilli, je souhaite remercier la multitude de personnes souriantes que j'ai eu la chance de rencontrer en arpentant les couloirs.

Merci à Alain qui a toujours eu à cœur de mettre à ma disposition des moyens informatiques adaptés à mes besoins, j'ai apprécié toutes nos discussions techniques et son souci d'aider !

Merci à Jacqueline, qui m'a géré administrativement, de la signature de mon contrat de travail jusqu'à la préparation de ma soutenance de thèse.

Merci à Catherine, Catherine (et oui il y en a deux), Magalie, Edouard, Guy et Bruno pour tout les moments d'échanges dans la cafétéria du troisième : rien de tel qu'un repas où l'on rit de bon cœur pour restaurer la bonne humeur et l'envie d'avancer, même quand rien ne marche.

Je remercie Yves Bréchet et à travers lui le CEMAM qui m'a financé et qui a cru en le projet.

Je remercie aussi Rafael qui a été un directeur de thèse à l'écoute, qui m'a motivé et n'a pas manqué d'encourager chaque effort. Il m'a entraîné vers de belles collaborations, puis a su me laisser les porter et les faire vivre de moi même. J'ai eu la chance d'avoir un directeur de thèse accessible et ouvert à l'échange... Et qui partage de plus avec moi un goût prononcé pour les repas généreux accompagnés d'une bonne bouteille, la vie quoi !

Et que serait un laboratoire sans d'autres thésards ! Marie, Ilhem, Idir, Clément, Nicolas, Anne et Romain, merci à vous pour votre bonne humeur et pour tous les échanges, plus ou moins sérieux, qui ont jonchés ces trois années ! J'ai aussi une pensée pour Cristian, dont la bonne humeur et l'optimisme éclairent même les moments les plus démotivants. Et que serait cette équipe sans Nadia, comme moi résidente permanente du bureau 317, avec qui j'ai partagé presque chaque journée de travail. Merci pour la bonne humeur, pour le soutien quand les simulations échouaient par paquets de mille, et pour toutes les discussions que nous avons pu avoir : j'ai commencé ma thèse avec une collègue, maintenant j'ai une bonne amie.

Je remercie aussi Robin et Étienne pour les nombreuses discussions techniques passionnées, c'était un réel plaisir d'échanger avec eux, j'ai beaucoup appris.

Il faut maintenant remercier le chef des armées, le général Georgios ! Jamais un thésard, même dans ses rêves les plus fous, n'aurait pu imaginer un encadrant autant investi et motivé. Pendant trois ans nous avons échangé *quotidiennement*, j'ai eu accès à travers lui à une connaissance livresque et à des explications détaillées. Nous avons creusé chaque détail, il a été guide et force de travail, tenant successivement la pelle et la lampe de poche quand cela a été nécessaire !

J'ai aussi eu la chance de collaborer avec beaucoup d'autres personnes, autant de personnalités enrichissantes que je souhaite aussi remercier.

De la part d'un professeur réputé, on s'attend à de la précision et à des conseils scientifiques avisés, Grégoire en a été une excellente illustration durant toute ma thèse. Merci pour tout ces échanges enthousiastes, pour la pédagogie, le tout avec une grande simplicité. Merci aussi pour les nombreux échanges au CMAP avec Jean-Léopold, Aymeric, Perle et bien sur Marc qui m'a accordé beaucoup de son temps et sa confiance.

Merci aussi à Charles du LJK qui a été un exemple de rigueur, de compétence et de motivation : le genre de collaborateur qui vous donne envie d'avancer !

Je souhaite aussi remercier mes parents qui m'ont toujours soutenu. De mon premier "point vert" en maternelle jusqu'à mon doctorat vous avez été présent pour m'encourager : merci à vous.

Enfin je remercie ma chère femme Adeline qui m'a accompagné pendant tout ce long voyage, me donnant la force et l'envie d'avancer chaque jour.

# Table des matières

Page de garde	1
Sommaire	9
Introduction	11
<b>A Optimisation de domaine pratique</b>	<b>17</b>
<b>I Formulation et résolution d'un problème d'optimisation</b>	<b>21</b>
1 Définition d'un problème d'optimisation . . . . .	22
1.1 Formulation générale . . . . .	22
1.2 Résolution d'un problème d'optimisation . . . . .	24
1.3 Commentaires et limites . . . . .	25
2 Une revue des méthodes itératives à gradient les plus courantes . . . . .	25
2.1 Lagrangien et Lagrangien augmenté . . . . .	26
2.2 Introduction à la programmation séquentielle . . . . .	29
2.3 MFD . . . . .	35
2.4 Autres méthodes dans la littérature . . . . .	38
3 Bilan sur les méthodes d'optimisation . . . . .	38
Bilan du chapitre I . . . . .	40
<b>II Une revue des descriptions de domaine</b>	<b>41</b>
1 Plusieurs pistes pour la description de domaine . . . . .	43
1.1 Paramétrages réduits . . . . .	43
1.2 Paramétrage en densité . . . . .	44
1.3 Bilan sur les méthodes de description . . . . .	46
2 Méthode des lignes de niveaux . . . . .	47
2.1 Définition et limites . . . . .	47
2.2 Description de plusieurs sous domaines . . . . .	50
2.3 Évolution d'une fonction ligne de niveaux . . . . .	52
3 Mise en œuvre de la méthode des lignes de niveaux . . . . .	53
3.1 Méthode de "frontière immergée" . . . . .	54
3.2 Autres méthodes et améliorations . . . . .	59
Bilan du chapitre II . . . . .	61
<b>III Dérivation de forme: bases et mise en œuvre</b>	<b>63</b>
1 Définition générale . . . . .	64
1.1 Concept de la dérivation de forme et théorèmes généraux . . . . .	64
1.2 Concordance avec la méthode des lignes de niveaux . . . . .	65

2	Dérivation pratique . . . . .	66
2.1	Méthode de Céa pour la dérivation de forme rapide . . . . .	66
2.2	Discrétisation et régularisation de la dérivée . . . . .	69
2.3	Discussion autour des erreurs d'évaluation du gradient de forme . . . . .	71
	Bilan du chapitre III . . . . .	72
<b>Conclusion de la Partie A</b>		<b>73</b>
<b>B Optimisation de forme de matériaux architecturés avec prise en compte des effets d'interface graduée</b>		<b>77</b>
<b>IV Motivations et état de l'art</b>		<b>79</b>
1	Généralités sur les matériaux architecturés . . . . .	81
1.1	Une définition du matériau architecturé . . . . .	81
1.2	Matériaux architecturés et contrôle de la cinématique locale . . . . .	83
1.3	Choix de l'architecture: de l'intuition à l'optimisation de domaine . . . . .	86
2	Propriétés thermoélastiques extrêmes . . . . .	87
2.1	Contexte et motivations . . . . .	88
2.2	Matériau architecturé et contrôle de la dilatation thermique . . . . .	91
2.3	Résultats de la littérature et interprétation . . . . .	93
3	Prise en compte des interfaces graduées . . . . .	95
3.1	Classification et description des interfaces . . . . .	96
3.2	Deux visions différentes des interfaces graduées . . . . .	98
3.3	Interfaces graduées et propriétés des matériaux architecturés . . . . .	98
	Bilan du chapitre IV . . . . .	102
<b>V Définition du problème d'optimisation et calcul des quantités optimisables</b>		<b>103</b>
1	Formulation complète du problème d'optimisation . . . . .	105
1.1	Définition des propriétés physiques à optimiser . . . . .	106
1.2	Formulations de la littérature . . . . .	108
1.3	Formulation retenue . . . . .	110
2	Modélisation et dérivation de forme des quantités optimisables . . . . .	112
2.1	Méthodes d'homogénéisation . . . . .	112
2.2	Dérivation des critères . . . . .	115
3	Prise en compte des aspects numériques . . . . .	116
3.1	Difficultés liées à la formulation . . . . .	116
3.2	Difficultés liées aux méthodes de programmation séquentielle . . . . .	119
3.3	Stratégies de simplification . . . . .	120
	Bilan du chapitre V . . . . .	122
<b>VI Applications de la méthode à plusieurs cas d'étude</b>		<b>123</b>
1	Définition des paramètres d'entrée . . . . .	124
1.1	Choix des propriétés des constituants . . . . .	124
1.2	Calcul des propriétés effectives par homogénéisation périodique . . . . .	126
1.3	Optimisation de la microstructure et influence de la topologie initiale . . . . .	126
1.4	Choix de la formulation . . . . .	127
2	Optimisation des propriétés thermoélastiques sans gestion des interfaces graduées	128
2.1	Étape de recherche . . . . .	128
2.2	Étape d'isotropisation . . . . .	136
2.3	Discussion . . . . .	138

3	Optimisation des propriétés thermoélastiques avec gestion des interfaces graduées	141
3.1	Modifications nécessaires de l'implémentation	142
3.2	Étape de recherche	145
3.3	Étape d'isotropisation	150
3.4	Discussion	153
	Bilan du chapitre VI	154
<b>Conclusion de la Partie B</b>		<b>155</b>
<b>C Intégration des matériaux architecturés et prise en compte des contraintes de fabrication</b>		<b>157</b>
<b>VII Du matériau architecturé à la structure: conception, intégration et production</b>		
		<b>159</b>
1	Plusieurs pistes de conception de structures architecturées	160
1.1	Solution à une échelle	163
1.2	Solution utilisant des matériaux architecturés	164
1.3	Bilan sur les différentes solutions	165
2	Fabrication des structures architecturées	166
2.1	Fabriquer et intégrer un matériau architecturé	166
2.2	Fabriquer une structure architecturée	170
3	Une présentation de quelques méthodes de fabrication additive	172
3.1	Présentation de quelques méthodes et de leur intérêt	172
3.2	Limitations des méthodes de fabrication additives	174
	Bilan du chapitre VII	176
<b>VIII Prise en compte des propriétés induites lors d'une impression FDM</b>		<b>177</b>
1	Modélisation des propriétés physiques d'une pièce imprimée	178
1.1	Observation d'une pièce imprimée	178
1.2	Un modèle descriptif pour les propriétés des pièces fabriquées par FDM	181
2	Prise en compte des propriétés induites dans le processus d'optimisation	184
2.1	Impact de la modification du modèle descriptif	184
2.2	Mise en œuvre de la formulation proposée	187
3	Résultats numériques	191
3.1	Définition des paramètres de simulation	191
3.2	Présentation des résultats de simulation	194
3.3	Discussion	203
	Bilan du chapitre VIII	205
<b>IX Optimisation avec prise en compte des contraintes de fabrication</b>		<b>207</b>
1	Gestion du problème des porte-à-faux	209
1.1	Solutions techniques permettant d'imprimer des zones en porte-à-faux proposées dans la littérature	209
1.2	Formulations permettant le contrôle des porte-à-faux	211
2	Implémentation du critère mécanique et résultats	217
2.1	Implémentation du critère mécanique	217
2.2	Résultats numériques utilisant le critère mécanique	219
	Bilan du chapitre IX	225
<b>Conclusion de la Partie C</b>		<b>227</b>

## D Prise en compte des non-linéarités géométriques et matériaux **229**

### X Motivations et état de l'art **233**

1	Résultats de la littérature prenant en compte les non-linéarités . . . . .	234
1.1	Prise en compte des non-linéarités géométriques . . . . .	234
1.2	Prise en compte de la non-linéarité de la loi de comportement . . . . .	235
2	Résolution d'un problème de mécanique non linéaire . . . . .	237
2.1	Équations d'état non linéaires et discrétisation . . . . .	237
2.2	Résolution numérique d'un problème non linéaire . . . . .	240
2.3	Complications numériques liées à la prise en compte des non-linéarités . . . . .	242
3	Une présentation de plusieurs critères pertinents . . . . .	242
3.1	Les critères utilisés dans la littérature . . . . .	243
3.2	Contrainte de point de passage . . . . .	245
	Bilan du chapitre X . . . . .	248

### XI Optimisation de domaine avec prise en compte des non-linéarités **249**

1	Optimisation de structures avec prise en compte des non-linéarités . . . . .	250
1.1	Optimisation de structures matériau+vide . . . . .	250
1.2	Optimisation de structures multi-matériaux . . . . .	258
2	Conception d'actuateurs non-linéaires . . . . .	262
2.1	Optimisation de plusieurs déplacements cibles . . . . .	263
2.2	Optimisation d'un chemin de charge . . . . .	267
2.3	Bilan . . . . .	270

### Conclusion de la Partie D **273**

### Conclusion et perspectives **275**

### Annexes **279**

#### A Codes minimalistes d'algorithmes d'optimisation **283**

1	Lagrangien . . . . .	283
1.1	Code . . . . .	283
2	SLP . . . . .	285
2.1	Code . . . . .	285
3	SQP . . . . .	289
3.1	Code . . . . .	289
4	MFD . . . . .	292
4.1	Code . . . . .	292
4.2	Modification: Ajout de permissivité . . . . .	296

#### B Études des bornes de théoriques pour les propriétés thermomécaniques des matériaux architecturés **299**

1	Borne de Hashin-Shtrikman . . . . .	299
1.1	Définition . . . . .	299
1.2	Extraction de bornes sur le module de Young . . . . .	300
1.3	Extraction de bornes sur le coefficient de Poisson . . . . .	300
2	Bornes pour la dilatation thermique des matériaux multi-phasés . . . . .	301
2.1	Définition . . . . .	301

2.2	Étude sur les propriétés atteignables . . . . .	302
2.3	Étude paramétrique des bornes . . . . .	305
2.4	Conclusions . . . . .	308
<b>C</b>	<b>Détails des dérivations de forme</b>	<b>309</b>
1	Outils mathématiques pour la dérivation . . . . .	309
2	Mécanique des structures . . . . .	312
2.1	Compliance en élasticité linéaire . . . . .	312
3	Homogénéisation . . . . .	315
3.1	Contexte . . . . .	315
3.2	Coefficients du tenseur d'élasticité . . . . .	316
	<b>Bibliographie</b>	<b>317</b>



## Notation

variable	notation
Fonction objectif du problème d'optimisation	$J$
Gradient de la fonction objectif du problème d'optimisation	$\nabla J$
Contrainte d'inégalité	$g$
Contrainte d'égalité	$h$
Vecteur de paramètres du problème d'optimisation	$\bar{p}$
Domaine admissible	$U_{ad}$
Lagrangien du problème d'optimisation	$\mathcal{L}$
Multiplicateur de lagrange pour une contrainte d'inégalité donnée	$\lambda_+$
Multiplicateur de lagrange pour une contrainte d'égalité donnée	$\mu$
Tenseur d'élasticité d'ordre 4	$\bar{\bar{C}}$
Tenseur des déformations	$\bar{\bar{\epsilon}}$
Tenseur des contraintes	$\bar{\bar{\sigma}}$
Champ de déplacements solution des équations d'état	$\bar{u}$

# Introduction

## Contexte

Cette thèse est financée par le Labex *Center of Excellence of Multifunctional Architected Materials (CEMAM)*. Elle a eu pour but de participer à un effort commun de recherche et de développement de nouveaux matériaux architecturés "remplissant les vides" dans l'espace des propriétés des matériaux. Ils sont caractérisés par l'utilisation d'une architecture à l'échelle milli-, micro- ou nano-métrique dont les plus courants sont les micro-treillis (Ashby, 2006). Plusieurs autres thèses ont été initiées avec pour but la conception, la caractérisation et la mise en place de procédés de fabrication dédiés à ces matériaux ou structures (Suard, 2015). Parce que le choix de l'architecture est un facteur déterminant pour sa performance, l'étape de conception, c'est à dire du choix de la géométrie de la structure ou de la microstructure, représente un enjeu majeur. Les designs proposés sont bien souvent le fruit de l'intuition ou de l'expérience, aussi *ils peuvent probablement être améliorés à l'aide d'outils d'optimisation*.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont pour but d'explorer les conceptions possibles pour de nouveaux matériaux à l'aide de méthodes d'optimisation de domaine. Ces méthodes ont initialement été appliquées à l'ingénierie et ont connu un essor rapide avec le développement des moyens de calculs. L'optimisation de domaine est aujourd'hui utilisée dans de nombreux environnements industriels (Renault (Calvel, 2004; Albertelli, M., 2015), Airbus (Krog *et al.*, 2011) entre autres) pour l'allègement des structures (Frederiksson, 2014), l'amélioration de la résistance aux vibrations (Allaire et Jouve, 2005) et encore bien d'autres domaines de la physique (Bendsoe M. (2005) fournit un grand nombre d'exemples). La plupart des éditeurs de logiciels se sont d'ailleurs dotés de modules d'optimisation afin de répondre à la demande croissante, par exemple OPTISTRUCT (développé par Altair) ou encore TOSCA (développé par FE-design, intégré dans ABAQUS).

Dans le cadre de cette thèse ces méthodes ne sont pas de simples outils de conception : elles peuvent être utilisées à des fins plus exploratoires. Appliquées à la conception de matériaux architecturés, elles permettent par exemple de découvrir de nouveaux designs aux propriétés tout à fait singulières (Sigmund et Torquato, 1996; Wang *et al.*, 2014). Dans l'ensemble, leur utilité est avérée quand *l'intuition n'est plus suffisante, voir inexistante, pour résoudre un problème inverse*.

Parce que concevoir un matériau architecturé ne constitue que la première étape, nous nous sommes ensuite intéressés à leur fabrication et à leur utilisation. La complexité des architectures constitue un verrou technologique important pour la fabrication de tels matériaux ou structures, les procédés "classiques" (usinage, tournage, pliage, découpe laser) atteignant rapidement leurs limites. Une solution à cette problématique semble cependant émerger : la *fabrication additive*, que Hopkinson *et al.* (2006) n'hésitent pas à présenter comme le vecteur d'une nouvelle révolution industrielle. Nous nous sommes donc intéressés à ces nouvelles méthodes de fabrication et à la prise en compte de leurs spécificités dès l'étape de conception et d'optimisation.

Cette thèse lance une nouvelle thématique au sein du laboratoire SIMaP sur l'optimisation de domaine appliquée à la conception de matériaux. Elle se trouve à la jonction entre la Science

des Matériaux, les Mathématiques Appliqués et les Méthodes Numériques d'optimisation. Elle a notamment eu pour objectif le développement d'une plateforme d'optimisation de forme : *iktinos*.

Ce manuscrit se décompose en quatre parties dont nous allons maintenant présenter les axes essentiels.

## Partie A : Optimisation de domaine pratique

Nous tacherons dans une première partie d'introduire la base des différents éléments théoriques permettant de constituer un code d'optimisation de domaine, dans le but de fournir un support de compréhension des aspects numériques développés dans le reste du document. Cette partie constitue la base d'information nécessaire pour écrire un code d'optimisation de domaine.

Le chapitre I traite de l'optimisation numérique, nous présentons les différentes familles d'algorithmes et nous les comparons à travers un exemple numérique simple (cf figure 1 a). Cela permet de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients, et ainsi de choisir l'algorithme le plus adapté.

Le chapitre II traite des descriptions de domaine, c'est à des différentes méthodes permettant de représenter un domaine quelconque. Dans ce chapitre nous justifions l'utilisation de la méthode des lignes de niveaux, notamment par rapport à la nécessité de gérer des interfaces graduées.

Enfin le chapitre III présente les notions de base de la dérivation de forme, qui est la théorie que nous utilisons pour guider notre processus optimisation. Nous présentons en particulier la méthode de dérivation rapide de Céa (Céa, 1986).

Nous concluons cette partie en rassemblant les différents choix technologiques retenus afin de former un code d'optimisation de domaine.

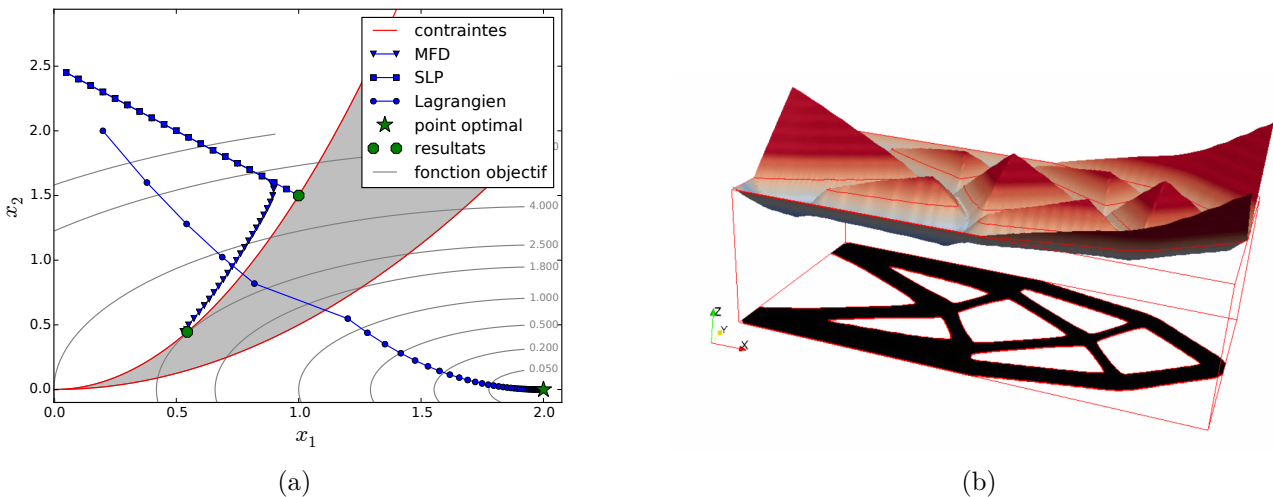


Figure 1 – (a) Exemple de résolution d'un problème d'optimisation à l'aide de différents algorithmes d'optimisation : Lagrangien, *Sequential Linear Programming* (SLP) et *Method of feasible Direction* (MFD). Nous recherchons ici le minimum de la fonction objectif (étoile verte), le problème comporte deux contraintes définissant une zone non admissible (en grise).

(b) Représentation d'une forme (en noire) par une fonction lignes de niveaux : la fonction ligne de niveau est négative à l'intérieur de la forme noire, positive ailleurs.

## Partie B : Optimisation de forme de matériaux architecturés avec prise en compte des effets d'interface graduée

Dans cette partie, nous traitons de l'application de la méthode d'optimisation de domaine décrite dans la partie A à la conception de matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques cibles et extrêmes. En particulier nous traitons de la prise en compte, au cours du processus d'optimisation, de l'existence d'interfaces aux propriétés graduées au sein de ces matériaux.

Le chapitre IV a d'abord pour objectif de définir nos **motivations** ainsi que de fournir l'**état de l'art** dans le domaine des matériaux architecturés. Nous justifions de l'intérêt d'utiliser de tels matériaux (cf. figure 2 (a) et Ashby (2013) ). Nous fournissons aussi **une définition du matériau architecturé** et nous motiverons l'utilisation de l'optimisation de domaine pour leur conception.

Le chapitre V a pour but de poser le cadre théorique permettant d'optimiser les propriétés effectives d'un matériau hétérogène périodique. Nous nous appuyons pour cela sur plusieurs auteurs tels que Sigmund (2001b) pour la partie optimisation et Gibiansky et Torquato (1997) pour l'évaluation de la performance des matériaux produits.

Enfin, le chapitre VI présente une série de résultats numériques (cf. figure 2 (b) ) d'optimisation définissant des matériaux à la dilatation thermique effective contrôlée. Les mécanismes de contrôle de la dilatation thermique sont alors détaillés et classifiés. Nous présentons aussi l'influence de la prise en compte d'interfaces aux propriétés graduées sur les performances ainsi que sur les mécanismes de contrôle apparaissant au cours du processus d'optimisation. Ce dernier chapitre a fait l'objet d'un article publié dans le journal *Structural and Multidisciplinary Optimization (SMO)* (Faure et al., 2017).

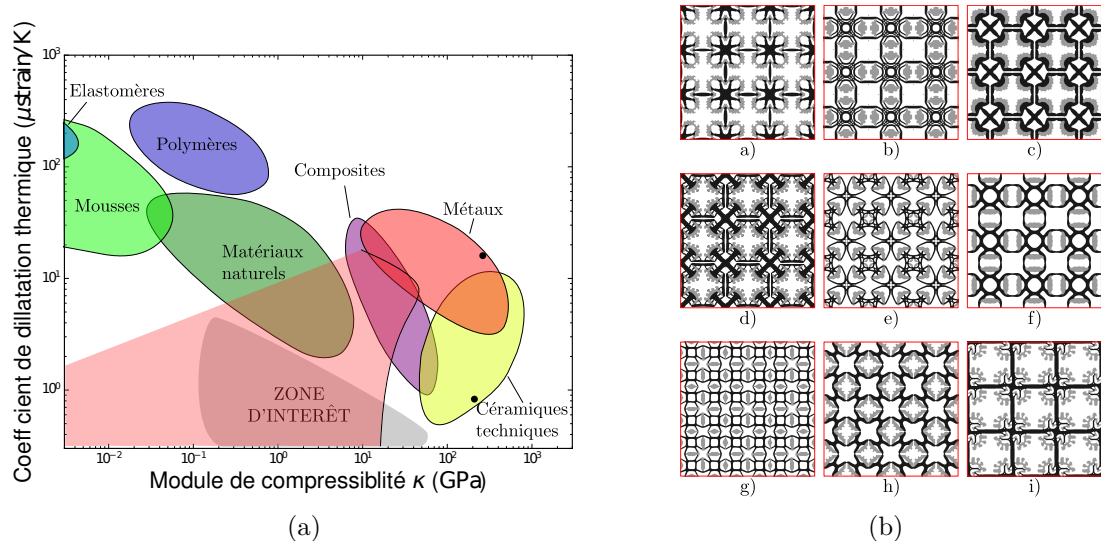


Figure 2 – (a) Carte d'Ashby distribuant les matériaux connus dans l'espace  $(\kappa; \alpha)$  (module de compressibilité; dilatation thermique linéaire). La zone grise est vide, elle présente pourtant un grand intérêt. La zone rouge représente les propriétés atteignables par une famille de matériaux architecturés : elle recouvre une partie de la zone grise.

(b) Exemple d'architectures de matériaux ayant des dilatations thermiques très variables, la phase noire représente un matériau se dilatant peu alors que la phase grise représente un matériau se dilatant beaucoup. Lors d'une hausse uniforme de température, cette différence de dilatation thermique entraîne des mouvements locaux déterminant la dilatation thermique effective du matériau.

## Partie C : Intégration des matériaux architecturés et prise en compte des contraintes de fabrication

Cette partie a pour objectif d'explorer les différentes solutions permettant la fabrication et l'intégration des matériaux et structures architecturés.

Le chapitre VII commence par aborder la question de l'intégration des matériaux architecturés aux sein de structure réelles. Nous étendrons la notion de matériau architecturé vers la notion de structure architecturée. Nous traiterons de la fabrication sous forme de semi-produit ainsi que des nouvelles méthodes de fabrication additive.

Nous motiverons ensuite l'intérêt pour les méthodes de fabrication additive, que nous traiterons dans les chapitres VIII et IX. Nous aborderons la prise en compte dans un processus d'optimisation de domaine des propriétés induites et des contraintes de fabrication spécifiques à ces moyens de production.

Le chapitre VIII considère la prise en compte des propriétés induites par les méthodes de fabrication additive lors de l'optimisation de domaine. Nous traitons plus particulièrement de la méthode de *Fused Deposition Molding* (FDM) : les pièces sont fabriquées par déposition de couches successives de filament de polymères fondus. Cette méthode induit une anisotropie orientée des propriétés mécaniques. Nous la décrivons, puis nous la prenons en compte dans le processus d'optimisation. La figure 3 (a) illustre les différences de formes optimales observées entre une solution supposant des propriétés homogènes isotropes et une solution tenant compte des propriétés réelles liées à la fabrication.

Le chapitre IX traite de la prise en compte des contraintes "de porte-à-faux", qui se traduisent par l'incapacité d'une machine d'impression à imprimer des structures surplombant du vide (cf. figure 3 b).

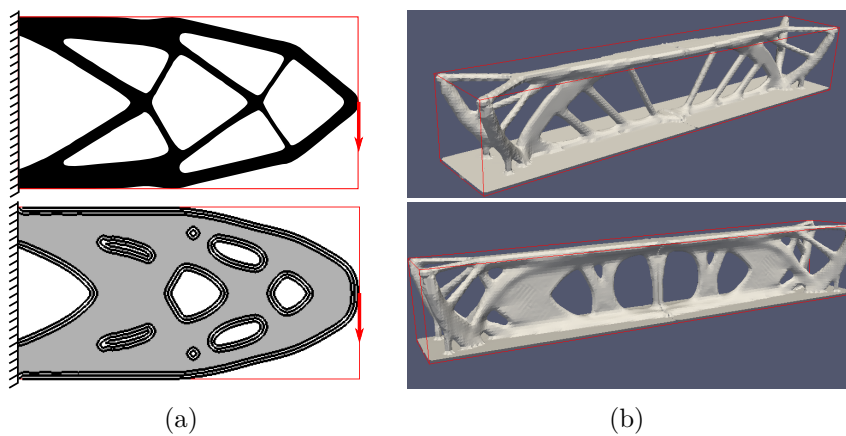


Figure 3 – (a) Influence des propriétés induites par la méthode de fabrication FDM sur les résultats d'optimisation : en haut la solution optimisée en considérant des propriétés homogènes et isotropes pour la matière (en noire) et en bas la solution optimisée en considérant des propriétés mécaniques similaires à celle d'une pièce imprimée.

(b) Prise en compte de la contrainte des porte-à-faux. en haut une structure comportant de grandes zones surplombant du vide, qui sont donc difficiles à imprimer. En bas une solution produite en prenant en compte la contrainte des porte-à-faux : les grandes zones surplombant du vide sont maintenant supportées par de la matière, facilitant ainsi l'impression.

## Partie D : Prise en compte des non-linéarités géométriques et matériaux

Dans cette dernière partie nous présentons comment prendre en compte les non linéarités géométriques durant un processus d'optimisation de domaine, puis nous appliquons ces

développements à plusieurs cas d'étude en évaluant leur influence sur les formes finales.

Le chapitre X présente une étude de la littérature ainsi que le modèle mécanique utilisé. Nous traitons de la résolution d'un problème d'élasticité en prenant en compte les non linéarités géométrique, puis nous introduisons plusieurs critères d'optimisation exploitant le modèle.

Dans le chapitre XI nous présentons plusieurs résultats numériques, nous tentons de justifier de la nécessité de recourir à la prise en compte des effets non linéaires à travers un exemple (cf. figure 4 (a)). Nous abordons ensuite un problème d'optimisation d'actuateurs dont nous cherchons à optimiser un déplacement cible. Nous dégagons de cela la définition de deux familles d'actuateurs : les actuateurs souples et ceux mettant à profit une instabilité (cf. figure 4 b).

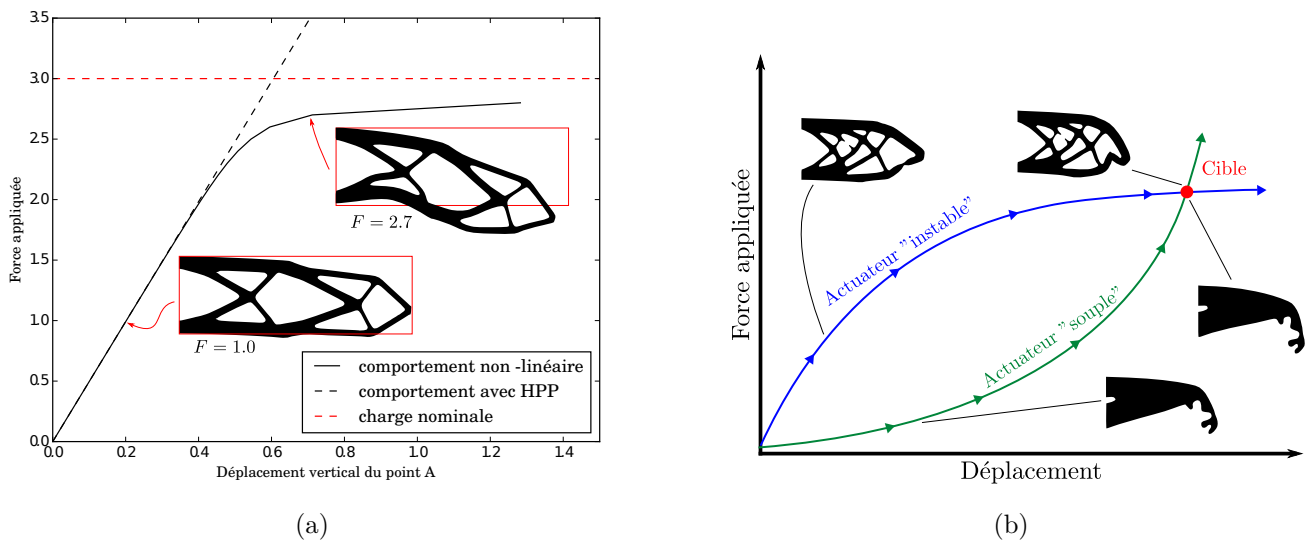


Figure 4 – (a) Courbe de chargement d'une solution d'optimisation obtenue avec les hypothèses des petites perturbations. La structure a été optimisée pour une charge  $F = 3.0$ , cependant quand son comportement est simulé en prenant en compte les non linéarités géométriques une instabilité apparaît.

(b) Présentation des deux types de comportement que peuvent prendre les actuateurs.



Première partie :

---

Optimisation de domaine pratique





# Introduction

## Une première définition de l'optimisation de domaine

Cette partie a pour objectif d'introduire le concept d'optimisation de domaine ainsi que ce qui motive son utilisation dans le cadre de cette thèse. Il s'agit d'une approche partiellement automatisée de la conception (mécanique ou autre). Le principe de la conception est de trouver le design d'une pièce répondant à un cahier des charges donné (masse, tenue mécanique, géométrie, ...). En optimisation de domaine, on se propose d'interpréter ce cahier des charges comme un problème d'optimisation dont l'unique paramètre est le design de la pièce.

## Motivation

A titre d'exemple, voici un cahier des charges pour la conception d'une équerre de maintien, la figure 5 illustre les différentes grandeurs :

- L'objectif est de fabriquer la pièce la plus légère possible
- Sous l'effet de la force  $F$ , le point  $C$  ne doit pas se déplacer de plus de  $U_{max}$ .

Voici une interprétation possible de ce cahier des charges en tant que problème d'optimisation de domaine : trouver le domaine  $\Omega$  contenu dans  $D$  tel que le volume de matière soit minimum, tout en respectant la contrainte  $|U_C| < U_{max}$ .

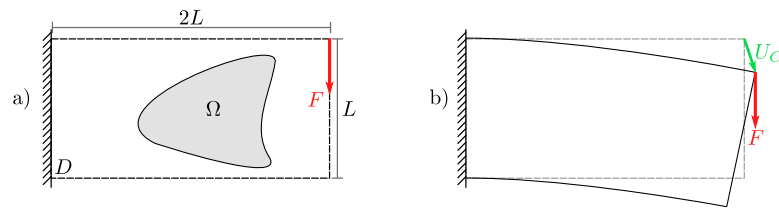


Figure 5 – Optimisation d'un support. a) Définition du problème :  $F$  la force appliquée,  $D$  le domaine optimisable,  $L$  une longueur fixée. b) Déformée du domaine optimisable sous l'effet de la force  $F$ , avec  $U_C$  le déplacement de l'extrémité du domaine  $D$ .

La figure 6 présente deux résultats obtenus par intuition (a) ou à l'aide d'une méthode d'optimisation de domaine (b). On constate que le design proposé par l'optimisation de domaine est plus performant (plus léger), et que son design est très différent de celui obtenu par intuition.

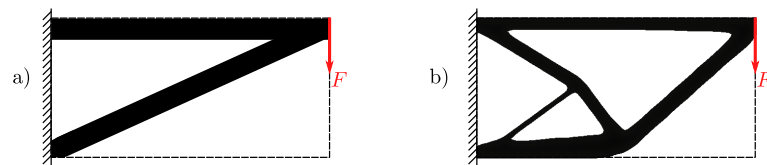


Figure 6 – Solutions proposées pour le problème défini sur la figure 5. a) Solution issue de l'intuition. b) Solution issue d'un processus d'optimisation de domaine.

L'optimisation de domaine est donc aussi un outil d'aide à la conception, que l'on peut appliquer dans une variété de problèmes physiques, elle permet de fournir des solutions novatrices ou non intuitives et est a priori pertinente dans le cadre de la recherche sur de nouveaux matériaux ou structures architecturés.

## Le canevas de l'optimisation numérique

Un problème d'optimisation de domaine est avant tout un problème d'optimisation, en ce sens, on y retrouve tous les éléments clés d'un processus d'optimisation numérique, qui sont

- Une formulation, qui définit ce que l'on souhaite obtenir, ce que l'on cherche à optimiser.
- Un paramétrage, dont les paramètres peuvent être ajustés afin de résoudre le problème considéré.
- Un modèle, qui va évaluer la performance/la propriété recherchée en se basant sur les valeurs des paramètres.
- Un algorithme d'optimisation, qui va décider comment ajuster les paramètres pour résoudre le problème en se basant sur la formulation et du modèle.

Il est intéressant de regarder l'optimisation de domaine d'un point de vue général, l'optimisation numérique fournit ainsi un canevas bien défini dans lequel vont s'inscrire progressivement les différentes spécificités de l'optimisation de domaine. La figure 7 présente ce canevas vide que l'on va progressivement renseigner, il jouera ainsi un rôle de synthèse.

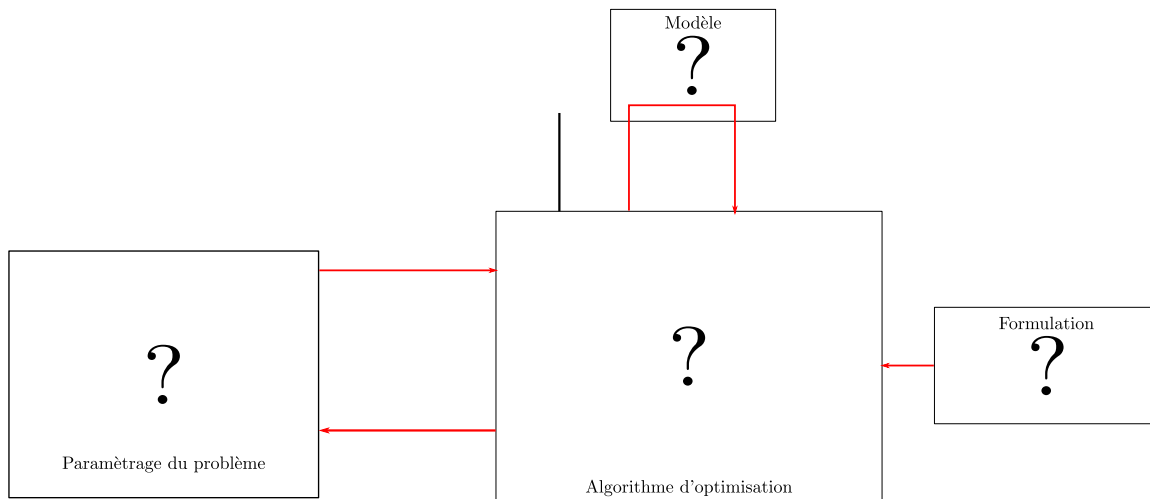


Figure 7 – Schéma général d'un processus d'optimisation complet.

### Les points clés

Le chapitre I présente le cadre très général de l'optimisation. Cette étape est nécessaire car elle conditionne la nature de la formulation et permet de décrire l'importance du paramétrage ainsi que de l'algorithme d'optimisation. Le second chapitre a pour but de présenter la problématique du paramétrage, et ainsi de motiver l'utilisation d'un paramétrage dit exhaustif, qui caractérise l'optimisation de domaine. Le dernier chapitre de cette partie développera la théorie de la dérivation de forme.

# Chapitre I

## Formulation et résolution d'un problème d'optimisation

---

1	Définition d'un problème d'optimisation . . . . .	22
1.1	Formulation générale . . . . .	22
1.2	Résolution d'un problème d'optimisation . . . . .	24
1.3	Commentaires et limites . . . . .	25
2	Une revue des méthodes itératives à gradient les plus courantes . . . . .	25
2.1	Lagrangien et Lagrangien augmenté . . . . .	26
2.2	Introduction à la programmation séquentielle . . . . .	29
2.3	MFD . . . . .	35
2.4	Autres méthodes dans la littérature . . . . .	38
3	Bilan sur les méthodes d'optimisation . . . . .	38
	Bilan du chapitre I . . . . .	40

---

### Résumé

Ce chapitre a pour but de présenter les bases de la théorie de l'optimisation de la manière la plus générale possible, à l'inverse d'ouvrages comme *Conception optimale des structures* (Allaire, 2007) ou encore *Topology optimization, Theory Methods and Applications* (Bendsoe et Sigmund, 2007), qui présentent la théorie de l'optimisation dans le contexte spécifique de l'optimisation de domaine. La raison qui motive ce choix est qu'un problème d'optimisation de domaine est avant tout un problème d'optimisation, et qu'il est par conséquent soumis aux mêmes limitations et aux mêmes difficultés techniques.

*La connaissance de l'optimisation générale est en cela nécessaire tant pour choisir l'algorithme le plus adapté à un problème donné que pour pouvoir en ajuster les divers paramètres de manière pertinente.* Dans une première section, la définition d'un problème d'optimisation sera donnée, incluant le cadre mathématique et les éléments de base permettant sa résolution. Ensuite, une revue concise des méthodes d'optimisation courantes sera donnée.

# 1 Définition d'un problème d'optimisation

## 1.1 Formulation générale

### Vocabulaire

Avant de définir un problème d'optimisation, il est nécessaire d'introduire les notions de critères et de paramètres. Nous appelons "critère" une quantité scalaire qui est évaluée à partir d'un modèle physique décrivant le problème, lui-même fonction d'une série de paramètres (Antoniou, 2010), par exemple

$$J = j(p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (\text{I.1})$$

avec  $J$  le critère,  $j(\dots)$  le modèle permettant l'évaluation de  $J$ , et  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  les  $n$  paramètres du problème d'optimisation. Afin de simplifier l'écriture, on notera

$$\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (\text{I.2})$$

Un critère quantifie une propriété à optimiser, on notera  $J$  le critère particulier représentant la fonction objectif, ou fonction de coût, du problème d'optimisation.

### Problème d'optimisation libre

La description la plus simple d'un problème d'optimisation est la recherche de la combinaison de paramètres  $\bar{p}^*$  minimisant la fonction objectif  $J$  (Antoniou, 2010). Un problème d'optimisation "libre" est défini par un unique critère qui constitue son **objectif** (aussi appelé fonction de coût). Pour le résoudre, il faut rechercher la combinaison de paramètres  $\bar{p}^*$  minimisant la fonction objectif  $J$  (Antoniou, 2010), ce qui se note formellement :

$$\min_{\bar{p}} J = j(\bar{p}). \quad (\text{I.3})$$

### Problème d'optimisation sous contraintes

Cependant, il est très rare de rencontrer en pratique des problèmes d'optimisation n'étant soumis à aucune contrainte. Nous définissons la  $i^{\text{eme}}$  contrainte d'inégalité comme étant

$$g_i(\bar{p}) \leq g_{i,max} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{I.4})$$

et la  $j^{\text{eme}}$  contrainte d'égalité comme étant

$$h_j(\bar{p}) = h_{j,target} \quad \forall j = 1, 2, \dots, q. \quad (\text{I.5})$$

Le problème d'optimisation prend alors une autre forme :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{p}} \quad & J = j(\bar{p}) \\ & g_i(\bar{p}) \leq g_{i,max} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \\ & h_j(\bar{p}) = h_{j,target} \quad \forall j = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

définissant ainsi un problème d'optimisation sous contraintes.

## Ensemble admissible

La notion de contrainte amène celle d'ensemble admissible, nous appelons l'ensemble admissible  $U_{ad}$  toutes les combinaisons de paramètres  $\bar{p}$  du problème respectant les contraintes définies par (I.4) et (I.5), soit

$$\begin{cases} g_i \leq g_{i,max} & \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \\ h_j = h_{j,target} & \text{pour } j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

On dira qu'une combinaison de paramètres  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  est admissible (feasible) quand elle appartient à l'ensemble  $U_{ad}$ . Une solution d'un problème d'optimisation n'est valable que lorsqu'elle appartient au domaine admissible, sans quoi une ou plusieurs des contraintes imposées ne sont pas respectées.

**Remarque :** Un mauvais choix de contraintes pour un problème d'optimisation peut engendrer  $U_{ad} = \emptyset$ , par exemple  $p_1 < 3$  et  $p_1 > 5$ . Si l'exemple donné ici paraît trivial, cela peut s'avérer plus subtil avec des problèmes de physique. Il est important de toujours se poser la question de savoir si l'ensemble  $U_{ad}$  est non-vide.

## Résumé

Pour définir complètement un problème d'optimisation, il faut donc pouvoir fournir :

- un **paramétrage** du problème, c'est-à-dire un jeu de paramètre pouvant être modifié,
- un ou plusieurs **critères**, qui sont des grandeurs scalaires représentant les propriétés à optimiser,
- un ou plusieurs **modèles**, qui permettent d'évaluer les différents critères,
- une **formulation**, qui définit les objectifs et contraintes du problème

Cette définition générale d'un problème d'optimisation peut s'appliquer à une grande gamme d'études (physique, mécanique, finance, ...) (Rao (2009),p.5)

## Exemple

*A titre d'exemple, on présente maintenant la mise en données d'un problème d'optimisation d'une structure de poutres, qui sera utilisée pour illustrer le propos dans les sous-sections suivantes.*

*Soit une structure composée de trois poutres de section  $S$  (voir Figure I.1), on définit  $\bar{p} = (p_1, p_2)$  les paramètres du problème d'optimisation, respectivement l'abscisse du point  $B$  et l'ordonnée du point  $D$ . La structure est soumise à une force  $F$  verticale appliquée en  $C$ . On cherche ici à trouver la combinaison de paramètre  $\bar{p}^*$  minimisant le déplacement du point  $C$ , cependant, on souhaite utiliser un volume de matière inférieur à  $V_{max}$ . On a défini ici deux critères qui sont le déplacement du point  $C$ , noté  $U_C$ , et le volume total de la structure, noté  $V$ . Afin d'évaluer ces critères, on utilise le modèle de la théorie des poutres pour le déplacement et un modèle géométrique simple pour le volume. La formulation du problème est*

$$\min_{p_1, p_2} \begin{cases} |U_C| \\ V \leq V_{max} \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

*En utilisant un modèle mécanique de poutres, on peut exprimer explicitement le critère  $U_C$  en fonction des paramètres  $(p_1, p_2)$ . Il en va de même pour le volume  $V$ , que l'on définit comme étant la somme des longueurs de chaque poutre, multipliée par la section  $S$ . Cela constitue un exemple de description complète d'un problème d'optimisation, il va maintenant être présenté comment ce type de problème peut être résolu.*

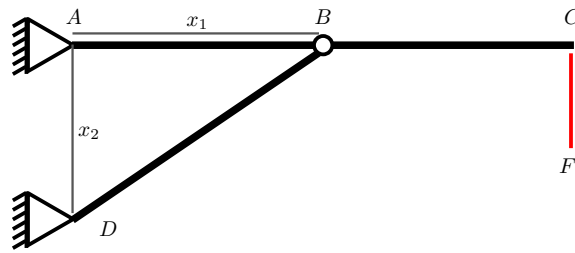


Figure I.1 – Schéma du problème d'optimisation de poutre considéré.

## 1.2 Résolution d'un problème d'optimisation

Antoniou (2010),p.2-3 propose un classement des méthodes d'optimisation selon plusieurs grandes familles :

- Analytique
- Graphique
- Expérimentale
- Numérique

### Méthodes analytique et graphique

Les méthodes Analytique et Graphique sont applicables dans des cas simples, comportant un nombre restreint de paramètres (2 à 3 d'après Antonioui (2010)). En pratique, leur intérêt est plutôt pédagogique, les problèmes réels comportant souvent plus de paramètres.

### Méthodes expérimentales/évolutionnaires

Les méthodes expérimentales consistent en une série d'essais de combinaisons des paramètres d'entrée bien choisis, visant à étudier la sensibilité globale du problème. Une méthode expérimentale bien connue est la méthode des plans d'expériences, elle est cependant elle aussi limitée quand le nombre de paramètres devient trop important car elle nécessite alors beaucoup d'essais, qu'ils soient numériques ou réels.

Il est important de citer parmi les méthodes dites expérimentales l'existence des méthodes stochastiques, par exemple les méthodes évolutionnaires. Un chapitre de *Conception optimale des structures* (Allaire (2007),chapitre 8), écrit par Marc Schoenauer, est dédié à la présentation de méthodes d'optimisation évolutionnaire pour la résolution de problèmes d'optimisation de domaine. Elles demeurent cependant très limitées, l'approche du tableau de bits (Allaire (2007),p. 248) (notamment grâce à la grande liberté de forme qu'elle permet) devient très rapidement inapplicable sur des problèmes réels à cause de son temps de calcul important (Allaire (2007),p.249). Il convient alors de réduire le nombre de paramètres du problème d'optimisation en utilisant des méthodes comme les cellules de Voronoï (Allaire (2007),p.249-256). Dans l'ensemble, ces méthodes évolutionnaires ne sont pas adaptées à la résolution de problèmes d'optimisation de domaine, comme l'explique Sigmund (2011).

### Méthodes numériques

Les problèmes d'optimisation de domaine ont pour particularité de compter un très grand nombre de paramètres, ce qui rend les trois premières classes inutilisables en pratique. Nous nous intéressons donc maintenant aux méthodes que Antonioui (2010) qualifie de "numériques", dont certaines sont tout particulièrement adaptées pour un grand nombre de paramètres.

Elles se basent sur un processus de résolution itératif, engageant à chaque pas  $k$  le calcul d'une petite variation des paramètres que l'on note  $\delta\bar{p}_k$ , définie telle que

$$J(\bar{p}_k + \delta\bar{p}_k) < J(\bar{p}_k) \quad (\text{I.9})$$

avec  $J$  la fonction objectif du problème d'optimisation. Nous définissons la suite

$$\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + \delta\bar{p}_k \quad (\text{I.10})$$

qui, compte tenu de l'équation (I.9), est une suite minimisante de la fonction objectif  $J(\bar{p}_k)$ . La principale différence entre les méthodes d'optimisation numérique est la procédure employée pour le calcul de la direction de descente  $\delta\bar{p}$ . Les méthodes de gradient, comme leur nom l'indique, basent le calcul de direction de descente sur la combinaison des gradients des critères par rapport aux paramètres du problème d'optimisation (Antoniou (2010), chapitre 2). On note  $\nabla J$  le gradient du critère  $J$ , défini lorsque

$$\nabla J = \left[ \frac{\partial J}{\partial p_1}, \frac{\partial J}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial p_n} \right]. \quad (\text{I.11})$$

La fonction objectif est théoriquement réduite à chaque pas, cela jusqu'à atteindre un minimum local (qui peut être global dans certains cas) du problème, défini tel que

$$|\nabla J| = 0, \quad (\text{I.12})$$

ceci est un premier critère de convergence possible, c'est-à-dire une condition qui une fois vérifiée marque la fin du processus d'optimisation. La condition donnée par l'équation (I.12) n'est cependant jamais validée en pratique du fait des approximations numériques ou des contraintes du problème, pour cette raison, une série d'autres critères peuvent être utilisés.

On généralise le principe des algorithmes d'optimisation numérique par la séquence suivante (Antoniou (2010), p.8) :

- Étape 1 :  $k = 0$ , initialisation de  $\bar{p}_0$
- Étape 2 : Calcul des critères  $J_k$ ,  $g_{i,k}$  et  $h_{j,k}$
- Étape 3 : Calcul de l'incrément des paramètres  $\delta\bar{p}_k$
- Étape 4 :  $\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + \delta\bar{p}_k$
- Étape 6 :  $k = k + 1$
- Étape 7 : Tester si l'algorithme a convergé, si oui arrêter, si non, retour à l'étape 2

### 1.3 Commentaires et limites

La description générale proposée dans les paragraphes précédents soulève plusieurs questions relatives à la formulation d'un problème d'optimisation :

- Pour pouvoir utiliser une méthode itérative à gradient, il faut être en mesure de calculer le gradient des critères par rapport aux paramètres du problème d'optimisation. Ce gradient peut être calculé par approximation numérique quand le nombre de paramètres reste réduit, mais dans le cas de l'optimisation de domaine, il est indispensable de se munir d'une théorie en permettant le calcul rapide. Ceci sera discuté par la suite.
- Il est indispensable de pouvoir formuler le problème sous forme de critères, donc de pouvoir quantifier par une grandeur scalaire ce que l'on cherche à optimiser. Cela peut s'avérer être un exercice difficile comme cela sera présenté par la suite.



## 2 Une revue des méthodes itératives à gradient les plus courantes

Cette section a pour but de présenter plusieurs méthodes de résolution d'un problème d'optimisation, ainsi que d'illustrer leurs avantages et inconvénients respectifs. Afin de rendre plus claire la présentation des différentes méthodes, une implémentation basique de chacune d'elle a été réalisée. Le code source est disponible en annexe A.

Les algorithmes seront testés sur un problème modèle à deux paramètres dont voici la formulation :

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & x_2 + 0.3x_1 \\ & \frac{1}{x_1} - x_2 \leq 0 \\ & x_2 + x_1 - 3 \leq 0 \end{aligned} \quad . \quad (\text{I.13})$$

La figure I.2 présente le problème d'optimisation. Les courbes rouges délimitent le domaine admissible, ainsi les contraintes ne sont respectées qu'à l'intérieur du domaine délimité par ces fonctions. Les droites grises matérialisent les iso-valeurs de la fonction objectif. L'étoile verte indique ici la solution du problème d'optimisation. Nous présentons les résultats obtenus

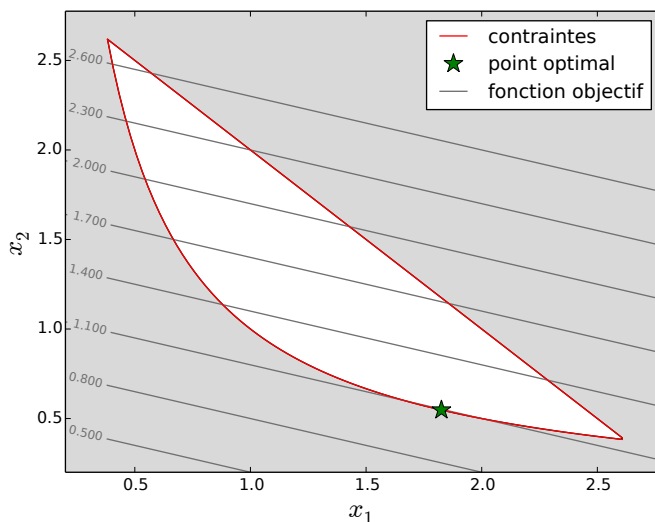


Figure I.2 – Topologie du problème d'optimisation test.

avec différents algorithmes parmi les plus utilisés.

### 2.1 Lagrangien et Lagrangien augmenté

#### Lagrangien

La méthode du Lagrangien est utilisée dans beaucoup de travaux sur l'optimisation de domaine (Allaire *et al.*, 2002, 2009; Wang *et al.*, 2003; Xia et Wang, 2008). Elle constitue un premier choix pertinent dans la mesure où elle est aisée à implémenter. Elle se base sur la réécriture d'un problème d'optimisation sous contrainte (équation (I.7)) comme un problème d'optimisation libre (équation (I.3)), avec toutefois une fonction objectif modifiée. Une synthèse des résultats importants est présentée ici, une démonstration plus rigoureuse est présentée dans *Conception optimale des structures* (Allaire (2007), chapitre 3).

Soit le problème d'optimisation sous contraintes comportant une unique contrainte d'égalité définie comme

$$\min_{\bar{p}} \quad J \quad (I.14)$$

$$h(\bar{p}) = h_{target}$$

Nous définissons le Lagrangien de ce problème d'optimisation comme

$$\mathcal{L}(\bar{p}, \mu) = J + \mu(h(\bar{p}) - h_{target}), \quad (I.15)$$

avec  $\mu$  le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte  $h(\bar{p}) = h_{target}$ .

La construction du Lagrangien suit un schéma simple : on ajoute à la fonction objectif  $J$  un nouveau terme pour chaque contrainte du problème. Ce ou ces termes sont pondérés avec de nouvelles variables, les multiplicateurs de Lagrange  $\mu_i$  (un par contrainte). Le nouveau terme correspondant à chaque contrainte doit s'annuler quand cette dernière est vérifiée. Pour les contraintes d'égalité, on utilise directement la définition de la contrainte, ici  $h = h_{target}$ , et on la transforme pour former le terme supplémentaire  $\mu(h - h_{target})$ . Pour les contraintes d'inégalités (non présentées ici), on utilise un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_+$  supérieur à zéro. Du fait de la construction du Lagrangien, on remarque que dans le cas où  $\bar{p} \in U_{ad}$ , c'est à dire que l'ensemble des contraintes sont respectées, tous les termes du Lagrangien s'annulent sauf  $J$ . Cela implique que le Lagrangien est équivalent à la fonction objectif quand toutes les contraintes sont respectées, ce qui donne

$$\bar{p} \in U_{ad} \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{p}, \mu) = J(\bar{p}). \quad (I.16)$$

Nous pouvons voir le Lagrangien comme un prolongement de la fonction objectif.

Il est possible de démontrer l'existence d'un point optimal  $(\bar{p}^*, h^*)$  où toutes les dérivées partielles du Lagrangien s'annulent, son existence est ici admise (Allaire, 2007). En ce point nous écrivons

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{p}^*, \mu^*)}{\partial \bar{p}} = \frac{\partial J(\bar{p}^*)}{\partial \bar{p}} + \mu^* \frac{\partial h(\bar{p}^*)}{\partial \bar{p}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{p}^*, \mu^*)}{\partial \mu} = h(\bar{p}^*) - h_{target} = 0 \end{cases} \quad (I.17)$$

Il est possible de démontrer que le point optimal définit par les équations (I.17) correspond à un point selle du Lagrangien (voir Figure I.3). De ce fait le problème d'optimisation sous contraintes définit par l'équation (I.14) peut s'écrire comme étant

$$\min_{\bar{p}} \max_{\mu} \mathcal{L}(\bar{p}, \mu). \quad (I.18)$$

Ceci constitue un résultat capital : en utilisant une formulation Lagrangienne d'un problème d'optimisation sous contraintes on le transforme en un problème d'optimisation libre, cela au prix de l'ajout d'un paramètre supplémentaire pour chaque contrainte à traiter. La recherche d'un minimum local est cependant remplacée par la recherche d'un point selle  $(\bar{p}^*, \mu^*)$ .

**Remarque :** Exprimer le Lagrangien du problème d'optimisation est une méthode de résolution analytique efficace quand les modèles sont simples et le nombre de contraintes faible. Pour résoudre un problème ayant un grand nombre de paramètres on peut cependant utiliser un algorithme itératif de recherche de point selle du type de l'algorithme d'Uzawa. Une description détaillée est fournie dans *Conception optimale des structures* (Allaire (2007), p.64). La méthode d'Uzawa définit une stratégie de mise à jour des multiplicateurs de Lagrange et des paramètres à chaque pas d'optimisation, cela dans le but de converger vers le point selle du Lagrangien.

L'algorithme d'Uzawa comporte plusieurs défauts :

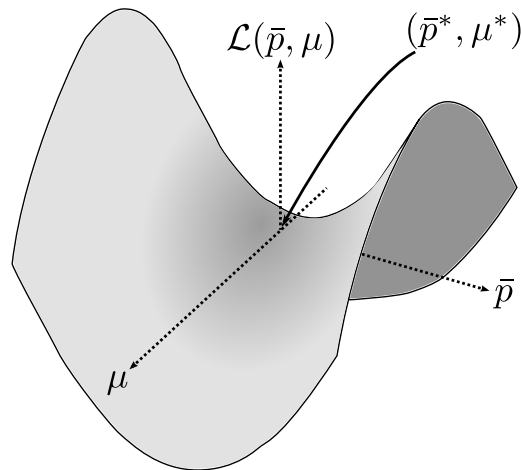


Figure I.3 – Représentation du point selle  $(\bar{p}^*, \mu^*)$  du Lagrangien, ici seul l'exemple d'une contrainte d'égalité est donné, et l'ensemble des paramètres  $\bar{p}$  est visuellement représenté par un unique paramètre (i.e. une seule dimension de l'espace).

- Les contraintes ne sont pas strictement imposées, donc rarement strictement respectées, ce type d'algorithme peine à fournir des résultats validant les contraintes à mesure que le nombre de contraintes imposées augmente.
- La vitesse de convergence est très faible notamment par rapport aux méthodes de "programmation séquentielle" (présentées après).

La figure I.4 illustre l'utilisation de la méthode d'Uzawa pour la résolution du problème test. Le point initial est  $(0.5; 2)$ . Plusieurs constatations peuvent être faites :

- La vitesse de convergence est faible : on constate qu'il a fallu plus de 200 itérations à l'algorithme pour converger vers le point optimal.
- On constate que bien que le point initial soit dans le domaine admissible, certains points se retrouvent en dehors du domaine admissible au cours de l'optimisation, cela met bien en évidence le fait que cette méthode a une gestion très souple des contraintes. Ce point n'est pas forcément un désavantage car il amène de la liberté.
- On constate aussi le comportement oscillant de la méthode autour des contraintes du problème d'optimisation. Cela est lié au choix du pas (variation maximale des paramètres à chaque itération), il n'est cependant pas aisé de le choisir de manière à assurer un comportement non oscillant tout en conservant une vitesse d'évolution acceptable.

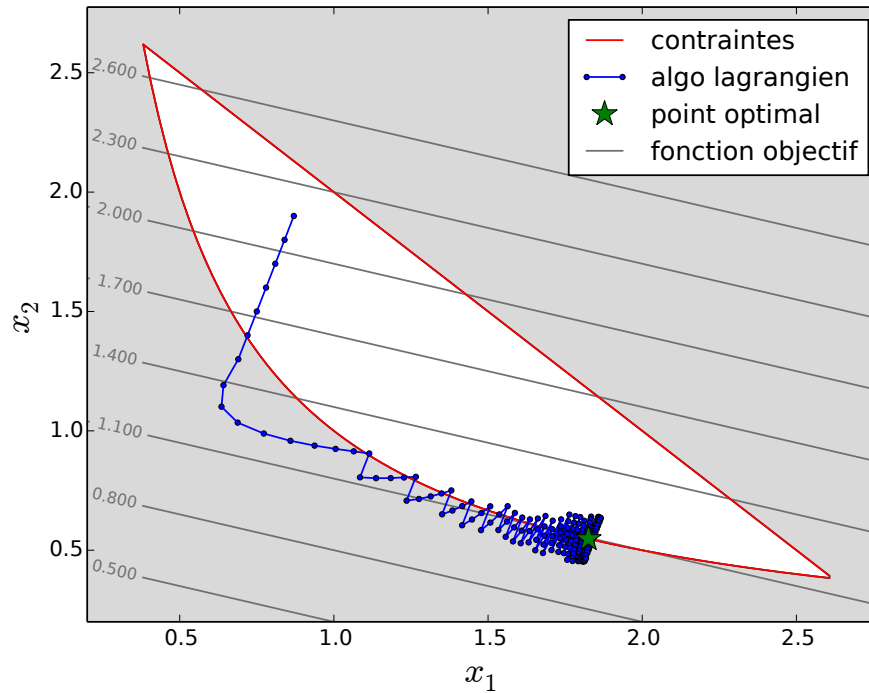


Figure I.4 – Utilisation de l'algorithme d'Uzawa pour la résolution du problème test.

### Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté est une amélioration de la méthode du Lagrangien visant à accélérer la convergence, pour cela, on ajoute des termes supplémentaires quadratiques dans le Lagrangien, par exemple (I.15) devient

$$\mathcal{L}(\bar{p}, \mu, \eta) = J + \mu(h(\bar{p}) - h_{target}) + \eta(h(\bar{p}) - h_{target})^2. \quad (\text{I.19})$$

Cette méthode comporte beaucoup de paramètres d'ajustement ne provenant pas du problème d'optimisation mais de l'algorithme d'optimisation (par exemple, les valeurs initiales des multiplicateurs de Lagrange ainsi que les valeurs des paramètres  $\eta$ ). Ils ont une influence notable sur les résultats et sont difficile à ajuster car ils n'ont pas toujours de sens physique. Le choix des valeurs à employer relève d'une expérience et de l'expertise de l'utilisateur.

La figure I.5 présente comment le Lagrangien augmenté se comporte sur notre cas test (avec un choix judicieux des paramètres non physique).

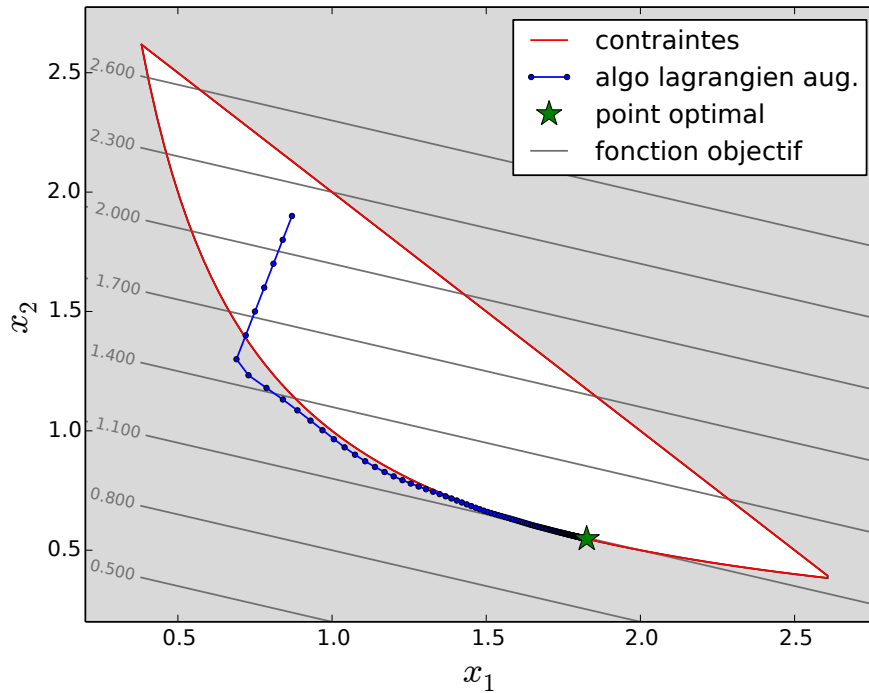


Figure I.5 – Utilisation d'un algorithme de type Lagrangien augmenté pour la résolution du problème test.

## 2.2 Introduction à la programmation séquentielle

Les algorithmes de programmation séquentielle (*Mathematical programming* en anglais) ont fait l'objet de nombreux développements durant ces 50 dernières années (Antoniou, 2010), ils représentent aujourd'hui la majeure partie des méthodes d'optimisation existantes, et sont appliqués dans diverses disciplines (Rao, 2009) dont l'optimisation de domaine (Rong *et al.*, 2013; Morin *et al.*, 2010). Antoniou (2010), p.4 propose un découpage des méthodes de programmation séquentielle en plusieurs branches :

- SLP pour *Sequential Linear Programming*
- SQP pour *Sequential Quadratic Programming*
- *Integer programming*
- *Dynamic programming*

Nous ne détaillerons ici que les branches SLP et SQP qui constituent la base de la méthode d'optimisation utilisée à travers l'ensemble du document. Ces deux algorithmes ont en commun leur concept : ils consistent en un découpage d'un problème complexe en une séquence de sous-problèmes LP (d'où SLP pour Sequential LP) ou QP (d'où SQP pour Sequential QP). Avant de détailler le principe de cette résolution séquentielle, il est nécessaire d'expliquer ce que sont des problèmes LP ou QP.

### Problème LP

Un problème LP est un problème d'optimisation où la fonction objectif ainsi que les fonctions contraintes sont des fonctions linéaires des paramètres d'entrée  $\bar{p}$ , cela donne

$$\begin{aligned}
 \min_{\bar{p}} \quad & \bar{C}^T \cdot \bar{p} \\
 & g_i(\bar{p}) + \bar{G}_i^T \cdot \bar{p} - g_{i,max} \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \\
 & h_j(\bar{p}) + \bar{H}_j^T \cdot \bar{p} - h_{j,target} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, q,
 \end{aligned} \tag{I.20}$$

avec

- $\bar{C}$  une matrice colonne,
- $\bar{G}_i$  une matrice colonne pour la contrainte d'égalité  $i$ ,
- $\bar{H}_j$  une matrice colonne pour la contrainte d'égalité  $j$ .

Plusieurs méthodes existent pour résoudre efficacement ce type de problème, on notera en particulier la méthode du Simplexe (Antoniou (2010), chapitre 12), et une méthode plus récente, celle des points intérieurs (Antoniou (2010), chapitre 12), beaucoup plus efficace pour les problèmes comportant un grand nombre de paramètres.

## Problème QP

La famille des problèmes QP est caractérisée par une fonction objectif quadratique et des contraintes linéaires. On peut étendre (I.20) selon

$$\begin{aligned} \min_{\bar{p}} \quad & \bar{C}^T \cdot \bar{p} + \bar{p}^T \cdot \bar{Q} \cdot \bar{p} \\ & g_i(\bar{p}) + \bar{G}_i^T \cdot \bar{p} - g_{i,max} \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \\ & h_j(\bar{p}) + \bar{H}_j^T \cdot \bar{p} - h_{j,target} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

L'ensemble des matrices est similaire à un problème LP, excepté pour l'ajout de la matrice  $\bar{Q}$ . Le choix de cette matrice peut s'avérer complexe, le plus "naturel" est d'utiliser la Hessienne de la fonction objectif. Cependant elle peut s'avérer difficile à calculer, particulièrement en optimisation de domaine. Pour cela on lui préfère parfois une matrice diagonale permettant de pénaliser une variation trop importante des paramètres  $\bar{p}$ , le choix de cette pondération est souvent heuristique. Là encore, il existe une série de méthodes pour résoudre ce type de problème (Antoniou (2010), chapitre 13).

## Résolution Séquentielle

Les problèmes LP et QP ont fait l'objet d'un grand nombre de développements, on trouve aujourd'hui beaucoup d'outils permettant leur résolution, comme les bibliothèques IPOPT (Wächter et Biegler, 2006), OOQP (Gertz et Wright, 2003) et beaucoup d'autres<sup>1</sup>. La plupart des problèmes réels ne sont pas des problèmes LP ou QP, ils appartiennent à la branche plus générale des problèmes non linéaires (*Non-linear programming*). Il n'est en général pas possible de résoudre ces problèmes directement, c'est pourquoi on utilise une méthode itérative basée par exemple sur le développement de Taylor de l'objectif et des contraintes

$$\begin{cases} J(\bar{p} + \delta\bar{p}) & = J(\bar{p}) + \nabla J^T \delta\bar{p} + o(\delta\bar{p}) \\ g_i(\bar{p} + \delta\bar{p}) & = g_i(\bar{p}) + \nabla g_i^T \delta\bar{p} + o(\delta\bar{p}) \\ h_j(\bar{p} + \delta\bar{p}) & = h_j(\bar{p}) + \nabla h_j^T \delta\bar{p} + o(\delta\bar{p}) \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

avec  $\delta\bar{p}$  la petite variation des paramètres d'entrée. Cette expression permet de linéariser le problème d'optimisation, et ainsi de le transformer par exemple en problème LP (voir équation (I.20)), avec

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\bar{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial J(\bar{p})}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial J(\bar{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\bar{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial g(\bar{p})}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial g(\bar{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\bar{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial h(\bar{p})}{\partial p_2} \\ \dots \\ \frac{\partial h(\bar{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I.23})$$

1. On trouve une liste à jour et très complète des bibliothèques d'optimisation sur Wikipedia, dans la rubrique *List of optimization software*.

Nous décrivons donc le problème d'optimisation global comme une succession de sous-problèmes simplifiés. Chaque sous-problème possède son propre domaine admissible, souvent qualifié de polygone admissible. Il correspond aux combinaisons de  $\delta\bar{p}$  respectant les contraintes linéarisées du sous-problème.

### Algorithme SLP

L'algorithme SLP consiste en un découpage du problème complexe en une séquence de sous-problèmes LP, pour un problème simple comportant une unique contrainte d'inégalité, on écrit

$$\begin{aligned} \min_{\bar{p}} J \\ g(\bar{p}) < g_{max} \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \min_{\delta\bar{p}} \quad & \nabla J^T \delta\bar{p} \\ & \nabla g^T \delta\bar{p} < g_{max} - g(\bar{p}) \\ & |\delta\bar{p}| \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (I.24)$$

ici la minimisation de la fonction objectif  $J$  a été remplacée par la minimisation de sa variation linéarisée  $\nabla J^T \delta\bar{p}$ . De la même façon on traduit le respect de la contrainte d'inégalité (caractérisée par l'équation  $g(\bar{p}) < g_{max}$ ) par une nouvelle condition, qui peut aussi s'écrire

$$g(\bar{p})_k + \nabla g^T \delta\bar{p}_k < g_{max}, \quad (I.25)$$

nous retrouvons le développement de Taylor à l'ordre 1 de la contrainte  $g(\bar{p})$ , et donc le respect de la contrainte  $g(\bar{p}) < g_{max}$ .

Du fait de leur caractère linéaire, les problèmes LP peuvent diverger ( $\|\delta\bar{p}\|$  infinie), pour éviter cela, on ajoute une contrainte "de boîte admissible" :

$$|\delta\bar{p}_i| \leq \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (I.26)$$

nous notons que la boîte admissible ainsi générée présente aussi l'avantage de restreindre la variation des paramètres dans un domaine où il reste raisonnable d'écrire  $J(\bar{p} + \delta\bar{p}) \approx J(\bar{p}) + \nabla J^T \delta\bar{p}$ . Le choix de  $\epsilon$ , que l'on peut voir comme la largeur de la boîte, n'est pas aisé, il relève souvent de méthodes heuristiques.

### Exemple d'utilisation de l'algorithme SLP

*Nous allons maintenant illustrer cette méthode avec un exemple de problème d'optimisation à deux paramètres soumis à deux contraintes d'inégalité. Le problème peut être formulé comme suit*

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & J(x_1, x_2) \\ & g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

*La figure I.6 présente la topologie du problème, les figures I.7, I.8 et I.9 présentent trois pas successifs et les trois problèmes LP qui en découlent.*

*Les figures I.7, I.8 et I.9 présentent trois pas successifs de résolution du problème LP*

$$\begin{aligned} \min_{\delta\bar{p}} \quad & \nabla J^T \delta\bar{p} \\ & \nabla g_1^T \delta\bar{p} < g_{max} - g_1(\bar{p}) \\ & \nabla g_2^T \delta\bar{p} < g_{max} - g_2(\bar{p}) \\ & -\epsilon \leq \delta\bar{p} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

*On voit comment lors du premier pas, seule la contrainte sur les valeurs maximum/minimum de  $\delta\bar{x}$  (la contrainte de boîte admissible) est active, donnant ainsi un polygone admissible carré. Dès le deuxième pas, les deux contraintes  $g_1$  et  $g_2$  s'activent, restreignant le polygone admissible. Le*

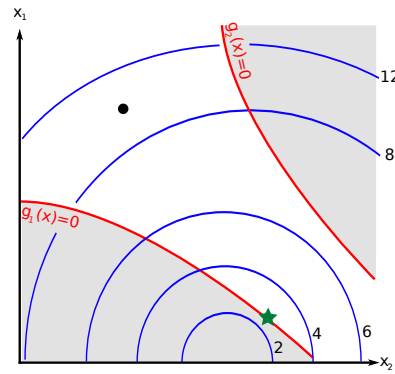


Figure I.6 – Définition d'un problème d'optimisation à deux paramètres  $(x_1, x_2)$  soumis à deux contraintes d'inégalité  $g_1$  et  $g_2$ . Le disque noir représente le point d'initialisation du problème, l'étoile verte le point optimal (en principe inconnu). Les lignes bleues représentent les isovalues de la fonction objectif. Les zones grises sont les domaines interdits.

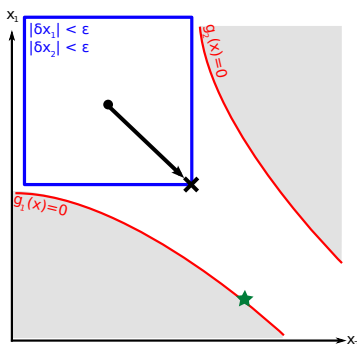


Figure I.7 – Premier pas

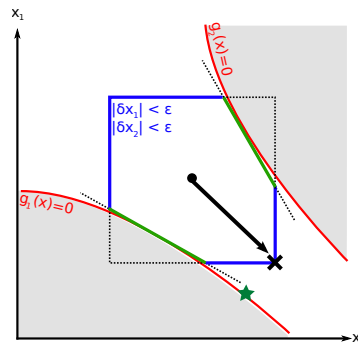


Figure I.8 – Second pas

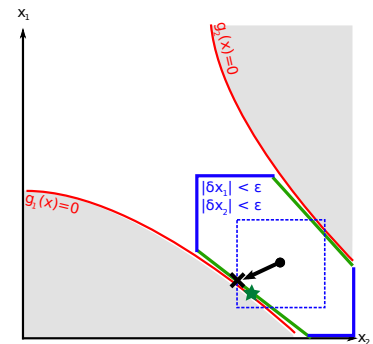


Figure I.9 – Troisième pas

troisième et dernier pas présenté met en avant un point faible de la méthode : le point optimal d'un sous-problème LP se trouve toujours sur un des sommets du polygone admissible. Afin d'améliorer la convergence, on réduit progressivement la valeur de  $\epsilon$  (polygone en pointillé). Une solution de base est de dire que si l'objectif augmente, alors la boîte admissible est trop grande, on peut alors la réduire.

### Limitation des algorithmes SLP

Les algorithmes SLP comportent une importante limitation. La figure I.10 présente l'utilisation d'un algorithme SLP sur le problème-fil rouge de cette section, nous constatons effectivement que l'algorithme ne parvient pas à trouver le point optimal.

Cette incapacité à converger vers le point optimal dans ce cas précis est présentée par la figure I.11. On voit que dans la configuration de contrainte présentée ici (figure de gauche) le sous-problème LP (figure du milieu) propose un résultat optimal qui ne se trouve pas dans le domaine admissible (figure de droite). Cela va entraîner l'arrêt de l'algorithme : le fait que la solution proposée ne respecte pas les contraintes entraîne la réduction du paramètre  $\epsilon$  définissant la contrainte de boîte, progressivement la combinaison de paramètres se rapproche de la contrainte, réduisant de plus en plus  $\epsilon$ .

Ce problème n'est pas seulement lié aux méthodes SLP, on le retrouve aussi avec certaines méthodes SQP



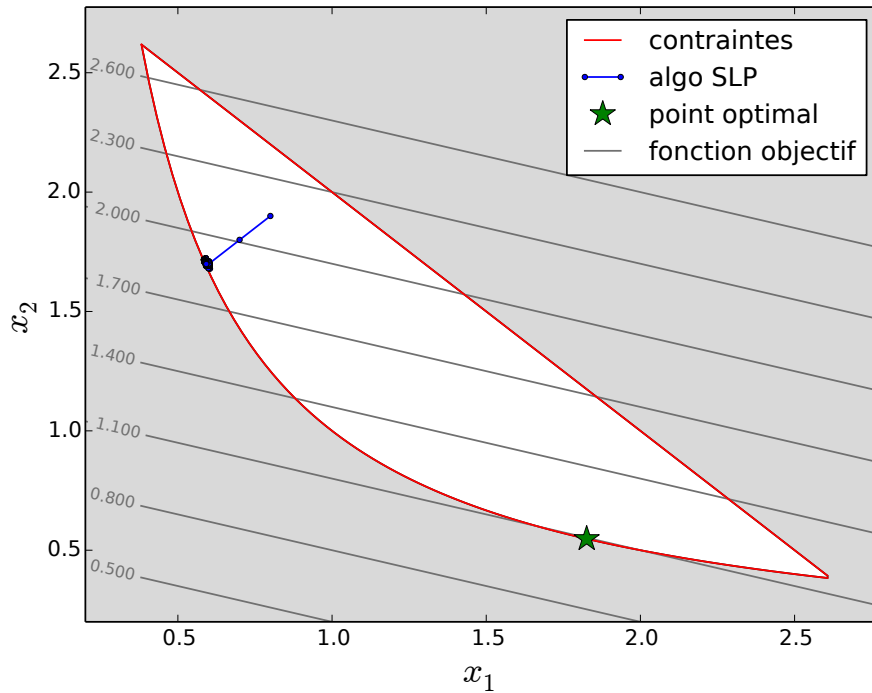


Figure I.10 – Utilisation d’un algorithme de type SLP pour la résolution du problème test.

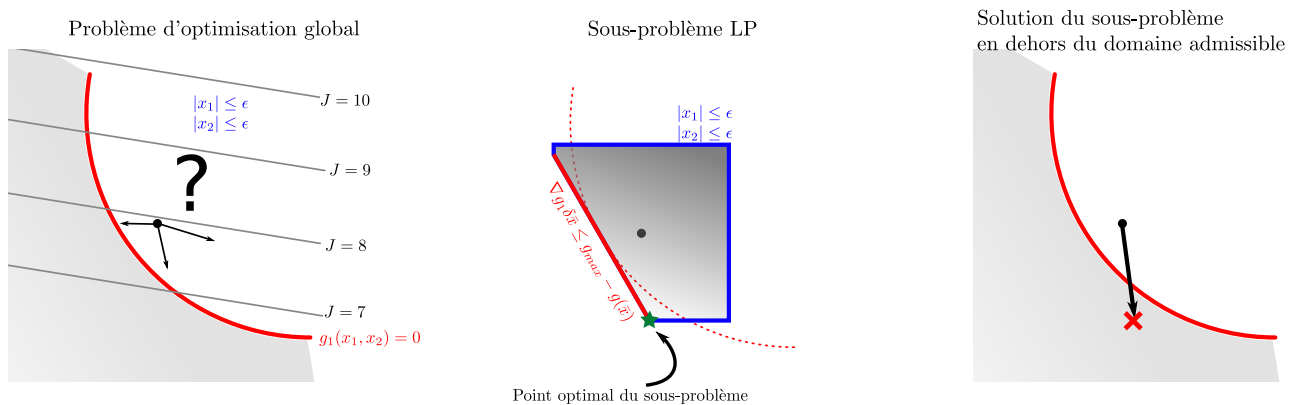


Figure I.11 – Problème connu des méthodes SLP : dans le cas où la tangente à la contrainte est dans le domaine interdit, toute itération sera refusée car elle se trouvera dans le domaine interdit, cela peut importe la valeur de déplacement maximum autorisé.

### Méthode SQP

Il est aussi possible de découper le problème global en sous-problèmes quadratiques, cela garantit en général une meilleure convergence. Plusieurs choix sont possibles pour la matrice  $\bar{Q}$  définie dans l'équation (I.21). Le choix le plus naturel est d'utiliser la Hessienne des différents critères, comme proposé par Antoniou (2010), son calcul peut cependant s'avérer très complexe, c'est pourquoi d'autres alternatives sont couramment utilisées.

## Bilan

Les méthodes de programmation séquentielle présentent plusieurs avantages et inconvénient :

- + Une gestion beaucoup plus rigoureuse des contraintes
- + Une vitesse de convergence plus élevée que les méthodes à Lagrangien
- Cependant, des possibles blocages dans certains cas !
- La nécessité de résoudre une série de problèmes LP ou QP.

Afin de remédier aux blocages occasionnés par la topologie des contraintes il existe une méthode basée sur une réécriture du sous-problème d'optimisation selon un autre principe. Nous allons maintenant la présenter.

## 2.3 MFD

MFD (Method of Feasible Direction) est une variante de programmation séquentielle adaptée pour traiter les problèmes d'optimisation de grande dimension tout en gérant jusqu'à plusieurs dizaines de contraintes. Cette méthode a été proposée par [Zoutendijk \(1970\)](#) puis améliorée par [Belegundu et al. \(1995\)](#). La méthode est avant tout une méthode de programmation séquentielle, c'est à dire qu'elle est basée sur la résolution séquentielle de problème LP ou QP. Ces sous-problèmes sont cependant modifiés, ils sont basés sur le principe de la maximisation de marge que nous allons présenter maintenant.

### Sous-problème de maximisation de marge

Nous prenons l'exemple d'un problème LP et de sa réécriture en maximisation de marge.

$$\begin{array}{l} \min_{\delta\bar{p}} \quad \nabla J^T \delta\bar{p} \\ \nabla g^T \delta\bar{p} < g_{max} - g(\bar{p}) \\ |\delta\bar{p}| \leq \epsilon \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \max_{\delta\bar{p}, m} \quad m \\ \nabla J^T \delta\bar{p} + m \leq 0 \\ \nabla g^T \delta\bar{p} + m \leq g_{max} - g(\bar{p}) \\ |\delta\bar{p}| \leq \epsilon \end{array}, \quad (I.27)$$

avec  $m$  la marge, qui est un paramètre optimisable supplémentaire introduit uniquement dans le sous-problème d'optimisation. En regardant l'équation (I.27) nous remarquons que

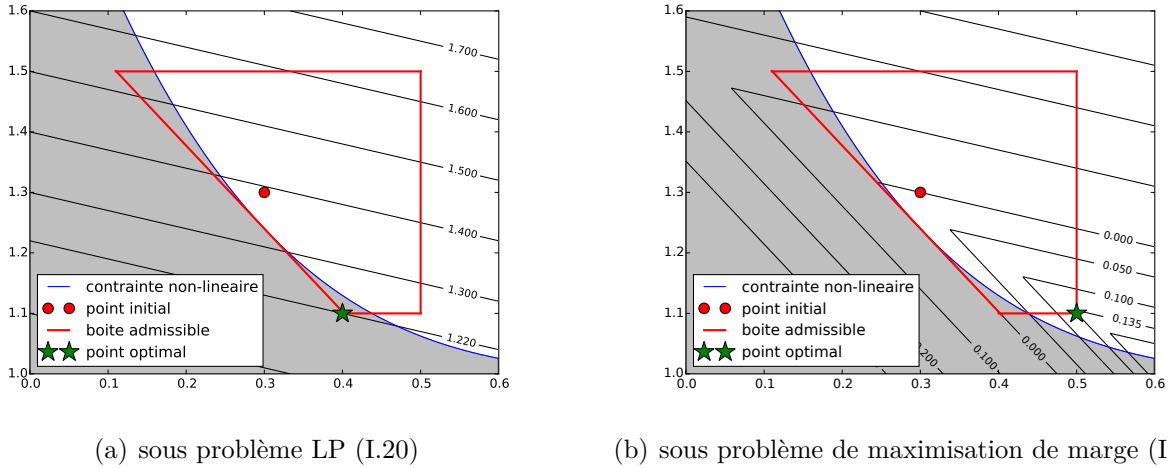
$$m \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla J^T \delta\bar{p} \leq -m \\ \nabla g^T \delta\bar{p} - (g_{max} - g(\bar{p})) \leq -m, \end{cases} \quad (I.28)$$

ce qui implique que :

- La fonction objectif décroît d'au moins  $m$ .
- La contrainte  $g$  est au moins à  $m$  d'être saturée.

La figure I.12 illustre la solution locale pour un sous-problème de minimisation de l'objectif et un sous-problème de minimisation de marge. La quantité à minimiser est représentée par les courbes d'iso-valeurs noires alors que les contraintes linéarisées sont représentées par les bords rouges. Les étoiles vertes représentent la solution du sous problème. On retrouve pour le cas de la minimisation de l'objectif le problème énoncé précédemment : la solution du sous-problème respecte les contraintes linéarisées uniquement, ce qui entraîne une sortie du domaine admissible car la contrainte réelle est concave.

Nous observons que la résolution du sous-problème de maximisation de marge permet à la fois de réduire l'objectif tout en s'écartant au maximum de la saturation des contraintes, évitant ainsi les problèmes rencontrés avec les méthodes SLP classiques. L'algorithme SLP classique échoue lors de la résolution du problème-fil rouge (figure I.10) alors que la méthode MFD parvient à converger vers la solution du problème sans difficultés (figure I.14).



(a) sous problème LP (I.20)

(b) sous problème de maximisation de marge (I.27)

Figure I.12 – Représentations graphiques d'un même sous problème d'optimisation à deux variables. La zone grisée correspond au domaine où la contrainte du problème n'est pas respectée. La boîte rouge définit le polygone admissible du sous problème. Les iso-valeurs noirs représentent la fonction objectif du sous problème : (a) dans le cas d'un sous problème LP, la fonction objectif  $\nabla J^T \delta \bar{p}$ . (b) dans le cas d'un sous problème de maximisation de marge, la marge  $m$ .

### Amélioration du sous-problème

Le sous-problème de maximisation de marge peut être rendu plus performant par l'ajout d'un terme quadratique dans la formulation ainsi que de coefficients multiplicateurs pour la marge :

$$\begin{aligned}
 \min_{\delta \bar{p}, m} \quad & \delta \bar{p}^T \cdot \bar{Q} \cdot \delta \bar{p} - m \\
 & C^T \cdot \delta \bar{p} + t_0 m < 0 \\
 & G_i^T \cdot \delta \bar{p} + t_i m < g_{i,max} - g_i(\delta \bar{p})
 \end{aligned} \tag{I.29}$$

Les coefficients  $t_0$  et  $t_i$  sont appelés coefficients de Topkis, ils traduisent l'importance relative entre les différentes contraintes. Dans l'algorithme utilisé lors pour cette étude, ils sont tous initialisés à un, et sont ensuite modifié au cours de l'optimisation si cela s'avère nécessaire.

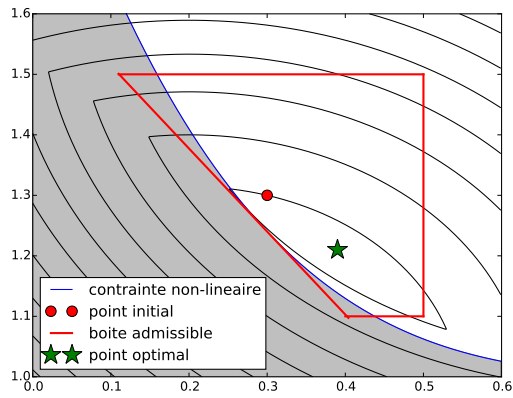
L'ajout du terme pondérateur  $\delta \bar{p}^T \cdot \bar{Q} \cdot \delta \bar{p}$  vise à améliorer la convergence, on peut par exemple utiliser pour  $\bar{Q}$  une matrice diagonale qui pondère l'importance des différentes inconnues du problème.

La figure I.13 illustre l'effet de ces modifications sur un sous-problème exemple.

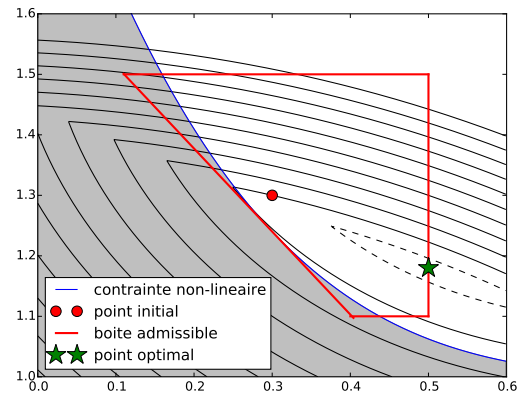
Ce problème est un problème quadratique QP, il existe donc de nombreuses méthodes pour le résoudre, mais elles ne sont pas détaillées ici. Dans le code développé durant la thèse, un solveur externe est utilisé pour résoudre les sous problèmes MFD : la librairie IPOPT.

La figure I.14 montre l'utilisation de l'algorithme MFD pour le problème test. Nous constatons son efficacité et sa tendance à se déplacer presque tangentiellement aux contraintes.

L'avantage majeur de cet algorithme est sa vitesse de convergence (présentée comme "super-linéaire") ainsi que sa gestion stricte des contraintes : il n'est pas possible de ressortir du domaine admissible une fois que ce dernier a été atteint. La contrepartie de cette gestion stricte des contraintes est la perte de liberté, cela sera illustré un peu plus loin.



(a) sous problème (I.29)



(b) sous problème (I.29) et  $t_1 \times 2$

Figure I.13 – Effet des modifications proposées sur un sous-problème exemple : a) ajout d'un terme quadratique b) ajout d'un terme quadratique et coefficient topkis de la contrainte multiplié par deux.

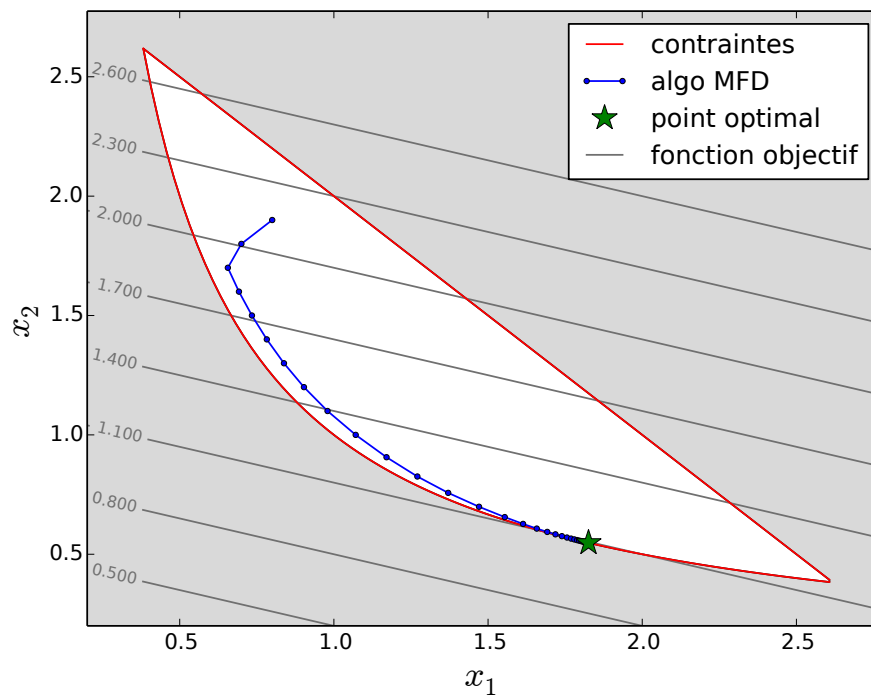


Figure I.14 – Utilisation d'un algorithme de type MFD pour la résolution du problème test.

## 2.4 Autres méthodes dans la littérature

Il existe de nombreuses autres méthodes numériques d'optimisation dont MMA ( *Method of Moving Asymptots*) introduite par [Svanberg \(1987\)](#). Il s'agit là encore d'une méthode de programmation séquentielle basé sur la résolution successive d'une série de problèmes QP. Cette méthode est très couramment utilisée par les auteurs utilisant la méthode d'optimisation de domaine SIMP dont nous traiterons dans le chapitre II.

## 3 Bilan sur les méthodes d'optimisation

### Résumé

Le tableau I.1 résume les avantages et les inconvénients des différentes méthodes d'optimisation à gradient présentées ici, ce tableau souligne qu'il n'existe pas d'algorithme d'optimisation

méthodes	Lagrangien	Lagrangien augmenté	SLP	SQP	MFD
vitesse de convergence	-	-	+	+++	++
simplicité	+++	+++	-	-	-
résolution d'un sous-problème	non	non	LP	QP	LP/QP
respect des contraintes	-	-	+	+	+
robustesse	+	+	-	-	+
liberté	+++	+++	?	?	-

Table I.1 – Résumé des conclusions concernant les grandes familles de méthodes d'optimisation présentée dans ce chapitre.

idéal en toutes circonstances ! Les algorithmes de type programmation séquentielle semblent plus intéressant, notamment du fait de leur aptitude à respecter rigoureusement les contraintes mais aussi grâce à leur convergence souvent meilleure.

### Cas de domaines admissibles non connexe

Leur respect rigoureux des contraintes peut cependant être vu comme un inconvénient de taille si le domaine admissible n'est pas connexe, comme le présente la figure I.15 Cette figure montre que seul un algorithme permettant la sortie du domaine admissible peut trouver la solution d'un problème dont le domaine admissible n'est pas connexe.

Un problème d'optimisation de domaine n'est pas forcément connexe, et peut dans un même temps être soumis à plusieurs contraintes sévères, il conviendra donc de faire un choix entre une méthode gérant les contraintes avec rigueur, mais ayant en contre partie une liberté plus faible, et une méthode gérant les contraintes de manière plus souple, mais ayant une plus grande liberté.

### Variétés d'algorithmes possibles

Dans cette section plusieurs grandes familles d'algorithmes ont été présentées, il y a cependant une multitude de subtilités numériques qu'il est important de considérer et qui n'ont pas été traitées ici. Nous dressons ici une liste non exhaustive de ces éléments clés :

- Que faire quand l'initialisation est en dehors du domaine admissible ?
- Que faire si l'on sort du domaine admissible ?
- Est-il nécessaire de conditionner numériquement les sous-problèmes d'optimisation, afin d'en faciliter la résolution par un solveur tiers ?

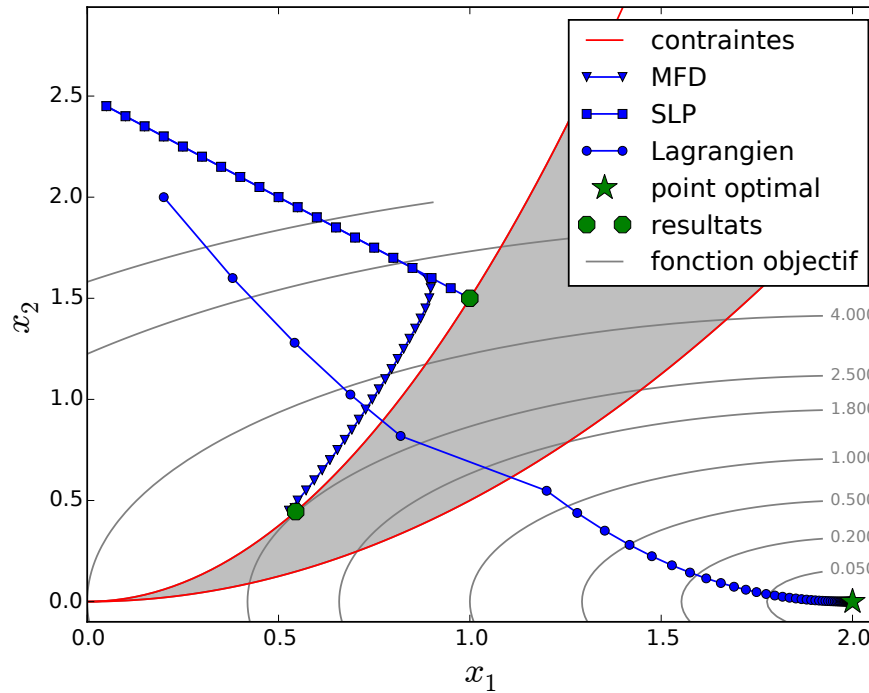


Figure I.15 – Comparaison des algorithmes d'optimisation sur un cas d'optimisation où le domaine admissible n'est pas connexe

Tous les choix fait pour répondre à ces questions constituent une méthode, c'est pour cette raison qu'il n'existe pas un unique algorithme SLP ou un unique algorithme SQP. Les différents choix réalisés pour constituer les algorithmes utilisés dans les exemples de ce chapitre sont heuristiques et assez basiques, il existe cependant des variantes influant grandement sur l'efficacité des algorithmes. L'annexe A rassemble les codes sources des algorithmes tels que défini dans ce chapitre.

## Bilan du chapitre I

Les bases de la formulation d'un problème d'optimisation ont été énoncées à travers ce premier chapitre. Nous avons mis évidence qu'il faut être en mesure de fournir certains éléments pour réaliser un calcul d'optimisation :

- Des **critères**, qui sont des quantités que l'on cherche à optimiser (énergie élastique, déplacement d'un point, ...)
- Des **modèles**, qui permettent de calculer les critères,
- Une **formulation**, qui décrit le problème d'optimisation (par exemple, minimisation d'un déplacement sous contrainte de masse maximum)
- Un **paramétrage** décrivant le domaine optimisable, dont on va pouvoir ajuster les combinaisons de paramètres pour résoudre le problème défini par la formulation.

Les principales méthodes de résolution utilisées en optimisation de forme ont été présentées, nous avons indiqué qu'il est nécessaire d'utiliser une méthode numérique itérative à gradients. Un schéma conceptuel minimum de ces méthodes est présenté sur la figure I.16. Les points d'interrogation sur cette même figure indiquent les éléments qui sont encore à préciser afin de pouvoir définir un process d'optimisation de domaine.

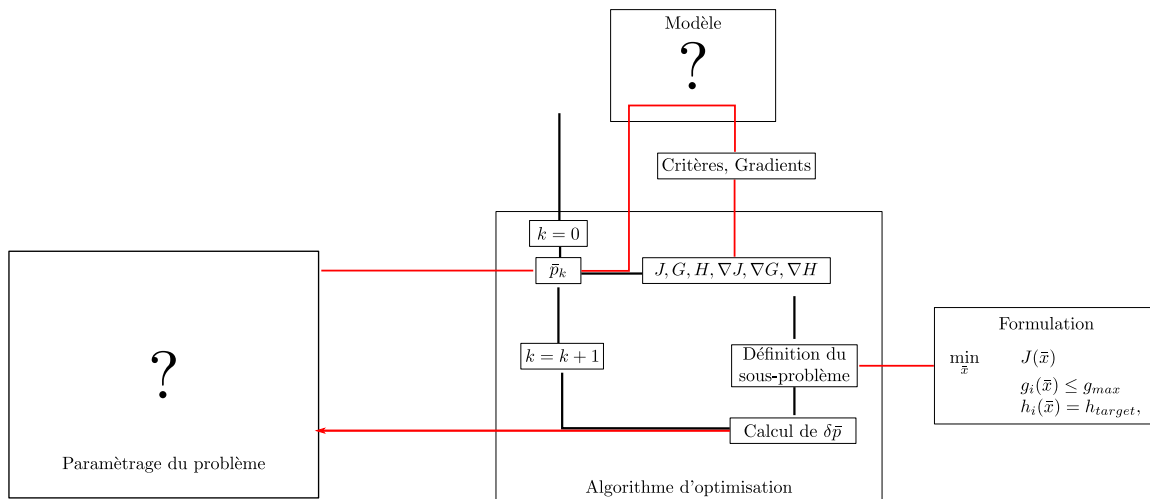


Figure I.16 – Schéma général d'un process d'optimisation complet.

Nous avons présenté différents algorithmes d'optimisation à gradients que nous avons ensuite comparé à l'aide d'un exemple. **Nous avons fait le choix d'utiliser pour la suite de l'étude l'algorithme *Method of Feasible Direction* (MFD)** appartenant à la branche des méthodes de programmation séquentielle. Cet algorithme a été retenu notamment pour sa gestion rigoureuse des contraintes ainsi que pour sa robustesse.

Dans les deux chapitres suivants, nous allons étudier les méthodes possibles pour le paramétrage d'un domaine, mais aussi une méthode pour calculer les gradients des différents critères.

# Chapitre II

## Une revue des descriptions de domaine

---

1	Plusieurs pistes pour la description de domaine . . . . .	43
1.1	Paramétrages réduits . . . . .	43
1.2	Paramétrage en densité . . . . .	44
1.3	Bilan sur les méthodes de description . . . . .	46
2	Méthode des lignes de niveaux . . . . .	47
2.1	Définition et limites . . . . .	47
2.2	Description de plusieurs sous domaines . . . . .	50
2.3	Évolution d'une fonction ligne de niveaux . . . . .	52
3	Mise en œuvre de la méthode des lignes de niveaux . . . . .	53
3.1	Méthode de "frontière immergée" . . . . .	54
3.2	Autres méthodes et améliorations . . . . .	59
	Bilan du chapitre II . . . . .	61

---

### Résumé

Ce chapitre a pour but de présenter et sélectionner une méthode permettant de paramétrer un domaine de définition. Nous présentons dans un premier paragraphe plusieurs solutions extraites de la littérature pour décrire un domaine quelconque, notamment l'approche en densité, utilisée par la méthode d'optimisation de domaine SIMP (Bendsoe et Sigmund, 2007).

Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement à la méthode des lignes de niveaux (Osher et Fedkiw, 2004) qui est une des méthodes permettant de décrire des domaines quelconques. Nous présenterons les avantages qu'elle apporte dans le cadre de notre étude.

Enfin, nous présentons plus en détails comment cette méthode est utilisée dans le cadre de l'optimisation de domaine.



## Motivation

Le chapitre I a permis de définir les briques permettant de construire un problème d'optimisation dans sa forme la plus générale. Il faut maintenant définir chacune de ces briques dans le contexte de l'optimisation de domaine. Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement à la question du paramétrage d'un problème d'optimisation de domaine.

Soit  $D$  le domaine de travail et  $\Omega$  le domaine optimisé (c.f. figure II.1), Nous définissons un problème d'optimisation de domaine comme étant

$$\min_{\Omega} J(\Omega). \quad (\text{II.1})$$

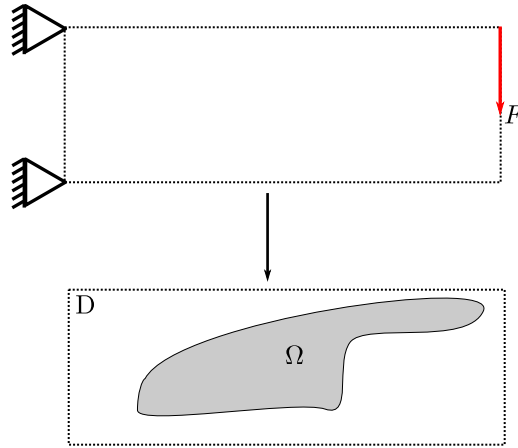


Figure II.1 – Exemple d'un problème d'optimisation en mécanique (en haut) et de la définition du domaine de travail  $D$  et un exemple de domaine optimisé  $\Omega$  (en bas)

Nous traduisons ce problème comme étant la recherche du sous domaine  $\Omega$  de  $D$  minimisant le critère  $J(\Omega)$ . Le domaine de travail représente le lieu de l'espace où l'on peut distribuer de la matière, le domaine optimisé est quant à lui le lieu de l'espace où se trouve la matière, il représente la structure optimisée.

D'après la définition proposée, un problème d'optimisation de domaine comporte un unique paramètre qui est le domaine optimisé  $\Omega$ . Un domaine de définition reste cependant un objet mathématique abstrait, il est donc nécessaire de le discrétiser, de le quantifier, avant de l'utiliser comme paramètre d'un algorithme d'optimisation numérique du type de ceux présentés dans le chapitre I. Cela donne

$$[p_1, p_2, \dots, p_n] \rightarrow \Omega. \quad (\text{II.2})$$

Cette étape est le paramétrage du domaine, elle peut être réalisée de multiples façons et a une grande influence sur la qualité des résultats obtenus par optimisation.

## Notion d'exhaustivité

Le but du paramétrage est de permettre la représentation numérique du sous domaine  $\Omega$ . Durant un processus d'optimisation les paramètres sont modifiés à chaque itération, ce qui implique ici une transformation de  $\Omega$ . Le domaine  $\Omega$  va donc évoluer par le biais de la variation des paramètres le décrivant.

Nous ne connaissons pas a priori la suite des variations de  $\Omega$ , il faut donc se doter d'un paramétrage permettant de représenter la plus grande variété possible de formes.

Nous appelons exhaustivité d'un paramétrage sa capacité à représenter le plus grand nombre possible de sous domaines  $\Omega$  de  $D$ .

# 1 Plusieurs pistes pour la description de domaine

Cette section a pour but de présenter quelques-unes des méthodes pour décrire un domaine. Elles sont couramment utilisées dans la littérature pour des problèmes d'optimisation, nous avons cependant fait le choix de les écarter. Nous allons expliquer pour quelles raisons elles n'ont pas été retenues pour la suite de l'étude.

Nous traitons en particulier de deux grandes familles de méthodes, les paramétrages "réduit" et les paramétrages en densité.

## 1.1 Paramétrages réduits

Les paramétrages présentés ici sont définis comme "réduits", dans la mesure où ils utilisent un nombre restreint de paramètres pour représenter le domaine optimisable.

### Paramétrage simple

Ce paramétrage correspond à une description du domaine par des paramètres quelconques : épaisseur d'une membrane, module de Young, diamètre d'une poutre, ... La figure II.2 présente par exemple un paramétrage possible pour un problème de mécanique : les paramètres  $x_1$  et  $x_2$  représentent l'épaisseur des poutres AC et DB respectivement. On peut alors exprimer le problème d'optimisation de domaine à partir des paramètres  $x_1$  et  $x_2$  qui décrivent le domaine optimisé  $\Omega$ .

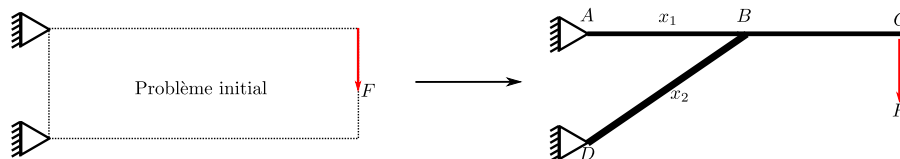


Figure II.2 – Exemple de paramétrage du problème de base. Ici, les paramètres sont les épaisseurs  $x_1$  et  $x_2$  des barres AC et DB respectivement.

### Paramétrage géométrique

La méthode de paramétrage géométrique consiste à définir directement des propriétés géométriques comme paramètres, la figure II.3 illustre comment il est possible, pour un même problème d'optimisation de poutre, de définir plusieurs paramétrages géométriques à l'aide de seulement deux paramètres  $x_1$  et  $x_2$ .

### Bilan sur les paramétrages réduits

Les paramétrages réduits comportent un défaut majeur : ils ne sont pas exhaustifs. En observant les paramétrages proposés sur la figure II.3 nous constatons qu'aucun d'eux ne permet de représenter les formes présentées sur la figure II.4.

La non-exhaustivité est une limitation importante, car tout un ensemble de formes n'est plus descriptible, et dans cet ensemble maintenant inaccessible se trouve peut-être la forme optimale, solution globale du problème d'optimisation. Ce type de paramétrage ne permet pas de dégager des nouvelles topologies, mais uniquement d'obtenir la meilleure performance pour une topologie fixée.

Ce type de description demeure cependant très utilisé, car il permet de définir des problèmes d'optimisation avec un nombre restreint de paramètres, mais il permet aussi de garder un contrôle sur les solutions finales proposées par l'optimiseur. Il est même préférable de favoriser ce

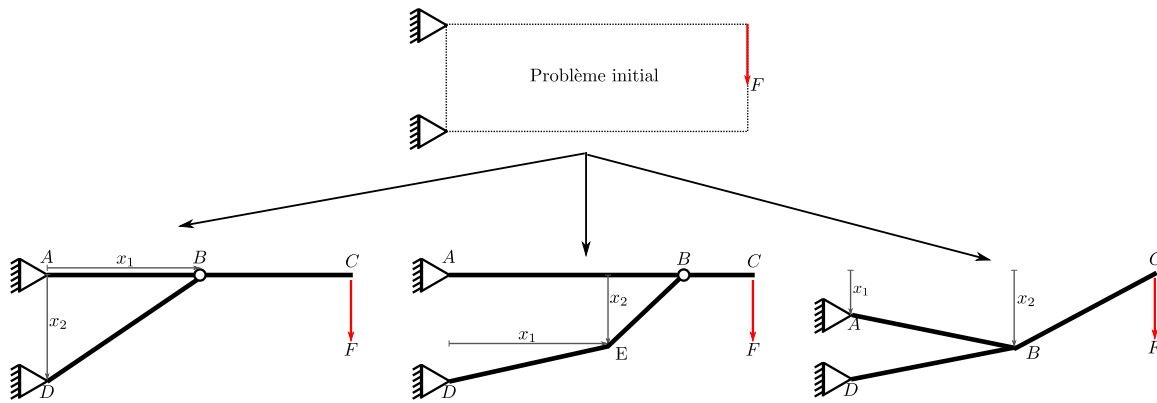


Figure II.3 – Exemple de trois paramétrages différents pour un même problème. Ici seul les positions de certains points sont paramétrées, mais il est aussi possible de paramétrer la section de chaque poutre.

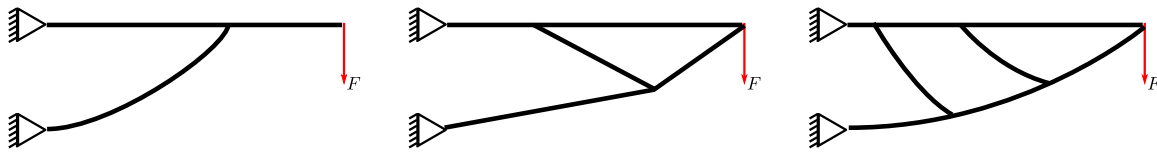


Figure II.4 – Exemples de formes ne pouvant être représentées à l'aide d'aucun des paramétrages de la figure II.3

genre de description quand le problème comporte naturellement peu de libertés. Leur résolution est plus aisée et peut même être menée à bien à l'aide de méthodes d'optimisation stochastiques.

## 1.2 Paramétrage en densité

### Définition

Le paramétrage en densité est la base de l'optimisation topologique, il est notamment utilisé par la méthode d'homogénéisation et ses variantes, comme la méthode SIMP (pour Solid Isotropic Material Penalization) (Bendsøe et Sigmund, 1999). Cette approche est exhaustive, elle permet donc de décrire n'importe quel sous domaine du domaine de travail, elle présente aussi l'avantage d'être très facilement applicable à des problèmes discrétisés.

### Fonction caractéristique

On définit la fonction caractéristique  $\rho(\bar{x})$  d'un domaine, une quantité scalaire en tout point du domaine  $D$  comme étant

$$\begin{cases} \rho(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in D \setminus \Omega \\ \rho(\bar{x}) = 1, & \bar{x} \in \Omega \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Cette définition est facilement applicable à un domaine discrétisé, on peut par exemple attribuer une valeur de densité à chaque élément d'un maillage éléments finis, comme présenté sur la figure II.5.

La fonction caractéristique prend des valeurs discrètes (0 ou 1), or la plupart des méthodes d'optimisation proposées dans le chapitre I manipulent des paramètres continus. Il est possible de recourir à des méthodes de la branche *Integer Programming*. Comme cela a été expliqué dans la section 2, ces méthodes permettent de résoudre des problèmes d'optimisation où les paramètres prennent des valeurs discrètes. Faustino *et al.* (2006) en propose un exemple d'application.

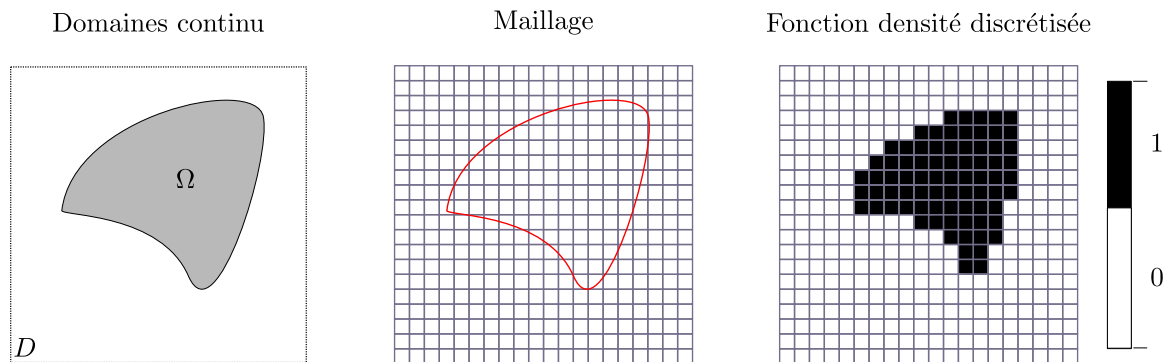


Figure II.5 – Exemple de fonction caractéristique d’un domaine. On présente ici comment un domaine  $\Omega$  continu (à gauche) peut être représenté sur un maillage discret de  $D$  à l’aide d’une fonction caractéristique (à droite).

La fonction caractéristique est rarement utilisée en pratique, on lui préfère la fonction de densité qui présente l’avantage théorique de rendre les expressions des critères dérivables : il n’est pas possible de dériver une fonction de paramètres prenant des valeurs discrètes, cela peut cependant être possible avec des critères continus. Bendsoe et Sigmund (2007); Bendsøe et Sigmund (1999) définissent la notion de densité comme étant

$$\begin{cases} \rho(\bar{x}) = 0, & x \in \tilde{D} \setminus \tilde{\Omega} \\ 0 < \rho(\bar{x}) < 1 & \in \partial\tilde{\Omega} \\ \rho(\bar{x}) = 1, & x \in \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

avec la notation  $\tilde{\cdot}$  indiquant que le domaine a été discrétisé, ainsi le bord  $\partial\Omega$  est maintenant représenté par l’ensemble des éléments coupés par le bord du domaine  $\Omega$ , comme cela est présenté sur la figure II.6.

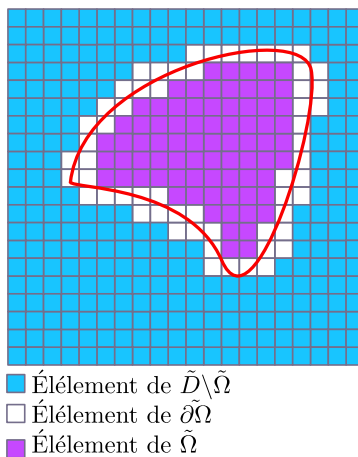


Figure II.6 – Domaines discrétisés et appartenance de chaque élément aux sous domaines discrétisés.

Contrairement à la fonction caractéristique, la fonction densité est continue. La figure II.7 illustre les deux représentations possibles du domaine (bord rouge) : l’une à l’aide de la fonction caractéristique et l’autre à l’aide d’une fonction densité.

**Remarque :** Le champ de densité ainsi construit rappelle la méthode des *Volume-of-fluid* (Sethian (1999),p.38) introduite par Noh et Woodward (1976). Utilisée pour représenter un domaine mobile, cette méthode présente plusieurs défauts, notamment vis-à-vis de la qualité de l’approximation de l’interface  $\partial\Omega$  (Sethian (1999),p.41).

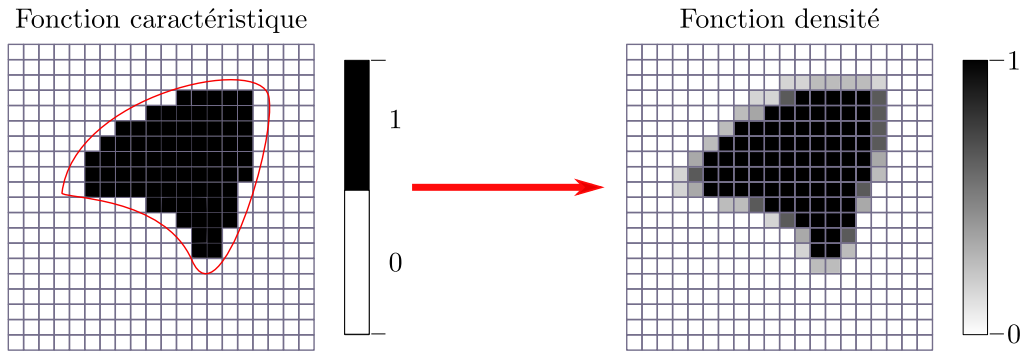


Figure II.7 – Exemple de représentation d'un domaine (bord rouge) à l'aide d'une fonction caractéristique (à gauche) et d'une fonction densité (à droite).

## Applications

Cette densité continue peut être utilisée pour définir les propriétés des éléments d'un maillage éléments finis, comme cela est présenté dans [Bendsoe et Sigmund \(2007\)](#), p.4. On peut par exemple définir le module d'élasticité du matériau en fonction de la densité comme suit

$$E_{el} = \rho(\bar{x})^p E_{solide}, \quad (\text{II.5})$$

avec  $p$  la pénalisation, usuellement choisi supérieure à 1. Ce facteur de pénalisation joue un rôle majeur sur le process d'optimisation, comme cela est décrit dans [Bendsoe et Sigmund \(2007\)](#), p.3.

**Remarque :** Pour compléter les données d'entrées du problème d'optimisation, il faut aussi être en mesure de fournir la dérivée des critères optimisés par rapport aux paramètres d'entrée, ici la densité  $\rho(\bar{x})$ . ([Bendsoe et Sigmund \(2007\)](#), section 1.2) présente des exemples pratiques de calcul de dérivée par rapport à la densité.

De nombreuses études utilisent ce type de paramétrage, classiquement couplée avec la méthode SIMP. En conception de mécanismes ([Sigmund, 2001b](#)), en mécanique ([Sigmund, 2001a](#)), mécanique vibratoire ([Molter et al., 2013](#)), en thermomécanique ([Sigmund et Torquato, 1996](#)) ou encore en mécanique des fluides ([Borrvall et Petersson, 2003](#)). [Bendsoe et Sigmund \(2007\)](#) présente une série d'applications de ce type de paramétrage couplé à la méthode SIMP.

## Bilan sur la méthode des densités

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle est applicable à tous les types de maillages éléments finis, de nombreux exemples existent pour les treillis, les éléments surfaciques et les éléments 3D [Bendsoe et Sigmund \(2007\)](#).

Son inconvénient majeur est la mauvaise représentation des interfaces, [Sethian \(1999\)](#), p.41 explique que la représentation du bord est "très imprécise", et qu'il est nécessaire d'utiliser des méthodes de reconstruction de l'interface à partir de la fonction de densité, avec plus ou moins de succès suivant la méthode utilisée.

## 1.3 Bilan sur les méthodes de description

Deux approches pour représenter un domaine optimisé  $\Omega$  ont été décrites dans les deux paragraphes précédents. Nous avons expliqué dans le paragraphe 1.1 qu'un paramétrage réduit d'un problème présente le défaut majeur de ne pas être exhaustif, le résultat d'un calcul d'optimisation se trouve donc fortement dépendant du paramétrage. Cela n'est pas nécessairement un problème dans les cas où l'intuition permet de choisir un jeu de paramètres pertinent, comme dans le cas des travaux de [Jefferson et al. \(2009\)](#) sur le tailoring de matériaux architecturés.

Pour certains problèmes comme la mécanique vibratoire ou encore la mécanique des fluides, il s'avère beaucoup plus difficile de définir un paramétrage géométrique judicieux. Une option est d'étendre considérablement le nombre de paramètres géométriques, ou plus simplement d'opter pour une description beaucoup plus exhaustive de la forme. Dans ce but, la méthode des densités a été présentée en 1.2, cette approche de description est quant à elle exhaustive, elle permet donc de représenter n'importe quel sous domaine du domaine de travail.

Bien que cette méthode soit très largement répandue, il a été décidé de ne pas utiliser la description en densité pour la suite de cette étude. Ce choix est motivé par la nature des travaux réalisés au cours de la thèse.

Premièrement, on souhaite tenir compte des interfaces graduées entre les différentes phases composant nos multi-matériaux. Or, la représentation d'un gradient de propriété à la traversée du bord  $\partial\Omega$  n'est pas aisée avec la méthode des densités. Clausen *et al.* (2015) ont proposé une méthode permettant de représenter une interface avec ce type de description, mais elle ne permet pas d'appliquer un profil de propriété précis à la traversée de l'interface.

Deuxièmement, la méthode des lignes de niveaux se combine naturellement avec la théorie de la dérivation de forme qui sera présentée dans le chapitre III, or il existe plusieurs références dans la littérature présentant comment il est possible d'intégrer la gestion des interfaces graduées dans la théorie de la dérivation de forme.

Nous retenons donc la méthode des lignes de niveaux pour décrire notre domaine, méthode qui va maintenant être décrite en détails.

## 2 Méthode des lignes de niveaux

### 2.1 Définition et limites

La méthode des lignes de niveaux (*Level-Set Method* en anglais) permet de décrire une hypersurface de dimension  $N - 1$  dans un domaine de dimension  $N$  (Sethian, 1999). Cette représentation décrit implicitement une interface, et donc la partition d'un domaine en deux sous domaines. Soit un domaine  $D$  de dimension  $N$ , contenant un sous domaine  $\Omega$ , on dit que  $\phi(\bar{x})$  est une levelset représentant le domaine  $\Omega$  si

$$\begin{cases} \phi(\bar{x}) < 0, & \bar{x} \in \Omega \\ \phi(\bar{x}) > 0, & \bar{x} \in D \setminus \Omega \\ \phi(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

avec  $\bar{x}$  le vecteur position d'un point de l'espace appartenant à  $D$ . La figure II.8 illustre l'équation (II.6).

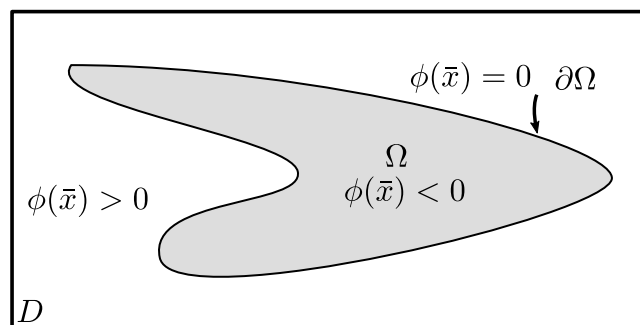


Figure II.8 – Définition des levelsets représentant le sous domaine  $\Omega$  du domaine  $D$ .

D'après la définition générale d'une levelset donnée par l'équation (II.6), il existe plusieurs levelsets pouvant décrire un même sous domaine  $\Omega$  d'un domaine  $D$  (voir figure II.9).

## Distance signée

La distance signée à l'interface  $\partial\Omega$  est une levelset particulière permettant de décrire le sous domaine  $\Omega$  (voir la courbe rouge sur la figure II.9 pour un exemple 1D). Elle présente plusieurs intérêts, notamment pour la définition des propriétés à la traversée d'une interface graduée, mais aussi pour sa régularité. On note  $d_\Omega$  la distance signée à l'interface  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ . On peut interpréter la distance signée comme la fonction qui donne pour chaque point  $\bar{x}$  du domaine de travail  $D$  la plus courte distance à parcourir pour atteindre le bord  $\partial\Omega$ . La distance signée est définie par plusieurs équations que sont l'équation (II.6) et

$$d_\Omega(\bar{x}) = \begin{cases} -d(\bar{x}, \partial\Omega), & \bar{x} \in \Omega \\ 0, & \bar{x} \in \partial\Omega \\ d(\bar{x}, \partial\Omega), & \bar{x} \in D \setminus \Omega, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

avec  $d(\bar{x}, \partial\Omega)$  la distance Euclidienne d'un point  $\bar{x}$  au bord  $\partial\Omega$ . Par construction, la distance signée respecte l'équation d'Eikonal

$$|\nabla d_\Omega| = 1, \quad (\text{II.8})$$

que l'on retrouve dans [Osher et Fedkiw \(2004\), chapitre 2](#). L'utilité de l'équation (II.8) sera présentée dans la partie B.

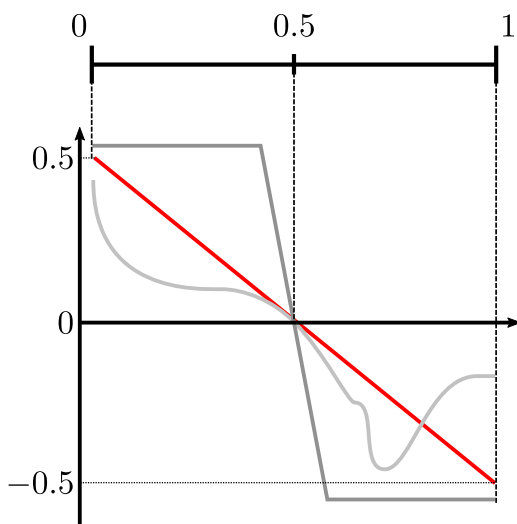


Figure II.9 – Représentation d'un domaine 1D  $D = [0, 1]$  et d'un de ses sous domaines 1D  $\Omega = [0.5, 1]$  à l'aide de trois levelsets différents (courbes grise et rouge). Il est possible de représenter le même domaine avec différents profils de  $\phi(\bar{x})$

Nous allons présenter maintenant l'utilisation des levelsets dans le cadre de calculs numériques. Comme pour l'approche des densités présentée en 1.2 nous utilisons un maillage fixe du domaine de travail  $D$ , nous définissons cependant la levelset en chaque nœud du maillage, cela afin de profiter des schémas d'interpolation définis dans chaque élément. Nous définissons ainsi implicitement le sous domaine  $\Omega$  à l'intérieur du domaine de travail  $D$ , la figure II.10 illustre cette définition.

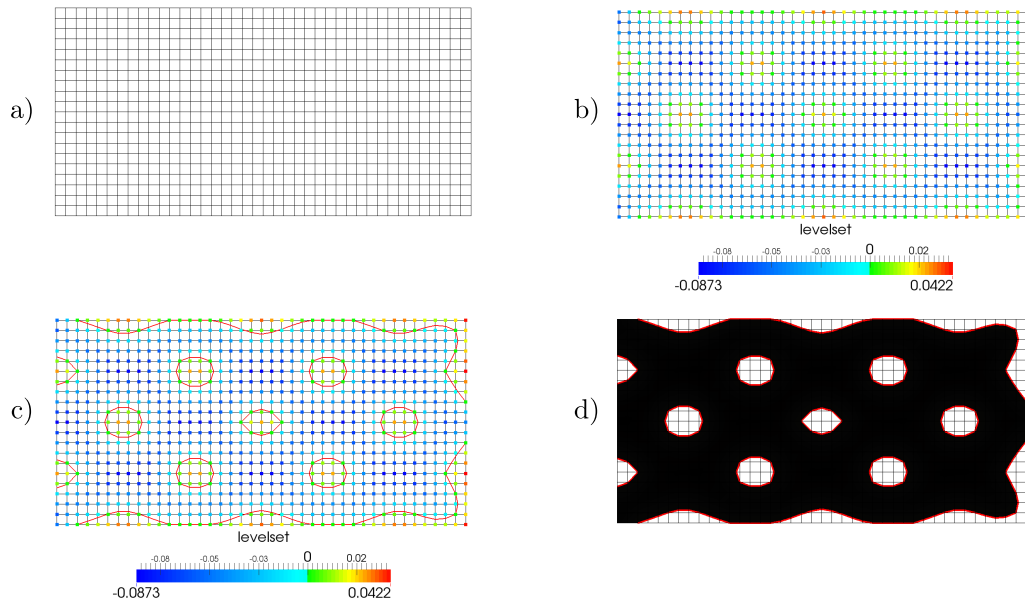


Figure II.10 – Exemple de discrétisation d'une levelset . a) Maillage du domaine de travail  $D$ . b) Définition de la levelset du domaine  $\Omega$  : un champ scalaire défini aux nœuds. c) détection de l'iso zéro de la levelset , représentant le bord du domaine  $\Omega$ . d) Reconstruction du domaine  $\Omega$ .

### Exemples

La figure II.11 présente la représentation d'une forme en deux dimensions par une levelset alors que la figure II.12 présente un exemple d'application 3D. On voit à gauche un maillage parallélépipède rectangle, et à droite l'iso zéro de la levelset , décrivant la forme d'un pont.

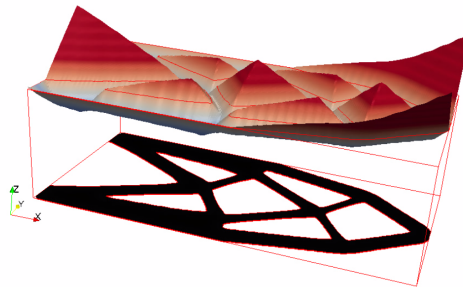


Figure II.11 – Exemple de représentation d'une forme à l'aide d'une levelset , on voit ici la superposition d'une levelset (qui est aussi dans ce cas une distance signée) et du domaine (en noir) qu'elle représente.

Il a été présenté comment une levelset peut être utilisée pour représenter un sous domaine  $\Omega$  d'un domaine plus vaste  $D$ . Cette méthode permet par exemple de représenter un système solide + vide, on définit par exemple que  $\Omega$  est le sous domaine de  $D$  où se trouve la matière solide, et  $D \setminus \Omega$  le sous domaine où se trouve le vide.



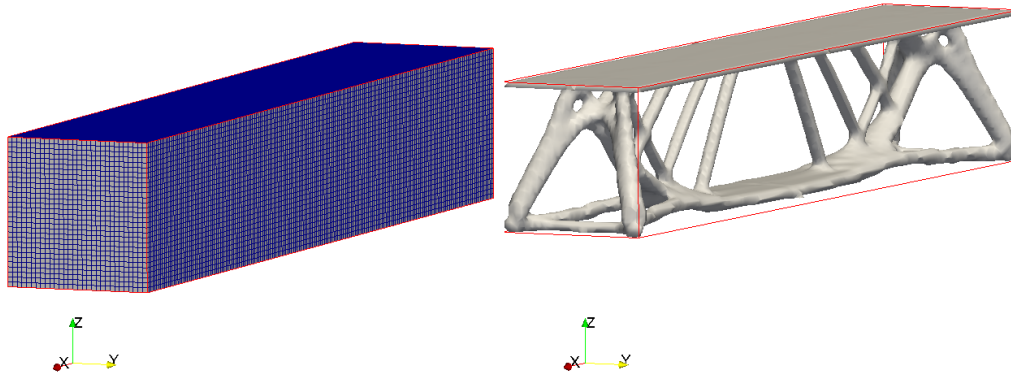


Figure II.12 – Exemple de représentation d’une forme à l’aide d’une levelset , à gauche le maillage du domaine de travail  $D$  et à droite l’iso zéro de la levelset défini sur le maillage. Ici un exemple de représentation d’un pont.

## 2.2 Description de plusieurs sous domaines

Nous allons maintenant étudier les solutions possibles pour la représentation de structures comportant plusieurs phases à l’aide de plusieurs levelsets . Soit un domaine optimisable  $D$  comportant  $N$  phases, notées  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ , pour représenter la distribution de ces  $N$  phases à l’intérieur de  $D$  avec la méthode des levelsets , il faut utiliser plusieurs levelsets .

### Combinaison de signes

Une solution possible est l’utilisation des combinaisons de signes de plusieurs levelsets pour partitionner l’espace  $D$ . Cette proposition a été introduite par Vese et Chan (2002), puis utilisée dans le cadre de l’optimisation de forme par Wang et Wang (2004); Allaire *et al.* (2013) et est couramment utilisée (Michailidis, 2014; Vermaak *et al.*, 2013). À des fins illustratives, nous présentons ici le cas de la représentation de quatre phases  $\Phi_{1,2,3,4}$  à l’aide de deux levelsets  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et de leurs sous domaines correspondant  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On définit les différentes phases comme étant

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \Phi_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\bar{x}) < 0 \\ \phi_2(\bar{x}) > 0 \end{cases} & \bar{x} \in \Phi_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\bar{x}) > 0 \\ \phi_2(\bar{x}) < 0 \end{cases} \\ \bar{x} \in \Phi_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\bar{x}) < 0 \\ \phi_2(\bar{x}) < 0 \end{cases} & \bar{x} \in \Phi_4 &\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\bar{x}) > 0 \\ \phi_2(\bar{x}) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

la figure II.13 illustre cette description. Nous définissons une phase par combinaison possible de signes des différentes levelsets . Comme chacune d’elles peut avoir deux signes différents (+ ou -), on dispose de  $2^N$  (avec  $N$  le nombre de levelsets ) combinaisons possibles et donc autant de phases que l’on peut décrire.

La figure II.14 présente un exemple d’utilisation de cette méthode pour reconstruire la répartition de quatre phases dans un domaine carré à l’aide de deux levelsets et de leurs signes. Avec cette solution, une distinction importante entre les phases  $\Phi_i$  et les sous domaines  $\Omega_j$  apparaît dans le cas où on traite plus de deux phases. En réécrivant différemment l’équation

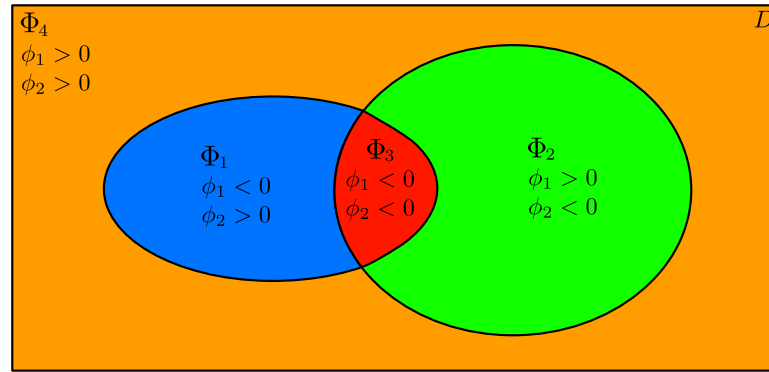


Figure II.13 – Description d'un domaine de travail  $D$  découpé en quatre sous domaines  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  et  $\Omega_4$  à l'aide de deux levelsets  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

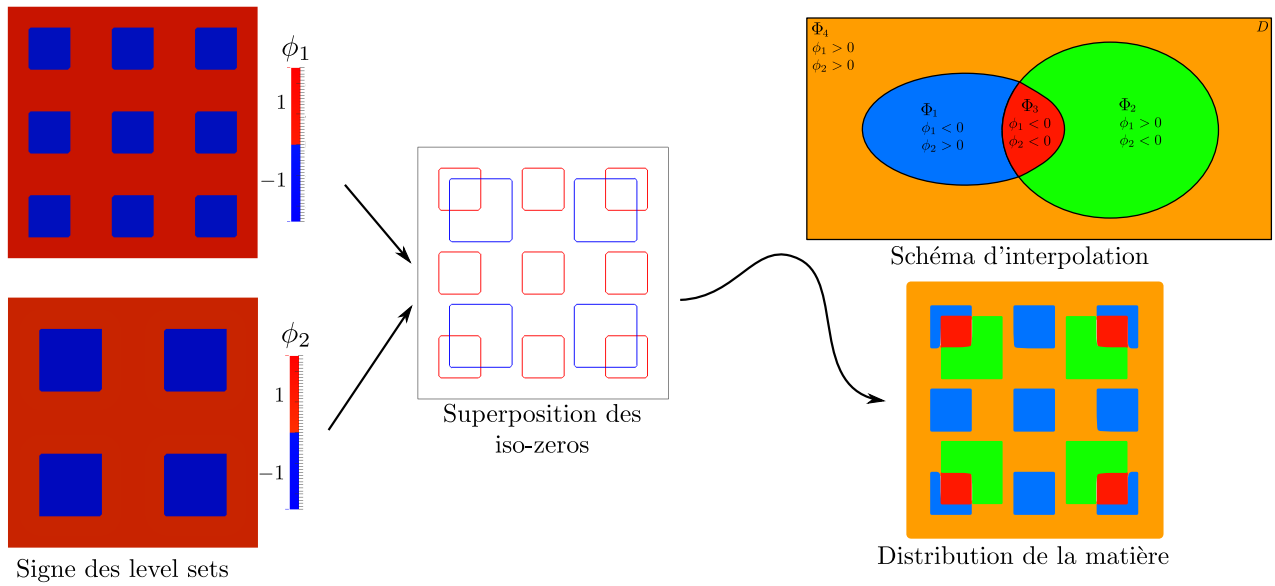


Figure II.14 – Exemple de reconstruction des phases dans un domaine carré à l'aide des levelsets les représentant.

(II.9) on peut voir

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \in \Phi_1 &\Leftrightarrow \bar{x} \in \Omega_1 \cap \{D \setminus \Omega_2\} & \bar{x} \in \Phi_2 &\Leftrightarrow \bar{x} \in \{D \setminus \Omega_1\} \cap \Omega_2 \\
 \bar{x} \in \Phi_3 &\Leftrightarrow \bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2 & \bar{x} \in \Phi_4 &\Leftrightarrow \bar{x} \in \{D \setminus \Omega_1\} \cap \{D \setminus \Omega_2\},
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

ce qui montre qu'il n'y a pas de correspondance directe entre les sous domaines  $\Omega_j$  décrit par les levelsets et les phases  $\Phi_i$ .

On notera  $d_{\Omega_1}$  et  $d_{\Omega_2}$  les distances signées correspondant aux levelsets  $\phi_1$  et  $\phi_2$  respectivement. On peut extraire de ces distances signées la distance d'un point de l'espace à l'interface avec les autres phases.

**Remarque :** Il faut noter que cette solution ne permet pas de représenter nettement les transitions  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$  et  $\Phi_3 \rightarrow \Phi_4$  car elles nécessitent un changement de signes simultanés des deux levelsets .

### Vecteur de levelset

Une autre solution est d'utiliser une levelset par matériau existant, comme cela est présenté dans Wang et Wang (2004); Wang *et al.* (2005). Elle semble plus intuitive car elle conserve la

correspondance directe entre sous domaine  $\Omega_i$  et phases  $\Phi_j$ . Cependant il faut gérer les possibles superpositions : deux matériaux différents ne peuvent pas occuper une même zone de l'espace, ce qui se traduit par

$$\Phi_l \cap \Phi_k = \emptyset, \quad \forall l \neq k. \quad (\text{II.11})$$

Il est nécessaire de s'assurer qu'au cours de l'évolution des domaines  $\Omega_i$  ces derniers ne se superposent pas, ou alors définir la marche à suivre quand cela se produit.

## Bilan

On fait le choix d'utiliser la solution par combinaison de signes car elle permet d'éviter le problème du recouvrement des sous domaines, la condition de l'équation (II.11) est ainsi toujours respectée. Cette méthode a fait ses preuves et est déjà largement utilisée.

## 2.3 Évolution d'une fonction ligne de niveaux

En plus de représenter fidèlement une frontière entre deux domaines, la méthode des levelsets est aussi adaptée pour gérer son évolution (voir figure II.15). Ce point est important car il va permettre de faire évoluer la forme du domaine optimisé  $\Omega$  sous le contrôle de l'algorithme d'optimisation.

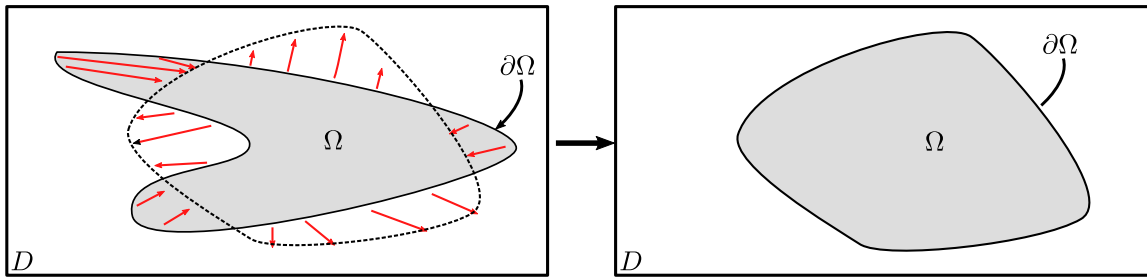


Figure II.15 – Exemple d'évolution d'un domaine  $D$  sous l'effet d'un champ de vitesse (vecteurs rouges).

Soit  $\bar{V}(t, \bar{x})$  un champ vectoriel définissant la vitesse de déplacement du bord  $\partial\Omega$ , on définit l'équation de transport de l'interface  $\partial\Omega$  (Osher et Fedkiw (2004), chapitre 5) comme

$$\frac{\partial\phi(t, \bar{x})}{\partial t} + \bar{V}(t, \bar{x}) \cdot \nabla\phi(t, \bar{x}) = 0, \quad (\text{II.12})$$

avec  $\bar{V}(t, \bar{x})$  la vitesse de l'interface.

Si on considère le cas d'une vélocité de la forme

$$\bar{V}(t, \bar{x}) = V_n \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad (\text{II.13})$$

avec  $V_n$  la vélocité normale à l'interface, on retrouve ainsi l'équation de type Hamilton-Jacobi, qui s'écrit

$$\frac{\partial\phi(t, \bar{x})}{\partial t} + V_n(t, \bar{x}) |\nabla\phi(t, \bar{x})| = 0. \quad (\text{II.14})$$

Il existe plusieurs schémas numériques permettant de réaliser l'advection d'une levelset ainsi que de transformer une levelset quelconque en une distance signée, nous utilisons ici le schéma proposé par Osher et Fedkiw (2004). La figure II.16 illustre l'advection d'une levelset représentant une spirale, la vitesse utilisée pour ce mouvement est  $-\kappa$ , avec  $\kappa$  la courbure moyenne de la levelset .

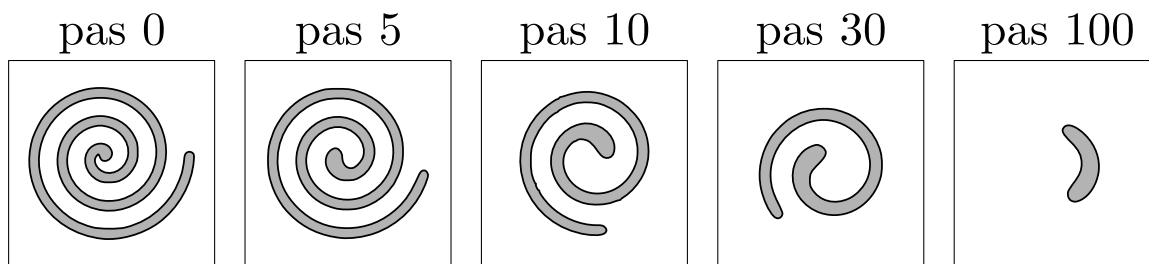


Figure II.16 – Exemple d’évolution d’un domaine  $D$  sous l’effet d’une vitesse égale à  $-\kappa$ , avec  $\kappa$  la courbure de la levelset . Résultat obtenu avec *Iktinos*.

### 3 Mise en œuvre de la méthode des lignes de niveaux

La section 2 a permis de présenter l’utilisation de la méthode des levelsets pour représenter la distribution d’une ou plusieurs phases dans un domaine  $D$ . Si on opte pour un paramétrage de ce type pour notre problème, il reste cependant à expliquer comment il est possible d’évaluer les critères en fonction de ce même paramétrage. Si par exemple une levelset décrit une structure en acier, comment utiliser cette information pour déduire le champ de déplacement de cette structure sous l’effet d’un chargement donné ?

Nous allons présenter plusieurs options pour utiliser l’information d’une ou plusieurs levelsets dans des calculs numériques, en particulier comment évaluer les propriétés physiques de la forme à l’aide de la méthode des éléments finis. Les deux solutions sont les suivantes :

- Utiliser la levelset pour définir les propriétés physiques sur un maillage fixé
- Utiliser la levelset pour générer un maillage du domaine  $\Omega$ .

La figure II.17 illustre ces deux solutions.

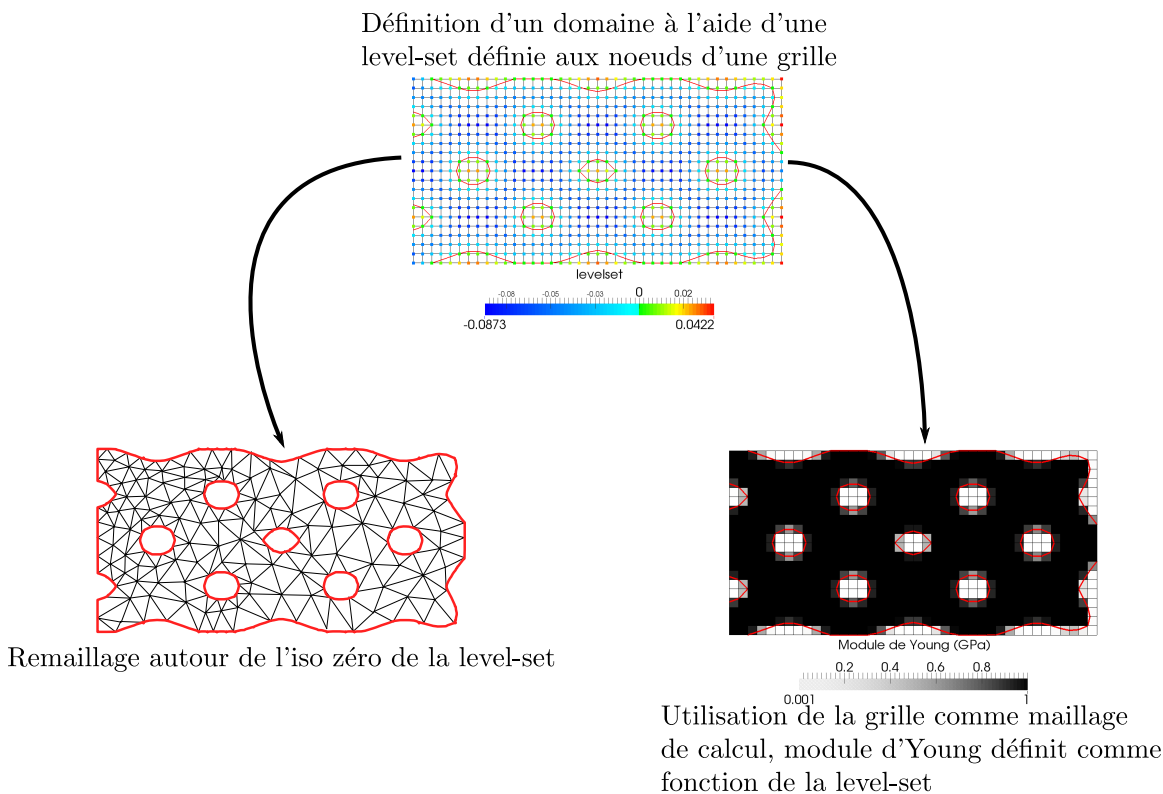


Figure II.17 – Illustration des deux propositions d’utilisation d’une levelset pour définir un calcul éléments finis.

### 3.1 Méthode de "frontière immergée"

Nous commençons par présenter la méthode de "frontière immergée", où les propriétés physiques sont projetées sur un maillage fixe, lui-même utilisé pour les calculs éléments finis. Nous avons fait le choix d'utiliser cette méthode car elle est simple à implémenter et qu'elle donne de bons résultats, comme en atteste la littérature (Allaire *et al.*, 2004a; Wang *et al.*, 2004; Challis, 2009).

Il est aussi possible d'améliorer sa précision à l'aide de méthode X-FEM que nous présenterons à la fin de ce paragraphe.

#### Définition des propriétés physiques par projection de la levelset

La première solution est d'utiliser une approche dite de "frontières immergées", qui consiste à travailler sur un maillage fixe du domaine optimisable, et de définir les propriétés aux points d'intégration des éléments en fonction de la levelset du domaine optimisé. Cette solution, bien que physiquement moins cohérente à cause des éléments traversés par l'interface, est simple à mettre en œuvre et est la base de la plupart des études d'optimisation de forme utilisant les levelsets (Bendsoe et Sigmund, 2007; Allaire, 2007).

Nous définissons donc les propriétés physiques de la matière en fonction d'une levelset, par exemple

$$P(\phi) = \begin{cases} P_{solide}, & \phi(\bar{x}) \leq 0 \\ 0, & \phi(\bar{x}) > 0, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

avec  $P$  une propriété physique quelconque (module de Young, dilatation thermique, coefficient de Poisson, ...) et  $P_{solide}$  la valeur de cette propriété pour le matériau solide considéré. Cette solution reste cependant purement théorique, dans le contexte des éléments finis, certaines propriétés ne peuvent être nulles, par exemple le module d'Young, car cela rendrait la matrice de rigidité singulière.

Pour cette raison, on définit un matériau ersatz, ayant des propriétés physiques non nulle mais négligeable devant celles de la matière solide, ce qui donne

$$P(\phi) = \begin{cases} P_{solide}, & \phi(\bar{x}) \leq 0 \\ P_{ersatz}, & \phi(\bar{x}) > 0, \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

avec  $P_{ersatz} \ll P_{solide}$ .

**Remarque :** Définir les propriétés du matériau ersatz n'est pas toujours une tâche facile, il faut pour cela essayer de trouver des valeurs ayant un sens physique.

#### Problème des éléments traversés par l'interface

La levelset est définie aux nœuds du maillage éléments finis, quand un élément est entièrement dans la matière ou entièrement dans l'ersatz, tous ses nœuds ont donc la même valeur de  $P(\phi)$  dans le cas de l'interpolation proposée par l'équation (II.16), la définition de la propriété de l'élément  $y$  est directe. Cependant elle ne l'est pas pour les éléments traversés par l'interface. La figure II.18 illustre le problème posé ici.

Deux méthodes peuvent être utilisées pour traiter ce problème, la plus rigoureuse est d'enrichir les éléments traversés par l'interface par le biais d'une méthode X-FEM, comme le propose Duysinx *et al.* (2006). Cette solution demeure cependant difficile à mettre en place, particulièrement en 3D. Il existe une solution plus simple, bien que discutable du point de vue des éléments finis, elle s'avère être couramment utilisée. Son principe est simple : on attribue aux éléments traversés par l'interface des propriétés physiques intermédiaires, entre celles de l'ersatz

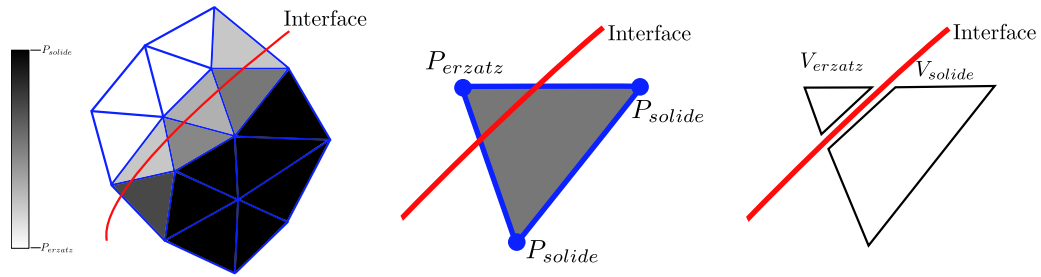


Figure II.18 – Interpolation des propriétés aux éléments, à gauche un maillage traversé par une interface, on constate que les éléments traversés par l'interface ont une valeur de propriété comprise entre  $P_{solide}$  et  $P_{ersatz}$ . Au milieu, un élément traversé par l'interface a été isolé, la question de la propriété à attribuer à l'élément se pose. À droite, la représentation des quantités  $V_{solide}$  et  $V_{ersatz}$  respectivement.

et celle du matériau solide. Le plus courant est alors de construire une interpolation linéaire vis-à-vis du volume de matière solide contenu dans l'élément, comme suit :

$$P_{elem} = P_{solide} \frac{V_{solide}}{V_{solide} + V_{ersatz}} + P_{ersatz} \frac{V_{ersatz}}{V_{solide} + V_{ersatz}}, \quad (II.17)$$

la figure II.18 illustre les quantités  $V_{solide}$  et  $V_{ersatz}$  qui sont respectivement les volumes de solide et d'ersatz contenu dans l'élément. En utilisant les valeurs de la levelset définies aux nœuds d'un élément, il est possible de reconstruire le front de l'interface puis son intersection avec l'élément, et ainsi évaluer précisément les volumes.

**Remarque :** La notion de "volume" est ambiguë, ici on fait référence à un lieu géométrique ayant la même dimension que la dimension spatiale du problème : on appellera "volume" une surface dans le cas d'un problème 2D.

Le calcul de l'intersection exacte de l'interface et d'un élément est coûteux en temps et souffre d'un manque de généricité dans la mesure où il doit être implémenté pour chaque nouvel élément (quadrangle, triangle, cube, ...).

On lui préférera une méthode plus numérique, qui s'avère très rapide à mettre en place et aussi très générique :

$$P_{el} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i |\phi_i|^p}{\sum_{i=1}^N |\phi_i|^p} \quad (II.18)$$

avec  $i$  l'indice du  $i^{eme}$  nœud de l'élément,  $N$  le nombre de nœuds dans l'élément,  $\phi_i$  la valeur de la levelset au nœud  $i$ ,  $P_i$  la valeur de la propriété au nœud  $i$  et  $p$  un coefficient. On distinguera plusieurs cas :

- $p = 0$  la propriété d'un élément est la moyenne arithmétique des propriétés des nœuds
- $p = dim$ , avec  $dim$  la dimension spatiale du problème.

Le choix de  $p = dim$  est intéressant, car il donne une expression homogène avec la dépendance au volume décrit par l'équation (II.17). Cette méthode constitue une approximation acceptable. La figure II.19 illustre géométriquement l'approximation fournie par l'équation (II.18) pour différentes valeurs de  $p$  sur un quadrangle. On constate que les surfaces des disques semblent fournir une approximation acceptable du volume de chaque phase.

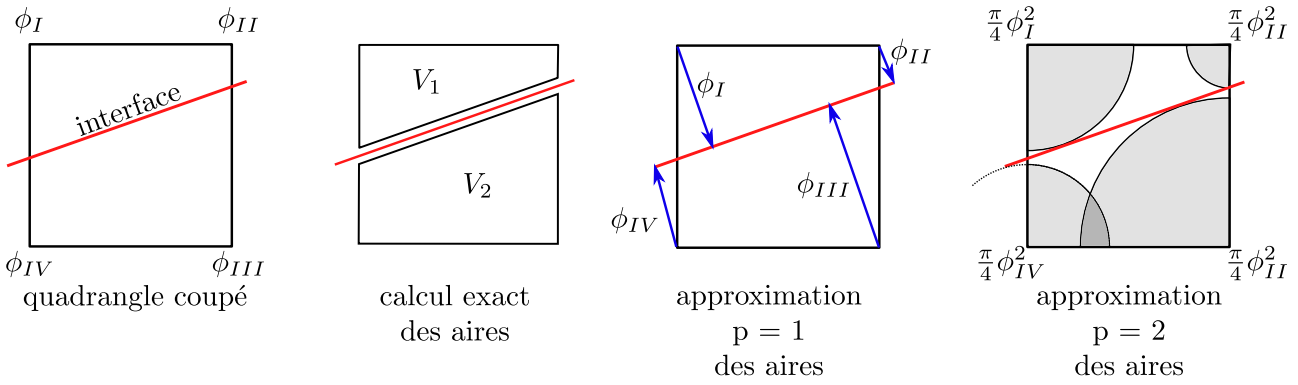


Figure II.19 – Illustration graphique de l'interpolation des propriétés d'un quadrangle coupé par une interface.

### Interfaces graduées

Il s'agit de décrire des interfaces graduées à l'aide de l'approche levelset, en représentant un gradient de propriété à la traversée de l'interface. De plus, comme cela sera mis en évidence par la suite, il faut que le champ des propriétés soit dérivable. Pour cela, on propose d'utiliser ici la distance signée à l'interface définie dans la section 1. On définit un schéma d'interpolation inspiré des travaux de Vermaak *et al.* (2013) comme

$$P(d_\Omega) = P_{solide} \cdot h(d_\Omega) + P_{erzatz} \cdot (1 - h(d_\Omega)), \quad (\text{II.19})$$

avec

$$h(d_\Omega) = \begin{cases} 0 & , d_\Omega < -\epsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{d_\Omega}{2\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi d_\Omega}{\epsilon} & , |d_\Omega| < \epsilon \\ 1 & , d_\Omega > \epsilon. \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

On utilise ici la distance signée à l'interface  $d_\Omega$  pour paramétrer la forme ainsi qu'une fonction  $h(d_\Omega)$  dérivable, afin d'assurer que la propriété physique  $P(d_\Omega)$  soit dérivable. Une illustration de cette interpolation est présentée sur la figure II.20.

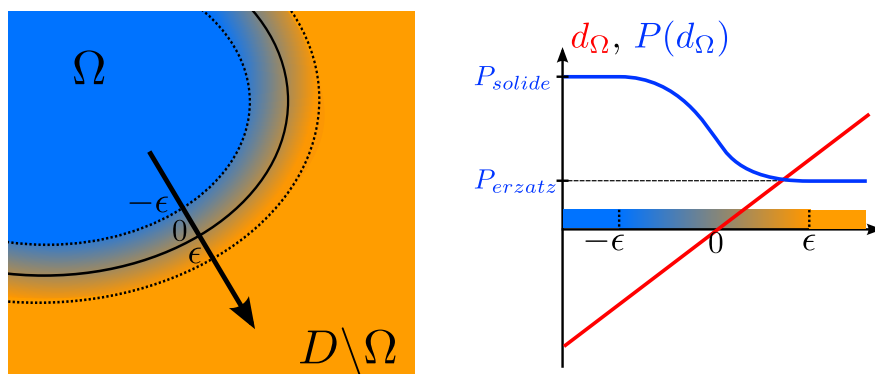


Figure II.20 – Exemple de l'interpolation d'une propriété physique  $P$  en utilisant un schéma d'interpolation lisse présenté dans l'équation (II.19)

### Variation non monotone à travers l'interface

Comme cela sera présenté par la suite, les propriétés physiques ne varient pas toujours de manière monotone à la traversée d'une interface graduée. Afin de représenter ce type de variation, on donne au milieu de l'interface des propriétés physiques spécifiques, puis on construit un

autre schéma d'interpolation, tel que

$$P(d_\Omega) = P_{solide} \cdot h_m(d_\Omega) + P_{int} \cdot (1 - h_m(d_\Omega) + h_p(d_\Omega)) + P_{erzatz} \cdot (1 - h_p(d_\Omega)), \quad (\text{II.21})$$

avec

$$h^m(d_\Omega) = \begin{cases} 0 & , d_\Omega < -\epsilon \\ 1 + \frac{d_\Omega}{\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(d_\Omega + \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} & , -\epsilon \leq d_\Omega < 0 \\ 0 & , d_\Omega > 0, \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

et

$$h^p(d_\Omega) = \begin{cases} 0 & , d_\Omega < 0 \\ 1 + \frac{d_\Omega}{\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(d_\Omega - \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} & , 0 < d_\Omega \leq \epsilon \\ 0 & , d_\Omega > \epsilon \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

La figure II.21 illustre le schéma d'interpolation précédent.

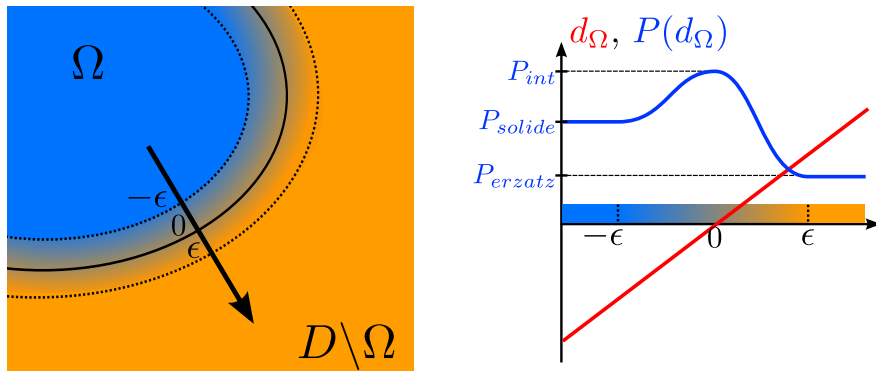


Figure II.21 – Exemple de l'interpolation d'une propriété physique  $P$  en utilisant un schéma d'interpolation non monotone présenté dans l'équation (II.21)

### Définition des propriétés physiques avec plusieurs matériaux

Il est nécessaire d'utiliser au moins  $N$  levelsets pour pouvoir représenter  $2^N$  phases (c.f. section 1.3), on se place ici dans le cas où l'on souhaite représenter 4 phases  $\Phi_{1,2,3,4}$ , par exemple trois matériaux et du vide (le vide étant considéré comme une phase). Du point de vue des fonctions d'interpolation, le principe est très similaire à ce qui a été vu pour deux phases. On ne présente ici que les interpolations lisses, monotones et non monotones.

#### Interface lisse et monotone

Le schéma proposé est le suivant

$$P(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2}) = P_1 [1 - h(d_{\Omega_1})h(d_{\Omega_2})] + P_2 [h(d_{\Omega_1})(1 - h(d_{\Omega_2}))] + P_3 [(1 - h(d_{\Omega_1}))(1 - h(d_{\Omega_2}))] + P_4 [h(d_{\Omega_1})h(d_{\Omega_2})], \quad (\text{II.24})$$

la figure II.22 présente ce schéma d'interpolation.



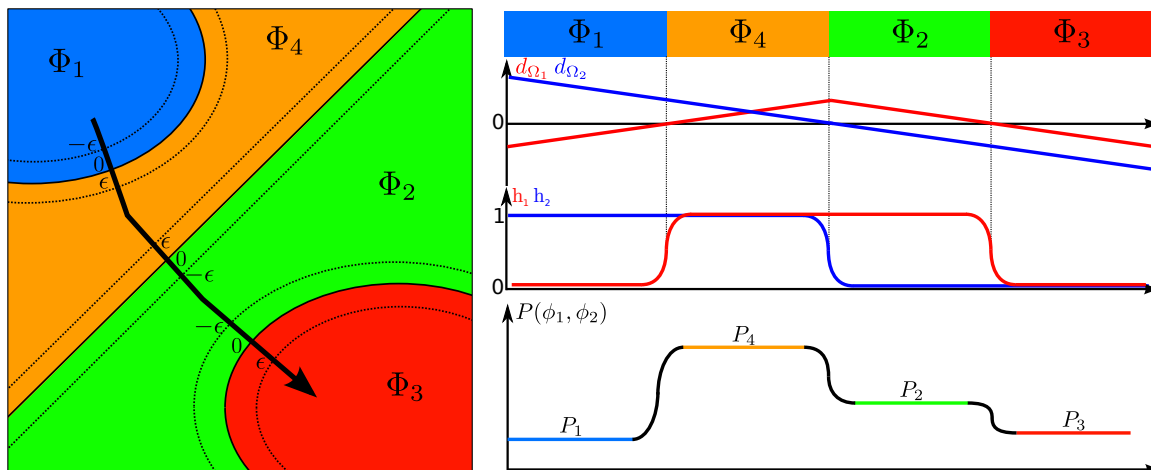


Figure II.22 – Exemple de l’interpolation d’une propriété physique  $P$  en utilisant un schéma d’interpolation monotone présenté dans l’équation (II.24)

**Interface lisse et non monotone**

De la même façon que pour l’équation (II.21) on définit l’interpolation des propriétés dans un multi-matériau en ajoutant une interface non monotone entre les phase  $\Phi_1$  et  $\Phi_4$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
 P(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2}) = & P_1(1 - h_m(d_{\Omega_1}))h(d_{\Omega_2}) + P_2h(d_{\Omega_1})(1 - h(d_{\Omega_2})) + \\
 & P_3(1 - h(d_{\Omega_1}))(1 - h(d_{\Omega_2})) + P_4h_p(d_{\Omega_1})h(d_{\Omega_2}) \\
 & P_{int}(h_m(d_{\Omega_1}))h(d_{\Omega_2}) + P_{int}(1 - h_p(d_{\Omega_1}))h(d_{\Omega_2}),
 \end{aligned}
 \tag{II.25}$$

la figure II.23 présente ce schéma d’interpolation.

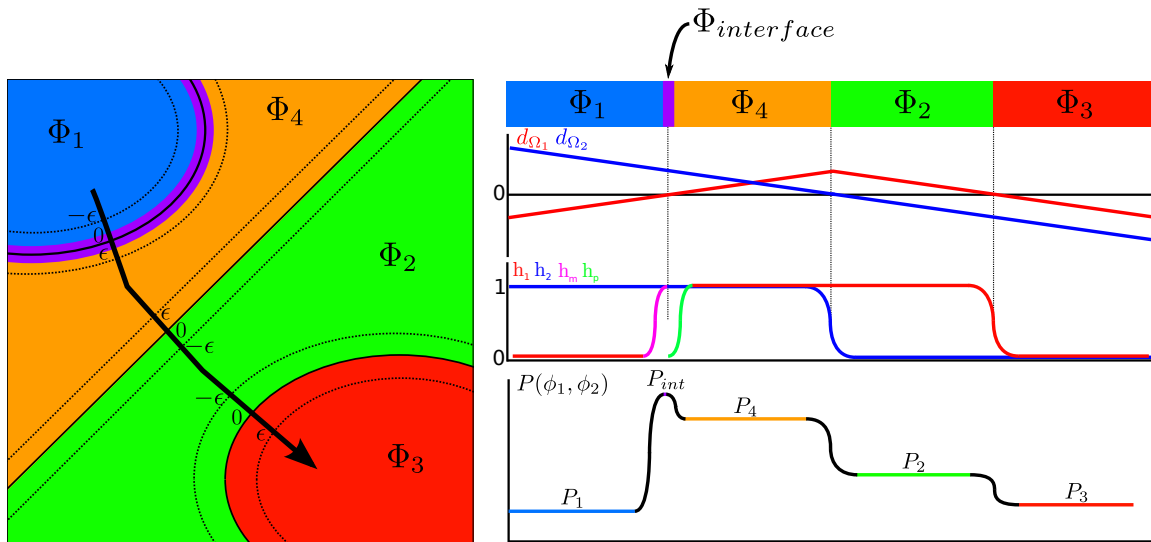


Figure II.23 – Exemple de l’interpolation d’une propriété physique  $P$  en utilisant un schéma d’interpolation monotone présenté dans l’équation (II.25)

## 3.2 Autres méthodes et améliorations

### Enrichissement X-FEM

La solution de "frontière immergée" proposée précédemment comporte un défaut majeur quand elle est utilisée avec la méthode des éléments finis. Le fait que les éléments du maillage soient traversés par une interface est une mauvaise pratique qui a un impact direct sur la qualité de l'approximation de la solution du problème. De plus, on attribue à ces éléments des propriétés physiques intermédiaires qui n'ont pas de sens physique.

Sukumar *et al.* (2001) propose une méthodologie basée sur les X-FEM permettant de représenter des interfaces entre matériau A et B sans remailler autour de cette interface. Le concept de base est de changer l'interpolation du champ de déplacement sur le maillage éléments finis, ce qui donne

$$\bar{u}(\bar{x}) = \sum_i \bar{u}_i N_i(\bar{x}) V(\bar{x}), \quad (\text{II.26})$$

avec

$$V(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \bar{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} . \quad (\text{II.27})$$

Van Miegroet et Duysinx (2007) explique qu'il est aussi nécessaire d'adapter l'intégration numérique de la matrice de rigidité, notamment d'ajouter des points de Gauss dans le domaine solide (voir figure II.24).

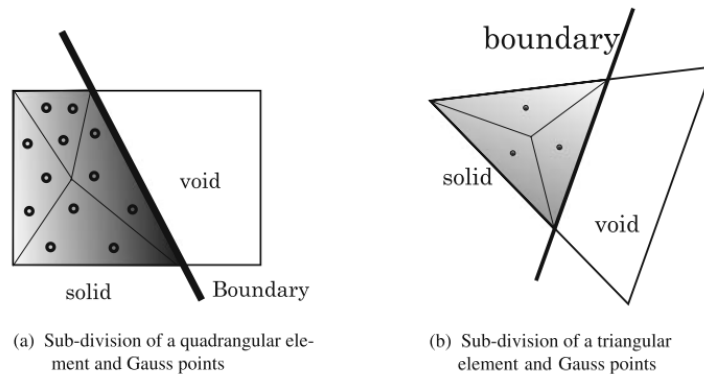


Figure II.24 – Découpage des éléments pour l'intégration numérique X-FEM, source : (Van Miegroet et Duysinx, 2007).

En utilisant cette méthode, on améliore la qualité de l'approximation tout en conservant un maillage fixe. Duysinx *et al.* (2006) en propose une première application sur un cas d'optimisation paramétrique. Van Miegroet et Duysinx (2007) propose un cas d'optimisation de domaine utilisant la même méthodologie.

Villanueva et Maute (2014) souligne cependant que l'amélioration des résultats d'optimisation de domaine pour des problèmes de mécanique reste faible. Compte-tenu de la complexité de mise en œuvre des méthodes X-FEM, cette solution n'a pas été retenue pour la suite de l'étude.

**Remarque :** On souligne cependant que dans les cas où la qualité de description de l'interface est critique, cette approche constitue une amélioration majeure par rapport aux autres solutions, comme le prouve les travaux de Kreissl et Maute (2012) sur l'optimisation de domaine appliquée à la mécanique des fluides.

### Maillage adaptatif

On peut utiliser l'information de la levelset pour reconstruire la surface extérieure du domaine optimisé et ensuite mailler le volume ainsi formé. Allaire *et al.* (2013) proposent un exemple

d'application de cette méthode. Cependant ce n'est pas la plus couramment utilisée car le remaillage du domaine à chaque itération d'optimisation a plusieurs défauts :

- le remaillage du domaine optimisé à chaque pas est une tâche complexe pouvant échouer,
- transférer automatiquement les conditions aux limites sur l'ensemble du nouveau maillage à chaque itération soulève encore plus de difficultés,
- cette méthode peut rendre la convergence du problème d'optimisation plus difficile, le changement du maillage amenant une variation de la fonction objectif qu'il peut être difficile de décorréliser de la variation induite par le changement de forme.

Cette méthode reste très prometteuse car elle permet de faire des calculs éléments finis plus rigoureux, et donc de mieux approximer les différentes quantités utiles au processus d'optimisation.

La figure II.25 illustre le concept de cette méthode qui se base sur deux maillages : un fixe et un adaptatif. À chaque pas on a :

- La levelset du design courant, définie sur le maillage fixe, est utilisée pour définir le maillage adaptatif.
- Les calculs mécaniques (ou autre) sont réalisés sur le maillage adaptatif.
- Les grandeurs physiques nécessaires à l'algorithme d'optimisation sont projetées depuis le maillage adaptatif sur le maillage fixe
- A l'aide des informations récoltées, on fait évoluer la levelset sur le maillage fixe.
- Et ainsi de suite...

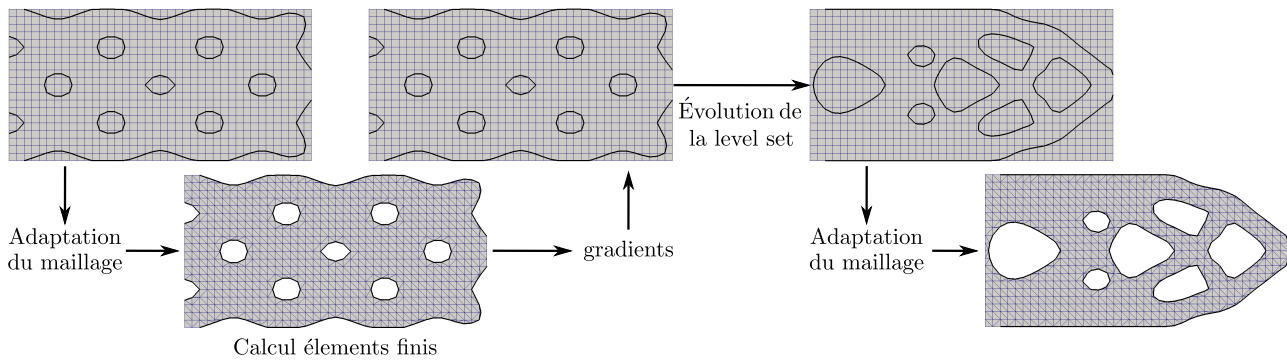


Figure II.25 – Principe du processus d'optimisation sur un maillage adaptatif.

## Bilan du chapitre II

Ce chapitre a fourni une présentation générale des descriptions possibles pour un domaine de définition à partir de la littérature. De cette présentation générale **nous sélectionnons une méthode de description de domaine** que nous utilisons pour le reste de l'étude.

Nous avons d'abord proposé les paramétrages dit "réduits", la forme est ici décrite par un faible nombre de paramètres géométriques (longueur, diamètre, rayon de courbure) ou autres (module de Young, orientation des fibres, ...). Ces méthodes sont écartées car elles souffrent d'un manque d'exhaustivité, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas représenter un domaine quelconque.

Nous avons ensuite présenté la méthode des densités utilisée notamment pour la méthode d'optimisation de domaine *SIMP*. Cette dernière a elle aussi été écartée car elle ne permet pas une gestion rigoureuse des interfaces graduées.

Finalement, **la méthode des lignes de niveaux a été retenue** pour sa capacité à représenter simplement et "naturellement" les interfaces. Nous avons ensuite présenté plus en détail son fonctionnement. Notamment nous avons illustré **comment représenter plusieurs phases**, mais aussi **comment représenter des interfaces graduées**. Il ressort que cette méthode est tout à fait adaptée pour représenter des propriétés variant à la traversée d'une interface.

Le schéma global de la méthode d'optimisation développée ici se trouve ainsi enrichi de ces nouveaux ingrédients, il est présenté sur la figure II.26.

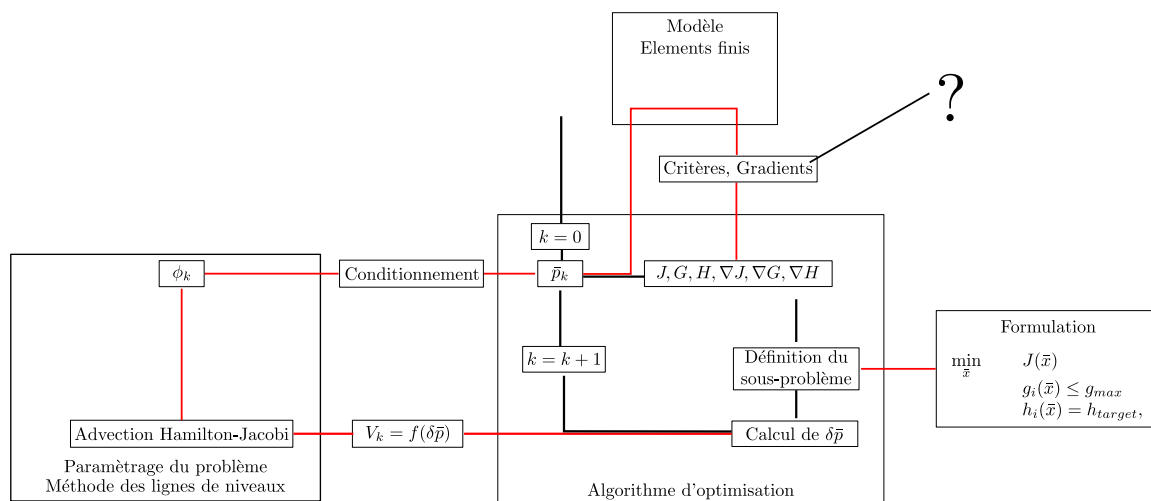


Figure II.26 – Schéma général d'un processus d'optimisation complet.

Nous devons maintenant nous doter de gradients permettant de guider notre processus d'optimisation. Pour cela nous souhaitons utiliser la dérivation de forme comme cela va maintenant être expliqué dans le chapitre suivant.



# Chapitre III

## Dérivation de forme : bases et mise en œuvre

---

1	Définition générale . . . . .	64
1.1	Concept de la dérivation de forme et théorèmes généraux . . . . .	64
1.2	Concordance avec la méthode des lignes de niveaux . . . . .	65
2	Dérivation pratique . . . . .	66
2.1	Méthode de Céa pour la dérivation de forme rapide . . . . .	66
2.2	Discrétisation et régularisation de la dérivée . . . . .	69
2.3	Discussion autour des erreurs d'évaluation du gradient de forme . . . . .	71
	Bilan du chapitre III . . . . .	72

---

### Résumé

Ce chapitre a pour but d'introduire les bases de la dérivation de forme. Nous présentons ici quelques éléments de théories relatifs à la compréhension et aux calculs des gradients de formes. Ces dérivées constituent une donnée essentielle du processus d'optimisation car elles indiquent quelles évolutions de la forme permettent d'influencer la variation des critères de la manière souhaitée (augmentation ou réduction).

L'expression explicite d'un gradient est obtenue par un calcul analytique pouvant s'avérer complexe (Allaire, 2007). Nous présentons ici la méthode de Céa (Céa, 1986) qui est une méthode de dérivation rapide et *formelle* permettant de simplifier considérablement les étapes de calculs.

Nous aborderons plusieurs aspects pratiques durant ce chapitre, avec notamment une discussion autour des erreurs d'évaluation des gradients de forme.

# 1 Définition générale

## 1.1 Concept de la dérivation de forme et théorèmes généraux

Cette section a pour but de montrer comment la théorie de la dérivation de forme peut être utilisée pour calculer des gradients qui seront ensuite utilisés dans un processus d'optimisation. Nous commençons par décrire le concept de la dérivation de forme.

Soit un domaine  $\Omega$  et son bord  $\partial\Omega$ ,  $\bar{\theta}(\bar{x})$  un champ vectoriel qui définit une perturbation du bord de  $\Omega$ , et  $A(\Omega)$  une fonction scalaire dépendant du domaine  $\Omega$ . On définit alors la dérivation de forme au sens de Gâteaux comme étant

$$A(\Omega)'(\bar{\theta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A(\Omega(Id + \delta\bar{\theta})) - A(\Omega)}{\delta}. \quad (\text{III.1})$$

On dit que  $A(\Omega)'(\bar{\theta})$  est la dérivée de forme pour la perturbation  $\bar{\theta}$  de son bord  $\partial\Omega$ , que l'on nomme usuellement direction de perturbation. Cette quantité indique la variation de la fonction  $A(\Omega)$  dans le cas où le domaine  $\Omega$  est perturbée dans la direction  $\theta$ . La figure III.1 illustre cette transformation.

**Remarque :** Il n'existe pas une unique dérivée de forme, on présente ici la dérivée au sens de Gâteaux, qui est écrite pour une direction de perturbation  $\bar{\theta}$  fixe. Il existe une notion de dérivation "plus forte", celle de Fréchet, dont on extrait les théorèmes principaux présentés plus bas. La dérivée au sens de Gâteaux est cependant suffisante pour illustrer le concept de dérivation de forme.

Nous notons ici que la nature du problème d'optimisation traité est modifiée quand nous utilisons un gradient de forme. Nous avons défini l'optimisation de domaine comme étant un problème d'optimisation dont le seul paramètre est **un domaine de définition**, ici le paramètre considéré est différent : il s'agit du **bord du domaine de définition**. Bien que le domaine de définition soit modifié implicitement du fait que l'on optimise son bord, nous ne parlons plus d'optimisation de domaine mais d'**optimisation de forme**.

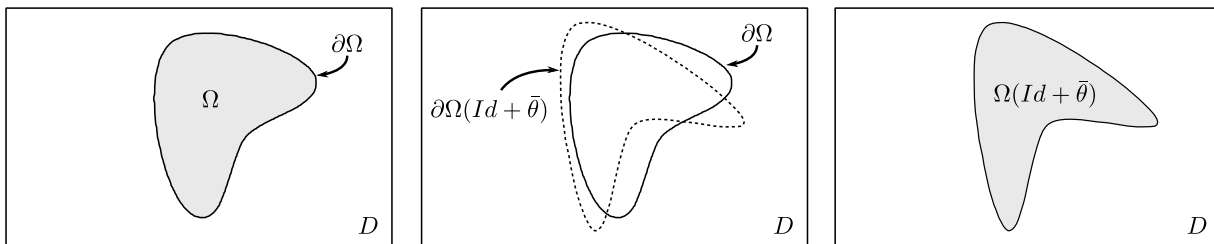


Figure III.1 – Illustration des termes constituant l'équation (III.1)

### Théorèmes principaux

Nous énonçons maintenant trois théorèmes fondamentaux de la dérivation de forme que l'on retrouve dans [Allaire \(2007\), p. 133-138](#)

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} f(\bar{x}) dV \Rightarrow A'(\Omega)(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} f(\bar{x}) \bar{\theta} \cdot \bar{n} ds, \quad (\text{III.2})$$

et

$$A(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(\bar{x}) ds \Rightarrow A'(\Omega)(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} ((\text{div } \bar{n}) f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})) \bar{\theta} \cdot \bar{n} ds. \quad (\text{III.3})$$

Avec  $f(\bar{x})$  un champ scalaire dépendant des coordonnées  $\bar{x}$  mais indépendant du domaine  $\Omega$ ,  $\bar{n}$  la normale du bord  $\partial\Omega$  et  $\text{div } \bar{n}$  la divergence de la normale au bord, assimilable à la courbure moyenne.

Les équations (III.2) et (III.3) peuvent être interprétées comme la sommation sur l'ensemble du bord  $\partial\Omega$  des variations infinitésimales de la fonction  $A(\Omega)$  provoquée par le déplacement  $\bar{\theta}$  du bord. On constate aussi que du fait du produit scalaire  $\bar{\theta} \cdot \bar{n}$ , seul un déplacement du bord le long de sa normale impacte la fonction  $A(\Omega)$ , ce qui est cohérent car un déplacement tangentiel du bord ne change pas la forme du domaine  $\Omega$ .

Dans le cas où le champ scalaire  $f(\bar{x})$  dépend du domaine  $\Omega$  (on le note alors  $f_\Omega(\bar{x})$ ), la dérivé de forme s'écrit

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} f_\Omega(\bar{x}) dV \Rightarrow A'(\Omega)(\bar{\theta}) = \int_{\Omega} f_\Omega(\bar{x})'(\bar{\theta}) dv + \int_{\partial\Omega} f_\Omega(\bar{x})\bar{\theta}\bar{n} ds, \quad (\text{III.4})$$

avec  $f_\Omega(\bar{x})'(\bar{\theta})$  la dérivée de forme de  $f_\Omega(\bar{x})$ . Nous verrons plus tard que le terme  $f_\Omega(\bar{x})'(\bar{\theta})$  rend l'utilisation directe de ces théorèmes extrêmement complexes dans certains cas, pour cette raison on préfère ne pas les appliquer directement.

Il existe plusieurs notations pour une dérivée de forme, on en présente ici une autre qui peut s'avérer plus claire dans certaines situations

$$A'(\Omega)(\bar{\theta}) = \frac{\partial A}{\partial \Omega}(\bar{\theta}) \quad (\text{III.5})$$

### Direction de descente

Si nous nous replaçons dans le contexte de l'optimisation et que nous considérons maintenant  $A(\Omega)$  comme un critère que l'on souhaite optimiser, nous pouvons exprimer simplement une direction de perturbation de la forme  $\Omega$  amenant à une réduction de  $A(\Omega)$ . Pour cela il suffit de choisir  $\bar{\theta}$  de façon à ce que  $A(\Omega)'(\bar{\theta})$  soit négatif. Une direction évidente pour l'équation (III.2) est

$$\bar{\theta} = -f(\bar{x})\bar{n}, \quad (\text{III.6})$$

car alors

$$A'(\Omega)(f(\bar{x})\bar{n}) = \int_{\partial\Omega} -f(\bar{x})^2 ds, \quad (\text{III.7})$$

qui est une quantité négative quelque soit  $f(\bar{x})$ .

Nous observons ici qu'il est possible d'extraire simplement des directions de descente à partir de (III.2) Ou (III.3).

Il est important de noter que chaque quantité que l'on souhaite optimiser (déplacement d'un point, énergie élastique stockée, ...) doit faire l'objet d'un calcul analytique de sa dérivée de forme, cela afin d'aboutir à une équation semblable à l'équation (III.2) et ainsi pouvoir extraire l'expression d'une direction de descente.

Bien que fondateur, le théorème de dérivation de forme présenté plus haut est souvent inapplicable en pratique à cause de la nature de la fonction  $f(\bar{x})$ . Dans le cadre de l'optimisation de domaine,  $f(\bar{x})$  est souvent solution d'une ou plusieurs équations d'état (par exemple, les équations linéarisées de l'élasticité), il est donc dépendant du domaine de définition  $\Omega$ . Dans ce cas (III.2) et (III.3) ne sont pas applicables, il reste alors le théorème (III.4), mais nous verrons qu'il n'est bien souvent pas applicable facilement, on lui préférera la méthode de Céa (1986) qui sera détaillée plus tard.

## 1.2 Concordance avec la méthode des lignes de niveaux

La dérivation de forme présente l'avantage d'avoir une excellente concordance de concept avec la méthode des lignes de niveaux présentée dans le chapitre II. La dérivation de forme permet d'extraire la perturbation  $\bar{\theta}$  du bord  $\partial\Omega$  assurant une diminution de l'objectif, ce champ est défini le long du bord uniquement. Or, la méthode des levelsets permet de gérer le déplacement



d'une interface causé par un champ de vitesse (c.f. chapitre II, paragraphe 2.3), pour rappel à l'aide de la résolution de l'équation (II.14) qui donne

$$\frac{\partial \phi(t, \bar{x})}{\partial t} + V_n(t, \bar{x}) |\nabla \phi(t, \bar{x})| = 0.$$

Nous utilisons donc le champ de perturbation obtenu précédemment,  $\bar{\theta} \cdot \bar{n}$ , comme champ de vitesse  $V_n$  pour notre levelset .

Il faut cependant noter plusieurs problèmes pratiques liés à la discrétisation de la levelset mais aussi à la discrétisation de la dérivée de forme elle-même.

## 2 Dérivation pratique

Dans la section précédente, on a présenté le concept de la dérivation de forme et expliqué comment il est possible d'en extraire une direction de déplacement  $\bar{\theta}$  du bord  $\partial\Omega$  permettant de réduire un critère. Plusieurs théorèmes permettant le calcul de dérivée de forme ont été énoncés, ainsi que leur limitations. La limitation principale énoncée concerne le cas où le critère contient des termes dépendant de la solution d'une ou plusieurs équations d'état.

Cette situation est courante quand on cherche à optimiser un comportement physique : si on cherche par exemple à minimiser le déplacement d'une structure sous l'effet d'une sollicitation mécanique, le déplacement en question est de fait solution d'un problème de mécanique, souvent modélisé par des équations d'états comme celles de l'élasticité linéarisée.

Dans cette section, on s'intéresse en particulier à la méthode de Cea (1986) permettant d'effectuer efficacement les calculs de dérivée de forme dans le cas où le critère est fonction d'une ou plusieurs équations d'état. On commence par expliquer pourquoi cette méthode est nécessaire, puis on détaille son application. Comme les calculs d'optimisation sont par la suite réalisés sur des problèmes discrétisés, on explique dans une seconde section comment il est possible de discrétiser une dérivée de forme.

### 2.1 Méthode de Cea pour la dérivation de forme rapide

#### Définition et motivation

Soit un système d'équations aux dérivées partielles défini tel que

$$\begin{cases} a(u_\Omega) = 0, & \bar{x} \in \Omega \\ b(u_\Omega) = 0, & \bar{x} \in \Gamma_1 \\ c(u_\Omega) = 0, & \bar{x} \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

avec  $u_\Omega$  la solution du système d'équation d'état (III.8),  $a()$ ,  $b()$  et  $c()$  des opérateurs *supposés linéaires* définissant le comportement dans le domaine  $\Omega$ , sur la partie  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du bord  $\partial\Omega$  respectivement. La figure III.2 illustre ces différents domaines et bords. Cette définition est très générale, le champ  $u_\Omega$  pouvant être un champ de déplacement, de pression ou autre. L'indice de  $u_\Omega$  indique sa dépendance au domaine, en effet, dans la mesure où  $u_\Omega$  est solution du système d'équations (III.8) et que ce système dépend de  $\Omega$ , alors  $u_\Omega$  dépend implicitement de ce même domaine.

Considérons maintenant un critère très général, défini comme

$$J(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Omega} j(u_\Omega) dv + \int_{\partial\Omega} l(u_\Omega) ds, \quad (\text{III.9})$$

avec  $j()$  et  $l()$  deux fonctionnelles dépendant de  $u_\Omega$ . Ces deux fonctionnelles peuvent représenter diverses quantités physiques, par exemple un déplacement ou une énergie élastique. Afin de

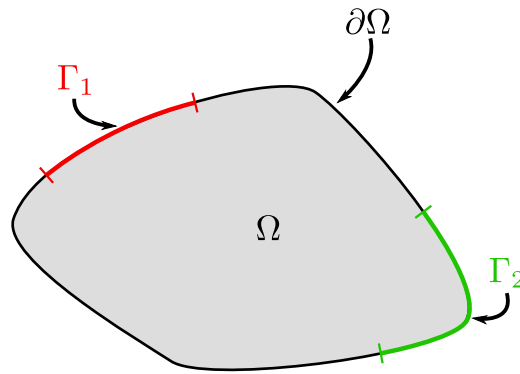


Figure III.2 – Illustration des différents domaines et bords utilisés dans l'équation (III.8).

pouvoir optimiser le critère  $J(\Omega, u_\Omega)$ , il est nécessaire d'en calculer la dérivée de forme, cela dans le but de trouver une direction de descente. Il y a cependant une difficulté empêchant l'application directe de l'équation (III.2) : le champ  $u_\Omega$  n'est pas indépendant du domaine de définition par rapport auquel la dérivation de forme est effectuée. Il faut donc appliquer l'autre expression de la dérivation donnée par l'équation (III.4),

$$J'(\Omega, u_\Omega)(\bar{\theta}) = \int_{\Omega} u'_{\Omega}(\bar{\theta})j'(u_\Omega) dv + \int_{\partial\Omega} j(u_\Omega)(\bar{\theta} \cdot \bar{n}) ds + \int_{\partial\Omega} u'_{\Omega}(\bar{\theta})l'(u_\Omega) ds + \int_{\partial\Omega} \bar{\theta} \cdot \bar{n} [(\text{div}\bar{n})l(u_\Omega) + \nabla l(u_\Omega)] ds. \quad (\text{III.10})$$

On voit apparaître le terme  $u'_{\Omega}(\bar{\theta})$ , qui est la dérivée de forme du champ solution du système d'équation (III.8). Cela pose un problème car ce terme est implicitement défini par les équations d'état, il est donc complexe d'en calculer la dérivée de forme de manière directe ! Cela reste possible, mais peut s'avérer peu pratique comme cela est discuté dans [Allaire \(2007\),p.138](#).

### Écriture du Lagrangien

Afin d'éviter cette difficulté, une méthode de dérivation rapide a été proposé par Céa (1986), et tire parti d'une formulation Lagrangienne (c.f. 2.2) du critère pour accéder à la dérivée de forme. Le principe de la formulation Lagrangienne est de transformer un problème contraint en un problème libre au prix de paramètres supplémentaires. Ici, on considère que les équations d'état (III.8) comme des contraintes portant sur le champ  $u_\Omega$ , on définit donc un champ plus général  $v$ , indépendant des équations d'état, et on écrit le Lagrangien du critère (III.9) comme

$$\mathcal{L}(\Omega, v, p, \mu) = \int_{\Omega} j(v) dv + \int_{\partial\Omega} l(v) ds + \int_{\Omega} pa(v) dv + \int_{\Gamma_1} pb(v) ds + \int_{\Gamma_2} \mu c(v) ds, \quad (\text{III.11})$$

avec  $p$  et  $\mu$  deux multiplicateurs de Lagrange. On utilise un multiplicateur de Lagrange pour chaque jeu d'équation d'état homogène en grandeur physique : ici on a supposé que les équations d'état  $a() = 0$  et  $b() = 0$  avaient la même dimension, on utilise donc un unique multiplicateur de Lagrange pour ces deux équations, à l'inverse, on a utilisé un autre multiplicateur de Lagrange pour l'équation  $c() = 0$ . Une explication mathématiquement rigoureuse de la nécessité d'utiliser différents multiplicateurs de Lagrange, notamment pour les conditions de Dirichlet et Neumann, est présentée dans [Allaire \(2007\),p.151](#).

On constate que dans le cas où le champ  $v$  est solution des équations d'état (III.8), alors les termes supplémentaires du Lagrangien s'annule, on a donc

$$\mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, p, \mu) = J(\Omega, u_\Omega). \quad (\text{III.12})$$

### Définition du point optimal pour une forme fixe

On définit le point optimal du Lagrangien comme étant  $(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)$ . À ce point et comme cela a été décrit en 2.2, on a l'annulation des dérivées partielles du Lagrangien. À noter qu'ici on dérive le Lagrangien par rapport à un champ vectoriel, on utilise donc la notion de dérivée directionnelle. On cherche donc l'annulation des dérivées partielles du Lagrangien dans n'importe quelle direction  $\bar{\Phi}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\Phi}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\Phi}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\Phi}) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Les dérivées par rapport aux multiplicateurs de Lagrange permettent de démontrer que le point optimal  $v^*$  est en fait la solution des équations d'état (III.8), et donc que

$$v^* = u_\Omega. \quad (\text{III.14})$$

La dérivée partielle par rapport à  $v$  permet d'écrire la/les formulation(s) variationnelle(s) permettant de définir les valeurs optimales des multiplicateurs de Lagrange  $p^*$  et  $\mu^*$ , cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\Phi}) &= \int_\Omega \frac{\partial j(u_\Omega)}{\partial v} \cdot \bar{\Phi} \, dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial l(u_\Omega)}{\partial v} \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_\Omega p^* a(u_\Omega) \cdot \bar{\Phi} \, dV \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} p^* b(v) \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\Gamma_D} \mu^* c(v) \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

on définit alors  $p^*$  la solution du problème adjoint dont les équations d'état sont données par l'équation (III.15).

**Remarque :** Il arrive que  $p^*$  satisfasse la même équation d'état (III.8) que  $u_\Omega$  à un facteur près, dans ce cas, on dira que le problème est **auto-adjoint**.

### Extraction de la direction de descente

Une fois le point optimal défini, on peut montrer que

$$J(\Omega, v^*)(\bar{\theta}) = \mathcal{L}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\theta}). \quad (\text{III.16})$$

L'égalité présentée par l'équation (III.16) n'est pas un hasard. On rappelle l'équation (III.12) qui indique que, par construction, on a

$$\mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, p, \mu) = J(\Omega, u_\Omega).$$

De cette équation, et par application du théorème de dérivation composée, on obtient

$$J(\Omega)'(\bar{\theta}) = \mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, p, \mu)'(\bar{\theta}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}}(\Omega, u_\Omega, p, \mu)(u'_\Omega(\bar{\theta})), \quad (\text{III.17})$$

on remarque alors que si l'on se place au point optimal  $(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)$ , alors le second terme s'annule en vertu de l'équation (III.13), on a alors

$$J(\Omega)'(\bar{\theta}) = \mathcal{L}(\Omega, u_\Omega, p^*, \mu)'(\bar{\theta}). \quad (\text{III.18})$$

Il est possible de calculer la dérivée de forme du Lagrangien en utilisant les théorèmes généraux, car le champ  $v$  est indépendant du domaine de définition  $\Omega$ . De plus, en évaluant cette dérivée de forme au point optimal  $(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)$ , on retrouve directement la dérivée de forme de la fonction objectif comme l'indique l'équation (III.18).

**Remarque :** Il est important de noter qu'il est nécessaire de connaître  $p^*$  et  $\mu^*$  afin de pouvoir calculer la dérivée de forme, il faut pour cela résoudre le problème adjoint défini par l'équation (III.15) pour  $p^*$ , ainsi que celui définissant  $\mu^*$ .

## 2.2 Discrétisation et régularisation de la dérivée

Les bases de la dérivation de forme ont été présentées ici, il a été montré comment extraire d'une équation d'état une direction de descente pour une quantité donnée. Cependant, la question de la discrétisation est encore à traiter. En effet, comme cela a été expliqué, la forme générale d'une dérivée de forme est donnée par

$$A(\Omega)'(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} f(\bar{x})\bar{\theta} \cdot \bar{n} \, ds, \quad (\text{III.19})$$

dont on extrait une direction de descente (c.f. équation (III.2)) de la forme

$$\bar{\theta}(\bar{x}) = -f(x)\bar{n}.$$

Cette expression est définie uniquement sur le bord du domaine  $\Omega$ , ce qui est en pratique "dérangeant" car le bord du domaine n'est connu qu'implicitement à travers la levelset du domaine  $\Omega$  (voir figure III.3). Généralement  $f(\bar{x})$  est obtenu sous la forme d'un champ défini aux éléments par le biais d'un calcul éléments finis, que l'on interpole ensuite aux nœuds du maillage. Une solution pour contourner la définition implicite de l'interface est d'exploiter directement cette propriété de  $f(\bar{x})$  et de réécrire l'expression (III.19) telle que

$$A(\Omega)'(\bar{\theta}) = \int_D f(\bar{x})\delta(\phi_\Omega)\bar{\theta} \cdot \bar{n} \, ds. \quad (\text{III.20})$$

Avec  $\delta(\phi_\Omega)$  la fonction de Dirac du bord  $\partial\Omega$ . Nous transformons alors l'intégrale sur le bord  $\partial\Omega$  en une intégrale sur le domaine optimisable  $D$ .

Cependant à cause de la discrétisation et même après cette modification le problème reste entier : seuls les nœuds du maillage faisant partie de l'interface auront une valeur de  $\delta(\phi_\Omega)$  non nulle. Pour éviter cela nous remplaçons la fonction de Dirac  $\delta(\phi_\Omega)$  par une fonction de Dirac régularisée calculée à partir de la distance signée  $d_\Omega$ . Nous définissons la fonction signe régularisée telle que

$$s(d_\Omega) = \frac{d_\Omega}{\sqrt{d_\Omega^2 + \epsilon}}, \quad (\text{III.21})$$

avec  $\epsilon$  un facteur de régularisation. Nous exprimons ensuite la fonction de Dirac régularisée  $\delta_s(d_\Omega)$  comme étant

$$\delta_s(d_\Omega) = \frac{1}{2}|\nabla s(d_\Omega)|. \quad (\text{III.22})$$

La figure III.3 présente l'allure des différentes quantités présentées.

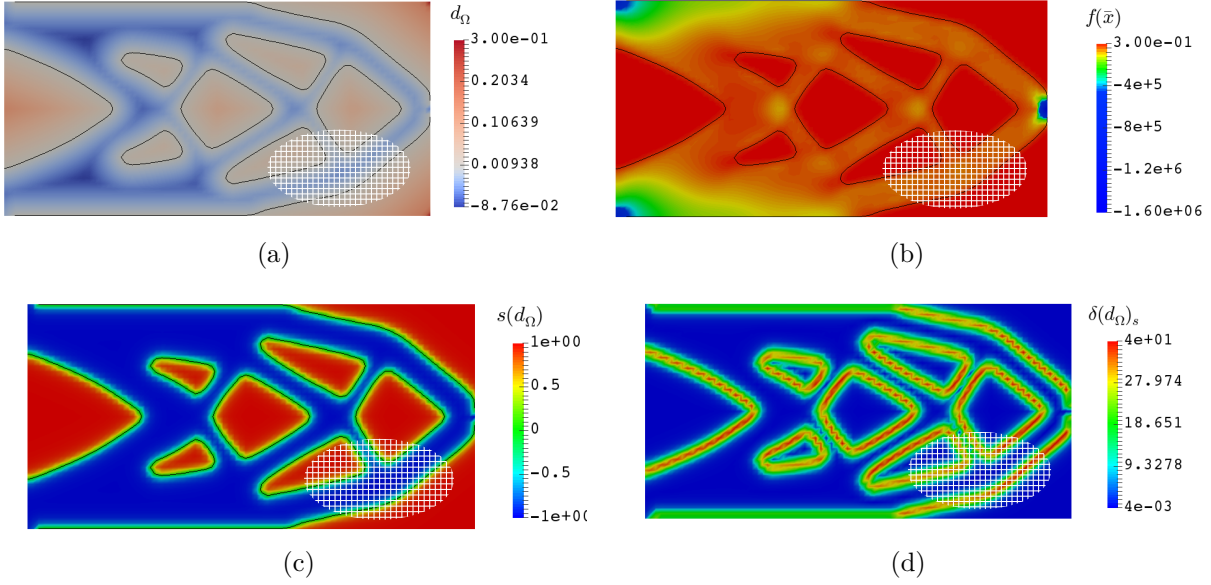


Figure III.3 – Illustration de plusieurs champs utilisés pour la discrétisation d'un gradient de forme. Pour chaque sous figure le contour noir représente le bord  $\partial\Omega$  de la forme, et une petite bulle dans le coin inférieur droit présente l'allure du maillage. (a) Exemple de fonction lignes de niveaux représentant un domaine  $\Omega$  quelconque (le bord  $\partial\Omega$  est représenté en noir). (b) Exemple de quantité  $f(\bar{x})$  calculée sur la forme exemple. Cette quantité est définie partout dans le domaine  $D$ . (c) Fonction de signe régularisée  $s(d_\Omega)$  calculée à partir de la distance signée de la forme  $\Omega$  (contour en noir). (d) Dirac régularisé  $\delta_s(d_\Omega)$  calculé à partir de la fonction de signe régularisée  $s(d_\Omega)$ .

Cette méthode permet de discrétiser le gradient de forme, cependant elle va entrainer des variations très lentes de la forme car le gradient n'est non nul que dans le voisinage de l'interface. Pour palier à ce problème, plusieurs auteurs proposent d'utiliser une régularisation (Michailidis (2014),p.43) (Challis (2009),p.43), c'est-à-dire d'étendre le champ proche de l'interface dans le reste du domaine. On trouve plusieurs propositions d'extension, du simple filtre de lissage (Challis, 2009) a des traitements plus rigoureux mathématiquement (Michailidis, 2014). Un argument marquant est le critère de la direction de descente, en effet, rien ne garantit de manière systématique qu'une régularisation du champ  $f(\bar{x})$ , que l'on notera  $\tilde{f}(\bar{x})$ , est toujours une direction de descente. On a donc

$$\int_{\partial\Omega} -f(\bar{x})^2 ds < 0 \not\Rightarrow \int_{\partial\Omega} -\tilde{f}(\bar{x})f(\bar{x}) ds < 0, \quad (\text{III.23})$$

pour cette raison, Michailidis (2014),p.43 propose d'utiliser une régularisation qui assure que  $\tilde{f}(\bar{x})$  est toujours une direction de descente.

Soit la dérivée de forme d'une fonctionnelle  $J$  pour une perturbation  $\bar{\theta}$

$$J(\Omega)'(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} j(s)\bar{\theta} \cdot \bar{n} ds,$$

on fixe arbitrairement  $w(s) = (\bar{\theta} \cdot \bar{n})$ , ce qui donne

$$J(\Omega)'(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} j(s)w(s) ds.$$

On construit la forme variationnelle suivante

$$\int_D [\alpha^2 \nabla Q \cdot \nabla W + QW] dv = J(\Omega)'(W\bar{n}), \quad (\text{III.24})$$

où  $W$  est le champ test,  $Q$  la solution du problème et  $\alpha$  un facteur de régularisation positif. Le problème ainsi défini est similaire à un problème de propagation de pression acoustique. Le gradient de forme représente la source acoustique, qui se trouve le long de la forme. Cette équation permet de "propager" le gradient dans tout le domaine  $D$ , on remarque d'ailleurs qu'une fois la solution du problème obtenue, on a égalité entre le gradient (intégrale de bord) et le terme de gauche (intégrale volumique).

On peut ensuite résoudre le problème ainsi défini à l'aide d'une méthode éléments finis. Si on prend  $W = -Q$  et que l'on utilise l'équation (III.24), on constate que

$$J(\Omega)'(-Q\vec{n}) = - \int_D [\alpha^2 |\nabla Q|^2 + Q^2] dv,$$

ce qui implique que  $J(\Omega)'(-Q)$  est une quantité toujours négative et donc que  $-Q$  constitue une direction de descente pour le critère  $J(\Omega)$ .

**Remarque :** Bien que plus rigoureuse, cette régularisation nécessite la résolution numérique de l'équation (III.24) alors que le lissage se traite par un simple produit de convolution.

### 2.3 Discussion autour des erreurs d'évaluation du gradient de forme

Si la théorie de la dérivation de forme permet d'extraire des expressions "exactes" de gradients, il reste que la discrétisation induit des erreurs d'évaluation de ces derniers. Un gradient mal calculé représente une difficulté importante pour un algorithme d'optimisation, ce dernier se basant sur cette information pour piloter l'évolution de la forme.

Banichuk *et al.* (1995) définissent deux sources d'erreurs d'évaluation du gradient qui sont l'erreur issue de la résolution des PDE et l'erreur d'approximation géométrique de la forme. Vié (2017), chap. 11 montre d'ailleurs que la méthode de représentation par frontière immergée couplée à un Dirac régularisé, couramment utilisée pour discrétiser un gradient de forme, fournit une approximation de mauvaise qualité.

Afin d'obtenir un gradient de bonne qualité Vié (2017), chap. 11 propose d'utiliser la définition explicite du bord  $\partial\Omega$  de la forme, il présente ainsi une approximation de meilleure qualité en réduisant les erreurs de représentation géométrique de la forme. Cette solution se rapproche de l'enrichissement X-FEM évoqué dans le chapitre II. Giacomini *et al.* (2015) proposent de leur côté l'algorithme *Certified Descent Algorithm* (CDA) qui a pour but d'améliorer la qualité du gradient par adaptation du maillage de calcul, cela jusqu'à pouvoir assurer que la dérivée obtenue est une direction de descente.

L'ensemble de ces stratégies restent cependant coûteuses en temps de calcul, et peuvent s'avérer complexes à implémenter. Nous n'avons pas éprouvé la nécessité d'utiliser ce type de schéma au cours des études d'optimisation réalisées dans ce document. Nous notons cependant que dans (Desai *et al.*, 2016), qui traite d'optimisation de forme appliquée à l'acoustique, il nous a fallu utiliser une stratégie de maillage adaptatif pour améliorer la qualité de nos gradients.

Nous avons pu conclure que pour des problèmes de mécanique simples l'utilisation de stratégies d'amélioration du gradient ne constituent pas un gain important. Cependant dès lors que l'on souhaite une grande précision de forme ou que les interfaces ont une influence importante sur le comportement que l'on cherche à optimiser, ces stratégies deviennent indispensables.

## Bilan du chapitre III

---

Dans ce chapitre nous avons présenté les bases de la théorie de la dérivation de forme. Elle permet d'évaluer comment une fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  varie quand le bord de son domaine de définition  $\partial\Omega$  est perturbé par un petit champ vectoriel  $\bar{\theta}$ , la dérivée de forme de  $\mathcal{J}(\Omega)$  se note  $\mathcal{J}'(\Omega)(\bar{\theta})$ .

Cette information permet de guider l'optimisation, en considérant par exemple que la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  représente une quantité à optimiser (volume, masse, déplacement), alors le gradient de forme  $\mathcal{J}'(\Omega)(\bar{\theta})$  permet de déduire quelle perturbation  $\bar{\theta}$  du bord  $\partial\Omega$  permettent la réduction ou l'augmentation du critère.

Nous avons constaté que l'évaluation d'un gradient de forme **nécessite un travail de calcul analytique**, étape indispensable à l'extraction d'une direction de descente. Ce calcul peut s'avérer complexe, c'est pourquoi nous avons introduit la **méthode de Céa** (Céa, 1986) qui permet d'extraire plus simplement l'expression du gradient.

Il faut noter que l'expression d'un critère à optimiser est soumise à une importante contrainte : **il est indispensable que cette dernière soit dérivable par rapport au domaine.**

La théorie présentée ici est développée dans le cadre continu (la forme n'est pas discrétisée au moment d'écrire la dérivée). Il faut cependant discrétiser le gradient de forme obtenu afin de pouvoir l'exploiter numériquement, pour cela nous avons présenté les étapes de discrétisation et de régularisation qu'il est possible de lui appliquer.

Le choix de la dérivation de forme comme guide d'optimisation marque la nuance entre l'optimisation de domaine et l'optimisation de forme : le paramètre optimisé n'est pas le domaine de définition  $\Omega$  mais son bord  $\partial\Omega$ , le domaine  $\Omega$  est ici implicitement modifié par la variation de son bord.

# Conclusion de la Partie A

Durant cette partie nous avons défini le cadre numérique pour résoudre des problèmes d'optimisation de domaine. Pour cela nous avons défini :

- Un algorithme d'optimisation, nous avons justifié dans le chapitre I de l'utilisation d'un algorithme de programmation séquentielle particulier, **MFD**. Cet algorithme combine une gestion rigoureuse des contraintes et une bonne robustesse vis-à-vis de la complexité des problèmes d'optimisation de domaine.
- Un paramétrage, après avoir présenté dans le chapitre II plusieurs façons de paramétrer un domaine de définition, nous avons retenu la **méthode des lignes de niveaux**. Elle permet une représentation aisée des interfaces graduées.
- Afin de guider notre processus d'optimisation nous utilisons la **dérivation de forme**, qui indique à chaque itération comment le bord du domaine optimisé doit être déplacé afin d'obtenir le résultat souhaité.

Le schéma présenté en figure III.4 rassemble le contenu de cette partie, et constitue un pseudo algorithme de base permettant la mise en place d'un process d'optimisation de domaine complet.

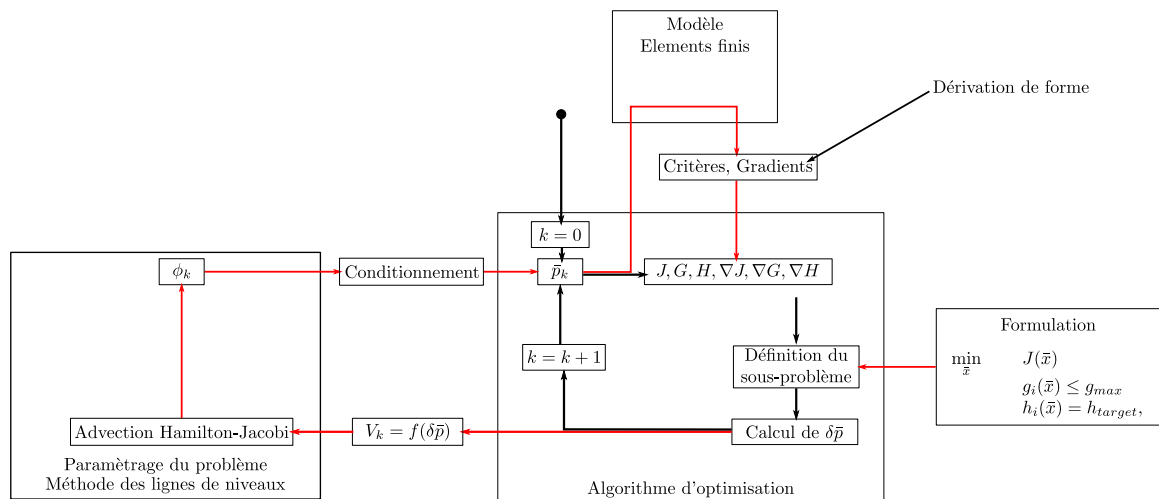


Figure III.4 – Schéma général d'un process d'optimisation complet.

Afin d'illustrer le fonctionnement général de la méthode, nous allons maintenant l'appliquer à quelques exemples de référence, fréquemment rencontrés dans la littérature.

## Optimisation d'un Cantilever

La formulation du problème d'optimisation est la suivante : minimiser le volume de la structure tout en conservant une quantité d'énergie élastique stockée (aussi appelée *compliance*)  $W_{el}$



inférieure à  $W_{el,max}$ , une valeur fixe choisie arbitrairement. Cela donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & V(\Omega) \\ & W_{el}(\Omega) \leq W_{el,max}. \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Le modèle mécanique utilise un maillage éléments finis de  $200 \times 100$  éléments, dont les dimensions sont  $2 \times 1$ . La figure III.5 présente l'évolution de la forme ainsi que celle des critères durant le process d'optimisation.

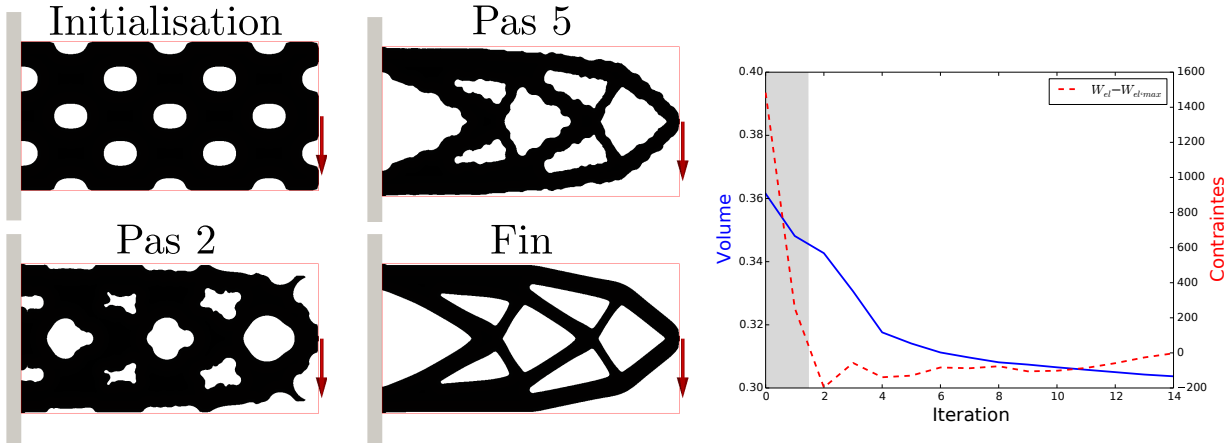


Figure III.5 – Exemple d'optimisation de forme sur un problème de cantilever. À gauche différentes étapes du processus d'optimisation (de l'initialisation à la convergence) et à droite le diagramme de convergence.

Nous constatons à travers cet exemple comment le domaine  $\Omega$  (représenté en noir sur la figure III.5) évolue au fil des itérations afin de réduire la fonctionnelle de volume  $V(\Omega)$  tout en conservant la fonctionnelle de compliance  $W_{el}(\Omega)$  inférieure à  $W_{el,max}$ .

Nous étudions maintenant un second exemple en 3D.

### Optimisation d'un pont en 3D

Ici nous traitons un problème d'optimisation de structure 3D d'un pont supportant une charge surfacique. Le problème s'écrit

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & W_{el} \\ & V \leq V_{max}, \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

la figure III.6 présente là encore l'évolution de la forme ainsi que des différents critères durant le process d'optimisation.

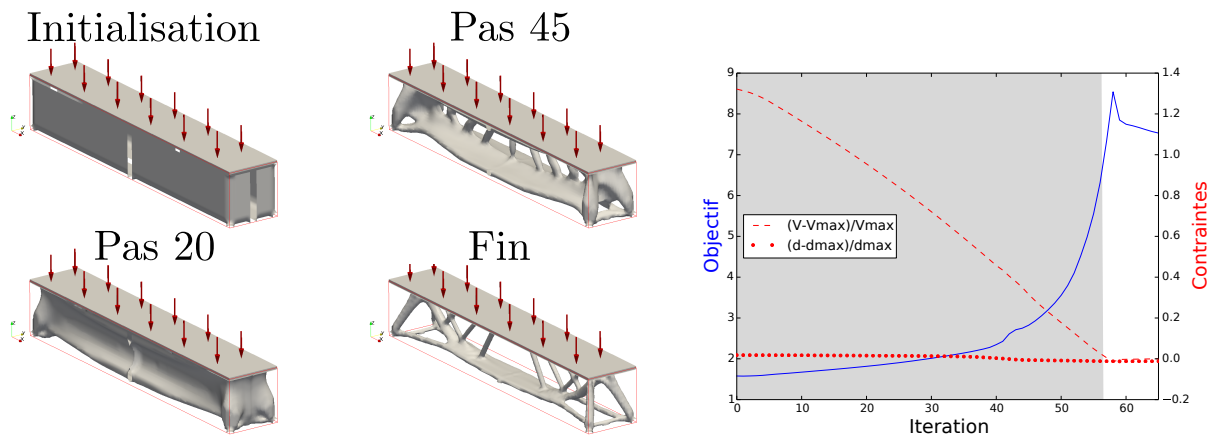


Figure III.6 – Exemple d’optimisation de forme sur un problème de pont en 3D. À gauche différentes étapes du processus d’optimisation (de l’initialisation à la convergence) et à droite le diagramme de convergence.



Deuxième partie :

---

Optimisation de forme de matériaux  
architecturés avec prise en compte des  
effets d'interface graduée



# Chapitre IV

## Motivations et état de l'art

---

1	Généralités sur les matériaux architecturés . . . . .	81
1.1	Une définition du matériau architecturé . . . . .	81
1.2	Matériaux architecturés et contrôle de la cinématique locale . . . . .	83
1.3	Choix de l'architecture: de l'intuition à l'optimisation de domaine . . . . .	86
2	Propriétés thermoélastiques extrêmes . . . . .	87
2.1	Contexte et motivations . . . . .	88
2.2	Matériau architecturé et contrôle de la dilatation thermique . . . . .	91
2.3	Résultats de la littérature et interprétation . . . . .	93
3	Prise en compte des interfaces graduées . . . . .	95
3.1	Classification et description des interfaces . . . . .	96
3.2	Deux visions différentes des interfaces graduées . . . . .	98
3.3	Interfaces graduées et propriétés des matériaux architecturés . . . . .	98
	Bilan du chapitre IV . . . . .	102

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous fournissons un état de l'art sur les matériaux architecturés. Nous commençons par fournir une définition du matériau "architecturé" en se basant sur la littérature. Nous traitons de l'intérêt de cette nouvelle famille de matériaux. Nous cherchons ensuite à évaluer l'apport de ces matériaux dans le cadre particulier de la recherche de propriétés thermoélastiques extrêmes. Plusieurs critères pour l'obtention de telles propriétés seront énoncés, notamment la nécessité de recourir à des matériaux polyphasés.

Dans la mesure où nous nous intéressons à des systèmes comportant plusieurs phases, il est pertinent de se poser la question de l'influence des propriétés des interfaces entre les différentes phases constitutives, c'est pourquoi nous traitons dans un dernier paragraphe de l'effet de la prise en compte d'interfaces graduées, dont les propriétés varient de manière non monotone entre deux phases constitutives adjacentes, sur les propriétés des matériaux architecturés.

## Comblent les vides de l'espace des propriétés des matériaux

La recherche dans le domaine des matériaux architecturés est motivée par le besoin de matériaux toujours plus performants, capable de cumuler les avantages propres à différentes familles de matériaux. Pour illustrer cette réalité, [Ashby et Bréchet \(2003\)](#) utilisent des cartes où les matériaux sont placés dans l'espace en fonction de leurs propriétés, la figure IV.1 est un exemple d'une de ces cartes. On observe sur cette figure la répartition des matériaux existants dans l'espace masse volumique - module de Young, une corrélation entre ces deux propriétés apparaît, laissant certains espaces de la carte vides. Nous notons en particulier la zone représentant les matériaux à forte rigidité (module de Young élevé) et faible masse volumique, notée "Zone d'intérêt" sur la figure.

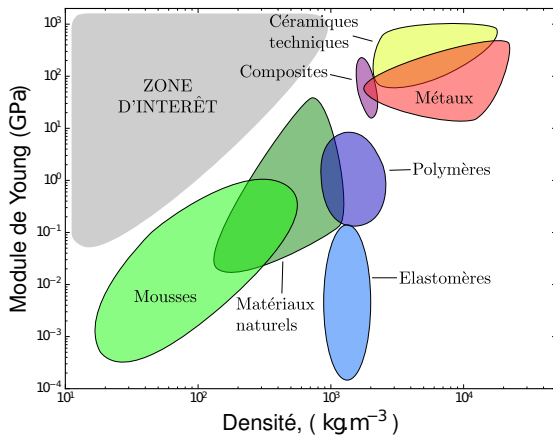


Figure IV.1 – Exemple de carte d'Ashby présentant les matériaux connus dans l'espace densité - module de Young

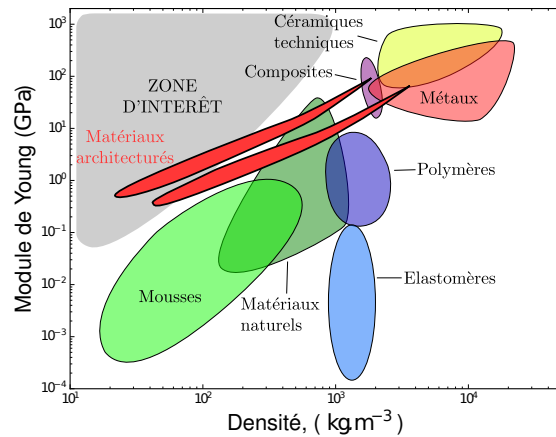


Figure IV.2 – Exemple de carte d'Ashby présentant les matériaux connus dans l'espace densité - module de Young, sur cette carte on a ajouté deux bulles correspondant à des familles de matériaux architecturés.

Cet espace vide représente un grand enjeu notamment pour l'industrie du transport ou de l'aérospatiale. Le design de matériaux rigides et légers est toujours un des axes importants de recherche dans l'aéronautique ou l'automobile. Plusieurs solutions ont été étudiées, par exemple les alliages d'aluminium-cuivre hautes performances (coin gauche de la bulle rouge "Métaux"), qui sont aujourd'hui largement utilisés dans l'industrie aéronautique. Cette solution semble cependant avoir atteint ses limites, comme le dit [Ashby \(2013\)](#), le gain apportés par les générations successives d'alliages est davantage "incremental" plutôt que "step-like". Plus récemment les composites (bulle violette) se sont développés, ils sont de plus en plus répandus dans l'aéronautique et sont déjà utilisés dans le milieu nautique de compétition depuis plus de 20 ans.

### Le potentiel des matériaux dit "architecturés"

Si les composites étendent l'espace des matériaux, il y a cependant une autre famille de matériaux qui présente un potentiel d'amélioration bien plus grand, la figure IV.2 illustre une part de ce potentiel (données provenant de [Fleck et al. \(2010\)](#)). Nous reprenons ici la même carte que celle de la figure IV.1 en ajoutant deux bulles rouges qui correspondent à deux exemples de nouveaux matériaux : les treillis CFRP (pour *Carbon Fiber Reinforced Polymer*) et les micros treillis d'aluminium. [Dong et Wadley \(2015\)](#) réalisent une étude sur les propriétés des treillis CFRP, elle met en avant le potentiel de tels matériaux pour la fabrication de structure rigide ultra légère.

## Matériaux "architecturés" et propriétés thermoélastiques

Ces nouveaux matériaux peuvent aussi présenter des propriétés thermoélastiques uniques, [Lakes \(1996\)](#) démontre ce potentiel à travers plusieurs exemples atteignant des coefficients de dilatation thermique nuls ou fortement négatifs. Plus tard [Sigmund et Torquato \(1996\)](#) proposent d'autres architectures dont ils démontrent le caractère extrême des propriétés à l'aide des bornes théoriques proposées par [Gibiansky et Torquato \(1997\)](#).

### Une définition floue

Les différents exemples introduit précédemment sont regroupés dans une nouvelle famille de matériaux dit "architecturés", **cependant une définition claire de ce qu'englobe cette notion reste encore à définir.**

Dans le paragraphe suivant nous allons tâcher de fournir notre définition du matériau architecturé en se basant sur la littérature.

## 1 Généralités sur les matériaux architecturés

### 1.1 Une définition du matériau architecturé

#### Classification de la littérature

[Ashby \(2013\)](#) fournit une définition de ces "*Architected or hybrid materials*". Ce sont des combinaisons de deux matériaux ou plus (ou d'un matériau et de vide), assemblés de façon à avoir des propriétés qu'aucun des matériaux de base ne possède seul. La notion de matériau hybride est similaire à la notion de composite dont [Ashby \(2013\)](#) présente une série d'exemples qui sont reportés sur la figure IV.3. Ces matériaux répondent tous à la définition donnée.

Si on se réfère à [Ashby et Bréchet \(2003\)](#), la configuration et la forme des différentes phases constitutives d'un matériau hybride ont un rôle déterminant dans ses propriétés. Cette configuration est définie comme un nouveau paramètre du design d'un matériau, l'auteur parle de processus "A+B+shape+scale", qui indique que la conception d'un matériau composite passe par

- Le choix des matériaux constitutifs.
- Le choix de la configuration, c'est-à-dire de la manière dont les matériaux constitutifs s'agencent les uns par rapport aux autres.
- L'échelle de la configuration.

La figure IV.4 présente les ordres de grandeurs dans lesquels interviennent microstructure, configuration et structure. On voit que comme la microstructure et la structure, la configuration peut s'étendre sur plusieurs échelles spatiales.



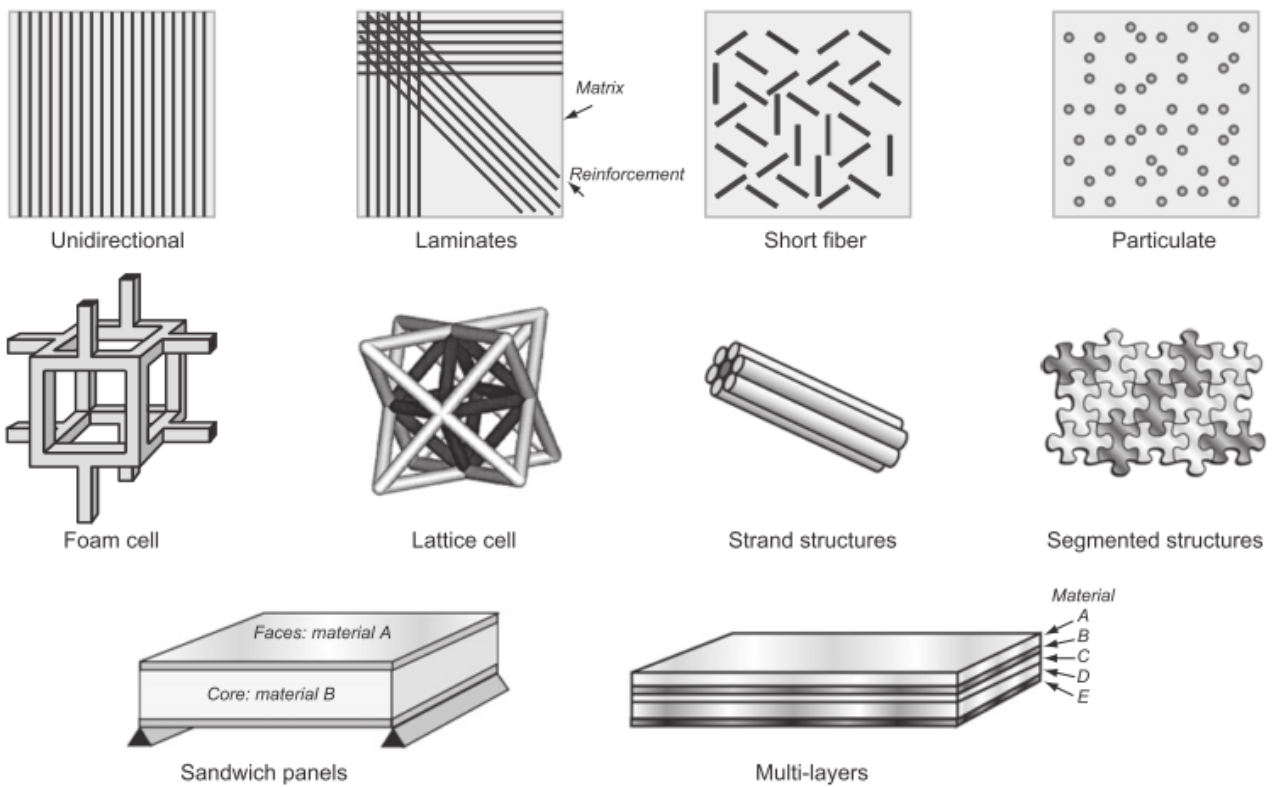


Figure IV.3 – Exemples de matériaux hybrides avec différentes configurations et connectivités, source : (Ashby, 2013).

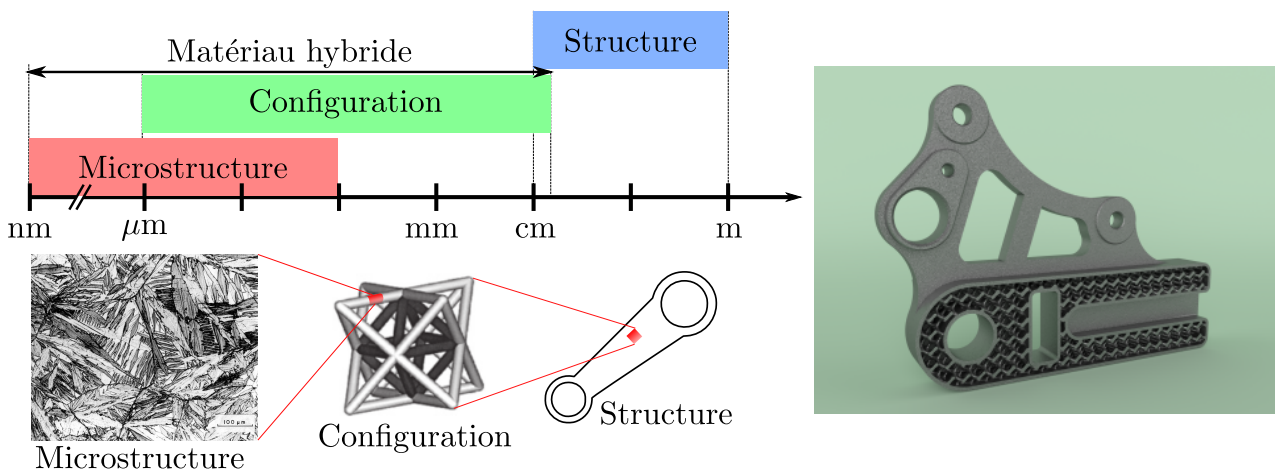


Figure IV.4 – Comparaison des ordres de grandeurs auxquelles interviennent microstructure, configuration et structure. À droite, un exemple de pièce mécanique composé d'un matériau architecturé, on voit ici que l'échelle de la configuration est plus proche de l'échelle de la structure.

## Notre définition du matériau architecturé

À l'inverse de Ashby (2013), nous souhaitons introduire une nuance entre matériau architecturé et matériau hybride. Cette nuance nous apparaît nécessaire car elle souligne une différence notable observée entre les hybrides "traditionnels" (fibre de carbone+matrice epoxy, fibre de verre + matrice thermoplastique) et les hybrides tels que les micros treillis.

Nous faisons le choix de définir la famille des matériaux architecturés comme étant une sous-classe de la famille des matériaux hybrides. **Un matériau architecturé est un matériau hybride comportant une cinématique complexe à l'échelle de sa configuration.** Dans certains cas, cette cinématique complexe permet de faire apparaître des **mécanismes**.

Cette nuance est illustrée à l'aide de la figure IV.5. Les deux matériaux proposés ici sont tous deux composés de deux phases, epoxy et fibre de carbone pour a) et epoxy + vide pour b), ils appartiennent donc tous deux à la classe des matériaux hybrides. Nous observons sur la figure IV.5 leurs configurations. Si nous imaginons maintenant ces deux matériaux soumis à une sollicitation mécanique, nous remarquons une différence de comportement :

- Le matériau a) a un champ cinématique relativement homogène, il se comporte comment un matériau massif.
- Le matériau b) a un champ cinématique complexe, assimilable à celui d'un réseau de barres de treillis, nous constatons à l'échelle locale des cinématiques de flexion, rotation et torsion.

Nous dirons que le matériau a) est un hybride, alors que le matériau b) est un matériau architecturé.

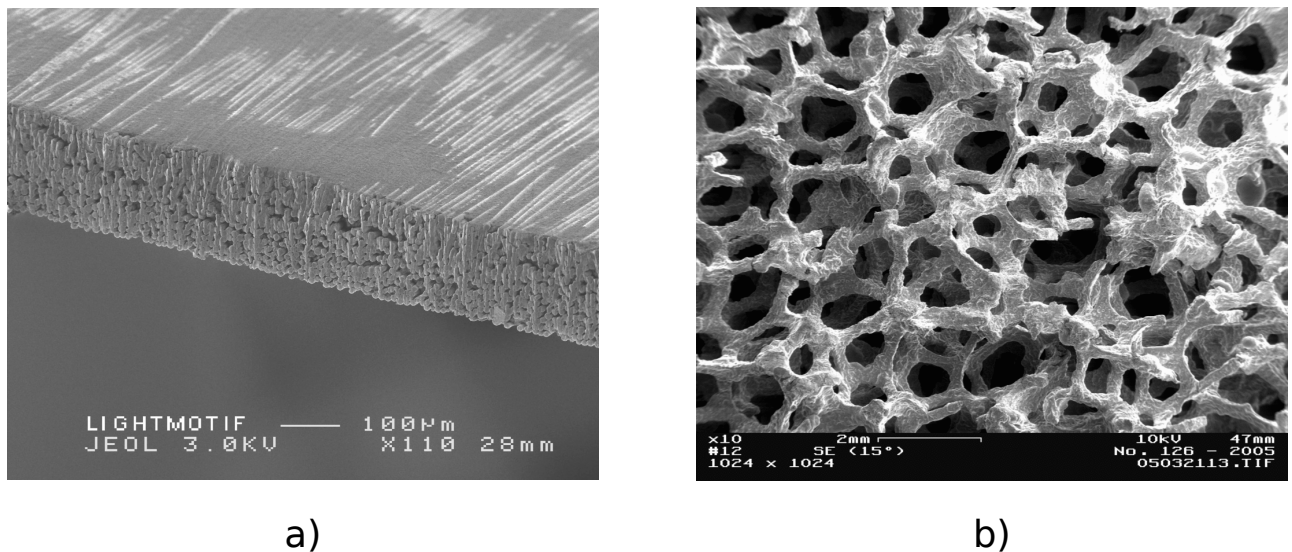


Figure IV.5 – Exemple de matériaux hybrides : a) Image SEM d'un composite à fibre de carbone/matrice epoxy. Source : Lightmotif b) Image MEB d'une mousse polymère. source : Wikipédia

Cette distinction nous paraît importante dans la mesure où la plupart des matériaux "architecturés" proposés dans la littérature possèdent ce type de cinématique complexe (Lakes, 1996; Wang *et al.*, 2004; Sigmund et Torquato, 1996). Andreassen *et al.* (2014) soulignent même que l'obtention des propriétés élastiques les plus extrêmes (par exemple un coefficient de Poisson égal à -1) est conditionnée par la présence de mécanismes, et donc d'une cinématique locale complexe.

Dans le paragraphe suivant, nous définissons plus clairement le concept de cinématique locale à travers plusieurs exemples. Nous présentons ensuite les conditions nécessaires à l'apparition d'une telle cinématique.

## 1.2 Matériaux architecturés et contrôle de la cinématique locale

### Des exemples de contrôle de la cinématique locale

Nous commençons par illustrer ce qu'est la cinématique locale avec un exemple classique de la littérature : l'*octet-truss*. Il s'agit d'une architecture particulière présentée sur la figure IV.6.

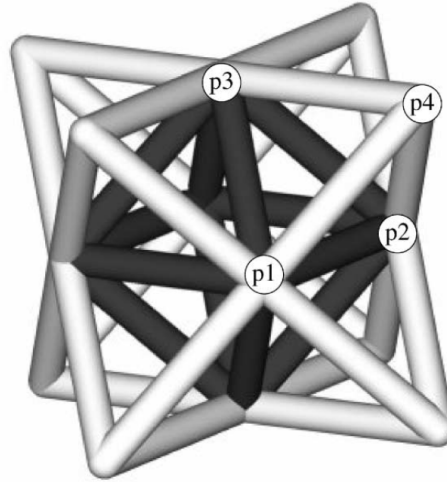


Figure IV.6 – Schéma de la structure *octet-truss*, source : (Deshpande *et al.*, 2001).

Elle est connue pour sa grande rigidité, due au fait que l'ensemble de ses barres de treillis travaillent de manière axiale quand le treillis est sollicité dans son ensemble. Nous observons ici une cinématique complexe similaire à celle d'un treillis, adaptée pour guider les efforts mécaniques de manière précise. Wang *et al.* (2016, 2014) proposent plusieurs autres architectures développant ce type de cinématique.

Parmi les exemples notables de matériau treillis, la figure IV.7 présente une structure dite "auxétique", c'est-à-dire ayant un coefficient de Poisson effectif négatif. La forme ré entrant de la cellule de répétition permet un déploiement quand cette dernière est sollicitée uniaxialement (cf. figure IV.7 droite). On voit apparaître une cinématique de rotation des différentes barres autour des liaisons, là encore on retrouve cette notion de contrôle de la cinématique par l'architecture. Ce dernier exemple se rapproche d'un mécanisme.

**Remarque :** On emploie ici le terme "cinématique", qui fait référence à un problème de mécanique, ce concept est cependant totalement transposable à d'autres domaines de la physique. On peut par exemple considérer non pas la "cinématique" mais la variation d'un champ de température ou d'un champ magnétique.

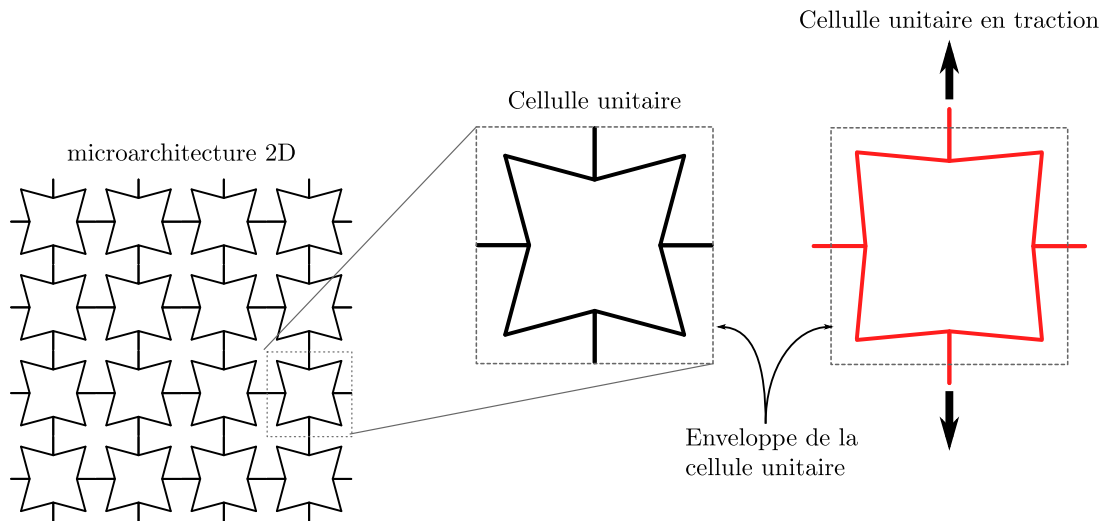


Figure IV.7 – Illustration du concept de matériau architecturé auxétique, un exemple de microstructure 2D avec un agrandissement d'une cellule de répétition et un schéma représentatif de sa déformation sous l'effet d'une traction uniaxiale.

### Contraste physique et propriétés extrêmes

Pour pouvoir contrôler la cinématique il est nécessaire de disposer d'un contraste physique entre les phases, sans quoi le comportement mécanique global du matériau tend à être celui d'un matériau massif : l'hybride final est un composite et non un architecturé.

Cela est intuitif pour la mécanique : si nous souhaitons induire des flexions/torsions/rotations localement, il est nécessaire de disposer de zones facilement déformables pour que ces cinématiques particulières ne soient pas entravées.

De manière plus générale, il semble que le contraste de propriétés entre les phases constitutives d'un matériau architecturé soit un facteur déterminant de la plage des propriétés atteignables. L'annexe B présente d'ailleurs l'influence de ce contraste sur les propriétés thermoélastiques atteignables.

Démontrer rigoureusement cette assertion n'est pas aisé, on peut cependant l'illustrer à travers plusieurs cas.

Nous considérons par exemple la conception d'un matériau architecturé ayant un coefficient de Poisson négatif, il s'agit d'une problématique déjà traitée dans la littérature (Sigmund, 1995; Wang *et al.*, 2004; Andreassen *et al.*, 2014). Ces différents auteurs ont prouvé qu'il est possible d'atteindre des valeurs de coefficient de Poisson très proches des bornes issues des théorèmes extrémaux, Andreassen *et al.* (2014) propose notamment des matériaux ayant des coefficients de Poisson de  $-0.83$ . Ces bornes constituent une limite stricte : aucun matériau isotrope ne pourra obtenir un coefficient de Poisson au-delà de ces limites. L'annexe B présente les expressions analytiques de ces bornes, elles ne seront pas détaillées ici.

La figure IV.8 présente les limites théoriques pour différentes combinaisons de matériaux hybrides, pour toute la plage possible des fractions volumiques. On constate que les hybrides comportant le contraste le plus important de rigidité (c.f. tableau IV.9) entre leur phases sont ceux pouvant couvrir la plus grande plage de valeurs pour leur coefficient de Poisson. On note en particulier l'hybride métal-vide, qui propose le domaine le plus étendu. On remarque de plus que seule une très petite quantité de vide est nécessaire pour atteindre des valeurs extrêmes de coefficient de Poisson (du moins théoriquement).

La même constatation est faite avec le cas des propriétés thermoélastiques, les détails sont présentés en annexe B.

Ces deux exemples tendent à montrer l'intérêt d'un fort contraste de propriétés entre les diffé-

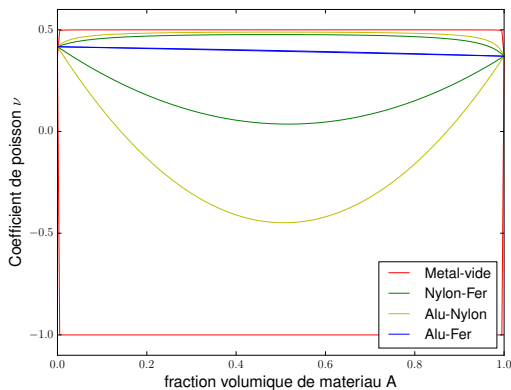


Figure IV.8 – Bornes théoriques pour les propriétés de plusieurs matériaux hybrides à deux constituants, la fraction volumique de la phase A est reportée en abscisse, l'ordonnée représente le coefficient de Poisson.

matériau A	matériau B	contraste A-B
Métal	Vide	1
Nylon	Fer	0.95
Nylon	Aluminium	0.86
Aluminium	Fer	0.5

Figure IV.9 – Calcul du contraste de module de Young pour différents composites A-B  $\frac{E_{max}-E_{min}}{E_{max}+E_{min}}$ .

rents constituants d'un matériau architecturé. De plus, l'utilisation du vide comme "matériau" constitue un excellent moyen d'amener ce contraste.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de l'architecture sur les propriétés des matériaux architecturés.

### 1.3 Choix de l'architecture : de l'intuition à l'optimisation de domaine

#### Problématique du choix de l'architecture

La figure IV.10 illustre comment trois matériaux architecturés différents peuvent avoir des coefficients de Poisson distincts, on remarque en particulier que tous sont composés des mêmes proportions de phase solide (noir) et de vide (blanc). Cet exemple souligne l'importance du choix de l'architecture quand on cherche à concevoir un matériau architecturé.

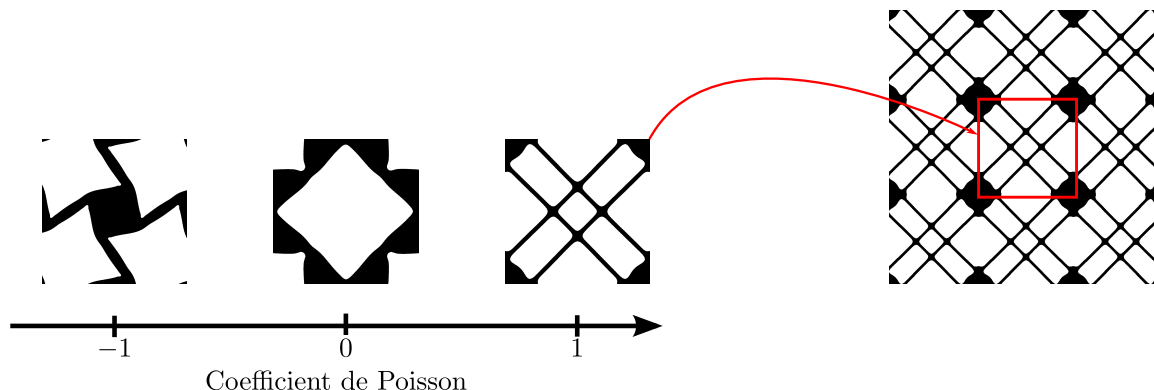


Figure IV.10 – Exemple de l'effet de l'architecture d'un matériau architecturé sur le coefficient de Poisson effectif. Résultats obtenus avec *Iktinos*

Plusieurs approches sont possibles pour définir une architecture : il est possible de travailler par intuition. Les structures "ré-entrante" comme celle proposée sur la figure IV.7 constituent un bon exemple d'architecture auxétique de ce type. Gibson (1997),p. 187 présente quelques



architectures ayant un coefficient de Poisson négatif, il dégage un critère géométrique ("*inverted cell's walls*") permettant d'obtenir un comportement auxétique.

Ces méthodes restent très qualitatives, elles permettent de "choisir le signe" du coefficient de Poisson, mais pas de trouver une architecture lui donnant une valeur précise.

(Sigmund, 1995) propose une approche quantitative basée sur une étude d'optimisation paramétrique. Bien qu'efficace, cette méthode limite la variété des architectures possibles.

Dans ce cadre, l'optimisation de domaine est un bon candidat pour proposer des architectures novatrices répondant à des contraintes quantitatives, ce point va être abordé maintenant.

### L'optimisation comme guide de conception

L'optimisation de domaine permet, comme cela a été présenté dans la partie A, la recherche d'un ou plusieurs domaines, c'est-à-dire une répartition de matière dans l'espace, minimisant un objectif donné. En se munissant d'un modèle adéquat et en effectuant correctement les étapes de dérivation de forme (c.f. chapitre III), il est ainsi possible d'utiliser ce type de méthode pour rationaliser la conception de microstructures architecturées.

Une telle approche a déjà été menée. Il existe plusieurs études sur l'optimisation des propriétés élastiques des matériaux architecturés, notamment le coefficient de Poisson (Larsen *et al.*, 1997; Sigmund, 1995; Wang *et al.*, 2014; Andreassen *et al.*, 2014) ou encore les propriétés thermoélastiques (Sigmund et Torquato, 1996; Wang *et al.*, 2004). Les architectures qui y sont proposées ne sont toutefois pas réutilisées telles quelles, ce sont davantage des guides à la conception. La figure IV.11 présente le résultat d'un calcul d'optimisation de forme réalisé par Larsen *et al.* (1997) ainsi que l'exploitation de son concept réalisée par Wang *et al.* (2016), on retrouve ici le mécanisme issu de l'optimiseur réadapté au problème traité.

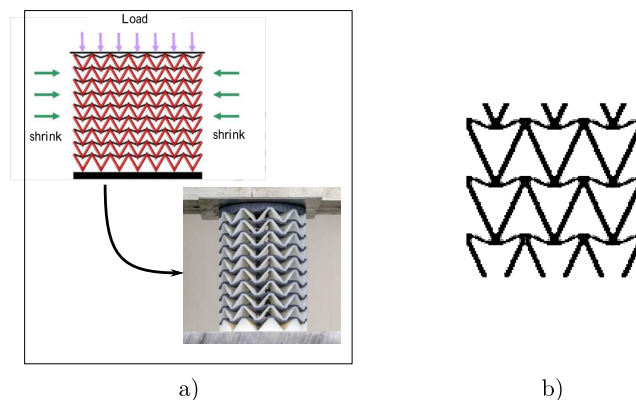


Figure IV.11 – a) Mécanisme de principe et application à une suspension faite d'un matériau architecturé auxétique (source : (Wang *et al.*, 2016)). b) Résultat de simulation pour la conception d'un matériau architecturé auxétique (source : (Larsen *et al.*, 1997)).

### Bilan

Nous avons introduit la définition d'un matériau architecturé donnée par la littérature. Nous avons ensuite proposé notre propre définition :

- C'est un matériau **hybride**, il est donc composé de plusieurs phases (le "matériau vide" est aussi une phase).
- Il est le siège d'une **cinématique de déformation contrôlée** par l'architecture.

Ashby et Bréchet (2003) définissent les facteurs influant sur les propriétés de ces matériaux à travers la formule "*A+B+shape+scale*", c'est-à-dire : le choix des phases constitutives, l'agencement de ces différentes phases et l'échelle du matériau.

Nous avons de plus isolé des facteurs plus spécifiques aux matériaux architecturés. Ces points doivent être considérés si nous souhaitons que nos matériaux architecturés atteignent des propriétés cibles :

- Avoir un grand contraste de propriétés physiques entre les différentes phases,
- Le choix judicieux de l'architecture, c'est à dire de la répartition spatiale des différentes phases constitutives,

Nous disposons maintenant d'une définition claire de ce qu'est un matériau architecturé. Nous avons par ailleurs défini les facteurs importants définissant les propriétés de ces matériaux. Nous allons maintenant présenter l'objet de l'étude de cette partie : l'obtention de propriétés extrêmes thermoélastiques.

## 2 Propriétés thermoélastiques extrêmes

Dans ce paragraphe nous présentons la problématique de notre étude : l'obtention de matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques extrêmes. Nous commençons par détailler ce qui motive cette étude ainsi que les solutions existantes de la littérature. Nous dressons après un état de l'art sur la recherche de matériaux architecturés à l'aide de méthodes d'optimisation de domaine.

Avant de débiter nous rappelons les équations de la thermoélasticité linéarisée et nous présentons les notations correspondantes.

### Rappel sur les équations de la thermoélasticité

Le comportement thermoélastique d'un matériau est caractérisé par les équations d'état suivantes (c.f. figure IV.12 pour illustration)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\overset{\equiv}{\bar{C}}\bar{\epsilon}(\bar{u}) - \bar{\alpha}\Delta T) & = \bar{f} \quad \bar{x} \in \Omega \\ \overset{\equiv}{\bar{C}}\bar{\epsilon}(\bar{u}) \cdot \bar{n} & = 0 \quad \bar{x} \in \Gamma \\ \overset{\equiv}{\bar{C}}\bar{\epsilon}(\bar{u}) \cdot \bar{n} & = \bar{g} \quad \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{u} & = 0 \quad \bar{x} \in \Gamma_D, \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

avec :

- $\bar{u}$  Le champ de déplacement, d'un point de l'espace,
- $\bar{\epsilon}(\bar{u})$  l'opérateur des déformations linéarisées :  $\bar{\epsilon}(\bar{u}) = (\nabla\bar{u} + \nabla\bar{u}^T)/2$ ,
- $\overset{\equiv}{\bar{C}}$  le tenseur des modules élastiques du matériau, d'ordre 4,
- $\bar{\alpha}$  le tenseur de dilatation thermique, d'ordre 2, qui représente la déformation subie par la matière lors d'une élévation uniforme de température de 1 Kelvin. Les composantes de ce tenseur sont données par unité de température.
- $\bar{f}$  les forces volumiques dans  $\Omega$ ,
- $\bar{g}$  les forces surfaciques appliquées sur le bord de Neumann  $\Gamma_N$ ,
- $\Gamma_D$  le bord où le déplacement est fixé, aussi appelé bord de Dirichlet,
- $\Gamma$  le bord libre, que l'on note aussi  $\partial\Omega \setminus \Gamma_N \setminus \Gamma_D$ ,
- $\bar{n}$  la normale sortante le long du bord  $\partial\Omega$ .

On note aussi  $\bar{A}$  le tenseur des contraintes thermiques, qui s'exprime  $\bar{A} = -\overset{\equiv}{\bar{C}}\bar{\alpha}\Delta T$ .

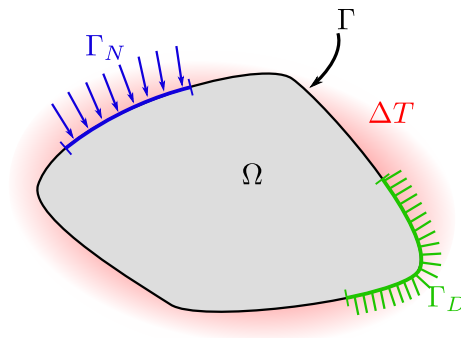


Figure IV.12 – Illustration des domaines et bords utiles pour la définition du problème de thermoélasticité.

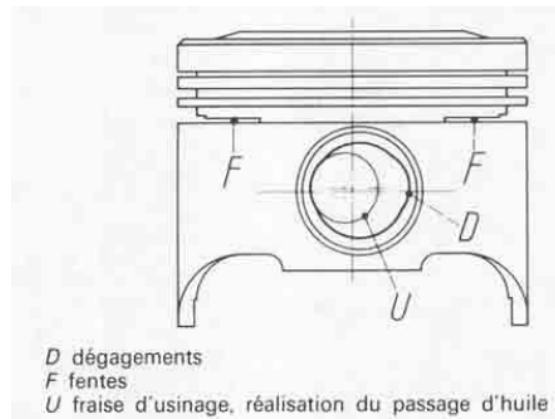
## 2.1 Contexte et motivations

### Implications pratiques

La dilatation thermique des matériaux est un problème connu qu'il est important de considérer pour tous systèmes soumis à des variations de température. La figure IV.13 présente un joint de dilatation sur un pont, permettant d'éviter la ruine du tablier causée par les variations saisonnières de température; elle présente aussi le cas d'un piston dans sa chemise, lors de l'échauffement du moteur, une dilatation trop importante du piston conduirait à une annulation du jeu entre le piston et la chemise, entraînant un blocage, puis une rupture (Brun, 1983).



a)



b)

Figure IV.13 – a) Exemple d'un joint de dilatation thermique sur une chaussée. source : Wikipédia. b) Exemple d'un piston de moteur, la fente  $F$  a été ajoutée au design pour limiter la dilatation thermique de la jupe du piston. source : (Brun, 1983).

Les deux exemples précédents montrent la nécessité de connaître et même de contrôler la dilatation thermique des structures, cela afin d'en garantir la résistance et la durée de vie. Pour cela deux options existent :

- Adapter la conception : comme pour les ponts, introduire des joints de dilatation thermique. De la même manière, la fonction de la fente  $F$  de la figure IV.13 b) est de contrôler la dilatation thermique (Brun, 1983). L'adaptation de la conception est cependant accompagnée d'autres difficultés techniques.
- Utiliser des matériaux ayant une dilatation thermique contrôlée.

La première option est d'intervenir durant le processus de conception, elle implique des aménagements qui peuvent ne pas être compatibles avec les exigences de performances, ou même



être contradictoires avec d'autres contraintes de conception.

Nous nous intéressons maintenant à la seconde option, c'est-à-dire la sélection d'un matériau dont l'expansion thermique doit être contrôlée. La figure IV.14 présente la corrélation entre un indicateur de propriétés élastiques (le module de Young) et la dilatation thermique, pour des matériaux connus. Nous constatons une corrélation : le coefficient de dilatation tend à croître quand le module de Young diminue. Une zone d'intérêt (bulle grise) est marquée sur cette figure, elle correspond à des matériaux ayant une rigidité importante et une faible dilatation thermique, ce qui répond au besoin énoncé précédemment.

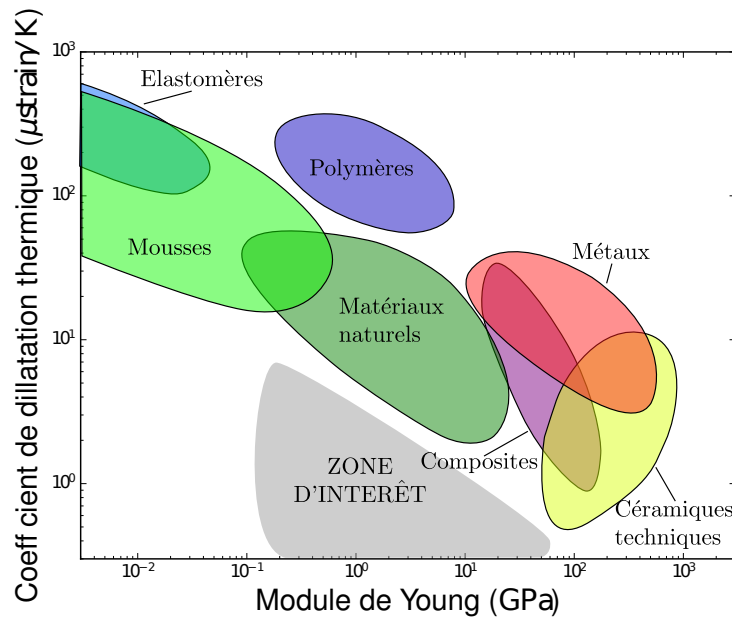


Figure IV.14 – Carte d'Ashby présentant la corrélation entre coefficient de dilatation thermique (en ordonnée) et module de Young (en abscisse) pour l'ensemble des matériaux connus. La zone d'intérêt (en gris) correspond à une dilatation thermique très faible et une rigidité importante.

Nous allons maintenant introduire quelques solutions courante pour fabriquer des matériaux ayant une faible dilatation thermique.

### Alliages à dilatation thermique faible

La première solution est de modifier la chimie et la microstructure afin d'obtenir des matériaux ayant une dilatation thermique proche de zéro. Un exemple très utilisé industriellement est l'Invar, qui est un alliage Fer-Nickel présentant une dilatation thermique très faible en comparaison aux alliages métalliques courant (Roy *et al.*, 1989).

Il faut cependant noter que la plage de stabilité du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température de tels alliages peut être très variable. Dans le cas des Invars la valeur de dilatation thermique extrêmement faible n'est valable que sur une plage de quelques dizaines de degrés (Roy *et al.*, 1989).

Gepreel (2011) propose une autre famille d'alliage à base Titane ayant une dilatation thermique contrôlée, ces nuances nécessitent cependant plusieurs traitements thermomécaniques afin d'obtenir les propriétés escomptées.

De manière générale les propriétés thermoélastiques particulières de ces alliages sont la conséquence de phénomènes physiques complexes à l'échelle de la microstructure (Gepreel, 2011).

## Composites

Il existe quelques matériaux qui du fait de leur chimie et microstructure présentent des dilata-tions thermiques nulles, voire fortement négatives (Roy *et al.*, 1989). Ce sont principalement des céramiques telles que la Beta-Eucryptite, elles sont bien souvent inutilisables en tant que matériau de structure du fait de leur fragilité. Cependant, utilisées en tant qu'inclusion dans un composite, ces céramiques permettent de constituer des hybrides à dilatation thermique nulle (Takenaka, 2012). Cette solution soulève cependant plusieurs problèmes liés aux concentrations de contraintes causées par les inclusions (Takenaka, 2012).

## Matériaux architecturés

Le potentiel des matériaux architecturés a été présenté dans le chapitre IV. En choisissant judicieusement leurs architectures il semble possible d'en faire des matériaux très stables ther-miquement (Lakes, 1996; Sigmund et Torquato, 1996; Wang *et al.*, 2004; Jefferson *et al.*, 2009). Dans la suite de ce chapitre, nous proposons d'étudier le potentiel des matériaux architecturés pour répondre à la problématique donnée, et ainsi produire des matériaux remplissant la zone d'intérêt de la carte d'Ashby de la figure IV.14.

## 2.2 Matériau architecturé et contrôle de la dilatation thermique

### Définition des propriétés extrêmes

Nous souhaitons savoir si les matériaux architecturés ont la capacité de remplir la zone d'in-térêt décrite dans le paragraphe précédent, qui est désignée sur la figure IV.14. Nous avons présenté comment Ashby (2013) encadre les propriétés atteignables par un matériau hybride, nous introduisons maintenant une définition de bornes pour les propriétés thermoélastiques des matériaux hybrides issue de la littérature (Gibiansky et Torquato, 1997), cela permet de :

- savoir si un choix de matériaux de base peut atteindre les propriétés cibles de notre problème (la "zone d'intérêt" de la figure IV.14).
- juger si le matériau architecturé présente ou non des **propriétés extrêmes** approchant la borne théorique.

Gibiansky et Torquato (1997) établissent des bornes des propriétés thermoélastiques des composites isotropes multi-phasés. Elles sont définies dans l'espace  $(\kappa, \alpha)$ , avec  $\kappa$  le module de compressibilité du matériau (MPa) ainsi que  $\alpha$  son coefficient de dilatation thermique ( $K^{-1}$ ). La figure IV.15 présente un exemple de ces bornes pour des valeurs arbitraires des propriétés des phases constitutives, elles définissent un domaine de l'espace inaccessible pour un matériau isotrope. Une étude approfondie est proposée en annexe B.

Un matériau architecturé peut être considéré comme un composite multi-phasé, et est donc concerné par ces bornes théoriques. On appelle propriétés extrêmes thermoélastiques les combi-naisons de valeurs  $(\kappa, \alpha)$  localisées à proximité de la limite entre domaine admissible et domaine interdit (trait plein rouge) de la figure IV.15.

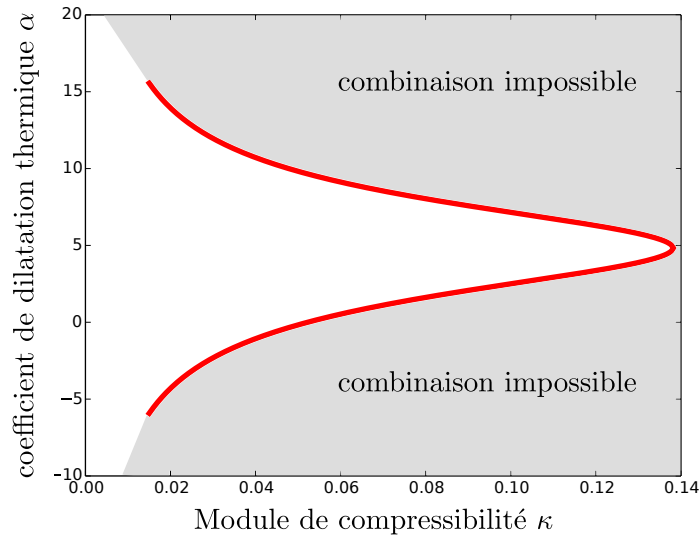


Figure IV.15 – Bornes de Gibiansky et Torquato (1997) pour un composite phase1-phase2-void isotrope aux propriétés thermoélastiques et fractions volumiques données. La courbe rouge indique la limite théorique qu'un tel composite peut atteindre, la zone grisée représente le domaine interdit.

### Un matériau architecturé exemple

Nous reportons ces bornes sur une carte d'Ashby afin d'évaluer le potentiel de nos matériaux architecturés. La figure IV.16 présente la carte d'Ashby pour l'espace module de compressibilité - dilatation thermique, on repère la zone d'intérêt (en gris). La figure IV.17 présente quant à elle les mêmes bornes, avec l'ajout d'une zone qui correspond aux bornes de Gibiansky-Torquato pour le cas d'un matériau hybride dont les propriétés sont rassemblées dans le tableau IV.1. Nous constatons sur la figure IV.17 la superposition de la zone d'intérêt et de l'espace des propriétés admissibles défini par les bornes de Gibiansky-Torquato. Cela implique qu'avec un choix judicieux d'architecture, un matériau architecturé Invar40%-Nickel10%-vide50% pourra atteindre la zone d'intérêt.

matériau	$E$	$\nu$	fraction volumique
Invar	150	0.31	0.4
Nickel	200	0.31	0.1
Vide	0.34	0.31	0.5

Table IV.1 – Propriétés physiques et proportions constituant le matériau hybride.

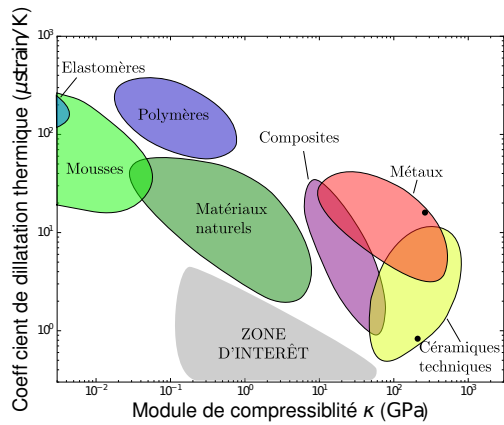


Figure IV.16 – Exemple de carte d’Ashby présentant les matériaux connus dans l’espace module de compressibilité -dilatation thermique

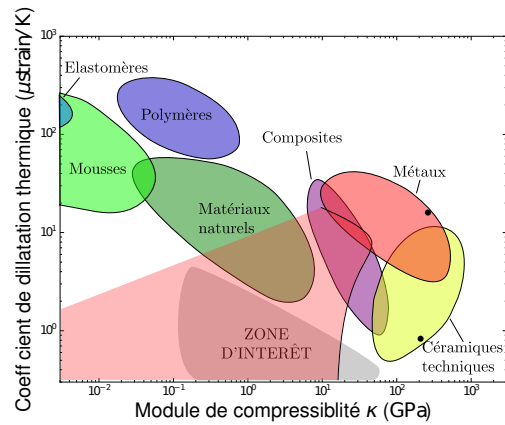


Figure IV.17 – Exemple de carte d’Ashby présentant les matériaux connus dans l’espace module de compressibilité -dilatation thermique, on a ajouté ici l’espace de propriétés qu’un matériau hybride Nickel-Invar-vide peut atteindre d’après les bornes de Gibiansky-Torquato.

### Bilan

Les bornes de Gibiansky-Torquato permettent d’évaluer quelles propriétés limites que nos matériaux architecturés pourront atteindre, elles définissent ainsi des propriétés que nous qualifions **extrêmes**. Après avoir calculé ces bornes pour un composite constitué de matériaux réels, nous avons constaté qu’il est possible d’atteindre la zone d’intérêt que nous venons de définir avec un matériau architecturé judicieusement construit (cf. figure IV.17). Nous allons maintenant présenter différents résultats de la littérature.

## 2.3 Résultats de la littérature et interprétation

### Utilisation de méthodes d’optimisation de domaine

Plusieurs auteurs ont travaillé sur l’optimisation des propriétés thermoélastiques des matériaux architecturés. [Sigmund et Torquato \(1996\)](#) utilisent la méthode SIMP pour proposer des architectures aux propriétés extrêmes, atteignant les bornes de [Gibiansky et Torquato \(1997\)](#). Plus tard, [Wang et al. \(2004\)](#) propose lui aussi des architectures ayant des dilatations thermiques nulles ou négatives, cette fois en utilisant la méthode des levelsets. La figure IV.18 présente quelques résultats de ces deux auteurs.

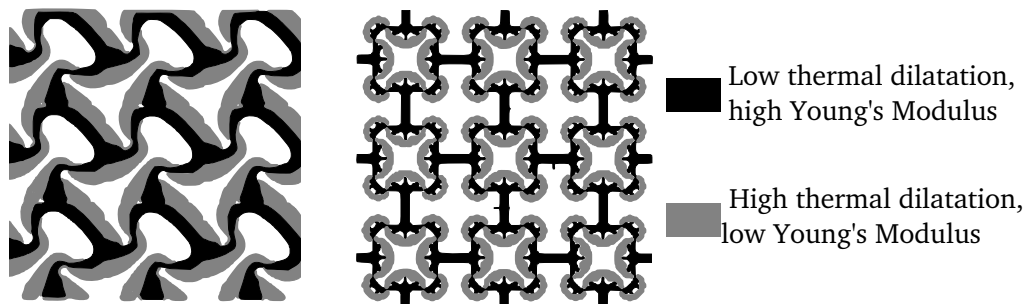


Figure IV.18 – Exemple d’architectures proposées par [Wang et al. \(2004\)](#) (à gauche) et [Sigmund et Torquato \(1996\)](#) (à droite).

Ces architectures présentent des comportements de mécanismes : nous observons comment la phase grise, qui a une dilatation thermique plus importante, vient incurver la phase noire, induisant des cinématiques de flexion au sein des architectures. La figure IV.19 présente des simplifications des architectures proposées par Wang *et al.* (2004) et Sigmund et Torquato (1996), des zones similaires à des bilames apparaissent.

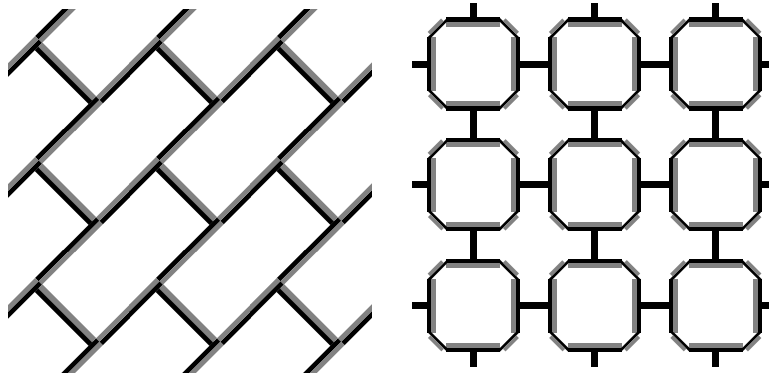


Figure IV.19 – Simplification des architectures de la figure IV.18, l'architecture Wang *et al.* (2004) (à gauche) et Sigmund et Torquato (1996) (à droite).

Les méthodes proposées par ces deux auteurs présentent plusieurs avantages :

- La grande liberté des méthodes d'optimisation de domaine permet d'obtenir des formes complexes qu'il aurait été difficile de proposer en se basant juste sur l'intuition.
- Dans le cas de Sigmund et Torquato (1996), les formes proposées atteignent les bornes de Gibiansky et Torquato (1997).
- La diversité des formes obtenues permet d'appréhender le problème et de mieux comprendre les mécanismes de contrôle de la dilatation thermique des matériaux architecturés. On peut déduire de ces résultats des formes simplifiées.

Ces méthodes comportent cependant des défauts :

- La complexité des formes finales est aussi un problème, car elle rend les matériaux très difficilement fabricables !
- Le problème considéré ici est complexe du point de vue de l'optimisation de domaine, il nécessite un ajustement des simulations et un grand nombre de pas de calculs, ce qui peut le rendre très coûteux en temps (Sigmund et Torquato, 1996).

### Exploitation des résultats

Ces structures sont optimisées, mais elles ne sont probablement pas fabricables directement. On peut cependant s'inspirer des résultats d'optimisation pour définir des formes simplifiées. La figure IV.20 rassemble une série de solutions proposées par différents auteurs, vraisemblablement inspirées par Sigmund et Torquato (1996).

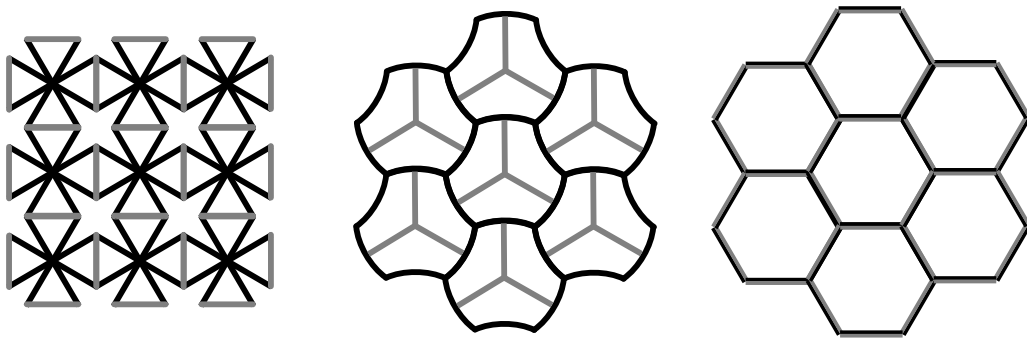


Figure IV.20 – Architectures 2D simplifiées proposées par *Wei et al. (2016)*; *Jefferson et al. (2009)*; *Lakes (1996)*, les deux premières utilisent des mécanismes de flexion alors que la dernière utilise un mécanisme de type bilame.

### Interprétation des résultats

Ces résultats ont le point commun d'utiliser des mécanismes bien défini pour contrôler la dilatation thermique, on peut d'ailleurs les synthétiser avec deux concepts illustrés par la figure IV.21. Les mécanismes sont composés de deux phases : une noire, rigide et se dilatant peu, et une grise peu rigide et se dilatant fortement.

- Le premier mécanisme place la structure en flexion, les dilatations thermiques des phases grises et noires agissent perpendiculairement l'une à l'autre.
- À l'inverse le second mécanisme utilise une sorte de bilame.

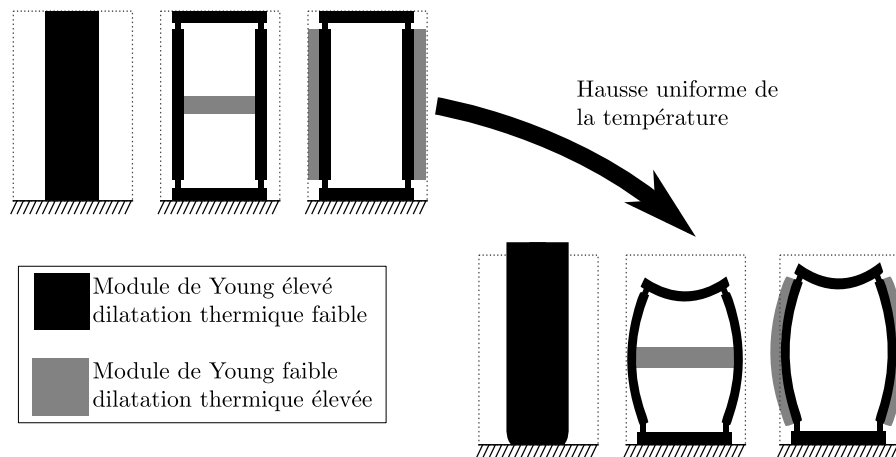


Figure IV.21 – Exemple de mécanismes permettant le contrôle de la dilatation thermique d'une structure, ici la dilatation verticale uniquement.

### Bilan

En se basant sur les équations de la thermoélasticité, les enjeux du contrôle de la dilatation thermique d'un matériau ont été exposés à travers plusieurs exemples. Plusieurs solutions techniques ont été proposées pour obtenir le contrôle de ces dilatations, du simple alliage au matériau architecturé. Il a ensuite été proposé d'utiliser des matériaux architecturés afin de contrôler la dilatation thermique. De tels matériaux peuvent développer des propriétés extrêmes, dont une définition pour les propriétés thermoélastiques a été présentée. Enfin, plusieurs exemples de résultats de la littérature ont été présentés, de ces résultats, les mécanismes élémentaires du contrôle de la dilatation thermique ont été extraits.

Les solutions proposées par plusieurs auteurs ont été considérées, ces propositions se basent sur des mécanismes de flexion locaux. Elles permettent de contrôler la dilatation thermique d'un matériau architecturé.

Cependant, aucun de ces auteurs ne s'est intéressé à la gestion des interfaces graduées dans les calculs d'optimisation, sujet que nous abordons dans le paragraphe suivant.

### 3 Prise en compte des interfaces graduées

Les concepts de matériaux architecturés proposés par Lakes (1996); Sigmund et Torquato (1996); Wang *et al.* (2004) et Jefferson *et al.* (2009) ont tous pour point commun de comporter au moins deux phases solides ayant des propriétés thermomécaniques distinctes. L'annexe B permet d'ailleurs de mettre en évidence que l'utilisation d'au moins deux phases solides ayant des coefficients de dilatation différents est nécessaire pour permettre le contrôle de la dilatation thermique effective d'un matériau hybride.

Ces phases doivent interagir mécaniquement entre elles, ce qui implique l'existence de surfaces les reliant l'une à l'autre : des interfaces. La figure IV.22 illustre leur présence avec un des mécanismes de la figure IV.21 .

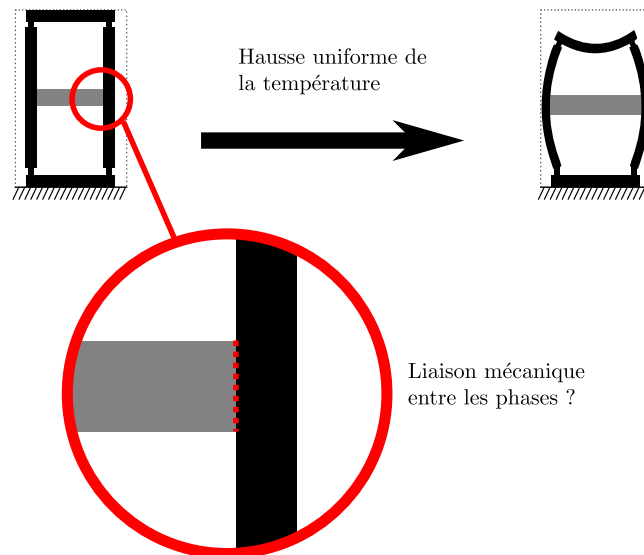


Figure IV.22 – Exemple du mécanisme à flexion présenté précédemment, la présence de deux phases aux coefficients de dilatation thermique distincts est nécessaire au contrôle de la dilatation de la structure. Les deux phases sont reliées l'une à l'autre, ce qui implique l'existence d'une interface.

Les auteurs cités plus avant ont tous fait l'hypothèse que ces interfaces sont "parfaites", ce qui se traduit par une transition abrupte des propriétés physiques à leur traversée telle que représentée sur la courbe gauche de la figure IV.23.

Cependant une interface réelle peut s'avérer plus complexe, et les transitions de propriétés plus graduelles et potentiellement non-monotone, tel que décrit par la courbe droite de la figure IV.23.

Nous proposons d'abord d'établir une rapide classification des différents types d'interfaces, puis nous détaillons quelques cas réels les mettant en jeu. Enfin nous présentons l'influence potentielle des différents types d'interface sur l'architecture des matériaux architecturés à travers un cas d'étude.

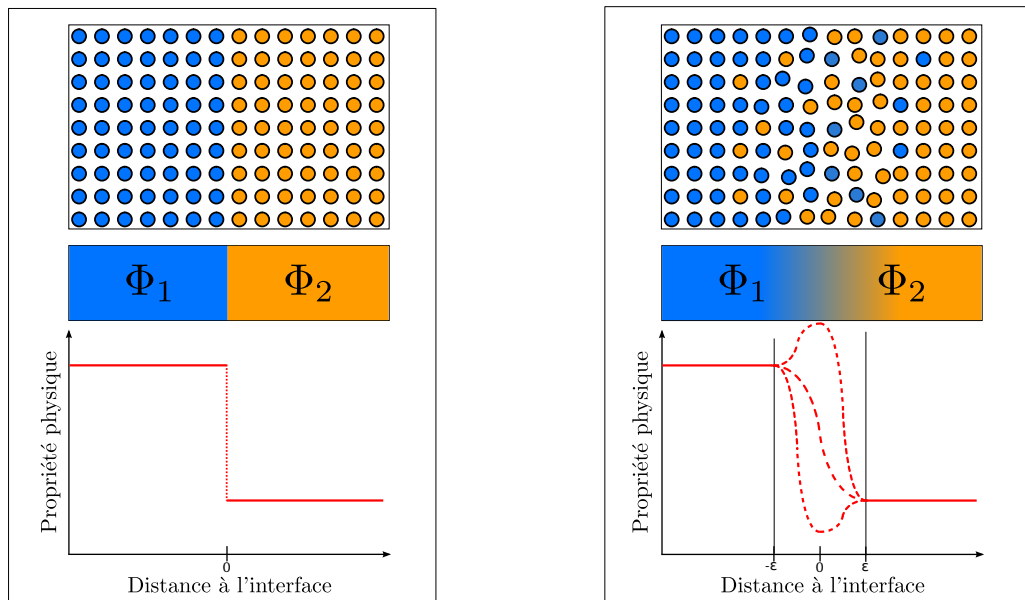


Figure IV.23 – Propriété physique à la transition d’une interface entre deux phases : à gauche, le cas simplifié supposant une transition nette des propriétés mécanique, avec une discontinuité à l’interface. À droite un cas plus proche de la réalité, ici la transition des propriétés physiques est à l’image de la transition à l’échelle atomique : continue à la traversée de l’interface.

### 3.1 Classification et description des interfaces

#### Interface et interphase

Une interface est une surface séparant deux domaines aux propriétés distinctes, elle délimite clairement les domaines respectifs de deux phases en contact. La réalité est cependant bien plus complexe : la transition entre deux phases n’est pas abrupte. C’est une zone de désordre atomique et de composition chimique variable (voir figure IV.23). De ce fait, la transition des propriétés physique à travers l’interface est continue dans une petite épaisseur que nous noterons  $2\epsilon$ , on parle alors d’**interphase**, ou d’**interface graduée**.

Cette transition  $2\epsilon$  est souvent négligée du fait de sa très faible épaisseur comparée aux dimensions des systèmes considérés, elle peut cependant avoir une influence sur les propriétés macroscopiques. Il est aussi possible que l’épaisseur de transition ne soit pas négligeable vis-à-vis des dimensions de la pièce, on parle alors de structure à gradient de propriétés. La notion d’interface n’est ici plus adaptée pour décrire la transition entre les deux phases.

La figure IV.24 rassemble un exemple pour chacun des cas cités précédemment. On y retrouve :

- Les **interfaces abruptes**, ce sont les interfaces dites "parfaites", les deux phases sont délimitées par une surface et la transition des propriétés physiques est abrupte.
- Les **interfaces graduées**, ici la transition des propriétés se fait dans une zone d’épaisseur  $2\epsilon$  non nulle, mais cette épaisseur reste faible devant les dimensions de la structure.
- Les structures à **gradient de propriétés**.



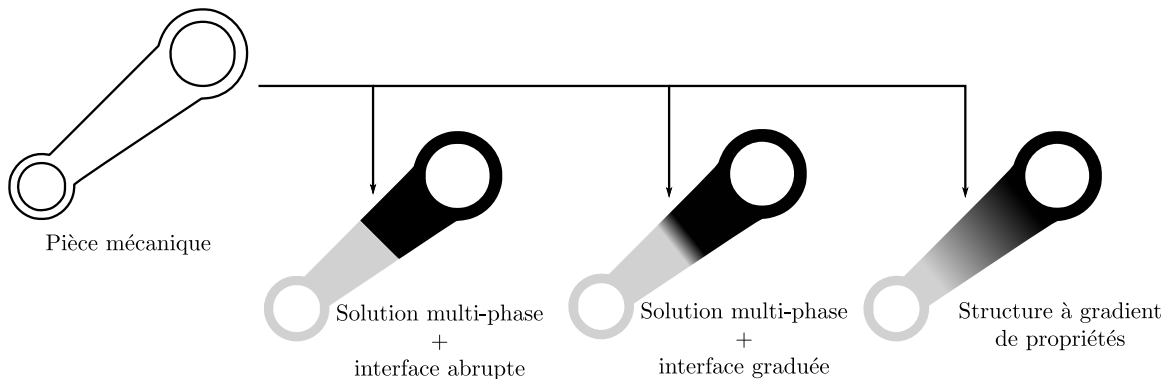


Figure IV.24 – Exemples d’une solution mécanique (à gauche) et de deux réalisations possibles.

### Interface graduée et variation des propriétés

Nous nous intéressons maintenant à la transition des propriétés physiques à la traversée d’une interface graduée. Rien n’indique que la transition des propriétés physiques entre deux phases est nécessairement monotone, plusieurs auteurs rapportent d’ailleurs la mise en évidence de transition non monotone.

Par exemple, [Creton \*et al.\* \(2001\)](#) indique qu’une interface entre deux polymères peut être renforcée par l’enchevêtrement des macromolécules. [Kieback \*et al.\* \(2003\)](#) indiquent aussi l’existence de variations non monotone de la dureté à la traversée d’une interphase entre deux phases métalliques (voir figure IV.25).

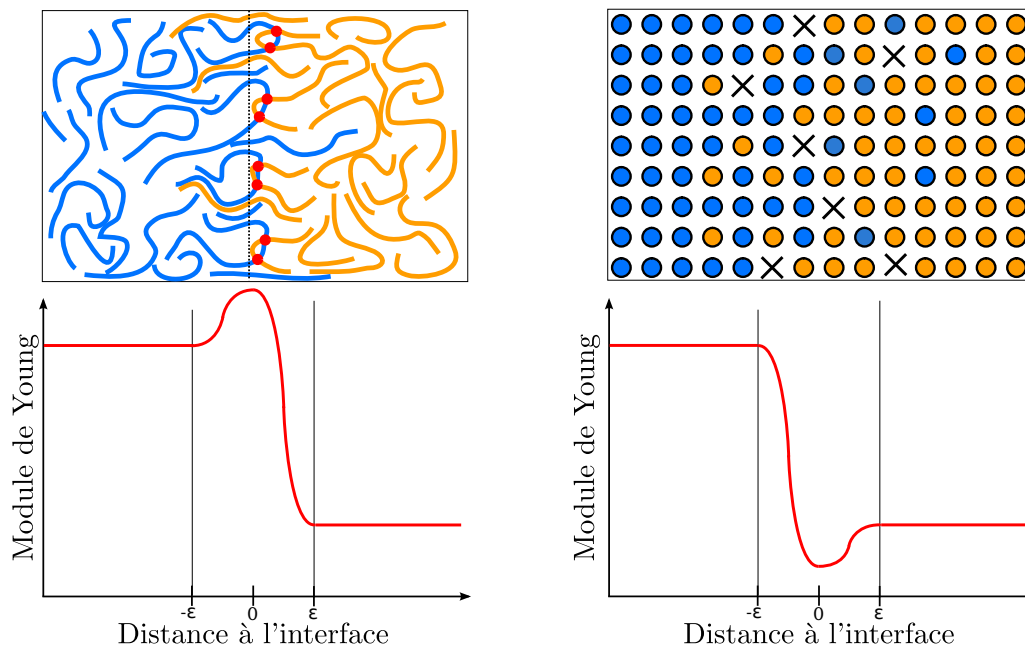


Figure IV.25 – Exemple de variation non monotone de propriétés physiques à la traversée d’une interface. À gauche l’exemple de l’enchevêtrement de chaîne donné par [Creton \*et al.\* \(2001\)](#), à droite un exemple de perte de module de Young induit par une porosité accrue à l’interface.

Nous avons établi qu’il existe des interfaces à travers lesquelles la variation des propriétés physiques est non monotone, nous allons maintenant replacer cette information dans le contexte de notre étude des propriétés thermoélastiques effectives des matériaux architecturés.

### 3.2 Deux visions différentes des interfaces graduées

#### L'interface graduée comme effet collatéral de la fabrication

Lors de la fabrication d'une pièce comportant plusieurs matériaux la formation d'interfaces comportant une variation progressive de la composition chimique est difficilement évitable du fait des phénomènes de diffusion d'espèces chimiques. De la même façon, une liaison parfaite entre deux phases est en pratique difficile à obtenir.

On peut donc envisager les interfaces graduées comme étant une conséquence inévitable de la fabrication. Dans ce contexte, leur présence n'est pas souhaitée et est juste un effet collatéral.

#### L'interface graduée comme un moyen d'amélioration

On trouve dans la littérature plusieurs exemples d'applications des matériaux à gradient de propriétés, la figure IV.26 montre par exemple en quoi le fait de produire volontairement une interface graduée au sein d'une pièce multi-phasée peut grandement améliorer sa résistance au cyclage thermique. Dans ce cas, les interfaces graduées permettent de réduire significativement les concentrations de contraintes. Kumar (2009) propose aussi une étude sur l'amélioration de la durée de vie d'un joint adhésif par introduction de zone à gradient de module de Young.

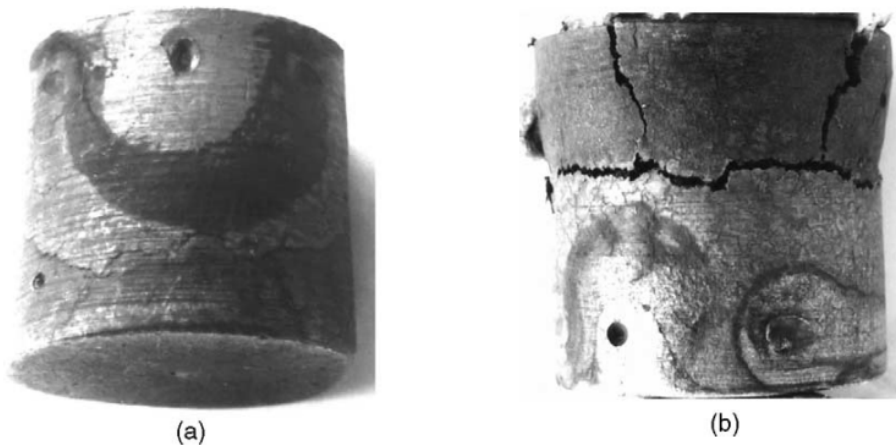


Figure IV.26 – Pièce mécanique multi-phasée (A356/Duralcan) après 700 cycles thermiques : a) Avec interface graduées b) Avec interface nette. source : (Kieback *et al.*, 2003)

### 3.3 Interfaces graduées et propriétés des matériaux architecturés

Que l'on considère les interfaces graduées comme un défaut de fabrication ou que l'on souhaite les créer volontairement, il est nécessaire d'évaluer leur influence sur le problème traité. Dans certains cas, ces interfaces sont négligeables, il n'est donc pas pertinent de les prendre en compte. On va maintenant tenter de montrer que la prise en compte des interfaces graduées pour le design de matériaux architecturés thermoélastiques est pertinente à travers un exemple.

#### Effet des interfaces graduées sur les propriétés macroscopiques et design optimaux

Comme cela a été présenté au début de ce paragraphe, parmi les auteurs s'étant intéressés au design de matériaux architecturés ayant des propriétés thermoélastiques contrôlées, aucun n'a pris en compte l'effet des interfaces graduées. De leurs études ont découlés une série de résultats, d'architectures optimales, pour des matériaux architecturés. Cependant si ces matériaux

venaient à être fabriquées, elles présenteraient probablement des interfaces que l'on pourrait qualifier de graduées.

Du fait de la présence inévitable de ces interfaces graduées, il apparait que le modèle utilisé pour l'optimisation ne décrit pas exactement la réalité physique du problème, et par conséquent que la forme optimisée ainsi que la performance obtenue ne sont potentiellement par pertinentes. En se basant sur l'exemple de l'optimisation de la courbure d'un bilame, Nous allons tenter de montrer l'influence des interfaces graduées sur l'optimisation de forme des matériaux architecturés.

### Exemple du bilame, cas d'étude

On se place dans le cas d'un bilame infini, d'épaisseur unitaire, composé de deux matériaux. La jonction entre les deux matériaux est réalisée à la hauteur  $h$ . On suppose une cinématique simple pour le bilame : courbure autour d'un unique centre (cf. figure IV.27). On choisit le champ de déplacement comme suit :

$$u_x = (y - y_{nf})\theta \quad (\text{IV.2})$$

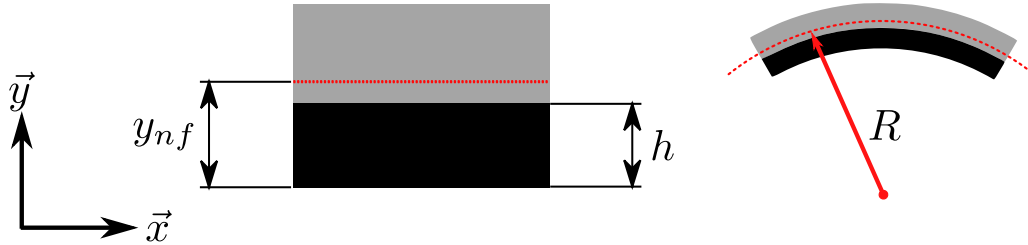


Figure IV.27 – Définition du problème du bilame

Ce qui donne un champ de déformation tel que :

$$\epsilon_{xx}^{tot} = \epsilon_{xx}^{el} + \epsilon_{xx}^{th} = \frac{1}{R}(y - y_{nf}), \quad (\text{IV.3})$$

avec

- $\epsilon_{xx}^{tot}$  le champ de déformation total
- $\epsilon_{xx}^{el}$  la partie élastique de la déformation
- $\epsilon_{xx}^{th}$  la partie thermique de la déformation, induite par la différence de température.
- $R$  le rayon de courbure du bilame
- $y_{nf}$  la position de la fibre neutre du bilame

Nous soustrayons la déformation thermique à la déformation totale afin d'établir l'expression de la déformation élastique, ce qui donne

$$\epsilon_{xx}^{el} = \frac{1}{R}(y - y_{nf}) - \alpha(y)\Delta T, \quad (\text{IV.4})$$

avec  $\alpha(y)$  le coefficient de dilatation thermique, fonction de la hauteur  $y$ .

On écrit ensuite l'équilibre statique des forces et des moments sur une section du bilame :

$$\begin{cases} \int_{y=0}^{y=1} E(y)\epsilon_{xx}^{el} dy = 0 \\ \int_{y=0}^{y=1} y \times E(y)\epsilon_{xx}^{el} dy = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

avec  $E(y)$  le module de Young, fonction de la hauteur  $y$ .

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les expressions de la hauteur de la fibre neutre  $y_{nf}$  ainsi que du rayon de courbure du bilame  $\rho = 1/R$  en fonction de la position  $h$  de l'interface entre les deux matériaux du bilame.

On s'intéresse maintenant à la variation de la courbure en fonction de  $h$  pour deux choix de profils différents pour  $E(y)$  et  $\alpha(y)$  :

- Un bilame **sans** interface graduée, les propriétés  $E$  et  $\alpha$  sont définies par des fonctions constantes par morceaux.
- Un bilame **avec** interface graduée, les propriétés  $E$  et  $\alpha$  sont définies par des fonctions régulières et non monotone.

La figure IV.28 présente les deux profils de propriétés utilisés pour les deux bilames, les profils présentés sont centrés sur  $y = h$ , ils ont pour but de présenter comment le module de Young ainsi que le coefficient de dilatation thermique évoluent à la traversée de l'interface. Dans le cas du bilame sans interface graduée, la transition est abrupte, à l'inverse, elle est régulière et non-monotone dans le cas du bilame avec interface graduée.

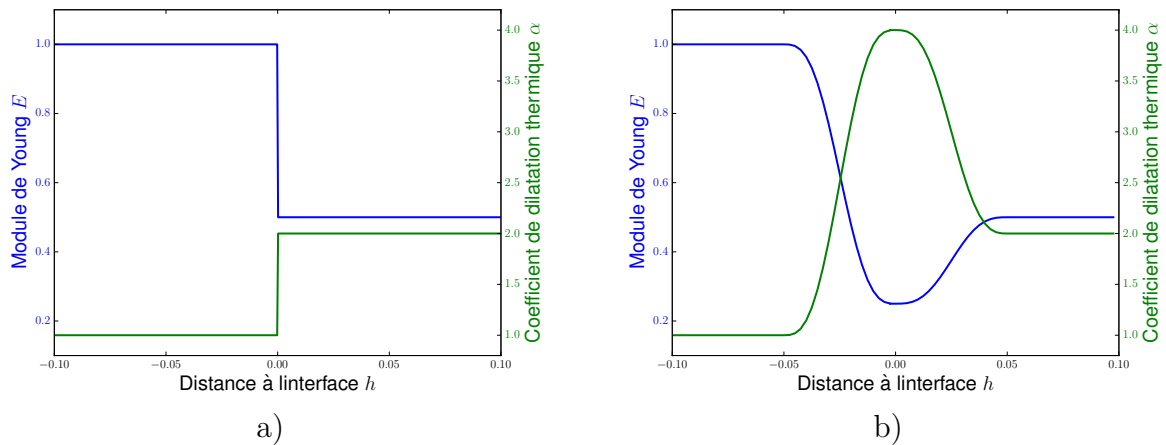


Figure IV.28 – Profils utilisés pour les propriétés des deux bilames. a) Bilame sans interface graduée, on a une transition abrupte des propriétés à la traversée de l'interface  $y = h$ . b) Bilame avec interface graduée, la transition des propriétés est régulière et non monotone quand on traverse l'interface  $y = h$ .

En utilisant ces profils ainsi que les solutions analytiques du système d'équations (IV.5), on calcule la courbure de nos deux bilames en fonction de  $h$ . La figure IV.29 présente le résultat, on constate deux faits marquant :

- La valeur maximale de courbure est différente pour les deux bilames
- La valeur de  $h$  maximisant la courbure est elle aussi différentes

Le premier point était attendu : il paraît logique que changer les propriétés ait un impact sur le comportement du bilame. Le second point est quant à lui plus intéressant, il souligne que l'ajout de l'interface graduée change le design optimal du bilame !

Ces résultats semblent valider l'hypothèse selon laquelle la présence de ces interfaces va non seulement modifier la performance des matériaux architecturés, mais probablement aussi leur formes optimales. C'est une information capitale, car elle met en évidence que les topologies proposées dans la littérature ne sont probablement pas optimale si on considère la présence inévitable d'interfaces graduées introduites lors de la fabrication.

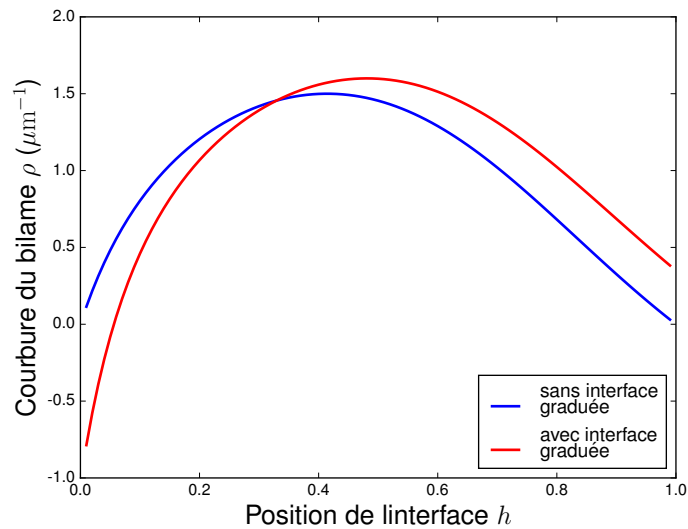


Figure IV.29 – Courbes  $\rho = f(h)$  pour deux bilames : un avec une interface nette et l'autre avec une interface graduée dont l'épaisseur représente 10% du bilame total.

On trouve cependant plusieurs articles abordant la question de la gestion des interfaces graduées, incluant ainsi la prise en compte d'une variation plus complexe des propriétés lors de la traversée d'une interface entre deux matériaux. [Vermaak \*et al.\* \(2013\)](#) proposent ainsi une étude de l'effet des propriétés des interfaces graduées sur les formes optimales. Plus récemment, [Clausen \*et al.\* \(2015\)](#) proposent eux aussi la prise en compte d'interfaces aux propriétés spécifiques dans le but de gérer les pièces comportant des revêtements.

## Bilan du chapitre IV

---

Dans ce chapitre nous avons introduit la notion de matériau architecturé à partir des travaux de Ashby et Bréchet (2003), nous avons par ailleurs apporté une définition plus restrictive, faisant de ces matériaux une sous classe des matériaux hybrides. Les facteurs influant sur leurs propriétés ont été énumérés : la composition des phases, leur configuration ainsi que l'échelle. Nous avons fourni plusieurs éléments justifiant de l'intérêt de l'étude portant sur des matériaux à la dilatation thermique contrôlée. À l'aide des travaux de Gibiansky et Torquato (1997) nous avons vérifié le potentiel des matériaux architecturés pour le traitement de cette thématique. L'optimisation des propriétés thermoélastiques des matériaux architecturés a déjà fait l'objet de plusieurs études d'optimisation, plusieurs architectures aux propriétés extrêmes ont notamment été proposées par Sigmund et Torquato (1997), et plusieurs autres architectures ont aussi été introduites par Wang *et al.* (2004). Toutes ces solutions sont cependant basées sur l'hypothèse que les différentes phases constitutives sont séparées par des surfaces marquant une transition abrupte des propriétés physiques. Dans un même temps, plusieurs études montrent que **la variation des propriétés physiques à la traversée de deux phases adjacentes n'est en pratique pas abrupte, voire non monotone** (Creton *et al.*, 2001; Kieback *et al.*, 2003). La gestion de ces interfaces graduées a de plus été traitée dans le cadre de l'optimisation de forme, comme présenté par Vermaak *et al.* (2013).

Un rapide calcul préliminaire sur un bilame a été mené afin de démontrer que la prise en compte des interfaces graduées a une **influence sur les performances autant que sur la forme optimale**, bien qu'aucune conclusion rigoureuse ne puisse être tirée de ce rapide calcul, un doute raisonnable sur l'effet des interfaces graduées est soulevé.

Nous allons maintenant définir tous les éléments nous permettant de réaliser des calculs d'optimisation des propriétés thermoélastiques effectives de matériaux architecturés.



# Chapitre V

## Définition du problème d'optimisation et calcul des quantités optimisables

---

1	Formulation complète du problème d'optimisation . . . . .	105
1.1	Définition des propriétés physiques à optimiser . . . . .	106
1.2	Formulations de la littérature . . . . .	108
1.3	Formulation retenue . . . . .	110
2	Modélisation et dérivation de forme des quantités optimisables . . . . .	112
2.1	Méthodes d'homogénéisation . . . . .	112
2.2	Dérivation des critères . . . . .	115
3	Prise en compte des aspects numériques . . . . .	116
3.1	Difficultés liées à la formulation . . . . .	116
3.2	Difficultés liées aux méthodes de programmation séquentielle . . . . .	119
3.3	Stratégies de simplification . . . . .	120
	Bilan du chapitre V . . . . .	122

---

### Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'aboutir à une formulation d'un problème d'optimisation de domaine pour l'optimisation des propriétés thermoélastiques effectives de matériaux architecturés. En particulier nous proposons une formulation permettant d'obtenir des matériaux architecturés aux propriétés **extrêmes** et **isotropes**, ayant une dilatation thermique contrôlée, cible. Le premier paragraphe de ce chapitre va permettre d'établir une formulation d'un problème d'optimisation ainsi que de dégager les critères importants. Par la suite, nous présentons comment cette formulation doit être modifiée pour être adaptée à notre méthode numérique de résolution, ainsi que plusieurs modifications facilitant la résolution.



## Introduction

La fin du précédent chapitre a permis de dégager une problématique abordable par optimisation topologique, il est maintenant nécessaire de construire notre "process" d'optimisation afin de pouvoir traiter ce problème ainsi défini. Comme présenté dans la partie A, un process d'optimisation est l'assemblage de plusieurs briques fondamentales :

- **Paramétrage** : La méthode des lignes de niveaux est retenue, ce choix a déjà été motivé dans la partie I.
- **Critères** : Plusieurs critères ont été énoncés dans la section 2, en particulier le module de Young  $E$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ .
- **Formulation** : Sur la base des critères définis, il faut maintenant formuler un problème d'optimisation.
- **Modèle** : Une fois la formulation obtenue, il faut trouver un moyen de calculer numériquement les critères ainsi que leurs gradients.

Plusieurs auteurs ont déjà considérés l'optimisation des propriétés thermoélastiques des matériaux architecturés à l'aide de différentes méthodes d'optimisation topologique (Sigmund et Torquato, 1996; Wang *et al.*, 2004; Michailidis, 2014). En se basant sur leurs travaux, nous allons maintenant définir notre formulation du problème d'optimisation.

# 1 Formulation complète du problème d'optimisation

Le chapitre IV a permis d'introduire la problématique d'optimisation des propriétés thermoélastiques des matériaux architecturés ainsi que de la motiver. Nous avons présenté l'intérêt de concevoir des matériaux à la fois très rigide et ayant une dilatation thermique la plus faible possible. Cette formulation reste cependant très floue, il faut maintenant se doter de critères optimisables, c'est-à-dire de grandeurs scalaires représentatives des propriétés que l'on souhaite obtenir.

En regardant la carte d'Ashby présenté sur la Figure V.1, deux critères apparaissent naturellement :

- le module de Young  $E$ , qui est le module élastique pour une traction uniaxiale.
- le coefficient de dilatation thermique volumique  $\alpha_V$  qui est une mesure possible de la dilatation thermique.

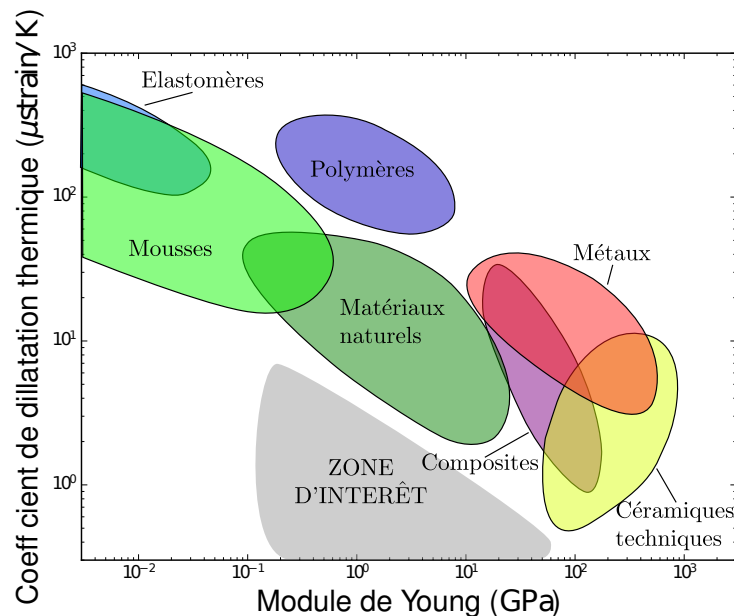


Figure V.1 – Carte d'Ashby présentant la corrélation entre coefficient de dilatation thermique (en ordonnée) et module de Young (en abscisse) pour l'ensemble des matériaux connus. La zone d'intérêt est indiquée en gris, elle correspond à une dilatation thermique très faible et une importante rigidité.

*Il existe cependant plusieurs mesures possibles tant pour la rigidité que pour la dilatation thermique.* En pratique, on utilise le module d'élasticité qui est le plus cohérent avec le problème que l'on souhaite traiter. Par exemple, le module de Young est un module d'élasticité pertinent dans le cas où la matière subit une traction uniaxiale. En revanche, le module de compressibilité  $\kappa$  est plus adapté dans le cas d'un chargement hydrostatique.

Ces modules d'élasticité représentent différents aspects du comportement d'un matériau, et peuvent tous être utilisés comme critère d'optimisation. Dans ce paragraphe nous allons détailler plusieurs descriptions pour les propriétés thermoélastiques. Nous étudierons ensuite comment plusieurs auteurs combinent ces mesures dans la formulation de leur problème d'optimisation (Wang *et al.*, 2004; Sigmund et Torquato, 1997; Michailidis, 2014). Enfin, une formulation sera proposée, basée sur les travaux de ces différents auteurs.

## 1.1 Définition des propriétés physiques à optimiser

### Description complète du comportement thermoélastique

La combinaison du tenseur d'élasticité  $\bar{\bar{C}}$  et du tenseur des dilatations thermiques  $\bar{\bar{\alpha}}$  (ou des contraintes thermique  $\bar{\bar{A}}$ ) permet de décrire complètement le comportement thermoélastique linéaire d'un matériau, on rappelle les expressions pour des problèmes 2D :

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2212} \\ \text{sym} & \cdot & C_{1212} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.1})$$

on utilise ici la notation de Voigt pour ces différents tenseurs.

Pour un matériau quelconque, sans symétrie particulière, seuls ces tenseurs permettent de décrire complètement le comportement du matériau. Il est possible d'utiliser directement les composantes de ces tenseurs en tant que critère d'optimisation.

Nous allons maintenant voir comment il est possible d'extraire les différents modules d'élasticité à partir du tenseur des modules élastiques.

**Remarque :** Nous traitons ici uniquement des cas 2D par souci de simplicité. Cependant la méthodologie exposée est directement transposable à des cas 3D.

### Modules d'élasticité spécifiques

En pratique on utilise des modules qui sont plus représentatifs de certaines sollicitations mécaniques, par exemple le module de Young  $E$  pour un essai de traction uniaxiale, le module de compressibilité  $K$  pour une compression hydrostatique ou encore le module de cisaillement  $G$  pour une sollicitation en cisaillement.

On rappelle ici comment on peut extraire ces différents modules à partir du tenseur d'élasticité, on pourra par la suite les utiliser comme critère dans notre process d'optimisation.

Le module de Young est le module de rigidité utilisé pour une sollicitation uniaxiale, il est défini comme

$$E_i = \frac{\sigma_{ii}}{\epsilon_{ii}}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.2})$$

avec  $\sigma_{ii}$  la composante  $ii$  de la contrainte et  $\epsilon_{ii}$  la composante  $ii$  de la déformation. En écrivant l'égalité  $\bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\sigma}}$ , nous obtenons un système d'équation qui s'écrit en 2D

$$\begin{cases} C_{1111}\epsilon_{11} + C_{1122}\epsilon_{22} + 2C_{1112}\epsilon_{12} = P \\ C_{1122}\epsilon_{11} + C_{2222}\epsilon_{22} + 2C_{2212}\epsilon_{12} = 0 \\ C_{1112}\epsilon_{11} + C_{2212}\epsilon_{22} + 2C_{1212}\epsilon_{12} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

La première équation du système nous permet d'écrire

$$E_i = \frac{C_{1111}\epsilon_{11} + C_{1122}\epsilon_{22} + 2C_{1112}\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}}, \quad (\text{V.4})$$

nous utilisons ensuite les deux autres équations pour exprimer  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{12}$  en fonction du tenseur des composantes  $C_{ijkl}$ . Les expressions obtenues étant linéaires, on peut supprimer  $\epsilon_{11}$  du numérateur et du dénominateur de l'équation (V.4), ce qui donne

$$\begin{aligned} E_1 &= C_{1111} - C_{1112} \frac{C_{1112}C_{2222} - C_{1122}C_{2212}}{C_{1212}C_{2222} - C_{2212}^2} + C_{1122} \frac{C_{1112}C_{2212} - C_{1122}C_{1212}}{C_{1212}C_{2222} - C_{2212}^2} \\ E_2 &= C_{2222} - C_{2212} \frac{C_{2212}C_{1111} - C_{1122}C_{1112}}{C_{1212}C_{1111} - C_{1112}^2} + C_{1122} \frac{C_{2212}C_{1112} - C_{1122}C_{1212}}{C_{1212}C_{1111} - C_{1112}^2} \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

On note  $\hat{E}$  la moyenne des  $E_i$ .

De la même façon, on peut définir le module de compressibilité comme étant

$$K = \frac{\text{tr}(\bar{\bar{\sigma}})}{\text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}})}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = P \times \bar{\bar{I}}d \quad (\text{V.6})$$

ce qui donne, en 2D contraintes planes

$$K = \frac{2(C_{1111}C_{1212}C_{2222} - C_{1111}C_{2212}^2 - C_{1112}^2C_{2222} + 2C_{1112}C_{1122}C_{2212} - C_{1122}^2C_{1212})}{C_{1111}C_{1212} - C_{1112}^2 + 2C_{1112}C_{2212} - 2C_{1122}C_{1212} + C_{1212}C_{2222} - C_{2212}^2}. \quad (\text{V.7})$$

On peut aussi définir le module de cisaillement  $G$  tel que

$$G = \frac{\sigma_{12}}{\epsilon_{12}}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{V.8})$$

ce qui donne en 2D contraintes planes

$$G = C_{1212} - C_{1112} \frac{C_{1112}C_{2222} - C_{1122}C_{2212}}{C_{1111}C_{2222} - C_{1122}^2} - C_{2212} \frac{C_{1111}C_{2212} - C_{1112}C_{1122}}{C_{1111}C_{2222} - C_{1122}^2} \quad (\text{V.9})$$

### Mesure de dilatation thermique

On peut définir plusieurs mesures de la dilatation thermique, on propose ici la dilatation thermique linéaire  $\alpha_L$  et la dilatation thermique volumique  $\alpha_V$ , telles que

$$\alpha_L = \frac{\text{tr}(\bar{\bar{\alpha}})}{d}, \quad \alpha_V = \text{tr}(\bar{\bar{\alpha}}), \quad (\text{V.10})$$

avec  $d$  le nombre de dimensions spatiales. Bien qu'ayant deux sens physiques différents, ces deux mesures sont identiques à un facteur prêt.

### Mesure de symétrie des propriétés

Un tenseur des modules élastiques quelconque est défini en 3D par 36 composantes indépendantes, elles sont toutes nécessaires pour définir entièrement le comportement élastique d'un matériau. Cependant il est rare que ces 36 composantes soient toutes indépendantes les unes des autres, la plupart des matériaux courants possèdent des "symétries" dans leurs tenseurs des modules élastiques. Cela se traduit par une réduction considérable du nombre de variables nécessaires pour décrire complètement le comportement élastique. La symétrie la plus importante et la plus courante est l'isotropie, dans ce cas le comportement est décrit à l'aide d'une combinaison de seulement deux variables. En 2D contraintes planes le tenseur des modules élastiques d'un matériau isotrope s'écrit

$$\bar{\bar{\bar{C}}}_{iso} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \text{sym} & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & 0 \\ \text{sym} & \cdot & \mu \end{bmatrix}, \quad (\text{V.11})$$

avec  $E$  le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $\lambda$  et  $\mu$  les modules de Lamé.

Durant le processus d'optimisation les propriétés effectives n'ont pas de raison particulière d'être ou de rester isotrope, **la symétrie du tenseur des propriétés effectives n'est pas naturellement contrôlée**. Nous pouvons cependant souhaiter obtenir des solutions comportant une symétrie mécanique particulière, notamment l'isotropie. Par exemple, [Sigmund et](#)

Torquato (1996) et Andreassen *et al.* (2014) forcent l'isotropie de leur designs finaux afin de comparer leurs propriétés avec des bornes théoriques définies uniquement pour des matériaux isotropes.

Nous définissons maintenant une mesure d'isotropie possible, pour cela nous proposons d'utiliser une projection isotrope d'un tenseur des modules élastiques quelconque, que nous écrivons

$$\bar{\bar{C}}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1111} + C_{2222}}{2} & C_{1122} & 0 \\ \cdot & \frac{C_{1111} + C_{2222}}{2} & 0 \\ \text{sym} & \cdot & \frac{C_{1111} + C_{2222} - C_{1122}}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.12})$$

L'erreur (ou écart) d'isotropie est définie comme

$$errC_{iso} = \frac{\sum_{i,j,k,l} (C_{ijkl} - C_{iso,ijkl})^2}{C_{1111}^2}. \quad (\text{V.13})$$

Il existe plusieurs possibilités pour définir une projection isotrope d'un tenseur  $\bar{\bar{C}}$ , et aussi plusieurs possibilités pour représenter l'écart entre ce tenseur projeté et le tenseur  $\bar{\bar{C}}$ . Ces différentes combinaisons de projection et de calcul d'écart constituent plusieurs mesures ont toutes en commun d'être strictement positive et d'être nulle quand le matériau est isotrope. De la même façon, on peut définir une projection isotrope du tenseur des dilatations thermiques, selon

$$\bar{\bar{\alpha}}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} & 0 \\ \cdot & \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{V.14})$$

et aussi l'erreur d'isotropie thermique comme l'écart entre  $\bar{\bar{\alpha}}$  et  $\bar{\bar{\alpha}}_{iso}$  :

$$err\alpha_{iso} = \frac{\sum_{i,j} (\alpha_{ij} - \alpha_{iso,ij})^2}{\alpha_{11}^2}. \quad (\text{V.15})$$

## 1.2 Formulations de la littérature

Dans cette partie, nous comparons les formulations du problème de trois auteurs pour l'optimisation des propriétés thermoélastiques de matériaux polyphasés.

L'ensemble des formulations introduites utilisent des contraintes sur les fractions volumiques  $V_i$  des phases  $\Phi_i$ , ainsi que des propriétés cibles qui seront notées par un super script *cible*.

### Optimisation directe des composantes des tenseurs

Wang *et al.* (2004) et Michailidis (2014) ont formulés leur problème d'optimisation en définissant des valeurs cibles pour certaines composantes des tenseurs des modules élastiques et des contraintes thermiques. Un exemple de formulation de Wang *et al.* (2004) est

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} & 10(C_{1111} - 0.05)^2 + 10(C_{2222} - 0.05)^2 + (\alpha_{11} - 0.1)^2 + (\alpha_{22} - 0.1)^2 \\ & C_{1212} \geq 0.05 \\ & V_1 = 0.2 \\ & V_2 = 0.24 \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Cet exemple se généralise en

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} \quad & \sum_{ijkl} \Lambda_{ijkl} (C_{ijkl} - C_{ijkl}^{cible})^2 + \sum_{ij} \Gamma_{ij} (A_{ij} - A_{ij}^{cible})^2 \\ & C_{1212} \geq C_{1212}^{min} \\ & V_1 = V_1^{cible} \\ & V_2 = V_2^{cible}. \end{aligned} \quad (V.17)$$

Avec  $\Lambda_{ijkl}$  et  $\Gamma_{ij}$  des coefficients de pondération. L'exposant  $.^{cible}$  représente les valeurs cibles des différentes composantes des tenseurs  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{A}}$ . L'objectif est une somme de carrés, il est donc positif. De plus, cette somme s'annule quand les  $C_{ijkl}$  sont égaux aux  $C_{ijkl}^{cible}$  et les  $A_{ij}$  égaux aux  $A_{ij}^{cible}$  respectivement. Cela implique que le minimum de la fonction objectif est atteint quand toutes les composantes des tenseurs sont égales aux valeurs cibles correspondantes.

Cette formulation permet en théorie la recherche d'un matériau atteignant les propriétés cibles définies au départ.

**Remarque :** On notera que si l'on souhaite obtenir un design isotrope, il faut choisir des tenseurs  $\bar{\bar{C}}^{cible}$  et  $\bar{\bar{A}}^{cible}$  respectant les conditions d'isotropies, ce qui peut s'avérer contraignant. Wang *et al.* (2004) propose d'optimiser les composantes du tenseur des contraintes thermiques  $\bar{\bar{A}}$  au lieu de contraindre directement le tenseur des dilatations thermiques  $\bar{\bar{\alpha}}$ . L'idée est que le fait de réduire la trace du tenseur des contraintes thermiques entraîne une diminution de la trace du tenseur des dilatations thermique. Cela semble en effet possible si on regarde la relation entre ces deux grandeurs :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\alpha}}.$$

Cependant nous constatons aussi qu'il est possible de réduire le tenseur des contraintes thermiques en réduisant certaines composantes du tenseur des modules élastiques, ce qui met en opposition forte l'augmentation de la rigidité et la baisse de la dilatation thermique. L'exemple le plus marquant du talon d'Achille de cette formulation est le cas d'un composite biphasé solide-vide, décrit dans l'annexe B. Pour ce type de composite, il est démontré dans l'annexe que la dilatation thermique est fixée et identique à celle de la phase solide. La dérivée de forme de n'importe quelle composante du tenseur des dilatations thermiques est donc nulle dans ce cas, mais pas celles des composantes du tenseur des contraintes thermiques, qui va tendre à supprimer de la matière.

L'expression non développée de la dérivée de forme donne

$$\bar{\bar{A}}'(\bar{\theta}) = \bar{\bar{C}}'(\bar{\theta})\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\alpha}}'(\bar{\theta}), \quad (V.18)$$

ce qui est suffisant pour montrer que dans le cas d'un composite solide+vide, les dérivées de forme des composantes du tenseur des contraintes thermiques sont non nulles bien que le terme  $\bar{\bar{C}}\bar{\bar{\alpha}}'(\bar{\theta})$  soit nul.

### Optimisation de modules spécifiques

Sigmund et Torquato (1997) proposent une formulation différente, basées sur l'utilisation de différents modules d'élasticité et de coefficients de dilatation thermique. On a par exemple

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} \quad & \alpha_V + A \times errC_{sq} + B \times errC_{iso} + C \times err\alpha_{iso} \\ & K \geq K_{min} \\ & V_1 = V_1^{cible} \\ & V_2 = V_2^{cible}, \end{aligned} \quad (V.19)$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  des coefficients de pondération ajustant l'erreur de symétrie cubique des propriétés mécaniques  $errC_{sq}$ , de symétrie isotrope mécanique  $errC_{iso}$  et de symétrie isotrope thermique  $err\alpha_{iso}$  respectivement. Ces mesures d'erreur de symétrie s'écrivent

$$errC_{sq} = \frac{(C_{1111} - C_{2222})^2}{(C_{1111} + C_{2222})^2}, \quad (V.20)$$

$$errC_{iso} = \frac{(C_{1111} + C_{2222} - 2(C_{1122} + 2C_{1212}))^2}{(C_{1111} + C_{2222})^2} + errC_{sq}, \quad (V.21)$$

$$err\alpha_{iso} = \frac{\alpha_{12}^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2}, \quad (V.22)$$

si ces mesures d'erreurs s'annulent, le matériau est isotrope mécaniquement et thermiquement. Nous avons noté ici que l'auteur a imposé des symétries à ses solutions par l'ajout d'un sous script  $.sym$  sur les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Cette formulation est plus libre que la précédente (V.17) car elle ne contraint que des relations particulières entre les composantes des tenseurs, au lieu de contraindre chaque composante indépendamment. Le point important de cette formulation est l'utilisation des erreurs d'isotropie comme pénalisation de la fonction objectif. Dans ce cas, il est nécessaire de choisir judicieusement la pondération  $A$ ,  $B$  et  $C$  des différents critères :

- Si une pondération est trop faible (par exemple  $\alpha_V \gg A \times errC_{sq}$ ), l'isotropie ne sera pas respectée car il sera beaucoup plus profitable de réduire grandement la dilatation thermique  $\alpha_V$  plutôt que de réduire l'erreur d'isotropie.
- Si une pondération est trop forte (par exemple  $\alpha_V \ll +A \times errC_{sq}$ ), la forme finale sera isotrope mais sa dilatation thermique n'atteindra pas les valeurs souhaitées.

L'auteur n'aborde pas dans son étude les valeurs utilisées pour les pondérations  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on peut cependant supposer que l'ajustement de ces paramètres a fait l'objet d'un plan d'expérience.

### 1.3 Formulation retenue

On choisit de retenir une formulation similaire à celle proposée par [Sigmund et Torquato \(1997\)](#) pour les raisons suivantes :

- Contraindre directement les grandeurs que l'on souhaite optimiser (module de Young  $E$ , module de compressibilité  $\kappa$ , ...) est le plus cohérent,
- Le fait de choisir directement ces grandeurs donne plus de liberté à l'algorithme d'optimisation, c'est-à-dire moins de restriction de l'espace des formes admissibles,
- Optimiser les grandeurs  $\kappa$  et  $\alpha_V$  permet de faire correspondre un design à un point sur les bornes théoriques de [Gibiansky et Torquato \(1997\)](#), cela sera utile pour évaluer si nos solutions atteignent ou non des propriétés extrêmes.

Nous prenons comme base la formulation de [Sigmund et Torquato \(1997\)](#) énoncée ci-dessus (V.19), nous proposons cependant quelques modifications, cela donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,sym}, \Omega_{2,sym}} \quad & \alpha_V \\ & K \geq K_{min} \\ & V_1 = V_1^{cible} \\ & V_2 = V_2^{cible} \\ & errC_{iso} = 0 \\ & err\alpha_{iso} = 0. \end{aligned} \quad (V.23)$$

Les modifications proposées sont les suivantes :

- Les erreurs d'isotropies sont utilisées comme contrainte plutôt que comme pénalisations de l'objectif : le problème de pondération des différentes pénalisations est ainsi contourné
- Les expressions des erreurs d'isotropies utilisées sont celles proposées en 1.1 car elles sont plus simple à interpréter : elle représente l'écart entre un tenseur quelconque et une de ses projections isotropes.

## Bilan

Une série de critères d'optimisation représentatifs des propriétés thermoélastiques que l'on souhaite optimiser ont été définis. Après une étude de la littérature, nous avons vu comment ces différents critères étaient assemblés pour définir des formulations de problème d'optimisation. En s'inspirant de ces travaux, nous avons défini la formulation de notre problème d'optimisation.

On propose maintenant de définir le modèle qui va nous permettre d'évaluer numériquement chaque mesure utilisée dans notre formulation. Une fois le modèle établi, il faut aussi calculer les dérivées de formes pour chaque mesure.



## 2 Modélisation et dérivation de forme des quantités optimisables

La formulation définie par l'équation (V.23) fait appel aux mesures suivantes :

- $\bar{\alpha}^*$  : la dilatation thermique effective du matériau.
- $K^*$  : le module de compressibilité effectif du matériau.
- $errC_{iso}$  : l'erreur d'isotropie mécanique du matériau.
- $err\alpha_{iso}$  : l'erreur d'isotropie thermique du matériau.
- $V_i$  : les volumes de chaque phase.

Chacune de ces propriétés (à l'exception des volumes) est obtenue à partir du tenseur des modules élastiques effectifs  $\bar{\bar{C}}^*$  et du tenseur des dilatations thermiques effectives  $\bar{\alpha}^*$ .

Dans une première partie, on présente la théorie de l'homogénéisation périodique qui va nous permettre d'évaluer numériquement les tenseurs des propriétés effectives  $\bar{\bar{C}}^*$  et  $\bar{\alpha}^*$  caractérisant nos matériaux architecturés, avec pour information la répartition des différentes phases constitutives dans l'espace. Cette partie définit le **modèle**, qui est un des éléments clés dans la définition de notre problème d'optimisation.

Par la suite, on présente la dérivation de forme de ces différentes quantités.

### 2.1 Méthodes d'homogénéisation

#### Généralités

Nous proposons d'utiliser l'homogénéisation périodique afin de calculer les propriétés effectives d'une cellule élémentaire représentative. L'homogénéisation peut être conceptualisée comme la recherche du matériau homogène ayant les mêmes propriétés moyennes qu'un matériau hétérogène donnée, elle permet le passage d'une description microscopique à une description macroscopique du comportement du système (Bensoussan et Lions, 1978). Il s'agit d'une transition d'échelle.

Cioranescu et Donato (1999) proposent une introduction sur ces méthodes pour des milieux périodiques et détaillent son application sur divers problèmes physiques. La figure V.2 illustre ce concept, on voit comment les propriétés physiques du matériau hétérogène ( $C(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $A(x)$ , plus généralement  $P(x)$ ) sont remplacée par leurs équivalents moyennés ( $C^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $A^*$ , plus généralement  $P^*$ ).

Toutes ces méthodes restent soumises à l'hypothèse de séparation d'échelle (Bensoussan et Lions, 1978; Cioranescu et Donato, 1999), que nous résumons ici pour les structures périodiques par l'idée que la période spatiale de la structure doit être faible comparée à la taille du domaine dans lequel s'étend le matériau. Plusieurs auteurs utilisent des schémas d'homogénéisation pour calculer les propriétés effectives de matériaux architecturés, on prendra par exemple Zhou et Li (2008) pour la conductivité thermique, Sigmund (2000) pour les propriétés mécaniques ou encore Wang *et al.* (2004) pour les propriétés thermoélastiques, pour des milieux périodiques.

#### Homogénéisation des propriétés thermoélastiques

Nous appliquons maintenant la méthode du développement asymptotique à deux échelles (décrite par exemple par Allaire (2007)) aux équations de la thermoélasticité. Soit les équations d'état définissant le comportement thermoélastique d'un milieu hétérogène, selon

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}(\bar{x})(\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}(\bar{x})) - \bar{\alpha}(\bar{x})\Delta T) \right) = 0 & \bar{x} \in \Omega \\ \bar{u} = 0 & \bar{x} \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (\text{V.24})$$

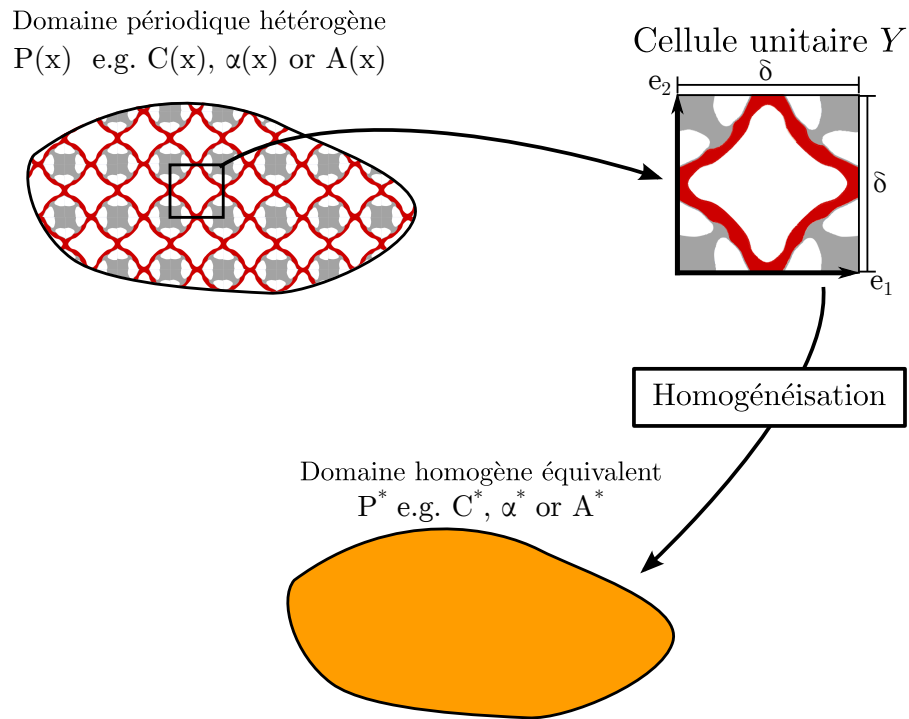


Figure V.2 – Illustration de principe de l'homogénéisation périodique

avec  $\overset{\equiv}{C}$  le tenseur des modules élastiques,  $\overset{\equiv}{\alpha}$  le tenseur de dilatation thermique, les deux dépendant de la variable d'espace  $\bar{x}$  car le milieu considéré est hétérogène,  $\Delta T$  la différence de température uniforme dans le domaine,  $\bar{u}$  le déplacement solution du problème d'élasticité.  $\bar{x}$  est la variable que l'on peut qualifier de macroscopique, car elle parcourt l'ensemble de la structure périodique. On introduit maintenant la variable  $\bar{y}$ , appelée variable microscopique, que l'on définit comme  $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\delta}$ , avec  $\delta$  la largeur de la cellule de répétition formant le motif périodique (voir figure V.3).

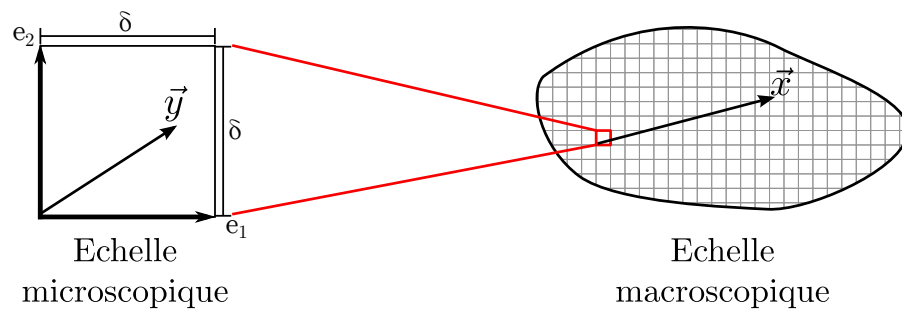


Figure V.3 – Définition de la cellule élémentaire d'un milieu périodique.

Le milieu étant périodique, on peut réécrire les propriétés physiques différemment, ainsi on a

$$\overset{\equiv}{C}(\bar{y} + \bar{e}_i) = \overset{\equiv}{C}(\bar{y}), \forall i = 1..n, \quad (\text{V.25})$$

avec  $n$  le nombre de dimensions du problème et  $\bar{e}_i$  le  $i^{eme}$  vecteur de base de la cellule unitaire. Cela transforme les équations d'état en

$$\begin{cases} -\text{div} \left( \overset{\equiv}{C}(\bar{y})(\bar{\epsilon}(\bar{u}(\bar{x})) - \bar{\alpha}(\bar{y})\Delta T) \right) = 0 & \bar{x} \in \Omega \\ \bar{u} = 0 & \bar{x} \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (\text{V.26})$$

L'idée fondatrice du développement asymptotique à deux échelles est de partir de l'hypothèse que l'on peut écrire le champ de déplacement  $\bar{u}$  comme une série entière de la variable  $\delta$  comme suit

$$\bar{u}_\delta(\bar{x}) = \bar{u}_\delta(\bar{x}, \frac{\bar{x}}{\delta}) = \bar{u}_\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta^i \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{y}), \quad (\text{V.27})$$

ensuite, on réinjecte cette expression dans l'équation d'état (ici (V.26)), ce qui permet d'extraire :

- La définition de problèmes de cellule et de leurs chargements élémentaires associés.
- Des expressions analytiques des différentes propriétés homogénéisées.

Le développement ne sera pas détaillé ici, plusieurs exemples sont accessibles dans la littérature, comme dans [Allaire \(2007\)](#), p. 166 ou encore dans [Michailidis \(2014\)](#), p. 188.

### Expression des propriétés effectives

Les expressions des propriétés homogénéisées sont

$$C_{ijkl}^* = \int_Y \bar{\bar{C}}(\bar{y}) (\bar{e}_{ij} + \bar{\bar{e}}(\bar{\omega}_{ij})) (\bar{e}_{kl} + \epsilon(\bar{\omega}_{kl})) dy, \quad (\text{V.28})$$

ou encore

$$C_{ijkl}^* = \int_Y \bar{\bar{C}}(\bar{y}) (\bar{e}_{ij} + \bar{\bar{e}}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} dy, \quad (\text{V.29})$$

avec  $\omega_{ij}$  la solution du  $ij^{eme}$  problème de cellule définie telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}_y(\bar{\bar{C}}(\bar{y})(\bar{e}_{ij} + \epsilon_y(\bar{\omega}_{ij}(\bar{y})))) = 0 & \text{in } Y \\ \bar{\omega}_{ij}(\bar{y}) & Y \text{ -periodic} \end{array} \right. , \quad (\text{V.30})$$

et  $\bar{e}_{ij}$  le tenseur de déformation unitaire défini tel que

$$e_{ij} = \frac{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + \bar{e}_j \otimes \bar{e}_i}{2}. \quad (\text{V.31})$$

De la même façon, on peut calculer les coefficients du tenseur des contraintes thermiques effectives à partir de

$$A_{ij}^* = \int_Y \bar{\bar{C}}(\bar{y}) (\bar{e}_{ij} - \bar{\bar{e}}(\bar{\omega}_{ij})) (\bar{\alpha}(\bar{y}) - \epsilon(\bar{\omega}_{th})) dy, \quad (\text{V.32})$$

ou encore

$$A_{ij}^* = \int_Y \bar{\bar{C}}(\bar{y}) (\bar{\alpha}(\bar{y}) - \bar{\bar{e}}(\bar{\omega}_{th})) \bar{e}_{ij} dy, \quad (\text{V.33})$$

avec  $\bar{\omega}_{th}$  la solution du problème de cellule

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}_y(\bar{\bar{C}}(\bar{y})(\bar{\alpha}(\bar{y}) - \epsilon(\bar{\omega}_{th}(\bar{y})))) = 0 & \text{in } Y \\ \bar{\omega}_{th}(\bar{y}) & Y \text{ -periodic} \end{array} \right. . \quad (\text{V.34})$$

Nous noterons par la suite  $\bar{\bar{C}}^*$  le tenseur des modules élastiques effectifs, et  $\bar{A}^*$  le tenseur effectif des contraintes thermiques.

### Bilan

Après avoir utilisé la théorie du développement asymptotique à deux échelles pour obtenir des expressions explicites des différentes grandeurs physiques effectives de notre matériau architecturé, il est maintenant nécessaire d'exprimer les critères à optimiser à partir de ces grandeurs.

## 2.2 Dérivation des critères

L'ensemble des critères à optimiser sont maintenant explicités, il est donc déjà possible de calculer les propriétés effectives d'un matériau architecturé périodique. Cependant cela n'est pas suffisant, il faut maintenant exprimer les dérivées de forme de ces critères. Le détail des calculs est présenté dans l'annexe *Détails des dérivations de forme*(C). Dans un souci de simplicité, seuls les résultats de dérivations sont présentés ici. On pourra aussi se référer aux travaux de [Allaire et al. \(2013\)](#) pour un développement plus rigoureux des expressions.

Il est important de noter que la dérivation de forme est soumise aux mêmes règles de dérivation que les méthodes de dérivation plus classique (composition, dérivée d'un produit ou d'un quotient, dérivée d'une somme, ...). Pour cette raison, les seules dérivées de formes des composantes du tenseur d'élasticité et du tenseur des contraintes thermiques sont suffisantes pour exprimer les dérivées de formes de tous les critères définis plus avant.

Soit une cellule unitaire  $Y$  hétérogène polyphasée dans laquelle sont définis :

- $d_{\Omega_1}$  et  $d_{\Omega_2}$  les fonctions distances signées de deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , définissant la distribution des différentes phases dans l'espace.
- $\bar{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})$ , le tenseur d'élasticité, exprimé en fonction des deux distances signées.
- $\bar{\bar{\alpha}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})$ , le tenseur des dilatations thermiques, exprimé en fonction des deux distances signées.
- $rays_{\partial\Omega_i}$  les rayons émergeant du bord  $\partial\Omega_i$ , s'étendant jusqu'au squelette  $\Sigma$  de  $d_{\Omega_i}$  (c.f. figure V.4).

$$C_{ijkl}^{*l}(\bar{\theta}_i) = \int_{\partial\Omega_i} \left[ \int_{rays_{\partial\Omega_i}} \left( d'_{\Omega_i}(\bar{\theta}_i) \bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} \right) dz \right] ds, \quad (V.35)$$

avec  $\bar{\omega}_{ij}$  la solution d'un problème de cellule (V.26) et  $\bar{\theta}_i$  la perturbation de la  $i$ -ème levelset et  $\bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})$  la dérivée du tenseur d'élasticité par rapport à la distance signée  $d_{\Omega_i}$ .

De manière analogue, on a

$$A_{ij}^{*l}(\bar{\theta}_i) = \int_{\partial\Omega_i} \left[ \int_{rays_{\partial\Omega_i}} \left( d'_{\Omega_i}(\bar{\theta}_i) \bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\omega}_{th})) \bar{e}_{ij} \right) dz \right] ds, \quad (V.36)$$

avec  $\bar{\omega}_{ij}$  la solution d'un problème de cellule (V.34).

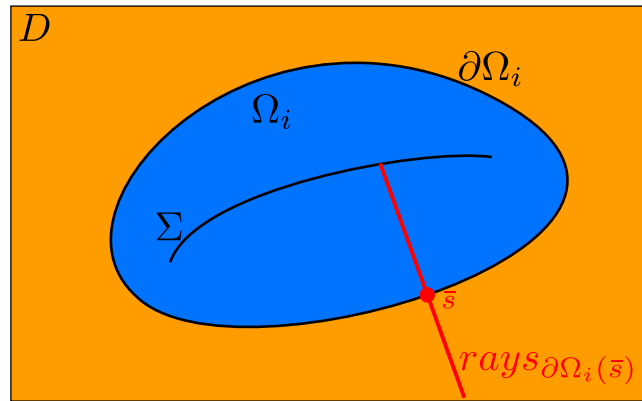


Figure V.4 – Représentation d'un rayon du bord  $\partial\Omega_i$ , représenté en rouge. Il émerge du point  $\bar{s}$  et s'étend jusqu'au squelette  $\Sigma$  représenté en noir.

### 3 Prise en compte des aspects numériques

Les sections 1 et 2 ont permis d'établir la formulation ainsi que le modèle, fournissant ainsi des expressions explicites pour chaque grandeur que l'on souhaite optimiser. Cependant, en étudiant la formulation proposée, on dégage plusieurs sources de difficultés que nous allons détailler ici. En particulier le problème d'optimisation peut s'avérer difficile à résoudre et "bloquer" sur des designs peu performants, voir complètement aberrants sur le plan de la physique (par exemple sans continuité de la matière à l'intérieur de la cellule périodique).

Nous présentons en premier lieu plusieurs points bloquant provenant de la formulation elle-même, notamment sur le choix des critères. Ensuite, nous traitons des difficultés relatives à l'algorithme d'optimisation, nous nous focalisons sur les méthodes de programmation séquentielle présentées dans le chapitre I. Enfin, une série de méthodes de simplification permettant de contourner ces difficultés sera proposée.

#### 3.1 Difficultés liées à la formulation

##### Obtention de propriétés qualitatives

Les critères optimisables peuvent être rangés en deux familles distinctes :

- Les critères représentant une propriété quantitative, par exemple le module de Young ou le module de compressibilité.
- Les critères représentant une propriété qualitative, par exemple la symétrie géométrique, l'isotropie mécanique. Ils représentent en général une mesure de l'écart à la propriété recherchée.

La différence majeure entre ces deux types de critères réside dans l'allure de leurs gradients : **la direction de descente ne s'annule pas pour un critère quantitatif**, par exemple il est toujours possible d'augmenter la rigidité d'une structure en ajoutant de la matière. À l'inverse, il n'existe pas de perturbation d'une forme qui puisse rendre une solution isotrope "encore plus" isotrope. En pratique cela se traduit par l'annulation du gradient quand la propriété qualitative est obtenue.

Ce comportement se retrouve dans les critères prenant la forme de somme de carrés. Ces critères sont utilisés pour forcer un ou plusieurs critères  $B_i(\Omega)$  à atteindre des valeurs cible  $b_i$ , la propriété qualitative recherchée ici est "les  $B_i(\Omega)$  sont égaux aux  $b_i$ ". Soit

$$A(\Omega) = \sum_i (B_i(\Omega) - b_i)^2, \quad (\text{V.37})$$

avec  $b_i$  une constante, qu'on appelle aussi valeur cible de  $B_i(\Omega)$ . La dérivée de forme de (V.37) est

$$A(\Omega)'(\bar{\theta}) = \sum_i 2B_i(\Omega)'(\bar{\theta})(B_i(\Omega) - b_i),$$

si la propriété "les  $B_i(\Omega)$  sont égaux aux  $b_i$ " est respectée, cette dérivée s'annule.

Cela implique qu'une fois la propriété qualitative obtenue à l'itération  $i$ , l'algorithme d'optimisation ne dispose d'aucune d'information pour assurer sa conservation à l'itération  $i + 1$ . Si on considère le problème d'optimisation

$$\min_{\Omega} \mathcal{J}(\Omega) \quad A(\Omega) = 0 \quad (\text{V.38})$$

dans lequel la contrainte  $A(\Omega) = 0$  correspond à un critère qualitatif, il faut s'attendre à observer le comportement illustré par la figure V.5. Cette figure représente une vue de l'esprit du déroulement de l'optimisation du problème (V.38). À gauche, l'évolution au fil des itérations

du point représentatif de la forme (point rouge quand les contraintes ne sont pas respectées, vert sinon). À droite, l'évolution des valeurs numériques des différents critères en unités arbitraires. La couleur bleue fait référence à l'objectif  $\mathcal{J}(\Omega)$  alors que la couleur verte fait référence à la contrainte  $A(\Omega) = 0$ . Sur le graphique de gauche, le domaine admissible  $A(\Omega) = 0$  est matérialisé par la ligne verte, les flèches représentent les directions des deux gradients à chaque itération.

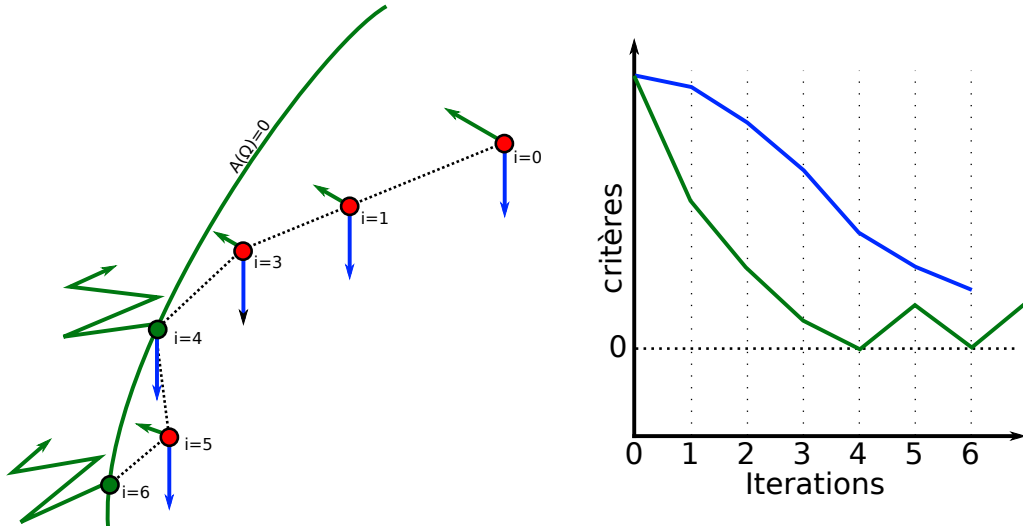


Figure V.5 – Illustration de quelques itérations pour le problème d'optimisation (V.38). À gauche une vue de l'esprit du déplacement de la forme dans l'espace des formes. À droite la variation de l'objectif (en bleu) et de la contrainte (en vert) au cours des itérations, en unités arbitraires.

Nous détaillons maintenant le déroulement de l'optimisation :

- La forme initiale ( $i = 0$ ) ne respecte pas la contrainte, l'algorithme d'optimisation combine les différents gradients et fournit une modification du design.
- Jusqu'à  $i = 3$ , l'objectif et l'écart diminuent conjointement.
- A l'itération  $i = 4$ , la contrainte  $A(\Omega) = 0$  est enfin respectée, la forme entre dans le domaine admissible. Cependant le gradient  $A(\Omega)'(\bar{\theta})$  s'annule.
- Comme l'algorithme ne dispose d'aucun gradient pour assurer le respect de la contrainte, l'évolution est entièrement guidée par la dérivée de forme de l'objectif.
- A  $i = 5$  l'objectif a encore diminué, mais la forme sort du domaine admissible faute d'information pour pouvoir y rester. La contrainte  $A(\Omega) = 0$  étant de nouveau non nulle, le gradient de forme  $A(\Omega)'(\bar{\theta})$  fournit de nouveau une direction permettant de respecter l'isotropie.
- A  $i = 6$  la forme retourne dans le domaine admissible, le gradient de la contrainte  $A(\Omega)'(\bar{\theta})$  s'annule de nouveau.

La propriété peut être obtenue au cours du processus d'optimisation, mais elle ne peut pas être conservée : il est très probable que le critère ainsi formulé oscille proche du domaine admissible. Ce comportement n'est pas nécessairement une complication. Dans le cas d'un algorithme ayant une gestion souple des contraintes (par exemple le Lagrangien décrit dans le chapitre I, paragraphe 2.1), cela risque juste d'accentuer le comportement oscillatoire de la méthode d'optimisation elle-même.

Cependant, dans le cas d'un algorithme proposant une gestion plus rigide des contraintes, typiquement un algorithme de programmation séquentielle (voir 2.2) qui refuse la sortie du domaine admissible, l'algorithme d'optimisation va s'arrêter à la première entrée dans le domaine admissible ( $i = 4$  sur la figure V.5).

Les critères d'erreur d'isotropie mécanique et thermique utilisés dans notre formulation sont des critères permettant l'obtention d'une propriété qualitative, on rappelle l'équation (V.13),

$$errC_{iso} = \frac{\sum_{i,j,k,l}(C_{ijkl} - C_{iso,ijkl})^2}{C_{1111}^2}.$$

Ici, l'annulation de l'erreur d'isotropie entraîne l'annulation de sa dérivée de forme.

Pour contourner ce problème, il est possible de changer de statut ce type de contrainte, par exemple en les transformant en pénalisation, ce qui donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} \quad & tr(\bar{\alpha}) + A \times errC_{iso} + B \times err\alpha_{iso} \\ & K > K_{min} \\ & V_1 \leq V_{1,cible} \\ & V_2 \leq V_{2,cible}, \end{aligned} \tag{V.39}$$

Avec  $A$  et  $B$  de facteurs de pondération. Cette méthode a par exemple été retenue par [Sigmund et Torquato \(1997\)](#), bien qu'elle ajoute une complexité supplémentaire : le choix des facteurs  $A$  et  $B$ .

La difficulté de ce type de contrainte vient s'ajouter aux autres potentielles complications émergeant de la formulation, comme nous allons le voir maintenant.

### Complexité générale du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation proposé ici comporte plusieurs traits qui le rendent difficile à traiter :

- Il comporte plusieurs contraintes correspondant à des propriétés qualitatives, qui sont naturellement difficile à gérer,
- Il comporte cinq contraintes qui doivent être respectées,
- C'est un problème de recherche de propriétés extrêmes, il va donc impliquer l'apparition de mécanismes complexes,
- L'obtention de la forme optimale nécessite beaucoup de changements topologiques.

Le nombre important de contraintes rend difficile l'utilisation d'algorithmes à gestion souple des contraintes, le risque est que la forme finale ne soit pas admissible. On préférera utiliser des algorithmes de programmation séquentielle pour cette raison.

Le dernier point est important, la figure V.6 présente l'évolution d'une microstructure au cours des itérations (extrait de [Wang et al. \(2004\)](#)), nous pouvons constater que la topologie de la structure a radicalement changé. Or la méthode des lignes de niveaux n'est naturellement pas conçue pour gérer les changements topologiques du fait que la dérivée de forme utilisée pour guider l'optimisation est soumise à l'hypothèse que la topologie ne change pas. En pratique et du fait de la discrétisation en temps de l'évolution des formes, on voit apparaître des changements topologiques.

La dérivée de forme peut donc fournir une très mauvaise estimation de l'influence de changements topologiques importants, ce qui peut bloquer l'optimisation dans le cas où l'algorithme d'optimisation gère la variation des contraintes manière trop stricte. Nous avons donc modifié l'algorithme MFD, les détails sont présentés dans l'annexe A.

Nous avons justifié la nécessité d'utiliser un algorithme de programmation séquentielle, nous allons maintenant traiter des difficultés amenées par ce choix.

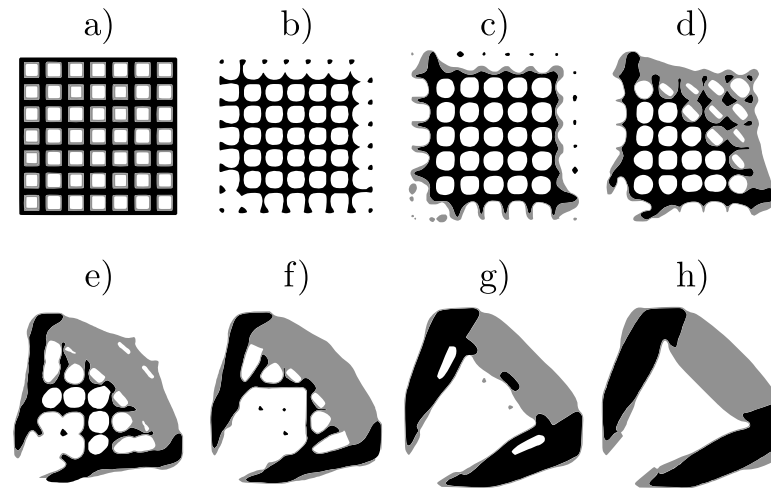


Figure V.6 – Exemple d'évolution de la topologie d'un design au cours de l'optimisation de forme, source : (Wang *et al.*, 2004).

### 3.2 Difficultés liées aux méthodes de programmation séquentielle

Les algorithmes de programmation séquentielle (voir chapitre I) semblent les plus adaptés pour le problème que nous souhaitons traiter, Sigmund et Torquato (1997) utilisent eux aussi un algorithme de cette famille. Ils présentent l'avantage de gérer les contraintes de manière rigoureuse. Cependant cette gestion stricte amène d'autres difficultés qu'il est important de considérer.

#### Sortie du domaine admissible

Les algorithmes présentés dans le chapitre I ont le point commun de ne pas autoriser la sortie du domaine admissible une fois qu'il est atteint. Si l'algorithme ne parvient pas à faire évoluer la forme sans engendrer la violation d'une contrainte, il s'arrête.

Le sous paragraphe précédent a mis en avant plusieurs situations qui sont donc problématiques :

- Notre problème contient des contraintes correspondant à des propriétés qualitatives. Comme présenté au début de ce paragraphe, cela implique que l'algorithme va systématiquement s'arrêter en rentrant dans le domaine admissible car il n'aura aucune information pour empêcher l'itération suivante d'en ressortir.
- On attend beaucoup de changements topologiques au cours de l'optimisation, donc des gradients invalides lors de ces changements, et donc de mauvaises solutions pour les sous problèmes d'optimisation entraînant le blocage de l'algorithme d'optimisation.

Afin de gérer le premier cas difficile, nous changeons le statut des contraintes en somme de carrés et en faisons des pénalisations comme cela a été expliqué en 3.1.

Pour le deuxième point, on constate que pour beaucoup de processus d'optimisation l'essentiel des changements de topologie ont lieu au début du processus d'optimisation (voir Wang *et al.* (2004)). Nous proposons d'intégrer une gestion moins stricte des contraintes à l'algorithme d'optimisation séquentiel durant la première dizaine d'itérations.

#### Gestion des contraintes d'égalité

À cause du caractère strict de l'application des contraintes, appliquer des contraintes d'égalité strictes n'est pas possible numériquement, il est nécessaire de les relaxer afin que l'algorithme dispose d'une marge de manœuvre pour faire évoluer la forme.



Pour cela nous transformons une contrainte d'égalité en deux contraintes d'inégalité formant un encadrement de la quantité, comme suit

$$h(\bar{p}) = h_{cible} \rightarrow \begin{cases} h(\bar{p}) \leq h_{cible} + \epsilon \\ -h(\bar{p}) \leq -h_{cible} + \epsilon, \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

Avec  $\epsilon$  le paramètre de relaxation. Afin d'obtenir l'égalité en fin de process d'optimisation, il est possible de faire décroître progressivement  $\epsilon$ . Cependant choisir une manière pertinente de faire évoluer ce paramètre n'est pas trivial, les seules options sont en fait heuristiques.

Il n'est cependant pas nécessaire de recourir à l'utilisation de ce paramètre  $\epsilon$  pour toutes les contraintes d'égalité à convertir. Si on prend pour exemple le cas de la thermoélectricité, il est montré en annexe B que le volume de matière est déterminant : un ajout de matière permet d'améliorer la performance. En conséquence, on peut s'attendre à ce que l'optimiseur tente de mettre autant de matière que possible, dans ce contexte seule une contrainte d'inégalité telle que  $V \leq V_{max}$  sera activée.

### 3.3 Stratégies de simplification

Nous classons dans les stratégies de simplifications toutes modifications réduisant le nombres de paramètres ou le nombre de critères du problème. Elles sont en général très efficaces, mais présentent le défaut de changer de manière conséquente la formulation et de réduire l'espace des formes possibles.

#### Utilisation des symétries

Sigmund et Torquato (1997) propose l'utilisation de symétries imposées de la forme, cela dans le but de contrôler son évolution. Ils proposent ainsi l'utilisation d'un plan miroir. Le fait est qu'une symétrie judicieusement choisie peut considérablement simplifier le problème. Par exemple, l'utilisation d'une symétrie de rotation d'ordre 4 permet d'assurer

- Une symétrie cubique du tenseur d'élasticité.
- L'isotropie thermique.

Nous résolvons ainsi le même problème physique mais dans un espace de solution plus restreint, espace dans lequel le process d'optimisation sera grandement facilité. La formulation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & \alpha_V \\ & K > K_{min} \\ & V_1 \leq V_{1,cible} \\ & V_2 \leq V_{2,cible} \\ & errC_{iso} = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

où les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ont laissé place aux domaines  $\Omega_{1,r4}$ ,  $\Omega_{2,r4}$  ayant une symétrie de rotation d'ordre 4.

Il est important de noter que nous ne tenons pas compte de l'influence potentielle de la prise en compte de ces symétries sur les performances atteignables ! Notamment rien n'indique qu'une solution comportant une symétrie puisse atteindre les bornes de Gibiansky-Torquato précédemment introduites dans le chapitre IV, paragraphe 2.2. Nous ne pouvons que *supposer* que cet espace restreint de solutions permettra toujours d'atteindre des propriétés extrêmes, cela semble cependant raisonnable dans la mesure où Sigmund et Torquato (1997) a réussi à atteindre les bornes avec des solutions comportant une double symétrie miroir.

**Remarque :** De nombreuses symétries sont possibles, notamment l'utilisation d'une symétrie hexagonale entraînerait directement l'isotropie mécanique.

### Continuation

Si toutes ces mesures s'avèrent insuffisantes, il est encore possible de procéder par "continuation", c'est-à-dire de diviser la formulation en deux sous formulations qui seront ensuite traitées de manière séquentielle, cela donne

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \hline \text{recherche} \\ \hline \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ K > K_{min} \\ V_1 \leq V_{1,cible} \\ V_2 \leq V_{2,cible} \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} \hline \text{isotropisation} \\ \hline \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \text{err}C_{iso} \\ \text{tr}(\bar{\alpha}) \leq m\alpha_{ref} \\ K > K_{min} \\ V_1 \leq V_{1,cible} \\ V_2 \leq V_{2,cible}, \end{array}
 \end{array} \quad (V.42)$$

avec  $\alpha_{ref}$  la valeur de l'objectif obtenue à la fin du premier sous-problème d'optimisation, assurant ainsi que l'on ne dégradera pas les performances lors de l'isotropisation du matériau architecturé, et  $m$  une petite marge de modification de l'objectif, légèrement supérieur à 1.

## Bilan du chapitre V

Dans ce chapitre nous avons défini plusieurs propriétés thermoélastiques effectives d'un matériau architecturé périodique. Nous avons aussi présenté **l'homogénéisation par développement asymptotique à deux échelles**, permettant d'évaluer ces mêmes propriétés ainsi que leurs dérivés de forme (développements présentés en annexe C).

Nous avons ensuite assemblé ces différentes propriétés pour écrire une **formulation** d'un problème d'optimisation de matériau. Après une présentation des travaux de [Sigmund et Torquato \(1996\)](#), [Wang et al. \(2004\)](#) et [Michailidis \(2014\)](#), nous avons établi notre propre formulation (V.23). Cette formulation a pour objectif l'obtention de matériaux architecturés **isotropes, polyphasés**, et à la **dilatation thermique la plus faible possible**.

Nous avons cependant modifié cette formulation afin d'anticiper les difficultés numériques envisagées dans le dernier paragraphe. La formulation finale retenue (V.42) s'écrit finalement

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \hline \text{recherche} \\ \hline \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ \hline K > K_{min} \\ V_1 \leq V_{1,cible} \\ V_2 \leq V_{2,cible} \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} \hline \text{isotropisation} \\ \hline \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad errC_{iso} \\ \hline \text{tr}(\bar{\alpha}) \leq a\alpha_{ref} \\ K > K_{min} \\ V_1 \leq V_{1,cible} \\ V_2 \leq V_{2,cible} \end{array}
 \end{array}$$

avec  $K$  le module de compressibilité effectif,  $\bar{\alpha}$  le tenseur des dilatations thermiques effectives,  $V_i$  le volume de la  $i^{eme}$  phase,  $errC_{iso}$  l'erreur d'isotropie mécanique et  $\alpha_{ref}$  la valeur de l'objectif obtenue à la fin du premier sous-problème d'optimisation.

Le problème d'optimisation est ainsi découpé en deux étapes :

- Une étape de recherche où nous essayons d'obtenir un matériau ayant la dilatation thermique la plus faible possible tout en respectant à la fois les contraintes de volume et de rigidité. ce résultat intermédiaire est en général anisotrope mécaniquement.
- Une étape d'isotropisation où nous essayons de rendre la solution issue de l'étape de recherche isotrope tout en conservant sa performance.

Dans le chapitre suivant nous présentons des résultats numériques obtenus sur la base de cette formulation.

# Chapitre VI

## Applications de la méthode à plusieurs cas d'étude

---

1	Définition des paramètres d'entrée . . . . .	124
1.1	Choix des propriétés des constituants . . . . .	124
1.2	Calcul des propriétés effectives par homogénéisation périodique . . . . .	126
1.3	Optimisation de la microstructure et influence de la topologie initiale . .	126
1.4	Choix de la formulation . . . . .	127
2	Optimisation des propriétés thermoélastiques sans gestion des interfaces graduées	128
2.1	Étape de recherche . . . . .	128
2.2	Étape d'isotropisation . . . . .	136
2.3	Discussion . . . . .	138
3	Optimisation des propriétés thermoélastiques avec gestion des interfaces graduées	141
3.1	Modifications nécessaires de l'implémentation . . . . .	142
3.2	Étape de recherche . . . . .	145
3.3	Étape d'isotropisation . . . . .	150
3.4	Discussion . . . . .	153
	Bilan du chapitre VI . . . . .	154

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous abordons plusieurs exemples d'optimisation des propriétés thermoélastiques effectives de matériaux architecturés. Nous présentons des résultats obtenus pour des cas de simulations se rapprochant de ceux proposés par [Sigmund et Torquato \(1997\)](#), cela dans le but de comparer les différentes méthodes.

Nous dégageons des résultats de simulations les mécanismes permettant de contrôler les propriétés thermoélastiques, principalement la dilatation thermique. La pertinence de ces différentes solutions est ensuite discutée.

Nous traitons enfin des cas tests similaires en ajoutant à notre modèle la gestion d'interfaces graduées. Nous mettons en évidence le fait que la prise en compte de ces interfaces a une influence notable tant sur les performances des solutions proposées que sur leurs topologies.

Le chapitre V a permis de formuler un problème d'optimisation de domaine ainsi que d'adapter celui-ci aux différentes problématiques théoriques et numériques. Ce chapitre présente les résultats obtenus pour un cas d'étude concernant l'identification inverse de microstructures et plus précisément de microstructures ayant des propriétés thermoélastiques cibles.

On s'intéresse ici à deux cas d'étude particulier qui sont :

- L'obtention d'un matériau ayant une dilatation thermique nulle, l'intérêt d'un tel matériau a été discuté dans la chapitre IV.
- L'obtention d'un matériau ayant une dilatation thermique fortement négative.

## 1 Définition des paramètres d'entrée

### 1.1 Choix des propriétés des constituants

#### Phases constitutives et bornes de Gibiansky-Torquato

Comme détaillé dans l'annexe B les propriétés thermoélastiques atteignables par un matériau hybride résultent :

- des propriétés thermoélastiques des différentes phases constitutives,
- des fractions volumiques de ces mêmes phases,
- de la répartition dans l'espace de ces constituants.

L'étude présentée ici porte sur l'optimisation du dernier paramètre, la répartition de la matière dans l'espace. Nous fixons donc les deux autres paramètres, qui deviennent des données d'entrée du problème d'optimisation.

Afin d'obtenir un composite ayant une dilatation thermique nulle ou fortement négative plusieurs critères doivent être remplis :

- l'hybride doit comporter au moins deux phases avec des propriétés mécaniques (module de Young, module de compressibilité) semblables mais de coefficients de dilatation thermique différents,
- l'hybride doit comporter au moins une phase de rigidité très faible, par exemple un "vide", même dans de très petites proportions.

Ces conditions sont discutées dans l'annexe B.

[Sigmund et Torquato \(1996\)](#) proposent une série de propriétés matériau qui respectent ces règles, elles sont présentées dans le tableau VI.1. On note que ces propriétés sont données en unités arbitraires.

Propriété	phase A	phase B	phase vide
$E$	0.91	0.91	$0.91 \times 10^{-3}$
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$	1	10	1
Vol. relatif	0.25	0.25	0.5

Table VI.1 – Propriétés des phases constitutives utilisées par [Sigmund et Torquato \(1996\)](#).

Nous proposons de reprendre les mêmes propriétés des matériaux que [Sigmund et Torquato \(1996\)](#), cela nous permettra de comparer nos résultats avec ces auteurs. La borne de Gibiansky-Torquato pour les propriétés du tableau VI.1 est présentée sur la figure VI.1. Nous constatons qu'il est possible, pour certaines valeurs de module de compressibilité, d'atteindre des coefficients de dilatation thermique nuls ou fortement négatifs (zone verte). Deux points (étoiles vertes) ont été marqués sur cette figure, l'un d'eux (à droite) correspond à la plus forte valeur

de module  $\kappa$  permettant d'obtenir une dilatation thermique nulle. L'autre correspond à un hybride ayant une dilatation thermique très faible. Nous reprenons là les cas tests présentés par Sigmund et Torquato (1996). Nous ferons références à ces deux cas tests comme étant :

- Le point de **dilatation thermique nulle**, correspondant à  $(K^* = 0.526; \alpha^* = 0.0)$ ,
- Le point de **dilatation thermique négative**, correspondant à  $(K^* = 0.3; \alpha^* = -2.4)$ ,

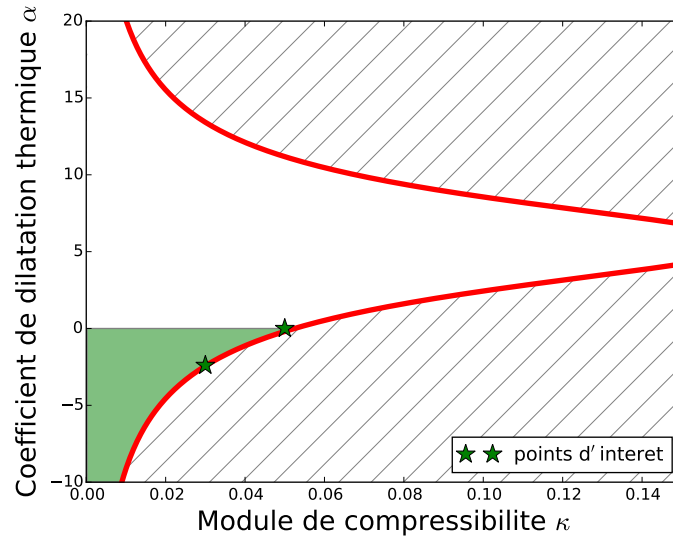


Figure VI.1 – Bornes thermoélastique extrêmes de Gibiansky-Torquato pour les composites comportant les phases décrites par le tableau VI.1. La zone verte correspond à tous les hybrides ayant une dilatation thermique effective nulle ou négative. Les deux étoiles vertes marquent les deux objectifs que l'on souhaite atteindre dans le cas test considéré ici.

Nous présentons maintenant comment ces différentes phases sont représentées à l'aide de la méthode des lignes de niveaux.

### Représentation des phases constitutives par la méthode des lignes de niveaux

Comme présenté dans le chapitre II  $N$  fonctions lignes de niveaux permettent de représenter  $2^N$  phases. Ici nous souhaitons représenter 3 phases, nous utilisons donc deux fonctions lignes de niveaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Nous utilisons le schéma d'interpolation (II.24) proposée dans le chapitre II, le tableau VI.2 résume les règles d'affectation des différentes propriétés selon les valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . La figure VI.2 illustre l'utilisation des deux fonctions lignes de niveaux, on voit à gauche la couleur attribuée à chaque phase et à droite un exemple de forme que l'on peut représenter par cette méthode.

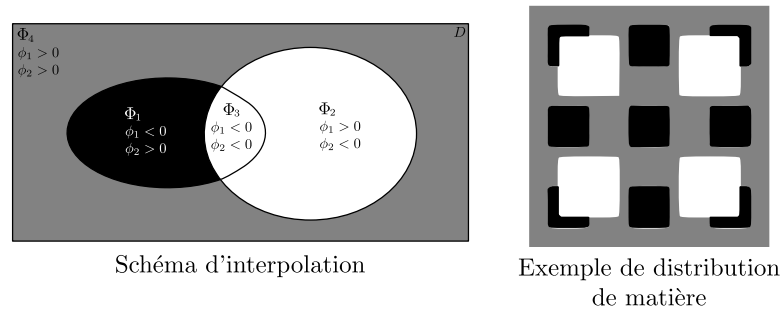


Figure VI.2 – Visualisation des phases à gauche et un exemple (à droite).

Propriété	phase 1	phase 4	phase 2& 3
nom	phase A	phase B	phase vide
zone spatiale	$\phi_1 < 0, \phi_2 > 0$	$\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$	$\phi_2 < 0$
$E$	0.91	0.91	$0.91 \times 10^{-3}$
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$	1	10	1
Vol. relatif	0.25	0.25	0.5
Couleur	noire	grise	blanche

Table VI.2 – Propriétés des phases constitutives définies à l'aide des deux fonctions lignes de niveaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

Nous pouvons maintenant représenter la répartition dans l'espace des différentes phases de notre composite, il faut maintenant utiliser cette description pour évaluer les propriétés effectives par homogénéisation périodique.

## 1.2 Calcul des propriétés effectives par homogénéisation périodique

### Interpolation des propriétés physiques

Pour résoudre les équations associées au problème d'homogénéisation défini dans le chapitre V nous menons une analyse par éléments finis. Les calculs sont réalisés sur une cellule élémentaire comportant  $120 \times 120$  éléments quadrangles linéaires. À l'aide des fonctions lignes de niveaux, nous attribuons à chaque élément du maillage des propriétés physiques qui dépendent de sa position dans l'espace. À l'aide du schéma d'interpolation (II.24), nous attribuons à chaque nœud du maillage des propriétés physiques en se basant sur ses valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , puis nous transportons ses valeurs aux éléments en utilisant (II.18) avec  $p = 0$ .

### Résolution

La méthode des éléments finis est employée pour résoudre les problèmes de cellules (V.30) et (V.34) définis dans le chapitre V paragraphe 2, qui sont pour rappel

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(\overset{\equiv}{C}(\bar{y})(\bar{e}_{ij} + \epsilon_y(\bar{\omega}_{ij}(\bar{y})))) = 0 & \text{in } Y \\ \bar{\omega}_{ij}(\bar{y}) & Y \text{ -periodic} \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

pour les chargements élémentaires mécaniques et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(\overset{\equiv}{C}(\bar{y})(\bar{\alpha}(\bar{y}) - \epsilon(\bar{\omega}_{th}(\bar{y})))) = 0 & \text{in } Y \\ \bar{\omega}_{th}(\bar{y}) & Y \text{ -periodic} \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

pour le chargement élémentaire thermique.

À partir des problèmes (VI.1) et (VI.2) nous obtenons les propriétés effectives de la cellule élémentaire.

## 1.3 Optimisation de la microstructure et influence de la topologie initiale

### Motivation

Les méthodes d'optimisation basées sur la dérivation de forme sont très sensibles à la topologie initiale. Ceci est lié au fait que les changements topologiques ne sont pas prévus formellement

par la dérivation de forme. Cet effet est encore amplifié dans le cas où le domaine optimisé comporte plusieurs phases, car cela augmente considérablement le nombre de topologies possibles. Pour cette raison le choix de la répartition initiale peut avoir un effet important sur la topologie des formes finales. Pour circonvier à ceci nous définissons un grand nombre de combinaisons différentes en faisant varier plusieurs paramètres :

- Le nombre de trous,
- leur taille,
- le signe de la fonction lignes de niveaux, cela afin d'obtenir des microstructures complémentaires.

tout ceci pour les deux levelsets séparément. Nous générons ainsi un grand nombre d'initialisations différentes (96 en pratique). La figure VI.3 présente les différents paramètres modifiés pour former des séries d'initialisations différentes.

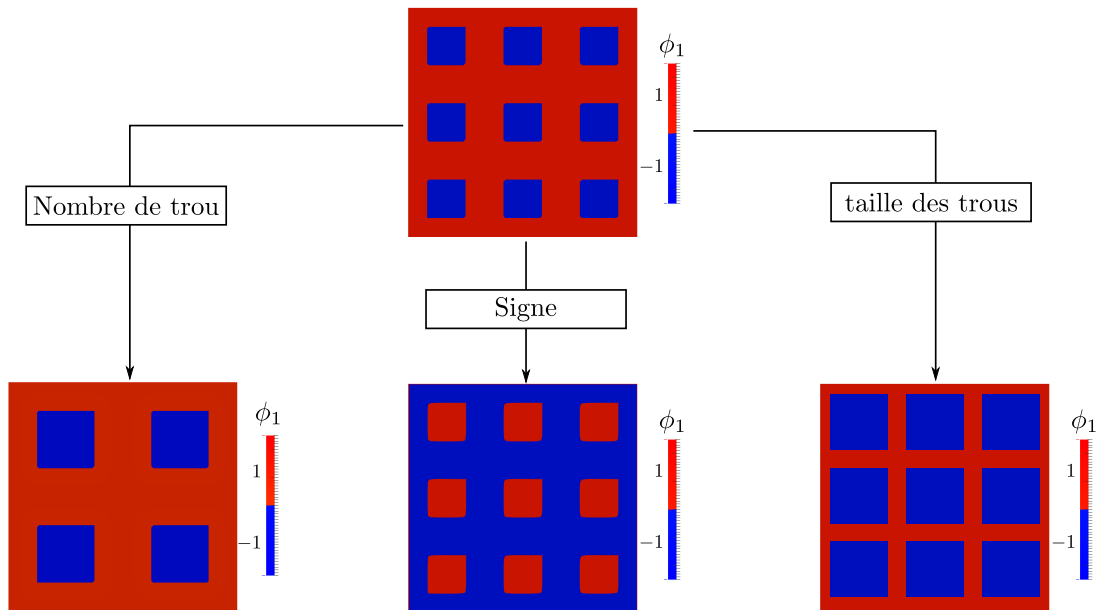


Figure VI.3 – Exemple de variation appliquées sur la topologie/forme initiale.

**Remarque :** Il aurait aussi été intéressant de considérer la position des trous comme un paramètre définissant nos initialisations. Nous avons cependant laissé fixe ce paramètre afin de ne pas augmenter de manière trop importante le nombre d'initialisations utilisées.

### 1.4 Choix de la formulation

Le chapitre V a permis d'introduire différentes formulations de problème d'optimisation ainsi que plusieurs simplifications permettant de faciliter la résolution. Nous présentons dans ce chapitre des résultats obtenus à l'aide de la formulation (V.42) proposée à la fin du paragraphe 3.3 du chapitre V, pour rappel, cela donne

recherche		isotropisation
$\min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \text{tr}(\bar{\alpha})$		$\min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \text{err}C_{iso}$
$K > K_{min}$	→	$\text{tr}(\bar{\alpha}) < a\alpha_{ref}$
$V_1 \leq V_{1,target}$		$K > K_{min}$
$V_2 \leq V_{2,target}$		$V_1 \leq V_{1,target}$
$V_2 \geq V_{2,target} - \epsilon$		$V_2 \leq V_{2,target}$



avec  $\alpha_{ref}$  la valeur de l'objectif obtenue à la fin du premier sous-problème d'optimisation, assurant ainsi que l'on ne dégradera pas les performances lors de l'isotropisation du matériau architecturé.

La résolution est découpée en deux étapes :

- La recherche de solutions permettant le contrôle de la dilatation thermique, ici sa minimisation.
- La recherche de versions isotropes des solutions précédemment obtenus.

Une symétrie rotationnelle d'ordre 4 est aussi imposée. Nous remarquons que cela donne

- $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\text{tr}(\bar{\alpha})}{2}$ ,
- $\alpha_{12} = 0$ ,
- $C_{1111} = C_{2222}$

quelle que soit la topologie respectant la symétrie.

Après plusieurs essais, nous choisissons d'utiliser l'algorithme MFD décrit dans le chapitre I car ce dernier permet un respect strict des contraintes. L'utilisation d'un algorithme sur la base d'un Lagrangien mène, dans la plupart des essais réalisés, au non-respect de la contrainte de rigidité minimale ( $K > K_{min}$ ) qui se caractérise par l'apparition de formes sans continuité mécanique.

Les simplifications proposées de la formulation sont de plus nécessaire afin d'éviter le blocage de l'algorithme dans des minima locaux peu performant.

## 2 Optimisation des propriétés thermoélastiques sans gestion des interfaces graduées

Nous étudions ici la génération de matériaux architecturés, nous faisons une synthèse rapide des paramètres de simulation :

- Le matériau comporte trois phases : solide à faible dilatation (noire), solide à forte dilatation (grise) et vide, dont les propriétés sont résumées dans le tableau VI.2,
- Les propriétés effectives de notre matériau sont calculées par homogénéisation périodique comme défini dans le paragraphe 1.2,
- Nous utilisons l'algorithme MFD défini dans le chapitre I, et utilisons la formulation simplifiée (V.42), qui découpe le processus d'optimisation en une phase de recherche et une phase d'isotropisation.
- Le processus d'optimisation est réalisé pour une centaine d'initialisations différentes, décrites dans le paragraphe 1.3.

Le but de cette étude est le **design de matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques extrêmes**. Deux cas sont à l'étude, ils correspondent respectivement à une dilatation thermique fortement négative et une dilatation thermique nulle (cf étoiles vertes sur la figure VI.1, représentant les bornes de Gibiansky-Torquato).

Nous étudions séparément les résultats obtenus pendant l'étape de recherche et pendant l'étape d'isotropisation. La première étape est en effet suffisante si l'on souhaite trouver des concepts de structures permettant le contrôle de la dilatation thermique. La seconde étape est nécessaire si l'on souhaite comparer les résultats obtenus avec les bornes théoriques de Gibiansky-Torquato (annexe B) et ainsi évaluer si les structures produites possèdent des propriétés extrêmes.

### 2.1 Étape de recherche

Dans cette étape de recherche nous tentons de fournir des designs approchant les points d'intérêt dans l'espace  $(\kappa^*; \alpha^*)$  énoncé au cours du paragraphe précédent. Cependant ces points

d'intérêt n'ont de sens physique **que dans le cas où les matériaux obtenus sont isotropes mécaniquement et thermiquement**. Comme la phase de recherche ne contient pas de contrainte forçant l'isotropie, il est peu probable que les designs obtenus soient isotropes, nous ne comparerons donc pas les propriétés effectives obtenues avec les points d'intérêt, cela sera fait à la fin de l'étape d'isotropisation.

Le but du processus de recherche est de fournir une série de formes à la topologie bien définie et comportant des mécanismes. À la fin de cette phase il sera déjà possible de dégager une série de conclusions sur les topologies de mécanismes intéressantes.

### Dilatation thermique nulle

Nous cherchons ici à obtenir un hybride ayant une dilatation thermique nulle, nous souhaitons donc atteindre le point de **dilatation thermique nulle** ( $K^* = 0.526; \alpha^* = 0.0$ ) que nous avons défini sur les bornes de Gibiansky-Torquato durant le paragraphe précédent. Pour se faire, nous reprenons la formulation de l'étape de recherche (V.42), en choisissant :

- $K_{min} = 0.5$ , ce qui permet de laisser un peu de marge vis-à-vis du point d'intérêt,
- $\epsilon = 0.05$ , qui permet d'imposer un volume de phase grise proche de celui souhaité sans bloquer l'optimisation,

cela donne

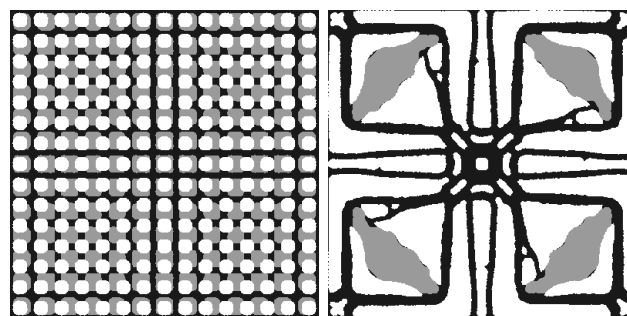
$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, r_4, \Omega_2, r_4} \quad & \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ & K > 0.05 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\% \\ & V_4 \geq 20\%. \end{aligned}$$

192 simulations différentes ont été effectuées, les deux meilleurs résultats sont présentés ici.

La figure VI.4 présente un premier résultat de cette série de simulations que nous notons "Zéro1", le tableau VI.3 regroupe les propriétés initiales et finales du matériau ainsi obtenues.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\alpha$	6.17	-0.01	—
$K$	0.235	0.05	$\geq 0.05$
$V_1$	3.4%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	52%	20%	$20\% \leq . \leq 25\%$
itération	0	57	—

Table VI.3 – Propriétés finales de la microstructure présentée sur la figure VI.4



initial

final

Figure VI.4 – Résultat de simulation : Zero1

Tout d'abord nous constatons à l'aide du tableau VI.3 que l'ensemble des contraintes du problème d'optimisation sont respectées. Nous remarquons de plus que la dilatation thermique effective du matériau a considérablement diminuée au fil des itérations, passant de 6.17 à  $-0.01$ . La structure comporte une symétrie rotationnelle d'ordre 4 conforme à celle imposée. L'ensemble de ces constatations indique que l'algorithme d'optimisation a rempli son rôle et fourni une solution respectant les contraintes tout en minimisant la dilatation thermique effective.

Nous notons que l'algorithme d'optimisation n'a cependant pas utilisé le maximum de phase grise autorisé (20% contre 25% permis).

L'observation de la solution de la figure VI.4 permet de constater qu'un mécanisme a été formé, la figure VI.5 compare le design (à gauche) et une version simplifiée (à droite) utilisant un des mécanismes de la figure IV.21. Nous retrouvons sur ce schéma de concept des mécanismes de type flexion adaptés pour un contrôle de la dilatation thermique dans les deux directions de l'espace. La figure VI.6 présente l'effet d'une élévation uniforme de la température sur la cellule élémentaire simplifiée.

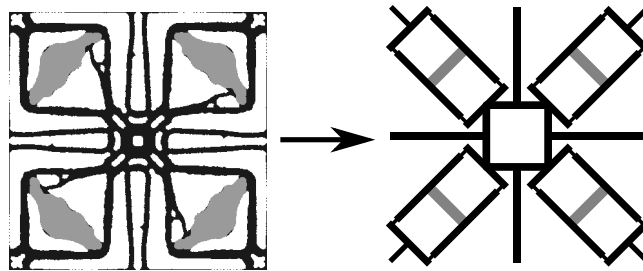


Figure VI.5 – Décomposition de la solution Zéro1 en mécanismes simples.

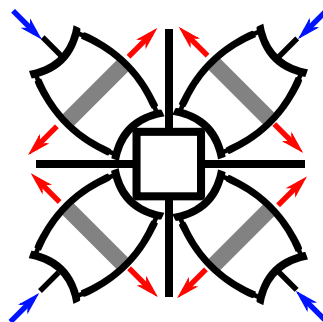
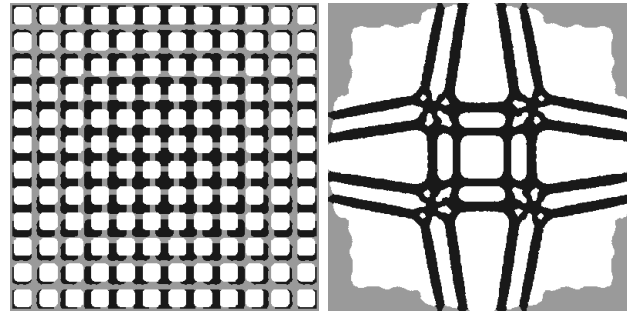


Figure VI.6 – Effet d'une élévation uniforme de température sur la solution Zéro1 simplifiée. La dilatation plus importante de la phase grise met en flexion la phase noire (flèches rouges), de cette flexion résulte un retrait global de la cellule (flèches bleues).

La figure VI.7 présente un second résultat de cette série que nous notons "Zéro2", le tableau VI.4 regroupe les propriétés finales du matériau ainsi construit.

Propriété	valeur finale	contrainte	
$\alpha$	0.265	—	
$K$	0.05	$\geq 0.05$	
$V_1$	25%	$\leq 25\%$	
$V_4$	20%	$20\% \leq . \leq 25\%$	
itération	0	59	—



initial

final

Figure VI.7 – Résultat de simulation : Zero2

Comme pour le cas Zéro1 les contraintes du problème d'optimisation sont respectées et une chute conséquente de la dilatation thermique effective du matériau est observée (cf tableau VI.4). Là encore l'algorithme n'a pas utilisé l'ensemble du volume de phase grise dont il dispose. La figure VI.7 présente la forme finale, il n'est pas aisé de comprendre le comportement du matériau ainsi formé. Afin de simplifier l'interprétation de la forme finale nous proposons d'étudier plusieurs répétitions de la cellule, comme cela est fait sur la figure VI.8. Sur cette illustration nous isolons d'abord une cellule unitaire translatée à partir de plusieurs répétitions de la solution finale. Cette nouvelle cellule est plus simple à interpréter, nous retrouvons le mécanisme de flexion présenté en figure IV.21, adapté à un contrôle de la dilatation thermique dans les deux dimensions de l'espace. Enfin le schéma à droite de la figure VI.8 illustre le comportement de la cellule quand elle est soumise à une élévation uniforme de la température. En observant les propriétés finales données dans le tableau VI.4 nous constatons que la solution Zéro2 présentée ici semble moins performante que la solution Zéro1 introduite précédemment. En effet le design Zéro2 présente une dilatation thermique légèrement positive. Bien que comportant un mécanisme qui tend à produire une contraction de la cellule (cf figure VI.8), ce dernier n'est pas suffisant pour compenser totalement la dilatation de la phase noire.

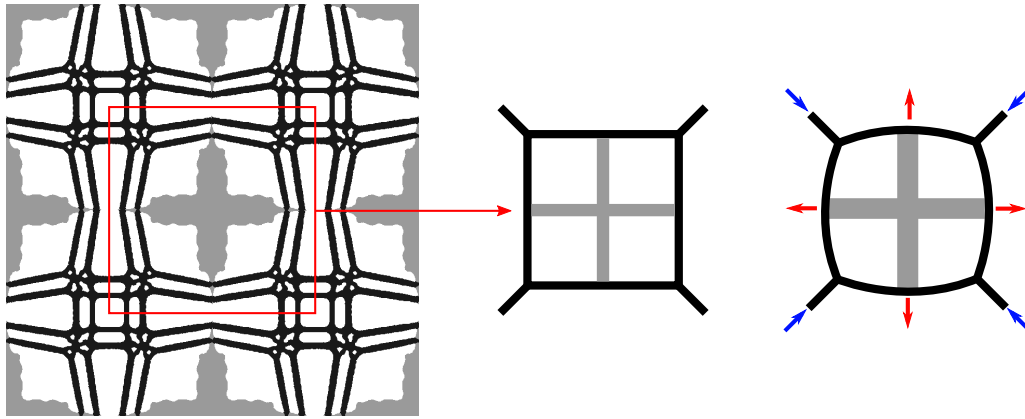


Figure VI.8 – Illustration des mécanismes présent dans la solution Zéro2. À gauche la cellule unitaire répétée (2x2) dont on extrait une nouvelle cellule unitaire translattée (encadrée en rouge), au milieu une simplification de la cellule unitaire translattée, à droite la déformation schématique subie par la cellule quand elle est soumise à une élévation uniforme de température, la dilatation plus importante de la phase grise met en flexion la phase noire (flèches rouges), de cette flexion résulte un retrait global de la cellule (flèches bleues).

### Dilatation thermique négative

Nous cherchons ici à obtenir un composite ayant une dilatation thermique négative, nous souhaitons donc atteindre le point de **dilatation thermique négative** ( $K^* = 0.03; \alpha^* = -2.4$ ) que nous avons défini sur les bornes de Gibiansky-Torquato durant le paragraphe précédent. Pour se faire, nous reprenons la formulation de l'étape de recherche (V.42), en choisissant :

- $K_{min} = 0.03$ , ce qui permet de laisser un peu de marge vis-à-vis du point d'intérêt,
- $\epsilon = 0.15$ , dans ce cas le paramètre epsilon a moins d'impact, ce point sera repris plus tard dans le paragraphe,

cela donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ & K > 0.03 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\% \\ & V_4 \geq 10\% \end{aligned}$$

La figure VI.9 présente l'initialisation et la forme finale obtenue après l'étape de recherche pour le résultat que nous nommons "Nég1". Le tableau VI.4 présente les propriétés effectives initiales et finale de ce même résultat.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\alpha$	4.25	-1.09	—
$K$	0.24	0.03	$\geq 0.03$
$V_1$	29%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	26%	24%	$10\% \leq . \leq 25\%$
itération	0	34	—

Table VI.4 – Propriétés effectives de la cellule initiale et de la cellule finale pour le design Nég1.

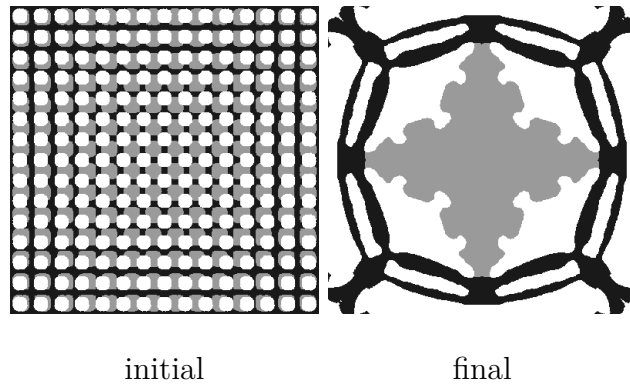


Figure VI.9 – Résultat de simulation : Nég1

Une lecture du tableau VI.4 permet de constater que l'ensemble des contraintes du problème sont respectées et que la dilatation thermique a encore une fois fortement diminuée. Nous notons cependant que dans ce cas l'algorithme a atteint la borne supérieure du volume de phase grise alors que pour les cas Zéro1 et Zéro2, la borne inférieure était atteinte.

Nous retrouvons ici un mécanisme similaire à celui présenté par la solution Zéro2 (cf figure VI.8), basé sur un principe de flexion.

La figure VI.10 présente un autre résultat de simulation, noté Nég2. Le tableau VI.5 contient les propriétés effectives du matériau à l'initialisation et à la finalisation du processus d'optimisation.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\alpha$	4.96	-0.76	—
$K$	0.21	0.03	$\geq 0.03$
$V_1$	20%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	31%	16%	$10\% \leq . \leq 25\%$
itération	0	135	—

Table VI.5 – Propriétés effectives des formes initiale et finale pour le résultat Nég2.

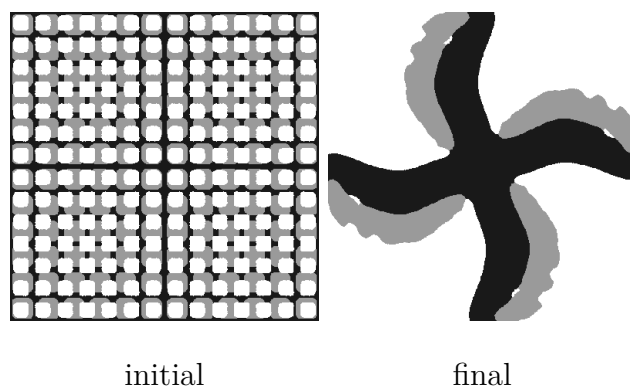


Figure VI.10 – Résultat de simulation : Neg2

Là encore le tableau VI.5 permet de constater le respect des contraintes du problème d'optimisation ainsi qu'une décroissance significative de la dilatation thermique au cours du calcul d'optimisation.

Cette solution présente le trait particulier d'utiliser un mécanisme de type bilame comme le montre la figure VI.11. Sur cette illustration nous présentons une version simplifiée de la solution Nég2 (au centre) ainsi que son comportement lors d'une élévation uniforme de la température (à droite).

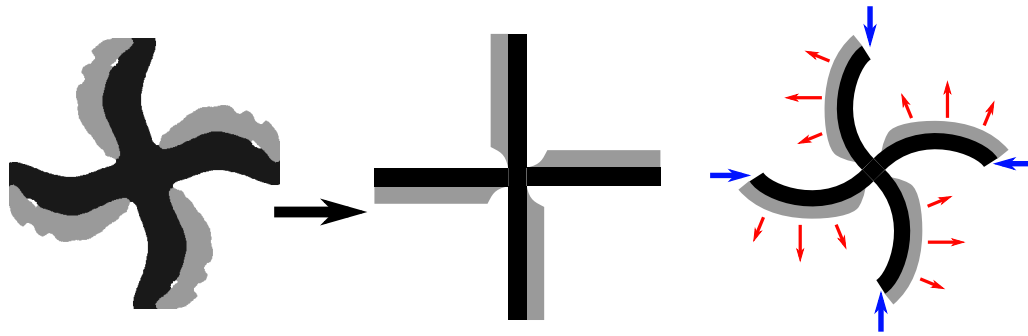


Figure VI.11 – Explication de la solution Nég2. À gauche le design final de Nég2, au milieu sa version simplifiée faisant apparaître des mécanismes de bilame, à droite la déformation schématisée subie par la cellule quand elle est soumise à une élévation uniforme de température, la dilatation plus importante de la phase grise cause la courbure des bilames (flèches rouges), de cette flexion résulte un retrait global de la cellule (flèches bleues).

### Solutions moins optimales

Les simulations ayant généré les solutions les plus optimisées ont été présentées ci-dessus. Les différentes configurations initiales ont cependant abouti à une grande variété d'architectures, bien que moins optimisées en termes de dilatation thermique. La figure VI.12 rassemble quelques exemples et le tableau VI.6 fournit une analyse rapide de ces différentes solutions, les dilatations thermiques effectives finales sont indiquées, ainsi que les mécanismes apparaissant.

Solution	objectif	$\alpha_{final}^*$	mécanisme
a)	négatif	-0.58	à définir
b)	zéro	0.23	mixte bilame/flexion
c)	négatif	-0.65	bilame
d)	négatif	-0.78	mixte
e)	négatif	-0.65	mixte bilame/flexion
f)	négatif	-1.0	mixte bilame/flexion
g)	zéro	0.73	flexion
h)	négatif	-0.47	bilame
i)	zéro	0.21	mixte

Table VI.6 – Propriétés effectives et mécanismes émergent pour les solutions moins optimisées de la figure VI.12.

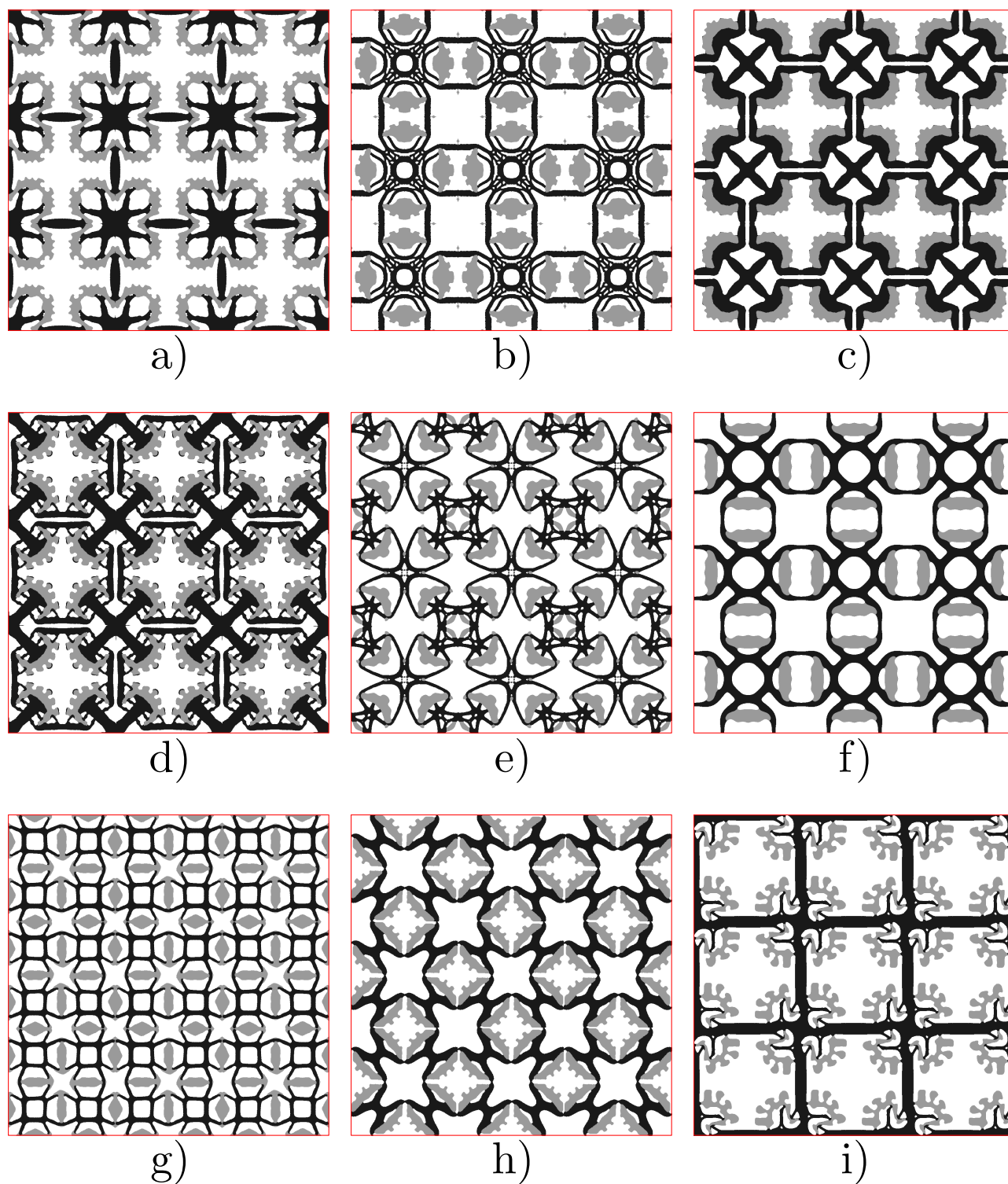


Figure VI.12 – Extrait d'autres solutions obtenues lors du process d'optimisation.



## 2.2 Étape d'isotropisation

Nous avons introduit précédemment une série de solutions comportant des mécanismes de contrôle de la dilatation thermique et dont les propriétés effectives approchent les points d'intérêts défini en début de chapitre. Cependant elles ne sont pas **isotropes**, ce qui signifie que leurs performances ne peuvent être comparées aux bornes de Gibiansky-Torquato (cf. annexe B). Dans ce sous paragraphe nous appliquons la deuxième étape du processus d'optimisation (V.42) qui consiste à rendre nos solutions isotropes tout en conservant leurs performances obtenues précédemment.

Il est important de noter que chaque architecture définie lors de la première étape est un minimum local du problème de recherche, bien qu'elles aient été classées par performances, **rien n'indique qu'il soit possible de les rendre isotropes sans dégrader leurs propriétés!** Afin de maximiser nos chances d'obtenir un design isotrope, nous avons appliqué l'étape d'isotropisation sur toutes les solutions obtenues durant l'étape de recherche, même les moins performantes. Nous présentons ici les résultats les plus performants parmi ceux ayant atteint l'isotropie.

### Dilatation thermique nulle

Nous reprenons ici les résultats approchant du point d'intérêt ( $\kappa^* = 0.526; \alpha = 0.0$ ), et nous fixons  $\alpha_{ref} = 0.05$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & errC_{iso} \\ & \alpha < 0.05 \\ & K > 0.05 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\%. \end{aligned} \quad (VI.3)$$

La figure VI.13 permet de justifier le choix des paramètres, notamment  $\alpha_{ref}$ . Ces paramètres ont été choisis de telle façon qu'un matériau respectant les contraintes du problème d'optimisation VI.3 et atteignant l'isotropie se trouve dans l'espace coincé entre le domaine interdit et la borne de Gibinasky-Torquato, soit dans le proche voisinage du point d'intérêt.

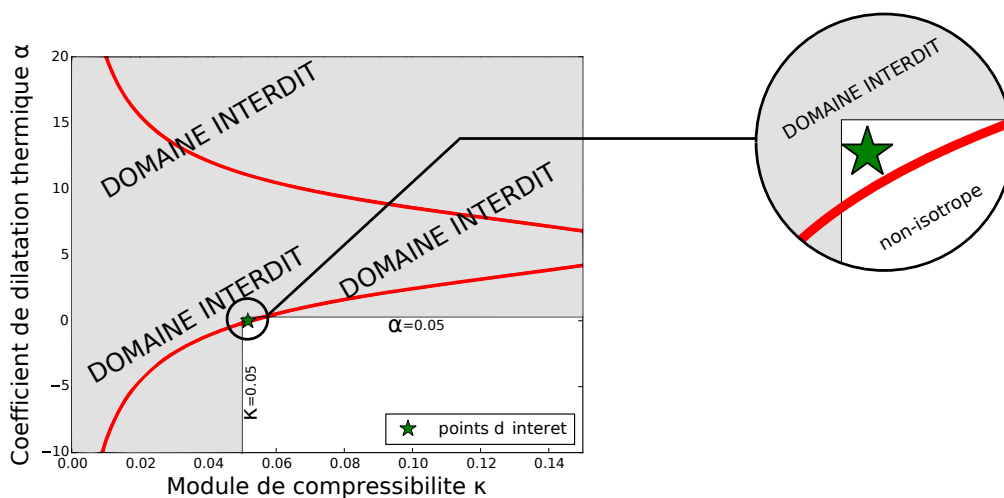


Figure VI.13 – Représentation du domaine interdit défini par les contraintes du problème d'optimisation VI.3

La figure VI.14 présente le résultat du process d'isotropisation mené sur le cas Zéro1, le tableau VI.7 présente les propriétés finales.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\sqrt{\text{err}C_{iso}}$	6%	1%	—
$\alpha$	-0.01	0.006	$\leq 0.1$
$K$	0.05	0.051	$\geq 0.05$
$V_1$	25%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	20%	23%	$\leq 25\%$
itération	0	10	—

Table VI.7 – Propriétés effectives avant et après isotropisation de la solution Zéro1.

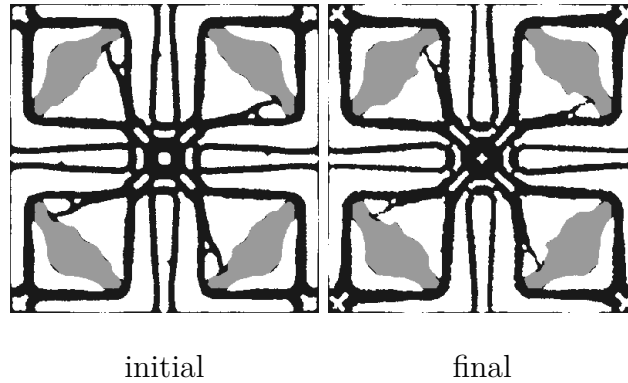


Figure VI.14 – Résultat Neg1 avant et après le processus d'isotropisation.

Le tableau VI.7 indique que l'ensemble des contraintes sont respectées à la fin du processus d'optimisation. L'erreur d'isotropie est réduite jusqu'à 1%, ce qui constitue une valeur acceptable.

En comparant les architectures initiales et finales présentées sur la figure VI.14 nous constatons que les changements de formes ont été très mineurs, l'erreur d'isotropie initiale (6%) est déjà faible, ce comportement était prévisible.

### Dilatation thermique négative

Nous recherchons maintenant à rendre les solutions voisines du point d'intérêt ( $\kappa^* = 0.03$ ;  $\alpha^* = -2.4$ ) isotropes, nous définissons le problème d'isotropisation comme

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & \text{err}C_{iso} \\ & \alpha \leq -1.0 \\ & K \geq 0.03 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\%. \end{aligned}$$

La contrainte  $\alpha < -1.0$  a été fixée à l'issue d'un raisonnement analogue à celui proposé précédemment (cf (VI.3)). On notera cependant que le seuil de  $\alpha < -1.0$  est très peu contraignant par rapport à la valeur cible de  $\alpha^* = -2.4$ . Le choix de retenir un seuil plus haut découle de l'écart entre les performances des solutions non isotropes et le point d'intérêt.

La figure VI.15 présente le résultat du processus d'isotropisation mené sur le cas Neg1, le tableau VI.15 présente les propriétés finales.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\sqrt{(\text{err}C_{iso})}$	18%	0.1%	—
$\alpha$ [ppm/K]	-1.09	-0.97	$\leq -0.9$
$K$ [GPa]	0.030	0.031	$\geq 0.03$
$V_1$	25%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	24%	25%	$\leq 25\%$
itération	0	11	—

Table VI.8 – Propriétés effectives avant et après l'étape d'isotropisation pour la solution Nég1.

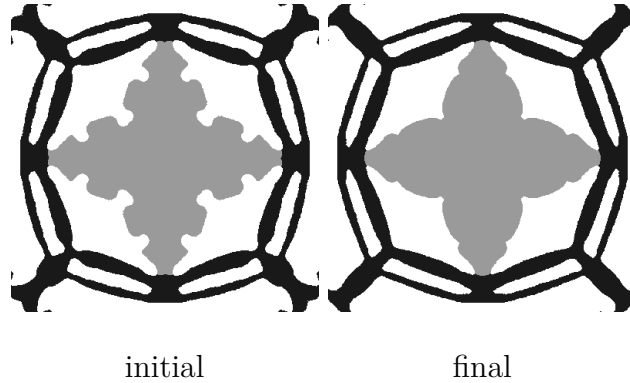


Figure VI.15 – Résultat de simulation pour l'isotropisation de Neg1

Pour cette architecture l'erreur d'isotropie est initialement plus importante que pour le précédent, elle est cependant réduite de deux ordres de grandeurs durant l'optimisation (cf. tableau VI.8). Là encore la forme est peu influencée par le processus d'isotropisation comme en atteste la figure VI.15.

## 2.3 Discussion

### Mécanismes de contrôle de la dilatation

Nous avons constaté que le contrôle de la dilatation thermique des matériaux architecturés utilise les mécanismes simples ayant été présenté au cours du chapitre IV. Cependant en regardant avec attention la figure VI.12 nous constatons qu'il se dégage un autre mécanisme encore non présenté jusqu'ici. La figure VI.16 expose la microstructure concernée par cet autre mécanisme, qui fonctionne par **opposition des dilatations thermiques des deux phases (mécanisme d'opposition)**. La figure VI.17 résume les différents mécanismes de contrôle rencontrés et ajoute le mécanisme d'opposition.

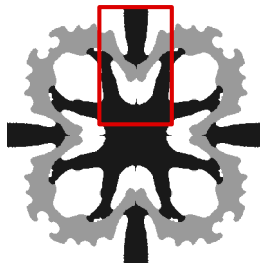


Figure VI.16 – Microstructure présentant un mécanisme de contrôle particulier.

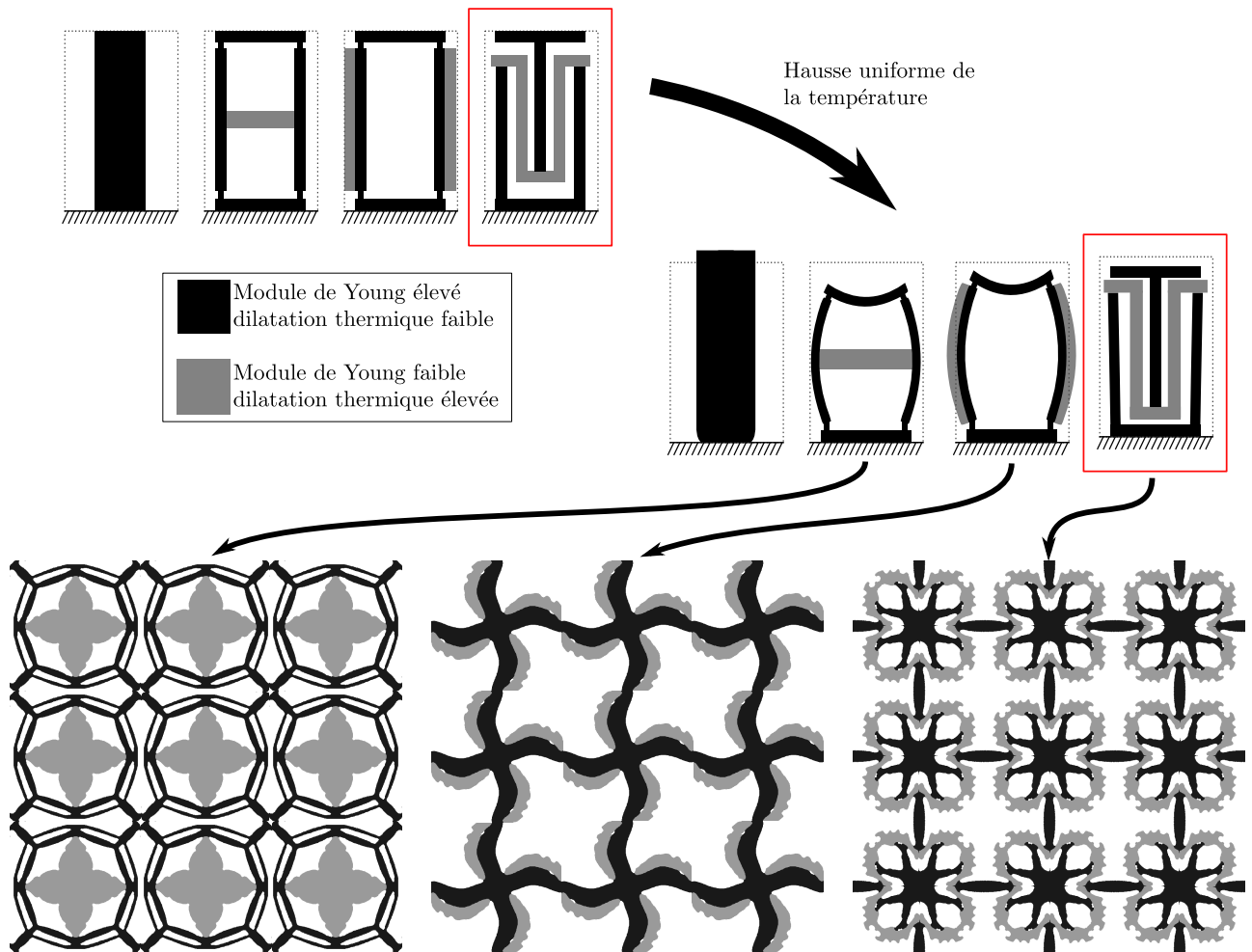


Figure VI.17 – Mécanismes de contrôle de la dilatation thermique 1D et des exemples 2D.

Si on dresse un rapide bilan de l'occurrence de ces différentes solutions, il apparaît que, pour l'obtention de propriétés extrêmes thermoélastiques :

- Les mécanismes à flexion sont largement majoritaires parmi les formes optimisées, ce qui laisse supposer que ces formes sont à préférer pour le contrôle de la dilatation thermique.
- Une seule solution fonctionnant uniquement sur le principe du bilame a été obtenue (cf. figure VI.8), ce concept semble en effet moins performant, on notera cependant l'existence de nombreuses solutions proposant des mécanismes mixtes entre flexion et bilame.
- Là encore, très peu de solutions utilisant le principe de l'opposition, qui semble être une solution largement moins performante que les autres du fait de sa tortuosité.

**Remarque :** Bien que nettement moins performant, le mécanisme d'opposition attire néanmoins l'attention de par son principe de fonctionnement. Il introduit en effet nettement moins de contraintes thermiques au sein de la structure dans la mesure où la dilatation des deux phases est quasiment libre. Cela peut s'avérer être un argument de taille si l'on considère la durabilité des structures proposées.

### Allure générale des formes

Nous constatons que plusieurs formes ne possèdent pas de contours bien lisses, ce qui est habituellement la signature du fait que la solution a "mal" convergé (voir figure VI.18). En effet, les aspérités se formant à la surface ne jouent pas de rôle mécanique, elles constituent donc des réserves de matière pouvant permettre d'augmenter la rigidité de la structure, ce qui

indique que cette dernière n'est pas optimale.

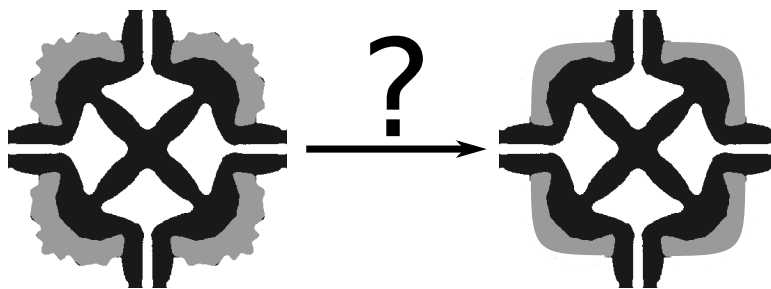


Figure VI.18 – Solution comportant des aspérités ne jouant pas de rôle particulier. On comprend que la solution de gauche aura les mêmes propriétés que la solution de droite dont les contours sont lissés.

Cependant dans le cas des propriétés thermoélastiques le fait de déplacer la matière d'une zone "inutile" vers une zone jouant un rôle mécanique peut augmenter la dilatation thermique, qui se trouve être l'objectif du problème. De ce fait, il peut être "plus optimal" au sens du problème traité de laisser de la matière dans une position où elle ne joue aucun rôle.

Le fait que l'ensemble de la matière ne soit pas utilisée indique que la solution proposée est un minimum local de faible performance. Cela signifie en effet que dans la configuration actuelle, une fraction de la matière disponible ne peut plus être utilisée pour améliorer la performance.

### Matériaux aux propriétés extrêmes

Les deux résultats isotropes sont reportés sur les bornes de Gibiansky-Torquato correspondant à leurs propriétés matériaux, en figure VI.19. On constate que les architectures proposées

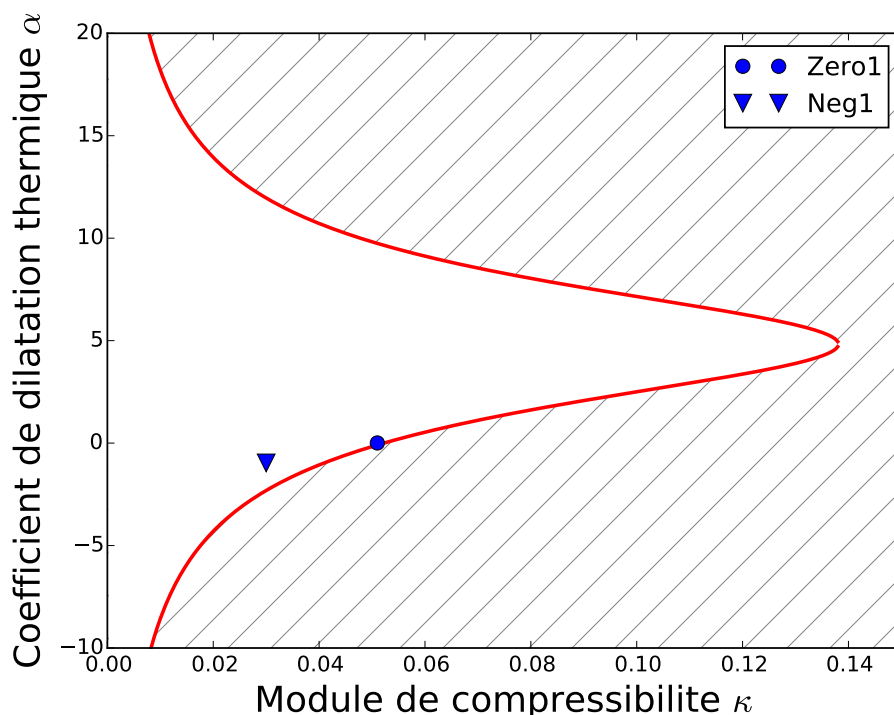


Figure VI.19 – Bornes de Gibiansky-Torquato pour les cas considérés, les points correspondant aux cas Zéro1 et Neg1 ont été placés sur le graphique.

s'approchent des limites théoriques des propriétés atteignables.

Nous notons cependant que la phase d'isotropisation est difficile à mener à bien, en effet seul un nombre très restreint de solution ont réussi à passer sous la barre des 1% d'erreur d'isotropie. Cela était en fait prévisible compte-tenu de la procédure telle qu'elle a été définie :

- La phase de recherche s'arrête lorsque un minimum local du problème d'optimisation a été atteint.
- Or, le fait d'initialiser la phase d'isotropisation par la solution du problème précédent remplace le problème autour de ce minimum local.
- En conséquence, la marge de modification de la structure s'avère très faible pour atteindre l'isotropie, et seules les formes quasiment isotropes parviennent à obtenir une erreur inférieure à 1% sans sortir du domaine admissible.

L'étude des cas tests sans prise en compte des interfaces graduées se termine ici, nous nous intéressons maintenant aux mêmes cas tests, mais en prenant en compte une variation non-monotone des propriétés à la traversée de l'interface.

### 3 Optimisation des propriétés thermoélastiques avec gestion des interfaces graduées

Les cas tests définis par [Sigmund et Torquato \(1996\)](#) ont été traité dans le paragraphe précédent, en considérant une transition monotone des propriétés mécaniques entre les phases. Nous proposons maintenant de traiter de nouveau ces cas tests en prenant en compte une variation non monotone des propriétés mécanique à la traversée de l'interface entre les deux phases solides.

Nous considérons maintenant qu'il existe une interface graduée à la transition entre les phases 1 et 4 composant notre matériau. Le tableau VI.9 présente les propriétés physiques utilisées pour les différentes phases ainsi que pour l'interface non-monotone, pour l'intégralité de ce sous paragraphe. La figure VI.20 présente quant à elle la visualisation qui sera utilisée par la suite, nous distinguons en noir et en gris les deux phases solides, en blanc l'ersatz de vide et en rouge l'interface graduée.

Propriété	phase 1	phase 2& 3	phase 4	interface 1 → 4
$E$ [GPa]	0.91	$0.91 \times 10^{-3}$	0.91	1.3
$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3
$\alpha$ [ppm/K]	1	1	10	0.5
Vol. relatif	0.25	0.5	0.25	— — —
Couleur	noire	blanche	grise	rouge

Table VI.9 – Propriétés mécaniques utilisées pour les cas tests prenant en compte une variation non-monotone des propriétés mécaniques à la traversée de l'interface entre  $\Phi_1$  et  $\Phi_4$ .

L'interface est caractérisée par les propriétés définies en son centre, afin de définir les propriétés dans toute la zone de transition nous utilisons le schéma d'interpolation défini par l'équation (II.25). Nous définissons ainsi une transition lisse des propriétés à la traversée de l'interface entre les phase 1 et 4. Nous considérons ici une interface comportant de meilleures propriétés mécaniques et une dilatation thermique plus faible que celle des phases constitutives. L'allure globale de la variation des propriétés thermomécaniques est illustrée sur la figure VI.21.

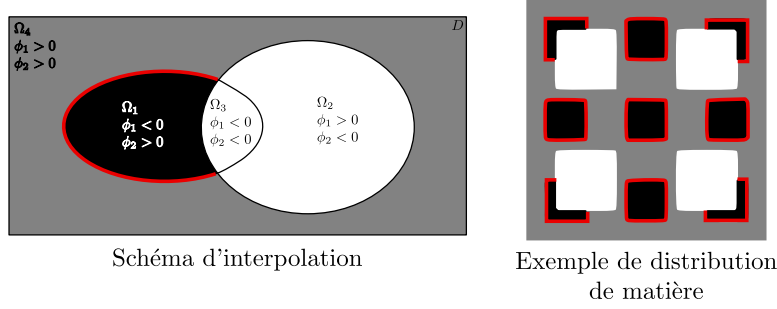


Figure VI.20 – Visualisation des phases à gauche et un exemple (à droite).

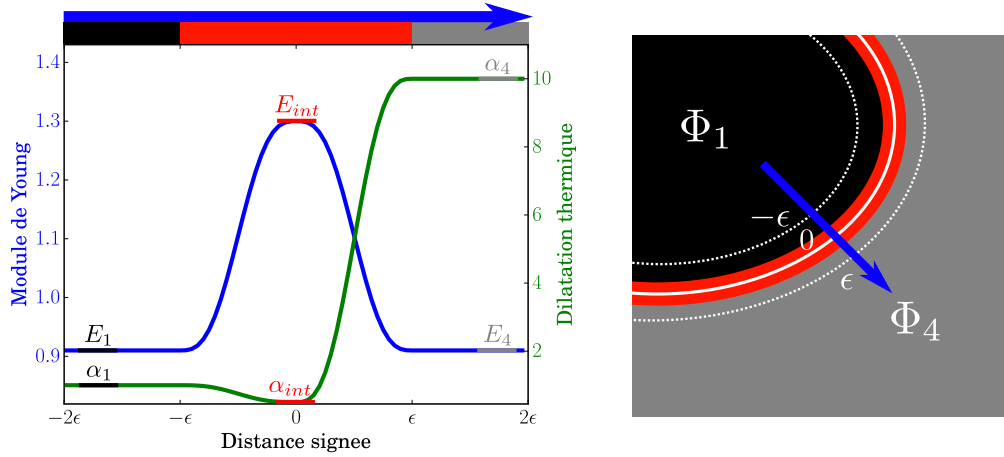


Figure VI.21 – Visualisation des phases à gauche et un exemple (à droite).

Nous adoptons la même stratégie que précédemment, pour le cas des interfaces monotones (cf. paragraphe 1), à savoir un processus d'optimisation en deux étapes dont les formulations sont

recherche			isotropisation	
$\min_{\Omega_1, r_4, \Omega_2, r_4}$	$\text{tr}(\bar{\alpha})$		$\min_{\Omega_1, r_4, \Omega_2, r_4}$	$errC_{iso}$
	$K > K_{min}$	$\rightarrow$		$\text{tr}(\bar{\alpha}) \leq \alpha_{ref}$
	$V_1 \leq V_{1, target}$			$K \geq K_{min}$
	$V_4 \leq V_{4, target}$			$V_1 \leq V_{1, target}$
				$V_4 \leq V_{4, target}$

La même structure que le paragraphe précédent est adoptée : nous présentons d'abord les solutions obtenues à la fin de la phase de recherche, puis celles issues de la phase d'isotropisation. Là encore, cela permet de dégager d'abord les mécanismes permettant le contrôle de la dilatation thermique.

La prise en compte d'interfaces graduées nécessite cependant quelques modifications afin de se prémunir de quelques artefacts numériques.

### 3.1 Modifications nécessaires de l'implémentation

Nous souhaitons mener à bien l'optimisation en tenant compte de la présence d'interfaces graduées entre les phases 1 et 4. La section 2 du chapitre II présente comment ces interfaces sont représentées et l'annexe C comment leur présence modifie le calcul des dérivées de formes des différentes quantités optimisées.

Cependant l'ajout de ces interfaces génère des complications numériques que nous allons présenter avant d'introduire les résultats. Nous traiterons aussi d'une méthode permettant d'éviter l'apparition de tels effets.

### Un artefact, "lien fantôme", à traiter

Cet artefact intervient dans les cas où la présence d'interface est bénéfique pour le problème traité, par exemple dans le cas où on souhaite maximiser la rigidité d'une structure où d'un matériau et que l'interface est plus rigide que les matériaux massifs. Cet effet a été décrit en premier par Vermaak *et al.* (2013), qui fait état de la formation de réseau d'interfaces ayant pour fonction de rigidifier une structure, dans le cas d'un problème de minimisation de compliance.

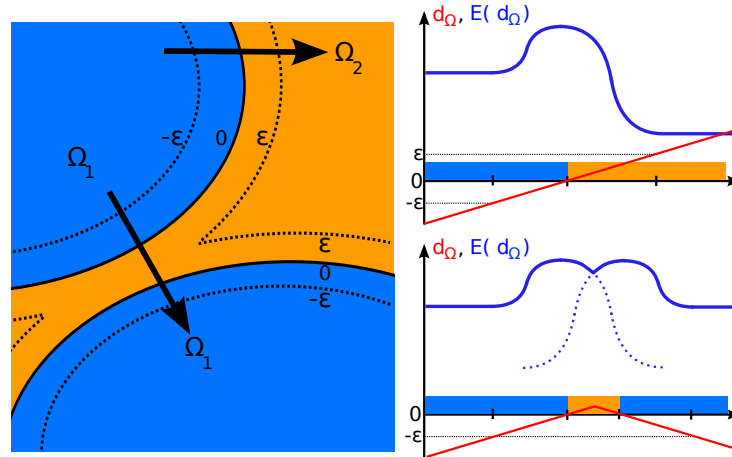


Figure VI.22 – Illustration de l'effet de lien fantôme. Nous observons la variation des propriétés mécaniques suivant deux chemins (flèches noires).

La figure VI.22 illustre ce phénomène, nous constatons qu'un lien mécanique fictif entre deux îlots de matière est formé quand ils ne sont séparés que par une petite zone de vide. Le premier chemin (en haut) présente la variation non-monotone du module de Young à la traversée de l'interface, du matériau massif (bleu) au vide (jaune). Nous constatons que cette dernière est plus rigide que le matériau massif bleu. Le second chemin (en bas) illustre quant à lui la transition solide-vide-solide. Nous constatons que dans ce cas, la variation du module de Young semble peu réaliste : bien qu'il y ait du vide entre les deux îlots bleus, la variation du module de Young laisse supposer un lien mécanique fort. Nous appelons ce cas de figure un lien fantôme ("ghost link").

L'artefact "ghost link" est exploité par l'algorithme d'optimisation car il permet la création de structures très rigides en utilisant peu de matière, comme l'illustre la figure VI.23.

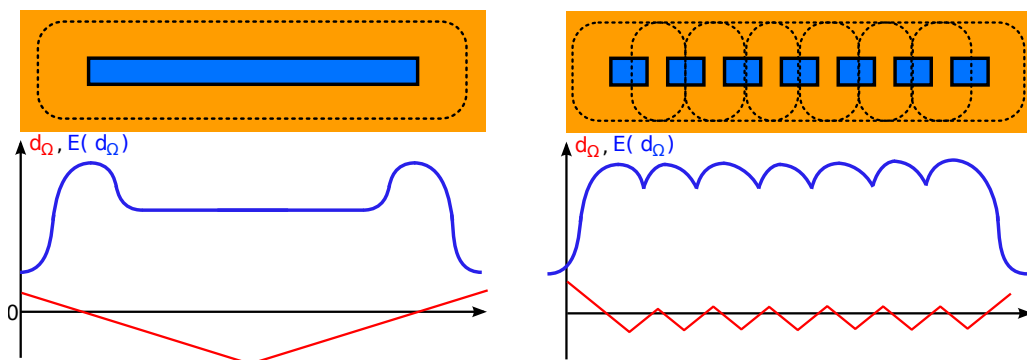


Figure VI.23 – Exemple d'utilisation de l'effet ghost link pour la création de barre à grande rigidité et à volume réduit. À gauche une barre normale avec en dessous un profil de sa rigidité. À droite une barre utilisant l'effet ghost link, on voit comment sa rigidité est accrue malgré son volume réduit.

La figure VI.24 présente un matériau architecturé optimisé avec la prise en compte des interfaces



graduées, on voit comment l'effet ghost link est exploité pour créer un réseau rigide d'interface au sein de la structure.

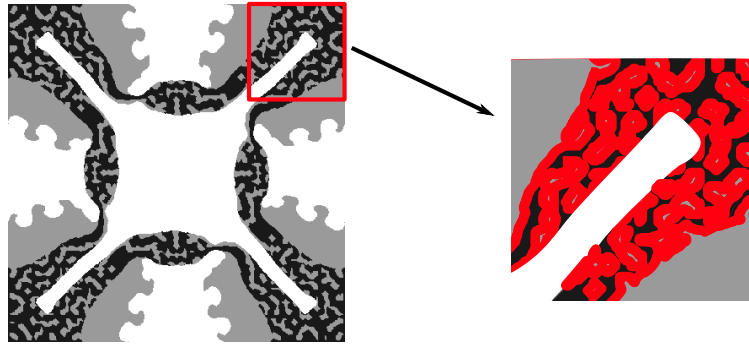


Figure VI.24 – Exemple de résultat d'optimisation de matériau avec prise en compte des interfaces graduées. À gauche la structure avec les interfaces 1->4 masquées, à droite un zoom local avec les interfaces graduées affichées. On voit comment l'ajout de petites inclusions de phase grise dans la phase noire permet de créer un réseau rigide d'interface.

### Suppression des artefacts ghost links par projection

Nous proposons ici une méthode simple pour éviter les artefacts ghost link, il s'agit d'une projection empêchant leur apparition. La solution consiste en un décalage de la levelset lors de l'interpolation des propriétés mécaniques. Nous proposons de modifier légèrement l'interpolation selon

$$P(d_\Omega) \rightarrow P(d_\Omega + d_0), \quad (\text{VI.4})$$

avec  $d_0$  est le décalage de la distance signée dont la figure VI.25 illustre l'effet.  $d_0$  peut être interprété physiquement de deux façons différentes suivant sa valeur :

- $d_0 < 0$  peut être considéré comme correspondant à une épaisseur minimale de matière.
- $d_0 > 0$  est quant à lui similaire à l'application d'une épaisseur minimale du vide.

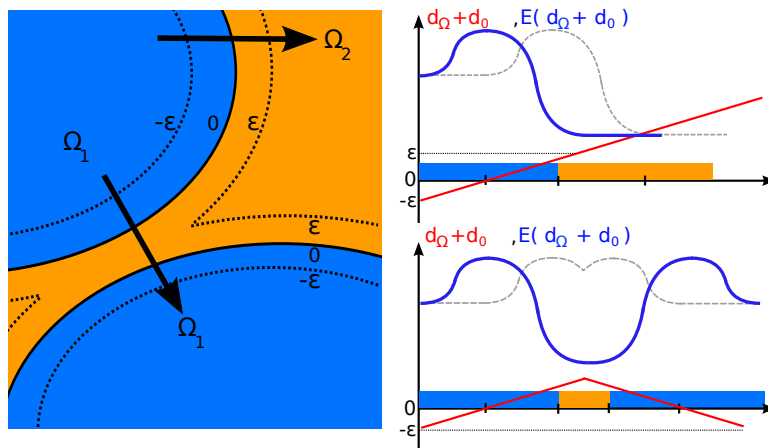


Figure VI.25 – Influence du paramètre  $d_0$  sur l'effet ghost link. Ici on a choisi  $d_0 = \epsilon$ , Nous observons alors comment ce choix permet de supprimer les ghost links.

En pratique il a été constaté que choisir  $d_0 = \epsilon$  s'avère suffisant pour empêcher la formation de ghost link, cette valeur a été utilisée pour les simulations présentées par la suite. Maintenant que l'artefact ghost link est corrigé, nous présentons plusieurs solutions intéressantes pour les cas tests définis dans la section 1.

### 3.2 Étape de recherche

Nous reprenons ici la recherche de solution atteignant les points d'intérêt représentés par les étoiles vertes sur la figure VI.1. Comme lors du précédent paragraphe le processus d'optimisation est découpé en une étape de recherche et une étape d'isotropisation. Nous présentons maintenant la première étape.

#### Dilatation thermique nulle

Nous cherchons à obtenir un hybride ayant une dilatation thermique nulle, nous souhaitons donc atteindre le point de **dilatation thermique nulle** ( $K^* = 0.526; \alpha^* = 0.0$ ). Nous reprenons la même formulation du problème de recherche que celle utilisée dans le paragraphe 2. Nous enlevons dans un premier temps la contrainte de volume maximum sur la phase 4 afin de laisser plus de liberté à l'algorithme d'optimisation. Cela donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, r_4, \Omega_2, r_4} \quad & \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ & K \geq 0.05 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \geq 20\%. \end{aligned} \tag{VI.5}$$

La figure VI.26 présente un résultat de simulation que nous nommons ZéroInt1. Le tableau VI.10 regroupe les propriétés effectives initiales et finales du matériau obtenu.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\alpha$	2.45	-0.64	—
$K$	0.11	0.05	$\geq 0.05$
$V_1$	2%	23%	$\leq 25\%$
$V_4$	21%	26%	$\geq 20\%$
itération	0	45	—

Table VI.10 – Propriétés effectives initiales et finales pour le design ZéroInt1, présenté sur la figure VI.26.

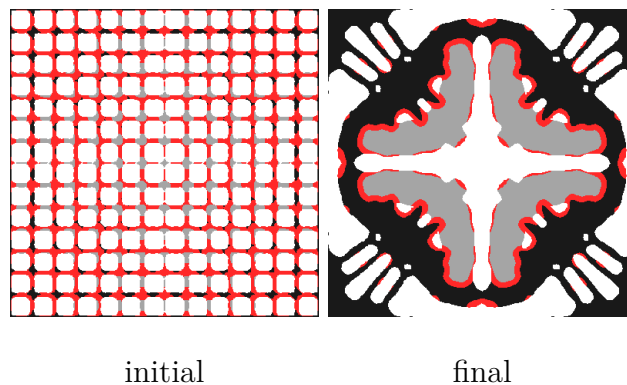


Figure VI.26 – Résultat de simulation : ZéroInt1

À partir du tableau VI.10 nous constatons que l'ensemble des contraintes du problème d'optimisation (VI.5) sont respectées, nous remarquons de plus la très faible dilatation thermique obtenue.

Nous remarquons ici l'utilisation d'un mécanisme se basant sur le principe du bilame, la figure VI.27 présente le schéma de concept de la structure. L'apport des interfaces pour cette structure

n'est pas très clair, on peut cependant le comprendre en considérant qu'elles sont utilisées ici pour favoriser l'apparition de points de pivot encerclés en bleu sur la figure VI.27. Il semble que l'algorithme d'optimisation tente de créer des zones ayant une très faible rigidité en flexion, cela dans le but de faciliter la rotation. Cette tendance à créer des pivots est compensée par la nécessité de conserver une rigidité imposée par la contrainte de module de compressibilité  $K$ . L'interface utilisée ici étant plus rigide, elle permet de créer une zone plus fine ayant la même rigidité axiale, et donc de faciliter un peu plus la flexion sans trop diminuer la valeur de  $K$ .

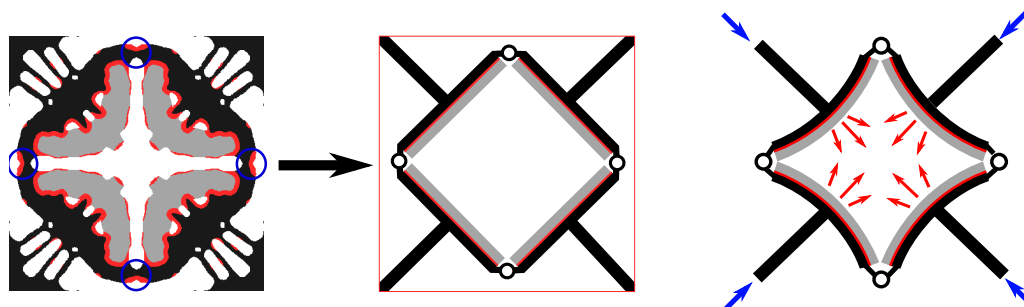


Figure VI.27 – Résultat de simulation ZéroInt1 (à gauche) et son schéma de concept (à droite). On voit apparaître des zones de faible épaisseur (encerclées en bleu) qui tendent à jouer le rôle de pivot.

### Dilatation thermique négative

Nous reprenons là encore la formulation utilisée pour la recherche du point d'intérêt ( $\kappa^* = 0.03$ ;  $\alpha^* = -2.4$ ) introduite dans le paragraphe 2, la borne inférieure sur le volume de la phase 4 a cependant été enlevée car elle n'influe pas sur le calcul, cela donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & \text{tr}(\bar{\alpha}) \\ & K \geq 0.03 \\ & V_1 \leq 0.25 \\ & V_4 \leq 0.25. \end{aligned} \tag{VI.6}$$

La figure VI.28 présente un résultat de simulation que nous nommons NégInt1. Le tableau VI.11 regroupe les propriétés effectives initiales et finales du matériau ainsi obtenu.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\alpha$	3.79	-1.65	—
$K$	0.17	0.03	$\geq 0.03$
$V_1$	25%	25%	$\leq 25\%$
$V_4$	23%	23%	$\leq 25\%$
itération	0	62	—

Table VI.11 – Propriétés effectives initiales et finale pour le design NégInt1, présenté sur la figure VI.28.

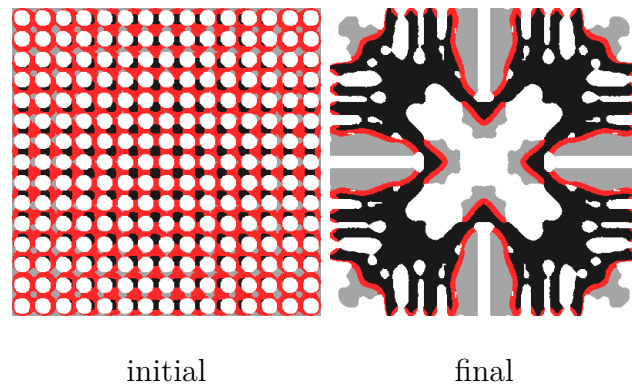


Figure VI.28 – Résultat de simulation NégInt1

Les contraintes du problème d'optimisation VI.6 sont respectées (cf. tableau VI.11). Les mécanismes permettant le contrôle de la dilatation sont ici plus difficile à identifier, la figure VI.29 présente l'interprétation du mécanisme de contrôle pour ce design, qui semble être une combinaison de bilames.

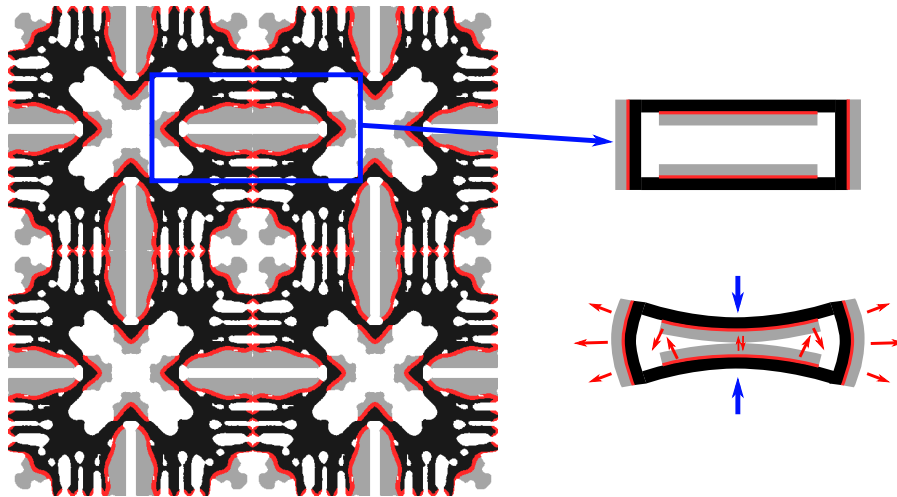


Figure VI.29 – Interprétation du design NégInt1 (cf. figure VI.28). Nous isolons une zone que nous identifions comme étant similaire à un assemblage de bilames. Cette zone semble être la seule contenant un mécanisme permettant le contrôle de la dilatation. Nous présentons en bas à droite l'effet d'une élévation uniforme de la température : les bilames se courbent (flèches rouges), entraînant une contraction verticale (flèches bleues).

### Solutions moins optimales

Comme lors de la première série de simulations présentée dans le paragraphe 2 les multiples processus d'optimisation ont fourni une grande variété d'architectures dont nous avons présenté ci-dessus les plus optimisées. Nous introduisons maintenant d'autres solutions, moins optimales. La figure VI.30 présente neuf résultats de simulations dont la cellule de périodicité a été répétée trois fois dans les deux directions de l'espace, le tableau VI.12 rassemble les performances et quelques informations sur ces mêmes solutions.

Solution	objectif	$\alpha_{final}^*$	mécanisme
a)	zéro	-0.29	indéfini
b)	zéro	-0.55	indéfini
c)	zéro	-0.31	bilame
d)	négatif	-1.59	opposition
e)	négatif	-1.57	flexion
f)	négatif	-1.19	bilame
g)	négatif	-1.34	mixte bilame/flexion
h)	zéro	-0.42	flexion
i)	zéro	-0.82	mixte bilame/flexion

Table VI.12 – Propriétés effectives et mécanismes émergeant pour les solutions moins optimisées de la figure VI.12.

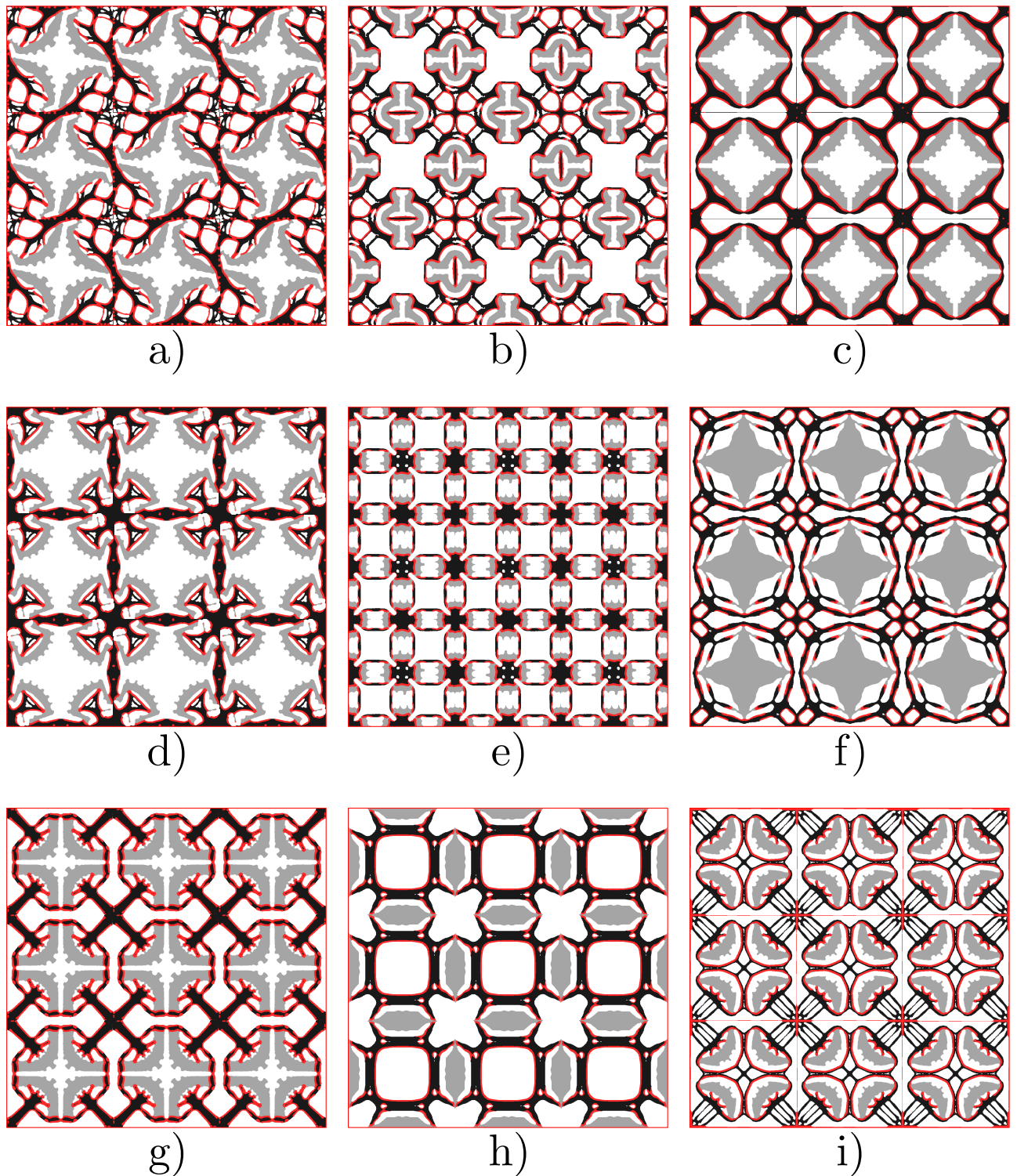


Figure VI.30 – Extrait d'autres solutions obtenues lors du process d'optimisation.

### 3.3 Étape d'isotropisation

Dans le paragraphe précédent nous avons introduit plusieurs solutions obtenues pendant l'étape de recherche. Comme pour la première série d'optimisation du paragraphe 2, nous allons maintenant reprendre ces architectures et appliquer l'étape d'isotropisation. Cette étape a été menée sur l'ensemble des microstructures obtenues durant la phase de recherche, même les moins optimisées. Nous présentons ici uniquement les plus performantes.

#### Dilatation thermique nulle

Nous reprenons ici les résultats approchant du point d'intérêt ( $\kappa^* = 0.526; \alpha = 0.0$ ), et nous fixons  $\alpha_{ref} = 0.05$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_{1,r4}, \Omega_{2,r4}} \quad & errC_{iso} \\ & \alpha \leq 0.05 \\ & K \geq 0.05 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\%. \end{aligned} \tag{VI.7}$$

La figure VI.31 présente un résultat de simulation ainsi que son diagramme de convergence. Le tableau VI.13 regroupe les propriétés finales du matériau ainsi construit.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\sqrt{(errC_{iso})}$	37%	0.1%	—
$\alpha$	-0.5	-0.19	$\leq 0.1$
$K$	0.06	0.06	$\geq 0.05$
$V_1$	0.25	0.243	$\leq 0.25$
$V_4$	0.28	0.231	$\leq 0.25$
itération	0	10	—

Table VI.13 – Propriétés effectives du design initial et final ZéroInt1, présenté sur la figure VI.31.

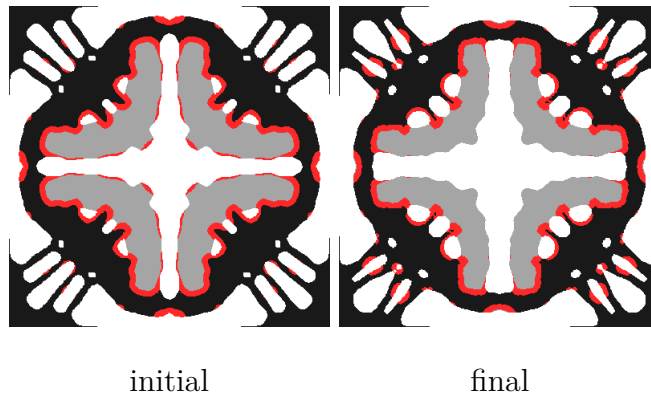


Figure VI.31 – Résultat de simulation : ZéroInt1

Le tableau VI.13 indique que les contraintes du problème d'optimisation VI.7 sont respectées, l'erreur d'isotropie a chuté de deux ordres de grandeur durant le processus d'optimisation. L'étape d'isotropisation se termine en une dizaine d'itérations et les changements de formes observés restent mineurs.

Le point correspondant à cette solution est reporté sur la figure VI.33.

### Dilatation thermique négative

Nous reprenons ici les résultats obtenus lors de la recherche de solutions approchant le point d'intérêt ( $\kappa^* = 0.03$ ;  $\alpha^* = -2.4$ ), la formulation d'isotropisation retenue est

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, r_4, \Omega_2, r_4} \quad & errC_{iso} \\ & \alpha \leq -1.5 \\ & K \geq 0.03 \\ & V_1 \leq 25\% \\ & V_4 \leq 25\%. \end{aligned} \tag{VI.8}$$

La figure VI.32 présente un résultat de simulation ainsi que son diagramme de convergence. Le tableau VI.14 regroupe les propriétés finales du matériau ainsi obtenu.

Propriété	valeur initiale	valeur finale	contrainte
$\sqrt{errC_{iso}}$	25%	0.2%	—
$\alpha$	-1.65	-1.8	$\leq -1.5$
$K$	0.03	0.03	$\geq 0.03$
$V_1$	25%	24.8%	$\leq 25\%$
$V_4$	23%	23.1%	$\leq 25\%$
itération	0	48	—

Table VI.14 – Propriétés effectives pour le design initial et final présenté sur la figure VI.32.

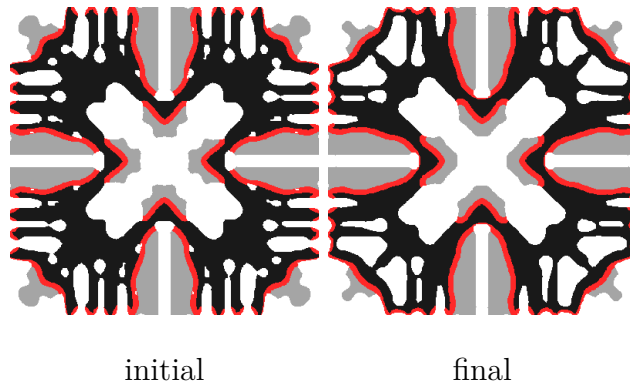


Figure VI.32 – Design NégInt1 avant et après l'étape d'isotropisation.

Le tableau VI.14 permet de vérifier que l'ensemble des contraintes du problème d'optimisation VI.8 sont respectées. L'erreur d'isotropie est là encore réduite de deux ordres de grandeur. La solution est peu modifiée par le processus d'isotropisation.

Le point correspondant à cette architecture est reporté sur la figure VI.33.

### Bornes de Gibiansky-Torquato

Afin de comparer les microstructures obtenues en considérant des interfaces monotones ou graduées non monotones, nous replaçons l'ensemble des résultats précédents sur un diagramme de Gibiansky-Torquato, le tout sur la figure VI.33.

Nous observons que les propriétés effectives obtenues en tenant compte des interfaces graduées sont globalement plus proche de la borne estimée de Gibiansky-Torquato, nous remarquons même que le résultat ZéroInt1 (cf. figure VI.26) dépasse même la borne !



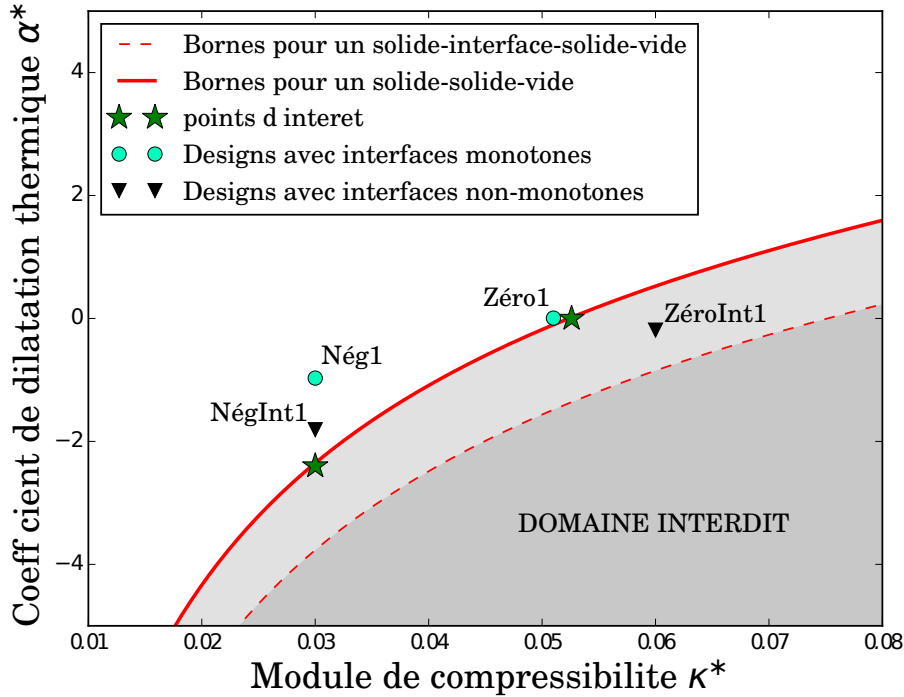


Figure VI.33 – Bornes de Gibiansky-Torquato et points de données correspondant aux résultats de simulation.

Il faut cependant noter que la borne tracée pour le matériau hétérogène à trois phases solide-solide-vide (courbe rouge en trait plein) n'est pas rigoureusement représentative de celui pour lequel une interface graduée est prise en compte. Ce matériau solide-interface-solide-vide peut être considéré, dans le cadre de l'homogénéisation, comme un matériau à quatre phases. Nous avons ré-estimé une borne de Gibiansky-Torquato en tenant compte d'une quatrième phase représentant l'interface, cela afin de permettre une comparaison plus juste avec les propriétés de nos matériaux solide-interface-solide-vide. Cette nouvelle borne est représentée par la courbe rouge discontinue sur la figure VI.33. Les fractions volumiques utilisées pour les bornes ont été évaluées a posteriori à partir du périmètre d'interface et de l'épaisseur  $2\epsilon$  de la zone de transition des propriétés. Les propriétés utilisées sont rassemblées dans le tableau VI.15. Nous constatons que l'ajout de la "phase interface" décale les bornes, et que l'ensemble de nos matériaux comportant des interfaces graduées non-monotone se retrouvent maintenant à l'intérieur de ces nouvelles limites.

Propriété	phase 1	phase 2& 3	phase 4	interface 1 → 4
$E$ [GPa]	0.91	$0.91 \times 10^{-3}$	0.91	1.3
$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3
$\alpha$ [ppm/K]	1	1	10	0.5
Vol. relatif	22.5%	50%	22.5%	5%
Couleur	noire	blanche	grise	rouge

Table VI.15 – Propriétés mécaniques utilisées pour le calcul de la borne de Gibiansky-Torquato prenant en compte les interface graduées, tracée en rouge discontinu sur la figure VI.33.

### 3.4 Discussion

#### Influence des interfaces graduées sur les propriétés atteignables

Nous avons évoqué durant le chapitre IV paragraphe 3 le fait qu'ajouter une interface graduée dans un bilame modifiait ses propriétés thermoélastiques atteignables, nous avons observé qu'il en va de même pour l'optimisation des propriétés thermoélastiques d'un matériau architecturé. La prise en compte d'interfaces graduées non-monotones ayant une plus grande rigidité permet d'atteindre des coefficients de dilatation thermique encore plus négatifs. Les solutions proposées NégInt1 et ZéroInt1 présentent en effet des **dilatations thermiques plus faibles pour des rigidités identiques ou plus importantes** que les solutions Nég1 et Zéro1 respectivement. Nous avons de plus obtenu une solution (ZéroInt1) sortant des bornes théoriques de Gibiansky-Torquato (cf. figure VI.33). Ce propos reste cependant à nuancer car la présence de l'interface graduée invalide la borne telle que nous l'avons calculée. Cette tendance a été confirmée par le calcul d'une nouvelle borne de Gibiansky-Torquato prenant en compte la présence de l'interface par l'ajout d'une troisième phase solide (cf figure VI.33). Nous constatons alors que cette nouvelle borne est plus large, et qu'elle englobe la solution ZéroInt1.

Nous concluons que dans les cas étudiés ici les propriétés des interfaces ont une influence non négligeable sur les propriétés atteignables. Cela peut même se justifier à l'aide des bornes de Gibiansky-Torquato.

#### Interprétation du rôle des interfaces

Il semble que la première raison pour laquelle les interfaces plus rigides sont bénéfiques est le fait qu'elles permettent d'augmenter la rigidité tout en réduisant l'épaisseur des zones jouant le rôle de pivots (cf figure VI.27). Cela permet de conserver une rigidité importante en traction/compression tout en réduisant la rigidité de flexion. De cette façon, il est plus facile de créer des mécanismes permettant le contrôle de la dilatation thermique tout en conservant un module de compressibilité respectant la contrainte du problème d'optimisation.

Afin d'exploiter au mieux la plus grande rigidité des interfaces, ces dernières se retrouvent souvent en situation de percolation à travers le domaine optimisé, ou encore dans les zones les plus sollicitées mécaniquement.

#### Effet sur les mécanismes de contrôle de la dilatation

Les résultats optimisés présentés dans ce paragraphe ont la particularité d'utiliser majoritairement des mécanismes de type bilame. Il n'a pas été établi de justification précise de cette observation, plusieurs pistes subsistent :

- Les mécanismes bilames nécessitent de grandes zones de contact entre les différentes phases. Les autres mécanismes utilisent des zones de liaison plutôt ponctuelles alors que le bilame produit des surfaces étendues.
- Les mécanismes à bilames permettent d'aligner l'interface sur la direction de sollicitation, et constituent donc un bon moyen de tirer parti de la grande rigidité de l'interface.

La conclusion importante de ce paragraphe reste que le fait de prendre en compte des interfaces graduées peut changer de manière conséquente les formes optimales.

## Bilan du chapitre VI

---

Nous avons appliqué la formulation décrite dans le chapitre V à deux cas d'études qui sont

- L'obtention d'un matériau ayant une dilatation thermique nulle, l'intérêt d'un tel matériau a été discuté dans la chapitre IV.
- L'obtention d'un matériau ayant une dilatation thermique fortement négative.

Dans un premier temps nous avons traité ces deux exemples en considérant des interfaces aux transitions de propriétés monotones. Cela a permis de valider notre implémentation, mais aussi de fournir deux solutions aux cas exemples. Nous avons en particulier étudié les mécanismes apparaissant au sein des solutions afin de comprendre la cinématique locale œuvrant au sein de ces matériaux architecturés pour réaliser l'objectif. Il ressort de nos observations qu'il existe trois types de mécanismes qui sont :

- Les mécanismes à flexion.
- Les mécanismes à bilames.
- les mécanismes à opposition.

Ces mécanismes sont rassemblés sur la figure VI.17.

Dans un second temps nous avons de nouveau traité nos problèmes exemples en considérant cette fois la présence d'une interface graduée plus rigide séparant les deux phases solides de notre matériau architecturé.

Si les mécanismes observés sont les mêmes, nous avons remarqué deux tendances très différentes suivant que les interfaces non monotones soient ou non prise en compte :

- Sans les interfaces graduées, le mécanisme le plus courant est le mécanisme à flexion.
- Avec les interfaces graduées, le mécanisme le plus courant est le mécanisme à bilame.

À travers cette observation, nous concluons que **la présence des interfaces graduées modifie les formes optimales**. Les performances sont elles aussi modifiées.

La figure VI.33 rassemble les résultats du chapitre et donne une vue d'ensemble de l'influence des interfaces graduées sur les propriétés thermoélastiques effectives des matériaux architecturés.

# Conclusion de la Partie B

---

## Intérêt des méthodes d'optimisation de domaine

Le premier point de cette conclusion porte sur l'intérêt des méthodes d'optimisation de domaine à des fins exploratoires pour la définition de microstructures possédant des propriétés extrêmes. La première étude menée ici a permis de mettre en avant une série de structures de matériaux architecturés permettant le contrôle de la dilatation thermique nulle ou négative tout en maintenant une rigidité mécanique la plus grande possible.

Comme pour les résultats de [Sigmund et Torquato \(1997\)](#) et [Wang \*et al.\* \(2004\)](#), il apparaît que la majeure partie des solutions proposées ne sont pas aisément fabricables. De plus, les critères optimisés (dilatation thermique, module de compressibilité) ne tiennent pas compte de plusieurs aspects physiques qui peuvent se révéler limitant. On peut par exemple évoquer la faible résistance en fatigue thermique de la plupart des structures proposées compte-tenu de la présence de mécanismes où localement des concentrations de contraintes peuvent apparaître. Par exemple [Mercer \*et al.\* \(2015\)](#) proposent une étude sur la résistance à la fatigue thermique de telles microstructures et mentionnent une résistance à la fatigue deux ordres de grandeur en dessous de celle des matériaux massifs.

Cependant, toutes les formes isolées permettent avant tout de dégager des propositions de microstructures illustrées par les mécanismes de la figure VI.12. Les pistes ainsi obtenues nécessiteront ensuite une analyse approfondie analogue à celle proposées par [Mercer \*et al.\* \(2015\)](#) ou [Wei \*et al.\* \(2016\)](#), cela afin d'explorer leurs performances pour des sollicitations non prises en compte dans les calculs d'optimisation (par exemple, la résistance à la fatigue). Ces idées de designs, une fois retravaillées et adaptées, pourront fournir de nouveaux matériaux remplissant les vides des cartes d'Ashby (cf figure IV.2).

## Efficacité de la méthode proposée

La méthode proposées ici, basée sur la méthode des lignes de niveaux, présentent plusieurs avantages.

- Bien que plus sensible aux minimums locaux que la méthode SIMP utilisée par [Sigmund et Torquato \(1997\)](#), elle a été capable de fournir des résultats satisfaisant l'objectif et réalistes.
- De par sa nature, la méthode a permis de proposer une grande variété de solutions qui, bien que pas toujours optimales, ont permis de dégager différents types de mécanismes fondamentaux permettant le contrôle de la dilatation thermique.
- Le comportement global de la méthode est satisfaisant, on notera tout particulièrement la rapidité à la convergence : là où [Sigmund et Torquato \(1997\)](#) présentent une méthode nécessitant plusieurs milliers d'itérations, la méthode proposée en nécessite juste quelques centaines.



Troisième partie :

---

Intégration des matériaux architecturés  
et prise en compte des contraintes de  
fabrication



# Chapitre VII

## Du matériau architecturé à la structure : conception, intégration et production

---

1	Plusieurs pistes de conception de structures architecturées . . . . .	160
1.1	Solution à une échelle . . . . .	163
1.2	Solution utilisant des matériaux architecturés . . . . .	164
1.3	Bilan sur les différentes solutions . . . . .	165
2	Fabrication des structures architecturées . . . . .	166
2.1	Fabriquer et intégrer un matériau architecturé . . . . .	166
2.2	Fabriquer une structure architecturée . . . . .	170
3	Une présentation de quelques méthodes de fabrication additive . . . . .	172
3.1	Présentation de quelques méthodes et de leur intérêt . . . . .	172
3.2	Limitations des méthodes de fabrication additives . . . . .	174
	Bilan du chapitre VII . . . . .	176

---

### Résumé

Ce chapitre a pour but de proposer plusieurs pistes d'intégration des matériaux architecturés dans la conception de structures et aborde la question de leur fabrication.

Dans un premier temps, nous présentons quelques solutions pour l'intégration, et introduisons le concept de structure architecturée qui est une extension de celle du matériau architecturé. Nous comparons les performances de deux solutions, cela dans le but d'amener une discussion sur l'intérêt pratique des matériaux architecturés.

Nous aborderons ensuite la question de la réalisation des solutions proposées. Il est notamment question de la production de matériaux architecturés sous forme de semi-produit.

Le chapitre se termine par une introduction sur les méthodes de fabrication additive.



## De la conception du matériau architecturé à la conception de structure contenant ces nouveaux matériaux

Dans la partie B nous avons introduit une stratégie de conception de matériaux architecturés par optimisation de domaine, cela dans le but de remplir les vides dans l'espace des propriétés matériaux. Ces matériaux possèdent un grand potentiel (Brechet et Embury, 2013), cela a été présenté dans le chapitre IV. Ils peuvent présenter des propriétés physiques extrêmes, voire inatteignables parmi les matériaux monolithiques conventionnels. Plusieurs auteurs ont proposé des matériaux architecturés présentant par exemple un fort auxétisme, une dilatation thermique négative ou nulle, ou encore une forte résistivité thermique (Sigmund, 1995; Lakes, 1996; Wang *et al.*, 2014; Andreassen *et al.*, 2014). On cite ici indifféremment les auteurs ayant eu recours à des méthodes d'optimisation et ceux se basant sur leurs intuitions ou sur des mécanismes connus.

Ces nouveaux matériaux, bien que prometteurs, posent cependant la question de leur intégration au sein d'une structure, compte tenu de leurs géométries complexes. En d'autres termes les propriétés exceptionnelles qu'ils possèdent resteront théoriques s'il n'est pas possible de les intégrer convenablement dans une structure réelle soumise à un chargement donné.

### Le rôle de l'optimisation de domaine

La partie B fait état de l'utilisation de méthodes d'optimisation de domaine appliquées à la conception de matériaux architecturés, leur intérêt dans la recherche de microstructure a été souligné. Cependant leur application à la science des matériaux ne constitue qu'une branche de leur applications, on les retrouve majoritairement pour la conception automatisée de structures (Allaire *et al.*, 2002), d'ores et déjà appliquées industriellement avec des logiciels tels que TOSCA ou OPTISTRUCT. Étant déjà une pratique répandue, il apparaît donc naturel de se tourner vers ces mêmes méthodes pour optimiser l'intégration des matériaux architecturés au sein des structures.

Nous allons maintenant illustrer la problématique de l'intégration à travers plusieurs exemples pratiques.

## 1 Plusieurs pistes de conception de structures architecturées

Dans ce paragraphe nous étudions la conception de structures architecturées, qui sont une extension des matériaux architecturés que nous allons définir maintenant. Deux solutions seront présentées, nous comparons leurs performances, puis nous discuterons de leur fabrications dans le paragraphe suivant.

### Définition de la structure architecturée

Dans le chapitre IV le matériau architecturé a été défini comme un matériau hybride dont la cinématique de déformation locale est contrôlée par son architecture. Afin d'exploiter au mieux le potentiel des matériaux architecturés il est nécessaire que ces derniers soient composés de phases ayant un grand contraste de propriétés physiques, mais aussi de choisir judicieusement leurs architectures. Si toutes ces conditions sont remplies ils permettent d'étendre l'espace des matériaux, comme cela a été présenté dans le chapitre IV.

Nous proposons d'étendre la notion de matériau architecturé avec la notion de structure architecturée :

Nous appelons structure architecturée toutes structures comportant une cinématique locale enrichie. Cette définition rejoint le concept de mécanisme que l'on retrouve dans plusieurs publications traitant de l'optimisation de domaine (Allaire *et al.*, 2002; Wang *et al.*, 2005; Wang et Chen, 2009).

**Remarque :** Une structure constituée d'un matériau architecturé peut être considérée comme une structure architecturée.

### Un problème exemple

Afin de mieux illustrer le propos nous nous basons sur un exemple concret qui va permettre de comparer les différentes solutions proposées au long du chapitre.

Nous souhaitons définir un support ayant une grande stabilité thermique et une rigidité la plus importante possible. La figure VII.1 présente à gauche la forme du domaine optimisé ainsi que les conditions aux limites du problème. Sur la droite de la figure les trois cas de chargement imaginés pour notre support sont défini : deux chargements mécanique et un chargement thermique. Le cahier des charges du problème est formulé comme

- Le point A ne doit pas se déplacer sous l'effet d'une hausse de température (nous définissons un seuil)
- Le volume de la structure ne doit pas excéder 50% du volume du domaine optimisable
- La structure doit être la plus rigide possible

Nous proposons de traduire ce cahier des charges par le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} \quad & U_1 + U_2 \\ & U_{th} \leq U_{th,max} \\ & V_{tot} \leq 50\% \end{aligned} \tag{VII.1}$$

Les différents critères utilisés ici sont

- $U_1$  le déplacement du point A de la structure sous l'effet du chargement  $F_1$ ,
- $U_2$  le déplacement du point A de la structure sous l'effet du chargement  $F_2$ ,
- $U_{th}$  le déplacement du point A de la structure sous l'effet d'un chargement thermique uniforme  $\Delta T(\bar{x}) = 1$ ,
- $V_{tot}$  le volume de matière

la figure VII.1 fournit une illustration de chacun de ces critères.

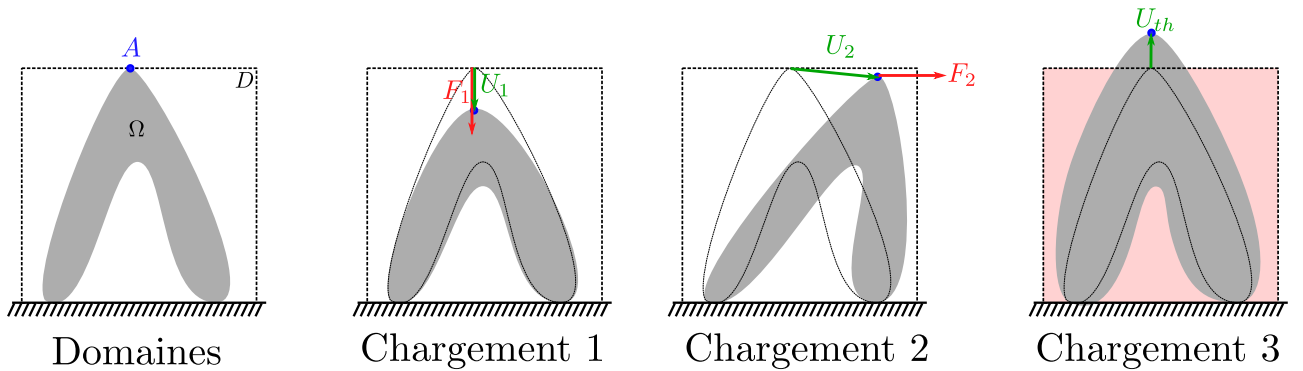
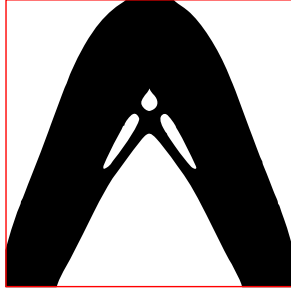


Figure VII.1 – Définition des domaines optimisés et optimisable ainsi que des trois cas de chargement pour le cas d'optimisation de structure proposé.

Afin de se doter d'une solution de référence, nous résolvons le problème d'optimisation défini par l'équation (VII.1) en utilisant un seul matériau ( $E = 0.93$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\alpha = 1.0$ ). La solution

donnée par l'optimiseur est présentée sur la figure VII.2, les propriétés finales sont indiquées dans le tableau VII.1.

Nous constatons à partir du tableau VII.1 que le déplacement  $U_{th}$  sous l'effet du chargement thermique est au-dessus du seuil imposé : **la forme finale proposée ici ne respecte pas les contraintes du problème d'optimisation, elle ne répond pas au cahier des charges !**



Propriété	valeur finale	contrainte
$U_1$	5.46	—
$U_2$	15.72	—
$U_{th}$	1.155	$\leq 0.01$
Vol. de matière	50%	$\leq 50\%$

Figure VII.2 – Solution du processus d'optimisation pour le problème (VII.1). Un unique matériau est utilisé ici, ses propriétés sont ( $E = 0.93$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\alpha = 1.0$ ).

Table VII.1 – Valeurs des critères de la solution finale.

Nous remarquons de plus que la dilatation  $U_{th}$  a une valeur intéressante : si on calcule la dilatation relative de la cellule :

$$\epsilon_{th} = \frac{U_{th}}{L} \approx \alpha$$

nous constatons qu'elle approche la valeur de la dilatation thermique du matériau constituant, la différence étant due aux conditions aux limites non libres sur le bord inférieur.

Il est impossible de contrôler la dilatation thermique d'une structure constituée d'un unique matériau, il est nécessaire d'ajouter au moins une phase ayant une dilatation thermique différente. La même conclusion avait été formulée pour le contrôle de la dilatation thermique des composites (cf. Annexe B).

Bien que ne respectant pas le cahier des charges, nous utiliserons par la suite cette forme comme référence pour la comparer aux futures solutions.

### Utilisation de plusieurs matériaux

Afin de pouvoir contrôler la dilatation thermique de notre structure et fournir une solution respectant le cahier des charges, nous optons maintenant pour une solution utilisant deux matériaux. Nous adoptons les mêmes propriétés matériaux que celles utilisées pour l'optimisation de matériau architecturé (chapitre VI), rappelées dans le tableau VII.2.

Propriété	phase 1	phase 4	phase vide
$E$	0.91	0.91	$0.91 \times 10^{-3}$
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$	1	10	1
Vol. relatif	25%	25%	50%

Table VII.2 – Propriétés des matériaux monolithiques utilisés pour le problème exemple.

Nous faisons le choix arbitraire de distribuer le volume de matière autorisé par le cahier des charges équitablement entre les phases 1 et 4.

Nous allons maintenant étudier deux solutions différentes permettant de fournir des designs respectant le cahier des charges. Ces deux solutions utilisent les matériaux décrit dans le tableau VII.2.

Propriété	référence	solution 1	facteur	contrainte
$U_1$	5.46	12.18	0.44	—
$U_2$	15.72	24.04	0.65	—
$U_{th}$	1.155	0.0018	616	$\leq 0.01$
Vol. de matière	50%	20% – –22%	—	$\leq 50\%$

Table VII.3 – Valeurs des critères de la solution finale.

## 1.1 Solution à une échelle

Une première approche consiste à tenter de résoudre le problème d'optimisation (VII.1) en considérant plusieurs matériaux, il s'agit là d'un processus classique d'optimisation de structure multi-matériaux prenant en compte des chargements thermomécaniques (Xia et Wang, 2008; Allaire *et al.*, 2013; Gao *et al.*, 2016).

### Présentation de la solution

Nous proposons une solution au problème exemple utilisant une structure architecturée, les propriétés matériau utilisées sont celles du tableau VII.2, la figure VII.3 ainsi que le tableau VII.3 présentent respectivement la forme finale obtenue par optimisation de domaine et les performances de la structure.

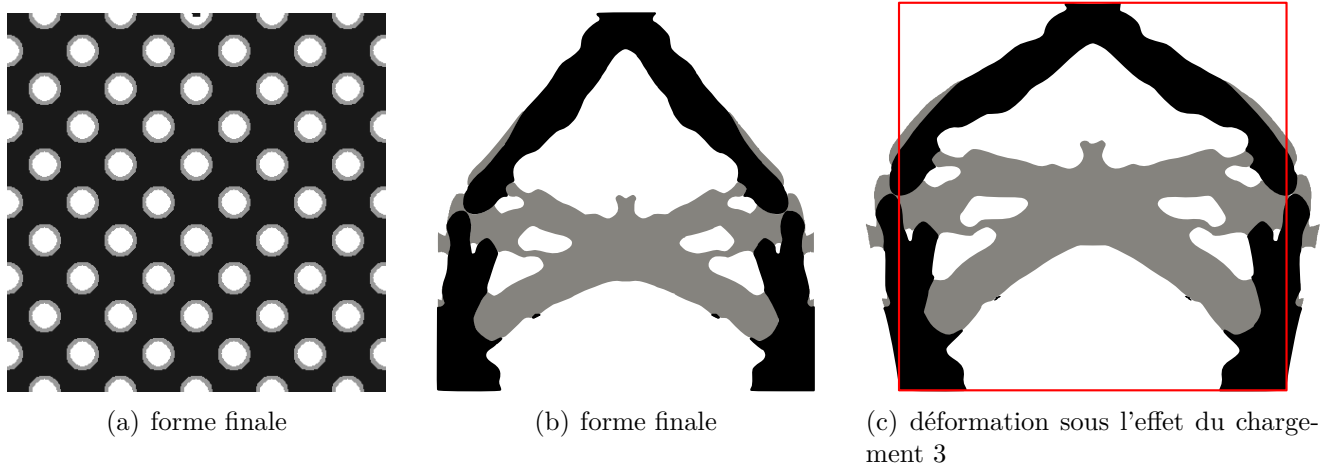


Figure VII.3 – Présentation de la solution au problème d'optimisation (VII.1) utilisant une structure architecturée : (a) forme initiale (b) forme finale obtenue, (c) la déformation de cette même forme finale sous l'effet du chargement thermique 3, qui correspond à une hausse uniforme de température.

Tout d'abord nous soulignons que la solution proposée respecte les contraintes du problème d'optimisation : **elle constitue donc une réponse acceptable au cahier des charges initial**. La dilatation thermique  $U_{th}$  du point A causée par le chargement 3 est en effet contrôlée par un mécanisme utilisant les différentes phases disponibles (cf. figure VII.3 (c) ), nous retrouvons ici un mécanisme de type flexion que nous avons décrit précédemment dans le chapitre VI (cf. figure VI.17 ).

Nous avons ici une structure qui comporte un mécanisme de contrôle de la cinématique locale de la structure, ce qui correspond bien à la définition d'une structure architecturée.

La colonne "facteur" du tableau VII.3 nous permet de mieux comparer cette solution avec la solution de référence présentée en figure VII.2, elle présente le rapport entre la propriété de notre

nouvelle solution et la même propriété de la référence. Nous constatons ainsi l'amélioration considérable du contrôle de la dilatation thermique (facteur 616!).

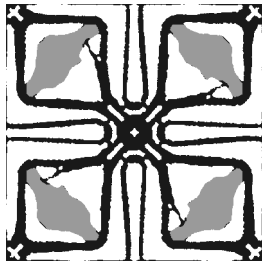
Cependant le comportement mécanique de cette structure architecturée est moins bon que la référence, les facteurs de performance sur les déplacements  $U_1$  et  $U_2$ , 0.44 et 0.65 respectivement, indiquent que la structure architecturée est nettement moins rigide. Cet effet était attendu, la présence d'un mécanisme impliquant nécessairement une perte de rigidité.

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre solution, cette fois ci à deux échelles.

## 1.2 Solution utilisant des matériaux architecturés

### Le matériau architecturé en semi-produit

Nous proposons de produire une solution au problème exemple (VII.1) en utilisant des matériaux architecturés sous forme de semi-produit. La première contrainte du problème a pour but de minimiser le déplacement sous l'effet d'une hausse de température, on se propose donc d'utiliser un des matériaux obtenu lors des calculs d'optimisation du chapitre VI qui a la propriété d'avoir une dilatation thermique effective quasiment nulle :



Propriété	phase 1
$E$	0.073
$\nu$	0.507
$\alpha$	0.002
Vol. relatif phase 1	25%
Vol. relatif phase 4	25%

Figure VII.4 – Design du matériau architecturé utilisé dans la structure.

Table VII.4 – Propriétés du matériau architecturé.

Afin de respecter la logique du semi-produit, nous imaginons produire une telle microstructure en grandes plaques rectangulaires que l'on vient ensuite découper à la dimension du domaine optimisé. Une couche enveloppe est aussi ajoutée pour rendre le matériau imperméable et lui donner l'aspect extérieur d'un matériau dense. La figure VII.5 illustre la solution proposée, on s'intéresse maintenant à sa performance.

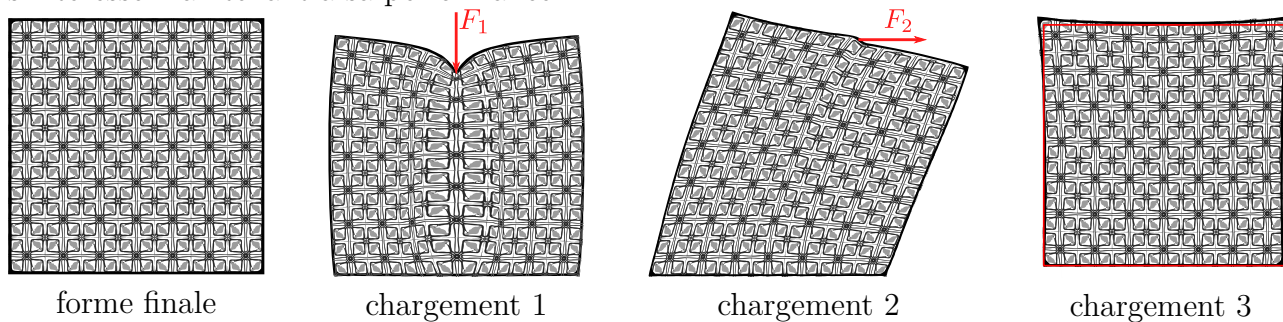


Figure VII.5 – Illustration de la solution proposée, le domaine admissible est rempli par un matériau architecturé (on suppose que le nombre de cellules de répétition est suffisant pour que l'hypothèse de séparation d'échelles soit respectée), puis enveloppé par une fine couche de matériau dense (phase 1). La forme finale est présentée à gauche alors que les autres sous figures exposent les déformées de la structures pour les différents cas de chargements (facteur 0.05 sur le déplacement).

Le tableau VII.5 résume les différentes propriétés de la solution de référence et de la solution comportant des matériaux architecturés, nous constatons d'abord que **les contraintes du problème d'optimisation (VII.1) sont respectées**, particulièrement la contrainte sur  $U_{th}$

Propriété	référence	solution 2	facteur	contrainte
$U_1$	5.46	34.8	0.16	—
$U_2$	15.72	79.2	0.2	—
$U_{th}$	1.155	0.009	134	$\leq 0.01$
Vol. de matière	50%	25 – 25	1.0	$\leq 50\%$

Table VII.5 – Valeurs des critères de la solution finale.

que la solution de référence ne respecte pas. La solution ainsi proposée est donc une autre réponse possible au cahier des charges énoncé en au début du paragraphe.

Cependant nous notons que le respect des contraintes se fait au prix d'une perte conséquente de rigidité : les déplacements  $U_1$  et  $U_2$  ont été multipliés par environ cinq ! Une performance nettement moindre était attendue dans la mesure où le matériau architecturé utilisé ici a été optimisé pour un chargement moyen et non pour le cas spécifique traité ici.

Il est légitime de se poser la question de l'optimalité d'une telle construction, nous allons maintenant comparer les deux solutions proposées.

### 1.3 Bilan sur les différentes solutions

#### Comparaison des performances

Nous avons présenté deux solutions possibles à un même problème d'optimisation (VII.1), la figure VII.6 regroupe les designs proposés alors que le tableau VII.6 rassemble les différentes valeurs des critères.

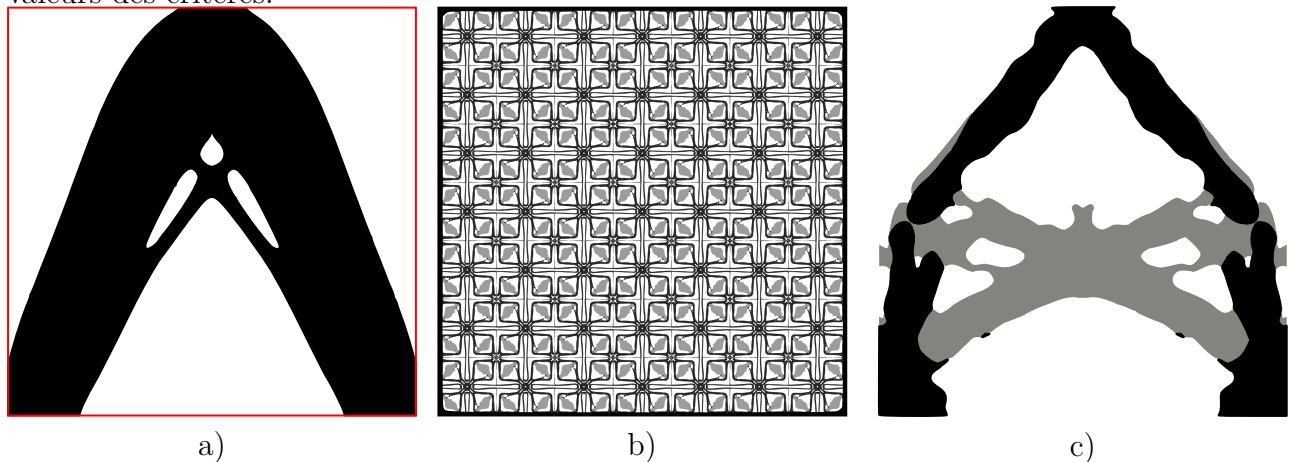


Figure VII.6 – a) Solution de référence. b) Solution utilisant un matériau architecturé sous forme de semi-produit. c) Solution utilisant une structure architecturée.

Propriété	référence	solution 1	solution 2	contrainte
$U_1$	5.46	12.18	34.8	—
$U_2$	15.72	24.04	79.2	—
$U_{th}$	1.155	0.0018	0.009	$\leq 0.01$
Vol. de matière	50%	20 – 22	25 – 25	$\leq 50\%$

Table VII.6 – Valeurs des critères pour la solution de référence (a), la solution utilisant un matériau architecturé (b) et la solution utilisant une structure architecturée (c).



Le tableau VII.6 permet de valider que les solutions 1 et 2 respectent toutes deux les contraintes du problème d'optimisation (VII.1), elles constituent donc deux réponses acceptables au problème posé, contrairement à la solution de référence.

Comme les deux designs proposés possèdent une cinématique locale contrôlée par leur architectures, nous les considérons tous deux comme de structures architecturées.

Nous notons cependant un grand écart de performance entre les deux solutions proposées : la solution 2 est presque cinq fois moins performante que la référence là où la solution 1 ne l'est que d'un facteur 2. Cette différence importante s'explique simplement. Bien que les deux solutions aient été obtenues à l'aide de processus d'optimisation de domaine, la solution 1 a été directement optimisée pour le chargement spécifique présenté en figure VII.1. Pour la solution 2, seul le matériau a été optimisé, et pour une sollicitation quelconque. Il est donc naturel que la solution 2 ne soit pas aussi performante car elle n'a pas été réellement optimisée pour le cas traité.

Néanmoins la solution 2 n'en n'est pas pour autant dénuée d'intérêt, nous allons maintenant aborder la question de la fabrication des structures proposées.

## 2 Fabrication des structures architecturées

Nous allons considérer les techniques de production possibles pour les différentes solutions proposées dans le paragraphe précédent. Le but est de confronter les solutions proposées à la réalité de leur fabrication. Cela nous permettra de justifier l'utilisation, dans certains cas, de la fabrication additive comme moyen de production.

### 2.1 Fabriquer et intégrer un matériau architecturé

#### Production sous forme de semi-produit

Afin de pouvoir utiliser les matériaux architecturés dans un contexte industriel il est nécessaire de parvenir à les produire en grandes quantités. De cette façon le matériau architecturé rentre dans la grande famille des matériaux à la portée de l'ingénieur concevant une structure ou une pièce mécanique. Une des pistes naturelles permettant la production massive de tels hybrides est la stratégie du semi-produit. À l'instar des matériaux composites à fibres longues, le matériau architecturé serait donc fabriqué en panneau ou en volume simple et ensuite adapté pour répondre à un besoin précis.

Plusieurs auteurs présentent des procédés de fabrication d'hybrides adaptés à la grande série, [Kooistra et Wadley \(2007\)](#) propose par exemple une méthode de production de panneau sandwich architecturés à partir de feuilles de métal (voir figure VII.7). [Wang \*et al.\* \(2016\)](#) propose quant à lui un assemblage auto bloquant permettant de construire des volumes de matériaux auxétiques (voir figure VII.8).

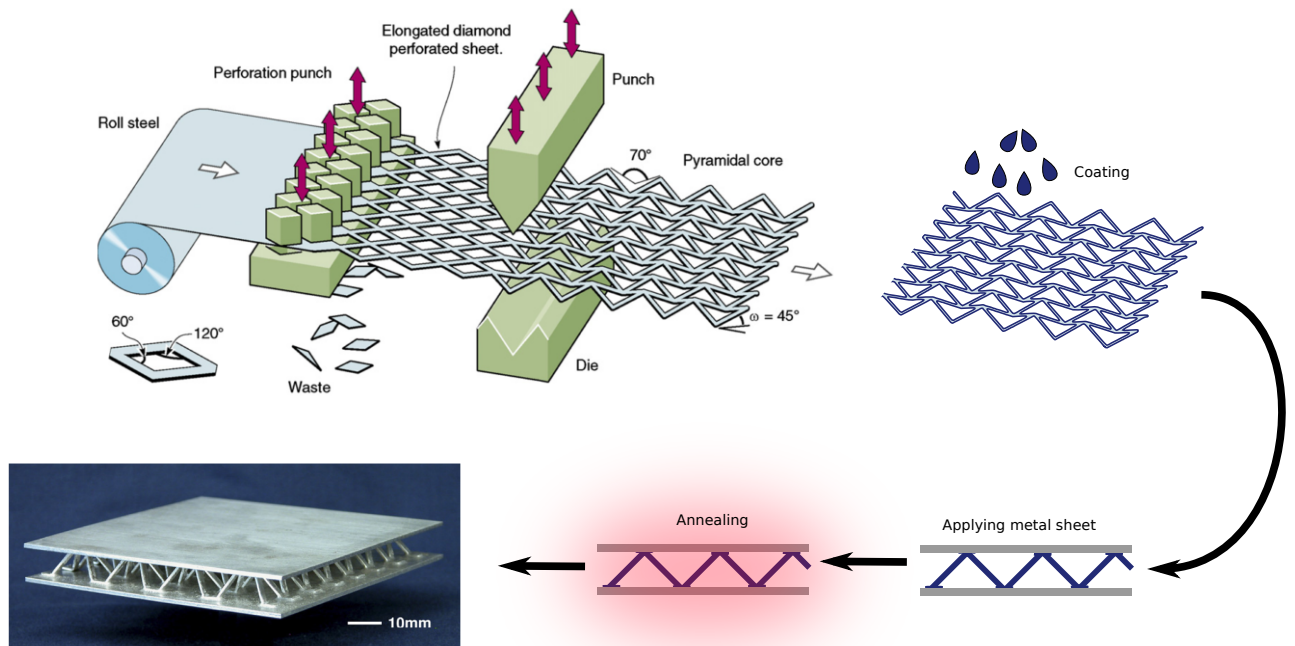


Figure VII.7 – Processus de fabrication de panneaux sandwich architecturés utilisant des étapes de poinçonnage, de pliage et de brasure. source : Kooistra et Wadley (2007)

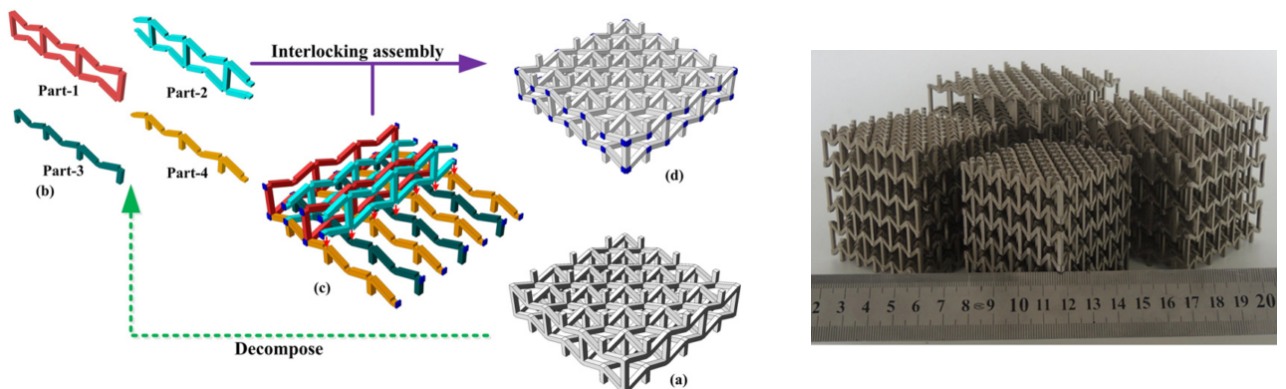


Figure VII.8 – Processus de fabrication de matériau auxétique utilisant un assemblage auto bloquant de pièces prismatiques. source : Wang *et al.* (2016)



## De la solution optimale à l'extraction d'un design simplifié

La figure VII.9 présente un exemple de matériau architecturé proposé par [Andreassen \*et al.\* \(2014\)](#), il apparaît difficile d'imaginer un procédé de fabrication pour une telle architecture. Les auteurs ont utilisé avec succès des méthodes d'impression 3D pour produire des prototypes, cependant ces méthodes demeurent à ce jour pas ou peu compatible avec la production de grandes séries. Cette tendance est générale : si aucune mesure n'est prise pour l'éviter les processus d'optimisation fournissent des formes performantes mais très difficilement fabricables. Cela remet en cause l'intérêt de l'optimisation de domaine.

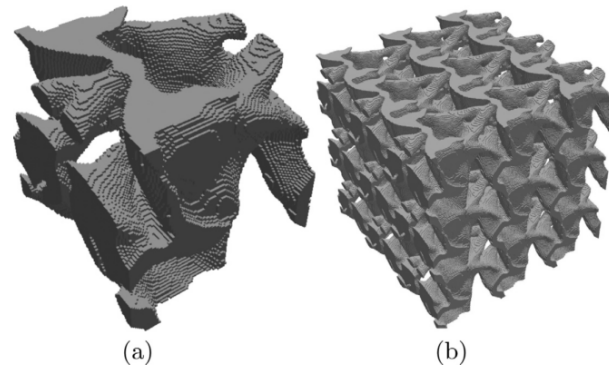


Figure VII.9 – a) Cellule unitaire de matériau architecturé fortement auxétique. b) Répétition de cette même cellule unitaire 3x3x3. sources : [Andreassen \*et al.\* \(2014\)](#).

Cependant les solutions obtenues par calcul d'optimisation peuvent ensuite être retravaillées afin d'en simplifier la fabrication. [Wang \*et al.\* \(2016\)](#) utilise par exemple la constatation qu'une cellule unitaire dite "ré-entrante" développe un comportement auxétique pour définir un design simplifié, puis propose le processus de fabrication présenté en figure VII.8. De la même manière, [Jefferson \*et al.\* \(2009\)](#) s'inspire des concepts proposés par [Lakes \(1996\)](#) et [Sigmund et Torquato \(1997\)](#) pour définir une structure ayant une dilatation thermique contrôlée tout en restant fabricable relativement simplement (voir figure VII.10). Elle peut en effet être produite à grande échelle, les "press-fit" pouvant être moulés ou injectés alors que la structure en nid d'abeille peut être obtenue par poinçonnage ou découpe laser (avec toutefois une épaisseur moindre).

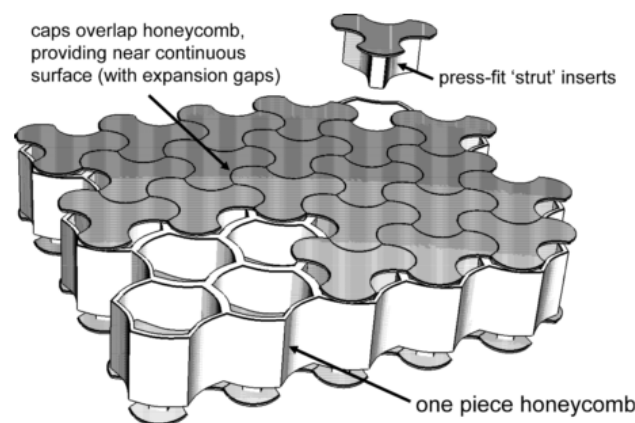


Figure VII.10 – Exemple d'une plaque quasiment continue présentant un coefficient de dilatation thermique presque nul dans le plan. Ce multi-matériau architecturé est produit en assemblant une grille et des inserts constitués de deux matériaux différents. sources : [Jefferson \*et al.\* \(2009\)](#).

De la même façon, le chapitre VI introduit plusieurs architectures de matériaux ayant des propriétés thermoélastiques cibles, voire extrêmes. Bien que le processus d'optimisation de

forme utilisée ait fourni des formes clairement définies, on s'est surtout intéressés aux mécanismes de contrôle des propriétés apparaissant dans les solutions d'optimisation (voir par exemple la figure VII.11). L'extraction des principes de fonctionnement de chaque solution permet donc de fournir des solutions simplifiées pouvant être fabriquées par des méthodes classiques.

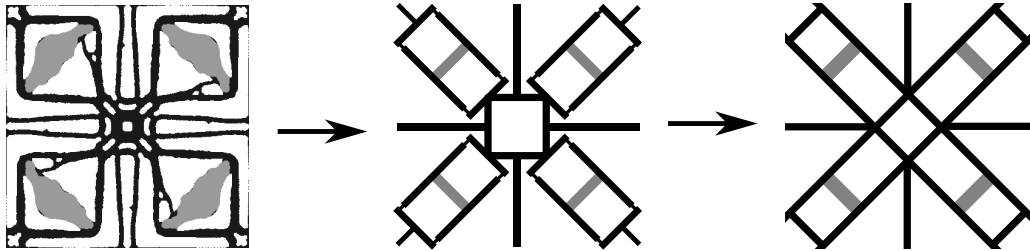


Figure VII.11 – Solution d'un problème d'optimisation de microstructure avec pour cible une dilatation thermique effective nulle (à gauche) et son équivalent conceptualisé (à droite).

Il est cependant probable que les matériaux architecturés simplifiés soient moins performants que ceux reproduisant directement les résultats d'optimisation de domaine : cette perte de performance constitue le prix à payer pour permettre la production en grandes quantités.

### Application aux solutions proposées

Nous pouvons imaginer produire la solution 2 (présentée précédemment en figure VII.5) en considérant le matériau architecturé fabriqué sous forme de semi-produit. La figure VII.12 présente un processus de fabrication de la structure à partir du matériau architecturé sous forme de semi-produit.

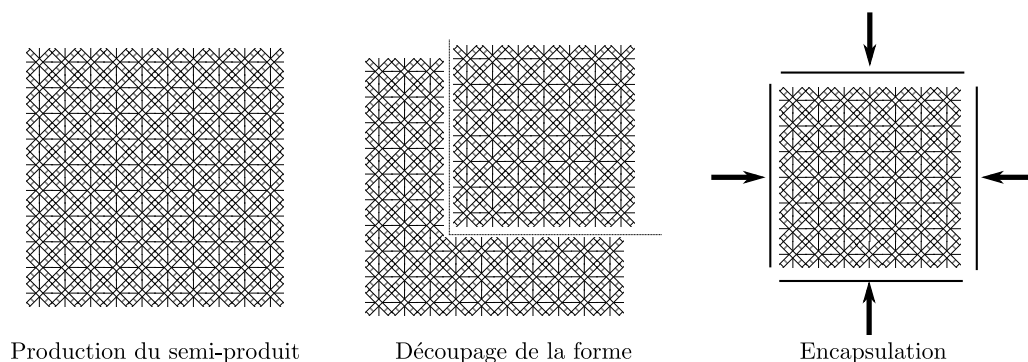


Figure VII.12 – Processus de fabrication de la solution 2 (cf. paragraphe 1, figure VII.5) à partir d'un matériau architecturé sous forme de semi-produit.

Le problème majeur de cette approche reste la mise en œuvre de la liaison entre la couche d'encapsulation et le matériau architecturé. [Kooistra et Wadley \(2007\)](#) proposent une méthode utilisant une pâte de brasure et d'un passage au four (cf. figure VII.7) qui pourrait être appliquée pour lier les plaques d'encapsulation et le matériau.

Cependant il est raisonnable de penser que la jonction entre la plaque d'encapsulation et le semi-produit est le lieu où les contraintes mécaniques se concentrent, potentiellement nocive à l'usage.

## 2.2 Fabriquer une structure architecturée

### Simplification de la solution

Comme pour les matériaux architecturés, il convient de se poser la question de la fabrication de la première solution évoquée dans le paragraphe VII.5, c'est-à-dire la structure architecturée (cf. figure VII.3 ). La complexité des formes obtenues par optimisation rend là aussi la fabrication difficile.

Comme pour les matériaux, nous pouvons mener une simplification de la forme afin d'obtenir un design fabricable plus facilement.

Cette modification du design induit très probablement une perte de performance. La figure VII.13 compare la solution 1 (cf. figure VII.3) proposée dans le paragraphe 1 avec un équivalent simplifié. Un détail permettant l'assemblage des deux phases grise et noire a été ajouté sur le design simplifié, cette modification est inspirée des architectures proposées par [Wei et al. \(2016\)](#).

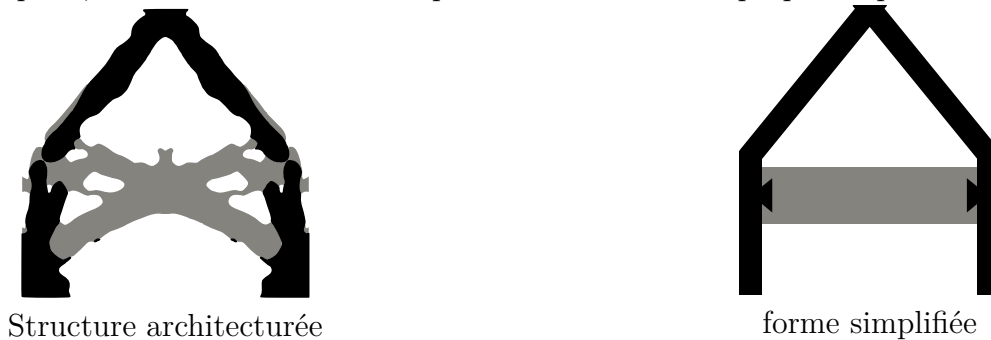


Figure VII.13 – Solution du problème exemple utilisant une structure architecturée (à gauche) et son design simplifié (à droite).

La solution simplifiée ne respecte probablement pas  $U_{th} \leq 0.01$ , la contrainte du cahier des charges (cf. introduction paragraphe 1 ) à partir du quel cette solution a été proposée. Il est alors nécessaire de définir quelques paramètres sur la géométrie et de les ajuster afin d'obtenir le résultat souhaité, par exemple l'épaisseur des différentes barres composant la structure, ou la position verticale de la barre transversale grise (cf. figure VII.13, forme simplifiée).

### Les limites de l'approche par simplification

Cependant, appliquer une démarche de simplification dans le contexte de structure architecturée semble nettement moins pertinent que pour les matériaux architecturés. Pour ces derniers, l'étape de réduction de la complexité de la structure n'est effectuée **qu'une seule fois**, le matériau architecturé est ensuite utilisé pour ses propriétés effectives, **indifféremment de son application**. Comme nous l'avons expliqué juste avant, il est nécessaire de mener une étude de la nouvelle gamme de matériau architecturés ainsi simplifiés afin de ne pas réduire la performance de manière trop significative.

Or, dans le cadre de structures architecturés nous produisons une solution pour une application donnée, il est donc nécessaire de mener une étude de simplification pour chaque nouvelle application, car la topologie et les mécanismes des solutions proposées peut différer suivant les situations. Cette nouvelle étape dans le processus de conception risque d'en allonger significativement la durée, et réduit en conséquence l'intérêt d'une telle approche.

Pour cette raison la fabrication additive constitue les méthodes de fabrication intéressante, comme nous l'expliquerons dans le paragraphe suivant, elles permettent la fabrication de design très complexe. Dans ce cadre elles peuvent donc produire directement les designs produit par optimisation de domaine, supprimant ainsi l'étape de simplification, ou la cantonnant à quelques traitements ultérieurs mineurs.

## Bilan

Nous avons introduit la notion de structure architecturée qui se présente comme une extension du matériau architecturé : les deux notions se regroupent en le fait qu'elles développent des cinématiques locales contrôlées par leur architecture, et diffèrent en cela que la première est optimisée pour un chargement donné alors que la seconde est optimisée pour des propriétés effectives. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces solutions est soumise à plusieurs règles simples :

- Quand le but est de produire une structure de grande dimension, à la géométrie simple (par exemple des panneaux sandwich), il est préférable d'utiliser des matériaux architecturés. Cela permet une production de gros volumes.
- Quand le but est de produire une structure pour une application (i.e. un cas de chargement) donnée et que sa performance est un critère limitant, il est préférable d'opter pour une structure architecturée.

Nous avons évoqué les avantages des méthodes de fabrication additive pour la réalisation de structures architecturées. Nous proposons maintenant une rapide présentation de ces procédés de fabrication ainsi que de leurs limitations.

### 3 Une présentation de quelques méthodes de fabrication additive

Nous introduisons ici les méthodes de fabrication additive à partir de la présentation des principales technologies existantes. Nous comparons ces méthodes aux autres plus courantes (usinage, pliage, découpe laser, ...) afin d'en présenter l'intérêt et les enjeux. Enfin nous traiterons des limitations existantes pour ces méthodes, qui seront abordées plus longuement dans les chapitres VIII et IX.

#### 3.1 Présentation de quelques méthodes et de leur intérêt

##### Définition générale

La fabrication additive fait opposition à la fabrication soustractive, qui regroupe la majeure partie des méthodes de fabrications utilisée industriellement (usinage, tournage, poinçonnage, ...). Elle regroupe toute une série de méthodes de fabrication d'un genre nouveau, où le processus de fabrication se fait par ajout de matière. Initialement reléguées au rang de solution de prototypage en conception mécanique à cause de son coût élevé et de sa lenteur (voir figure VII.14), la fabrication additive s'industrialise progressivement car elle permet la fabrication de pièces d'une très grande complexité pour des coûts plus réduits que les méthodes traditionnelles. Aujourd'hui on passe du prototypage où seule la géométrie des pièces était vérifiée, à une fonctionnalisation (mécanique, thermique, magnétique, ...) des pièces réalisées. Par ce qu'elle permet une extrême liberté de conception, elle est considérée par certains comme la base d'une prochaine révolution industrielle (Hopkinson *et al.*, 2006).

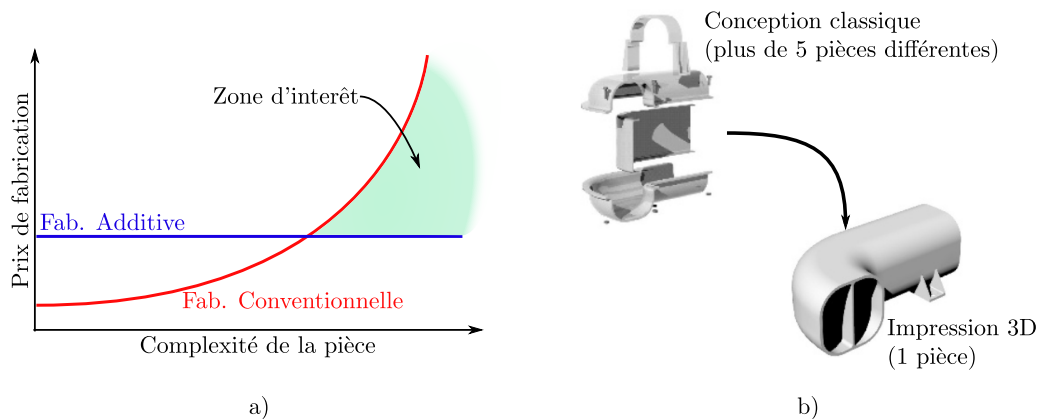


Figure VII.14 – a) Comparaison du prix de fabrication d'une pièce avec une méthode de fabrication additive et une méthode de fabrication conventionnelle (usinage, tournage, poinçonnage, ...)

b) Exemple de différence de conception : une conception classique nécessitera l'assemblage de plusieurs pièces alors que l'utilisation de l'impression 3D permet de remplir la même fonction avec une seule pièce, source Hopkinson *et al.* (2006), fig. 2.4.

Il existe de nombreuses méthodes de fabrication additive, on citera ici uniquement les plus couramment utilisées, une liste plus exhaustive est cependant disponible dans Hopkinson *et al.* (2006), chap. 5 :

- *Fused Deposition Molding* (FDM), la matière est déposée sous forme de filament de polymère fondu, une étude plus poussée de cette méthode de fabrication sera présentée plus tard.

- *Selective Laser Melting* (SLM), la matière, sous forme de poudre, est localement liquéfiée à l'aide d'un faisceau laser.
- *Electron Beam Melting* (EBM), la matière, sous forme de poudre, est localement frittée à l'aide d'un faisceau d'électrons.

La figure VII.15 illustre le principe de la FDM ainsi que de la SLM (l'EBM fonctionnant sur un principe similaire au SLM).

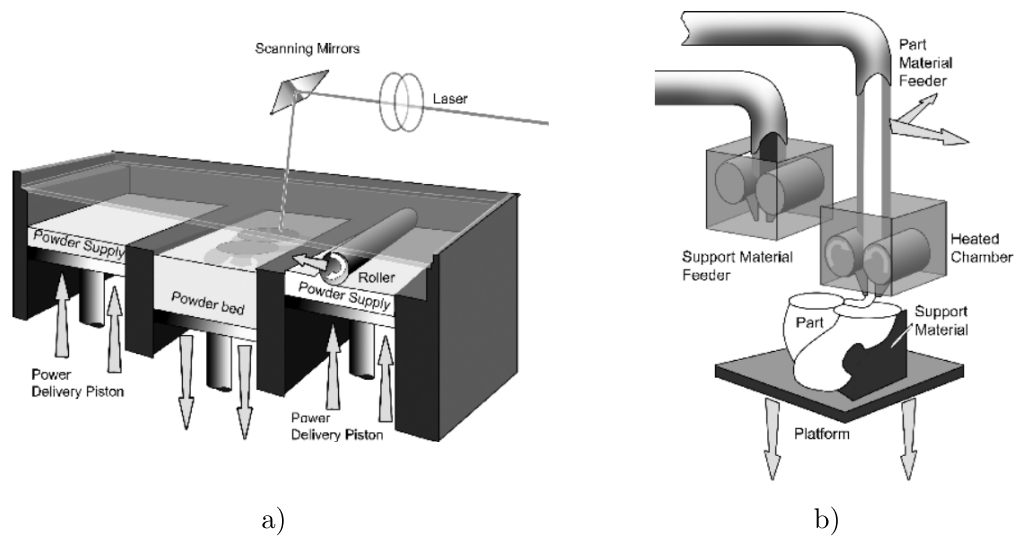


Figure VII.15 – a) Schéma de principe de SLM, le laser fond localement la poudre, connectant ainsi la matière. Une fois une couche terminée, le lit de poudre descend et le rouleau amène une nouvelle couche de poudre qui sera à son tour fondue localement par le laser.

b) Schéma de principe de la FDM, ici, une buse d'injection se déplace sur la surface, déposant localement du polymère en fusion. source : [Hopkinson et al. \(2006\)](#), fig. 5.11 et 5.24.

Dans le contexte de ces nouvelles méthodes, la complexité géométrique d'une pièce limite nettement moins la conception, il devient donc possible de tirer parti de géométries très complexes pour obtenir de meilleurs performances. Ainsi les méthodes de fabrication additive apparaissent comme une solution tout à fait adaptée pour la production de structures architecturées.

### Exemples de pièces imprimées

Nous présentons ici une illustration de la capacité des méthodes fabrication additive à imprimer des géométries complexes. La figure VII.16 (a) présente un résultat de simulation obtenu par [Dapogny et al. \(2017b\)](#). Il s'agit de l'optimisation d'un pylône électrique soumis à plusieurs chargements mécaniques. La figure VII.16 (b) présente quant à elle une maquette imprimée à l'aide d'une machine FDM.

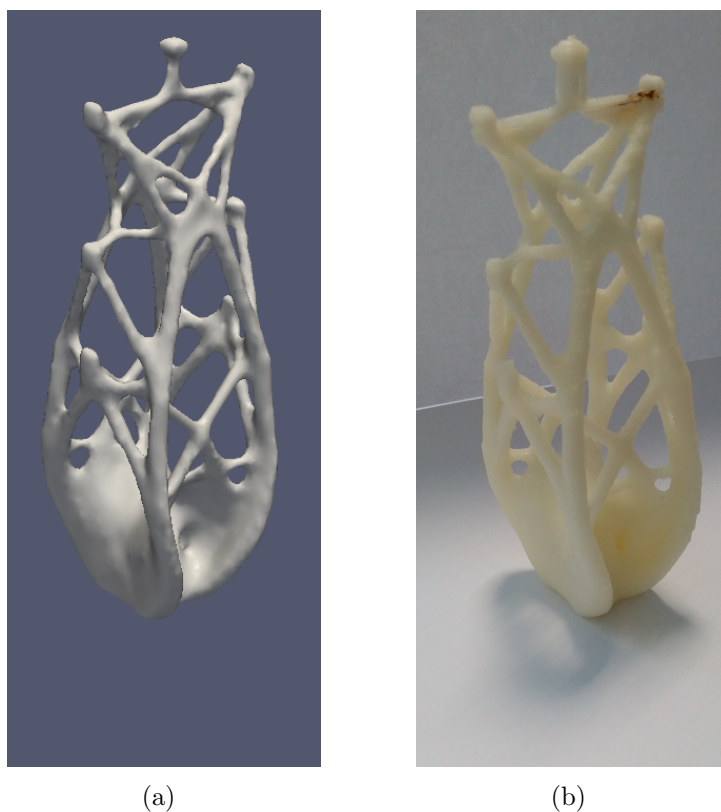


Figure VII.16 – Impression d’une pièce conçue par optimisation de forme : (a) le modèle numérique de la structure. (b) Une maquette imprimée par FDM.

### 3.2 Limitations des méthodes de fabrication additives

Bien que les méthodes de fabrication additive soient pleines de promesses pour la réalisation de structures complexes, qui parfois ne peuvent être obtenues que de manière additive, certaines limites de réalisation subsistent. Nous dressons maintenant une liste des contraintes de réalisations principales, sans être exhaustif.

Nous classons ici les limitations des méthodes de fabrications dans deux familles : les propriétés induites et les contraintes de fabrication.

#### Propriétés réelles des pièces imprimées

La donnée d’entrée d’une machine d’impression 3D est un fichier définissant la surface extérieure de la pièce à imprimer (généralement au format STL). La logique de la machine est ensuite de venir remplir le volume défini par cette surface à l’aide d’un matériau. La figure VII.17 illustre un exemple de ce que l’on appelle des propriétés induites. Pour chaque sous figure de la figure VII.17, la surface fermée bleue représente la donnée d’entrée de la machine d’impression alors que les formes vertes représentent la tomographie de pièce imprimée correspondante. Ces exemples ont été produits à l’aide d’une machine EBM. Ces résultats expérimentaux constituent un premier exemple de propriétés induite par la méthode de fabrication, que l’on définit comme un écart inévitable entre la forme prescrite et la forme imprimée.

Dans le cas de l’EBM, on peut par exemple définir comme propriétés induites par la fabrication la rugosité de surface. Cet état de surface a un impact sur les propriétés d’usage de la structures, Suard (2015) propose une approche empirique pour le cas d’impression de treillis. Il définit la notion de diamètre mécanique équivalent, qui représente les propriétés réelles d’une barre imprimée. Cependant les limites de tenue en Fatigue ne sont pas vraiment considérées.



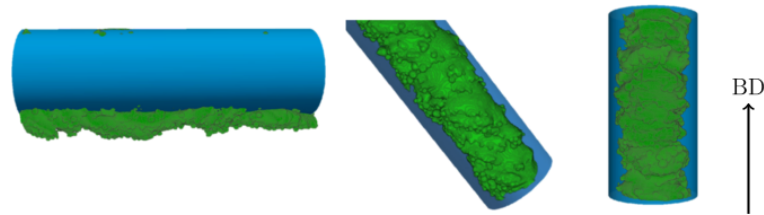


Figure VII.17 – Exemple de propriétés induites par la méthode d'impression EBM. En bleu les domaines à fabriquer fournis à l'imprimante, en vert les tomographies des structures après impression. Nous observons comment la structure réelle ne reproduit pas exactement le design demandé. sources : Suard (2015)

Les propriétés de la structure diffèrent donc des propriétés prédites, ce qui constitue **un biais dans le processus de conception : la forme proposée par optimisation est optimale pour les propriétés idéalisées**, rien ne garantit qu'elle le soit pour les propriétés réelles. Dans le chapitre VIII nous proposerons une stratégie pour prendre en compte les propriétés induites par la méthode de fabrication pendant l'optimisation.

### Des contraintes de fabrication subsistent

Un autre problème majeur de l'impression 3D est qu'elle ne permet pas réellement une liberté totale de forme, plusieurs limitations subsistent. Si l'on considère par exemple les méthodes FDM et SLM, il est impossible d'imprimer des zones en porte-à-faux, comme l'illustre la figure VII.18.

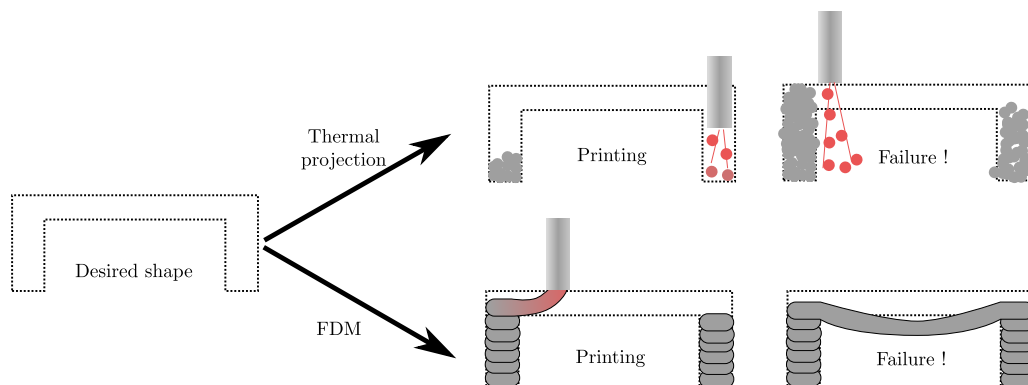


Figure VII.18 – Illustration du problème d'impression de zones en porte-à-faux pour deux méthodes d'impression : projection thermique (en haut) et dépôt de filament (en bas).

La solution généralement retenue à cette contrainte de fabrication consiste en l'utilisation d'un support d'impression. Cependant cela augmente le temps d'impression ainsi que la consommation de matière première. Un travail de "nettoyage" est aussi nécessaire après la fabrication. Nous proposons dans le chapitre IX des solutions pour prendre en compte de telles limites de fabrication de manière intégrée dans le processus d'optimisation, et ainsi minimiser, voir supprimer, l'utilisation de supports d'impression.



## Bilan du chapitre VII

---

Ce chapitre a soulevé plusieurs questions sur l'intégration des matériaux architecturés dans une structure et a motivé une étude plus approfondie des méthodes de fabrication additive.

En comparant deux solutions à un même problème exemple, l'une utilisant une structure architecturée et l'autre un matériau architecturé, nous avons illustré que l'utilisation de matériau architecturé ne constitue pas toujours une solution optimale.

Nous avons cependant nuancé ce propos à travers quelques questions sur la fabricabilité des solutions proposées précédemment. Il ressort que le matériau architecturé est compatible avec une stratégie de semi-produit, alors que la fabrication additive semble la solution la plus adaptée pour la production de structure architecturée, correspondant à un cahier des charges donné.

Dans le cadre de la recherche de la meilleure performance, nous nous sommes donc orientés vers les méthodes de fabrication additive. Nous avons pu constater que malgré la grande variété de formes qu'elles peuvent produire, elles restent soumises à plusieurs limitations pratiques de fabrication.

Nous proposons maintenant d'étudier plusieurs pistes pour prendre en compte ou même contourner ces limitations dès la conception des structures par optimisation de domaine.

## Chapitre VIII

# Prise en compte des propriétés induites lors d'une impression par Fused Deposition Molding

---

1	Modélisation des propriétés physiques d'une pièce imprimée . . . . .	178
1.1	Observation d'une pièce imprimée . . . . .	178
1.2	Un modèle descriptif pour les propriétés des pièces fabriquées par FDM .	181
2	Prise en compte des propriétés induites dans le processus d'optimisation . . . . .	184
2.1	Impact de la modification du modèle descriptif . . . . .	184
2.2	Mise en œuvre de la formulation proposée . . . . .	187
3	Résultats numériques . . . . .	191
3.1	Définition des paramètres de simulation . . . . .	191
3.2	Présentation des résultats de simulation . . . . .	194
3.3	Discussion . . . . .	203
	Bilan du chapitre VIII . . . . .	205

---

## Résumé

Dans ce chapitre nous proposons une méthode pour prendre en compte les propriétés induites par la méthode de fabrication *Fused Deposition Molding* (FDM). Durant une fabrication utilisant cette technologie un filament de polymère (ou de métal) en fusion est déposé en couches successives afin de produire une pièce volumique. Durant cette impression chaque couche est décomposée en un contour et une partie massive. Ce découpage induit des propriétés mécaniques particulières, notamment une anisotropie mécanique orientée à la surface de la pièce imprimée.

Dans un premier temps nous observerons les propriétés réelles d'une pièce produite par FDM. Un modèle est ensuite proposé afin de les représenter de manière réaliste. Une série de résultats numériques est ensuite présentée, elle constitue un support de discussion sur l'effet de la prise en compte des propriétés induites sur les formes optimales et les performances obtenues à l'issue du processus d'optimisation de domaine.

## Introduction

Les techniques d'impression 3D ne sont pas exemptes de défauts ou de contraintes de fabrication. Nous décidons de classer ces limitations en deux grandes familles selon

- Les contraintes de fabrication, qui se traduisent par des restrictions du domaine admissible.
- Les propriétés induites, qui peuvent se traduire tant par des restrictions du domaine admissible que par des modifications des modèles utilisés.

Nous traitons dans ce chapitre des propriétés induites par la méthode de fabrication, plus particulièrement dans le cas de la méthode de *Fiber Deposition Molding* (FDM). Nous souhaitons ici étudier une stratégie visant à prendre en compte les propriétés réelles des pièces imprimées lors de l'optimisation de domaine, et ainsi adapter la forme finale à la méthode de fabrication concernée.

La FDM est traditionnellement utilisée pour le prototypage rapide ou pour la génération de maquettes, en général peu de pièces produites par cette méthode ont un rôle mécanique. Il faut cependant noter que cette méthode présente l'avantage d'utiliser une matière première sous forme de fil, ce qui la rend beaucoup plus pratique à utiliser. Le choix de cette technologie a été motivé par le fait qu'elle est plus facilement accessible et qu'il est aisé de produire des échantillons pour les essais mécaniques. C'est aussi une des technologies induisant la plus forte anisotropie des propriétés du fait qu'elle produit des pièces par déposition de filament de polymère fondu et qu'elle distingue l'impression de la surface externe et celle du volume des pièces. De fait, elle constitue un cas d'étude particulièrement pertinent pour la prise en compte des propriétés induites. Cependant l'ensemble des stratégies présentées ici sont transposables aux autres technologies, notamment la *Fiber Metal Wire Deposition Molding* qui reprend le même principe à la différence que le filament déposé est en métal. C'est donc avant tout la méthodologie de prise en compte des propriétés induites qui constitue le réel contenu de ce chapitre, car elle est transposable à d'autres méthodes.

Nous présentons maintenant un modèle descriptif des propriétés induites lors de la fabrication par FDM.

## 1 Modélisation des propriétés physiques d'une pièce imprimée

Dans ce paragraphe nous commençons par présenter la méthode d'impression FDM, nous observerons les étapes de fabrication ainsi que le comportement des pièces fabriquées par cette méthode. Cela nous permet ensuite d'établir un modèle décrivant les propriétés observées.

### 1.1 Observation d'une pièce imprimée

#### Étapes du procédé d'impression

L'impression d'une pièce par la méthode FDM utilise un principe de déposition par couches superposées. La figure VIII.1 illustre les différentes étapes de l'impression, la pièce à imprimer est d'abord divisée en couches selon la direction d'impression ; par la suite une buse mobile vient déposer un filament de polymère en fusion sur le substrat afin de former une première couche. Une fois la couche courante terminée, la buse imprime la couche supérieure au-dessus de la précédente, formant ainsi progressivement une pièce volumique.

Chaque couche définit une surface qui doit être parcourue par la buse d'impression, il faut donc définir une trajectoire pour la buse permettant de couvrir cette surface. Classiquement la surface n'est pas parcourue en une fois, elle est découpée en deux parties : l'impression du

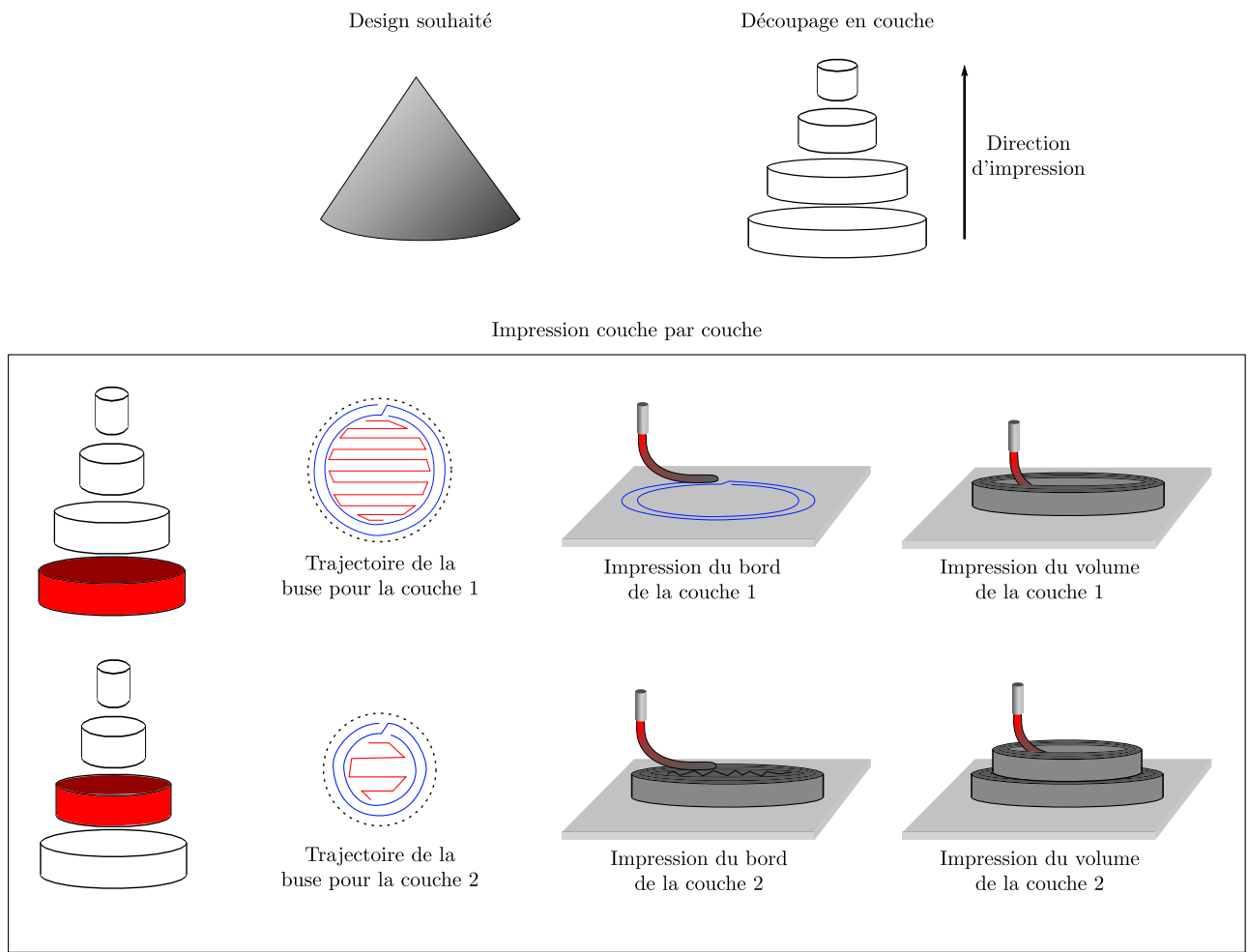


Figure VIII.1 – Schéma de principe de l'impression d'une couche par une imprimante FDM. La pièce à imprimer est découpée en une série de couches. Chaque couche est ensuite créée par dépôt de filament en fusion par une buse mobile. Pour chaque couche, la buse suit une trajectoire d'impression qui se décompose en deux étapes : impression du bord (trajectoire bleue) et l'impression du volume (trajectoire rouge).

bord puis celle du volume. Cette logique de découpage est présentée sur la figure VIII.1, nous pouvons observer que la trajectoire de la buse est découpée en l'impression d'un contour (bleu) et l'impression du volume (rouge), cela permet de bien définir la surface extérieure de la pièce, mais aussi de ne pas "remplir" intégralement son volume, pour cette raison elle est souvent préférée. La figure VIII.2 présente par exemple une série de pièces imprimées avec différents pourcentages de remplissage du volume.

Deux avantages majeurs se dégagent de la modification du taux de remplissage :

- Le temps d'impression est lié à la distance parcourue par la buse durant l'impression, en réduisant le remplissage, on réduit significativement cette durée.
- La masse de matériau utilisée est elle aussi liée au remplissage : un taux plus faible signifie moins de consommation de matière.

La réduction du remplissage entraîne cependant une baisse des propriétés mécaniques qu'il convient de considérer si l'on souhaite concevoir des pièces fonctionnelles.

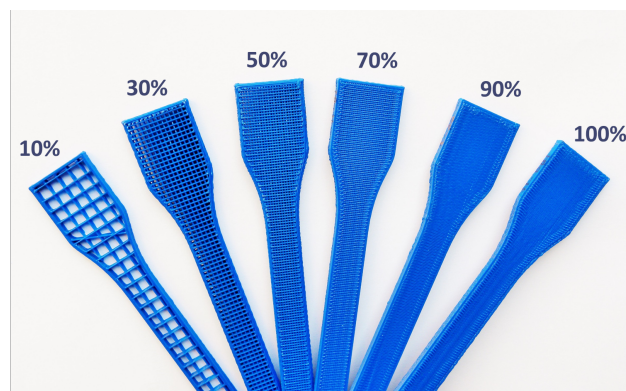


Figure VIII.2 – Exemple de pièces produites par FDM avec différents taux de remplissage du volume. On constate que le contour est identique pour chaque pièce, seule change la répartition de la matière dans le volume. source : [www.my3dmatter.com](http://www.my3dmatter.com)

### Propriétés mécaniques des empilements de fibres

L'impression par dépôt de filament induit en général une certaine anisotropie des propriétés de la couche. La figure VIII.3 présente une pièce imprimée ainsi que l'allure schématique de l'empilement successif des fibres dans le contour (bleu) et dans le volume (rouge). Cet aspect d'empilement de fibres, qui n'est pas sans rappeler un composite à fibres longues, laisse en effet supposer une différence de propriétés entre les directions axiales et transverses de l'empilement.

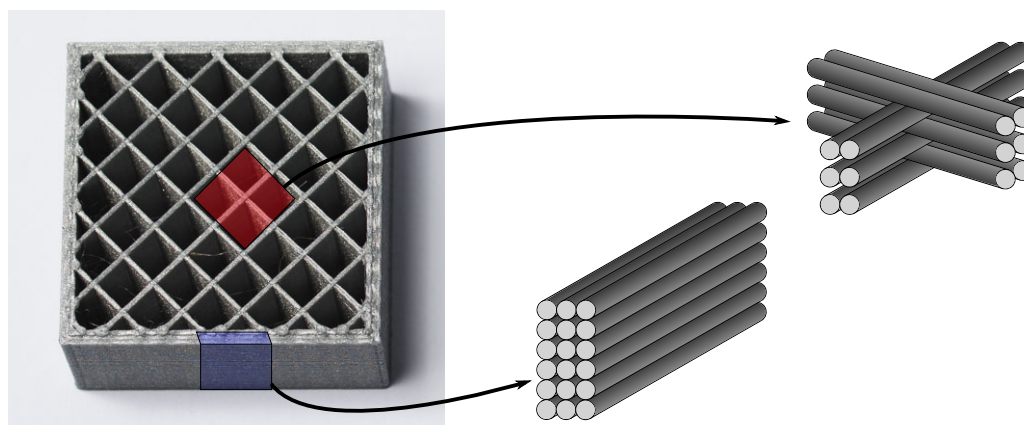


Figure VIII.3 – Allure d'une pièce imprimée par FDM (à gauche) et schéma représentant l'empilement des fibres dans deux régions : le contour de la pièce (en bleu) et le volume (en rouge). source : [www.my3dmatter.com](http://www.my3dmatter.com)

Dès lors, il est légitime de considérer que notre pièce est en fait construite de ce matériau "empilement de fibres", aux propriétés anisotropes.

Montero *et al.* (2001) ont effectués des mesures de propriétés mécaniques sur des échantillons d'Acrylonitrile Butadiène Styrène (ABS) imprimés similaires à celui présenté sur la figure VIII.4 en faisant varier une série de paramètres d'impression. On s'intéresse notamment à la variation des propriétés mécaniques pour un échantillon sollicité dans la direction de  $\vec{i}$  (transversale) et dans la direction  $\vec{j}$  (longitudinale). Le tableau 1.1 reprend quelques résultats de cette étude, nous constatons les différences marquées de module de Young et de limite d'élasticité suivant la direction de sollicitation. De la même manière Bagsik *et al.* (2010) étudient le comportement d'échantillons imprimés en Ultem\*9085 et mettent aussi en évidence l'anisotropie des propriétés mécaniques. Ziemian et Sharma (2016) étudient plusieurs propriétés mécaniques de pièces imprimées en ABS. Ils révèlent l'effet de la direction de sollicitation sur la résistance à la

Fatigue, la ténacité, le module de Young ou encore la contrainte à la rupture. L'anisotropie des structures produites dépend des conditions d'impression et du matériau de base utilisé. [Knoop et Schoeppner \(2015\)](#) présentent par exemple des mesures effectuées sur des échantillons en Polyamide 12 (PA12) pour lesquels l'anisotropie semble moins importante que pour les études précédemment citées, potentiellement à cause d'une différence de comportement des polymères à l'état liquide.

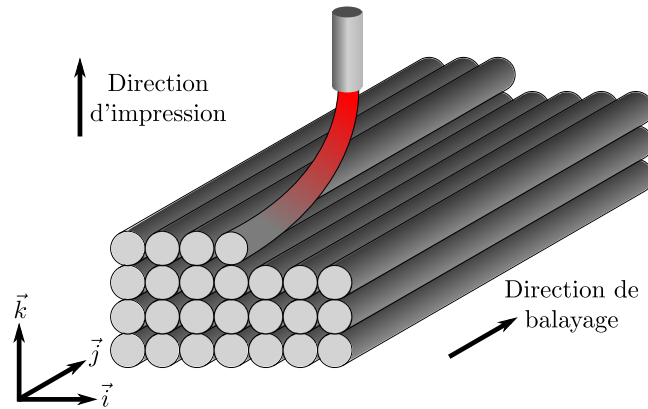


Figure VIII.4 – Impression schématique d'une pièce dense : on suppose que les propriétés mécaniques selon la direction  $\vec{i}$  seront différentes de celles selon les autres directions.

Propriété	Moulé	Imprimé longitudinal	Imprimé transversal
$E$ (GPa)	2.48	1.6	1.0
$\sigma_Y$ (MPa)	26.6	19.17	7.4

Table VIII.1 – Comparaison des propriétés d'un P400 ABS dans le cas d'une pièce moulée, puis pour une pièce imprimée sollicitée en direction longitudinale ou transversale. sources : [Montero et al. \(2001\)](#)

Ces variations importantes de propriétés ont une influence sur les propriétés finales des pièces imprimées, et il est aussi raisonnable de penser qu'elles peuvent modifier les formes optimales. Afin de pouvoir tenir compte des propriétés mécaniques réelles, nous proposons maintenant d'en définir un modèle descriptif.

## 1.2 Un modèle descriptif pour les propriétés des pièces fabriquées par FDM

L'objectif de ce paragraphe est de définir une représentation des propriétés mécaniques d'une pièce imprimée par FDM. Pour cela, Nous nous appuyons sur l'analyse du procédé d'impression ainsi que sur les mesures expérimentales provenant de la littérature, présentées en 1.1 (cf. tableau 1.1 ). Nous distinguons deux zones aux propriétés distinctes :

- Un contour, dense et orienté selon la normale à la forme
- Un volume, dense ou non, ayant un motif bien défini

Nous commençons par fournir une description pour chacune de ces zones, puis nous présenterons un schéma d'interpolation permettant de décrire les propriétés mécaniques dans l'ensemble de la pièce.

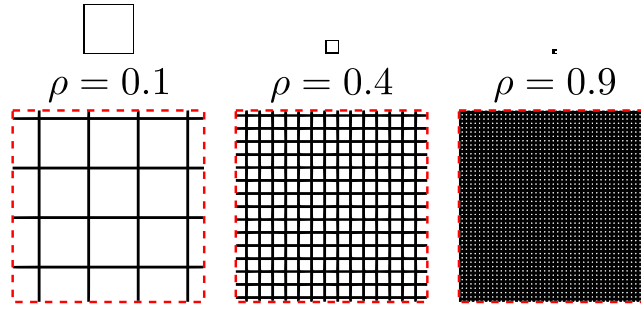


Figure VIII.5 – Variation de la densité de remplissage pour un motif donné. La "largeur de trait" étant imposé, on réduit la dimension de la cellule unitaire afin d'augmenter la densité.

## Description du volume

Le volume de la pièce peut être "rempli" entièrement ou remplacé par un motif périodique défini par la machine. La figure VIII.3 présente un motif de remplissage couramment utilisé : un remplissage en carré de côté variable suivant la densité souhaitée. Il est possible d'utiliser divers motifs, tels que les nids d'abeilles ou des octogones. Tous ont en commun qu'ils sont périodiques selon les deux directions du plan d'impression.

Comme le rayon du filament d'impression est fixé par la buse de l'imprimante, le moyen le plus efficace pour modifier la densité de remplissage est de modifier la taille de la cellule de périodicité. La figure VIII.5 illustre la méthode utilisée pour faire varier la densité. On constate que le nombre de cellules de répétition devient de plus en plus important à mesure que la densité augmente. On propose d'exploiter ce phénomène pour définir des propriétés équivalentes et homogènes pour le volume.

Pour de fortes densités de remplissage  $\rho_{vol}$ , on approche la séparation d'échelle entre la pièce et le motif de remplissage, on peut donc évaluer des propriétés effective du volume à l'aide de méthode d'homogénéisation des milieux périodiques, comme cela a été fait dans la partie B lors de l'étude des propriétés effectives matériaux des architectures. Les propriétés effectives sont donc uniquement fonction de la forme de la cellule de répétition et des propriétés du fil d'impression, nous les définissons à l'aide d'un tenseur d'élasticité quelconque, noté  $\overset{\equiv}{\bar{C}}_{vol}(\rho_{vol})$  que l'on peut éventuellement calculer avec une méthode d'homogénéisation périodique.

## Description du contour de la forme

Le contour de la forme est imprimé en plusieurs passes successives, le balayage de la buse se fait tangentiellement au contour. L'enveloppe ainsi formée est dense et anisotrope, on suppose que ses propriétés se rapprochent de celles des échantillons denses décrit dans le paragraphe précédent (1.1). La figure VIII.6 illustre aussi un autre point important : **l'anisotropie est orientée selon la direction tangente à la surface externe de la pièce** .

Afin de représenter cette anisotropie orientée, nous commençons par définir le tenseur  $\overset{\equiv}{\bar{C}}_0$  qui représente les propriétés d'une zone imprimée dense dans le repère  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Nous définissons ensuite la matrice de rotation  $R(\vec{n}(\Omega))$  le tenseur de rotation de l'interface, qui est une fonction de la normale à l'interface  $\vec{n}$ , il s'écrit

$$\vec{n}(\Omega) = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, R(\vec{n}(\Omega)) = \begin{bmatrix} n_y^2 & n_x^2 & n_y n_x \\ n_x^2 & n_y^2 & -n_y n_x \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_y^2 - n_x^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.1})$$

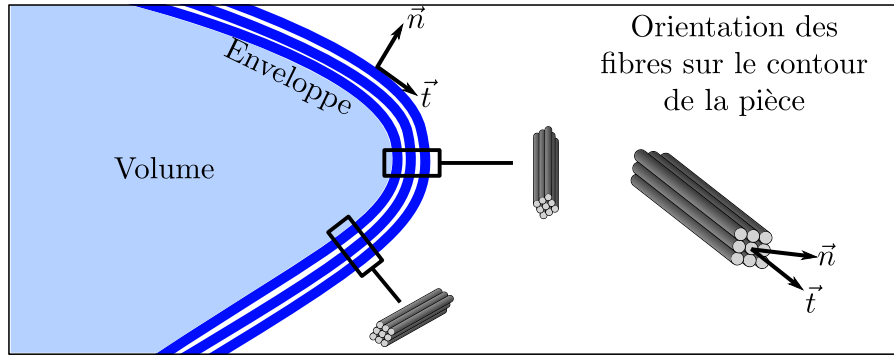


Figure VIII.6 – Variation de la densité de remplissage pour un pattern donné. La "largeur de trait" étant imposé, on réduit la dimension de la cellule unitaire afin d'augmenter la densité.

Nous écrivons alors le tenseur d'élasticité de l'interface  $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{int}$  dans le repère  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  comme étant

$$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}^{int}(\vec{n}(\Omega)) = R(\vec{n}(\Omega))^t \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_0 R(\vec{n}(\Omega)) \quad (\text{VIII.2})$$

### Schéma d'interpolation des propriétés mécaniques

Afin de pouvoir calculer les dérivées de formes des critères utilisés pour l'optimisation de domaine il est nécessaire d'obtenir une expression des propriétés physiques régulière et dont les dérivées sont continues (cf. chapitre III). Pour cela, nous nous inspirons du schéma d'interpolation des propriétés présenté dans le chapitre II, équation (II.25). Cependant au lieu d'interpoler des quantités telles que le module de Young ou le coefficient de Poisson nous interpolons une à une les composantes du tenseur d'élasticité.

Nous reprenons l'expression (II.21), que l'on modifie afin de former une interpolation par coefficient qui tient compte de l'orientation de l'interface, cela donne

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^{vol} h_m(d_\Omega) + C_{ijkl}^{int}(\vec{n}(\Omega))(1 - h_m(d_\Omega) - h_p(d_\Omega)) + C_{ijkl}^{vide} h_p(d_\Omega), \quad (\text{VIII.3})$$

avec

$$h_m(d_\Omega) = \begin{cases} 1 & , d_\Omega < -\epsilon \\ -\frac{d_\Omega}{\epsilon} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(d_\Omega + \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} & , -\epsilon \leq d_\Omega < 0 \\ 0 & , d_\Omega > 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.4})$$

et

$$h_p(d_\Omega) = \begin{cases} 0 & , d_\Omega < 0 \\ \frac{d_\Omega}{\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(d_\Omega - \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} & , 0 < d_\Omega \leq \epsilon \\ 1 & , d_\Omega > \epsilon \end{cases} . \quad (\text{VIII.5})$$

La figure VIII.7 présente un exemple d'application de ce schéma d'interpolation, ici on a utilisé les propriétés suivantes :

$$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}^{vol} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.12 & 0 \\ 0.12 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.54 \end{bmatrix}, \quad \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}^{int} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.31 & 0 \\ 0.31 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0.54 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.6})$$

Nous disposons maintenant d'un modèle permettant de représenter les propriétés d'une pièce fabriquées par FDM.



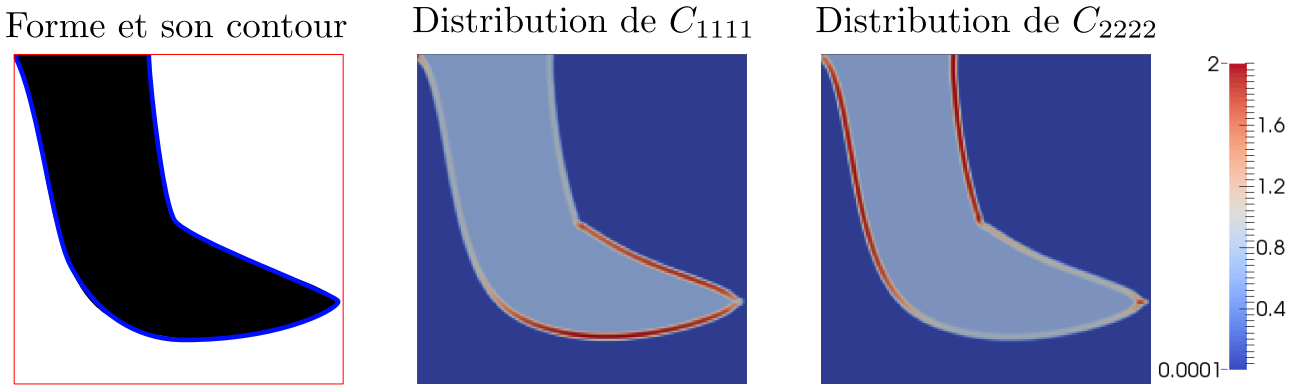


Figure VIII.7 – Exemple d'interpolation des coefficients  $C_{1111}$  et  $C_{2222}$  sur une forme simple.

## 2 Prise en compte des propriétés induites dans le processus d'optimisation

Nous avons introduit un modèle permettant de représenter les propriétés induites lors de la fabrication d'une structure par la méthode FDM. Nous allons maintenant étudier l'influence de cette modification sur la formulation du problème d'optimisation.

Nous étudions d'abord les changements dans l'expression de la dérivée de forme, puis comment les différents termes la constituant sont ensuite calculés.

### 2.1 Impact de la modification du modèle descriptif

#### Retour sur le changement de la formulation

La modification proposée du modèle se réduit à un changement de la fonction d'interpolation des propriétés mécaniques. L'expression de la dérivée de forme s'en trouve elle aussi modifiée car la fonction d'interpolation intervient dans les équations d'états.

Nous reprenons l'expression d'une composante du tenseur des modules élastiques défini dans l'équation (VIII.3), qui s'écrit

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^{vol} h_m(d_\Omega) + C_{ijkl}^{int}(\vec{n}(\Omega))(1 - h_m(d_\Omega) - h_p(d_\Omega)) + C_{ijkl}^{vide} h_p(d_\Omega),$$

Nous constatons que les composantes du tenseur sont maintenant fonction de deux paramètres :

- La fonction  $d_\Omega$  qui est la distance signée à l'interface  $\partial\Omega$ , définie dans le domaine  $D$ ,
- La normale  $\vec{n}(\Omega)$  au bord  $\partial\Omega$ , définie dans tout le domaine  $D$  telle que  $\vec{n} = \bar{\nabla} d_\Omega$ .

Nous réécrivons les équations d'état pour faire apparaître cette nouvelle dépendance, ce qui donne

$$\begin{cases} -\text{div}(\bar{\bar{\bar{C}}}(d_\Omega, \vec{n}(d_\Omega))\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}(\bar{\mathbf{u}})) &= \bar{f} \quad \bar{x} \in D \\ \bar{\bar{\bar{C}}}(d_\Omega, \vec{n}(d_\Omega))\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} &= \bar{g} \quad \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{\mathbf{u}} &= 0 \quad \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (\text{VIII.7})$$

Les deux termes qui définissent maintenant le tenseur des modules élastiques dépendent du domaine optimisé  $\Omega$ , les expressions de leurs dérivées de formes  $d'_\Omega(\bar{\theta})$  et  $\vec{n}(\Omega)'(\bar{\theta})$  sont donc susceptibles d'apparaître dans l'expression de la dérivée de forme des critères.

La gestion de la dépendance à la distance signée  $d_\Omega$  a été étudiée par Allaire *et al.* (2013), ils présentent une expression de sa dérivée de forme  $d'_\Omega(\bar{\theta})$ . Vermaak *et al.* (2013) utilisent cette expression pour optimiser des structures comportant des interfaces graduées. L'annexe C présente le calcul de la dérivée de forme de la compliance dans le cas d'une dépendance du tenseur des modules élastiques à la distance signée.

Dans notre cas il y a cependant une dépendance supplémentaire à la normale du domaine optimisé dont nous allons maintenant étudier l'effet pour le cas exemple de la compliance d'une structure.

### Modification de la dérivée de forme de la compliance

Nous proposons de calculer dans ce contexte la dérivée de forme de la compliance définie telle que

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{u} \, dS \quad (\text{VIII.8})$$

avec :

- $\Gamma_N$  le bord de Neumann où on applique une force
- $\bar{g}$  le vecteur traction
- $\bar{u}$  le déplacement solution des équations d'état (VIII.7).

Nous écrivons le Lagrangien du problème d'optimisation comme étant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, v, p, \mu) &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot v \, dS + \int_D -\text{div}(\bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(\bar{v})) \cdot p \, dV \\ &+ \int_{\Gamma_N} \left[ \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) \cdot \bar{n} - \bar{g} \right] \cdot p \, dS \\ &+ \int_{\partial D \setminus \Gamma_N \setminus \Gamma_D} \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) \cdot \bar{n} \cdot p \, dS + \int_{\Gamma_D} v \cdot \mu \, dS. \end{aligned} \quad (\text{VIII.9})$$

On peut aussi écrire ce Lagrangien en réalisant une intégration par partie sur son second terme, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, v, p, \mu) &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot v \, dS + \int_D \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) : \bar{\bar{e}}(p) \, dV - \int_{\partial D} \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) \cdot p \cdot \bar{n} \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_N} \left[ \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) \cdot \bar{n} - \bar{g} \right] \cdot p \, dS \\ &+ \int_{\partial D \setminus \Gamma_N \setminus \Gamma_D} \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))\bar{\bar{e}}(v) \cdot \bar{n} \cdot p \, dS + \int_{\Gamma_D} v \cdot \mu \, dS. \end{aligned} \quad (\text{VIII.10})$$

Les modifications insérées n'introduisent pas de dépendance au déplacement  $\bar{u}$ , ce qui implique que le tenseur des modules élastiques reste constant vis-à-vis des équations d'état (VIII.7). De fait, les équations d'état du problème direct et du problème adjoint restent identiques. Le critère de compliance est donc encore auto-adjoint, comme cela est détaillé dans l'annexe C. Le changement intervient au moment du calcul de la dérivée de forme car une dépendance implicite à la forme  $\Omega$  a été introduite par l'intermédiaire de  $\bar{n}(\Omega)$ . Nous écrivons la dérivée de forme du Lagrangien au point optimal en imposant que  $\bar{\theta} = 0$  sur le contour  $\partial D$  ce qui permet de simplifier considérablement l'expression de la dérivée de forme, cela donne

$$\mathcal{L}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) = - \int_D \bar{\bar{C}}(d_\Omega, \bar{n}(d_\Omega))'(\bar{\theta})\bar{\bar{e}}(u) : \bar{\bar{e}}(u) \, dV. \quad (\text{VIII.11})$$

Nous remarquons dans cette expression la présence de la dérivée de forme du tenseur des modules élastiques. En développant ce terme nous obtenons

$$\mathcal{L}(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) = - \int_D \frac{\partial d_\Omega}{\partial \Omega}(\bar{\theta}) \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{e}}(u) : \bar{\bar{e}}(u) \, dV - \int_D \frac{\partial \bar{n}}{\partial \Omega}(\bar{\theta}) \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{n}} \cdot \left[ \bar{\bar{e}}(u) : \bar{\bar{e}}(u) \right] \, dV. \quad (\text{VIII.12})$$

Nous retrouvons dans cette expression la dérivée de forme de la fonction distance signée  $\frac{\partial d_\Omega}{\partial \Omega}(\bar{\theta})$  mais aussi la dérivée de forme de la normale  $\frac{\partial \bar{n}}{\partial \Omega}(\bar{\theta})$ . La première intégrale est similaire à celle

obtenue lors de la dérivation de forme de la compliance dans le cas d'une dépendance à la fonction distance signée cf. annexe C), elle traduit l'influence de la variation de la distance signée  $d_\Omega$  sur le critère.

La seconde intégrale traduit quant à elle la dépendance du critère à la variation de la normale

$\bar{n}(\Omega)$ . On note que la dérivée du tenseur des modules élastiques  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{n}}$  apparaît dans l'expression, ce terme s'annule dans le cas où le tenseur d'élasticité ne varie pas avec la direction de la normale. Dans le cas où l'interface serait isotrope, on retrouve donc l'expression de la dérivée de forme de la compliance avec la seule dépendance à la distance signée, présentée en annexe C.

Il est encore nécessaire de retrouver la structure d'une dérivée de forme, pour cela on utilise plusieurs résultats de la littérature détaillés dans l'annexe C :

— La formule de la coaire (C.3) permettant de transformer une intégrale volumique en une double intégrale sur la surface  $\partial\Omega$  et les rayons émergeant de ce même bord. Cette expression est détaillée en annexe C.

— Nous supposons que l'interface est suffisamment fine ( $\frac{\partial \bar{C}}{\partial d_\Omega}$  est non nul uniquement dans un voisinage restreint de  $\partial\Omega$ ), on peut ainsi utiliser l'expression suivante

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \Omega}(\bar{\theta}) \approx -\nabla_{\partial\Omega} \left( \bar{\theta}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \cdot \bar{n}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \right), \quad \forall x \in D \setminus \Sigma, \quad (\text{VIII.13})$$

avec  $\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)$  l'opérateur gradient tangentiel défini tel que  $\nabla_{\partial\Omega}(a) = \nabla a - ((\nabla a) \cdot \bar{n}) \bar{n}$ .

— On utilise le fait que la dérivée de forme de la distance signée peut s'écrire

$$\frac{\partial d_\Omega}{\partial \Omega}(\bar{\theta}) = -\bar{\theta}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \cdot \bar{n}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})), \quad (\text{VIII.14})$$

on remarque aussi que cette expression est constante le long d'un rayon.

Ces différentes expressions nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) &= \int_{\partial\Omega} \bar{\theta} \cdot \bar{n} \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{C}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS \\ &+ \int_{\partial\Omega} \nabla_{\partial\Omega} \cdot (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{n}} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS, \end{aligned} \quad (\text{VIII.15})$$

cette forme n'est cependant toujours pas appropriée, il faut encore transformer la deuxième intégrale pour faire disparaître le gradient tangentiel de la composante normale de la perturbation qui empêche d'extraire facilement une direction de descente. Pour cela, on utilise l'identité

$$\int_{\partial\Omega} a (\nabla_{\partial\Omega} \cdot \bar{b}) dS + \int_{\partial\Omega} \bar{b} \cdot \nabla_{\partial\Omega} (a) dS = \int_{\partial\Omega} (\bar{b} \cdot \bar{n}) H a dS, \quad (\text{VIII.16})$$

avec  $a$  un champ scalaire et  $\bar{b}$  un champ vectoriel quelconque,  $H$  la courbure moyenne de  $\partial\Omega$  et  $\nabla_{\partial\Omega} \cdot \bar{b}$  le divergent tangentiel de  $\bar{b}$ .

En appliquant cette identité à l'équation VIII.15, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) = & \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS \\ & + \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{n}} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] \cdot \bar{n} H dS \\ & - \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \nabla_{\partial\Omega} \cdot \left( \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{n}} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right) dS, \end{aligned} \quad (\text{VIII.17})$$

ce qui nous permet d'identifier la direction de descente. Maintenant que cette expression est établie, il reste à évaluer chacun des termes et à calculer la dérivée de forme. On présente maintenant comment ces différentes quantités sont évaluées.

## 2.2 Mise en œuvre de la formulation proposée

### Calcul des différents termes

Afin de mieux comprendre quels termes doivent être calculés, nous écrivons la dérivée de forme (VIII.17) pour un cas 2D, en faisant apparaître les composantes  $n_x$  et  $n_y$  du terme  $\frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \bar{n}}$ , qui représente la dérivée d'un tenseur par rapport à un vecteur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) = & \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS \\ & + \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial n_x} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right. \\ & \quad \left. \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial n_y} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] \cdot \bar{n} H dS \\ & - \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \nabla_{\partial\Omega} \cdot \left( \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial n_x} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] \right. \\ & \quad \left. \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial n_y} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right) dS, \end{aligned} \quad (\text{VIII.18})$$

Il est donc nécessaire de calculer la dérivée du tenseur des modules élastiques par rapport à la distance signée  $d_\Omega$  ainsi que par rapport aux deux composantes du vecteur normal  $\bar{n}$ . On reprend la fonction d'interpolation (VIII.3) des composantes du tenseur d'élasticité,

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}^{vol} h_m(d_\Omega) + \bar{\bar{C}}^{int}(\bar{n}(\Omega))(1 - h_m(d_\Omega) - h_p(d_\Omega)) + \bar{\bar{C}}^{vide} h_p(d_\Omega),$$

d'abord la dérivée par rapport à la distance signée

$$\frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial d_\Omega} = \bar{\bar{C}}^{vol} \frac{\partial h_m(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} - \bar{\bar{C}}^{int}(\bar{n}(\Omega)) \left( \frac{\partial h_m(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} + \frac{\partial h_p(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} \right) + \bar{\bar{C}}^{vide} \frac{\partial h_p(d_\Omega)}{\partial d_\Omega}, \quad (\text{VIII.19})$$

cette dérivation est aisée et ne nécessite finalement que la dérivation des fonctions d'interpolation  $h_m$  et  $h_p$ , qui sont des fonctions scalaires à un paramètre d'entrée. On s'intéresse

maintenant à la dérivée par rapport aux composantes de la normale, que l'on écrit

$$\frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial n_i} = \frac{\partial \bar{\bar{C}}^{int}(\vec{n}(\Omega))}{\partial n_i} (1 - h_m(d_\Omega) - h_p(d_\Omega)). \quad (\text{VIII.20})$$

En réutilisant l'équation (VIII.2), qui pour rappel donne

$$\bar{\bar{C}}^{int}(\vec{n}(\Omega)) = R(\vec{n}(\Omega))^t \bar{\bar{C}}_0 R(\vec{n}(\Omega)),$$

on écrit

$$\frac{\partial \bar{\bar{C}}^{int}(\vec{n}(\Omega))}{\partial n_i} = \frac{\partial R(\vec{n}(\Omega))^t}{\partial n_i} \bar{\bar{C}}_0 R(\vec{n}(\Omega)) + R(\vec{n}(\Omega))^t \bar{\bar{C}}_0 \frac{\partial R(\vec{n}(\Omega))}{\partial n_i}, \quad (\text{VIII.21})$$

Le tenseur de rotation  $R(\vec{n}(\Omega))$  est explicitement défini par l'équation (VIII.1) comme une fonction de  $n_x$  et  $n_y$ , sa dérivation terme à terme est donc directe.

Nous calculons  $H$  comme la divergence de la normale :  $H = \text{div}(\vec{n})$ .

Numériquement, on calcule les dérivées en utilisant les fonctions de formes des éléments composant le maillage.

### Calcul des différents termes et ordre de grandeur

Nous reprenons l'expression (VIII.18) afin d'en étudier les différents termes. Nous constatons d'abord que le premier terme représente la dépendance du critère à la variation de la distance signée  $d_\Omega$ , il est similaire à celui obtenu lors de la dérivation présentée en annexe C. Les termes restant dépendent de la dérivée de la normale à la distance signée, ils représentent donc l'effet de l'orientation de l'interface anisotrope sur le critère de compliance.

Nous regroupons les termes en fonction de leur dépendance, ce qui nous permet d'isoler

- un terme  $P_1$  constitué du premier terme de l'équation (VIII.17), représentant l'effet de la modification de la distance signée,

$$\int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \vec{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS,$$

- un terme  $P_2$  constitué des deux autres termes de l'équation (VIII.17), représentant l'influence de la modification de la normale.

$$\int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \vec{n}) \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \vec{n}} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] \cdot \vec{n} H dS - \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \vec{n}) \nabla_{\partial\Omega} \cdot \left( \int_{ray} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial \vec{n}} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right) dS.$$

Nous proposons maintenant d'illustrer ces deux termes à travers le calcul du gradient de forme de la compliance pour un cas simple. La figure VIII.8 présente les conditions aux limites du problème posé et la figure VIII.9 la forme utilisée pour le calcul du gradient. Le modèle des propriétés mécaniques utilisé est illustré sur la figure VIII.10, ici nous voyons en comparant les coefficients  $C_{1111}$  et  $C_{2222}$  que l'on modélise une forme ayant un massif isotrope et une croûte ayant des propriétés anisotrope.

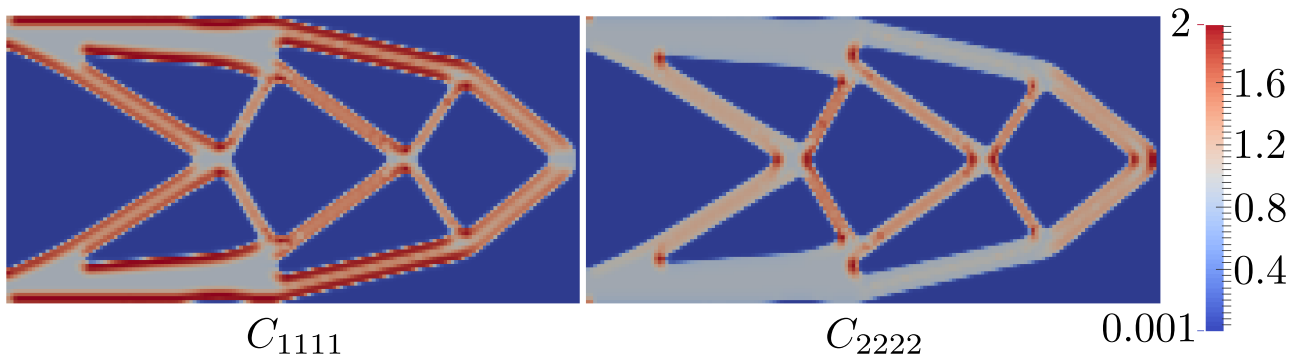


Figure VIII.10 – Répartition des modules  $C_{1111}$  et  $C_{2222}$  mécaniques utilisés pour l'exemple de calcul du gradient (VIII.18).

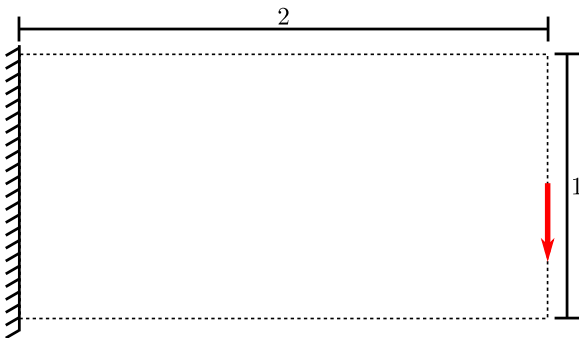


Figure VIII.8 – Conditions aux limites pour le cas d'illustration des différents termes du gradient (VIII.18).

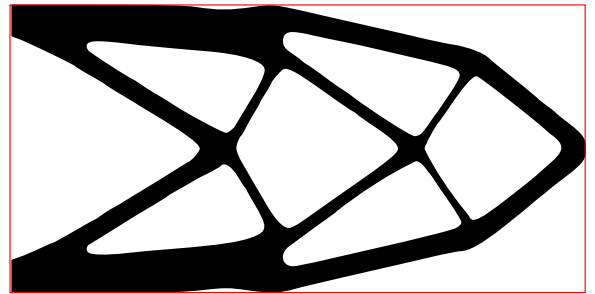


Figure VIII.9 – Forme utilisée pour l'exemple de calcul du gradient (VIII.18).

Les figures VIII.11 et VIII.12 présentent l'allure des deux termes  $P_1$  et  $P_2$  composant le gradient de forme. Nous constatons plusieurs points important :

- Le terme  $P_1$  est similaire à un critère de compliance, il est négatif sur la totalité du contour,
- Le terme  $P_2$  a une amplitude plus de trois ordres de grandeur au-dessus de celle du terme  $P_1$ ,
- Le terme  $P_2$  change de signe sur le bord de la forme.

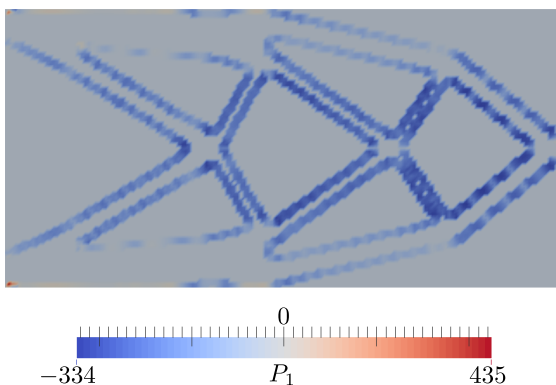


Figure VIII.11 – Terme  $P_1$  du gradient (VIII.18) calculé sur la forme de la figure VIII.9 en utilisant les propriétés définies sur la figure VIII.10.

Le terme  $P_2$  a une tendance très nette à "faire tourner" l'interface comme en atteste la forte composante  $\vec{z}$  du rotationnel  $\text{rot} P_2 \vec{n}$  présentée en figure VIII.13, ce comportement est attendu

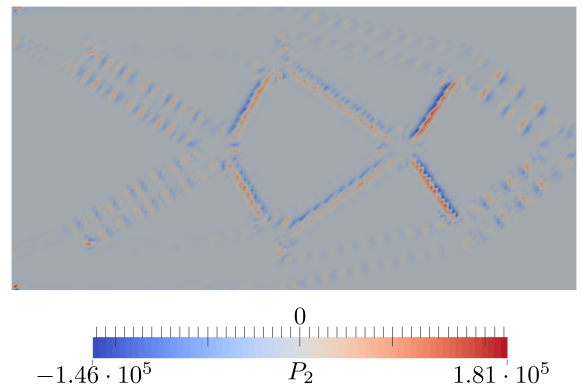


Figure VIII.12 – Terme  $P_2$  du gradient (VIII.18) calculé sur la forme de la figure VIII.9 en utilisant les propriétés définies sur la figure VIII.10.

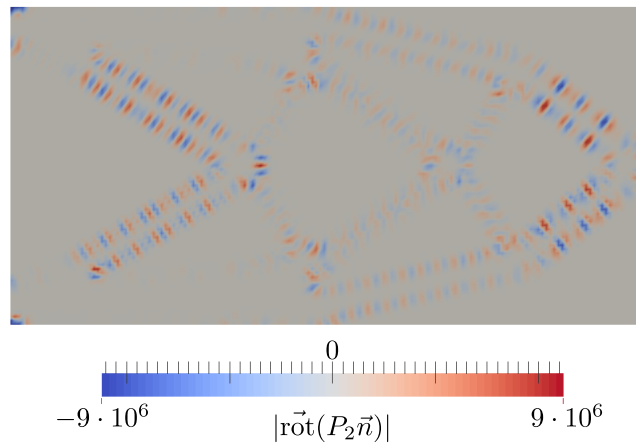


Figure VIII.13 – Calcul de  $\text{rot}P_2\vec{n}$ , illustrant la tendance qu'a le champ  $P_2\vec{n}$  à faire tourner l'interface.

dans la mesure où ce terme représente la dépendance du critère à la rotation de l'interface. Après plusieurs séries de simulations utilisant ce critère, nous avons cependant constaté qu'il engendre une grande instabilité numérique. La difficulté d'approximation du terme  $P_2$  et son caractère très irrégulier rendent ce terme difficile à évaluer avec précision. Nous proposons maintenant une expression simplifiée de la dérivée de forme.

### Formulation simplifiée

Nous proposons de négliger le terme  $P_2$  apparaissant dans l'expression du gradient de forme, cela donne

$$\mathcal{L}(v^*, p^*, \mu^*)'(\bar{\theta}) = \int_{\partial\Omega} \bar{\theta} \cdot \bar{n} \left[ \int_{ray} \frac{\partial \bar{C}}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(u) : \bar{\bar{\epsilon}}(u) dz \right] dS. \quad (\text{VIII.22})$$

Nous avons retiré la dépendance du gradient à l'orientation de l'interface, nous retrouvons ainsi une expression similaire à celle présentée dans l'annexe C.

Cette simplification soulève une interrogation : Dans la mesure où la dépendance à l'orientation de la normale a été négligée dans l'expression du gradient de forme, prenons-nous réellement en compte l'anisotropie de l'interface dans le processus d'optimisation ? Cela est vrai en partie ! Cependant la dépendance à l'anisotropie de l'interface intervient, au moins indirectement, dans la définition de  $\bar{C}$ , et a donc une influence sur aussi bien la définition des propriétés que le terme  $P_1$  du gradient. Nous jugerons à l'aide des résultats numériques de la pertinence de cette simplification.

Nous avons maintenant établi un modèle complet et effectué le calcul des dérivées de formes. Plusieurs exemples numériques vont maintenant être traités.

### 3 Résultats numériques

Dans ce paragraphe nous allons appliquer un processus d'optimisation de domaine à deux problèmes-exemples d'optimisation de structures. Nous présentons des solutions optimisées avec une prise en compte des propriétés induites suivant qu'elles soient destinées à être fabriquées par impression 3D FDM ou par moulage. Nous comparons les formes obtenues pour ces deux méthodes de fabrication.

Pour l'ensemble de ce paragraphe nous traiterons un problème de minimisation de masse, cela donne

$$\min_{\Omega} \quad m(\Omega) \\ C(\Omega) \leq C_{max}, \quad (\text{VIII.23})$$

avec  $m(\Omega)$  la masse de la structure optimisée,  $C(\Omega)$  la compliance de la structure soumise à un chargement mécanique et  $C_{max}$  la valeur maximum que cette compliance ne devra pas dépasser. À travers ce problème d'optimisation nous étudions l'influence du choix de la méthode de fabrication tant sur la performance que sur la forme optimale.

Nous proposons dans un premier temps différents modèles permettant de décrire les propriétés induites par les méthodes de fabrication. Ensuite nous présentons les résultats numériques obtenu avec ces différents modèles. Enfin nous discutons de l'intérêt de la prise en compte des propriétés induites lors d'un processus d'optimisation de domaine.

#### 3.1 Définition des paramètres de simulation

Nous nous intéressons à la fabrication de pièce en polymère, plus spécifiquement en ABS (thermoplastique) car c'est un des plus utilisés en impression par déposition de filaments. Nous présentons ici deux processus de fabrication :

- Le cas **usiné** ou **moulé**, ici la phase solide de la structure possède les propriétés de l'ABS massif. De telles propriétés peuvent par exemple être obtenues dans le cas où la pièce serait fabriquée par usinage ou moulage.
- Un cas **imprimé par FDM**, ici les parties massives de la pièce sont en réalité un matériau hétérogène dont les propriétés sont à définir, et la structure comporte aussi une croute dense. Ce modèle est en accord avec les observations issues du paragraphe 1 de ce chapitre.

Nous allons tester différentes configurations pour les propriétés d'une pièce imprimée par FDM, que voici

- b Des propriétés effectives isotropes pour le massif et une croute anisotrope orientée. Cette configuration de propriétés semble être la plus probable vis-à-vis des observations menées dans le paragraphe 1.
- c Des propriétés effectives isotropes pour le massif et une croute isotrope. Ce modèle nous permettra de juger de l'effet de la prise en compte de l'anisotropie de la croute.
- d Des propriétés effectives anisotropes, forte selon l'axe x, et une croute anisotrope orientée.
- e Des propriétés effectives anisotropes, forte selon l'axe y, et une croute anisotrope orientée. Les deux dernières combinaisons de propriétés permettent d'évaluer l'influence des parties massives sur le processus d'optimisation.
- f Des propriétés effectives anisotropes orientées pour le massif et pas d'interface, cela permet de représenter les propriétés d'une pièce imprimées par série de contours.

La figure VIII.14 présente les six cas énoncés au-dessus, avec les représentations **schématiques** qui seront utilisées dans la suite de ce paragraphe.

Souhaitant traiter ces six cas il est nécessaire de se doter de propriétés mécaniques réalistes, nous présentons maintenant les propriétés de l'ABS massif ainsi que celle d'un empilement de



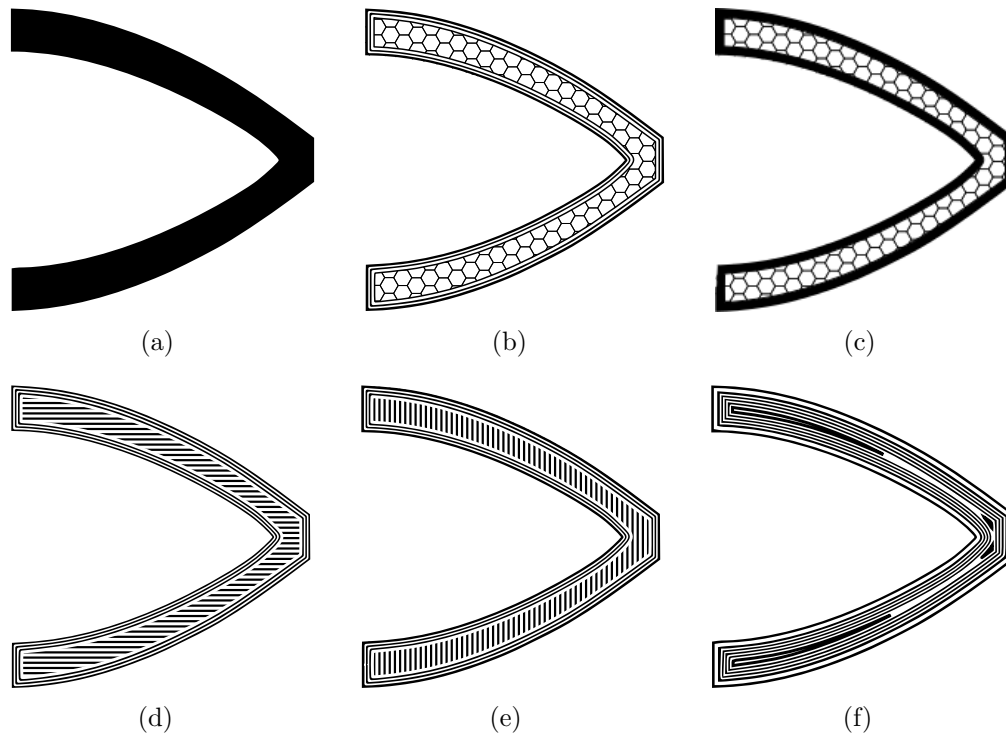


Figure VIII.14 – Illustrations des différentes combinaisons de propriétés retenues composant les six cas tests de ce paragraphe.

fibre imprimé en ABS. Les modèles représentant nos différentes structures seront ensuite définis à partir de ces propriétés.

### Propriétés du matériau moulé

Pour le matériau moulé/injecté ABS, on utilise les propriétés mécaniques fournies dans le tableau VIII.2.

Propriété	Valeur
densité (u.a.)	1.0
Module de Young	1.93
Coefficient de Poisson	0.2

$$\underset{\equiv}{\underline{\underline{C}}}_{ABS} = \begin{bmatrix} 2.01 & 0.40 & 0 \\ 0.4 & 2.01 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.80 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.24})$$

Table VIII.2 – Propriétés mécaniques de l'ABS

### Propriétés d'une pièce imprimée massive en ABS

Basé sur les différentes mesures de la littérature, nous sélectionnons un jeu de propriétés pour une pièce massive imprimée en ABS, avec une direction de balayage constante (cf. figure VIII.2), nous donnons ici directement le tenseur d'élasticité en contraintes planes :

$$\underset{\equiv}{\underline{\underline{C}}}_{3Dprinted} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.31 & 0 \\ 0.31 & 0.82 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.54 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.25})$$

## Propriétés des cas tests

Les propriétés mécaniques de nos six structures sont définies à l'aide du schéma d'interpolation (VIII.3), que l'on rappelle

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^{vol} \cdot h_m(d_\Omega) + C_{ijkl}^{int}(\vec{n}(\Omega)) \cdot (1 - h_m(d_\Omega) + h_p(d_\Omega)) + C_{ijkl}^{wide} \cdot (1 - h_p(d_\Omega)),$$

il est donc nécessaire de définir pour chaque cas  $C_{ijkl}^{int}$  et  $C_{ijkl}^{vol}$ , respectivement les composantes du tenseur d'élasticité de la croute et celles du tenseur d'élasticité représentant la masse de la structure.

Nous rappelons ici qu'il est possible de choisir lors de l'impression d'une pièce le **pourcentage de remplissage des parties massives**. Nous ajoutons le paramètre  $\rho_{vol}$  dans notre modèle, qui représente le pourcentage de remplissage. Cette variable est comprise entre 0 et 1.

Le tableau VIII.3 rassemble les propriétés retenues pour le volume et la croute pour chacun des six cas proposés précédemment.

Cas	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}^{vol}$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}^{int}$
Usiné(a)	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{ABS}$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{ABS}$
Cas b	$\text{HS}(\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{vol}, \rho_{vol})$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$
Cas c	$\text{HS}(\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{vol}, \rho_{vol})$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{ABS}$
Cas d	$\rho_{vol} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$
Cas e	$\rho_{vol} R_{90^\circ}(\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted})$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$
Cas f	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$	$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$

Table VIII.3 – Propriétés mécaniques des différentes configurations de propriétés.

Nous explicitons maintenant les différents termes contenu dans ce tableau :

- HS(.) correspond à la borne supérieure d'Hashin Shtrikman, ce tenseur est obtenu en considérant que les zones massives sont constituées d'un composite ABS-vidé de densité  $\rho_{vol}$  (cf. Annexe B). Le tableau VIII.4 détaille les valeurs de module de Young pour différentes valeurs de  $\rho_{vol}$  et pour un composite polymère-air.
- $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}(\vec{n})$  correspond au tenseur d'élasticité d'une pièce imprimée massive, orienté perpendiculairement à la normale de la forme.
- $\rho_{vol} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted}$  correspond à un laminé de rang 1 imprimé massif-vidé réalisé selon l'épaisseur de la pièce, les propriétés dans le plan sont dictées par la borne de Voigt (cf. annexe B).
- $\rho_{vol} R_{90^\circ}(\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}_{3Dprinted})$  est un composite similaire au précédent dont les fibres sont orientées selon la verticale.

$\rho_{vol}$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$E_{HS,u}$	0.645	0.734	0.829	0.931	1.041	1.159	1.288	1.427	1.58	1.747

Table VIII.4 – Valeurs de la borne supérieure de Hashin-Strikman pour le module de Young et pour un composite ABS-air (propriétés dans le tableau VIII.2). La borne supérieure est obtenue à l'aide de la formule donnée en annexe B, elle est calculée pour différentes fractions volumiques  $\rho_{vol}$  de polymère.

## 3.2 Présentation des résultats de simulation

### Formulation du problème

Le problème d'optimisation de forme est défini comme

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & m(\Omega) = V(\Omega) \times \rho_{vol} + P(\Omega) \times \mu_{crust} \\ & C(\Omega) \leq C_{max}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.26})$$

avec :

- $m(\Omega)$  la masse totale de la structure
- $V(\Omega)$  le volume de la structure
- $\rho_{vol}$  le pourcentage de remplissage pour le domaine  $\Omega$
- $P(\Omega)$  le périmètre du domaine  $\Omega$
- $\mu_{crust}$  la masse linéique du contour de la forme  $\Omega$ .

La masse du domaine optimisé est calculée en multipliant le volume  $V(\Omega)$  du domaine optimisé avec la densité  $\rho_{vol}$  de la phase  $\Phi_1$  remplissant le domaine  $\Omega$ . Nous ajoutons aussi la masse de la croute (si besoin), calculée comme étant le produit du périmètre de la forme  $P(\Omega)$  et de la masse linéaire du contour  $\mu_{crust}$ .

Le terme  $C(\Omega)$  représente la compliance de la structure soumise à un chargement unitaire, nous définissons  $C_{max}$  une valeur de compliance arbitraire que la forme finale ne devra pas dépasser. Nous allons maintenant traiter deux exemples à l'aide de la méthode d'optimisation décrite dans la partie A, pour tous les différents cas de propriétés décrit dans le tableau VIII.3.

### Optimisation d'un cantilever

Nous présentons d'abord les résultats de l'optimisation de la masse d'un cantilever sous une contrainte de compliance. La figure VIII.15 présente les conditions aux limites ainsi que les dimensions du domaine optimisable utilisé

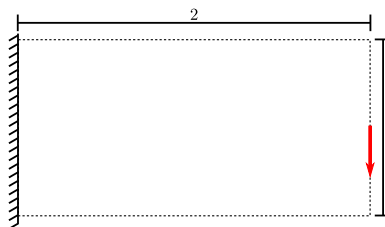


Figure VIII.15 – Dimensions du domaine optimisable et conditions aux limites utilisées pour le problème exemple.

Nous commençons par traiter le cas (a) défini plus avant, il correspond au cas standard d'un matériau homogène et isotrope, et sera notre **référence**. Le tableau VIII.5 présente les propriétés finales de cette référence, nous remarquons que la contrainte sur la valeur maximale de compliance est respectée. La figure VIII.16 présente quant à elle l'évolution de la forme durant le processus d'optimisation.

Propriété	Valeur finale	Contrainte
Masse (u.a.)	0.108	—
Compliance (u.a.)	39.95	$\leq 40$

Table VIII.5 – Valeurs finales des propriétés optimisées de la structure

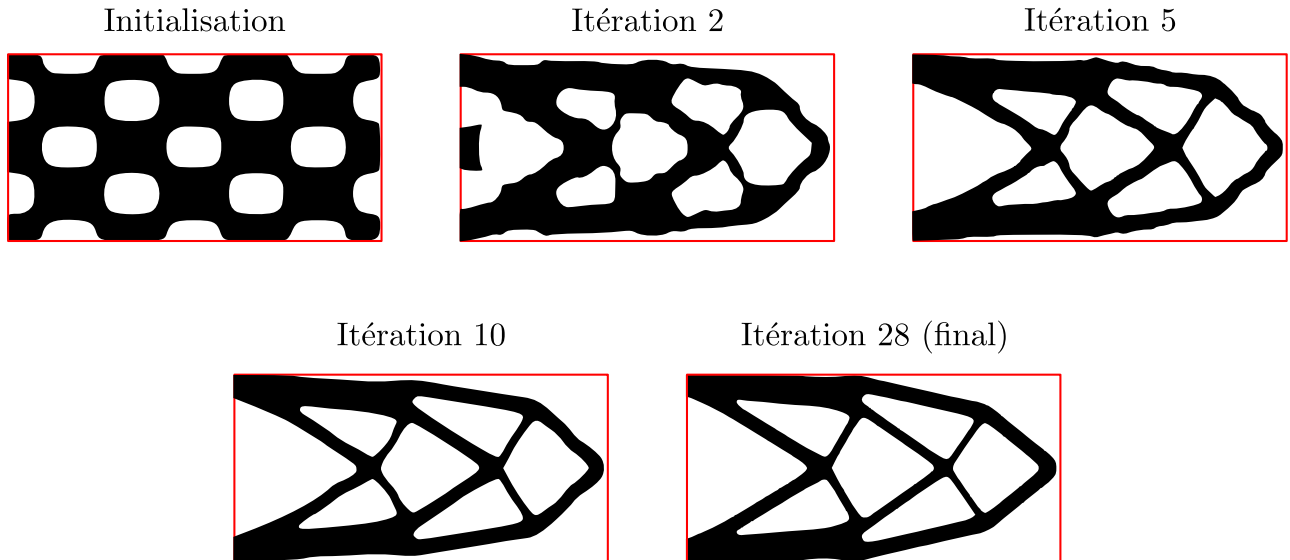


Figure VIII.16 – Processus d'optimisation pour la formulation (VIII.23).

Nous reproduisons maintenant cette simulation pour les autres cas en utilisant la solution obtenue pour le cas (a) comme forme initiale. Les figures VIII.17, VIII.19 et VIII.20 rassemblent les solutions du problème (VIII.26) obtenues pour une densité de remplissage du volume de 60%, 75% et 95% respectivement. Toutes les solutions présentées respectent la contrainte de compliance maximum imposée, par la suite nous comparerons donc directement les valeurs de la fonction objectif  $m(\Omega)$ . Le tableau VIII.6 présente l'ensemble des masses finales pour les différents cas présentés sur les figures VIII.17, VIII.19 et VIII.20. Nous allons maintenant étudier plus en détails les formes optimales présentées sur ces figures.

Nous commençons par comparer les designs optimaux pour les différents cas et pour  $\rho_{vol} = 65\%$  (cf. figure VIII.17), c'est-à-dire pour une faible densité des parties massives. Dans ce cas la croute est significativement plus rigide que le volume de la structure, elle joue aussi un rôle plus important dans la masse totale de la structure. Nous constatons d'abord que les cas (b) à (f) ont un volume plus important que la forme de référence (a), il a été nécessaire de dilater la forme de référence pour compenser la perte de propriétés mécaniques des parties massives. Le tableau VIII.6 indique que l'ensemble des cas (b) à (f) ont une masse plus importante que la structure de référence (a).

En comparant les design (b) et (c) qui diffèrent uniquement par le choix des propriétés de leurs croutes, nous constatons l'influence de la prise en compte de son anisotropie. Le design (b) a nécessité un plus grand ajout de volume afin de compenser la perte de rigidité de la croute. La structure (b) est de fait moins performante que la (c), comme en atteste le tableau VIII.6.

Nous constatons aussi une modification importante de la forme au niveau du point d'application de la force : dans tous les cas où une interface anisotrope orientée est prise en compte, c'est-à-dire pour les design (b), (d), (e) et (f), l'algorithme d'optimisation tend à **aligner la direction tangente de l'interface avec la direction d'application de la force**, ce comportement n'est pas observé pour les cas (a) et (b), la figure VIII.18 met en avant cette différence en comparant les designs (b) et (c). Ce comportement est logique car la croute a de meilleures

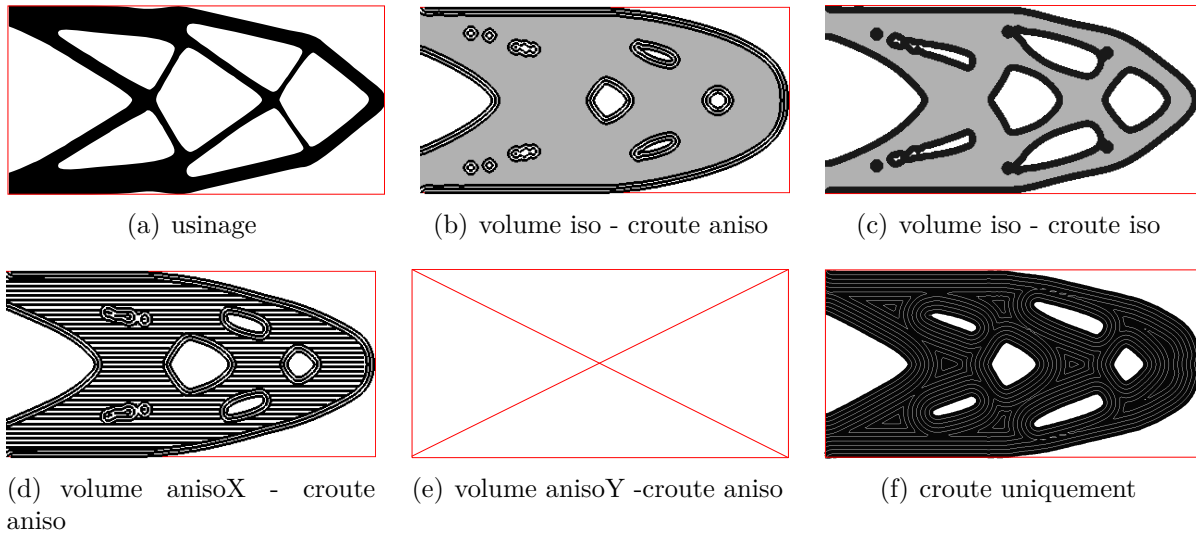


Figure VIII.17 – Formes optimisées pour tous les différents cas définis dans le tableau VIII.3, pour une densité du volume de 60%. Les cas (a) et (f) ont une densité  $\rho_{vol}$  fixe et égale à 1.0, ils sont ajoutés ici afin de pouvoir les comparer aux autres solutions.

propriétés mécaniques selon sa direction tangentielle.

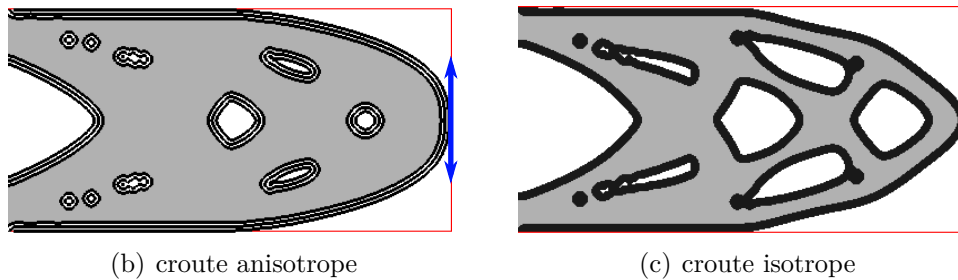


Figure VIII.18 – Comparaison des formes optimisées (b) et (c) de la figure VIII.17. Nous remarquons que le cas comportant une interface anisotrope tend à aligner la croute sur la direction de chargement, à l'endroit où la force est appliquée.

Enfin, nous indiquons qu'aucune forme respectant la contrainte de rigidité  $C < C_{max}$  n'a pu être obtenue pour le cas (e), la forme issue de son processus d'optimisation ne sera donc pas présentée ici.

En se basant sur les valeurs de masse finales présentées dans le tableau VIII.6, nous classons les différentes solutions selon leurs performances :

- 1 la solution obtenue par usinage ou moulage (a)
- 2 la solution avec une croute isotrope et un volume isotrope (c)
- 3 le design utilisant une croute anisotrope et un massif anisotrope orienté selon X (d)
- 4 le design utilisant une croute anisotropie et un massif isotrope (b)
- 5 le design sans massif, constitué de croute uniquement (f)

Il est logique de retrouver le cas (c) dans une meilleure position que le cas (b) dans la mesure où leurs propriétés diffèrent uniquement par le fait que la croute du cas (b) est plus faible dans la direction tangente, il en va de même pour la comparaison de (a) et (f). Il est cependant plus difficile de prévoir le reste du classement.

Nous observons maintenant la figure VIII.19 qui rassemble les formes optimisées pour les différents cas, avec  $\rho_{vol} = 75\%$ . Les mêmes observations que pour  $\rho_{vol} = 60\%$  sont relevées ici. Les performances des cas (b) à (f) sont toujours moindres comparées au cas de référence (cf. tableau

VIII.6), nous notons cependant qu'elles sont meilleures que pour  $\rho_{vol} = 60\%$ . Le classement des différents cas en fonction de leurs performances reste inchangé comme en atteste le tableau VIII.6.

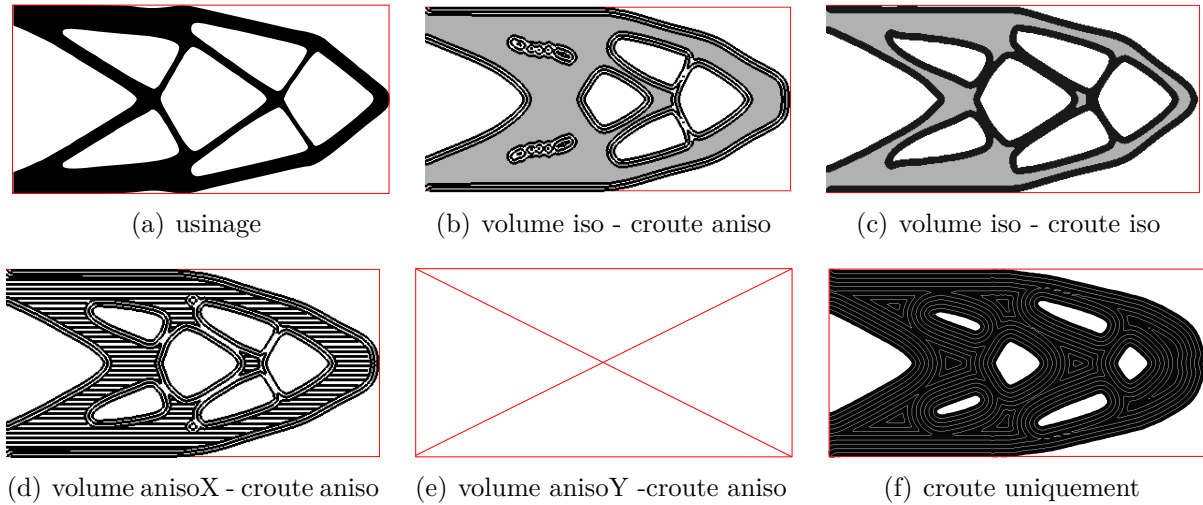


Figure VIII.19 – Formes optimisées pour tous les différents définis dans le tableau VIII.3, pour un taux de remplissage  $\rho_{vol} = 75\%$ . Les cas (a) et (f) ont un taux de remplissage du volume fixe, ils sont ajoutés ici afin de pouvoir les comparer aux autres solutions.

Nous nous intéressons maintenant à la figure VIII.20 regroupant les cas tests pour  $\rho_{vol} = 95\%$ . Nous notons que  $\rho_{vol}$  est très proche de 1.0, ce qui indique que les zones massives et les croutes ont maintenant des propriétés mécaniques très similaires. Dans cette situation les propriétés mécaniques des cas (a) et (c) sont elles aussi similaires, nous constatons d'ailleurs que les deux formes présentées sur la figure VIII.20 sont quasiment identiques. Elles se rapprochent aussi en termes de performance (cf. tableau VIII.6).

Les observations générales sont une nouvelle fois similaires à celle faites à l'aide de la figure VIII.17 : les formes comportant des interfaces anisotropes orientées alignent leurs contours dans la direction tangente à la force appliquée.

Nous notons cependant ici un changement du classement : le cas (b) a fourni une structure plus performante que le cas (d).

$\rho_{vol}$	cas (a) usiné	cas (b)	cas (c)	cas (d)	cas (e)	cas (f)
60%	–	0.238	0.180	0.199		–
75%	–	0.200	0.423	0.181		–
95%	–	0.161	0.113	0.173		–
100%	0.105	–	–	–		0.374

Table VIII.6 – Valeurs finales de la masse pour différents taux de remplissage et pour les différents cas proposés dans le tableau VIII.3.

D'autres simulations ont été menées pour un plus grand nombre de valeurs du taux de remplissage  $\rho_{vol}$ , les formes correspondantes ne sont pas présentées ici. Cependant nous traçons sur la figure VIII.21 l'évolution du ratio  $\frac{m}{m_{ref}}$  pour l'ensemble des valeurs de  $\rho_{vol}$  et pour les différents cas traités.  $m$  correspond à la masse finale de la forme obtenue,  $m_{ref}$  est la masse du cas usiné (a) (cf. tableau VIII.6).

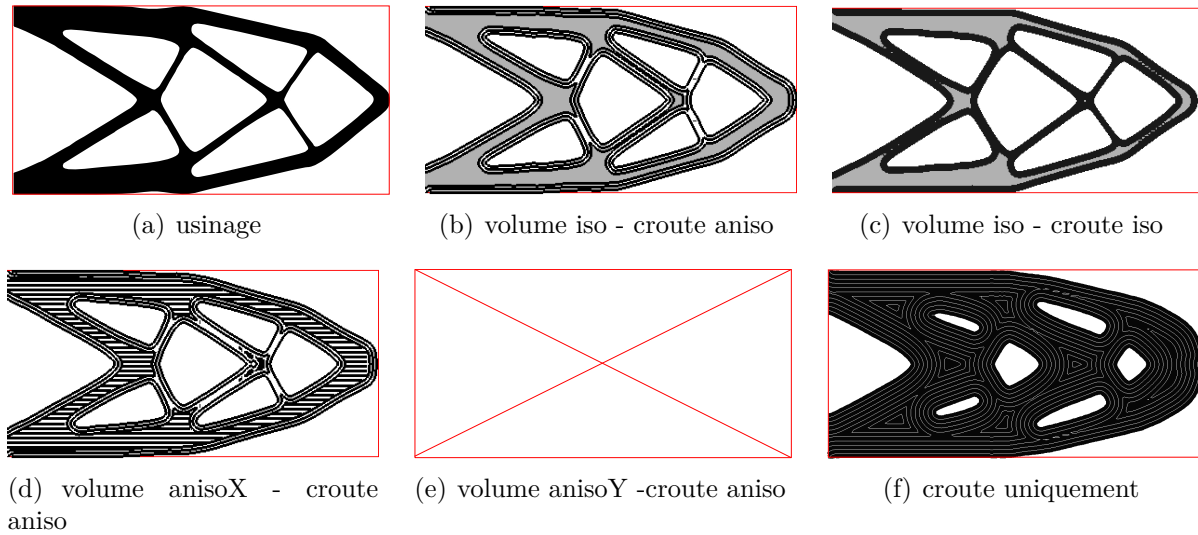


Figure VIII.20 – Formes optimisées pour tous les différents définis dans le tableau VIII.3, pour une densité du volume de 95%. Les cas (a) et (f) ont une densité de volume fixe, ils sont ajoutés ici afin de pouvoir les comparer aux autres solutions.

Ce graphique nous permet de hiérarchiser en termes de performance les différents cas traités, suivant le taux de remplissage de la structure. Nous constatons par exemple que le cas (c) est le plus performant, nous remarquons même que pour les taux de remplissage  $\rho_{vol}$  proche de 1.0, son ratio  $\frac{m}{m_{ref}}$  approche 1.0 et sa forme finale se rapproche de celle du cas usiné (a) (cf. figure VIII.20 (a) et (c)). Les autres cas comportant des interfaces anisotropes orientées sont moins performants. Pour  $\rho_{vol}$  faible ( $< 85\%$ ) le cas (d) est plus performant que le cas (b), cette tendance s'inverse cependant quand  $\rho_{vol}$  dépasse 85%.

Nous remarquons de plus une différence marquée dans la variation des propriétés en fonction du taux de remplissage. Pour les cas comportant un massif isotrope, c'est-à-dire (b) et (c), la masse décroît de manière quasiment linéaire avec  $\rho_{vol}$ . À l'inverse pour le cas (d) comportant un massif anisotrope la masse est nettement moins sensible à la variation du taux de remplissage du massif : un plateau est observable au-delà de  $\rho_{vol} = 75\%$ .

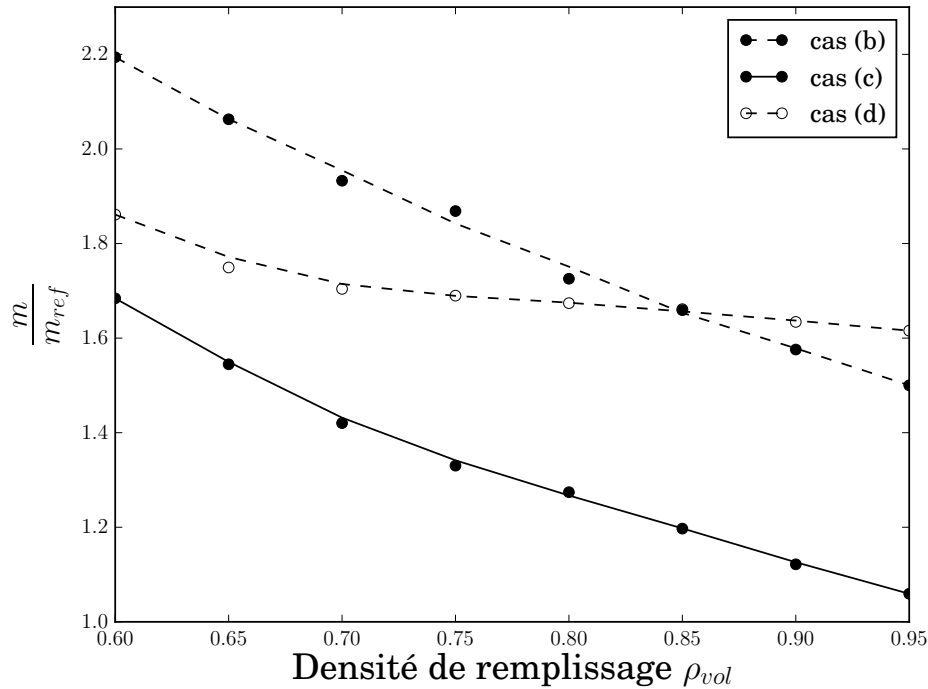


Figure VIII.21 – Facteur de masse (masse finale / masse de la référence) pour différents choix de propriétés.

### Optimisation d'un Lbeam

Nous présentons maintenant les résultats de l'optimisation de la masse d'un Lbeam sous une contrainte de compliance. La figure VIII.22 présente les conditions aux limites ainsi que les dimensions du domaine optimisable utilisé.

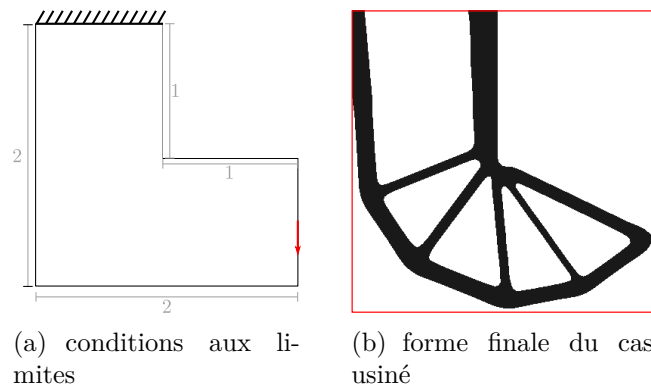


Figure VIII.22 – (a) Dimensions du domaine optimisable et conditions aux limites utilisées pour le problème exemple. (b) design optimisé pour le cas (a).

Nous commençons par traiter le cas (a), Le tableau VIII.7 présente les propriétés finales de la solution correspondante, nous remarquons que la contrainte sur la valeur maximale de compliance est respectée. Cette solution fera office de référence, nous notons  $m_{ref}$  sa masse.



Propriété	Valeur finale	Contrainte
Masse (u.a.)	0.210	—
Compliance (u.a.)	59.93	$\leq 60$

Table VIII.7 – Valeurs finales des propriétés optimisées de la structure présentée en figure VIII.22.

Nous allons maintenant étudier les solutions pour les différents cas présentés dans le tableau VIII.3, cela pour deux valeurs du taux de remplissage  $\rho_{vol}$ . Nous commençons par  $\rho_{vol} = 60\%$ . La figure VIII.23 présente les solutions pour les six cas, nous remarquons comme pour le cas du cantilever que la majeure partie des formes ont subies une dilatation.

Pour les cas (b), (d), (e) et (f) ayant un comportement anisotrope orienté nous observons que l'interface s'oriente tangentiellement à la direction de la charge, comme cela a été constaté pour le problème du cantilever.

Le tableau VIII.8 nous permet d'établir un classement des différents cas en fonction de leur performance, cela donne

- 1 le cas usiné (a)
- 2 le design avec une interface isotrope (c)
- 3 le design avec une interface anisotrope (b)
- 4 le cas avec une interface anisotrope et un massif anisotrope orienté verticalement (e)
- 5 le cas avec une interface anisotrope et un massif anisotrope orienté horizontalement (d)
- 6 le cas sans massif (f)

Une nouvelle fois le cas usiné est le plus performant et celui utilisant une interface isotrope est second. Il semble qu'utiliser un massif isotrope soit préférable à un massif anisotrope dans le cas du Lbeam, nous constatons en effet que les massifs anisotropes (e) et (d) sont moins performant que le design au massif isotrope (b). Le design sans massif est encore une fois le cas le plus défavorable.

Nous étudions ensuite les formes optimales obtenues pour  $\rho_{vol} = 95\%$ . Comme pour le cas du cantilever nous constatons que la forme optimisée du cas (c) est très similaire à celle du cas (a), encore une fois du fait que les propriétés mécaniques de leurs massifs et croute sont très proche pour des densités proches de 1.0. Nous remarquons surtout que la masse du cas (c) **est plus faible** que celle du cas (a), cela signifie que **la structure produite par FDM sera plus performante que la structure usinée**. Cette information reste cependant à nuancer dans la mesure où l'écart de masse reste très faible.

Nous constatons cependant que les formes optimisées pour les cas (d) et (e) sont moins performantes que celles obtenues avec une densité plus faible (cf. tableau VIII.8). Ces deux cas constituent le premier exemple de décroissance de la performance lors d'une hausse de  $\rho_{vol}$ .

$\rho_{vol}$	cas (a) usiné	cas (b)	cas (c)	cas (d)	cas (e)	cas (f)
60%	—	0.283	0.222	0.297	0.281	—
95%	—	0.261	0.206	0.343	0.292	—
100%	0.210	—	—	—	—	0.436

Table VIII.8 – Valeurs finales de la masse pour différents taux de remplissage et pour les différents cas proposés dans le tableau VIII.3.

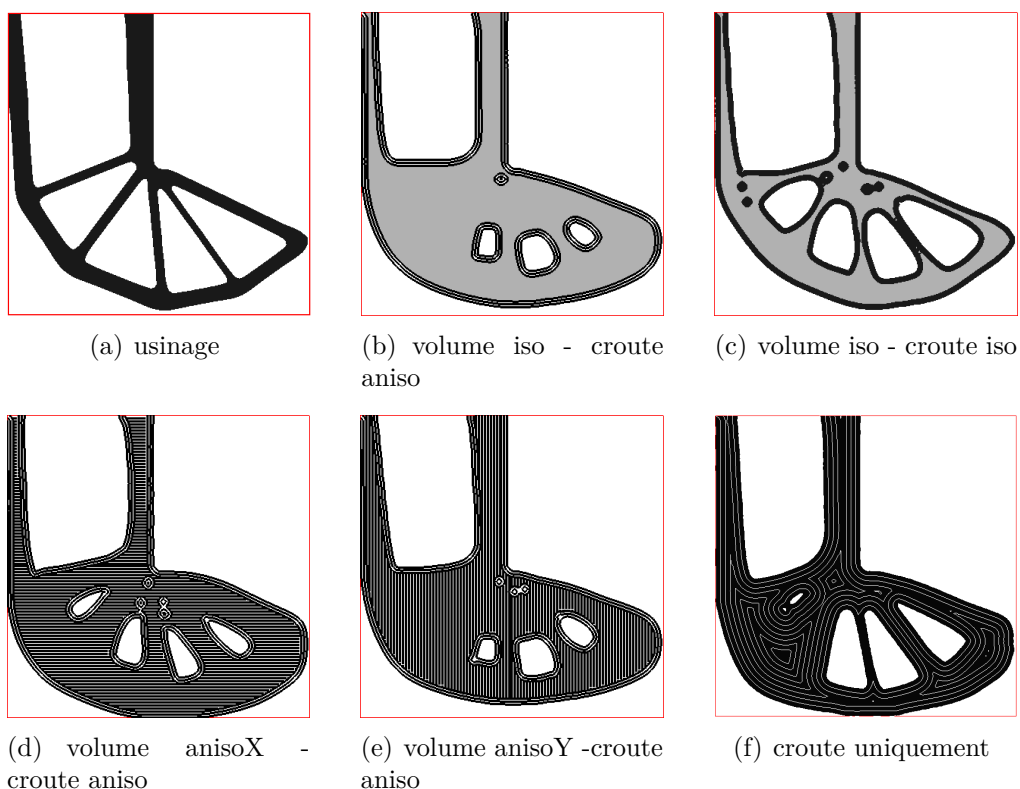


Figure VIII.23 – Formes optimisées pour tous les différents défini dans le tableau VIII.3, pour une densité du volume de 60%. Les cas (a) et (f) ont une densité  $\rho_{vol}$  fixe et égale à 1.0, ils sont ajoutés ici afin de pouvoir les comparer aux autres solutions.

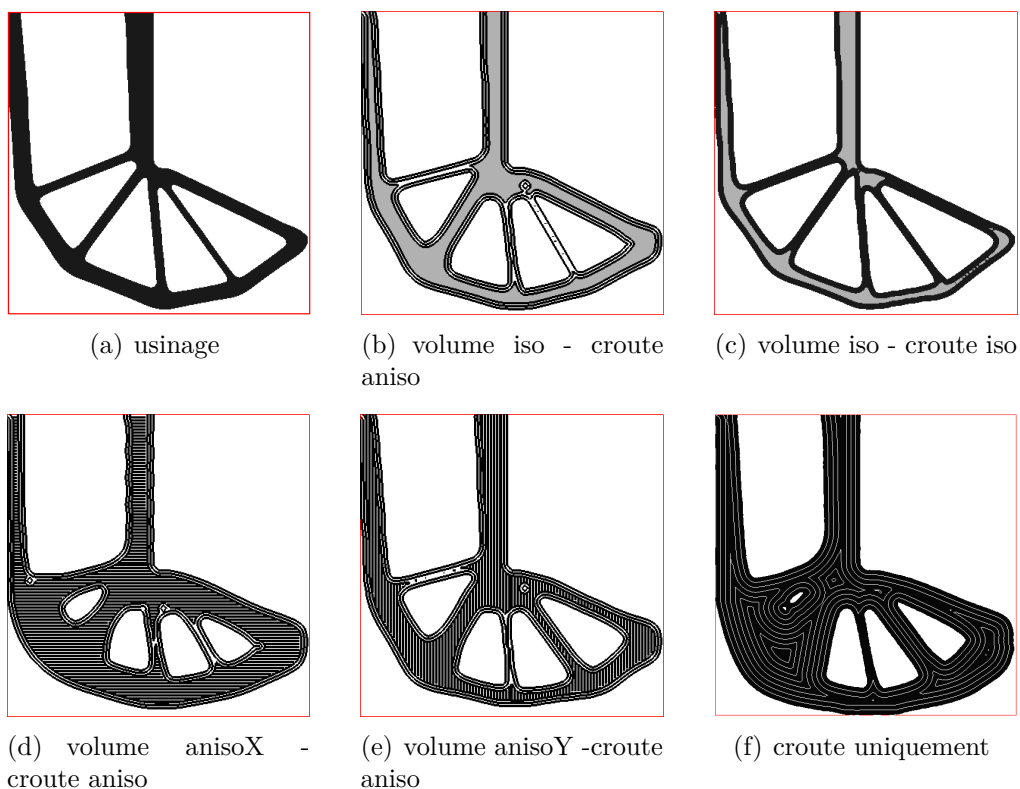


Figure VIII.24 – Formes optimisées pour tous les différents défini dans le tableau VIII.3, pour une densité du volume de 95%. Les cas (a) et (f) ont une densité  $\rho_{vol}$  fixe et égale à 1.0, ils sont ajoutés ici afin de pouvoir les comparer aux autres solutions.

Nous avons mené d'autres simulations pour d'autres valeurs de densité, les formes ne sont pas présentées ici. Cependant nous présentons sur la figure VIII.25 l'évolution du ratio  $\frac{m}{m_{ref}}$  pour l'ensemble des valeurs de densité et pour les différents cas traités. Ces courbes permettent de relever plusieurs aspects importants.

Le premier point marquant est que les courbes relatives aux cas (d) et (e) sont **croissantes**, ce qui semble indiquer qu'augmenter le taux de remplissage du massif tend à rendre les structures moins performantes.

Nous observons toujours la même différence entre les cas (b) et (c), l'interface isotrope permet toujours d'atteindre une performance nettement plus importante.

Nous allons maintenant discuter des différentes conclusions qu'il est possible d'extraire de ces séries de simulations.

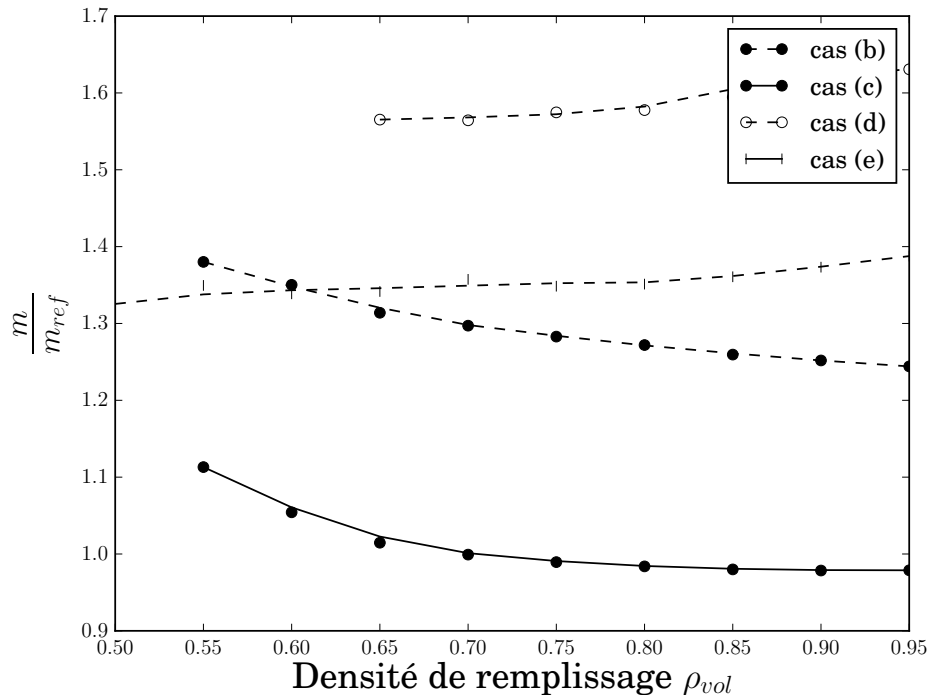


Figure VIII.25 – Facteur de masse (masse finale / masse de la référence) pour différents choix de propriétés.

### 3.3 Discussion

Dans ce paragraphe nous discutons de l'intérêt de la prise en compte des propriétés induites par la fabrication FDM lors du processus d'optimisation de forme. Il sera fait état de l'effet sur les performances et sur les formes optimales.

#### Bilan sur la performance des différents cas

Comme en atteste les tableaux VIII.6 et VIII.8 il faut d'abord remarquer que l'ensemble des structures produites pour les cas (b) à (f) (cf. tableau VIII.3 pour définition des cas) sont **moins performante que les formes de références (a)**. Ce résultat est bien sur attendu dans la mesure où le cas de référence (a) constitue une vision très optimiste des propriétés mécaniques réelles d'une pièce imprimée. Une partie du classement en termes de performance reste fixe pour les deux problèmes traités :

- le cas (a) est systématiquement le plus performant, les rares cas où cela n'est pas vérifié (cf. tableau VIII.8 pour  $\rho = 95\%$ ) ne peuvent être considérés comme significatifs compte tenu de la très faible différence de performance (à peine 2%).
- le cas(c), supposant l'interface isotrope, arrive toujours second, ce qui est logique compte tenu du fait que son contour possède la même masse pour de meilleures propriétés comparé aux cas (b), (d), (e) et (f).
- le cas (f) est toujours le moins performants.

Le classement des cas (b), (d) et (e), qui diffèrent les uns des autres par les propriétés de leur volume, varie entre le cas du cantilever et celui du Lbeam. Cela indique que **le choix du remplissage du volume d'une pièce fabriquée par FDM doit être adapté à l'application choisies**, un remplissage isotrope n'est pas systématiquement souhaitable, il peut dans certains cas être préférable d'opter pour des remplissages anisotropes.

Un dernier point important à étudier est l'effet de la densité de remplissage. Mes figures VIII.21 et VIII.25 permettent de constater que pour le cas (b) comportant un motif de remplissage isotrope, une hausse de la densité de remplissage entraîne une baisse de la masse de la structure optimisée pour les deux problèmes étudiés. Cela indique qu'il est bénéfique d'opter pour des densités élevées quand le pattern de remplissage est isotrope. Il en va différemment pour les motifs de remplissage fortement anisotropes des cas (d) et (e) :

- Pour le problème du cantilever (cf. figure VIII.15 ), qui est un problème de flexion où la matière est très sollicitée dans la direction X, le cas(d), possédant un pattern de remplissage très rigide dans la direction X, affiche une bonne performance. À l'inverse le cas (e) présente une très mauvaise performance, au point qu'il ne parvient à respecter la contrainte de rigidité pour aucune densité testée.
- Pour le problème du Lbeam (cf. figure VIII.22), où la matière est sollicitée fortement selon X ou selon Y suivant sa position dans la structure, les deux cas (d) et (e) sont de moins en moins performant à mesure que la densité augmente. Cela s'explique par le fait que suivant la localisation du volume dans la structure, son comportement mécanique n'est pas du tout adapté à la sollicitation. Il est donc préférable de garder un faible taux de remplissage et de laisser l'interface, mieux orientée, assurer la tenue mécanique.

Nous rassemblerons ces constatations en disant qu'un motif isotrope de forte densité est généralement préférable, sauf s'il est possible de définir un matériau anisotrope dont la direction forte s'aligne sur la sollicitation pour toute la pièce considérée.

### Prise en compte de l'anisotropie de l'interface

La prise en compte de l'anisotropie de l'interface a plusieurs effets, la figure VIII.17 présente les résultats d'optimisation pour une densité de remplissage de 6%, avec une interface anisotrope (a) et une interface isotrope (b). Nous observons que

- **Le contour de la forme tend à être colinéaire avec la direction d'application de la force** dans le cas de l'interface anisotrope. Ce comportement est logique car il permet d'utiliser au mieux la rigidité tangentielle du contour de la structure.
- **L'interface anisotrope est nettement moins profitable**, afin de respecter la contrainte de compliance l'algorithme est obligé de dilater les différents membres du cantilever.
- Le choix du motif de remplissage a une influence forte sur la forme optimale.
- Il résulte que le fait de **prendre en compte l'anisotropie influe fortement sur la performance finale**.

Ces simulations montrent qu'il est **mécaniquement avantageux lors de la conception d'une pièce imprimée par FDM d'orienter la surface de façon à tangenter les directions de sollicitation**, comme on le ferait pour l'orientation des fibres d'un composite.

### Effet des propriétés induites sur les formes optimales

De manière plus générale nous avons observé les différences de forme entre les solutions de cas (a), c'est-à-dire usinées, et les autres solutions de cas (b) à (f). Il en ressort pour l'ensemble que le premier effet de la prise en compte des propriétés induites est **l'augmentation du volume des structure**, mais aussi une tendance à arrondir les contours des formes optimales, comme en atteste les figures VIII.17, VIII.19, VIII.23 et VIII.24. Cet effet s'atténue cependant à mesure que la densité de remplissage augmente.

## Bilan du chapitre VIII

---

### Sur le cas de la FDM

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet de la prise en compte des propriétés induites par la méthode de fabrication FDM. Pour cela nous avons commencé par observer le procédé d'impression, puis nous avons proposé un modèle décrivant les propriétés mécaniques de pièces produites par cette méthode. Nous avons formulé les critères d'optimisation nécessaires, pour finalement proposer deux exemples prenant en compte différents modèles de propriétés induites. Plusieurs conclusions sur la conception de structure dédiée à être fabriquées par FDM ont été extraites de ces résultats, notamment la nécessité de faire en sorte que le contour des pièces vienne s'aligner sur les directions de sollicitation.

Nous avons aussi observé que l'effet du taux de remplissage dépend du modèle retenu. De manière générale il semble plus favorable d'utiliser un taux de remplissage élevé, cependant dans certains cas particuliers (cf. figure VIII.25 ) cette tendance **s'inverse**, il devient alors plus optimal de concevoir des structures utilisant un faible taux de remplissage.

À travers ce chapitre nous avons donc appliqué une méthode permettant de prendre en compte les propriétés induites. Il est d'abord nécessaire de définir un modèle décrivant convenablement ces propriétés, puis de modifier en conséquence chaque critère optimisable ainsi que leur dérivée de forme.

### Améliorations possibles

Nous avons considéré durant tout ce chapitre que les parties volumiques des structures optimisées étaient remplies d'un matériau **homogène**, la raison première de ce choix est que la plupart des machines d'impression 3D proposent de réaliser automatiquement ce type de remplissage. Nous avons donc souhaiter définir une représentation approchant au mieux les propriétés des pièces imprimées.

Il faut cependant noter que ce choix de remplissage n'est pas pertinent, car non optimal. D'autres auteurs ont proposés diverses solutions visant à générer des remplissages non constants et adaptés en tous point de la structure. Wu, J. and Aage, N. and Westermann, R. and Sigmund (2016) propose ainsi l'optimisation des parties massives en utilisant un maillage fin et une sorte de contrainte d'épaisseur maximum. Jibawy *et al.* (2011) proposent d'optimiser l'orientation locale d'un matériau anisotrope. Pantz et Trabelsi (2008) propose aussi un traitement a posteriori qui constituerait un bon moyen de redéfinir un remplissage plus pertinent.

Nous pourrions donc combiner notre approche avec celle proposée par un ou plusieurs de ces auteurs afin de redéfinir le remplissage du volume de nos structures.



# Chapitre IX

## Optimisation avec prise en compte des contraintes de fabrication : direction d'impression

---

1	Gestion du problème des porte-à-faux . . . . .	209
1.1	Solutions techniques permettant d'imprimer des zones en porte-à-faux proposées dans la littérature . . . . .	209
1.2	Formulations permettant le contrôle des porte-à-faux . . . . .	211
2	Implémentation du critère mécanique et résultats . . . . .	217
2.1	Implémentation du critère mécanique . . . . .	217
2.2	Résultats numériques utilisant le critère mécanique . . . . .	219
	Bilan du chapitre IX . . . . .	225

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous traitons de la prise en compte d'une contrainte de fabrication spécifique aux méthodes de fabrication additive : la contrainte des porte-à-faux. Elle s'explique simplement par le fait que la matière issue de la buse d'impression doit être déposée sur un support solide, sans quoi la matière en fusion s'écoule.

Nous allons d'abord présenter les différentes solutions ad hoc utilisées en pratique et reportées dans la littérature pour s'affranchir de cette contrainte, puis nous présenterons différentes méthodes permettant de prendre en compte cette limitation durant le processus d'optimisation. Ce chapitre ne contient pas les détails et démonstrations mathématiques des calculs de dérivée de forme. L'ensemble de ces informations figure dans deux articles coécrits durant la thèse : [Dapogny \*et al.\* \(2017a\)](#) et [Allaire \*et al.\* \(2017\)](#).



## Introduction

Bien qu'utilisant des procédés très divers, les méthodes de fabrication additive ont toutes le point commun de baser leur processus d'impression sur le découpage des structures à imprimer en une succession de couches d'impression. Si la pièce à imprimer est en 3D, elle est traitée comme un empilement de couches de forme variable et d'épaisseur finie (cf. figure IX.1). L'imprimante balaye ensuite chaque couche d'impression pour déposer de la matière et réaliser la pièce 3D.

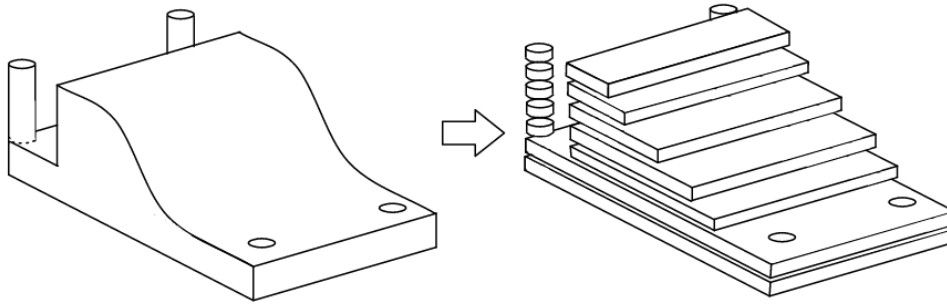


Figure IX.1 – (À gauche) Exemple de pièce 3D à réaliser, (à droite) découpage en une série de couches 2D, d'épaisseur donnée.

Cette procédure soulève une question majeure : comment déposer la matière d'une couche si cette dernière ne repose pas intégralement sur la couche précédente ? La figure IX.2 illustre ce problème d'impression des zones en porte-à-faux ou "overhangs".

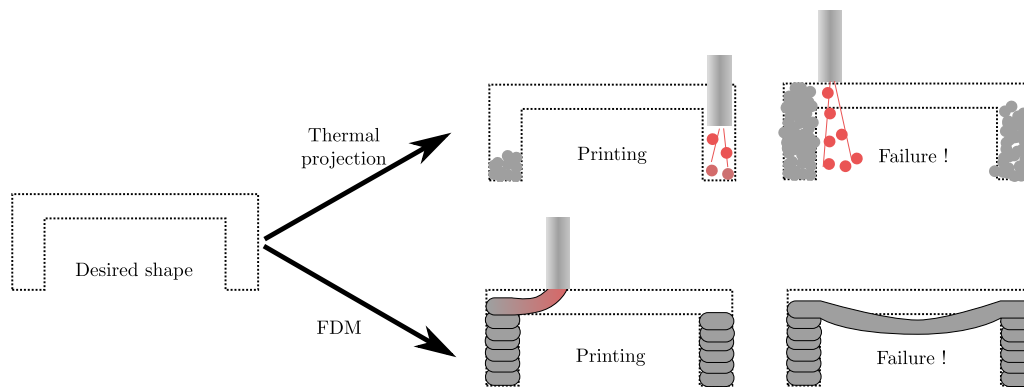


Figure IX.2 – Illustration du problème d'impression de zones en porte-à-faux pour deux méthodes d'impression : projection thermique (en haut) et dépôt de filament (en bas).

Cette limitation constitue une contrainte de fabrication importante qu'il est nécessaire de contourner si l'on souhaite exploiter pleinement le potentiel des méthodes de fabrication additive.

Nous allons maintenant présenter plusieurs solutions permettant de circonvenir à ce problème.

# 1 Gestion du problème des porte-à-faux

Bien que la plupart des imprimantes ne soient pas capables d'imprimer des parties en porte-à-faux, il existe plusieurs stratégies simples pour imprimer malgré tout ces zones difficiles. Les solutions les plus couramment utilisées sont ad hoc. Nous commençons par décrire ces solutions courantes, puis nous présenterons après seulement une approche basée sur l'optimisation de domaine.

## 1.1 Solutions techniques permettant d'imprimer des zones en porte-à-faux proposées dans la littérature

### Impression d'un support "à la volée"

La solution la plus courante pour imprimer des régions en porte-à-faux est l'impression simultanée de la pièce ainsi que d'un support qui va permettre de soutenir ces parties. La figure IX.3 présente l'impression simultanée d'une petite figurine (en bleu) et du support évitant les "overhangs".

Cette solution est simple à mettre en œuvre et ne nécessite aucune modification de la forme à imprimer, elle est d'ailleurs disponible dans la plupart des logiciels de pilotage de machines d'impression 3D. L'ajout de ce support a cependant plusieurs désavantages :

- Le temps d'impression de la pièce est augmenté dans la mesure où il est nécessaire d'imprimer la pièce ainsi que son support, dans certains cas le volume de support approche, voire dépasse le volume de la pièce !
- Même si le support peut être imprimé dans un matériau différent de la pièce, éventuellement moins coûteux, il reste que c'est une consommation de matière première non souhaitée.
- Suivant la densité du support, l'aspect de surface des zones ayant été étayées peut s'avérer être de mauvaise qualité.
- Pour finaliser la pièce imprimée, il est nécessaire de retirer le support. Cela est souvent fait mécaniquement, voir manuellement, ce qui occasionne une étape de traitement supplémentaire.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la définition d'un support idéal afin de minimiser la consommation de matière première causée par son impression, [Dumas \*et al.\* \(2014\)](#) proposent par exemple un algorithme permettant de générer des supports efficaces pour l'impression FDM.

Cette solution demeure la plus courante malgré les défauts que nous venons de citer.

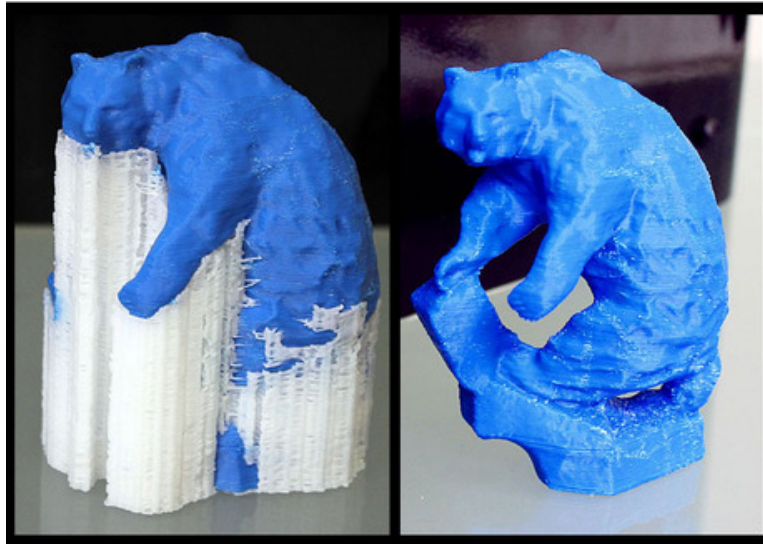


Figure IX.3 – Impression d’une figurine bleue comportant des porte-à-faux à l’aide d’un support blanc. À gauche la figurine à la fin du processus d’impression, le support blanc soutient les parties en porte-à-faux. À droite la figurine débarrassée de son support. source : <https://maker.tufts.edu/handbooks/3d-printing>

### Mouvement du support d’impression

Une autre solution pour permettre l’impression de parties en porte-à-faux est l’utilisation d’une table d’impression mobile. La figure IX.4 illustre cette méthode avec une pièce imprimée par projection thermique. Cette solution ne nécessite pas de recourir à l’utilisation d’un support, elle est donc exempte de tous les inconvénients énoncés précédemment. Elle dispose cependant de ses propres limitations :

- Sur le cas de la figure IX.4, la jonction entre les deux piliers peut cependant être complexe, la qualité géométrique de la structure finale n’est pas assurée. En d’autres termes cette méthode permettra d’imprimer les zones comportant des porte-à-faux relativement peu critique, les grandes zones horizontales resteront cependant à considérer avec précaution.
- Cette méthode n’est acceptable que pour des pièces de dimension réduite, à moins que la buse d’impression puisse se déplacer sur de grandes distances.

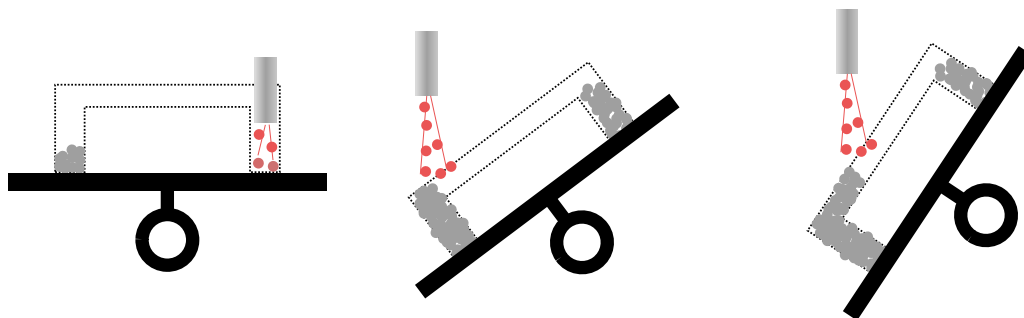


Figure IX.4 – Illustration d’une solution pour imprimer des structures en porte-à-faux : le plateau d’impression (en noir) est progressivement orienté afin de permettre aux particules de matière en fusion de se déposer.

## Bilan

Nous avons relevé plusieurs solutions techniques permettant l'impression de zones en porte-à-faux. Cependant nous avons aussi énoncé les restrictions dont ces méthodes font l'objet. Bien que très répandue, la solution utilisant un support d'impression engendre du gaspillage de matière première, un allongement considérable du temps d'impression ainsi qu'un "nettoyage" après fabrication qui peut s'avérer pénalisant à l'usage. Si à l'inverse l'utilisation d'un support mobile permet d'éviter cette consommation excessive de matière et l'augmentation de temps d'impression, elle reste cependant limitée à l'impression d'overhangs a priori "courts".

Nous proposons maintenant d'étudier les solutions traitant le problème à l'inverse, c'est-à-dire en adaptant la conception aux limitations de la méthode de fabrication.

## 1.2 Formulations permettant le contrôle des porte-à-faux

Nous traitons maintenant des méthodes permettant d'empêcher l'apparition de zone overhangs lors de la conception de structure par optimisation de domaine. Plusieurs auteurs se sont intéressés au traitement de cette problématique : [Das et al. \(2015\)](#) et [Paul et Anand \(2015\)](#) proposent par exemple différents critères d'optimisation visant à réduire le volume de support nécessaire à l'impression, influençant indirectement la quantité de zones en porte-à-faux. [Langelaar \(2016\)](#), [Qian \(2017\)](#) et [Gaynor et Guest \(2016\)](#) proposent quant à eux des solutions basées sur des critères géométriques.

### Formulations géométriques

L'approche la plus répandue dans la littérature est basée sur une description géométrique du problème : il s'agit d'une limite angulaire. Nous formalisons cette condition géométrique pour chaque point du bord  $\partial\Omega$ ,

$$\vec{n} \cdot \vec{d} \geq \cos(\phi_{max}), \quad (\text{IX.1})$$

avec  $\vec{n}$  la normale au bord du domaine optimisé  $\partial\Omega$ ,  $\vec{d}$  la direction d'empilement des couches d'impression et  $\phi_{max}$  l'angle maximum d'impression. Ce critère traduit l'idée que si une partie du bord est orienté avec un angle trop grand vis-à-vis de la direction d'impression, alors cette partie constituera une région en porte-à-faux et sera interdite. La figure IX.5 illustre ce critère en présentant une forme  $\Omega$  comportant une partie de son bord en porte-à-faux (surligné en rouge). Les quantités présentes dans l'équation (IX.1) ont été reportées sur un des points de la zone en porte-à-faux afin de montrer que l'inégalité (IX.1) n'y est pas respectée.

Représenter le problème des overhangs par la condition géométrique (IX.1) semble intuitif, la figure IX.6 présente d'ailleurs une pièce typique, utilisée pour tester la performance des machines d'impressions, proposant une variation progressive de l'angle de porte-à-faux. Nous constatons comment au-delà d'un certain angle (ici 60 degrés) la partie inférieure de la structure semble s'écouler.

Bien que cette condition permette de discriminer les zones de la pièce se trouvant en porte-à-faux, elle n'est qu'une description du problème, il nous faut encore en faire un critère optimisable. Nous allons maintenant détailler les stratégies de plusieurs auteurs pour assurer le respect de cette condition.

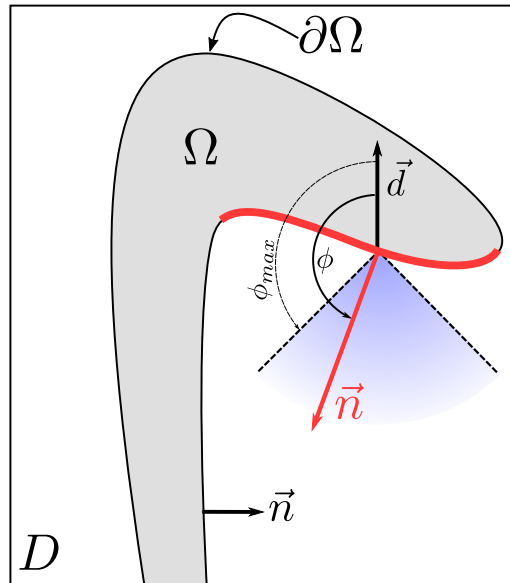


Figure IX.5 – Illustration du critère géométrique basé sur la normale du bord. Nous observons que le critère défini par l'équation (IX.1) n'est pas respecté sur la partie du bords surlignée en rouge.



Figure IX.6 – Exemple de pièce test permettant d'évaluer la capacité d'une imprimante à produire des structures en porte-à-faux. source : <http://3dprintingforbeginners.com/pirx-3d-printer-review/>

## Quelques exemples de la littérature utilisant des limites angulaires

Langelaar (2016) propose une approche SIMP basée sur l'utilisation d'un filtre de densité qui empêche chaque élément d'une couche donnée d'avoir une densité supérieure à la densité maximum des éléments voisins qu'il surplombe. Ce filtre force implicitement le respect de la condition géométrique énoncée plus avant, avec cependant  $\phi_{max} = 45^\circ$ . Les résultats présentés sont spectaculaires vis-à-vis de la suppression des overhangs (cf. figure IX.7 a ). Nous notons cependant que la formulation proposée génère des membres ne jouant aucun rôle mécanique : ce sont des sortes de supports d'impression.

Qian (2017) utilise lui aussi une formulation basée sur un filtre assurant le respect de la condition géométrique (IX.1), avec toutefois une plus grande liberté de choix pour la valeur de  $\phi_{max}$ . La méthode s'avère cependant très contraignante comme en atteste les résultats présentés par l'auteur (cf. figure IX.7 b ). Dans ce cas, le critère géométrique guide de manière trop contraignante l'évolution de la forme durant le processus d'optimisation, au détriment de la performance.

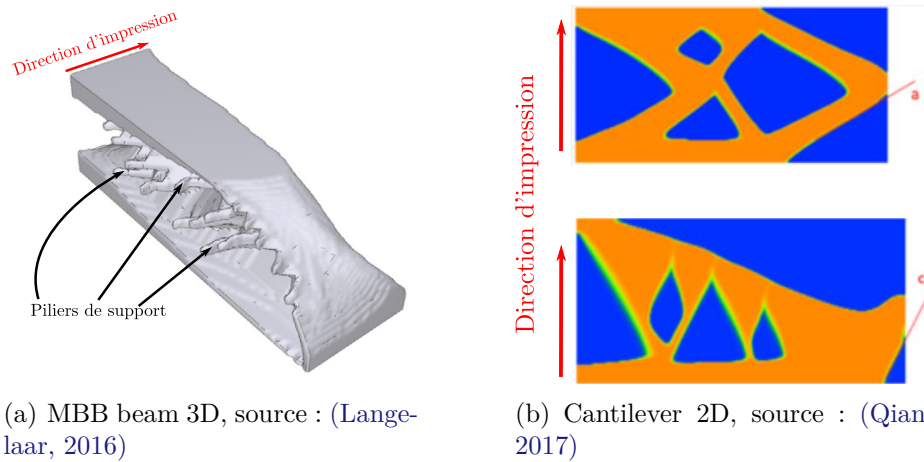
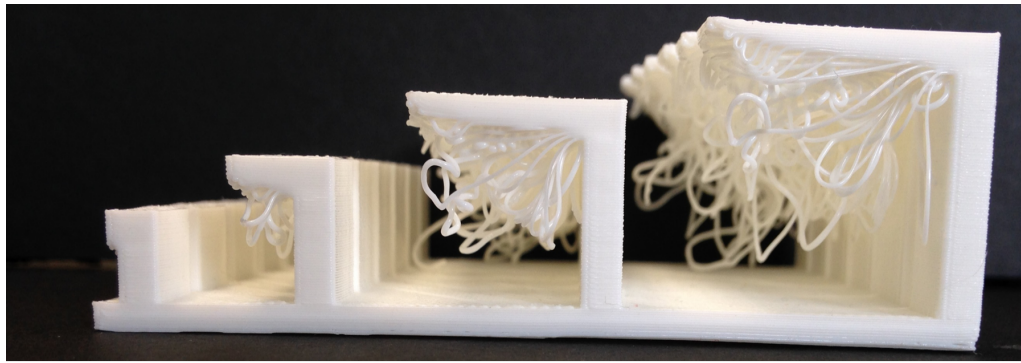


Figure IX.7 – (a) Demi MBB 3D optimisé, on remarque la formation de piliers ne jouant pas de rôle mécanique : ce sont des étais supportant la structure. (b) Deux formes optimisées de cantilever pour des angles critiques différents.

De plus, une description seulement géométrique des overhangs ne permet pas de représenter parfaitement la problématique, la figure IX.8 présente une autre pièce test démontrant ce propos. Nous constatons ici que bien que toutes les petites structures soient en porte-à-faux, leur impression a été plus ou moins réussie selon la longueur de la zone suspendue dans le vide. Nous souhaitons souligner que la prise en compte d'une limite angulaire lors de l'optimisation peut permettre de contourner certaines difficultés de fabrication, mais comporte également des limites quant à son efficacité. D'autres solutions, complémentaires ou alternatives, sont nécessaires.

Nous proposons donc d'utiliser un critère basé sur le comportement mécanique de la pièce imprimée, que nous jugeons plus à même de représenter pleinement le problème des overhangs.



Failed Horizontal Overhangs

Figure IX.8 – Exemple d’une pièce test comportant plusieurs zones en porte-à-faux de longueur variable.

### Proposition d’une formulation mécanique

Nous détaillons ici l’idée directrice ayant menée à la formulation d’un critère mécanique pour le contrôle des overhangs. Le détail complet de la formulation ne sera pas abordé ici, il a fait l’objet d’une démonstration rigoureuse et détaillée par [Dapogny \*et al.\* \(2017a\)](#). Nous présentons néanmoins la logique derrière cette proposition.

L’idée de base est de mimer la procédure d’impression et de tenter de réduire, pour chaque couche imprimée, l’énergie de déformation et par là, la formation de zones en porte-à-faux soumises à leur poids propre.

La figure IX.9 illustre le déroulement du calcul et présente les différents paramètres qui seront utilisés dans les équations qui vont suivre. Sur la gauche nous présentons une structure complète que l’on souhaite imprimer, la forme  $\Omega$ . À droite nous présentons une étape intermédiaire de production : l’impression de la couche se trouvant à la hauteur  $h$ , correspondant à la forme intermédiaire  $\Omega_h$ .

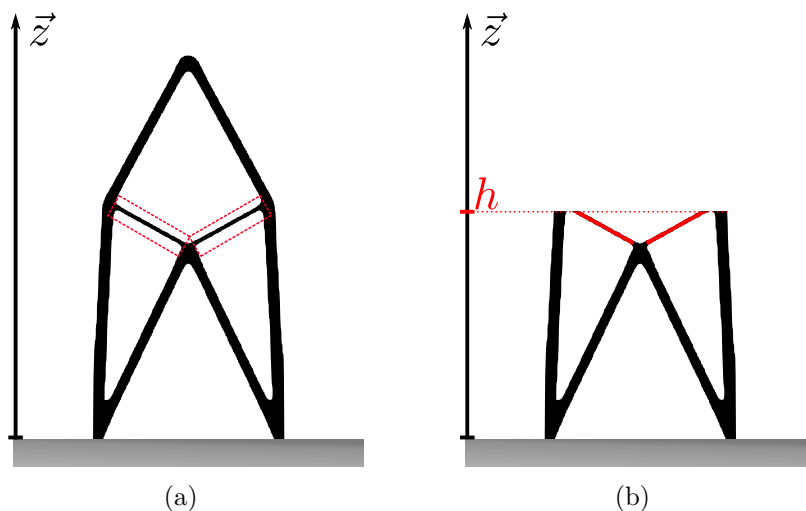


Figure IX.9 – Présentation d’une (a) forme imprimée, les zones encadrées en rouge correspondent à deux régions de la forme se trouvant en porte-à-faux durant l’impression. (b) représente une étape intermédiaire de l’impression correspondant à la couche se trouvant à la hauteur  $h$ . Nous observons que les zones précédemment encadrées en rouge sur la sous figure (a) sont effectivement en porte-à-faux pour cette étape de l’impression.

Nous représentons l’apport de la nouvelle couche par un chargement  $\vec{g}$  réparti sur le bord



supérieur de la forme  $\Omega_h$ . Nous définissons  $c_h(\Omega_h)$  l'énergie élastique stockée dans la structure intermédiaire  $\Omega_h$ , soumise au chargement  $\vec{g}$  sur son bord supérieur, en lieu et place de la couche en cours d'impression. Cela donne

$$c_h(\Omega_h) = \int_{\Omega_h} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dV \quad (\text{IX.2})$$

L'allure de  $c_h(\Omega_h)$  en fonction de  $h$  est présentée sur la figure IX.10, nous pouvons voir comment l'énergie élastique stockée augmente au niveau des tranches comportant des zones en porte-à-faux. **Cela montre un lien entre  $c_h(\Omega_h)$  et la présence de zones en porte-à-faux.**

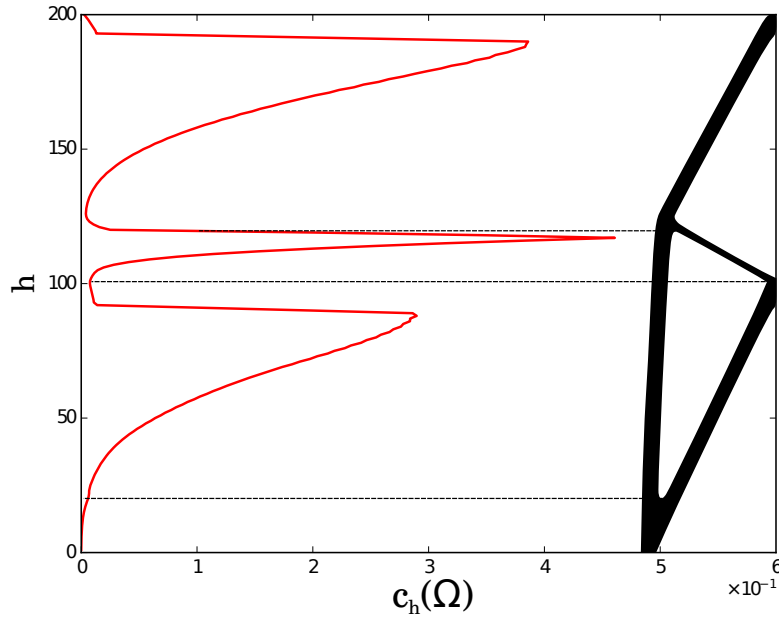


Figure IX.10 – Variation de la compliance (axe des x) en fonction de la hauteur de tranche  $h$  (axe des y). Nous remarquons les variations brusques de compliance au niveau des changements topologiques.

Afin de collecter cette information pour toutes les tranches nous intégrons maintenant l'énergie élastique stockée pour chaque couche intermédiaire, ce qui donne

$$C(\Omega) = \int_0^H c_h(\Omega_h) dV. \quad (\text{IX.3})$$

Comme il existe un nombre fini de couche d'impression, nous optons pour une expression discrète de l'intégrale, ce qui donne

$$C(\Omega) = \sum_{i=1}^{i=N} c_i(\Omega_i), \quad (\text{IX.4})$$

avec  $N$  le nombre de couches et  $c_i(\Omega_i)$  l'énergie élastique stockée dans la  $i^{eme}$  couche d'impression.

Le calcul de la dérivée de forme du critère ainsi écrit est simple car c'est une sommation de dérivées de forme connues (celle de la compliance décrite dans l'annexe C), elle s'écrit donc

$$C'(\Omega)(\theta) = \sum_{i=1}^{i=N} c'_i(\Omega_i)(\theta), \quad (\text{IX.5})$$



avec  $c'_i(\Omega_i)(\theta)$  la dérivée de forme de l'énergie élastique stockée qui est un résultat connu de la littérature (Allaire *et al.*, 2002).

En réduisant la quantité (IX.4) au cours du processus d'optimisation nous réduisons la totalité des compliances intermédiaires  $c_h(\Omega_h)$ , pénalisant ainsi majoritairement les zones en porte-à-faux car elles induisent des zones de compliance  $c_i(\Omega_i)$  plus importantes comme le montre la figure IX.10.

## Bilan

Dans ce paragraphe nous avons présenté la problématique de l'impression de porte-à-faux qui est une contrainte de fabrication à laquelle les méthodes d'impression 3D sont soumises. Nous avons d'abord énoncé une série de solutions a posteriori permettant de contourner cette contrainte de fabrication, nous avons cependant constaté les limitations de ces solutions.

Nous avons ensuite présenté plusieurs méthodes provenant de la littérature permettant de supprimer les zones en porte-à-faux dès la conception des structures. Ces méthodes se basent sur des critères géométriques, qui ne permettent cependant pas de rendre compte du problème des overhangs de manière complète.

Nous allons maintenant présenter une série d'exemples comparant plusieurs formulations, dont notre formulation fondée sur une mesure mécanique.

## 2 Implémentation du critère mécanique et résultats

Nous résumons ici les principaux résultats obtenus dans [Allaire \*et al.\* \(2017\)](#). Nous focalisons le propos sur les résultats utilisant le critère mécanique défini dans le paragraphe précédent. L'article contient plusieurs exemples mettant en défaut les différentes formulations que nous n'aborderons pas ici, cela dans le souci de rester concis.

Nous présentons cependant un complément d'information sur l'implémentation du critère mécanique (IX.4) ainsi que sur les pistes d'améliorations potentielles.

### 2.1 Implémentation du critère mécanique

Nous détaillons ici l'implémentation du critère mécanique (IX.4) pour la suppression des régions en porte-à-faux. Nous commençons par présenter les calculs nécessaires, puis nous traitons ensuite de potentielles solutions permettant de réduire le volume de calcul nécessaire. Enfin nous présentons plusieurs limitations de la méthode ainsi que d'autres pistes potentielles d'amélioration.

#### Calculs du critère

Le critère (IX.3) est un critère continu, nous avons donc proposé une expression discrète (IX.4). Cette expression nécessite le calcul de l'énergie élastique stockée **pour chaque couche d'impression considérée**. Nous évaluons cette énergie élastique à l'aide d'un calcul éléments finis. Une couche d'impression produite par une machine d'impression FDM du commerce est épaisse d'environ 0.1mm, ce qui implique un très grand nombre de calculs éléments finis afin de pouvoir évaluer le critère et sa dérivée de forme!

En pratique nous limitons le nombre de couches de calcul au nombre de couches d'éléments composant le domaine optimisé. La figure IX.11 illustre le cas d'une forme et de son maillage ainsi que de quelques maillage pour plusieurs étapes intermédiaires de calcul. Ce choix a plusieurs avantages techniques simplifiant grandement l'implémentation, le découpage du maillage ainsi que l'application des forces intermédiaire (flèches bleues) est applicable de manière triviale, en se basant directement sur la position verticale des nœuds du maillage.

Il reste que l'évaluation du critère ainsi que de sa dérivée de forme reste très coûteuse en temps, pour les résultats présentés par [Allaire \*et al.\* \(2017\)](#) une centaine de calculs éléments finis sont nécessaire à chaque fois que l'on souhaite l'évaluer.

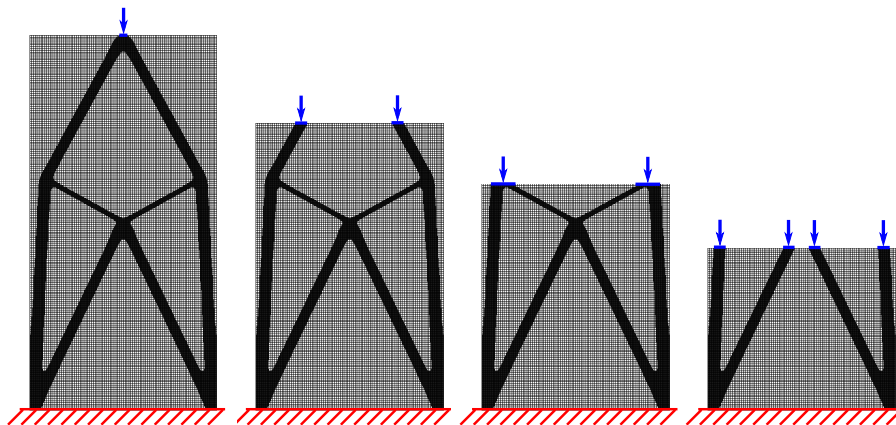


Figure IX.11 – Exemple de découpage successif du maillage de base du domaine optimisable  $D$  pour former la succession de domaine intermédiaire  $D_h$  contenant les formes intermédiaires  $\Omega_h$ .

Pour cette raison nous avons recherché des stratégies permettant de réduire le volume de calcul nécessaire, nous allons traiter ici de la solution du découpage sélectif.

### Découpage sélectif

Nous avons dans un premier temps opté pour la solution la plus basique pour réduire le temps de calcul : réduire le nombre de couches utilisées pour évaluer le critère (cf. figure IX.12). Cependant, compte tenu de la forte variation de  $c_h(\Omega_h)$  (cf. figure IX.10) cette solution s'est vite révélée insatisfaisante car elle ne permettait pas la détection des overhangs se trouvant entre deux découpages.

Pour cette raison nous avons étudié la possibilité d'effectuer un découpage non plus régulier mais **sélectif** (cf. figure IX.12). Cette idée est issue d'une observation de [Dapogny \*et al.\* \(2017a\)](#) sur le fait que la dérivée de forme de  $c_h(\Omega_h)$  n'est pas définie quand le bord de la forme  $\partial\Omega_h$  se superpose au bord du domaine  $D_h$ .

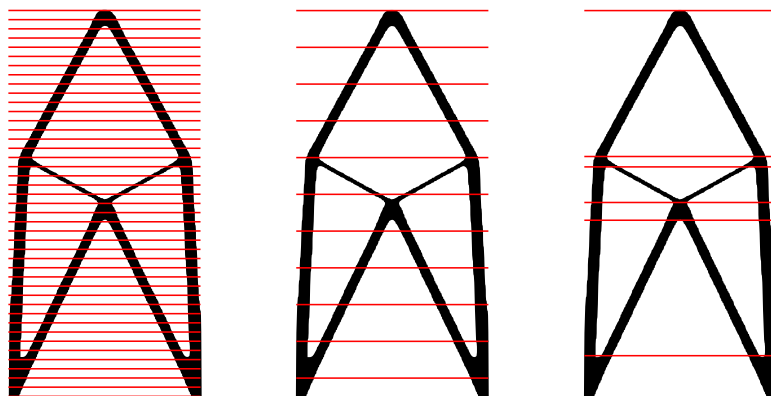


Figure IX.12 – (À gauche) exemple de découpage complet. (au milieu) découpage réduit : moins de tranches sont utilisées, cependant les deux overhangs de la structure ne sont pas traversés par une découpe. (à droite) découpage sélectif : peu de tranches sont utilisées, elles sont cependant positionnées au niveau des changements de topologie.

### Limitations et améliorations potentielles

[Dapogny \*et al.\* \(2017a\)](#) proposent un processus d'accélération du calcul du critère (IX.3) utilisant une intégration par spline de  $c_h(\Omega_h)$ , cette méthode nécessite l'évaluation de la dérivée de forme du champ de déplacement  $U_h$  de la tranche  $h$ .

S'il est démontré, pour une formulation proche de (IX.3), que cette méthode permet d'approximer le critère en utilisant moins de couches de calcul, nous n'avons pas réussi à l'appliquer dans le cas de la formulation proposée ici. [Allaire \*et al.\* \(2017\)](#) expliquent que cela est dû à la plus grande sensibilité vis-à-vis de  $h$  du critère ainsi formulé, comparé à la formulation de [Dapogny \*et al.\* \(2017a\)](#).

Nous avons explicité le processus de calcul du critère ainsi que ses limitations, nous allons maintenant proposer une série de résultats l'appliquant à plusieurs cas tests. La formulation retenue est celle de l'équation (IX.3).

## 2.2 Résultats numériques utilisant le critère mécanique

Dans cette section nous présentons une sélection de résultats d'optimisation de structures obtenus à l'aide du critère mécanique (IX.3). Nous traitons ici un problème classique de la littérature, à savoir une minimisation de compliance sous une contrainte de volume maximum :

$$\min_{\Omega} c(\Omega) \quad (IX.6)$$

$$V \leq V_{max}.$$

Nous commençons par traiter ce problème afin d'obtenir des formes de référence comportant des overhangs. Nous calculons ensuite pour ces mêmes formes la valeur du critère mécanique (IX.3) de référence que nous notons  $C_{ref}$ .

Nous traitons ensuite le même problème d'optimisation (IX.6) en ajoutant toutefois une nouvelle contrainte afin de supprimer les overhangs, ce qui donne

$$\min_{\Omega} c(\Omega) \quad (IX.7)$$

$$V \leq V_{max}$$

$$C_{sw} < \alpha C_{ref}.$$

Avec  $\alpha$  un coefficient inférieur à 1 représentant la pénalisation des zones en porte-à-faux et  $C_{ref}$ .

De la même façon nous pouvons définir le second problème en laissant cette fois-ci une marge sur le volume plutôt que sur la compliance, cela donne

$$\min_{\Omega} V \quad (IX.8)$$

$$c(\Omega) \leq c_{ref}$$

$$C_{sw} < \alpha C_{ref}.$$

### L'exemple 2D du pont

Nous commençons par appliquer le processus décrit précédemment sur le cas test d'un pont 2D, la figure IX.13 présente les conditions aux limites du problème ainsi que la forme initiale utilisée pour démarrer l'optimisation.

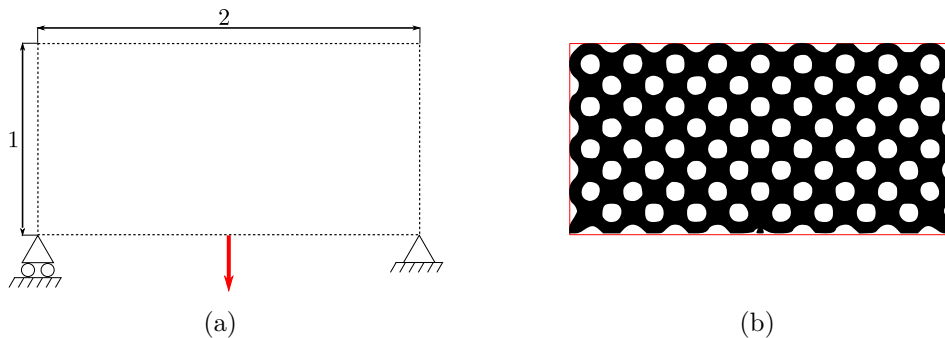


Figure IX.13 – (a) conditions aux limites pour le cas du pont 2D, (b) initialisation utilisée pour le processus d'optimisation.

La figure IX.14 présente la forme finale obtenue, le tableau IX.1 rassemble les propriétés initiales et finale de notre solution. Nous avons surligné en bleu sur la figure IX.14 les zones considérées comme des overhangs.

Le tableau IX.1 nous indique que la contrainte  $V \leq V_{max}$  est respectée, et précise la valeur de référence du critère mécanique  $C_{ref}$ .

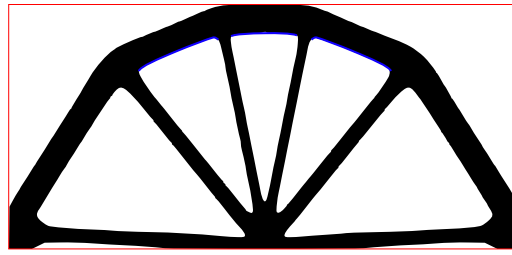


Figure IX.14 – Design de référence pour le cas du pont 2D, obtenu à partir du problème d'optimisation (IX.6) et de l'initialisation présentée sur la figure IX.13 (b).

Critères	figure IX.14	contrainte
Compliance	43.70	–
Volume	30%	$\leq 30\%$
$C_{ref}$	1.27	–

Table IX.1 – Propriétés finales du pont 2d de référence présenté en figure IX.14.

Nous présentons maintenant les formes optimisées obtenues par résolution du problème d'optimisation (IX.7) pour différentes valeurs du coefficient  $\alpha$ , qui représente la pénalisation plus ou moins importante des overhangs. La figure IX.15 rassemble une série de solutions obtenues en résolvant le problème (IX.7) pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Nous constatons qu'à mesure que l'on accentue la contrainte de overhang (i.e. pour  $\alpha$  diminuant) les zones comportant des porte-à-faux se raréfie dans les solutions optimales. Nous notons la tendance de la barre supérieure du pont à se rétrécir progressivement ainsi qu'à se courber. Nous notons aussi la présence de plusieurs étais visant à supporter les zones en porte-à-faux.

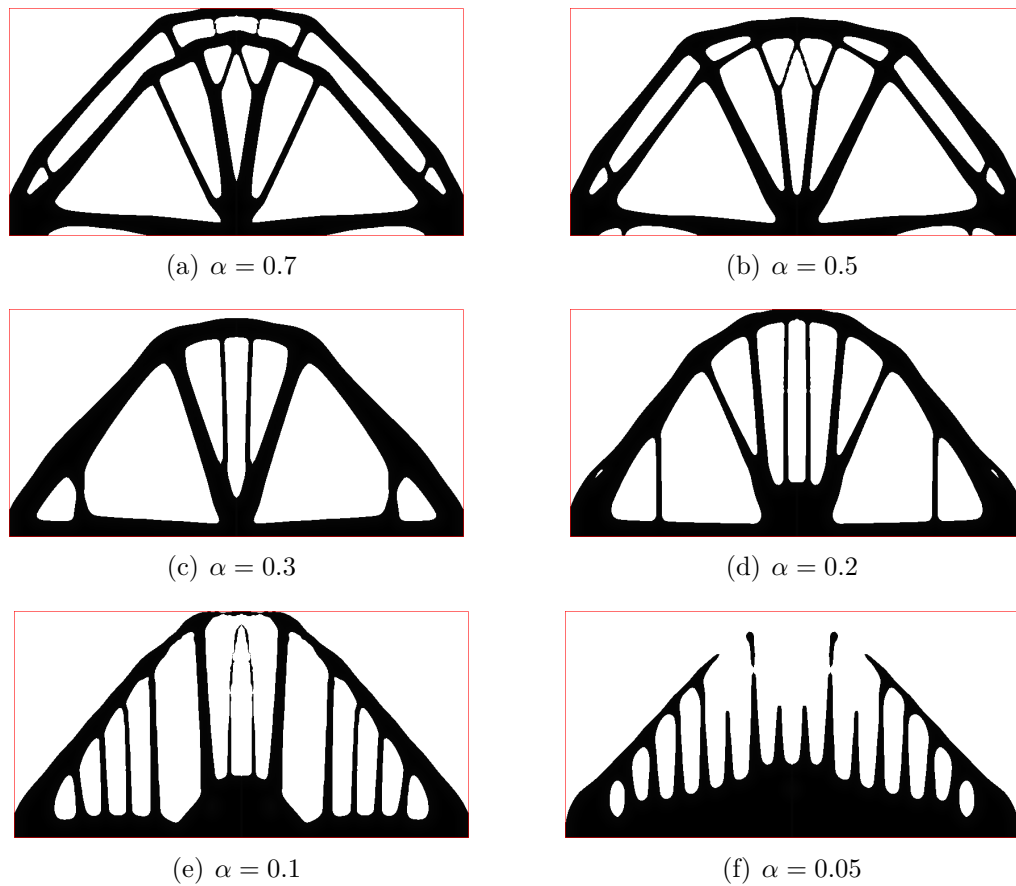


Figure IX.15 – Designs optimisés de pont 2d pour le problème d’optimisation (IX.7), pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

Le tableau IX.2 rassemble les propriétés finales pour les formes optimales de la figure IX.15 ainsi que celles de la solution de référence. Nous constatons que les solutions allant de (a) à (d) respectent les contraintes du problème d’optimisation, cependant les résultats (e) et (f) ont un volume supérieur au volume prescrit. Pour des valeurs de  $\alpha$  proche de 1.0, c’est-à-dire pour une faible pénalisation des overhangs, l’effet de la prise en compte de la contrainte de porte-à-faux influe peu sur la performance (i.e. sur la compliance). Cependant pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures à 0.3 (i.e. (d), (e) et (f)) cette dernière commence à augmenter significativement. Toutes les solutions respectent cependant la contrainte d’overhangs  $C_{sw} \leq \alpha C_{ref}$ .

Forme traitée	compliance	Vol( $\Omega$ )	$C_{sw}(\Omega)$	$\alpha \cdot C_{ref}$
Figure IX.14	43.70	30%	1.27	—
Figure IX.15 (a)	48.89	30%	0.81	0.889
Figure IX.15 (b)	47.31	30%	0.63	0.635
Figure IX.15 (c)	49.18	30%	0.38	0.381
Figure IX.15 (d)	50.26	30%	0.25	0.254
Figure IX.15 (e)	70.11	31%	0.12	0.127
Figure IX.15 (f)	227.31	34%	0.05	0.064

Table IX.2 – Résultats de simulation pour le problème d’optimisation (IX.7) pour le pont 2D. Les quantités ne respectant pas les contraintes du problème d’optimisation sont écrite en rouge.

Nous concluons que la formulation ainsi proposée permet de réduire les zones constituant des

porte-à-faux. Elle ne permet cependant pas de totalement les faire disparaître, un équilibre se crée entre suppression des overhangs et perte des propriétés mécaniques (i.e. hausse de la compliance). Cet équilibre est profitable car il est préférable d'imprimer une pièce avec une petite quantité de support et une bonne performance, comme la solution (d), plutôt qu'une pièce sans aucun support mais ayant une performance fortement réduite, comme la solution (f)!

### L'exemple 3D du pont

Nous appliquons maintenant le même processus au cas d'un pont 3D. La figure IX.16 présente les conditions aux limites utilisées pour cet exemple. La solution de référence, solution du problème (IX.6) est présentée sur la figure IX.17.

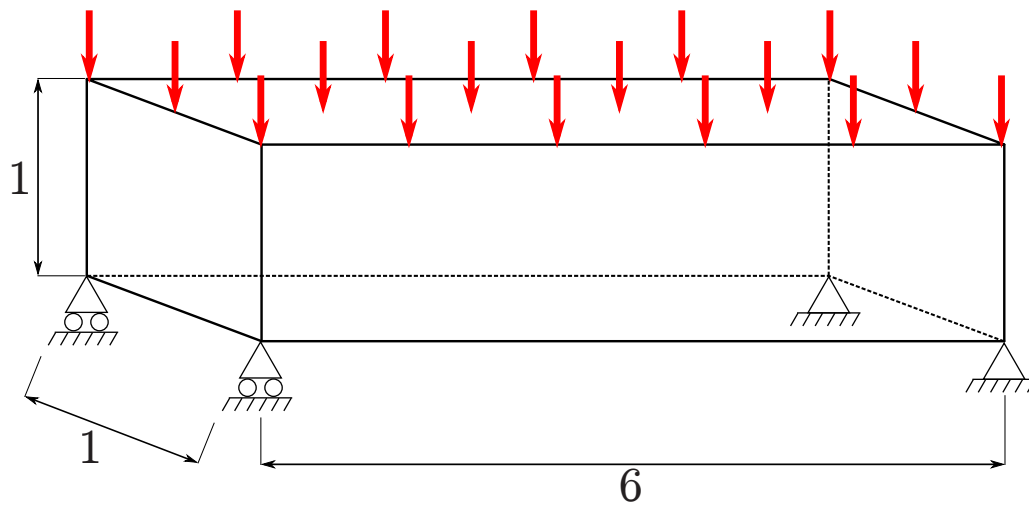


Figure IX.16 – (a) conditions aux limites pour le cas du pont 2D, (b) initialisation utilisée pour le processus d'optimisation.

Le tableau 2.2 présente les différentes propriétés de la forme optimisée, nous constatons que les contraintes du problème d'optimisation sont respectées. Nous utilisons les quantités définies dans ce tableau comme référence pour la suite des exemples de pont 3D.

Critères	figure IX.14	contrainte
Compliance	7724800	–
Volume	15%	$\leq 15\%$
$C_{ref}$	$4.5 \times 10^{-3}$	–

Table IX.3 – Propriétés finales du pont 3d de référence présenté en figure IX.17.

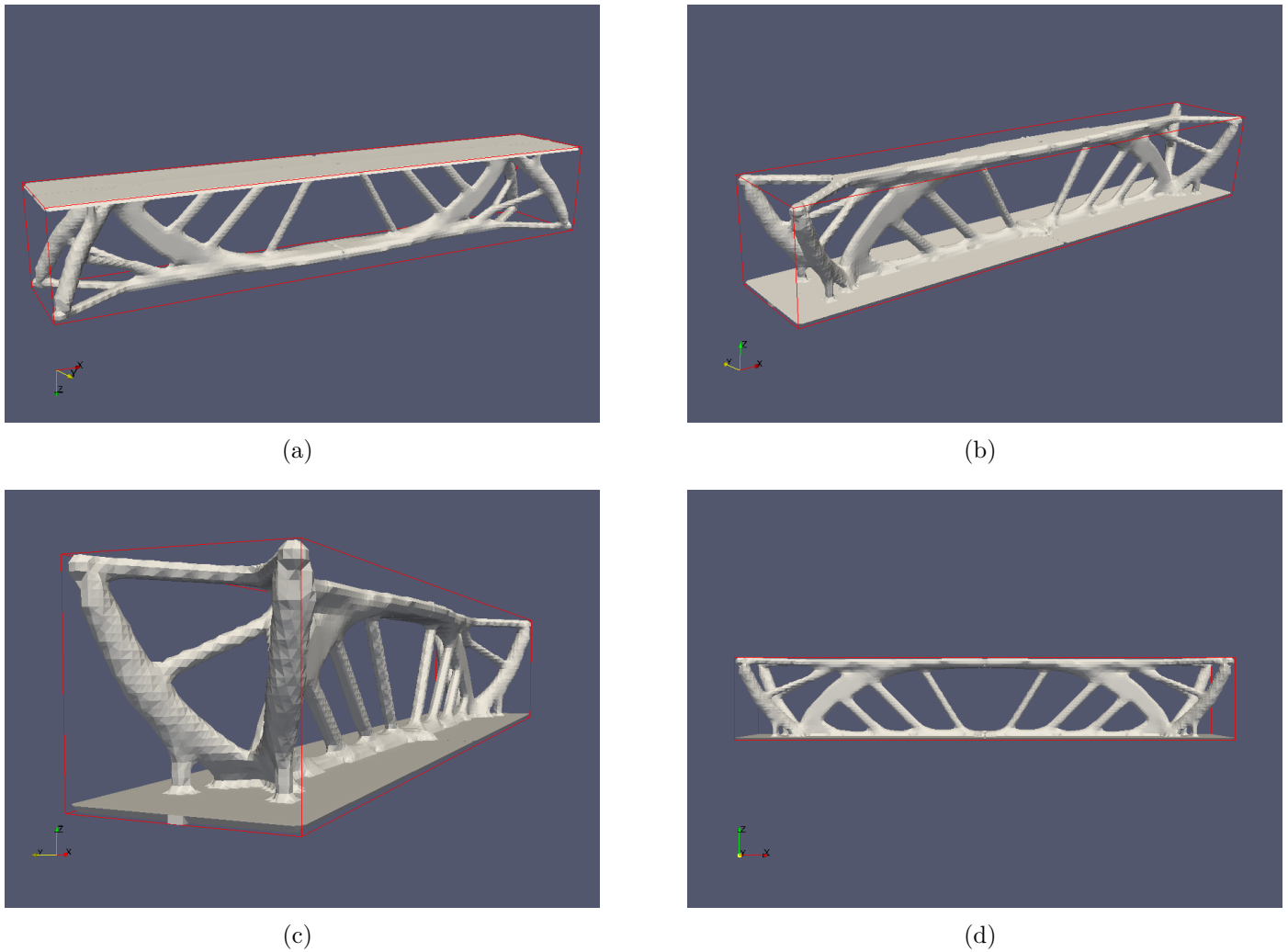


Figure IX.17 – Solution de référence du pont 3D pour le problème (IX.6), sous différents angles de vue.

Nous résolvons maintenant le problème (IX.8) pour différentes valeurs du coefficient  $\alpha$ , les formes obtenues sont présentées sur la figure IX.18. Le tableau IX.4 présente les propriétés finales pour ces formes. Nous constatons encore que la diminution de  $\alpha$  entraîne la réduction des zones comportant initialement des overhangs. En particulier pour  $\alpha = 0.1$  des surfaces apparaissent en aplomb du grand membre horizontal dans le but de le supporter sur toute sa longueur.

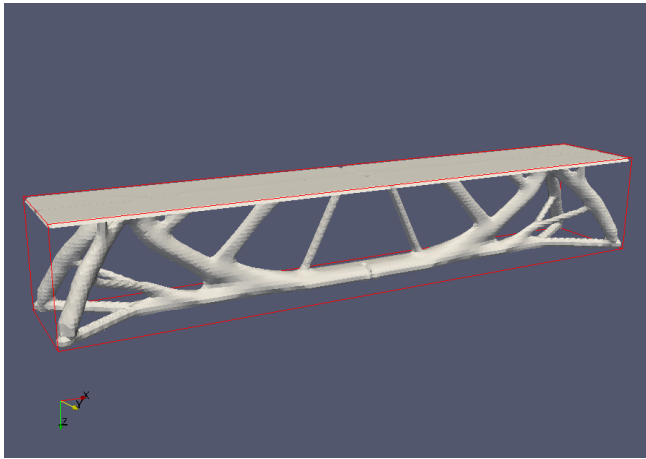
Le tableau IX.4 présente les valeurs numériques des différentes propriétés des formes finales de la figure IX.18. Les formes présentées respectent toutes les contraintes du problème d'optimisation, nous notons de plus que la perte de performance (ici l'objectif est le volume) est minime (17% de volume avec la contrainte de fabrication contre 15% sans).

Forme traitée	compliance	Vol( $\Omega$ )	$C_{sw}(\Omega)$	$\alpha \cdot C_{ref}$
Figure IX.17	7724800	15%	$4.5 \times 10^{-3}$	—
Figure IX.18 (a) et (b)	7651590	15%	$3.1 \times 10^{-3}$	$3.15 \times 10^{-3}$
Figure IX.18 (c) et (d)	7575730	17%	$4.2 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-4}$

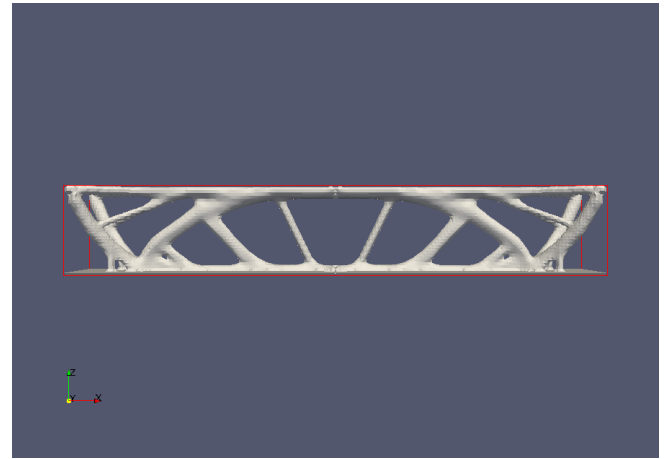
Table IX.4 – Résultats de simulation pour le problème d'optimisation (IX.8) pour le pont 3D.

Nous remarquons cependant sur la figure IX.18 la persistance de régions horizontales reliant

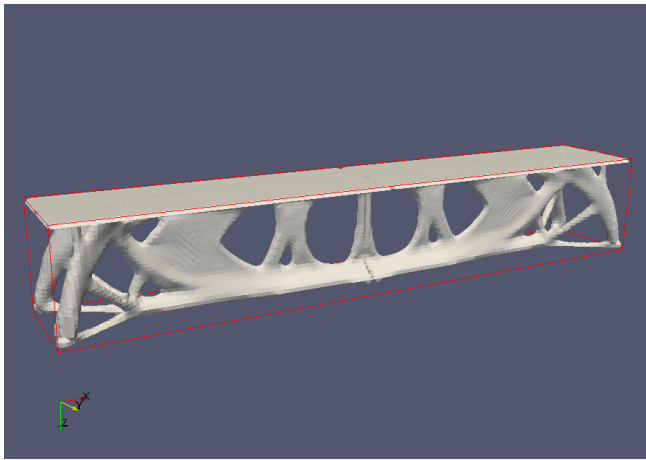




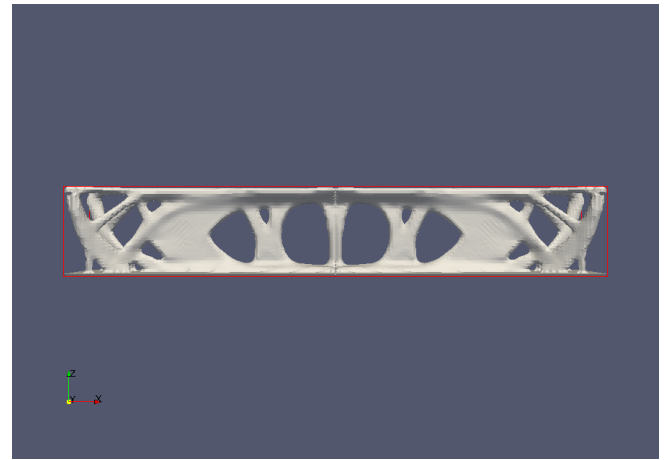
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure IX.18 – Solution du problème (IX.8) vue sous différents angles, et pour différentes valeurs de  $\alpha$ . (a) et (b)  $\alpha = 0.7$ , (c) et (d)  $\alpha = 0.1$

la traverse aux points d'encrages. Ces zones sont ont une grande importance mécanique que l'algorithme a choisi de ne pas sacrifier.

Nous avons présenté plusieurs résultats utilisant le critère mécanique (IX.3) afin de limiter la présence de zone en porte-à-faux dans les solutions obtenues par optimisation. Nous allons maintenant dresser un bilan sur l'efficacité de la méthode.

## Bilan du chapitre IX

---

Dans ce chapitre nous avons présenté la problématique des "overhangs" qui constitue une limitation majeure des méthodes de fabrication additive. Nous avons présenté comment elle est traitée classiquement de manière ad-hoc par l'impression d'un support "à la volée". Bien qu'efficace cette solution est à la fois coûteuse en temps et en matière première. Pour cette raison plusieurs auteurs proposent des méthodes de conception permettant de réduire la quantité de zones en porte-à-faux, et ainsi limiter l'impression de support (Langelaar, 2016; Qian, 2017). Ces différentes solutions se basent sur des critères géométriques. Nous avons présenté les limites de cette approche et proposé une solution basée sur un critère mécanique.

Dans le dernier paragraphe du chapitre nous avons fourni quelques exemples numériques permettant de valider cette nouvelle approche. Le critère proposé est efficace pour réduire considérablement la quantité de zones en porte-à-faux (cf. figures IX.15 et IX.18) et contraint moins la forme finale que les méthodes proposées par Langelaar (2016) et Qian (2017). Cependant l'évaluation d'un tel critère est coûteuse en temps de calcul car elle nécessite un grand nombre de calculs éléments finis. Pour cette raison Dapogny *et al.* (2017a) propose une accélération, qu'il est encore nécessaire de tester.



# Conclusion de la Partie C

---

Après avoir travaillé sur l'optimisation des propriétés effectives de matériaux architecturés dans la partie B, nous nous sommes posés la question de leur intégration au sein de structures. Dans cette optique nous avons présenté dans le chapitre VII plusieurs solutions pour fabriquer puis intégrer ces matériaux, nous avons tenté d'évaluer le gain apporté à l'aide de calculs d'optimisation de domaine.

Ce chapitre nous a naturellement amené à la question de la production de matériaux architecturés, nous avons évoqué la production sous forme de semi-produit comme proposé par Wang *et al.* (2016) ou Kooistra et Wadley (2007). Nous avons aussi évoqué la piste des méthodes de fabrication additive, qui s'imposent aujourd'hui comme un nouveau moyen de production permettant de surmonter les limites des méthodes de fabrication soustractives conventionnelles Hopkinson *et al.* (2006).

Ce propos est cependant à nuancer car ces nouvelles technologies de fabrication ne sont en pratique pas exemptes de limitations, nous les avons d'ailleurs divisées en deux familles que sont les propriétés induites et les contraintes de fabrication.

Dans le chapitre VIII nous avons abordé la question des propriétés induites par les méthodes de fabrication. Nous avons proposé un moyen de prendre en compte cet effet collatéral de la fabrication au sein d'un calcul d'optimisation de domaine, étudiant ainsi l'influence de ces propriétés. Nous avons montré qu'ignorer les propriétés induites lors d'un calcul d'optimisation introduisait deux biais : la mauvaise évaluation de la performance et la convergence vers une solution que ne sera en pratique pas optimale. À l'issue de ce chapitre, nous recommandons donc toujours se poser la question des propriétés réelles des matériaux utilisés : **la plupart des résultats d'optimisation de la littérature sont obtenus en supposant des propriétés homogènes et isotropes des phases constitutives, ce qui est rarement le cas quand les structures finales sont produites par fabrication additive ! Ignorer les propriétés réelles revient à ne pas résoudre le bon problème d'optimisation.**

Dans le chapitre IX nous avons traité de la prise en compte de la contrainte de porte-à-faux lors du processus d'optimisation. Nous avons fourni une rapide revue des formulations utilisées dans la littérature, toutes basées sur un critère géométrique, puis nous avons présenté une nouvelle formulation basée sur un critère "mécanique". Nous avons présenté le caractère très restrictif des approches existantes de la littérature, et justifié de la pertinence de notre critère, basé sur une série d'analyses mécaniques. L'efficacité de la méthode a été démontrée à l'aide d'une série d'exemples 2D et 3D. Bien que plus "cohérent", nous soulignons cependant que le critère proposé est aussi beaucoup plus coûteux (en temps de calcul) à évaluer. Même si plusieurs propositions permettent en principe d'en accélérer le calcul, un important travail de démonstration et d'implémentation reste à effectuer.



Quatrième partie :

---

Prise en compte des non-linéarités  
géométriques et matériaux



## Introduction

Jusqu'à présent nous avons traité des cas d'optimisation de domaine en mécanique dans le cadre de l'élasticité linéaire ainsi qu'en faisant l'hypothèse des petites perturbations (HPP). Ce cadre de travail permet de simplifier considérablement la résolution tant sur les aspects numériques liés aux calculs éléments finis que sur le plan de la dérivation de forme. Les hypothèses adoptées se résument par le calcul du tenseur des déformations

$$\bar{\bar{\bar{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t) \quad (\text{IX.9})$$

et le tenseur des modules élastiques, supposé constant

$$\bar{\bar{\bar{C}}} = cste \quad (\text{IX.10})$$

pour la loi de comportement linéaire du matériau. La plupart des auteurs de la littérature se restreignent à ces mêmes hypothèses ( [Sigmund et Torquato \(1996\)](#) , [Allaire \*et al.\* \(2002\)](#) , [Wang et Wang \(2005\)](#) ).

Dans ce chapitre nous allons nous affranchir des équations (IX.9) et (IX.10) et traiter des problèmes d'optimisation de structures au comportement non-linéaire. Nous nous plaçons dans le cadre des grands déplacements. L'équation (IX.9) décrivant la déformation est ainsi remplacée par le tenseur de déformations de Green-Lagrange, soit

$$\bar{\bar{\bar{E}}} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^t + \nabla \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}). \quad (\text{IX.11})$$

Dans un même temps, nous supposerons une expression plus générale que (IX.10) pour l'expression du tenseur des modules élastiques,

$$\bar{\bar{\bar{C}}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\bar{\bar{E}}}^2}, \quad (\text{IX.12})$$

avec  $W$  le potentiel décrivant le comportement hyperélastique d'un matériau.

Plusieurs auteurs ont abordé la question de ces non-linéarités, [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#), [Allaire \*et al.\* \(2004b\)](#) et [Kwak et Cho \(2005\)](#) traitent de la prise en compte des grands déplacements lors de l'optimisation de la rigidité alors que [Klarbring et Strömberg \(2013\)](#) et [Wang \*et al.\* \(2014\)](#) ont traité la prise en compte de loi de comportement hyperélastiques. Nous dégageons de leurs travaux plusieurs bilans permettant de guider nos développements.

Le chapitre X fournit un état de l'art ainsi qu'une présentation de la théorie utilisée. Nous détaillons notamment la résolution d'un problème non-linéaire en mécanique, les dérivées de formes de plusieurs critères ainsi que quelques "astuces numériques" extraites de la littérature. Le chapitre XI contient une série de résultats numériques étendant les résultats de la littérature avec des exemples multi-matériaux et de contrôle de chemin.





# Chapitre X

## Motivations et état de l'art

---

1	Résultats de la littérature prenant en compte les non-linéarités . . . . .	234
1.1	Prise en compte des non-linéarités géométriques . . . . .	234
1.2	Prise en compte de la non-linéarité de la loi de comportement . . . . .	235
2	Résolution d'un problème de mécanique non linéaire . . . . .	237
2.1	Équations d'état non linéaires et discrétisation . . . . .	237
2.2	Résolution numérique d'un problème non linéaire . . . . .	240
2.3	Complications numériques liées à la prise en compte des non-linéarités . .	242
3	Une présentation de plusieurs critères pertinents . . . . .	242
3.1	Les critères utilisés dans la littérature . . . . .	243
3.2	Contrainte de point de passage . . . . .	245
	Bilan du chapitre X . . . . .	248

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous définissons le cadre théorique permettant de prendre en compte les non-linéarités géométriques et de comportement matériau durant un processus d'optimisation de forme.

Nous commençons par présenter les résultats de la littérature sur cette thématique, cela dans le but de justifier l'intérêt de la prise en compte des non-linéarités géométriques.

Nous fournissons ensuite le détail d'un modèle d'élasticité non linéaire et détaillons les étapes importantes permettant sa résolution.

À partir de ce modèle nous pouvons ensuite définir plusieurs critères optimisables, dont certains sont issus de la littérature. Nous présentons aussi leurs dérivées de formes. Une discussion à propos de la pertinence de ces différents critères est ensuite menée.

Nous terminons le chapitre par la définition d'un critère de contrôle de trajectoire.

## Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre nous allons aborder la prise en compte des non-linéarités dans les calculs d'optimisation de domaine. Nous commençons par traiter de l'intérêt de cette prise en compte à travers une étude de la littérature. En confrontant les conclusions des différents auteurs nous sélectionnerons ensuite un cadre théorique pour décrire et résoudre nos problèmes non-linéaires. Enfin, nous détaillerons les calculs de plusieurs critères ainsi que de leurs dérivées de forme.

## Cadre théorique

Nous nous plaçons ici dans le cadre des grands déplacements et de matériau constitutifs aux propriétés hyperélastiques. Nous utilisons le tenseur de Green Lagrange (IX.11) pour notre mesure des déformations et adoptons la forme générale (IX.12) pour la loi de comportement de nos matériaux. Nous développons plus tard et de manière plus précise le modèle utilisé.

# 1 Résultats de la littérature prenant en compte les non-linéarités

Nous commençons par étudier les résultats de la littérature dans le but de définir clairement si la prise en compte des non-linéarités constitue un apport intéressant pour l'optimisation d'actuateurs. Nous rassemblons aussi des informations sur les stratégies permettant de gérer le plus pertinemment possible les aspects numériques.

## 1.1 Prise en compte des non-linéarités géométriques

### L'optimisation de la rigidité

Buhl *et al.* (2000) et Bruns et Tortorelli (2001) ont étendu le critère classique de compliance dans un cadre théorique tenant compte des grandes déformations. En minimisant la compliance finale de la structure, c'est-à-dire l'énergie élastique stockée dans la structure déformée, ils en optimisent la rigidité. Ces auteurs soulignent cependant le peu d'intérêt de cette application, les structures proposées sont en effet qualifiées de "dégénérées" du fait qu'elles ne sont adaptées que pour un unique niveau de chargement.

La figure X.1, extraite de Buhl *et al.* (2000), illustre comment une forme optimisée sans prise en compte des non-linéarités se trouve être plus performante qu'une forme optimisée avec prise en compte. Cette figure présente trois résultats d'optimisation d'un cantilever : (a) optimisé avec un modèle mécanique linéaire et avec l'hypothèse des petites déformations, (b) optimisé avec un modèle mécanique non linéaire prenant en compte les grandes déformations. Elle présente aussi leurs courbes force allongement, calculée en prenant en compte les non-linéarités. Nous constatons sur cette figure que la forme optimisée (b) possède une charge critique (i.e. le niveau de charge pour lequel la courbe force-déplacement marque un plateau) plus faible que la forme optimisée en linéaire. Cela indique que bien que la seconde forme ait été optimisée avec prise en compte des non-linéarités, elle s'avère être la moins performante.

Bien que l'auteur propose un autre critère de "travail élastique complémentaire" fournissant une forme (c) plus performante que la (b), ces deux formes, obtenues avec prise en compte des non-linéarités, sont moins performantes que la (a).

Il en résulte que considérer les non-linéarités pour l'optimisation de la rigidité de structure est inutilement coûteux et que cela fournit des résultats de faible performance. Bruns et Tortorelli (2001) concluent eux aussi que le critère de compliance n'est pas le plus adapté pour décrire la performance d'une structure dans le cadre d'une analyse non linéaire.

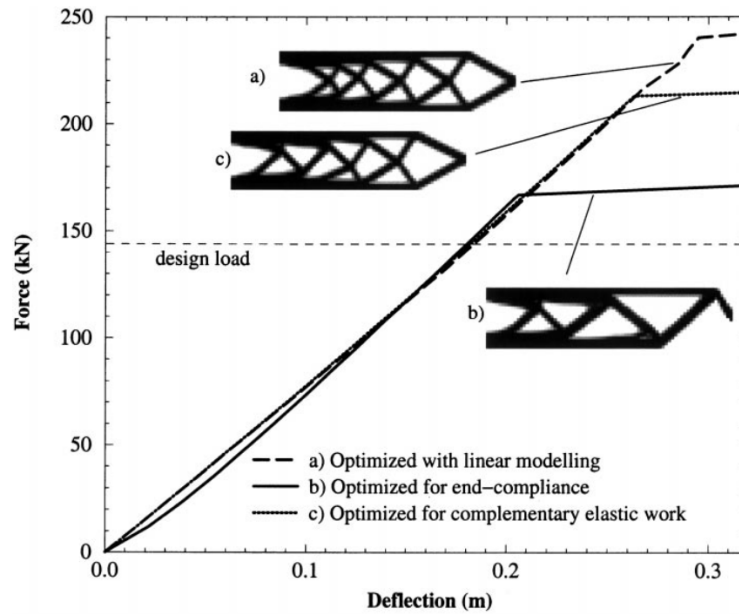


Figure X.1 – Courbe extraite de [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#), la courbe force-déplacement de trois structures à la rigidité optimisée : (a) dans les hypothèses de l'élasticité linéarisée, (b) en non linéaire avec un critère de compliance finale (c) en non-linéaire avec un critère de travail élastique complémentaire.

### Obtention de déplacement cible

L'analyse non linéaire géométrique s'avère être un point déterminant pour l'optimisation de mécanismes compliant. Comme l'explique [Pedersen \*et al.\* \(2001\)](#), le gain en termes de performance peut dépasser un facteur 2 dans certains cas, se restreindre à l'étude en petites déformations est alors notablement limitant. [Bruns et Tortorelli \(2001\)](#) soulignent aussi l'importance de la gestion des effets non linéaires tels que le "snap-through" ou le "snap-back" pour la réalisation de mécanismes. Nous reviendrons plus tard sur l'importance de ces phénomènes.

### Bilan

À l'issu de cette courte revue nous pouvons conclure que la prise en compte de non-linéarités pour définir des structures rigides n'est pas recommandé comme l'explique [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#) car elle produit des designs peu performants du type de ceux présenté sur la figure X.1.

Comme nous souhaitons réaliser la synthèse d'actuateurs il est dans notre cas indiqué de prendre en compte les non-linéarités. Comme le précise [Pedersen \*et al.\* \(2001\)](#) cela est même indispensable si l'on souhaite générer des structures comportant des chemins de déplacement bien définis.

Nous allons maintenant nous intéresser aux complications numériques décrites par plusieurs auteurs, cela afin d'anticiper leur traitement.

## 1.2 Prise en compte de la non-linéarité de la loi de comportement

Les auteurs précédemment cités ont utilisé la loi de Kirchhoff-St.Venant pour la loi constitutive de leurs matériaux, il s'agit en réalité d'une loi dépendant linéairement du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\bar{\bar{E}}$ . [Wang \*et al.\* \(2014\)](#) ont considéré une loi de comportement hyperélastique, ils ont cependant souligné le faible intérêt de ce type de modèle dans le cas de l'optimisation de la rigidité d'une structure. De la même façon [Klarbring et Strömberg \(2013\)](#) ont testé sept lois constitutives hyperélastiques différentes sur un même cas test, la figure X.2

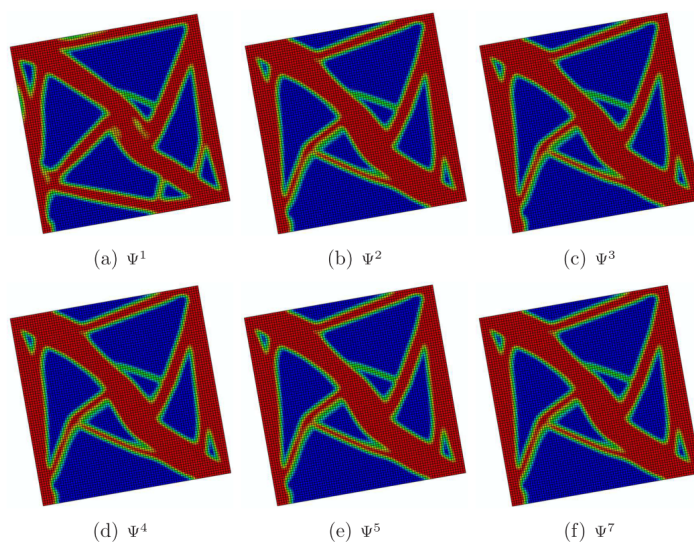


Figure X.2 – Formes optimisées pour un même problème d’optimisation mais différentes lois de comportement hyperélastiques  $\psi^i$ . La loi  $\psi^1$  correspond au modèle de Kirchhoff-St.Venant. Nous remarquons une différence de forme entre (a) et les autres solutions, cependant les solutions (b) (h) sont quasiment identiques, source : Klarbring et Strömberg (2013).

présente les différentes formes optimales obtenues par ces auteurs, nous constatons que ces formes sont très similaires.

De ces deux publications il résulte que la prise en compte des non-linéarités matériaux à un effet **mineur** sur les formes optimales, cela est expliqué par Wang *et al.* (2014) à l’aide de la figure X.3. Sur ce graphique nous constatons que la structure optimisée ne présente pas de zones où l’élongation atteint des valeurs suffisamment importantes pour que les différences entre le modèle hyperélastique et le modèle linéaire soient significatives.

Ce propos reste cependant à nuancer, si les deux auteurs aboutissent à la même conclusion il faut noter qu’ils ont tous deux étudié des problèmes de maximisation de rigidité. Il est probable que la prise en compte d’une loi de comportement non linéaire présente un intérêt dans le cas d’optimisation d’actuateurs.

Nous notons aussi que Desmorat et Duvaut (2003) ont considéré une loi de comportement dissymétrique en traction/compression lors d’un calcul d’optimisation. L’influence sur les solutions proposées est significative dans le cas de Desmorat et Duvaut (2003) car une différence de comportement apparaît même pour de petites valeurs d’élongation  $\lambda$ .

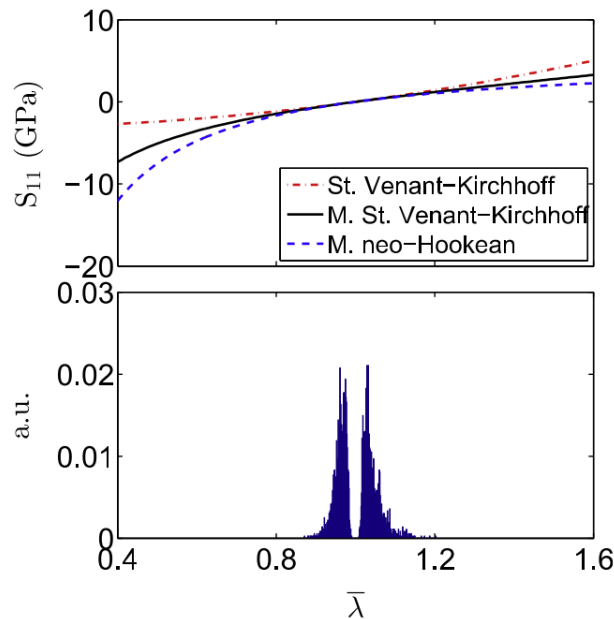


Figure X.3 – (en haut) variation de la contrainte  $S_{11}$  en fonction de l'élongation  $\lambda$ , cette courbe présente plusieurs lois de comportement dont Kirchhoff-St.Venant et le modèle néo-Hookeen. (en bas) un histogramme montrant la distribution des niveaux de contrainte dans une structure ayant fait l'objet d'une optimisation de rigidité, source : Klarbring et Strömberg (2013).

## 2 Résolution d'un problème de mécanique non linéaire

Nous allons maintenant préciser le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons pour traiter l'optimisation de structure au comportement non linéaire. La théorie présentée ici prend en compte à la fois les non-linéarités géométriques ainsi que les non-linéarités de comportement des matériaux. Nous commençons par rappeler les bases de la théorie de l'élasticité non linéaire, qui est un prérequis à la définition de critères d'optimisation prenant en compte les non-linéarités ainsi que leurs dérivées de forme.

### 2.1 Équations d'état non linéaires et discrétisation

#### Notations et définitions des domaines traités

La figure X.4 illustre l'ensemble des variables utilisées par la suite. Nous souhaitons calculer le déplacement  $\bar{u}$  d'un domaine  $\Omega_0$  soumis à un chargement surfacique  $\bar{g}$  appliqué sur le bord de Neumann  $\Gamma_{N,0}$  et un chargement volumique  $\bar{f}$  appliqué dans  $\Omega_0$ . Nous faisons l'hypothèse que ces chargements mécaniques ne dépendent pas du domaine  $\Omega_t$ . Notre domaine  $\Omega_0$  est constitué d'un unique matériau aux propriétés hyperélastiques. Le bord  $\partial\Omega_0$  du domaine  $\Omega_0$  est un ensemble de bords tel que  $\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_{N,0} \cup \Gamma_{D,0}$ . Ces bords ainsi définis représentent

- $\Gamma_0$  le bord libre du domaine  $\Omega_0$ , où la traction est nulle,
- $\Gamma_{N,0}$  le bord de Neumann où est appliqué le vecteur traction  $\bar{g}$ ,
- $\Gamma_{D,0}$  le bord de Dirichlet où le déplacement  $\bar{u}$  est fixé.

La figure X.4 présente l'ensemble des éléments définis juste avant, et présente aussi un état déformé intermédiaire  $\Omega_t$  de la structure.

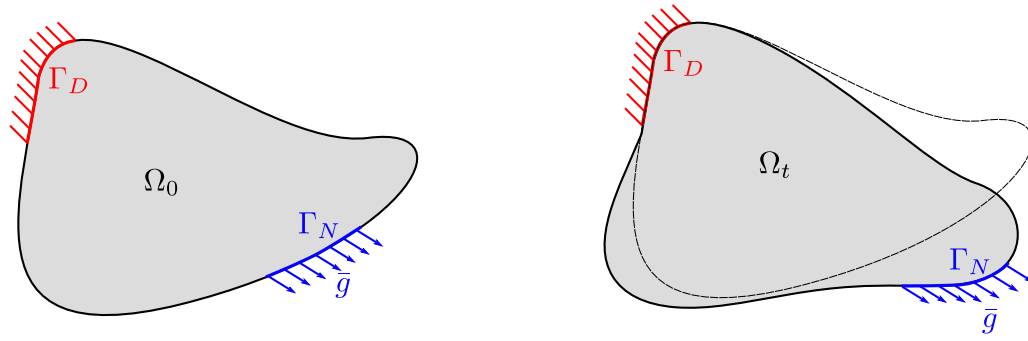


Figure X.4 – Illustration du domaine de définition et des différents bords le composant. À gauche la forme initiale, à droite un état déformé.

Nous définissons maintenant plusieurs quantités utiles pour la suite des calculs.

- $\bar{u}(x, t)$  : le vecteur déplacement d'un point  $x$  du domaine  $\Omega_t$
- $\bar{u}(X, t)$  : le vecteur déplacement d'un point  $X$  du domaine  $\Omega_0$
- $\bar{I}$  : le tenseur identité d'ordre 2
- $F(\bar{x}, t) = \nabla\phi(\bar{X}, t) = I + \nabla\bar{u}(X, t)$  : le tenseur gradient de la transformation
- $\bar{\epsilon}(X, t) = \frac{1}{2} (\nabla\bar{u} + {}^t\nabla\bar{u})$  : le tenseur de déformation linéarisé
- $\bar{E}(X, t) = \frac{1}{2} (\nabla\bar{u} + {}^t\nabla\bar{u} + {}^t\nabla\bar{u} \cdot \nabla\bar{u})$  : le tenseur de déformation de Cauchy-Lagrange
- $W(\bar{\epsilon})$  : L'énergie élastique stockée
- $\bar{\sigma}(x, t)$  : le tenseur des contraintes de Cauchy
- $\bar{P}(\bar{u}) = F \cdot \bar{\pi}(X, t) = J(X, t) \bar{\sigma} \cdot {}^t F^{-1}$  : le premier tenseur de Piola-Kirchhoff
- $\bar{\pi}(\bar{u}) = J(X, t) F^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot {}^t F^{-1} = \frac{\partial W}{\partial \bar{E}}$  : le second tenseur de Piola-Kirchhoff
- $\bar{C}(\bar{u}) = \frac{\partial \bar{\pi}(X, t)}{\partial \bar{E}} = \frac{\partial^2 W(\bar{E})}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}$  : le tenseur des modules élastiques

## Équations d'état et de la formulation variationnelle

Comme [Allaire et al. \(2004a\)](#) nous optons pour une formulation Lagrangienne totale du problème non linéaire car cela simplifie considérablement la dérivation de forme ultérieure. En d'autres termes, nous exprimons les équations d'état dans la configuration initiale du problème  $\Omega_0$ , cela donne

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_X \left( \bar{\bar{P}}(\bar{u}) \right) &= f \quad x \in \Omega_0, \\ \bar{u} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0^D, \\ \bar{\bar{P}}(\bar{u}) \cdot n &= g \quad x \in \Gamma_0^N, \\ \bar{\bar{P}}(\bar{u}) \cdot n &= 0 \quad x \in \Gamma_0^0. \end{aligned} \tag{X.1}$$

avec  $P(\bar{u})$  le premier tenseur de Piola-Kirchhoff.

Nous écrivons maintenant les équations d'état (X.1) sous une forme intégrale et nous introduisons le champ de déplacement virtuel  $\bar{\Phi}$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega_0} -\operatorname{div}_X \left( \bar{\bar{P}}(\bar{u}) \right) \cdot \bar{\Phi} \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{f} \cdot \bar{\Phi} \, dx \tag{X.2}$$

Nous appliquons ensuite une intégration par partie sur le membre de gauche afin de faire apparaître le gradient du champ de déplacement virtuel

$$\int_{\Omega_0} \bar{\bar{P}}(\bar{u}) : \nabla \bar{\Phi} \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{f} \cdot \bar{\Phi} \, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} \, dx \tag{X.3}$$

nous obtenons ainsi la formulation variationnelle correspondant à (X.1).

Nous exprimons le membre de gauche dans le but de le définir non plus avec le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $P(\bar{u})$ , mais avec le second tenseur de Piola-Kirchhoff, noté  $\bar{\bar{\pi}}(\bar{u})$ . Même si cela semble alourdir inutilement l'expression, ce tenseur a l'intéressante propriété d'être symétrique, ce qui sera profitable plus tard lors de la résolution numérique. Nous écrivons

$$\int_{\Omega_0} \bar{\bar{P}}(\bar{u}) : \nabla \bar{\Phi} \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{\bar{F}}(\bar{u}) \cdot \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : \nabla \bar{\Phi} \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : \left( {}^t F(\bar{u}) \cdot \nabla \bar{\Phi} \right) \, dx \tag{X.4}$$

Afin de simplifier les expressions ultérieures, nous introduisons le tenseur  $D(\bar{u}, \bar{\Phi})$  défini tel que

$$D(\bar{u}, \bar{\Phi}) = \bar{\bar{F}}^t(\bar{u}) \cdot \nabla \bar{\Phi} = (I + {}^t \nabla \bar{u}) \cdot \nabla \bar{\Phi} = \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{u} \cdot \nabla \bar{\Phi}.$$

nous définissons aussi les parties symétriques et antisymétriques de  $D(\bar{u}, \bar{\Phi})$ ,  $D_s$  et  $D_u$  respectivement :

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{2}(D + D^t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{u} \cdot \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \bar{u} \right), \\ D_u &= \frac{1}{2}(D - D^t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \bar{\Phi} - {}^t \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{u} \cdot \nabla \bar{\Phi} - {}^t \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \bar{u} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de  $D$  puis  $D_s$  et  $D_u$  dans (X.4) nous obtenons

$$\int_{\Omega_0} \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : \left( {}^t F(\bar{u}) : \nabla \bar{\Phi} \right) \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : D(\bar{u}, \bar{\Phi}) \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : (D_s(\bar{u}, \bar{\Phi}) + D_u(\bar{u}, \bar{\Phi})) \, dx. \tag{X.5}$$

Le produit doublement contracté du second tenseur de Piola-Kirchhoff et de la partie antisymétrique de  $D(\bar{u}, \bar{\Phi})$  s'annulant, ce terme disparaît de l'intégrale, la forme variationnelle finale s'écrit

$$\int_{\Omega_0} \bar{\bar{\pi}}(\bar{u}) : D_s(\bar{u}, \bar{\Phi}) \, dx = \int_{\Omega_0} \bar{f} \cdot \bar{\Phi} \, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} \, dx \tag{X.6}$$

Maintenant que la formulation variationnelle du problème a été établie, nous allons présenter comment cette dernière est résolue numériquement.



## 2.2 Résolution numérique d'un problème non linéaire

Comme le montre la forme variationnelle (X.6) le problème que nous souhaitons résoudre est non linéaire, il est donc nécessaire de trouver une méthode numérique permettant sa résolution itérative. Nous choisissons pour cela une solution classique qui est l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution de problème non linéaire.

Nous présentons d'abord cet algorithme puis nous étudierons comment l'adapter à la résolution de notre problème éléments finis.

### Algorithme de Newton-Raphson

Soit une équation non linéaire de la forme

$$G(U) = 0. \quad (\text{X.7})$$

L'algorithme de Newton-Raphson consiste à construire une séquence de solutions  $U_n$  telle que :

- pour  $U_n$  tel que  $G(U_n) \neq 0$
- on calcule  $\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$  à l'aide de l'approximation de Taylor à l'ordre 1 de  $G(U)$  calculée en  $U_n$ , écrite telle que

$$G(U_{n+1}) \approx G(U_n) + \frac{\partial G}{\partial U}(U_n) \Delta U_n = 0 \quad (\text{X.8})$$

- L'algorithme s'arrête quand  $\|\Delta U_n\| < \epsilon$ .

La figure X.5 illustre graphiquement le principe de cet algorithme sur deux itérations de recherche, pour le cas particulier où  $U$  est un scalaire.

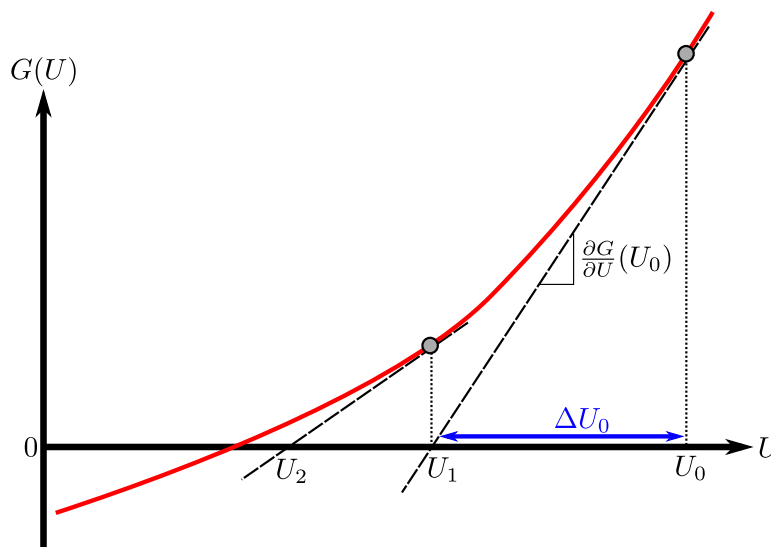


Figure X.5 – Illustration de l'algorithme de Newton-Raphson pour la recherche de la solution à l'équation non linéaire (X.7). Ici  $U$  est un scalaire.

Nous allons maintenant appliquer cet algorithme à notre cas particulier.

### Application à la résolution d'un problème d'élasticité non linéaire

Nous commençons par exprimer  $G(\bar{u})$ , pour cela on reprend la formulation variationnelle (X.6), cela donne

$$G(\bar{u}) = \int_{\Omega_0} \bar{\pi}(\bar{u}) : D_s(\bar{u}, \bar{\Phi}) dx - \int_{\Omega_0} \bar{f} \cdot \bar{\Phi} dx - \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} dx \quad (\text{X.9})$$

Il nous faut maintenant écrire le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $G(\bar{u}_{n+1})$  tel que présenté par (X.8), cette étape s'avère complexe compte-tenu des formes intégrales contenues dans (X.9). En considérant que  $\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + \Delta\bar{u}_n$ , nous allons tenter de développer (X.9) et d'expliciter le développement de Taylor (X.8) par identification. Nous écrivons

$$G(\bar{u}_{n+1}) = \int_{\Omega_0} \bar{\pi}(\bar{u}_{n+1}) : D_s(\bar{u}_{n+1}, \bar{\Phi}) dx - \int_{\Omega_0} \bar{f} \cdot \bar{\Phi} dx - \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} dx, \quad (\text{X.10})$$

il est pour l'instant difficile d'identifier la forme d'un développement de Taylor, d'autant plus que les expressions de  $\bar{\pi}(\bar{u}_{n+1})$  et  $D_s(\bar{u}_{n+1}, \bar{\Phi})$  contiennent des termes d'ordres supérieurs. Afin de rendre l'identification possible, nous développons les différents termes composant (X.10) et les linéarisons séparément une première fois pour plus de lisibilité.

### Simplifications des termes

Ainsi, une première linéarisation du second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\bar{\pi}(\bar{u}_{n+1})$  pour une petite variation de déformation du tenseur de Cauchy-Lagrange autour de  $\bar{u}_n$  s'écrit

$$\bar{\pi}(\bar{u}_{n+1}) \approx \bar{\pi}(\bar{u}_n) + \frac{\partial \bar{\pi}(\bar{u}_n)}{\partial \bar{E}} : (\bar{E}(\bar{u}_{n+1}) - \bar{E}(\bar{u}_n)) = \bar{\pi}(\bar{u}_n) + \bar{C}(\bar{u}_n) : (\bar{E}(\bar{u}_{n+1}) - \bar{E}(\bar{u}_n))$$

En remarquant maintenant que

$$\bar{E}(\bar{u}_{n+1}) = \bar{E}(\bar{u}_n) + D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) + \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n),$$

avec

$$\bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n) = \frac{1}{2} \left( {}^t \nabla(\Delta\bar{u}_n) \cdot \nabla(\Delta\bar{u}_n) \right),$$

nous simplifions encore  $\bar{\pi}(\bar{u}_{n+1})$  en négligeant les termes d'ordre plus élevés, cela donne

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\bar{u}_{n+1}) &= \bar{\pi}(\bar{u}_n) + \bar{C}(\bar{u}_n) : (D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) + \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n)) \\ &\approx \bar{\pi}(\bar{u}_n) + \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n). \end{aligned} \quad (\text{X.11})$$

Nous développons ensuite le terme  $D_s(\bar{u}_{n+1}, \bar{\Phi})$ , cela donne

$$D_s(\bar{u}_{n+1}, \bar{\Phi}) = D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n, \bar{\Phi}) \quad (\text{X.12})$$

avec

$$\bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n; \bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \left( {}^t \nabla \Delta\bar{u}_n + \nabla \bar{\Phi} + {}^t \nabla \bar{\Phi} + \nabla \Delta\bar{u}_n \right).$$

### Extraction du développement de Taylor

Nous remplaçons maintenant (X.11) et (X.12) dans (X.10) et nous développons l'expression ainsi formée. Pour une meilleure lisibilité, nous ne développons ici que le premier terme de (X.10), les autres termes ne nécessitant pas de travail particulier. Cela donne

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \bar{\pi}(\bar{u}_{n+1}) : D_s(\bar{u}_{n+1}, \bar{\Phi}) dX \\ &= \int_{\Omega} \left( \bar{\pi}(\bar{u}_n) + \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) \right) : (D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n, \bar{\Phi})) dX \\ &= \int_{\Omega} \left( \bar{\pi}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{\pi}(\bar{u}_n) : \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) \right) dX \\ &\quad + \int_{\Omega} \left( \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) : \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n, \bar{\Phi}) \right) dX \\ &\approx \int_{\Omega} \left( \bar{\pi}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{\pi}(\bar{u}_n) : \bar{\eta}(\Delta\bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) \right) dX \end{aligned} \quad (\text{X.13})$$

Une fois ce terme développé, nous identifions la forme (X.8) dans (X.10), cela donne

$$G(\bar{u}_{n+1}) = G(\bar{u}_n) + \int_{\Omega} \left( \bar{\pi}(\bar{u}_n) : \bar{\eta}(\Delta \bar{u}_n, \bar{\Phi}) + \bar{C}(\bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \Delta \bar{u}_n) : D_s(\bar{u}_n, \bar{\Phi}) \right) dX \quad (\text{X.14})$$

le second terme dépendant linéairement de  $\Delta \bar{u}_n$ , la forme présentée ici est linéaire en  $\Delta \bar{u}_n$ , elle pourra être résolue par éléments finis, et le second terme permet l'écriture de la matrice tangente  $K$ .

## 2.3 Complications numériques liées à la prise en compte des non-linéarités

### Problème de convergence du solveur

Le problème numérique majeur relevé par plusieurs auteurs (Bruns et Tortorelli, 2001; Buhl *et al.*, 2000; Cho et Kwak, 2006; Luo *et al.*, 2015) est la convergence du solveur non linéaire. Que ce soit en utilisant un champ de densité ou une fonction ligne de niveau, la représentation du domaine optimisé fait appel, comme cela a été décrit dans le chapitre II, à des éléments *ersatz*. Nous attribuons à ces éléments *ersatz* des propriétés mécaniques "faible" dans le but de mimer une région sans matière sans avoir à changer le maillage de calcul.

Or, quand ces éléments se retrouvent mécaniquement chargés durant le calcul, ils subissent de très grandes déformations, ce qui peut rendre la matrice de rigidité du problème éléments finis indéfinie ou même négativement définie, et entraîner la divergence du solveur. Cela entraîne l'arrêt de l'algorithme d'optimisation car il n'est plus possible d'évaluer numériquement les quantités à optimiser.

### Contourner le problème

Afin d'éviter les de telles difficultés plusieurs solutions sont recensées :

- Retirer les éléments *ersatz* du calcul du critère de convergence comme le propose Buhl *et al.* (2000).
- Traiter les éléments *ersatz* en élasticité linéaire, comme proposé par Wang *et al.* (2014).
- Retirer les éléments *ersatz* du maillage au moment du calcul. Cette solution est problématique dans les cas où les formes obtenues sont déconnectées, dans ces cas là la continuité du maillage est perdue et le calcul éléments finis ne peut être effectué.
- Modifier le comportement des éléments *ersatz* comme le propose Van Dijk *et al.* (2014)

Nous avons opté pour la combinaison des solutions 1 et 2 pour la simplicité de mise en œuvre.

## Bilan

Dans ce paragraphe nous avons présenté les équations de l'élasticité non linéaire, nous avons ensuite détaillé les étapes de calcul permettant de linéariser le problème, puis sa résolution à l'aide d'une méthode itérative. Les difficultés numériques propres à la représentation de la forme par frontière immergée (cf. chapitre II) ont été présentées et plusieurs solutions ont été envisagées.

Nous allons maintenant étudier la définition et le calcul de plusieurs critères d'optimisation ainsi que de leurs dérivées de forme.

## 3 Une présentation de plusieurs critères pertinents

Dans ce paragraphe nous allons présenter plusieurs critères utilisés dans la littérature. Ce sont des critères très courant en optimisation, tels que la compliance ou le déplacement cible, nous

allons cependant observer comment la prise en compte des non-linéarités géométriques et de comportement matériaux influent sur le calcul de ces critères et de leurs dérivées. Nous ne détaillons cependant pas le calcul des dérivées de forme, mais faisons référence aux articles en fournissant des développements rigoureux.

Après cette rapide revue, un bilan sera présenté et l'objectif retenu dans le cadre de ce travail présenté. Nous traiterons notamment d'un critère ad hoc visant à contraindre la structure à parcourir certains points de passage durant son chargement.

### 3.1 Les critères utilisés dans la littérature

Dans la littérature de l'optimisation les non-linéarités géométriques et de comportement matériaux ne sont pas dissociées lors de l'écriture de la formulation, cela permet d'écrire des dérivées de formes très générales. Comme nous l'avons fait pour l'écriture de la résolution du problème non linéaire, **nous prenons en compte les deux types de non-linéarités** pour le reste de ce paragraphe. Les critères défini ainsi que leurs dérivées de forme sont donc valables dans ce cadre.

Les auteurs cités dans le paragraphe 1 fournissent plusieurs critères adaptés à l'élasticité non linéaire, nous allons en détailler ici quelques-uns et traiter de leur pertinence.

#### Le critère de compliance finale

Le critère de compliance finale est utilisé par plusieurs auteurs traitant des problèmes de maximisation de rigidité (Allaire *et al.*, 2004a; Buhl *et al.*, 2000; Klarbring et Strömberg, 2013), il s'agit en fait d'un critère de compliance qui est très classique dans la littérature de l'optimisation de domaine, il s'écrit

$$\mathcal{J}(\Gamma_N) = \int_{\Omega} \bar{g} \cdot \bar{u} \, dx. \quad (\text{X.15})$$

**Remarque :** L'équation (X.15) définissant la compliance est inchangée par rapport à la formulation en élasticité linéaire : le critère ne suppose pas a priori du modèle utilisé.

Nous ne considérons pas ici de force volumique  $\bar{f}$ . L'expression est inchangée par rapport au critère de compliance en élasticité linéaire (Allaire *et al.*, 2002), une différence apparaît cependant lors de la dérivation de forme du fait de la non-linéarité des équations d'état (X.1). La dérivée de forme de (X.15) avec prise en compte des non-linéarités géométriques et matériaux s'écrit alors

$$\mathcal{J}(\Omega))'(\bar{\theta}) = \int_{\Gamma} \bar{\theta} \cdot \bar{n} \left( \bar{\pi}(\bar{u}^*) : D_s(\bar{u}^*, \bar{p}^*) \right) \, ds, \quad (\text{X.16})$$

avec  $\bar{u}^*$  le déplacement solution des équations d'état (X.1) et  $\bar{p}^*$  la solution du problème adjoint défini tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^*) &= 0 & x \in \Omega, \\ \bar{p}^* &= 0 & x \in \Gamma_D, \\ \bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^* \cdot \bar{n} &= -\bar{g} & x \in \Gamma_N, \\ \bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^* \cdot \bar{n} &= 0 & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (\text{X.17})$$

Un point très important à noter est la présence de  $\bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*)$  qui est la matrice de rigidité tangente, que l'on peut définir à partir de l'expression

$$\int_{\Omega} \bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p} : \bar{\Phi} \, dx = \int_{\Omega} \bar{\bar{C}}(\bar{u}^*) : D_s(\bar{u}, \bar{\Phi}) : D_s(\bar{u}, \bar{p}) \, dx + \int_{\Omega} \bar{\pi}(\bar{u}) : \bar{\eta}(\bar{p}, \bar{\Phi}) \, dx \quad (\text{X.18})$$

**Remarque :** Nous avons fait l'hypothèse ici que le champ de perturbation du bord  $\bar{\theta}$  est nul sur les bords comportant des conditions aux limites particulières (force appliquée ou déplacement imposé) afin de garder une définition simple de la dérivée de forme (X.16). Une écriture plus générale, incluant aussi la présence de forces volumiques, est présentée par [Allaire \*et al.\* \(2004a\)](#). Nous remarquons que les équations d'états définissant  $\bar{u}^*$  et  $\bar{p}^*$ , respectivement (X.1) et (X.17), sont différentes, ce qui indique que le critère considéré ici n'est pas auto-adjoint. Cela constitue une différence notable vis-à-vis de la compliance linéaire. Nous constatons aussi que contrairement au problème direct (X.1), le problème adjoint (X.17) est linéaire.

Ce critère est naturellement le premier testé dans la littérature, cependant et comme le pointe [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#) il présente un faible intérêt pratique. Il représente l'énergie élastique emmagasinée par la structure **dans sa configuration finale uniquement**, de ce fait seul le produit  $\bar{g} \cdot \bar{u}$  de la configuration finale est optimisé.

La figure X.6 en illustre la conséquence en comparant l'évolution de courbes schématiques de la force en fonction du déplacement lors de l'optimisation pour un cas linéaire et un cas non linéaire. Dans le cas du critère de compliance calculé avec les hypothèses de l'élasticité linéarisée ( graphique (a) ) la courbe force déplacement est linéaire. Réduire la compliance revient alors à réduire le déplacement atteint pour la force appliquée  $\bar{g}$ , ce qui conduit à une rigidité (i.e. la pente de la courbe force-déplacement) plus importante en tout point de la courbe.

À l'inverse dans le cas où les non-linéarités sont considérées une diminution du déplacement atteint pour la force appliquée  $\bar{g}$  ne signifie pas nécessairement une augmentation de la rigidité pour toutes les valeurs de chargement comme en atteste le graphique (b).

Les algorithmes d'optimisation fournissent ainsi des structures présentant une rigidité initiale faible (cf. figure X.1 b), elles sont qualifiées de "dégénérée" dans la littérature.

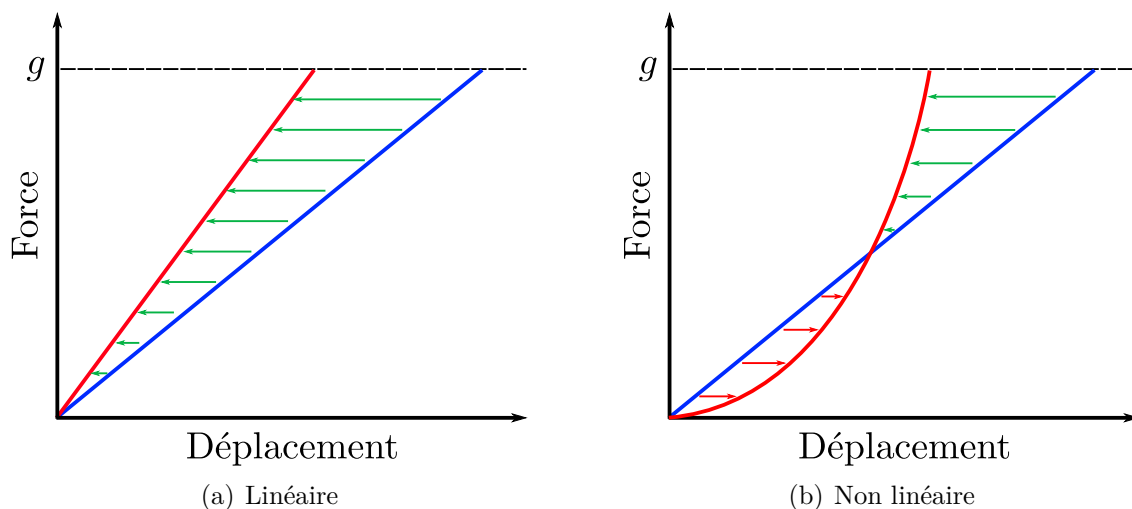


Figure X.6 – Courbes force-déplacement schématique pour une structure. En bleu la courbe initiale, en rouge une courbe entraînant une réduction de la compliance finale, (a) pour le cas d'un modèle linéaire, (b) pour le cas d'un modèle non linéaire.

Afin d'éviter ce phénomène un autre critère est proposé dans la littérature, celui de l'intégrale de la compliance, que nous allons présenter maintenant.

### Critère de l'intégrale de compliance

[Buhl \*et al.\* \(2000\)](#) définit ce critère comme étant

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_0^1 \left[ \int_{\Gamma_N} \gamma \bar{g} \cdot \bar{u} \, dx \right] d\gamma, \quad (\text{X.19})$$

ce critère représente l'intégrale de la compliance finale entre l'instant où la structure n'est pas chargée ( $\gamma = 0$ ) et l'instant où la structure est complètement chargée ( $\gamma = 1$ ).

L'expression (X.19) définit cependant un critère continu qu'il est plus pratique de discrétiser et d'écrire sous la forme

$$\mathcal{J}(\Omega) = \sum_{i=1}^{i=N} \left[ \int_{\Gamma_n} \frac{i}{N} \bar{g} \cdot \bar{u} \, dx \right], \quad (\text{X.20})$$

la dérivée de forme de cette version discrétisée étant immédiate puisqu'il s'agit de la somme des  $i$  dérivées de forme de la somme de compliance finale.

Ce critère empêche l'apparition de formes dégénérées car il tient compte de toutes les étapes intermédiaires du chargement (Buhl *et al.*, 2000).

### Critère de déplacement cible

Le dernier critère à aborder est le critère de contrôle de déplacement. Pedersen *et al.* (2001) proposent une démonstration de son calcul pour la méthode SIMP. Le critère s'écrit

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \kappa(x) (\bar{u} - \bar{u}_{tar})^2 \, dx \quad (\text{X.21})$$

avec  $\kappa(x)$  une fonction caractéristique valant 1 au niveau des points où le déplacement doit être contrôlé et 0 ailleurs et  $\bar{u}_{tar}$  la valeur cible du déplacement.

La dérivée de forme de ce critère s'écrit

$$\mathcal{J}(\Omega)'(\bar{\theta}) = \int_{\Gamma} \bar{\theta} \cdot \bar{n} \left( \kappa(x) (\bar{u} - \bar{u}_{tar})^2 + \bar{\pi}(\bar{u}^*) : D_s(\bar{u}^*, \bar{p}^*) \right) \, ds, \quad (\text{X.22})$$

avec  $\bar{u}^*$  le déplacement solution des équations d'état (X.1) et  $\bar{p}^*$  la solution du problème adjoint défini tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^*) &= -2\kappa(x) (\bar{u} - \bar{u}_{tar}) & x \in \Omega, \\ \bar{p}^* &= 0 & x \in \Gamma_D, \\ \bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^* \cdot \bar{n} &= 0 & x \in \Gamma_N, \\ \bar{\bar{C}}^T(\bar{u}^*) : \nabla \bar{p}^* \cdot \bar{n} &= 0 & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (\text{X.23})$$

Pedersen *et al.* (2001) utilisent un critère similaire pour optimiser des mécanismes, mais aussi pour imposer à un point particulier d'atteindre une cible précise pour un niveau de force fixé. Nous notons cependant que ce critère nécessite que l'utilisateur définisse lui-même le niveau de force  $\bar{g}$  pour lequel le déplacement doit être atteint.

### Bilan

Nous avons présentés les critères classiques de la littérature ainsi que leurs limitations. Nous avons observé que la prise en compte des non-linéarités donne un sens plus subtil au critère de compliance, et qu'il est de fait nécessaire de le modifier pour qu'il reste pertinent. Nous avons présenté les principaux critères de la littérature, nous allons maintenant introduire un nouveau critère pour le suivi de chemin.

## 3.2 Contrainte de point de passage

Nous proposons ici un concept de critère permettant non pas le contrôle de déplacement mais le contrôle du chemin de charge. Ce problème nous est apparu plus pertinent pour la synthèse d'actuateur car le choix des niveaux de charges  $\bar{g}$  peut s'avérer difficile.

### Définition du chemin de charge

Nous fournissons d'abord une définition du chemin. Soit une structure  $\Omega$  soumise à un chargement  $\gamma \bar{f}$  paramétré par  $\gamma \in [0, 1]$ . Nous appelons chemin de charge du point  $A$  la trajectoire définie telle que

$$\bar{x} = \bar{x}_{A, \Omega_0} + \bar{u}_A(\gamma) \quad (\text{X.24})$$

avec  $\bar{x}_{A, \Omega_0}$  la position du point  $A$  dans la structure non déformée et  $\bar{u}_A(\gamma)$  le déplacement du point  $A$  pour le niveau de charge  $\gamma$ . La figure X.7 (a) illustre le lieu géométrique décrit : le chemin de charge est illustré par la courbe en pointillés noirs, les cercles rouges marquent les positions successives du point  $A$  au fur et à mesure que le niveau de charge  $\gamma$  augmente.

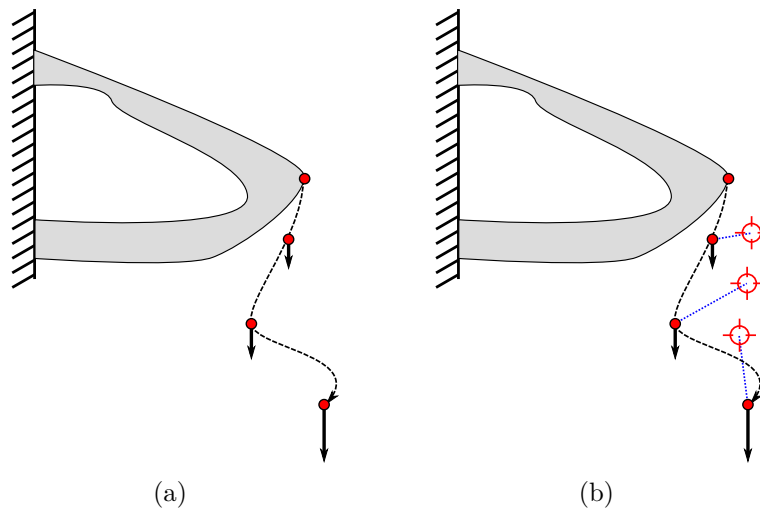


Figure X.7 – (a) Illustration du chemin de charge : les cercles rouges représentent les positions successives du point contrôlé, les flèches noires l'évolution de la charge paramétrée  $\gamma \bar{f}$  et la ligne noire en pointillés la trajectoire du point  $A$ . (b) Une solution possible pour le contrôle de chemin : imposer un certain déplacement pour un niveau de charge donné. Les lignes bleues représentent l'écart au déplacement imposé pour différents niveaux de charge.

Nous allons maintenant voir comment il est possible d'imposer un chemin de charge à une structure à partir d'un critère d'optimisation.

### Discussion autour du critère de déplacement

Une solution possible pour réaliser ce contrôle de chemin est d'utiliser une combinaison de plusieurs critères de déplacement (X.22) comme le propose Pedersen *et al.* (2001). Cette solution est présentée schématiquement sur la figure X.7 (b). Ici nous combinons trois critères de déplacement pour un niveau de force donné, représenté par les cibles rouges. Les lignes en pointillés bleu marque l'écart entre le déplacement obtenu pour un niveau de force donné et la cible correspondante.

Cependant cette solution impose de **définir le niveau de force  $\gamma$  pour lequel chaque point de passage est atteint**. Cela constitue une contrainte forte qui n'est pas nécessaire si l'on souhaite juste imposer que le point de passage soit traversé.

Nous proposons maintenant un autre critère ne nécessitant pas de définir une valeur de niveau de charge  $\gamma$  par point de passage.

## Écriture d'un nouveau critère

Le critère que nous proposons ici a été obtenu par un raisonnement ad hoc, il n'existe pas de démonstration rigoureuse de sa dérivée de forme. Nous le présentons ici à titre d'idée que nous avons jugée plus pertinente pour l'obtention d'un contrôle de chemin.

Le critère s'écrit

$$\mathcal{J}(\Omega) = \min_{\gamma} \left[ \int_{\Omega} \kappa(x) (\bar{u}(\gamma) - \bar{u}_{tar})^2 dx \right] \quad (\text{X.25})$$

Ici on considère non plus la minimisation de l'écart de déplacement entre  $\bar{u}$  et  $\bar{u}_{tar}$  mais la minimisation de ce même déplacement **pour sa valeur la plus faible en fonction du niveau de charge  $\gamma$** .

## Dérivation de forme

La dérivée de forme de ce critère n'a pas été calculée rigoureusement, nous proposons ici une manière ad hoc de calculer **une direction assurant la descente du critère selon certaines conditions**.

Voici l'algorithme proposé :

- Calculer le chemin de charge en faisant varier  $\gamma$  entre 0 et 1
- Trouver pour quelle valeur de  $\gamma$  l'écart de déplacement  $\kappa(x)(\bar{u}(\gamma) - \bar{u}_{tar})^2$  est minimum, ce qui revient à calculer la distance minimum entre un point et une succession de segments.
- Utiliser la valeur de  $\gamma$  précédemment obtenue pour calculer le gradient de forme (X.22) de l'écart de déplacement pour le niveau de charge correspondant
- Utiliser cette dérivée de forme pour extraire la direction de descente.

Cette méthode assure d'obtenir une direction de descente pour le critère (X.25) : si le gradient est bien calculé, il donne la direction de modification permettant de rapprocher le point du chemin le plus prêt de la cible, ce qui réduira forcément le critère (X.25).

## Discussion autour de la validité du critère

Si la dérivée de forme du critère (X.25) est potentiellement difficile à établir il est cependant probable que l'on puisse démontrer qu'elle converge vers celle de l'algorithme proposé juste avant. Nous proposons la justification empirique suivante :

- Même si l'algorithme précédent ne fournit pas une direction de descente équivalente à celle qui serait obtenue par dérivation de forme, elle rapprochera quand même la trajectoire du point de passage, entraînant la diminution du critère. Cela implique que l'algorithme **fournit une direction de descente**.
- Si l'algorithme permet de rapprocher la trajectoire, du point de passage, la valeur de  $\gamma$  se stabilisera autour d'une valeur fixe. Dans ce cas le critère proposé (X.25) devient progressivement équivalent au critère de déplacement cible (X.22).

Nous pouvons aussi envisager ce critère comme l'optimisation successive de  $\gamma$  et de  $\Omega$ , même si aucun résultat de convergence ne découle de cette vision du critère, nous retrouvons ici une stratégie courante d'optimisation.



## Bilan du chapitre X

---

Dans ce chapitre nous avons détaillé les travaux de plusieurs auteurs sur la prise en compte des non-linéarités géométriques et de comportement matériau dans les calculs d'optimisation de domaine. Nous avons présenté l'intérêt notable de cette prise en compte pour le design d'actuateurs subissant de grand déplacement.

Nous avons ensuite défini un cadre théorique pour résoudre les problèmes d'élasticité non linéaire ainsi qu'une méthode numérique itérative permettant la résolution pratique du problème mécanique par la méthode des éléments finis.

Enfin, nous avons présenté une série de critères d'optimisation issus de la littérature ainsi que leur sens physique. Nous avons aussi introduit un nouveau critère permettant le contrôle des chemins de chargement.

Nous allons maintenant présenter quelques résultats numériques obtenus avec le matériel que nous venons de décrire.

# Chapitre XI

## Optimisation de domaine avec prise en compte des non-linéarités

---

1	Optimisation de structures avec prise en compte des non-linéarités . . . . .	250
1.1	Optimisation de structures matériau+vide . . . . .	250
1.2	Optimisation de structures multi-matériaux . . . . .	258
2	Conception d'actuateurs non-linéaires . . . . .	262
2.1	Optimisation de plusieurs déplacements cibles . . . . .	263
2.2	Optimisation d'un chemin de charge . . . . .	267
2.3	Bilan . . . . .	270

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous présentons des résultats d'optimisation de domaine prenant en compte les non-linéarités **géométriques uniquement**. Nous commençons par traiter des cas "références" de la littérature afin de valider notre implémentation. Cette étude sera ensuite complétée par quelques exemples d'optimisation de structures comportant plusieurs matériaux. Nous traiterons enfin de l'optimisation de domaine pour le design d'actuateurs non-linéaires. Nous fournirons en particulier une application de critère ad hoc d'optimisation de contrôle de trajectoire, décrit dans le paragraphe 3 du chapitre X.

# 1 Optimisation de structures avec prise en compte des non-linéarités

Nous avons présenté dans le chapitre X comment prendre en compte les non-linéarités géométriques pour un calcul d'optimisation de forme. Nous allons utiliser les critères ainsi établis et éprouver notre formulation vis-à-vis de résultats disponibles dans la littérature. Dans un premier temps nous traitons le cas référence d'optimisation d'une structure constituée d'un matériau et vide. Nous nous intéresserons en particulier à l'effet du niveau de charge ainsi qu'aux courbes force-déplacement des différentes structures obtenues. Ensuite nous appliquerons le processus d'optimisation à des structures comportant plusieurs matériaux, une étude analogue sera alors menée.

## 1.1 Optimisation de structures matériau+vide

### Définition du problème

L'optimisation de la rigidité d'un cantilever est traitée dans un premier temps. Bruns et Tortorelli (2001), Buhl *et al.* (2000) ont déjà traité des problèmes approchant. Nous cherchons ici à reproduire leurs résultats ainsi qu'à fournir un complément d'analyse sur les structures obtenues.

La figure XI.1 présente les conditions aux limites et le domaine optimisable employé pour le cas test du cantilever. L'objectif est de maximiser la rigidité de la structure sous une contrainte de volume, ce qui s'écrit

$$\min_{\Omega} C_{final}(\Omega) \quad (XI.1)$$

$$V(\Omega) < V_{max},$$

avec  $C_{final}(\Omega)$  la compliance finale de la structure (définie par l'équation X.15). Pour rappel, cette quantité représente le travail des forces extérieure lorsque l'intégralité du chargement est appliqué.

Les propriétés mécaniques du matériau solide et de l'erzatz utilisées pour la suite des exemples sont reportées dans le tableau XI.1, elles ont été choisies arbitrairement. Nous fixons de plus la fraction volumique de matière à 40%, ce qui correspond à  $V_{max} = 1.2$ .

Comme nous souhaitons optimiser nos structures en prenant en compte les non-linéarités géométriques le niveau de charge appliquée  $F$  conditionne le design final. **Nous fixons ce niveau de charge à  $F=3.0$ .** Nous qualifions ce niveau de charge de **nominal**, et le noterons  $F_N$ .

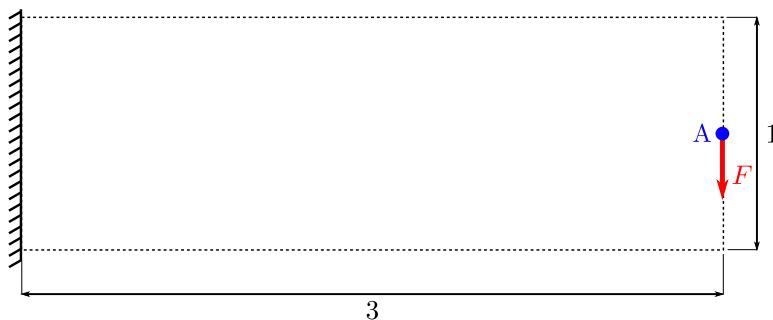


Figure XI.1 – Conditions aux limites et domaine optimisable.

propriété	phase solide	ersatz
$E$	1000	1.0
$\nu$	0.33	0.33

Table XI.1 – Propriétés mécaniques de la phase solide et de l'ersatz de vide.

### Calcul préliminaire avec l'hypothèse des petites déformations.

Afin de comparer les formes optimales et les performances des différentes structures nous nous dotons d'une solution de référence obtenue dans l'hypothèse des petites perturbation (HPP). La figure XI.2 présente la forme optimisée correspondante. Nous ferons référence à ce résultat comme étant la **solution HPP**.

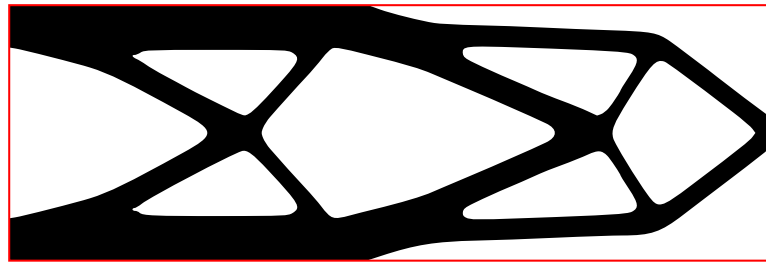


Figure XI.2 – Solution du problème d'optimisation (XI.1) sans prise en compte des non-linéarités géométriques.

Nous avons ensuite extrait d'une série de simulations la courbe force déplacement de cette structure **en prenant en compte les non-linéarités géométriques**, cette courbe est présentée en trait noir plein sur la figure XI.3. Cette figure présente aussi la courbe force déplacement calculée dans l'hypothèse des petites déformation (pointillés noirs). Nous constatons ici que pour un niveau de charge  $F < 2.0$  notre structure à un comportement général qui semble linéaire (les courbes HPP et non-linéaires sont presque confondues). Cependant la structure flambe au-delà de  $F = 2.2$ .

La solution proposée a été obtenue sans prendre en compte les non-linéarités géométriques dans le processus d'optimisation, or nous constatons que dans ce cas cela produit une solution qui n'est absolument pas adaptée au problème réel puisque la ruine de la structure par flambage intervient avant que la charge nominale ne soit atteinte.

Comme l'expliquent [Buhl et al. \(2000\)](#) la prise en compte des non-linéarités géométriques est nécessaire lorsque des instabilités apparaissent dans les solutions issues de processus d'optimisation utilisant des modèles HPP. Nous sommes ici précisément dans ce cas, nous allons donc traiter le même problème d'optimisation en prenant en compte cette fois les non-linéarités géométriques au cours du processus d'optimisation.

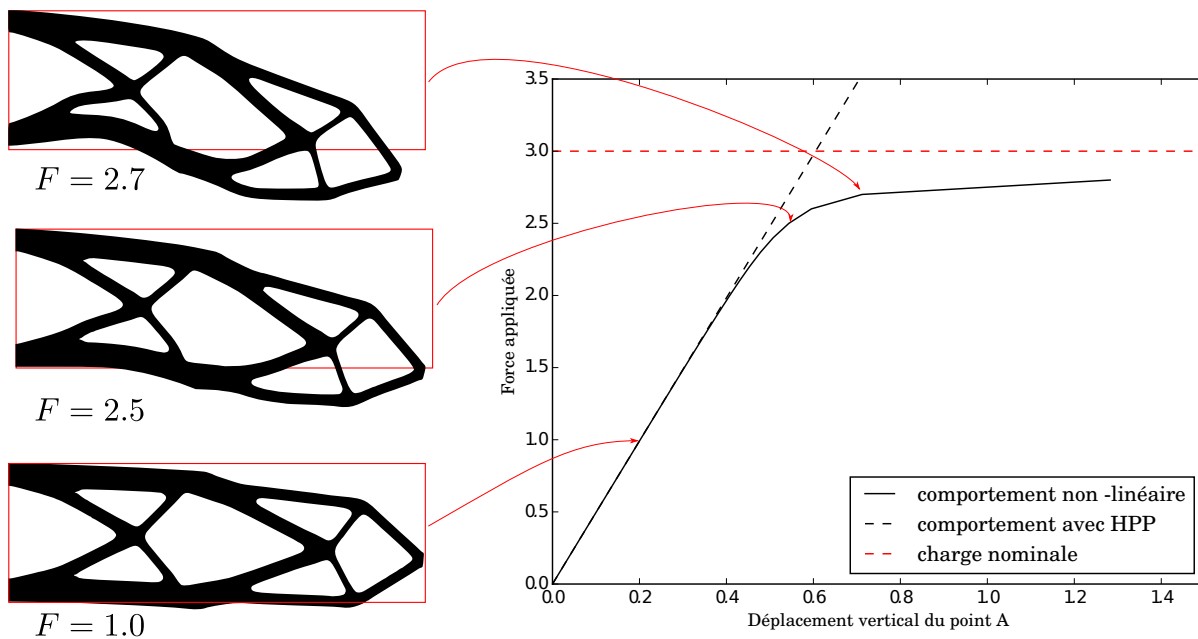


Figure XI.3 – Courbes forces - déplacement pour la solution HPP présentée sur la figure XI.2 (trait noir plein) et déformées de la structure pour différents niveaux de charge.

### Optimisation avec prise en compte des non-linéarités géométriques

La figure XI.5 présente les formes obtenues en tenant compte des non-linéarités géométriques pour différentes valeurs de la charge appliquée  $F$ . Une fois ces solutions obtenues, nous réalisons un chargement jusqu'à atteindre la charge critique de flambage  $F_{crit}$ . Les courbes force-déplacement correspondantes sont présentées sur la figure XI.4.

Le tableau XI.2 présente les compliances de ces différentes structures pour la force appliquée au cours de l'optimisation ainsi que la valeur de compliance atteinte pour  $F = 3.0$ . Nous constatons d'abord que toutes les structures proposées respectent la contrainte de volume  $V_{max} < 1.2$ . Dans ce même tableau nous avons indiqué la charge critique  $F_{crit}$  au-delà de laquelle la structure flambe.

Cas test	Force	$C_{final}(\Omega)$	$C_{F=3.0}$	$F_{crit}$	$V(\Omega)$	itérations
Figure XI.2	HPP	$(1.617)_{HPP}$	4.506	2.7	1.19	43
Figure XI.5 (a)	1.0	0.208	diverge	2.1	1.19	45
Figure XI.5 (b)	2.0	0.824	5.261	2.5	1.19	32
Figure XI.5 (c)	2.5	1.334	1.881	3.3	1.19	123
Figure XI.5 (d)	3.0	1.891	1.891	3.7	1.19	73

Table XI.2 – Valeurs des critères et nombre d'itérations pour les solutions optimisées de la figure XI.5.

Le tableau XI.2 permet de comparer la charge critique  $F_{crit}$  à la charge nominale  $F_N = 3.0$ . Nous constatons que pour la solution HPP ainsi que les solution non-linéaires (a) et (b) la charge critique est inférieure à la charge nominale. Nous notons même que la charge critique de la solution (b), pourtant optimisée avec prise en compte des non-linéarités géométriques, est plus faible que la charge critique pour la solution HPP.

Pour les formes (c) et (d) nous observons que les charges critiques sont supérieures à la charge nominale : ces deux structures peuvent supporter la charge nominale sans flamber et constituent donc deux solutions acceptables pour le problème (XI.1). Nous notons aussi que la compliance

$C_{F=3.0}$  des structures (c) et (d) est plus faible que celles des cas HPP, (a) et (b) : ces structures sont donc plus performantes pour la charge nominale  $F_N$ .

La figure XI.4 présente les courbes force - déplacement pour les solutions de la figure XI.5. Nous retrouvons ici la tendance évoquée durant le chapitre X (cf. figure X.6) : avec la prise en compte des non-linéarités géométrique l'algorithme d'optimisation génère des solutions ayant une rigidité initiale faible vis-à-vis de la solution HPP. Nous constatons de plus que contrairement à la solution HPP qui a un comportement linéaire pour une force comprise entre  $F = 0.0$  et  $F = 2.0$ , les structures (b), (c) et (d) ont un comportement non-linéaire dès les premiers stades de l'application du chargement.

Nous remarquons cependant que la solution (a) a un comportement quasiment linéaire, c'est aussi la seule solution qui est moins performante que la solution HPP **quelle que soit la valeur de force appliquée**. Cela se remarque par le fait que la courbe bleue de la figure XI.4 est systématiquement en dessous de la courbe rouge. Nous tenterons d'expliquer l'origine de cette solution de faible performance par la suite.

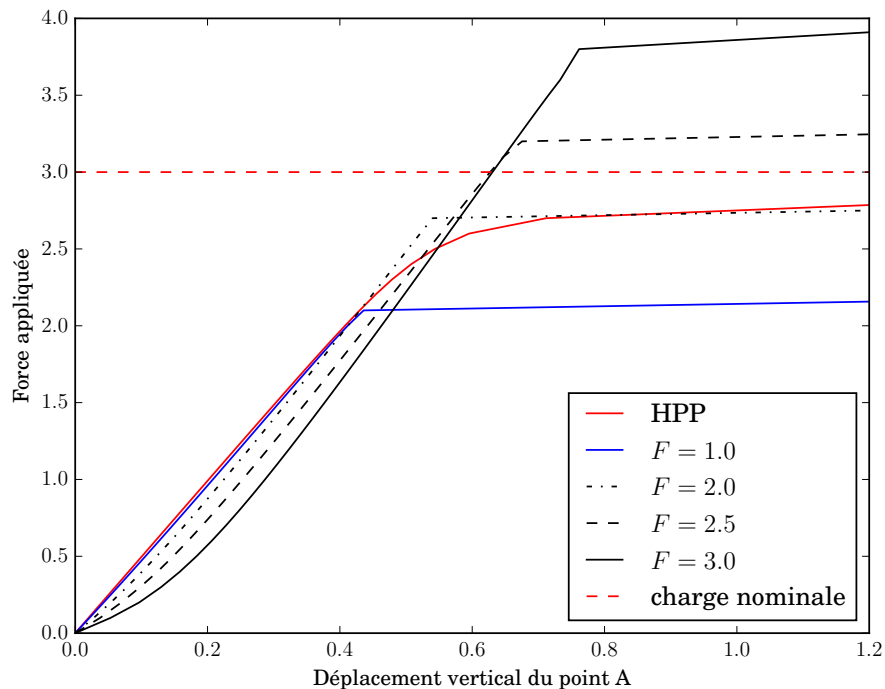


Figure XI.4 – Courbes force - déplacement pour les solutions des figures XI.2 et XI.5.

Nous allons maintenant étudier la topologie particulière des solutions de la figure XI.5 et tenter d'en fournir une interprétation mécanique.

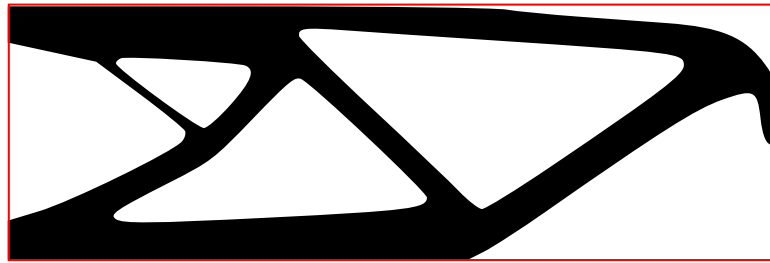
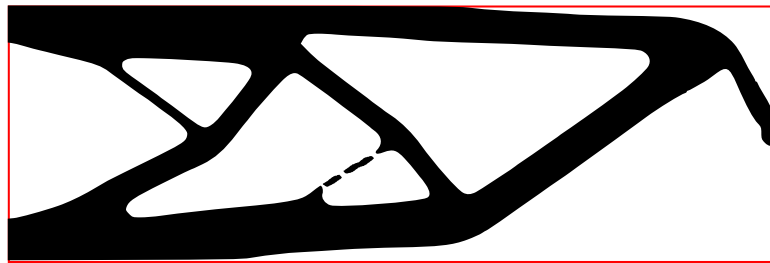
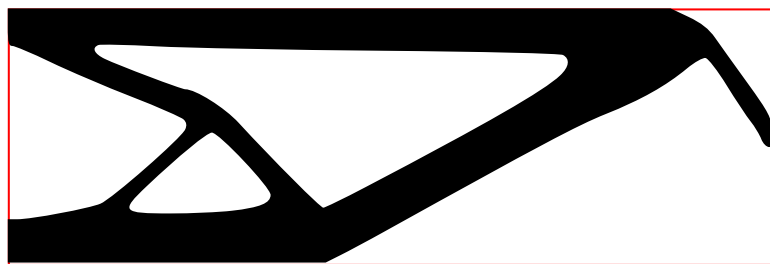
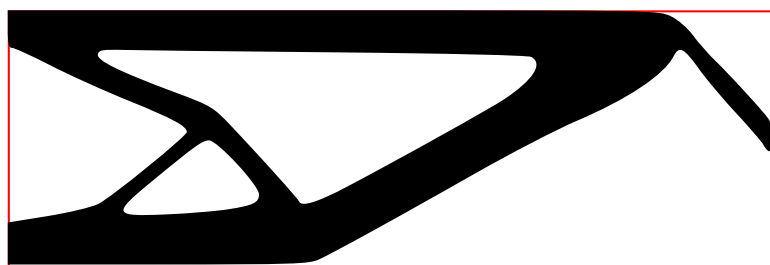
(a)  $F=1.0$ (b)  $F=2.0$ (c)  $F=2.5$ (d)  $F=3.0$ 

Figure XI.5 – Illustration de l'effet du niveau de charge sur la forme optimisée d'un cantilever.

## Interprétation mécanique des formes obtenues

Les solutions de la figure XI.5 comportent des "bras de flexion" (cf. figure XI.6), or cet élément semble réduire considérablement la rigidité de la structure, qui est pourtant la quantité que nous souhaitons maximiser (cf. XI.1). Nous allons tenter d'expliquer la présence d'un tel détail, pour cela nous étudions la mise en charge progressive de la solution présentée sur la figure XI.5 (d), cette solution présentant le bras de flexion le plus long.

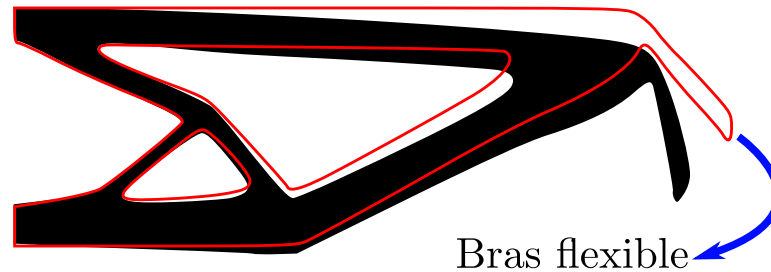


Figure XI.6 – Déformation de la structure optimisée présentée sur la figure XI.5 (f) pour différents taux de la charge totale appliquée. Le contour en pointillés rouges indique la forme initiale.

La figure XI.6 présente la structure (d) ainsi que sa déformée pour  $F=1.0$ , nous observons que le bras flexible fléchit, pour finalement s'aligner sur la direction de sollicitation. Cela induit un grand déplacement et donc une faible rigidité durant les premières étapes d'application de la charge. Une fois l'alignement effectué, la structure devient plus rigide. Nous constatons cela sur la figure XI.4 : pour un niveau de force faible la structure est peu rigide (pente de la courbe faible), puis nous observons ensuite un gain de rigidité au-delà de  $F = 1.0$ , cela correspond bien et bien au niveau de force à partir duquel le bras flexible est aligné sur le chargement.

Nous pouvons expliquer l'intérêt de ce bras flexible par le fait qu'il permet réduire le bras de levier entre la force appliquée et la surface encastrée, comme en atteste la figure XI.7, la force appliquée est ainsi transmise à l'encastrement avec un moment plus faible.

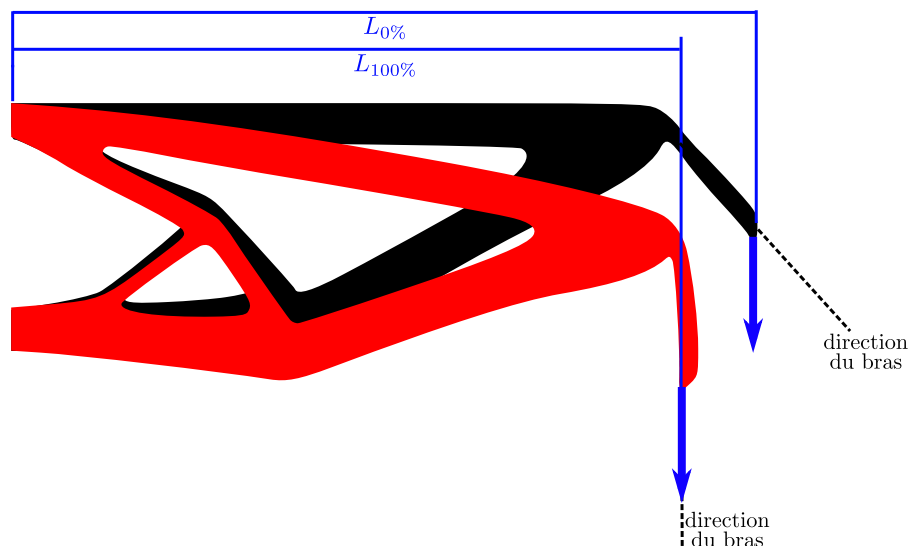


Figure XI.7 – Solution (d) (en noir) et sa déformée pour  $F = 3.0$  (en rouge), le bras de levier entre la force et l'encastrement est indiqué pour les deux configurations.

Ce résultat traduit bien le fait que le critère utilisé ici optimise la **compliance finale**, sans tenir compte des pertes de performance éventuelles au cours du chargement. Considérant ce fait, les formes obtenues pour de grandes intensités de chargement sont cohérentes : elles exploitent le comportement non-linéaire pour diminuer la sévérité du chargement final appliqué.



Nous allons maintenant discuter de l'intérêt de la prise en compte des non-linéarités géométriques dans le processus d'optimisation.

### Intérêt de la prise en compte des non-linéarités géométriques

Prendre en compte les non-linéarités géométriques durant un processus d'optimisation est coûteux, principalement dans la mesure où il est alors nécessaire de résoudre un problème non-linéaire, à chaque pas d'optimisation. Nous ajoutons de plus que, comme cela est souvent le cas durant un processus d'optimisation, certaines formes intermédiaires obtenues durant le processus d'optimisation peuvent s'avérer mécaniquement aberrantes. Cela n'est habituellement pas un problème pour un modèle linéaire, dans le cas d'un modèle non-linéaire le solveur **risque de diverger** et de fournir une évaluation du critère et de son gradient de très mauvaise qualité.

Il faut donc bien considérer la nécessité de prendre en compte les non-linéarités. Dans les cas de figure similaire à celui présenté ici cette prise en compte est tout à fait justifiable. La solution HPP présente une instabilité non prise en compte durant l'optimisation qui entraîne la ruine de la structure. Il est alors naturel de considérer les non-linéarités et cela améliore considérablement les performances de la solution comme en atteste le tableau XI.2.

La réciproque de cette conclusion n'est pas vraie : rien n'indique qu'une solution HPP ne présentant pas d'instabilité ne puisse être améliorée en prenant en compte les non-linéarités, [Buhl et al. \(2000\)](#) présentent d'ailleurs ce cas de figure.

### Influence sur la topologie et sur le processus d'optimisation

Les solutions (b), (c) et (d) présentées sur la figure XI.5 exploitent toutes les non-linéarités géométrique en utilisant le principe du bras flexible. Le changement important de topologie observé est clairement le fruit de la prise en compte des non-linéarités. Il semble cependant que la solution (a) est elle aussi subie un changement topologique notable, elle a cependant une très faible performance. Pourtant optimisée avec une force appliquée  $F = 1.0$  pour laquelle la solution HPP est linéaire, il apparaît étrange que cette solution présente une topologie si différente de la solution HPP. Nous allons tenter d'expliquer l'origine de cette solution en nous aidant d'un indicateur permettant de juger de la pertinence d'un changement topologique.

Soit le gradient de forme de la compliance calculé avec prise en compte des non-linéarités  $C'(\theta)_{NL}$  et le gradient de forme de la compliance calculé avec les HPP  $C'(\theta)$ , nous définissons l'indicateur de colinéarité  $\gamma$  de ces deux gradients selon

$$\gamma = \frac{C'(\theta)_{NL} \cdot C'(\theta)}{\|C'(\theta)_{NL}\| \times \|C'(\theta)\|}. \quad (\text{XI.2})$$

Ce facteur est compris entre  $-1$  et  $1$ , il vaut  $1$  quand les deux gradients fournissent la même direction de descente (et donc la même information à l'optimiseur) et à l'extrême  $-1$  quand ils indiquent des directions opposées.

Cet indicateur permet de juger de l'influence de la prise en compte des non-linéarités sur l'évolution de la forme : une valeur notablement différente de  $1$  indiquant que la forme va évoluer de manière distincte entre les cas HPP et non-linéaires. De plus et parce que le calcul du gradient se base sur l'analyse mécanique, une valeur écartée de  $1$  pour notre indicateur souligne aussi que la prise en compte des non-linéarités a une influence non négligeable sur le comportement mécanique.

La figure XI.8 présente l'évolution du facteur de colinéarité pour les étapes du processus d'optimisation ayant abouti aux solutions de la figure XI.5. Nous observons comment évolue le facteur de colinéarité  $\gamma$  durant le processus d'optimisation, l'abscisse correspond à l'avancement, c'est-à-dire le numéro de l'itération divisé par le numéro de la dernière itération du processus d'optimisation.

Nous constatons sur cette figure que pour tous les processus la forme initiale comporte un facteur de colinéarité proche de 1.0 : à l'initialisation les non-linéarités ont une influence négligeable sur l'évolution de la forme. Très rapidement la valeur de  $\gamma$  **chute pour les quatre processus**. Pour les solutions (b) à (d) ( $F=2.0$ ,  $F=2.5$ ,  $F=3.0$ ) nous constatons que le facteur de colinéarité reste faible (entre 0.15 et 0.5). Cela indique que pour ces trois processus la topologie courante a un comportement non-linéaire : l'algorithme d'optimisation a basculé vers des solutions exploitant les non-linéarités.

À l'inverse le facteur de colinéarité pour le processus (a) ( $F=1.0$ ), en bleu sur la figure, augmente de nouveau puis se stabilise autour de 0.94. Cela indique que la topologie ne tire pas partie des non-linéarités : nous pourrions presque remplacer  $C'(\theta)_{NL}$  par  $C'(\theta)$  dans le processus d'optimisation sans que cela ne nous conduise à une solution différente ! Une des formes intermédiaires a vraisemblablement eu un comportement fortement non-linéaire comme en atteste la chute de  $\gamma$  en dessous de 0.5 pour un avancement d'environ 0.13. Nous supposons que la sensibilité importante du gradient à ce moment particulier de l'optimisation a décalé la forme vers une topologie moins optimale. L'algorithme a évolué vers une topologie ne lui permettant pas d'exploiter les non-linéarités, et converge vers un minimum local de faible performance.

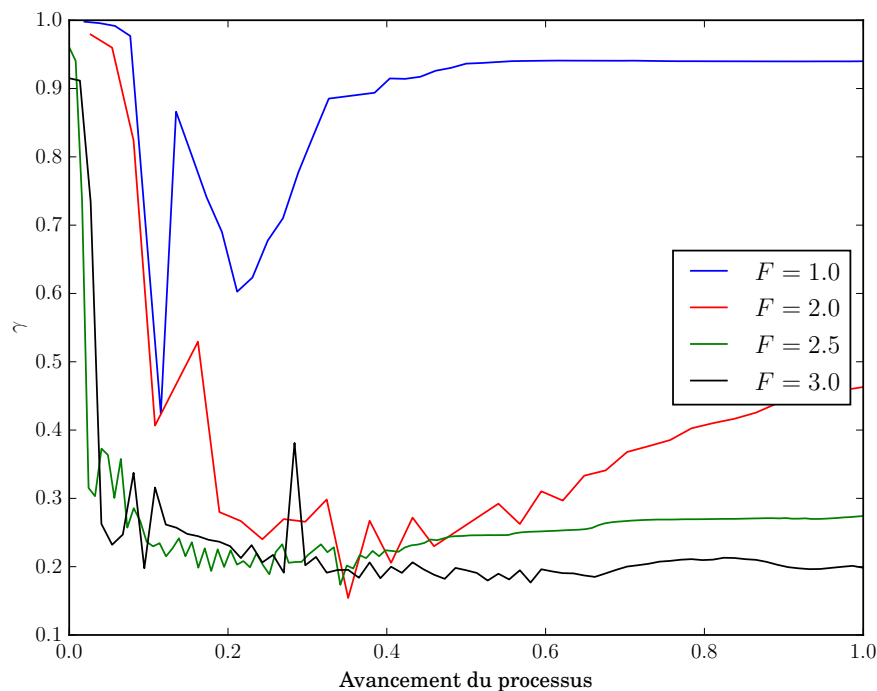


Figure XI.8 – Évolution du facteur de colinéarité (XI.2) durant l'optimisation des différentes solutions de la figure XI.5.

Cette étape révèle un fait qu'il est nécessaire de considérer : que les solutions proposées par l'algorithme d'optimisation aient ou non un comportement final "linéaire", il est tout à fait possible que les formes intermédiaires obtenues durant le processus d'optimisation développent des comportements fortement non-linéaires. Les gradients évalués sur ces formes intermédiaires peuvent induire des changements forts de topologie. Cependant les changements topologiques provoqués par ces formes intermédiaires peuvent, ou pas, être pertinents !

## Bilan

L'étude du cas test "cantilever" a permis de mettre en évidence les limites d'une optimisation HPP dès lors que le niveau de chargement est considéré, à fortiori quand ce dernier est suffisamment important pour causer des instabilités.

Nous avons d'abord montré que les calculs non-linéaires peuvent s'avérer bénéfiques pour (i) minimiser effectivement la compliance finale (ii) modifier le niveau de chargement critique.

Prendre en compte les effets non-linéaires peut aboutir à des formes notablement différentes de celles obtenues sous les hypothèses HPP. Ceci a pour origine une variation de forme distincte **dès les premières itérations**. Cela ne semble cependant pas lié directement au niveau de charge extérieur, une forme intermédiaire de faible qualité pouvant en être à l'origine.

Nous avons tenté de comprendre le fonctionnement des solutions comportant un bras de flexion proposées par l'optimiseur, il a été fait état de l'utilisation que l'algorithme fait des non-linéarités pour améliorer la rigidité des solutions : les structures proposées ont une rigidité faible à bas niveau de force, ce qui leur permet de se déformer significativement pour accommoder le chargement, dans notre cas en réduisant le bras de levier.

Nous avons enfin étudié plus finement l'influence de la prise en compte des non-linéarités durant le processus d'optimisation. En particulier nous avons défini un indicateur permettant de juger de la pertinence de l'évolution d'une forme.

Nous allons maintenant appliquer notre méthode d'optimisation à un problème comportant plusieurs matériaux.

## 1.2 Optimisation de structures multi-matériaux

Nous prolongeons ici le travail effectué par [Bruns et Tortorelli \(2001\)](#) en étudiant maintenant des structures comportant plusieurs matériaux. Nous souhaitons ici observer comment l'algorithme distribue plusieurs phases de rigidité variable dans l'espace afin de maximiser la rigidité d'une structure.

### Définition du problème

Nous reprenons les mêmes conditions aux limites ainsi que le même domaine optimisable que pour le paragraphe précédent, la figure XI.1 présente les conditions aux limites et le domaine optimisable, nous cherchons à maximiser la rigidité de la structure sous une contrainte de volume, ce qui donne

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_1, \Omega_2} \quad & C_{final}(\Omega) \\ & V_1(\Omega) < V_{1,max} \\ & V_2(\Omega) < V_{2,max}. \end{aligned} \tag{XI.3}$$

Le tableau 1.2 rassemble les propriétés mécaniques des différentes phases.

Propriété	phase 1	phase 2	ersatz
$E$	2000	1000	1.0
$\nu$	0.33	0.33	0.33
couleur	noire	grise	blanche
$V_{i,max}$	20%	20%	60%

Table XI.3 – Propriétés mécaniques des phases constituant la structure.

Nous allons maintenant présenter les résultats de simulations obtenus en résolvant le problème d'optimisation (XI.3).

### Influence du niveau de charge

La figure XI.9 présente les formes optimisées obtenues avec HPP ainsi que pour différents niveaux de charges,  $F = 3.0$ ,  $F = 5.0$  et  $F = 7.0$ , pour les sous figure (a), (b), (c) et (d) respectivement. Le tableau XI.4 rassemble les valeurs finales des propriétés des différentes solutions, nous notons que toutes respectent les deux contraintes de volume définies dans le problème d'optimisation (XI.3).

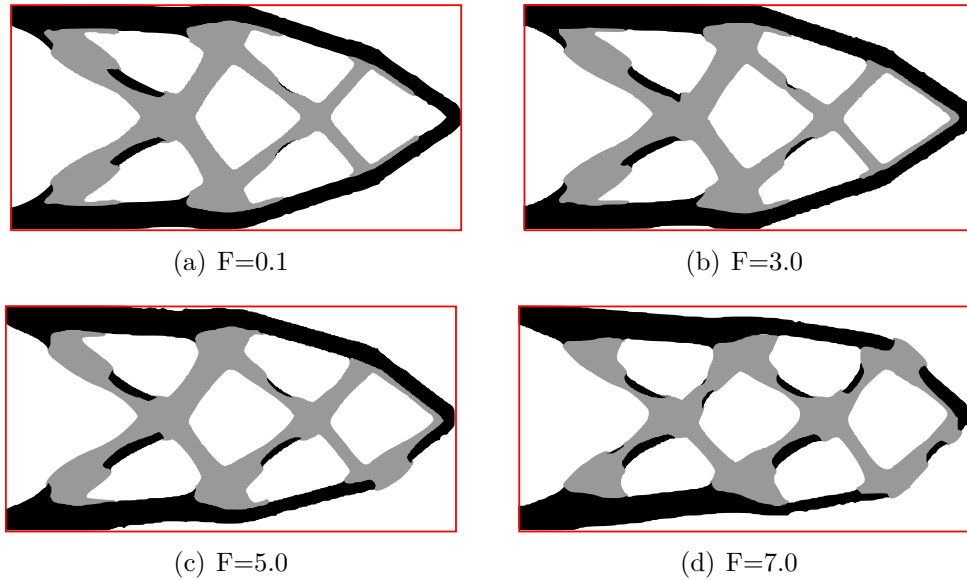


Figure XI.9 – Illustration de l'effet du niveau de charge sur la forme optimisée d'un cantilever composé de deux matériaux.

Cas test	Force	$C_{final}(\Omega)$	$V_1(\Omega)$	$V_2(\Omega)$	itérations
Figure XI.9 (a)	0.1	$4.53 \times 10^{-4}$	20%	20%	118
Figure XI.9 (b)	2.0	$4.06 \times 10^{-1}$	20%	20%	118
Figure XI.9 (c)	5.0	1.14	20%	20%	118
Figure XI.9 (d)	7.0	2.33	20%	20%	35

Table XI.4 – Valeurs des critères et nombre d'itérations pour les solutions optimisées de la figure XI.9.

En observant la figure XI.9 nous constatons d'abord qu'à faible niveau de charge (i.e.  $F = 0.1$ ), nous retrouvons une forme typique de l'optimisation de structure HPP : le matériau le plus rigide est distribué sur les zones les plus sollicitées alors que le matériau moins rigide est réparti au centre de la pièce, comme le serait une mousse dans un panneau sandwich.

À mesure que la force augmente nous voyons apparaître une dissymétrie des solutions vis-à-vis du plan horizontal : les zones en compression s'élargissent alors que les zones en traction s'affinent. À partir de  $F = 5.0$  (sous figure (c)) nous voyons que la partie inférieure du cantilever n'est plus connectée par la phase noire, un élément de phase grise apparaît, cela afin de laisser plus de matière noire disponible pour rigidifier la partie supérieure de la structure ainsi que les barres centrales. Nous notons aussi les changements important de section lorsqu'une transition phase noire - phase gris a lieu, la figure XI.10 présente un détail de cette transformation. Il semble que cet "empatement" de la phase grise ait pour rôle d'assurer un moment d'inertie à la barre le plus grand possible.

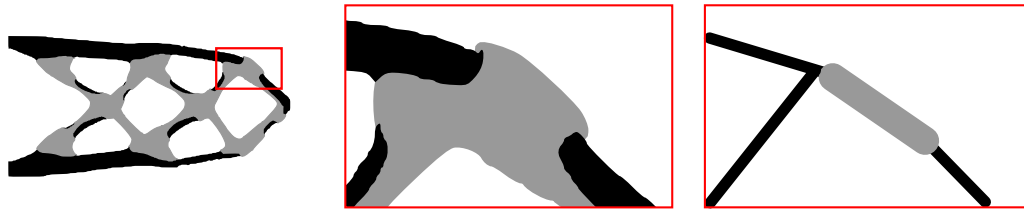


Figure XI.10 – Détail de la figure XI.9 (d) montrant l'empâtement de la phase grise lors d'une transition phase noire - phase grise.

Les observations sont essentiellement les mêmes que pour le cas mono matériau présenté précédemment : l'optimisation aux fortes charges génère des structures à la rigidité initiale faible, cela afin d'accommoder le chargement en réduisant le bras de levier. La figure XI.11 présente les courbes force - déplacement selon  $y$  pour les quatre solutions proposées. Nous observons là encore que la charge critique de la solution (d) est plus importante que pour la solution HPP.

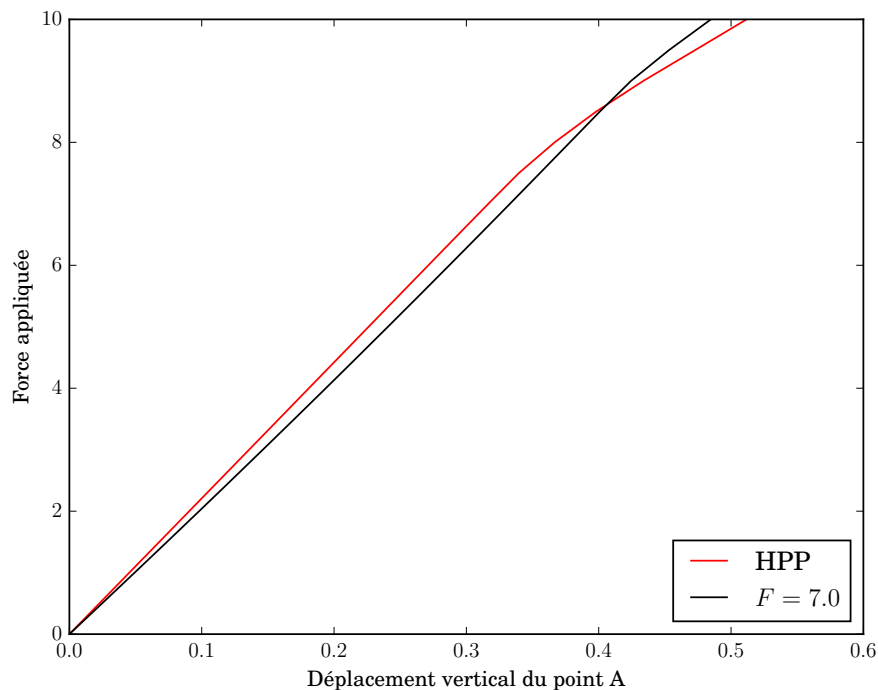


Figure XI.11 – Courbes force (déplacement selon  $y$  pour les solutions de la figure XI.9.

La figure XI.12 présente les déformées des solutions (a) et (d) de la figure XI.9, nous constatons que la solution (a), optimisée pour un chargement  $F = 0.1$  subit un flambement localisé quand une charge de  $F = 7.0$  est appliquée. À l'inverse la solution (d), optimisée pour  $F = 7.0$ , reste "stable", sans flamber.

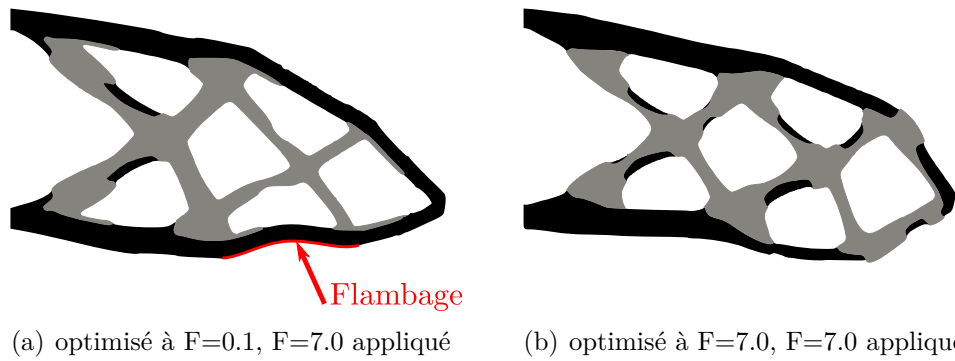


Figure XI.12 – Déformées des solutions (a) et (d) de la figure XI.9 pour un chargement  $F = 7.0$ .

### Conclusion

Cette série de simulations permet de dégager plusieurs tendances supplémentaires par rapport au cas mono matériau. Nous avons notamment remarqué que lors d'une transition entre une phase rigide et une phase moins rigide l'optimisation tend à élargir la phase la moins rigide, vraisemblablement pour maximiser le moment d'inertie (cf. figure XI.10 ). Comme pour le cas mono matériau l'apparition d'un flambage localisé dans la structure a considérablement dégradé la performance de la solution optimisée HPP, la prise en compte des non-linéarités durant l'optimisation a permis d'aboutir à une solution plus robuste ne subissant pas ce type d'instabilité.

Nous allons maintenant présenter des résultats d'optimisation d'actuateurs non-linéaires.

## 2 Conception d'actuateurs non-linéaires

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à la conception d'actuateurs par optimisation de domaine. La prise en compte des non-linéarités géométriques a ici un grand intérêt comme l'expliquent Pedersen *et al.* (2001). Ici nous abordons le problème de la conception de structures ayant un chemin de chargement cible, la figure XI.13 illustre cette problématique : il s'agit ici de faire évoluer la forme noire de façon à ce que la trajectoire du point  $A$  (à droite) passe par les points cibles (disques noirs). La propriété que nous définissons ici est cependant **qualitative**, il est nécessaire de la traduire en un critère optimisable.

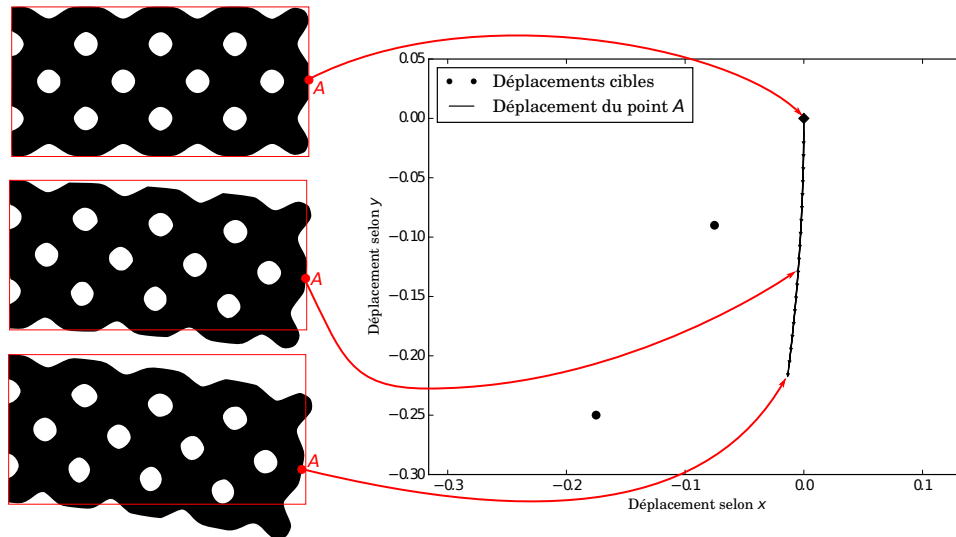


Figure XI.13 – Exemple de problème de contrôle de chemin pour un actuateur : À gauche une forme initiale subissant différents niveaux de chargement. À droite le déplacement du point  $A$  au cours du chargement ainsi que les points cibles (disques noirs).

Dans ce paragraphe nous allons présenter deux critères quantifiant différemment l'écart à la trajectoire cible. Nous présentons d'abord quelques résultats d'optimisation utilisant une série de déplacements imposés à l'aide du critère (X.21) . Nous proposons ensuite d'autres résultats utilisant le critère (X.25), a priori plus adapté pour imposer des trajectoires.

## 2.1 Optimisation de plusieurs déplacements cibles

Nous avons défini dans le paragraphe 3 du chapitre X le critère (X.21) permettant de contrôler le déplacement d'un point pour une charge appliquée  $\bar{F}$  donnée. Afin d'optimiser le chemin d'un actuateur, nous proposons de sommer plusieurs critères de déplacement imposés, obtenu pour différents niveaux de charge  $\gamma$ . Cette approche est pragmatique, elle nécessite juste d'utiliser le critère de déplacement imposé (X.21).

### Définition du problème d'optimisation

Nous souhaitons ici optimiser le chemin de charge du point  $A$  d'une structure de type cantilever dont les conditions aux limites sont présentées sur la figure XI.14, les propriétés matériaux sont indiquées dans le tableau XI.5. Nous fixons arbitrairement trois points cibles, respectivement atteint pour trois niveaux de charge, ils sont présentés dans le tableau XI.6.



propriété	phase solide	ersatz
$E$	1000	1.0
$\nu$	0.33	0.33

Figure XI.14 – conditions aux limites et domaine optimisable.

Table XI.5 – Propriétés mécaniques de la phase solide.

points	niveau de charge	position
$p_1$	$f = 0.7$ , $\gamma = 20\%$	$(-0.075; -0.09)$
$p_2$	$f = 3.5$ , $\gamma = 77\%$	$(-0.175; -0.25)$
$p_3$	$f = 4.5$ , $\gamma = 100\%$	$(-0.175; -0.4)$

Table XI.6 – propriétés mécaniques des phases constituant la structure.

Nous définissons d'abord un critère représentant la somme des carrés des écarts entre le déplacement réel et les déplacements prescrits représentés par les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , à savoir

$$\mathcal{J}(\Omega) = \sum_i^N \alpha_i (U_i - U_{i,tar})^2, \tag{XI.4}$$

avec  $\alpha_i$  des coefficients de pondération.

Nous définissons maintenant le problème d'optimisation tel que

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & \mathcal{J}(\Omega) \\ & V(\Omega) \leq V_{max}, \end{aligned} \tag{XI.5}$$

avec  $V_{max}$  le volume maximum de matière, fixé arbitrairement à 1.2.

### Exemple de structure obtenue

Nous présentons maintenant un exemple de structure obtenu en résolvant le problème d'optimisation (XI.5), la figure XI.15 (a) présente la forme initiale et (b) la forme finale obtenue. Les valeurs initiales et finales des différents critères du problème d'optimisation sont présentées dans le tableau 2.1.



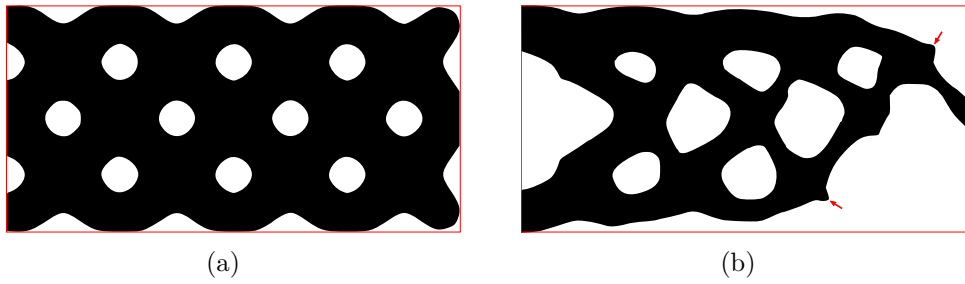
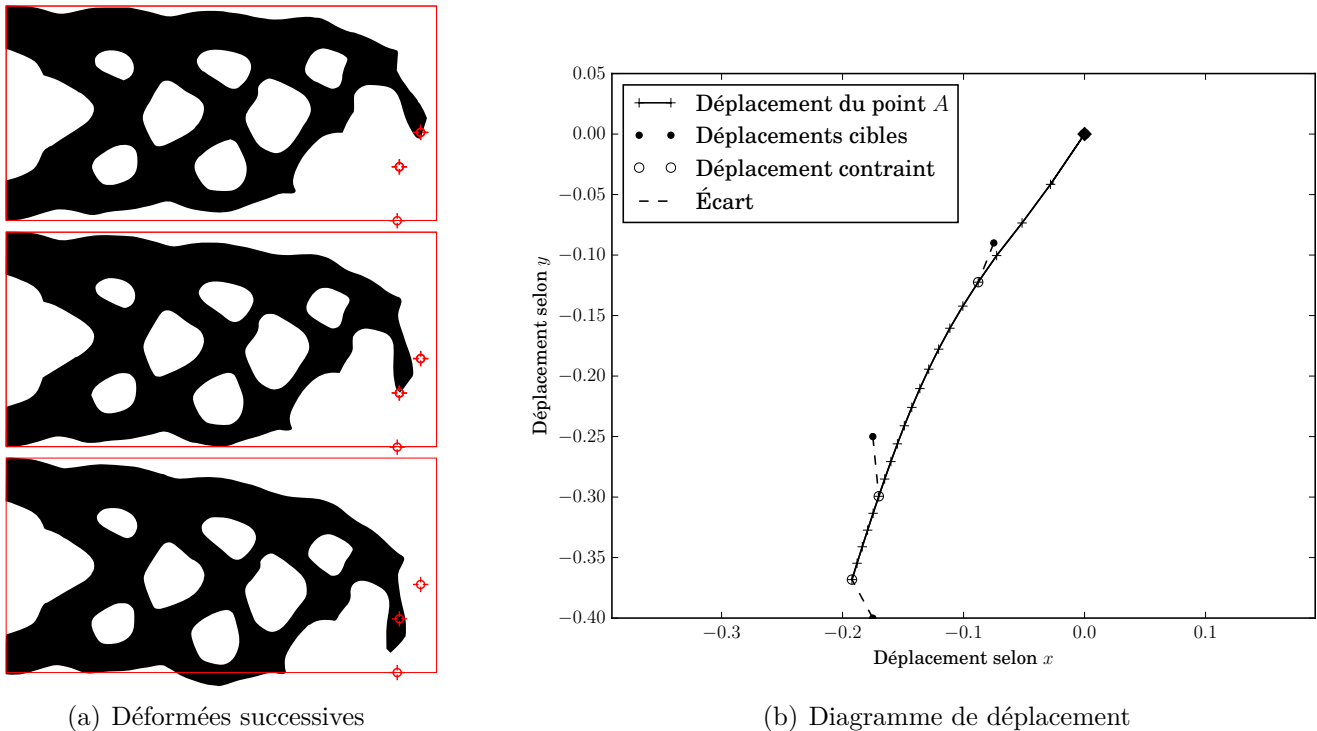


Figure XI.15 – (a) Forme initiale utilisée pour démarrer l’optimisation, (b) forme finale obtenue à la fin du processus.

Étape	$\mathcal{J}(\Omega)$	$(U_1 - U_{1,tar})^2$	$(U_2 - U_{2,tar})^2$	$(U_3 - U_{3,tar})^2$	$V(\Omega)$	Itération
Initial	7.519	0.7786	2.760	3.980	83%	0
Final	0.4638	$1.060 \cdot 10^{-2}$	0.2445	0.2091	53%	10

Table XI.7 – Valeurs des différents critères au début et à la fin de l’optimisation.

Nous observons sur le tableau 2.1 que la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  a été réduite d’un ordre de grandeurs durant les 10 itérations du processus d’optimisation. La contrainte de volume ( $V \leq 60\%$ ) est respectée. La figure XI.16 (a) présente la déformée de la structure à plusieurs étapes du chargement, alors que (b) présente le déplacement de la structure finale. Nous observons que le chemin de charge parvient à s’approcher des points définis dans le tableau XI.6, symbolisés par des disques noirs sur la figure.



(a) Déformées successives

(b) Diagramme de déplacement

Figure XI.16 – (a) Déformée de la structure à différents niveaux de charges (b) Suivi du déplacement du point  $A$  durant la charge progressive de la structure.

### Remarque sur l'allure de la forme optimale

Nous notons en observant la forme finale présentée sur la figure XI.15 b) que cette dernière comporte des zones sans rôle mécanique, notamment les petites pointes présentées par les flèches rouges. Ces "résidus" laissent penser que l'optimisation s'est arrêtée prématurément, cependant il n'en est rien. La figure XI.17 atteste de la convergence du problème, nous pouvons y voir l'objectif décroître et se stabiliser ainsi que la contrainte de volume respectée de plus de 10%. Ce diagramme fournit une réponse : la contrainte de volume n'est pas active, l'algorithme d'optimisation n'a donc aucune raison de retirer le volume inutile.

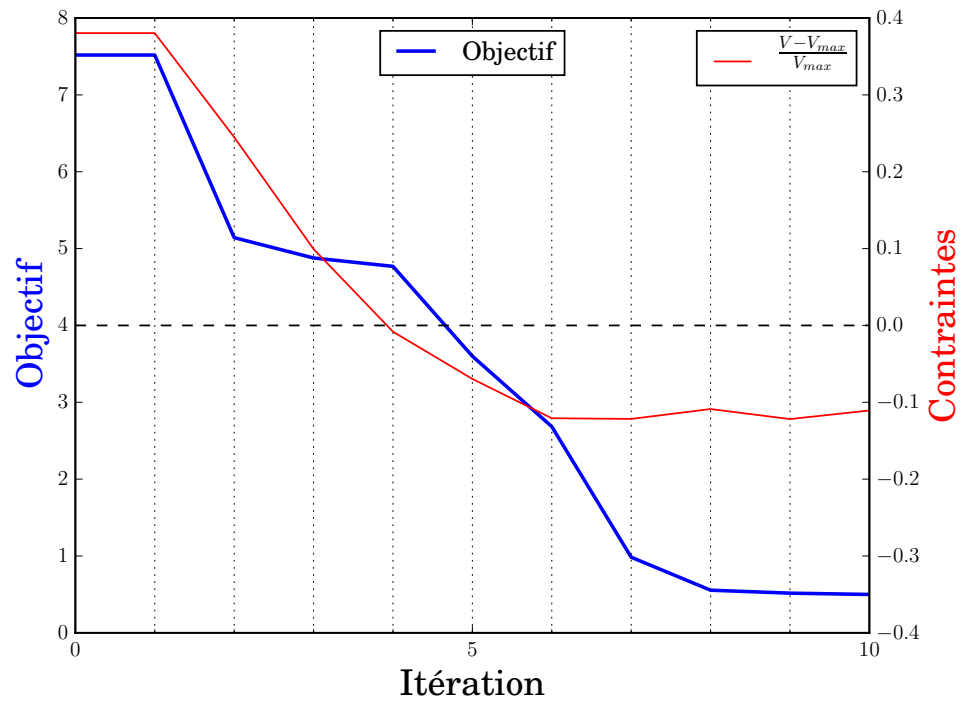


Figure XI.17 – Diagramme de convergence pour la solution de la figure XI.15 b).

## 2.2 Optimisation d'un chemin de charge

### Définition du problème d'optimisation

Nous traitons ici un autre problème d'optimisation de déplacement d'un cantilever, la figure XI.18 présente le domaine optimisable alors que le tableau XI.8 présente les propriétés de la phase solide utilisée.



propriété	phase solide	ersatz
$E$	1000	1.0
$\nu$	0.33	0.33

Table XI.8 – Propriétés mécaniques de la phase solide.

Figure XI.18 – conditions aux limites et domaine optimisable.

Nous utilisons ici le critère (X.25) qui pour rappel s'écrit

$$\mathcal{J}(\Omega) = \min_{\gamma} \left[ \int_{\Omega} \kappa(x) (\bar{u}(\gamma) - \bar{u}_{tar})^2 dx \right],$$

avec  $\kappa(x)$  valant 1 autour du point  $A$  et 0 ailleurs.

La formulation ainsi constituée s'écrit

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & \mathcal{J}_{p_1}(\Omega) + 2\mathcal{J}_{p_2}(\Omega) \\ & V(\Omega) \leq V_{max} \\ & C(\Omega) \leq C_{max}. \end{aligned} \tag{XI.6}$$

Nous avons ajouté à cette formulation une contrainte de compliance maximum  $C(\Omega) \leq C_{max}$  calculée en conditions HPP. Comme nous allons l'illustrer, cette contrainte est nécessaire car elle évite l'apparition de zones non connectées.

Le tableau 2.2 contient les coordonnées des deux points de passage imposés.

points	position
$p_1$	(-0.075; -0.09)
$p_2$	(-0.175; -0.25)

Table XI.9 – propriétés mécaniques des phases constituant la structure.

### Résultats numériques

Nous présentons maintenant trois résultats d'optimisation obtenus pour différents niveaux de la compliance  $C_{max}$ . La valeur de  $C_{max}$  est calculée à partir de la compliance  $C_{ref}$  elle-même calculée sur la forme de référence présentée sur la figure XI.15 (a). La figure XI.19 présente trois résultats correspondant à un cas sans contrainte de rigidité,  $C_{max} = 3.3 \times C_{ref}$  et  $C_{max} = 1.6 \times C_{ref}$  sur les sous figure (a), (b) et (c) respectivement.

Le tableau XI.10 présente les valeurs finales des différents critères considérés pour les solutions de la figure XI.19. Nous constatons que toutes les solutions respectent les contraintes du problème d'optimisation. Nous notons que plus la contrainte de rigidité imposée par  $C \leq C_{max}$  est sévère, plus la performance finale de la solution est dégradée. Ce comportement est logique car la contrainte de rigidité s'oppose aux grands déplacements demandés par la fonction objectif.

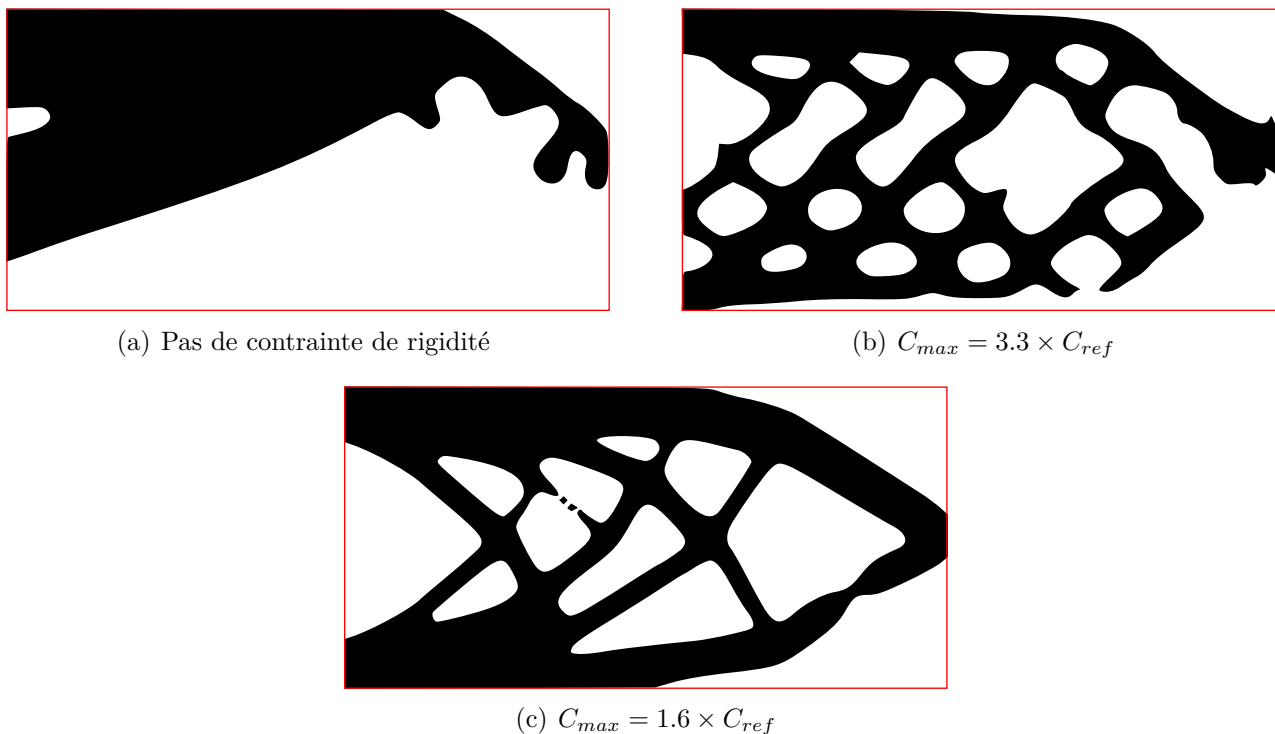


Figure XI.19 – (a) Déformation de la structure à différents niveaux de charges (b) Suivi du déplacement du point  $A$  durant la charge progressive de la structure.

Étape	Objectif	$(U_1 - U_{1,tar})^2$	$(U_2 - U_{2,tar})^2$	$C (C_{max})$	$V(\Omega)$	Itération
Figure XI.19 (a)	$8.08 \times 10^{-4}$	$5.88 \times 10^{-4}$	$1.09 \times 10^{-4}$	—	48%	17
Figure XI.19 (b)	$2.43 \times 10^{-3}$	$1.44 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-4}$	2.34(2.55)	50%	5
Figure XI.19 (c)	$2.59 \times 10^{-2}$	$4.57 \times 10^{-3}$	$1.07 \times 10^{-2}$	1.26(1.27)	49%	31

Table XI.10 – Valeurs des différents critères au début et à la fin de l'optimisation.

La figure XI.20 présente le déplacement du point  $A$  dans le plan  $(xOy)$  pour les différentes solutions, nous constatons ici des comportements très différents : la solution (a), obtenue sans contrainte de rigidité, se déplace presque selon une trajectoire rectiligne. Le résultat (c) comportant une contrainte de rigidité initiale sévère a quant à lui un comportement fortement non-linéaire comme en atteste la trajectoire du point  $A$ .

Dans le cas de la solution (c) l'algorithme d'optimisation a volontairement créé une réduction de section dans la solution finale afin d'engendrer un flambage localisé de la structure, et ainsi rapprocher la trajectoire du point  $A$  des points cibles. La figure XI.21 appuie cette observation. Nous pouvons y voir l'évolution de la déformation de la solution (c) à mesure que la force est appliquée.

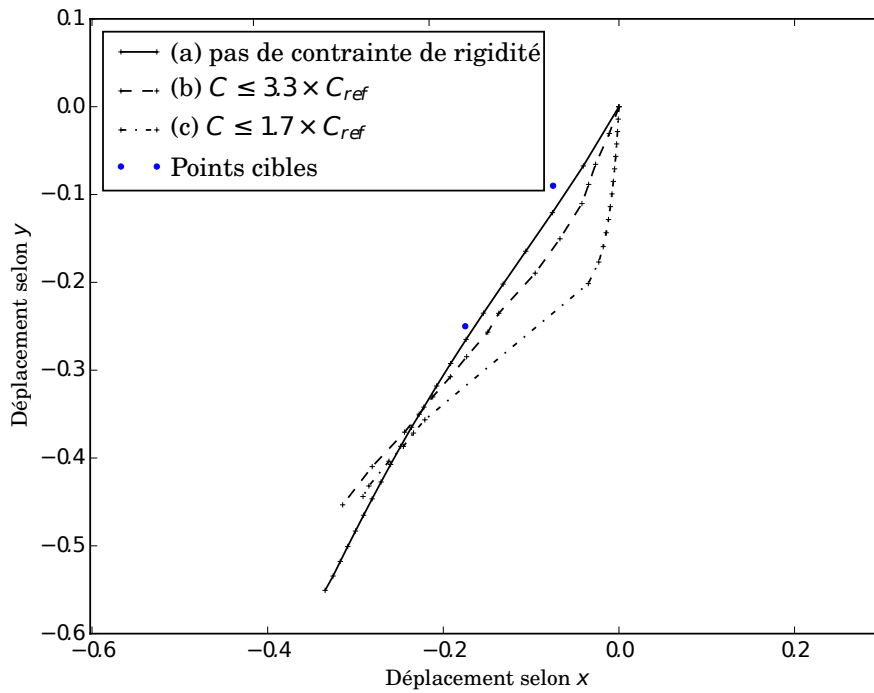


Figure XI.20 – Déplacement du point  $A$  du domaine optimisable présenté sur la figure XI.18, pour les trois solutions présentées sur la figure XI.19.

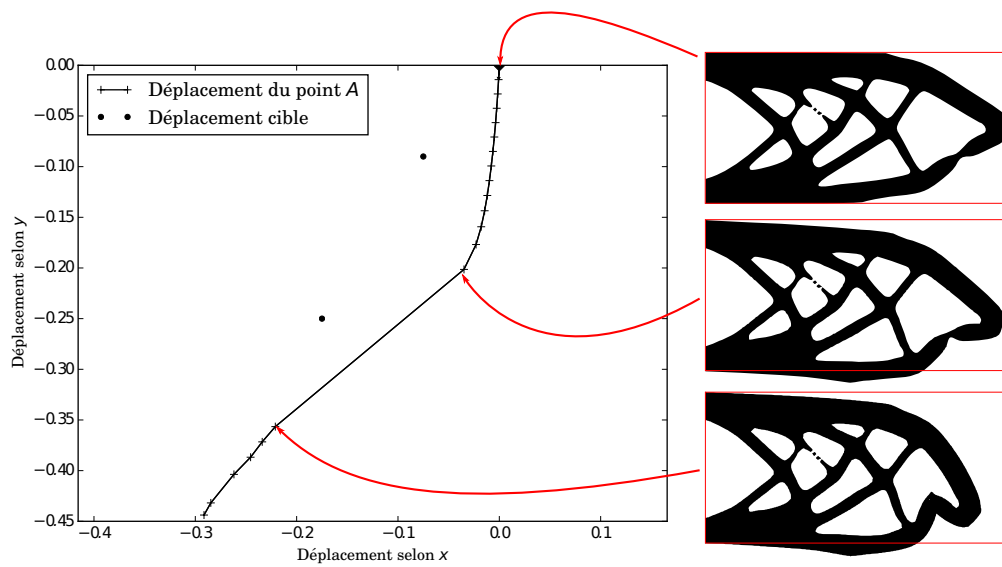


Figure XI.21 – (gauche) Déplacement du point  $A$  pour la solution (c), (droite) déformées de la solution (c) à différents niveaux de chargement.

## 2.3 Bilan

Nous avons réalisé une série de simulations utilisant le critère de contrôle de chemin ( X.25 ). Nous avons observé que ce dernier semble fonctionnel et permet, couplé à une contrainte de rigidité initiale, de générer des actuateurs aux comportements variables.

Il faut cependant noter que le critère proposé semble plus difficile à utiliser que le critère plus classique (XI.4). Le critère de chemin (X.25) contraint un déplacement pour un niveau de charge non déterminé à l'avance, cela entraîne la génération de structure disposant d'une très faible rigidité, comme la solution (a) de la figure XI.19. Cela amène souvent des formes déconnectées et engendre la divergence du solveur non-linéaire. Pour contourner ce problème nous ajoutons une contrainte de rigidité initiale, mais cela réduit considérablement la performance de la solution proposée. Si cette contrainte est sévère, l'algorithme tente de produire des structures comportant des comportements instable, comme le "snap through" de la solution (c), présenté sur la figure XI.21.

Ces simulations nous permettent cependant de dégager deux familles d'actuateurs non-linéaires : les actuateur "souples" et les actuateurs "instables". La figure XI.22 présente ces deux groupes à l'aide de courbes Force-déplacement. Nous constatons ici que les actuateurs dit "souples" se déforment beaucoup au début de leur chargement et gagne progressivement en rigidité. À l'inverse les actuateurs "instables" sont très rigide au début du chargement, cela jusqu'à l'apparition d'une instabilité qui entraîne une très grande chute de rigidité et un déplacement soudain.

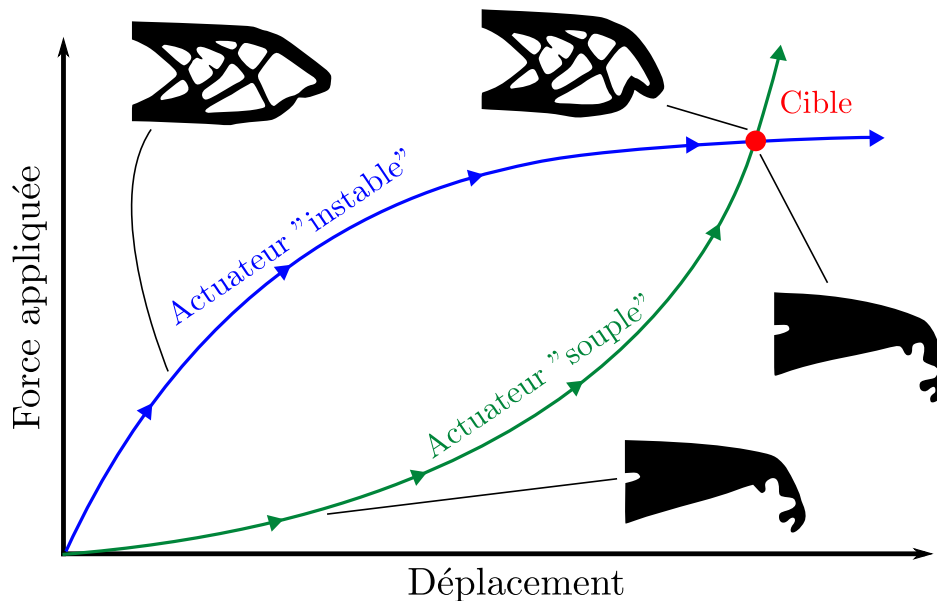


Figure XI.22 – Présentation des deux types de comportement que peuvent prendre les actuateurs.

Nous pouvons ainsi classer les actuateurs que nous avons obtenus dans ces deux familles : les solutions (a) et (b) sont des actuateurs souples alors que l'actuateur (c) est instable. La figure XI.23 présente les courbes force-déplacement vertical du point A pour ces trois solutions, il est aisé d'identifier ici les comportements souples et instables décrit juste au-dessus.

En imposant une contrainte de rigidité initiale importante, nous forçons l'algorithme d'optimisation à utiliser des instabilités.

Nous allons maintenant discuter de l'ensemble des résultats obtenus dans cette partie.

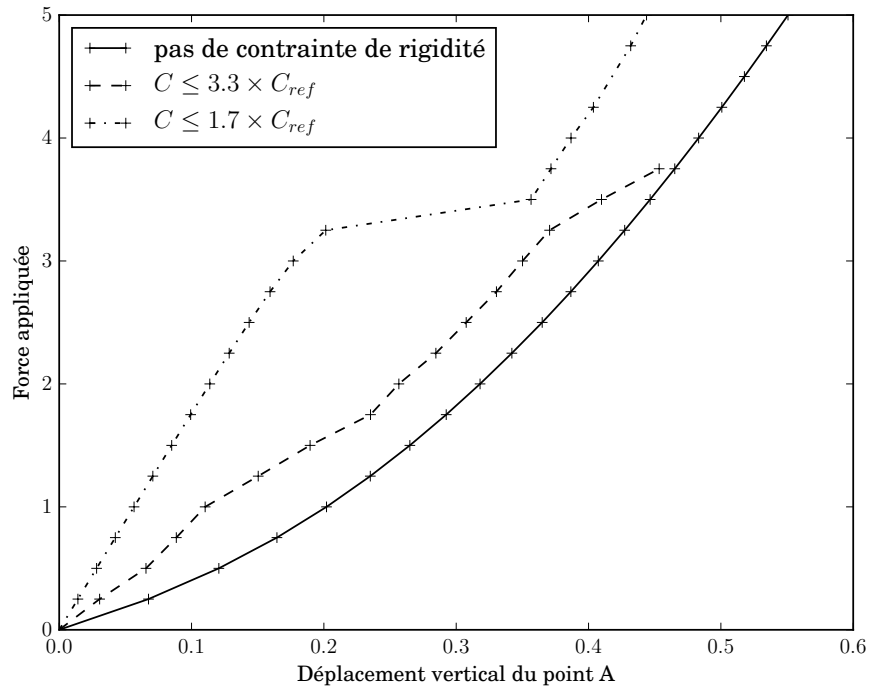


Figure XI.23 – Conditions aux limites et domaine optimisable.





# Conclusion de la Partie D

---

Dans cette partie nous avons étudié l'influence de la prise en compte des grands déplacements sur l'optimisation topologique de structures. Nous avons tenté de retrouver les résultats connus de la littérature concernant l'optimisation de la rigidité dans le cadre des grands déplacements, puis nous avons étendu cette approche à des structures multi-matériaux. Nous avons aussi étudié la synthèse d'actuateurs au comportement non-linéaire. Nous allons maintenant discuter de l'ensemble des résultats produits.

## Sur l'optimisation de rigidité

Nous avons testé la formulation classique du critère de compliance finale comme proposé par [Allaire \*et al.\* \(2004a\)](#), [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#) ou encore [Bruns et Tortorelli \(2001\)](#). Nous avons obtenu des résultats similaires à ceux de ces différents auteurs, notamment la synthèse de structure "dégénérées". Nous avons tenté de justifier l'apparition de ces formes avec notamment la réduction du bras de levier dans le cas classique de l'optimisation du cantilever.

Nous sommes parvenus aux mêmes conclusions que les auteurs cités, à savoir que la prise en compte des grands déplacements n'apporte pas un gain significatif en terme de performance dans le cas de l'optimisation de la rigidité d'une structure. Cependant et comme le précise [Buhl \*et al.\* \(2000\)](#), **cette prise en compte s'avère nécessaire quand des instabilités sont susceptibles d'apparaître dans les solutions finales.**

Nous avons aussi appliqué le critère de compliance finale à un problème multi-matériaux. Les résultats sont probants et révèlent une tendance intéressante : l'algorithme compense les différences de rigidités entre les différentes phases en modifiant leurs sections, cela afin de conserver la rigidité en flexion des différentes barres constituant la structure.

Nous concluons qu'avant d'opter pour la prise en compte des grands déplacements dans un calcul d'optimisation de domaine, il est plus judicieux de réaliser un calcul d'optimisation préliminaire avec l'hypothèse des petites perturbations, et d'étudier le comportement de la solution d'optimisation dans le cadre des grands déplacements. Dans le cas où des instabilités apparaîtraient dans la solution finale, il sera alors pertinent de démarrer un processus d'optimisation avec prise en compte des non-linéarités géométriques.

## Optimisation d'actuateurs

Comme le souligne [Pedersen \*et al.\* \(2001\)](#) la prise en compte des non-linéarités s'avère cependant particulièrement pertinente pour le design d'actuateurs. Nous avons étudié la synthèse d'actuateurs suivant un chemin de chargement donné à l'aide de deux formulations : l'une similaire à celle proposée par [Pedersen \*et al.\* \(2001\)](#) et l'autre issue d'une réflexion sur le contrôle de chemin. Nous avons obtenu une série d'actuateurs répondant aux objectifs fixés. Nous avons aussi dégagé deux comportements très différents : un type d'actuateur "souple" exploitant les grandes déformations et un autre "instable" exploitant les grandes déformations ainsi que diverses instabilités mécaniques.

Il apparaît que la seconde famille d'actuateurs permet de combiner à la fois rigidité de la struc-

ture en début de chargement et grands déplacements à mesure que la force est appliquée. Ces actuateurs "instables" présentent un intérêt pratique certain, mais ils exploitent des instabilités mettant les solveurs mécaniques et la résolution éléments finis à rude épreuve.

## Méthodes numériques

Les simulations effectuées ont mis en avant le caractère crucial du solveur non-linéaire : durant le processus d'optimisation de forme il arrive que les formes testées soient de mauvais postulats d'un point de vue mécanique, quand cela se produit le solveur non-linéaire rencontre des problèmes de convergence. Pire encore, la synthèse de mécanismes subissant de grands déplacements provoque parfois l'apparition d'instabilités pouvant causer la non-convergence du solveur bien que les designs obtenus soient pertinents. Cela cause rapidement l'arrêt du processus d'optimisation.

À ces difficultés vient s'ajouter l'utilisation du principe de frontière immergée qui complique encore plus la résolution du problème, cette difficulté a cependant été contournée en appliquant les propositions de Wang *et al.* (2014).

Les problèmes de convergence sur les formes intermédiaires de basse performance constituent une difficulté de taille qui pousse à l'échec beaucoup de stratégies, aussi élaborées qu'elles puissent être. En effet même les solveurs industriels, pourtant reconnu pour leur robustesse, demandent pour les problèmes les plus complexes une **interaction humaine** pour ajuster certains paramètres. Cette interaction est un point bloquant dans le cadre de l'optimisation de domaine, où plusieurs dizaines de formes différentes sont proposées, ce qui impliquerait presque tout autant d'interactions avec le solveur. Afin de contourner cette difficulté, il est potentiellement nécessaire d'imaginer des stratégies de résolution dont la robustesse primerait sur la précision, cela afin de pouvoir dépasser les itérations d'optimisation proposant des formes aux comportements complexes du point de vue de la résolution éléments finis.

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous avons utilisé des outils d'optimisation de domaine par la méthode des lignes de niveaux pour la conception de matériaux architecturés et de structures. Nous nous sommes aussi intéressés à la prise en compte des contraintes de fabrication dans le processus d'optimisation et nous avons étudié l'influence des non-linéarités géométriques sur les résultats d'optimisation. Durant l'ensemble de l'étude nous avons pu constater l'intérêt de ces méthodes pour la recherche de solutions innovantes.

## Matériaux architecturés

Les matériaux architecturés ont le potentiel de "remplir les vides" de l'espace des matériaux (Ashby et Bréchet, 2003). Ils promettent de fournir des propriétés physiques extrêmes ainsi qu'une multi-fonctionnalité, formant ainsi un vecteur de progrès technique plausible. Cependant cet apport potentiel est intrinsèquement lié au choix de l'architecture de ces matériaux.

L'optimisation de domaine est un outil permettant d'explorer les architectures possibles de manière automatisée, cela dans le but d'obtenir des matériaux aux propriétés effectives cibles. Sigmund (2000) et Andreassen *et al.* (2014) présentent des applications en élasticité tandis que Sigmund et Torquato (1996) et Wang *et al.* (2004) fournissent des résultats en thermoélasticité. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la conception de matériaux à la dilatation thermique contrôlée, voire extrême. Nous avons fourni plusieurs solutions aux propriétés extrêmes, mais surtout nous avons extrait de ces résultats les mécanismes de base permettant le contrôle de la dilatation thermique. Cela permet de donner un guide pour la conception.

Bien que l'optimisation de domaine ait fourni des architectures bien définies, le résultat important n'est pas tant ces architectures que les mécanismes qu'elles exploitent. Ils peuvent en effet être "retravaillés" et exploités différemment comme cela a été fait dans la littérature (Lakes, 1996; Jefferson *et al.*, 2009), cela afin de les rendre plus facilement fabricables.

Différents mécanismes ont été observés, nous avons pu constater que l'algorithme d'optimisation exploitait préférentiellement l'une ou l'autre de ces solutions suivant le problème posé. Cela fait apparaître une certaine hiérarchie de performance entre les différentes architectures. À la lumière des simulations effectuées, nous pouvons ajouter que cette hiérarchie n'est pas absolue, et qu'elle est notamment sensible à la nature des interfaces séparant les différentes phases constitutives du matériau architecturé.

Pour aboutir à cette conclusion nous avons considéré la présence d'interfaces graduées séparant les différentes phases. Elles définissent une transition progressive (et parfois non monotone) des propriétés dans le domaine séparant deux phases. Leur présence, pourtant souvent négligées, modifie les performances mais surtout la nature des mécanismes permettant pour le contrôle de la dilatation thermique.

Les résultats présentés ont permis d'explorer l'espace des solutions possibles et de dégager des concepts de matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques contrôlées pertinents. Il faut cependant noter que seules des solutions 2D ont été proposées. Il serait bien sûr intéressant d'étendre l'étude à des cas 3D. Il faut aussi noter que le modèle mécanique utilisé est resté simple, en conséquence il ne tient pas compte de phénomènes tels que la Fatigue et plus

généralement des propriétés d'usage, dont on suppose une influence importante sur la durée de vie de nos matériaux (Mercer *et al.*, 2015). La prise en compte de tels phénomènes demeure incompatible avec le modèle numérique de l'homogénéisation périodique utilisé lors de l'étude, pourtant la prise en compte de la Fatigue dans l'optimisation de matériaux architecturé demeure une problématique intéressante, que cela soit par une analyse a posteriori ou la définition d'un critère ad hoc.

Toutes les solutions proposées restent cependant virtuelles si elles ne sont pas considérées du point de vue de la fabrication, c'est pourquoi nous nous sommes intéressés par la suite à la prise en compte des contraintes de fabrication dans le processus d'optimisation.

## Prise en compte des contraintes de fabrication

Nous avons étudié la question de la fabrication des solutions d'optimisation de domaine. Rapidement nous nous sommes tourné vers la fabrication additive qui est souvent envisagée comme le support d'une prochaine révolution industrielle (Hopkinson *et al.*, 2006). Dans ce cadre nous avons étudié comment prendre en compte les limitations persistantes de ces nouvelles méthodes de fabrication, et ainsi fournir des solutions d'optimisation fabricables plus simplement.

Nous nous sommes intéressés aux propriétés induites par ces méthodes avec le cas exemple de la méthode *Fused Deposition Molding* (FDM). Durant une fabrication utilisant cette technologie, un filament de polymère fondu est déposé en couches successives afin de produire une pièce volumique. Durant cette impression chaque couche est décomposée en un contour et une partie massive. Ce découpage induit des propriétés mécaniques particulières, notamment une anisotropie mécanique orientée de la surface de la pièce. Cette étude a permis de mettre en évidence l'influence de ces propriétés sur les formes optimales proposées. Nous montrons encore qu'il est nécessaire de prendre en compte les propriétés réelles de la pièce fabriquée durant le processus d'optimisation. Nous avons par exemple constaté comment l'utilisation d'un modèle plus fidèle aux propriétés réelles a modifié les solutions proposées par l'algorithme d'optimisation. À travers cette étude la prise en compte des propriétés induites au cours de l'optimisation apparaît comme une nécessité.

Nous avons exposé le cas de la méthode FDM, il existe cependant d'autres méthodes comportant leurs propres propriétés induites. Il apparaît que prendre en compte ces propriétés implique de modifier le modèle physique utilisé, ce qui influence indirectement l'expression de la dérivée de forme et donc l'algorithme d'optimisation.

L'étude proposée ici demeure cependant une preuve de concept, son extension en 3D est une nécessité qu'il faudra traiter.

Par la suite nous avons considéré la prise en compte des limitations des méthodes de fabrication additive, notamment l'incapacité pour la plupart d'imprimer des éléments en porte-à-faux. Ce problème est en pratique contourné à l'aide de l'impression d'un support en simultané avec l'impression de la pièce. Il s'agit d'une structure en treillis venant supporter les zones en porte-à-faux, à la manière d'un échafaudage. Cette solution est toutefois peu souhaitable car elle engendre des surcoûts de matière première, une plus faible vitesse d'impression et une étape supplémentaire de retrait du support, souvent manuelle.

Afin de supprimer le support d'impression, il est possible d'orienter l'optimisation de domaine dans le but qu'elle produise des solutions ne comportant pas de porte-à-faux. Plusieurs solutions existent déjà dans la littérature, toutes basées sur des considérations géométriques (Gaynor et Guest, 2016; Langelaar, 2016; Qian, 2017). Ces solutions se basent sur l'angle que forme les surfaces libres de la structure optimisée avec la direction d'impression. Nous avons présenté les limites de l'approche géométrique et avons proposé une approche mécanique apparemment plus représentative du problème réel, tout en étant à même de le traiter. La méthode que nous proposons se base sur un critère mécanique sommant pour chaque couche d'impression l'énergie

de déformation engendrée par le dépôt de matière sur la partie supérieure de la structure en cours de fabrication.

Les différentes simulations effectuées ont permis de valider notre nouvelle approche. Contrairement aux autres solutions de la littérature elle n'impose pas strictement la génération de structures directement fabricables : des zones en porte-à-faux peuvent subsister. Cependant elle permet de ne pas sacrifier totalement la performance dans le seul but de supprimer totalement le support, mais d'obtenir un compromis. D'autres limitations n'ont pas été abordées dans cette thèse, par exemple les contraintes thermiques résiduelles induites par l'impression métallique. Il existe donc d'autres limitations et propriétés induites à prendre en compte dans l'optimisation : un vaste champ d'amélioration reste à explorer.

Nous concluons ici que les méthodes de fabrication additive couplées à l'optimisation de domaine constituent un attelage prometteur, il faut cependant adapter les processus d'optimisation à ces nouvelles méthodes afin de pouvoir en extraire les meilleures performances. Cela passe par la prise en compte des propriétés induites et des limitations comme celle des porte-à-faux.

### **Prise en compte des non-linéarités**

Que ce soit pour l'optimisation de matériaux architecturés ou pour la prise en compte de la fabrication additive, il ressort qu'il est capital d'utiliser des modèles les plus fidèles possibles pour qu'un résultat d'optimisation de domaine soit pertinent. Dans cette optique nous avons souhaité évaluer l'influence des non-linéarités géométriques au sein de nos calculs d'optimisation. L'optimisation amène ici une complication à travers les calculs analytiques des gradients de forme des critères optimisés.

Nous avons d'abord reproduit les résultats de la littérature (Buhl *et al.*, 2000; Klarbring et Strömberg, 2013) et validé notre formulation. À travers un exemple, nous avons étudié la pertinence de la prise en compte des non-linéarités géométriques durant l'optimisation. Il ressort que cela est nécessaire dès lors que des phénomènes non-linéaires interviennent dans la solution obtenues sans prendre en compte les non-linéarités. Nous avons de plus étendu les résultats de la littérature en optimisant des structures comportant plusieurs matériaux.

Un nouveau critère de contrôle de chemin a aussi été défini, il permet de traiter la problématique de la trajectoire prescrite. Ce nouveau critère a permis de mettre en évidence deux familles d'actuateurs. D'un côté les actuateurs souples ayant une faible rigidité pour de faibles niveaux de forces. De l'autre les actuateurs instables, ayant une forte rigidité pour de faibles niveaux de forces et exploitant des instabilités pour atteindre la trajectoire cible. Ce dernier type d'actuateur a un intérêt considérable car il combine à la fois rigidité initiale et grands déplacements.

Nous avons noté l'enjeu majeur de la résolution numérique : il apparaît nécessaire de développer des algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires robustes, même si cela se fait au détriment de la précision. En effet des formes mécaniquement non pertinentes peuvent apparaître durant le processus d'optimisation, causant ainsi la divergence de l'algorithme de résolution. Il est cependant nécessaire de retirer de ces formes intermédiaires des informations pour guider l'optimisation.

### **Sur l'optimisation de domaine**

L'optimisation de domaine a été appliquée avec succès à différents problèmes, elle s'impose clairement comme un excellent outil pour la recherche de concepts et la compréhension des mécanismes opérant. Elle demeure cependant en développement. S'il existe aujourd'hui des modèles permettant de représenter finement et fidèlement un grand nombre de phénomènes physiques, il reste encore de nombreuses étapes de développement et de recherche afin de pouvoir les exploiter pleinement en optimisation de domaine.

La raison première est le calcul des critères et gradients qui constituent le matériel de base permettant l'optimisation. Il est nécessaire de pouvoir exprimer la propriété à optimiser comme une quantité numérique, puis il faut ensuite exprimer le gradient de cette quantité par rapport au domaine de définition. Or cette opération gagne rapidement en complexité à mesure que les modèles utilisés s'enrichissent. Aujourd'hui la littérature de l'optimisation de domaine exploite des modèles de comportement que l'on pourrait qualifier de "basiques" (élasticité linéaire HPP, modèles simples de plasticité, ...), il reste de nombreux développements à réaliser pour pouvoir exploiter des modèles plus fins et à même de représenter des phénomènes plus complexes.

### **À propos des aspects numériques**

Afin de produire l'ensemble des résultats présentés dans ce document il a été nécessaire de produire un code d'optimisation de domaine, *iktinos*. Nous avons constaté au début de la thèse que de nombreux développements étaient nécessaires afin d'obtenir un code fonctionnel. Pour cette raison le développement effectué, initialement prévu pour être un code exemple, a progressivement évolué vers une plateforme entière, cela dans le but de ne plus avoir à effectuer ces développements chronophages dans la poursuite du projet.

Ce code reste cependant limité par les choix technologiques initiaux, notamment en termes de taille maximum des problèmes qui peuvent être traités : la barre des 1.000.000 de degrés de liberté est actuellement difficilement franchissable. Il demeure cependant un outil de prototypage adéquat pour le travail de recherche.

Nous souhaitons souligner les bénéfices conséquents que représenterait le développement collaboratif d'une plateforme d'optimisation de forme exploitant au maximum les performances des machines de calcul modernes. Une telle solution existe pour la méthode d'optimisation de domaine SIMP (TopOpt), et attend encore de trouver son équivalent pour la méthode des lignes de niveaux.

---

# Annexes





---

<b>A</b>	<b>Codes minimalistes d’algorithmes d’optimisation</b>	<b>283</b>
1	Lagrangien . . . . .	283
1.1	Code . . . . .	283
2	SLP . . . . .	285
2.1	Code . . . . .	285
3	SQP . . . . .	289
3.1	Code . . . . .	289
4	MFD . . . . .	292
4.1	Code . . . . .	292
4.2	Modification: Ajout de permissivité . . . . .	296
<b>B</b>	<b>Études des bornes de théoriques pour les propriétés thermomécaniques des matériaux architecturés</b>	<b>299</b>
1	Borne de Hashin-Shtrikman . . . . .	299
1.1	Définition . . . . .	299
1.2	Extraction de bornes sur le module de Young . . . . .	300
1.3	Extraction de bornes sur le coefficient de Poisson . . . . .	300
2	Bornes pour la dilatation thermique des matériaux multi-phasés . . . . .	301
2.1	Définition . . . . .	301
2.2	Étude sur les propriétés atteignables . . . . .	302
2.3	Étude paramétrique des bornes . . . . .	305
2.4	Conclusions . . . . .	308
<b>C</b>	<b>Détails des dérivations de forme</b>	<b>309</b>
1	Outils mathématiques pour la dérivation . . . . .	309
2	Mécanique des structures . . . . .	312
2.1	Compliance en élasticité linéaire . . . . .	312
3	Homogénéisation . . . . .	315
3.1	Contexte . . . . .	315
3.2	Coefficients du tenseur d’élasticité . . . . .	316

---



# Annexe A

## Codes minimalistes d'algorithmes d'optimisation

L'entête suivante est valable pour l'intégralité des algorithmes :

```
1 // input:
2 // x_0:      Initial guess for the solution.
3 //
4 // evaluator: A scilab function that work as following:
5 //           [J, dJ, C, dC, Cmax] = evaluator(x)
6 //           input:
7 //             x:    a current set of values for the parameters
8 //           output:
9 //             J:    The objective function
10 //            dJ:   The gradient of the objective function
11 //             C:   The values of all the constraints of the problem
12 //            dC:  The gradients for each constraint of the problem
13 //            Cmax: The maximum value for each inequality constraint
14 //
15 // param:    A set of parameters to tune the algorithm
16 //
17 // output
18 // x_sol:    The solution given by the optimization algorithm
19 //
20 // Basically, these function solve the optimization problem defined by the evaluator
   input, defined as:
21 //
22 //   min_{x}      J
23 //   s.t.        C < Cmax
24 //
25 // The obtained solution is stored in x_sol
```

### 1 Lagrangien

#### 1.1 Code

```
1 function x=Lagrangian(x0, evaluator, param)
2   if (~isfield(param, 'eps')) then
3     printf('error: eps parameter is missing: initial size of the step.\n');
```

```

4  else
5      eps = param.eps;
6      eps0 = eps;
7  end
8
9  if (~isfield(param, 'tol')) then
10     printf('error: tol parameter is missing: fraction of the initial step that
means convergence\n');
11  else
12     tol = param.tol;
13  end
14
15  if (~isfield(param, 'max_it')) then
16     printf('max_it set to 100\n');
17     max_it = 100;
18  else
19     max_it = param.max_it;
20  end
21
22  [J0, dJ0, C0, dC0, Cmax] = evaluator(x0);
23  J = J0;
24  dJ = dJ0;
25  C = C0;
26  dC = dC0;
27  it = 1;
28  x = x0;
29
30  lambda = ones(size(C0,1),1);
31  for i=1:size(C,1)
32     if ( (C(i) - Cmax(i)) > - lambda(i) ) then
33         lambda(i) = 1;
34     else
35         lambda(i) = 0;
36     end
37  end
38
39  lag0 = J;
40  for i=1:size(C,1)
41     lag0 = lag0 + lambda(i)*(C(i) - Cmax(i));
42  end
43  lag = lag0;
44  var = param.tol+1;
45
46  while(var > param.tol & it < max_it)
47     printf('step ' + string(it) + ':\n');
48     printf('-----\n');
49     x = x - eps*dJ(:);
50     for i = 1:size(C,1)
51         if (C(i) > Cmax(i)) then
52             x = x - (lambda(i)*dC(i,:)*eps)';
53         end
54     end
55

```

```

56     [J, dJ, C, dC, Cmax] = evaluator(x);
57
58     lag_old = lag;
59     lag = J;
60     for i=1:size(C,1)
61         lag = lag + lambda(i)*(C(i) - Cmax(i));
62     end
63     it = it+1;
64     for i=1:size(C,1)
65         lambda(i) = lambda(i) + 0.5*(C(i) - Cmax(i));
66     end
67     var = abs( (lag - lag_old)/lag_old);
68
69     end
70
71 endfunction

```

## 2 SLP

### 2.1 Code

```

1 function x = SLPsolve(x0, evaluator, param)
2     //-----
3     // Checking if all the required parameters for the algorithm are
4     // provided in param
5     //-----
6     if (~isfield(param, 'eps')) then
7         printf('error: eps parameter is missing: initial size of the step.\n');
8     else
9         eps = param.eps;
10        eps0 = eps;
11    end
12
13    if (~isfield(param, 'tol')) then
14        printf('error: tol parameter is missing: fraction of the initial step that
15        means convergence\n');
16    else
17        tol = param.tol;
18    end
19
20    if (~isfield(param, 'max_it')) then
21        printf('max_it set to 100\n');
22        max_it = 100;
23    else
24        max_it = param.max_it;
25    end
26
27    //-----
28
29    // Initialization of the algorithm: computing objective, constraints

```

```

30 // and gradients at the initial point
31 [J0, dJ0, C0, dC0, Cmax] = evaluator(x0);
32 J = J0;
33 dJ = dJ0;
34 C = C0;
35 dC = dC0;
36 it = 1;
37 x = x0;
38
39 // Optimization loop start, we iterate while conditions are valid
40 // - the box constrain is higher than the reference one times the tolerance
:
41 // tolerance is usually very small (1e-4), so if "eps < esp0*tol" it
means
42 // that the step is really small, so that we are probably close
43 // from an optimal point
44 //
45 // - the second condition is more basic: we limitate the maximum number of
46 // iteration
47 //
48 while(eps > eps0*tol & it < max_it)
49
50 // Some prints...
51 printf('step_' + string(it) + ':\n');
52 printf('-----\n');
53
54
55 // Here is the split between two important cases:
56 // ( max(C_ - Cmax) > 0 ): there is at least one constraint where C > Cmax
:
57 // this means that the current solution is in
58 // the unfeasible domain
59 // ( max(C_ - Cmax) < 0 ): All the constrain are respected: the current
60 // solution is in the feasible domain.
61 if (max(C - Cmax) < 0) then
62 //-----
63 // current solution is in the admissible domain
64 //-----
65 // if we are in the admissible domain, we just build the
66 // local sub-problem defined as:
67 //
68 // min_{dx} dJ*dx
69 // s.t. dC*dx < Cmax - C
70 // -eps < dx < eps
71 //
72 // "cond_" prefix means "conditionned", because we adapt
73 // the global problem to build the local sub-problem, it could
74 // also be a good idea to rescale the different gradients and
75 // quantities in order to make a more efficient solving of
76 // the LP problem

```

```

77     cond_x      = zeros(size(x,1),1);
78     cond_dJ     = dJ;
79     cond_Cmax   = Cmax - C;
80     cond_dC     = dC;
81     ci          = -eps*ones(size(x,1),1);
82     cs          =  eps*ones(size(x,1),1);
83     //-----
84     else
85     //-----
86     //     current solution is NOT in the admissible domain
87     //-----
88     // Here the current shape is NOT in the admissible domain, it means
89     // that if we build the sub-problem as for the admissible case, there
90     // is a huge probability that the local admissible domain will be
91     // empty, so the linear solver will not be able to find a solution !
92     //
93     // In order to avoid this problem, we choose to change the sub-problem
94     // such that there is an admissible domain for the local sub-problem.
95     //
96     // To do so, we put in the objective all the violated constraints and
97     // we choose to consider the objective as constrain
98     //
99     //           min_{dx}           sum(dC_{violated}*dx)
100    //           s.t.                dJ*dx < A
101    //                               dC*dx < Cmax - C
102    //                               -eps < dx < eps
103    //
104    // "A" is a parameter added to allow the objective function to
105    // increase (dJ*dx > 0) if it is necessary
106    //
107    // "cond_" prefix means "conditionned", because we adapt the global
108    // problem to build the local sub-problem, it could also be a good
109    // idea to rescale the different gradients and quantities in order
110    // to make a more efficient solving of the LP problem
111    printf("unfeasible: searching specific direction\n");
112    cond_x      = zeros(size(x,1),1);
113    cond_dJ     = zeros(size(x,1),1);
114    // We add the objective function as a constraint
115    cond_dC     = dJ'
116    // This is "A" parameter
117    cond_Cmax   = eps*norm(dJ);
118    for i=1:size(dC,1)
119        if (C(i) > Cmax(i)) then
120            // All the violated constraints are considered as a part
121            // of the new objective function
122            cond_dJ = cond_dJ + dC(i,:);
123        else
124            // Constraints that are not violated are kept as that
125            cond_dC  = [cond_dC  ; dC(i,:)];
126            cond_Cmax = [cond_Cmax ; Cmax(i) - C(i)];

```



```

127     end
128 end
129 ci      = -eps*ones(size(x,1),1);
130 cs      =  eps*ones(size(x,1),1);
131 //-----
132 end
133
134 // Solving of the LP problem, retrieving dx the variation of
135 // parameters supposed to reduce the objective function and
136 // also to respects the linearized constraints.
137 dx = karmarkar([], [], cond_dJ, [], [], [], [], cond_dC, cond_Cmax, ci, cs
);
138 // Then, computing the "attempt" value of the objective function
139 [Ja, dJa, Ca, dCa, Cmax] = evaluator(x + dx);
140
141 // Still two cases: previous form was feasible and previous
142 // form was not feasible
143 if (max(C - Cmax) < 0) then
144     //-----
145     // Current solution is in the feasible domain
146     //-----
147     // If all the global constraints are still respected, then *
148     // the iteration is accepted.
149     if (max(Ca - Cmax) < 0) then
150         x = x+dx
151         printf('accepted\n');
152         // "Attempt" solution becomes the current solution
153         J = Ja;
154         dJ = dJa;
155         C = Ca;
156         dC = dCa;
157     else
158         // If at least one constraints is violated, then the iteration is
159         //refused and we reduce the box constraints  -eps< dx < eps.
160         eps = eps/2;
161         printf('refused\n');
162     end
163     //-----
164 else
165     //-----
166     // Current solution is NOT in the feasible domain
167     //-----
168     // We are not in the admissible domain, so we accept all the iterations,
169     // hoping we will enter this domain as soon as possible.
170     x = x+dx
171     printf('unfeasible: accepted\n');
172     // "Attempt" solution becomes the current solution
173     J = Ja;
174     dJ = dJa;
175     C = Ca;

```

```

176     dC = dCa;
177     end
178     it = it+1;
179     end
180 endfunction

```

## 3 SQP

### 3.1 Code

```

1 function x = SQPsolve(x0, evaluator, param)
2 //-----
3 // Checking if all the required parameters for the algorithm
4 // are provided in param
5 //-----
6 if (~isfield(param, 'eps')) then
7     printf('error: eps parameter is missing: initial size of the step.\n');
8 else
9     eps = param.eps;
10    eps0 = eps;
11 end
12
13 if (~isfield(param, 'tol')) then
14     printf('error: tol parameter is missing: fraction of the initial step that
15 // means convergence\n');
16 else
17     tol = param.tol;
18 end
19
20 if (~isfield(param, 'max_it')) then
21     printf('max_it set to 100\n');
22     max_it = 100;
23 else
24     max_it = param.max_it;
25 end
26 //-----
27
28
29 // Initialization of the algorithm: computing objective, constraints
30 // and gradients at the initial point
31 [J0, dJ0, hJ0, C0, dC0, hC0, Cmax] = evaluator(x0);
32 J = J0;
33 dJ = dJ0;
34 hJ = hJ0;
35 C = C0;
36 dC = dC0;
37 hC = hC0;
38 it = 1;
39 x = x0;

```

```

40
41 // Optimization loop start, we iterate while conditions are valid
42 // - the box constrain is higher than the reference one times the tolerance
43 :
44 // tolerance is usually very small (1e-4), so if "eps < esp0*tol" it
45 // means that the step is really small, so that we are probably
close
46 // from an optimal point
47 // - the second condition is more basic: we limitate the maximum number of
48 // iteration
49 //
50 while(eps > eps0*tol & it < max_it)
51
52 // Some prints...
53 printf('step_' + string(it) + ':\n');
54 printf('-----\n');
55
56 // Here is the split between two important cases:
57 // ( max(C_ - Cmax) > 0 ): there is at least
58 // one constraint where C > Cmax: this means
59 // that the current solution is in the unfeasible
60 // domain
61 //
62 // ( max(C_ - Cmax) < 0 ): All the constrain are
63 // respected: the current solution is in the
64 // feasible domain.
65 if (max(C - Cmax) < 0) then
66 //-----
67 // current solution is in the admissible domain
68 //-----
69 // if we are in the admissible domain, we just build
70 // the local sub-problem defined as:
71 //
72 // min_{dx} 0.5*dx'*Q*dx + dJ*dx
73 // s.t. dC*dx < Cmax - C
74 // -eps < dx < eps
75 //
76 // "cond_" prefix means "conditionned", because we adapt
77 // the global problem to build the local sub-problem, it
78 // could also be a good idea to rescale the different gradients
79 // and quantities in order to make a more efficient solving
80 // of the LP problem
81 cond_x = zeros(size(x,1),1);
82 cond_dJ = dJ;
83 cond_Cmax = Cmax - C;
84 cond_dC = dC;
85 ci = -eps*ones(size(x,1),1);
86 cs = eps*ones(size(x,1),1);
87 Q = hJ ;

```

```

88
89 // Solving of the LP problem, retrieving dx the variation
90 // of parameters supposed to reduce the objective function
91 // and also to respects the linearized constraints.
92 dx = qpsolve(Q, cond_dJ, cond_dC, cond_Cmax, ci, cs, 0);
93 // Then, computing the "attempt" value of the objective function
94 [Ja, dJa, hJa, Ca, dCa, hCa, Cmax] = evaluator(x + dx);
95
96 // We check id the current solution respects the constraints
97 if (max(Ca - Cmax) < 0) then
98     // if yes:
99     // "Attempt" solution becomes the current solution
100     x = x+dx
101     J = Ja;
102     dJ = dJa;
103     C = Ca;
104     dC = dCa;
105     hH = hJa;
106     hC = hCa;
107     printf('accepted\n');
108 else
109     // if not, we reduce the size of the box constraint
110     eps = eps/2;
111     printf('refused\n');
112 end
113 else
114     printf("unfeasible:_searching_specific_direction\n");
115     //-----
116     // current solution is NOT in the admissible domain
117     //-----
118     // Here the current shape is NOT in the admissible domain, it means
119     // that if we build the sub-problem as for the admissible case,
120     // there is a huge probability that the local admissible domain will
121     // be empty, so the linear solver will not be able to find a solution !
122     //
123     // In order to avoid this problem, we choose to change the sub-problem
124     // such that there is an admissible domain for the local sub-problem.
125     //
126     // To do so, we put in the objective all the violated constraints and
127     // we choose to consider the objective as constrain
128     //
129     //
130     // min_{dx}    sum(0.5 + dx'*hC_{violated}*dx + dC_{violated}*dx)
131     // s.t.                                     dJ*dx < A
132     //                                           dC*dx < Cmax - C
133     //                                           -eps < dx < eps
134     //
135     // "A" is a parameter added to allow the objective function to
136     // increase (dJ*dx > 0) if it is necessary
137     //

```

```

138 // "cond_" prefix means "conditionned", because we adapt the
139 // global problem to build the local sub-problem, it could also
140 // be a good idea to rescale the different gradients and quantities
141 // in order to make a more efficient solving of the LP problem
142 cond_x    = zeros(size(x,1),1);
143 cond_dJ   = zeros(size(x,1),1);
144 // We put the objective as a constrain
145 cond_dC   = dJ'
146 // Then we choose a value for A (here eps*norm(dJ))
147 cond_Cmax = eps*norm(dJ);
148 Q = zeros(size(x,1), size(x,1));
149 for i=1:size(dC,1)
150     if (C(i) > Cmax(i)) then
151         cond_dJ = cond_dJ + dC(i,:)' ;
152         Q = Q + hC(i);
153     else
154         cond_dC   = [cond_dC   ; dC(i,:)];
155         cond_Cmax = [cond_Cmax ; Cmax(i) - C(i)];
156     end
157 end
158 ci      = -eps*ones(size(x,1),1);
159 cs      =  eps*ones(size(x,1),1);
160 // Solving of the LP problem, retrieving dx the variation of parameters
161 // supposed to reduce the objective function and also to respects the
162 // linearized constraints.
163 dx = qpsolve(Q, cond_dJ, cond_dC, cond_Cmax, ci, cs, 0);
164 // Then, computing the "attempt" value of the objective function
165 [Ja, dJa, hJa, Ca, dCa, hCa, Cmax] = evaluator(x + dx);
166
167 // "Attempt" solution becomes the current solution
168 x = x+dx
169 J = Ja;
170 dJ = dJa;
171 C = Ca;
172 dC = dCa;
173 hH = hJa;
174 hC = hCa;
175 printf('accepted\n');
176 end
177 it = it+1;
178 end
179 endfunction

```

## 4 MFD

### 4.1 Code

```

1 function x = MFDsolve(x0, evaluator, param)
2 //-----
3 // Checking if all the required parameters for the algorithm are

```

```

4 // provided in param
5 //-----
6 if (~isfield(param, 'eps')) then
7     printf('error: eps parameter is missing: initial size of the step.\n');
8 else
9     eps = param.eps;
10    eps0 = eps;
11 end
12 if (~isfield(param, 'tol')) then
13     printf('error: tol parameter is missing: fraction of the initial step that
means convergence\n');
14 else
15     tol = param.tol;
16 end
17 if (~isfield(param, 'max_it')) then
18     printf('max_it set to 100\n');
19     max_it = 100;
20 else
21     max_it = param.max_it;
22 end
23
24 // Initialization of the algorithm: computing objective,
25 // constraints and gradients at the initial point
26 [J0, dJ0, C0, dC0, Cmax] = evaluator(x0);
27 J = J0;
28 dJ = dJ0;
29 C = C0;
30 dC = dC0;
31 it = 1;
32 x = x0;
33 t = ones(size(Cmax,1)+1,1);
34 nddl = size(dJ,1)+1;
35 dx = 1;
36 // Optimization loop start, we iterate while conditions are valid
37 // - the norm of the variation of the parameters becomes to
38 //     small: basically we are not moving anymore !
39 //
40 // - the second condition is more basic: we limitate the maximum
41 //     number of iteration
42 //
43 while(norm(dx) > tol & it < max_it)
44     // Some prints...
45     printf('step_' + string(it) + ':\n');
46     printf('-----\n');
47     // We first build the marge maximizing sub-problem, note that
48     // compared to the proposed SLP and SQP algorithms,
49     // the marge maximizing algorithm does not need different version
50     // depending on the feasibility of the current solution
51     //
52     // min_{dx, m} 0.5*dx'*Q*dx - m

```

```

53 //          s.t.          dJ*dx + t0*m <      0
54 //          dCi*dx + ti*m < Cmax - C
55 //          -eps < dx < eps
56 //
57 // "cond_" prefix means "conditionned", because we adapt the global
58 // problem to build the local sub-problem, it could also be a good
59 // idea to rescale the different gradients and quantities in order
60 // to make a more efficient solving of the LP problem
61 //
62 // !\ The main idea of marge maximization is to add a supplementary
63 // parameter in the optimization problem: "m"
64 // So there will be a supplementary term in each gradient !
65 //
66 cond_x   = zeros(size(x,1),1);
67 cond_dJ  = dJ;
68 cond_Cmax = Cmax - C;
69 cond_dC  = dC;
70 ci       = -eps*ones(size(x,1),1);
71 cs       = eps*ones(size(x,1),1);
72 // These are bounds for the marge parameter
73 ci($+1)  = -1000;
74 cs($+1)  = 1000;
75
76 // Conditionning topkis coefficients that scale the problem.
77 cond_t   = t;
78 //Optionnal normalization of topkis coefficient
79 //cond_t(1) = t(1)/norm(dJ);
80 //for i=1:size(dC,1)
81 //  cond_t(i+1) = t(i+1)/norm(dC(i,:));
82 //end
83
84 // Building MFD problem
85 c = [[cond_dJ', cond_t(1)] ; [cond_dC, cond_t(2:$)] ];
86 Q = eye(nddl,nddl);
87 // The value of the ponderating matrix is arbitrary choosed here,
88 // this could be adjust in order to rise the efficiency of the algorithm.
89 Q($,$) = 0.1;
90 // in the objective, we only have "-m", so p vector is full of zero,
91 // exept at the end, such that p*[dx; m] = -m
92 p = zeros(nddl,1);
93 p($) = -1;
94 c_max = [0 ; cond_Cmax];
95
96 // Solving of the QP problem, retrieving dx the variation of
97 // parameters supposed to reduce the objective function and also
98 // to respects the linearized constraints.
99 dx = qpsolve(Q, p, c, c_max, ci, cs, 0);
100
101 //Here, the last term of dx is infact m !
102

```

```

103
104 // Then, computing the "attempt" value of the objective function,
105 // excluding "m" from the output dx
106 [Ja, dJa, Ca, dCa, Cmax] = evaluator(x + dx(1:size(x,1)));
107
108 // We check is the attempt solution is in the admissible domain
109 if (max(Ca - Cmax) < 0) then
110 // Then we check if the objective function decrease
111 if (Ja < J) then
112 // Here, we are feasible and objective function decrease:
113 //PERFECT, the iteration is accepted.
114 printf('accepted\n');
115 // "Attempt" solution becomes the current solution
116 J = Ja;
117 dJ = dJa;
118 C = Ca;
119 dC = dCa;
120 x = x+dx(1:size(x,1));
121 else
122 // Here we respect the constraints, but objective function
123 // decrease, so we refuse the iteration and we rise the topkis
124 // of the objective function.
125 printf('refused: objective increase\n');
126 t(1) = t(1)*2;
127 end
128 else
129 if (Ja < J) then
130 // If we are here, the constraints are not respected but
131 // the objective function decrease. So we check if the previous
132 // iteration was feasible...
133 if (max(C - Cmax) < 0) then
134 // ... if yes, it means that the attempt solution is leaving
135 // the admissible domain:
136 // we can not accept that so the iteration is refused
137 printf('refused: at least one constraint is violated\n');
138 // and topkis of violated constraints are augmented
139 for i=1:size(dC,1)
140 if (Ca(i) > Cmax(i)) then
141 t(i+1) = t(i+1)*2;
142 end
143 end
144 else
145 // If we are here, the attempts solution violates the constraints,
146 // but the previous step was not in the admissible domain, so here
147 // we just accept the step and rise the topkis coefficient of
violated
148 // constraints, hoping we will enter the admissible domain
149 // as soon as possible.
150 printf('unfeasible: accepted\n');
151 // "Attempt" solution becomes the current solution

```



```

152         J = Ja;
153         dJ = dJa;
154         C = Ca;
155         dC = dCa;
156         x = x+dx(1:size(x,1));
157         for i=1:size(dC,1)
158             if (Ca(i) > C(i)) then
159                 t(i+1) = t(i+1)*2;
160             end
161         end
162     end
163
164     else
165         // If we are here, objective function rise and constraints are not
166         // respected, two possibilities:
167         // - We are close from the optimal point, and we missed it by
168         //     moving to fast
169         // - We move to fast and linearity hypothesis are not valid
170         //     one basic solution: reducing the step !
171         printf('refused: both objective and constraints deteriorate\n');
172         eps = eps/2;
173     end
174 end
175 it = it+1;
176 end
177 endfunction

```

## 4.2 Modification : Ajout de permissivité

### Notation

Soit un problème d'optimisation défini par :

$$\min_{\Omega} f(\Omega) \quad (A.1)$$

$$g < g_{max}$$

On utilise, pour résoudre ce problème, une méthode de programmation séquentielle, la *Method of Feasible Direction*, MFD.

On notera :

- $df$  le gradient de  $f$  la fonction objectif,
- $dg$  le ou les gradients des contraintes

### Modification proposée

MFD se révèle très strict vis à vis du respect des contraintes, il est impossible de re-sortir du domaine admissible. Cela permet d'obtenir des formes qui respectent les contraintes imposées de manière quasi-systématique (tant que celles-ci sont physiquement possible).

Cependant, dans certains cas, cela amène l'algorithme à se bloquer sur un changement topologique pourtant intéressant. Ce type de problème peut être représenté simplement par la figure suivante :

Comme le montre le graphique précédent, si le pas est trop faible, il est impossible pour MFD de franchir une zone non-admissible : l'algorithme ne peut pas quitter un îlot admissible.

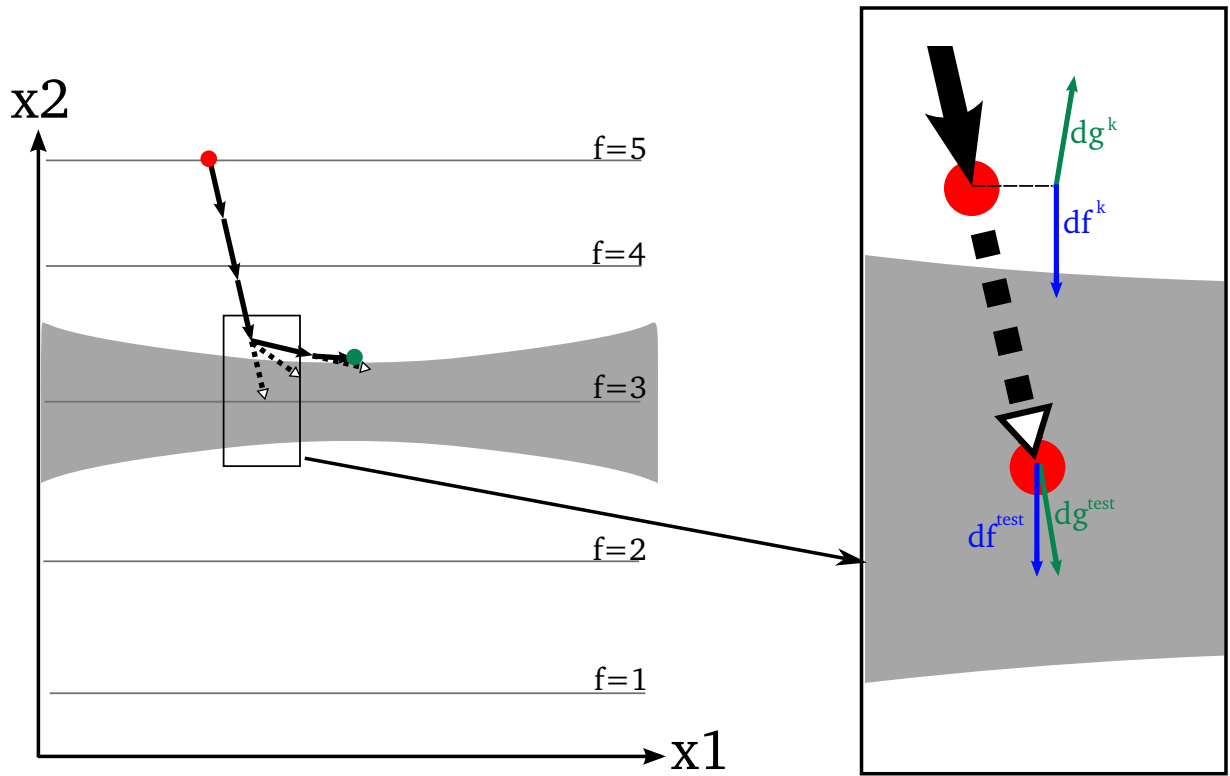


Figure A.1 – Exemple de problème d'optimisation à deux paramètres  $(x_1, x_2)$  sous une contrainte représentée par la zone grise. L'algorithme MFD classique, si le pas est trop faible, va rester bloquer au point vert. L'agrandissement de droite va servir de base pour la notion de permissivité.

Nous proposons d'exploiter les données des pas non acceptés, et éventuellement d'accepter la sortie du domaine admissible si cela amène une configuration de gradients plus favorable. Pour cela, on propose la modification suivante de l'algorithme :

Le test de permissivité va alors s'appuyer sur la comparaison des directions de gradients entre la forme courante et la forme test. On définit pour chaque contrainte son angle vis à vis du gradient de l'objectif, noté  $c(df, dg)$  :

$$c(df, dg) = \frac{df \cdot dg}{\|df\| \cdot \|dg\|} \quad (\text{A.2})$$

On définit alors l'amélioration directionnelle pour la contrainte  $i$  comme étant :

$$C_i(df^{test}, df^k, dg_i^{test}, dg_i^k) = c(df^{test}, dg_i^{test}) - c(df^k, dg_i^k) \quad (\text{A.3})$$

Cette valeur est en principe comprise dans l'intervalle  $[-2; 2]$ , en pratique, elle reste bien souvent dans l'intervalle  $[-0.5; 0.5]$

Le test de permissivité prend alors la forme suivante :

$$\sum_i C_i > tol \quad (\text{A.4})$$

**La somme n'est réalisée que sur les contraintes violées.**  $tol$  est une tolérance pour la permissivité, on lui reconnaîtra quelques valeurs particulières :

- $tol = 0$  : La moindre amélioration directionnelle entrainera la validation de l'itération
- $tol = +\infty$  : Pas de permissivité, MFD classique
- $tol = -\infty$  : Tous les pas sont acceptés

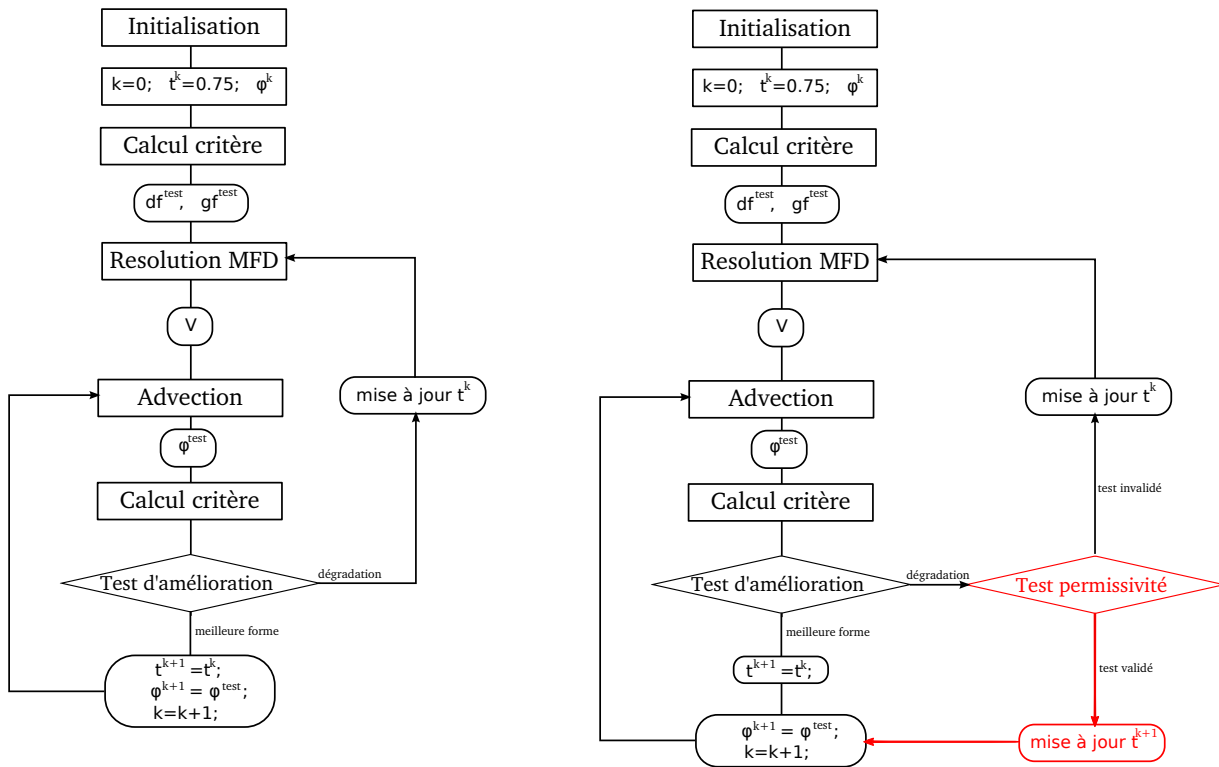


Figure A.2 – Modification proposée de l’algorithme MFD : à gauche l’algorithme classique, et à droite sa version modifiée.

Si ce critère est respecté, le pas est accepté, **cependant, le coefficient de Topkis des contraintes violées est augmenté!**

# Annexe B

## Études des bornes de théoriques pour les propriétés thermomécaniques des matériaux architecturés

### 1 Borne de Hashin-Shtrikman

#### 1.1 Définition

Nous présentons ici les bornes de Hashin-Shtrikman pour les propriétés mécaniques des composites bi-phasés (Hashin et Shtrikman, 1963). Nous commençons par détailler les notations utilisées :

- $\kappa_i$  pour le module de compressibilité du  $i^{eme}$  matériau,
- $\mu_i$  pour le module de cisaillement du  $i^{eme}$  matériau,
- $f_i$  pour la fraction volumique du  $i^{eme}$  matériau.

De plus, les bornes qui vont maintenant être définies ne sont valables que dans le cas où  $\kappa_2 > \kappa_1$  et  $\mu_2 > \mu_1$ .

Nous définissons la borne supérieure du module de compressibilité comme étant

$$\kappa_{HS,u} = \kappa_2 + \frac{f_1}{\frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} + \frac{3f_2}{3\kappa_2 + 4\mu_2}}, \quad (\text{B.1})$$

similairement, la borne inférieure s'écrit

$$\kappa_{HS,l} = \kappa_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} + \frac{3f_1}{3\kappa_1 + 4\mu_1}}. \quad (\text{B.2})$$

Nous écrivons aussi, pour le module de cisaillement, la borne supérieure

$$\mu_{HS,u} = \mu_2 + \frac{f_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6(\kappa_2 + 2\mu_2)f_2}{5\mu_2(3\kappa_2 + 4\mu_2)}}, \quad (\text{B.3})$$

et la borne inférieure

$$\mu_{HS,l} = \mu_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(\kappa_1 + 2\mu_1)f_1}{5\mu_1(3\kappa_1 + 4\mu_1)}}. \quad (\text{B.4})$$

## 1.2 Extraction de bornes sur le module de Young

Pour un matériau isotrope, le module de Young peut être calculé à partir des modules  $\kappa$  et  $\mu$  du matériau, selon

$$E = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}, \quad (\text{B.5})$$

Hashin et Shtrikman (1963) avance qu'il est possible de calculer les bornes sur le module de Young  $E$  à partir de la relation (B.5). Zimmermann (1992) détaille le calcul de ces bornes, et arrive à la conclusion qu'injecter les expressions des bornes sur  $\kappa$  et  $\mu$  dans la relation (B.5) permet de formuler les bornes, ce qui donne pour la borne supérieure

$$E_{HS,u} = \frac{9\kappa_{HS,u}\mu_{HS,u}}{3\kappa_{HS,u} + \mu_{HS,u}}, \quad (\text{B.6})$$

et pour la borne inférieure

$$E_{HS,l} = \frac{9\kappa_{HS,l}\mu_{HS,l}}{3\kappa_{HS,l} + \mu_{HS,l}}. \quad (\text{B.7})$$

## 1.3 Extraction de bornes sur le coefficient de Poisson

Toujours pour un matériau isotrope, le coefficient de Poisson peut être calculé ) partir des modules  $\kappa$  et  $\mu$  du matériau, selon

$$\nu = \frac{3\kappa - 2\mu}{6\kappa + 2\mu}. \quad (\text{B.8})$$

Zimmermann (1992) montre aussi, à l'aide d'une étude de la variation de l'expression (B.8), que des bornes sur le coefficient de Poisson peuvent être extraites à partir des bornes sur  $\kappa$  et  $\mu$ , cela donne pour la borne supérieure

$$\nu_{HS,u} = \frac{3\kappa_{HS,l} - 2\mu_{HS,u}}{6\kappa_{HS,l} + 2\mu_{HS,u}}, \quad (\text{B.9})$$

et pour la borne inférieure

$$\nu_{HS,l} = \frac{3\kappa_{HS,u} - 2\mu_{HS,l}}{6\kappa_{HS,u} + 2\mu_{HS,l}}. \quad (\text{B.10})$$

## 2 Bornes pour la dilatation thermique des matériaux multi-phasés

### 2.1 Définition

#### Notation

Afin de définir les bornes pour la dilatation thermique des composites, il est nécessaire d'avoir accès à plusieurs propriétés des phases constitutives qui sont

- -  $\alpha_i$ , la dilatation thermique de la phase  $i$ .
- -  $\kappa_i$ , le module de compressibilité de la phase  $i$ .
- -  $f_i$ , la fraction volumique de la phase  $i$ .
- -  $\mu_{min}$  le plus petit module de cisaillement parmi celui de toutes les phases du composite.
- -  $\mu_{max}$  le plus grand module de cisaillement parmi celui de toutes les phases du composite.

#### Borne de Gibiansky-Torquato pour les propriétés thermoélastiques matériaux polyphasés

La série d'équations suivante définit les bornes de Gibiansky et Torquato (1997) pour les propriétés thermoélastiques des composites isotropes comportant plusieurs phases.

On commence par définir une série de termes permettant d'écrire plus simplement l'expression finale, cela donne

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_i \left[ \frac{f_i d}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{min}} \right] , & A_2 &= \sum_i \left[ \frac{f_i \alpha_i \kappa_i}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{min}} \right] \\ A_3 &= \sum_i \left[ \frac{f_i \alpha_i \kappa_i}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{max}} \right] , & A_4 &= \sum_i \left[ \frac{2f_i(d-1)\mu_{max}\alpha_i^2\kappa_i}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{max}} \right] \\ A_5 &= \sum_i \left[ \frac{2f_i(d-1)\mu_{min}\alpha_i^2\kappa_i}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{min}} \right] , & A_6 &= \sum_i \left[ \frac{f_i d}{d\kappa_i + 2(d-1)\mu_{max}} \right] \end{aligned}$$

avec  $d$  le nombre de dimensions spatiales considérées.

En s'appuyant sur les termes précédemment définis, nous obtenons les valeurs de  $K_{HS,u}$  et  $K_{HS,l}$ , qui sont respectivement les valeurs des bornes de Hashin-Strikeman supérieure et inférieure pour le module de compressibilité du matériau, ce qui donne

$$K_{HS,l} = A_1^{-1} + \frac{2(d-1)\mu_{min}}{d} , \quad K_{HS,u} = A_6^{-1} + \frac{2(d-1)\mu_{max}}{d}$$

Une partie des termes est de nouveau rassemblée pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} \Phi &= - \left( K_{HS,u} + \frac{d(d-1)\mu_{max}}{d} \right) \left( K_{HS,l} + \frac{2(d-1)\mu_{min}}{d} \right) (A_2 - A_3)^2 \\ &+ \left( \frac{2(d-1)(\mu_{max} - \mu_{min})}{d} \right) \left( A_1^{-1} A_2^2 - A_6^{-1} A_3^2 \right) \\ &+ (K_{HS,u} - K_{HS,l})(A_4 - A_5) \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression des bornes inférieure et supérieure de la dilatation thermique de notre composite multi-phasé en tant que fonction du module de compressibilité de l'hybride considéré

$$\alpha_{min}(\kappa) = \frac{1}{\kappa(K_{HS,u} - K_{HS,l})} \left\{ (K_{HS,u} - \kappa)(A_1^{-1} A_2) + (\kappa - K_{HS,l})A_6^{-1} A_3 \right\} - \sqrt{(K_{HS,u} - \kappa)(\kappa - K_{HS,l})\Phi} \quad (B.11)$$

$$\alpha_{max}(\kappa) = \frac{1}{\kappa(K_{HS,u} - K_{HS,l})} \left\{ (K_{HS,u} - \kappa)(A_1^{-1} A_2) + (\kappa - K_{HS,l})A_6^{-1} A_3 \right\} + \sqrt{(K_{HS,u} - \kappa)(\kappa - K_{HS,l})\Phi} \quad (B.12)$$

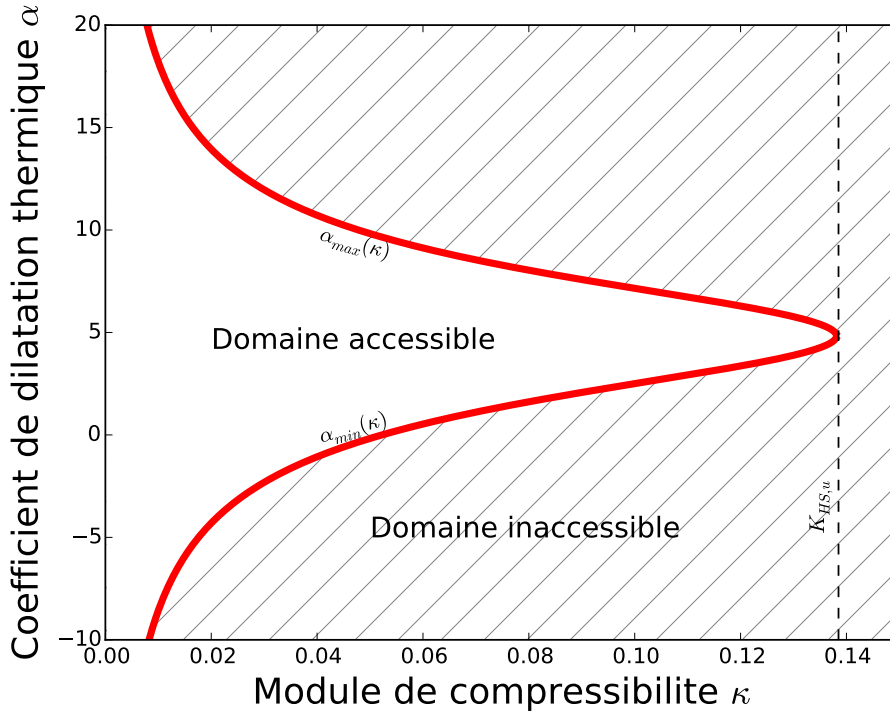


Figure B.1 – Forme typique des bornes de Gibiansky-Torquato pour un matériau quelconque, la courbe formée délimite deux espaces de propriétés accessible et inaccessible par un matériau isotrope. La borne supérieure de Hashin-Strikeman pour le module de compressibilité a aussi été ajoutée sur la figure.

La figure B.1 présente l'allure typique de ces bornes, elles délimitent l'espace des propriétés admissibles pour un matériau isotrope.

Nous constatons la concurrence entre rigidité (à travers le module de compressibilité  $\kappa$ ) et négativité de coefficient de dilatation thermique : l'abaissement de la dilatation thermique se fera au détriment de la rigidité du composite, probablement via la promotion de mécanismes locaux.

## 2.2 Étude sur les propriétés atteignables

Nous allons maintenant nous aider des bornes ainsi définies pour tenter d'extraire des informations sur les propriétés atteignables par diverses familles de matériaux. L'objectif est le contrôle de la dilatation thermique effective de notre matériau, nous souhaitons donc savoir quelle plage de dilatation thermique il est possible d'atteindre pour différentes combinaisons de matériaux.

### Cas d'un composite biphase

Gibiansky et Torquato (1997), eq. (4-10) montre que, dans le cas d'un composite comportant uniquement deux phases,  $\Phi$  s'annule, et que par conséquent les deux bornes se confondent. Le coefficient de dilatation thermique est alors défini explicitement par la relation

$$\alpha(\kappa) = \frac{1}{\kappa(K_{HS,u} - K_{HS,l})} \left\{ (K_{HS,u} - \kappa)(A_1^{-1}A_2) + (\kappa - K_{HS,l})A_6^{-1}A_3 \right\} \quad (\text{B.13})$$

Cette expression analytique reste complexe à manipuler, il n'est pas aisé d'en déduire des tendances générales sur les propriétés thermoélastiques du composite final. Dans le but d'obtenir

plus d'information, on propose maintenant d'utiliser des bornes plus larges, Schapery (1968) propose ainsi une expression simplifiée des bornes qui donne, pour un composite biphasé

$$\alpha(\kappa) = (f\alpha_1 + (1-f)\alpha_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2}}{\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa}}. \quad (\text{B.14})$$

Schapery (1968) explique que dans l'hypothèse où le module de compressibilité  $\kappa$  du composite approche sa valeur théorique maximum, l'expression précédente peut être simplifiée en

$$\frac{\alpha_v}{d} = \frac{f_1\kappa_1\alpha_1 + f_2\kappa_2\alpha_2}{f_1\kappa_1 + f_2\kappa_2},$$

expression qui est similaire à celle proposée par Turner (1946). Cette expression peut alors se réécrire sous la forme

$$\frac{\alpha_v}{d} = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{(1-f)\kappa_2}{f\kappa_1 + (1-f)\kappa_2}. \quad (\text{B.15})$$

Il est important de noter que ces expressions sont valables pour les matériaux anisotropes. Cependant si les propriétés effectives sont isotropes l'égalité

$$\alpha = \frac{\alpha_v}{d} \quad (\text{B.16})$$

est alors respectée. Nous supposons pour la suite que le composite est isotrope.

L'expression (B.15) est illustrée par la figure B.2, la borne a été tracée sur l'intervalle  $\kappa \in [K_{HS,l}; K_{HS,u}]$ . Cette expression donne une information importante : dans la mesure où on a

$$0 \leq \frac{(1-f)\kappa_2}{f\kappa_1 + (1-f)\kappa_2} \leq 1,$$

on peut conclure que

$$\min(\alpha_1, \alpha_2) \leq \alpha(\kappa) \leq \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Cela implique qu'un composite biphasé ne pourra avoir une dilatation thermique nulle ou négative qui si au moins une de ses phases constitutives comporte un coefficient de dilatation thermique nul ou négatif.



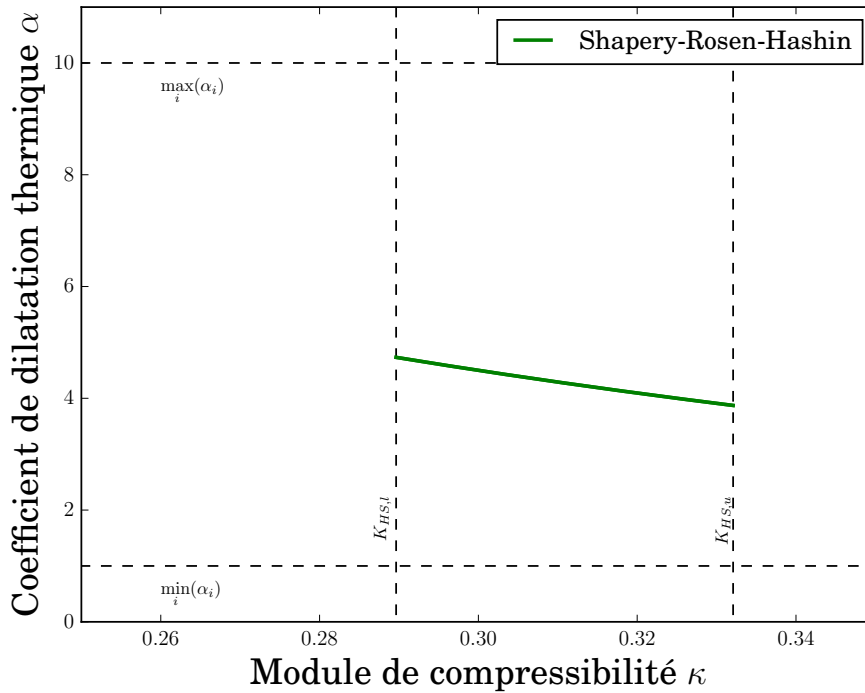


Figure B.2 – Définition des propriétés thermoélastiques d'un composite biphasé à partir des bornes de Shapery-Rosen-Hashin. Dans le cas d'un composite biphasé, la borne supérieure et la borne inférieure se superposent, définissant une relation unique entre dilatation thermique et module de compressibilité.

### Composite biphasé spécial : solide-vide

En reprenant l'expression de la borne de Gibiansky-Torquato pour un composite biphasé (équation (B.13)), et en considérant que  $\kappa_2 \ll \kappa_1$  et  $\mu_{min} \approx 0$ , on obtient directement

$$\alpha = \alpha_1. \quad (\text{B.17})$$

Ce point indique un phénomène bien connu : la dilatation thermique d'un treillis est semblable à celle du matériau composant sa structure. Il est important de noter que si la dilatation thermique ne dépend plus de l'architecture, il n'en va pas de même pour ce qui est de la contrainte thermique.

### Composite triphasé

Réaliser une analyse de l'expression des bornes de Gibiansky-Torquato dans le but de démontrer qu'il est possible de construire des composites triphasés comportant une dilatation négative ou nulle à partir de phases ayant une dilatation thermique strictement positive est une tâche complexe. Nous proposons ici de montrer par l'exemple que l'ajout d'une phase "vide" permet d'atteindre les plages de dilatation thermique effective souhaitées.

Nous définissons une famille de composites triphasés dont les propriétés sont établies par le tableau B.1.  $f_{void}$  représente la fraction volumique de vide présente dans le matériau.

La figure B.3 présente les bornes de Gibiansky-Torquato pour différentes fraction volumique de vide, nous retrouvons la borne de Shapery-Rosen-Hashin dans le cas où  $f_{void} = 0\%$ , cependant nous remarquons que l'ajout de seulement 1% de vide permet d'élargir considérablement la plage de dilatation thermique effective accessible par notre matériau.

Propriété	phase 1	phase 2	phase vide
$E$ [GPa]	0.91	0.2275	$0.91 \times 10^{-5}$
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$ [ppm/K]	1	10	1
Vol. relatif	$0.5 - \frac{1}{2}f_{void}$	$0.5 - \frac{1}{2}f_{void}$	$f_{void}$

Table B.1 – Exemple de propriétés matériau pour un composite triphasé.

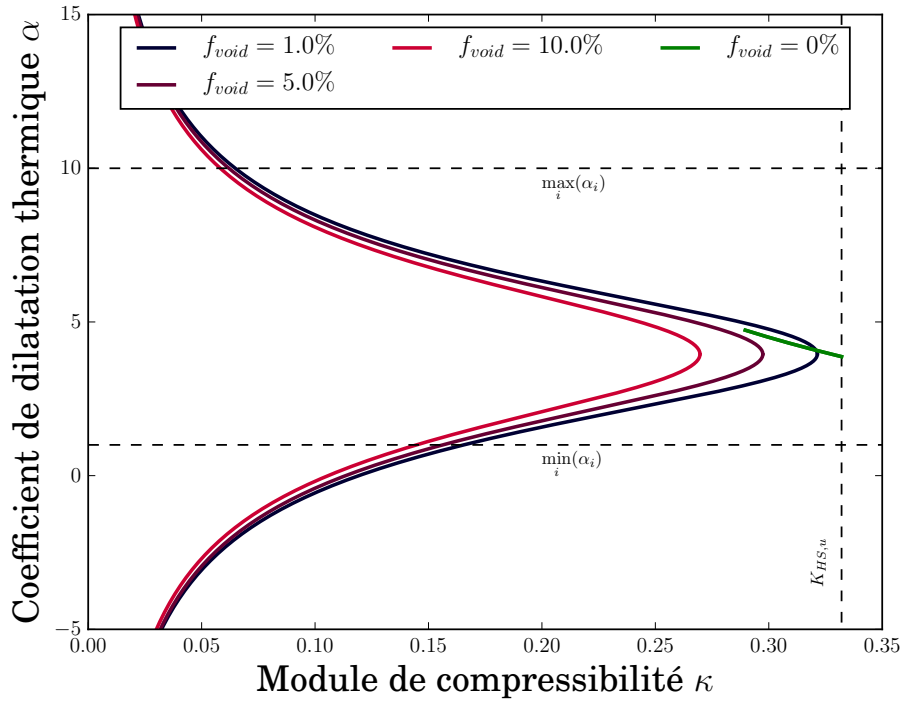


Figure B.3 – Exemple de borne de Gibiansky-Torquato pour les propriétés matériaux indiquées dans le tableau B.1. L'ajout de seulement 1% de vide dans la constitution du composites permet d'atteindre une large plage de coefficient de dilatation thermique effectif.

Nous observons que au moins dans le cas décrit par le tableau B.1 il est possible de générer des composites ayant une dilatation thermique effective négative ou nulle à partir de phases constitutives ayant toutes des dilatations thermiques positives.

## 2.3 Étude paramétrique des bornes

Étudier la morphologie des bornes, même de manière quantitative, permet de dégager les propriétés améliorant le contrôle de la dilatation thermique, et ainsi de pouvoir interpréter plus facilement la manière dont un algorithme d'optimisation se comporte.

### Effet des fractions volumiques

On considère ici un composite défini qualitativement de trois phases que sont :

- Phase 1 : Une phase rigide avec une dilatation thermique faible (métal),
- Phase 2 : Une phase peu rigide avec une dilatation thermique élevée (polymère),
- Phase vide : Une phase avec rigidité proche de zéro.

Ces phases sont présente dans les fractions volumiques  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_{vide}$ , respectivement. Ces fractions volumiques respectent la règle

$$f_1 + f_2 + f_{void} = 1$$

pour toutes les bornes tracées sur les figure B.4, B.6 et B.5.

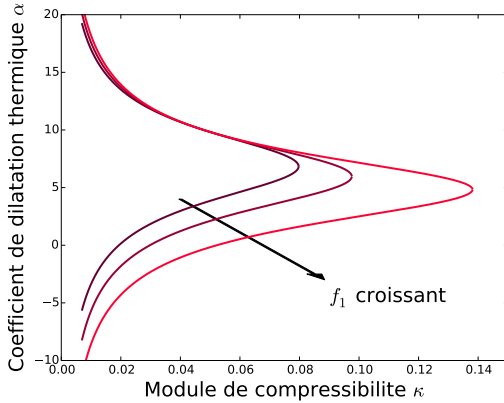


Figure B.4 – Effet de la variation de  $f_1$  à  $f_2$  constant,  $f_{void}$  est donc contraint et vaut  $1 - f_2 - f_1$

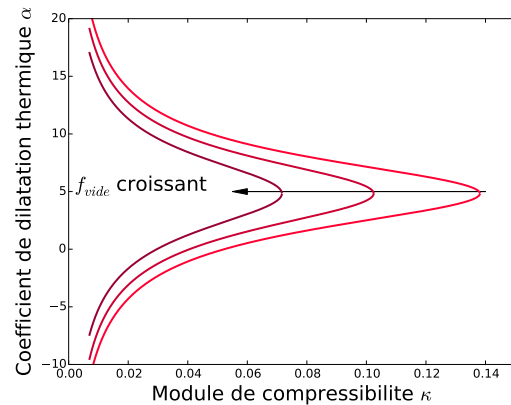


Figure B.5 – Effet de la variation de  $f_{void}$  à  $\frac{f_1}{f_2}$  constant.

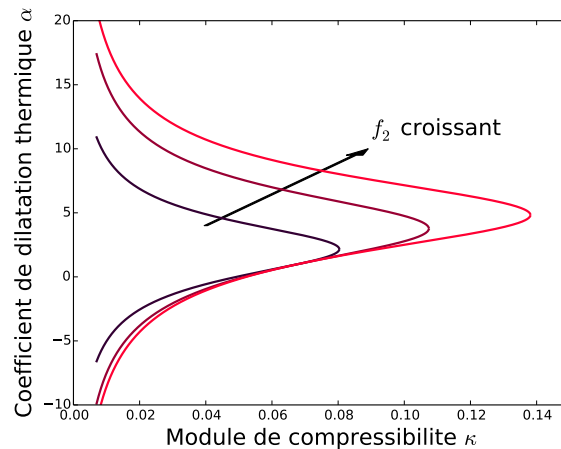


Figure B.6 – Effet de la variation de  $f_2$  à  $f_1$  constant.,  $f_{void}$  est donc contraint et vaut  $1 - f_2 - f_1$

Nous observons que :

- (figure B.4) L'ajout de phase rigide permet d'atteindre des coefficients de dilatation plus faible (la borne est repoussée vers le bas).
- (figure B.6) L'ajout de phase à forte dilatation permet d'atteindre des coefficient de dilatation plus important (la borne est repoussée vers le haut).
- (figure B.5) L'ajout de vide écrase la borne horizontalement

### Effet de la différence de dilatation thermique

Quand on fait augmenter la différence de dilatation thermique entre les deux phases solides, on constate que la borne s'étale verticalement : une grande différence de dilatation thermique permettra probablement un meilleur contrôle du coefficient de dilatation thermique (cf. figure B.7) .

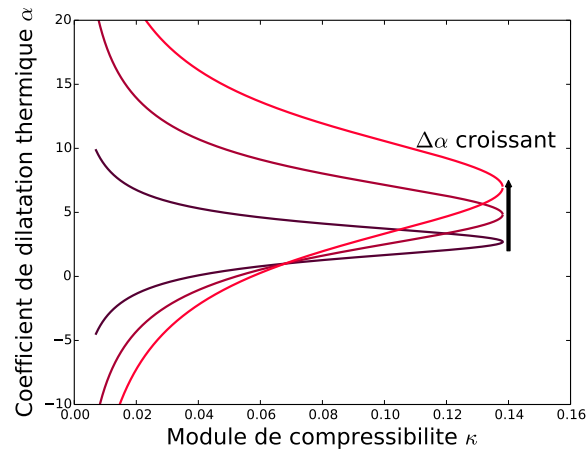


Figure B.7 – Effet de la variation de  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

### Effet de la rigidité de l'ersatz

Pour des raisons numériques expliquées dans le chapitre II, nous représentons le vide par une phase ersatz. Numériquement ce vide comporte donc une rigidité fictive qui sera considérée dans les calculs mécaniques. Classiquement un facteur 1000 de rigidité entre l'ersatz et les autres phases solide est utilisé. Il n'est pas possible d'utiliser un facteur trop important à cause de la méthode des éléments finis utilisée pour évaluer les propriétés : un facteur trop grand cause un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité.

La figure B.8 présente les bornes de Gibiansky-Torquato pour un matériau constitué des phases décrites par le tableau B.1 et comportant 1% de phase vide. Les bornes ont été tracées pour différents rapport de module de Young entre l'ersatz et une des phases solides. Cette figure met en évidence l'impact important des propriétés de l'ersatz.

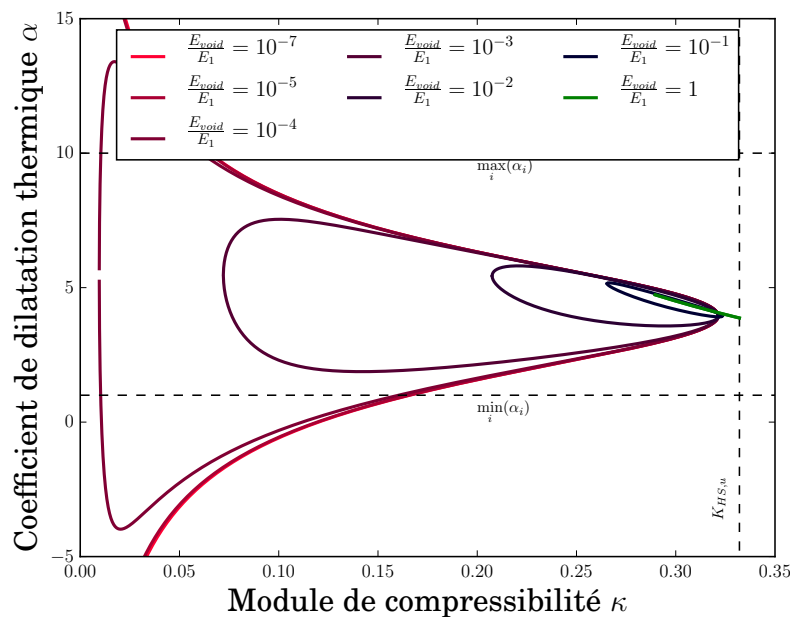


Figure B.8 – Effet de la variation du rapport des modules de Young entre la phase solide 1 et la phase vide sur la forme des bornes de Gibiansky-Torquato.

La figure B.8 souligne que le choix des propriétés de l'ersatz a une influence vis à vis des propriétés atteignables. Bien que cette constatation indique qu'il serait préférable de prendre

un contraste de propriétés très important, cela est cependant impossible à cause de la méthode numérique utilisée pour évaluer les propriétés. Il sera nécessaire de trouver un compromis.

## 2.4 Conclusions

Plusieurs bornes théoriques pour les propriétés thermoélastiques des composites multi-phasés ont été étudié, cela dans le but de connaître les limites théoriquement atteignables lors de l'optimisation de ce type de matériau.

Il a été établi plusieurs résultats importants :

- Un composite biphasé ne pourra avoir un coefficient de dilatation thermique hors de l'intervalle formé par la plus faible et la plus forte dilatation thermique de ses constituants.
- La dilatation thermique d'un composite biphasé solide-vide est constante et égale à la dilatation thermique de sa phase solide
- Il est nécessaire de traiter le cas d'un composite triphasé comportant un ersatz de vide pour pouvoir contrôler le coefficient de dilatation thermique de manière pertinente, sans doute car cela permet la formation de mécanismes.

Nous traçons maintenant les bornes de Gibiansky-Torquato pour le matériau traité dans le chapitre VI, les propriétés des phases constitutives sont rappelées dans le tableau B.2, la figure B.9 présente les bornes correspondantes.

Propriété	phase A	phase B	phase vide
$E$	0.91	0.91	$0.91 \times 10^{-4}$
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$	1	10	1
Vol. relatif	0.25	0.25	0.5

Table B.2 – Propriétés des phases constitutives utilisées pour les exemples du chapitre VI.

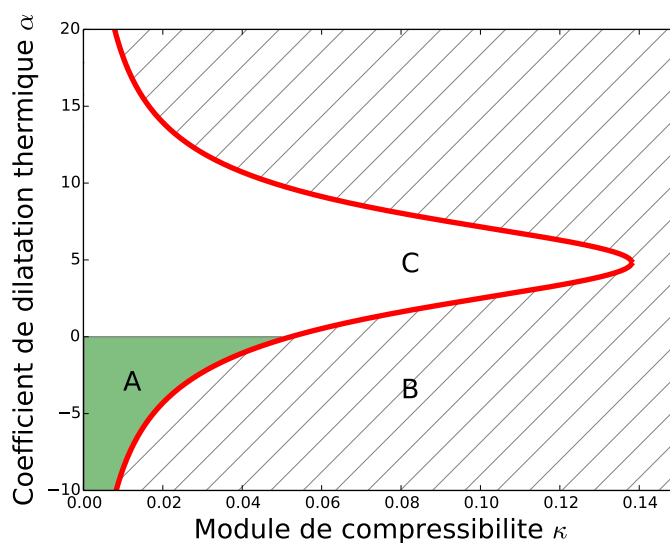


Figure B.9 – Bornes de Gibiansky-Torquato pour les propriétés décrite sur le tableau B.2. A. Zone des propriétés que nous allons chercher à atteindre. B. Zone des propriétés inaccessibles. C. Zone des propriétés accessibles.

# Annexe C

## Détails des dérivations de forme

Cette annexe condense les détails des étapes des dérivations de formes utilisées dans l'ensemble du document. Les dérivées sont rangées par thème : mécanique des structures, homogénéisation et contraintes géométriques.

### 1 Outils mathématiques pour la dérivation

La dérivation de forme est souvent une étape difficile, pour cette raison, plusieurs outils mathématiques sont détaillé dans cette section pour faciliter le calcul.

#### Formule de Green

La formule de Green, souvent appelée intégration par partie dans la littérature de l'optimisation de forme, est un résultat de manipulation des intégrales. Elle s'écrit

$$\int_{\Omega} u(\bar{x}) \operatorname{div}(\bar{v}(\bar{x})) dV = \int_{\partial\Omega} u(\bar{x}) \bar{v}(\bar{x}) \cdot \bar{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla u(\bar{x})) \cdot \bar{v}(\bar{x}) dV, \quad (\text{C.1})$$

avec  $u$  un champ scalaire et  $\bar{v}$  un champ vectoriel quelconque.

#### Formule de la coaire

La formule de coaire permet de transformer une intégrale surfacique en deux intégrations successives le long d'un bord et d'un rayon, comme illustré sur la figure C.1. La formule s'écrit

$$\int_D f(\bar{x}) dV = \int_{\partial\Omega} \left[ \int_{\text{rays}} f(\bar{x}) \prod_{i=1}^{N-1} (1 + d_{\Omega}(z) \kappa_i(y)) dz \right] dl, \quad (\text{C.2})$$

avec  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs de la base mobile représentée sur la figure C.1,  $N$  la dimension spatiale du problème,  $d_{\Omega}(z)$  la fonction distance signée à l'interface et  $\kappa_i$  la  $i^{\text{eme}}$  courbure principale de la surface (une en 2D, 2 en 3D).

Cette formule présente le grand intérêt de faire apparaître à partir d'une intégrale surfacique une intégrale sur le bord d'un sous domaine  $\partial\Omega$ , et peut donc permettre de retrouver une intégrale de bordure assimilable à une expression reconnaissable de dérivée de forme.

La formulation donnée par l'équation (C.2) reste cependant complexe à évaluer, notamment à cause de la présence de la courbure moyenne  $\kappa_i$  du bord  $\partial\Omega$ . Pour cette raison, Allaire et al. [Allaire et al. \(2013\),p.23](#) propose une simplification de l'expression définie précédemment. Considérant que  $d_{\Omega}(z) \ll 1$ , on peut négliger le terme  $d_{\Omega}(z) \kappa_i(y)$ , on obtient alors

$$\int_D f(\bar{x}) dv = \int_{\partial\Omega} \left[ \int_{\text{rays}} f(\bar{x}) dz \right] dl, \quad (\text{C.3})$$

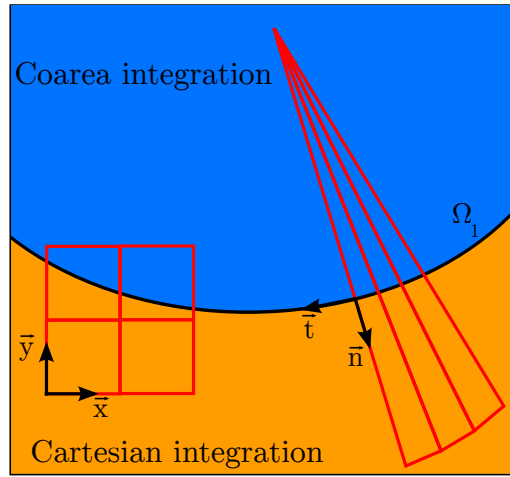


Figure C.1 – Illustration du principe de la coaire

cette expression est appelée *Jacobian-free*, et est utilisée dans plusieurs études pour simplifier les expressions de dérivée de forme Allaire *et al.* (2013, 2014); Michailidis (2014); Vermaak *et al.* (2013).

### Dérivée de forme de la fonction distance signée

Les schémas d'interpolation définis en 2 ont tous en commun d'amener une dépendance des propriétés physique à la distance signée, or la distance signée fait partie des fonctions dépendant du domaine optimisable. De ce fait, elle n'est pas une constante vis à vis de la dérivation de forme. On trouve dans Allaire *et al.* (2013), 5.1 une présentation des résultats sur le calcul de la dérivée de forme de la distance signée. L'expression fournie est la suivante

$$d_{\Omega}(\bar{x})'(\bar{\theta}) = -\bar{\theta}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \cdot \bar{n}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})), \quad (\text{C.4})$$

avec  $p_{/\partial\Omega}(x)$  la projection d'un point de coordonnée  $\bar{x}$  sur le bord  $\partial\Omega$  et  $\bar{n}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x}))$  la normale de ce même point projeté. La figure C.2 illustre les termes composant la dérivée de forme de la distance signée.

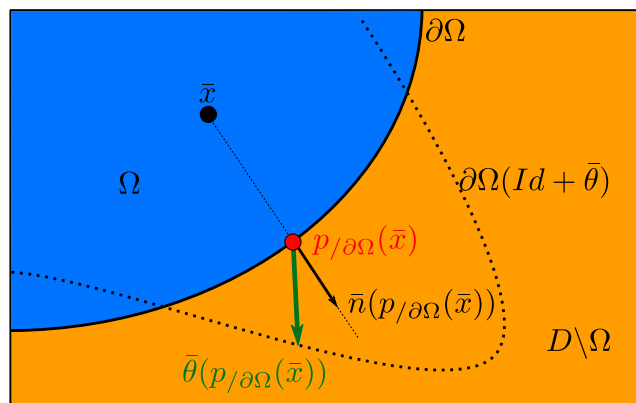


Figure C.2 – Illustration des différents termes composant l'expression de la dérivée de forme de la distance signée définie dans l'équation (C.4).

### Dérivée de forme de la normale à la fonction distance signée

On utilise dans le corps du document un résultat de dérivation présenté par Allaire *et al.* (2013) qui définit la dérivée de forme de la normale de la fonction distance signée  $\bar{n}$  (cf figure C.3. Elle

s'écrit

$$\nabla d_{\Omega}(\bar{x})'(\bar{\theta}) \approx -\nabla_{\partial\Omega} \left( \bar{\theta}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \cdot \bar{n}(p_{/\partial\Omega}(\bar{x})) \right), \quad \forall x \in D \setminus \Sigma \quad (\text{C.5})$$

avec :

- $\nabla_{\partial\Omega}(\cdot)$  l'opérateur gradient tangentiel,
- $\Sigma$  le squelette du domaine  $\Omega$

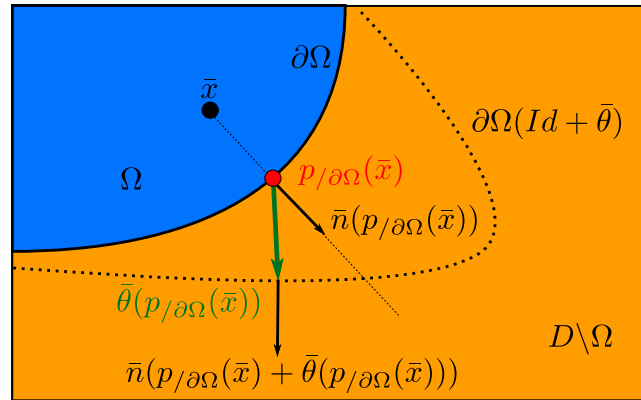


Figure C.3 – Illustration des différents termes composant l'expression de la dérivée de forme de la distance signée définie dans l'équation (C.5).



## 2 Mécanique des structures

On présente dans cette section plusieurs dérivées de formes pour des critères classiques. Cette section a pour but la présentation des procédures de dérivation de manière simplifiée. À titre de complément, on indique des références fournissant un cadre mathématique plus rigoureux.

### 2.1 Compliance en élasticité linéaire

#### Sans dépendance

Les équations d'état de l'élasticité linéaire s'écrivent

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \right) & = \bar{f} \quad \bar{x} \in \Omega \\ \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \cdot \bar{n} & = \bar{g} \quad \bar{x} \in \Gamma_N \\ \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \cdot \bar{n} & = \bar{0} \quad \bar{x} \in \Gamma \\ \bar{u} & = \bar{0} \quad \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

avec :

- $\overset{\equiv}{\bar{C}}$  le tenseur des modules élastiques
- $\bar{\bar{\epsilon}}(\cdot)$  l'opérateur de gradient symétrisé
- $\bar{f}$  la force volumique
- $\Omega$  le domaine dans lequel la matière est distribuée
- $\bar{g}$  la force surfacique appliquée sur le bord de Neumann  $\Gamma_N$ .
- $\bar{u}$  le déplacement solution du problème d'élasticité linéaire

**Remarque :** On note que le bord  $\partial\Omega$  est équivalent à  $\Gamma \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$ .  
On définit la compliance comme étant le travail des forces extérieures :

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{u}_\Omega \, dS \quad (\text{C.7})$$

Le critère ainsi défini est une forme intégrale dépendant du domaine  $\Omega$ , on utilise la méthode de Céa (Céa, 1986) pour la dérivation de forme d'un tel critère.

On commence par écrire le Lagrangien du critère, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{p}, \bar{\mu}) &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{v} \, dS + \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \right) \cdot \bar{p} \, dV \\ &+ \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{v} \, dS + \int_{\Gamma_N} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} - \bar{g} \right) \cdot \bar{p} \, dS + \int_{\Gamma} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} \cdot \bar{p} \, dS, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

on a pour cela introduit deux multiplicateurs de Lagrange  $\bar{p}$  et  $\bar{\mu}$ . Pour simplifier les calculs, on écrit aussi le Lagrangien après une intégration par partie. Cette forme sera utilisée plus tard.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, p, \mu) &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{v} \, dS + \int_{\Omega} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}) \, dV - \int_{\partial\Omega} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} \cdot \bar{p} \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{v} \, dS + \int_{\Gamma_N} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \cdot \bar{n} - \bar{g} \right) \bar{p} \, dS + \int_{\Gamma} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} \cdot \bar{p} \, dS, \end{aligned}$$

que l'on peut simplifier en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, p, \mu) &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{v} \, dS + \int_{\Omega} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}) \, dV - \int_{\Gamma_D} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} \cdot \bar{p} \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{v} \, dS - \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{p} \, dS. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

On recherche maintenant le point selle  $(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)$  du Lagrangien, que l'on obtient en étudiant l'annulation des dérivées directionnelles par rapport à  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{\mu}$ , calculées en ce même point :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{p}}(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*), \bar{\Phi} \right\rangle &= \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \right) \cdot \bar{\Phi} \, dV + \int_{\Gamma_N} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*)\bar{n} - \bar{g} \right) \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &\quad + \int_{\Gamma} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*)\bar{n} \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mu}}(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*), \bar{\Phi} \right\rangle = \int_{\Gamma_D} \bar{\Phi} \cdot \bar{v}^* \, dS = 0 \quad (\text{C.11})$$

En prenant un support compact sur  $\bar{\Phi}$ , et en variant la trace de  $\bar{\Phi}$  sur les bords du domaine, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \right) &= 0 & \bar{x} \in \Omega \\ \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \cdot \bar{n} &= \bar{g} & \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \cdot \bar{n} &= \bar{0} & \bar{x} \in \Gamma \\ \bar{v}^* &= 0 & \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

ce qui implique que  $\bar{v}^* = \bar{u}$ .

On s'intéresse enfin à la dernière dérivée directionnelle du Lagrangien que l'on écrit à partir de la forme donnée par l'équation (C.9), cela donne

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{v}}(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*), \bar{\Phi} \right\rangle &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\Omega} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\Phi})\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \, dV \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\Phi})\bar{p}^* \cdot \bar{n} \, dS + \int_{\Gamma_D} \bar{\mu}^* \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

En réalisant une intégration par partie sur le second terme de cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{v}}(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*), \bar{\Phi} \right\rangle &= \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\partial\Omega} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*)\bar{n} \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) \cdot \bar{\Phi} \, dV \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\Phi})\bar{p}^* \cdot \bar{n} \, dS + \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &= 0, \end{aligned}$$

en scindant le second terme défini sur le bord du domaine, on retrouve

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{v}}(\bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*), \bar{\Phi} \right\rangle &= \int_{\Gamma_N} (\bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*)\bar{n} + \bar{g}) \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\Gamma} (\bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*)\bar{n} \cdot \bar{\Phi} \, dS + \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) \cdot \bar{\Phi} \, dV \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*)\bar{\Phi} \cdot \bar{n} \, dS + \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{\Phi} \, dS \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

On obtient ainsi le système d'équations permettant de définir  $\bar{p}^*$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) &= \bar{0} & \bar{x} \in \Omega \\ \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \cdot \bar{n} &= -\bar{g} & \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{\bar{C}}\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \cdot \bar{n} &= \bar{0} & \bar{x} \in \Gamma \\ \bar{p}^* &= \bar{0} & \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

La similitude entre les équations (C.12) et (C.14) indique que l'on a  $\bar{p}^* = -\bar{u}$ . Ce critère est donc auto-adjoint.

Comme présenté dans le chapitre III, on peut écrire que

$$\mathcal{L}'(\Omega, \bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = \mathcal{J}'(\Omega, \bar{v}^*)(\bar{\theta}), \quad (\text{C.15})$$

on écrit donc la dérivée de forme du Lagrangien calculée au point optimal  $(\Omega, \bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)$  à l'aide des théorèmes principaux de la dérivation de forme, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\Omega, \bar{u}, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = & \int_{\Gamma_N} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\text{div } \bar{n})(\bar{g} \cdot \bar{u}) + \frac{\partial(\bar{g} \cdot \bar{u})}{\partial \bar{n}} \right] dS + \int_{\partial\Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right] dS \\ & - \int_{\Gamma_D} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\text{div } \bar{n})(\overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \bar{p}^* \cdot \bar{n}) + \frac{\partial(\overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \bar{p}^* \cdot \bar{n})}{\partial \bar{n}} \right] dS \\ & + \int_{\Gamma_D} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\text{div } \bar{n})(\bar{\mu} \cdot \bar{u}^* - \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}^*) \bar{p}^* \cdot \bar{n}) + \frac{\partial(\bar{\mu} \cdot \bar{u}^* - \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}^*) \bar{p}^* \cdot \bar{n})}{\partial \bar{n}} \right] dS \\ & + \int_{\Gamma_N} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\text{div } \bar{n})(\bar{g} \cdot \bar{p}^*) + \frac{\partial(\bar{g} \cdot \bar{p}^*)}{\partial \bar{n}} \right] dS. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Afin de simplifier cette expression on considère que la perturbation  $\bar{\theta}$  est nulle sur les bords constituant les conditions aux limites, ce qui annule tous les termes définis sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ . Enfin, on remplace  $\bar{p}^*$  par  $-\bar{u}$ , cela donne

$$\mathcal{L}'(\Omega, \bar{u}, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = - \int_{\Gamma} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \right] dS \quad (\text{C.17})$$

### Avec dépendance à la distance signée

Ce calcul reprend les travaux de [Vermaak et al. \(2013\)](#), il utilise aussi plusieurs résultats de [Allaire et al. \(2013\)](#) sur la dérivée de forme de la fonction distance signée ainsi que la formule simplifiée de la coaire.

On réécrit les équations d'état pour prendre en compte la dépendance des propriétés mécaniques à la distance signée, cela donne

$$\begin{cases} -\text{div} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_\Omega) \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \right) = \bar{0} & \bar{x} \in D \\ \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{u}) \cdot \bar{n} = \bar{g} & \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{u} = 0 & \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

avec :

- $\overset{\equiv}{\bar{C}}$  le tenseur des modules élastiques
- $\bar{\bar{\epsilon}}(\cdot)$  l'opérateur de gradient symétrisé
- $\Omega$  le domaine dans lequel la matière est distribuée
- $\bar{g}$  la force surfacique appliquée sur le bord de Neumann  $\Gamma_N$ .
- $\bar{u}$  le déplacement solution du problème d'élasticité linéaire
- $D$  le domaine dans lequel les propriétés matériaux sont distribuées.
- $d_\Omega$  la distance signée du domaine  $\Omega$ .

Le Lagrangien s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{p}, \bar{\mu}) = & \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{v} dS + \int_D \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}) dV - \int_{\Gamma_D} \overset{\equiv}{\bar{C}} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}) \bar{n} \cdot \bar{p} dS \\ & + \int_{\Gamma_D} \bar{\mu} \cdot \bar{v} dS - \int_{\Gamma_N} \bar{g} \cdot \bar{p} dS. \end{aligned}$$

On peut établir de la même façon que précédemment que le problème est auto-adjoint. Il est cependant nécessaire d'effectuer quelques modifications pour obtenir la dérivée de forme. Si on applique directement les théorèmes de dérivation, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\Omega, \bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = & \int_{\Gamma_N} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\operatorname{div} \bar{n})(\bar{g} \cdot \bar{u}) + \frac{\partial(\bar{g} \cdot \bar{u})}{\partial \bar{n}} \right] dS \\
& + \int_D (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ d'_\Omega(\bar{\theta}) \left( \frac{\partial \bar{C}(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) \right] dS \\
& + \int_D (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\operatorname{div} \bar{n})(\bar{C}(d_\Omega) \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*)) + \frac{\partial(\bar{C}(d_\Omega) \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*))}{\partial \bar{n}} \right] dS \\
& - \int_{\Gamma_D} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\operatorname{div} \bar{n})(\bar{C} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \bar{n} \cdot \bar{p}^*) + \frac{\partial(\bar{C} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \bar{n} \cdot \bar{p}^*)}{\partial \bar{n}} \right] dS \\
& + \int_{\Gamma_D} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\operatorname{div} \bar{n})(\bar{\mu}^* \cdot \bar{v}^* - \bar{C} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \bar{n} \cdot \bar{p}^*) + \frac{\partial(\bar{\mu}^* \cdot \bar{v}^* - \bar{C} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) \bar{n} \cdot \bar{p}^*)}{\partial \bar{n}} \right] dS \\
& + \int_{\Gamma_N} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ (\operatorname{div} \bar{n})(\bar{g} \cdot \bar{p}^*) + \frac{\partial(\bar{g} \cdot \bar{p}^*)}{\partial \bar{n}} \right] dS.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Comme précédemment, on considère que la perturbation  $\bar{\theta}$  est nulle sur les bords constituant les conditions aux limites, ce qui annule tous les termes définis sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ . On remplace  $p^*$  par  $-\bar{u}$  puis on impose  $\bar{\theta} = 0$  sur le bord  $\partial D$ , ce qui est légitime dans la mesure où ce n'est pas le bord de la forme. Ces modifications donnent

$$\mathcal{L}'(\Omega, \bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = \int_D (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ d'_\Omega(\bar{\theta}) \left( \frac{\partial \bar{C}(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) \right] dS \tag{C.20}$$

On doit maintenant transformer cette expression afin d'obtenir une intégrale de bord. Pour cela on utilise la formule de la coaire simplifiée (C.3), ce qui donne

$$\mathcal{L}'(\Omega, \bar{v}^*, \bar{p}^*, \bar{\mu}^*)(\bar{\theta}) = \int_{\partial \Omega} \left[ \int_{\text{rays}} d'_\Omega(\bar{\theta}) \left( \frac{\partial \bar{C}(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{v}^*) : \bar{\bar{\epsilon}}(\bar{p}^*) \right) dz \right] dS$$

Enfin, la dérivée de forme de la distance signée définie par l'équation (C.4) est constante et égale à 1 le long des rayons, on peut donc simplifier l'expression :

$$\mathcal{L}'(\Omega, v^*, p^*, \mu^*)(\bar{\theta}) = \int_{\partial \Omega} (\bar{\theta} \cdot \bar{n}) \left[ \int_{\text{rays}} \frac{\partial \bar{C}(d_\Omega)}{\partial d_\Omega} \bar{\bar{\epsilon}}(v^*) \bar{\bar{\epsilon}}(p^*) dz \right] dS \tag{C.21}$$

On retrouve la forme générale d'une dérivée de forme dont on peut extraire une direction de descente.

## 3 Homogénéisation

### 3.1 Contexte

Il est question de calculer les dérivées de formes de tous les critères :  $K$ ,  $\operatorname{tr}(\alpha)$ ,  $\operatorname{err}C_{iso}$  et  $\operatorname{err}\alpha_{iso}$ . La dérivée de forme étant une dérivée, on peut appliquer les mêmes règles de dérivation que pour

la dérivation plus classique (dérivée d'un produit, dérivée d'un quotient, ...). En conclusion, il est nécessaire d'exprimer uniquement les dérivées de formes des coefficients du tenseur d'élasticité et ceux du tenseur de contraintes thermiques.

On applique donc la méthode de Cea présentée en 2.1 que l'on découpe en trois étapes :

- Exprimer le Lagrangien du problème.
- Exprimer l'annulation des dérivées partielles du Lagrangien et en déduire les équations d'état du problème adjoint.
- Exprimer la dérivée de forme.

### 3.2 Coefficients du tenseur d'élasticité

On reprend l'expression (V.29) de  $C_{ijkl}$  le coefficient  $ijkl$  du tenseur d'élasticité, exprimé comme

$$C_{ijkl}^* = \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{\omega}_{ij}))\bar{e}_{kl} dV, \quad (\text{C.22})$$

que l'on définit comme l'objectif du problème. On formule ensuite le Lagrangien correspondant tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}, \bar{p}_{ij}) = & \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij}))\bar{e}_{kl} dy + \\ & \int_Y -\text{div} \left( \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij})) \right) \bar{p}_{ij} dy. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Plusieurs points importants sont à noter :

- Le champ  $\bar{\omega}_{ij}$  implicitement défini par les équations d'état a été remplacé par un champ libre  $\bar{v}_{ij}$ , ce qui simplifie grandement la dérivation de forme par la suite.
- Le champ  $\bar{p}_{ij}$  apparaît dans l'expression du Lagrangien, c'est aussi un champ indépendant des équations d'état. Comme cela a été expliqué dans la section 2.1, ce champ est en fait la solution du problème adjoint.
- On impose que les champs  $\bar{v}_{ij}$  et  $\bar{p}_{ij}$  soient périodiques.

On applique alors le théorème de Green sur le second terme pour le rendre semblable au premier, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}, \bar{p}_{ij}) = & \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij}))\bar{e}_{kl} dy + \\ & \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij})) : \bar{\epsilon}(\bar{p}_{ij}) dy + \\ & \int_{\partial Y} \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij}))\vec{n} \cdot \bar{p}_{ij} ds. \end{aligned}$$

On voit apparaître un terme d'intégration sur le bord qui s'annule du fait de la périodicité de  $\bar{p}_{ij}$  et  $\bar{v}_{ij}$  dans la cellule unitaire ainsi que du changement de signe de  $\vec{n}$  sur deux bords opposés. Finalement on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}, \bar{p}_{ij}) = & \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij}))\bar{e}_{kl} dy + \\ & \int_Y \overset{\equiv}{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{\epsilon}(\bar{v}_{ij})) : \bar{\epsilon}(\bar{p}_{ij}) dy. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

avec pour rappel

- $\overset{\equiv}{\bar{C}}$  le tenseur d'élasticité, ici fonction des distances signées de deux levelsets .
- $d_{\Omega_1}$  et  $d_{\Omega_2}$  les fonctions distances signées,
- $\bar{e}_{ij}$  une déformation unitaire dans la direction  $ij$ ,
- $\bar{\epsilon}_{ij}$  l'opérateur gradient symétrisé,

- $\bar{\omega}_{ij}$  la solution d'un des problèmes de cellule définit par l'équation (V.26),
- $\bar{p}_{ij}$  le multiplicateur de Lagrange pour les équations d'état, qui est aussi la solution du problème adjoint,
- $\bar{e}_{kl}$  une déformation unitaire dans la direction  $kl$ .

On écrit maintenant l'annulation des dérivées partielles au point optimal  $(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}^*, p^*)$ . On commence avec l'annulation de la dérivée directionnelle par rapport à  $\bar{p}$ , dans la direction  $\bar{\Phi}$ , calculée au point optimal, cela donne

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{p}_{ij}^*, \bar{p}_{ij}^*)}{\partial \bar{v}}, \bar{\Phi} \right\rangle = \int_Y \bar{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{e}(\bar{v}_{ij}^*)) : \bar{e}(\bar{\Phi}) \, dy. \quad (\text{C.25})$$

En appliquant le réciproque du théorème de Green, on retrouve comme attendu le problème de cellule (V.26), ce qui confirme le fait que l'on a au point optimal  $\bar{v}_{ij}^* = \bar{\omega}_{ij}$ .

On s'intéresse ensuite à la dérivée partielle du Lagrangien par rapport à  $\bar{v}$  dans la direction  $\bar{\Phi}$ , calculée au point optimal, ce qui donne

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}^*, \bar{p}_{ij}^*)}{\partial \bar{v}}, \bar{\Phi} \right\rangle = \int_Y \bar{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{kl} + \bar{e}(\bar{\omega}_{kl}^*)) \bar{e}(\bar{\Phi}) \, dy + \int_Y \bar{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}(\bar{\Phi})) : \bar{e}(\bar{p}_{ij}^*) \, dy. \quad (\text{C.26})$$

Deux conclusions importantes sont à tirer de ce résultat :

- Le premier terme est la formulation variationnelle du problème de cellule pour l'inconnue  $\bar{\omega}_{kl}$ , ce terme est donc nul.
- Le second terme qui est le seul restant est assimilable à une énergie élastique stockée. Compte tenu du fait qu'il n'y a pas de terme de force imposée, l'énergie élastique doit être nulle, ce qui impose que  $\bar{p}_{ij}^*$  est un champ nul.

On prouve donc par l'étude de cette dérivée partielle que le champ adjoint au point optimal est nul, on peut donc tout à fait dire  $\bar{p}_{ij}^* = \lambda \bar{\omega}_{ij}^*$  avec  $\lambda = 0$ , donc le problème est auto-adjoint. Il reste à calculer la dérivée de forme explicitement, on applique pour cela les théorèmes de dérivation de forme classique, ici le (III.4) est particulièrement indiqué :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}^*, \bar{p}_{ij}^*)}{\partial \Omega_1}(\theta_1) = \int_Y d'_{\Omega_1}(\theta_1) \left[ \bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{e}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} \right] \, dy + \int_{\partial Y} \left[ \bar{\bar{C}}(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{e}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} \right] \theta_1 \bar{n} \, dy. \quad (\text{C.27})$$

Le second terme est une intégrale de bord, qui va cependant s'annuler pour les raisons suivantes :

- Le champ  $\bar{\omega}_{ij}$  est solution d'un problème de cellule, il est donc périodique,
- Afin de conserver la périodicité, on considère que  $\theta_1$  aussi est périodique sur la cellule,
- Seul la normale au bord  $\bar{n}$  n'est pas périodique, elle sera de signe opposé sur deux bord opposés.

Ces constatations impliquent que lors de cette intégration, tous les bords opposés annulent leur participations respectives : le terme s'annule donc car la forme est fermée. Cela nous donne que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}^*, \bar{p}_{ij}^*)}{\partial \Omega_1}(\theta_1) = \int_Y d'_{\Omega_1}(\theta_1) \left[ \bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{e}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} \right] \, dy. \quad (\text{C.28})$$

On ne retrouve cependant toujours pas la structure d'une dérivée de forme, pour remédier à cela on utilise la formule de la coaire pour casser l'intégration sur le domaine en une intégration le long du bord et une selon les rayons, ce qui donne avec l'approximation Jacobian-free présentée au début de cette annexe.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega_1, \Omega_2, \bar{v}_{ij}^*, \bar{p}_{ij}^*)}{\partial \Omega_1}(\theta_1) = \int_{\partial \Omega} \left[ \int_{rays} \left( d'_{\Omega_1}(\theta_1) \bar{\bar{C}}'(d_{\Omega_1}, d_{\Omega_2})(\bar{e}_{ij} + \bar{e}(\bar{\omega}_{ij})) \bar{e}_{kl} \right) \, dz \right] \, ds. \quad (\text{C.29})$$



# Bibliographie

- ALBERTELLI, M. (2015). RODIN project Homepage. Rapport technique, Renault Nissan.
- ALLAIRE, G., JOUVE, F. et TOADER, A. M. (2002). A level-set method for shape optimization. *Academic Sciences*, pages 1–6.
- ALLAIRE, G., JOUVE, F. et TOADER, A. M. (2004a). *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, volume 194.
- ALLAIRE, G., JOUVE, F. et TOADER, A. M. (2004b). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194:363–393.
- ALLAIRE, G. et JOUVE, F. (2005). A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(30-33 SPEC. ISS.):3269–3290.
- ALLAIRE, G. (2007). *Conception Optimale des Structures*. Springer, springer édition.
- ALLAIRE, G., DE GOURNAY, F. et JOUVE, F. (2009). Stress minimization and robust compliance optimization of structures by the level set method. *In 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, numéro 2, pages 1–8.
- ALLAIRE, G., DAPOGNY, C., DELGADO, G. et MICHAILIDIS, G. (2013). Multi-phase structural optimization via a level set method. *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 20:576–611.
- ALLAIRE, G., DAPOGNY, C. et FREY, P. (2013). A mesh evolution algorithm based on the level set method for geometry and topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(4):711–715.
- ALLAIRE, G., JOUVE, F. et MICHAILIDIS, G. (2014). Thickness control in structural optimization via a level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53:1349–1382.
- ALLAIRE, G., DAPOGNY, C., FAURE, A. et MICHAILIDIS, G. (2017). Shape optimization of a layer by layer mechanical constraint for additive manufacturing. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 355(6):699–717.
- ANDREASSEN, E., LAZAROV, B. S. et SIGMUND, O. (2014). Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure. *Mechanics of Materials*, 69(1):1–10.
- ANTONIOU, A. (2010). *Practical Optimization*. Springer, 1 édition.
- ASHBY, M. F. et BRÉCHET, Y. J. M. (2003). Designing hybrid materials. *Acta Materialia*, 51(19):5801–5821.



- ASHBY, M. F. (2006). The properties of foams and lattices. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, 364(1838):15–30.
- ASHBY, M. (2013). Designing architected materials. *Scripta Materialia*, 68(1):4–7.
- BAGSIK, A., SCHÖEPNER, V. et KLEMP, E. (2010). FDM Part Quality Manufactured with Ultem\* 9085. *14th International Scientific Conference on Polymeric Materials*, 15.
- BANICHUK, N., BARTHOLD, F., FALK, A. et STEIN, E. (1995). Mesh refinement for shape optimization. *Structural Optimization*, 51(2):46–51.
- BELEGUNDU, A. D., BERKE, L. et PATNAIK, S. N. (1995). An optimization algorithm based on the method of feasible directions. *Structural Optimization*, 9(2):83–88.
- BENDSOE M. (2005). Topology optimization - Broadening the areas of application. *Control and cybernetics*, 34(1).
- BENDSØE, M. P. et SIGMUND, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9-10):635–654.
- BENDSOE, M. P. et SIGMUND, O. (2007). *Topology Optimization : Theory, Methods and Applications*. Springer.
- BENSOUSSAN, A. et LIONS, J. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*. NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY.
- BORRVALL, T. et PETERSSON, J. (2003). Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41(1):77–107.
- BRECHET, Y. et EMBURY, J. (2013). Architected materials : Expanding materials space. *Scripta Materialia*, 68(1):1–3.
- BRUN, R. (1983). Moteurs thermiques alternatifs, Parties mobiles Pistons et segments. *Techniques de l'ingénieur*, 33(0).
- BRUNS, T. E. et TORTORELLI, D. A. (2001). Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(26-27):3443–3459.
- BUHL, T., PEDERSEN, C. et SIGMUND, O. (2000). Stiffness Design of Geometrically Nonlinear Structures Using Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19:93–104.
- CALVEL, S. (2004). Conception d'organes automobiles par optimisation topologique. *Essence*.
- CÉA, J. (1986). Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction de coût. *RAIRO*, 3.
- CHALLIS, V. J. (2009). *Multi-property Topology optimization with the Level-Set Method*. Thèse de doctorat, University of Queensland.
- CHO, S. et KWAK, J. (2006). Topology design optimization of geometrically non-linear structures using meshfree method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44-47):5909–5925.
- CIORANESCU, D. et DONATO, P. (1999). An Introduction to Homogenization. *Oxford Lecture Series in Mathematics and its applications - 17*, pages 1–248.

- CLAUSEN, A., AAGE, N. et SIGMUND, O. (2015). Topology optimization of coated structures and material interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290:524–541.
- CRETON, C., HOOKER, J. et SHULL, K. R. (2001). Bulk and interfacial contributions to the debonding mechanisms of soft adhesives : Extension to large strains. *Langmuir*, 17(11):4948–4954.
- DAPOGNY, C., ESTEVEZ, R., FAURE, A. et MICHAILIDIS, G. (2017a). Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies. *CRAS*, 355(6): 699–717.
- DAPOGNY, C., FAURE, A., MICHAILIDIS, G., ALLAIRE, G., COUVELAS, A. et ESTEVEZ, R. (2017b). Geometric constraints for shape and topology optimization in architectural design. *Computational Mechanics*.
- DAS, P., CHANDRAN, R., SAMANT, R. et ANAND, S. (2015). Optimum Part Build Orientation in Additive Manufacturing for Minimizing Part Errors and Support Structures. *Procedia Manufacturing*, 1:343–354.
- DESAI, J., FAURE, A., MICHAILIDIS, G., PARRY, G. et ESTEVEZ, R. (2016). Topology optimization in acoustics and elasto-acoustics via a level-set method. *soumis*, page 40.
- DESHPANDE, V. S., FLECK, N. A. et ASHBY, M. F. (2001). Effective properties of the octet-truss lattice material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(8):1747–1769.
- DESMORAT, B. et DUVAUT, G. (2003). Compliance optimization with nonlinear elastic materials : Application to constitutive laws dissymmetric in tension-compression. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22(2):179–192.
- DONG, L. et WADLEY, H. (2015). Mechanical properties of carbon fiber composite octet-truss lattice structures. *Composites Science and Technology*, 119:26–33.
- DUMAS, J., HERGEL, J. et LEFEBVRE, S. (2014). Bridging the Gap : Automated Steady Scaffoldings for 3D Printing. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):98 :1–98 :10.
- DUYSINX, P., VAN MIEGROET, L., JACOBS, T. et FLEURY, C. (2006). Generalized Shape Optimization Using X-FEM and Level Set Methods. *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials SE - 3*, 137:23–32.
- FAURE, A., MICHAILIDIS, G., PARRY, G., VERMAAK, N. et ESTEVEZ, R. (2017). Design of thermoelastic multi-material structures with graded interfaces using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, (i):1–15.
- FAUSTINO, A. M., NEVES, A. S. et RIBEIRO, I. M. (2006). An integer programming model for truss topology optimization. *Investigacao Operacional*, 26:111–127.
- FLECK, N. a., DESHPANDE, V. S. et ASHBY, M. F. (2010). Micro-architected materials : past, present and future. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2121):2495–2516.
- FREDERIKSSON, L. (2014). Lightweight Design Integrated with the Product Development Process. *In Lightweight Design Integrated with the Product Development Process*.
- GAO, T., XU, P. et ZHANG, W. (2016). Topology optimization of thermo-elastic structures with multiple materials under mass constraint. *Computers and Structures*, 173:150–160.

- GAYNOR, A. T. et GUEST, J. K. (2016). Topology optimization considering overhang constraints : Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54(5):1157–1172.
- GEPREEL, M. A. H. (2011). New Ti-Alloy with Negative and Zero Thermal Expansion Coefficients. *Key Engineering Materials*, 495(January 2012):62–66.
- GERTZ, E. M. et WRIGHT, S. J. (2003). Object-oriented software for quadratic programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(1):58–81.
- GIACOMINI, M., PANTZ, O. et TRABELSI, K. (2015). Certified Descent Algorithm for shape optimization driven by fully-computable a posteriori error estimators.
- GIBIANSKY, L. et TORQUATO, S. (1997). Thermal expansion of isotropic multiphase composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(7):1223–1252.
- GIBSON, L. (1997). Cellular Solids, Structure and Properties.
- HASHIN, Z. et SHTRIKMAN, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2): 127–140.
- HOPKINSON, N., HAGUE, R. et DICKENS, P. (2006). *Rapid manufacturing*. Numéro 3. John Wiley & Sons.
- JEFFERSON, G., PARTHASARATHY, T. a. et KERANS, R. J. (2009). Tailorable thermal expansion hybrid structures. *International Journal of Solids and Structures*, 46(11-12):2372–2387.
- JIBAWY, A., JULIEN, C., DESMORAT, B., VINCENTI, A. et LÉNÉ, F. (2011). Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2576–2584.
- KIEBACK, B., NEUBRAND, a. et RIEDEL, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*, 362(1-2):81–105.
- KLARBRING, A. et STRÖMBERG, N. (2013). Topology optimization of hyperelastic bodies including non-zero prescribed displacements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(1):37–48.
- KNOOP, F. et SCHOEPPNER, V. (2015). Mechanical and Thermal Properties of Fdm Parts Manufactured With Polyamide 12. *Solid Freeform Fabrication Symposium*, pages 935–948.
- KOOISTRA, G. W. et WADLEY, H. N. G. (2007). Lattice truss structures from expanded metal sheet. *Materials and Design*, 28(2):507–514.
- KREISSL, S. et MAUTE, K. (2012). Levelset based fluid topology optimization using the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(3):311–326.
- KROG, L., TUCKER, A. et ROLLEMA, G. (2011). Application of Topology , Sizing and Shape Optimization Methods To Optimal Design of Aircraft Components. Rapport technique, Altair.
- KUMAR, S. (2009). Analysis of tubular adhesive joints with a functionally modulus graded bondline subjected to axial loads. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29(8): 785–795.

- KWAK, J. et CHO, S. (2005). Topological shape optimization of geometrically nonlinear structures using level set method. *Computers & structures*, 83(27):2257–2268.
- LAKES, R. (1996). Cellular solid structures with unbounded thermal expansion. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9):1689–1699.
- LANGELAAR, M. (2016). Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 12:60–70.
- LARSEN, U. D., SIGMUND, O. et BOUWSTRA, S. (1997). Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson’s ratio. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 6(2):99–106.
- LUO, Y., WANG, M. Y. et KANG, Z. (2015). Topology optimization of geometrically nonlinear structures based on an additive hyperelasticity technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 286:422–441.
- MERCER, C., LEE, J. et BALINT, D. (2015). An investigation of the mechanical fatigue behavior of low thermal expansion lattice structures. *International Journal of Fatigue*, 81:238–248.
- MICHAILIDIS (2014). *Manufacturing Constraints and Multi-Phase Shape and Topology Optimization via a Level-Set Method*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- MOLTER, A., DA SILVEIRA, O. A. A., BOTTEGA, V. et FONSECA, J. S. O. (2013). Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3):389–397.
- MONTERO, M., ROUNDY, S. et ODELL, D. (2001). Material characterization of fused deposition modeling (FDM) ABS by designed experiments. *Proceedings of Rapid Prototyping & Manufacturing Conference*, pages 1–21.
- MORIN, P., NOCHETTO, R. et PAULETTI, M. (2010). Adaptive SQP Method for Shape Optimization. *and Advanced Applications*, pages 1–8.
- NOH, W. F. et WOODWARD, P. R. (1976). SLIC (Simple Line Interface Calculation) method. *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28–July 2, 1976 Twente University, Enschede*, pages 330–340.
- OSHER, S. et FEDKIW, R. (2004). *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 57. Springer.
- PANTZ, O. et TRABELSI, K. (2008). A Post-Treatment of the Homogenization Method for Shape Optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3):1380–1398.
- PAUL, R. et ANAND, S. (2015). Optimization of layered manufacturing process for reducing form errors with minimal support structures. *Journal of Manufacturing Systems*, 36:231–243.
- PEDERSEN, C. B. W., BUHL, T. et SIGMUND, O. (2001). Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2683–2705.
- QIAN, X. (2017). Undercut and overhang angle control in topology optimization : A density gradient based integral approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- RAO, S. S. (2009). *Engineering Optimization*, volume 56. John Wiley & Sons.

- RONG, J. H., TANG, Z. L., XIE, Y. M. et LI, F. Y. (2013). Topological optimization design of structures under random excitations using SQP method. *Engineering Structures*, 56:2098–2106.
- ROY, R., AGRAWAL, D. K. et MCKINSTRY, H. a. (1989). Very Low Thermal Expansion Coefficient Materials. *Annual Review of Materials Science*, 19(1):59–81.
- SCHAPERLY, R. (1968). Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. *School of Aeronautics, Astronautics and Engineering Sciences*, pages 380–404.
- SETHIAN, J. A. (1999). *Level Set Method and Fast Marching Methods*. Cambridge.
- SIGMUND, O. (1995). Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20(4):351–368.
- SIGMUND, O. et TORQUATO, S. (1996). Composites with extremal thermal expansion coefficients. *Applied Physics Letters*, 69(21):3203–3205.
- SIGMUND, O. et TORQUATO, S. (1997). Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6):1037–1067.
- SIGMUND, O. (2000). New class of extremal composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(2):397–428.
- SIGMUND, O. (2001a). A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2):120–127.
- SIGMUND, O. (2001b). Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I : One material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:6577–6604.
- SIGMUND, O. (2011). On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(5):589–596.
- SUARD, M. (2015). *Caractérisation et optimisation de structures treillis fabriquées par EBM*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.
- SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47):6183–6200.
- SVANBERG, K. (1987). The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization.
- TAKENAKA, K. (2012). Negative thermal expansion materials : technological key for control of thermal expansion. *Science and Technology of Advanced Materials*, 13(1):013001.
- TURNER, P. (1946). Thermal-expansion stresses in reinforced plastics. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 37(4):239.
- VAN DIJK, N. P., LANGELAAR, M. et van KEULEN, F. (2014). Element deformation scaling for robust geometrically nonlinear analyses in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(4):537–560.

- VAN MIEGROET, L. et DUYSINX, P. (2007). Stress concentration minimization of 2D fillets using X-FEM and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4-5):425–438.
- VERMAAK, N., MICHAILIDIS, G., PARRY, G., ESTEVEZ, R., ALLAIRE, G. et Y., B. (2013). Material interface effects on the topology optimization of multi-phase structures using a level set method. *Accepted, in press : Structural and Multidisciplinary Optimization*.
- VESE, L. A. et CHAN, T. F. (2002). A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):271–293.
- VIÉ, J.-L. (2017). *Second-order derivatives for shape optimization with a level-set method*. Thèse de doctorat.
- VILLANUEVA, C. H. et MAUTE, K. (2014). Density and level set-XFEM schemes for topology optimization of 3-D structures. *Computational Mechanics*, 54(1):133–150.
- WAECHTER, A. et BIEGLER, L. T. (2006). On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, 106(1):25–57.
- WANG, M. Y., WANG, X. et GUO, D. (2003). A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1-2):227–246.
- WANG, X., MEI, Y. et WANG, M. Y. (2004). Level-set method for design of multi-phase elastic and thermoelastic materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 1(3):213–239.
- WANG, M. Y. et WANG, X. (2004). “Color” level sets : a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6-8):469–496.
- WANG, M. Y. et WANG, X. (2005). A level-set based variational method for design and optimization of heterogeneous objects. *CAD Computer Aided Design*, 37(3):321–337.
- WANG, M. Y., CHEN, S., WANG, X. et MEI, Y. (2005). Design of Multimaterial Compliant Mechanisms Using Level-Set Methods. *Journal of Mechanical Design*, 127(5):941.
- WANG, M. Y. et CHEN, S. (2009). Compliant Mechanism Optimization : Analysis and Design with Intrinsic Characteristic Stiffness. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 37(2):183–200.
- WANG, F., SIGMUND, O. et JENSEN, J. S. (2014). Design of materials with prescribed nonlinear properties. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 69(1):156–174.
- WANG, F., LAZAROV, B. S., SIGMUND, O. et JENSEN, J. S. (2014). Interpolation scheme for fictitious domain techniques and topology optimization of finite strain elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276:453–472.
- WANG, X.-T., LI, X.-W. et MA, L. (2016). Interlocking assembled 3D auxetic cellular structures. *Materials & Design*, 99:467–476.
- WANG, Y., WANG, L., MA, Z.-d. et WANG, T. (2016). A negative Poisson’s ratio suspension jounce bumper. *JMADE*.

- WEI, K., CHEN, H., PEI, Y. et FANG, D. (2016). Planar lattices with tailorable coefficient of thermal expansion and high stiffness based on dual-material triangle unit. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 86:173–191.
- WU, J. AND AAGE, N. AND WESTERMANN, R. AND SIGMUND, O. (2016). Infill Optimization for Additive Manufacturing—Approaching Bone-like Porous Structures. *arXiv preprint arXiv :1608.04366*.
- XIA, Q. et WANG, M. Y. (2008). Topology optimization of thermoelastic structures using level set method. *Computational Mechanics*, 42(6):837–857.
- ZHOU, S. et LI, Q. (2008). Computational design of multi-phase microstructural materials for extremal conductivity. *Computational Materials Science*, 43(3):549–564.
- ZIEMIAN et SHARMA (2016). Anisotropic Mechanical Properties of ABS Parts Fabricated by Fused Deposition Modelling. *InTech*, pages 1–34.
- ZIMMERMANN, R. (1992). Hashin-Shtrikman Bounds On The Poisson’s Ratio Of A Composite Material. *Mechanics Research Communication*, 19(6):563–569.
- ZOUTENDIJK, G. (1970). Some Algorithms Based on the Principle of Feasible Directions. In ROSEN, J. B., MANGASARIAN, O. L. et RITTER, K., éditeurs : *Nonlinear Programming*, pages 93–121. Academic Press.





## Résumé

Les méthodes d'optimisation de forme s'industrialisent progressivement, elles permettent la conception automatisée de structures aux propriétés optimales. Elles constituent aussi un outil d'exploration majeur pour la conception de nouveaux matériaux.

Dans une première partie nous utilisons ces méthodes afin de générer des matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques effectives cibles et extrêmes. En plus de proposer différentes solutions, nous répertorions les différents mécanismes œuvrant au contrôle des ces propriétés. Dans ce contexte nous proposons aussi de prendre en compte l'influence des interfaces comportant un gradient de propriétés sur les architectures obtenues.

Nous étudions ensuite les procédés de fabrication pouvant être utilisés afin de réaliser ces matériaux. Les méthodes de fabrication additive, considérées comme le vecteur d'une prochaine révolution industrielle, constituent une piste que nous considérerons tout particulièrement. Nous proposons plusieurs solutions pour prendre en compte les limitations et les effets collatéraux de ces procédés de fabrication au sein de processus d'optimisation de forme. Nous traitons le problème de la prise en compte des propriétés induites par la méthode de fabrication Fiber Deposition Molding (FDM), à savoir des propriétés anisotropes orientées. Nous proposons ensuite une approche pour traiter le problème des dépôts en porte-à-faux à l'aide d'un critère mécanique.

Enfin, nous abordons la prise en compte des non-linéarités géométriques au sein de calculs d'optimisation de forme et discutons de leurs apports ainsi que de leurs limitations. Nous présentons plusieurs applications pour la conception automatisée d'actuateurs non linéaires.

## Outlines

Shape optimization methods are promising methods and are gradually becoming industrialized. They provide the ability to automatically design structures with optimal behavior. They are outstanding tools for exploration and design of new materials.

We use these methods to generate architected multi-phased materials with prescribed thermoelastic properties. We first propose several solutions and we classify them by the mechanisms they rely on in order to control the effective properties. We also propose to evaluate the influence of an interface with a gradient of properties on the obtained architectures.

Eventually we focus on the plausible manufacturing solution to produce our architected materials. In this context, additive manufacturing methods (often considered as the support of an incoming industrial revolution) is our main option. We introduce several strategies to circumvent some limitations and side effects of these manufacturing methods during optimization process. We particularly focus on Fiber Deposition Molding, which induce an important mechanical anisotropy in processed parts. Then we consider the problem of overhangings features in design and propose a way to handle them prior to additive manufacturing using a mechanical criteria.

Finally we take into account geometrical non linearities in optimization process. We highlight the pros and cons of this new modeling by presenting several applications of non linear actuators design.