HAL
open science

# Influence de l'endommagement et du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage

Julien Brondex

## To cite this version:

Julien Brondex. Influence de l'endommagement et du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage. Sciences de la Terre. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAI092 . tel-01730867

**HAL Id: tel-01730867**

**https://theses.hal.science/tel-01730867v1**

Submitted on 13 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Communauté UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **2MGE : Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie**

Arrêté ministériel : 25 Mai 2016

Présentée par


## Julien BRONDEX


Thèse dirigée par **Olivier GAGLIARDINI**
et codirigée par **Fabien GILLET-CHAULET**

préparée au sein de l' **Institut des Géosciences de l'Environnement**
dans l'École doctorale **IMEP2 - Ingénierie - Matériaux, Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés, Production**

# Influence de l'endommagement et du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage

Thèse soutenue publiquement le **5 décembre 2017**,
devant le jury composé de :

**Mme Anne MANGENEY**
Professeur, IPGP, Paris, Présidente
**M. Frank PATTYN**
Professeur, Université Libre de Bruxelles, Rapporteur
**M. Andreas VIELI**
Professeur, University of Zurich, Rapporteur
**M. Pierre SARAMITO**
Directeur de Recherche, LJK, Grenoble, Examinateur
**M. Olivier GAGLIARDINI**
Professeur, IGE, Grenoble, Directeur de thèse
**M. Fabien GILLET-CHAULET**
Chercheur, IGE, Grenoble, Co-Directeur de thèse

# Remerciements

*Panta rhei.* Tout s'écoule. La glace comme le temps. Emporté moi aussi dans ce mouvement immuable dont on ne prend la mesure réelle qu'en regardant dans le rétroviseur, voici que je m'attelle à mon tour, quatre ans - presque jour pour jour - après mon arrivée au laboratoire de glaciologie, à la rédaction de la page des remerciements de ce manuscrit.

Mes premiers remerciements s'adressent naturellement à mes directeurs de thèse, Gag et Fabien, pour m'avoir permis d'entreprendre ce voyage à leur côté et pour avoir constamment guidé ma navigation au cours de ces années, m'évitant de nombreux écueils et flairant les pistes à suivre pour sortir de certaines longues périodes de vent de bout : j'ai énormément apprécié votre disponibilité et votre investissement et je vous suis redevable des nombreuses connaissances acquises au cours de cette thèse et du stage qui l'a précédé.

J'aimerais ensuite remercier l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt porté à mes travaux et pour les échanges instructifs que nous avons pu avoir lors de la soutenance.

Merci à l'ensemble du personnel du LGGE (ou de l'IGE devrais-je dire !) pour la super ambiance qui règne à bord de ce navire et plus particulièrement aux membres des services administratif et informatique dont l'efficacité m'a permis à plusieurs reprises d'éviter la cale sèche. Merci à Delphine, Christian, Olivier L., Marion R., Florent grâce à qui j'ai pu occasionnellement jeter l'ancre sur la mer de glace et sur les glaciers d'Argentière, de Gébroulaz ou de Saint-Sorlin.

Il me faut également remercier mes compagnons de bordée qui, pour beaucoup d'entre eux, sont également d'enthousiastes compagnons de cordée. Qu'il s'en est passé des choses pendant ces quatre superbes années ! Marion R., Hélène A. - la quasi grande sœur ! -, Marion D.M., combien de litres de thé consommés avec vous ? Etienne, Olivier P., Ilann, Kevin, Alexis B., combien de parties de coinche remportées ou parfois, il faut bien l'avouer, perdues ? Ambroise, Cyril P., Julien, Jai, Jordi combien de repas au RU et de cafés à EVE partagés ? C'est qu'il en fallait de l'énergie pour avaler tous ces dénivelés à ski et ces séances d'escalade à EV ou au Labo ! Jai, how many english mistakes corrected ? Lucas, combien de chroniques du maréchal Ganache écoutées ? Fanny, Cédric, Gaby, Joseph, Véro et d'autres déjà cités, combien de nuits sous la tente dans l'attente d'un soleil incertain pour gravir le calcaire des calanques ou d'Orpierre, le granit de Chamonix ou les austères couloirs des Écrins ? Dans ce même registre, je tiens à adresser des remerciements fraternels à mes trois compagnons d'aventure les plus indéfectibles Thomas , Cyrille M. et Gauthier : Que de sommets gravis avec vous, que de souvenirs gravés à jamais dans ma mémoire ! Le lien de la cordée perdure bien après que les huit aient été dénoués et les cordes remisées au placard. Cyrille, je te dois en outre des remerciements spécifiques pour ton apport sur le plan scientifique : ton travail a grandement aidé au mien. Ali, je me réjouis que nos routes se soient croisées et les quelques mois où

nous nous sommes côtoyés demeureront nimbés de lumière. Enfin, Maria je te remercie énormément pour le soutien infaillible que tu m'as apporté au cours des derniers mois de cette thèse et pour tous les moments partagés.

Merci aux vieux briscards, Maud, Yohan et Silène (et à leurs familles) qui, depuis pas loin de 15 ans maintenant, sont de bien des traversées, calmes et débonnaires pour certaines, tumultueuses et éprouvantes pour d'autres. Merci à Hugues, jeune loup de mer sympathique, fan de l'OM et d'automobiles mais très bon montagnard néanmoins.

Et puis il y a ceux qui façonnent le navire de leurs mains, planche après planche, qui l'arment et le mettent à flot puis le regardent s'éloigner du rivage, fiers mais le cœur serré, se languissant déjà de son prochain retour au port. Papa, Maman, Didine, je mesure la chance que j'ai de vous avoir. Ce diplôme je le dois d'abord et avant tout à votre ouverture d'esprit, votre soutien indéfectible, votre confiance absolue, votre amour inconditionnel. Merci à vous !

Que l'aventure continue !

*"I am the master of my fate : I am the captain of my soul"*

*William Ernest Henley*

# Résumé

La calotte polaire antarctique représente le plus gros contributeur potentiel à l'élévation future du niveau des mers. On estime que 80 % du volume de glace déchargée de la calotte vers l'océan transite par les vastes plateformes flottantes qui bordent près de 45 % de la côte du continent. En vertu du principe d'Archimède, la contribution de la glace au niveau des mers est comptabilisée aussitôt que celle-ci franchit la ligne d'échouage qui marque la limite au delà de laquelle la glace posée sur le socle se met à flotter sur l'océan. Par conséquent, une modélisation réaliste de la dynamique de la ligne d'échouage est capitale pour obtenir des projections de l'évolution future du niveau des mers dignes de confiance. Cette dynamique est affectée par un certain nombre de processus physiques mal représentés dans les modèles d'écoulement glaciaire actuels. Cette thèse s'intéresse à deux de ces processus : l'endommagement de la glace d'une part et le frottement basal en lien avec l'hydrologie sous-glaciaire d'autre part.

L'endommagement caractérise la dégradation des propriétés mécaniques de la glace due à la présence de fractures et crevasses telles qu'on les observe communément à la surface des glaciers. Cet endommagement rétroagit sur l'écoulement en réduisant la viscosité de la glace. La loi d'évolution de l'endommagement fait intervenir une équation d'advection pure dont la résolution numérique nécessite l'adoption de méthodes de stabilisation. Nous montrons que, pour des maillages associés à des temps de calcul acceptables, la dynamique de la ligne d'échouage est sensible au choix de cette méthode, ce qui complique nettement la modélisation des processus d'endommagement.

Le frottement basal est représenté au sein des modèles par l'intermédiaire de lois de frottement qui visent à expliciter le lien entre vitesses basales et contraintes de cisaillement basales. Différentes formulations de ces lois ont été proposées au cours des dernières décennies sur la base d'arguments théoriques. Certaines d'entre elles intègrent explicitement l'effet de la pression de l'eau présente au sein du réseau de drainage sous-glaciaire, connue pour favoriser le mouvement basal. Malheureusement, les échelles spatiales et temporelles mises en jeu en glaciologie empêchent la validation *in situ* de ces différentes formulations et les modèles grande échelle optent habituellement pour la plus simple d'entre elles, la loi de Weertman. L'effet de la pression de l'eau sous-glaciaire sur le frottement basal est alors pris en compte de manière implicite via un coefficient de frottement dont la distribution est évaluée à l'aide de méthodes inverses. Faute de contrainte sur l'évolution temporelle de cette distribution, celle-ci est généralement maintenue stationnaire et une discontinuité peu réaliste du frottement apparaît à la ligne d'échouage dès lors qu'elle recule. Dans un premier temps, nous montrons que la dynamique de la ligne d'échouage modélisée est sensible à la manière dont cette discontinuité est traitée numériquement. Dans un second temps, nous mettons en évidence sur un cas synthétique que la prise en compte explicite de l'action de la pression de l'eau sous-glaciaire sur le frottement basal conduit à un phénomène de rétroactions positives qui induit des pertes de masse accrues. Enfin, nous étendons ces conclusions à un cas réel, le bassin d'Amundsen en Antarctique de l'Ouest, en montrant une sensibilité importante de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement ainsi qu'aux valeurs attribuées à certains paramètres intervenant au sein des lois testées.

**Mots clés :** Ligne d'échouage, endommagement, frottement basal, modélisation, méthode des éléments finis

# Abstract

The Antartic ice sheet represents the world's largest potential contributor to sea level rise. Over 80 % of Antarctica's grounded ice drains through its fringing ice shelves which surround close to 45 % of the continent's shore. Because of Archimède' principle, the contribution of the ice to sea level is accounted for as soon as it flows through the grounding line, which defines the limit beyond which ice grounded on the bedrock starts floating on the ocean. Therefore, realistic modelling of grounding line dynamics is crucial to produce trustworthy projections of future sea level rise. This dynamics is affected by a number of physical processes, some of which are not properly represented in current ice flow models. This PhD thesis focuses on two of these processes : damage of ice on the one hand and basal friction related to basal hydrology on the other hand.

Damage accounts for the degradation of ice mechanical properties due to the presence of fractures and crevasses, commonly observed at the surface of glaciers. Damage affects ice flow by lowering ice viscosity. The evolution of damage is governed by a pure advection equation, the numerical resolution of which requires stabilisation methods. We show that, for numerical resolutions associated to acceptable calculation times, grounding line dynamics is sensitive to the choice of this method, which seriously complicates the modelling of damage processes.

Ice flow models account for basal friction through the use of friction laws, i.e. the mathematical relationship between basal drag and sliding velocities. Several formulations of these laws have been proposed over the last decades based on theoretical arguments. Some of these formulations explicitly include the effect of basal water which is present in the subglacial drainage system and the pressure of which eases basal motion. Unfortunately, the temporal and spatial scales at stake in glaciology make it impossible to validate these different formulations *in situ* and large-scale ice flow models usually make use of the simplest one, the Weertman law. The effect of basal water pressure is then accounted for in an implicit fashion via a friction coefficient, the spatial distribution of which is inferred through the use of inverse methods. Because the temporal evolution of this coefficient is poorly constrained, it is usual to keep it stationary. This lead to an unphysical discontinuity of friction at the grounding line when the latter retreats. First of all, we show that grounding line dynamics is sensitive to the way this discontinuity is treated numerically. Then, we demonstrate on a synthetic case that the fact of explicitly accounting for the effect of basal water pressure on basal friction leads to positive feedback phenomeno which implies larger ice losses. Finally, these conclusions are extended to a real case, the Amundsen basin in West Antarctica, by showing a significant sensitivity of grounding line dynamics to the chosen friction law as well as to the values given to some of the parameters involved in the tested friction laws.

**Keywords :** Grounding line, damage, basal friction, modelling, finite element method

# Table des matières

**Remerciements** **i**

**Résumé** **iii**

**Abstract** **v**

**Notations** **xi**

**1 Introduction et contexte** **1**

1.1 L'élévation du niveau des mers : constat et enjeux . . . . . 1

1.2 Les calottes polaires . . . . . 4

1.2.1 Formation et écoulement des calottes . . . . . 4

1.2.2 Bilan de masse des calottes . . . . . 6

1.2.3 Phénomène d'instabilité des calottes marines . . . . . 8

1.3 Contexte et enjeux de la thèse . . . . . 10

1.3.1 Les modèles numériques de calotte . . . . . 10

1.3.2 Objectifs et organisation de la thèse . . . . . 11

**2 Dynamique des écoulements glaciaires** **15**

2.1 Contexte historique . . . . . 15

2.2 Déformation visco-plastique de la glace . . . . . 17

2.2.1 Mécanique de la glace non-endommagée . . . . . 18

2.2.2 L'endommagement de la glace . . . . . 21

2.3 Mouvement basal . . . . . 29

2.3.1 Observations et processus . . . . . 29

2.3.2 Formulation des lois de frottement . . . . . 40

2.4 La ligne d'échouage : localisation et migration . . . . . 50

2.4.1 Localisation de la ligne d'échouage . . . . . 51

2.4.2 Une zone de transition entre deux régimes d'écoulement . . . . . 52

2.4.3 Dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 54

2.5 Conclusion . . . . . 56

**3 Modélisation de la dynamique des glaciers émissaires** **59**

3.1 Formulation mathématique complète . . . . . 59

3.1.1 Équations de Stokes . . . . . 60

3.1.2 Conditions aux limites . . . . . 62

3.1.3 Evolution des surfaces libres . . . . . 65
3.2 Approximations des équations de Stokes . . . . . 68
3.2.1 Modèles d'ordre intermédiaire . . . . . 68
3.2.2 Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA) . . . . . 70
3.2.3 Modèle shallow ice approximation (SIA) . . . . . 71
3.2.4 Approximations et dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 72
3.3 Résolution numérique par éléments finis . . . . . 73
3.3.1 Présentation de la Méthode des Éléments Finis . . . . . 74
3.3.2 Présentation du modèle Elmer/Ice . . . . . 80
3.4 Conclusion . . . . . 81

**4 Influence de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage 83**
4.1 Loi d'évolution de l'endommagement . . . . . 84
4.1.1 Equation d'advection et critère d'endommagement . . . . . 84
4.1.2 Prise en compte des crevasses basales . . . . . 87
4.1.3 Implémentation dans le cadre de la SSA . . . . . 88
4.2 Résolution numérique de l'équation d'advection . . . . . 89
4.2.1 Instabilité numérique des équations d'advection-diffusion . . . . . 90
4.2.2 Comparaison de l'efficacité des méthodes de stabilisation . . . . . 94
4.2.3 Méthodes de stabilisation et dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 108
4.3 Conclusion . . . . . 118

**5 Influence du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage 121**
5.1 Frottement à la ligne d'échouage : aspect numérique . . . . . 122
5.1.1 Présentation de la problématique . . . . . 122
5.1.2 Expérience 3 de MISMIP . . . . . 127
5.1.3 Expériences P75S et P75R de MISMIP3D . . . . . 132
5.1.4 Discussion et Conclusions . . . . . 137
5.2 Importance du choix de la loi de frottement . . . . . 138
5.2.1 Présentation de la problématique . . . . . 138
5.2.2 Méthodologie . . . . . 141
5.2.3 Résultats . . . . . 147
5.2.4 Discussion et Conclusions . . . . . 156
5.3 Conclusion . . . . . 163

**6 Application à un cas réel : Bassin d'Amundsen 167**
6.1 Contexte de l'étude et présentation de la problématique . . . . . 168

6.1.1 Le projet InitMIP-Antarctica . . . . . 168
6.1.2 Importance du bassin d'Amundsen . . . . . 169
6.1.3 Déroulement des expériences . . . . . 171
6.2 Initialisations du modèle . . . . . 173
6.2.1 Données et paramétrisations utilisées pour les inversions . . . . . 174
6.2.2 Modèle direct, conditions aux limites et maillage . . . . . 174
6.2.3 Modèles Inverses . . . . . 176
6.2.4 Résultats des inversions . . . . . 183
6.2.5 Relaxations . . . . . 186
6.3 Modification de la loi de frottement . . . . . 187
6.3.1 Identification pour la loi de Weertman non linéaire . . . . . 187
6.3.2 Identification pour la loi de Schoof non linéaire . . . . . 189
6.3.3 Conclusion sur l'identification des coefficients de frottement . . . . . 194
6.4 Expériences transitoires . . . . . 194
6.4.1 Description des expériences . . . . . 195
6.4.2 Résultats . . . . . 196
6.4.3 Discussion . . . . . 202
6.5 Conclusion . . . . . 203

**7 Conclusions et perspectives 205**
7.1 Conclusions . . . . . 205
7.2 Perspectives . . . . . 209
7.2.1 Modélisation de l'endommagement . . . . . 209
7.2.2 Modélisation du frottement basal . . . . . 210

**Annexes 211**

**A Illustration de la MEF 213**

**Liste des figures 215**

**Références bibliographiques 219**

# Notations

Les acronymes ainsi que les principales notations et leurs unités employées dans cette thèse sont données ci-dessous. L'unité de temps utilisée en glaciologie est l'année [a]. Les quantités vectorielles et tensorielles sont en caractères gras.

| **Acronyme** | **Signification** |
|---|---|
| *ddl* | degrés de liberté |
| *EDP* | Équation aux Dérivées Partielles |
| *HOM* | Higher Order Model |
| *MEF* | Méthode des Éléments Finis |
| *MISI* | Marine Ice-Sheet Instability |
| *SIA* | Shallow Ice Approximation |
| *SSA* | Shallow Shelf(y) Approximation |
| *VAF* | Volume Au-dessus de la Flottaison |

| **Notation** | **Description** | **Unités** |
|---|---|---|
| $A$ | Fluidité de la glace | [$\mathrm{Pa^{-n}\ a^{-1}}$] |
| $a_b$ | Accrétion/ablation sur la surface inférieure | [$\mathrm{m\ a^{-1}}$] |
| $a_s$ | Accumulation/ablation sur la surface supérieure | [$\mathrm{m\ a^{-1}}$] |
| $B$ | Facteur d'amplification pour l'endommagement | |
| $B_F$ | Coefficient d'arc-boutant | |
| $b$ | Altitude du socle | [m] |
| $C_B$ | Coefficient de frottement de Budd | [$\mathrm{Pa^{1-q}\ m^{-m}\ a^{m}}$] |
| $C_{max}$ | Valeur maximale de $\tau_b/N$ pour la loi de Schoof | |
| $C_S$ | Coefficient de frottement de Schoof | [$\mathrm{Pa\ m^{-m}\ a^{m}}$] |
| $C_W$ | Coefficient de frottement de Weertman | [$\mathrm{Pa\ m^{-m}\ a^{m}}$] |
| $D$ | Endommagement | |
| $E$ | Facteur d'amplification de la loi de Glen | |
| $f_C$ | Coefficient de frottement solide de la loi de Coulomb | |
| $g$ | Accélération de la pesanteur | [$\mathrm{m\ a^{-2}}$] |

| | | |
|---|---|---|
| $H$ | Épaisseur de glace | [m] |
| $H\|_{cf}$ | Épaisseur de glace au front de la plateforme flottante | [m] |
| $\mathbf{I}$ | Tenseur identité | |
| $I_{\dot{\epsilon}_2}$ | Second invariant du tenseur $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ | [a$^{-1}$] |
| $m$ | Exposant des lois de frottement relatif à $\mathbf{u}_b$ | |
| $N$ | Pression effective | [Pa] |
| $\mathbf{n}$ | Vecteur normal à la surface considérée | |
| $n$ | Exposant de la loi de Glen | |
| $p$ | Pression isotrope | [Pa] |
| $p_i$ | Pression cryostatique (poids de la colonne de glace) | [Pa] |
| $p_w$ | Pression d'eau sous-glaciaire | [Pa] |
| $Q$ | Énergie d'activation | [J mol$^{-1}$] |
| $q$ | Exposant de la loi de Budd relatif à $N$ | |
| $q_B$ | Flux de glace | [$m^3\ a^{-1}$] |
| $R$ | Constante des gaz parfaits | [J mol$^{-1}$ K$^{-1}$] |
| $\mathbf{S}$ | Tenseur des contraintes déviatoires | [Pa] |
| $T$ | Température de la glace | [K] |
| $t$ | Temps | [a] |
| $\mathbf{u} = (u, v, w)$ | Vecteur vitesse | [m a$^{-1}$] |
| $\mathbf{u}_b$ | Vecteur vitesse basale | [m a$^{-1}$] |
| $\mathbf{x}_G = (x_G, y_G)$ | Vecteur position de la ligne d'échouage | [m] |
| $z$ | Coordonnée verticale | [m] |
| $z_b$ | Altitude de la surface inférieure | [m] |
| $z_s$ | Altitude de la surface supérieure | [m] |
| $z_{sl}$ | Niveau moyen de la surface des océans | [m] |
| $\Gamma$ | Domaine modélisé | |
| $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ | Tenseur des taux de déformation | [a$^{-1}$] |
| $\eta_0$ | Viscosité de la glace | [Pa a] |
| $\bar{\eta}$ | Viscosité de la glace intégrée verticalement | [Pa a m] |
| $\rho_i$ | Masse volumique de la glace | [kg m$^{-3}$] |
| $\rho_w$ | Masse volumique de l'eau | [kg m$^{-3}$] |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Tenseur des contraintes de Cauchy | [Pa] |

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma_I$ | Contrainte principale extensive maximale de Cauchy | [Pa] |
| $\sigma_{nn}$ | Contrainte normale à la surface considérée | [Pa] |
| $\sigma_{th}$ | Contrainte seuil pour la formation d'endommagement | [Pa] |
| $\boldsymbol{\tau}_b$ | Vecteur contrainte de cisaillement basale | [Pa] |
| $\boldsymbol{\tau}_d$ | Contrainte motrice locale ou "*driving stress*" | [Pa] |
| $\chi$ | Critère d'endommagement | [Pa] |

Chapitre 1

# Introduction et contexte

**Sommaire**


**1.1 L'élévation du niveau des mers : constat et enjeux** . . . . . **1**
**1.2 Les calottes polaires** . . . . . **4**
1.2.1 Formation et écoulement des calottes . . . . . 4
1.2.2 Bilan de masse des calottes . . . . . 6
1.2.3 Phénomène d'instabilité des calottes marines . . . . . 8
**1.3 Contexte et enjeux de la thèse** . . . . . **10**
1.3.1 Les modèles numériques de calotte . . . . . 10
1.3.2 Objectifs et organisation de la thèse . . . . . 11


## 1.1 L'élévation du niveau des mers : constat et enjeux

Au fur et à mesure des progrès scientifiques et techniques, un nombre toujours plus grand de données paléo-climatiques permet d'améliorer notre connaissance des variations passées du niveau des mers et d'affiner notre compréhension du lien étroit reliant ces variations au climat. Des observations géologiques prouvent ainsi que le niveau moyen des mers n'a eu de cesse de fluctuer au fil des cycles glaciaire-interglaciaires. Par exemple, le dernier rapport du GIEC [1] affirme, avec un degré de confiance très élevé, que le niveau moyen maximal des mers pendant la dernière période interglaciaire (il y a 129 à 116 ka) a été supérieur au niveau actuel d'au moins 5 m durant plusieurs milliers d'années (Church *et al.*, 2013). A l'inverse, durant le dernier maximum glaciaire, il y a environ 21 ka, la Terre a connu un climat plus froid et on estime que le niveau moyen des mers était alors inférieur de près de 120 m par rapport au niveau actuel (Lambeck *et al.*, 2014).

Les premières mesures directes de variation du niveau des mers sont réalisées dès le 18$^{e}$ siècle, lorsque les premiers marégraphes sont installés dans une poignée de ports du nord de l'Europe. Progressivement, ces dispositifs se répandent sur les littoraux de l'hémisphère nord puis commencent à équiper certaines côtes de l'hémisphère sud à partir du 19$^{e}$ siècle. Les mesures fournies par les marégraphes sont locales et leur couverture spatiale est incomplète mais diverses approches permettent de reconstruire une tendance à long terme de la variation du niveau moyen des mers.

1. Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat ou IPPC (*Intergovernmental Panel on Climate Change*)

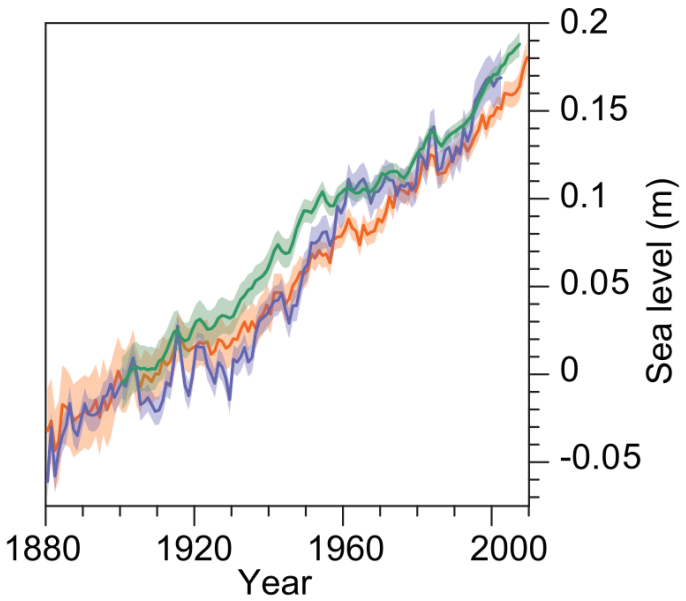


FIGURE 1.1 – Anomalie moyenne d'élévation du niveau des mers (mm) entre 1880 et 2010 par rapport au niveau moyen des mers entre 1900 et 1905. Reconstruction à partir de marégraphes selon les approches proposées par Jevrejeva *et al.* (2008) en bleu, Church et White (2011) en orange et Ray et Douglas (2011) en vert. Figure issue de Church *et al.* (2013).

Cette tendance, obtenue avec trois approches différentes, est représentée sur la Figure 1.1. On estime ainsi que le niveau moyen des mers a augmenté de $0.19 \pm 0.02$ m entre 1901 et 2010 (Church *et al.*, 2013). Depuis 1992, les mesures altimétriques réalisées depuis des satellites permettent de suivre les variations du niveau des mers avec une bien meilleure couverture spatiale. En compilant les données ainsi obtenues par différents groupes de recherche, Masters *et al.* (2012) estiment que le taux d'élévation du niveau moyen des mers pour la période 1993-2012 a été de $3.2 \pm 0.4$ mm a$^{-1}$, un taux *a priori* supérieur au taux moyen d'élévation évalué sur l'ensemble du 20$^{e}$ siècle ($1.7 \pm 0.2$ mm a$^{-1}$ sur la période 1901-2010). Soulignons néanmoins que, compte tenu de la variabilité multi-décennale du niveau des mers, ces observations ne permettent pas de conclure à une accélération récente de l'augmentation du niveau des mers.

L'élévation du niveau des mers constatée actuellement se fait dans un contexte de réchauffement climatique. En effet, d'après le dernier rapport du GIEC, la tendance linéaire de la moyenne globale des données de température de surface combinant les terres émergées et les océans indique un réchauffement de 0.85 °C [0.65 à 1.06 °C] au cours de la période 1880-2012, pour laquelle il existe plusieurs jeux de données indépendants (Hartmann *et al.*, 2013). Cette hausse des températures affecte le niveau des mers par le biais de deux processus distincts : il y a un phénomène d'expansion thermique des océans d'une part, et un apport d'eau accru lié à la fonte de la cryosphère d'autre part. La cryosphère désigne l'ensemble des portions de la surface terrestre où l'eau est présente à

l'état solide. Elle regroupe la neige, les glaciers de montagne et continentaux, les calottes polaires d'Antarctique et du Groenland, les calottes glaciaires plus petites (surface inférieure à 50 000 km$^2$) de l'hémisphère nord, la banquise (glace de mer), la glace de rivière et de lac et le pergélisol (sols gelés). La contribution de la cryosphère à l'augmentation du niveau des mers est inégalement répartie entre ses différentes composantes. Ainsi, environ 25 % de l'augmentation totale du niveau des mers enregistrée sur la période 1993-2010 serait imputable à la fonte des glaciers tandis que la masse perdue par les calottes du Groenland et d'Antarctique représenterait respectivement 10 % et 8 % de ce total ; à titre de comparaison, l'expansion thermique des océans aurait participé à cette augmentation à hauteur de 35 % (Church *et al.*, 2013). Ce que ces chiffres ne montrent pas, c'est que la contribution des deux calottes polaires a significativement augmenté au cours des dernières décennies : la contribution du Groenland est passée de $0.09 \pm 0.11$ mm a$^{-1}$ sur la période 1992-2001 à $0.59 \pm 0.16$ mm a$^{-1}$ sur la période 2002-2011 tandis que celle de l'Antarctique est passée de $0.08 \pm 0.18$ mm a$^{-1}$ à $0.40 \pm 0.20$ mm a$^{-1}$ sur les mêmes périodes (Vaughan *et al.*, 2013). Ces évolutions suggèrent que la réponse des calottes polaires au réchauffement climatique actuel est bien plus rapide qu'on ne le pensait jusqu'à récemment (Solomon *et al.*, 2007, par exemple). Néanmoins, de grosses incertitudes subsistent quant à savoir si la réponse des calottes va se poursuivre à ce rythme pour aboutir à une désintégration partielle de celles-ci dans les siècles à venir ou si, au contraire, un nouvel état d'équilibre va être atteint (Vaughan, 2008, par exemple).

Derrière la question de l'élévation future du niveau des mers se cachent des enjeux sociétaux, environnementaux et économiques de première importance. En effet, on estime qu'environ 10 % de la population mondiale vit dans des zones côtières dont l'élévation est inférieure à 10 m par rapport au niveau des mers (McGranahan *et al.*, 2007). Dans un scénario du pire (2 m d'élévation du niveau moyen des mers à l'horizon 2100), Nicholls *et al.* (2011) évaluent à près de 187 millions le nombre de personnes contraintes de se déplacer au cours du siècle si aucune installation visant à se prémunir de l'élévation du niveau des mers n'est édifiée. La plupart des pays d'Asie du Sud, du Sud Est et de l'Est sont considérés comme particulièrement menacés du fait de la présence de nombreux deltas densément peuplés et de villes côtières à la démographie galopante. Vulnérables également, l'ensemble des pays de la côte africaine en raison de leur manque de moyens d'adaptation combiné à une population littorale de plus en plus importante. Enfin, certaines îles peu élevées des Caraïbes, de l'océan Indien et de l'océan Pacifique pourraient être complètement submergées à l'horizon 2100 (Nicholls et Cazenave, 2010). Certaines côtes de l'hémisphère nord sont également menacées mais les pays concernés possèdent généralement les moyens techniques de se protéger, au prix d'investissements se chiffrant en milliards de dollars (Hallegatte *et al.*, 2013, par exemple). Tous ces chiffres soulignent l'importance d'améliorer nos prévisions de l'augmentation future du niveau des mers afin de concevoir et de mettre en œuvre des réponses adaptées visant à limiter,

sinon l'élévation elle-même, tout au moins les impacts qui lui sont associés.

## 1.2 Les calottes polaires

### 1.2.1 Formation et écoulement des calottes

Les calottes polaires du Groenland et d'Antarctique recouvrent près de 9.5 % de la surface du globe et concentrent à elles seules plus de 90 % du stock de glace terrestre. Bien que ce scénario soit fort peu probable dans les siècles à venir, la contribution des calottes groenlandaise et antarctique à l'élévation du niveau des mers si elles venaient à se désintégrer totalement serait de, respectivement, $\sim$ 7.4 m pour la première et $\sim$ 58 m pour la seconde (Bamber *et al.*, 2013; Fretwell *et al.*, 2013).

La glace des calottes se forme à partir de précipitations neigeuses : au fur et à mesure que la neige s'accumule, elle se densifie et se transforme progressivement en névé puis en glace qui s'écoule vers les marges sous l'effet de la gravité. Les deux calottes polaires sont subdivisées en bassins versants qui contrôlent l'orientation de l'écoulement. Les vitesses d'écoulement sont très faibles au niveau des dômes (de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par an) et augmentent progressivement à mesure que la glace s'approche des côtes où elle a plusieurs devenirs possibles : elle peut finir par fondre sur la terre ferme ; elle peut former des falaises en atteignant l'océan et s'y déverser sous forme d'icebergs ou elle peut se mettre à flotter sur l'océan et former des plateformes flottantes, ou "*ice shelves*" en anglais, rattachées à la partie posée de la calotte. Dans cette dernière configuration, la ligne d'échouage désigne la limite entre la glace posée sur le socle et la glace décollée du socle et en contact avec l'océan. En Antarctique, le périmètre total délimitant la partie posée de la calotte est estimé à 53 610 km : 74 % de ce périmètre correspond à des lignes d'échouage ; 19 % correspond à des falaises de glace bordant l'océan ; 7 % correspond à de la glace terminant sur la terre ferme (Bindschadler *et al.*, 2011). Les plateformes flottantes bordent 45 % de la côte Antarctique et peuvent s'étendre sur plusieurs centaines de kilomètres (Allison *et al.*, 2011). On en trouve également quelques-unes dans l'hémisphère nord, au Groenland et autour de l'île d'Ellesmere (Canada), mais leur taille beaucoup plus modeste leur vaut la dénomination de "langues de glace". Les plateformes flottantes, lorsqu'elles sont enclavées au sein de larges baies, ont un rôle régulateur sur l'écoulement des glaciers situés en amont. En effet, les forts gradients de vitesse qui règnent aux *marges de cisaillement*, i.e. les interfaces entre la plateforme flottante et les bords immobiles de la baie, sont responsables d'intenses contraintes de cisaillement. Ces contraintes peuvent être partiellement transférées vers l'intérieur des plateformes flottantes puis, de là, vers les glaciers qui les alimentent, et freiner ainsi l'écoulement de ces derniers : on parle alors d'effet *d'arc-boutant*. Notons que ce mécanisme opère également lorsque la base de la plateforme flottante est en contact local avec une proéminence du socle rocheux à laquelle on se réfère sous le terme de *point d'ancrage*. Le mécanisme d'arc-boutant est entravé par la présence de fractures au niveau des

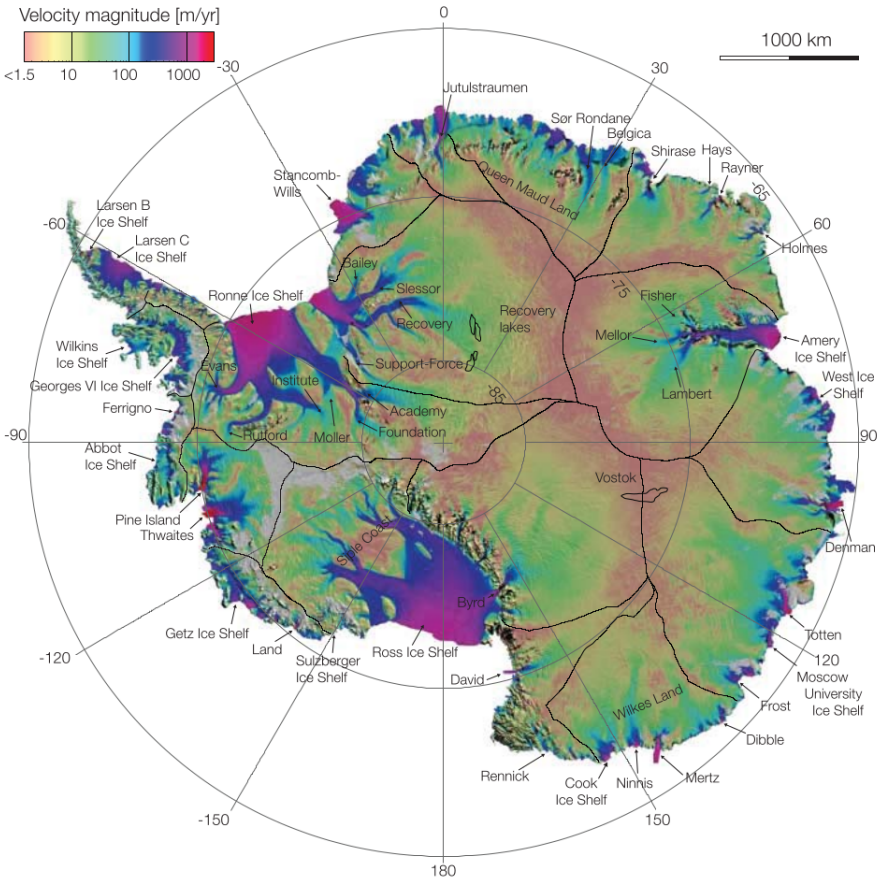


FIGURE 1.2 – Carte des vitesses de surface de la calotte antarctique obtenue par interférométrie radar satellitaire. Les lignes noires délimitent les principaux bassins versants. Figure issue de Rignot *et al.* (2011c).

marges de cisaillement qui ont pour conséquence de limiter la portée du transfert des contraintes latérales s'exerçant sur les bords de la plateforme vers l'intérieur de celle-ci.

L'essentiel des flux de glace qui parviennent aux marges des calottes est canalisé dans les fjords et vallées glaciaires sous forme de *glaciers émissaires* dont les vitesses d'écoulement peuvent atteindre plusieurs milliers de mètres par an (Rignot *et al.*, 2011c, par exemple). En Antarctique, ces glaciers émissaires assurent le transfert de larges volumes de glace depuis la partie posée de la calotte vers les plateformes flottantes et contrôlent ainsi plus de 80 % de la décharge de glace dans les océans (Pritchard *et al.*, 2012). Au Groenland, le drainage de la glace vers les océans se fait aussi essentiellement par l'intermédiaire de glaciers émissaires mais la plupart d'entre eux finissent en falaises de glace dans l'océan sans former de plateforme flottante. La Figure 1.2 montre les vitesses d'écoulement en surface de la calotte Antarctique. Les glaciers émissaires s'y distinguent nettement du fait de vitesses d'écoulement bien supérieures à celles de la glace avoisinante. Là encore, les interfaces entre glaciers émissaires et glace quasi stagnante constituent des marges de cisaillement

au niveau desquelles s'opère un transfert de contraintes latérales affectant l'écoulement des premiers. Et là encore, les fractures communément observées au sein de ces marges de cisaillement jouent un rôle mécanique essentiel en découplant l'écoulement du glacier émissaire de celui de la glace avoisinante et en limitant ainsi la qualité du transfert des contraintes latérales.

### 1.2.2 Bilan de masse des calottes

Les calottes polaires échangent de la masse avec l'atmosphère et l'océan. La différence entre la masse acquise et la masse perdue par une calotte au cours d'un intervalle de temps de référence, en l'occurrence l'année en glaciologie, définit son bilan de masse. Ce bilan de masse se scinde en trois composantes : le bilan de masse de surface, la fonte sous glaciaire et la décharge de glace dans l'océan par vêlage d'icebergs. Le bilan de masse de surface lui-même peut être subdivisé en un terme positif d'accumulation (précipitation neigeuse, apport de neige soufflée par le vent) et un terme négatif d'ablation (fonte de surface, sublimation, érosion de la neige par le vent).

On estime le bilan de masse de la calotte groenlandaise à $-121\,[-149$ à $-94]$ Gt a$^{-1}$ sur la période 1993-2010 et à $-229\,[-290$ à $-169]$ Gt a$^{-1}$ sur la période 2005-2010 (Vaughan *et al.*, 2013). La perte de masse semble, à l'heure actuelle, équitablement répartie entre processus de surface (fonte de surface essentiellement) et transfert dynamique de glace dans les océans (van den Broeke *et al.*, 2009). Du fait de la quasi absence de plateforme flottante, c'est essentiellement le vêlage d'icebergs qui rend effectif la contribution dynamique de la calotte groenlandaise au niveau des mers.

A l'inverse, la fonte de surface étant négligeable en l'état actuel du climat régnant en Antarctique, la perte de masse de cette calotte se fait quasi exclusivement par transfert dynamique de glace dans l'océan (Church *et al.*, 2013). Comme nous l'avons évoqué, plus de 80 % de cette masse de glace rejoint les plateformes flottantes et s'écoule jusqu'à leurs fronts où elle finit par se fracturer et par vêler dans l'océan. Néanmoins, dans cette configuration, le niveau des mers n'est pas directement affecté par ce processus. En effet, en vertu du principe d'Archimède, la glace déchargée de la calotte posée est comptabilisée dans le niveau des mers aussitôt qu'elle franchit la ligne d'échouage. La contribution de la calotte antarctique à la variation du niveau des mers résulte donc essentiellement d'un déséquilibre entre la masse accumulée sur la surface de sa partie posée par précipitation neigeuse et la masse évacuée dynamiquement aux marges de cette partie posée dont la majorité transite par une ligne d'échouage. De ce point de vue, il est intéressant d'évoquer le fait que l'accumulation neigeuse, bien que présentant une variabilité saisonnière marquée, semble être restée stable à l'échelle de la calotte au cours des dernières décennies (Bromwich *et al.*, 2011; Lenaerts *et al.*, 2012; Frezzotti *et al.*, 2013; Palerme *et al.*, 2017, par exemple). Malgré cela, la calotte antarctique semble perdre de la masse à un rythme accéléré puisque son bilan de masse est estimé à $-97\,[-135$ à $-58]$ Gt a$^{-1}$ sur la période 1993-2010 et à $-147\,[-221$ à $-74]$ Gt a$^{-1}$

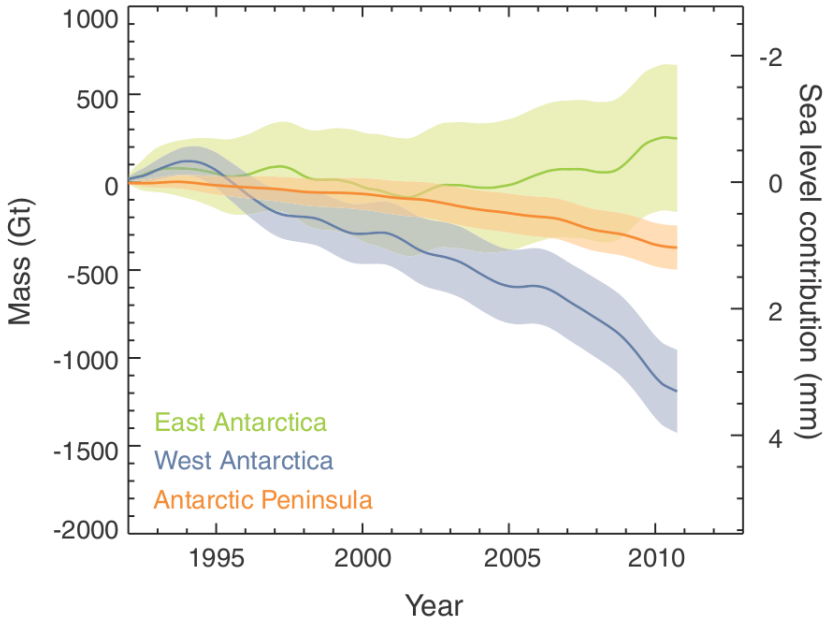


FIGURE 1.3 – Variation de masse cumulée sur la période 1992-2011 pour les trois régions principales de la calotte antarctique, reconstruite en combinant des mesures réalisées par interférométrie, altimétrie radar, altimétrie laser et gravimétrie. Figure adaptée de Shepherd *et al.* (2012).

sur la période 2005-2010 (Vaughan *et al.*, 2013). Ces chiffres masquent néanmoins d'importantes disparités régionales dans la répartition de cette perte de masse.

Il est habituel de subdiviser la calotte antarctique en trois régions principales : l'Antarctique de l'Est, l'Antarctique de l'Ouest - séparé du premier par la chaîne de montagnes Transantarctique - et la péninsule Antarctique, séparée de la Terre de Feu par le détroit de Drake. En combinant les résultats obtenus avec différentes techniques de mesure - l'interférométrie, l'altimétrie radar, l'altimétrie laser et la gravimétrie -, Shepherd *et al.* (2012) sont parvenus à détailler la variation de masse cumulée sur la période 1992-2011 pour chacune de ces trois régions. Leurs résultats sont représentés sur la Figure 1.3. Comme le montre cette figure, aucune tendance claire ne se dégage pour l'Antarctique de l'Est qui concentre les plus gros volumes de glace. En revanche, la péninsule Antarctique et l'Antarctique de l'Ouest affichent tous deux une perte de masse marquée. Ces résultats sont corroborés par d'autres études qui montrent une accélération de l'amincissement dynamique au cours des deux dernières décennies en lien avec une accélération quasi généralisée de l'écoulement des glaciers émissaires de ces deux régions (Rignot *et al.*, 2008; Flament et Rémy, 2012, par exemple). Dans ce contexte, la connaissance de la position de la ligne d'échouage et des flux qui la traverse apparaît comme un préalable à des estimations fiables des bilans de masse actuels (Rignot *et al.*, 2008, 2011a) et une modélisation réaliste de sa dynamique est capitale pour obtenir des projections de l'évolution future du niveau des mers dignes de confiance (Gillet-Chaulet

et Durand, 2010; Durand et Pattyn, 2015).

### 1.2.3 Phénomène d'instabilité des calottes marines

La situation de l'Antarctique de l'Ouest s'avère particulièrement préoccupante puisqu'un volume de glace équivalent à environ $\sim 3.3$ m d'élévation potentielle du niveau des mers repose sur un socle rétrograde, c'est-à-dire dont la pente est ascendante dans le sens de l'écoulement (Bamber *et al.*, 2009). Une telle configuration serait à l'origine d'un phénomène d'instabilité de la ligne d'échouage : cette dernière, une fois engagée sur une pente rétrograde, serait condamnée à reculer de manière irréversible jusqu'à rejoindre une pente descendante dans le sens de l'écoulement. Ce phénomène, dénommé MISI pour "Marine Ice-Sheet Instability", a été décrit pour la première fois par Weertman (1974) sur des arguments théoriques. Le postulat de base sur lequel repose cette hypothèse suppose que le flux de glace à la verticale de la ligne d'échouage est une fonction croissante de l'épaisseur de glace à la ligne d'échouage. Dès lors, si la ligne d'échouage recule (respectivement avance) sur un socle rétrograde, l'épaisseur de glace à sa verticale augmente (respectivement diminue) et le flux de glace rejoignant les océans augmente (respectivement diminue) avec elle. Cette amplification (respectivement cet affaiblissement) de la décharge de glace au niveau de la ligne d'échouage provoque un retrait (respectivement une avancée) supplémentaire de celle-ci : on a donc affaire à un mécanisme auto-entretenu.

L'hypothèse du MISI a longtemps été contestée au sein de la communauté des glaciologues. Mais Schoof (2007a) parvient, à partir de développements asymptotiques des lois des écoulements glaciaires connues, à établir une relation semi-analytique entre flux et épaisseur à la ligne d'échouage qui valide le postulat initial. Cette relation corrobore ainsi l'hypothèse du MISI et donne à cette théorie la base physique dont elle manquait. Néanmoins, plusieurs limitations importantes demeurent. D'abord, le flux de Schoof (2007a) n'est valable qu'en régime stationnaire et ne donne aucun renseignement sur les taux de retrait (ou d'avancée) de la ligne d'échouage. Ensuite, ce flux a été établi en supposant que le frottement à la base du glacier est régi par une loi de frottement particulière, la loi de Weertman, associée à un coefficient de frottement constant ; or, nous montrerons dans ce manuscrit que certaines distributions spatiales de ce coefficient peuvent avoir un effet stabilisateur (Brondex *et al.*, 2017). Enfin, ces études ont été menées sur un cas synthétique en 2D le long d'une ligne de flux et ne tiennent donc pas compte des éventuels effets d'arc-boutant causés, par exemple, par le frottement d'une plateforme flottante confinée sur les bords d'un fjord (Schoof *et al.*, 2017). Gudmundsson *et al.* (2012) ont ainsi obtenu numériquement des sections de ligne d'échouage stables situées sur des pentes rétrogrades en imaginant, pour un modèle tridimensionnel de calotte, une forme de socle particulière induisant un effet d'arc-boutant. Rappelons cependant que l'effet stabilisateur du mécanisme d'arc-boutant est amoindri par la présence de

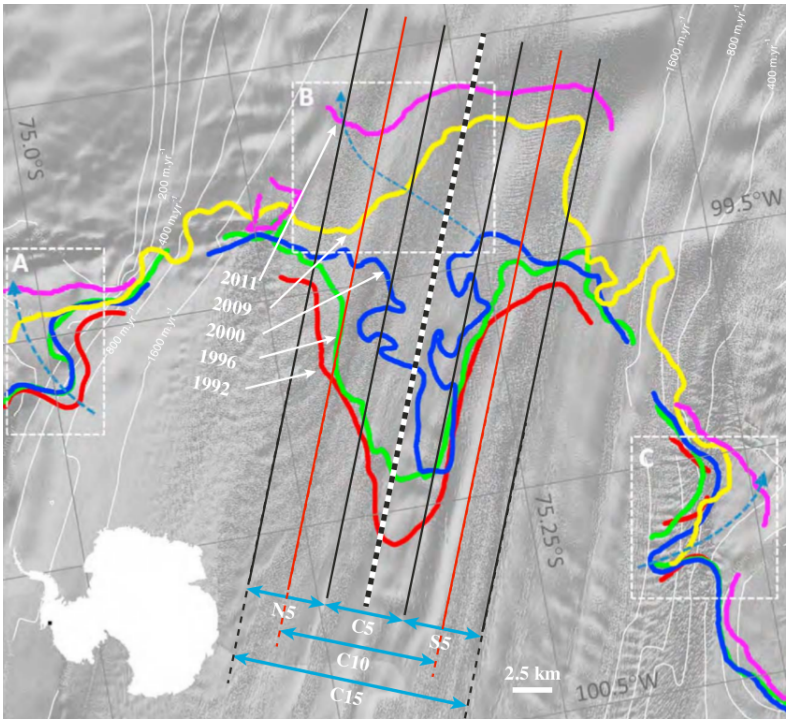


FIGURE 1.4 – Positions successives occupées par la ligne d'échouage du glacier émissaire Pine Island pour les années 1992 (rouge), 1996 (vert), 2000 (bleu), 2009 (jaune) et 2011 (magenta). Les rectangles en traits interrompus blancs dénotés A, B et C mettent en exergue les régions où le retrait est le plus prononcé et les flèches en traits interrompus cyans donnent la direction de ces retraits. La localisation du glacier Pine Island est signalée par un point noir sur la carte de l'Antarctique représentée en blanc dans le coin inférieur gauche de la figure. Figure issue de Park *et al.* (2013).

fractures au niveau des marges de cisaillement. Ces différentes limitations jettent le doute sur l'idée selon laquelle la topographie du socle seule suffit à délimiter des zones sujettes au phénomène de MISI.

De fait, la question de l'instabilité de la calotte d'Antarctique de l'Ouest n'est pas encore fermement tranchée. Les observations disponibles de cette région ne sont pas suffisamment détaillées et leur couverture temporelle est trop réduite pour confirmer ou infirmer définitivement cette hypothèse (Church *et al.*, 2013). Ce qui est établi en revanche, c'est que la majeure partie de la masse perdue par l'Antarctique depuis le début des observations satellitaires provient d'Antarctique de l'Ouest (Rignot *et al.*, 2008; Pritchard *et al.*, 2012) et que cette perte de masse s'accélère (Rignot, 2008; Rignot *et al.*, 2011a). En particulier, Mouginot *et al.* (2014) ont compilé 41 années de mesures effectuées sur le secteur d'Admunsen qui draine un tiers de la glace s'écoulant d'Antarctique de l'Ouest. Ils ont ainsi pu montrer une augmentation de 77 % de la décharge de glace dans ce secteur depuis 1973, la moitié de cette augmentation ayant eu lieu entre 2009 et 2013. Cette perte de masse est associée à un retrait généralisé des lignes d'échouage des glaciers émissaires du secteur à un taux de l'ordre de 1 km $a^{-1}$. La Figure 1.4 illustre cette retraite sur la période 1992-2011 pour

le glacier émissaire Pine Island qui canalise à lui seul 20 % de la glace déchargée d'Antarctique de l'Ouest (Bindschadler, 2002; Rignot *et al.*, 2008). D'après Mouginot *et al.* (2014), cette évolution donne du poids à l'hypothèse du développement d'un phénomène de MISI.

## 1.3 Contexte et enjeux de la thèse

### 1.3.1 Les modèles numériques de calotte

Si la glaciologie est une science vieille de plusieurs siècles, il aura fallu attendre l'avènement des premiers moyens informatiques dans la seconde moitié du 20e siècle pour voir se développer les premiers modèles numériques d'écoulement glaciaire. Bien que quelques modèles 2D furent développés un peu auparavant, le premier modèle numérique d'écoulement appliqué au cas d'un glacier de vallée tridimensionnel semble remonter aux travaux de Campbell et Rasmussen (1970). Puis suivirent les travaux pionniers de Mahaffy (1976) et de Jenssen (1977) qui appliquèrent des modèles numériques tridimensionnels d'écoulement à la calotte glaciaire de Barnes située sur l'île de Baffin (Canada) pour le premier et à la calotte groenlandaise pour le second. Ces premières applications sont plutôt à vocation exploratoire et ce n'est qu'un peu plus tard que les progrès sont suffisants pour envisager des simulations dont le but est de reproduire l'évolution des calottes polaires à l'échelle des périodes glaciaires et interglaciaires (Huybrechts, 1990; Letréguilly *et al.*, 1991; Ritz *et al.*, 1996, par exemple). Néanmoins, compte tenu des moyens de calcul disponibles à cette époque, ces modèles faisaient appel à une physique trop simplifiée - notamment en ce qui concerne la migration de la ligne d'échouage - ainsi qu'à des résolutions temporelles et spatiales trop grossières pour permettre des projections dignes de confiance à l'horizon du siècle.

Le problème de la modélisation de la migration de la ligne d'échouage est abordé assez tôt avec les études de Thomas (1977) puis de Thomas et Bentley (1978) qui s'intéressèrent à la région de la plateforme flottante de Ross (Antarctique de l'Ouest). Bien qu'il s'agisse là de travaux fondateurs, ceux-ci présentent néanmoins certaines limitations importantes, en particulier en ce qui concerne le couplage mécanique, s'opérant à la ligne d'échouage, entre la plateforme flottante et la partie posée. Différents travaux sont alors entrepris dans les années qui suivent pour améliorer la représentation de ce couplage mécanique (Lingle, 1984; Van der Veen, 1985; Hindmarsh, 1993, par exemple). La manière dont la ligne d'échouage est supposée se comporter pour des conditions environnementales données est une des thématiques abordées lors de l'exercice d'intercomparaison de modèles EISMINT (European Ice Sheet Model INTercomparison) : on constate à cette occasion que tous les modèles participants produisent des résultats différents (Huybrechts, 1998). Presque une décennie plus tard, la situation ne s'est guère améliorée comme le montrent les travaux de Vieli et Payne (2005) qui révèlent qu'aucun des modèles utilisés à l'époque ne produit une dynamique de la ligne d'échouage robuste. Face à ce constat, des efforts importants sont déployés afin d'améliorer

la compréhension des différents facteurs affectant cette dynamique et leur représentation au sein des modèles d'écoulement (Pattyn *et al.*, 2006; Schoof, 2007a,b; Nowicki et Wingham, 2008; Durand *et al.*, 2009b; Gagliardini *et al.*, 2010, par exemple). Ces efforts se concrétisent par le développement d'une variété de nouveaux modèles numériques d'écoulement de calotte qui mettent l'accent sur la représentation de la migration de la ligne d'échouage. Un premier exercice d'intercomparaison dénommé MISMIP est conçu afin de comparer les résultats produits par ces nouveaux modèles d'une part, et d'évaluer la capacité des différents schémas numériques qu'ils emploient à résoudre les équations aux dérivées partielles qui gouvernent l'écoulement des calottes d'autre part (Pattyn *et al.*, 2012). Cet exercice, qui considère une calotte synthétique 2D selon une ligne d'écoulement, est complété un peu plus tard par un exercice similaire, MISMIP3D, qui s'intéresse à l'écoulement d'une calotte synthétique tridimensionnelle (Pattyn *et al.*, 2013). Les résultats obtenus lors de ces deux exercices indiquent que les efforts mis en œuvre par la communauté pour résoudre le problème de la migration de la ligne d'échouage semblent avoir porté leurs fruits : dans leur conclusion, Pattyn *et al.* (2013) affirment que tous les modèles ayant participé à l'exercice MISMIP3D sont capables de produire une réponse dynamique de la ligne d'échouage à une perturbation en frottement basal et que les migrations ainsi obtenues sont cohérentes, à condition que la résolution numérique dans la région de la ligne d'échouage soit suffisante. Les auteurs concèdent néanmoins qu'il s'agit là d'un cas simplifié qui ne permet pas de conclure quant aux positions et taux de migration de ligne d'échouage que les modèles sont supposés produire pour des objets d'étude réels. En particulier, ces exercices ignorent totalement les possibles effets d'arc-boutant évoqués précédemment et font appel à une loi de frottement de Weertman associée à un coefficient de frottement constant qui induit une discontinuité peu réaliste du frottement basal à la ligne d'échouage. L'endommagement, phénomène physique par lequel les propriétés mécaniques de la glace s'altèrent et induisent une réduction de la viscosité de celle-ci, n'est pas non plus considéré dans ces exercices. De nombreuses questions quant à la dynamique de la ligne d'échouage et à sa représentation dans les modèles d'écoulement restent donc ouvertes. Dans son dernier rapport (rapport AR5, publié en 2013), le GIEC prend acte de cet état de fait en soulignant que, malgré les progrès réalisés depuis le rapport précédent (rapport AR4, publié en 2007), le domaine de la modélisation des calottes n'a pas encore atteint le même niveau de maturité que celui qui existe pour la modélisation de nombreuses autres composantes du système Terre (Church *et al.*, 2013).

### 1.3.2 Objectifs et organisation de la thèse

Au cours de la Section 1.1, nous avons constaté l'élévation actuelle du niveau des mers et évoqué les impacts sociétaux, environnementaux et économiques de cette élévation. La Section 1.2 a été l'occasion de décrire les modes de contribution des deux calottes polaires à cette élévation. En parti-

culier, nous avons mis en lumière le fait que la calotte antarctique - de loin le plus gros contributeur potentiel à l'élévation future du niveau des mers - perd sa masse presque exclusivement par transfert dynamique de glace aux marges de la partie posée et que plus de 80 % de cette masse transite par une ligne d'échouage. Nous avons également évoqué les forts soupçons qui pèsent sur une éventuelle instabilité de l'Antarctique de l'Ouest dont la ligne d'échouage repose sur un socle rétrograde. Enfin, dans la partie précédente, nous avons déroulé un bref historique des progrès réalisés au fil des ans dans la modélisation de la migration de la ligne d'échouage tout en nuançant ces progrès compte tenu du fait que certains processus affectant la dynamique de la ligne d'échouage restent complètement ou partiellement ignorés des modèles. Quantifier l'importance de ces processus sur la dynamique de la ligne d'échouage est essentiel afin de définir des priorités quant aux développements futurs à apporter à ces modèles. Par exemple, d'importants efforts sont actuellement mis en œuvre dans le but de coupler les modèles de calotte aux modèles d'océan (Asay-Davis *et al.*, 2016; Seroussi *et al.*, 2017, par exemple) car plusieurs études passées ont suggéré une influence importante sur la dynamique de la ligne d'échouage de la manière dont la fonte est distribuée spatialement sous les plateformes flottantes (Walker *et al.*, 2008; Gagliardini *et al.*, 2010).

Dans ce cadre, **cette thèse vise à évaluer l'influence sur la dynamique de la ligne d'échouage de deux processus : l'endommagement d'une part et le frottement basal en lien avec l'hydrologie sous-glaciaire d'autre part.**

Dans le Chapitre 2, les deux mécanismes à l'origine du mouvement des glaciers et calottes sont décrits : la déformation visco-plastique (fluage) de la glace et le mouvement basal. Dans un premier temps, nous nous attardons sur le fluage et montrons comment ce mécanisme est affecté par l'endommagement de la glace, notion qui est introduite au préalable. Dans un second temps, les différents processus permettant à la base d'un glacier de se mouvoir par rapport à son socle sont recensés et l'importance de l'eau occupant le réseau de drainage sous-glaciaire dans ce mouvement est mise en lumière. Suite à cela, un inventaire des lois de frottement développées au fil des décennies pour modéliser ce mouvement est dressé et les quatre lois les plus communément utilisées en glaciologie sont comparées. En fin de chapitre, les méthodes employées pour localiser la ligne d'échouage sont évoquées, l'importance de cette zone d'un point de vue mécanique est soulignée et les mécanismes par le biais desquels l'endommagement et le frottement basal affectent sa dynamique sont mis en évidence.

Le Chapitre 3 est consacré à la modélisation des écoulements glaciaires : les équations qui régissent ces écoulements y sont présentées ainsi que certaines approximations de ces équations auxquelles les glaciologues ont communément recours. Suit une description succincte de la méthode des éléments finis, qui permet d'obtenir des solutions numériques à ces équations, puis le modèle *Elmer/Ice*, qui fait appel à cette méthode et sur lequel repose l'ensemble des travaux présentés dans

ce manuscrit, est introduit.

Le Chapitre 4 traite de l'influence de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage. La loi d'évolution de l'endommagement y est présentée ainsi que certains développements du modèle d'endommagement réalisés au cours de cette thèse. Les difficultés numériques associées à la résolution de cette loi d'évolution imposent l'utilisation de méthodes de stabilisation. Quatre de ces méthodes sont présentées et leurs comportements sont étudiés à partir de cas simplifiés. En fin de chapitre, une expérience est réalisée afin d'évaluer la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la méthode de stabilisation.

Le Chapitre 5 aborde la problématique de l'influence du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage. Une première série d'expériences s'intéresse au cas d'un frottement discontinu à la ligne d'échouage et à la sensibilité de la dynamique de celle-ci aux différents traitements numériques possibles de cette discontinuité. Dans une seconde partie, une géométrie synthétique 2D d'une calotte reposant sur un socle localement rétrograde est construite et une perturbation lui est appliquée ; la réponse dynamique de la ligne d'échouage à cette perturbation est comparée pour les quatre lois de frottement introduites au Chapitre 2.

Le Chapitre 6 a pour but d'évaluer à quel point les résultats obtenus pour le cas synthétique traité au Chapitre 5 s'étendent à un cas réel, le bassin d'Amundsen (Antarctique de l'Ouest). C'est aussi l'occasion de s'interroger sur la manière de choisir les paramètres des lois de frottement et de tester l'influence du choix de certains de ces paramètres sur la dynamique de la ligne d'échouage.

Chapitre 2

# Dynamique des écoulements glaciaires

**Sommaire**


**2.1 Contexte historique** . . . . . **15**
**2.2 Déformation visco-plastique de la glace** . . . . . **17**
2.2.1 Mécanique de la glace non-endommagée . . . . . 18
2.2.2 L'endommagement de la glace . . . . . 21
**2.3 Mouvement basal** . . . . . **29**
2.3.1 Observations et processus . . . . . 29
2.3.2 Formulation des lois de frottement . . . . . 40
**2.4 La ligne d'échouage : localisation et migration** . . . . . **50**
2.4.1 Localisation de la ligne d'échouage . . . . . 51
2.4.2 Une zone de transition entre deux régimes d'écoulement . . . . . 52
2.4.3 Dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 54
**2.5 Conclusion** . . . . . **56**


Ce chapitre traite de la dynamique des écoulements glaciaires et de la ligne d'échouage. Il débute par un bref historique des étapes successives ayant abouti à l'état actuel des connaissances basé sur les articles de Hollier et Hollier (2016) et Rémy et Testut (2006). Ensuite, nous nous intéressons à la déformation visco-plastique de la glace et voyons comment l'endommagement affecte ce mécanisme. Dans une troisième section, nous nous focalisons sur le mouvement basal des glaciers et calottes et présentons les lois de frottement qui permettent de décrire ce processus. Enfin, une dernière section est consacrée à la ligne d'échouage. Après avoir décrit les procédés permettant sa localisation, nous mettons en évidence la complexité du régime d'écoulement en son voisinage ainsi que la dépendance de sa dynamique à l'endommagement et au frottement basal.

## 2.1 Contexte historique

Au 17e siècle, en plein cœur du petit âge glaciaire, les glaciers alpins grossissent, engloutissant fermes et alpages. Les glaciers sont alors considérés par les habitants des vallées alpines comme des lieux maléfiques progressant au gré des colères divines. Mais à partir du 18e siècle, avec l'avènement des Lumières en Europe, des naturalistes commencent à s'intéresser aux glaciers d'un point de vue scientifique. En 1706, le zurichois Johann Heinrich Hottinger (1680-1756) publie *Descriptio Montium Glacialium Helveticorum*, considéré comme le premier traité de glaciologie de l'histoire,

dans lequel il s'intéresse à la formation et au mouvement des glaciers. La première tentative connue d'explication de la dynamique des glaciers revient à Johann Jacob Scheuchzer (1672-1733), qui postule que l'extension des glaciers est engendrée par la dilatation induite par la solidification d'eau de fonte s'engouffrant au sein des crevasses présentes sur le glacier. Mais en 1751, Johann Georg Altmann (1695-1758) comprend que la gravité est le véritable moteur du mouvement des glaciers. Selon lui, le glacier glisse sur son socle rocheux comme le ferait une masse rigide sur un plan suffisamment incliné. Ce mécanisme est repris et détaillé par le genevois Horace Bénédicte de Saussure (1740-1799), pionnier de "l'alpinisme scientifique" - les deux activités vont souvent de paire à cette époque -, dans son ouvrage *Voyages dans les Alpes* qui aura valeur de référence pendant de nombreuses années. Si ses écrits traduisent une vraie avancée dans la compréhension du mécanisme de glissement basal, le scientifique passe complètement à côté de l'aspect déformation visco-plastique qui intervient également dans le mouvement des glaciers. La théorie selon laquelle la glace s'écoule tel un fluide à forte viscosité avait été proposée dès 1773 par André César Bordier (1746-1802) mais n'avait reçu aucun écho jusqu'aux travaux de Louis Rendu (1789-1849). Dans son ouvrage *Théorie des glaciers de la Savoie* publié en 1840, le chanoine savoyard compare le glacier de la Mer de glace (France) à un fleuve et pressent que la vitesse d'écoulement de la glace n'est pas uniforme mais que "le frottement du fond, celui des bords, l'action des obstacles, font varier cette vitesse qui n'est entière que vers le milieu de la surface" (Rendu et Bischof, 1840). De 1840 à 1845, chaque été, plusieurs semaines durant, Louis Agassiz (1807-1873) et "l'équipe des Neuchâtelois" prennent leur quartier dans une cabane bordant le glacier de l'Aar (Suisse) afin de mener les premières véritables campagnes de terrain de l'histoire de la glaciologie. Si l'apport d'Agassiz à notre compréhension des glaciations est décisif, il n'en va pas de même pour son explication du mouvement des glaciers puisque le géologue réfute les idées de Bordier et Rendu et se range derrière la "théorie de dilatation" formulée par Scheuchzer (Agassiz et Bettannier, 1840). En 1842, James David Forbes (1809-1868) s'installe au dessus de la Mer de glace et, à l'aide d'un théodolite, mesure expérimentalement ce que Rendu avait compris par le raisonnement : les vitesses du glacier sont plus importantes en son milieu que sur les bords. Par ailleurs, il remarque une augmentation des vitesses d'écoulement à la suite de forts épisodes pluvieux. Il complète ses observations par des expériences en laboratoire qui le conduisent à rejeter définitivement la théorie de la dilatation et à expliquer le mouvement des glaciers par la rhéologie ductile de la glace qui flue sous l'effet de la gravité, tout en admettant que ce mouvement est facilité par la présence d'eau liquide à la base du glacier (Forbes, 1845). Le physicien écossais donnera d'ailleurs son nom aux *bandes de Forbes*, alternance de bandes de glace claire/sombre qui se forment sur certains glaciers en aval d'une chute de séracs et dont les formes en ogive illustrent le profil parabolique des vitesses à la surface du glacier (Figure 2.1). Mais cette découverte ne fit pas l'unanimité immédiatement et de nombreux scientifiques de premier

plan, induits en erreur par la double nature ductile/fragile de la glace, continuèrent à adhérer à diverses variantes de la théorie de la dilatation pendant de nombreuses années encore (e.g Tyndall et Huxley, 1857). C'est seulement en 1906 que Weinberg applique les lois de Navier-Stokes au glacier, attribuant de fait à la glace une nature de fluide visqueux (Weinberg, 1907). Vers le milieu du 20e siècle, la description du mouvement des glaciers comme combinaison de la déformation visco-plastique de la glace et du glissement basal sur le socle supposé rigide est largement acceptée au sein de la communauté scientifique. Finalement, la troisième composante de ce mouvement, liée à la déformation d'une éventuelle couche sédimentaire se trouvant entre le glacier et le socle rigide, ne sera établie qu'à partir du milieu des années 1980.

FIGURE 2.1 – Bandes de forbes sur le glacier de la Mer de glace (Chamonix). Crédit : Christian Vincent.

## 2.2 Déformation visco-plastique de la glace

Le comportement mécanique de la glace est complexe. Il varie selon les vitesses de chargement, les états de contrainte et les échelles de temps considérés. Ainsi, aux échelles de temps courtes, de l'ordre du jour ou moins, la glace s'apparente à un milieu élastique. Cette propriété peut être exploitée, par exemple, pour déterminer la position de la ligne d'échouage (voir Section 2.4.1). Aux

échelles de temps plus longues, la glace présente une rhéologie ductile, c'est-à-dire qu'elle parvient à se déformer plastiquement sans se rompre sous l'action d'une contrainte. En revanche, sous de fortes contraintes, ou lorsque celles-ci sont appliquées trop rapidement, la glace exhibe un comportement fragile et se fracture donnant naissance aux crevasses et séracs observables à la surface des glaciers. Cette section s'intéresse à la structure cristallographique de la glace qui permet de comprendre son comportement mécanique et d'aboutir à une relation constitutive décrivant son écoulement visco-plastique : la loi de Glen. Nous verrons également comment la mécanique de l'endommagement permet de tenir compte de sa nature fragile aux échelles micro et mésoscopiques sans avoir à renoncer au formalisme de la loi de Glen.

### 2.2.1 Mécanique de la glace non-endommagée

#### 2.2.1.1 Cristallographie de la glace

Pour comprendre la réponse de la glace à des sollicitations mécaniques extérieures, il est nécessaire d'évoquer sa structure cristallographique. Dans les conditions naturelles de température et de pression que l'on trouve à la surface de la Terre, la glace est constituée de molécules d'eau présentant un arrangement cristallographique hexagonal dont les atomes d'oxygène forment les plans de base (glace $I_h$). L'axe perpendiculaire à ces plans de base est appelé axe **c** et correspond également à l'axe optique du mono-cristal faisant de la glace un matériau biréfringent. La structure cristallographique d'un mono-cristal présente des défauts linéaires appelés dislocations. Lorsque le mono-cristal est soumis à une contrainte, ces dislocations se mettent à glisser dans les plans de base causant l'essentiel de la déformation visco-plastique observée à l'échelle macroscopique. Ce mode de déformation privilégié confère au mono-cristal de glace une forte anisotropie. Duval (1984) a ainsi constaté expérimentalement que la résistance au cisaillement d'un mono-cristal de glace est au moins 60 fois plus grande dans des plans non-basaux que dans les plans basaux.

Le polycristal de glace, échelle pertinente lorsqu'on s'intéresse au comportement mécanique de grands volumes de glace, est constitué d'un grand nombre de mono-cristaux ayant chacun leur propre orientation cristallographique. La distribution des orientations des axes **c** des différents mono-cristaux constituant le polycristal est appelée fabrique et permet de caractériser le degré d'anisotropie du polycristal. En effet, si les axes c des mono-cristaux n'ont pas d'orientation préférentielle, le polycristal aura un comportement mécanique isotrope. Dans le cas contraire, il sera anisotrope et présentera donc une direction de déformation privilégiée. La fabrique, et donc le comportement mécanique de la glace, dépend grandement de l'histoire des déformations qu'a connu celle-ci au cours de son écoulement et peut varier de manière importante d'un endroit à un autre d'un glacier ou d'une calotte (Lipenkov *et al.*, 1989; Thorsteinsson *et al.*, 1997; Azuma *et al.*, 1999; Wang *et al.*, 2003, par exemple). Cependant, nous ferons l'hypothèse dans cette thèse que les orientations des

axes **c** sont aléatoirement distribuées et donc que la glace est isotrope.

La détermination des différentes propriétés mécaniques d'un matériau repose généralement sur la mise en œuvre d'essais expérimentaux spécifiques. Pour les matériaux à comportement visco-plastique, les essais de fluage consistent à étudier l'évolution au cours du temps de la déformation d'une éprouvette soumise à une contrainte constante. Dans le cas de la glace, une très faible déformation élastique immédiate est suivie d'une déformation différée et irréversible à laquelle on se réfère sous le terme de fluage. Le fluage de la glace peut être caractérisé par la représentation graphique du taux de déformation en fonction de la déformation. La Figure 2.2 fait apparaître les trois phases principales du fluage de la glace, conséquences à l'échelle macroscopique de différents mécanismes opérant à l'échelle microscopique :

1. Le **fluage primaire** : On observe d'abord une diminution de la vitesse de déformation au fur et à mesure que la déformation augmente. Les mono-cristaux orientés favorablement se déforment les premiers par glissement selon les plans de base puis la charge est transférée à des mono-cristaux orientés de moins en moins favorablement et opposant de plus en plus de résistance au cisaillement induisant une diminution de la vitesse de déformation jusqu'à un minimum.

2. Le **fluage secondaire** : Dans le cas général, cette phase est caractérisée par une vitesse de déformation constante. Pour ce qui concerne la glace, cette phase est très courte et correspond au minimum de taux de déformation qui est atteint pour une déformation de l'ordre de 1 %.

3. Le **fluage tertiaire** : Il se caractérise par une ré-augmentation de la vitesse de déformation faisant suite à un mécanisme de recristallisation par migration. Cela correspond à la nucléation et à la croissance de nouveaux mono-cristaux favorablement orientés pour la déformation.

Le fluage secondaire décrit ci-dessus correspond à un état d'équilibre dynamique de la micro-structure ; les phénomènes de consolidation et d'adoucissement associés, respectivement, au fluage primaire et tertiaire, se compensent. Pour cette raison, les relations constitutives décrivant le comportement des matériaux, et en particulier de la glace, se réfèrent en général à ce stade de fluage.

#### 2.2.1.2 Loi de comportement de la glace : loi de Glen

Dans un cas simple unidimensionnel, Glen (1955) a montré que le minimum du taux de déformation correspondant au fluage secondaire peut être relié à la contrainte de cisaillement via une loi puissance de type *Norton-Hoff* (Norton, 1929). Cette relation, initialement scalaire, fût généralisée au cas tridimensionnel par Nye (1957) qui proposa la formulation tensorielle suivante :

$$\mathbf{S} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{2.1}$$

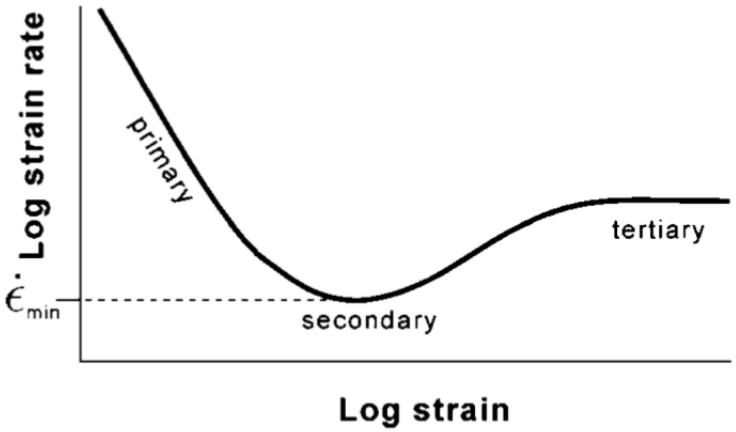


FIGURE 2.2 – Représentation schématique des trois modes de fluage du polycristal de glace (Cuffey et Paterson, 2010).

où $\mathbf{S}$ est le tenseur des contraintes déviatoires et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ est le tenseur taux de déformation donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.2}$$

où les $u_i$ sont les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$ et les $x_i$ sont les coordonnées de l'espace $(x, y, z)$. La viscosité effective $\eta$ s'exprime :

$$\eta = \frac{1}{2}(EA)^{-1/n} I_{\dot{\epsilon}_2}^{\frac{1}{n}-1} \tag{2.3}$$

avec $E$ un facteur d'amplification, $A$ la fluidité, $n$ l'exposant de Glen et $I_{\dot{\epsilon}_2} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ji}/2}$ le second invariant du tenseur taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. La fluidité $A$ est reliée à la température $T$ via l'équation :

$$A = A_0 e^{-Q/(RT)} \tag{2.4}$$

où $A_0$ est une fluidité de référence, $Q$ est l'énergie d'activation et $R$ la constante des gaz parfaits. La relation (2.1) est appelée *loi de Glen généralisée*, *loi isotrope de Nye-Glen* ou plus simplement *loi de Glen.*

Malgré sa simplicité apparente, la loi de Glen repose donc sur plusieurs paramètres souvent difficiles à contraindre. De nombreuses expériences ont été menées en laboratoire au cours des années pour essayer d'en déterminer les valeurs, mais les conditions rencontrées au sein des calottes sont difficilement reproductibles artificiellement. Des mesures *in situ* ont également été effectuées en divers endroits des calottes Antarctique et Groenlandaise mais n'ont pas permis d'établir des valeurs universellement admises pour ces paramètres. Par exemple, la valeur de $n$ varie, selon les cas, de quasiment 1 (Doake et Wolff, 1985; Lliboutry et Duval, 1985) à presque 5 (Gillet-Chaulet *et al.*, 2011). Si le débat n'est pas encore complètement tranché, $n = 3$ est la valeur la plus couramment

utilisée par la communauté des glaciologues pour les applications courantes. Pour une telle valeur de $n$, l'équation (2.1) est fortement non-linéaire du fait de la dépendance de $\eta$ aux vitesses de déformation via l'invariant $I_{\dot{\epsilon}_2}$, ce qui est caractéristique des fluides non-newtoniens. Les valeurs classiques utilisées pour les paramètres $A_0$ et $Q$ peuvent être trouvées, pour différentes températures, dans Cuffey et Paterson (2010).

Outre le fait que la loi de Glen repose sur des paramètres dont les valeurs ne sont pas fermement établies, cette loi elle-même est une représentation de la réalité qui, a priori, ne permet pas de rendre compte de toute la complexité des mécanismes à l'œuvre dans l'écoulement des calottes. Par exemple, l'anisotropie de la glace évoquée précédemment n'est pas prise en compte par la loi de Glen telle que formulée par l'équation (2.1). La teneur de la glace en eau liquide et en impureté, sa porosité, la taille de ses grains sont d'autres facteurs qui influent notoirement sur les propriétés visco-plastiques de la glace mais qui restent difficiles à quantifier à l'heure actuelle. Aussi les modélisateurs font-ils appel au facteur d'amplification $E$, un artefact mathématique permettant d'englober l'ensemble de la physique mal connue afin de corriger cette loi pour que ses prédictions correspondent au mieux aux observations. Par ailleurs, dans le cadre de cette thèse, $E$ sera utilisé comme intermédiaire afin de traduire la dépendance de la rhéologie de la glace à son endommagement. Cet aspect est détaillé dans la partie suivante.

### 2.2.2 L'endommagement de la glace

Au cours de son écoulement, la glace est soumise à des contraintes qui induisent une détérioration progressive de ses propriétés rhéologiques : le niveau de contrainte supporté par un volume élémentaire de glace pour un taux de déformation donné diminue au fur et à mesure que celui-ci s'endommage. A l'échelle macroscopique, cela se traduit par une diminution de la viscosité de la glace dont le fluage se trouve facilité. La mécanique de l'endommagement permet de représenter à l'échelle macroscopique des effets dont les causes sont des phénomènes physiques opérant à l'échelle mésoscopique voire microscopique.

#### 2.2.2.1 Mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement a initialement été développée dans le cadre de la métallurgie (Kachanov, 1958; Lemaitre, 1984, par exemple). Il s'agissait pour les ingénieurs de comprendre et de prévoir la détérioration de pièces mécaniques qui, bien que soumises à des contraintes nettement inférieures à leur limite élastique, finissaient par se rompre après un certain temps d'utilisation. Depuis, la notion d'endommagement a été étendue à tous les types de déformation (élastique, plastique, fluage) et à tous les types de chargement (cyclique ou monotone) (Pralong et Funk, 2005). Ainsi, le terme d'endommagement regroupe l'ensemble des processus physiques menant à

une détérioration progressive des propriétés mécaniques d'un milieu soumis à un chargement.

A l'échelle microscopique, la structure d'un échantillon de glace soumis à un chargement est altérée par la nucléation et la propagation de microfissures et microcavités en son sein. La taille caractéristique de ces défauts internes est inférieure de plusieurs ordres de grandeur au volume de l'échantillon, si bien qu'il est impossible de tenir compte de leur influence de manière individuelle. Cependant, la dégradation des propriétés mécaniques de la glace engendrée par la présence de ces microdéfauts a des effets mesurables à l'échelle macroscopique (Murakami et Ohno, 1981, par exemple). La mécanique de l'endommagement repose sur l'introduction d'une variable d'état, appelée variable d'endommagement et notée $D$, définie à une échelle intermédiaire dite mésoscopique (Kachanov, 1958). La variable d'endommagement permet de quantifier la dégradation locale des propriétés mécaniques de la glace, due à une population de microdéfauts dont les effets sont moyennés à méso-échelle, sans avoir à se départir de l'hypothèse de continuité du domaine modélisé. Comme ces microdéfauts ne sont pas des cavités parfaitement sphériques mais plutôt des microfissures qui adoptent une orientation préférentielle en fonction de l'état de contrainte, les effets de l'endommagement sont anisotropes. Aussi, en toute rigueur, l'endommagement doit-il être représenté par un champ tensorielle d'ordre 2 (Murakami et Ohno, 1981; Pralong *et al.*, 2006; Keller et Hutter, 2014, par exemple). Néanmoins, dans le cadre de cette thèse nous nous limiterons au cas isotrope où l'endommagement est représenté par un champ scalaire. La majorité des auteurs ayant recours à l'endommagement adopte cette hypothèse simplificatrice (Pralong *et al.*, 2003; Borstad et McClung, 2011; Borstad *et al.*, 2012, 2013, 2016; Krug *et al.*, 2014; Albrecht et Levermann, 2014; Favier *et al.*, 2014, par exemple).

Lorsqu'on se restreint au cas isotrope, il est possible de donner une interprétation physique concrète à la variable scalaire d'endommagement. Considérons un point matériel M quelconque du domaine étudié et notons $dS_n$ une surface élémentaire de normale $\mathbf{n}$ quelconque définie au point M. La surface résistive effective $\widetilde{dS_n}$ représente la surface endommagée $dS_n$ privée de l'aire correspondant aux microfissures et microcavités qui ne fournissent pas de résistance mécanique. L'endommagement $D$ au point M est alors défini par (Lemaitre, 1984) :

$$D = \frac{dS_n - \widetilde{dS_n}}{dS_n} \tag{2.5}$$

Ainsi, la variable d'endommagement varie entre 0 et 1 ; $D = 0$ en un point vierge d'endommagement et $D = 1$ en un point totalement endommagé et donc incapable de fournir la moindre résistance mécanique. Dès lors, on peut introduire la notion de contrainte effective : un effort élémentaire s'exerçant sur la surface $dS_n$ ne sera effectivement repris que par la surface non endommagée $\widetilde{dS_n}$. De ce concept découle celui de tenseur des contraintes déviatoires effectives $\tilde{\boldsymbol{S}}$, donné par :

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \frac{\boldsymbol{S}}{1 - D} \tag{2.6}$$

où $\boldsymbol{S}$ est le tenseur des contraintes déviatoires défini sur l'ensemble du domaine. Il est alors possible de faire appel au principe d'équivalence de Lemaitre et Chaboche (1978) qui affirme que le comportement mécanique d'un matériau endommagé peut être représenté avec le formalisme des équations constitutives s'appliquant au matériau non-endommagé en remplaçant les contraintes par les contraintes effectives.

Dans le cadre de la modélisation des écoulements glaciaires, le principe demeure identique mais les échelles mises en jeu ne sont plus les mêmes. En effet, il est classique de modéliser des régions englacées couvrant plusieurs centaines voire plusieurs milliers de km$^2$. L'échelle mésoscopique doit alors être vue comme celle de la maille du modèle dont la dimension caractéristique est de l'ordre de la centaine de mètres (cf Section 3.3). Dans une telle situation, le rôle de l'endommagement est de moyenner, à l'échelle de la maille du modèle, l'effet sur l'écoulement des fractures et crevasses typiquement observées à la surface des glaciers et dont la dimension caractéristique est de l'ordre de la dizaine de mètres.

L'endommagement ainsi défini devient une nouvelle variable du modèle d'écoulement. A ce titre, une loi d'évolution doit lui être associée. Cette loi a pour but de décrire la formation ou l'augmentation d'endommagement dans les zones de fortes contraintes et le transport de l'endommagement existant vers l'aval avec l'écoulement de la glace. Par ailleurs, plusieurs auteurs ont décrit un phénomène de cicatrisation qui permettrait, sous certaines conditions, aux fractures de se refermer et à la glace de retrouver son intégrité mécanique (Khazendar et Jenkins, 2003; Pralong *et al.*, 2003, 2006; Khazendar *et al.*, 2011; Borstad *et al.*, 2013; Albrecht et Levermann, 2012, 2014, par exemple). Précisons néanmoins que, du fait de la complexité des processus mis en jeu, la modélisation du phénomène de cicatrisation n'en est qu'à ses balbutiements et la plupart des modèles d'endommagement utilisés à l'heure actuelle s'en affranchissent. La loi d'évolution de l'endommagement utilisée au cours de cette thèse sera décrite au Chapitre 4.

#### 2.2.2.2 Endommagement et rhéologie de la glace

De nombreux auteurs ont utilisé le principe d'équivalence de Lemaitre et Chaboche (1978) pour prendre en compte l'influence de l'endommagement sur la rhéologie de la glace (Pralong et Funk, 2005; Borstad *et al.*, 2012, 2013, 2016; Duddu et Waisman, 2012; Krug *et al.*, 2014; Albrecht et Levermann, 2014, par exemple).

En vertu du principe d'équivalence, la loi de Glen (2.1) est modifiée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{S}} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{2.7}$$

ou encore, en combinant les équations (2.6) et (2.7) :

$$\mathbf{S} = 2\eta(1-D)\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{2.8}$$

En pratique, l'endommagement est intégré au facteur d'amplification $E$ introduit à la Section 2.2.1.2 et, par identification avec l'équation (2.3), on obtient :

$$E = \frac{1}{(1-D)^n} \tag{2.9}$$

Il est ainsi possible de décrire la rhéologie de la glace endommagée en utilisant la loi de Glen, l'endommagement affectant la viscosité de la glace par l'intermédiaire du facteur d'amplification. Pour une glace non endommagée, $E = 1$ et la rhéologie est inchangée. En revanche, là où la glace est endommagée le facteur d'amplification devient supérieur à 1 donc la viscosité de la glace diminue et les vitesses d'écoulement augmentent.

Nous venons d'établir le lien entre endommagement et viscosité de la glace à partir d'un raisonnement faisant appel aux concepts de la théorie de l'endommagement de Kachanov (1958). Les observations menées sur des calottes et glaciers réels confirment l'existence de ce lien. Sandhäger (2003) utilise un modèle numérique pour reproduire la dynamique de la barrière de glace de Larsen (Péninsule Antarctique) à l'époque où celle-ci regroupait le Larsen A (désintégré en 1995), le Larsen B (désintégré en quasi-totalité en 2002) et le Larsen C (qui a relargué un iceberg représentant 12 % de sa surface à l'été 2017). Les auteurs s'aperçoivent que leur modèle n'est pas capable de reproduire les vitesses observées. En particulier, les observations montrent des zones d'écoulement lent côtoyant des zones d'écoulement rapide. On qualifie l'interface entre ces deux zones de marge de cisaillement. La transition entre les deux régimes d'écoulement opérant de part et d'autre de la marge de cisaillement est abrupte et induit d'importants gradients de vitesse. Le modèle initial de Sandhäger (2003) ne parvient pas à reproduire ces gradients. Les auteurs comprennent que les fractures observées au niveau des marges de cisaillement sont responsables du découplage mécanique observé. Ils décident d'en tenir compte en introduisant une paramétrisation *ad hoc* de l'affaiblissement mécanique de la glace - qui revient à réduire localement sa viscosité - dans les zones au sein desquelles la contrainte de cisaillement est supérieure à une valeur seuil (dont la valeur n'est pas explicitée dans le papier). Ensuite, ils autorisent la glace ainsi endommagée à être advectée avec l'écoulement. La distribution des vitesses obtenue avec ce nouveau modèle se révèle être bien plus en accord avec les observations. Ces résultats sont corroborés par les travaux de Vieli *et al.* (2006) qui prennent le problème dans l'autre sens : à partir des vitesses observées sur la plateforme du Larsen B, ils font appel aux méthodes inverses pour remonter à la viscosité effective de la glace sur la plateforme. Les méthodes inverses constituent une technique très répandue dans de nombreux domaines de la physique permettant d'estimer des paramètres méconnus ou mal contraints d'un système à partir d'observations de ce système (en l'occurrence, en glaciologie il s'agit généralement d'observations des vitesses d'écoulement en surface). Nous aurons nous-même recours aux méthodes inverses au Chapitre 6 et nous renvoyons le lecteur vers ce chapitre pour de plus amples informations au sujet de ces méthodes. L'inversion réalisée par Vieli *et al.* (2006) dévoile la présence de

bandes de glace de très faible viscosité effective localisées au niveau des marges de cisaillement. Les auteurs indiquent que la viscosité effective obtenue au sein de ces bandes est bien inférieure à la viscosité généralement attribuée à la glace au point de fusion. Autrement dit, une augmentation de la température de la glace liée à la déformation ne suffit pas à expliquer l'existence de ces bandes. Ce constat les conduit à conclure que les nombreuses crevasses présentes au niveau des marges de cisaillement ont vraisemblablement une part de responsabilité dans l'affaiblissement mécanique de la glace observée au sein de ces bandes. La seconde conclusion importante des travaux de Vieli *et al.* (2006) est que ces bandes de faible viscosité effective contrôlent en grande partie l'écoulement du Larsen B. Khazendar *et al.* (2007, 2011) réalisent également des inversions de la viscosité effective à partir des vitesses observées en surface du Larsen B puis du Larsen C et aboutissent à des conclusions similaires en ce qui concerne l'affaiblissement mécanique des marges de cisaillement en lien avec la fracturation de la glace dans ces zones.

Inverser la viscosité effective permet de tenir compte, à un instant donné, de l'effet de l'endommagement sur l'écoulement de la glace. Cependant, le niveau d'endommagement - et donc la viscosité de la glace - en un point du domaine est susceptible d'évoluer au cours du temps pour différentes raisons : d'abord parce que les zones fracturées vont être transportées vers l'aval avec l'écoulement de la glace ; ensuite, parce qu'un mécanisme de cicatrisation peut intervenir et rétablir localement l'intégrité mécanique de la glace ; enfin, parce que l'état de contrainte au sein du domaine évolue au cours du temps et de nouvelles fractures sont potentiellement amenées à se former. Cet état de fait est parfaitement illustré par les travaux de Vieli *et al.* (2007). Cette étude, comme celle parue l'année précédente (Vieli *et al.*, 2006), repose sur l'inversion de la viscosité effective à partir des vitesses observées sur le Larsen B. Cependant, cette fois-ci il s'agit de faire deux inversions, la première pour l'année 1995 et la seconde pour l'année 1999, afin d'expliquer la forte accélération de la plateforme observée entre ces deux années. Les auteurs constatent que le champ de viscosité effective inversé a évolué au cours des quatre années séparant les deux inversions. En particulier, les bandes de faible viscosité effective dont il a été question précédemment ont vu, au cours des quatre années écoulées, une diminution supplémentaire de viscosité de près de 50 % sur la quasi-totalité de leur surface. En testant différents scénarios afin d'expliquer l'accélération de la plateforme, les auteurs aboutissent à la conclusion que celle-ci est vraisemblablement due à une aggravation de l'état de fracturation des marges de cisaillement. Cette aggravation pourrait être liée à l'infiltration d'eau de fonte dans les crevasses existantes contribuant à les étendre et à les approfondir ou à une augmentation locale des contraintes de cisaillement conduisant à la formation de nouvelles crevasses. Dans tous les cas, cela montre bien que des simulations pronostiques fiables supposent la prise en compte explicite de l'endommagement au sein des modèles et l'attribution à ce paramètre d'une loi d'évolution réaliste.

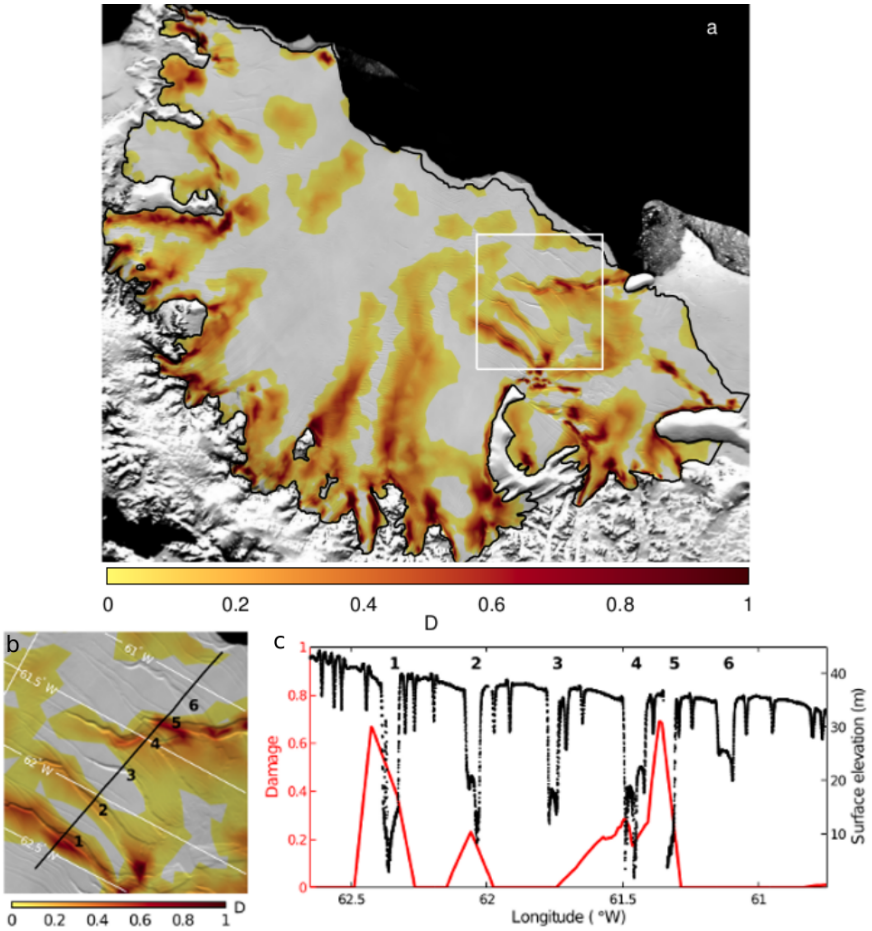


FIGURE 2.3 – **(a)** Distribution d'endommagement sur le Larsen C obtenue par méthodes inverses. **(b)** Zoom sur le carré blanc de la Figure 2.3a illustrant la correspondance entre zones endommagées et fractures. La ligne noire correspond à une ligne de vol de l'opération IceBridge datant de 2009. Les rifts survolés sont numérotés de 1 à 6 pour comparaison avec le panneau **(c)**. Celui-ci montre l'endommagement en rouge (axe de gauche) et l'élévation de surface par rapport au niveau moyen des mers mesurée au cours de l'opération IceBridge en noir (axe de droite). Figure adaptée de Borstad *et al.* (2013).

Cette prise de conscience amène Borstad *et al.* (2012) à entreprendre une inversion directe de l'endommagement sur le Larsen B. A partir d'estimations des températures basales et de surface, ils dérivent analytiquement une distribution de température de la glace moyennée verticalement. En utilisant l'équation (2.4) qui relie la fluidité à la température, ils obtiennent une fluidité de référence. Dès lors, la viscosité effective ne dépend plus que de l'endommagement et il devient possible de l'inverser directement. Concrètement, cela revient à attribuer à l'endommagement tout excès de fluidité constaté sur la plateforme par rapport à la fluidité de référence. Bien sûr, l'erreur commise dans l'évaluation du champ de température se répercute directement sur l'endommagement inféré. Sans surprise, les auteurs trouvent de forts niveaux d'endommagement ($D \approx 1$) au sein des bandes de faible viscosité effective mises en évidence au cours des précédentes études (Vieli *et al.*, 2006,

2007; Khazendar *et al.*, 2007). L'année suivante c'est au tour du Larsen C de se voir appliquer la même méthode expérimentale (Borstad *et al.*, 2013). L'endommagement ainsi obtenu est représenté sur la Figure 2.3. A nouveau, comme on pouvait s'y attendre, cette inversion montre une bonne corrélation entre zones endommagées et zones de faible viscosité effective inférées par Khazendar *et al.* (2011). En particulier, des niveaux importants d'endommagement sont constatés là où la glace se détache du socle (c'est-à-dire immédiatement en aval de la ligne d'échouage) du fait des fortes contraintes engendrées par la transition de glace posée à glace flottante. L'advection de la glace endommagée par l'écoulement explique les motifs d'endommagement observés sur la Figure 2.3a. Néanmoins, on constate une diminution du niveau d'endommagement à mesure que l'on approche du front de la plateforme. Selon les auteurs, cela pourrait être du à des erreurs sur le champ de température utilisé pour dériver la fluidité de référence ou à une cicatrisation progressive des fractures concernées qui seraient peu à peu comblées par un mélange de glace de mer et de fragments de glace provenant de la plateforme (Khazendar et Jenkins, 2003). La Figure 2.3c montre les niveaux d'endommagement obtenus le long d'une ligne particulière correspondant à une ligne de vol de l'opération IceBridge (ligne noire sur la Figure 2.3b) pour laquelle des données d'élévation de surface sont disponibles et représentées en noir sur cette même figure. La résolution le long de la ligne de vol est d'environ 600 m pour l'endommagement et de 40 m pour l'élévation de surface. Entre deux noeuds du modèle, l'endommagement est interpolé linéairement ce qui explique la forme de la courbe rouge sur la Figure 2.3c. Les rifts survolés sont numérotés de 1 à 6 sur les Figures 2.3b et c. On remarque sur ces deux figures que les pics d'endommagement correspondent globalement bien aux mailles contenant les rifts les plus profonds (rifts 1, 2 et 5 sur la Figure 2.3c). Selon les auteurs, les rifts les moins profonds (rifts 3 et 6) seraient partiellement comblés par le mélange de glace évoqué ci-dessus, ce qui aurait pour conséquence de restaurer l'intégrité mécanique de la glace dans les mailles correspondantes, d'où l'absence d'endommagement au sein de celles-ci. L'anomalie observée pour le rift 4 (rift large et profond mais pic d'endommagement peu marqué) serait imputable, selon les auteurs, à sa proximité avec le rift 5 (l'endommagement causé par les rifts 4 et 5 se répartit sur plusieurs mailles voisines).

En résumé, le lien entre endommagement et viscosité de la glace peut être dérivé à partir du formalisme de la théorie de l'endommagement. Ce lien est confirmé, aux échelles typiquement résolues par les modèles d'écoulement, par de nombreuses observations qui montrent toutes la bonne corrélation entre fractures macroscopiques visibles, zones de faible viscosité effective et zones endommagées (c'est-à-dire zones où le paramètre $D$ est proche de 1).

#### 2.2.2.3 Endommagement et fracturation de la glace

La fracturation de la glace à l'échelle locale, c'est-à-dire l'ouverture d'une crevasse individuelle, la chute d'un sérac ou l'événement ponctuel de vêlage, sort du cadre de cette thèse. Néanmoins, comme ce fût la motivation initiale ayant poussé les glaciologues à s'inspirer de la théorie de l'endommagement développée par leurs collègues métallurgistes, il convient d'aborder brièvement cet aspect ici.

La mécanique de l'endommagement est, en théorie, adaptée à la représentation de la propagation d'une fissure macroscopique au sein d'un matériau ductile par germination, croissance et coalescence de cavités pouvant mener à la rupture de ce matériau. Mais ce type de rupture n'a jamais été observé pour la glace à notre connaissance ; la fracturation de la glace relève *a priori* de la rupture fragile même lorsque sa température est proche du point de fusion (Weiss, 2004). Sans entrer dans les détails, les mécanismes microscopiques dont procède la rupture fragile diffèrent de ceux à l'œuvre dans le cas de la rupture ductile et la théorie de l'endommagement n'a pas vocation à modéliser les premiers. Pourtant, un certain nombre d'auteurs ont employé la mécanique de l'endommagement pour simuler le développement d'une fracture macroscopique jusqu'à la rupture (Pralong *et al.*, 2003; Pralong et Funk, 2005; Duddu et Waisman, 2012, 2013). En particulier, Pralong et Funk (2005) utilisent la théorie de l'endommagement pour reproduire la chute d'un sérac à partir d'un glacier suspendu situé dans la face Ouest de l'Eiger (Suisse). Cela nécessite un maillage très raffiné localement avec des tailles de maille inférieures à la dimension des crevasses. Le champ de crevasses au front du glacier avant l'événement est relativement bien reproduit par le modèle (celui-ci indique cinq crevasses principales alors qu'il y en a quatre en réalité) et l'accélération de la glace dans les tout derniers instants précédent la rupture également. Le débat reste donc ouvert quant à l'emploi de la mécanique de l'endommagement pour la fracturation de la glace.

En tout état de cause, une autre approche de la fracturation de la glace, adoptée notamment par Krug *et al.* (2014) pour modéliser le vêlage d'icebergs, apparaît reposer sur des bases théoriques plus solides. Cette approche consiste à limiter l'application de la théorie de l'endommagement à la représentation de la détérioration progressive de la glace aboutissant à la nucléation et à la croissance de crevasses mésoscopiques. La rétro-action de l'endommagement sur la viscosité de la glace est également prise en compte. Puis, quand l'endommagement a atteint localement une valeur critique, il est fait appel à la mécanique de la rupture linéaire élastique (Griffith, 1921) afin de décrire la propagation rapide - une fraction significative de la vitesse du son - d'une fracture préexistante au sein du milieu, considéré comme élastique. Ce modèle repose sur trois paramètres principaux : la valeur critique d'endommagement évoquée ci-dessus, une contrainte seuil contrôlant la création ou non d'endommagement supplémentaire et un paramètre d'amplification numérique qui permet de réguler le niveau d'endommagement créé. Nous reviendrons en détail sur ces deux

derniers paramètres lorsque nous présenterons le modèle d'endommagement utilisé dans cette thèse au Chapitre 4. Les trois paramètres dont il est question ci-dessus doivent être calibrés conjointement à partir d'observations. Krug *et al.* (2014) profitent ainsi des nombreuses observations de vêlage disponibles pour le glacier Helheim (Sud Est du Groenland) afin de trouver un jeu de paramètres tel que le comportement du front du glacier prévu par leur modèle soit compatible avec les observations. Les auteurs précisent que ce jeu de paramètres n'a pas un caractère universel mais que ceux-ci nécessitent une nouvelle calibration pour chaque application réelle.

## 2.3 Mouvement basal

Pour expliquer l'intégralité du mouvement d'un glacier, il faut ajouter à la déformation visco-plastique de la glace décrite dans la section précédente le mouvement de la base du glacier. Cette composante se scinde elle-même en deux parties, le glissement du glacier sur son socle d'une part, et la déformation du socle lui-même d'autre part. Il est à noter que ces deux mécanismes ne sont pas mutuellement exclusifs mais peuvent opérer conjointement. Le mouvement basal est une part primordiale de la dynamique glaciaire ; l'essentiel des déplacements observés en surface des zones d'écoulement rapide, tel les fleuves de glace d'Antarctique et du Groenland qui drainent de larges volumes de glace vers les océans, sont dus au mouvement basal (Engelhardt et Kamb, 1998, par exemple). La première partie de cette section présente les techniques expérimentales permettant de caractériser le mouvement basal et décrit les processus qui en sont à l'origine. La seconde partie traite de la mise en équation des lois permettant de modéliser ces processus.

### 2.3.1 Observations et processus

#### 2.3.1.1 Distinction entre socle rigide et socle déformable

Dans le cas idéal où le socle est parfaitement rigide, hypothèse généralement admise lorsque le glacier repose sur un lit rocheux, la totalité du mouvement basal est due au glissement du glacier sur son socle. Les différents mécanismes contrôlant ce glissement sont décrits en détail dans la Section 2.3.1.3. Initialement, on pensait ce type de déplacement limité aux glaciers à base tempérée, c'est-à-dire dont la température basale est au point de fusion. La valeur de ce point de fusion diminue lorsque la pression exercée par la colonne de glace augmente (de 0 °C à la pression atmosphérique à environ - 1.7 °C sous 2000 m de glace). Au contraire, les glaciers à base froide, c'est-à-dire dont la température basale est inférieure au point de fusion, étaient supposés adhérer parfaitement à leur socle rocheux. Plus tard, des expériences de laboratoire ont montré que le mécanisme de fusion-regel pouvait opérer à des températures inférieures de quelques degrés au point de fusion (Telford et Turner, 1963; Gilpin, 1980). Néanmoins, dans le cas des glaciers reposant sur un socle rocheux et ayant une base froide, le glissement basal semble être une composante négligeable du mouvement

total (Shreve, 1984).

Jusqu'au milieu des années 1980, les études théoriques visant à expliquer et modéliser le mouvement basal des glaciers faisaient systématiquement l'hypothèse d'un socle rocheux indéformable et imperméable. Pourtant, le retrait glaciaire dévoile souvent la présence non pas d'un socle rocheux compact, mais d'une couche sédimentaire, le till, constituée de débris glaciaires de différents calibres issus de processus d'érosion. La granulométrie du till est extrêmement variable puisqu'il peut contenir aussi bien des particules d'argile de quelques µm de diamètre que des blocs rocheux pouvant atteindre plusieurs m de diamètre. Bien qu'elle fût connue des géologues depuis de nombreuses années (MacClintock et Dreimanis, 1964, par exemple), la déformation des couches sédimentaires constituant le lit de certains glaciers a longtemps été considérée par les glaciologues comme une part négligeable du mouvement basal total. Mais cette hypothèse est remise en cause par une étude de Boulton et Jones (1979) qui établit que ce processus représente 90% du mouvement total observé à la surface du glacier islandais Breidamerkurjökull. Ce constat est renforcé quelques années plus tard par la découverte en Antarctique, sous le fleuve de glace Whillans (ex Ice Stream B), d'une couche sédimentaire saturée d'eau dont la déformation est pressentie par les auteurs comme étant le mécanisme principal à l'origine du mouvement du glacier (Blankenship *et al.*, 1986; Alley *et al.*, 1986). Dès lors, les glaciologues prennent conscience de l'importance du phénomène qu'ils essayent de caractériser en laboratoire (Kamb, 1991, par exemple) tandis que les mesures *in situ* se multiplient (Kavanaugh et Clarke, 2006, par exemple).

#### 2.3.1.2 Observations du mouvement basal

L'interface glacier/socle étant habituellement inaccessible, l'observation et la quantification du mouvement basal sont particulièrement ardues. Quelques observations directes ont été réalisées au sein de cavités sous-glaciaires ou de tunnels percés sous la glace (Boulton et Vivian, 1973; Boulton et Hindmarsh, 1987; Cuffey *et al.*, 1999, par exemple). Des mesures de vitesses effectuées au sein d'un tunnel creusé sous le glacier d'Argentière (France) ont ainsi permis d'établir que plus de 90% du mouvement observé à la surface de ce glacier est dû au glissement basal (Vincent et Moreau, 2016). Les auteurs de l'étude ont également montré que ce mécanisme est nettement favorisé par la présence d'eau de fonte. Si les informations ainsi récoltées sont précieuses et relativement fiables, ce type de mesure demeure anecdotique du fait de la complexité de sa mise en œuvre. D'autre part, en raison de la grande variabilité spatiale évoquée précédemment et comme ces observations sont généralement réalisées à proximité de chutes de séracs ou des bords du glacier, elles ne sont vraisemblablement pas représentatives des conditions sous-glaciaires en général.

L'inclinométrie est une technique qui permet d'évaluer les vitesses basales de manière indirecte. Elle consiste à réaliser un trou de forage jusqu'au socle du glacier. La déformation visco-plastique

du glacier va provoquer une déformation de ce trou qui va progressivement s'incliner. Il suffit alors de mesurer l'évolution de cette inclinaison au cours du temps pour remonter à la déformation visco-plastique du glacier et, en retranchant cette composante au mouvement total observé en surface, aux vitesses basales. Copland *et al.* (1997) ont montré avec cette technique que les 3/4 du mouvement total observé à la surface du Haut Glacier d'Arolla sont dus au mouvement basal. Notons cependant que cette technique ne permet pas de distinguer le glissement basal de l'éventuelle déformation du socle dans le cas où celui-ci ne s'avère pas indéformable.

D'une manière générale, lorsque le socle est constitué de till, il est souvent difficile de distinguer le glissement basal à l'interface glacier/socle de la déformation du socle à proprement parler. Blake *et al.* (1992) ont proposé 4 techniques de mesure permettant d'avoir accès au mouvement basal pour des socles sédimentaires. Une de ces techniques, reprise par Engelhardt et Kamb (1998), consiste à ancrer un pieu dans le sédiment constituant le socle via un trou de forage réalisé préalablement. Ce pieu est relié par une bobine de fil de nylon à une unité de mesure elle-même descendue jusqu'à la base du trou de forage. Lorsque le glacier se déplace sur son socle, le trou de forage et donc l'unité de mesure sont entraînés avec lui tandis que le pieu reste ancré dans le sédiment. Il suffit alors de mesurer la longueur de fil déroulé dans un laps de temps déterminé pour retrouver la vitesse basale correspondante. Cette méthode est illustrée par la Figure 2.4. Néanmoins le mouvement ainsi mesuré correspond à la fois à l'éventuel glissement basal à l'interface glace/sédiment auquel s'ajoute la déformation des couches supérieures du sédiment sous-jacent sur une hauteur déterminée par la profondeur d'enfoncement du pieu.

D'autres techniques ont été mises au point afin d'évaluer la résistance du till au cisaillement. Citons d'abord l'instrument développé par Iverson *et al.* (1994), qui consiste à enfouir complètement dans les couches supérieures du till, via un trou de forage et à l'aide d'un marteau à percussion, un cylindre en acier de 10 cm de long surnommé "le poisson". Ce cylindre est relié par un câble de longueur fixe à une unité de mesure placée dans le trou de forage. Lorsque le glacier se déplace, le cylindre est tracté au sein du sédiment par le câble. Il est ainsi possible de mesurer la force de traînée exercée par le sédiment sur le cylindre et de remonter à la résistance au cisaillement du till. En appliquant cette technique au socle du glacier suédois Storglaciären, les auteurs ont montré une résistance au cisaillement d'environ 55 kPa. Une autre méthode, imaginée par Fischer et Clarke (1994), mérite d'être citée ici. Elle est assez similaire dans sa conception à la technique précédente puisqu'elle repose également sur la réalisation d'un trou de forage au fond duquel est envoyée une barre d'acier de 1.54 m de long et de 1.90 cm de diamètre. A nouveau, on utilise un marteau à percussion pour faire pénétrer la barre au sein du sédiment sur une profondeur de quelques dizaines de cm. Lorsque le glacier se déplace, la partie émergée de la barre est entraînée avec lui tandis que la partie immergée reste ancrée dans le sédiment. Ce mouvement relatif crée un moment de

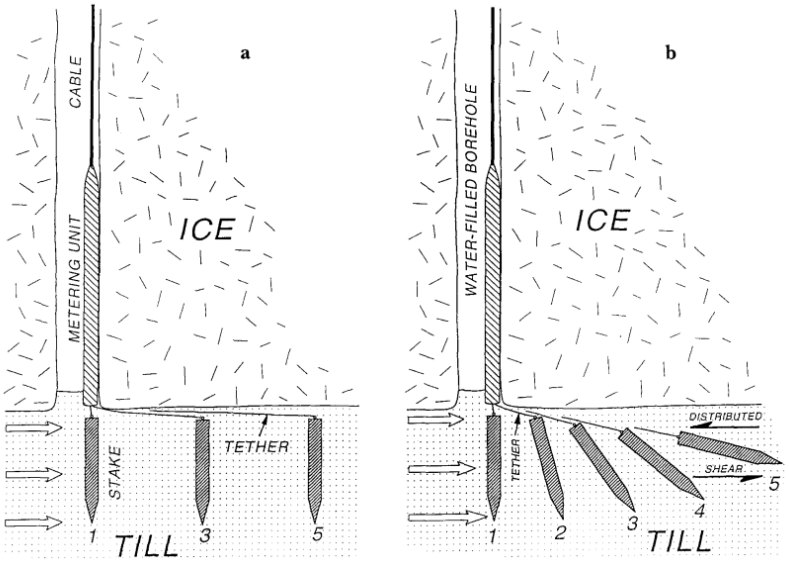


FIGURE 2.4 – Dispositif de mesure des vitesses basales dans le cas où **(a)** le socle sédimentaire ne se déforme pas, **(b)** le socle sédimentaire se déforme par cisaillement. La glace se déplace vers la gauche. Le pieu est représenté à différents instants arbitraires numérotés de 1 à 5 dans un système de coordonnées se déplaçant avec la glace. Il est ancré dans le socle tandis que l'unité de mesure se déplace avec le glacier. Figure issue de Engelhardt et Kamb (1998).

flexion sur la barre qui est mesuré grâce aux jauges de déformation dont elle est munie. Lorsque l'effort devient trop important, la partie de la barre immergée dans le sédiment se met également en mouvement, le labourant tel le soc d'une charrue, ce qui vaut à cette méthode la dénomination de "méthode de labourage". Après une calibration réalisée en laboratoire, il est possible de déduire de la flexion de la barre l'effort maximal exercé par le sédiment sur sa partie immergée et ainsi de remonter à la résistance au cisaillement du till. La Figure 2.5 illustre cette méthode.

Les deux techniques décrites précédemment ont été mises en œuvre simultanément sur le Storglaciären par Hooke *et al.* (1997) qui ont abouti à la conclusion que le till présente un comportement plastique caractérisé par une contrainte seuil fortement dépendante de la pression d'eau. Ce résultat a été retrouvé par Kavanaugh et Clarke (2006) lors de mesures réalisées sur le glacier canadien Trapridge. La description mathématique de ce comportement est présentée dans la Section 2.3.2.6.

#### 2.3.1.3 Processus à l'origine du mouvement basal

**La théorie de Weertman**

La première étude théorique visant à expliquer la capacité d'un glacier à glisser sur un socle rocheux en dépit de la forte rugosité de celui-ci est l'œuvre de Weertman (1957). Pour établir sa théorie, Weertman fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

i La glace est propre et repose sur un socle rocheux indéformable et imperméable.

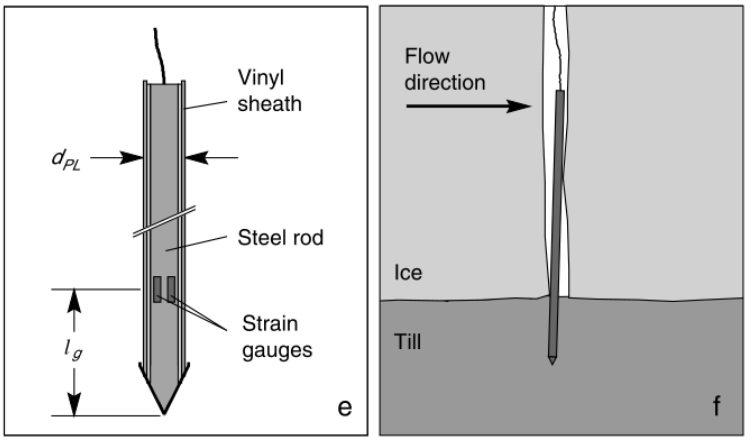


FIGURE 2.5 – Mesure de la résistance au cisaillement du till par la "méthode de labourage". **(a)** Barre en acier munie de jauges de déformation et enfoncée dans le sédiment sur une profondeur $l_g$. **(b)** Mise en place de la barre dans le trou de forage. Figure issue de Kavanaugh et Clarke (2006).

ii La glace est partout au point de fusion.

iii Le socle est idéalisé et considéré comme une surface plane inclinée sur laquelle se trouve régulièrement répartis des obstacles de forme parfaitement cubique.

iv Un fin film d'eau (environ 1 µm d'épaisseur) sépare la glace du socle en tout point. La glace glisse parfaitement sur ce film d'eau et la contrainte de cisaillement basale est la conséquence globale de contraintes normales locales exercées sur la glace par les obstacles.

v Il n'y a rien d'autre entre la glace et le socle rocheux que le film d'eau (pas de formation de cavité, absence de blocs rocheux entraînés par la glace et frottant sur le socle).

Weertman postule alors que le glissement est la conséquence de deux mécanismes opérant de concert. Ces deux mécanismes sont illustrés par la Figure 2.6. D'abord, il y a un mécanisme de fusion-regel. La présence d'une protubérance sur un socle rocheux incliné induit un déséquilibre de pression autour de cette protubérance : la pression exercée par la glace sur sa partie amont est plus importante que celle exercée sur sa partie avale. La glace étant partout au point de fusion, sa température sera plus basse en amont de l'obstacle qu'en aval. Cette différence de température va donner naissance à un flux de chaleur traversant l'obstacle de sa partie avale vers sa partie amont. Cet apport d'énergie va provoquer la fusion de la glace dans la zone amont et l'eau ainsi créée va s'écouler dans la direction des basses pressions et regeler en aval de l'obstacle où la température de fusion est plus élevée. Ce mécanisme ne peut opérer que si l'énergie transférée de l'aval de l'obstacle vers l'amont est suffisante pour faire fondre la glace. Pour que cette condition soit satisfaite, Weertman estime que la largeur maximale des obstacles doit être de l'ordre du mètre.

Le second mécanisme proposé par Weertman est lié à une amplification de la déformation visco-plastique de la glace au niveau d'un obstacle du fait de concentration de contraintes. Plus

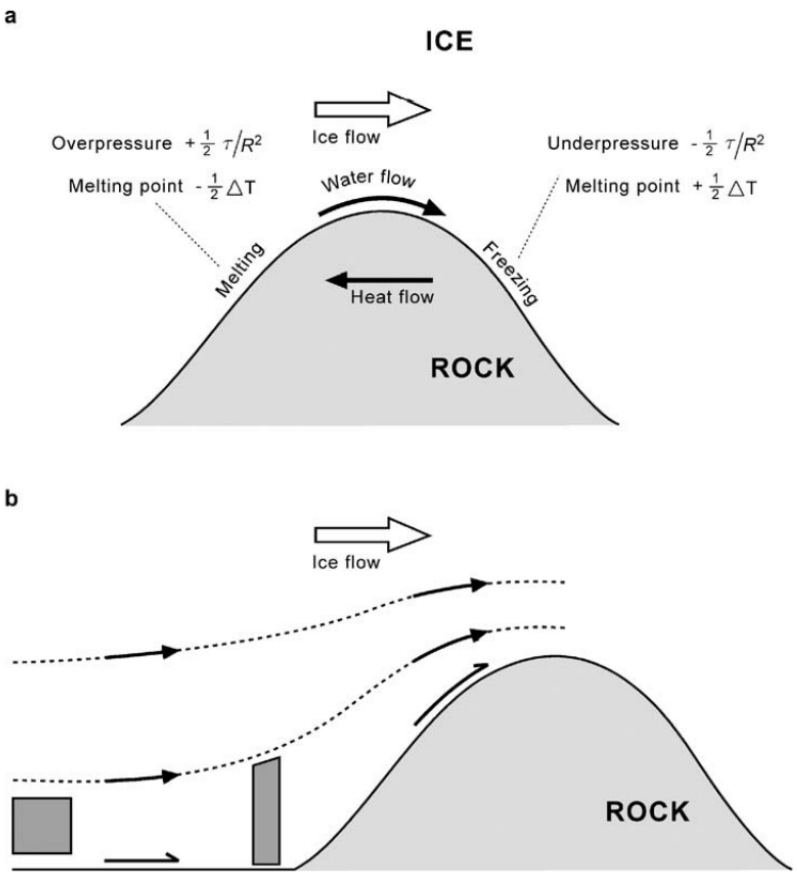


FIGURE 2.6 – Illustration des deux mécanismes de glissement selon la théorie de Weertman (1957) : **(a)** mécanisme de fusion-regel valable pour les obstacles de petite taille et **(b)** mécanisme d'amplification de la déformation par concentration de contraintes valable pour les obstacles de grande taille. Les lignes pointillées représentent le flux de glace et les quadrilatères figurent la déformation d'un volume de glace qui se comprime horizontalement et s'étire verticalement à l'approche de l'obstacle. Figure issue de Cuffey et Paterson (2010).

précisément, la présence d'une protubérance sur le parcours de la glace induit un excès de contrainte qui force la glace à se comprimer longitudinalement et à s'étirer verticalement et lui permet ainsi de fluer autour de l'obstacle. La vitesse à laquelle la glace peut franchir l'obstacle par ce mécanisme dépend du produit du taux de déformation par la distance sur laquelle l'amplification de la déformation opère, qui elle-même dépend de la taille de l'obstacle. Aussi, des vitesses basales significatives ne peuvent-elles être obtenues par ce mécanisme que pour des obstacles suffisamment volumineux.

A partir de la description théorique de ces deux mécanismes et en s'appuyant sur les lois de la mécanique et de la thermodynamique, Weertman établit une loi mathématique permettant d'évaluer la vitesse basale en connaissant la contrainte de cisaillement basale. La formulation de cette loi de frottement sera abordée dans la Section 2.3.2.2.

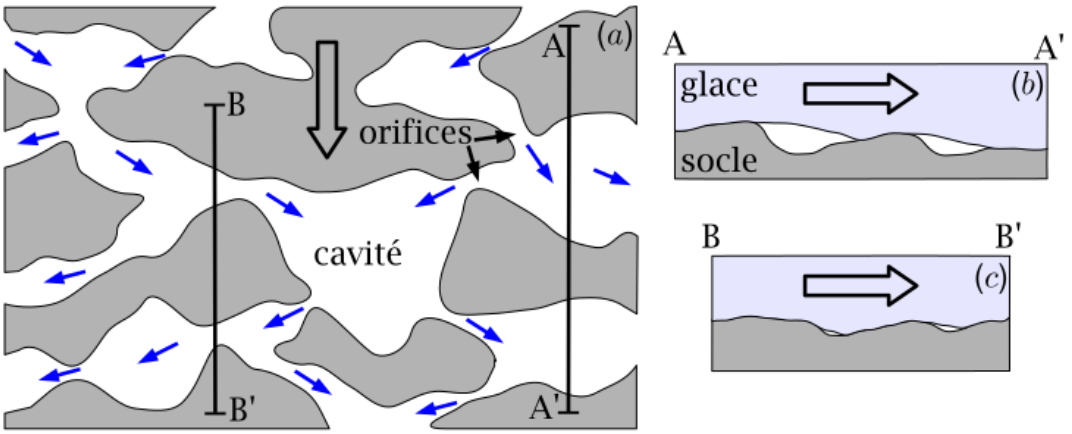


FIGURE 2.7 – Vue de dessus d'un réseau de cavités interconnectées par des orifices **(a)** et coupes de ce réseau selon les segments AA' (cavités) **(b)** et BB' (orifices) **(c)**. Le socle est représenté en gris et la glace en bleu clair. Les flèches bleues indiquent les directions d'écoulement de l'eau et les flèches noires la direction du flux de glace. Figure issue de De Fleurian (2010).

### Les limitations de la théorie de Weertman

L'intuition de Weertman concernant les mécanismes permettant d'expliquer le glissement basal est confirmée par des observations réalisées à la base du Blue Glacier (Etats-Unis) par Kamb et LaChapelle (1964). Cependant, en dépit des améliorations successives qui lui furent apportées (Nye, 1969, 1970), les vitesses basales prédites par sa théorie ne collent aux observations que pour les glaciers de montagne les plus lents. Dans tous les autres cas, la loi de Weertman sous-estime les vitesses de glissement basal (Kamb, 1970, par exemple). D'autre part, cette théorie est incapable d'expliquer les importantes fluctuations de vitesses de surface pouvant survenir sur des intervalles de temps court, telles les variations diurnes ou celles faisant suite à de forts épisodes pluvieux par exemple, et qui sont trop rapides pour être dues à des changements dans le taux de déformation de la glace (Iken et Bindschadler, 1986; Sugiyama et Gudmundsson, 2004; Shepherd *et al.*, 2009; Van de Wal *et al.*, 2008, par exemple). Ce constat révèle que le rôle de l'eau dans le glissement basal ne se limite pas au fin film lubrificateur à l'interface glace/socle postulé par Weertman, mais qu'elle revêt une importance bien plus grande. C'est Lliboutry (1958, 1959) qui, le premier, propose une modification de la théorie de Weertman permettant d'expliquer le mécanisme par lequel un apport d'eau à la base du glacier influe sur le glissement basal. Pour cela, il remet en cause l'hypothèse selon laquelle seul un fin film d'eau sépare la glace de son socle en tout point. Au contraire, il postule la formation de cavités en aval de certains obstacles ayant la capacité de se remplir d'eau. Ces cavités peuvent être pourvues d'orifices les reliant les unes aux autres tel qu'illustré par la Figure 2.7. Si le flux d'eau pénétrant au sein de ce réseau est plus important que le flux d'eau qui en ressort au front du glacier, la pression d'eau dans le réseau augmente ce qui a pour effet d'élargir les cavités. La

surface de contact entre le glacier et son socle se trouve réduite et les contraintes se concentrent sur les zones de contact restantes. Cela a pour effet d'accroître les vitesses de glissement basal. Cette théorie, largement controversée à l'époque bien qu'elle permît d'expliquer certaines observations de vitesses de glissement supérieures à 20 m $a^{-1}$ sans pour autant avoir à renoncer aux mécanismes théoriques proposés par Weertman, est désormais acceptée par la communauté des glaciologues dans le cas de socles rocheux rigides (Walder, 1979; Hallet et Anderson, 1980; Iken et Bindschadler, 1986, par exemple). Cependant, la théorie de Weertman a été élaborée à une époque où la possibilité que le socle ne soit pas rigide mais déformable, et que cette déformation puisse être une composante importante du mouvement basal, était totalement occultée. Aussi le raisonnement ayant permis d'aboutir à la loi formulée par Weertman ne peut-il s'appliquer dès lors qu'on considère un socle sédimentaire dont la déformation, comme on le sait aujourd'hui, est à l'origine de l'essentiel des importantes vitesses observées en surface des fleuves de glace d'Antarctique.

**Déformation des socles sédimentaires**

Nous avons vu dans la Section 2.3.1.2 que plusieurs mesures *in situ* des propriétés des socles sédimentaires tendent à montrer que le comportement mécanique du till se rapproche du cas idéal du solide parfaitement plastique. En fait, cette caractéristique avait déjà été établie en laboratoire par Kamb (1991) à partir de carottes sédimentaires prélevées sous le fleuve de glace Whillans. Kamb a en effet montré qu'après une brève phase d'ajustement des contraintes caractérisée par de très faibles déformations, une couche de till soumise à une sollicitation en cisaillement atteint rapidement une contrainte seuil $\tau^*$, quasi indépendante du taux de déformation et s'élevant à quelques kPa seulement, à partir de laquelle l'échantillon se met à se déformer facilement par glissement le long d'un plan ou par cisaillement réparti sur une couche de faible épaisseur appelée *bande de cisaillement*. Il convient de souligner que la déformation par glissement le long d'un plan évoquée ici est très différente du glissement basal sur socle rigide dont il est question dans la partie précédente dans la mesure où cette première consiste en réalité en la déformation d'une très fine couche de sédiments. D'autres expériences, menées en laboratoire et *in situ*, sont venues confirmer ces résultats et préciser que si la contrainte seuil $\tau^*$ est quasiment indépendante du taux de déformation, elle dépend en revanche fortement de la contrainte normale effective (Iverson *et al.*, 1998; Tulaczyk *et al.*, 2000; Truffer *et al.*, 2000, 2001, par exemple).

**Contrainte effective et pression effective**

La contrainte normale effective est une notion fondamentale pour la déformation des tills. Du fait de sa nature granulaire, un effort extérieur appliqué au till est repris en partie par la matrice des grains solides qui le constituent (argile, sable, graviers, blocs) et en partie par l'eau remplissant les interstices. La contrainte normale effective correspond à la contrainte normale effectivement reprise

grâce aux contacts entre les grains. Elle se note N et s'écrit :

$$N = -\sigma_{nn} - p_w \tag{2.10}$$

où $\sigma_{nn}$ est la contrainte normale à la surface considérée et $p_w$ est la pression de l'eau. Le signe négatif précédant $\sigma_{nn}$ provient de la convention selon laquelle les contraintes sont définies comme positives en traction. Il est commun d'admettre qu'à l'interface glace/socle la contrainte normale est due essentiellement au poids de la colonne de glace (en glaciologie, on utilise couramment le terme de pression cryostatique que l'on note $p_i$). On parle alors de pression effective et on a :

$$N = p_i - p_w = \rho_i g H - p_w \tag{2.11}$$

avec $\rho_i$ la masse volumique de la glace, $g$ l'accélération de la pesanteur et $H$ l'épaisseur de glace. Cette notion de pression effective sera d'une importance primordiale pour les lois de frottement que nous allons présenter à la Section 2.3.2, que ce soit pour décrire la déformation des tills ou pour tenir compte de l'influence de l'eau dans le cas du glissement basal sur socle rocheux.

#### 2.3.1.4 Réseau hydraulique sous-glaciaire

Outre les observations déjà rapportées à la Section 2.3.1.2 pour le glacier d'Argentière, les études montrant une accélération des vitesses d'écoulement des glaciers faisant suite à une augmentation de l'apport d'eau à leur base sont nombreuses. Ce phénomène a d'abord été établi pour les glaciers de montagne (Forbes, 1845; Iken et Bindschadler, 1986; Blake *et al.*, 1994; Willis, 1995; Sugiyama et Gudmundsson, 2004, par exemple). Depuis, de nombreux auteurs ont fait état de l'accélération saisonnière de glaciers de la calotte groenlandaise consécutive à l'apport d'eau de fonte de surface (Zwally *et al.*, 2002; Bartholomew *et al.*, 2010, 2011; Palmer *et al.*, 2011, par exemple). Étant donné le contexte actuel de réchauffement climatique, ce constat laisse redouter une augmentation de la contribution dynamique du Groenland à l'augmentation du niveau des mers (Parizek et Alley, 2004; Doyle *et al.*, 2014) même si certains auteurs estiment qu'un ralentissement des vitesses d'écoulement en hiver pourrait compenser cette accélération saisonnière (Sole *et al.*, 2013; Tedstone *et al.*, 2013, 2015). En Antarctique aussi il a été constaté qu'un apport massif d'eau à la base du glacier peut engendrer une augmentation des vitesses d'écoulement (Stearns *et al.*, 2008).

Ces multiples études, la théorie des cavités de Lliboutry (1958, 1959, 1968), la dépendance de la déformation du till à la pression effective, concourent à montrer l'importance de la pression d'eau, ou plus précisément de la pression effective $N$, à l'interface glace/socle dans le mouvement basal. L'étude des processus permettant l'acheminement et la distribution de l'eau à la base des glaciers, que cette eau soit reçue ou produite en surface ou bien qu'elle provienne de fonte à la base, représente tout un pan de la glaciologie appelé hydrologie glaciaire. Nous en faisons ici une présentation très

succincte. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur intéressé à consulter l'article de revue de Fountain et Walder (1998) ainsi que le chapitre du livre de Cuffey et Paterson (2010) s'y afférent.

L'eau que l'on retrouve à la base des glaciers peut avoir plusieurs origines. Pour la majeure partie d'entre eux, cette eau provient essentiellement de la fonte estivale en surface du glacier lui-même ou de la neige présente sur les versants qui le bordent pour les glaciers de montagne. L'eau de pluie vient s'ajouter de manière épisodique à cette eau de fonte. Ces deux phénomènes sont caractérisés par une forte variabilité temporelle avec des cycles saisonniers et journaliers marqués. Similairement aux systèmes hydrographiques ordinaires, cette eau va d'abord être drainée en surface par un réseau de canaux appelés bédières. Ces bédières sont susceptibles d'acheminer l'eau jusqu'au front du glacier mais le plus souvent cette eau s'engouffre à l'intérieur de ce dernier via des crevasses ou de profonds puits verticaux appelés moulins. Par ailleurs, quand la pente en surface du glacier est suffisamment faible, de véritables lacs de fonte sont susceptibles de se former. C'est en particulier le cas dans la partie sud de la calotte Groenlandaise (Box et Ski, 2007, par exemple). Certains de ces lacs de fonte connaissent de brusques épisodes de drainage au cours desquels de larges volumes d'eau vont rejoindre la base du glacier. Das *et al.* (2008) ont ainsi rapporté la vidange complète d'un lac de $44\times10^6$ m$^3$ en environ 17 heures, l'essentiel de l'événement se concentrant sur une période de 84 minutes au cours desquelles le débit de décharge moyen a été évalué à 8700 m$^3$s$^{-1}$. La fonte de surface est de loin la première source d'eau basale pour la plupart des glaciers. En revanche, elle est, pour l'instant, totalement inexistante au centre de la calotte Groenlandaise et sur la majeure partie du continent Antarctique. Notons cependant que des épisodes de fonte intense sont enregistrés de manière sporadique sur les parties côtières d'Antarctique de l'Ouest et qu'une augmentation de la fréquence de ces événements dans les années à venir est à craindre (Nicolas *et al.*, 2017). D'autre part, l'eau peut être créée directement à l'interface entre le glacier et son socle. Lorsque la base du glacier est tempérée, l'énergie reçue via le flux de chaleur géothermique est suffisante pour faire fondre la glace sur une certaine épaisseur. Ainsi, pour une valeur typique de ce flux fixée à $G = 0.05$ W m$^{-2}$, on obtient une lame d'eau d'environ 5 mm a$^{-1}$. Des taux de fonte bien plus élevés peuvent survenir de manière locale, là où les flux géothermiques se concentrent. Citons pour l'anecdote le cas de la calotte islandaise Vatnajökull sous laquelle le flux géothermique atteint localement la valeur de 50 W m$^{-2}$ induisant des taux de fonte basale de 5 m a$^{-1}$ (Björnsson, 1988). De surcroît, l'énergie générée par le frottement du glacier sur son socle est dissipée par fusion d'une épaisseur supplémentaire de glace qui varie de manière importante selon les vitesses de glissement et les hauteurs de glace mises en jeu. La fonte basale revêt un rôle particulièrement important en Antarctique où elle serait à l'origine de la formation de vastes lacs sous-glaciaires (Siegert, 2005, par exemple). Depuis la première publication faisant état de leur existence (Oswald et Robin, 1973), plus de 150 lacs sous-glaciaires ont été comptabilisés sous la calotte Antarctique (Fricker *et al.*,

2007). Le plus gros d'entre eux, le lac Vostok, siège sous 3750 m de glace à la verticale de la station russe de Vostok. Son volume, estimé à 5400 km$^3$, fait de lui le septième plus grand lac terrestre.

En règle générale, une fois qu'elle se trouve à l'interface entre la glace et le socle, l'eau est drainée jusqu'au front du glacier via un réseau hydraulique basal dont la caractérisation est difficile du fait de son inaccessibilité. L'information sur ce réseau ne peut être acquise que de manière fragmentée à partir d'observations de zones précédemment englacées et de mesures indirectes effectuées sur les glaciers : temps de parcours de traceurs, mesures de pression au sein de trous de forage, mesures de débits entrants ou sortants. Ces études ont néanmoins permis d'acquérir une certaine connaissance vis-à-vis des composantes formant ce réseau. Ainsi, l'existence des films d'eau entre la glace et le socle postulée par Weertman (1957) pour les besoins de sa théorie de fusion-regel a été confirmée de manière indirecte par des observations de dépôts de calcite (Hallet, 1979; Sharp *et al.*, 1990). Outre l'existence de cavités pressentie par Lliboutry (1958) et dont la preuve a déjà été évoquée, la formation de chenaux incisés soit directement dans la glace (Röthlisberger, 1972; Hooke *et al.*, 1990) soit dans le socle rocheux lui-même (Nye, 1973) a également été établie. Dans le cas où le socle est fait de sédiments, une partie de l'eau s'infiltre au sein des pores, dont la pression augmente induisant une baisse de la résistance au cisaillement du sédiment, et s'écoule jusqu'à être évacuée (Fountain, 1994; Bougamont *et al.*, 2014). Si la quantité d'eau produite par fonte basale est, a priori, suffisamment faible pour être drainée de la sorte (Alley *et al.*, 1986), ce n'est pas le cas pour des apports d'eau plus conséquents en raison de la faible conductivité hydraulique du till (Moeller *et al.*, 2007). L'eau que le sédiment ne peut assimiler va alors s'écouler à son interface avec la glace. La manière dont cet écoulement est structuré, en canal ou en film d'eau, n'est pas très bien comprise à l'heure actuelle. Enfin, si les lacs sous-glaciaires d'Antarctique ont longtemps été considérés comme des systèmes quasi fermés avec peu de renouvellement d'eau et des temps de résidence de plusieurs dizaines de milliers d'années (Kapitsa *et al.*, 1996; Siegert *et al.*, 2001; Bell *et al.*, 2002), de récentes observations tendent à prouver le contraire. A partir de données obtenues par interférométrie radar, Gray *et al.* (2005) mesurent, à la surface des fleuves de glace Kamb et Bindschaller (Antarctique de l'Ouest), des mouvements verticaux locaux d'une cinquantaine de centimètres sur un intervalle de 23 jours qu'ils attribuent au déplacement de volumineuses poches d'eau à l'interface entre la glace et son socle. Ces observations sont corroborées par celles de Wingham *et al.* (2006) qui constatent également de rapides variations d'élévation de surface en Antarctique de l'Est liées, selon eux, à de brusques vidanges de lacs sous-glaciaires interconnectés. Toujours à partir de mesures d'élévation de surface, par altimétrie laser cette fois, Fricker *et al.* (2007) enregistrent également un déplacement de larges volumes d'eau à la base des parties inférieures des fleuves de glace Mercer et Whillans (Antarctique de l'Ouest) et découvrent, à proximité de la ligne d'échouage de ce dernier, l'existence d'un lac sous-glaciaire en train de se vidanger directement dans l'océan. Cette étude est complétée

par de nouvelles acquisitions qui permettent d'établir l'interconnexion de plusieurs lacs formant un réseau de drainage basal structuré et relié à l'océan (Fricker et Scambos, 2009). Cette connexion entre le réseau de drainage basal et l'océan a depuis été rapportée par plusieurs auteurs (Carter et Fricker, 2012; Le Brocq *et al.*, 2013; Flament *et al.*, 2014, par exemple).

Forts des connaissances acquises au fil des années sur les systèmes de drainages sous-glaciaires, plusieurs auteurs se sont attelés à la tâche de les modéliser (Schoof, 2010; Hewitt *et al.*, 2012; Werder *et al.*, 2013; De Fleurian *et al.*, 2014, par exemple). Mais la complexité de ces systèmes impose l'introduction dans les modèles d'hydrologie d'un nombre élevé de paramètres physiques qui sont, en général, mal contraints du fait du manque d'observations directes. Pour cette raison, les tentatives de couplage de ces modèles à des modèles d'écoulement sont encore rares (Hewitt, 2013; Bougamont *et al.*, 2014; De Fleurian *et al.*, 2014, par exemple) et les auteurs soucieux d'intégrer l'effet de la pression d'eau basale sur la dynamique de l'écoulement ont généralement recours à des paramétrisations empiriques de cette variable elle-même ou de la pression effective (Pattyn, 1996; Pimentel *et al.*, 2010; Martin *et al.*, 2011; Leguy *et al.*, 2014, par exemple). Dans le cas où l'on s'intéresse à un glacier à terminaison marine, il est très commun de faire l'hypothèse d'une connexion hydrologique parfaite entre le réseau de drainage sous-glaciaire et l'océan (Pattyn, 1996; Morlighem *et al.*, 2010; Tsai *et al.*, 2015; Gladstone *et al.*, 2017; Brondex *et al.*, 2017, par exemple). Cela revient à postuler que la pression d'eau est égale à la pression hydrostatique de l'eau de mer en tout point de l'interface glace/socle situé sous le niveau de la mer.

### 2.3.2 Formulation des lois de frottement

Comme nous l'avons vu, le mouvement basal est une part primordiale de la dynamique glaciaire. Aussi est-il nécessaire d'en formaliser les mécanismes afin d'en élaborer une théorie à capacité prédictive. Concrètement, il s'agit d'estimer, en tout point de l'interface glace/socle, la valeur de la contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$ qu'exerce le socle sur la glace. Plusieurs paramètres sont susceptibles d'affecter cette contrainte : la nature du socle (rocheux ou sédimentaire), sa rugosité, les vitesses d'écoulement à la base $\mathbf{u}_b$, la pression effective $N$, etc. Formuler une loi de frottement, c'est établir une relation mathématique entre ces divers paramètres.

#### 2.3.2.1 Considérations générales sur la formulation d'une loi de frottement

L'écoulement de la partie posée d'une calotte ou d'un glacier est mû par la gravité : celle-ci est à l'origine de la contrainte motrice, généralement notée $\boldsymbol{\tau}_d$ pour "*driving stress*" en anglais. Dans certaines configurations, cette contrainte motrice est intégralement compensée, en tout point de l'interface glace/socle, par la contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$. Dans un tel cas, une modification des conditions à la base induira éventuellement une modification de la vitesse basale $\mathbf{u}_b$, mais

la contrainte basale $\boldsymbol{\tau}_b$ continuera d'égaler, en norme, la contrainte motrice locale $\boldsymbol{\tau}_d$ afin d'assurer l'équilibre global du domaine. Par conséquent, les vitesses basales peuvent être entièrement déterminées par une loi de glissement du type $\mathbf{u}_b = f(\boldsymbol{\tau}_b)$ et on parle de contrôle local des vitesses basales.

En revanche, dans d'autres configurations le lit ne fournit qu'une fraction de la contrainte résistive totale s'opposant à $\boldsymbol{\tau}_d$. C'est notamment le cas lorsque le socle est sédimentaire et que la contrainte motrice excède la contrainte seuil $\tau*$ au delà de laquelle le socle se met à se déformer plastiquement (Joughin *et al.*, 2004, par exemple). Dans une telle situation, les vitesses basales en un point de l'interface glacier/socle ne sont plus contrôlées exclusivement par la valeur locale de $\boldsymbol{\tau}_b$ mais dépendent également de contraintes latérales et/ou longitudinales provenant d'efforts s'exerçant à distance du point considéré. Ces forces distantes peuvent être, par exemple, celles engendrées par frottement des bords latéraux du glacier aux marges de cisaillement ou par frottement basal intense au niveau d'un "sticky spot" - une zone très localisée présentant une forte résistance au mouvement basal - éloigné. On parle alors de contrôle global des vitesses basales et, dans cette configuration, un changement des conditions à la base n'aura que peu d'effet sur $\mathbf{u}_b$ mais entraînera une modification de la norme de $\boldsymbol{\tau}_b$. D'un point de vue mathématique, cela signifie qu'il n'existe pas, en général, de fonction $g$ telle que $\mathbf{u}_b = g(\boldsymbol{\tau}_b, N)$ existe quelque soit la combinaison de $\boldsymbol{\tau}_b$ et $N$ (Schoof, 2005).

De fait, la relation mathématique entre contraintes de cisaillement basales, vitesses basales et pression effective doit être recherchée non pas sous la forme d'une loi de glissement - la donnée de $\mathbf{u}_b$ en fonction de $\boldsymbol{\tau}_b$ et $N$ -, mais sous la forme d'une loi de frottement d'expression générale :

$$\boldsymbol{\tau}_b + f(\mathbf{u}_b, N) = 0 \tag{2.12}$$

Dans la suite de cette partie, nous présentons plusieurs lois de frottement se voulant être les descriptions mathématiques les plus fidèles possibles des différents processus décrits à la Section 2.3.1.3.

#### 2.3.2.2 Loi de Weertman

A partir du socle idéalisé qu'il a imaginé pour développer sa théorie et en s'appuyant sur les lois de la mécanique et de la thermodynamique, Weertman (1957) met en équation les deux mécanismes décrits dans la Section 2.3.1.3. Il aboutit ainsi à deux équations scalaires indépendantes, l'une caractérisant le mécanisme de fusion-regel, l'autre le mécanisme de fluage de la glace autour des obstacles volumineux. Puis, tenant compte du fait que les obstacles volumineux limitent le glissement par le premier mécanisme tandis que les petits obstacles limitent le glissement par le second, il combine ces deux équations en une seule pouvant s'écrire :

$$u_b - C_1 \tau_b^{\frac{n+1}{2}} = 0 \tag{2.13}$$

où $C_1$ est une constante positive qui fait intervenir la fluidité de la glace, la conductivité thermique du lit rocheux ainsi que les paramètres du socle idéalisé (Weertman, 1957). Par ailleurs, $n$ est l'exposant de la loi de Glen (2.1) et apparaît ici du fait du second mécanisme de déformation visco-plastique de la glace autour de l'obstacle. Si on prend pour ce paramètre la valeur usuellement utilisée en glaciologie $n = 3$, on constate que la vitesse basale varie comme le carré du cisaillement basal. Cependant, il est très commun de négliger le mécanisme de fusion-regel en postulant que l'érosion du lit rocheux par le glacier lisse les obstacles de petites tailles pour lesquels ce mécanisme intervient. Dans ce cas, on peut montrer que l'équation (2.13) devient (Cuffey et Paterson, 2010) :

$$u_b - C_2 \tau_b^n = 0 \tag{2.14}$$

où $C_2$ est une constante positive qui diffère légèrement de $C_1$.

Bien que la théorie proposée par Weertman pour expliquer le glissement basal d'un glacier reposant sur un socle rocheux se soit avérée qualitativement exacte (Kamb et LaChapelle, 1964), le modèle de socle imaginé par l'auteur pour établir sa loi est très simplifié et ne peut représenter la complexité topographique d'un lit rocheux réel. Aussi Nye (1969, 1970) et Kamb (1970) proposent-ils une amélioration de cette théorie. Au lieu de considérer indépendamment chaque obstacle du socle rocheux, ils vont établir une description statistique de la topographie de ce socle en se basant sur la notion de *rugosité*. La rugosité correspond à la déviation de l'altitude du socle par rapport à un plan moyen évalué sur une surface donnée. Sa valeur est mesurée sur une surface suffisamment grande pour être représentative de l'intégralité du socle rocheux et suffisamment petite pour que la vitesse basale sur cette surface soit uniforme. Ces travaux, reposant sur l'hypothèse simplificatrice forte que la glace se comporte comme un fluide newtonien ($n = 1$ dans la loi de Glen), furent étendus aux rhéologies non-linéaires par Fowler (1979, 1981). Dès lors, les relations obtenues par Weertman pour décrire le mouvement de la glace autour d'un obstacle donné peuvent être généralisées à l'ensemble d'un lit rocheux. La loi de frottement ainsi obtenue est appelée **loi de Weertman** et peut se mettre sous la forme vectorielle générale :

$$\boldsymbol{\tau}_b + C_W |\mathbf{u}_b|^{m-1} \mathbf{u}_b = 0 \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{\tau}_b$ et $\mathbf{u}_b$ sont les vecteurs de, respectivement, cisaillement basal et vitesse basale et $C_W$ une constante positive à laquelle nous nous référerons sous le terme de coefficient de frottement de Weertman. L'exposant $m$ est également une constante positive dont la valeur varie selon les mécanismes que l'on veut représenter. Néanmoins, dans le cas usuel où le mécanisme de fusion-regel est ignoré, il est généralement relié à l'exposant de Glen par la relation $m = 1/n$ (Weertman, 1974; Gudmundsson, 1997, par exemple).

#### 2.3.2.3 Loi de Budd

Les travaux de Weertman (1957) ont indéniablement constitué un important bond en avant dans notre compréhension de la dynamique glaciaire et dans notre capacité à la modéliser. Aujourd'hui encore, la loi de Weertman fait figure de référence pour les modélisateurs d'écoulement glaciaire (Pollard et DeConto, 2012; Pattyn *et al.*, 2012; Gudmundsson *et al.*, 2012; Cornford *et al.*, 2013; Gagliardini *et al.*, 2013; Pattyn *et al.*, 2013, par exemple). Néanmoins, cette relation n'explicite pas le lien entre pression effective et glissement basal dont l'importance a été largement soulignée dans la Section 2.3.1.3. Pour pallier cette limitation, Budd *et al.* (1979) entreprennent une série d'expériences en laboratoire visant à quantifier l'effet de la pression effective sur le glissement basal dans le cas de socles rocheux indéformables. Si des expériences similaires avaient été conduites quelques années auparavant (Barnes *et al.*, 1971; Chadbourne *et al.*, 1975), celles de Budd sont les premières à tester de manière indépendante les effets de la pression effective, de la rugosité du socle rocheux et de la contrainte de cisaillement basale sur les vitesses basales pour des valeurs de contraintes et de vitesses similaires à celles rencontrées dans la nature. Ces travaux permettent d'établir une nouvelle expression pour la loi de frottement :

$$\boldsymbol{\tau}_b + C_B N^q |\mathbf{u}_b|^{m-1} \mathbf{u}_b = 0 \tag{2.16}$$

où $C_B$ est un coefficient de frottement positif, que nous désignerons comme coefficient de frottement de Budd, $N$ est la pression effective et $q$ et $m$ sont des constantes positives. Cette relation sera appelée **loi de Budd** dans la suite du manuscrit. L'étude originale de Budd *et al.* (1979) suggère les valeurs $q = 1$ et $m = 1$ si $N$ est inférieur à 0.5 MPa ou $m = 1/3$ dans le cas contraire tandis que $C_B$ s'avère proportionnel à la rugosité du socle utilisé pour l'expérience. La valeur de ces paramètres est revue à $m = 1$ et $q = 2$ par Budd *et al.* (1984) dans le cadre d'une étude visant à reproduire les vitesses de surface observées dans la région de la barrière de Ross (Antarctique de l'Ouest). Citons également les travaux de Iken et Bindschadler (1986) qui ont effectué, sur le glacier Findelengletscher (Suisse), des mesures simultanées de vitesses de surface à partir de 4 lignes de pieux et de niveaux d'eau au sein de 11 trous de forage permettant de remonter localement à la pression d'eau sous-glaciaire. Les mesures, effectuées plusieurs fois par jour sur une période de cinq semaines en début de saison de fonte, montrent que la vitesse de surface croît comme l'inverse exact de la pression effective et suggèrent donc une valeur de $q = 1$ dans la relation (2.16). Il convient néanmoins de rester prudent quant à la généralisation de cette valeur issue de mesures très localisées. Toujours est-il que la plupart des études récentes faisant appel à la loi de Budd fixe la valeur de ce paramètre à $q = 1$ (Morlighem *et al.*, 2010; Larour *et al.*, 2012b; Gladstone *et al.*, 2014; Brondex *et al.*, 2017, par exemple). Enfin, notons que pour la valeur $q = 0$ la loi de Budd se réduit à la loi de Weertman (2.15).

#### 2.3.2.4 Borne d'Iken

La loi de Budd constitue un progrès sur le plan théorique par rapport à la loi de Weertman puisqu'elle tient compte de manière explicite, via la pression effective, de l'effet de la pression d'eau basale sur le mouvement basal. Néanmoins, il est crucial de remarquer que ces lois autorisent toutes deux des valeurs arbitrairement élevées pour la contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ indépendamment de la valeur de $N$. Cependant, Iken (1981) a démontré, à partir d'un socle rocheux idéalisé ayant la forme d'un escalier incliné, que la quantité $\tau_b/N$ est en réalité bornée par la pente locale ascendante maximale du lit rocheux. Cette condition peut s'écrire :

$$\frac{\tau_b}{N} \leq \tan\beta \tag{2.17}$$

où $\tan\beta$ correspond à la pente ascendante des marches d'escalier du socle d'Iken par rapport à la direction de l'écoulement. Schématiquement, on peut expliquer l'existence de cette borne de la manière suivante. Nous l'avons vu avec la théorie de Weertman, la contrainte normale compressive exercée par la glace sur le socle n'est pas uniformément répartie mais est légèrement excédentaire sur la partie amont des obstacles et légèrement déficitaire sur leur partie avale. C'est l'excès de contrainte en amont des obstacles qui est à l'origine du frottement. En tout état de cause, la contrainte normale moyenne exercée par la glace sur son socle doit être égale à la pression cryostatique et, par conséquent, toute augmentation des contraintes sur la partie amont des obstacles doit être compensée par une diminution équivalente sur la partie avale. Cependant, quand la contrainte compressive sur la partie avale des obstacles devient trop faible par rapport à la pression d'eau basale, des cavités s'ouvrent et s'opposent à une augmentation supplémentaire des contraintes compressives en amont des obstacles. La génération de friction est ainsi inhibée.

Peut-être en raison de la trop grande simplicité du modèle de socle rocheux imaginé pour la dériver, l'existence de cette borne supérieure sur la contrainte de cisaillement basale a longtemps été ignorée par la communauté scientifique. Mais Schoof (2005) parvient à étendre ce résultat à des socles rocheux quelconques, pourvu qu'ils ne présentent pas d'obstacles dont la pente est infinie, et à dériver une nouvelle expression de la loi de frottement satisfaisant la condition (2.17).

#### 2.3.2.5 Loi de Schoof

L'existence de la borne d'Iken a des implications fondamentales sur la dynamique glaciaire et sa modélisation : toute contrainte en excès par rapport à $N \tan\beta$ ne pourra être reprise localement par le socle rocheux et causera une augmentation des contraintes latérales et/ou longitudinales afin d'assurer l'équilibre global du glacier (cf Section 2.3.2.1).

Fort de ce constat et s'appuyant sur les travaux pionniers de Fowler (1986, 1987), Schoof (2005) établit analytiquement une nouvelle loi de frottement valable pour les rhéologies linéaires, à condi-

tion que le socle ne présente pas de pente localement infinie. Cette loi, que nous appellerons **loi de Schoof** dans la suite du manuscrit, peut s'écrire sous la forme générale :

$$\boldsymbol{\tau}_b + \frac{C_S|\mathbf{u}_b|^{m-1}\mathbf{u}_b}{\left(1+\left(\frac{C_S}{C_{max}N}\right)^{1/m}|\mathbf{u}_b|\right)^m} = 0 \tag{2.18}$$

où $C_S$ est le coefficient de frottement de Schoof et $C_{max}$ correspond à la valeur maximale de $\tau_b/N$ qui est bornée par la pente locale maximale.

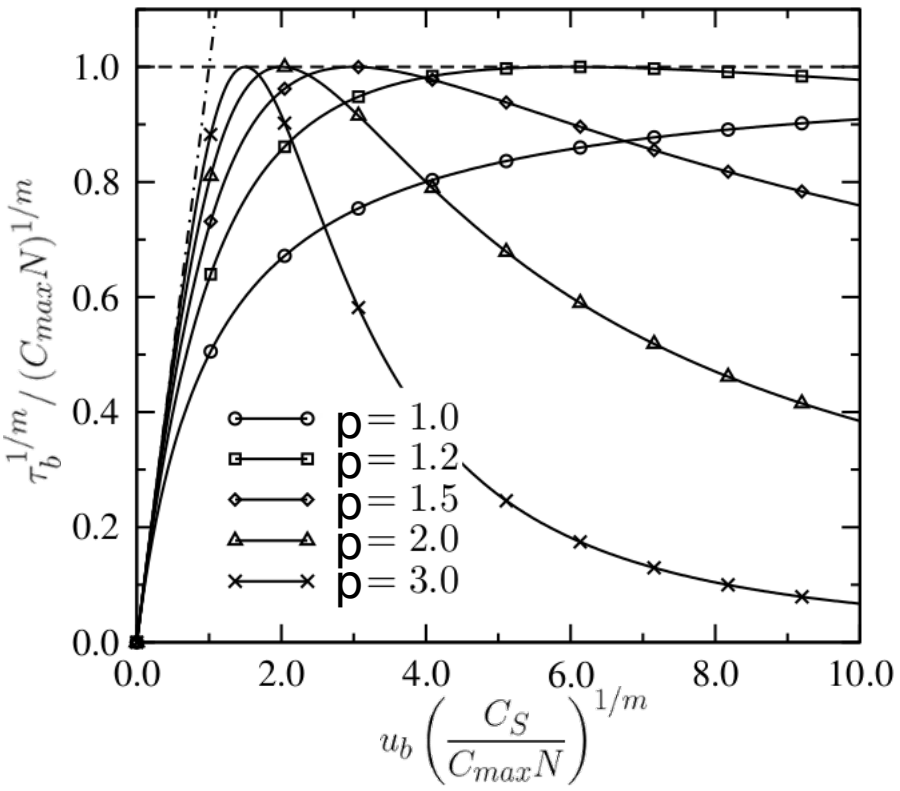


FIGURE 2.8 – Loi de frottement proposée par Gagliardini *et al.* (2007) pour différentes valeurs de l'exposant $p$. La définition des axes permet d'étudier l'effet de $p$ sur la loi de frottement indépendamment de la valeur des autres paramètres. Figure adaptée de Gagliardini *et al.* (2007).

Ces travaux sont étendus aux rhéologies non-linéaires par Gagliardini *et al.* (2007) qui appliquent la méthode des éléments finis à des socles périodiques synthétiques avec différents motifs de base (sinusoïdes, dents de scie, demi-ellipses renversées). En particulier, ils imaginent un socle périodique constitué d'une alternance de demi-ellipses se faisant face afin d'obtenir une pente localement infinie au niveau de la jonction entre deux demi-ellipses. A partir de ce socle idéalisé, ils montrent que le rapport $\tau_b/N$ demeure borné pour des pentes localement infinies. Enfin, ils généralisent la loi de frottement (2.18) et proposent, pour leur modèle 2D le long d'une ligne d'écoulement, l'expression :

$$\frac{\tau_b}{N} - C_{max}\left(\frac{\chi}{1+\alpha\chi^p}\right)^m = 0 \tag{2.19}$$

avec

$$\chi = \left(\frac{C_s}{C_{max}N}\right)^{1/m} u_b \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{(p-1)^{p-1}}{p} \tag{2.20}$$

où l'exposant $p$ est un nombre positif qui dépend de la forme choisie pour le socle rocheux. Les auteurs suggèrent notamment $p \approx 3.0$ pour le socle fait de demi-ellipses renversées et $p \approx 2.0$ pour le socle sinusoïdal. Comme le montre la Figure 2.8, l'introduction de ce paramètre dans la loi de Schoof contrôle la diminution de la contrainte de cisaillement basale intervenant pour de fortes vitesses basales ou de faibles pressions effectives, autrement dit quand le phénomène de cavitation devient important. En effet, pour une valeur de pression effective donnée, si la vitesse basale continue à croître après que la contrainte basale a atteint son maximum, celle-ci se met à décroître plus ou moins vite selon la rugosité du socle. Ce comportement, déjà évoqué par Lliboutry (1959), est également décrit par Schoof (2005) mais ce dernier, arguant que la décroissance de la contrainte de cisaillement basale est relativement lente pour les socles rocheux irréguliers étudiés, suggère de ne pas en tenir compte dans la construction de la loi de frottement mais de laisser tendre le rapport $\tau_b/N$ vers $C_{max}$ de manière asymptotique. Cela revient à fixer $p = 1$ dans les équations (2.19) et (2.20). Ce choix s'avère nécessaire dès lors qu'on veut implémenter cette loi dans les modèles numériques, ceux-ci ne pouvant gérer le fait qu'une contrainte de cisaillement basale donnée puisse être associée à deux vitesses basales différentes (Pimentel *et al.*, 2010; Pimentel et Flowers, 2011; Hewitt, 2013; Leguy *et al.*, 2014; Asay-Davis *et al.*, 2016, par exemple). Pour cette raison, dans la suite de ce manuscrit, l'expression "loi de Schoof" se réfèrera systématiquement à l'équation (2.18).

Ainsi, par construction, lorsque le rapport $u_b/N^{1/m}$ est grand, c'est-à-dire pour de faibles pressions effectives et/ou de grandes vitesses basales, la loi de Schoof présente un régime asymptotique de type Coulomb avec $\tau_b \sim C_{max}N$. Cette situation est un cas particulier de rhéologie basale parfaitement plastique, c'est-à-dire du type $\tau_b = \tau^*$, avec une contrainte seuil $\tau^*$ proportionnelle à $N$. Réciproquement, pour des pressions effectives élevées et/ou de faibles vitesses basales, l'équation (2.18) se réduit à $\boldsymbol{\tau}_b \sim -C_S|\mathbf{u}_b|^{m-1}\mathbf{u}_b$, ce qui correspond à un régime de frottement de type Weertman.

#### 2.3.2.6 Loi de Coulomb

Les trois lois décrites ci-dessus - loi de Weertman, Budd et Schoof - ont été établies en partant du postulat que le glacier repose sur un socle rigide indéformable. Or, nous l'avons vu dans la Section 2.3.1.3, de nombreux glaciers et fleuves de glace reposent sur des socles sédimentaires dont la déformation est responsable de l'essentiel du mouvement basal. Le comportement plastique du

till peut être décrit par une loi de type *Mohr-Coulomb* (Iverson *et al.*, 1998) :

$$\tau^* = c_0 + f_C N \tag{2.21}$$

où $c_0$ est la cohésion apparente du till et $f_C$ est un coefficient de frottement. La valeur de $c_0$ dépend essentiellement de la nature des constituants du till mais est généralement suffisamment faible pour être négligée (Cuffey et Paterson, 2010). On retrouve alors une loi de frottement de type Coulomb où $\tau^* = f_C N$.

#### 2.3.2.7 Loi de Tsai

Une loi de frottement développée récemment par Tsai *et al.* (2015) tente de concilier glissement basal sur socle rigide et déformation du socle. Elle part du postulat que, dans le cas d'un socle réel déformable, le mouvement basal opère selon les mécanismes proposés par Weertman (1957) jusqu'à ce que la contrainte de cisaillement basale n'atteigne une contrainte seuil au delà de laquelle le socle lui-même se met à se déformer selon le processus décrit dans la Section 2.3.1.3. Pour accommoder ces deux mécanismes, Tsai *et al.* (2015) proposent la loi de frottement suivante :

$$\boldsymbol{\tau}_b + \min\left[C_W |\mathbf{u}_b|^m, f_C N\right] \frac{\mathbf{u}_b}{|\mathbf{u}_b|} = 0 \tag{2.22}$$

Nous nommerons cette relation **loi de Tsai** dans la suite du manuscrit. Si la loi de Schoof induit une transition continue d'un régime de frottement de type Weertman à un régime de type Coulomb lorsque le rapport $u_b/N^{1/m}$ croît, la loi de Tsai est caractérisée par l'existence d'un seuil ; Le passage du premier régime de frottement au second intervient instantanément lorsque $C_W u_b^m$ devient supérieur à $f_C N$. Ainsi, bien qu'elles aient été érigées sur des bases théoriques différentes, les lois de Tsai et de Schoof présentent, pour des coefficients choisis de manière adéquate (c'est-à-dire $C_W = C_S$ et $f_C = C_{max}$), des régimes limites identiques.

#### 2.3.2.8 Comparaison des lois de frottement principales

Nous venons de présenter les quatre lois de frottement les plus couramment utilisées pour tenir compte du mouvement basal dans les modèles d'écoulement glaciaire (équations (2.15)-(2.16)-(2.18)-(2.22)). Il est intéressant de comparer ces quatre lois, c'est-à-dire d'étudier les dépendances relatives de $\tau_b$, $u_b$ et $N$ pour chacune d'entre elles. A cette fin, des iso-contours de $\tau_b$ sont représentés en échelle logarithmique dans le plan ($N$,$u_b$) sur la Figure 2.9, pour les valeurs de paramètre suivantes : $m = 1/3$, $q = 1$, $C_W = C_B = C_S = 7.624 \times 10^6$ S.I et $f_C = C_{max} = 0.5$. Avec ce choix, les quatre lois donnent le même $\tau_b$ pour $N = 1$ MPa (lignes verticales noires en traits interrompus sur la Figure 2.9). Par définition, la loi de Weertman est indépendante de $N$ et les iso-valeurs de $\tau_b$ obtenues avec cette loi sont représentées par des lignes horizontales (Figure 2.9a). Les iso-contours obtenus avec la loi de Tsai se divisent en deux parties : pour des pressions effectives élevées, on retrouve

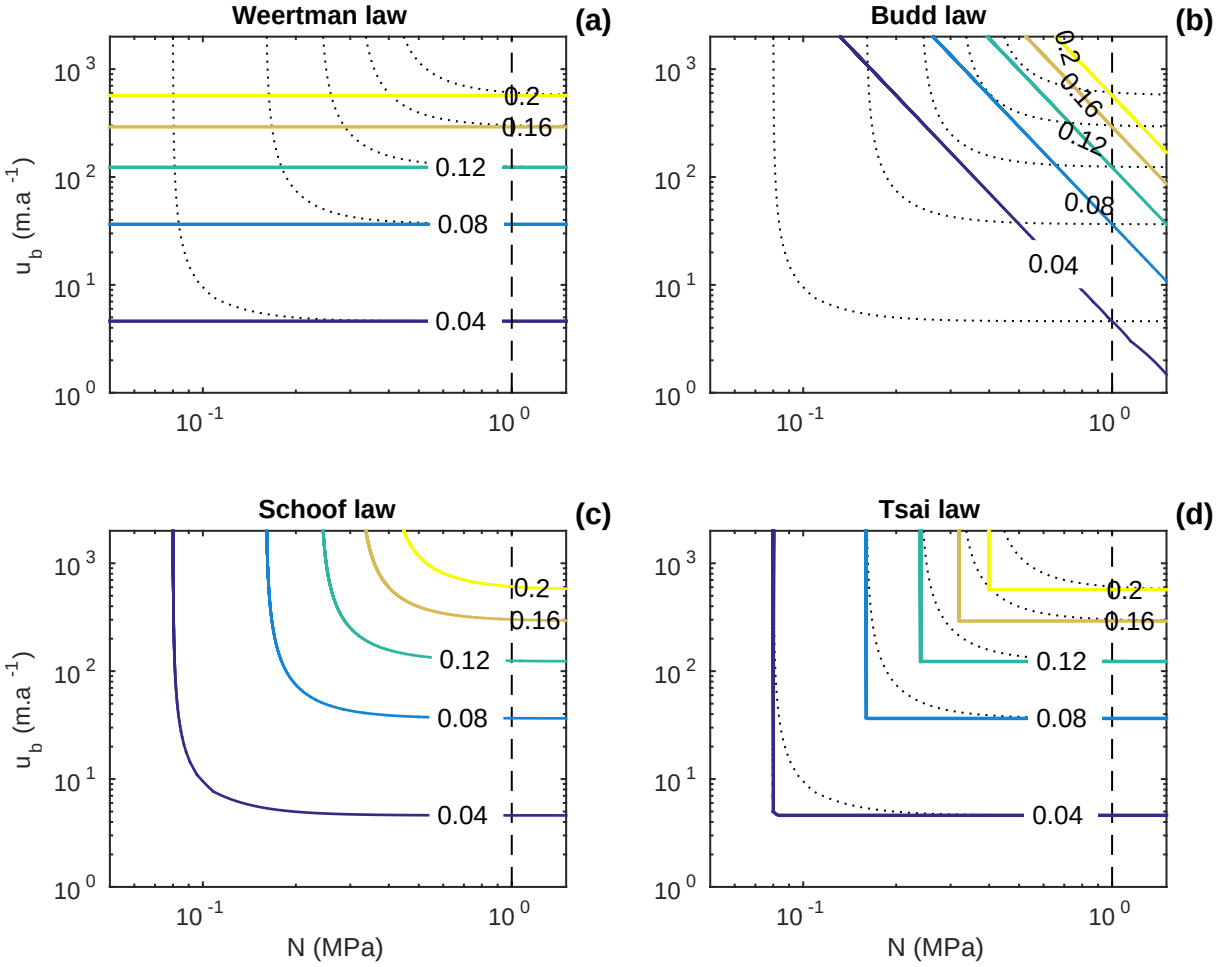


FIGURE 2.9 – Iso-valeurs de $\tau_b$ s'échelonnant de 0.04 à 0.2 MPa représentées dans un plan log-log vitesse basale/pression effective obtenues avec les lois de : **(a)** Weertman, **(b)** Budd, **(c)** Schoof et **(d)** Tsai, en prenant $m = 1/3$, $q = 1$, $C_W = C_B = C_S = 7.624 \times 10^6$ S.I et $f_C = C_{max} = 0.5$. Les lignes en pointillés reportées sur chaque graphe représentent les iso-valeurs de $\tau_b$ obtenues avec la loi de Schoof. La ligne verticale en traits interrompus correspond à $N = 1$ MPa. Figure issue de Brondex *et al.* (2017).

un régime de frottement de type Weertman tandis qu'un régime de type Coulomb s'applique aux basses pressions effectives. La transition d'un régime à l'autre est instantanée, aussi peut-on voir des angles droits sur la Figure 2.9d au niveau des valeurs seuils de $N$ ou $u_b$. Avec la loi de Schoof, cette transition se fait de manière continue et $\tau_b$ tend asymptotiquement vers les régimes de Weertman et Coulomb à, respectivement, faible vitesse basale et faible pression effective (Figure 2.9c). L'intervalle de pression effective sur lequel la loi de Schoof passe d'un régime de type Weertman à un régime de type Coulomb se réduit à mesure que $\tau_b$ croît. A titre d'exemple, pour $\tau_b = 0.2$ MPa, la loi de Schoof est quasi équivalente à la loi de Weertman pour $N \geq 1$ MPa tandis qu'elle est quasi équivalente à une loi de type Coulomb pour $N \leq 0.4$ MPa. Pour des valeurs intermédiaires de $N$, la dépendance de $\tau_b$ à $u_b$ diminue progressivement au fur et à mesure que $N$ diminue.

La loi de Budd, quant à elle, ne présente pas de régime limite et les iso-contours représentés en échelle logarithmique sont des lignes droites dont la pente est proportionnelle à $-q/m$ (Figure 2.9b). Avec les valeurs de coefficient choisies, cette loi donne systématiquement des valeurs de $\tau_b$ supérieures (respectivement inférieures) à celles obtenues avec la loi de Schoof pour $N > 1$ MPa (respectivement $N < 1$ MPa). Ainsi, par exemple, pour $N \sim 0.3$ MPa et $\tau_b = 0.04$ MPa, les vitesses basales sont approximativement $\sim 36$ fois plus élevées avec la loi de Budd qu'avec la loi de Schoof. Ces caractéristiques générales préfigurent des dynamiques très différentes, tant en ce qui concerne l'écoulement que la migration de la ligne d'échouage, en fonction de la loi de frottement retenue pour la modélisation.

#### 2.3.2.9 Validation des lois de frottement

Nous avons présenté ci-dessus un certain nombre de lois de frottement parmi les plus communément utilisées en glaciologie. Notons que certains auteurs ont occasionnellement eu recours à d'autres lois que celles-ci (Weertman et Birchfield, 1982; Pattyn, 1996; Gladstone *et al.*, 2017, par exemple). Du fait de l'inaccessibilité de l'interface glace/socle, ces lois sont développées sur la base d'arguments théoriques dérivés de modèles idéalisés ou à partir d'expériences réalisées en laboratoire. Mais les échelles spatiales et temporelles mises en jeu dans l'écoulement de glaciers réels sont largement supérieures à ce qui peut être recréé en laboratoire et la question de la validation *in situ* de ces lois se pose alors.

Les différentes lois évoquées précédemment se distinguent essentiellement dans la manière dont elles prennent en compte les vitesses basales et la pression effective. Toute la question est de savoir si ces différentes formulations sont à même de rendre compte du lien qui existe entre contrainte de cisaillement basale, pression effective et vitesse basale. Pour pouvoir répondre à cette question, il faudrait avoir à notre disposition plusieurs mesures *in situ*, réalisées à divers instants, des distributions des vitesses et pressions effectives. De plus, il serait nécessaire que ces observations soient suffisamment distantes dans le temps pour que l'écart entre les champs observés aux divers instants soit à l'origine de différences significatives de prédiction en fonction de la loi de frottement utilisée pour les réaliser. Malheureusement, la plupart du temps ces multiples observations ne sont pas disponibles ; d'abord, ainsi qu'il en a été question à la Section 2.3.1.4, parce que la pression effective à la base des calottes et glaciers est très mal contrainte ; ensuite, parce que les techniques permettant des mesures à grande échelle des vitesses de surface sont relativement récentes et n'offrent pas le recul nécessaire (Bindschadler et Scambos, 1991; Goldstein *et al.*, 1993).

En outre, bien que la dépendance du frottement à la topologie du socle soit universellement reconnue, la mise en équation de celle-ci est particulièrement ardue. Et quand bien même on parviendrait à établir une relation explicite entre les différents paramètres caractérisant la topologie

du socle (rugosité locale, pente maximale des obstacles,...) et le frottement, la calibration de cette relation nécessiterait, pour chaque cas d'étude, de pouvoir mesurer ces paramètres *in situ* avec une résolution suffisante ; l'inaccessibilité du socle et la démesure des échelles spatiales habituellement mises en jeu rendent chimérique une telle possibilité. Pour contourner ce problème, toutes les lois intègrent un coefficient de frottement dont la distribution spatiale traduit, sans l'expliciter, l'effet de la topologie du socle sur le frottement. Généralement, on fait appel aux méthodes inverses afin d'ajuster les valeurs de ce coefficient de manière à ce que les vitesses de surface prévues par le modèle correspondent, à un instant donné, aux observations. Auquel cas, le coefficient de frottement ne rend plus uniquement compte de l'effet de la topologie du socle mais englobe l'ensemble des processus physiques ayant un impact sur la contrainte de cisaillement basale et qui n'interviennent pas de manière explicite dans la loi de frottement.

Faute d'observations permettant de discriminer la loi la plus réaliste pour une application donnée, les modélisateurs privilégient généralement la simplicité en ayant recours à une loi de Weertman (2.15) dont le coefficient $C_W$ est obtenu par inversion (Favier *et al.*, 2014; DeConto et Pollard, 2016; Seroussi *et al.*, 2017, par exemple). Mais, à nouveau, une inversion réalisée à partir d'un unique jeu d'observations ne permet pas de contraindre, simultanément et de manière indépendante, les deux paramètres de la loi de Weertman, à savoir le coefficient $C_W$ et l'exposant $m$. Des tests de sensibilité menés par Ritz *et al.* (2015) dans le cadre d'une étude sur la contribution de l'Antarctique à l'élévation du niveau des mers aux horizons 2100 et 2200 ont montré une très forte dépendance des résultats à la valeur attribuée à ce second paramètre ; les fortes non-linéarités ($m \to 0$) induisent les contributions les plus importantes dans la mesure où les perturbations aux marges de la calotte sont transmises plus rapidement et plus loin à l'intérieur du continent (Price *et al.*, 2008). Les trois cas testés - $m = 1$, $m = 1/3$ et $m = 0$ (comportement plastique) - permettent de quantifier le niveau d'incertitude sur les projections obtenues. Toutefois, cette incertitude est probablement sous-estimée dans la mesure où l'effet d'autres paramètres, en particulier de la pression effective, ou tout au moins l'évolution temporelle de cet effet, est occulté. Cette problématique est au cœur des travaux présentés dans la seconde partie du Chapitre 5. Il s'agit d'évaluer l'importance de l'erreur réalisée sur les projections de dynamique de la ligne d'échouage et d'augmentation du niveau des mers lorsque la loi de frottement choisie dévie trop de la réalité physique du problème étudié.

## 2.4 La ligne d'échouage : localisation et migration

Au cours du Chapitre 1, nous avons vu que le bilan de masse de la calotte Antarctique dépend en grande partie du flux de glace franchissant la ligne d'échouage. Nous présentons ici les méthodes permettant de déterminer la position de cette ligne d'échouage. Dans un second temps, nous décrivons

le couplage mécanique qui s'opère en son voisinage entre les régimes d'écoulement caractéristiques des parties posée et flottante. Enfin, nous expliquons comment les processus décrits précédemment, à savoir l'endommagement et le frottement basal, peuvent affecter le flux de glace à la ligne d'échouage et donc la migration de celle-ci.

### 2.4.1 Localisation de la ligne d'échouage

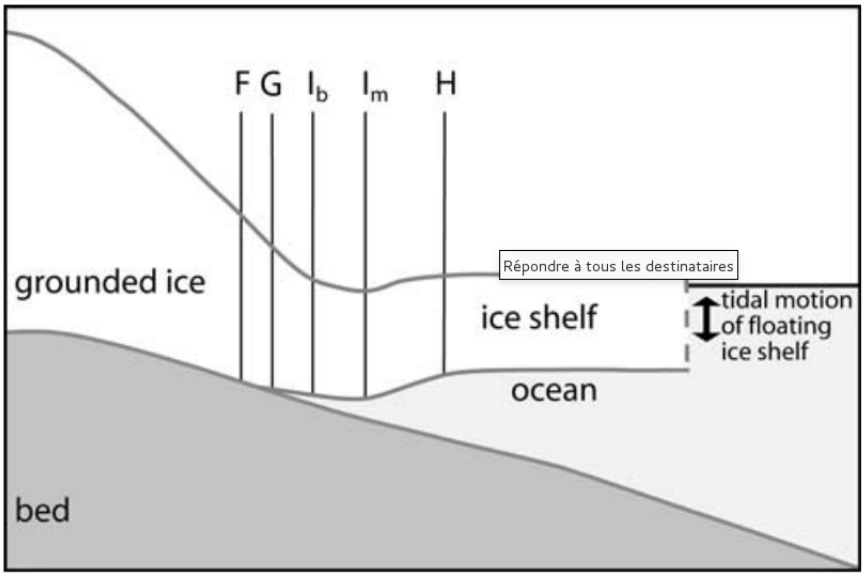


FIGURE 2.10 – Représentation schématique de la "zone d'échouage" : F est la limite en amont de laquelle la glace ne ressent plus l'effet de la marée, G correspond au point à partir duquel la glace perd contact avec le socle, $I_b$ correspond à la pente locale maximale, $I_m$ correspond à l'élévation de surface minimale et H est la limite en aval de laquelle la glace est en équilibre hydrostatique parfait. La zone FH correspond donc à la "zone d'échouage". L'échelle verticale est très exagérée. Figure issue de Fricker *et al.* (2009).

Le concept théorique de ligne d'échouage est facile à appréhender : il s'agit de la ligne qui délimite la glace posée en contact avec le socle sous-jacent de la glace flottante en contact avec l'océan. Néanmoins, en réalité, la glace ne passe pas instantanément d'un état où elle est complètement posée à un état où elle flotte librement sur l'océan. En effet, loin vers le large une plateforme flottante va, au gré des marées, s'élever et s'abaisser par rapport à un niveau moyen d'une quantité égale à l'amplitude de la marée. Cependant, immédiatement en aval de la zone où la glace décolle du socle, le mouvement vertical imprimé à celle-ci par la marée est atténué du fait de la rigidité de la glace qui demeure solidaire de la calotte posée. La situation est illustrée sur la Figure 2.10 : H est le dernier point - en se déplaçant de la mer vers l'intérieur du continent - à être en équilibre hydrostatique parfait, ou en d'autres termes, à expérimenter un déplacement vertical égal à l'amplitude de la marée tandis que F est le premier point continental pour lequel la marée ne produit aucun déplacement vertical. Les points F et H délimitent donc une "zone d'échouage", ou "*grounding zone*" en anglais,

au sein de laquelle la glace fléchit en réponse aux marées. Le point G est le point à partir duquel la glace perd contact avec le socle. De fait, G migre au sein de la “zone d’échouage” au gré des marées. On défini en général la ligne d’échouage comme correspondant à la position occupée par le point G lorsque la marée est basse (Bindschadler *et al.*, 2011). Il y a encore deux autres points remarquables qu’il est commun, mais pas systématique, de détecter au sein de la “zone d’échouage”. Le premier, noté $I_b$ sur la Figure 2.10, est le point d’inflexion de la pente de surface qui voit celle-ci atteindre rapidement une valeur nulle sur la plateforme flottante. Le second, noté $I_m$ sur la Figure 2.10, est un minimum local d’élévation de surface. Ces deux points délimitent une zone au sein de laquelle l’état de contrainte basal passe d’un régime de frottement sur le socle à un régime de glissement libre sur l’océan, ce qui se traduit par un changement important de la morphologie de surface sur une distance réduite. Aussi arrive-t-il régulièrement que le point $I_b$ soit repoussé plusieurs kilomètres en amont de G. C’est particulièrement le cas pour les fleuves de glace pour lesquels le glissement basal est déjà très intense bien avant que la glace ne commence à se soulever du socle (Fricker *et al.*, 2009).

Historiquement, la localisation de la zone d’échouage se faisait par l’installation *in situ* d’instruments de mesure permettant d’enregistrer les déplacements verticaux induits par la marée afin de détecter le point F : ce pouvait être des tiltmètres (Stephenson *et al.*, 1979; Riedel *et al.*, 1999) ou des GPS (Vaughan, 1994; Riedel *et al.*, 1999). Mais de nos jours, ces déplacements verticaux sont communément détectés depuis l’espace, soit par interférométrie radar ou InSAR pour “interferometric synthetic aperture radar” (Goldstein *et al.*, 1993; Rignot, 1998; Gray *et al.*, 2002, par exemple), soit par altimétrie laser embarquée sur satellite (Fricker et Padman, 2006, par exemple). Le développement de ces méthodes, qui offrent une bien meilleure couverture spatiale que les mesures *in situ*, a permis d’accroître considérablement la connaissance des frontières délimitant la partie posée de la calotte Antarctique. Il convient néanmoins de garder à l’esprit que la limite ainsi détectée (point F sur la Figure 2.10) ne correspond pas à la définition traditionnellement donnée à ligne d’échouage (point G sur la Figure 2.10), cette dernière se situant généralement quelques kilomètres en aval. Notons qu’il existe d’autres méthodes visant à identifier les points $I_m$ ou $I_b$ mais elles se révèlent généralement moins précises, avec des erreurs pouvant potentiellement excéder 10 km (Fricker *et al.*, 2009; Le Meur *et al.*, 2014).

### 2.4.2 Une zone de transition entre deux régimes d’écoulement

La ligne d’échouage est souvent décrite dans la littérature comme le lieu où l’écoulement passe d’un régime dominé par le cisaillement vertical et contrôlé par le frottement basal sur le socle à un régime de glissement libre sur l’océan dominé par l’étirement longitudinal (Rignot *et al.*, 2011b, par exemple). Cette situation est schématisée sur la Figure 2.11. Il convient néanmoins d’insister

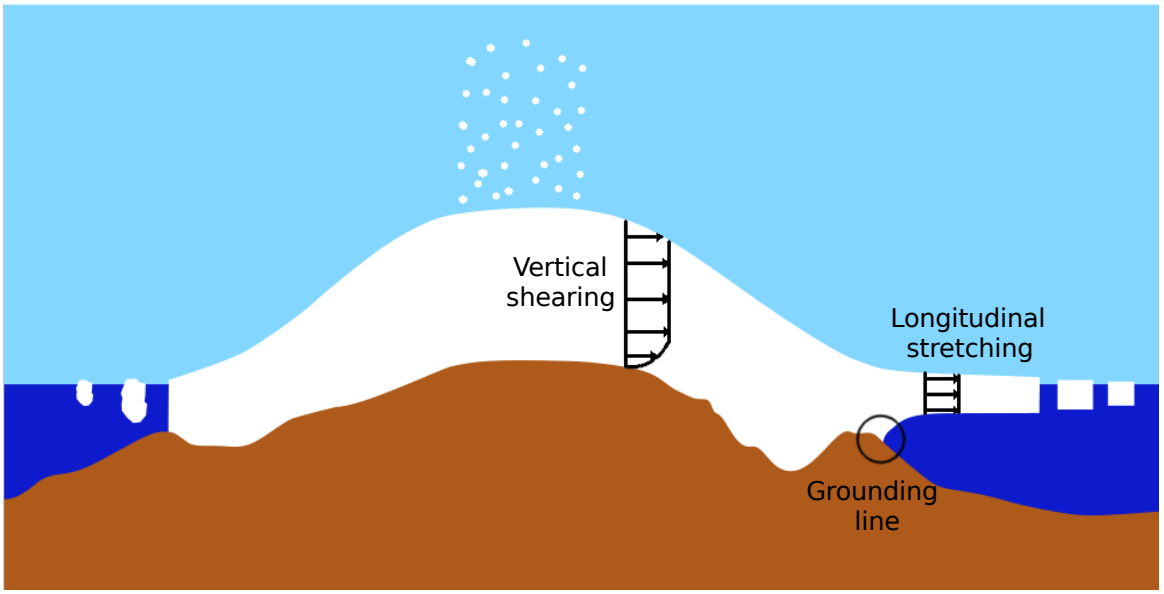


FIGURE 2.11 – Illustration des deux régimes d'écoulement : écoulement mû par la gravité, dominé par le cisaillement vertical et contrôlé par le frottement basal pour la partie posée ; écoulement mû par la différence entre pression cryostatique et pression de l'océan au front, dominé par l'étirement longitudinal, en glissement libre sur la surface de l'océan pour la partie flottante. Le couplage entre ces deux régimes se fait dans la région de la ligne d'échouage.

sur le fait que ce changement de régime, s'il peut être brutal aux endroits où la calotte posée donne directement naissance à une plateforme de glace, se fait souvent sur plusieurs dizaines de kilomètres là où des fleuves de glace font le lien entre ces deux systèmes (Pattyn, 1996; Pattyn *et al.*, 2006). En effet, comme cela a été largement détaillé dans ce chapitre, ces fleuves de glace sont caractérisés par un déplacement basal très important et des déformations par cisaillement très faibles. Par conséquent, bien qu'ils soient toujours en contact avec leur socle, ils affichent un régime d'écoulement proche de celui d'une plateforme flottante (Whillans et Van Der Veen, 1993, par exemple).

L'impact du couplage mécanique opérant au sein de cette zone de transition sur la dynamique de la partie posée a longtemps été débattu, certains auteurs estimant que la transmission de contraintes longitudinales de la partie flottante vers la partie posée via la ligne d'échouage était inexistante ou négligeable (Van der Veen, 1985; Hindmarsh, 1993; Whillans et Van Der Veen, 1993; Hindmarsh, 1996; Bentley, 1997, par exemple), et d'autres pensant le contraire (Weertman, 1974; Chugunov et Wilchinsky, 1996; Pattyn, 1996, par exemple). En Février/Mars 2002, le Larsen B, une plateforme de glace de la péninsule Antarctique d'une surface de 3200 km$^2$, se désintègre totalement. L'effet d'arc-boutant qu'exerçait cette plateforme sur les glaciers tributaires l'alimentant est annihilé en l'espace de deux mois. Des mesures satellitaires entreprises à la suite de cette désintégration révèlent une accélération et une perte d'épaisseur généralisée des glaciers tributaires (Scambos *et al.*, 2004;

Shuman *et al.*, 2011), certains d'entre-eux voyant leur vitesse d'écoulement multipliée par huit dans les mois suivants l'événement (Rignot *et al.*, 2004). Ce constat montre sans ambiguïté le lien profond et complexe existant entre la dynamique de la calotte posée et la plateforme flottante qui y est rattachée. A cela viennent s'ajouter les études numériques de Payne *et al.* (2004), puis de Dupont et Alley (2005) et Pattyn *et al.* (2006) qui montrent que des perturbations au voisinage immédiat de la ligne d'échouage ou en aval de celle-ci peuvent être transmises loin en amont sur la partie posée et affecter sa dynamique. La nécessité de développer des modèles capables de simuler non seulement le couplage mécanique entre glace posée et glace flottante à la ligne d'échouage mais aussi la migration de celle-ci apparaît alors clairement. Dans ce contexte, Vieli et Payne (2005) mettent au jour l'incapacité des modèles de l'époque à résoudre le problème de la migration de la ligne d'échouage. Cette étude ouvre la voie a de nombreux travaux visant à améliorer les modèles d'écoulement vis-à-vis de cet aspect (Schoof, 2007b,a; Pollard et DeConto, 2009; Goldberg *et al.*, 2009; Durand *et al.*, 2009b, par exemple) et à tester leur robustesse numérique (Durand *et al.*, 2009a; Pattyn *et al.*, 2012, 2013; Drouet *et al.*, 2013, par exemple). Ces progrès ont permis de mieux cerner la nature du lien entre effet d'arc-boutant exercé par les plateformes flottantes et stabilité des calottes (Gagliardini *et al.*, 2010; Favier *et al.*, 2012; Gudmundsson, 2013; Favier et Pattyn, 2015; Favier *et al.*, 2016, par exemple). Forts de ces connaissances nouvellement acquises, Fürst *et al.* (2016) ont pu cartographier une "ceinture de sécurité" des plateformes flottantes d'Antarctique recensant les régions flottantes dont la perte aurait des conséquences importantes sur la stabilité de la calotte et celles dont la disparition n'aurait pas d'implication dynamique majeure. Entre autres résultats, cette étude montre que la régression des plateformes flottantes des mers d'Amundsen et Bellingshausen (Antarctique de l'Ouest) aurait des conséquences dynamiques importantes. Au contraire, toujours selon cette étude, la perte récente d'un large iceberg tabulaire représentant 9 à 12 % de la plateforme flottante du Larsen C (Péninsule Antarctique) (Jansen *et al.*, 2015), n'aura vraisemblablement pas d'impact dynamique immédiat sur les glaciers tributaires alimentant ladite plateforme.

### 2.4.3 Dynamique de la ligne d'échouage

Plus de 80 % du drainage de la calotte Antarctique se fait via les glaciers émissaires (Pritchard *et al.*, 2012). La partie posée d'un tel glacier est délimitée par la ligne de démarcation de son bassin versant d'une part et par sa ligne d'échouage d'autre part. Dans la mesure où la fonte de surface est quasiment inexistante en Antarctique, pour que le glacier soit à l'équilibre, il faut que la totalité de la masse accumulée par précipitation neigeuse sur sa partie posée au cours d'un intervalle de temps de référence - en général, une année - soit exactement compensée par la masse déchargée au niveau de la ligne d'échouage durant ce même laps de temps. Un tel équilibre n'est pérenne que si les

propriétés internes de la glace (fluidité, endommagement, température, densité,...), les conditions aux limites du glacier (frottement basal, frottement sur les bords latéraux, pression d'eau au front et sous la plateforme flottante,...) et les forçages extérieurs (bilan de masse de surface, fonte sous la plateforme flottante,...) ne varient pas au cours du temps. Dans le cas contraire, l'équilibre est rompu et on observe une réponse dynamique de l'écoulement, mue par des phénomènes de rétroactions, entraînant un déplacement de la ligne d'échouage vers une nouvelle position d'équilibre. Dans les faits, la majorité de ces paramètres présentent, à différentes échelles de temps, une variabilité marquée et les glaciers émissaires sont en permanence hors équilibre. Au Chapitre 1, nous avons souligné l'importance de connaître la dynamique de la ligne d'échouage et les flux de glace la traversant pour obtenir des projections fiables ; ici nous expliquons comment l'endommagement et le frottement basal affectent cette dynamique et ces flux.

Comme nous l'avons vu à la Section 2.2.2, l'endommagement de la glace induit une diminution de sa viscosité. Cet état de fait influe sur la dynamique de la ligne d'échouage de deux façons différentes. De manière directe d'abord : la glace endommagée s'écoulant avec plus de facilité, la prise en compte de l'endommagement va directement affecter le flux à la ligne d'échouage qui va augmenter et, si l'accumulation sur la partie posée reste constante, le glacier va avoir tendance à s'amincir et la ligne d'échouage à reculer. Ce processus est d'autant plus prononcé que l'état de contrainte immédiatement en aval de la ligne d'échouage apparaît propice à une création supplémentaire d'endommagement au sein de cette zone (Borstad *et al.*, 2013, par exemple). Ensuite, il y a un processus indirect lié à l'affaiblissement mécanique des marges de cisaillement des plateformes flottantes (Borstad *et al.*, 2013, 2016). En effet, l'endommagement de ces zones limite leur capacité à supporter et transférer les contraintes issues du frottement au niveau des bords latéraux de la plateforme. Cela occasionne une diminution de l'effet d'arc-boutant qui elle-même induit une augmentation du flux à la ligne d'échouage et donc un recul de celle-ci (Dupont et Alley, 2005; Rignot *et al.*, 2008; Goldberg *et al.*, 2009; Gagliardini *et al.*, 2010; Bondzio *et al.*, 2017, par exemple). En outre, Borstad *et al.* (2013) évoquent la possibilité d'un mécanisme de rétro-action : la réduction des contraintes résistives liées à l'effet d'arc-boutant ("*back stresses*" en anglais) au sein de la plateforme flottante irait de paire avec une augmentation des contraintes longitudinales extensives (Jezek, 1984; Rist *et al.*, 2002) qui conduirait à la formation de nouvelles fractures amplifiant l'endommagement de la glace. L'étude de l'impact de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage est l'objet du Chapitre 4.

Par ailleurs, nous avons montré dans le précédent paragraphe qu'au voisinage de la ligne d'échouage s'opère un couplage mécanique entre deux régimes d'écoulement très différents. La longueur caractéristique de cette zone de transition correspond à la distance sur laquelle la contrainte de cisaillement basale décroît d'une valeur élevée loin en amont de la ligne d'échouage à zéro au ni-

veau de l'océan. En testant différentes paramétrisations empiriques de cette distance, Pattyn *et al.* (2006) ont montré que la dynamique de la ligne d'échouage est hautement sensible à la longueur de la zone de transition. Or, comme nous le verrons en détail au Chapitre 5, les différentes lois de frottement présentées à la Section 2.3.2 induisent naturellement des comportements différents de la contrainte de cisaillement basale à l'approche de la ligne d'échouage et donc des zones de transition plus ou moins étendues. En outre, Schoof (2007b,a, 2011) parvient, à partir de développements asymptotiques des lois d'écoulement couramment utilisées en glaciologie, à établir une expression semi-analytique du flux de glace à la ligne d'échouage $q_B(x_G)$. Cette expression, obtenue avec une loi de Weertman (2.15) pour un coefficient de frottement $C_W$ constant, révèle que le flux $q_B(x_G)$ est proportionnel à la puissance 4.75 de la hauteur de glace à la ligne d'échouage $H(x_G)$ (pour les valeurs usuelles $n = 3$ et $m = 1/3$ des exposants des lois de Glen et Weertman respectivement). Ce raisonnement est repris par Tsai *et al.* (2015) avec la loi de frottement (2.22) et en supposant une connexion hydrologique parfaite entre le réseau hydraulique sous-glaciaire et l'océan pour évaluer la pression effective. Du fait de la forme de la loi de Tsai, cette hypothèse induit un régime de frottement de type Coulomb au voisinage de la ligne d'échouage et un régime de type Weertman plus loin en amont. Malgré la faible extension spatiale de la zone gouvernée par un régime de type Coulomb, l'expression semi-analytique du flux à la ligne d'échouage à laquelle ils aboutissent diffère de celle obtenue par Schoof (2007b,a, 2011). En particulier, Tsai *et al.* (2015) trouvent que $q_B(x_G)$ est proportionnel à la puissance 5 de $H(x_G)$ (pour la valeur usuelle $n = 3$ de l'exposant de la loi de Glen). En résumé, deux lois de frottement différentes aboutissent à deux flux de glace à la ligne d'échouage différents et donc, vraisemblablement, à deux dynamiques différentes. Tout cela donne un aperçu de l'influence que peut avoir le choix d'une loi de frottement sur la dynamique de la ligne d'échouage. Cet aspect est exploré au Chapitre 5.

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les deux composantes du mouvement glaciaire : le fluage de la glace et le mouvement basal.

Aux échelles de temps suffisamment longues - typiquement, au-delà du jour - la glace peut-être considérée comme un fluide non-newtonien à forte viscosité dont la rhéologie est décrite par la loi de Glen. Néanmoins, aux échelles de temps plus courtes, la glace exhibe un comportement fragile et des fractures microscopiques ou mésoscopiques apparaissent localement. La capacité des zones très fracturées à supporter les contraintes est réduite et cela se traduit par une accélération de l'écoulement dans ces zones. La mécanique de l'endommagement permet de tenir compte de l'aspect fragile de la glace sans se départir du formalisme de la loi de Glen. Elle repose sur l'introduction d'un champ scalaire noté $D$ qui quantifie localement le niveau de dégradation des propriétés mécaniques

de la glace et rétro-agit sur sa viscosité. Une loi d'évolution doit être associée à ce champ afin de décrire sa création et son transport. Comme nous le verrons au Chapitre 4, la résolution numérique des équations associées à ce transport s'avère problématique.

D'autre part, nous avons vu que les processus permettant à la base d'un glacier ou d'une calotte de se mouvoir sont divers et complexes : il peut s'agir d'un mécanisme de fusion/regel, de fluage de la glace autour des proéminences du socle ou de la déformation de celui-ci lorsqu'il est de nature sédimentaire. Dans tous les cas, ce mouvement est largement favorisé par la présence d'eau au sein d'un réseau hydraulique basal qui, du fait de son inaccessibilité, est difficile à caractériser. Plusieurs lois de frottement ont été proposées au cours des dernières décennies afin de modéliser le mouvement basal : il s'agit d'évaluer, en tout point de l'interface glace/socle, la valeur de la contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ et d'expliciter l'éventuelle dépendance de cette valeur à d'autres paramètres, notamment aux vitesses basales $u_b$ et à la pression effective $N$. Ces lois reposent sur des arguments théoriques ou sur des essais effectués en laboratoire et font intervenir des paramètres mal contraints. Du fait des échelles temporelles et spatiales mises en jeu, les mesures *in situ* ne permettent pas de discriminer une loi comme étant la plus adaptée pour modéliser tel ou tel objet d'étude. Par conséquent, les modélisateurs se voient dans l'obligation de choisir une loi de frottement, souvent sur un critère de simplicité, et d'évaluer la valeur à attribuer aux paramètres intervenant au sein de cette loi. Des essais de sensibilité sur ces paramètres sont communément effectués afin de quantifier l'incertitude sur les résultats obtenus. En revanche, l'incertitude liée au choix de la formulation de la loi de frottement est le plus souvent occultée. Au Chapitre 5, nous explorons la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement afin d'évaluer, sur un cas synthétique, l'importance de cette incertitude.

L'étude des calottes polaires et glaciers est compliquée par leur taille et les échelles de temps caractéristiques de leur évolution. La compréhension de ces objets géophysiques et notre capacité à effectuer des projections les concernant passent nécessairement par leur modélisation. Dans le chapitre suivant, nous présentons les équations de la mécanique qui gouvernent les écoulements glaciaires et introduisons la méthode des éléments finis à laquelle nous avons recours afin de résoudre ces équations.

Chapitre 3

# Modélisation de la dynamique des glaciers émissaires

## Sommaire


**3.1 Formulation mathématique complète . . . . . 59**
3.1.1 Équations de Stokes . . . . . 60
3.1.2 Conditions aux limites . . . . . 62
3.1.3 Evolution des surfaces libres . . . . . 65
**3.2 Approximations des équations de Stokes . . . . . 68**
3.2.1 Modèles d'ordre intermédiaire . . . . . 68
3.2.2 Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA) . . . . . 70
3.2.3 Modèle shallow ice approximation (SIA) . . . . . 71
3.2.4 Approximations et dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 72
**3.3 Résolution numérique par éléments finis . . . . . 73**
3.3.1 Présentation de la Méthode des Éléments Finis . . . . . 74
3.3.2 Présentation du modèle Elmer/Ice . . . . . 80
**3.4 Conclusion . . . . . 81**


Ce chapitre est consacré à la modélisation de la dynamique des glaciers émissaires. La première partie décrit la mise en équation des principes de conservation qui président à l'écoulement d'un glacier puis aborde la question des conditions aux frontières du domaine étudié ainsi que des lois régissant l'évolution spatio-temporelle de ces frontières. Dans un second temps, nous faisons l'inventaire des différentes approximations permettant d'aboutir aux équations simplifiées usuellement utilisées en glaciologie. Dans la dernière partie, nous introduisons la méthode des éléments finis dont la vocation est de fournir des solutions numériques à ces diverses équations et nous présentons le logiciel *Elmer/Ice* utilisé au cours de cette thèse.

## 3.1 Formulation mathématique complète

Cette section a pour but de présenter la formulation générale du problème de l'écoulement d'un glacier émissaire. Pour cela nous considérons un domaine tridimensionnel comprenant une partie posée sur le socle et une partie flottante sur l'océan. La jonction de ces deux parties forme un plan dont l'intersection avec la surface inférieure du domaine constitue la ligne d'échouage. Par convention, l'axe $z$ correspond à la direction verticale et est orienté vers le haut. Le niveau moyen des océans est noté $z_{sl}$ et, sauf indication contraire, est fixé à $z_{sl} = 0$ m. Le domaine est délimité par ses frontières latérales et/ou amonts - qui correspondent souvent aux limites du bassin versant -, sa

surface inférieure dont l'altitude est notée $z_b(x, y, t)$, sa surface supérieure dont l'altitude est notée $z_s(x, y, t)$ et son front de vêlage en contact avec l'océan. Toutes ces informations sont illustrées sur la Figure 3.1.

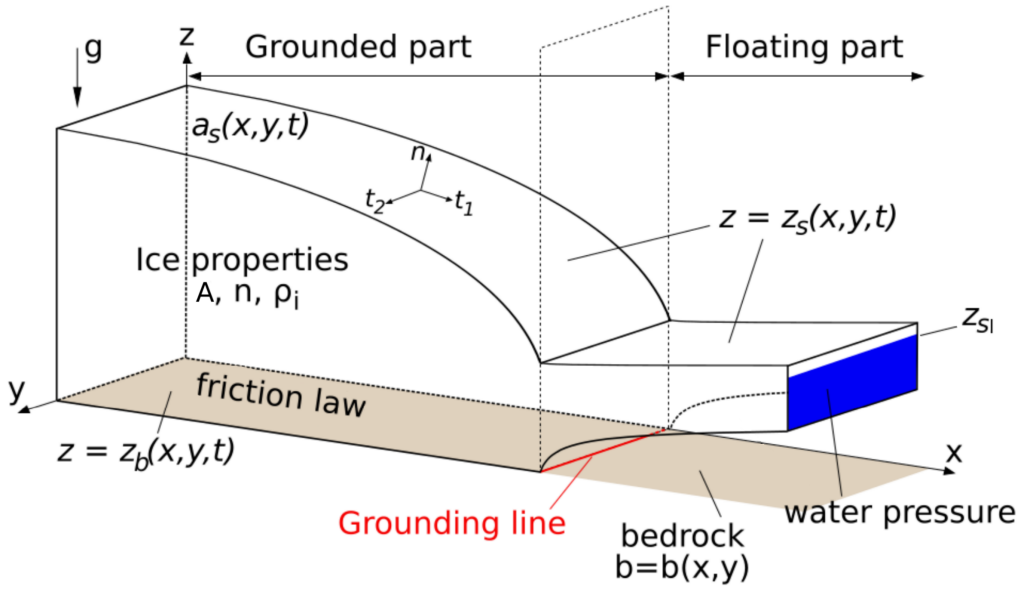


FIGURE 3.1 – Représentation générale du domaine modélisé. Figure adaptée de Favier *et al.* (2012).

### 3.1.1 Équations de Stokes

Les équations de *Navier-Stokes* permettent de décrire l'écoulement d'un fluide visqueux. Elles traduisent deux grands principes de la physique : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. La conservation de la masse, ou principe de continuité, peut s'écrire sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \mathbf{u}) = 0 \tag{3.1}$$

La glace qui constitue les calottes polaires se forme par densification progressive du névé. La transformation du névé en glace se fait sur des profondeurs de l'ordre de la cinquantaine de mètres tandis que les épaisseurs de glace des calottes polaires s'élèvent à plusieurs milliers de mètres (Cuffey et Paterson, 2010, par exemple). Aussi est-il très commun de traiter les problèmes d'écoulement sans tenir compte de la présence du névé et en considérant la glace comme un fluide incompressible. Cela revient à dire que la masse volumique de la glace $\rho_i$ est une constante et l'équation précédente se réduit à :

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \tag{3.2}$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'exprime sous la forme de l'équation vectorielle suivante :

$$\rho_i \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\mathrm{grad})\mathbf{u} \right) = \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho_i \mathbf{g} - 2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} \tag{3.3}$$

où $2\rho_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}$ représente la force d'inertie de Coriolis et $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} - p\mathbf{I}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy qui peut être décomposé en sa partie déviatoire $\mathbf{S}$ et sa partie isotrope $p\mathbf{I}$. Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique à coefficients réels donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Celles-ci sont appelées contraintes principales et sont positives (respectivement négatives) en traction (respectivement en compression) tandis que les vecteurs propres sont appelés directions principales. L'équation (3.3) est la formulation locale du principe fondamental de la dynamique. Elle fait le lien entre l'état de contrainte en un point du domaine modélisé et les sollicitations extérieures qui s'appliquent sur ce domaine. A cette équation, il faut associer la relation constitutive du matériau étudié, également appelée loi de comportement, qui relie les contraintes aux déformations ou, dans le cas d'un fluide visqueux, les contraintes déviatoires aux taux de déformation. Comme nous l'avons évoqué au Chapitre 2, la relation constitutive de la glace est la loi de Glen (2.1).

Du fait de la très forte viscosité de la glace, l'écoulement d'un glacier émissaire est caractérisé par un très faible nombre de Reynolds : les forces visqueuses l'emportent largement sur les forces d'inertie. On parle alors d'écoulement de Stokes et l'équation (3.3) se simplifie en :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Cette équation vectorielle peut être projetée sur les axes $x, y, z$ (voir Figure 3.1), ce qui permet d'obtenir le système d'équations scalaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} & = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} & = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} & = \rho_i g \end{cases} \tag{3.5}$$

On appelle **équations de Stokes** le système regroupant l'ensemble des équations scalaires (3.2) et (3.5). En glaciologie, on parle fréquemment de modèle *full-Stokes* pour désigner un modèle résolvant les équations de Stokes, par opposition aux modèles résolvant des approximations de celles-ci (voir Section 3.2). Concrètement, il s'agit de résoudre le système d'équations à 4 inconnues $(u, v, w, p)$ formé des équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)-\frac{\partial p}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)-\frac{\partial p}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial p}{\partial z} & = & \rho_i g \end{array}\right. \tag{3.6}$$

et de l'équation de conservation de la masse (3.2) qui peut être développée sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.7}$$

Les équations (3.6) ont été obtenues en combinant les équations (3.5) et la loi de Glen (2.1). Comme la viscosité $\eta$ fait intervenir le second invariant du tenseur taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ selon la relation (2.3), les équations (3.6) sont non-linéaires, ce qui complique nettement leur résolution.

Nous avons vu au cours du Chapitre 2 que la viscosité de la glace est fonction de sa température via le paramètre de fluidité $A$, donné par l'équation (2.4). L'évolution de cette température est régie par les lois de la thermodynamique. Aussi faudrait-il, en toute rigueur, ajouter aux deux principes de conservation dont il est question ci-dessus, un troisième : le principe de conservation de l'énergie. Dans cette thèse, nous n'avons considéré que des champs de température stationnaires, nous affranchissant ainsi de l'aspect thermodynamique du problème.

### 3.1.2 Conditions aux limites

Les équations (3.6) et (3.7) sont des équations aux dérivées partielles portant sur les trois composantes $u, v, w$ du champ des vitesses et sur le champ de pression isotrope $p$. Ces équations ne faisant pas intervenir la variable temps directement, leur résolution ne requiert pas la prescription de conditions initiales. Autrement dit, pour connaître les champs des vitesses et de pression à un instant donné, il suffit de connaître la géométrie et les conditions aux limites à cet instant. Ces conditions peuvent être de différentes natures. On parle de conditions de Dirichlet lorsque celles-ci portent directement sur les composantes des vitesses. Au contraire, une condition aux limites portant sur les contraintes, c'est-à-dire, du fait de la loi de Glen, sur les premières dérivées spatiales des vitesses, est appelée condition de Neumann. Enfin, il est aussi possible de prescrire des conditions mixtes, combinant vitesses et contraintes, que l'on nomme conditions de Robin. Les lois de frottement présentées au Chapitre 2 et qui relient la contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ à la vitesse basale $u_b$ constituent un exemple typique de condition de Robin.

#### 3.1.2.1 Condition sur la surface supérieure

La surface supérieure du glacier étant en contact avec l'atmosphère, on peut considérer que les contraintes qui s'y exercent sont nulles :

$$(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n})|_{z_s}=0 \tag{3.8}$$

où l'indice $z_s$ signifie que la quantité est considérée au niveau de la surface supérieure.

#### 3.1.2.2 Conditions sur la surface inférieure

La surface inférieure d'un glacier émissaire est soit posée soit flottante. Dans le premier cas, les lois de frottement permettent d'évaluer la contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$ qu'exerce le socle sur la glace, et la condition de Robin suivante s'applique :

$$\boldsymbol{\tau}_b + f(\mathbf{u}_b, N) = 0 \tag{3.9}$$

où $\boldsymbol{\tau}_b = (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n})|_{z_b} - \sigma_{nn}|_{z_b}\mathbf{n}$ avec $\sigma_{nn}|_{z_b} = \mathbf{n}.(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n})|_{z_b}$ la contrainte normale à la surface considérée, l'indice $z_b$ signifiant que la quantité est considérée au niveau de la surface inférieure du domaine. De même, la vitesse basale est définie par $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}|_{z_b} - (\mathbf{u}.\mathbf{n})|_{z_b}\mathbf{n}$. La forme de la fonction $f$ intervenant dans l'équation (3.9) est donnée, dans la majeure partie des études publiées jusqu'à présent, par une des lois de frottement parmi celles présentées au Chapitre 2.

Cette condition doit être complétée par une condition supplémentaire concernant la direction normale à la surface considérée. Le plus souvent, les phénomènes de fusion et d'accrétion à la base étant négligés, on prescrit une condition de non-pénétrabilité de la glace dans le socle. Cela revient à imposer la nullité de la vitesse normale à la surface, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$(\mathbf{u}.\mathbf{n})|_{z_b} = 0 \tag{3.10}$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, lorsque la condition (3.10) est satisfaite, la vitesse considérée au niveau de la surface inférieure $\mathbf{u}|_{z_b}$ est purement tangentielle, si bien que $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}|_{z_b}$.

En aval de la ligne d'échouage, la glace glisse sans frottement sur l'océan. Autrement dit, les contraintes de cisaillement y sont nulles et la glace ne subit que les contraintes normales dues à la pression de l'eau. Les conditions limites ayant cours sous la plateforme flottante peuvent donc s'écrire :

$$\boldsymbol{\tau}_b = 0 \tag{3.11}$$

et

$$\sigma_{nn}|_{z_b} = -p_w \tag{3.12}$$

où $p_w = \rho_w g(z_{sl} - z_b)$ est la pression d'eau.

#### 3.1.2.3 Condition au front

Au niveau du front de vêlage, la partie immergée de la plateforme flottante subit la pression de l'océan tandis que la partie émergée ressent la pression atmosphérique. Comme dans le cas de la

surface supérieure, cette pression atmosphérique peut être négligée et la condition au front prend la forme :

$$(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n})|_{cf} = -\max(0, p_w)\mathbf{n} \tag{3.13}$$

où l'indice $cf$ signifie que la quantité est considérée au niveau du front de vêlage.

#### 3.1.2.4 Condition sur les autres surfaces

Outre les frontières déjà abordées, dans le cas général il faut également prescrire des conditions sur les frontières latérales et/ou amonts. Pour une géométrie synthétique telle qu'illustrée sur la Figure 3.1, on différencie clairement les deux surfaces latérales de la surface limite amont. En revanche, lorsqu'on traite un cas réel, cette distinction peut être moins évidente, ces surfaces formant un continuum. La plupart du temps, on impose la vitesse normale au niveau de cette frontière. Ainsi, dans le cas particulier très commun où cette frontière correspond aux limites du bassin versant, le flux de glace y est nul et la condition aux limites dans la direction normale à la surface s'écrit (Favier *et al.*, 2012; Gudmundsson *et al.*, 2012; Pattyn *et al.*, 2013, par exemple) :

$$(\mathbf{u}.\mathbf{n})|_{S_L} = 0 \tag{3.14}$$

où l'indice $S_L$ signifie que la quantité est considérée au niveau des surfaces latérales qui, en l'occurrence, correspondent aux limites du bassin versant.

A nouveau, cette condition doit être complétée par une condition concernant les directions tangentielles à la surface. De la même manière que l'on a défini la contrainte de cisaillement basale, on peut définir une contrainte de cisaillement latérale par $\boldsymbol{\tau}_L = (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n})|_{S_L} - \sigma_{nn}|_{S_L}\mathbf{n}$. Il est commun de faire l'hypothèse de glissement parfait de la glace au niveau des frontières latérales. Auquel cas, la condition aux limites dans les directions tangentielles à la surface s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_L = 0 \tag{3.15}$$

Toutefois, nous avons évoqué au Chapitre 2 l'existence de marges de cisaillement au niveau desquelles des zones d'écoulement rapide côtoient des zones non-englacées ou bien des zones de glace quasiment immobile. Cela génère des contraintes de cisaillement importantes qui sont notamment responsables du phénomène d'arc-boutant exercé par les plateformes flottantes confinées sur l'écoulement des glaciers tributaires. Lorsqu'une partie des limites du domaine modélisé correspond à ces marges de cisaillement, la contrainte de cisaillement associée $\boldsymbol{\tau}_L$ peut être prise en compte par la prescription d'une loi de frottement du type $\boldsymbol{\tau}_L = f(\mathbf{u}_L)$ où $\mathbf{u}_L = \mathbf{u}|_{S_L} - (\mathbf{u}.\mathbf{n})|_{S_L}\mathbf{n}$ est la vitesse tangentielle à la surface latérale (Dupont et Alley, 2005; Goldberg *et al.*, 2009, par exemple).

### 3.1.3 Evolution des surfaces libres

Une calotte polaire présente plusieurs surfaces libres dont les positions doivent être calculées à partir de lois d'évolutions. Les équations régissant l'évolution des surfaces libres sont des équations de transport qui découlent du principe de conservation de la masse : schématiquement, l'écoulement induit une modification de la répartition de la masse au sein du domaine et, comme la masse volumique de la glace est constante, la géométrie évolue là où elle n'est pas contrainte par la présence d'une interface imperméable.

#### 3.1.3.1 Évolution de la surface supérieure

Comme elle est en contact avec l'atmosphère, la surface supérieure du glacier émissaire est libre d'évoluer au cours du temps. Concrètement, l'équation d'évolution de la surface supérieure s'écrit :

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s = a_s \tag{3.16}$$

où $z_s$ désigne l'altitude de la surface supérieure et $u_s, v_s, w_s$ les trois composantes du vecteur vitesse en surface. Le terme $a_s$ est le terme source ($a_s > 0$)/puit ($a_s < 0$) de l'équation de transport (3.16) qui rend compte du bilan de masse de surface. Ce bilan de masse de surface résulte de nombreux processus (précipitation neigeuse, érosion, sublimation, fonte) et est généralement estimé à partir d'un modèle de climat plus ou moins complexe. Ainsi, le terme $a_s$ est potentiellement dépendant du temps et de l'espace.

Une démonstration rigoureuse aboutissant à l'équation (3.16) peut être trouvée dans Greve et Blatter (2009) et Morlighem (2011).

#### 3.1.3.2 Évolution de la surface inférieure

La surface inférieure d'un glacier émissaire comporte une partie posée sur le socle et une partie flottante en contact avec l'océan. Comme nous l'avons vu dans la Section 3.1.2, des conditions aux limites différentes s'appliquent sur chacune des deux parties. Mathématiquement, la distinction entre glace posée et glace flottante se fait via la résolution d'un problème de contact. Cela revient également à chercher la position de la ligne d'échouage. Un point du domaine est considéré comme posé si son altitude correspond à celle du socle et si la contrainte normale exercée en ce point par la glace sur le socle est supérieure à la pression de l'océan :

$$z_b(x, y, t) = b(x, y, t) \qquad \textbf{et} \qquad -\sigma_{nn}(x, y, z_b, t) > p_w(z_b, t) \tag{3.17}$$

où $b$ désigne l'altitude du socle. Au contraire, un point est considéré comme flottant si l'altitude de ce point est supérieure à celle du socle ou si la pression d'eau en ce point est supérieure à la

contrainte normale exercée par la glace sur le socle :

$$z_b(x, y, t) > b(x, y, t) \qquad \textbf{ou} \qquad -\sigma_{nn}(x, y, z_b, t) \leq p_w(z_b, t) \tag{3.18}$$

Lorsque le critère (3.17) est rempli, les conditions (3.9) et (3.10) s'appliquent. A l'inverse, quand le critère (3.18) est satisfait, les conditions (3.11) et (3.12) entrent en vigueur. Notons que dans les équations (3.17) et (3.18), l'altitude du socle dépend de la variable temps. Cette dépendance est la conséquence du mécanisme de rebond post-glaciaire, également appelé ajustement isostatique, qui se définit comme la relaxation du manteau terrestre consécutive à des variations de masse de glace et d'eau océanique lors des cycles climatiques (Rovere *et al.*, 2014, par exemple). Néanmoins, au cours de cette thèse nous n'avons pas pris en compte ce phénomène dans la mesure où cette variation d'altitude n'est significative qu'aux très grandes échelles de temps.

Au même titre que celle de la surface supérieure, l'évolution de la partie de la surface inférieure en contact direct avec l'océan est régie par une équation de transport qui s'écrit :

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b = a_b \tag{3.19}$$

où $z_b$ désigne l'altitude de la surface inférieure, $u_b, v_b, w_b$ les trois composantes de la vitesse considérée au niveau de la surface inférieure et $a_b$ le terme représentant la fonte ($a_b > 0$) ou l'accrétion basale ($a_b < 0$) qu'on néglige le plus souvent. L'équation d'évolution (3.19) est complétée par la condition :

$$b(x, y, t) \leq z_b(x, y, t) < z_s(x, y, t) \tag{3.20}$$

#### 3.1.3.3 Évolution de l'épaisseur

Parfois, particulièrement lorsqu'on a recours à des modèles verticalement intégrés, il est plus simple de s'affranchir de l'altitude de la surface supérieure $z_s$ et de travailler directement avec l'épaisseur de glace, définie par :

$$H(x, y) = z_s(x, y) - z_b(x, y) \tag{3.21}$$

Une intégration verticale du principe de continuité (3.7) permet d'obtenir l'équation d'évolution de l'épaisseur (voir Greve et Blatter (2009) pour une démonstration rigoureuse) :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}H)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}H)}{\partial y} = a_s - a_b \tag{3.22}$$

où $\bar{u}$ et $\bar{v}$ représentent les vitesses moyennées sur l'épaisseur. L'équation (3.22) permet de contraindre l'évolution temporelle de l'épaisseur de glace mais n'exonère pas de la résolution des équations relatives au problème de contact et à l'évolution de la surface inférieure.

#### 3.1.3.4 Évolution du front de vêlage

Le front de vêlage d'un glacier émissaire est en contact avec l'océan et constitue également une surface libre. Là encore, la position de cette surface peut être déterminée en résolvant une équation de transport similaire à celles énoncées pour les surfaces inférieures et supérieures. Le terme de bilan de masse de cette équation est alors donné par le *taux de vêlage* qu'il est nécessaire d'estimer. Une autre approche consiste à coupler le modèle d'écoulement à un modèle de vêlage intégrant explicitement les processus à l'origine de ce phénomène ; la dynamique du front de vêlage est alors un résultat direct du modèle.

Le phénomène de vêlage est complexe et constitue, depuis plusieurs années, un sujet de recherche de premier plan. Un certain nombre d'auteurs ont proposé des lois empiriques permettant d'estimer le taux de vêlage (Brown *et al.*, 1982; Pelto et Warren, 1991; Vieli *et al.*, 2001; Alley *et al.*, 2008, par exemple). Plus récemment, d'autres lois reposant sur des approches physiques ont été développées afin de rendre compte des mécanismes à l'origine du phénomène (Benn *et al.*, 2007; Vieli et Nick, 2011; Bassis, 2011; Krug *et al.*, 2014, par exemple). Ces lois sont difficiles à implémenter au sein de modèles numériques, particulièrement pour les géométries tridimensionnelles, et aucune ne fait réellement consensus. Aussi est-il commun de maintenir le front de vêlage à une position fixe (Pattyn *et al.*, 2012, 2013; Favier *et al.*, 2012; Asay-Davis *et al.*, 2016; Seroussi *et al.*, 2017, par exemple). C'est aussi ce que nous avons fait au cours de cette thèse.

#### 3.1.3.5 Géométrie initiale

Contrairement aux équations de Stokes, les équations d'évolution (3.16), (3.19) et (3.22) font intervenir la variable temps. Leur résolution nécessite donc la prescription d'une condition initiale ou, plus précisément, d'une géométrie initiale. Les techniques d'observation actuelles, par altimétrie radar ou laser notamment, permettent de mesurer l'élévation de la surface supérieure avec une précision relativement bonne dans les régions où la pente est modérée, ce qui est le cas pour les glaciers émissaires. Par exemple, le modèle numérique de terrain (MNT) proposé par Griggs et Bamber (2009) pour la surface topographique de l'Antarctique présente des erreurs d'altitude comprises entre 1 et 2 m pour les zones les plus plates mais pouvant atteindre 40 m dans les zones de forte pente. En revanche, la topographie du socle est beaucoup moins bien connue ; on la déduit indirectement de l'élévation de surface via des mesures d'épaisseur de glace. Les MNT d'élévation du socle les plus récents (Fretwell *et al.* (2013) pour l'Antarctique et Bamber *et al.* (2013) pour le Groenland) affichent des erreurs d'altitude estimées à quelques dizaines de mètres au niveau des points de mesure mais atteignant rapidement plusieurs centaines de mètres à mesure qu'on s'éloigne de ceux-ci. Ici aussi on peut avoir recours aux méthodes inverses afin d'obtenir une meilleure connaissance de l'élévation du socle à partir d'observations en surface des vitesses

d'écoulement ou des variations d'épaisseur (Mosbeux *et al.*, 2016, par exemple).

## 3.2 Approximations des équations de Stokes

L'ensemble des équations présentées dans la section précédente constitue la formulation mathématique complète du problème d'écoulement d'un glacier émissaire. Les modèles *full-Stokes* résolvent la totalité de ces équations et, à ce titre, servent de référence lors d'exercices d'intercomparaison de modèles (Pattyn *et al.*, 2012, 2013; Pattyn et Durand, 2013). Malheureusement, lorsque les domaines d'étude sont très étendus (calotte groenlandaise dans son intégralité ou grandes régions de la calotte antarctique par exemple), les coûts numériques associés à la résolution du jeu complet d'équations deviennent prohibitifs. Il convient alors d'évaluer, à l'aide de développements asymptotiques des équations de Stokes, les importances relatives des diverses quantités intervenant dans les équations suivant les régimes d'écoulement. Ce procédé permet d'aboutir à des modèles simplifiés affichant des coûts numériques plus modestes. Cette section est consacrée à la présentation de ces modèles.

### 3.2.1 Modèles d'ordre intermédiaire

Les modèles d'ordre intermédiaire, parfois également appelés modèles d'ordre supérieur ou "*higher order models (HOM)*" en anglais, reposent sur deux hypothèses : l'hypothèse de faible rapport d'aspect et l'approximation hydrostatique.

#### Hypothèse de faible rapport d'aspect

Dans la majeure partie des cas, les domaines étudiés en glaciologie sont caractérisés par de faibles rapports d'aspect : l'épaisseur de glace caractéristique du domaine modélisé est très faible devant son étendue. En particulier, lorsqu'on s'intéresse aux glaciers émissaires, on a affaire à des domaines dont l'extension horizontale est de l'ordre du millier de km pour une extension verticale typique de l'ordre du millier de m, soit un rapport d'aspect de $\epsilon = 10^{-3}$. De ce constat, il découle que les dérivées horizontales des vitesses verticales sont négligeables devant les dérivées verticales des vitesses horizontales. Autrement dit, les termes $\partial w/\partial x$ et $\partial w/\partial y$ peuvent être retirés des équations (3.6).

#### Approximation hydrostatique

Si on isole un volume élémentaire cubique de glace au sein d'un glacier émissaire et qu'on regarde la contrainte qui s'exerce sur sa surface supérieure (c'est-à-dire la surface dont la normale est dirigée selon l'axe $z$ et orientée vers le haut), on constate que les contraintes de cisaillement $\sigma_{xz}$ et $\sigma_{yz}$ sont négligeables ($\leq$ 100 kPa) devant la contrainte normale $\sigma_{zz}$ (Greve et Blatter, 2009). Celle-ci

est essentiellement due au poids exercé par la colonne de glace réparti sur la surface élémentaire sur laquelle elle s'appuie ($[\sigma_{zz}] \approx \rho_i g[H] \approx 10$ MPa). Fort de ce constat, il est possible de réduire l'équation $(3.5)_z$ à :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_i g \tag{3.23}$$

Cette approximation permet de simplifier nettement le problème de contact décrit à la Section 3.1.3.2. En effet, aussitôt que la pression exercée par l'océan excède le poids de la colonne de glace celle-ci se met à flotter, si bien que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} z_b(x,y,t) = b(x,y) & \text{pour la glace posée} \\ z_b(x,y,t) = -H(x,y)\frac{\rho_i}{\rho_w} > b(x,y) & \text{pour la glace flottante} \end{cases} \tag{3.24}$$

La position de la ligne d'échouage ($x_G$, $y_G$) peut alors être directement déduite du critère de flottaison, c'est-à-dire en résolvant l'équation :

$$H(x_G, y_G) + b(x_G, y_G)\frac{\rho_w}{\rho_i} = 0. \tag{3.25}$$

Si l'approximation hydrostatique (3.23) est justifiée dans la plupart des cas, il existe des configurations particulières pour lesquelles $\sigma_{zz}$ diffère de quelques pourcents par rapport au terme cryostatique $\rho_i g(z_s - z)$. Ainsi, Morlighem *et al.* (2010), dans une étude visant à inverser la contrainte de cisaillement basale sous le glacier de Pine Island (Antarctique de l'Ouest) à partir des vitesses observées en surface, remarquèrent que la non-prise en compte des contraintes $\sigma_{xz}$ et $\sigma_{yz}$ par les modèles faisant l'approximation hydrostatique aboutissait à un frottement important dans une région au sein de laquelle un modèle *full-Stokes* prévoyait un frottement quasi nul. Ils comprirent que la topologie du socle - qui présente dans cette région une pente ascendante dans le sens de l'écoulement - induit des contraintes verticales légèrement plus élevées (environ 2 %) que le poids de la colonne de glace, ce qui provoque une réduction locale des vitesses d'écoulement. Les modèles faisant l'approximation hydrostatique ne pouvant prendre en compte cet excès de contrainte, ils augmentent artificiellement le frottement basal afin que les vitesses de surface modélisées collent aux vitesses observées. Cet effet, connu sous le nom de *"bridging effect"* et déjà mis en évidence par Van Der Veen et Whillans (1989), doit être gardé à l'esprit par le modélisateur faisant appel à l'approximation hydrostatique.

Parmi les modèles d'ordre intermédiaire, le modèle *Blatter-Pattyn* développé suite aux travaux de Blatter (1995) et Pattyn (2003) fait figure de référence. Bien qu'allégé par rapport aux modèles *full-Stokes*, ce type de modèle reste tridimensionnel dans la mesure où les inconnues cherchées $(u, v, w, p_i)$ sont des fonctions des trois coordonnées de l'espace. A partir de développements asymptotiques, Schoof et Hindmarsh (2010) parviennent néanmoins à proposer un modèle verticalement

intégré de précision comparable au modèle *Blatter-Pattyn*. Cornford *et al.* (2013) décrivent un schéma numérique permettant de résoudre les équations associées à ce nouveau modèle par la méthode des volumes finis. Mais cette résolution demeure gourmande en ressources de calcul et des simplifications supplémentaires peuvent s'avérer nécessaires dans certains cas.

### 3.2.2 Modèle shallow shelf(y) approximation (SSA)

Nous l'avons vu au cours du Chapitre 2, dans les zones d'écoulement rapide, l'essentiel du mouvement glaciaire observé en surface est dû au mouvement basal. D'un point de vue mécanique, cela signifie que les gradients verticaux des vitesses horizontales sont négligeables devant leurs gradients horizontaux. Cela est d'autant plus vrai pour les plateformes flottantes à la base desquelles le frottement est inexistant et dont l'écoulement est entièrement régi par les contraintes longitudinales. En adoptant les deux hypothèses décrites dans le paragraphe précédent et en intégrant verticalement les équations (3.6) avec $\partial u/\partial z \approx 0$ et $\partial v/\partial z \approx 0$, on aboutit au système 2D plan suivant :

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\eta}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - \tau_{b,x} = \rho_i g H \dfrac{\partial z_s}{\partial x} \\ 4\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\eta}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - \tau_{b,y} = \rho_i g H \dfrac{\partial z_s}{\partial y} \end{cases} \tag{3.26}$$

où $\tau_{b,x}$ et $\tau_{b,y}$ sont les deux composantes dans le plan $(x,y)$ du vecteur contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$ et $\bar{\eta}$ est la viscosité effective intégrée verticalement :

$$\bar{\eta} = \int_{z_b}^{z_s} \eta dz \tag{3.27}$$

où $\eta$ est donné par la relation (2.3). Une description détaillée des étapes successives menant au système (3.26) à partir du système (3.6) peut être trouvée dans l'ouvrage de Greve et Blatter (2009).

Nous avons ici affaire à un modèle 2D plan, aussi les surfaces inférieure et supérieure ne constituent-elles plus des limites du domaine au sens mathématique. Pourtant, il demeure nécessaire de tenir compte de l'évolution temporelle de la géométrie du domaine modélisé. Comme le modèle *SSA* fait appel à l'approximation hydrostatique, l'évolution de la surface inférieure est régie par l'équation (3.24) et la position de la ligne d'échouage déterminée en résolvant l'équation (3.25). Le modèle étant intégré verticalement, l'évolution de la surface supérieure se déduit des évolutions de la surface inférieure et de l'épaisseur, cette dernière étant régie par l'équation (3.22).

Enfin, il est également nécessaire d'intégrer verticalement la condition au front (3.13) afin de tenir compte de l'effet de la pression de l'océan s'exerçant à l'extrémité de la plateforme flottante.

Cette intégration conduit aux conditions de Neumann suivantes :

$$\begin{aligned} 4\bar{\eta}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{cf} n_x + 2\bar{\eta}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{cf} n_x + \bar{\eta}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{cf} n_y &= \frac{\rho_i}{\rho_w}(\rho_w-\rho_i)\frac{gH|_{cf}^2}{2}n_x \\ \bar{\eta}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{cf} n_x + 4\bar{\eta}\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{cf} n_y + 2\bar{\eta}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{cf} n_y &= \frac{\rho_i}{\rho_w}(\rho_w-\rho_i)\frac{gH|_{cf}^2}{2}n_y \end{aligned} \tag{3.28}$$

où les quantités pourvues de l'indice $cf$ sont considérées au front de vêlage tandis que $n_x$ et $n_y$ désignent les composantes selon les axes $x$ et $y$ respectivement du vecteur unitaire normal au front.

Le fait que le modèle *SSA* soit 2D plan ne signifie pas pour autant que la composante verticale de la vitesse $w$ est nulle. Celle-ci peut être déduite des composantes horizontales $u$ et $v$ à partir du principe de conservation de la masse (3.7).

Les modèles résolvant l'ensemble des équations comprises entre (3.26) et (3.28) sont appelés modèles **Shallow Shelf Approximation (SSA)**. Initialement développés par Morland (1987) et MacAyeal (1989), les modèles *SSA* sont aujourd'hui très répandus en glaciologie pour la modélisation d'écoulements rapides et en particulier pour les glaciers émissaires, du fait de leur coût numérique nettement inférieur à celui des modèles *full-Stokes*. Pour cette même raison, une grande partie des travaux réalisés au cours de cette thèse ont fait appel à un modèle de type *SSA*.

### 3.2.3 Modèle shallow ice approximation (SIA)

L'approximation dite **Shallow Ice Approximation (SIA)** part du principe qu'en tout point du domaine étudié la contrainte motrice de l'écoulement $\tau_d$ - dont il a déjà été question dans la Section 2.3.2 - est exactement compensée localement par la contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ (Hutter, 1983). Cela revient à admettre que seules les contraintes de cisaillement verticales jouent un rôle dans l'écoulement. Si cette hypothèse parait raisonnable pour certaines régions où les calottes polaires sont posées et le frottement est intense, elle devient beaucoup plus douteuse à proximité des dômes, dans les zones de forte pente de surface, ou lorsque le glissement est important et ne permet pas de négliger les contraintes longitudinales (Le Meur *et al.*, 2004, par exemple). Pour cette raison, les modèles *SIA* ne sont pas adaptés à l'étude des glaciers émissaires et nous ne détaillerons pas ici les équations qui leurs sont associées (nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'ouvrage de Greve et Blatter (2009)). Précisons néanmoins que dans le cadre de l'approximation *SIA*, les composantes horizontales du champ des vitesses peuvent être déduites de manière indépendante à partir de la seule connaissance de la pente de surface et de l'épaisseur de glace locale. Les modèles *SIA* sont donc unidimensionnels et locaux, ce qui les rend très peu coûteux en ressources numériques. Aussi furent-ils longtemps les modèles les plus répandus pour la modélisation des écoulements glaciaires. Néanmoins, avec l'augmentation continue des ressources numériques disponibles, les modélisateurs tendent à se détourner de ce type de modèles au profit de modèles plus complexes. Parmi ceux-ci, des modèles hybrides couplant *SSA* et *SIA* seront évoqués au paragraphe suivant.

### 3.2.4 Approximations et dynamique de la ligne d'échouage

La modélisation de la dynamique de la ligne d'échouage est au cœur de cette thèse. Nous avons insisté à la Section 2.4 sur le fait que la région de la ligne d'échouage est complexe d'un point de vue mécanique dans la mesure où s'y opère un changement dans le régime d'écoulement. Dans cette zone de transition, les contraintes de cisaillement verticales et les contraintes d'étirement longitudinales sont du même ordre de grandeur. Dès lors, il est raisonnable de s'interroger sur la capacité des modèles simplifiés à simuler la migration de la ligne d'échouage attendu que ceux-ci négligent des contraintes potentiellement importantes dans cette zone. L'émergence d'un certain nombre de modèles *full-Stokes* (Pattyn *et al.*, 2008; Nowicki et Wingham, 2008; Durand *et al.*, 2009b; Larour *et al.*, 2012a; Zhang *et al.*, 2017), et le développement de la théorie de la couche limite par Schoof (2007a,b), ont ouvert la voie aux expériences d'intercomparaison MISMIP (Pattyn *et al.*, 2012) et MISMIP3D (Pattyn *et al.*, 2013). Ces deux expériences constituent des bancs d'essai basés sur des géométries synthétiques, 2D le long d'une ligne d'écoulement pour la première et 3D pour la seconde, visant à évaluer la capacité des modèles à simuler la migration de la ligne d'échouage en fonction de leur degré d'approximation des équations de Stokes et du schéma numérique qu'ils emploient pour la résolution. La conclusion principale de ces études est qu'une modélisation acceptable de la dynamique de la ligne d'échouage requiert au minimum (1) l'inclusion des contraintes longitudinales au sein de la zone de transition et (2) un maillage suffisamment fin de cette zone (cf Section 3.3). La première condition exclut *de facto* les modèles type *SIA*. Notons néanmoins que des modèles hybrides associant *SIA* et *SSA* ont été développés afin de contourner cette limitation. Parmi ceux-ci, citons le modèle proposé par Bueler et Brown (2009) et repris par Winkelmann *et al.* (2011) qui emploie simultanément *SIA* et *SSA* sur l'ensemble du domaine modélisé et fait appel à un paramètre pour ajuster localement la proportion du mouvement imputable au cisaillement vertical ou à l'étirement longitudinal. Par ailleurs, Pollard et DeConto (2009) utilisent également une version améliorée d'un modèle *SIA* pour lequel le flux à la ligne d'échouage est contraint par la solution semi-analytique de Schoof (2007a,b) tandis que la *SSA* s'applique sur la plateforme flottante. Ces améliorations apportées au modèle *SIA* original permettent d'obtenir des dynamiques de ligne d'échouage cohérentes, hormis pour les courts états transitoires dans le cas du modèle de Pollard et DeConto (2009).

La deuxième conclusion importante des expériences MISMIP et MISMIP3D est que les modèles qui incluent les effets du cisaillement vertical (typiquement les modèles *full-Stokes* et d'ordre intermédiaire) aboutissent à des lignes d'échouage stationnaires localisées quelques dizaines de km en retrait par rapport à celles obtenues avec des modèles qui négligent ces effets. Cela s'explique par une viscosité amoindrie au voisinage de la ligne d'échouage. En effet, la glace étant un fluide non-newtonien, sa viscosité est fonction du taux de cisaillement ; en l'occurrence, celle-ci diminue lorsque

ce dernier augmente, par l'intermédiaire du second invariant du tenseur des taux de déformation $I_{\dot{\epsilon}_2}$ qui intervient dans l'équation (2.3).

Ces exercices ont été complétés par les travaux de Pattyn et Durand (2013) qui se sont focalisés sur les différences en terme de projection de la contribution des calottes à l'augmentation du niveau des mers en fonction des différents types de modèles utilisés pour obtenir ces projections. Leurs résultats montrent qu'à l'échelle du siècle, pour la géométrie synthétique et la perturbation prescrite dans le cadre des expériences MISMIP3D, les modèles type *SSA* surestiment de 40% la contribution à l'élévation du niveau des mers par rapport aux modèles *full-Stokes*. Cela conduit les auteurs à souligner l'importance d'utiliser des modèles *full-Stokes* ou, au moins, d'ordre intermédiaire pour obtenir des projections fiables. Malheureusement, du fait des coûts numériques engendrés, cela n'est pas toujours possible. En particulier, en ce qui concerne les simulations aux très grandes échelles spatiales et temporelles (simulation de grands bouleversements paléo-climatiques par exemple), il est illusoire de penser que l'inflation actuelle des ressources numériques disponibles sera rapidement suffisante pour permettre l'usage généralisé de modèles *full-Stokes* tridimensionnels dans un proche avenir. Une alternative réside dans le développement de modèles résolvant de manière automatique les équations de la *SIA* ou de la *SSA* dans les zones où ce type d'approximation est approprié et les équations de Stokes partout ailleurs. Des travaux visant à permettre de tels couplages ont notamment été publiés par Seroussi *et al.* (2012) et Ahlkrona *et al.* (2016).

En résumé, de nombreux cas d'études peuvent nécessiter de recourir à des approximations des équations de Stokes. Il appartient au modélisateur d'évaluer, au cas par cas, la pertinence du choix de l'approximation et d'avoir une lecture critique des résultats compte-tenu des artefacts que ces approximations peuvent engendrer.

## 3.3 Résolution numérique par éléments finis

La plupart des équations présentées dans les Sections 3.1 et 3.2, que ce soit les équations du modèle *full-Stokes* ou de ses approximations, sont des Équations aux Dérivées Partielles (EDP). Hormis pour des cas extrêmement simplifiés et donc peu réalistes, nous ne connaissons pas de solution analytique à ces équations. Aussi est-il nécessaire de recourir à des méthodes numériques afin d'en obtenir des solutions approchées. Il existe trois grandes familles de méthodes permettant de résoudre numériquement des EDP : les volumes finis, les différences finies et les éléments finis. Seule la Méthode des Éléments Finis (MEF) a été utilisée au cours de cette thèse. En raison des nombreux avantages qu'elle offre, la MEF est très répandue tant dans l'industrie que dans la recherche, et de nombreux ouvrages volumineux lui ont été consacrés (Zienkiewicz *et al.*, 1977, par exemple). La présente section constitue une brève introduction à cette méthode, basée notamment sur le cours de Garrigues (2002). Une illustration concrète de la MEF appliquée à la résolution des

équations de la *SSA* en 1D est donnée en Annexe A.

### 3.3.1 Présentation de la Méthode des Éléments Finis

Dans cette partie, nous restons dans le cas général où l'on cherche à résoudre un système d'EDP défini sur un domaine $\Gamma$ et dont la solution exacte en un point du domaine de coordonnées $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est notée $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ [1]. Dans le cas général, $\mathbf{u}^*$ est un champ vectoriel (champs des vitesses/pression pour les équations de Stokes, par exemple). Cette solution exacte nous étant inaccessible, la MEF consiste à rechercher une solution approchée sous la forme d'un champ $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ défini par morceaux sur $M$ sous-domaines $\Gamma_i$ de $\Gamma$ tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i = \Gamma \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Gamma}_i \cap \tilde{\Gamma}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \tag{3.29}$$

où $\tilde{\Gamma}_i$ désigne l'intérieur de $\Gamma_i$. Le partitionnement du domaine $\Gamma$ en sous-domaines constitue l'opération de maillage : chaque sous-domaine $\Gamma_i$ forme une maille de ce maillage. Un exemple de maillage du bassin d'Amundsen (Antarctique de l'Ouest) est illustré sur la Figure 3.2.

La solution approchée $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ définie sur le domaine $\Gamma$ est obtenue par juxtaposition de champs locaux $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$ définis sur chaque sous-domaine $\Gamma_i$ par :

$$\{\mathbf{u}^e\} = \sum_{j=1}^{m} N_j^e(\mathbf{x}) q_j^e \tag{3.30}$$

où les $q_j^e$ sont les valeurs scalaires que les composantes du vecteur $\mathbf{u}^*$ prennent en un nombre fini de points du domaine, choisis arbitrairement et appelés **nœuds**. Les fonctions $N_j^e$, appelées *fonctions de formes*, permettent d'interpoler le champ local $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$ en tout point du sous-domaine considéré à partir des seules valeurs aux nœuds de ce sous-domaine. Le nombre d'inconnues en chaque nœud est appelé *nombre de degrés de liberté (ddl)*. Par exemple, pour la résolution des équations de Stokes, chaque nœud possède 4 *ddl* : les 3 composantes de la vitesse et la pression. Dans l'égalité (3.30), $m$ est donc égal au produit du nombre de *ddl* par le nombre de nœuds de la maille. Chaque maille du domaine munie de ses *fonctions d'interpolation* $\mathbf{u}^e$ ainsi déterminées constitue un **élément**. Au cours de cette thèse, nous n'avons utilisé que des éléments linéaires, c'est-à-dire des éléments pour lesquels le champ local $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$ est une interpolation linéaire des valeurs nodales $q_j^e$.

L'idée générale de la MEF est donc de transformer le problème continu initial en un problème discret où la solution approchée $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ est entièrement déterminée par les solutions obtenues aux noeuds du maillage. Le choix du découpage du domaine et des fonctions d'interpolation est primordial pour faire en sorte que $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ soit le plus proche possible de $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ en tout point du domaine. L'obtention des solutions nodales $q^e$ requiert, en premier lieu, la reformulation de l'EDP à résoudre sous une nouvelle forme dite *faible* ou encore *variationnelle*.

1. Dans le cas général $\mathbf{u}^*$, qui désigne l'ensemble des champs scalaires solutions de l'EDP, est différent de $\mathbf{u}$, notation utilisée pour le vecteur vitesse dans le reste du manuscrit.

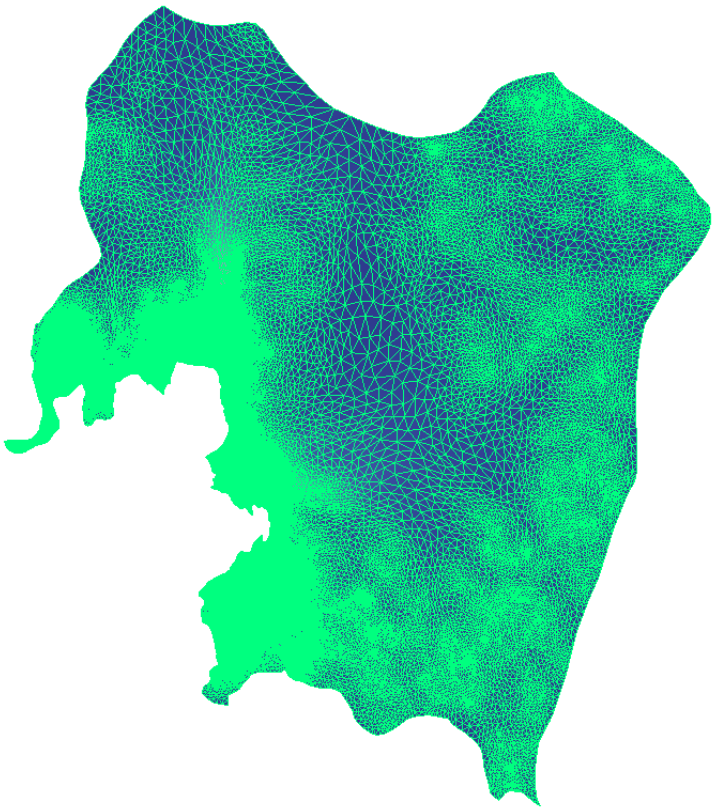

FIGURE 3.2 – Exemple de maillage pour le bassin d'Amundsen (Antarctique de l'Ouest). Les éléments sont triangulaires plans et possèdent chacun trois nœuds.

#### 3.3.1.1 Formulation faible de l'EDP

Exprimé sous sa forme générale, le problème de résolution d'une EDP consiste à chercher une solution $\mathbf{u}^* \in U$ telle que :

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \tag{3.31}$$

où $U$ est l'espace des fonctions satisfaisant aux conditions aux limites imposées sur les frontières du domaine, $\mathcal{D}$ est l'opérateur différentiel correspondant aux équations à résoudre et $\mathbf{f}$ représente les efforts extérieurs, volumiques ou surfaciques, s'exerçant sur le domaine.
Sous certaines conditions que nous supposerons satisfaites, on peut montrer que le problème (3.31) est équivalent à :

$$\int_{\mathbf{x}\in\Gamma} (\mathcal{D}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}))\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\ d\Gamma = 0 \quad \forall\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \tag{3.32}$$

Cette seconde formulation constitue la *formulation faible* du problème et les fonctions $\mathbf{\Phi}$ sont appelées *fonctions tests* ou *fonctions de pondération*. D'autres formulations faibles peuvent être déduites de la formulation (3.32) en utilisant des formules permettant de transformer l'intégrale. La plus simple de ces transformations est l'intégration par partie mais il en existe d'autres lorsque $\mathcal{D}$ contient des opérateurs vectoriels type gradient, divergence, rotationnel, ou autre. L'intérêt de

ces transformations est qu'elles font apparaître des intégrales de bord sur les frontières du domaine $\partial\Gamma$ pour lesquelles les conditions aux limites sont connues. Par ailleurs, cela permet de réduire le degré de dérivation de la solution recherchée en augmentant le degré de dérivation de la fonction $\mathbf{\Phi}$, ce qui simplifie la résolution du problème. Cela est illustré de manière plus concrète par l'exemple proposé dans l'Annexe A.

#### 3.3.1.2 Discrétisation

Avec la condition "$\forall\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$", le problème (3.32) n'a généralement pas de solution, sans quoi $\mathbf{u}^*$ serait une solution exacte et non approchée. L'approximation des éléments finis repose sur le choix judicieux d'un nombre fini de fonctions tests $\mathbf{\Phi}_i$ afin de transformer le problème continu (3.32) en un problème discret consistant à résoudre un système d'équations algébriques. On parle de *discrétisation* du problème.

Les fonctions tests $\mathbf{\Phi}_i$ peuvent être choisies de différentes manière, pourvu qu'elles mènent à un système algébrique dont la solution existe et est unique. La solution approchée $\mathbf{u}^h$ ainsi obtenue différera en fonction de ce choix. La méthode de Galerkin, utilisée dans la majorité des logiciels éléments finis, consiste à prendre les fonctions de formes pour fonctions tests. Ce choix permet de simplifier nettement le calcul en induisant un système d'équations algébriques contenant un grand nombre de termes nuls.

Le système algébrique ainsi obtenu peut s'écrire, pour chaque élément, sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{K}^e\mathbf{q}^e = \mathbf{f}^e \tag{3.33}$$

où $\mathbf{K}^e$ est la matrice de rigidité de l'élément, $\mathbf{q}^e$ est le vecteur contenant toutes les inconnues en tous les nœuds de l'élément et $\mathbf{f}^e$ est le vecteur contenant les efforts volumiques et surfaciques s'appliquant sur l'élément rapportés aux nœuds de cet élément.

#### 3.3.1.3 Assemblage

Comme on peut le voir sur la Figure 3.2, chaque nœud du domaine est partagé par plusieurs éléments. Par ailleurs, les conditions aux limites n'interviennent directement que sur certains éléments frontières mais influent sur la totalité du domaine. Pour ces raisons, on ne peut pas résoudre le système matriciel (3.33) indépendamment pour chaque élément mais il est nécessaire de rassembler toutes les équations locales au sein d'un système global. Cela revient à assembler les matrices élémentaires intervenant dans l'équation (3.33) en matrices globales dont la dimension est donnée par le produit du nombre total de nœuds par le nombre de *ddl*. Le système assemblé s'écrit alors :

$$\mathbf{K}^g\mathbf{q}^g = \mathbf{f}^g \tag{3.34}$$

où les vecteurs $\mathbf{q}^g$ et $\mathbf{f}^g$ (respectivement la matrice $\mathbf{K}^g$) sont les vecteurs globaux (respectivement la matrice globale) obtenus par assemblage des vecteurs élémentaires correspondants (respectivement des matrices élémentaires).

#### 3.3.1.4 Résidu

Le résidu du système (3.34) est défini par :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}^g\mathbf{q}^g - \mathbf{f}^g \tag{3.35}$$

Si $\mathbf{q}^g$ est solution du système assemblé (3.34), alors le résidu est nul pour tous les *ddl* sauf ceux pour lesquels des conditions de Dirichlet ont été prescrites. En effet, le respect de la condition de Dirichlet s'appliquant à un *ddl* implique nécessairement l'existence d'une force de contact au niveau du nœud frontière concerné ; la valeur de cette force de contact est donnée par le résidu associé à ce *ddl*. La notion de résidu est importante dans le cadre de la résolution numérique du problème de contact présenté à la Section 3.1.3.2. Nous reviendrons sur cette problématique dans la première partie du Chapitre 5.

#### 3.3.1.5 Intégration numérique

Par construction, les coefficients de la matrice de rigidité $\mathbf{K}^g$ et du vecteur des efforts $\mathbf{f}^g$ qui interviennent dans le système (3.34) prennent la forme d'intégrales sur les éléments qu'il est nécessaire de calculer. Ces intégrales sont complexes et ne peuvent pas, en général, être calculées de manière analytique. Aussi est-il nécessaire d'avoir recours à une méthode d'intégration numérique. Dans la très grande majorité des cas, les logiciels éléments finis font appel à la *méthode de quadrature de Gauss*. De manière schématique, il s'agit de remplacer l'intégrale analytique sur un domaine $\Gamma$ par une somme pondérée de valeurs prises par l'intégrande en des points particuliers de $\Gamma$ appelés *points de Gauss* ou *points d'intégration*. Ainsi, pour une fonction $\mathbf{h}$ quelconque, on a :

$$\int_\Gamma \mathbf{h}(\mathbf{x})d\Omega = \sum_{j=1}^{n} w_j\mathbf{h}(\mathbf{x}_j) \tag{3.36}$$

où les $x_j$ correspondent aux coordonnées des $n$ points de Gauss du domaine et les $w_j$ sont les coefficients de quadrature (ou poids). La littérature abonde quant aux choix optimaux de ces grandeurs permettant l'intégration la plus précise possible et nous ne nous appesantirons pas sur cet aspect (Zienkiewicz *et al.*, 1977, par exemple). En revanche, il est important de retenir que la résolution des équations d'écoulement nécessite de connaître les valeurs prises par les paramètres du modèle aux niveaux des points de Gauss. Ces valeurs sont généralement interpolées à partir des valeurs connues aux nœuds de chaque élément. Cette caractéristique revêt une importance particulière dans le traitement du frottement à la ligne d'échouage comme nous le verrons au Chapitre 5.

#### 3.3.1.6 Résolution pour un système linéaire

L'obtention des solutions nodales, et donc indirectement de la solution approchée globale, passe par la résolution du système matriciel (3.34). Cette résolution peut se faire de manière directe ou itérative.

Les *méthodes directes* consistent à inverser directement la matrice $\mathbf{K}^g$. Cette inversion peut se faire de différentes façons. Si la matrice n'est pas symétrique, la méthode du pivot de Gauss est la plus employée. Au contraire, pour des matrices $\mathbf{K}^g$ symétriques, la méthode de décomposition de Choleski est généralement adoptée. Les méthodes directes sont adaptées à la résolution de systèmes de taille raisonnable (quelques centaines à quelques milliers d'inconnues).

Pour les systèmes de plus grande taille, on a plutôt recours à des *méthodes itératives*. L'idée est alors de partir d'une solution initiale $\mathbf{q}_0^g$ et de converger vers la solution $\mathbf{q}^g$ par étapes successives appelées *itérations*. Cela est généralement accompli en reformulant le problème (3.34) en un problème d'optimisation. Concrètement, il s'agit de trouver la valeur de $\mathbf{q}^g$ minimisant $||\mathbf{K}^g\mathbf{q}^g - \mathbf{f}^g||$. Le passage d'une itération à l'autre se fait par une *méthode de descente du gradient*. Celle-ci consiste à calculer le gradient de $||\mathbf{K}^g\mathbf{q}_n^g - \mathbf{f}^g||$ et à en déduire $\mathbf{q}_{n+1}^g$ en effectuant un déplacement dans la direction opposée à ce gradient :

$$\mathbf{q}_{n+1}^g = \mathbf{q}_n^g - \alpha_n \text{ grad}\left(||\mathbf{K}^g\mathbf{q}_n^g - \mathbf{f}^g||\right) \tag{3.37}$$

où $\alpha_n$ est un paramètre positif qui caractérise la taille du pas entre l'itération $n$ et l'itération $n+1$. La solution simple consistant à garder le paramètre $\alpha_n$ fixe d'une itération sur l'autre pose souvent problème : une valeur de $\alpha_n$ trop faible induit un grand nombre d'itérations et donc un temps de calcul prohibitif tandis qu'une valeur trop élevée peut entraver la capacité de l'algorithme à converger vers le minimum recherché. Pour cette raison, il est souvent nécessaire d'optimiser la valeur de $\alpha_n$ au fur et à mesure qu'on approche de la solution. Ceci est généralement réalisé via une *méthode de recherche linéaire*. Par ailleurs, toute méthode itérative requiert la définition de critères d'arrêt. Le premier critère d'arrêt correspond à un nombre maximum d'itérations fixé par l'utilisateur que l'algorithme ne doit pas dépasser, quand bien même il n'aurait pas atteint la convergence. Le second critère cherche à évaluer cette convergence en comparant la différence entre deux itérés successifs ; lorsque cette différence devient inférieure à une valeur seuil $\epsilon$ à la discrétion de l'utilisateur, on considère que l'algorithme a convergé vers la solution. Ce critère d'arrêt peut donc s'écrire :

$$|\mathbf{q}_{n+1}^g - \mathbf{q}_n^g| < \epsilon \tag{3.38}$$

Enfin, dans le cas de la méthode de descente du gradient, on peut décider de stopper l'algorithme lorsque le gradient de la fonction à minimiser est suffisamment proche de zéro.

#### 3.3.1.7 Linéarisation des systèmes non-linéaires

Pour le problème qui nous préoccupe, à savoir la détermination d'une solution approchée aux équations de Stokes ou à ses approximations, une complication supplémentaire survient du fait de la dépendance de la viscosité aux vitesses de déformation. Celle-ci se traduit par une non-linéarité du système matriciel (3.34) qui peut s'écrire :

$$\mathbf{K}^g(\mathbf{q}^g)\mathbf{q}^g = \mathbf{f}^g \tag{3.39}$$

Ce système doit alors être linéarisé par l'intermédiaire de méthodes itératives. Les deux méthodes de linéarisation implémentées au sein du logiciel *Elmer/Ice* (cf Section 3.3.2) sont celles de *Picard* et de *Newton*.

**Méthode de Picard**

La méthode de Picard est également appelée algorithme du point fixe. Comme pour toute méthode itérative, il faut commencer par se donner une solution initiale $\mathbf{q}_0^g$. Puis à chaque itération, on calcul la nouvelle solution $\mathbf{q}_{n+1}^g$ en s'affranchissant de la dépendance de $\mathbf{K}^g$ à $\mathbf{q}_{n+1}^g$, la matrice de rigidité étant calculée à partir de la solution obtenue à l'itération précédente. La résolution du problème non-linéaire (3.39) se ramène ainsi à la résolution d'une suite de problèmes linéaires pouvant s'écrire :

$$\mathbf{K}^g(\mathbf{q}_n^g)\mathbf{q}_{n+1}^g = \mathbf{f}^g \tag{3.40}$$

L'algorithme prend fin lorsqu'un critère d'arrêt portant sur le nombre d'itérations ou du type (3.38) est satisfait.

**Méthode de Newton**

La méthode de Newton appartient à la même famille de méthodes numériques que celle de descente du gradient. Il est très classique de l'employer pour trouver, de manière approchée, les racines d'une fonction non linéaire. Aussi est-il nécessaire de réécrire le système (3.39) de la manière suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}^g) = \mathbf{K}^g(\mathbf{q}^g)\mathbf{q}^g - \mathbf{f}^g = 0 \tag{3.41}$$

Nous avons à nouveau affaire à une méthode itérative dont le principe peut se résumer ainsi : à chaque itération, la fonction $\mathbf{G}$ est linéarisée en $\mathbf{q}_n^g$ et $\mathbf{q}_{n+1}^g$ est pris égal au zéro de la fonction linéarisée. Il s'agit donc de trouver, à chaque itération, $\mathbf{q}_{n+1}^g$ tel que :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_n^g)(\mathbf{q}_{n+1}^g - \mathbf{q}_n^g) + \mathbf{G}(\mathbf{q}_n^g) = 0 \tag{3.42}$$

où $\mathbf{J}$ est le jacobien de $\mathbf{G}$. On est alors ramené à la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_n^g)\delta\mathbf{q}_{n+1}^g = -\mathbf{G}(\mathbf{q}_n^g) \tag{3.43}$$

avec $\delta\mathbf{q}^g_{n+1} = \mathbf{q}^g_{n+1} - \mathbf{q}^g_n$. Le système (3.43) est similaire au système linéaire (3.34) et peut donc être résolu de la même manière. Les critères d'arrêt de la méthode de Newton sont similaires à ceux décrits précédemment pour la méthode de descente du gradient.

La méthode de Newton est caractérisée par une *convergence quadratique* tandis la méthode de Picard affiche une *convergence linéaire*. En d'autres termes, la première est nettement plus rapide que la seconde. Néanmoins, la méthode de Newton a le gros défaut de nécessiter la prescription d'une valeur initiale $\mathbf{q}^g_0$ suffisamment proche de la solution recherchée pour converger. On contourne cette difficulté en débutant l'étape de linéarisation par quelques itérations de Picard avant de basculer sur des itérations de Newton lorsque le dernier itéré de Picard est suffisamment proche de la solution cherchée.

### 3.3.2 Présentation du modèle Elmer/Ice

L'intégralité des travaux menés au cours de cette thèse ont fait appel au logiciel éléments finis **Elmer/Ice**. Ce logiciel, dont la vocation principale est de résoudre les problèmes d'écoulement en glaciologie, est une extension du code multi-physique Elmer. Elmer est un logiciel libre, développé par l'entreprise finlandaise *Center for Scientific Computing (CSC)*, qui intègre de nombreux modules permettant de résoudre des problèmes physiques très divers.

*Elmer/Ice* a été un modèle pionnier dans la résolution des équations de Stokes. A ce titre, *Elmer/Ice* a pris part à de nombreuses études d'intercomparaison de modèles (Gagliardini et Zwinger, 2008; Pattyn *et al.*, 2008, 2012, 2013; Pattyn et Durand, 2013; Drouet *et al.*, 2013) et a servi de base de comparaison pour le modèle *full-Stokes* FELIX-S récemment développé (Zhang *et al.*, 2017). Le module *full-Stokes* d'*Elmer/Ice* propose un traitement rigoureux du problème de contact à la ligne d'échouage dont il a été question à la Section 3.1.3.2 (Durand *et al.*, 2009b), ce qui en fait un modèle de premier plan dans les études ayant trait à la migration de la ligne d'échouage (Gagliardini *et al.*, 2010; Gudmundsson *et al.*, 2012; Favier *et al.*, 2012, 2014, par exemple). Par ailleurs, *Elmer/Ice* peut aussi résoudre les équations de la *SIA* et de la *SSA*.

*Elmer/Ice* est équipé d'un module dédié à la modélisation de l'endommagement, compatible avec les modules *full-Stokes* et *SSA* (cf Chapitre 4). Certains aspects de la mécanique de la rupture linéaire élastique sont également intégrés au logiciel et, combinés à l'endommagement, permettent de représenter le vêlage d'iceberg pour des géométries 2D le long d'une ligne d'écoulement (Krug *et al.*, 2014, 2015). En outre, *Elmer/Ice* possède plusieurs modules d'hydrologie sous-glaciaire permettant un couplage avec l'écoulement par le biais de la pression effective (De Fleurian, 2010).

Enfin, *Elmer/Ice* est capable de résoudre les problèmes inverses comme il en sera question au Chapitre 6. Deux méthodes ont été codées à cette fin : la méthode de Robin associée au modèle

direct *full-Stokes* et la méthode adjointe associée aux modèles directs *full-Stokes* et *SSA* (Gillet-Chaulet *et al.*, 2012). La méthode de relaxation Newtonienne ou "nudging", relevant plutôt de l'assimilation de donnée, a également été intégrée à *Elmer/Ice* récemment (Mosbeux *et al.*, 2016). Ces développements ont permis de mener de nombreuses études faisant appel à la résolution de problèmes inverses (Schäfer *et al.*, 2013; Gong *et al.*, 2016; Gillet-Chaulet *et al.*, 2016; Fürst *et al.*, 2016, par exemple).

Pour une description plus complète des capacités d'*Elmer/Ice*, le lecteur est invité à se référer à la publication de Gagliardini *et al.* (2013). Notons néanmoins que les développements les plus récents sont absents de cette publication, notamment ceux réalisés au cours de cette thèse. Ceux-ci ont consisté à (1) adapter l'endommagement, jusqu'alors compatible avec les modules *full-Stokes* du logiciel, au cadre de la *SSA*, (2) développer un module permettant de tenir compte de l'effet des crevasses basales sur la formation d'endommagement, et (3) implémenter la loi de frottement de Tsai (2.22).

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'aborder les différents aspects ayant trait à la modélisation des écoulements glaciaires. La finalité d'un modèle est d'établir une représentation simplifiée de la réalité dont on puisse extraire des prévisions qui soient compatibles avec les observations. Cela passe en premier lieu par l'édification d'un modèle physique ; il s'agit de dériver, à partir des grands principes de la physique, les lois mathématiques caractérisant les processus à l'œuvre. Une fois le modèle physique établit, il est nécessaire de lui adjoindre un modèle numérique permettant de résoudre les équations mises en jeu par le premier et d'obtenir des informations et prédictions exploitables par le modélisateur.

La formulation mathématique la plus complète décrivant les écoulements glaciaires se compose des équations de Stokes auxquelles s'ajoutent les équations d'évolution des surfaces libres. Les modèles résolvant l'ensemble de ces équations sont qualifiés de *full-Stokes*. Un modèle physique n'est utile que si l'on parvient à résoudre, au moins de manière approximative, les équations qu'il regroupe. Or les équations de Stokes sont très lourdes à résoudre et nécessitent des temps de calcul importants pouvant s'avérer prohibitifs pour certaines applications. Heureusement, certaines caractéristiques des calottes permettent de faire des hypothèses sur différentes quantités intervenant dans le modèle *full-Stokes* et d'aboutir ainsi à des versions asymptotiques de ce modèle. En les classant par ordre décroissant de complexité, les modèles d'ordre intermédiaire, *SSA* puis *SIA* réunissent des équations nettement moins coûteuses à résoudre d'un point de vue numérique. Cependant, il y a des régions où certaines hypothèses ne sont pas appropriées et il appartient au modélisateur de faire preuve de discernement quant aux choix des approximations et à l'analyse des résultats.

La résolution des équations intervenant dans les différentes catégories de modèle se fait à l'aide de l'outil informatique. Il existe plusieurs méthodes numériques permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles. Au cours de cette thèse, nous avons exploité le logiciel *Elmer/Ice*, basé sur la méthode des éléments finis. Bien que succincte, la description de la MEF proposée dans ce chapitre est essentielle car elle permet de mieux cerner certains aspects numériques et certaines difficultés auxquels nous avons été confrontés au cours de cette thèse. Cela concerne notamment le transport de l'endommagement et l'interpolation du frottement à la ligne d'échouage. Ces thématiques seront abordées, respectivement, aux Chapitres 4 et 5.

Chapitre 4

# Influence de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage

## Sommaire


**4.1 Loi d'évolution de l'endommagement . . . . . 84**
4.1.1 Equation d'advection et critère d'endommagement . . . . . 84
4.1.2 Prise en compte des crevasses basales . . . . . 87
4.1.3 Implémentation dans le cadre de la SSA . . . . . 88
**4.2 Résolution numérique de l'équation d'advection . . . . . 89**
4.2.1 Instabilité numérique des équations d'advection-diffusion . . . . . 90
4.2.2 Comparaison de l'efficacité des méthodes de stabilisation . . . . . 94
4.2.3 Méthodes de stabilisation et dynamique de la ligne d'échouage . . . . . 108
**4.3 Conclusion . . . . . 118**


Au cours du Chapitre 2, nous avons montré de manière qualitative que l'endommagement de la glace a un impact sur la dynamique glaciaire et, par ce biais, sur la dynamique de la ligne d'échouage qui elle-même régit en partie la contribution dynamique des calottes à l'augmentation du niveau des mers. La quantification de cet impact passe nécessairement par la représentation de ce processus au sein des modèles d'écoulement.

Au Chapitre 3, nous avons présenté ces modèles et insisté sur leur dualité physique-numérique. La modélisation de l'endommagement n'échappe pas à la règle : elle nécessite en premier lieu la formulation de lois mathématiques qui doivent ensuite être implémentées au sein du modèle numérique afin d'obtenir des informations exploitables.

Dans le présent chapitre nous abordons ces deux aspects. Tout d'abord, nous décrivons la loi d'évolution de l'endommagement dont la nécessité a été mentionnée au Chapitre 2 sans que nous en ayons donné la formulation mathématique. Cette loi, qui caractérise la création de l'endommagement et son transport avec l'écoulement, a été implémentée au sein du module *full-Stokes* d'*Elmer/Ice* par Krug (2014). Une des tâches effectuées au cours de cette thèse a été de rendre l'endommagement compatible avec le modèle *SSA* ainsi que d'intégrer l'effet d'éventuelles crevasses basales sur la formation de celui-ci.

La seconde partie est consacrée à la résolution numérique de l'équation d'advection associée à la loi d'évolution de l'endommagement. Si on considère un écoulement incompressible ($\div \mathbf{u} = 0$) et qu'on note $D$ la quantité advectée (ce peut être l'endommagement ou tout autre quantité scalaire

ou vectorielle), alors cette équation peut s'écrire sous la forme générale :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u}.\mathrm{grad}D = s \tag{4.1}$$

où $\mathbf{u}.\mathrm{grad}D$ est le terme d'advection et $s$ est le terme source ($s > 0$) ou puit ($s < 0$). Dans un premier temps, nous évoquons l'instabilité numérique spécifique à ce type d'équation et décrivons succinctement différentes méthodes habituellement employées pour contourner cette difficulté. Suite à cela, nous construisons des cas d'étude simplifiés afin d'évaluer l'efficacité des diverses méthodes de stabilisation en fonction des résolutions temporelle et spatiale adoptées. Enfin, nous appliquons notre modèle d'endommagement dans sa version *SSA* à une calotte synthétique 2D le long d'une ligne d'écoulement et constatons une importante sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la méthode de stabilisation employée.

## 4.1 Loi d'évolution de l'endommagement

Nous présentons ici l'équation d'advection et le critère d'endommagement qui, combinés, régissent la création et le transport de l'endommagement. Nous expliquons ensuite comment la présence de crevasses basales favorise la création d'endommagement supplémentaire. Enfin nous mettons en évidence les légers ajustements nécessaires pour implémenter cette loi au sein d'*Elmer/Ice* dans le cadre de la *SSA*.

### 4.1.1 Equation d'advection et critère d'endommagement

Au cours de la Section 2.2.2, nous avons évoqué la nécessité d'associer à la variable d'endommagement $D$ une loi d'évolution afin de modéliser sa création et son transport avec l'écoulement de la glace. Rappelons que des phénomènes de cicatrisation conduisant à une dissipation locale de l'endommagement ont été mis en évidence, principalement au niveau de plateformes glaciaires dont les fractures se comblent de glace de mer qui restaure l'intégrité des propriétés mécaniques de la glace (Khazendar et Jenkins, 2003; Glasser *et al.*, 2009; Holland *et al.*, 2009, par exemple). Par ailleurs, plusieurs auteurs ont tenté d'incorporer à leur modèle d'endommagement un mécanisme de cicatrisation simplifié voué à représenter la fermeture des fractures sous l'effet de la pression cryostatique (Pralong *et al.*, 2003; Pralong et Funk, 2005; Albrecht et Levermann, 2012, 2014, par exemple). Néanmoins, du fait de la complexité et de la mauvaise compréhension de ces différents phénomènes, les processus de cicatrisation sont omis de la plupart des modèles d'endommagement actuels et notamment du nôtre.

La loi d'évolution de l'endommagement est une équation d'advection du type (4.1). Nous la

réécrivons ici afin d'expliciter le terme source $s$ :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{u}.\mathrm{grad}D = \begin{cases} f(\chi) & \text{si } f(\chi) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.2}$$

où le terme de droite est le terme source d'endommagement. Ce terme source doit être formulé de manière à (1) permettre de distinguer les zones dans lesquelles l'état contrainte est tel que l'endommagement doit augmenter et (2) permettre d'ajuster la quantité d'endommagement créée dans ces zones. C'est la raison pour laquelle nous explicitons le terme source sous la forme :

$$f(\chi) = B\chi \tag{4.3}$$

où $\chi$ est appelé *critère d'endommagement* et permet de répondre à la première exigence tandis que $B$ est un paramètre d'amplification positif, mentionné à la Section 2.2.2.3 et destiné à satisfaire la seconde exigence.

Le choix du critère d'endommagement est une étape critique dans la construction du modèle et, là encore, il n'existe pas de réel consensus quant à sa formulation. En fait, les glaciologues étendent à l'endommagement de la glace une variété de critères généralement développés pour d'autres applications. Dans tous les cas, il s'agit de caractériser l'état de contrainte du domaine à partir d'une contrainte équivalente, calculée différemment selon le critère retenu, qui sera comparée à une contrainte seuil spécifique au domaine étudié et au delà de laquelle celui-ci s'endommage. Parmi les critères utilisés en glaciologie, nous citerons les critères de Tresca (Albrecht et Levermann, 2014, par exemple), de Coulomb (Vaughan, 1993, par exemple), de von Mises (Vaughan, 1993; Albrecht et Levermann, 2012, 2014, par exemple) et de Hayhurst (Pralong et Funk, 2005; Duddu et Waisman, 2012, 2013, par exemple).

Le modèle d'endommagement implémenté au sein d'*Elmer/Ice* par Krug (2014) repose sur un critère simple selon lequel l'endommagement survient lorsque la contrainte principale maximale de Cauchy $\sigma_I$ est supérieure à une valeur seuil $\sigma_{th}$. Ce critère s'appuie notamment sur les travaux de Rist *et al.* (1999) qui ont montré, en combinant théorie et expériences, que les crevasses tendent à s'ouvrir dans un plan normal à la direction de la contrainte extensive maximale. La formulation mathématique de ce critère est la suivante :

$$\chi = \max\left[0, \frac{\sigma_I}{1-D} - \sigma_{th}\right] \tag{4.4}$$

L'enveloppe d'endommagement correspondant au critère (4.4) est représentée dans l'espace des contraintes principales sur la Figure 4.1 : il apparaît clairement que le critère retenu n'est pas fermé et suppose donc une résistance infinie de la glace en compression pure, ce qui est sans doute peu réaliste. Néanmoins, cette limitation ne semble pas critique dans le cadre de la modélisation des écoulements glaciaires compte-tenu des travaux de Rist *et al.* (1999) évoqués ci-dessus.

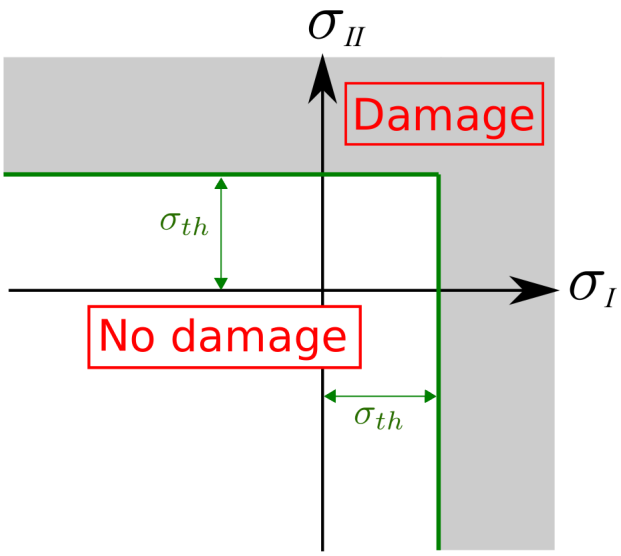


FIGURE 4.1 – Enveloppe d'endommagement dans l'espace des contraintes principales. $\sigma_I$ et $\sigma_{II}$ représentent, respectivement, la première et la seconde contrainte principale de Cauchy tandis que $\sigma_{th}$ représente la contrainte seuil. La surface grisée correspond aux états de contrainte associés à une formation locale d'endommagement. Figure issue de Krug *et al.* (2014).

Aussitôt que $\chi$ est supérieur à zéro la glace s'endommage, ce qui induit un relâchement local des contraintes (diminution de $\sigma_I$ et stagnation de la contrainte effective $\sigma_I/(1-D)$). Ce mécanisme se déroulant en continu, l'extrémité du vecteur contrainte, pris au point considéré selon la direction principale associée à $\sigma_I$, reste théoriquement confinée au sein de la zone délimitée par l'enveloppe d'endommagement (la zone blanche sur la Figure 4.1). Cependant, comme les modèles numériques discrétisent le temps via l'usage de pas de temps, il se peut que ce vecteur contrainte atteigne momentanément la "zone endommagée" (zone grisée sur la Figure 4.1). Il faut alors créer un niveau d'endommagement suffisant pour faire en sorte que l'extrémité de ce vecteur soit ramenée exactement sur l'enveloppe d'endommagement (en vert sur la Figure 4.1). C'est cet objectif qui doit motiver le choix de la valeur locale pour le paramètre d'amplification $B$. Néanmoins, l'état de contrainte variant spatialement et temporellement, cette valeur est compliquée à fixer et est le plus souvent ajustée de manière empirique (Krug *et al.*, 2014; Albrecht et Levermann, 2014, par exemple).

Compte-tenu de ce qui précède, le choix de la valeur du paramètre $B$ est indissociable de celui de la contrainte seuil $\sigma_{th}$. Dans notre cas, $\sigma_{th}$ quantifie la résistance de la glace à la formation d'endommagement sous contrainte extensive uniquement. D'autres critères d'endommagement sont susceptibles de faire intervenir d'autres types de contraintes, aussi la valeur de $\sigma_{th}$ doit-elle être adaptée au critère d'endommagement retenu. Par exemple, en considérant l'état de contrainte de la plateforme flottante du Larsen C (péninsule Antarctique), Albrecht et Levermann (2014)

remarquent que les contraintes équivalentes calculées selon le critère de Tresca sont supérieures d'environ 15% à celles obtenues avec le critère de von Mises ; en stipulant une contrainte seuil de 80 kPa pour le critère de Tresca et de 70 kPa pour le critère de von Mises, la formation d'endommagement est initiée dans les mêmes zones de la plateforme pour les deux critères. Par ailleurs, la valeur de $\sigma_{th}$ dépend également fortement de la température de la glace, de la taille des grains, du taux de déformation et de la taille du domaine soumis au chargement (Pralong et Funk, 2005). En synthétisant les mesures de taux de déformation réalisées par différents auteurs au cours de 17 campagnes menées tant sur des glaciers polaires que sur des glaciers de montagne, Vaughan (1993) montre que les contraintes extensives associées à la présence de crevasses ont des valeurs comprises entre 90 et 320 kPa. En pratique, il est judicieux d'introduire un bruit aléatoire $\delta\sigma_{th}$ sur la valeur de $\sigma_{th}$ afin de tenir compte de son hétérogénéité. On a alors :

$$\sigma_{th} = \overline{\sigma_{th}} \pm \delta\sigma_{th} \tag{4.5}$$

où $\overline{\sigma_{th}}$ est la contrainte seuil moyenne. Krug *et al.* (2014) suggèrent l'utilisation d'une loi normale pour la distribution de $\delta\sigma_{th}/\overline{\sigma_{th}}$ avec un écart-type de 0.05 et en imposant la condition $\sigma_{th} > 0$.

### 4.1.2 Prise en compte des crevasses basales

La présence de crevasses basales sous les plateformes flottantes d'Antarctique a été mise en évidence il y a déjà plusieurs décennies (Swithinbank, 1977; Jezek *et al.*, 1979; Orheim, 1982; Jezek et Bentley, 1983, par exemple). Plus récemment, des mesures effectuées sur le glacier posé Bench (Alaska) par Harper *et al.* (2010) révèlent l'existence de crevasses basales qui interagissent avec le réseau hydraulique sous-glaciaire et stockent de larges volumes d'eau. D'après Van der Veen (1998), une crevasse basale ne peut se développer que si la glace est suffisamment proche de la flottaison afin d'autoriser des contraintes extensives suffisamment intenses pour permettre l'initiation de fractures. De ce point de vue, la zone située directement en aval de la ligne d'échouage est particulièrement propice à l'initiation de crevasses basales (Van der Veen, 1998; Luckman *et al.*, 2012). Une fois la fracture initiée, celle-ci se remplit d'eau de mer dont la pression hydrostatique vient s'additionner aux contraintes extensives liées à l'écoulement pour contrer la pression cryostatique qui tend à refermer la crevasse. Ce mécanisme permet une rapide propagation des crevasses basales vers le haut. McGrath *et al.* (2012) ont ainsi détecté sous le Larsen C des crevasses basales pénétrant de $\sim$ 130 m dans la glace, ce qui représente $\sim$ 40 % de l'épaisseur totale de la plateforme à ces endroits. Compte-tenu de l'apparente abondance des crevasses basales, tout au moins sous les plateformes flottantes d'Antarctique (Shabtaie et Bentley, 1982), il semble opportun de les intégrer au modèle d'endommagement, ce qui n'était pas le cas dans *Elmer/Ice* jusqu'à cette thèse.

Comme le critère d'endommagement (4.4) ne subordonne la création d'endommagement qu'à la présence de contraintes principales extensives suffisamment intenses, il suffit de modifier celui-ci

afin d'ajouter l'effet local de la pression hydrostatique de l'eau lorsque celle-ci parvient à s'infiltrer dans des fractures pré-existantes. Ce nouveau critère peut donc s'écrire :

$$\chi_{cb} = \max\left[0, \frac{\sigma_I + p_{cb}}{1 - D} - \sigma_{th}\right] \tag{4.6}$$

où $p_{cb}$ représente la pression hydrostatique de l'eau au sein des crevasses basales, donnée par :

$$\begin{cases} p_{cb} = \rho_w g(z_{sl} - z) & \text{si } D > D_{cb} \\ p_{cb} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.7}$$

Le paramètre $D_{cb}$ est une valeur d'endommagement critique au dessus de laquelle on considère que des crevasses basales initiales de taille non négligeable existent et se remplissent d'eau de mer. Ce paramètre est inspiré du paramètre d'endommagement critique $D_c$ utilisé par Krug *et al.* (2014) pour le modèle de vêlage implémenté dans *Elmer/Ice* et auquel nous avons déjà fait référence (cf Section 2.2.2.3). L'attribution d'une valeur à $D_{cb}$ requiert là encore un ajustement empirique afin de s'assurer que l'endommagement basal est créé dans des zones appropriées. Des essais préliminaires menés, en *full-Stokes*, avec les paramètres $B = 0.9$ MPa$^{-1}$, $\overline{\sigma_{th}} = 180$ kPa, $\delta\sigma_{th} = 0.05$ - dont les valeurs ont été choisies de manière empirique dans les intervalles de valeurs acceptables tels que décrit par Krug *et al.* (2014) - et en imposant $D_{cb} = 0.1$ ont permis de s'assurer que de l'endommagement était bel et bien créé au sein d'une étroite région située immédiatement en aval de la ligne d'échouage et transporté avec l'écoulement jusqu'au front de vêlage. Malheureusement, les difficultés numériques rencontrées pour modéliser ce transport dont nous parlons à la Section 4.2 ne nous ont pas permis d'aller plus avant dans l'exploitation de ce modèle.

### 4.1.3 Implémentation dans le cadre de la SSA

L'implémentation du modèle d'endommagement au sein d'*Elmer/Ice* par Krug (2014) a été réalisée dans le cadre *full-Stokes* et de légères adaptations sont nécessaires pour qu'il puisse fonctionner en *SSA*. En effet, comme nous l'avons vu à la Section 3.2.2, le modèle *SSA* est intégré verticalement et, à l'origine, seules les deux composantes horizontales $u$ et $v$ du vecteur vitesse étaient calculées. Or, d'après ce qui précède, le modèle d'endommagement requiert le calcul des contraintes principales de Cauchy, ce qui nécessite de connaître toutes les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et donc du champ de vitesse. En effet, en vertu des hypothèses que fait la *SSA* sur les importances relatives des dérivées spatiales des composantes de la vitesse (cf Section 3.2.2) et compte tenu de la relation $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} - p\mathbf{I}$, où le tenseur des contraintes déviatoires $\mathbf{S}$

est relié au tenseur des taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ via la loi de Glen (2.1), on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} - p\mathbf{I} \tag{4.8}$$

Un module avait été développé préalablement à cette thèse afin de déduire le terme $\partial w/\partial z$ sur l'intégralité du domaine à partir des solutions $u$ et $v$ en exploitant le principe de conservation de la masse (3.7). Par ailleurs, comme la *SSA* repose sur l'approximation hydrostatique (3.23), la pression isotrope $p$ est donnée par la relation :

$$p = \rho_i g(z_s - z) + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.9}$$

Ainsi, la coordonnée verticale $z$ intervient dans le calcul des contraintes principales via le terme de pression isotrope $p$. Ce terme a un rôle essentiel puisqu'il interdit la création d'endommagement au-delà d'une certaine profondeur (qui dépend de la valeur attribuée à $\sigma_{th}$) à partir de laquelle la pression est trop importante pour permettre l'ouverture de nouvelles fractures. Par ailleurs, d'après la loi d'évolution (4.2), l'endommagement créé en surface peut potentiellement être advecté dans toutes les directions de l'espace donc le champ d'endommagement qui en résulte est *a priori* fonction de $z$. En outre, l'endommagement affectant la viscosité de la glace selon les équations (2.3) et (2.9), celle-ci sera à son tour dépendante de $z$. En résumé, il convient de retenir que l'endommagement est un champ scalaire fonction des trois coordonnées de l'espace même lorsqu'il est utilisé dans le cadre de la *SSA* qui ne fait intervenir que les coordonnées horizontales.

Notre tâche a donc été de s'appuyer sur ces diverses expressions afin de développer un module permettant de calculer les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy telles qu'exprimées dans la relation (4.8). Une fois ces composantes connues, il est aisé d'obtenir les contraintes principales requises pour l'évaluation du critère d'endommagement (4.4) en exploitant des fonctions, déjà intégrées à *Elmer/Ice*, permettant d'avoir accès aux valeurs propres de matrices diagonalisables.

## 4.2 Résolution numérique de l'équation d'advection

Dans cette section, nous mettons en évidence, à partir d'un cas simplifié, les problèmes d'instabilités numériques associés à la résolution des équations d'advection-diffusion lorsque la diffusion est faible devant l'advection. Dans un second temps, nous recensons, sans entrer dans les détails des mathématiques sous-jacentes, quatre méthodes implémentées au sein d'*Elmer/Ice* visant à contourner ces difficultés puis à l'aide de deux protocoles expérimentaux simplifiés nous comparons l'efficacité de ces méthodes pour différentes discrétisations spatiales et temporelles. Enfin, nous montrons

sur un cas 2D le long d'une ligne d'écoulement que, pour des résolutions permettant des temps de calcul acceptables, la dynamique de la ligne d'échouage est très sensible à la méthode de stabilisation employée.

### 4.2.1 Instabilité numérique des équations d'advection-diffusion

#### 4.2.1.1 Mise en évidence des instabilités sur un cas simplifié

L'équation d'advection (4.1), parfois également appelée équation de transport, est une forme particulière de l'équation d'advection-diffusion correspondant au cas où le terme de diffusion est nul ou négligeable devant le terme d'advection. Lorsqu'on emploie la méthode des éléments finis telle que présentée à la Section 3.3.1 afin de résoudre une équation d'advection, des instabilités apparaissent. Pour mettre en évidence ces instabilités [1], nous considérons un problème monodimensionnel d'advection-diffusion d'une quantité scalaire quelconque que nous noterons $A$. Nous supposons que l'écoulement se fait dans la direction $x$ à la vitesse uniforme $u$. Le domaine est compris entre les limites $x = 0$ et $x = 1$ où s'appliquent les conditions de Dirichlet $A(x = 0) = 0$ et $A(x = 1) = 1$. En régime stationnaire, la quantité scalaire $A(x)$ est solution de l'EDP donnée par :

$$u\frac{dA}{dx} - \alpha\frac{d^2A}{dx^2} = 0 \tag{4.10}$$

Le premier terme de l'équation (4.10) représente l'advection tandis que le second représente la diffusion et $\alpha$ est un coefficient caractérisant cette diffusion. Ce problème possède la solution analytique suivante :

$$A(x) = \frac{1 - e^{\frac{u}{\alpha}x}}{1 - e^{\frac{u}{\alpha}}} \tag{4.11}$$

Le problème continu (4.10) peut se reformuler sous sa forme faible. Il s'agit de trouver $A(x)$ tel que $A(x = 0) = 0$, $A(x = 1) = 1$ et pour tout $\Phi$ cinématiquement admissible :

$$\alpha\int_0^1 \frac{d\Phi}{dx}\frac{dA}{dx}dx + u\int_0^1 \Phi\frac{dA}{dx}dx = 0 \tag{4.12}$$

où une intégration par partie a été réalisée sur le terme de diffusion.

Considérons alors un maillage du domaine obtenu par un découpage régulier du segment $[0, 1]$ en $n$ éléments de longueur $h$. Chaque élément $\Gamma_e = [x_e, x_{e+1}]$ (avec $e = 1, ..., n$) est muni de deux fonctions de forme linéaires $N_1^e = (x_{e+1} - x)/h$ et $N_2^e = (x - x_e)/h$. Conformément à la méthode de Galerkin (cf Section 3.3.1), les fonctions tests $\Phi_i$ sont prises égales aux fonctions de forme et les coefficients de la matrice de rigidité élémentaire $k_{ij}^e$ sont donnés par :

$$k_{ij}^e = \alpha\int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx}dx + u\int_{x_e}^{x_{e+1}} N_i^e\frac{dN_j^e}{dx}dx \tag{4.13}$$

1. Cette démonstration s'appuie en grande partie sur le cours de Drapier et Fortunier (2015)

tandis que les coefficients du vecteur force élémentaire sont donnés par :

$$f_i^e = 0 \tag{4.14}$$

Il est facile de calculer analytiquement les coefficients (4.13) et d'en déduire, pour chaque élément, la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{K}^e = \frac{\alpha}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{u}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

A partir de là, l'assemblage de la matrice de rigidité globale est trivial :

$$\mathbf{K}^g = \frac{\alpha}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{u}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

tandis que le vecteur force global est nul :

$$\mathbf{F}^g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

Du système matriciel global $\mathbf{K}^g\mathbf{q}^g = \mathbf{F}^g$ (où $\mathbf{q}^g$ est le vecteur contenant les valeurs nodales $A_i$ du champ recherché), on peut déduire l'équation algébrique à résoudre en chaque nœud $i$ tel que $2 \leq i \leq n$ :

$$\forall i = 2, ..., n, \quad \frac{\alpha}{h}(-A_{i-1} + 2A_i - A_{i+1}) + \frac{u}{2}(-A_{i-1} + A_{i+1}) = 0 \tag{4.18}$$

En réarrangeant l'équation (4.18), on montre que :

$$A_{i+1} - A_i = \gamma(A_i - A_{i-1}) = ... = \gamma^{i-1}(A_2 - A_1) \quad \text{avec}\, \gamma = \frac{1 + \frac{uh}{2\alpha}}{1 - \frac{uh}{2\alpha}} \tag{4.19}$$

En partant du nœud $n+1$ et en résolvant l'équation (4.19) de proche en proche jusqu'au nœud 2 on peut déduire, en tenant compte de la condition aux limites $A_{n+1} = A(x = 1) = 1$, la valeur de $A_2$. De là, il suffit d'exploiter la condition aux limites $A_1 = A(x = 0) = 0$, pour obtenir, en chaque nœud $i$, l'expression de la valeur nodale $A_i$ du champ recherché :

$$\forall i = 1, ..., n+1, \qquad A_i = \frac{1 - \gamma^{i-1}}{1 - \gamma^n} \quad \text{avec}\, \gamma = \frac{1 + \frac{uh}{2\alpha}}{1 - \frac{uh}{2\alpha}} \tag{4.20}$$

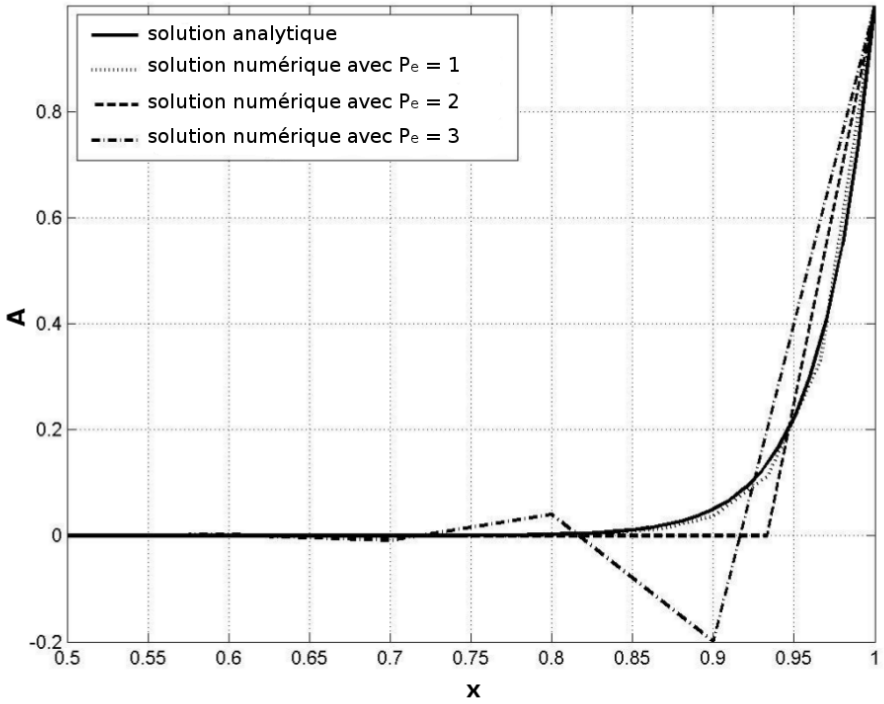


FIGURE 4.2 – Comparaison des solutions numériques (4.11) de l'équation d'advection (4.10) obtenues pour différents nombres de Péclet : $Pe = 1$ (pointillé), $Pe = 2$ (trait interrompu), $Pe = 3$ (trait mixte). La solution analytique (4.11) est représentée en trait continu. Figure adaptée du cours de Drapier et Fortunier (2015).

La solution du problème d'advection-diffusion (4.10) fait donc intervenir le nombre de Péclet $Pe$ relatif à un élément, défini par :

$$Pe = \frac{uh}{\alpha} \tag{4.21}$$

Le nombre de Péclet quantifie l'importance relative des phénomènes d'advection et de diffusion. Pour une équation d'advection pure, la diffusion est négligeable ($\alpha \to 0$) et le nombre de Péclet tend vers l'infini. Or, comme le montre la Figure 4.2, la solution numérique (4.21) se met à osciller autour de la solution analytique (4.11) dès lors que le nombre de Péclet devient supérieur à 2. Ce comportement, décrit ici dans un cas extrêmement simplifié, se retrouve également dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel avec une vitesse fonction de l'espace. Il devient alors nécessaire de mettre en œuvre des méthodes numériques permettant de stabiliser ces équations.

#### 4.2.1.2 Méthodes de stabilisation

Les équations d'advection-diffusion concernées par les problèmes d'instabilité dont il a été question dans la partie précédente se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique. Le développement rapide des méthodes numériques de résolution des EDP au cours de la seconde

moitié du 20e siècle a amené les mathématiciens à proposer des méthodes permettant d'améliorer la stabilité des solutions numériques. Ici, nous recensons, sans décrire les mathématiques souvent complexes qui se cachent derrière, trois méthodes de stabilisation implémentées au sein d'*Elmer/Ice* auxquelles s'ajoute une quatrième méthode visant à s'affranchir du terme responsable de l'instabilité. Le lecteur désirant plus de détails sur les méthodes de stabilisation est invité à consulter l'ouvrage de Kuzmin (2010).

### Méthode Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)

La méthode *Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)* est sans doute la plus classique des méthodes de stabilisation utilisées en éléments finis (Donea, 1984; Hughes, 1987, par exemple). Elle consiste en une adaptation de la technique *Streamline Upwind* - dérivée de la méthode des différences finies - à la méthode des éléments finis. Lorsqu'on résout l'équation d'advection-diffusion (4.10) avec la méthode des différences finies en utilisant un schéma centré, on obtient le même type de solutions instables que celles décrites dans la section précédente pour la méthode des éléments finis. La technique de l'*Upwind* consiste alors à conserver un schéma centré pour le terme diffusif mais à adopter un schéma décentré amont pour le terme d'advection ; ce choix a pour conséquence de faire apparaître un terme de diffusion numérique dans l'équation (4.18) qui stabilise la solution numérique au prix d'une perte de précision.

Lorsque la technique de l'Upwind est appliquée telle quelle à un cas multidimensionnel, la diffusion numérique est trop importante et la solution numérique s'écarte nettement de la solution analytique. Cette méthode est alors améliorée en s'appuyant sur le fait que la direction et la vitesse du transport advectif sont déterminées par le champ des vitesses d'écoulement $\mathbf{u}$ ; l'idée de la méthode *Streamline Upwind* est de faire en sorte que le terme de diffusion numérique soit anisotrope et n'ait d'effet que dans la direction de $\mathbf{u}$ (c'est-à-dire selon les lignes de courant ou *"streamlines"* en anglais).

La méthode des éléments finis standard (telle que présentée à la Section 3.3.1) repose sur la méthode de Galerkin qui consiste à choisir les fonctions tests $\Phi_i$ dans le même espace que les fonctions de forme $N_j^e$, ce qui est équivalent à l'adoption d'un schéma centré du point de vue des différences finies. La méthode SUPG peut être vue comme une modification de la méthode de Galerkin consistant à choisir judicieusement d'autres fonctions tests, dites de *Petrov-Galerkin*, afin d'aboutir à un schéma décentré. Cette modification permet d'introduire, lors de la formulation faible, un terme de diffusion numérique similaire à celui de la méthode Streamline Upwind. Donea (1984) propose une courte revue des différentes possibilités quant au choix des fonctions tests de *Petrov-Galerkin*.

### Méthode Bubbles

La méthode *Bubbles* est beaucoup moins classique que la méthode SUPG et la littérature se rapportant à la première est beaucoup plus rare (Arnold *et al.*, 1984; Brezzi *et al.*, 1992; Baiocchi *et al.*, 1993). Très schématiquement, cette méthode consiste à choisir chaque fonction test $\Phi_i$ comme la somme d'une fonction de forme $N_i^e$ et d'une fonction appelée *fonction bulle* dont les propriétés particulières permettent de stabiliser l'opérateur de convection sans avoir à utiliser de méthode type Upwind ni autre artifice numérique (Brezzi *et al.*, 1992).

### Méthode Discontinuous Galerkin (DG)

La méthode *Discontinuous Galerkin (DG)* est de plus en plus employée au sein des modèles éléments finis (Brezzi *et al.*, 2004; Kuzmin, 2010, par exemple). Initialement introduite par Reed et Hill (1973), cette méthode combine des aspects des méthodes des éléments finis et des volumes finis. L'idée générale est d'autoriser les fonctions tests $\Phi_i$ à être discontinues à l'interface entre les éléments. Cela requiert la prescription de conditions aux limites en flux à l'interface entre les éléments qui sont ajustées de manière à assurer la consistance du schéma numérique.

### Méthode Semi-Lagrangienne

La méthode *Semi-Lagrangienne* se démarque nettement des trois autres dans la mesure où elle ne vise pas à stabiliser le terme d'advection $\mathbf{u}.\mathrm{grad}A$ mais à troquer le point de vue Eulérien - responsable de l'apparition de ce terme d'advection - contre un point de vue Lagrangien qui consiste à suivre les particules du fluide dans leur mouvement (Staniforth et Côté, 1991, par exemple). Lorsque le terme source/puit $s$ de l'équation d'advection (4.1) est nul, le principe de la méthode Semi-Lagrangienne est relativement intuitif : pour chaque nœud $i$ du maillage, on estime la position $\mathbf{x}_i(t-\Delta t)$ qu'occupait, à l'instant $t-\Delta t$ (où $\Delta t$ est le pas de temps du modèle), la particule qui, à l'instant $t$ , est localisée au nœud $i$ ; la valeur du champ $A$ à l'instant $t$ au nœud $i$ est alors prise égale à la valeur qu'avait le champ $A$ à l'instant $t-\Delta t$ en $\mathbf{x}_i(t-\Delta t)$ . Dans le cas où le terme $s$ n'est pas nul, il doit être intégré le long de la trajectoire suivie par la particule entre $t-\Delta t$ et $t$.

### 4.2.2 Comparaison de l'efficacité des méthodes de stabilisation

Le but des expériences décrites dans cette partie est de mieux cerner, à partir de deux cas synthétiques simples conçus comme des bancs d'essai, les performances des différentes méthodes présentées dans la précédente partie. Le premier cas test est sans lien direct avec l'endommagement : il s'agit d'évaluer, en fonction de la résolution spatio-temporelle choisie, la capacité des quatre méthodes présentées précédemment à advecter une distribution gaussienne en limitant la diffusion numérique non désirée. La seconde série d'expériences est construite sur la base du cas test *"Ice Shelf*

*Ramp"*, proposé par Greve et Blatter (2009), auquel nous intégrons le modèle d'endommagement décrit à la Section 4.1 dans le but d'évaluer la stabilité des solutions produites par les méthodes SUPG, Bubbles et DG.

#### 4.2.2.1 Advection d'une distribution gaussienne

**Méthodologie**

Pour cette expérience, nous considérons un domaine rectangulaire plan tel que $x \in [0, 1000]$ m et $y \in [0, 100]$ m. Ce domaine est discrétisé en un maillage régulier comportant 10 éléments selon $y$ et un nombre variable d'éléments selon $x$.

On prescrit, sur l'ensemble du domaine, une vitesse d'écoulement uniforme, stationnaire et dirigée selon $x$, fixée à $u = 10$ m a$^{-1}$. A l'instant initial, on impose un champ scalaire $D$ (ce peut être l'endommagement ou tout autre champ scalaire), sous la forme d'une distribution gaussienne donnée par l'équation :

$$D(x, t = 0) = \frac{100}{\sigma_{sd}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_{sd}^2}\right) \tag{4.22}$$

où l'extension spatiale de la gaussienne est ajustée via le paramètre $\sigma_{sd}$ dont la valeur est fixée à $\sigma_{sd} = \sqrt{5000}$ tandis que le paramètre $\mu$ permet de centrer la distribution selon $x$ et est fixé à $\mu = 250$ m. Le maillage du domaine ainsi que la distribution initiale de $D$ sont visibles sur la Figure 4.3.

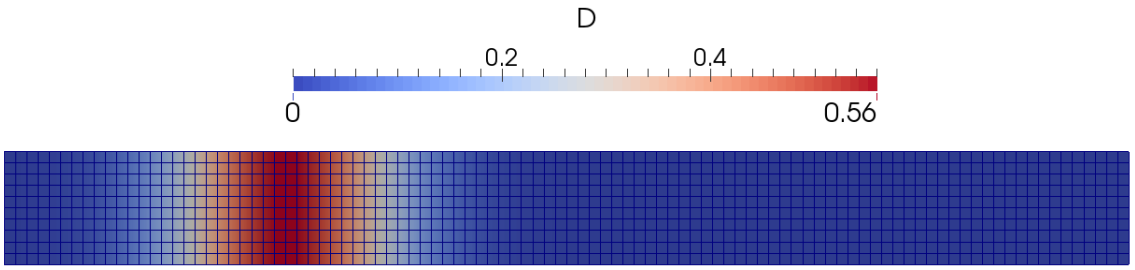


FIGURE 4.3 – Maillage du domaine rectangulaire et distribution initiale de la quantité scalaire $D$.

En utilisant successivement chacune des méthodes présentées à la Section 4.2.1.2, nous lançons une simulation d'une durée de 100 a au cours de laquelle $D$ est advecté avec l'écoulement : cela revient à chercher la solution de l'équation (4.1) en fixant le terme source/puit à $s = 0$. Pour chaque simulation, nous testons six pas de temps : 0.05 a, 0.1 a, 0.2 a, 0.5 a, 1 a et 2 a ; ainsi que six résolutions spatiales dans la direction $x$ : 2 m, 2.5 m, 3.33 m, 5 m, 10 m et 20 m.

En général, le choix de la résolution temporelle ne peut pas se faire indépendamment du choix de la résolution spatiale : plus les mailles seront petites plus le pas de temps devra être faible

| | | $\Delta x$ (m) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **2** | **2.5** | **3.33** | **5** | **10** | **20** |
| $\Delta t$ (a) | **0.05** | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 |
| | **0.1** | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 |
| | **0.2** | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |
| | **0.5** | 2.5 | 2 | 1.5 | 1 | 0.5 | 0.25 |
| | **1** | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0.5 |
| | **2** | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 |

TABLEAU 4.1 – Nombre de Courant $N_{CFL}$ pour les différentes combinaisons taille de maille $\Delta x$/pas de temps $\Delta t$ considérées.

pour que la convergence soit assurée. Cette condition, appelée *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (Courant *et al.*, 1928, 1967) peut s'exprimer, en une dimension pour une vitesse d'écoulement uniforme et stationnaire $u$, sous la forme :

$$N_{CFL} = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq N_{CFL}^{max} \tag{4.23}$$

où $\Delta x$ représente la taille de maille et $\Delta t$ le pas de temps. Le nombre $N_{CFL}$ est appelé *nombre de Courant* et doit rester inférieur à un maximum $N_{CFL}^{max}$ qui dépend du schéma numérique employé mais est en général proche de 1. Le Tableau 4.1 donne la valeur du nombre de Courant pour les différentes combinaisons de tailles de maille et pas de temps considérés. Le but de ces simulations est d'évaluer, pour chacune des quatre méthodes testées, l'influence éventuelle de la taille de maille, du pas de temps et du nombre de Courant sur la diffusion numérique.

**Résultats**

La Figure 4.4 montre l'évolution de la quantité $D$ dans la direction $x$ au cours de son advection par l'écoulement pour les méthodes SUPG (courbes marrons) et Semi-Lagrangienne (courbes bleues) et pour une résolution spatiale de 2 m : $D$ est représenté tous les 20 a à partir de $t = 0$ a. Lorsqu'on compare les solutions numériques obtenues avec la méthode SUPG aux solutions analytiques (courbes en pointillés noirs sur la Figure 4.4), on voit clairement apparaître un phénomène de diffusion numérique non désirée qui s'accumule au cours du temps : au fur et à mesure que la gaussienne est advectée son amplitude diminue et sa base s'élargit. Ce phénomène de diffusion est beaucoup plus rapide pour un pas de temps de 1 a (Figure 4.4b) que pour un pas de temps de 0.1 a (Figure 4.4a). Précisons que la méthode SUPG associée à des pas de temps intermédiaires, i.e. 0.1 a, 0.2 a, 0.5 a et 1 a (non représentés), donne des résultats intermédiaires. Par ailleurs, les méthodes DG et Bubbles produisent des comportements similaires et les résultats obtenus avec ces

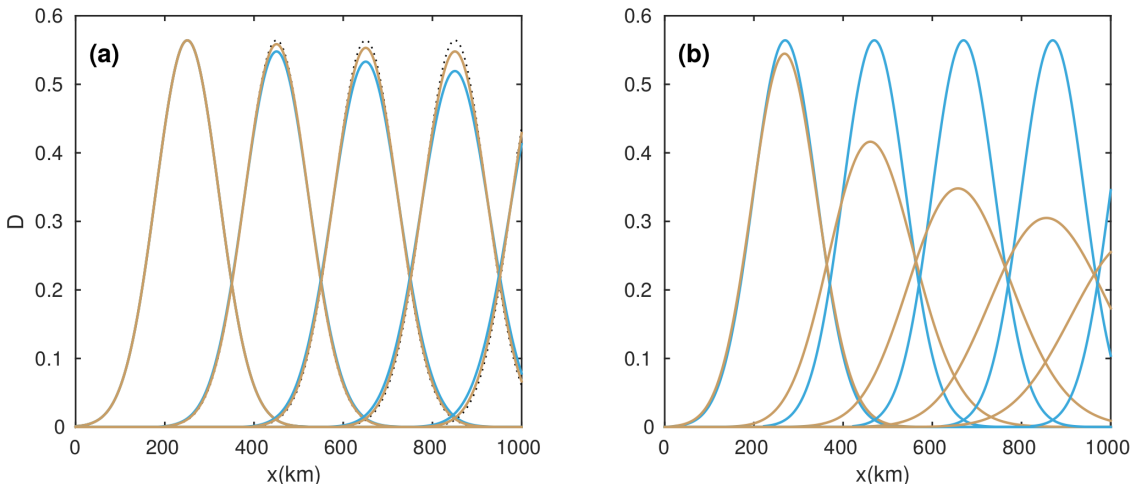


FIGURE 4.4 – Distribution de la quantité $D$ obtenue avec les méthodes SUPG (marron) et Semi-Lagrangienne (bleu) représentée tous les 20 a pour une résolution spatiale de 2 m et une résolution temporelle de **(a)** 0.05 a et **(b)** 2 a. Les courbes en pointillés noirs correspondent à la solution analytique et sont masquées par les courbes bleues sur **(b)**.

méthodes n'ont pas été représentés car trop proches de ceux obtenus avec la méthode SUPG pour être convenablement distingués. La méthode Semi-Lagrangienne (courbe bleue) donne un comportement différent : si la diffusion est encore plus marquée que pour la méthode SUPG pour le pas de temps de 0.05 a, elle est en revanche complètement absente pour des pas de temps de 0.2 a, 1 a (non représentés) et 2 a (courbes bleues sur la Figure 4.4b). Notons que pour la résolution spatiale considérée ( $\Delta x = 2$ m), ces pas de temps correspondent à des nombres de Courant entiers (Tableau 4.1).

La Figure 4.5 représente les iso-valeurs, données dans le plan ($\Delta x$, $\Delta t$), de l'écart relatif en % entre le maximum de la solution analytique et le maximum de la solution numérique obtenue après 70 a de simulation avec les quatre méthodes testées. Cet écart permet de quantifier l'erreur numérique due à la diffusion non désirée cumulée sur 70 a de simulation ; le choix de cette durée a été motivé par le fait que, compte tenu de la vitesse $u$ et de la position initiale du maximum de la gaussienne ($x = 250$ m), celui-ci sort du domaine au bout de 75 a. Le premier résultat remarquable est la très grande proximité des erreurs produites par les méthodes SUPG et DG (iso-contours et pointillés noirs indiscernables sur la Figure 4.5c). De plus, ces deux méthodes présentent une très faible sensibilité à la taille de maille comme l'indique la quasi horizontalité de leurs iso-contours : à titre d'exemple, l'erreur obtenue avec la méthode SUPG pour le pas de temps $\Delta t = 0.05$ a est de $\sim -3.3$ % pour une taille de maille de $\Delta x = 2$ m et de $\sim -4.6$ % pour une taille de maille de $\Delta x = 20$ m. Cette dépendance à la taille de maille devient encore moins marquée à mesure que le pas de temps augmente. Ainsi, pour un pas de temps de $\Delta t = 2$ a, la méthode SUPG produit une erreur de $\sim -48.8$ % avec la taille de maille 2 m et de $\sim -48.9$ % avec la taille de maille

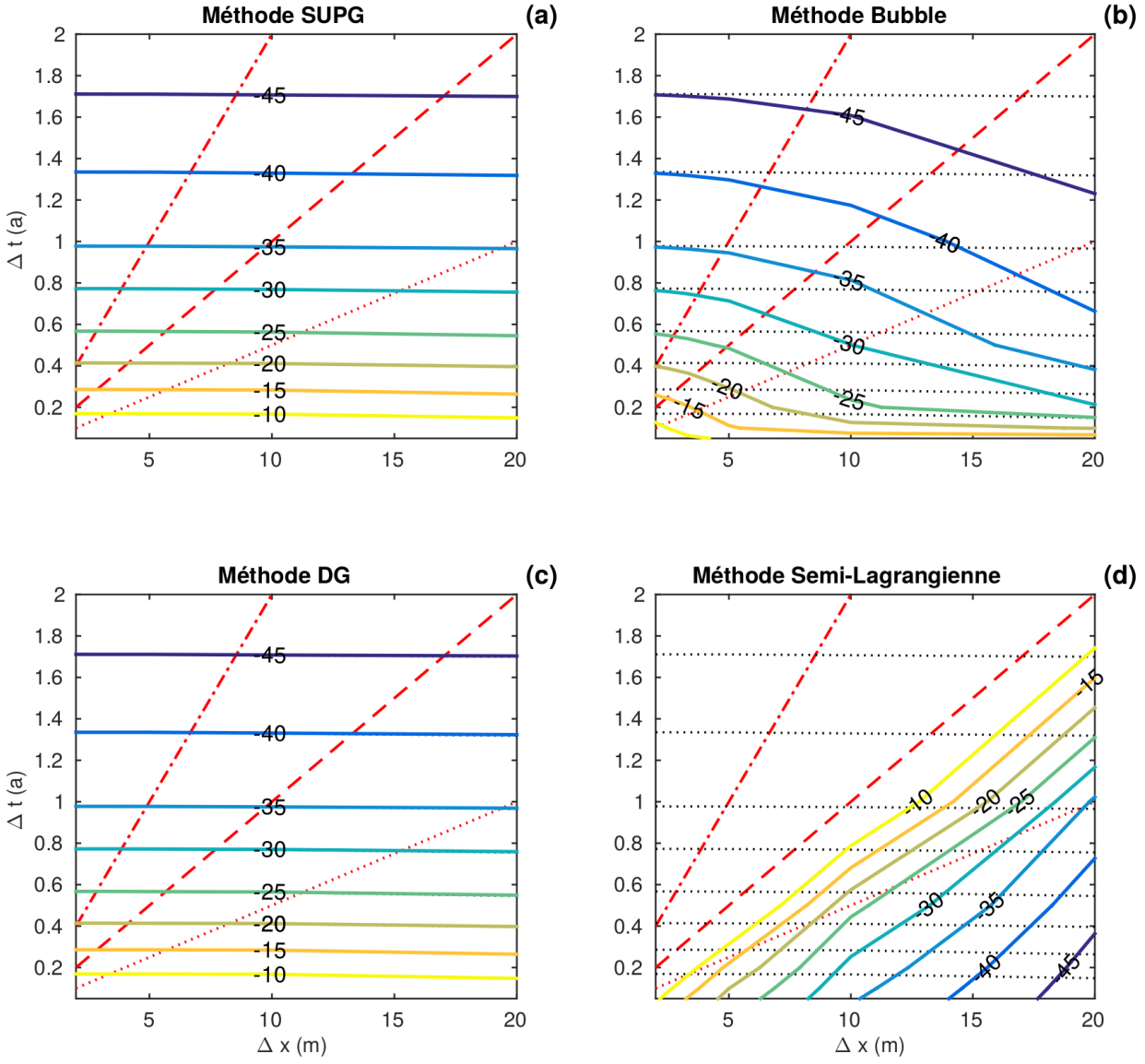


FIGURE 4.5 – Iso-valeurs, représentées dans le plan taille de maille/pas de temps, de l'écart relatif en % entre le maximum de la solution analytique et le maximum de la solution numérique obtenue après 70 a de simulation avec les méthodes SUPG **(a)**, Bubbles **(b)**, DG **(c)** et Semi-Lagrangienne **(d)**. Les lignes en pointillés noirs reportées sur chaque graphe représentent les iso-valeurs obtenues avec la méthode SUPG. Les lignes rouges reportées sur chaque graphe représentent des iso-valeurs du nombre de Courant : $N_{CFL} = 0.5$ (pointillé), $N_{CFL} = 1$ (trait interrompu), $N_{CFL} = 2$ (trait mixte).

20 m. La méthode DG affiche un comportement similaire. Insistons néanmoins sur le fait que nous ne considérons ici que l'effet de la taille de maille dans la direction de l'écoulement. A l'inverse, le choix du pas de temps s'avère critique pour limiter la diffusion numérique produite par ces deux méthodes : l'erreur après 70 a de simulation est d'autant moins importante que le pas de temps choisi est petit. Avec les combinaisons pas de temps/taille de maille testées, l'erreur la plus faible

obtenue avec la méthode SUPG (respectivement DG) après 70 a de simulation s'élève à $\sim -3.3$ % pour la résolution spatio-temporelle la plus fine ($\Delta t = 0.05$ a et $\Delta x = 2$ m) et à $\sim -48.9$ % pour la plus grossière ($\Delta t = 2$ a et $\Delta x = 20$ m).

La méthode Bubbles affiche une dépendance à la fois à la taille de maille et au pas de temps : à $\Delta t$ (respectivement $\Delta x$) fixé, l'erreur devient plus faible lorsque $\Delta x$ (respectivement $\Delta t$) diminue (Figure 4.5b). Il est intéressant de remarquer que plus la taille de maille est petite, plus les résultats produits par la méthode Bubbles sont proches de ceux obtenus avec les méthodes SUPG et DG. En revanche, quand la taille de maille augmente, la première devient moins performante que les deux autres. Avec les combinaisons pas de temps/taille de maille testées, l'erreur numérique à 70 a produite par la méthode Bubbles est comprise entre $\sim -7.2$ % pour la résolution spatio-temporelle la plus fine et $\sim -51.3$ % pour la plus grossière.

La méthode Semi-Lagrangienne présente le même type de sensibilité à la taille de maille que la méthode Bubbles : plus la taille de maille est petite moins la diffusion numérique est importante. En revanche, la méthode Semi-Lagrangienne se démarque nettement des trois autres par la nature de sa sensibilité au pas de temps : on constate en effet qu'à taille de maille fixée, la diffusion numérique est d'autant plus faible que le pas de temps est grand (Figure 4.5d). L'erreur la plus importante est ainsi obtenue pour la taille de maille $\Delta x = 20$ m et le pas de temps $\Delta t = 0.05$ a et s'élève à $\sim -48.2$ %. Par ailleurs, l'ensemble des couples ($\Delta x$ , $\Delta t$) donnant lieu à un nombre de Courant entier (cf Tableau 4.1) s'illustrent par une absence totale de diffusion numérique. Ainsi, les cas particuliers $N_{CFL} = 1$ et $N_{CFL} = 2$ mis en évidence sur la Figure 4.5d (respectivement en trait interrompu et trait mixte rouges) correspondent tous deux à des iso-valeurs de 0 % pour la diffusion numérique à 70 a. Cette caractéristique s'explique assez simplement quand on sait comment fonctionne cette méthode (cf Section 4.2.1.2). En effet, compte-tenu du fait que le maillage est régulier et que la vitesse d'écoulement est uniforme, stationnaire et mono-directionnelle, la particule qui, à un pas de temps donné, se trouve exactement en un nœud du maillage se trouvait exactement, au pas de temps précédent, au nœud situé directement en amont si $N_{CFL} = 1$ (ou, plus généralement, $n$ nœuds en amont dans le cas où $N_{CFL} = n$). Comme le champ $D$ est calculé aux nœuds du maillage et est interpolé linéairement sur les éléments (cf Section 3.3), il est logique que la gaussienne se conserve parfaitement lorsque les particules passent exactement d'un nœud à un autre au cours d'un pas de temps. Dans le cas contraire, l'erreur liée à l'interpolation s'accumule et la distribution subit une diffusion progressive au cours du temps. Si on considère les cas où $N_{CFL} < 1$, la méthode Semi-Lagrangienne apparaît d'autant plus performante que le nombre de Courant s'approche de 1. Enfin, les couples ($\Delta x = 2$ m , $\Delta t = 0.5$ a) et ($\Delta x = 3.33$ m , $\Delta t = 0.5$ a) donnent lieu à des nombres de Courant de respectivement $N_{CFL} = 2.5$ et $N_{CFL} = 1.5$ et sont associés à des erreurs respectives de $\sim -1.4$ % et $\sim -3.7$ % : ces deux valeurs seules ne permettent pas de cerner

clairement le comportement de la méthode Semi-Lagrangienne lorsque le nombre de Courant est supérieur à 1 sans être entier. Soulignons toutefois que, dans le cas d'un écoulement réel traité avec un maillage plus complexe (éléments triangulaires, maillage irrégulier,...), la situation où $N_{CFL}$ est un entier sur tout le domaine modélisé ne survient jamais. De manière générale (en dehors du cas de la méthode Semi-Lagrangienne associée à un nombre de Courant entier), si le nombre de Courant est fixé alors les quatre méthodes convergent vers une erreur nulle à mesure que la taille de maille (respectivement le pas de temps) diminue (lignes rouges sur la Figure 4.5).

**Discussion**

L'étude de ce cas simple nous a permis de mieux cerner les caractéristiques des différentes méthodes employées dans *Elmer/Ice* pour s'affranchir des instabilités associées à la résolution des équations d'advection par la méthode des éléments finis. Indépendamment de la méthode choisie, la gaussienne n'est jamais parfaitement advectée - sauf lorsque la méthode Semi-Lagrangienne est employée avec un nombre de Courant entier - mais subit un phénomène de diffusion non conforme à la physique du problème modélisé. Un point intéressant réside dans la très grande proximité des résultats obtenus avec les méthodes DG et SUPG ainsi que dans la faible sensibilité de ces résultats à la taille de maille ; insistons néanmoins sur le fait que la sensibilité à la taille de maille n'est ici évaluée que dans la direction de l'écoulement. En revanche, avec ces deux méthodes, la diffusion présente une sensibilité marquée à la discrétisation temporelle et est de moins en moins importante au fur et à mesure que le pas de temps diminue. La méthode Bubbles s'avère, quant à elle, sensible à la fois à la taille de maille et au pas de temps ; elle produit une diffusion moins rapide lorsque ces deux derniers diminuent. Dès que la taille de maille devient supérieure à 2 m la méthode Bubbles se révèle systématiquement moins performante que les méthodes SUPG et DG.

Comme nous l'avons expliqué à la Section 4.2.1.2, la méthode Semi-Lagrangienne n'est pas de même nature que les trois autres et cela se manifeste dans les résultats obtenus. Un résultat classique mis en évidence au cours de ces expériences est l'absence de diffusion lorsque cette méthode est employée avec un nombre de Courant entier. Cette caractéristique est *a priori* propre au cas simple étudié ici et il faut s'attendre à ce que la relation entre nombre de Courant et diffusion se complexifie si on emploie la méthode Semi-Lagrangienne pour un écoulement multidimensionnel et/ou avec un maillage irrégulier. Le gros défaut de cette méthode à l'heure actuelle est son incompatibilité avec la parallélisation des calculs. Très schématiquement, les calculs parallèles impliquent un découpage du domaine étudié en *partitions* qui se verront appliquer la MEF de manière indépendante, chacune des partitions étant traitée par un ou des processeurs spécifiques ; à la fin du processus les solutions obtenues pour chacune des partitions sont recombinées de manière à obtenir la solution valable pour l'ensemble du domaine. Dans le cas de la méthode Semi-Lagrangienne, une difficulté survient

lorsqu'une particule passe d'une partition à une autre au cours d'un pas de temps ; il devient alors très difficile de remonter à sa position au pas de temps précédent.

Les résultats obtenus au cours de ces expériences donnent des informations intéressantes sur les méthodes de stabilisation, notamment concernant les discrétisations temporelles et spatiales (dans la direction de l'écoulement) à adopter selon la méthode employée pour limiter la diffusion numérique. Néanmoins, du fait de la grande simplicité de ce cas test, il est difficile de savoir à quel point certaines conclusions, notamment la proximité des résultats obtenus avec les méthodes SUPG et DG, leur faible sensibilité à la taille de maille et la supériorité de ces méthodes sur la méthode Bubbles, sont généralisables à des cas plus complexes. Par ailleurs, les méthodes type SUPG sont connues pour produire des oscillations résiduelles dans les régions où les gradients de la solution sont intenses et non alignés avec la direction de l'écoulement (phénomène de *Gibbs*, voir Nadukandi *et al.* (2010) par exemple). Afin de se retrouver dans une telle situation, nous construisons un nouveau cas test plus complexe que nous décrivons dans la partie suivante. La méthode Semi-Lagrangienne telle qu'implémentée au sein d'*Elmer/Ice* étant, en l'état, incompatible avec la parallélisation des calculs - technique que nous sommes amenés à utiliser très souvent pour nos applications tridimensionnelles - nous laissons cette méthode de côté.

#### 4.2.2.2 Cas test "Ice Shelf Ramp"

**Méthodologie**

L'expérience présentée ici est adaptée du cas test *"Ice Shelf Ramp"*, un problème d'écoulement 2D très simplifié pour lequel les équations de la *SSA* (3.26) possèdent une solution analytique en régime stationnaire. Ce cas test - ainsi que les solutions analytiques qui en découlent - est parfaitement décrit dans Greve et Blatter (2009) et nous renvoyons le lecteur intéressé vers cette référence (pages 126 à 131).

Dans notre cas, nous appliquons la version 1D des équations de la SSA (3.26) à l'écoulement d'une plateforme flottante ($\tau_b = 0$) comprise entre l'abscisse $x = 0$ km, correspondant à l'interface avec la partie posée et au niveau de laquelle s'applique la condition de Dirichlet $u(x = 0) = 100$ m a$^{-1}$, et l'abscisse $x = 200$ km correspondant au front de vêlage au niveau duquel s'applique la version 1D des conditions de Neumann (3.28). L'épaisseur initiale de glace est fixée à $H(x, t = 0) = 400$ m sur l'ensemble du domaine et évolue au cours de la simulation selon l'équation de l'épaisseur (3.22) soumise à la condition de Dirichlet $H(x = 0, t) = 400$ m. Sur la frontière supérieure du domaine, nous appliquons le bilan de masse de surface dérivé analytiquement par Greve et Blatter (2009) dans le cadre du cas test *"Ice Shelf Ramp"* : concrètement, il s'agit du bilan de masse permettant d'obtenir, en régime stationnaire, une plateforme flottante dont l'épaisseur varie linéairement de $H = 400$ m en $x = 0$ km à $H = 200$ m en $x = 200$ km. La distribution spatiale de

ce bilan de masse de surface est représentée sur la Figure 4.6 : il vaut $\sim 6$ m a$^{-1}$ en $x = 0$ km et décroît progressivement jusqu'à atteindre $\sim -1$ m a$^{-1}$ en $x = 200$ km ; la transition entre bilan de masse de surface positif (accumulation) et bilan de masse négatif (ablation) se fait aux alentours de $x = 125$ km.

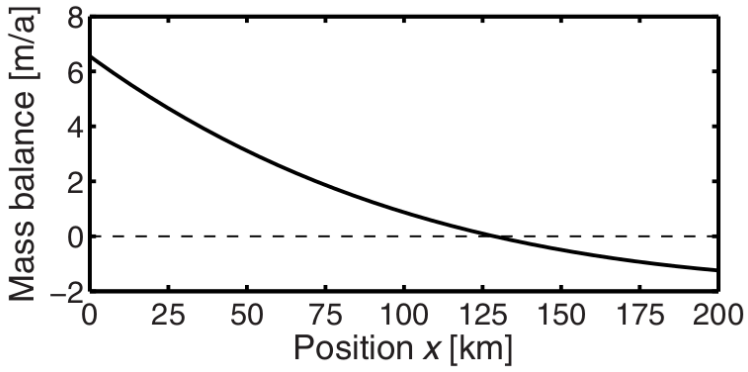


FIGURE 4.6 – Distribution du bilan de masse de surface pour le cas test *"Ice Shelf Ramp"*. Figure issue de Greve et Blatter (2009).

Nous exploitons les modules récemment développés dont il a été question à la Section 4.1.3 pour intégrer l'endommagement à cette expérience. Rappelons que dans un tel cas, bien que les équations de la *SSA* soient résolues sur une dimension (modèle verticalement intégré), l'endommagement est défini selon les deux dimensions de la géométrie et dépend donc des variables $x$ et $z$. Les valeurs des paramètres de la loi d'évolution présentée à la Section 4.1.1 sont ajustées de manière à ce que le critère d'endommagement $\chi$ soit positif sur une faible épaisseur (quelques dizaines de mètres mesurés à partir de la frontière supérieure) sur toute la longueur du domaine ; cela signifie que de l'endommagement va être créé sur cette faible épaisseur puis advecté avec l'écoulement. La résolution de l'équation d'advection (4.2) requiert la prescription de conditions aux limites sur les frontières traversées par un flux de glace pénétrant à l'intérieur du domaine. Considérant que la glace nouvellement accumulée sur la frontière supérieure est vierge d'endommagement, nous imposons la condition limite de Dirichlet $D(x, z = z_s) = 0$ partout où le bilan de masse de surface est positif. Une condition identique est appliquée sur la frontière amont du domaine pour des raisons similaires. Par ailleurs, la rétro-action de l'endommagement sur la viscosité de la glace est prise en compte (cf Section 2.2.2.2).

On se retrouve donc avec un écoulement plus complexe que celui étudié dans la partie précédente : cette fois-ci, la vitesse n'est ni stationnaire, ni uniforme. La direction principale de l'écoulement étant orientée selon l'axe $x$ - la composante verticale de la vitesse n'est pas nulle mais elle est plus faible de $\sim 3$ ordres de grandeur par rapport à la composante horizontale - nous nous intéressons à la distribution de l'endommagement selon l'axe $z$ afin de voir si l'on obtient les oscillations résiduelles

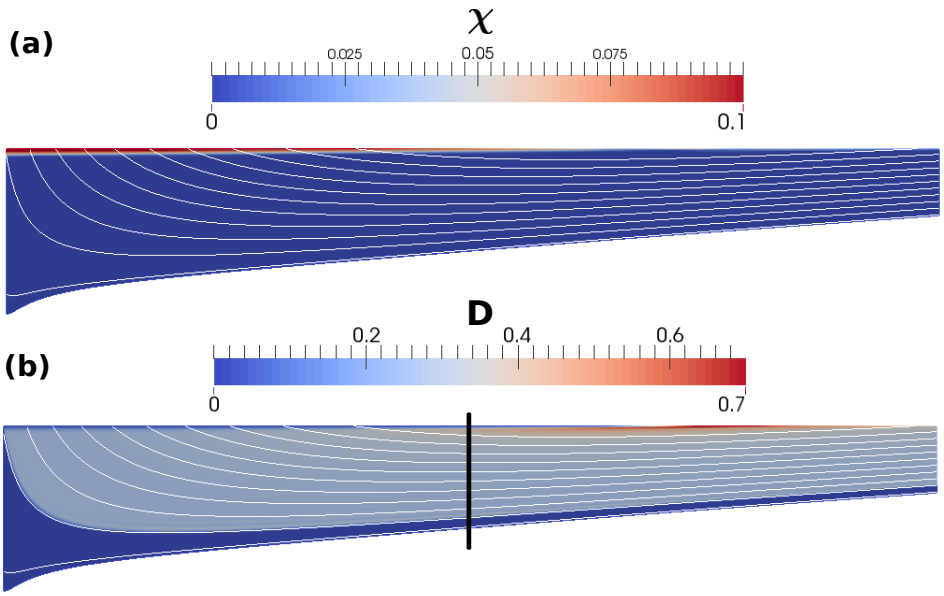


FIGURE 4.7 – distributions stationnaires du critère d'endommagement $\chi$ **(a)** et de l'endommagement **(b)** obtenues à l'issue des 1000 a de la simulation réalisée avec la méthode SUPG en prenant un pas de temps de 0.5 a et avec la résolution verticale $N_z = 60$. L'échelle verticale est exagérée 100 fois par rapport à l'échelle horizontale. Les lignes blanches sont des lignes de courant. La ligne verticale noire sur **(b)** indique l'axe le long duquel la distribution d'endommagement est représentée sur les Figures 4.8 et 4.9.

auxquelles on peut s'attendre pour la méthode SUPG tout au moins. Pour cela, on applique un maillage régulier sur l'ensemble du domaine. Ce maillage est constitué de 800 éléments dans la direction $x$ tandis que deux résolutions sont testées dans la direction $z$, à savoir un découpage en $N_z = 30$ et $N_z = 60$ éléments respectivement. Avec ces deux discrétisations verticales, la création d'endommagement se fait sur une profondeur correspondant à, respectivement, 2 et 4 couches de nœuds mais du fait de la condition de Dirichlet imposée sur la frontière supérieure, la valeur de l'endommagement est forcée à zéro sur tous les nœuds appartenant à cette frontière.

Nous lançons une simulation d'une durée de 1000 a en testant successivement des pas de temps de 0.5 a puis 1 a pour chacune des deux discrétisations spatiales considérées. A l'issue des 1000 a de la simulation, un état stationnaire est atteint : la géométrie et la vitesse d'écoulement n'évoluent plus. Les distributions du critère d'endommagement $\chi$ et de l'endommagement correspondant à l'état stationnaire obtenu avec la méthode SUPG sont représentées, à titre d'exemple, sur la Figure 4.7. En outre, 11 lignes de courant sont également représentées sur cette figure (courbes blanches) ; quand on analyse l'aspect de ces lignes de courant, il est important d'avoir en tête le fait que l'échelle verticale a été exagérée 100 fois par rapport à l'échelle horizontale pour représenter figure.

**Résultats**

Les lignes de courant représentées sur les Figures 4.8a et b permettent de comprendre la distribution de l'endommagement. Comme ces figures correspondent à un régime stationnaire, ces lignes de courant décrivent également les trajectoires des particules : les particules qui pénètrent au sein du domaine via la frontière supérieure - pour la section de celle-ci où le bilan de masse est positif (voir Figure 4.6) - sont initialement vierges d'endommagement. En traversant la couche peu profonde au sein de laquelle $\chi$ est positif (4.8a), ces particules s'endommagent et s'écoulent jusqu'au front de la plateforme en conservant leur endommagement (pas de processus de cicatrisation). Ainsi, si on suit une des lignes de courant issues de la frontière supérieure - limitée à la partie où le bilan de masse est positif - depuis celle-ci jusqu'au front, l'endommagement passe de 0 (du fait de la condition de Dirichlet $D(x, z = z_s) = 0$ sur la frontière supérieure) à une valeur maximale, atteinte à la sortie de la couche où $\chi$ est positif, qu'il conserve jusqu'au front. Au contraire, les particules qui pénètrent au sein du domaine via la frontière amont et qui, de fait, ne traversent pas la couche au sein de laquelle $\chi$ est positif, demeurent vierges d'endommagement sur tout le parcours les menant jusqu'au front de vêlage (première ligne de courant à partir de la frontière inférieure du domaine sur les Figures 4.8a et b). Comme elle est approximativement issue de l'intersection entre les frontières amont et supérieure du domaine, la seconde ligne d'écoulement représentée à partir de la frontière inférieure sur les Figures 4.8a et b constitue la limite approximative entre glace endommagée et glace vierge d'endommagement.

La Figure 4.8a montre le profil vertical d'endommagement obtenu avec les méthodes SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) à l'issue des 1000 a de la simulation pour les deux résolutions spatiales testées en fixant le pas de temps à 0.5 a. Ce profil est représenté le long d'un axe vertical placé en $x = 100$ km (ligne verticale noire sur la Figure 4.7b). A cette abscisse, le bilan de masse de surface est positif et la condition de Dirichlet $D(x, z = z_s) = 0$ s'applique. C'est la raison pour laquelle l'endommagement est nul au nœud situé en surface ($z \approx 28$ m) pour chacune des résolutions et chacune des méthodes testées. Juste en dessous, dans la région au sein de laquelle le critère d'endommagement $\chi$ est positif (Figure 4.7a), l'endommagement est maximum et sa valeur, qui dépend de la méthode et de la résolution testée, est proche de $\sim 0.4$. Au fur et à mesure qu'on s'enfonce dans la plateforme flottante, l'endommagement est de moins en moins important. Autour de l'altitude $z \approx -185$ m, il y a une transition abrupte et on passe d'un endommagement oscillant autour de la valeur 0.25 à une glace vierge d'endommagement en à peine 10 m : on se trouve en fait au niveau de la limite entre glace endommagée et glace vierge d'endommagement évoquée ci-dessus.

Ce qui nous intéresse ici, c'est avant tout la stabilité des solutions selon la méthode utilisée pour les obtenir. Comme le prédit la théorie, on observe d'importantes oscillations dans la région où l'endommagement présente un fort gradient selon $z$ avec la méthode SUPG. La Figure 4.8b est

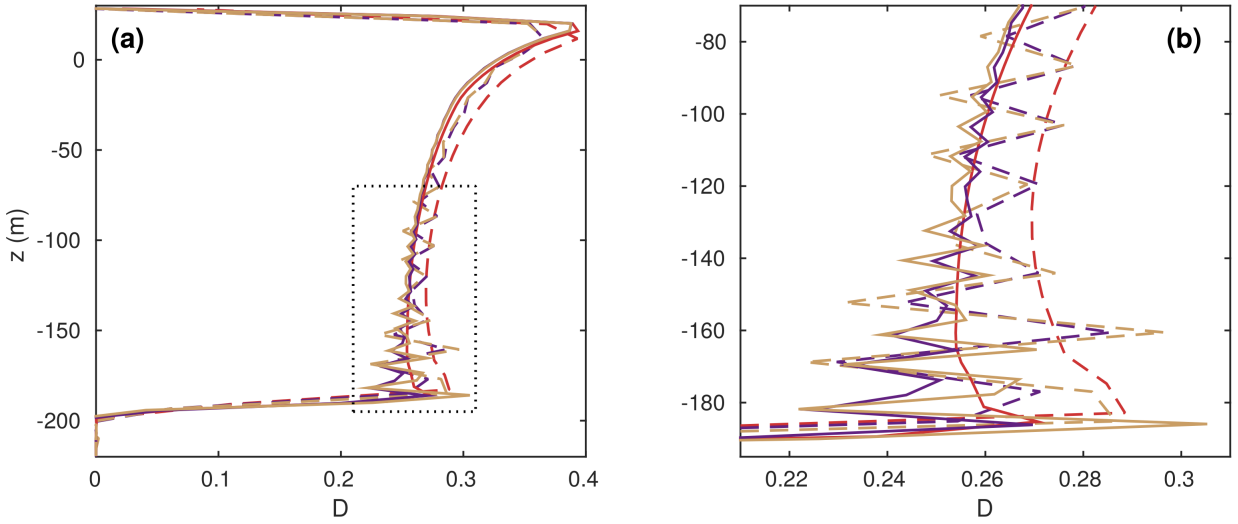


FIGURE 4.8 – Profil vertical d'endommagement obtenu en $x = 100$ km avec un pas de temps fixé à 0.5 a et un maillage constitué de $N_z = 60$ (trait continu) et $N_z = 30$ (trait interrompu) éléments selon la verticale en utilisant les méthodes de stabilisation SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) : **(a)** représentation du profil d'endommagement sur toute la hauteur du domaine et **(b)** grossissement correspondant à la zone encadrée en pointillés noirs sur (**a**).

un grossissement de la région où les oscillations sont le plus marquées (région encadrée en pointillés noirs sur la Figure 4.8a). En comparant les résultats obtenus avec les résolutions verticales $N_z = 30$ et $N_z = 60$, on constate que les oscillations concernent des régions moins étendues lorsque la taille de maille diminue : l'amortissement de ces oscillations est beaucoup plus rapide pour $N_z = 60$ que pour $N_z = 30$. Grâce à cette expérience, nous nous rendons compte que la méthode Bubbles est, elle aussi, sujette au problème des oscillations résiduelles. De ce point de vue, les résultats obtenus avec la méthode Bubbles sont en fait très similaires à ceux obtenus avec la méthode SUPG. En particulier, pour la résolution $N_z = 60$, les résultats obtenus avec les deux méthodes sont quasiment identiques à l'exception de la zone où les oscillations sont les plus fortes ; dans cette zone les oscillations produites par la méthode Bubbles ont une amplitude légèrement plus faible que celles produites par la méthode SUPG mais la différence n'est pas significative. Au contraire, la méthode DG se singularise par l'absence totale d'oscillations sur la solution qu'elle produit, et ce, quelque soit la résolution du maillage testée. En revanche, la différence entre les solutions obtenues pour $N_z = 60$ et pour $N_z = 30$ semble plus importante que pour les méthodes SUPG et Bubbles. Rappelons que les résultats obtenus pour l'expérience d'advection de la gaussienne suggéraient une faible sensibilité des méthodes SUPG et DG à la taille de maille dans la direction de l'écoulement ; cette nouvelle expérience suggère une sensibilité de ces méthodes, particulièrement marquée pour DG, à la taille de maille dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'influence du pas de temps en représentant

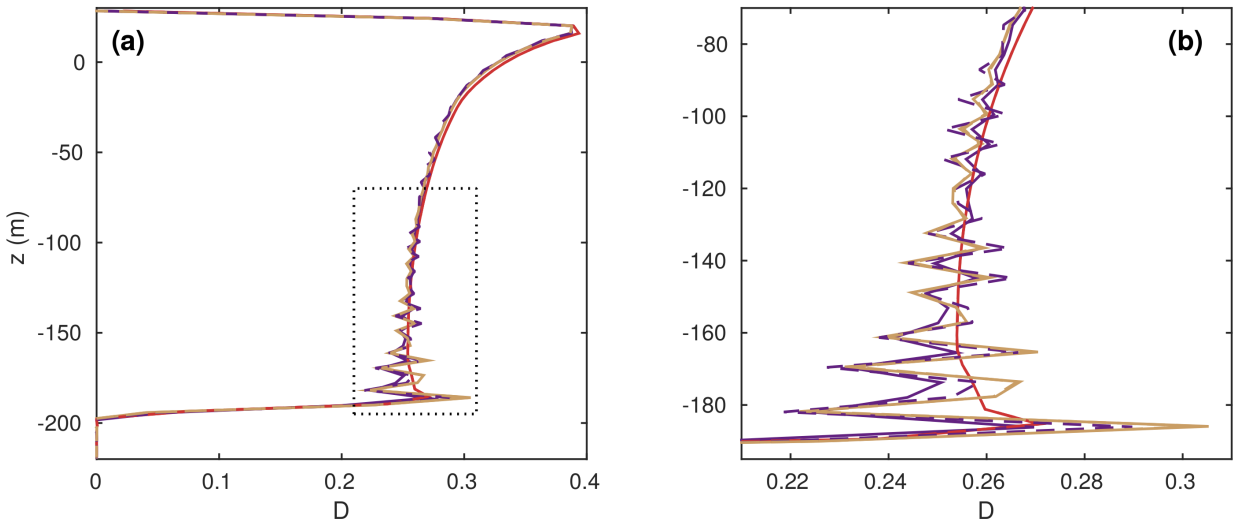


FIGURE 4.9 – Profil vertical d'endommagement obtenu en $x = 100$ km avec un maillage constitué de $N_z = 60$ éléments selon la verticale et des pas de temps fixés à 0.5 a (trait continu) et 1 a (trait interrompu) en utilisant les méthodes de stabilisation SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) : **(a)** représentation du profil d'endommagement sur toute la hauteur du domaine et **(b)** grossissement correspondant à la zone encadrée en pointillés noirs sur (**a**).

sur la Figure 4.9a les profils d'endommagement obtenus avec des pas de temps de 0.5 a et 1 a, la résolution verticale du maillage étant fixée à $N_z = 60$. La Figure 4.9b est un grossissement réalisé sur la même région que pour la Figure 4.8b (encadrée en pointillés noirs sur la Figure 4.9a). On constate sur cette figure que les résultats obtenus avec les méthodes SUPG et DG pour la résolution verticale $N_z = 60$ sont quasiment identiques pour les deux pas de temps testés (traits interrompus et traits continus superposés pour les courbes marron et rouge respectivement). Ce résultat a été confirmé en comparant les résultats obtenus avec ces deux méthodes lorsque la résolution verticale est fixée à $N_z = 30$ : là encore ceux-ci s'avèrent identiques pour les deux pas de temps testés. Au contraire, la méthode Bubbles produit une solution différente selon le pas de temps choisi : les oscillations résiduelles sont amorties sur une distance plus courte pour le pas de temps de 0.5 a.

L'impact de ces différents comportements sur le champ des vitesses d'écoulement obtenu avec les différentes méthodes à l'issue des 1000 a d'expérience est assez faible pour ces expériences. L'écart maximal entre les composantes horizontales de la vitesse d'écoulement - calculée à partir des équations de la *SSA* (3.26), la composante verticale étant déduite via le principe de conservation de la masse (3.7) - est observé au niveau du front de la plateforme ($x = 200$ km). A cet endroit, pour la résolution spatio-temporelle la plus défavorable ($N_z = 30$, $\Delta t = 1$ a), la méthode DG produit une vitesse horizontale de $u|_{cf} = 2084$ m a$^{-1}$ tandis que les vitesses horizontales obtenues avec les méthodes SUPG et Bubbles valent respectivement 2053 m a$^{-1}$ et 2055 m a$^{-1}$. Cela représente un écart de l'ordre de 1.5 % entre les vitesses produites au niveau du front par les méthodes SUPG et

Bubbles d'une part et celle obtenue avec la méthode DG d'autre part. Pour la résolution spatio-temporelle la plus favorable ($N_z = 60$, $\Delta t = 0.5$ a), l'écart entre les trois méthodes est évidemment encore plus faible : la méthode DG produit une vitesse horizontale de $u|_{cf} = 2054$ m a$^{-1}$ tandis que les vitesses horizontales obtenues avec les méthodes SUPG et Bubbles valent respectivement 2045 m a$^{-1}$ et 2043 m a$^{-1}$, soit une différence de moins de 1 % par rapport à la méthode DG. En outre, les écarts maximaux concernant l'épaisseur de glace obtenue avec les trois méthodes à l'issue des 1000 a de simulation pour les différentes résolutions spatio-temporelles testées sont aussi de l'ordre de 1 %.

**Discussion**

Comme nous nous y attendions, la méthode SUPG produit des oscillations non physiques dans les zones où la variable advectée présente de forts gradients non alignés avec la direction de l'écoulement, ce qui est typiquement le cas de l'endommagement qui est, en général, très localisé. Il s'avère que la méthode Bubbles est aussi sujette à ce problème. Dans les deux cas, une taille de maille plus petite permet de limiter la distance sur laquelle les oscillations sont significatives. Une réduction du pas de temps semble avoir le même effet dans le cas de la méthode Bubbles uniquement. Au contraire, la méthode DG n'est pas affectée par ce phénomène et produit une solution stable quelque soit le pas de temps et la taille de maille testés. Les répercussions de ces différents comportements sur les champs de vitesse et d'épaisseur stationnaires obtenus avec les différentes méthodes sont assez limitées pour ce cas test simple.

Par ailleurs, les solutions obtenues avec les méthodes SUPG et DG s'avèrent sensibles à la taille de maille dans la direction $z$ et très peu sensibles au pas de temps. Ce dernier résultat contraste avec ceux obtenus au cours de l'expérience d'advection de la gaussienne pour laquelle le pas de temps jouait un rôle important quant à la diffusion numérique produite par ces deux méthodes. L'explication de cette contradiction apparente sort du cadre de cette étude mais tient peut-être au fait que nous étudions ici une distribution stationnaire d'endommagement alors que nous nous intéressions à un régime transitoire lors de l'expérience d'advection de la gaussienne.

#### 4.2.2.3 Conclusion des expériences "banc d'essai"

Les deux expériences "banc d'essai" présentées dans cette section nous ont permis d'étudier les deux limitations principales des méthodes de stabilisation des équations d'advection : la diffusion numérique et la présence d'oscillations résiduelles. A l'aune des résultats obtenus lors de ces expériences, la méthode DG semble la plus indiquée pour le problème d'advection de l'endommagement : c'est la seule qui produit une solution stable et elle s'avère être, au même titre que la méthode SUPG, moins diffusive que la méthode Bubbles.

Cependant, il arrive souvent qu'une longue simulation ne soit pas réalisée d'un seul tenant mais soit subdivisée en une suite de simulations plus courtes, chacune redémarrant à partir des solutions nodales obtenues à la fin de la simulation précédente. Ce type de procédure peut, par exemple, être rendu nécessaire par l'utilisation de supercalculateurs qui imposent parfois qu'une simulation n'excède pas une certaine durée. Or, telle qu'elle est implémentée au sein d'*Elmer/Ice*, la méthode DG induit une perte d'une partie de l'information sur la variable advectée à chaque redémarrage produisant une erreur qui s'accumule au fur et à mesure des redémarrages successifs. Par ailleurs, lorsqu'on veut paralléliser les calculs, la méthode DG requiert des éléments spécifiques qualifiés de *halo* ; or ces éléments *halo* sont devenus incompatibles avec les dernières versions d'*Elmer/Ice* pour des raisons qui n'ont pas été clairement élucidées à l'heure actuelle. Notre objectif initial était donc de s'affranchir de la méthode DG (utilisée sur les anciennes versions d'*Elmer/Ice* quand les problèmes liés aux éléments *halo* ne se posaient pas encore) au profit des méthodes SUPG ou Bubbles. Etant donné le but de nos travaux (i.e. quantifier l'influence de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage), nous avons cherché à déterminer si les différences entre les méthodes de stabilisation mises en évidence par les deux expériences "banc d'essai" se répercutent de manière significative sur la dynamique de la ligne d'échouage lorsque l'endommagement est intégré au modèle d'écoulement. La réponse à cette question est l'objet de l'expérience présentée dans la partie suivante.

### 4.2.3 Méthodes de stabilisation et dynamique de la ligne d'échouage

L'objectif de l'expérience présentée dans cette section est d'évaluer l'influence du choix de la méthode de stabilisation sur la dynamique de la ligne d'échouage. Plus précisément, il s'agit d'évaluer si cette dynamique demeure sensiblement la même lorsque la méthode DG est remplacée par les méthodes SUPG ou Bubbles.

#### 4.2.3.1 Méthodologie

**Description du modèle**

Afin de limiter les temps de calcul autant que faire se peut, nous résolvons la version 1D des équations de la *SSA* (3.26) pour une calotte 2D synthétique. L'évolution de l'épaisseur du domaine est gouvernée par l'équation de l'épaisseur (3.22) et la position de la surface inférieure déterminée en résolvant l'équation (3.24). La position de la ligne d'échouage est déduite du critère de flottaison en résolvant l'équation (3.25).

La contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ intervenant dans les équations de la SSA (3.26) est nulle aux endroits où la glace flotte et est donnée par la loi de frottement de Schoof (2.18) là où la glace est posée. Cette loi de frottement fait intervenir la pression effective. Celle-ci est évaluée en adoptant

l'hypothèse simplificatrice commune postulant une connexion parfaite entre le réseau hydraulique sous-glaciaire et l'océan, ce qui se traduit par :

$$N = \begin{cases} \rho_i g H + \rho_w g z_b & \text{si } z_b < 0 \\ \rho_i g H & \text{si } z_b \geq 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

La limite amont du domaine est un dôme et constitue à ce titre un axe de symétrie pour l'écoulement ; on y applique la condition de Dirichlet $u(x = 0) = 0$. La limite avale du domaine correspond au front de vêlage et la version 1D des conditions de Neumann (5.3) s'y applique.

**Protocole expérimental**

La première étape de notre expérience consiste à construire une géométrie 2D stationnaire en l'absence d'endommagement. Le protocole expérimental utilisé pour obtenir cette géométrie stationnaire est partiellement inspiré de l'exercice d'intercomparaison MISMIP+ (Asay-Davis *et al.*, 2016). L'exercice MISMIP+ s'inscrit dans la lignée des exercices MISMIP et MISMIP3D évoqués dans la Section 3.2.4 et s'intéresse à la capacité des modèles participants à simuler la migration de la ligne d'échouage pour une calotte tridimensionnelle dont l'extension est définie par $0 \leq x \leq 640$ km et $0 \leq y \leq 80$ km. Dans notre cas, le but étant, *in fine*, de réaliser des simulations intégrant l'endommagement, nous ne pouvons pas nous permettre de considérer une géométrie tridimensionnelle ; l'endommagement serait alors fonction des trois coordonnées de l'espace et les temps calculs deviendraient rapidement prohibitifs compte tenu du caractère prospectif de notre démarche. Même pour une géométrie 2D, ces temps de calcul restent conséquents et nous devons faire preuve de parcimonie dans la délimitation du domaine et dans la définition du maillage afin de conserver des durées de simulation inférieures à la dizaine de jours. Rappelons que pour cette expérience, la parallélisation des calculs est proscrite du fait de l'emploi de la méthode DG.

Nous considérons donc un domaine s'étirant le long d'une ligne d'écoulement selon l'axe $x$, depuis le dôme situé en $x = 0$ km jusqu'au front de vêlage maintenu à la position constante $x = 315.1$ km. La topographie du socle est adaptée de celle imposée pour l'exercice MISMIP+ en se restreignant à $0 \leq x \leq 315.1$ km et en fixant $y$ à la valeur $y = 40$ km : la pente ainsi obtenue est toujours descendante dans le sens de l'écoulement (pas de région sujette au phénomène de MISI sur cette section). Les divers paramètres utilisés pour construire la géométrie stationnaire sont listés dans le Tableau 4.2. Toutes les valeurs attribuées à ces paramètres sont identiques à celles utilisées pour MISMIP+, mis à part la fluidité $A$ : dans le cadre de l'exercice MISMIP+, les participants sont invités à ajuster cette valeur de manière à produire une position stationnaire de la ligne d'échouage localisée dans une région prédéterminée. Pour notre part, nous ajustons la fluidité de manière à obtenir une position stationnaire de la ligne d'échouage située en $x_{G0} = 306.1$ km, soit quasiment au niveau de la limite avale du domaine ; il s'agit d'économiser des ressources de calcul en tirant

TABLEAU 4.2 – Liste des valeurs des paramètres utilisés pour obtenir l'état stationnaire initial avant l'introduction de l'endommagement

| Paramètre | Valeur | Unité |
|---|---|---|
| $\rho_i$ | 918 | kg m$^{-3}$ |
| $\rho_w$ | 1028 | kg m$^{-3}$ |
| $g$ | 9.81 | m s$^{-2}$ |
| $n$ | 3 | – |
| $A$ | $9.5 \times 10^{-27}$ | Pa$^{-3}$ s$^{-1}$ |
| $C_S$ | $3.160 \times 10^6$ | Pa m$^{-1/3}$ s$^{1/3}$ |
| $C_{max}$ | 0.5 | – |
| $m$ | 1/3 | – |
| $a_s$ | 0.3 | m a$^{-1}$ |

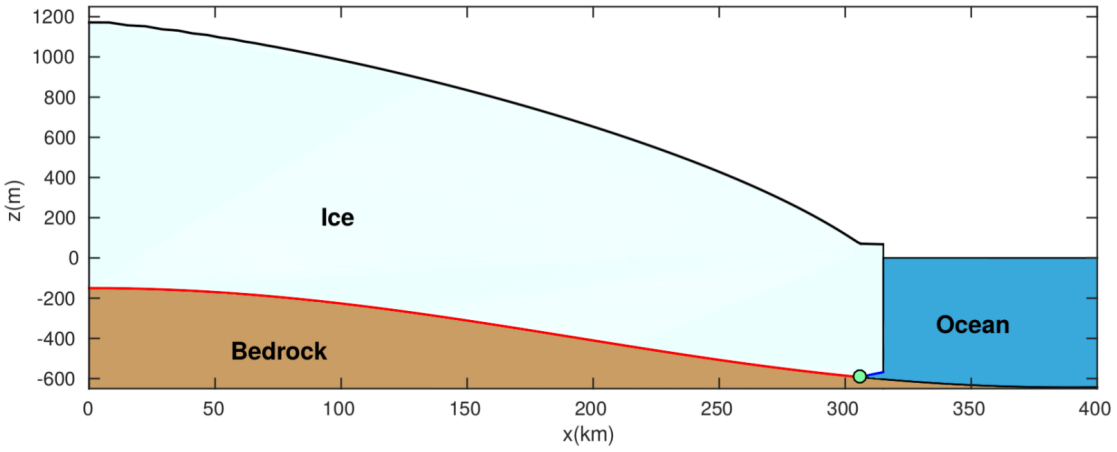


FIGURE 4.10 – Représentation de la géométrie stationnaire obtenue avant l'introduction de l'endommagement. Le point vert indique la position de la ligne d'échouage avant la perturbation $x_{G0}$.

parti du fait qu'en l'absence d'effet d'arc-boutant, la plateforme flottante et la partie posée sont découplées mécaniquement et que, par conséquent, la longueur de la première n'a aucune influence sur la dynamique de la ligne d'échouage (Schoof, 2007b). La géométrie stationnaire ainsi obtenue est représentée sur la Figure 4.10.

A partir de cette géométrie stationnaire, nous nous appuyons sur les développements présentés à la Section 4.1.3 pour introduire les processus d'endommagement et, par ce biais, induire une réponse dynamique de la ligne d'échouage. Les paramètres du modèle utilisés pour obtenir la géométrie stationnaire (Tableau 4.2) sont conservés tels quels pour cette expérience. La création et l'advection de l'endommagement sont régies par l'équation d'évolution (4.2) associée au critère d'endommagement (4.4) - nous ne tenons pas compte des crevasses basales au cours de cette expérience. Comme dans le cas de l'expérience *"Ice Shelf Ramp"*, nous imposons la condition aux limites de Dirichlet $D = 0$ sur toute section des frontières du domaine traversée par un flux de glace pénétrant à l'intérieur de celui-ci. Afin d'être certain d'avoir exactement la même distribution de $\chi$ au cours des différentes

simulations réalisées nous n'introduisons pas de bruit aléatoire sur la valeur de la contrainte seuil, i.e. $\delta\sigma_{th} = 0$ dans l'équation (4.5). La contrainte seuil elle-même est fixée à $\sigma_{th} = 0.11$ MPa tandis que le paramètre d'amplification de la loi d'évolution (4.2) est fixé à $B = 0.8$ MPa$^{-1}$. La valeur de la contrainte seuil est choisie sur la base des travaux de Krug *et al.* (2014) qui testèrent différents jeux de paramètres afin d'obtenir un comportement réaliste (en 2D le long d'une ligne d'écoulement) du front du glacier Helheim (Sud Est du Groenland) avec leur modèle de vêlage. En revanche, nous devons revoir la valeur de $B$ à la baisse par rapport à celle suggérée par Krug *et al.* (2014) lorsque la contrainte seuil vaut $\sigma_{th} = 0.11$ MPa, sans quoi l'ensemble du domaine devient rapidement fortement endommagé et la réponse dynamique de la ligne d'échouage est excessive. Pour la même raison, nous imposons une borne supérieure à la valeur de l'endommagement que nous fixons empiriquement à 0.7.

Le fait d'introduire l'endommagement réduit localement la viscosité de la glace d'après la relation (2.9) et la ligne d'échouage recule. Nous nous intéressons ici à la réponse dynamique de la calotte à cette perturbation sur une période de 10 ka. Plus spécifiquement, nous cherchons à quantifier à quel point la dynamique de la ligne d'échouage varie selon que l'on utilise les méthodes de stabilisation SUPG, Bubbles ou DG, et ce, en fonction de la résolution du maillage adopté. Pour se faire, nous réalisons, pour chacune des méthodes, quatre simulations qui diffèrent uniquement par le maillage adopté. Les quatre maillages testés sont tous constitués d'éléments rectangulaires et sont structurés de manière identique dans la direction $x$ : 1700 éléments de taille constante fixée à 100 m permettent de mailler la région située entre les abscisses $x = 140.0$ km et $x = 310.0$ km au sein de laquelle la ligne d'échouage reste confinée tout au long de l'expérience ; 120 éléments supplémentaires, dont la taille suit une progression géométrique, sont utilisés pour mailler la zone comprise entre $x = 0$ km et $x = 140.0$ km tandis que 3 éléments, dont la taille suit également une progression géométrique, permettent de mailler la zone comprise entre $x = 310.0$ km et $x = 315.1$ km. Par ailleurs, deux des maillages testés sont réguliers dans la direction verticale ; ils comportent respectivement $N_z^r = 20$ et $N_z^r = 40$ éléments selon l'axe $z$. Compte tenu du fait que la création de l'endommagement se fait essentiellement en surface du domaine, là où la pression cryostatique est suffisamment faible, nous considérons également deux maillages irréguliers dans la direction $z$ : ils comportent également $N_z^{ir} = 20$ et $N_z^{ir} = 40$ éléments selon $z$ mais leur taille suit une progression géométrique : la taille, dans la direction $z$, d'un élément situé au niveau de la surface supérieure est 50 fois plus petite que celle de l'élément aligné verticalement et situé au niveau de la surface inférieure. Afin d'illustrer ces maillages, le cas du maillage irrégulier $N_z^{ir} = 40$ est représenté sur la Figure 4.11.

En outre, nous adoptons un pas de temps de 0.5 a pour l'ensemble des douze simulations réalisées (trois méthodes testées et quatre maillages par méthode). Ce choix constitue un compromis entre

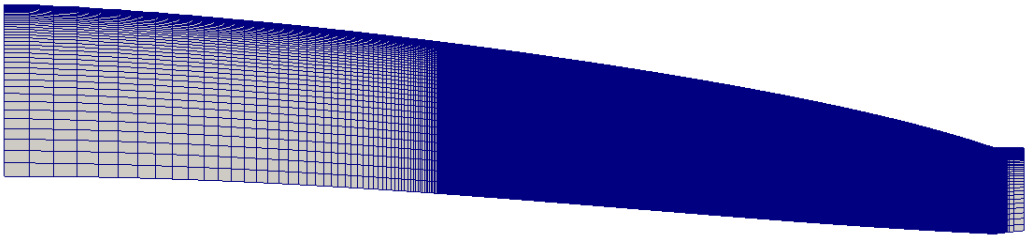

FIGURE 4.11 – Illustration du maillage $N_z^{ir} = 40$, un des quatre maillages utilisés pour l'expérience de retrait de la ligne d'échouage. L'ensemble des quatre maillages testés ont la même structure dans la direction $x$. Deux des maillages testés sont réguliers dans la direction $z$ tandis que les deux autres, dont celui-ci, ont une résolution décroissante à mesure qu'on s'éloigne de la surface supérieure. L'échelle verticale est exagérée 40 fois par rapport à l'échelle horizontale.

un pas de temps suffisamment long pour conserver des temps de calcul raisonnables et un pas de temps suffisamment court pour limiter les problèmes de diffusion numérique et d'instabilité (pour la méthode Bubbles) mis en évidence au cours des deux expériences précédentes.

#### 4.2.3.2 Résultats

Au premier pas de temps, la relation (4.8) est utilisée afin de déterminer le champ des contraintes de Cauchy à partir de la distribution des vitesses d'écoulement correspondant à la géométrie stationnaire. De ce champ de contrainte initial, on déduit la distribution spatiale initiale du critère d'endommagement $\chi$ d'après la relation (4.4). Avec les paramètres choisis, le critère d'endommagement est positif sur une faible épaisseur (quelques dizaines de mètres) sur l'ensemble de la frontière supérieure (même type de distribution que celle obtenue pour le cas test *"Ice Shelf Ramp"* et représentée sur la Figure 4.7a) . Cela a pour conséquence une création d'endommagement au voisinage immédiat de la frontière supérieure sur toute l'étendue horizontale du domaine. Cet endommagement nouvellement créé se répercute immédiatement sur le champ des vitesses d'écoulement via une réduction de la viscosité qui, dans le cadre de la *SSA*, est verticalement intégrée ; on observe alors, quelque soit la méthode de stabilisation choisie, un retrait de la ligne d'échouage.

La Figure 4.12 montre l'évolution de la position de la ligne d'échouage en fonction du temps pour les méthodes SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) et pour les différents maillages testés. Tout d'abord, notons que lorsque la simulation est stoppée après 10 ka, la ligne d'échouage n'a pas encore atteint son nouvel état stationnaire : indépendamment de la méthode testée, elle continue à reculer pour le maillage régulier $N_z^r = 20$ (courbes en trait interrompu sur la Figure 4.12a) ; elle continue également à reculer pour les méthodes SUPG et Bubbles associées au maillage régulier $N_z^r = 40$ (courbes marrons et violettes en trait continu sur la Figure 4.12a) ; au contraire, on observe une lente ré-avancée pour la méthode DG associée au maillage régulier $N_z^r = 40$ (courbe rouge en trait continu sur la Figure 4.12a) ainsi que, indépendamment de la méthode testée, pour les

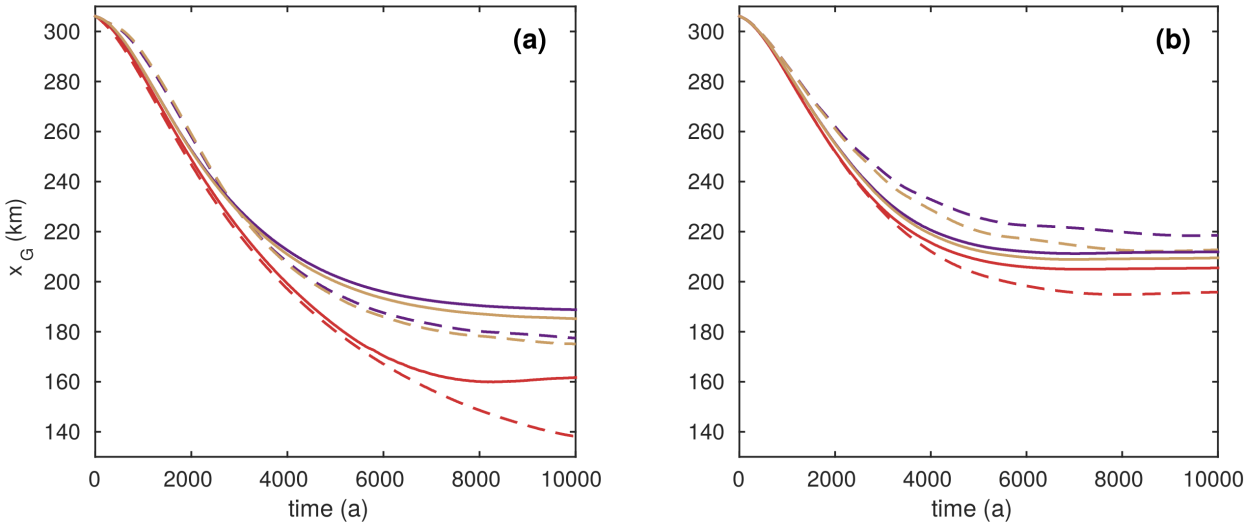


FIGURE 4.12 – Position de la ligne d'échouage en fonction du temps, suite à l'introduction de l'endommagement à $t = 0$ a, pour les méthodes SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) et pour les maillages : **(a)** $N_z^r = 40$ (trait continu) et $N_z^r = 20$ (trait interrompu), puis **(b)** $N_z^{ir} = 40$ (trait continu) et $N_z^{ir} = 20$ (trait interrompu).

maillages irréguliers $N_z^{ir} = 20$ et $N_z^{ir} = 40$ (difficilement discernable sur la Figure 4.12b). Précisons également que la ligne d'échouage obtenue avec la méthode DG associée au maillage $N_z^r = 20$ vient tout juste de sortir de la zone fortement raffinée lorsque la simulation est arrêtée ($x_G = 138.2$ km). Par ailleurs, à l'issue des 10 ka de simulation, les lignes d'échouage obtenues avec le maillage $N_z^r = 20$ et les méthodes SUPG et Bubbles sont localisées, respectivement, en $x_G = 175.2$ km et en $x_G = 177.5$ km, soit respectivement 37.0 km et 39.3 km en amont de celle obtenue avec la méthode DG. Cet écart se réduit lorsque la résolution du maillage augmente puisque les positions de ligne d'échouage obtenues, à l'issue des 10 ka de simulation, avec les méthodes respectives DG, SUPG et Bubbles associées au maillage $N_z^r = 40$ sont localisées, respectivement, en $x_G = 162.1$ km, $x_G = 185.2$ km et $x_G = 188.7$ km, soit un écart de 26.6 km entre la position la plus avancée (méthode Bubbles) et la position la plus reculée (méthode DG). Soulignons qu'au moment où nous stoppons la simulation, cet écart tend à se réduire puisque la ligne d'échouage continue à reculer lentement pour les méthodes SUPG et Bubbles tandis qu'elle ré-avance pour la méthode DG.

A plus court terme, i.e. après 1000 a de simulation, les lignes d'échouage obtenues avec les méthodes DG, SUPG et Bubbles associées au maillage $N_z^r = 20$ sont localisées, respectivement, en $x_G = 280.2$ km, $x_G = 291.2$ km et $x_G = 290.1$ km ; cela représente déjà un écart de l'ordre de 10 km entre la méthode DG et les deux autres. Cet écart à 1000 a entre la position de la ligne d'échouage produite par la méthode DG d'une part et celles produites par les méthodes SUPG et Bubbles d'autre part est réduit à $\sim 2$ km lorsque le maillage $N_z^r = 40$ est utilisé.

La comparaison des Figures 4.12a et 4.12b, met en lumière le fait que la dynamique de la ligne

d'échouage obtenue avec les différentes méthodes est également très sensible à la manière dont les éléments sont répartis selon la verticale : les retraits obtenus avec les deux maillages irréguliers sont significativement plus faibles que ceux obtenus avec les deux maillages réguliers correspondants. En effet, les positions de ligne d'échouage produites à l'issue des 10 ka de simulation avec le maillage $N_z^{ir} = 20$ (courbes en trait interrompu sur la Figure 4.12b) et avec les méthodes DG, SUPG et Bubbles sont localisées, respectivement, en $x_G = 195.8$ km, $x_G = 212.8$ km et $x_G = 218.5$ km ; cela représente, méthode par méthode, respectivement 57.6 km, 37.6 km et 41.0 km d'écart par rapport aux positions obtenues avec le maillage $N_z^r = 20$. De même, les écarts entre les positions obtenues avec le maillage $N_z^{ir} = 40$ et celles obtenues avec le maillage $N_z^r = 40$ s'élèvent à, respectivement, 43.4 km, 24.4 km et 23.4 km pour les méthodes respectives DG, SUPG et Bubbles. A nouveau, l'écart entre les différentes positions de ligne d'échouage produites par les différentes méthodes à l'issue des 10 ka de simulation se réduit lorsque la résolution du maillage augmente : ainsi les lignes d'échouage produites par les méthodes DG, SUPG et Bubbles avec le maillage $N_z^{ir} = 40$ se trouvent, respectivement, en $x_G = 205.5$ km, $x_G = 209.5$ km et $x_G = 211.9$ km, soit un écart de 6.4 km seulement entre la position la plus avancée (méthode Bubbles) et la position la plus reculée (méthode DG) - à comparer aux 22.7 km d'écart constatés entre les méthodes Bubbles et SUPG pour le maillage $N_z^{ir} = 20$.

Là encore, il est pertinent de regarder si les écarts entre les positions de ligne d'échouage obtenues avec les différentes méthodes à l'issue des 10 ka de simulation demeurent significatifs à plus court terme, i.e. après 1000 a de simulation. Pour le maillage $N_z^{ir} = 20$, les positions de ligne d'échouage obtenues, à $t = 1000$ a, avec les méthodes DG, SUPG et Bubbles se situent, respectivement, en $x_G = 283.1$ km, $x_G = 286.2$ km et $x_G = 286.4$ km, soit un écart maximum de l'ordre de 3 km. Cet écart se réduit à moins de 2 km pour le maillage $N_z^{ir} = 40$.

En résumé, la comparaison des résultats obtenus avec les maillages $N_z^r = 20$ et $N_z^{ir} = 20$ d'une part et ceux obtenus avec les maillages $N_z^r = 40$ et $N_z^{ir} = 40$ d'autre part suggère, sans surprise, une convergence des dynamiques de ligne d'échouage produites par les trois méthodes lorsque la résolution du maillage augmente. Il est néanmoins important de préciser que les calculs ont duré 16 jours pour le maillage $N_z^r = 40$ contre 4 jours seulement pour le maillage $N_z^r = 20$. En revanche, les simulations réalisées avec les deux maillages irréguliers se sont révélées nettement plus rapides que celles effectuées avec les deux maillages réguliers : les calculs ont duré respectivement 8 et 2.5 jours avec les maillages respectifs $N_z^{ir} = 40$ et $N_z^{ir} = 20$. Cela est vraisemblablement dû au fait que l'endommagement demeure plus longtemps localisé au voisinage de la frontière supérieure lorsque le maillage utilisé est irrégulier. Ce point est positif compte tenu du fait que, comme on peut le voir en comparant les résultats obtenus avec les deux maillages réguliers à ceux obtenus avec les deux maillages irréguliers, les dynamiques produites par les trois méthodes de stabilisation semblent plus

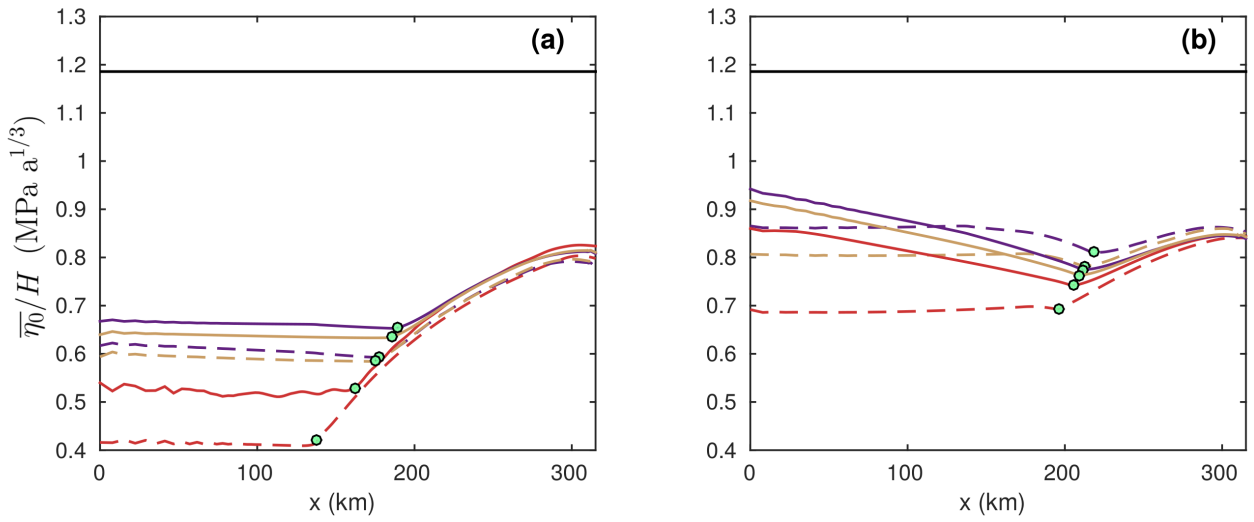


FIGURE 4.13 – Distributions de la viscosité moyennée verticalement $\overline{\eta_0}/H$ obtenues, à l'issue des 10 ka de simulation, avec les méthodes SUPG (marron), Bubbles (violet) et DG (rouge) et pour les maillages : **(a)** $N_z^r = 40$ (trait continu) et $N_z^r = 20$ (trait interrompu), puis **(b)** $N_z^{ir} = 40$ (trait continu) et $N_z^{ir} = 20$ (trait interrompu). La ligne noire reportée sur les deux graphes représente la viscosité de référence avant l'introduction de l'endommagement. Pour chacun des cas, un point vert signale la position de la ligne d'échouage correspondante.

robustes lorsque le maillage est plus raffiné au voisinage de la surface supérieure, région au sein de laquelle l'endommagement est créé.

Telle que l'expérience a été conçue, les différences observées en terme de dynamique de ligne d'échouage au cours des différentes simulations ne peuvent trouver leur origine que dans des différences sur les distributions de la viscosité verticalement intégrée - ces différences étant elles-mêmes dues à des différences sur le champ d'endommagement produit par les différentes combinaisons méthode de stabilisation/maillage testées. La Figure 4.13 montre, pour les maillages réguliers $N_z^r = 20$ et $N_z^r = 40$ (Figure 4.13a) ainsi que pour les maillages irréguliers $N_z^{ir} = 20$ et $N_z^{ir} = 40$ (Figure 4.13b), la distribution de la viscosité moyennée verticalement $\overline{\eta_0}/H$ ($\overline{\eta_0}$ représentant la viscosité intégrée verticalement) obtenue avec les différentes méthodes après 1000 a de simulation ainsi que la viscosité de référence, i.e celle correspondant à l'état stationnaire de départ avant l'introduction de l'endommagement. La viscosité est reliée à la fluidité $A$ (donnée dans le Tableau 4.2) par la relation $\eta_0 = (2EA)^{-1/n}$, où le facteur d'amplification $E$ est affecté par l'endommagement selon la relation (2.9). En particulier, nous rappelons qu'en l'absence d'endommagement $E = 1$, d'où une viscosité de référence donnée par $\eta_0 = (2A)^{-1/n}$ (lignes noires sur les Figures 4.13a et b). Comme on pouvait s'y attendre, l'amplitude du retrait que connaît la ligne d'échouage au cours des 10 ka qui suivent l'introduction de l'endommagement est directement liée à l'importance de la réduction de viscosité sur la partie posée. Le cas de la méthode SUPG associé au maillage $N_z^r = 20$

est assez représentatif : la viscosité moyenne a été divisée par $\sim 3$ sur la partie posée au cours de la simulation (ligne noire à comparer à la courbe rouge en trait interrompu sur la Figure 4.13a), or il s'avère que ce cas correspond au retrait le plus rapide.

Par ailleurs, pour toutes les simulations, on remarque que la viscosité moyenne augmente progressivement entre la ligne d'échouage et le front de la plateforme flottante. Cela s'explique par le fait qu'au cours du retrait de la ligne d'échouage, le critère d'endommagement - initialement positif sur une couche de faible épaisseur couvrant toute l'étendue horizontale du domaine - devient nul sur une section importante de la frontière supérieure de la plateforme flottante. Ainsi, comme le bilan de masse est positif et uniforme sur toute la frontière supérieure du domaine et que la glace pénétrant au sein du domaine est supposée vierge d'endommagement, la plateforme flottante est sans cesse alimentée par cette glace qui demeure vierge d'endommagement tout au long de son écoulement jusqu'au front de vêlage. Ainsi, la plateforme flottante est vierge d'endommagement sur une fraction de son épaisseur d'autant plus importante qu'on s'approche du front de vêlage : cette distribution d'endommagement se répercute directement sur la viscosité moyennée verticalement. A l'inverse, toute la glace accumulée sur la frontière supérieure de la partie posée traverse la couche au sein de laquelle le critère d'endommagement est positif où elle s'endommage avant de s'enfoncer à l'intérieur du domaine tout en étant advectée vers la plateforme flottante ; comme il n'y a pas de processus de cicatrisation, à la fin des 10 ka de simulation la partie posée est endommagée sur la quasi totalité de son épaisseur (Contrairement au cas de l' *"Ice Shelf Ramp"*, il n'y a pas d'apport de glace vierge d'endommagement par la frontière amont puisque celle-ci est un dôme avec la condition de Dirichlet $u(x = 0) = 0$).

#### 4.2.3.3 Discussion et conclusions

Indépendamment de la méthode choisie, l'introduction des processus d'endommagement se traduit par un retrait de la ligne d'échouage de l'ordre de la centaine de km pour les maillages irréguliers dans la direction $z$ et au-delà pour les maillages réguliers. Ce retrait est sans doute très sensible aux valeurs des paramètres du modèle d'endommagement mais nous n'avons pas testé cette sensibilité en raison de temps de calcul élevés et parce que ce n'était pas l'objet de cette étude. De plus, nous utilisons ici un modèle *SSA* pour déterminer les vitesses d'écoulement. Ce modèle ne considère que les contraintes longitudinales et néglige le cisaillement vertical et est donc susceptible de produire une distribution du critère d'endommagement différente de ce qu'aurait produit un modèle *full-Stokes*, en particulier au voisinage du dôme (en $x = 0$ km) où l'approximation de la *SSA* est notoirement inappropriée du fait de contraintes de cisaillement vertical significatives. De fait, il est probable qu'un modèle *SSA* ait tendance à exagérer l'étendue horizontale des zones au sein desquelles l'endommagement est créé, particulièrement dans les régions situées loin en amont

de la ligne d'échouage, par rapport à un modèle *full-Stokes*. En l'occurrence, le modèle *SSA* que nous avons utilisé pour ces expériences produit une distribution initiale de $\chi$ prenant la forme d'une bande de quelques dizaines de mètres de profondeur et couvrant toute l'étendue horizontale de la frontière supérieure ; au delà de cette profondeur, la pression cryostatique est telle que la contrainte principale maximale ne parvient plus à excéder la contrainte seuil. Cette distribution induit une formation d'endommagement au voisinage de la frontière supérieure sur toute l'étendue horizontale du domaine. Comme notre modèle d'endommagement n'intègre pas les processus de cicatrisation et comme il n'y a pas d'apport de glace vierge d'endommagement via la frontière amont, la partie posée du domaine est, à l'issue des 10 ka de simulation, fortement endommagée sur la quasi totalité de son épaisseur. Cet état de fait est peu réaliste puisqu'on s'attend à ce que, au-delà d'une certaine profondeur, la pression cryostatique soit telle que la glace recouvre son intégrité mécanique. Cela souligne l'importance de se pencher sur l'implémentation d'un mécanisme de cicatrisation au sein du modèle d'endommagement.

L'expérience présentée dans cette section a permis de montrer que les méthodes de stabilisation nécessaires à l'advection de l'endommagement produisent des dynamiques de ligne d'échouage significativement différentes lorsque le maillage est insuffisamment raffiné spatialement. En particulier, les résultats obtenus avec la méthode DG diffèrent nettement de ceux produits par les méthodes SUPG et Bubbles pour le maillage $N_z^r = 20$ et, dans une moindre mesure, pour le maillage $N_z^{ir} = 20$. Cela est problématique étant donné que notre objectif initial était justement de remplacer la méthode DG par l'une des deux autres méthodes. Lorsqu'on raffine le maillage, particulièrement au voisinage de la frontière supérieure où l'endommagement est créé, les trois méthodes semblent néanmoins converger vers la même solution. Cependant, bien que nous ayons eu recours à un modèle *SSA* et à une géométrie 2D le long d'une ligne d'écoulement volontairement peu étendue dans la direction horizontale, les calculs associés aux simulations utilisant le maillage $N^{ir} = 40$ ont duré $\sim 8$ jours. Un point positif réside dans le fait que ces calculs furent nettement moins longs que ceux associés au maillage $N^r = 40$. Néanmoins, si on venait à intégrer le modèle de crevasse basale décrit à la section 4.1.2, dont la prise en compte induit la création d'endommagement au voisinage de la frontière inférieure du domaine, il faudrait également mailler finement cette région et on se retrouverait probablement de nouveau avec des temps de calcul excessifs. De manière générale, ces temps de calcul importants sont un réel frein au développement du modèle d'endommagement, d'autant plus quand on sait qu'il serait préférable de traiter l'endommagement en *full-Stokes* et que de multiples tests de sensibilité s'avèrent souvent nécessaires pour attribuer une valeur aux différents paramètres du modèle qui sont assez mal contraints. Compte tenu de ces difficultés, nous n'avons pas poussé plus loin les expériences ayant trait à l'endommagement.

## 4.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté la loi d'évolution de l'endommagement qui régit sa création et son advection avec l'écoulement. Différents critères sont utilisés par les glaciologues pour caractériser les zones au sein desquelles l'état de contrainte est propice à la formation d'endommagement. Dans notre cas, nous utilisons un critère simple consistant à créer de l'endommagement dans les régions où la contrainte principale maximale de Cauchy est supérieure à une contrainte seuil $\sigma_{th}$. Ce paramètre a un sens physique - il caractérise la résistance de la glace à la traction - mais sa valeur est fonction d'autres grandeurs physiques et peut varier du simple au triple (Vaughan, 1993). Un paramètre d'amplification $B$ permet de réguler le niveau d'endommagement créé ; sa valeur doit être choisie en fonction de la valeur retenue pour $\sigma_{th}$ et nécessite souvent d'être ajustée de manière empirique. Par ailleurs, bien que plusieurs auteurs aient rapporté l'existence de phénomènes de cicatrisation de la glace fracturée, le modèle implémenté au sein d'*Elmer/Ice* ne tient pas compte de cet aspect à l'heure actuelle ; lorsque le bilan de masse de surface est positif cela se traduit par un enfoncement progressif de l'endommagement qui finit par affecter une fraction importante de l'épaisseur du domaine, ce qui est sans doute peu réaliste.

Les paramètres du modèle d'endommagement étant mal contraints, il est nécessaire de multiplier les simulations afin d'ajuster leurs valeurs jusqu'à obtenir des comportements réalistes, en particulier en ce qui concerne la distribution spatiale du critère d'endommagement. Afin de réduire le coût numérique qu'implique la résolution des équations *full-Stokes*, nous avons réalisé de légers développements de manière à ce que le modèle d'endommagement, défini en 3D (ou 2D pour des géométries le long d'une ligne d'écoulement), soit compatible avec les modules de la *SSA*, définie en 2D (ou 1D pour des géométries le long d'une ligne d'écoulement). D'autre part, la mise en évidence de l'existence de crevasses basales sous les plateformes d'Antarctique susceptibles de pénétrer sur d'importantes hauteurs de glace a motivé la modification du critère d'endommagement de manière à rendre compte de ce phénomène. Malheureusement, l'exploitation de ce nouveau module a tourné court suite à la mise en évidence des problèmes numériques associés à la stabilisation de l'équation d'advection.

En effet, une fois l'endommagement créé, celui-ci est advecté avec l'écoulement. L'équation d'advection est un cas particulier de l'équation d'advection-diffusion pour lequel la diffusion est inexistante. Or, lorsque la diffusion est très faible devant l'advection, la résolution numérique de ce type d'équation est particulièrement ardue et les solutions obtenues sont sujettes à des oscillations non physiques. Trois méthodes implémentées au sein d'*Elmer/Ice* - les méthodes SUPG, Bubbles et DG - visent à stabiliser les solutions par divers moyens mathématiques. A ces trois méthodes s'ajoute une quatrième, la méthode Semi-Lagrangienne, dont la nature est différente ; bien qu'elle permette également d'aborder les problèmes d'advection, sa non-compatibilité actuelle avec la pa-

rallélisation des calculs rend nécessaire de nouveaux développements avant d'en faire une méthode envisageable pour nos applications. Des expériences "banc d'essai" ont été conçues afin de comparer la capacité de ces différentes méthodes à (1) limiter la diffusion numérique non désirée au cours de l'advection d'une quantité scalaire (2) produire une solution exempte d'oscillations résiduelles. Les résultats obtenus au cours de ces expériences montrent que des pas de temps et tailles de maille suffisamment faibles sont requis afin de limiter la diffusion numérique et d'obtenir des solutions relativement stables. Au regard de ces critères, c'est la méthode DG qui apparaît être la meilleure. Malheureusement, cette méthode pose d'autres problèmes et nous avons cherché à la remplacer par les méthodes SUPG ou Bubbles. Cependant, la dernière expérience présentée à la fin de ce chapitre montre que la dynamique de la ligne d'échouage est affectée de manière significative par le choix de la méthode de stabilisation pour des résolutions spatio-temporelles associées à des temps de calcul déjà importants pour une géométrie 2D abordée en *SSA*. Cette dépendance est problématique car elle se traduit nécessairement par de larges incertitudes d'origine numérique sur toute projection intégrant les effets de l'endommagement, qui viennent s'ajouter aux incertitudes déjà grandes liées au choix du critère d'endommagement et des valeurs à assigner aux paramètres $\sigma_{th}$ et $B$.

Chapitre 5

# Influence du frottement basal sur la dynamique de la ligne d'échouage

## Sommaire


**5.1 Frottement à la ligne d'échouage : aspect numérique . . . . . 122**
5.1.1 Présentation de la problématique . . . . . 122
5.1.2 Expérience 3 de MISMIP . . . . . 127
5.1.3 Expériences P75S et P75R de MISMIP3D . . . . . 132
5.1.4 Discussion et Conclusions . . . . . 137
**5.2 Importance du choix de la loi de frottement . . . . . 138**
5.2.1 Présentation de la problématique . . . . . 138
5.2.2 Méthodologie . . . . . 141
5.2.3 Résultats . . . . . 147
5.2.4 Discussion et Conclusions . . . . . 156
**5.3 Conclusion . . . . . 163**


Le précédent chapitre traitait de l'influence de l'endommagement sur la dynamique de la ligne d'échouage. Ce fut l'occasion de mettre en évidence la sensibilité potentiellement importante des sorties du modèle aux schémas numériques employés pour résoudre les équations. D'une manière générale, le modélisateur doit toujours s'assurer que les résultats qu'il obtient ne sont pas la conséquence d'artefacts numériques mais possèdent une réelle signification physique.

Dans ce chapitre, nous commençons par aborder le problème de la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage aux méthodes numériques. Plus précisément, nous testons différents schémas numériques permettant de traiter le cas d'un frottement discontinu à la ligne d'échouage et analysons l'impact de ce choix sur la dynamique de celle-ci pour différents raffinements du maillage. Ces travaux, auxquels j'ai contribué au cours de cette thèse, ont été publiés dans le journal *The Cryosphere* par Gagliardini *et al.* (2016).

La seconde partie du chapitre s'intéresse à la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement. A cette fin, nous construisons un protocole expérimental basé sur une géométrie synthétique permettant de comparer la réponse dynamique de la ligne d'échouage à une perturbation pour les lois de frottement de Weertman (2.15), de Budd (2.16), de Schoof (2.18) et de Tsai (2.22). Nous abordons également la problématique du choix des paramètres. L'ensemble des travaux présentés dans cette partie a également fait l'objet d'une publication dans *Journal of Glaciology* (Brondex *et al.*, 2017).

## 5.1 Frottement à la ligne d'échouage : aspect numérique

### 5.1.1 Présentation de la problématique

#### 5.1.1.1 Contexte

La Section 3.2.4 nous a permis de montrer que la dynamique de la ligne d'échouage simulée par différents modèles appliquant le même protocole expérimental varie selon le degré d'approximation des équations de Stokes du modèle employé. Dans cette même section, nous avons brièvement évoqué le fait qu'une des conditions nécessaires à une modélisation acceptable de la dynamique de la ligne d'échouage est que le maillage en son voisinage soit suffisamment fin. C'est l'étude de Vieli et Payne (2005) qui, la première, tire la sonnette d'alarme : les résultats obtenus par des modèles utilisant des grilles de maillage fixes diffèrent nettement selon la résolution horizontale de ces maillages. Suite à cette publication, la communauté prend conscience de la nécessité d'améliorer la modélisation de la ligne d'échouage et de l'importance de vérifier la robustesse numérique des nouveaux développements.

Concrètement, cette robustesse numérique se mesure selon deux critères principaux. Ces critères reposent sur la démonstration semi-analytique de Schoof (2007a,b), confirmée numériquement par Nowicki et Wingham (2008) puis par Durand *et al.* (2009b), selon laquelle une calotte marine ne produit pas d'équilibre neutre mais présente au contraire un nombre fini d'états d'équilibre possibles. En particulier, dans le cas où le socle est descendant dans le sens de l'écoulement, un jeu de paramètres et de conditions aux limites donné est associé à une unique position d'équilibre de la ligne d'échouage. Par conséquent, pour qu'un modèle soit robuste numériquement, il faut que les positions d'équilibre qu'il produit soient indépendantes du raffinement du maillage. Le second critère est un critère de réversibilité : la ligne d'échouage d'une calotte soumise à une perturbation doit revenir à sa position initiale lorsque la perturbation est retirée. Ces deux critères s'intéressent à la ligne d'échouage d'un point de vue statique, et il convient également de juger de la robustesse d'un modèle d'un point de vue dynamique. Concrètement, il s'agit de vérifier que le "chemin dynamique" suivi par une ligne d'échouage perturbée pour se rendre de son état d'équilibre initial à son état d'équilibre final est indépendant du maillage choisi.

Malgré les importants efforts déployés à la suite de la publication de Vieli et Payne (2005) pour développer de nouveaux modèles, nombre d'entre eux continuent de souffrir d'une grande sensibilité au raffinement à la ligne d'échouage. Par exemple, Durand *et al.* (2009b,a) montrent, avec le module *full-Stokes* d'*Elmer/Ice*, qu'une taille de maille inférieure à 5 km est nécessaire pour satisfaire le critère d'unicité de la position d'équilibre de la ligne d'échouage. Le critère de réversibilité, quant à lui, peine à être satisfait : on observe un écart de $\sim 2$ km entre les positions d'équilibre obtenues en avancée et en retrait pour des paramètres identiques malgré un raffinement

à la ligne d'échouage réduit à 30 m. Les expériences MISMIP et MISMIP3D révèlent qu'*Elmer/Ice* n'est pas seul concerné par cette sensibilité à la taille de maille, mais que celle-ci est inhérente à tous les modèles qui ne prescrivent pas le flux semi-analytique de Schoof (2007a,b) comme condition limite à la ligne d'échouage (Pattyn *et al.*, 2012, 2013).

Les cinq études citées ci-dessus (Vieli et Payne, 2005; Durand *et al.*, 2009b,a; Pattyn *et al.*, 2012, 2013) ont en commun de faire appel à une loi de frottement de Weertman (2.15) dont le coefficient $C_W$ est uniforme et constant sur la partie posée. Cela induit une discontinuité peu réaliste du frottement à la ligne d'échouage, qui passe instantanément d'une certaine valeur non nulle sous la partie posée à zéro sous la partie flottante. Il est alors légitime de se demander si l'importante sensibilité numérique rapportée par ces différentes études n'est pas due, ou tout au moins exacerbée, par le saut de frottement à la ligne d'échouage. Deux études menées avec des modèles *SSA* - celles de Leguy *et al.* (2014) et de Seroussi *et al.* (2014a) - et une troisième conduite avec un modèle *full-Stokes* par Gladstone *et al.* (2017), apportent des éléments de réponse à cette question.

L'étude de Leguy *et al.* (2014) reprend, avec un modèle *SSA*, les expériences MISMIP en remplaçant la loi de Weertman (2.15) par une loi de Schoof (2.18) associée à une paramétrisation de la pression effective au voisinage de la ligne d'échouage qui induit naturellement une décroissance progressive de la contrainte basale dans cette zone. Notons néanmoins que remplacer une loi de frottement par une autre, comme le font Leguy *et al.* (2014), implique une modification de la physique du modèle ; le problème ainsi traité diffère du problème de référence construit par Pattyn *et al.* (2012). La démarche adoptée plus tard par Gladstone *et al.* (2017) avec un modèle *full-Stokes* est analogue mais leur protocole expérimental diffère légèrement de celui des expériences MISMIP d'origine, notamment en ce qui concerne les perturbations utilisées pour obtenir la réponse dynamique de la ligne d'échouage. Par ailleurs, contrairement à Leguy *et al.* (2014), Gladstone *et al.* (2017) ne font pas appel à la loi de Schoof (2.18) mais testent, en plus de la loi de Weertman (2.15), trois variantes de la loi de Budd (2.16) paramétrées de manière à induire différentes distances caractéristiques de la diminution du frottement au voisinage de la ligne d'échouage. Pour autant, les deux études aboutissent à des conclusions similaires : les dynamiques de ligne d'échouage obtenues avec des lois de frottement induisant une réduction progressive de la contrainte de cisaillement basale à l'approche de la ligne d'échouage s'avèrent moins sensibles à la résolution du maillage.

Dans un esprit un peu différent, Seroussi *et al.* (2014a) réitèrent, avec un modèle *SSA*, les expériences MISMIP3D en intégrant une paramétrisation sous-maille du frottement. La paramétrisation sous-maille a été employée par plusieurs auteurs par le passé (Pattyn *et al.*, 2006; Gladstone *et al.*, 2010; Winkelmann *et al.*, 2011). Elle repose sur le fait que les modèles faisant l'approximation hydrostatique peuvent déduire la position de la ligne d'échouage directement à partir du critère de flottaison (3.25). Dès lors, la ligne d'échouage peut être localisée en tout point du domaine et

pas nécessairement en des nœuds du maillage. Les éléments qui contiennent la ligne d'échouage sont donc partiellement posés et partiellement flottants ; leurs parties posées contribuent au frottement total. Une fois la position de la ligne d'échouage déterminée, différentes paramétrisations permettent de prendre en compte cette contribution. Seroussi *et al.* (2014a) testent trois types de paramétrisation sous-maille et montrent que les critères d'unicité de la position de la ligne d'échouage et de réversibilité sont satisfaits pour des résolutions numériques sensiblement plus faibles que celles requises lorsqu'il n'y pas de paramétrisation sous-maille. La dynamique de la ligne d'échouage est également moins sensible à la taille de maille, mais celle-ci doit néanmoins rester suffisamment faible (Cornford *et al.*, 2016). Insistons sur le fait que cette méthode consiste uniquement en une modification du traitement numérique du frottement, le problème physique restant inchangé. Bien sûr, la discontinuité du frottement à la ligne d'échouage donne tout son intérêt à cette méthode et il semble probable que les améliorations que l'on obtiendrait dans le cas d'un frottement diminuant progressivement vers zéro au sein de la zone de transition seraient moins spectaculaires.

Le problème de contact du modèle *full-Stokes* est donné par les conditions afférentes aux équations (3.17) et (3.18). Ce problème ne peut être résolu qu'aux nœuds du maillage, ce qui exclut l'emploi de la paramétrisation sous-maille. Néanmoins, la discontinuité du frottement à la ligne d'échouage peut recevoir différents traitements numériques dont l'effet sur la migration de cette dernière n'a jamais été étudié. A l'aune des résultats obtenus par Seroussi *et al.* (2014a), il parait opportun de reprendre les expériences MISMIP et MISMIP3D afin d'évaluer l'influence de ces différents traitements numériques en fonction de la résolution du maillage. Cela est d'autant plus nécessaire que les résultats obtenus par *Elmer/Ice* pour ces expériences servent de référence pour les modèles approximés et de bancs d'essai pour le développement de nouveaux modèles *full-Stokes* (Feldmann *et al.*, 2014; Zhang *et al.*, 2017, par exemple). Par ailleurs, nous profitons de ces expériences pour tester si, comme l'ont observé Leguy *et al.* (2014) puis Gladstone *et al.* (2017), une diminution progressive du frottement à la ligne d'échouage induit une moindre sensibilité de la dynamique de celle-ci à la résolution du maillage. Dans le paragraphe suivant, nous commençons par détailler les différents traitements numériques possibles de la discontinuité en frottement à la ligne d'échouage.

#### 5.1.1.2 Traitement du problème de contact par Elmer/Ice

La procédure permettant la résolution du problème de contact, présenté à la Section 3.1.3.2, par *Elmer/Ice* a été décrite par Durand *et al.* (2009b). Physiquement, la ligne d'échouage constitue la frontière entre la partie de la surface inférieure du domaine posée sur le socle et la partie qui flotte sur l'océan. En *full-Stokes*, ce sont les conditions (3.17) et (3.18) qui déterminent si un point de la surface inférieure du domaine est posé ou flottant : pour qu'un point soit effectivement posé

il faut non seulement que $z(x, y, t) = b(x, y)$ mais aussi que la contrainte normale exercée par la glace sur le socle en ce point soit supérieure à la pression exercée par l'océan. Numériquement, l'effectivité du contact glace/socle ne peut être testée qu'aux nœuds du maillage en comparant la force exercée par la glace sur le socle à la force exercée par la pression de l'eau de mer ; la première est évaluée à partir du résidu du système de Stokes introduit à la Section 3.3.1.4, tandis que la seconde est obtenue en intégrant la pression de l'eau sur les éléments adjacents. Ainsi, un élément est considéré comme posé si, en chacun de ses nœuds, la force exercée par la glace sur le socle est strictement supérieure à la force de pression exercée par l'eau. Si un seul de ses nœuds ne satisfait pas cette condition, l'élément est considéré comme flottant. La ligne d'échouage est alors définie comme l'ensemble des derniers nœuds posés, c'est-à-dire l'ensemble des nœuds appartenant à la fois à un élément posé et à un élément flottant.

Par ailleurs, la ligne d'échouage délimite la partie de la surface inférieure du domaine sur laquelle s'applique le frottement de celle où s'exerce la pression de l'océan ; il s'agit des couples de conditions aux limites respectifs (3.9), (3.10) et (3.11), (3.12). Comme cela a été décrit à la Section 3.3.1.5, la prise en compte du frottement au sein du système éléments finis passe par l'intégration numérique de celui-ci sur chacun des éléments. Cette intégration numérique s'appuie sur la méthode de Gauss qui nécessite de connaître la valeur du coefficient de frottement $C_W$ aux points de Gauss. Dans la mesure où nous avons recours à des éléments linéaires (cf Section 3.3.1), ces valeurs sont déduites des valeurs nodales par interpolation linéaire. Lorsque le frottement présente une discontinuité à la ligne d'échouage, toute la question est de savoir quelle valeur du coefficient $C_W$ doit être affectée aux nœuds correspondant à la ligne d'échouage. Comme le montre la Figure 5.1, trois points de vue peuvent être adoptés. D'abord, on peut considérer que la ligne d'échouage est un nœud posé et qu'à ce titre on doit lui appliquer un coefficient de frottement non nul ; c'est la méthode dénommée LG pour "*Last Grounded*" en anglais. Mais avec cette méthode, du fait de l'interpolation linéaire, le premier élément flottant verra un frottement non nul. Ensuite, on peut percevoir la ligne d'échouage comme étant le premier point à ne plus ressentir l'effet du socle et auquel cas, il est naturel de lui affecter un coefficient de frottement nul ; c'est la méthode dénommée FF pour "*First Floating*" en anglais. Cependant, dans le cas des expériences MISMIP et MISMIP3D pour lesquelles $C_W$ est non nul sur toute la partie posée, l'interpolation linéaire va induire un affaiblissement non désiré du frottement sur le dernier élément posé. Enfin, il est possible d'adopter une démarche intermédiaire consistant à adapter la valeur du coefficient de frottement à la ligne d'échouage en fonction de l'élément sur lequel se fait l'intégration : cette valeur sera non nulle si l'intégration du frottement se fait sur un élément complètement posé et nulle dans le cas contraire. Avec cette méthode, que nous dénommons DI pour "*DIscontinuous*" en anglais, on obtient une discontinuité du frottement à la ligne d'échouage. De fait, la méthode DI apparaît comme étant la plus fidèle à la physique

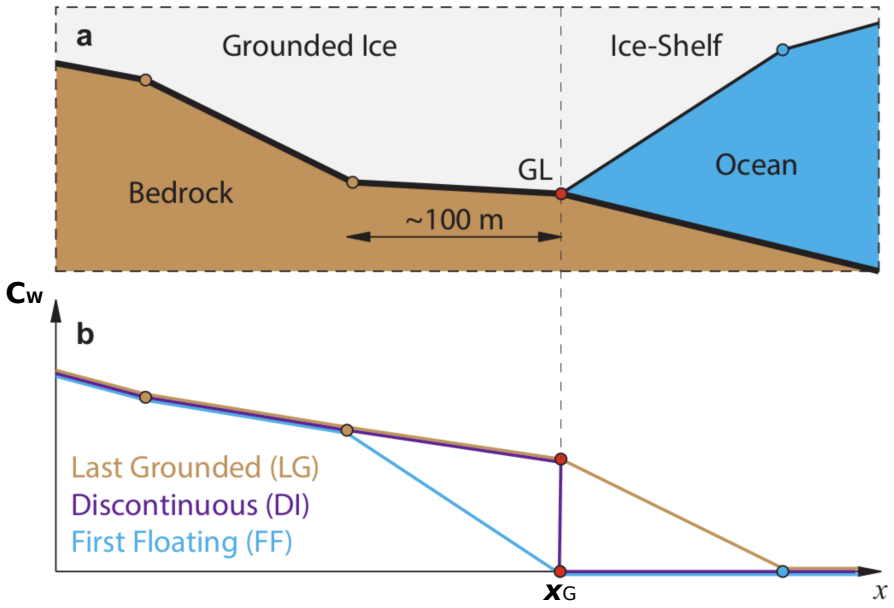


FIGURE 5.1 – Représentation des trois différents traitements numériques possibles du frottement à la ligne d'échouage pour une géométrie 2D le long d'une ligne d'écoulement. **(a)** Zoom sur la ligne d'échouage définie comme le nœud appartenant à la fois à un élément posé et à un élément flottant et **(b)** valeur du coefficient $C_W$ pour les trois méthodes : la ligne d'échouage est vue comme le dernier nœud posé et $C_W$ y est non nul (LG), la ligne d'échouage est vue comme le premier nœud flottant et $C_W$ y est nul (FF), $C_W$ est non nul à la ligne d'échouage mais le frottement n'est intégré que sur les éléments complètement posés (DI).

du problème envisagé. En regardant la Figure 5.1, il est clair que les trois méthodes deviennent parfaitement équivalentes si $C_W$ décroît progressivement jusqu'à être nul à la ligne d'échouage. Cette figure permet également de percevoir que la différence entre les trois méthodes devient de plus en plus ténue à mesure que le raffinement du maillage au voisinage de la ligne d'échouage augmente.

Jusque là, l'interpolation du frottement à la ligne d'échouage dans *Elmer/Ice* se faisait via la méthode LG. En particulier, les résultats publiés pour *Elmer/Ice* dans le cadre des exercices MISMIP et MISMIP3D ont été obtenus avec cette méthode (Pattyn *et al.*, 2012, 2013). L'étude que nous présentons ici comporte deux séries d'expériences : la première est basée sur la géométrie 2D le long d'une ligne d'écoulement utilisée pour l'expérience 3 de l'exercice d'intercomparaison MISMIP (Pattyn *et al.*, 2012) ; la seconde reprend les expériences tridimensionnelles P75S et P75R de MISMIP3D (Pattyn *et al.*, 2013). Dans les deux cas, les trois méthodes numériques décrites ci-dessus sont testées et, dans le premier cas seulement, nous évaluons également l'effet d'une diminution progressive du frottement en amont de la ligne d'échouage sur la robustesse numérique du modèle.

### 5.1.2 Expérience 3 de MISMIP

#### 5.1.2.1 Méthodologie

L'expérience 3 de l'exercice MISMIP est basée sur la géométrie idéalisée 2D le long d'une ligne d'écoulement d'une calotte marine reposant sur un socle localement rétrograde, et donc sujette au phénomène de MISI décrit au Chapitre 1. La loi de frottement utilisée est une loi de Weertman (2.15) non linéaire avec un exposant $m = 1/3$ et un coefficient de frottement stationnaire et uniforme fixé à $C_{W2D} = 2.413 \times 10^4$ Pa m$^{-1/3}$ a$^{1/3}$. Dans le cadre de MISMIP, la vocation de cette expérience est de s'assurer que les modèles ne produisent pas de position stable de la ligne d'échouage sur la pente rétrograde. Néanmoins, dans notre étude, nous ne nous intéressons pas à cette propriété et faisons en sorte que la ligne d'échouage reste en amont de la zone d'instabilité tout au long de l'expérience.

Le but de cette première série d'expériences est de tester, en fonction de la résolution du maillage, le critère d'unicité de la position de la ligne d'échouage pour les différents traitements numériques du frottement présentés dans la section précédente ainsi que pour le cas d'une décroissance progressive du frottement en amont de la ligne d'échouage. Pour cela, nous commençons par construire deux géométries stationnaires initiales : la première, correspondant à l'étape 1 de l'expérience 3 de MISMIP, est obtenue en prescrivant une fluidité $A_1 = 9.47 \times 10^{-18}$ s$^{-1}$ Pa$^{-3}$ ; la seconde, correspondant à l'étape 5 de cette même expérience, est obtenue avec une fluidité $A_5 = 3.16 \times 10^{-18}$ s$^{-1}$ Pa$^{-3}$. A l'instant $t = 0$ a, ces deux géométries stationnaires se voient appliquer une perturbation consistant à remplacer instantanément les fluidités $A_1$ et $A_5$ par la fluidité $A_4 = 4.73 \times 10^{-18}$ s$^{-1}$ Pa$^{-3}$ correspondant à l'étape 4 de l'expérience 3 originelle. On laisse alors évoluer les lignes d'échouage des deux géométries. Dans le premier cas, la ligne d'échouage avance vers son nouvel état d'équilibre, alors que dans le second cas le nouvel état d'équilibre est atteint en retrait. Ces deux états d'équilibre sont théoriquement identiques car les paramètres utilisés pour les obtenir sont identiques. Dans les faits, on observe un écart entre les positions d'équilibre obtenues en avancée et en retrait qui décroît lorsque la résolution du maillage augmente. Cet écart est donc un artefact numérique dont la mesure permet, à une résolution donnée, de quantifier la précision numérique du modèle.

Afin de pouvoir aussi tester l'influence d'un frottement diminuant progressivement vers zéro à la ligne d'échouage, on remplace le coefficient de frottement d'origine $C_{W2D}$ par un nouveau coefficient $C^*_{W2D}$ défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C^*_{W2D} &= C_{W2D} \quad \text{si} \quad x \leq x_G - L, \\ C^*_{W2D} &= C_{W2D}(x_G - x)/L \quad \text{si} \quad x_G - L \leq x \leq x_G, \\ C^*_{W2D} &= C_{W2D} = 0 \quad \text{si} \quad x \geq x_G. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dans l'équation (5.1), $x_G$ désigne la position de la ligne d'échouage et $L$ caractérise la distance sur laquelle s'opère la décroissance linéaire du coefficient de frottement $C^*_{W2D}$. Nous testons les valeurs

$L = 0$ m, $L = 60$ m et $L = 500$ m. Comme la valeur de $C^*_{W2D}$ est estimée aux nœuds du maillage puis interpolée linéairement sur les éléments, on s'attend à obtenir les mêmes solutions quelque soit la valeur de $L$ lorsque celle-ci est inférieure à la taille de maille à la ligne d'échouage. Dans le cas où $L = 0$ m, on a $C^*_{W2D} = C_{W2D}$, ce qui correspond à un frottement discontinu à la ligne d'échouage ainsi qu'il est prescrit dans l'expérience MISMIP d'origine. Dans ce cas, nous testons les trois méthodes numériques LG, FF et DI introduites à la Section 5.1.1. Il a été vérifié que, conformément à nos attentes, ces trois méthodes produisent des solutions parfaitement identiques dans le cas où $L$ est supérieur à la taille de maille. Enfin, soulignons à nouveau que, dans ce cas, la physique du problème résolu diffère de celle du problème d'origine et qu'on peut d'ores et déjà s'attendre à obtenir des positions stationnaires de ligne d'échouage différentes selon la valeur retenue pour $L$.

Afin d'évaluer si les différents traitements numériques envisagés permettent de diminuer la sensibilité de la précision numérique du modèle à la résolution du maillage au voisinage de la ligne d'échouage, nous testons différentes discrétisations dans la direction de l'écoulement. Dans tous les cas, on prescrit une taille de maille constante au sein d'une région fortement résolue centrée sur la ligne d'échouage. En amont et en aval de cette région, la taille de maille suit une progression géométrique de telle sorte qu'il n'y ait pas de discontinuité flagrante au niveau des limites de cette région. Ce maillage est illustré, pour une partie du domaine contenant la ligne d'échouage, sur la Figure 5.2. A chaque déplacement de la ligne d'échouage, le maillage est réajusté automatiquement de manière à ce que celle-ci se trouve en permanence au centre de la région fortement résolue : la répartition horizontale des nœuds est modifiée mais le nombre total de nœuds reste le même. Les différentes résolutions numériques testées sont définies par la taille des mailles au sein de la région fortement résolue contenant la ligne d'échouage. En l'occurrence, les expériences sont menées pour les quatre discrétisations suivantes : 200 m, 100 m, 50 m et 25 m.

#### 5.1.2.2 Résultats

La Figure 5.3 représente, pour les trois valeurs de $L$ et les trois méthodes numériques LG, FF et DI dans le cas où $L = 0$ m, l'évolution de la position de la ligne d'échouage en fonction du temps. Quelque soit la résolution du maillage, on observe une avancée de la ligne d'échouage lorsque la fluidité est diminuée de $A_1$ à $A_4$ (courbes en trait continu sur la Figure 5.3). En revanche, si l'augmentation de la fluidité de $A_5$ à $A_4$ conduit à un retrait de la ligne d'échouage dans la plupart des cas, une résolution de 200 m s'avère trop grossière pour permettre le recul de celle-ci lorsque la méthode LG est employée (courbe marron en trait interrompu sur la Figure 5.3).

Les positions d'équilibre obtenues en avancée et en retrait ainsi que l'écart entre ces deux positions sont représentés, en fonction de la résolution, sur la Figure 5.4. Dans le cas où $L = 0$ m,

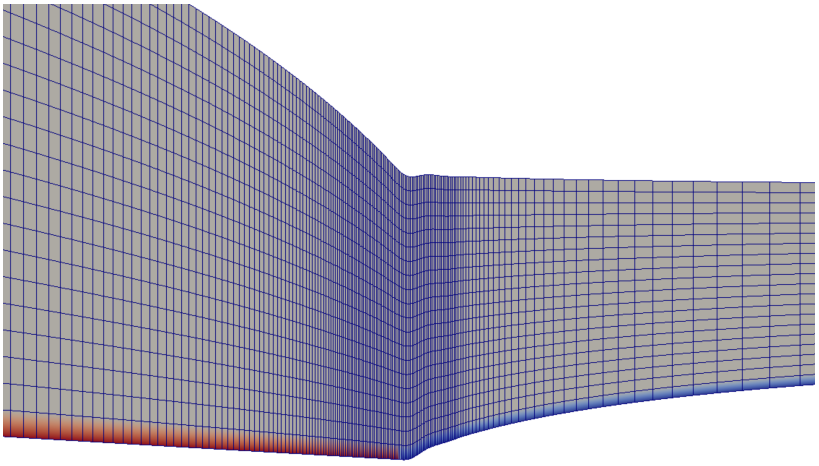

FIGURE 5.2 – Illustration du maillage employé pour l'expérience 3 de MISMIP. Les nœuds posés sont en rouge, les nœuds flottants sont en bleu et la ligne d'échouage est à l'interface entre les deux. La région fortement résolue reste en permanence centrée sur la ligne d'échouage et est caractérisée par une taille de maille constante. En amont et en aval de cette région, la taille de maille suit une progression géométrique et le maillage est adapté à chaque déplacement de la ligne d'échouage. L'échelle verticale est exagérée 30 fois par rapport à l'échelle horizontale.

les trois méthodes LG, FF et DI convergent, comme prévu, vers la même position d'équilibre à mesure que la taille de maille diminue (Figure 5.4a). Néanmoins, en comparant les Figures 5.4a et b, on constate que la différence entre les positions d'équilibre obtenues par les trois méthodes pour une résolution donnée est du même ordre de grandeur que l'écart entre les positions d'équilibre obtenues en avancée et en retrait pour une méthode donnée. Ainsi, pour une résolution de 200 m, la différence entre les positions obtenues avec les méthodes LG et FF excède 15 km tant en avancée qu'en retrait. Pour une résolution de 25 m ces écarts de position sont réduits à moins de 2 km tant en avancée qu'en retrait. A titre de comparaison, pour une méthode donnée, l'écart entre les positions obtenues en avancée et en retrait s'élève à $\sim$ 25 km pour une résolution de 200 m et est réduit à moins de 3 km pour une résolution de 25 m. Par ailleurs, notons que les positions d'équilibre obtenues avec la méthode LG sont systématiquement les plus avancées. Quant à la position obtenue avec la méthode DI, elle se trouve presque exactement à mi-chemin entre celles obtenues avec les méthodes LG et FF. Ces résultats ne sont pas surprenants étant donné que la méthode LG attribue un frottement non nul au premier élément en aval de la ligne d'échouage tandis que la méthode FF sous-estime le frottement sur le dernier élément en amont.

Les cas d'étude $L = 60$ m et $L = 200$ m ont pour but d'évaluer si, comme l'ont constaté Leguy *et al.* (2014) avec un modèle *SSA* puis Gladstone *et al.* (2017) avec un modèle *full-Stokes*, le comportement de la ligne d'échouage affiche une moindre sensibilité à la résolution numérique lorsque le frottement décroît progressivement jusqu'à atteindre zéro à la ligne d'échouage. Comme

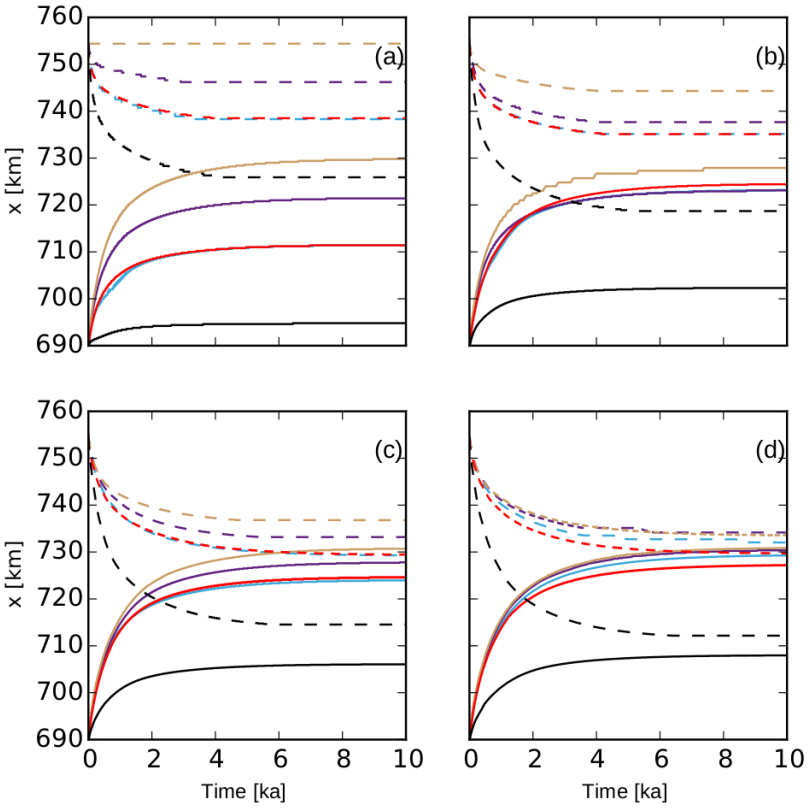


FIGURE 5.3 – Expérience 3 de MISMIP, de l'étape 1 à l'étape 4 (avancée, trait continu) et de l'étape 5 à l'étape 4 (retrait, trait interrompu) : position de la ligne d'échouage en fonction du temps pour $L = 0$ m et les méthodes numériques LG (marron), DI (violet) et FF (bleu), $L = 60$ m (rouge) et $L = 500$ m (noir). Les quatre panneaux correspondent aux résolutions **(a)** 200 m, **(b)** 100 m, **(c)** 50 m, **(d)** 25 m.

nous l'avons souligné précédemment, dès lors que $L$ n'est pas nul, le problème physique est modifié : plus $L$ est grand, plus le frottement total est réduit et plus la position d'équilibre de la ligne d'échouage est reculée. C'est la raison pour laquelle les positions d'équilibre obtenues avec $L = 500$ m (respectivement $L = 60$ m) se trouvent plusieurs dizaines de km (respectivement plusieurs km) en amont des positions obtenues avec $L = 0$ m (Figures 5.3 et 5.4a). Il s'avère qu'une diminution progressive du frottement en amont de la ligne d'échouage (traits noir et rouge sur la Figure 5.4b) n'améliore pas la précision numérique du modèle dans notre cas. Ainsi, les erreurs les plus importantes sont systématiquement associées au cas où $L = 500$ m, mais la différence avec les erreurs associées aux autres valeurs de $L$ ne semble pas significative et la décroissance de cette erreur avec la diminution de la taille de maille est similaire pour toutes les expériences menées. Ce résultat va à l'encontre de ceux obtenus par Leguy *et al.* (2014) puis, plus tard, par Gladstone *et al.* (2017). Rappelons tout d'abord que Leguy *et al.* (2014) utilisent un modèle *SSA* tandis que Gladstone *et al.* (2017) ainsi que nous-même faisons appel à un modèle *full-Stokes*. En outre, le

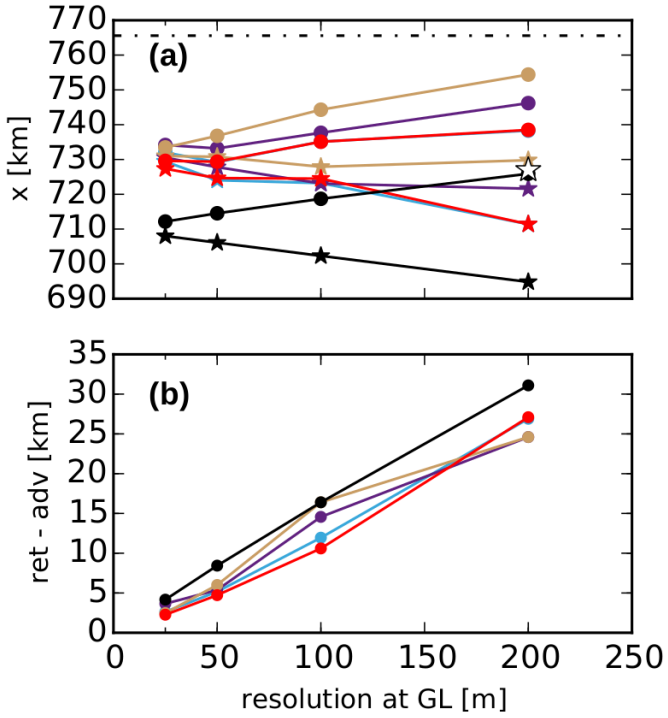


FIGURE 5.4 – Expérience 3 de MISMIP, étape 4 : **(a)** position d'équilibre de la ligne d'échouage en fonction de la résolution, en avancée (étoiles) et en retrait (points), pour $L = 0$ m et les méthodes numériques LG (marron), DI (violet) et FF (bleu), $L = 60$ m (rouge) et $L = 500$ m (noir), **(b)** différence entre les positions obtenues en avancée et en retrait (légende identique). Dans **(a)**, l'étoile blanche correspond à la position d'équilibre publiée dans le cadre de l'exercice MISMIP (voir Pattyn *et al.* (2012)) et le trait mixte noir indique la solution semi-analytique de Schoof (2007a).

protocole expérimental mis en œuvre par Gladstone *et al.* (2017) diffère, notamment au niveau de la nature des perturbations utilisées, de celui de l'expérience 3 de MISMIP repris dans l'étude de Leguy *et al.* (2014) et dans la nôtre. Enfin, notre paramétrisation de la décroissance du frottement est *ad hoc* tandis que cette décroissance se fait par l'intermédiaire de la pression effective - via l'usage de lois de frottement de type Schoof (2.18) et Budd (2.16), respectivement - dans les études de Leguy *et al.* (2014) et de Gladstone *et al.* (2017). Ces différentes paramétrisations induisent nécessairement des différences dans la distance caractéristique de décroissance du frottement à l'approche de la ligne d'échouage. Le désaccord apparent entre nos résultats et ceux de Leguy *et al.* (2014) et de Gladstone *et al.* (2017) résulte vraisemblablement de tout ou partie des disparités listées ci-dessus.

Enfin, la position d'équilibre qui avait été produite par *Elmer/Ice* en avancée lors de l'exercice MISMIP originel (étape 3 à étape 4, expérience 3) est reportée sur la Figure 5.4a (étoile blanche). Cette position avait été obtenue avec la même discrétisation de 200 m à la ligne d'échouage mais pas exactement avec le même maillage. Malgré l'utilisation d'une discrétisation identique à la ligne

d'échouage, on observe un léger écart (environ 3 km) entre cette position et celle obtenue en avancée avec la méthode LG. Cela prouve que la position de la ligne d'échouage n'est pas sensible qu'au seul raffinement au voisinage de la ligne d'échouage mais également aux autres caractéristiques du maillage et, en particulier, à sa progression géométrique en aval et en amont de la région de la ligne d'échouage. Durand *et al.* (2009a) avaient déjà rapporté cet état de fait.

### 5.1.3 Expériences P75S et P75R de MISMIP3D

#### 5.1.3.1 Méthodologie

Dans cette seconde partie, nous reprenons les expériences P75S et P75R de l'exercice d'intercomparaison MISMIP3D en se cantonnant au cas où le frottement est discontinu à la ligne d'échouage. L'objectif de cette nouvelle série d'expériences est de tester, pour un problème tridimensionnel, la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la résolution du maillage en fonction du schéma numérique adopté pour traiter la discontinuité en frottement.

Contrairement aux expériences MISMIP, les expériences MISMIP3D considèrent une géométrie tridimensionnelle reposant sur un socle plan dont la pente est descendante dans le sens de l'écoulement. Cette géométrie est en tout point identique à celle schématisée sur la Figure 3.1. Le domaine s'étend de 0 à 800 km dans la direction de l'écoulement (axe $x$) et de 0 à 50 km dans la direction transversale (axe $y$). L'ordonnée $y = 50$ km correspond à une limite du domaine à l'interface de laquelle la glace est en glissement libre, tandis que l'ordonnée $y = 0$ km est un plan de symétrie. A nouveau, la loi de frottement adoptée pour ces expériences est une loi de Weertman (2.15) non linéaire avec un exposant $m = 1/3$. Une géométrie stationnaire servant de point de départ aux expériences est obtenue en prescrivant un coefficient de frottement uniforme fixé à $C_{W3D} = 3.164 \times 10^4$ Pa m$^{-1/3}$ a$^{1/3}$. Comme nous recourons à un maillage structuré et qu'aucun des paramètres utilisés pour obtenir la géométrie stationnaire ne présente de dépendance à la variable $y$, celle-ci ne varie pas dans la direction transversale. En particulier, la ligne d'échouage ainsi obtenue est parfaitement parallèle à l'axe $y$ et sa position est entièrement déterminée par la donnée de l'abscisse $x_{G0}$.

L'expérience P75S consiste alors à perturber cette géométrie stationnaire en remplaçant, à l'instant $t = 0$ a, le coefficient de frottement initial par :

$$C^*_{W3D} = C_{W3D} \left\{ 1 - a \exp \left[ -\frac{(x - x_{G0})^2}{2x_c^2} - \frac{(y - y_b)^2}{2y_c^2} \right] \right\} \tag{5.2}$$

Cela revient à diminuer localement le frottement selon une gaussienne centrée sur l'axe de symétrie ($y_b = 0$ km). Le paramètre $a$ correspond à l'amplitude de la perturbation, il est fixé à $a = 0.75$. Le paramètre $x_{G0}$ correspond à la position de la ligne d'échouage préalablement à l'application de la perturbation. Enfin, les paramètres $x_c$ et $y_c$ permettent d'ajuster l'extension spatiale de la

gaussienne ; ils sont fixés à, respectivement, $x_c = 150$ km et $y_c = 10$ km. La perturbation du frottement induit une réponse dynamique de la ligne d'échouage liée à une modification de l'écoulement ; celui-ci s'oriente préférentiellement vers les zones de moindre frottement qui lui opposent moins de résistance. On laisse alors la géométrie évoluer durant 100 a. Comme le montre les résultats publiés par Pattyn *et al.* (2013), la dynamique observée suite à cette perturbation est assez variable d'un modèle à l'autre mais, globalement, on constate une avancée de la ligne d'échouage en $y = 0$ km et une stagnation, voire un léger retrait, en $y = 50$ km.

L'expérience P75R est lancée à l'issue des 100 a de l'expérience P75S. Elle consiste tout simplement à retirer la perturbation, c'est-à-dire à rétablir le coefficient de frottement $C^*_{W3D}$ à sa valeur d'origine $C_{W3D}$, afin de tester le critère de réversibilité. On observe alors un retour de la ligne d'échouage à proximité de la position $x_{G0}$. Les comportements en avancée et en retrait ne sont pas symétriques et le retour de la ligne d'échouage vers une position d'équilibre proche de la position initiale prend généralement beaucoup plus que 100 a.

Dans le cadre de notre étude, les expériences P75S et P75R sont répétées, avec différents maillages, pour les trois méthodes LG, FF et DI. Les maillages utilisés sont constitués d'éléments parallélépipédiques dont la taille est uniforme dans la direction $y$ et varie dans la direction $x$ selon la même structure que celle décrite précédemment pour l'expérience 3 de MISMIP. Cependant, pour cette expérience le maillage est fixe et la zone fortement résolue est centrée sur la position de la ligne d'échouage $x_{G0}$ avant la mise en place de la perturbation. Cette région est suffisamment étendue pour que la ligne d'échouage reste confinée en son sein tout au long des expériences P75S et P75R. Cette fois-ci la discrétisation dans la direction $x$, c'est-à-dire la taille selon cette direction des mailles se trouvant dans la région fortement résolue, est maintenue à une valeur fixée à 50 m. En revanche, le frottement étant ici dépendant de la coordonnée transversale $y$, trois discrétisations latérales sont testées : $N_y = 20$, $N_y = 40$ et $N_y = 80$ où $N_y$ désigne le nombre d'éléments dans la direction transversale. Cela correspond à des résolutions uniformes respectives de 2500, 1250 et 625 m. Précisons, afin de permettre la comparaison, que les résultats publiés pour *Elmer/Ice* dans le cadre de l'exercice MISMIP3D d'origine ont été obtenus avec un maillage de structure similaire, présentant également une résolution de 50 m selon l'axe $x$ et une résolution uniforme de 2500 m selon l'axe $y$.

#### 5.1.3.2 Résultats

Les principaux résultats relatifs aux expériences MISMIP3D obtenus avec les méthodes LG, FF et DI et pour les résolutions transversales $N_y = 20$, $N_y = 40$ et $N_y = 80$ sont résumés dans le Tableau 5.1. Le cas LFA correspond aux résultats *Elmer/Ice* publiés par Pattyn *et al.* (2013) dans le cadre de l'exercice MISMIP3D d'origine. Les simulations LFA et LG avec $N_y = 20$ ont été

| | Méthode LG | | | Méthode DI | | | Méthode FF | | | LFA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_y$ | 20 | 40 | 80 | 20 | 40 | 80 | 20 | 40 | 80 | 20 |
| $x_{G0}$ | 529.55 | 529.55 | 529.55 | 526.80 | 526.80 | 526.80 | 522.35 | 522.35 | 522.35 | 537.08 |
| $\Delta x_G\|_0$ | 18.95 | 16.35 | 15.05 | 9.25 | 10.83 | 11.95 | 1.95 | 6.43 | 9.90 | 17.62 |
| $\Delta x_G\|_{50}$ | −0.10 | −2.75 | −3.85 | −8.00 | −7.05 | −6.25 | −13.05 | −10.25 | −7.85 | −1.18 |

Tableau 5.1 – Expérience MISMIP3D P75S et P75R : pour les trois méthodes, position initiale de la ligne d'échouage ($x_{G0}$ en km) et différences entre la position finale (à $t = 100$ a) et la position initiale ($\Delta x_G|_y$ en km) évaluée en $y = 0$ km et en $y = 50$ km pour les trois résolutions transversales ($N_y$). La mention LFA correspond à la solution *Elmer/Ice* publiée dans le cadre de l'exercice MISMIP3D (Pattyn *et al.*, 2013).

réalisées avec la même méthode d'interpolation du frottement à la ligne d'échouage (méthode LG), le même nombre d'éléments selon chacun des axes $x$, $y$ et $z$ et les mêmes discrétisations selon les axes $x$ (résolution uniforme de 50 m dans une région longue de 30 km au sein de laquelle la ligne d'échouage reste confinée) et $y$ (résolution uniforme de 2500 m). En fait, la seule différence entre ces deux simulations réside dans la répartition des éléments selon l'axe $x$ en aval et en amont de la région fortement résolue.

Comme cela a été décrit à la Section 5.1.3.1, la première étape des expériences MISMIP3D consiste à construire une géométrie stationnaire en prescrivant un coefficient de Weertman uniforme sur l'ensemble du domaine. La position de la ligne d'échouage correspondant à cet état stationnaire est notée $x_{G0}$. Comme aucun des paramètres du modèle utilisés pour obtenir cet état stationnaire ne dépend de la coordonnée $y$, la position $x_{G0}$ est indépendante de la résolution transversale du maillage $N_y$. En revanche, comme on pouvait s'y attendre compte tenu des résultats rapportés à la Section 5.1.2.2, les méthodes LG, FF et DI produisent des positions $x_{G0}$ distantes de plusieurs km : l'écart entre les positions obtenues avec les méthodes respectives LG et FF s'élève à environ 7 km. Cette valeur est similaire à l'écart relevé entre la position initiale obtenue avec la méthode LG pour un raffinement transversal de $N_y = 20$ et celle produite par *Elmer/Ice* dans le cadre des expériences MISMIP3D et notée LFA. Cela montre, comme au paragraphe précédent, que la sensibilité de la position de la ligne d'échouage à la résolution numérique ne se limite pas au choix de la discrétisation au voisinage immédiat de la ligne d'échouage mais que le maillage du domaine dans son ensemble a une influence.

La Figure 5.5 montre, pour les trois méthodes numériques et les trois résolutions transversales testées, l'évolution temporelle de la position de la ligne d'échouage en $y = 0$ km et en $y = 50$ km relativement à la position $x_{G0}$ en réponse à la perturbation en frottement (expérience P75S de $t = 0$ a à $t = 100$ a, trait continu). On y voit également le début du retour de la ligne d'échouage vers la position $x_{G0}$ lorsque la perturbation est retirée (expérience P75R de $t = 100$ a à $t = 0$ a, trait interrompu). Il s'avère que, dans tous les cas étudiés, le retour de la ligne d'échouage à un

état stationnaire proche de la position $x_{G0}$ correspondante requiert nettement plus de temps que les 100 a de l'expérience P75R. La méthode LG permet le retour le plus rapide vers cet état stationnaire tandis que le retour le plus lent est associé à la méthode FF.

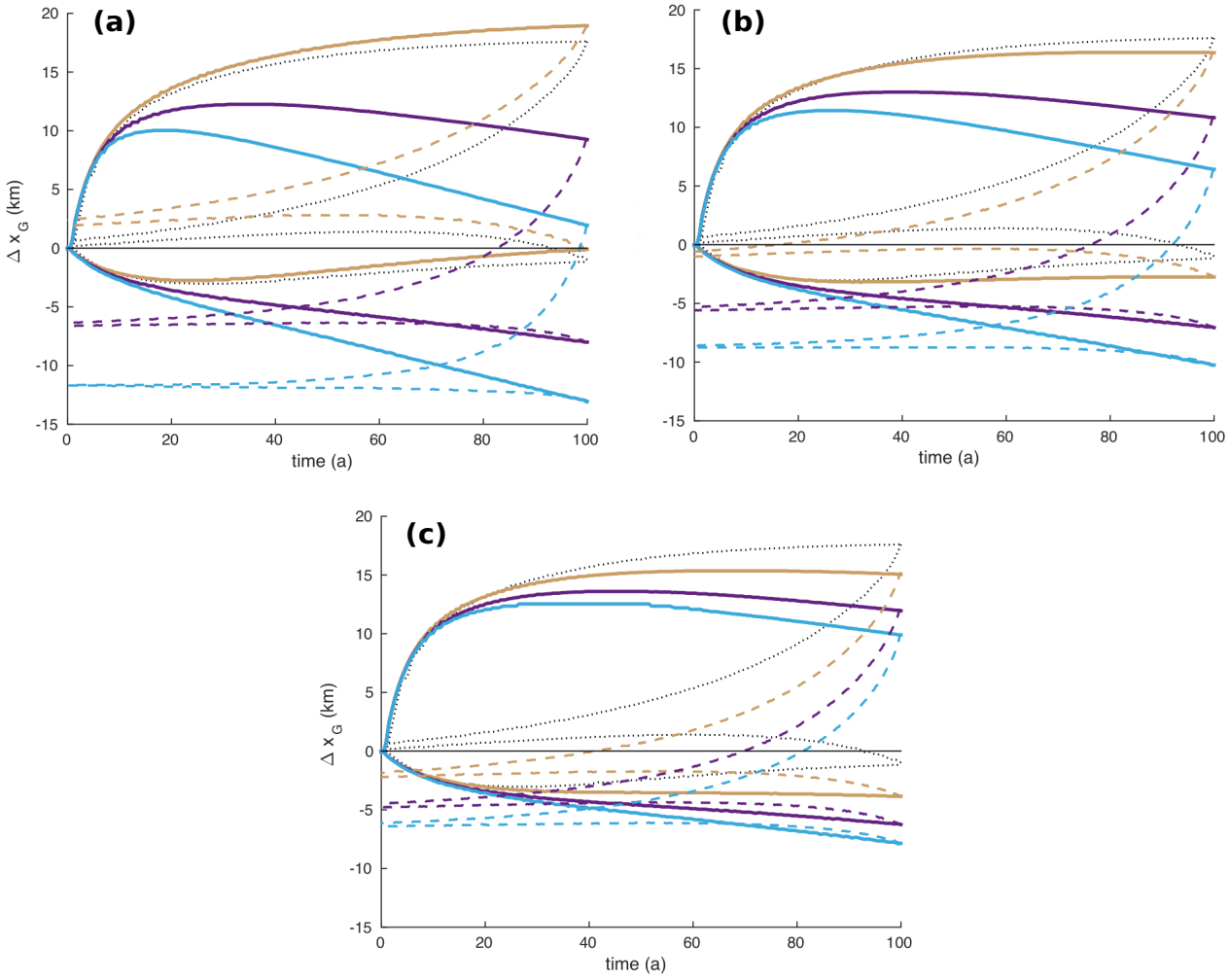


FIGURE 5.5 – Expériences MISMIP3D P75S et P75R menées avec les méthodes LG (marron), DI (violet) et FF (bleu) : évolution temporelle de la position de la ligne d'échouage relativement à sa position initiale $x_{G0}$ pendant (P75S, trait continu de $t = 0$ a à $t = 100$ a) et après (P75R, trait interrompu de $t = 100$ a à $t = 0$ a) la perturbation en frottement, donnée en $y = 0$ km (courbes du haut) et en $y = 50$ km (courbes du bas), pour les résolutions transversales **(a)** $N_y = 20$, **(b)** $N_y = 40$ et **(c)** $N_y = 80$. Sur chaque panneau, les pointillés noirs correspondent à la solution LFA (méthode LG avec $N_y = 20$) publiée dans le cadre de l'exercice MISMIP3D (Pattyn *et al.*, 2006).

Comme on peut le voir sur la Figure 5.5a, les dynamiques de ligne d'échouage sont très différentes selon la méthode employée pour les obtenir. En particulier, en $y = 0$ km, la ligne d'échouage avance constamment tout au long de l'expérience P75S avec la méthode LG, tandis qu'avec les méthodes DI et FF, l'avancée initiale est suivie d'une phase de recul. A la fin des 100 a de l'expérience P75S,

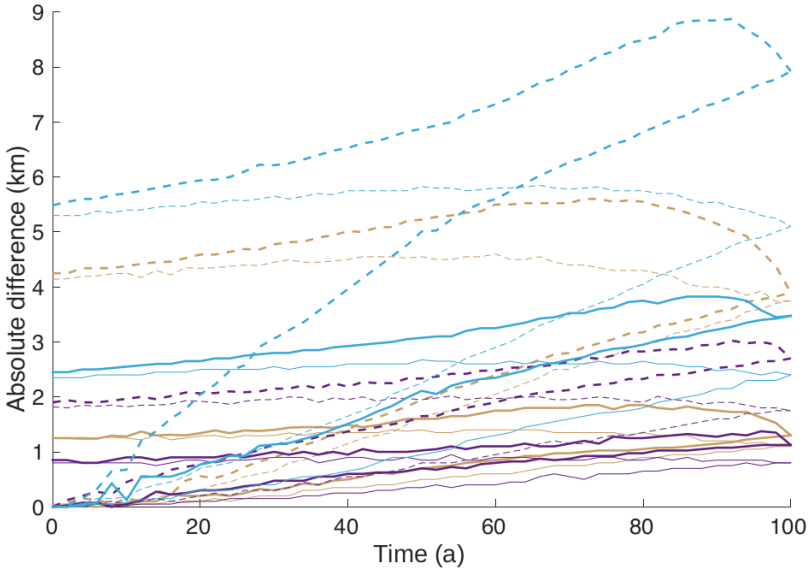


FIGURE 5.6 – Influence de la discrétisation latérale pour les expériences MISMIP3D P75S et P75R : évolution temporelle de la valeur absolue de la différence (en km) entre la solution obtenue pour la meilleure résolution ($N_y = 80$) et celles obtenues pour les deux autres résolutions ($N_y = 40$ en trait continu et $N_y = 20$ en trait interrompu), tracée pour les méthodes LG (marron), DI (violet) et FF (bleu) en $y = 0$ km (trait épais) et en $y = 50$ km (trait fin).

la différence entre les méthodes LG et FF pour la résolution transversale $N_y = 20$ s'élève à environ 17 km (Tableau 5.1). Cette différence, bien plus importante que celle obtenue en comparant les positions initiales $x_{G0}$ associées aux deux méthodes, ne peut s'expliquer que par une résolution transversale insuffisante. La comparaison des différents panneaux de la Figure 5.5 confirme que les trois méthodes convergent vers une même solution lorsque la résolution transversale devient plus fine. Ainsi, pour la meilleure résolution testée ($N_y = 80$), la différence à l'issue de l'expérience P75S entre les solutions LG et FF est réduite à environ 5 km (Tableau 5.1). Nous n'avons pas exploré de discrétisation plus fine en raison des ressources numériques que cela aurait exigé.

Afin d'évaluer si une des trois méthodes permet de réduire la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la résolution numérique, nous représentons, sur la Figure 5.6, l'évolution au cours du temps de la position de la ligne d'échouage obtenue pour les résolutions $N_y = 20$ (trait interrompu) et $N_y = 40$ (trait plein) relativement à la solution obtenue avec $N_y = 80$. Sur cette figure, on remarque que la méthode DI est celle qui est le moins sensible à la résolution du maillage : l'écart entre la solution obtenue pour $N_y = 80$ et celles obtenues pour $N_y = 40$ et $N_y = 20$ est plus faible que pour les deux autres méthodes. Cela est vraisemblablement dû au fait que DI donne systématiquement une solution intermédiaire par rapport à celles obtenues avec les méthodes LG et FF.

### 5.1.4 Discussion et Conclusions

Au cours de cette étude, nous avons abordé la problématique du traitement numérique de la transition en frottement survenant à la ligne d'échouage. A l'aide d'une paramétrisation *ad hoc*, nous nous sommes intéressés au cas où le frottement décroît progressivement vers zéro sur une distance caractéristique en amont de la ligne d'échouage. Contrairement à ce qui a été rapporté par Leguy *et al.* (2014) avec un modèle *SSA* puis, dans une étude postérieure à la nôtre, par Gladstone *et al.* (2017) avec un modèle *full-Stokes*, nous ne voyons pas d'amélioration concernant la sensibilité numérique du modèle dans ce cas. En revanche, la réduction du frottement en amont de la ligne d'échouage sur une distance caractéristique de 500 m seulement (à comparer au $\sim$ 700 km de la partie posée du domaine) produit une position d'équilibre située plus de 20 km en amont de celles obtenues pour un frottement discontinu à la ligne d'échouage. Au vu de ce résultat, on peut légitimement penser que l'utilisation de lois de frottement intégrant naturellement une diminution progressive du frottement - par le biais de la pression effective par exemple - puisse considérablement affecter la dynamique de la ligne d'échouage. C'est ce constat qui, en grande partie, motive l'étude présentée dans la section suivante.

En outre, nous avons introduit, pour un modèle éléments finis *full-Stokes*, trois méthodes numériques permettant d'aborder le cas d'un frottement discontinu à la ligne d'échouage. Jusqu'à cette étude, les résultats publiés en *full-Stokes* avec *Elmer/Ice* utilisaient systématiquement la méthode LG. Avec cette méthode, du fait de l'interpolation linéaire du paramètre de friction, les premiers éléments situés immédiatement en aval de la ligne d'échouage subissent un frottement non nul. Aussi, la position d'équilibre de la ligne d'échouage ainsi obtenue se trouve-t-elle en aval de celles produites avec les méthodes FF et DI. Pour les résolutions numériques employées au cours des exercices MISMIP et MISMIP3D d'origine, ces positions diffèrent de plusieurs km. Or, dans le cadre de l'exercice MISMIP3D, la géométrie obtenue par *Elmer/Ice* à l'issue des 100 a de l'expérience P75S servait de référence pour l'expérience P75D. Celle-ci consistait à comparer le champ des vitesses stationnaires calculé par les différents modèles participants à partir de cette géométrie de référence. Pour ces raisons, les nouveaux résultats des expériences P75S, P75R et P75D (géométries obtenues à l'issue des expériences P75S) obtenus avec les méthodes LG, FF et DI ont été publiés dans les suppléments de Gagliardini *et al.* (2016).

Conformément à nos attentes, les trois méthodes LG, FF et DI convergent vers la même solution lorsque la taille de maille à la ligne d'échouage diminue. Néanmoins, pour des résolutions compatibles, d'un point de vue temps de calcul, avec des applications tridimensionnelles, les différences entre les solutions obtenues selon la méthode employée demeurent substantielles. Même pour la discrétisation transversale $N_y = 80$ mise en œuvre pour les expériences MISMIP3D, on continue à observer des différences significatives (quelques km entre les positions de ligne d'échouage

produites par les différentes méthodes à l'issue de l'expérience P75S). Ces différences sont cependant bien moindre que celles obtenues entre les modèles *full-Stokes* et leurs approximations (Pattyn *et al.*, 2013). Les premières donnent donc une indication sur l'erreur numérique à laquelle on doit s'attendre lorsqu'on utilise un modèle *full-Stokes*. Au regard de nos résultats, nous conseillons d'utiliser, pour le cas d'un frottement discontinu à la ligne d'échouage, la méthode DI pour deux raisons. Premièrement, des trois méthodes, la méthode DI est celle qui respecte le mieux la physique du problème puisqu'elle induit une réelle discontinuité de frottement entre les éléments situés immédiatement en amont de la ligne d'échouage et ceux situés immédiatement en aval. Deuxièmement, elle se révèle être la méthode la moins sensible à la résolution du maillage.

Enfin, il nous semble important de souligner à nouveau que les traitements numériques LG, FF et DI introduits dans cette étude sont spécifiques aux modèles *full-Stokes* pour lesquels le contact entre glace et socle ne peut être testé qu'au niveau des nœuds. Pour les modèles faisant appel à l'approximation hydrostatique, la position de la ligne d'échouage peut être déterminée via le critère de flottaison avec une précision inférieure à la taille de maille. Cette propriété permet la mise en œuvre d'autres traitements numériques du frottement à la ligne d'échouage qui, pour le coup, diminuent considérablement la sensibilité numérique du modèle (Seroussi *et al.*, 2014a, par exemple).

## 5.2 Importance du choix de la loi de frottement

### 5.2.1 Présentation de la problématique

#### 5.2.1.1 Contexte

Comme nous l'avons vu au cours du Chapitre 2, un certain nombre de lois de frottement ont été développées sur plusieurs décennies afin de modéliser les différents processus physiques responsables du mouvement basal. Ces lois affichent différentes dépendances aux divers paramètres dont dépend la valeur locale de la contrainte de cisaillement basale, et notamment à la vitesse basale et à la pression effective. A l'heure actuelle, aucune mesure *in situ* ne permet de discriminer une de ces lois comme étant la plus physique. Aussi, par simplicité, les modèles à grande échelle ont-ils le plus souvent recours à la loi de Weertman (2.15) (Favier *et al.*, 2014; Ritz *et al.*, 2015; DeConto et Pollard, 2016; Seroussi *et al.*, 2017, par exemple).

Par ailleurs, à la Section 2.3.1.4 nous avons fait état de l'existence, à l'interface glace/socle, d'un réseau hydraulique basal connecté à l'océan au niveau de la ligne d'échouage. En réduisant la pression effective, l'eau présente au sein de ce réseau favorise le glissement basal. Cet état de fait étaye l'hypothèse de l'existence d'une zone plus ou moins étendue au sein de laquelle le frottement décroît progressivement jusqu'à atteindre zéro à la ligne d'échouage. Dans le cadre de l'étude présentée à la section précédente, l'effet d'une diminution linéaire du frottement à l'approche de

la ligne d'échouage sur la dynamique de celle-ci a été évalué via une paramétrisation *ad hoc* du coefficient $C_W$ intervenant dans la loi de Weertman. Bien sûr, une telle paramétrisation n'a pas de fondement physique mais les résultats obtenus suggèrent une sensibilité importante de la dynamique de la ligne d'échouage pour des distances caractéristiques de diminution du frottement relativement courtes.

Contrairement à la loi de Weertman pour laquelle la prise en compte de l'effet de la pression effective ne peut se faire qu'implicitement via un ajustement du paramètre $C_W$ par méthodes inverses, les lois de Budd (2.16), de Schoof (2.18) et de Tsai (2.22) font toutes les trois intervenir ce paramètre de manière explicite. Néanmoins, ces diverses lois n'ayant pas le même formalisme mathématique, on peut légitimement s'attendre à ce qu'elles induisent différents comportements du frottement au voisinage de la ligne d'échouage et donc, au vu des résultats de la Section 5.1, des dynamiques de ligne d'échouage différentes. L'objectif premier de l'étude que nous présentons ici est d'évaluer l'importance de ces différences. Par ailleurs, nous nous penchons également sur la problématique de la sensibilité des projections obtenues avec la loi de Schoof (2.18) au choix du paramètre $C_{max}$ et montrons comment la réponse dynamique de ligne d'échouage obtenue avec cette loi est retardée lorsque la valeur de ce paramètre augmente.

#### 5.2.1.2 Initialisation et évolution temporelle du frottement au sein des modèles

De nos jours, l'initialisation des modèles destinés à établir des projections de l'évolution de calottes réelles passe habituellement par la mise en œuvre de méthodes inverses. Celles-ci permettent en particulier d'obtenir une distribution initiale du frottement déduite des observations des vitesses de surface. Etant donné que le cisaillement basal doit nécessairement satisfaire l'équilibre global des contraintes, la forme de la loi de frottement ne peut pas être déduite d'un unique jeu d'observations. En d'autres termes, quelle que soit la loi de frottement, il est possible d'ajuster ses paramètres de manière à ce que les vitesses de surface prévues par le modèle se conforment aux observations. Comme nous l'avons évoqué, par simplicité la plupart des modèles grande échelle font appel à la loi de frottement de Weertman (2.15) et se contentent d'inverser la distribution du coefficient de frottement effectif $C(x, y)$ à partir des vitesses observées en surface (Vieli et Payne, 2003; Arthern et Gudmundsson, 2010; Larour *et al.*, 2012a; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012, par exemple). En procédant ainsi, les effets des processus physiques complexes sous-jacents, en particulier celui de la pression effective, sont englobés par le champ de $C$ inversé. Ainsi, lorsque l'inversion est réalisée sur des glaciers ou calottes à terminaison marine, il est commun de retrouver une diminution progressive de ce coefficient au voisinage de la ligne d'échouage plaidant en faveur de l'hypothèse d'une pression effective réduite au sein de cette région du fait de la connexion hydraulique entre l'océan et l'interface glace/socle (Vieli et Payne, 2003, par exemple). En raison du manque de contrainte sur son évolution

temporelle, la distribution du coefficient de frottement obtenue par inversion est généralement maintenue stationnaire (Parizek *et al.*, 2013; Seroussi *et al.*, 2014b; Favier *et al.*, 2014; Bondzio *et al.*, 2017; Seroussi *et al.*, 2017, par exemple). Si l'objectif est de conduire des simulations prognostiques pour un glacier à terminaison marine, deux problèmes principaux se posent alors. D'une part, la partie flottante ne subissant aucun frottement, l'inversion ne permet pas d'obtenir une valeur du coefficient effectif aux nœuds flottants. Or, si la ligne d'échouage avance au cours de la simulation, il devient nécessaire d'affecter un coefficient de frottement aux nœuds nouvellement posés. D'autre part, l'hypothèse de connexion hydraulique entre l'océan et le réseau hydraulique sous-glaciaire suggère un frottement réduit au voisinage immédiat de la ligne d'échouage indépendamment de la position de celle-ci. Or, la stationnarité du coefficient effectif inversé ne permet pas de rendre compte de cette caractéristique ; au contraire, à mesure que la ligne d'échouage recule, elle se retrouve dans des régions où le frottement est de plus en plus intense et tout retrait supplémentaire est contrarié.

Plus généralement, il paraît inopportun de postuler la stationnarité des conditions à la base, ne serait-ce qu'en raison des fluctuations importantes de la pression effective que nous avons rapportées au Chapitre 2. Plusieurs auteurs ont essayé de prendre en compte cette évolution temporelle. En étudiant un secteur posé situé à l'ouest de la calotte groenlandaise, Shannon *et al.* (2013) tentent d'établir une loi empirique reliant le glissement basal et la fonte de surface locale. Pour cela, ils mettent en relation un indice d'accélération annuelle de l'écoulement, calculé en différents points du secteur étudié à partir de mesures de vitesse *in situ* effectuées au cours de plusieurs années successives, et la fonte de surface locale estimée par le modèle régional de climat MAR en ces mêmes points et pour ces mêmes années. Cependant, ces observations ne permettent pas de contraindre la forme de cette relation empirique et, suivant les paramètres choisis, celle-ci produit tantôt une accélération, tantôt une décélération de l'écoulement lorsque la fonte de surface augmente. En d'autres termes, quand bien même on serait en possession de projections fiables concernant l'évolution future de la fonte de surface, cela ne suffirait pas à contraindre l'évolution temporelle de l'écoulement de cette manière. Une autre approche visant à prendre en compte l'évolution temporelle des conditions basales est celle adoptée par Gong *et al.* (2016) au cours d'une étude concernant un bassin versant situé au sud de la calotte Austfonna (Svalbard, Norvège). Pour ce faire, ils utilisent des observations de vitesses de surface disponibles pour les années 1995 et 2011 afin de déterminer les deux distributions du paramètre de frottement correspondantes qu'ils extrapolent linéairement aux années postérieures. Malheureusement, ils constatent que cette procédure simple ne permet pas de reproduire la crue glaciaire observée en 2012 et concluent sur la nécessité d'utiliser des modèles reposant sur des bases physiques plus solides.

#### 5.2.1.3 Régimes de frottement et dynamique de la ligne d'échouage

Comme cela a été évoqué à la Section 2.4.3, à partir d'une combinaison de résultats numériques et analytiques, Schoof (2007a) est parvenu à formuler une théorie permettant de prédire la géométrie stationnaire d'une calotte et fournissant un critère de stabilité pour un régime de frottement de type Weertman. Cette analyse a été reprise par Tsai *et al.* (2015) avec la loi de frottement qu'ils proposent et pour laquelle le régime de frottement de type Weertman, ayant cours au sein des zones de fortes pressions effectives, laisse place à un régime de type Coulomb là où la pression effective est suffisamment faible (cf Section 2.3.2.8). Néanmoins, ces analyses ne sont valables qu'en régime stationnaire et les implications sur la dynamique de la ligne d'échouage d'une telle transition n'ont jamais été explorées. Aussi, l'objectif des travaux présentés dans cette section est-il d'étudier la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage pour différents régimes de frottement. A cette fin, nous construisons un protocole expérimental adapté de l'expérience 3 de l'exercice MISMIP et comparons quatre lois de frottement classiquement utilisées en glaciologie : la loi de Weertman (2.15), la loi de Budd (2.16), la loi de Schoof (2.18) et la loi de Tsai (2.22). Ces quatre lois, qui diffèrent essentiellement dans la manière dont elles tiennent compte de la pression effective, ont été présentées à la Section 2.3.2. Toutes ces lois peuvent être calibrées afin d'obtenir des solutions initiales identiques mais une perturbation produira des réponses dynamiques différentes selon la loi utilisée. Dans la suite, nous commençons par donner une description précise des expériences que nous avons menées ainsi que du modèle qui a été utilisé à cette fin. Puis, nous détaillons les résultats obtenus, tant en ce qui concerne les états stationnaires que les réponses dynamiques.

### 5.2.2 Méthodologie

#### 5.2.2.1 Description du modèle

Afin de pouvoir multiplier les simulations sans être limité par des temps de calcul trop importants, nous résolvons les équations de la *SSA* (3.26) réduites au cas 1D d'un écoulement le long d'une ligne. L'évolution de l'épaisseur du domaine est régie par le principe de continuité intégré verticalement (3.22) où l'ablation est négligée. L'élévation de la surface inférieure est obtenue en résolvant l'équation (3.24) et la position de la ligne d'échouage s'en déduit via l'équation (3.25). Toutes ces équations ont été présentées à la Section 3.2.2 pour le cas 2D et nous ne les ré-écrivons pas ici. Précisons simplement que, dans la mesure où l'approximation *SSA* néglige les variations des vitesses horizontales dans la direction verticale, l'unique composante du champ des vitesses $u$ est égale à la vitesse basale $u_b$.

La contrainte de cisaillement basale $\tau_b$ apparaît dans les équations de la *SSA* (3.26) et il est nécessaire de renseigner sa valeur ou d'expliciter sa dépendance vis-à-vis d'autres paramètres du modèle. Les plateformes flottantes glissant sans frottement sur l'océan, $\tau_b$ est fixé à zéro partout

où la glace est flottante. Là où la glace est posée, la relation entre $\tau_b$ et les autres paramètres du modèle est explicitée par l'intermédiaire d'une des lois de frottement comparées à la Section 2.3.2.8. Trois d'entre elles, les lois de Budd (2.16), de Schoof (2.18) et de Tsai (2.22) font explicitement intervenir la pression effective. Pour évaluer la distribution de la pression effective, nous adoptons, comme à la Section 4.2.3, l'hypothèse simplificatrice commune qui postule une connexion parfaite entre le réseau hydraulique sous-glaciaire et l'océan et qui se traduit par l'équation (4.24).

La limite amont de notre domaine est un dôme et constitue à ce titre un axe de symétrie pour l'écoulement ; la condition de Dirichlet $u(x = 0) = 0$ s'y applique. Quant à la limite avale, elle correspond au front de vêlage où la différence entre pression cryostatique et pression de l'océan induit les conditions de Neumann (3.28). Pour les besoins de nos expériences, nous nous inspirons des travaux de Drouet *et al.* (2013) en introduisant un coefficient d'arc-boutant $B_F$. Dans le cas 1D, cela donne la condition aux limites suivante :

$$4\bar{\eta} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{cf} = B_F \left[\frac{\rho_i}{\rho_w}\left(\rho_w - \rho_i\right)\right] \frac{gH|_{cf}^2}{2}. \tag{5.3}$$

où le coefficient $B_F$ permet d'incorporer empiriquement un effet d'arc-boutant : $B_F = 1$ équivaut à une absence d'arc-boutant tandis que $B_F < 1$ induit une diminution artificielle de la résultante des efforts de pression au front de vêlage, simulant ainsi un mécanisme d'arc-boutant. Cette paramétrisation simple est utilisée au cours de nos expériences numériques pour initier des perturbations dynamiques facilement reproductibles. Elle n'a pas la prétention d'être une représentation physique des phénomènes d'arc-boutant évoqués notamment à la Section 2.4.3.

Au cours de la Section précédente, nous avons largement couvert le problème de la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la résolution du maillage. Ici nous cherchons à nous affranchir de cette sensibilité numérique. Pour ce faire, nous maillons la zone comprise entre $x = 525.0$ km et $x = 1425.0$ km avec 9000 éléments linéaires afin d'obtenir une résolution constante de 100 m dans cette région au sein de laquelle la ligne d'échouage reste confinée au cours de nos différentes expériences. En addition, 80 éléments, dont la taille suit une progression géométrique, permettent de mailler le reste du domaine en amont et en aval de la région fortement raffinée. Ce maillage reste fixe au cours des différentes simulations. En outre, nous tirons parti du fait que nous utilisons un modèle *SSA* pour mettre en œuvre une des trois paramétrisations sous-maille proposées par Seroussi *et al.* (2014a) (cf Section 5.1.1). Cette paramétrisation consiste à augmenter le nombre de points de Gauss au sein des éléments contenant la ligne d'échouage ; lors de l'intégration numérique du frottement seuls les points de Gauss situés en amont de la ligne d'échouage sont pris en compte (cf Section 3.3.1.5). En résumé, cette méthode agit de manière similaire à une augmentation de la résolution du maillage à la ligne d'échouage en s'affranchissant du coût numérique que cela engendrerait. Dans notre cas, le nombre de points de Gauss est porté à 10 au sein de l'élément contenant la ligne d'échouage. Nous nous assurons que cette résolution

s'avère suffisante en comparant systématiquement les solutions initiales obtenues avec les différentes lois testées et calibrées de manière à produire un état initial identique (cf Section 5.2.2.2).

#### 5.2.2.2 Protocole expérimental

Notre protocole expérimental est une adaptation de celui utilisé pour l'expérience 3 de MISMIP (Pattyn *et al.*, 2012). Le domaine s'étire le long d'une ligne d'écoulement orientée selon l'axe $x$ du dôme situé en $x = 0$ km au front de vêlage maintenu à une position constante fixée à $x = 2000$ km. Comme nous l'avons indiqué à la Section 5.1.2.1, la topographie du socle présente une section de pente rétrograde comprise entre les abscisses $x = 973.7$ km et $x = 1265.7$ km. Partout ailleurs, la pente est descendante dans la direction de l'écoulement.

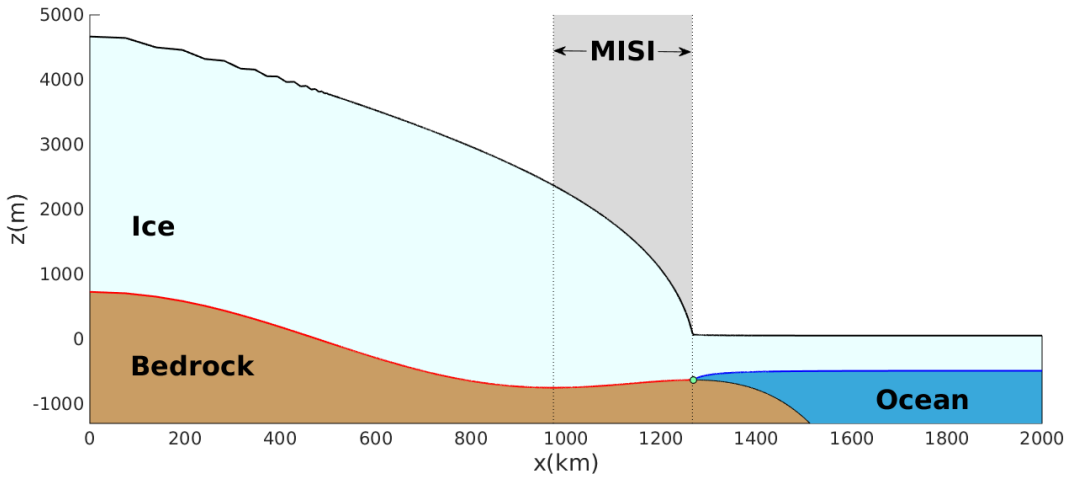


FIGURE 5.7 – Représentation de la géométrie stationnaire obtenue avec la loi de Schoof (2.18) avant la perturbation. La zone grisée cernée de pointillés noirs délimite la section de pente rétrograde que présente le socle entre $x = 973.7$ et $x = 1265.7$ et au sein de laquelle la ligne d'échouage est théoriquement sujette au phénomène de MISI. Le point vert indique la position de la ligne d'échouage avant la perturbation $x_{G0}$.

Toutes nos expériences sont amorcées à partir d'un état stationnaire initial obtenu avec la loi de Schoof (2.18) et un coefficient d'arc-boutant fixé à $B_F = 0.4$ dans l'équation (5.3). La géométrie stationnaire correspondante est représentée sur la Figure 5.7. Les différentes valeurs des paramètres du modèle utilisées pour obtenir cet état stationnaire sont détaillées dans le Tableau 5.2. La loi de Schoof (2.18) fait intervenir trois paramètres : le coefficient de frottement $C_S$, l'exposant $m$ et le paramètre $C_{max}$ correspondant à la valeur maximale atteinte par le rapport $\tau_b/N$ (cf Section 2.3.2.5). Les valeurs de référence pour les paramètres $C_S$ et $m$ utilisées afin de construire l'état stationnaire initial sont identiques à celles attribuées, respectivement, au coefficient et à l'exposant de la loi de Weertman dont l'utilisation était imposée lors de l'exercice MISMIP d'origine ; rappelons ici que pour des pressions effectives suffisamment importantes la loi de Schoof présente un

Tableau 5.2 – Liste des valeurs des paramètres utilisés pour obtenir l'état stationnaire initial pour la simulation de référence (Loi de frottement de Schoof)

| Paramètre | Valeur | Unité |
|---|---|---|
| $\rho_i$ | 900 | kg m$^{-3}$ |
| $\rho_w$ | 1000 | kg m$^{-3}$ |
| $g$ | 9.8 | m s$^{-2}$ |
| $n$ | 3 | – |
| $A$ | $1.61166 \times 10^{-25}$ | Pa$^{-3}$ s$^{-1}$ |
| $C_S$ | $7.624 \times 10^{6}$ | Pa m$^{-1/3}$ s$^{1/3}$ |
| $C_{max}$ | 0.5 | – |
| $m$ | 1/3 | – |
| $a_s$ | 0.3 | m a$^{-1}$ |
| $B_F$ | 0.4 | – |

régime asymptotique de type Weertman avec $\tau_b \sim C_S u_b^m$ (cf Section 2.3.2.8). Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué dans la Section 4.2.3, le nouvel exercice d'intercomparaison MISMIP+ offre la possibilité à ses participants de réaliser les expériences avec une loi de frottement de Schoof (Asay-Davis *et al.*, 2016) ; auquel cas, la valeur $C_{max} = 0.5$ est imposée. Nous nous rangeons à cette valeur pour construire l'état stationnaire initial. La sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de $C_{max}$ sera explorée dans un second temps.

Pour les autres paramètres du modèle, nous avons utilisé les valeurs imposées lors de l'exercice MISMIP d'origine sauf pour la fluidité $A$, uniforme sur l'ensemble du domaine et dont la valeur a été progressivement ajustée de manière à ce que la position stationnaire de la ligne d'échouage s'établisse en aval de la zone de pente rétrograde tout en étant très proche de celle-ci ($x_{G0} = 1267.7$ km soit 2.0 km en aval de la limite avale de la zone de pente rétrograde).

A partir de l'état stationnaire initial, une **simulation de référence** est obtenue en relâchant l'effort d'arc-boutant, c'est-à-dire en rétablissant le coefficient intervenant dans l'équation (5.3) à $B_F = 1$, et en laissant le modèle évoluer durant 20 ka. Comme pour la construction de l'état stationnaire, cette simulation fait appel à la loi de Schoof de référence (c'est-à-dire la loi de Schoof (2.18) munie des paramètres listés dans le Tableau 5.2). La réponse dynamique de la ligne d'échouage à cette perturbation est illustrée sur la Figure 5.8 (courbe verte, trait continu). La ligne d'échouage recule au-delà de la zone d'instabilité et atteint une nouvelle position d'équilibre située en $x = 680.0$ km.

### Expériences sur la sensibilité à la formulation de la loi de frottement

L'objectif des expériences décrites dans ce paragraphe est d'illustrer la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la formulation de la loi de frottement. A un instant donné $t_i$, la solution du problème d'écoulement ne dépend que des conditions aux limites, de la géométrie de la

calotte et du champ de contrainte de cisaillement basale. Nous partons du principe que la simulation de référence est parfaitement observée à l'instant $t_i$ et nous notons, respectivement, $u_{bS}^{t_i}$ et $N_S^{t_i}$ les champs de vitesse basale et de pression effective correspondants. A partir de ces deux champs, il est aisé de déduire de la loi de Schoof (2.18) le champ de contrainte de cisaillement basale $\tau_{bS}^{t_i}$ qui en découle. Les coefficients de frottement des lois de Weertman et de Budd, $C_W^{t_i}$ et $C_B^{t_i}$, permettant d'obtenir le même champ de contrainte $\tau_{bS}^{t_i}$ peuvent alors être identifiés analytiquement en inversant les lois de Weertman (2.15) et de Budd (2.16), ce qui donne respectivement :

$$C_W^{t_i}(x) = \frac{\tau_{bS}^{t_i}(x)}{\left(u_{bS}^{t_i}(x)\right)^m}, \tag{5.4}$$

et

$$C_B^{t_i}(x) = \frac{\tau_{bS}^{t_i}(x)}{\left(u_{bS}^{t_i}(x)\right)^m N_S^{t_i}(x)}. \tag{5.5}$$

Sous la plateforme flottante, la glace n'étant pas en contact avec le socle, $C_W^{t_i}$ et $C_B^{t_i}$ sont indéterminés. Nous choisissons de forcer ces coefficients à $C_W^{t_i} = C_B^{t_i} = 0$ pour la glace flottante. Dans notre cas, ce choix n'a pas de réelle importance dans la mesure où la perturbation que nous utilisons pour obtenir une réponse dynamique de la ligne d'échouage ne peut induire qu'un retrait de celle-ci au sein de régions où $C_W^{t_i}$ et $C_B^{t_i}$ sont directement obtenus à partir des équations (5.4) et (5.5). De manière similaire, du fait de la condition aux limites de Dirichlet imposée en $x = 0$, la valeur de $C_W^{t_i}(x = 0)$ d'une part et de $C_B^{t_i}(x = 0)$ d'autre part est prise égale, dans chacun des deux cas, à celle calculée au premier nœud immédiatement en aval.

Lorsqu'on calcul de nouveau, en résolvant la version 1D des équations de la *SSA* (3.26), le champ des vitesses d'écoulement à l'instant $t_i$ en utilisant la loi de Weertman (respectivement de Budd) avec le champ des coefficients $C_W^{t_i}$ (respectivement $C_B^{t_i}$), on obtient une solution numériquement identique - la différence relative moyenne étant, dans les deux cas, inférieure à $1.5 \times 10^{-5}$ - à celle obtenue avec la loi de Schoof pour la simulation de référence ; on s'assure ainsi que la résolution du maillage est satisfaisante. Les expériences transitoires sont alors poursuivies avec les lois de Weertman et Budd jusqu'au bout des 20 ka de la simulation de référence, en maintenant stationnaires les champs de $C_W^{t_i}$ et $C_B^{t_i}$. Comme illustré sur la Figure 5.8 (cercles noirs répartis sur la courbe verte), cette procédure est mise en œuvre à 7 instants discrets différents : $t_i = 0$, 100, 300, 500, 700, 900, 1100 a. Pour chacun des instants $t_i$, les expériences menées avec les lois de Weertman et Budd démarrent du même état initial - en l'occurrence, l'état hors équilibre de la simulation de référence à l'instant $t_i$ -, mais les évolutions transitoires seront différentes, tant entre elles que vis-à-vis de la simulation de référence, dans la mesure où toutes ces lois diffèrent dans leur dépendance à la pression effective. Par la suite, les notations $W^{t_i}$ et $B^{t_i}$ désigneront les expériences menées avec les lois de frottement de, respectivement, Weertman et Budd, et pour lesquelles l'initialisation a été réalisée à l'instant $t_i$.

Rappelons que la loi de Tsai (2.22) peut être vue comme une approximation asymptotique de la loi de Schoof. En effet, ces lois donnent toutes deux lieu à un régime de frottement type Weertman dans les zones de forte pression effective auquel se substitue un régime type Coulomb là où la pression effective est suffisamment faible ; la transition d'un régime à l'autre est instantanée dans le cas de la première loi tandis qu'elle se fait de manière continue dans le cas de la seconde (cf Section 2.3.2.8). Malgré cette distinction, il est vraisemblable que ces deux lois donnent lieu à des dynamiques de ligne d'échouage similaires. Afin de confirmer cette hypothèse, nous effectuons une expérience supplémentaire avec la loi de Tsai. Cette expérience repart de la géométrie, du champ de vitesse basale et du champ de pression effective obtenus pour la simulation de référence à l'instant $t_i = 0$ a. En revanche, contrairement à ce qui a été fait pour les lois de Weertman et Budd, cette fois-ci nous ne réalisons pas d'inversion mais assignons directement aux paramètres $C_W$ et $f_C$ de la loi de Tsai les valeurs respectives $C_S$ et $C_{max}$ utilisées pour la loi de Schoof lors de la simulation de référence (Tableau 5.2). Attendu que les lois de Schoof et de Tsai donnent des $\tau_b$ légèrement différents pour l'intervalle de pression effective au sein duquel la première induit une transition progressive du régime type Weertman au régime type Coulomb (cf Figure 2.9), le champ de contrainte de cisaillement basal initial ainsi obtenu avec la loi de Tsai n'est pas parfaitement identique au champ de référence initial $\tau_{bS}^{0a}$.

#### Expérience sur la sensibilité au paramètre $C_{max}$ dans le cas de la loi de Schoof

A l'origine, la loi de Schoof (2.18) a été développée afin de décrire l'évolution du frottement dans le cas d'un socle rigide en tenant compte de l'existence de cavités induisant une borne supérieure sur le rapport $\tau_b/N$ (Iken, 1981; Schoof, 2005). Dans le cadre de cette théorie, la valeur maximum atteinte par $\tau_b/N$ correspond au coefficient $C_{max}$ et dépend de la pente maximale locale du socle. Par exemple, Gagliardini *et al.* (2007) établissent que dans le cas d'un socle idéalisé parfaitement sinusoïdal, $C_{max} = 0.84 m_{max}$ où $m_{max}$ désigne la pente maximale du socle. Il est évident que cette dernière donnée est inaccessible à la mesure, aussi les auteurs utilisant une loi de Schoof sont-ils contraints d'attribuer une valeur à $C_{max}$ de manière empirique (Pimentel *et al.*, 2010; Pimentel et Flowers, 2011; Hewitt, 2013; Leguy *et al.*, 2014; Asay-Davis *et al.*, 2016, par exemple). Cependant, l'utilisation de la loi de Schoof est de plus en plus souvent motivée par sa capacité à induire un régime de frottement type Coulomb aux faibles pressions effectives dont on sait qu'il est le plus approprié pour modéliser la déformation des socles sédimentaires (cf Section 2.3.2.6). Auquel cas, il faut voir le coefficient $C_{max}$ comme un équivalent au paramètre $f_C$ intervenant dans la loi de Coulomb (2.21) et, de ce fait, dans la loi de Tsai (2.22). Les valeurs de $f_C$ mesurées expérimentalement sont très variables ; elles s'échelonnent entre 0.17 et 0.84 (Cuffey et Paterson, 2010). Pourtant, la sensibilité des résultats obtenus avec les lois de Schoof ou de Tsai à ce paramètre est rarement explorée. Nous

nous proposons ici de mener une expérience additionnelle en modifiant la valeur de ce paramètre, initialement fixée à $C_{max} = 0.5$. En l'occurrence, nous testons la valeur $C^*_{max} = 0.75$.

Dans ce qui suit, nous désignons par *loi de Schoof de référence* la loi de Schoof munie des paramètres listés dans le Tableau 5.2 et par *loi de Schoof modifiée* la loi de Schoof pour laquelle nous fixons $C^*_{max} = 0.75$ et inversons la distribution du coefficient de frottement (l'exposant $m$ étant maintenu à sa valeur d'origine de 1/3). Concrètement, nous reprenons la démarche des expériences présentées dans le paragraphe précédent et inversons, à l'instant $t_i = 0$ a uniquement, la distribution du coefficient de frottement $C_S^{*0a}$ permettant de retrouver, avec la loi de Schoof modifiée, la contrainte de cisaillement basale $\tau_{bS}^{0a}$ produite par la loi de Schoof de référence. Cette distribution est obtenue via l'expression :

$$C_S^{*0a} = \frac{\tau_{bS}^{0a}(x)}{u_{bS}^{0a}(x)^m \left(1 - \left(\frac{\tau_{bS}^{0a}(x)}{C^*_{max} N_S^{0a}(x)}\right)^{1/m}\right)^m} \tag{5.6}$$

On remarque que $C_S^{*0a}$ n'est défini que si le rapport $\tau_{bS}^{0a}/C^*_{max}N_S^{0a}$ est inférieur à 1, ce qui est une conséquence directe de la prise en compte de la borne d'Iken par la loi de Schoof. De fait, certaines valeurs de $C^*_{max}$ sont interdites, sans quoi la borne d'Iken n'est plus respectée et $C_S^{*0a}$ n'est plus défini. Dans notre cas, la valeur maximale du rapport $\tau_{bS}^{0a}/N_S^{0a}$ est, par construction, exactement égale à $C_{max}$. En effet, au proche voisinage de la ligne d'échouage la loi de Schoof se réduit à une loi de type Coulomb et on a, au sein de cette région, $\tau_b = C_{max}N$. Par conséquent, on ne peut envisager pour $C^*_{max}$ que des valeurs supérieures ou égales à $C_{max} = 0.5$.

A partir de la distribution de $C_S^{*0a}$ ainsi obtenue, on reproduit avec la loi de Schoof modifiée l'état initial produit à $t_i = 0$ a par la loi de Schoof de référence. La différence relative moyenne entre les vitesses d'écoulement obtenues dans ces deux cas est inférieure à $1.4 \times 10^{-5}$. A partir de cet état initial, l'expérience transitoire est poursuivie jusqu'au terme des 20 ka. Nous utiliserons la notation $S^{*0a}$ pour faire référence à cette simulation.

### 5.2.3 Résultats

La position de la ligne d'échouage est représentée en fonction du temps sur la Figure 5.8 pour les différentes simulations décrites dans la partie précédente. Le taux de retrait maximum $dx_G/dt$ atteint par la ligne d'échouage au cours de l'intégralité de son recul ainsi que les distances $\Delta x_G$ couvertes par celle-ci au cours des 100 premières années faisant suite à l'initialisation sont résumés, pour chacune des simulations, dans le Tableau 5.3. Dans la mesure où la simulation de référence est la simulation à partir de laquelle sont réalisées toutes les inversions, le taux de retrait maximum de la ligne d'échouage obtenu avec la loi de Schoof de référence n'est donné que pour $t_i = 0$ a. Il en va de même pour la loi de Tsai (pas d'inversion mais départ de la géométrie et des champs de vitesse et de pression effective de la simulation de référence évalués à $t_i = 0$ a) et pour la loi de Schoof modifiée

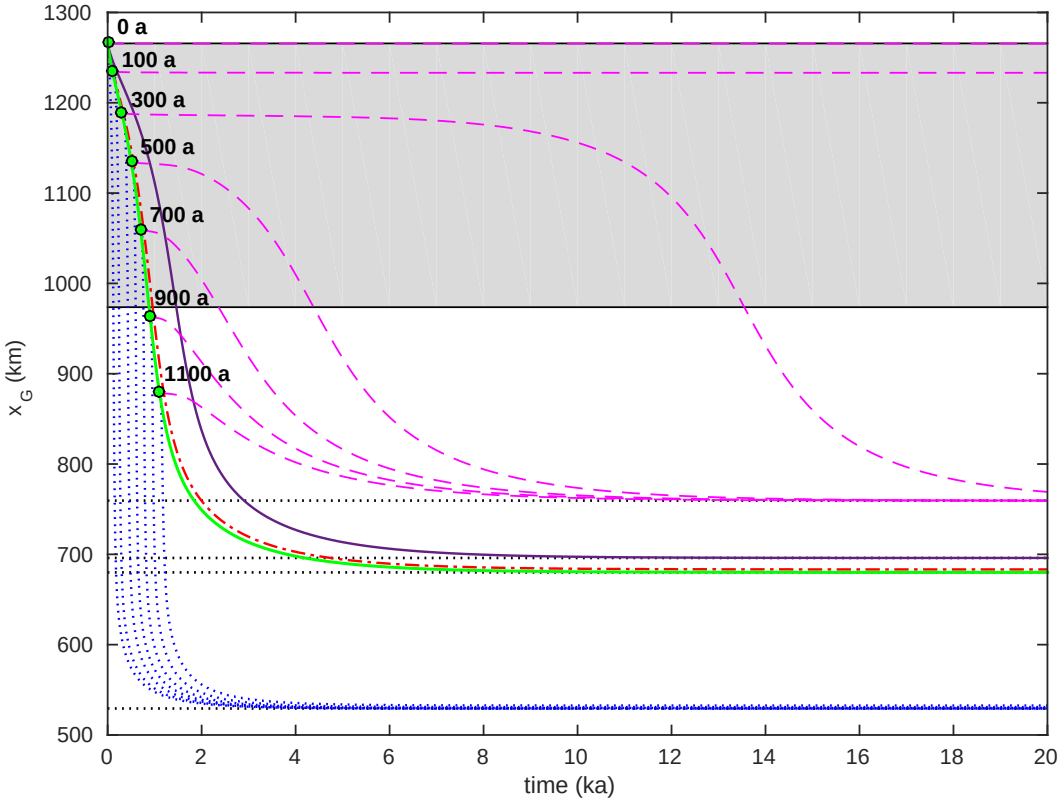


FIGURE 5.8 – Position de la ligne d'échouage en fonction du temps pour les quatre lois de frottement testées. La courbe verte en trait continu correspond à la simulation de référence, i.e. au retrait produit par la loi de Schoof avec $C_{max} = 0.5$ après relâchement de l'effort d'arc-boutant à $t = 0$ a. La courbe rouge en trait mixte correspond au retrait de la ligne d'échouage obtenu avec la loi de Tsai. Les cercles noirs répartis le long de la courbe verte correspondent aux 7 états initiaux utilisés pour l'inversion (respectivement après 0, 100, 300, 500, 700, 900 et 1100 années de retrait de ligne d'échouage pour la simulation de référence). Les courbes bleues (trait pointillé) et magenta (trait interrompu) sont les retraits de la ligne d'échouage obtenus avec, respectivement, la loi de Budd et la loi de Weertman en partant de chacun des 7 états initiaux. La courbe violette en trait continu correspond au retrait de la ligne d'échouage obtenu avec la loi de Schoof modifiée munie du paramètre $C^*_{max} = 0.75$ et du coefficient de frottement $C_S^{*0a}$ obtenu par inversion à $t_i = 0$ a. Les lignes noires en pointillés correspondent aux positions stationnaires uniques de la ligne d'échouage obtenues avec la loi de Weertman, la loi de Schoof modifiée et la loi de Schoof de référence (situées, respectivement, en $x = 759.5$ km, $x = 690.0$ km et $x = 680.0$ km) et à la plus reculée des positions stationnaires obtenues avec la loi de Budd ($x = 529.3$ km). La zone grisée correspond à la section du socle dont la pente est rétrograde.

(inversion à $t_i = 0$ a seulement). En revanche, même s'il n'y pas d'initialisation réalisée à $t_i > 0$ a pour ces deux dernières lois, nous fournissons néanmoins une valeur de $\Delta x_G$ obtenue en soustrayant la position que la ligne d'échouage occupe à $t = t_i$ à celle qu'elle occupe 100 a plus tard. Lors de la simulation de référence (courbe verte sur la Figure 5.8), le relâchement de l'effort d'arc-boutant est

Tableau 5.3 – Taux de retrait maximum de la ligne d'échouage $dx_G/dt$ en m a$^{-1}$ estimé sur l'ensemble de la simulation et distance couverte par la ligne d'échouage $\Delta x_G$ en km au cours des 100 premières années faisant suite à l'initialisation pour les 4 lois de frottement - avec les cas $C_{max} = 0.5$ (référence) et $C_{max} = 0.75$ (modifiée) pour la loi de Schoof - et les 7 états initiaux. Pour chaque loi de frottement, les valeurs les plus élevées sont en gras.

| $t_i$ | loi de Schoof (référence) | | loi de Tsai | | loi de Budd | | loi de Weertman | | loi de Schoof (modifiée) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{dx_G}{dt}$ | $\Delta x_G$ | $\frac{dx_G}{dt}$ | $\Delta x_G$ | $\frac{dx_G}{dt}$ | $\Delta x_G$ | $\frac{dx_G}{dt}$ | $\Delta x_G$ | $\frac{dx_G}{dt}$ | $\Delta x_G$ |
| 0 a | **495** | 32 | **465** | 30 | 8495 | 127 | **105** | 2 | **340** | 20 |
| 100 a | - | 24 | - | 21 | **9180** | 69 | 45 | 2 | - | 13 |
| 300 a | - | 25 | - | 22 | 8710 | 70 | 100 | 1 | - | 12 |
| 500 a | - | 34 | - | 29 | 7970 | 195 | 100 | 1 | - | 14 |
| 700 a | - | 46 | - | 40 | 6810 | **316** | 90 | 2 | - | 16 |
| 900 a | - | **47** | - | **46** | 5030 | 263 | 70 | **3** | - | 21 |
| 1100 a | - | 30 | - | 35 | 3260 | 172 | 45 | 2 | - | **28** |

immédiatement suivi par un retrait de la ligne d'échouage au-delà de la zone de pente rétrograde. Une première période de retrait ralenti dure un peu moins de 300 a. S'en suit une période au cours de laquelle la vitesse de recul augmente légèrement jusqu'à atteindre un maximum de 495 m a$^{-1}$ aux alentours de l'année 850. Enfin, cette vitesse se remet à diminuer très progressivement et la ligne d'échouage finit par se stabiliser en $x = 680.0$ km. Il faut compter 14680 a à partir de $t_i = 0$ a avant que la ligne d'échouage n'atteigne cette position. Conformément à nos attentes, la loi de Tsai (courbe rouge, trait mixte) produit une dynamique de ligne d'échouage très similaire, celle-ci affichant une vitesse de retrait maximum de 465 m a$^{-1}$ et se stabilisant à la position $x = 683.3$ km après 14550 a de simulation. La loi de Budd (courbes bleues, trait pointillé) produit des taux maximums de retrait de la ligne d'échouage compris entre 3260 m a$^{-1}$ et 9180 m a$^{-1}$ selon l'état initial $t_i$, soit un ordre de grandeur de plus que ceux obtenus avec les lois de Schoof et Tsai. Il faut compter entre 6610 a et 8085 a avant que la ligne d'échouage n'atteigne sa position d'équilibre qui diffère légèrement selon $t_i$ : la position d'équilibre la plus reculée correspond à la simulation $B^{0a}$ et se situe en $x = 529.3$ km tandis que la plus avancée correspond à la simulation $B^{1.1ka}$ et se situe en $x = 532.6$ km.

La loi de Weertman (courbes magenta, trait interrompu) donne des taux de retrait beaucoup plus faibles qui s'échelonnent entre 45 et 105 m a$^{-1}$ (Tableau 5.3). Deux comportements différents peuvent être distingués en fonction de l'état initial. Pour $W^{300a}$, une première période d'environ 7000 a au cours de laquelle la ligne d'échouage recule très lentement est suivie d'une période de retrait accéléré avant que celui-ci ne ralentisse de nouveau jusqu'à ce que la ligne d'échouage atteigne son nouvel état d'équilibre. Le même type de comportement est observé pour toutes les simulations $W^{\geq 300a}$, si ce n'est que la première période de retrait ralenti est de moins en moins longue avec l'augmentation de $t_i$. Pour toutes ces simulations, les taux de retrait les plus rapides

sont systématiquement inférieurs d'un ordre de grandeur à ceux obtenus avec la loi de Schoof. Une période comprise entre 16050 a et 29560 a est requise, à la suite de l'initialisation, avant que la ligne d'échouage n'atteigne sa nouvelle position stable. Au contraire de celles obtenues avec la loi de Budd, cette nouvelle position stable est identique, à 50 m près, pour toutes les simulations $W^{\geq 300a}$ ; elle est localisée en $x = 759.5$ km.

Dans le cas des simulations $W^{0a}$ et $W^{100a}$, la seconde phase au cours de laquelle la ligne d'échouage recule de manière accélérée au-delà de la zone de pente rétrograde n'est jamais atteinte. Lors de la simulation $W^{0a}$, la ligne d'échouage initialement située en $x = 1267.7$ km recule durant 160 a seulement avant de se stabiliser en $x = 1265.4$ km. De manière similaire, lors de la simulation $W^{100a}$, la ligne d'échouage initialement localisée en $x = 1235.5$ km commence par reculer durant 4380 a puis se stabilise en $x = 1233.2$ km. Du fait de la faible amplitude des retraits associés à ces phases et de leur brièveté - à comparer au 20 ka de la simulation de référence -, celles-ci ne peuvent être distinguées sur la Figure 5.8. Les taux de retrait donnés dans le Tableau 5.3 pour ces deux simulations sont obtenus au cours de ces brèves phases de retrait. Il est essentiel de souligner que les deux positions d'équilibre de la ligne d'échouage obtenues lors de ces deux simulations sont localisées sur la section de pente rétrograde (zone grisée sur la Figure 5.8). Ce résultat, en contradiction apparente avec l'hypothèse de MISI décrite au Chapitre 1, sera discuté en détail dans la Section 5.2.4.

La dynamique de la ligne d'échouage obtenue lors de la simulation $S^{*0a}$ peut être vue comme une version atténuée de celle obtenue lors de la simulation de référence : toutes les phases remarquables mises en évidence pour la seconde se retrouvent pour la première mais les évolutions du taux de retrait de la ligne d'échouage sont plus lentes. Ainsi, pour la simulation $S^{*0a}$, la première période de retrait ralenti dure $\sim 500$ a, soit $\sim 200$ a de plus que lors de la simulation de référence. De même, la phase d'accélération faisant suite à cette première phase est plus longue : la vitesse de retrait maximum - qui s'élève à 340 m a$^{-1}$ - est atteinte aux alentours de l'année 1400. La nouvelle position d'équilibre de la ligne d'échouage, atteinte après 15390 a de simulation, se situe en $x = 696.0$ km, soit 16 km en aval de celle obtenue lors de la simulation de référence.

Les taux de variation d'épaisseur $\partial H/\partial t$ estimés après 0, 20 et 40 ans de retrait de la ligne d'échouage sont représentés sur la Figure 5.9 pour la simulation de référence ainsi que pour les simulations $W^{0a}$ et $B^{0a}$. Les champs de $u_b$ et $\tau_b$ correspondants ainsi que les profils de la calotte sont également représentés, au voisinage de la ligne d'échouage, sur la Figure 5.10b-d. Les résultats obtenus pour la simulation $S^{*0a}$ avec la loi de Schoof modifiée ne sont pas représentés afin de ne pas surcharger ces figures. De manière générale, les courbes obtenues pour cette simulation ont la même allure que celles correspondant à la simulation de référence (courbes noires et vertes sur les Figures 5.6 et 5.5b-d) mais l'amplitude de la réponse est plus faible et celle-ci est retardée. Le relâchement

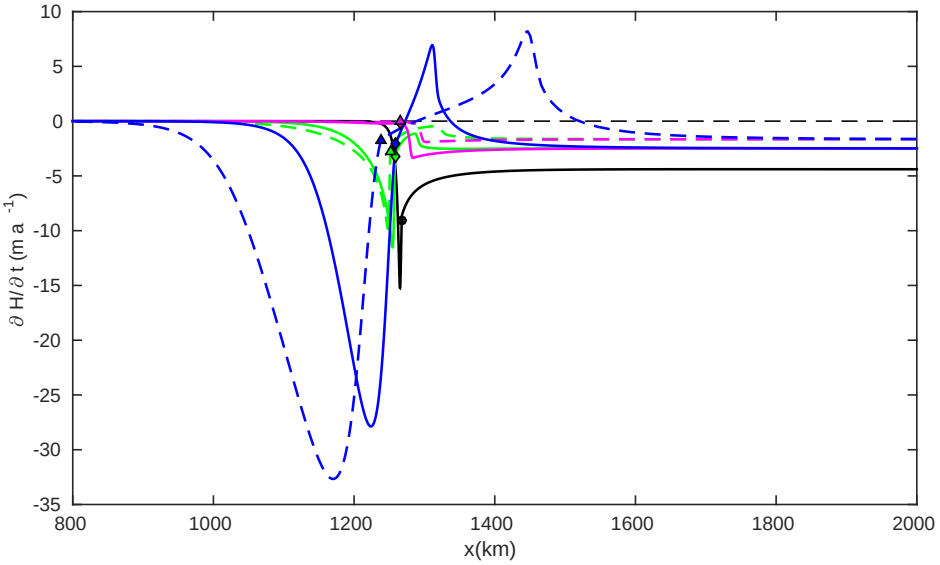


FIGURE 5.9 – Initialisation réalisée à $t_i = 0$ a. Taux de variation d'épaisseur à l'instant initial (courbe noire, trait continu), 20 a après l'initialisation (courbes colorées, trait continu) et 40 a après l'initialisation (courbes colorées, trait interrompu) pour les lois de frottement de Schoof (vert), Weertman (magenta) et Budd (bleu). Les positions des lignes d'échouage correspondantes sont mises en évidence par un point noir à l'instant initial, des losanges 20 a après l'initialisation et des triangles 40 a après l'initialisation. La courbe noire en trait interrompu correspond à un taux de variation d'épaisseur nulle.

de l'effort d'arc-boutant à $t_i = 0$ a induit une réponse dynamique de la calotte : l'intégralité de la plateforme flottante s'amincit ainsi que la partie posée sur une distance d'environ 30 km en amont de la ligne d'échouage, causant le retrait de cette dernière. Le pic initial d'amincissement survient en $x = 1265.3$ km, à seulement 2.4 km en amont de la ligne d'échouage. Par construction, les réponses obtenues au premier pas de temps avec les lois de Weertman et Budd ainsi qu'avec la loi de Schoof modifiée sont identiques entre elles et vis-à-vis de celle obtenue avec la loi de Schoof pour la simulation de référence (courbe noire sur la Figure 5.9).

La Figure 5.10a montre, sur les derniers $\sim 70$ km en amont de la ligne d'échouage, le coefficient de frottement uniforme $C_S$ ainsi que les distributions spatiales des coefficients $C_W^{0a}$ et $C_B^{0a}$ obtenus par inversion à l'instant $t_i = 0$ a. Notons que le coefficient $C_B^{0a}$ n'ayant pas les mêmes unités que les coefficients $C_S$ et $C_W^{0a}$, leurs valeurs ne peuvent être comparées directement ; l'intérêt de ce graphique réside plutôt dans la forme générale des distributions obtenues. En outre, soulignons que si ces distributions ne varient pas même lorsque la ligne d'échouage recule, la contrainte de cisaillement basale en un nœud devenant flottant au cours de ce retrait est en revanche forcée à zéro. Le coefficient de frottement de Weertman $C_W^{0a}$ est quasiment identique au coefficient de la loi de Schoof $C_S$ sur l'intégralité de la partie posée, excepté au sein d'une zone de transition localisée

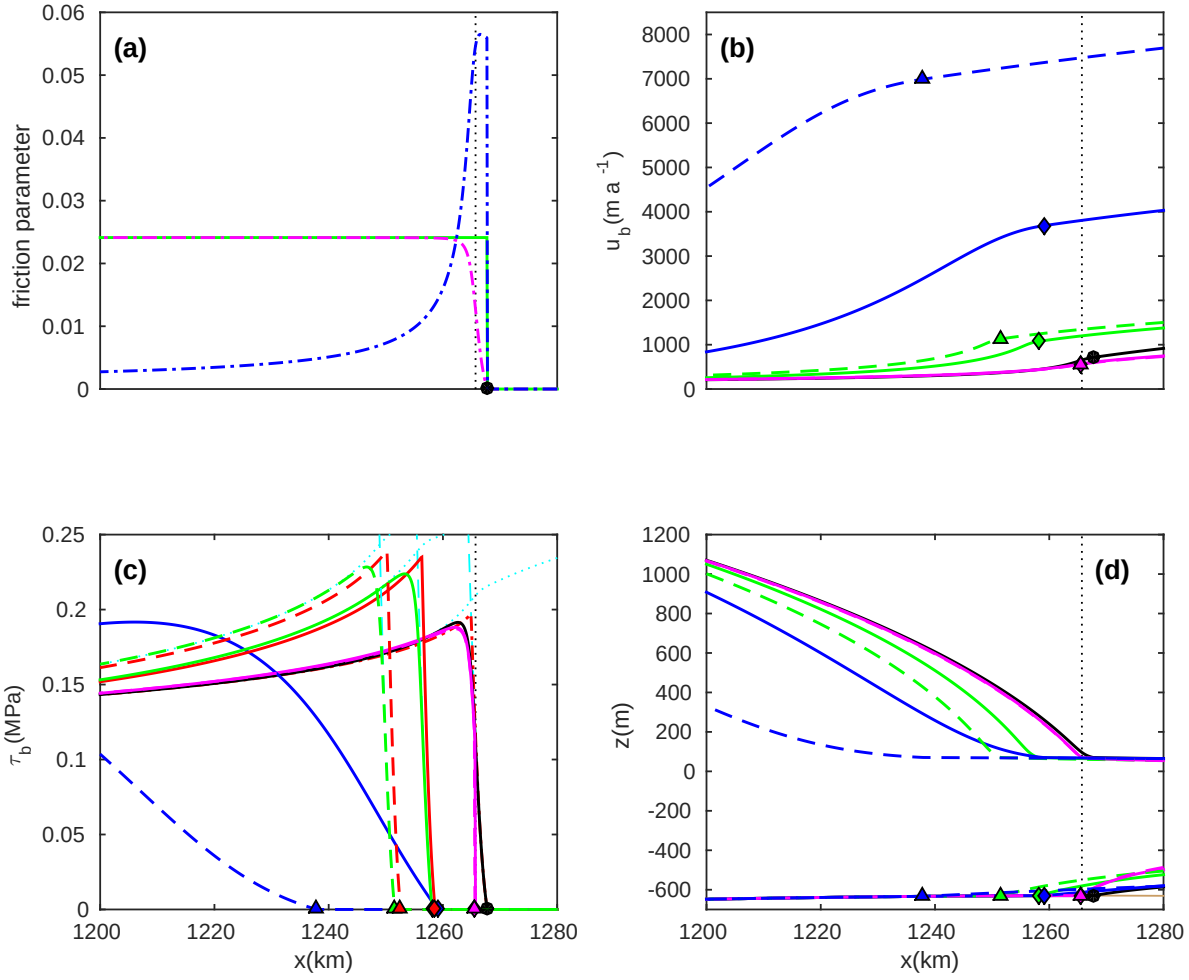


FIGURE 5.10 – Initialisation réalisée à $t_i = 0$ a. **(a)** Distribution spatiale des coefficients de frottement $C_S$ (courbe verte, trait mixte), $C_W^{0a}$ (courbe magenta, trait mixte) et $C_B^{0a}$ (courbe bleue, trait mixte). Vitesses basales **(b)**, contraintes de cisaillement basales **(c)** et profils des calottes **(d)** représentés à l'instant initial (courbes noires, trait continu), 20 ans après l'initialisation (courbes colorées, trait continu) et 40 ans après l'initialisation (courbes colorées, trait interrompu) pour les lois de frottement de Schoof (vert), Weertman (magenta) et Budd (bleu). Les comportements asymptotiques associés à la loi de Schoof, i.e. $\tau_b = C_S u_b^m$ et $\tau_b = C_{max} N$, sont mis en évidence par les courbes cyans en pointillés et traits interrompus respectivement. Les contraintes de cisaillement basales obtenues avec la loi de Tsai à l'instant initial (trait mixte), 20 ans après l'initialisation (trait continu) et 40 ans après l'initialisation (trait interrompu) apparaissent en rouge dans **(c)**. La ligne verticale en pointillés noirs correspond à la limite avale de la section du socle dont la pente est rétrograde. La position de la ligne d'échouage est mise en évidence par des points noirs à l'instant initial, des losanges 20 ans après l'inversion et des triangles 40 ans après l'inversion. La courbe marron en trait continu dans **(d)** représente le socle.

au voisinage immédiat de la ligne d'échouage dans laquelle le premier décroît de manière continue vers zéro (courbe magenta, trait mixte sur la Figure 5.10a). Le coefficient de frottement de Budd $C_B^{0a}$ présente une distribution spatiale totalement différente : il prend des valeurs très faibles et quasiment indépendantes de $x$ sur la majeure partie du domaine posé puis croît brusquement sur $\sim 20$ km pour atteindre un pic localisé 1.1 km en amont de la ligne d'échouage, avant de décroître de manière continue jusqu'à atteindre zéro au niveau de cette dernière. Cette décroissance s'opère au sein de la zone dans laquelle la loi de Schoof se réduit à une loi type Coulomb et, en tant que telle, ne présente plus de dépendance aux vitesses basales. Enfin, signalons que la distribution du coefficient de frottement $C_S^{*0a}$ inversée pour la loi de Schoof modifiée est extrêmement proche de la distribution $C_W^{0a}$ et, pour cette raison, n'a pas été représentée.

Avec les distributions inversées de $C_W^{0a}$ et $C_B^{0a}$, la zone de transition induite par la dépendance de la loi de Schoof à la pression effective et au sein de laquelle $\tau_b$ décroît de manière continue d'une valeur maximum sous la partie posée à zéro à la ligne d'échouage, est correctement reproduite par les lois de Weertman et Budd à l'instant initial (courbe noire sur la Figure 5.10c). Au contraire, comme les paramètres de la loi de Tsai (2.22) n'ont pas été obtenus par inversion à partir de la simulation de référence mais simplement fixés à $C_W = C_S$ et $f_C = C_{max}$, le $\tau_b$ initial obtenu avec cette loi est légèrement différent : le point au niveau duquel $\tau_b$ atteint son maximum constitue un point de bascule ; en amont de ce point la loi de Tsai est parfaitement équivalente à une loi de Weertman tandis qu'elle est parfaitement équivalente à une loi de type Coulomb en aval de ce point. Par conséquent, les lois de Tsai et Schoof produisent des $\tau_b$ quasiment identiques sur l'ensemble de la partie posée excepté dans une région peu étendue située quelques km en amont de la ligne d'échouage au sein de laquelle la transition du régime type Weertman au régime type Coulomb se fait de manière continue pour la loi de Schoof. Dans cette zone, la loi de Tsai donne un $\tau_b$ légèrement plus élevé que celui obtenu avec la loi de Schoof (courbes noire/vertes d'une part et rouges d'autre part sur la Figure 5.10c). Malgré cette différence, les deux lois produisent des comportements de ligne d'échouage très similaires tout au long de l'expérience. Par conséquent, afin de faciliter la lecture des Figures 5.9 et 5.10, les résultats obtenus avec la loi de Tsai n'y sont pas représentés, sauf sur la Figure 5.10c.

Bien que les lois de Schoof, Weertman et Budd produisent, par construction, une réponse dynamique identique au premier pas de temps, les comportements de ligne d'échouage qu'elles induisent divergent rapidement. Pour la simulation de référence, l'amincissement du domaine faisant suite à la perturbation ralentit tout en se propageant plus en amont (courbes vertes sur la Figure 5.9). Simultanément, l'ensemble du domaine voit une augmentation des vitesses d'écoulement. En particulier, la vitesse d'écoulement au niveau de la ligne d'échouage augmente de 50% au cours des 20 premières années puis de seulement 5% entre $t = 20$ a et $t = 40$ a (courbes vertes sur la Fi-

gure 5.10b). Signalons que la loi de Schoof modifiée (non représentée) produit exactement le même type de comportement lors de la simulation $S^{*0a}$, si ce n'est que les pics de taux d'amincissement atteignent à peine plus de la moitié de ceux obtenus lors de la simulation de référence tandis que l'augmentation de la vitesse d'écoulement observée à la ligne d'échouage se limite à 20% entre $t = 0$ a et $t = 20$ a et à 3% entre $t = 20$ a et $t = 40$ a. Les deux régimes de frottement asymptotiques associés à la loi de Schoof - le régime type Weertman aux $N$ élevés et le régime type Coulomb aux faibles $N$ - sont mis en évidence, pour la simulation de référence, sur la Figure 5.10c par, respectivement, les courbes cyans en pointillés et traits interrompus. Notons que la simulation de référence fait appel aux mêmes valeurs des paramètres $C_S$ et $C_{max}$ que celles utilisées pour représenter le comportement de la loi de Schoof sur la Figure 2.9c lors de l'intercomparaison des lois de frottement présentée à la Section 2.3.2.8. Suffisamment en amont de la ligne d'échouage, $N$ est élevé et la loi de Schoof se réduit à une loi de Weertman avec $\tau_b = C_S u_b^m$ (courbes noire/vertes superposées aux courbes pointillés cyans sur la Figure 5.10c). En se rapprochant de la ligne d'échouage, la dépendance de la contrainte de cisaillement basale aux vitesses basales s'affaiblit progressivement jusqu'à s'évanouir totalement lorsque $N$ devient suffisamment faible ; on a alors affaire à un régime purement type Coulomb avec $\tau_b = C_{max} N$ (courbes noire/vertes superposées aux courbes cyans en traits interrompus sur la Figure 5.10c). L'augmentation des vitesses d'écoulement observée pour la simulation de référence est associée à une augmentation de $\tau_b$ dans les régions où la loi de Schoof induit une dépendance de celui-ci à $u_b$, c'est-à-dire dans les régions où cette loi n'est pas purement équivalente à une loi de Coulomb (courbes vertes sur la Figure 5.10c).

La simulation $W^{0a}$ ne produit quant à elle qu'un amincissement très limité sur la partie posée, avec un taux d'amincissement maximum de seulement 0.2 m.a$^{-1}$ à $t = 20$ a. Ce taux d'amincissement maximum se voit réduit à moins de 0.1 m.a$^{-1}$ à $t = 40$ a (courbes magenta sur la Figure 5.9). Au cours des 20 premières années de simulation, on observe une légère augmentation des vitesses d'écoulement loin en amont de la ligne d'échouage et jusqu'à la zone au sein de laquelle $C_W^{0a}$ décroît progressivement ; dans cette zone, les vitesses d'écoulement sont devenues légèrement plus faibles que les vitesses initiales. Entre $t = 20$ a et $t = 40$ a, ces vitesses d'écoulement n'évoluent pratiquement pas (courbes magenta sur la Figure 5.10b). Quant au $\tau_b$ associé à cette simulation, il ne montre quasiment aucune évolution au cours des 40 années faisant suite à la perturbation, si ce n'est au niveau des nœuds devenus flottants durant ce laps de temps et pour lesquels il a été forcé à zéro (courbes magenta 5.10c). Par conséquent, la zone de transition au sein de laquelle $\tau_b$ décroît vers zéro est progressivement rognée laissant place à une discontinuité du frottement de plus en plus marquée à mesure que la ligne d'échouage recule dans cette zone.

A l'opposé, la réponse à la perturbation est beaucoup plus intense dans le cas de la simulation $B^{0a}$ : le taux d'amincissement maximum a plus que doublé au cours des 20 premières années de

simulation et continue à augmenter entre les années 20 et 40, tandis que la région concernée par cet amincissement s'étend en amont de la ligne d'échouage (pics bleus négatifs sur la Figure 5.9). Ces larges volumes de glace sont en fait transférés de la partie posée vers les régions attenantes de la plateforme flottante au niveau desquelles on observe un épaississement typique d'un comportement de crue glaciaire (pics bleus positifs sur la Figure 5.9). Les vitesses d'écoulement sont multipliées par un facteur $\sim 5$ entre $t = 0$ a et $t = 20$ a puis par un facteur $\sim 2$ entre $t = 20$ a et $t = 40$ a (Courbes bleues sur la Figure 5.10b). Au voisinage de la ligne d'échouage, $\tau_b$ devient significativement plus faible que ceux produits par les autres lois et cette zone de frottement réduit se propage de plus en plus loin vers l'amont.

Comme le montre la Figure 5.10d, les profils des calottes diffèrent substantiellement selon la loi de frottement choisie. Conformément aux résultats analytiques obtenus par Tsai *et al.* (2015), la simulation de référence donne lieu à une diminution progressive de la pente de la surface supérieure au voisinage immédiat de la ligne d'échouage (discernable sur la courbe noire de la Figure 5.10d). Dans le cas de la simulation $W^{0a}$, cette zone d'adoucissement progressif de la pente de surface laisse place, à mesure que la ligne d'échouage recule, à l'abrupte rupture de pente prédite analytiquement par Schoof (2007a) pour une loi de Weertman associée à un coefficient de frottement uniforme (discernable sur les courbes magenta sur la Figure 5.10d). A l'inverse, la simulation $B^{0a}$ produit un profil de surface concave (courbes bleues sur la Figure 5.10d), la pente atteignant son maximum environ 30 km en amont de la ligne d'échouage avant de s'adoucir progressivement en s'approchant de celle-ci. Notons que ce profil est similaire à ceux obtenus par Gladstone *et al.* (2017) en utilisant différentes variantes de la loi de Budd. Sans surprise, les profils obtenus avec la loi de Schoof modifiée (non représentés) ont le même aspect que ceux obtenus lors de la simulation de référence mais sont décalés d'une dizaine de km vers l'aval.

Les estimations d'augmentation du niveau des mers étant traditionnellement données pour la fin du 21$^{\text{ème}}$ siècle, il semble opportun de regarder si les importantes différences de dynamique de ligne d'échouage mises en évidence sur des durées de plusieurs millénaires demeurent significatives lorsqu'on considère des échelles de temps plus courtes. Pour cette raison, la distance $\Delta x_G$ couverte par la ligne d'échouage au court des 100 premières années faisant suite à l'initialisation est donnée pour chacune des lois de frottement dans le Tableau 5.3. Avec la loi de Weertman, la ligne d'échouage ne recule que de quelques km (3 km au maximum) sur un siècle tandis que la loi de Budd prédit un retrait compris entre 69 et 316 km sur la même période. De nouveau, la loi de Schoof produit des projections intermédiaires avec des retraits s'échelonnant entre 24 et 47 km pour la simulation de référence et entre 12 et 28 km pour la simulation $S^{*0a}$. En pratique, la contribution dynamique des calottes à terminaison marine à l'élévation du niveau des mers peut être déterminée en évaluant l'évolution temporelle des volumes de glace stockés au-dessus de la flottaison (VAF) : une diminution

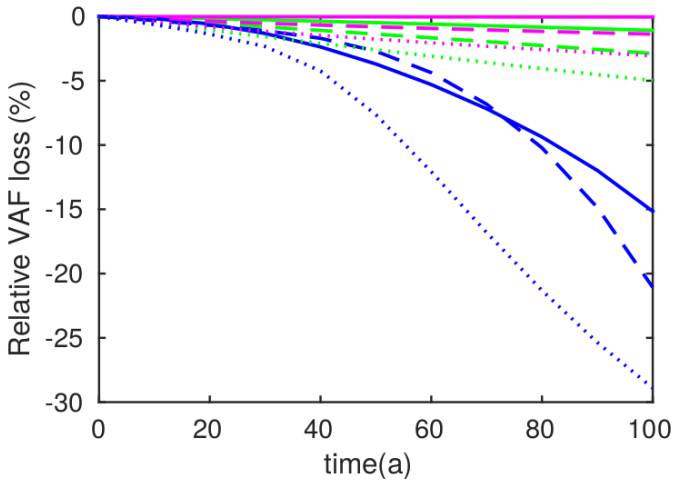


FIGURE 5.11 – Evolution relative en % de la glace stockée au-dessus de la flottaison au cours des 100 ans suivant l'initialisation réalisée à $t_i = 0$ a (trait continu), 500 a (trait interrompu) et 1100 a (pointillé) pour les lois de frottement de Schoof (simulation de référence, vert) ainsi que pour les lois de Weertman (magenta) et Budd (bleu). Le résultat obtenu avec la loi de Tsai pour $t_i = 0$ a (non montré) est pratiquement superposé à la courbe verte en trait continu.

des VAF signifie que de la glace a été déchargée dans l'océan et va donc de paire avec une élévation du niveau des mers. La Figure 5.11 montre l'évolution relative sur un siècle de la glace stockée au-dessus de la flottaison pour les lois de Schoof (simulations de référence et $S^{*0a}$), Weertman et Budd pour des initialisations réalisées à différents $t_i$. Une fois encore, les résultats obtenus avec la loi de Tsai sont très proches de ceux obtenus avec la loi de Schoof de référence et n'ont donc pas été représentés sur la Figure 5.11. Après 100 a de simulation, la loi de Schoof de référence prédit des pertes représentant 1% à 5% de la quantité totale de glace stockée au dessus de la flottaison. Notons que la perte projetée par la loi de Schoof modifiée (simulation $S^{*0a}$) est réduite à 0.6%. Etant donné que la ligne d'échouage ne recule que de 2.3 km lors de la simulation $W^{0a}$, la perte de glace correspondante est négligeable. Pour les simulations $W^{500a}$ et $W^{1.1ka}$, la perte de glace représente respectivement 1% et 3% de la quantité totale de glace stockée au dessus de la flottaison. La loi de Budd prédit des contributions beaucoup plus importantes avec des diminutions relatives de la quantité de glace stockée au-dessus de la flottaison s'échelonnant entre 15% et 29% à l'issue des 100 a de retrait de la ligne d'échouage.

### 5.2.4 Discussion et Conclusions

La réponse de la ligne d'échouage à la suite du retrait de l'effort d'arc-boutant au front de vêlage diffère selon la loi de frottement utilisée. L'équilibre global des contraintes devant impérativement être satisfait, la disparition de cet effort se traduit nécessairement par une augmentation de la contrainte de cisaillement basale totale. L'interface entre la plateforme flottante et l'océan ne sup-

portant aucune contrainte tangentielle (glissement pur), la perturbation est transmise jusqu'à la ligne d'échouage et est progressivement reprise au sein de la partie posée (courbe noire sur la Figure 5.9). Cependant, l'amincissement provoqué par la perturbation induit, au premier pas de temps, une évolution de la distribution de la pression effective en vertu de l'équation (4.24), dont les répercussions sur le champ de contrainte de cisaillement basale dépendent de la loi de frottement utilisée. D'où la variété des dynamiques de ligne d'échouage obtenues au cours des pas de temps suivants.

Dans le cas de la simulation de référence, il y a une région étroite située immédiatement en amont de la ligne d'échouage au sein de laquelle la loi de Schoof est parfaitement équivalente à une loi de type Coulomb ; dans cette région, la contrainte de cisaillement basale est purement proportionnelle à $N$ et n'augmente pas malgré une augmentation des vitesses basales. Par conséquent, la perturbation se propage plus loin en amont dans des régions au sein desquelles la loi de Schoof induit une dépendance de $\tau_b$ à $u_b$. La distance sur laquelle se communique la perturbation est déterminée par le niveau d'augmentation de $\tau_b$ requit pour compenser la perte de l'effort d'arc-boutant. A mesure que la ligne d'échouage recule dans des eaux plus profondes, l'épaisseur de glace à la ligne d'échouage augmente tandis que la région au sein de laquelle le frottement est régi par une loi type Coulomb voit une pression d'eau de plus en plus forte. Les deux effets entrent en compétition et il s'avère que l'augmentation de la pression d'eau l'emporte légèrement sur l'augmentation de la pression cryostatique liée à l'épaississement de la glace puisqu'on obtient une diminution locale de la pression effective ; la contrainte de cisaillement basale $C_{max}N$ fournie par la région au sein de laquelle la loi de Schoof se réduit à une loi de type Coulomb diminue et la perturbation se communique vers l'amont où le même processus se met en place créant un mécanisme de rétroaction positive (courbes vertes sur les Figures 5.6 et 5.5b-c). Une fois que la ligne d'échouage est sortie de la section de pente rétrograde, un retrait supplémentaire de celle-ci induit une augmentation de la pression effective au sein de la région où le régime de frottement est de type Coulomb : le mécanisme est inversé et la ligne d'échouage peut progressivement rejoindre une nouvelle position d'équilibre stable. Néanmoins, du fait du postulat de connexion hydraulique parfaite entre océan et réseau sous-glaciaire, la loi de Schoof affiche en permanence une région étroite au sein de laquelle la contrainte de cisaillement basale décroît progressivement vers zéro. Cette zone est responsable de vitesses d'écoulement localement élevées à la ligne d'échouage (environ 400 m a$^{-1}$ pour la vitesse d'écoulement stationnaire à la fin de la simulation) qui doivent être contre-balancées par une faible épaisseur de glace de manière à ce que le flux évacué à la ligne d'échouage puisse être intégralement compensé par l'accumulation sur la partie posée. En vertu du critère de flottaison, cela nécessite un retrait de la ligne d'échouage dans des zones où l'eau est suffisamment peu profonde.

A l'inverse, lors de la simulation $W^{0a}$, $\tau_b$ est donné par la loi de Weertman (2.15) et, en tant que

tel, dépend de $u_b$ sur l'intégralité de la partie posée, y compris au voisinage de la ligne d'échouage. En conséquence, il suffit d'une légère augmentation des vitesses basales pour que l'équilibre global du domaine soit satisfait. C'est la raison pour laquelle la perturbation reste confinée au voisinage de la ligne d'échouage et ne se communique pas au-delà. Qui plus est, par construction, la distribution inversée du coefficient de frottement de Weertman est telle que la valeur du coefficient de frottement à la ligne d'échouage $C_W^{0a}(x_G)$ augmente au fur et à mesure que celle-ci recule au sein de la zone de transition, i.e. la zone dans laquelle $C_W^{0a}$ décroît de manière continue (courbe magenta sur la Figure 5.10a). De fait, pour une contrainte de cisaillement basale donnée permettant de satisfaire l'équilibre global des contraintes, la vitesse basale à la ligne d'échouage décroît lorsque celle-ci recule. Ce mécanisme a un effet stabilisateur responsable de la convergence des vitesses d'écoulement visible sur la Figure 5.10b (courbes magenta superposées) et de la rapide stabilisation de la ligne d'échouage au sein de la zone de pente rétrograde.

Comme nous l'avons évoqué à plusieurs reprises dans ce manuscrit, Schoof (2007a,b) est parvenu, à partir des équations de la SSA et en utilisant une loi de Weertman, à dériver une expression analytique pour le flux à la ligne d'échouage $q_B(x_G)$. Cette expression s'écrit :

$$q_B(x_G) = \left( \frac{A(\rho_i g)^{n+1}(1-\rho_i/\rho_w)^n}{4^n C} \right)^{\frac{1}{m+1}} H(x_G)^{\frac{m+n+3}{m+1}}, \tag{5.7}$$

où $C$ désigne le coefficient de frottement. Le terme de bilan de masse de surface $a_s$ étant supposé uniforme, les positions d'équilibre possibles pour la ligne d'échouage peuvent être estimées en résolvant :

$$q_B(x_G) = a_s x_G. \tag{5.8}$$

Lorsque $a_s x_G > q_B(x_G)$, la partie posée prend du volume et la ligne d'échouage avance. Inversement, quand $a_s x_G < q_B(x_G)$, la partie posée perd du volume et la ligne d'échouage recule.

Le bilan de masse de surface intégré $a_s x$ et le flux $q_B(x)$ sont représentés, en fonction de la position horizontale $x$, sur la Figure (5.12) pour différentes distributions spatiales du coefficient de frottement : $C = C_S = \text{Cste}$ (courbe noire), $C = C_W^{100a}(x)$ (courbe magenta) et $C = C_W^{300a}(x)$ (courbe marron). L'étoile et les points verts mettent en évidence les positions d'équilibre stable tandis que le point rouge correspond à une position d'équilibre instable. Les zones de transition correspondent aux parties des courbes marron et magenta qui ne sont pas superposées à la courbe noire sur la Figure 5.12. Soulignons que ces zones de transition se trouvent au sein de la région du socle dont la pente est rétrograde. Comme cela a été démontré par Schoof (2007a) en supposant le coefficient de frottement $C$ uniforme, une calotte marine non sujette à un effet d'arc-boutant est inconditionnellement instable sur la section de pente rétrograde (courbe noire sur la Figure 5.12). Nous avons déjà parlé de ce mécanisme, connu sous l'acronyme MISI, à la Section 1.2.3 du chapitre d'introduction.

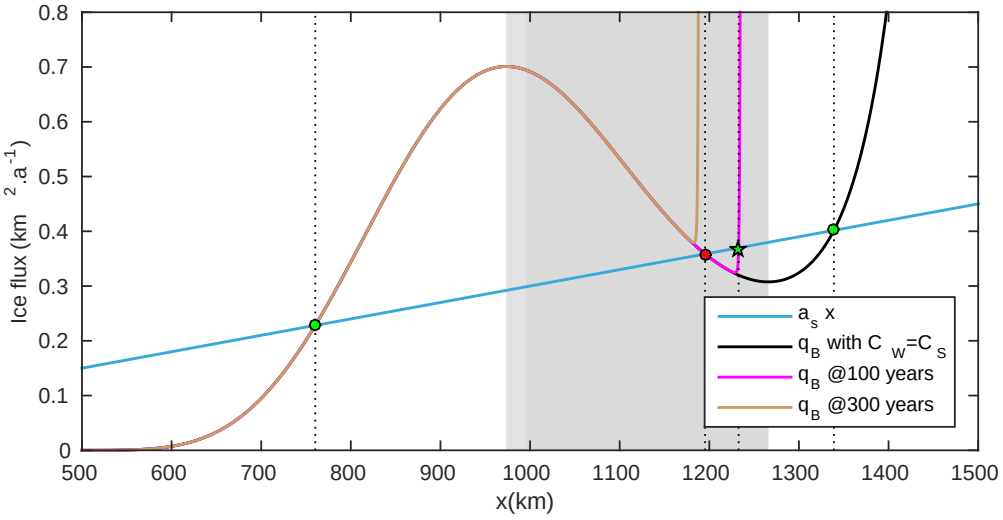


FIGURE 5.12 – Bilan de masse de surface intégré $a_s x$ et flux de Schoof (2007a,b) $q_B(x)$ en fonction de la position horizontale $x$. Le flux $q_B(x)$ est représenté pour différentes distributions du coefficient de frottement $C$ apparaissant dans l'équation (5.7) : $C = C_S$ (courbe noire), $C = C_W^{100a}$ (courbe magenta) et $C_W^{300a}$ (courbe marron). Les points verts représentent les positions d'équilibre stable possibles pour la ligne d'échouage. L'étoile verte représente la position d'équilibre stable de la ligne d'échouage se trouvant sur la section de pente rétrograde. Le point rouge est une position d'équilibre instable pour la ligne d'échouage. Des pointillés verticaux noirs permettent de faciliter la lecture de ces diverses positions d'équilibre. La zone grisée correspond à la section du socle dont la pente est rétrograde.

Lorsque le coefficient de frottement $C$ intervenant dans l'équation (5.7) est remplacé par la distribution spatiale $C_W^{t_i}(x)$ inversée à un instant donné $t_i$, le flux de glace se trouve modifié. En effet, à mesure que la ligne d'échouage recule au sein de la zone de transition, la diminution de la vitesse d'écoulement à la ligne d'échouage entre en compétition avec l'augmentation de $H(x_G)$ qu'implique la topographie du socle. Comme on peut le voir sur la Figure 5.12, le premier mécanisme l'emporte sur le second et le flux $q_B$ décroît avec le retrait de la ligne d'échouage tant que celle-ci demeure dans la zone de transition. En d'autres termes, le minimum local de la fonction $q_B$ est décalé vers l'amont ouvrant la possibilité d'un état d'équilibre stable situé au sein de la zone de pente rétrograde (étoile verte sur la Figure 5.12). Pour que cette possibilité devienne effective, il faut que le flux de glace au niveau de la limite amont de la zone de transition (minimum local de $q_B$) soit inférieur au bilan de masse de surface intégré jusqu'à ce point. Pour illustrer cet aspect, il suffit de regarder la Figure 5.12 en imaginant un bilan de masse de surface supérieur à 0.3 m a$^{-1}$ (plus forte pente de la ligne bleue sur la Figure 5.12) : on se rend compte aisément que la simulation $W^{300a}$ aurait alors produit elle aussi un état d'équilibre stable encore plus reculé au sein de la zone de pente rétrograde. De ce point de vue, la position $x_{tp} = 1195.3$ km (point rouge sur la Figure 5.12) s'avère être un point de bascule pour les paramètres utilisés au cours de ces

expériences : si l'inversion de la distribution du coefficient de frottement est réalisée après que la ligne d'échouage ait reculé au delà de ce point, celle-ci finira nécessairement sa course en amont de la zone de pente rétrograde (courbe marron sur la Figure 5.12). Notons le très bon accord entre les positions stables prédites par la théorie de Schoof (2007a,b), à savoir $x = 1232.7$ km et $x = 760.3$ km pour $W^{100a}$ et $W^{\geq 300a}$ respectivement, et celles obtenues numériquement, à savoir $x = 1233.2$ km et $x = 759.5$ km. Par ailleurs, lors de la simulation de référence, le point de bascule $x_{tp}$ évoqué ci-dessus est atteint aux alentours de $t_{tp} = 273$ a. En d'autres termes, on peut s'attendre à ce que toutes les simulations $W^{\leq 273a}$ produisent un état stable dans la zone de pente rétrograde, ce qui est conforme aux comportements obtenus avec la loi de Weertman (courbes magenta sur la Figure 5.8). En résumé, nos résultats montrent que le fait de considérer la région d'instabilité comme correspondant exactement à la région de pente rétrograde pourrait être trop restrictif : l'instabilité ne dépend pas uniquement de la topographie du socle mais aussi de la distribution spatiale du coefficient de frottement.

A partir des travaux de Schoof (2007a,b), Tsai *et al.* (2015) ont dérivé une expression équivalente à (5.7), valable pour la loi de Tsai (2.22) :

$$q_B(x_G) = Q_0 \frac{8A(\rho_i g)^n (1 - \rho_i/\rho_w)^{n-1}}{4^n f_C} H(x_G)^{n+2}, \tag{5.9}$$

où $Q_0 \approx 0.61$ est un coefficient numérique. En utilisant cette expression de $q_B$ avec $f_C = C_{max}$ pour résoudre l'équation (5.8), il apparaît que la seule position stable possible pour la ligne d'échouage se trouve en $x = 688.3$ km. Pour comparaison, rappelons que la position d'équilibre finale obtenue numériquement avec la loi de Tsai est située en $x = 683.3$ km.

Dans le cas de la loi de Budd, $N$ joue un rôle sur l'intégralité du domaine posé et pas uniquement au sein d'une étroite région voisine de la ligne d'échouage comme c'est le cas pour la loi de Schoof. Par conséquent, la diminution de $N$ associée à l'amincissement initial de la calotte permet à la perturbation de se propager rapidement très loin en amont de la ligne d'échouage (courbes bleues sur la Figure 5.9). Il en résulte une augmentation des vitesses d'écoulement qui a deux effets opposés : une augmentation directe de la contrainte de cisaillement basale d'une part et une accélération de l'amincissement dynamique responsable d'une diminution supplémentaire de la pression effective et donc, indirectement, de la contrainte de cisaillement basale d'autre part. En d'autres termes, quand la ligne d'échouage recule, la loi de Budd (2.16) induit une compétition entre la diminution de $N$ et l'augmentation de $u_b$. Malgré la très forte augmentation des vitesses basales, la région de frottement réduit s'étend vers l'amont au fur et à mesure que la ligne d'échouage recule (courbes bleues sur la Figure 5.10b-c). C'est ce mécanisme auto-entretenu qui est à l'origine du comportement type crue glaciaire obtenu avec la loi de Budd.

Tandis que les positions stationnaires de la ligne d'échouage produites par la loi de Budd diffèrent légèrement selon l'instant $t_i$ auquel l'inversion a été réalisée, la loi de Weertman donne une position

stationnaire unique - à 50 m près du fait de la résolution du maillage - pour toutes les simulations $W^{\geq 300a}$. La loi de Schoof induisant un régime de frottement type Weertman sur la quasi totalité de la partie posée, la distribution du coefficient de frottement de Weertman obtenue par inversion à un instant $t_i$ est telle que $C_W^{t_i}(x) \approx C_S$ partout sauf dans l'étroite zone de transition (courbes magenta et verte sur la Figure 5.10a). Dans la mesure où la ligne d'échouage recule au-delà de cette zone pour toutes les simulations $W^{\geq 300a}$, les positions stationnaires obtenues au cours de ces simulations diffèrent de moins de 50 m. Inversement, comme $N$ influe sur la totalité de la partie posée et que sa distribution évolue au cours du retrait de la ligne d'échouage, les distributions inversées du coefficient de frottement de Budd $C_B^{t_i}(x)$ diffèrent significativement, en fonction de $t_i$, sur une distance importante en amont de la ligne d'échouage. Même si, au final, la ligne d'échouage se stabilise dans des régions où les coefficients de frottement $C_B^{t_i}(x)$ sont pratiquement identiques quelque soit $t_i$, la différence initiale entre les $C_B^{t_i}$ est suffisante pour être à l'origine de positions stationnaires finales distantes de quelques km les unes des autres (3.3 km entre la position stationnaire la plus avancée et la plus reculée).

Les différences marquées entre les réponses transitoires de la ligne d'échouage produites par les différentes lois de frottement testées jettent le doute sur la fiabilité des projections réalisées par des modèles qui, en général, n'intègrent qu'une formulation de loi de frottement. A l'horizon du siècle, le domaine modélisé n'a ainsi perdu que 3 % de la quantité totale de glace stockée au-dessus de la flottaison avec la loi de Weertman - la plus prisée des modélisateurs - tandis que les lois de Schoof/Tsai et de Budd prédisent des pertes atteignant 5 % pour les premières et jusqu'à 29 % pour la seconde. Bien que l'étude présentée ici soit basée sur un cas synthétique 2D (les VAFs calculés sont alors des volumes par unité de longueur), elle montre à quel point il est essentiel d'utiliser une loi de frottement appropriée pour produire des projections dignes de confiance. L'importance de l'eau présente à l'interface entre la glace et le socle dans le mouvement basal a été largement soulignée au cours du Chapitre 2 et ce constat penche en faveur de l'usage de lois de frottement dépendantes de la pression effective. Cependant, nos travaux montrent que, lorsqu'on postule une connexion parfaite entre le réseau hydraulique sous-glaciaire et l'océan, les lois de Budd et de Schoof/Tsai - qui dépendent toutes de la pression effective - peuvent produire des résultats très différents tant en terme de réponse dynamique que d'état stationnaire. Nous suggérons de plutôt se tourner vers la loi de Schoof (2.18) dans la mesure où elle implique une transition continue entre les régimes asymptotiques de Weertman et Coulomb, qui sont considérés comme les plus appropriés pour décrire le frottement dans leurs domaines de validité respectifs. En outre, contrairement à la loi de Budd (2.16) pour laquelle la contrainte de cisaillement basale est susceptible d'atteindre des valeurs arbitrairement élevées, la loi de Schoof satisfait la borne d'Iken (Iken, 1981).

Une fois la forme de la loi de frottement choisie, le problème du choix des paramètres de cette

loi demeure. Dans le cas de la loi de Schoof, il s'agit des paramètres $C_S$, $C_{max}$ et $m$. Comme nous l'avons déjà évoqué à la Section 2.3.2.9 pour la loi de Weertman, il n'est pas possible d'inverser l'ensemble de ces paramètres à partir d'un unique jeu d'observations dans la mesure où un certain nombre de combinaisons de ces paramètres sont susceptibles de produire le même résultat. Aussi est-il nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur les valeurs de $m$ et $C_{max}$, afin de pouvoir inverser la distribution du coefficient de frottement $C_S$ de manière unique. Néanmoins, comme le montre les résultats obtenus lors de la simulation $S^{*0a}$, la dynamique de la ligne d'échouage s'avère sensible à de faibles incertitudes sur la localisation de la région régie par un frottement type Coulomb, c'est-à-dire sur la valeur à attribuer à $C_{max}$ puisque c'est elle qui détermine la distance sur laquelle la loi de Schoof se réduit à une loi de Coulomb. En effet, du fait de la formulation de la loi de Schoof (2.18), plus la valeur de $C_{max}$ est élevée et plus la zone dans laquelle cette loi équivaut à une loi de Coulomb est réduite. Cela explique la similarité des distributions de $C_S^{*0a}$ et $C_W^{0a}$ obtenues par inversion : la décroissance progressive du coefficient $C_S^{*0a}$ permet de tenir compte de la dépendance de $\tau_b$ à $N$ dans une zone où la loi de Schoof modifiée implique un régime type Weertman. Comme la distribution de $C_S^{*0a}$ est stationnaire, cette zone est rognée à mesure que la ligne d'échouage recule et on se retrouve très vite dans une situation où $C_S^{*0a}(x) = C_S$ en tous les nœuds posés. A ce moment là, les mécanismes décrits ci-dessus concernant la propagation de la perturbation vers l'amont dans le cas de la loi de Schoof de référence demeurent identiques dans le cas de la loi de Schoof modifiée mais cette propagation est plus lente étant donné que la zone au sein de laquelle la loi de Schoof modifiée se réduit à une loi de Coulomb est moins étendue que dans le cas de la loi de Schoof de référence ; la réponse dynamique de la ligne d'échouage produite par la première est plus lente. C'est aussi la raison pour laquelle, lors de la simulation $S^{*0a}$, la position stationnaire finale de la ligne d'échouage se trouve 16 km en aval de celle obtenue lors de la simulation de référence, ce qui induit une moindre contribution à l'élévation du niveau des mers. La problématique du choix de la valeur de $C_{max}$ pour un cas réel sera abordée plus en détail au Chapitre 6.

Enfin, lorsque la loi de frottement choisie dépend explicitement de la pression effective, il est nécessaire d'estimer sa distribution. Dans notre étude, cette distribution est calculée en partant de l'hypothèse d'une connexion hydraulique parfaite entre l'océan et le réseau sous-glaciaire. Leguy *et al.* (2014) proposent une méthode permettant de paramétrer la qualité de cette connexion. Pour ce faire, ils introduisent un paramètre *ad hoc* $p$ permettant de réduire la pression d'eau basale à une fraction de la pression d'eau de l'océan calculée en ce point. Ce modèle ne permet cependant pas de rendre compte de la complexité du réseau hydraulique sous-glaciaire dont nous avons fait état à la Section 2.3.1.4. Des modèles reposant sur une base physique beaucoup plus solide existent (Schoof, 2010; Hewitt *et al.*, 2012; Werder *et al.*, 2013; De Fleurian *et al.*, 2014, par exemple), mais leur

calibration à partir d'observations est une tâche ardue en raison de l'inaccessibilité du socle et de la faible couverture spatiale et temporelle des mesures indirectes comme, par exemple, les mesures de pression d'eau au fond de trous de forage (Schoof *et al.*, 2014, par exemple). Bien qu'elle n'en soit qu'à ses prémices, la cryo-sismologie semble prometteuse quant à la possibilité d'acquérir de l'information sur les réseaux hydrauliques sous-glaciaires dans un futur proche (Podolskiy et Walter, 2016; Gimbert *et al.*, 2016, par exemple). Par ailleurs, en partant du principe que le frottement est régi par la loi de Schoof, des observations de pente de surface au voisinage de la ligne d'échouage et de taux de retrait de celle-ci sur des échelles de temps suffisamment longues pourraient permettre d'obtenir des indications sur la distribution de la pression d'eau à l'interface glace/socle.

## 5.3 Conclusion

La plupart des modèles grande échelle font appel à une loi de frottement de Weertman (2.15) dont la distribution du coefficient de frottement $C_W$ est habituellement obtenue par inversion à partir d'observations de vitesses de surface. Il est commun d'observer une décroissance progressive de ce coefficient à l'approche de la ligne d'échouage : cela traduit sa dépendance à la pression effective et induit une diminution graduelle du frottement dans cette région. Cependant, le manque de contrainte sur l'évolution temporelle des conditions basales oblige bien souvent les modélisateurs à postuler la stationnarité du coefficient de frottement. Cette hypothèse implique l'apparition d'une discontinuité du frottement à la ligne d'échouage dès lors que celle-ci recule ; le saut que subit le frottement à la ligne d'échouage est de plus en plus important au fur et à mesure de son retrait.

Comme nous l'avons vu au cours de la première partie de ce chapitre, il existe trois méthodes numériques permettant de traiter cette discontinuité en frottement avec un modèle *full-Stokes*. Les dynamiques de la ligne d'échouage obtenues avec ces différentes méthodes convergent vers une solution unique à mesure que la résolution du maillage augmente. En revanche, pour des résolutions permettant des temps de calcul raisonnables lors d'applications réelles sur de grands domaines, les trois méthodes donnent des résultats significativement différents. Si on veut conserver une loi de Weertman, nous conseillons d'utiliser la méthode DI dans la mesure où elle s'avère la plus fidèle au problème physique tel que formulé. Mais, selon nous, le mieux est d'avoir recours à une loi de frottement intégrant explicitement l'effet de la pression effective et induisant, de fait, une diminution progressive du frottement à la ligne d'échouage ; d'une part, ce choix semble plus réaliste compte-tenu de la connaissance acquise au cours des dernières années à propos de l'hydrologie sous-glaciaire et, d'autre part, dans un tel cas les trois méthodes numériques LG, FF et DI deviennent parfaitement équivalentes et on s'affranchit de cet aspect du problème.

Après la prise de conscience du bénéfice de l'usage d'une loi de frottement dépendante de la pression effective vient la question du choix de cette loi. C'est cette interrogation qui motive

l'étude présentée dans la seconde partie de ce chapitre dont le but est de comparer, sur un cas 2D synthétique, la dynamique de la ligne d'échouage pour les quatre lois de frottement les plus communément rencontrées en glaciologie : les lois de Weertman (2.15), Budd (2.16), Schoof (2.18) et Tsai (2.22). A cette fin, nous avons construit un protocole expérimental imitant, de manière simplifiée, ce qui est fait lors de l'étude d'objets réels : notre simulation de référence peut être vue comme un équivalent à des "observations" si ce n'est que, au contraire d'observations réelles qui sont généralement clairsemées dans le temps et dans l'espace, les champs de vitesse basale, de pression effective et de contrainte de cisaillement basale sont parfaitement connus tout au long de la simulation. Quelque soit la loi de frottement choisie, il est toujours possible, en se donnant des valeurs pour les autres paramètres, d'estimer la distribution spatiale du coefficient de frottement permettant de recréer l'état observé à l'instant $t$. Mais, bien que les lois de Weertman, Budd et Schoof démarrent toutes des mêmes états initiaux, elles produisent des réponses transitoires très différentes. Au contraire, pour des paramètres choisis de manière adéquate les comportements de la ligne d'échouage obtenus avec les lois de Schoof et Tsai sont similaires.

Les états stationnaires obtenus avec les différentes lois à l'issue des 20 ka de simulation sont également significativement différents. En particulier, il est possible d'obtenir, avec une loi de Weertman, une position d'équilibre stable de la ligne d'échouage située au sein d'une zone de pente rétrograde. Ce résultat remarquable signifie que, même dans un cas 2D le long d'une ligne d'écoulement et en l'absence d'effort d'arc-boutant, la topographie du socle seule ne permet pas de délimiter la région sujette au phénomène de MISI. Nous avons également démontré que les projections en terme d'élévation du niveau des mers réalisées à l'horizon du siècle sont fortement dépendantes du choix de la loi de frottement : la loi de Weertman régulièrement utilisée par les glaciologues à tendance à sous-estimer cette contribution.

Au vue des différents résultats obtenus dans les deux parties de ce chapitre, nous suggérons l'usage d'une loi de Schoof pour trois raisons principales : (1) elle inclut une dépendance explicite à la pression effective, (2) elle satisfait la borne d'Iken et (3) elle permet une transition continue entre les régimes asymptotiques type Weertman et Coulomb plus facile à gérer numériquement que lorsque cette transition est gouvernée par un seuil. Néanmoins, pour une modélisation réaliste du frottement, deux problèmes demeurent entiers : l'estimation de la pression effective et le choix des paramètres de la loi. Les récents efforts visant à coupler modèles d'écoulement glaciaire et modèles d'hydrologie sous-glaciaire sont encourageants (Hewitt, 2013; Bougamont *et al.*, 2014; De Fleurian *et al.*, 2014, par exemple) mais le chemin à parcourir avant d'être capable de correctement calibrer les nombreux paramètres intervenant dans ces derniers est encore long. Certaines techniques de mesure innovantes développées actuellement, comme la cryo-sismologie, donnent des résultats prometteurs de ce point de vue.

Pour ce qui est du choix des paramètres, ce n'était pas l'objet initial de notre étude et nous n'avons testé la sensibilité des résultats obtenus avec la loi de Schoof que pour une valeur supplémentaire de $C_{max}$. En augmentant la valeur de ce paramètre, la zone au sein de laquelle le régime de frottement type Coulomb s'applique se resserre et, par conséquent, la réponse dynamique de la ligne d'échouage à la perturbation est ralentie. Les différences obtenues en terme d'état stationnaire et de contribution à l'augmentation du niveau des mers à l'horizon du siècle ne sont pas négligeables et la sensibilité au paramètre $C_{max}$ des projections produites avec une loi de Schoof pour un cas réel mérite d'être explorée plus en détail. Cet aspect est au cœur des travaux présentés au Chapitre 6.

Chapitre 6

# Application à un cas réel : Bassin d'Amundsen

## Sommaire


**6.1 Contexte de l'étude et présentation de la problématique . . . . . 168**
6.1.1 Le projet InitMIP-Antarctica . . . . . 168
6.1.2 Importance du bassin d'Amundsen . . . . . 169
6.1.3 Déroulement des expériences . . . . . 171
**6.2 Initialisations du modèle . . . . . 173**
6.2.1 Données et paramétrisations utilisées pour les inversions . . . . . 174
6.2.2 Modèle direct, conditions aux limites et maillage . . . . . 174
6.2.3 Modèles Inverses . . . . . 176
6.2.4 Résultats des inversions . . . . . 183
6.2.5 Relaxations . . . . . 186
**6.3 Modification de la loi de frottement . . . . . 187**
6.3.1 Identification pour la loi de Weertman non linéaire . . . . . 187
6.3.2 Identification pour la loi de Schoof non linéaire . . . . . 189
6.3.3 Conclusion sur l'identification des coefficients de frottement . . . . . 194
**6.4 Expériences transitoires . . . . . 194**
6.4.1 Description des expériences . . . . . 195
6.4.2 Résultats . . . . . 196
6.4.3 Discussion . . . . . 202
**6.5 Conclusion . . . . . 203**


Au cours du chapitre précédent, nous avons conçu une expérience synthétique qui a permis de mettre en évidence, de manière qualitative, une forte sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement et d'expliquer les mécanismes à l'origine de cette sensibilité. En particulier, nous avons mis en lumière le fait que la loi de Weertman - fréquemment adoptée pour les applications grande échelle - a tendance à sous-estimer la contribution du glacier étudié à l'élévation du niveau des mers en raison de sa non prise en compte explicite de l'effet de la pression effective. Dans le présent chapitre, nous profitons du projet d'intercomparaison ISMIP6 (Nowicki *et al.*, 2016), et plus particulièrement du sous-projet InitMIP-Antarctica [1], pour quantifier les incertitudes liées au choix de la loi de frottement sur un cas réel : le bassin d'Amundsen en Antarctique de l'Ouest. Par ailleurs, nous nous attardons sur la problématique du choix de la

1. voir site web : http://www.climate-cryosphere.org/wiki/index.php?title=InitMIP-Antarctica

valeur à attribuer au paramètre $C_{max}$ lorsque la loi de Schoof (2.18) est utilisée pour modéliser le frottement dans un cas réel et testons la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à ce choix.

## 6.1 Contexte de l'étude et présentation de la problématique

### 6.1.1 Le projet InitMIP-Antarctica

Le projet d'intercomparaison ISMIP6 (*Ice Sheet Model Intercomparison Project*) s'inscrit dans le cadre plus vaste du projet CMIP6 (*Coupled Model Intercomparison Project - phase 6*), dont le rôle est de coordonner, à l'échelle internationale, la conception et la réalisation à partir de modèles climatiques globaux mis en œuvre par différents groupes de recherche, de simulations concernant le passé, le présent et le futur du climat terrestre (Eyring *et al.*, 2016) ; ces simulations ont notamment vocation à servir de base au chapitre relatif à la modélisation du climat du prochain rapport du GIEC (rapport AR6, d'où l'origine du chiffre 6 dans les acronymes ISMIP6 et CMIP6). Le projet ISMIP6 est né d'une critique majeure formulée à l'encontre des projections de la contribution de la cryosphère au niveau des mers effectuées dans le cadre des précédents rapports du GIEC : ces projections faisaient généralement appel à des forçages climatiques découplés des projections réalisées par les modèles de climat pour ces mêmes rapports. Par exemple, pour le dernier rapport du GIEC paru (le rapport AR5), le chapitre relatif au niveau des mers (Church *et al.*, 2013) intègre des projections concernant la contribution de la cryosphère qui reposent sur des scénarios climatiques issus du *Special Report on Emissions Scenarios* (SRES, Nakicenovic *et al.* (2000)) ; dans ce même rapport AR5, le chapitre relatif à la modélisation du climat (Flato *et al.*, 2013) s'appuie sur des simulations réalisées dans le cadre de l'initiative CMIP5 et basées sur d'autres scénarios climatiques, à savoir les scénarios RCP (*Representative Concentration Pathway*, Van Vuuren *et al.* (2011)). Dans ce contexte, le but premier du projet ISMIP6 est de permettre une meilleure intégration des modèles de calotte comme parties prenantes de l'initiative CMIP6 afin d'améliorer à la fois les projections de variation du niveau des mers imputables à des évolutions de la cryosphère ainsi que notre compréhension de l'évolution de la cryosphère dans un contexte de changement climatique (Nowicki *et al.*, 2016). Concrètement, il s'agit de réaliser des simulations de l'évolution des calottes antarctique et groenlandaise dans un contexte de changement climatique en utilisant directement les sorties des modèles de climat participant à CMIP6 pour forcer les modèles de calotte, voire même, quand cela est possible, en mettant en œuvre des modèles couplés climat/calotte.

En parallèle, ISMIP6 se fixe pour objectif de mieux caractériser les incertitudes associées à ces projections, tant en ce qui concerne les forçages climatiques que la réponse des calottes à ces forçages. Pour cela, une série d'expériences concerne les modèles de calotte uniquement et vise à explorer leurs incertitudes, qu'elles soient d'origine physique ou numérique. Plusieurs études récentes ont

notamment révélé l'existence d'incertitudes importantes sur les projections concernant la contribution des calottes polaire au niveau des mers liées à l'initialisation des modèles employés pour réaliser ces projections (Adhalgeirsdóttir *et al.*, 2014, par exemple). L'amélioration des techniques d'initialisation est un thème de recherche active et, pour cette raison, aucune procédure spécifique n'est imposée aux participants au projet ISMIP6, chacun étant libre d'utiliser la méthode de son choix pour l'initialisation de son modèle. Dans ce contexte, les sous-projets InitMIP-Antarctica et InitMIP-Greenland ont été imaginés afin de : (1) comparer et évaluer les différentes méthodes d'initialisation utilisées au sein de la communauté des modélisateurs de calotte, (2) estimer les incertitudes dues à l'initialisation et, éventuellement, (3) documenter les développements de modèle en cours en se servant des protocoles expérimentaux prescrits par InitMIP comme de bancs d'essai.

Pour notre part, nous ne nous intéressons qu'à l'initiative InitMIP-Antarctica qui s'adresse à des modèles globaux ou régionaux de la calotte antarctique et se décompose en deux étapes. La première étape est une étape d'initialisation au cours de laquelle chacun des participants est invité à produire un état initial de la calotte antarctique dans son ensemble ou d'une de ses régions par la méthode de son choix. La seconde étape consiste à réaliser trois expériences pronostiques synthétiques couvrant une durée totale de 100 a et débutant de l'état initial construit lors de la première étape ; la première expérience pronostique est une simulation de contrôle sans perturbation ; la seconde consiste à introduire une perturbation sur le bilan de masse de surface ; la troisième consiste à introduire une perturbation sur la fonte basale sous les plateformes flottantes.

Les participants à InitMIP-Antarctica sont soumis à un certain nombre de contraintes : les perturbations du bilan de masse de surface et de la fonte basale sont imposées ; la topographie du socle et le bilan de masse de surface de référence sont constants dans les expériences pronostiques. En revanche, les participants peuvent utiliser le jeu d'observations de leur choix pour initialiser leur modèle mais cet état initial doit être compris entre les années 1950 et 2014. Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué, les participants peuvent choisir de traiter l'intégralité de la calotte antarctique ou bien se restreindre à une des cinq régions proposées. Dans notre cas, nous nous limitons à l'étude du bassin d'Amundsen.

### 6.1.2 Importance du bassin d'Amundsen

Le bassin d'Amundsen, identifié sur la Figure 6.1, constitue l'un des trois bassins versants d'Antarctique de l'Ouest, les deux autres étant les bassins de Ross et de Weddel. Les glaciers émissaires de ce bassin - les glaciers Pine Island, Thwaites, Haynes, Smith, Pope et Kohler - sont parmi les plus rapides de la calotte antarctique (Rignot *et al.*, 2011c) et les flux de glace qu'ils drainent à eux seuls vers la mer d'Amundsen ($280 \pm 9$ Gt $a^{-1}$ en 2007) sont comparables à l'intégralité des flux de glace déchargés de la calotte groenlandaise dans l'océan Arctique (Rignot et Kanagaratnam, 2006).

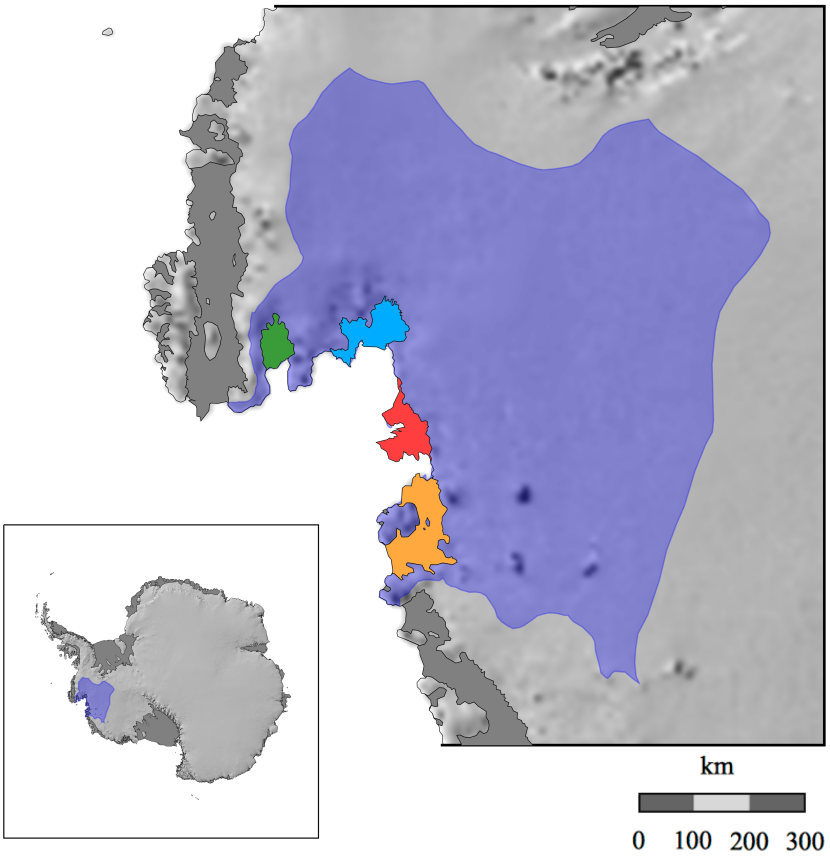


FIGURE 6.1 – Bassin d'Amundsen et ses plateformes flottantes : Cosgrove (en vert), Pine Island (en bleu, alimentée par le glacier Pine Island), Thwaites (en rouge, alimentée par les glaciers Thwaites et Haynes), Crosson et Dotson (toute deux en jaune, alimentées par les glaciers Smith, Pope et Kohler). La localisation du bassin d'Amundsen est signalée en violet sur la carte de l'Antarctique dans le coin inférieur gauche de la figure. Figure adaptée de Mosbeux (2016).

L'altitude du socle de l'essentiel de ce bassin est significativement inférieure au niveau des mers et certaines sections, notamment celles sur lesquelles reposent les lignes d'échouage des glaciers Pine Island, Smith/Kohler et, de manière plus locale, celle de Thwaites, présentent des pentes rétrogrades susceptibles de donner lieu au phénomène de MISI décrit à la Section 1.2.3 (Rignot *et al.*, 2014).

Le bassin d'Amundsen est le plus actif d'Antarctique et, comme nous l'avons déjà évoqué au Chapitre 1, sa dynamique actuelle est inquiétante : Mouginot *et al.* (2014) rapportent ainsi une accélération généralisée des glaciers émissaires de ce bassin depuis 1973 et une augmentation régulière de la masse de glace déchargée par l'ensemble de ceux-ci dans la mer d'Amundsen. En effet, si la décharge des glaciers Pine Island et Smith semble s'être stabilisée depuis 2009 après une période de décharge accélérée, le glacier Thwaites a, quant à lui, connu une phase d'accélération aux alentours de 2006 et sa décharge de glace a augmenté considérablement depuis ; l'accélération du glacier Thwaites aurait ainsi plus que compensé la récente stabilisation du glacier Pine Island. Ces

évolutions vont de paire avec un retrait généralisé des lignes d'échouage des glaciers émissaires de ce bassin qui renforce l'hypothèse selon laquelle un phénomène de MISI est amorcé (Rignot *et al.*, 2014).

Face à ces observations, d'importants efforts ont été déployés afin de mieux contraindre l'évolution future de ce secteur, et plus spécifiquement celle des glaciers Pine Island et Thwaites qui concentrent l'essentiel des flux de glace déchargés de ce bassin (Joughin *et al.*, 2010; Parizek *et al.*, 2013; Favier *et al.*, 2014; Joughin *et al.*, 2014; Seroussi *et al.*, 2014b, 2017, par exemple). A notre connaissance, la totalité de ces études ont fait appel à une loi de frottement de type Weertman (2.15) et, bien que certains auteurs se soient intéressés à l'influence de la valeur attribuée à l'exposant $m$ intervenant au sein de cette loi (Joughin *et al.*, 2010; Parizek *et al.*, 2013; Favier *et al.*, 2014), l'impact sur les résultats d'une prise en compte explicite de l'effet de la pression effective sur le frottement n'a pas été étudié.

### 6.1.3 Déroulement des expériences

Dans le présent chapitre, nous appliquons le protocole expérimental conçu pour l'exercice InitMIP-Antarctica limité au bassin d'Amundsen afin de comparer les résultats produits par : (1) la loi de Weertman linéaire donnée par la relation (2.15) avec $m = 1$, (2) une loi de Weertman non linéaire donnée par la relation (2.15) avec $m = 1/3$, (3) une loi de Schoof non linéaire donnée par la relation (2.18) avec $m = 1/3$ et $C_{max} = 0.4$ et (4) une loi de Schoof non linéaire donnée par la relation (2.18) avec $m = 1/3$ et $C_{max} = 0.6$.

Par ailleurs, nous étudions également l'influence qu'à la stratégie d'initialisation sur ces résultats en considérant, pour chacune des quatre lois de frottement, trois inversions différentes. En effet, nous utilisons ici un modèle *SSA* pour lequel le champ des vitesses est solution du système (3.26) et dépend donc à la fois du champ de contrainte de cisaillement basale et du champ de viscosité. Comme cela a largement été discuté dans ce manuscrit, quelque soit la loi de frottement adoptée pour expliciter le champ de contrainte de cisaillement basale, celle-ci fait systématiquement intervenir un coefficient qui est inaccessible à la mesure et dont la distribution, sur la partie posée, doit être déduite par inversion. La viscosité, quant à elle, dépend de la température selon les expressions (2.3) et (2.4). Des études se sont intéressées à la modélisation du champ de température de la glace en Antarctique et leurs résultats peuvent être exploités afin de déduire un champ de viscosité de référence $\eta_{0,ref}$. Cependant, le champ ainsi obtenu est associé à des incertitudes importantes, conséquences d'incertitudes à la fois sur le champ de température lui-même ainsi que sur les valeurs à attribuer aux paramètres intervenant dans l'expression (2.4) qui relie température et fluidité. Aussi, il peut être opportun d'employer les méthodes inverses pour ajuster cette viscosité, tant sur les parties posées que flottantes. Toute la question est alors de savoir à quel point les écarts entre

vitesses modélisées et vitesses observées en surface de la partie posée sont dues à un coefficient de frottement inadapté (auquel cas l'inversion doit induire une modification de la distribution de ce coefficient) ou à des erreurs sur la viscosité de référence (auquel cas l'inversion doit induire une modification de la distribution de la viscosité). Comme nous le verrons, un changement de variable judicieux sur la viscosité permet d'attribuer à celle-ci un poids plus ou moins important par rapport au poids portant sur le coefficient de frottement lors de l'inversion.

La première partie de ce chapitre est ainsi consacrée à la réalisation de trois inversions s'appuyant sur des observations de vitesses de surface. Dans la suite, nous utiliserons le terme **état inversé** pour désigner chacun des trois états obtenus selon cette procédure. Le premier état inversé, que nous noterons $I_{SV}$, est obtenu en inversant uniquement le coefficient de frottement $C_{W,l}$ de la loi de Weertman linéaire (équation (2.15) avec $m = 1$) ; les deux autres états inversés, notés respectivement $I_{R_{\gamma,1}}$ et $I_{R_{\gamma,100}}$, sont obtenus en inversant simultanément le coefficient $C_{W,l}$ et la viscosité, ces deux états inversés se distinguant par le poids relatif attribué à chacun de ces deux paramètres lors de l'inversion. Suite à ces trois inversions, nous démarrons une étape de relaxation d'une durée de 15 a en conservant la loi de Weertman linéaire afin de permettre l'élimination des anomalies de divergence de flux de glace liées aux incertitudes du modèle (Seroussi *et al.*, 2011; Gillet-Chaulet *et al.*, 2012, par exemple).

Dans un second temps, au terme des 15 a de la période de relaxation, nous réalisons, pour chacun des trois états inversés, le même type de calcul que ceux décrits à la Section 5.2.2.2 ; il s'agit d'identifier les distributions des coefficients de frottement de la loi de Weertman non linéaire et des deux lois de Schoof qui permettraient d'obtenir un champ de $\boldsymbol{\tau}_b$ identique, ou tout au moins le plus proche possible, de celui obtenu avec la loi de Weertman linéaire à l'issue de la période de relaxation. Une fois ces distributions des différents coefficients de frottement calculées, nous prescrivons une période de relaxation supplémentaire d'une durée de 5 a pour chacune des quatre lois (et chacun des trois états inversés). Dans la suite, chacun des états obtenus à la fin de cette seconde période de relaxation sera qualifié d'**état initial** dans la mesure où ces états serviront de points de départ pour les expériences transitoires InitMIP-Antarctica. Afin d'éviter toute confusion entre les qualificatifs d'état inversé et d'état initial, le lecteur pourra simplement retenir que les expériences transitoires InitMIP-Antarctica sont menées à partir de 12 états initiaux différents correspondant à 4 lois de frottement appliquées à 3 états inversés. Pour désigner ces 12 états initiaux, nous utilisons la notation $\mathrm{INIT}_x^y$ où l'indice $x$ symbolise la loi de frottement considérée - $W, l$ pour la loi de Weertman linéaire, $W, nl$ pour la loi de Weertman non linéaire, $S04$ pour la loi de Schoof avec $C_{max} = 0.4$ et $S06$ pour la loi de Schoof avec $C_{max} = 0.6$ - tandis que l'exposant $y$ symbolise l'état inversé considéré - $SV$ pour $I_{SV}$, $R_{\gamma,1}$ pour $I_{R_{\gamma,1}}$ et $R_{\gamma,100}$ pour $I_{R_{\gamma,100}}$.

Enfin, nous réalisons, à partir de chacun de ces 12 états initiaux, les trois simulations transitoires

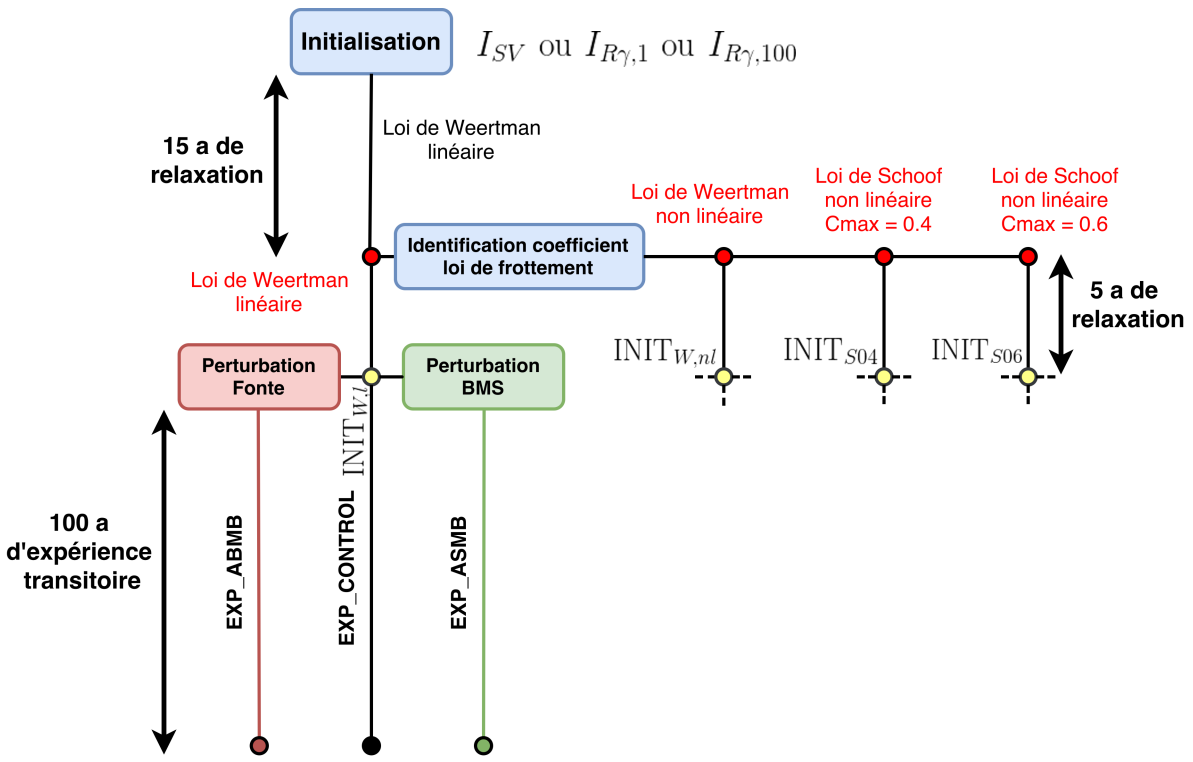


FIGURE 6.2 – Graphique résumant le déroulement des expériences pour une inversion donnée. Les expériences transitoires EXP_CONTROL, EXP_ASMB et EXP_ABMB sont menées pour chacune des quatre lois de frottement considérées. Cette procédure est répétée à l'identique pour chacun des trois états inversés $I_{SV}$, $I_{R_{\gamma,1}}$ et $I_{R_{\gamma,100}}$ construits.

d'une durée de 100 a imposées dans le cadre de l'exercice InitMIP-Antarctica, à savoir : l'expérience de contrôle sans perturbation (désignée EXP_CONTROL), l'expérience de perturbation du bilan de masse de surface (désignée EXP_ASMB) et l'expérience de perturbation de la fonte basale sous les plateformes flottantes (désignée EXP_ABMB). La Figure 6.2 résume le déroulement complet des expériences que nous venons de décrire ; notons que la procédure décrite dans cette figure est répétée à l'identique pour chacun des trois états inversés $I_{SV}$, $I_{R_{\gamma,1}}$ et $I_{R_{\gamma,100}}$ construits.

## 6.2 Initialisations du modèle

Au cours de cette première étape, nous cherchons à construire trois états inversés du bassin d'Amundsen à partir de différents jeux de données. La plupart de ces données sont utilisées telles quelles pour alimenter le modèle direct (une interpolation de ces données sur le maillage utilisé par le modèle s'avère toutefois nécessaire en général). A l'inverse, les observations des vitesses de surface servent de base à la formulation de problèmes inverses dont la résolution permet de contraindre, sur la partie posée, la distribution du coefficient de frottement de la loi de Weertman linéaire et, pour deux de ces problèmes, celle de la viscosité de la glace.

### 6.2.1 Données et paramétrisations utilisées pour les inversions

Pour prescrire l'épaisseur initiale de glace ainsi que la topographie du socle, les données de *Bedmap2* sont utilisées (Fretwell *et al.*, 2013). Néanmoins, en ce qui concerne la topographie du socle, nous nous appuyons sur les travaux de Millan *et al.* (2017) afin d'ajouter deux points d'ancrage en contact avec la base de la plateforme flottante de Thwaites qui étaient absents des données *Bedmap2* d'origine malgré un rôle mécanique essentiel en raison de l'effet d'arc-boutant dont ils sont à l'origine (Fürst *et al.*, 2016).

Un bilan de masse de surface de référence est appliqué sur la surface supérieure du domaine. Celui-ci provient de simulations effectuées avec le Modèle Atmosphérique Régional (MAR) moyennées sur la période 1979-2015 (C. Agosta, communication personnelle).

De même, une fonte basale de référence est appliquée sous l'ensemble des plateformes flottantes selon une adaptation de la paramétrisation proposée par Pollard et DeConto (2012). En particulier, contrairement à la paramétrisation d'origine, l'angle sur l'océan ouvert qui a pour effet de réduire la fonte basale des plateformes flottantes aux endroits où celles-ci sont fortement confinées au sein de baies n'est pas pris en compte ; d'après Pollard et DeConto (2012), la modélisation de cet effet s'avère nécessaire pour les simulations longues de type paléoclimatique, or les projections dont il est question ici sont réalisées à l'échelle du siècle. Par ailleurs, aucune fonte n'est appliquée aux nœuds formant la ligne d'échouage.

En outre, nous utilisons le champ de température issu des travaux de Van Liefferinge et Pattyn (2013) associés aux valeurs de fluidité préconisées par Cuffey et Paterson (2010) pour construire un champ de viscosité de référence.

Enfin, les observations de vitesse de surface effectuées par Rignot *et al.* (2011c) sont exploitées afin de déduire la distribution du coefficient de frottement de la loi de Weertman linéaire $C_{W,l}$ et, pour deux des états inversés considérés, d'ajuster le champ de viscosité $\eta_0$ à partir de la viscosité de référence $\eta_{0,ref}$, via la mise en œuvre de méthodes inverses (cf Section 6.2.3). Les vitesses observées sont données en chaque point d'une grille régulière possédant une résolution de 450 m, excepté dans certaines régions, parfois très étendues, où les informations sont manquantes ; en outre, les observations ont été collectées au cours de périodes s'étalant sur plusieurs années ce qui peut donner lieu à des incompatibilités au sein de régions où les vitesses d'écoulement évoluent rapidement. La Figure 6.3 représente les observations de vitesse utilisées ; les zones où les données ne sont pas disponibles y apparaissent en gris.

### 6.2.2 Modèle direct, conditions aux limites et maillage

Comme évoqué précédemment, du fait de l'importante étendue du domaine étudié nous optons pour traiter ce problème avec un modèle *SSA* reposant sur les équations (3.26). L'évolution de

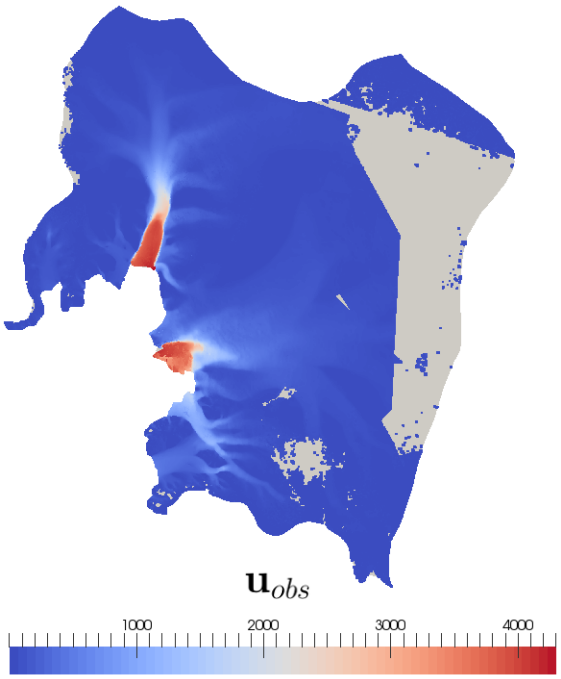


FIGURE 6.3 – Observations des vitesses d'écoulement en surface $\mathbf{u}_{obs}$ (m a$^{-1}$) utilisées pour les trois inversions (Rignot *et al.*, 2011c)

l'épaisseur de glace est alors régie par le principe de continuité intégré verticalement (3.22) où l'accumulation et l'ablation sont fixées à partir des données de bilan de masse de surface et de fonte basale sous les plateformes flottantes présentées dans la partie précédente. L'élévation de la surface inférieure est obtenue en résolvant l'équation (3.24) tandis que les positions des différentes sections de ligne d'échouage sont déterminées via l'équation (3.25). A nouveau, le vecteur contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b = (\tau_{b,x}, \tau_{b,y})$ qui apparaît dans les équations de la *SSA* (3.26) est forcé à zéro partout où la glace est flottante. Comme évoqué précédemment, lors de cette étape d'initialisation on considère que le frottement est régi par une loi de Weertman linéaire ; ainsi, pour la glace posée, le vecteur contrainte de cisaillement basale est donné par :

$$\boldsymbol{\tau}_b + C_{W,l}\mathbf{u}_b = 0 \tag{6.1}$$

où la distribution du coefficient de frottement $C_{W,l}$ sera déterminée par méthodes inverses (cf Section 6.2.3).

Le bassin versant étudié est délimité par les lignes de crête à l'amont et par les fronts des plateformes flottantes et glaciers - aux rares endroit où ceux-ci ne forment pas de plateformes flottantes - à l'aval. Les positions de ces frontières sont fixées conformément à celles préconisées dans le cadre du projet InitMIP-Antarctica, qui elles-mêmes s'appuient sur des observations effectuées par le satellite ICESat (Zwally *et al.*, 2012). Au niveau des lignes de crête, la condition de Dirichlet

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{obs}$ s'applique, tandis qu'au niveau des fronts, la condition de Neumann (3.28) prévaut.

Pour ces expériences, nous utilisons un maillage 2D plan constitué d'éléments triangulaires. La définition de la structure du maillage est une étape cruciale puisque celui-ci doit permettre de capturer les caractéristiques essentielles de l'écoulement - en particulier, la migration de la ligne d'échouage - avec une précision suffisante tout en maintenant un coût numérique raisonnable en dépit de l'étendue importante du domaine modélisé. Pour ce faire, nous utilisons la même méthode que celle décrite par Gillet-Chaulet *et al.* (2012). Dans les grandes lignes, le principe de cette méthode consiste à estimer, à partir des dérivées spatiales secondes des champs observés de vitesse de surface et d'épaisseur, l'erreur due à l'interpolation linéaire de ces champs sur les éléments, puis à utiliser un algorithme ajustant la taille des éléments de manière à ce que l'erreur d'interpolation soit distribuée de manière homogène sur tout le domaine. En parallèle, une fonction *ad hoc* est formulée de manière à ce que ses dérivées spatiales secondes soient très élevées à proximité de la ligne d'échouage et diminuent à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci ; ainsi, l'algorithme, en ajustant la taille des éléments de manière à induire une erreur d'interpolation homogène sur tout le domaine, produira naturellement des éléments de petite taille au voisinage de la ligne d'échouage qui deviendront de plus en plus gros à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci. Cette fonction est paramétrée de manière à induire une résolution de l'ordre de $\sim 50$ m au niveau des différentes sections de ligne d'échouage à l'instant de l'inversion. Finalement, le maillage produit selon cette méthode est composé de 274 678 nœuds couvrant l'intégralité du domaine dont la surface totale est d'environ $4.5 \times 10^5$ km$^2$. Ce maillage est représenté sur la Figure 3.2. Le même maillage est utilisé pour les trois inversions que nous présentons dans la section suivante et il sera conservé tel quel pour l'ensemble des étapes de relaxation et des expériences transitoires qui feront suite à ces inversions.

### 6.2.3 Modèles Inverses

#### 6.2.3.1 Principe général des méthodes inverses

La résolution d'un problème direct consiste à trouver les champs solutions - par exemple, les 3 composantes de la vitesse et le champ de pression en *full-Stokes* ou les 2 composantes horizontales de la vitesse en *SSA* - satisfaisant aux équations et conditions aux limites prescrites. Cette résolution présuppose la connaissance de tous les paramètres intervenant au sein du modèle. Mais il est des paramètres qu'on ne peut mesurer directement ou dont les mesures sont entachées d'erreurs. Nous avons déjà eu l'occasion de citer, dans les chapitres précédents, les cas de l'endommagement, des paramètres de frottement ou encore de la topographie du socle. La théorie des problèmes inverses part du principe que les solutions du problème direct peuvent être connues, au moins partiellement, par l'intermédiaire d'observations ; dès lors, il est possible d'en déduire la valeur qui doit être attribuée à certains paramètres mal contraints. Concrètement, la résolution d'un problème

inverse consiste à minimiser des *fonctions coûts* qui mesurent l'écart entre certaines sorties du modèle direct et des observations, et qui dépendent des paramètres recherchés : la solution de ce problème d'optimisation correspond alors au jeu des paramètres recherchés. La fonction coût la plus couramment rencontrée en glaciologie porte ainsi sur les vitesses de surface. Le problème inverse est souvent *mal-posé* au sens de Hadamard (1902) par opposition à un problème *bien-posé* qui, par définition, satisfait les conditions suivantes :

1. La solution existe
2. La solution est unique
3. La solution est stable

La solution exacte d'un problème inverse peut ne pas exister : on ne parvient pas à trouver un jeu de paramètres compatible avec les observations disponibles. Cela peut-être du aux erreurs sur les observations ou au fait que les équations du modèle décrivent la réalité de manière imparfaite. D'autre part, la solution peut ne pas être unique : différents jeux de paramètres sont compatibles avec les observations. Enfin, le problème inverse est souvent instable : de faibles variations sur les données d'entrée peuvent induire de très larges variations sur les données de sortie. Cette difficulté peut être contournée par l'introduction d'opérateurs de régularisation qui imposent la stabilité de la solution en l'astreignant à respecter certaines contraintes (souvent, il s'agit d'imposer une certaine régularité au champ solution), au prix d'un plus grand écart entre sorties du modèle direct et observations.

#### 6.2.3.2 Fonctions coûts

Pour les travaux décrits dans ce chapitre, nous construisons deux fonctions coûts qui dépendent des paramètres recherchés - le coefficient de frottement $C_{W,l}$ et la viscosité $\eta_0$ - et qu'il s'agira de minimiser. La première de ces fonctions coûts porte sur les vitesses de surface et est notée $J_v$ tandis que la seconde porte sur la divergence du flux et est notée $J_{div}$.

La fonction coût $J_v$, mesure l'écart entre les vitesses observées en surface du domaine $\mathbf{u}_{obs}$ et les vitesses modélisées $\mathbf{u}$. Comme nous l'avons précisé auparavant et comme on peut le voir sur la Figure 6.3, les vitesses observées sont définies de manière discrète sur les nœuds d'une grille régulière ayant une résolution de 450 m. Par ailleurs, les observations sont manquantes en certaines régions du domaine. De fait, les nœuds de la grille d'observation ne coïncident pas, en général, avec les nœuds du maillage élément fini de notre modèle direct. Afin d'éviter d'altérer la précision sur les vitesses observées par des approximations liée à l'interpolation de celles-ci au niveau des nœuds du maillage, nous faisons le choix de calculer l'écart entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_{obs}$ directement au niveau des points d'observations ; la valeur de la vitesse modélisée $u$ en ces points d'observation est déduite des valeurs nodales par l'intermédiaire des fonctions de forme selon la méthode des éléments finis

(cf Section 3.3.1). La fonction coût correspondante s'écrit alors :

$$J_v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_{obs}} (|\mathbf{u}_{i,obs} - \mathbf{u}_i|)^2 \tag{6.2}$$

où $N_{obs}$ désigne le nombre d'observations de vitesse $\mathbf{u}_{i,obs}$ tandis que $\mathbf{u}_i$ représente la valeur de la vitesse modélisée au niveau du point d'observation $i$.

La fonction $J_{div}$ permet de pénaliser les forts écarts entre divergence du flux de glace et bilan de masse de manière à minimiser les anomalies de divergence de flux qu'induisent les incertitudes sur les conditions initiales du modèle (notamment concernant la topographie basale et les valeurs attribuées aux paramètres du modèle) et à obtenir des états inversés les plus proches possibles d'états stationnaires. L'idée derrière ce choix est d'induire les plus faibles variations possibles des différents champs lors de l'expérience transitoire non perturbée EXP_CONTROL (cf Figure 6.2). Notons que si notre objectif avait été de capturer au mieux l'état transitoire réel du bassin étudié, nous aurions pu intégrer à cette fonction coût des observations de variation d'épaisseur. A l'inverse de $J_v$, la fonction coût $J_{div}$ est définie de manière continue sur l'intégralité du domaine. Elle s'écrit :

$$J_{div} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} - (a_s - a_b)\right)^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{6.3}$$

où $\Gamma$ désigne le domaine modélisé.

L'objectif est alors de trouver un couple de distribution coefficient de frottement/viscosité qui minimise $J_v$ et $J_{div}$. Il existe différentes méthodes pour atteindre cet objectif. Pour notre part, nous utilisons la *méthode adjointe* qui fut introduite en glaciologie par MacAyeal (1993) pour un modèle *SSA*.

#### 6.2.3.3 Construction des trois états inversés par la méthode adjointe

**Changements de variable**

En réalité, nous ne travaillons pas directement avec les deux variables recherchées, à savoir $C_{W,l}$ et $\eta_0$, mais procédons à des changements de variable. Le changement de variable sur le coefficient de frottement s'écrit :

$$C_{W,l} = 10^\alpha \tag{6.4}$$

Ainsi, en cherchant le champ de $\alpha$ qui minimise $J_v$ et $J_{div}$, on évite les éventuelles valeurs négatives non physiques du coefficient de frottement $C_{W,l}$ qu'on aurait pu obtenir en travaillant directement avec celui-ci.

De même, on procède à un changement de variable sur la viscosité que l'on réécrit alors :

$$\eta_0 = \frac{\gamma^2}{R_\gamma}\eta_{0,ref} \tag{6.5}$$

où $\eta_{0,ref}$ est la viscosité de référence déduite des cartes de température de Van Liefferinge et Pattyn (2013) associées aux valeurs de fluidité préconisées par Cuffey et Paterson (2010). Cette fois-ci, les fonctions coûts $J_v$ et $J_{div}$ seront optimisées par rapport à $\gamma$ plutôt que directement par rapport à $\eta_0$. L'intérêt de ce changement de variable est double. D'abord, comme pour le coefficient de frottement, ce choix permet d'éviter les valeurs négatives non physiques de $\eta_0$. Ensuite, suivant la valeur attribuée à $R_\gamma$ (qui est une constante), les gradients des fonctions coûts par rapport à $\gamma$ seront plus ou moins importants relativement à ceux calculés par rapport à $\alpha$. Ainsi, plus la valeur attribuée à $R_\gamma$ sera grande, plus les gradients de $J_v$ et $J_{div}$ calculés par rapport à $\gamma$ seront petits relativement à ceux calculés par rapport à $\alpha$ ; la distribution de $\alpha$, et donc du frottement, sera alors plus affectée (sur la partie posée uniquement) que pour des valeurs de $R_\gamma$ plus faibles.

**Régularisation et méthode adjointe**

Comme nous l'avons évoqué à la Section 6.2.3.1, l'ajout de termes de régularisation s'avère nécessaire afin d'assurer la stabilité des solutions du problème inverse. Dans notre cas, ces fonctions de régularisation sont formulées de manière à imposer une certaine régularité aux champs de $\alpha$ et $\gamma$ : minimiser ces fonctions de régularisation par rapport à $\alpha$ et $\gamma$ doit alors revenir à pénaliser les brusques variations spatiales de ces champs. La fonction de régularisation sur $\alpha$ s'écrit donc :

$$J_{reg,\alpha} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{6.6}$$

et, de manière similaire, la fonction de régularisation sur $\gamma$ s'écrit :

$$J_{reg,\gamma} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{6.7}$$

A partir des deux fonctions coûts et des deux fonctions de régularisation, on construit une fonction coût totale $J_{tot}(\alpha, \gamma)$, qu'il va s'agir de minimiser, et qui s'écrit :

$$J_{tot}(\alpha, \gamma) = J_v + \lambda_{div} J_{div} + \lambda_{reg,\alpha} J_{reg,\alpha} + \lambda_{reg,\gamma} J_{reg,\gamma} \tag{6.8}$$

où $\lambda_{div}$, $\lambda_{reg,\alpha}$ et $\lambda_{reg,\gamma}$ sont des coefficients positifs dont le rôle est de pondérer les différentes fonctions dont dépend $J_{tot}$ ; l'idée est de choisir un triplet ($\lambda_{div}$, $\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) permettant un compromis idéal entre régularité des champs $\alpha$ et $\gamma$, faibles anomalies de divergence du flux et faible écart entre vitesses observées et modélisées.

La minimisation de la fonction coût totale $J_{tot}$ passe par le calcul des gradients de cette fonction par rapport à $\alpha$ et $\gamma$, ce qui suppose le calcul des gradients de chacun des quatre termes. Les calculs des gradients de $J_v$ et $J_{div}$ par rapport à $\alpha$ et $\gamma$ peuvent se faire efficacement en utilisant la *méthode adjointe* qui consiste à calculer les équations adjointes des équations de la *SSA* (3.26). La dérivation du système adjoint ainsi que le calcul du gradient de $J_v$ par rapport à une variable à optimiser

sont décrits par MacAyeal (1993) et peuvent être facilement étendus à notre cas ; nous renvoyons le lecteur désirant plus de détails vers cette référence. Les calculs des gradients de $J_{reg,\alpha}$ et $J_{reg,\gamma}$ par rapport à $\alpha$ et $\gamma$ sont, quant à eux, triviaux.

Une fois les gradients de $J_{tot}$ connus, la minimisation à proprement parler se fait selon une méthode de descente du gradient (cette méthode a été décrite, dans un autre contexte, à la Section 3.3.1). Dans notre cas, la taille du pas et la direction de descente sont adaptées à chaque itération selon une méthode particulière, dite de *quasi-Newton*, selon laquelle les dérivées secondes des fonctions coûts ne sont pas calculées explicitement mais estimées à partir des itérations précédentes. Cette méthode est implémentée au sein d'*Elmer/Ice* via l'algorithme M1QN3 développé par Gilbert et Lemaréchal (1989).

Dans la suite de cette partie, nous décrivons la procédure permettant d'obtenir les valeurs idéales du triplet ($\lambda_{div}$, $\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) pour chacun des trois états inversés que nous souhaitons construire puis nous comparons les qualités de ces trois inversions.

**Inversion $I_{SV}$**

Pour ce premier état inversé, qui sera désigné $I_{SV}$, la viscosité n'est pas inversée mais est fixée à sa valeur de référence $\eta_{0,ref}$. La fonction coût totale $J_{tot}$ est alors indépendante de $\gamma$ et se réécrit :

$$J_{tot,sv}(\alpha) = J_v + \lambda_{div} J_{div} + \lambda_{reg,\alpha} J_{reg,\alpha} \tag{6.9}$$

La méthode de minimisation de la fonction coût étant une méthode itérative, il est nécessaire de fournir une distribution initiale de $\alpha$. Une manière de prescrire cette distribution initiale est de considérer, en première approximation, qu'en tout point de l'interface glace/socle la contrainte motrice $\boldsymbol{\tau}_d$ est exactement compensée par la contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$ (contrôle local des vitesses basales, cf Section 2.3.2.1) ; la contrainte motrice étant reliée à la pente de surface selon la relation $\boldsymbol{\tau}_d = \rho_i g H \mathrm{grad}(z_s)$, la contrainte de cisaillement basale étant donnée par une loi de Weertman linéaire et le coefficient de frottement $C_{W,l}$ intervenant dans cette loi étant fonction de $\alpha$ d'après la relation (6.4), la distribution initiale de $\alpha$ est alors donnée par :

$$\alpha_{init} = \min\left[\log_{10}\left(\frac{\rho_i g H |\mathrm{grad}(z_s)|}{|\mathbf{u}_{obs}|}\right), 1\right] \tag{6.10}$$

La méthode de la *courbe en L* permet de faciliter le choix des valeurs à attribuer à $\lambda_{div}$ et $\lambda_{reg,\alpha}$ (Hansen, 1992; Hansen et O'Leary, 1993). Pour cela, nous procédons en deux temps : dans un premier temps $\lambda_{div}$ est fixé à zéro et nous échantillonnons, par hypercube latin, une plage de valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ judicieusement choisie de manière à ce que la valeur de $J_{reg,\alpha}$ pondérée par $\lambda_{reg,\alpha}$ soit, au maximum, proche de celle de $J_v$ ; une inversion est alors menée pour chacune des valeurs de l'échantillon et nous représentons sur la Figure 6.4a, le point obtenu à chaque inversion dont l'abscisse est donnée par la valeur de $J_v$ et l'ordonnée par la valeur de $J_{reg,\alpha}$. Par ailleurs,

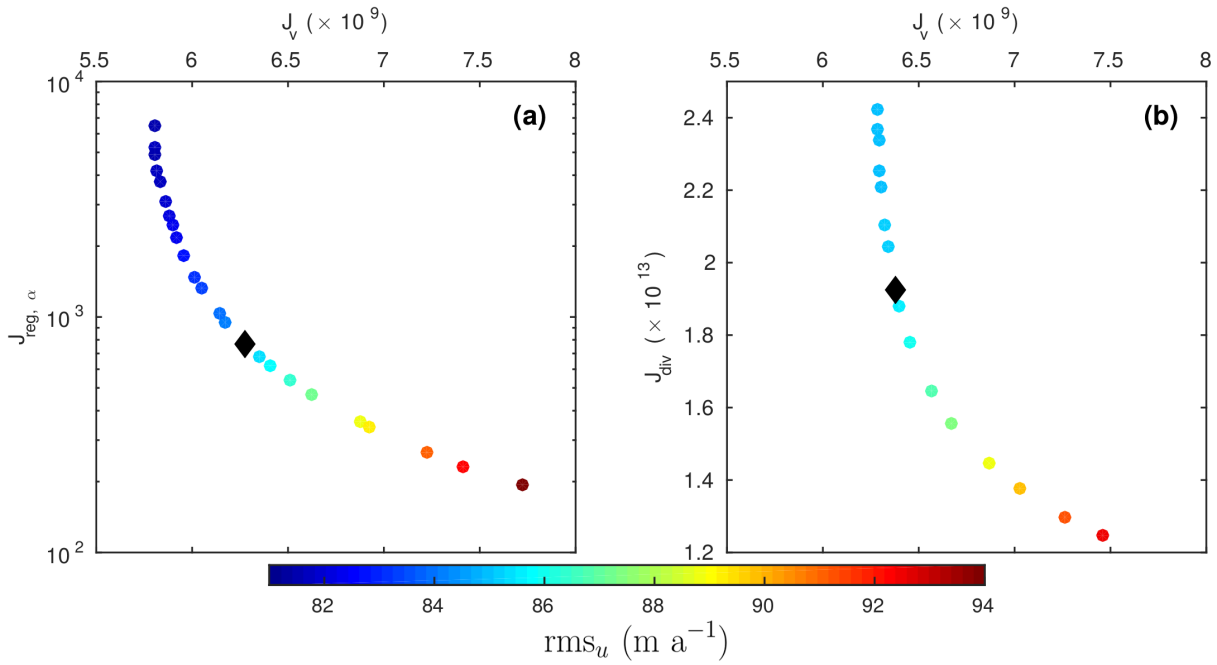


FIGURE 6.4 – Méthode de la courbe en $L$ utilisée pour l'inversion $I_{SV}$ afin de déterminer les valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ **(a)** et $\lambda_{div}$ **(b)** permettant d'obtenir un champ de $\alpha$ suffisamment régulier et des divergences de flux suffisamment faibles tout en conservant une erreur rms sur les vitesses la plus réduite possible. Chaque point sur **(a)** - respectivement sur **(b)** - correspond à une inversion réalisée avec une valeur de $\lambda_{reg,\alpha}$ - respectivement de $\lambda_{div}$ - fixée. Le couple ($J_v$, $J_{reg,\alpha}$) - respectivement ($J_v$, $J_{div}$) - correspondant à la valeur de $\lambda_{reg,\alpha}$ - respectivement $\lambda_{div}$ - retenue selon cette procédure est symbolisé par un losange noir sur **(a)** - respectivement sur **(b)**.

nous représentons également, en échelle de couleur, l'erreur moyenne au sens des moindres carrés obtenue en comparant vitesses observées et vitesses modélisées pour chacune des valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ testées (erreur $\text{rms}_u$ en m a$^{-1}$). Si le nombre de valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ testées est suffisant et si ces valeurs couvrent une plage adéquate, la courbe passant par tous ces points prend généralement la forme d'un $L$. L'idée est de trouver des valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ pour lesquelles les valeurs $J_v$ et $J_{reg,\alpha}$ sont minimisées simultanément ; cette condition est remplie pour les points se situant au niveau de l'angle du $L$. Dans notre cas, comme la plage des valeurs de $J_{reg,\alpha}$ obtenues avec les valeurs testées de $\lambda_{reg,\alpha}$ couvrent plusieurs ordres de grandeur, l'axe des ordonnées est représenté en échelle logarithmique sur la Figure 6.4a ; c'est la raison pour laquelle la courbe obtenue ne présente pas la forme parfaite d'un $L$. La valeur idéale de $\lambda_{reg,\alpha}$ est alors celle correspondant au point au niveau duquel la courbure est maximum ; dans notre cas, ce point est déterminé, de manière approximative, à l'aide du graphique. Le couple ($J_v$, $J_{reg,\alpha}$) correspondant à la valeur de $\lambda_{reg,\alpha}$ retenue selon cette procédure est symbolisé sur la Figure 6.4a par un losange noir ; ce couple est obtenu pour $\lambda_{reg,\alpha} = 7.1 \times 10^5$.

Une fois la valeur de $\lambda_{reg,\alpha}$ fixée, nous appliquons exactement la même procédure afin de déterminer la valeur appropriée pour $\lambda_{div}$ (Figure 6.4b). A nouveau, le couple ($J_v$, $J_{div}$) corres-

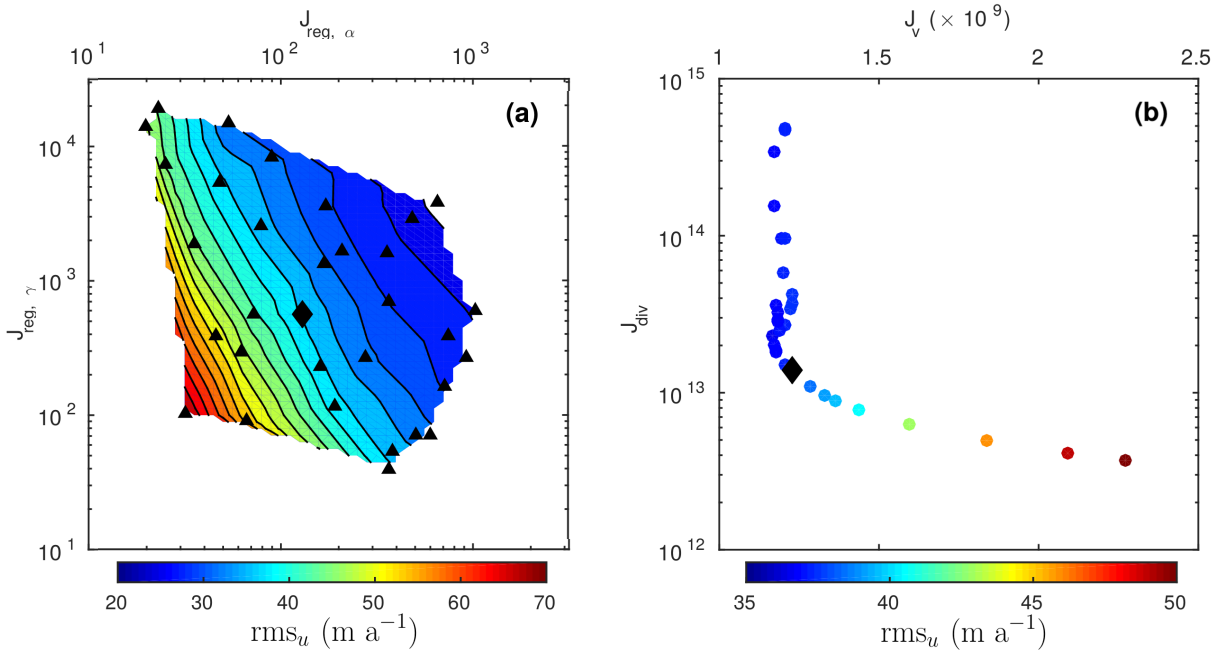


FIGURE 6.5 – Adaptation de la méthode de la courbe en $L$ utilisée pour l'inversion $I_{R_{\gamma,1}}$ afin de déterminer les valeurs du couple ($\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) **(a)** puis de $\lambda_{div}$ **(b)** permettant d'obtenir des champs de $\alpha$ et $\gamma$ suffisamment réguliers et des divergences de flux suffisamment faibles tout en conservant une erreur rms sur les vitesses la plus réduite possible. Chaque triangle noir sur **(a)** - respectivement chaque point sur **(b)** - correspond à une inversion réalisée avec un couple de valeurs de ($\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) - respectivement une valeur de $\lambda_{div}$ - fixé(e). Le couple ($J_{reg,\alpha}$,$J_{reg,\gamma}$) - respectivement ($J_v$, $J_{div}$) - correspondant au couple de valeurs de ($\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) - respectivement à la valeur de $\lambda_{div}$ - retenu(e) selon cette procédure est symbolisé par un losange noir sur **(a)** - respectivement sur **(b)**.

pondant à la valeur de $\lambda_{div}$ retenue selon cette procédure est symbolisé par un losange noir ; ce couple est obtenu pour $\lambda_{div} = 5.1 \times 10^{-5}$.

### Inversion $I_{R_{\gamma,1}}$

Pour ce second état inversé, qui sera désigné $I_{R_{\gamma,1}}$, le champ de $\alpha$ est à nouveau inversé à partir de la distribution initiale donnée par l'équation (6.10). En outre, la viscosité est également inversée, via la variable $\gamma$ et en attribuant à $R_\gamma$ la valeur $R_\gamma = 1$ dans la relation (6.5). Là encore, il est nécessaire de prescrire une distribution initiale pour $\gamma$ ; cela se fait simplement en imposant $\gamma_{init} = 1$ sur tout le domaine de sorte que, compte tenu de la relation (6.5), la viscosité initiale soit égale à la viscosité de référence $\eta_{0,ref}$.

Pour cette inversion, la fonction coût totale $J_{tot}$ dépend donc à la fois de $\alpha$ et de $\gamma$ et est donnée par la relation (6.8). Les valeurs à affecter au triplet ($\lambda_{div}$, $\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) sont déterminées en suivant une procédure similaire à celle décrite pour la construction de l'état $I_{SV}$. Dans un premier temps, on impose $\lambda_{div} = 0$ et on réalise une série de simulations pour différents couples ($\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) obtenus

en échantillonnant par hypercube latin des plages de valeurs judicieusement choisies. Pour chaque simulation ainsi réalisée, on représente, sur la Figure 6.5a, le point de coordonnées ($J_{reg,\alpha}$,$J_{reg,\gamma}$) (triangles noirs). A partir des différents points ainsi obtenus, il est possible de représenter, en échelle de couleur, une carte de l'erreur $\text{rms}_u$. On peut ainsi sélectionner le couple ($\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) idéal en cherchant le point au-delà duquel l'erreur $\text{rms}_u$ se met à croître brutalement (point symbolisé par un losange noir) ; ce point correspond au couple de valeurs ($\lambda_{reg,\alpha} = 5.4 \times 10^6$, $\lambda_{reg,\gamma} = 4.7 \times 10^5$).

Une fois les valeurs de $\lambda_{reg,\alpha}$ et $\lambda_{reg,\beta}$ fixées, on détermine la valeur idéale de $\lambda_{div}$ en suivant une procédure parfaitement identique à celle décrite pour l'état $I_{SV}$. La courbe en $L$ ainsi obtenue est représentée sur la Figure 6.5b et la valeur finale retenue pour le coefficient de pondération est $\lambda_{div} = 1.8 \times 10^{-5}$.

**Inversion $I_{R_{\gamma,100}}$**

Un troisième et dernier état inversé, désigné $I_{R_{\gamma,100}}$, est construit en suivant la même procédure que pour l'état $I_{R_{\gamma,1}}$ mis à part que la valeur de $R_\gamma$ est fixée à $R_\gamma = 100$ dans la relation (6.5). Ce choix permet de faire porter un poids relatif plus important sur $\alpha$ (sur la partie posée uniquement) par rapport à l'état $I_{R_{\gamma,1}}$. Par ailleurs, on impose $\gamma_{init} = 10$ de sorte que la viscosité initiale soit égale à la viscosité de référence $\eta_{0,ref}$.

De nouveau, la fonction coût totale $J_{tot}$ dépend à la fois de $\alpha$ et de $\gamma$ et est donnée par la relation (6.8). Les valeurs à affecter au triplet ($\lambda_{div}$, $\lambda_{reg,\alpha}$, $\lambda_{reg,\gamma}$) sont déterminées en suivant exactement la même procédure que celle décrite pour l'état $I_{R_{\gamma,1}}$ ; les valeurs ainsi obtenues sont $\lambda_{div} = 5.9 \times 10^{-5}$, $\lambda_{reg,\alpha} = 2.5 \times 10^6$ et $\lambda_{reg,\gamma} = 1.4 \times 10^6$.

### 6.2.4 Résultats des inversions

La Figure 6.6 permet de comparer les trois états inversés décrits ci-dessus : la première colonne correspond à l'état $I_{SV}$, la seconde à l'état $I_{R_{\gamma,100}}$ et la troisième à l'état $I_{R_{\gamma,1}}$ ; cet ordre correspond à l'ordre croissant du poids attribué à la viscosité (avec un poids nul pour $I_{SV}$ car pas d'inversion de la viscosité dans ce cas). La première ligne de cette figure représente la différence, en valeur absolue, entre vitesses observées et vitesses modélisées comparées au niveau des points d'observation (d'où l'absence de données dans certaines régions) : l'écart s'avère d'autant plus faible que l'inversion porte à la fois sur la viscosité et le frottement (Figures 6.6a-c). Cette caractéristique est particulièrement marquée au niveau des plateformes flottantes où le frottement est nul et où, de fait, seule la viscosité peut être ajustée afin de faire coller les vitesses modélisées aux vitesses observées. Cela explique la présence d'erreurs importantes sur les plateformes de Pine Island et Thwaites et, dans une moindre mesure, de Crosson (voir Figure 6.1) pour l'état $I_{SV}$ (Figure 6.6a) ; ces erreurs deviennent de moins en moins marquées à mesure que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion augmente. La

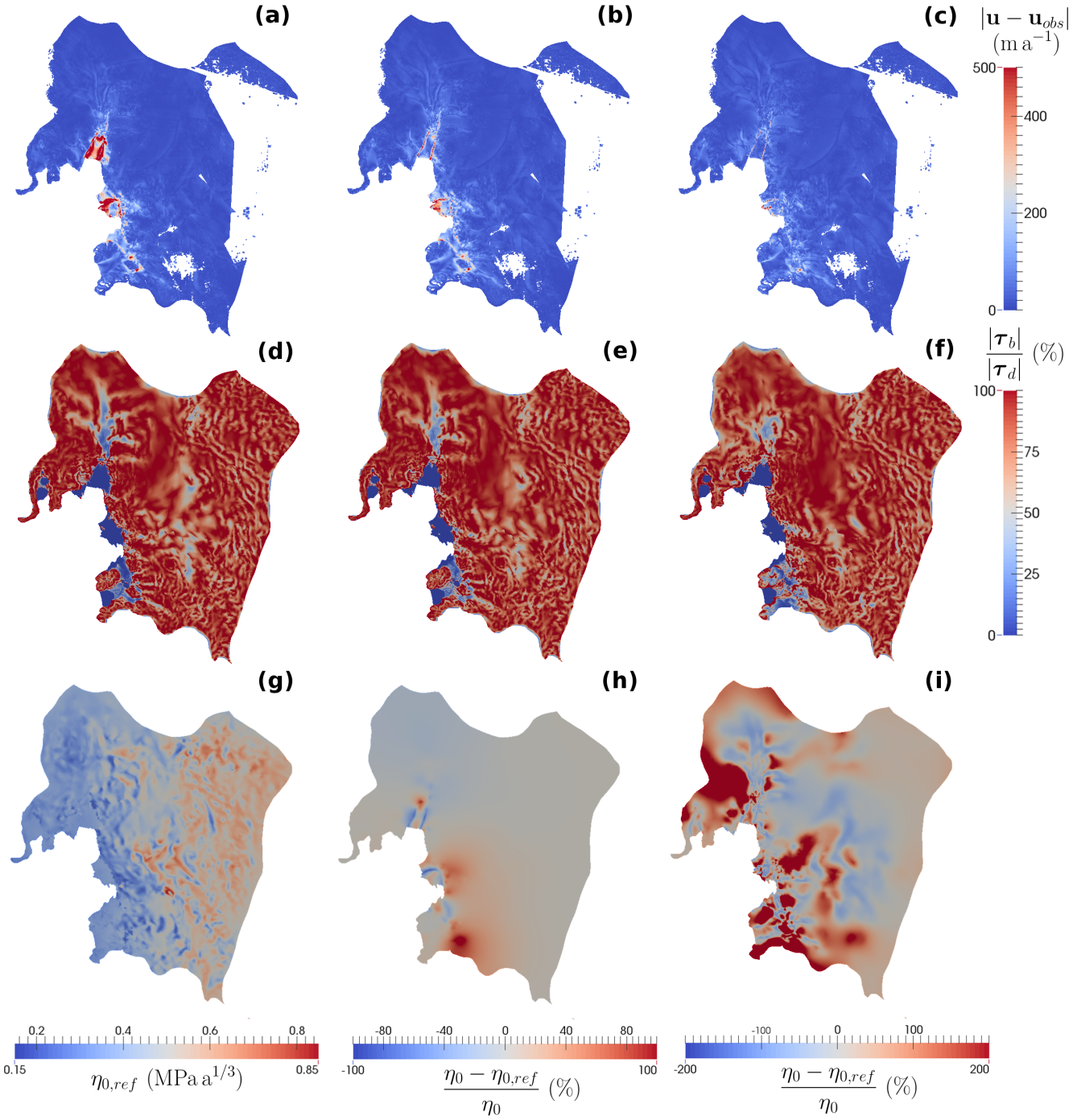


FIGURE 6.6 – Comparaison des états inversés $I_{SV}$ (première colonne), $I_{R_{\gamma,100}}$ (deuxième colonne) et $I_{R_{\gamma,1}}$ (troisième colonne). Pour chacun des trois états inversés, la première ligne - panneaux **(a)**, **(b)** et **(c)** - montre la norme de la différence entre les vitesses modélisées $\mathbf{u}$ et les vitesses observées $\mathbf{u}_{obs}$ (m a$^{-1}$) ; la seconde ligne - panneaux **(d)**, **(e)** et **(f)** - montre le ratio (en %) de la norme de la contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_b$ par rapport à la norme de la contrainte motrice $\boldsymbol{\tau}_d$ ; la troisième ligne montre la viscosité de référence $\eta_{0,ref}$ (MPa a$^{1/3}$) pour l'état $I_{SV}$ - panneau **(g)** - et l'écart relatif (en %) entre viscosité de référence et viscosité inversée pour les états $I_{R_{\gamma,100}}$ et $I_{R_{\gamma,1}}$ - respectivement, panneaux **(e)** et **(f)**.

qualité d'une inversion se mesure généralement à l'aune de l'erreur $\mathrm{rms}_u$ que l'on obtient à l'issue de celle-ci. En l'occurrence, celle-ci est de **85.5** m a$^{-1}$ pour l'état $I_{SV}$, **52.4** m a$^{-1}$ pour l'état $I_{R_{\gamma,100}}$ et de **37.5** m a$^{-1}$ pour l'état $I_{R_{\gamma,1}}$. Cette répartition de l'erreur $\mathrm{rms}_u$ est cohérente avec les résultats détaillés précédemment. Notons cependant que l'analyse de ces chiffres ne peut se faire sans avoir à l'esprit les incertitudes sur les vitesses observées. Il est en effet inutile de chercher à réduire l'erreur $\mathrm{rms}_u$ en dessous des erreurs estimées sur les observations. En ce qui concerne les données utilisées, l'erreur estimée sur la norme des vitesses varie, selon les régions, de 1 m a$^{-1}$ à plus de 17 m a$^{-1}$ (Rignot *et al.*, 2011c).

La deuxième ligne de la Figure 6.6 montre, pour chacun des trois états inversés, le ratio (en %) de la norme de la contrainte de cisaillement basale $|\boldsymbol{\tau}_b|$ par rapport à la norme de la contrainte motrice $|\boldsymbol{\tau}_d|$. Compte tenu du postulat (6.10) sur le champ initial de $\alpha$, cela revient à comparer le champ de $\boldsymbol{\tau}_b$ avant et après inversion. Les plateformes flottantes sont caractérisées par un $\boldsymbol{\tau}_b$ nul. Au contraire, dans les régions où le ratio s'élève à 100 %, le contrôle de la vitesse basale est local et $\boldsymbol{\tau}_b$ n'est pas affecté par l'inversion. Partout ailleurs, l'inversion a eu pour conséquence une réduction locale de $|\boldsymbol{\tau}_b|$ ; dans ces régions le socle seul ne parvient pas à reprendre toute la contrainte motrice et le contrôle des vitesses basales est global. Sans surprise, les régions de faibles $|\boldsymbol{\tau}_b|$ correspondent aux zones d'écoulement rapide ; en particulier, on discerne particulièrement bien le glacier émissaire Pine Island sur les Figures 6.6d-f.

Enfin, la troisième ligne de la Figure 6.6 montre la viscosité de référence $\eta_{0,ref}$ (Figure 6.6g) et l'écart relatif de la viscosité inversée par rapport à cette viscosité de référence pour les états $I_{R_{\gamma,100}}$ et $I_{R_{\gamma,1}}$ (Figures 6.6h et i respectivement). Il convient d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que, pour ces deux derniers états inversés, les échelles de couleur ne sont pas les mêmes.

Lorsque la viscosité est inversée, l'algorithme d'inversion peut rigidifier localement la glace afin de diminuer les vitesses modélisées dans les régions où celles-ci seraient trop élevées par rapport aux observations si l'on conservait la viscosité de référence : c'est typiquement ce qui se produit au niveau des plateformes flottantes. A l'inverse, l'algorithme peut également induire une diminution locale de la viscosité de la glace aux endroits où les vitesses modélisées seraient trop faibles sans cela : c'est ce qui arrive, par exemple, dans la partie supérieure du glacier Pine Island (particulièrement visible sur la Figure 6.6i) ; la diminution de la viscosité de la glace dans cette région permet d'augmenter les vitesses modélisées sans avoir à réduire le frottement, d'où un rapport $|\boldsymbol{\tau}_b|/|\boldsymbol{\tau}_b|$ plus élevé pour les états $I_{R_{\gamma,1}}$ et, dans une moindre mesure, $I_{R_{\gamma,100}}$ que pour l'état $I_{SV}$ (Figures 6.6d-f). C'est aussi ce mécanisme qui donne naissance aux bandes de faible viscosité qu'on voit très nettement apparaître sur la Figure 6.6h (elles sont également présentes sur la Figure 6.6i mais moins visible du fait d'une échelle de couleur plus étendue). Ces bandes correspondent à des marges de cisaillement au niveau desquelles les contraintes sont intenses et la glace est endommagée. Nous retrouvons donc

ici des résultats similaires à ceux rapportés à la Section 2.2.2.2, à savoir que la présence de glace endommagée se traduit par une réduction locale de la viscosité de la glace qui induit un découplage mécanique entre zones d'écoulement rapide et zones de glace quasi stagnante (Vieli *et al.*, 2006; Khazendar *et al.*, 2007, 2011, par exemple).

De manière générale, l'état $I_{R_{\gamma,100}}$ (deuxième colonne sur la Figure 6.1) nous semble être l'état inversé le plus réaliste malgré une erreur $\text{rms}_u$ légèrement supérieure à celle obtenue pour l'état $I_{R_{\gamma,1}}$. En effet, pour l'état $I_{R_{\gamma,100}}$, la viscosité de référence est réduite, au maximum, de 84 % (au niveau des marges de cisaillement) et est augmentée, au maximum, de 144 % (très localement au niveau de la partie supérieure du glacier Kohler qui alimente la plateforme Dotson). Au contraire, pour l'état $I_{R_{\gamma,1}}$ la viscosité de référence est multipliée par 3 ou plus sur une partie importante du domaine (régions en rouge foncé sur la Figure 6.6i) et par plus de 15 en certaines régions très localisées situées à proximité du glacier Kohler : en l'absence de toute considération sur les autres paramètres affectant la viscosité, une telle augmentation ne pourrait s'expliquer que par une diminution de la température de la glace de plusieurs dizaines de degrés (jusqu'à 50 °C dans certaines régions) par rapport au champ de température de Van Liefferinge et Pattyn (2013) ; par ailleurs, même en postulant une glace au point de fusion, la réduction de viscosité observée sur une partie importante du domaine pour cette inversion est irréaliste. Notons que pour l'état inversé $I_{R_{\gamma,100}}$, une augmentation de la température de la glace de quelques degrés seulement suffit à expliquer la diminution locale de viscosité observée dans certaines régions (beaucoup moins étendues que pour $I_{R_{\gamma,1}}$) à l'issue de l'inversion, hormis aux niveaux des marges de cisaillement qu'on distingue nettement sur les plateformes de Pine Island et de Thwaites (Figure 6.6h) et où, comme nous l'avons déjà dit, la très faible viscosité observée peut être imputée à la présence de glace endommagée. Enfin, en ce qui concerne l'état inversé $I_{SV}$, celui-ci présente des erreurs sur les vitesses trop importantes au niveau des plateformes flottantes pour être pleinement satisfaisant.

### 6.2.5 Relaxations

Après l'inversion, une période de relaxation de 15 a est prescrite, pour chacun des trois états inversés, afin d'éliminer les divergences de flux de glace anormales dues aux incertitudes du modèle. Cette période de relaxation est menée avec le modèle direct tel que décrit à la Section 6.2.2, mis à part que la condition aux limites au niveau des frontières amonts est remplacée par la condition de flux nul donnée par l'équation (3.14). Ainsi, cette étape de relaxation est conduite avec la loi de Weertman linéaire (6.1) associée à la distribution du coefficient $C_{W,l}$ déduite de l'inversion pour chacun des trois états inversés (cf Figure 6.2).

La Figure 6.7 montre l'écart (m) entre l'épaisseur de glace à la fin (indice $r15a$) et au début (indice $r0a$) de la période de relaxation pour chacun des trois états inversés. De manière générale, on

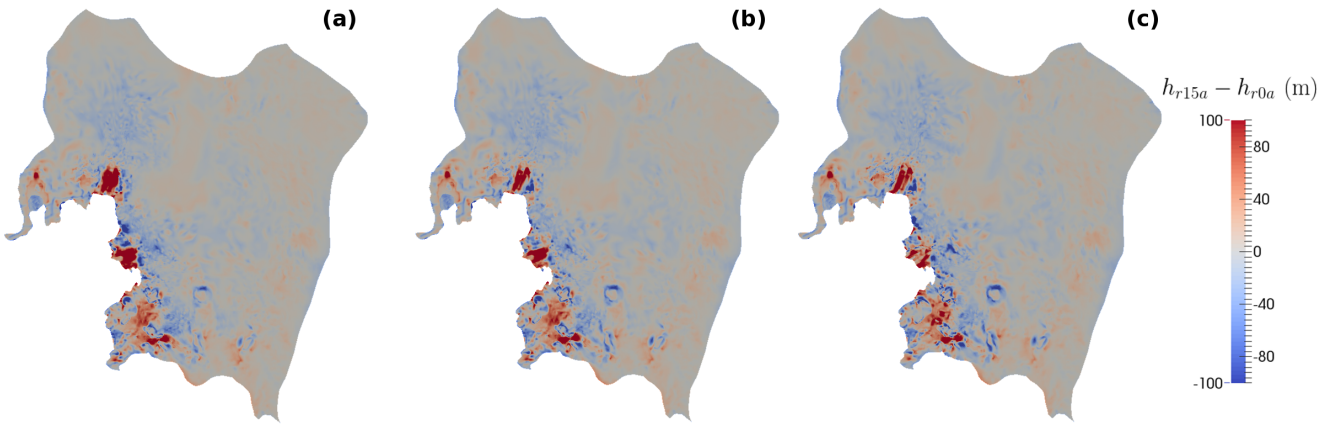


FIGURE 6.7 – Différence entre l'épaisseur de glace en fin et en début de relaxation pour les états inversés $I_{SV}$ **(a)**, $I_{R\gamma,100}$ **(b)** et $I_{R\gamma,1}$ **(c)**.

observe un léger amincissement des parties posées des glaciers émissaires tandis que les plateformes flottantes s'épaississent. Globalement, les trois états inversés affichent des évolutions similaires et ces évolutions sont relativement modérées : les divergences de flux anormales sont peu marquées. Cet état de fait est sans doute une conséquence de la prise en compte de la fonction coût sur les divergences de flux (6.3) lors du processus d'inversion.

## 6.3 Modification de la loi de frottement

Les états inversés $I_{SV}$, $I_{R_{\gamma,1}}$ et $I_{R_{\gamma,100}}$ ont tous trois été obtenus en adoptant une loi de Weertman linéaire pour modéliser le frottement, et celle-ci fût conservée lors de l'étape de relaxation. A l'issue de cette période de relaxation, nous reprenons la procédure décrite à la Section 5.2.2.2 afin d'identifier les distributions des coefficients de frottement des lois de Weertman non linéaire (donnée par la relation (2.15) avec $m = 1/3$) et de Schoof non linéaire (donnée par la relation (2.18) avec $m = 1/3$) pour deux valeurs de $C_{max}$, permettant de retrouver un champ de contrainte de cisaillement basale identique à - ou le plus proche possible de - celui produit par la loi de Weertman linéaire (6.1). Il est important de souligner que l'ensemble des calculs présentés dans la suite de cette section sont répétés pour chacun des trois états inversés $I_{SV}$, $I_{R_{\gamma,1}}$ et $I_{R_{\gamma,100}}$ dont il a été question dans la section précédente (cf Figure 6.2).

### 6.3.1 Identification pour la loi de Weertman non linéaire

#### 6.3.1.1 Méthodologie

Dans un soucis de cohérence avec les notations utilisée au Chapitre 5, nous notons $\boldsymbol{\tau}_{bW,l}(x, y, t)$ (respectivement $\mathbf{u}_{bW,l}(x, y, t)$) le champ de la contrainte de cisaillement basale (respectivement le champ de vitesse basale) produit à l'instant $t$ par la loi de frottement de Weertman linéaire selon la

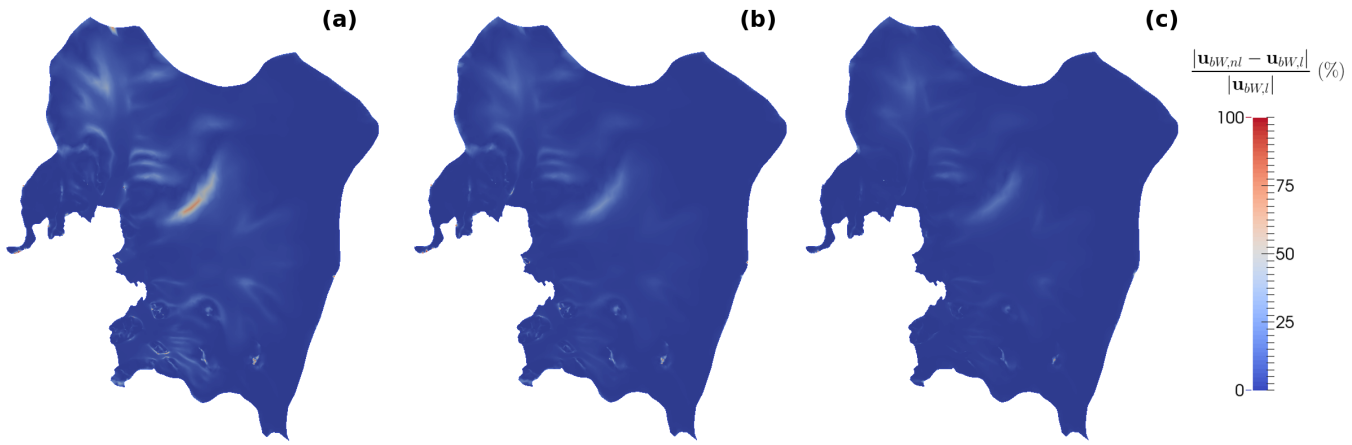


FIGURE 6.8 – Ecarts relatifs (en %) entre les champs de $\mathbf{u}_b$ produits par les lois de Weertman linéaire (6.1) et non linéaire (2.15) après identification du coefficient $C_{W,nl}$ selon l'équation (6.11), pour les états inversés $I_{SV}$ **(a)**, $I_{R\gamma,100}$ **(b)** et $I_{R\gamma,1}$ **(c)**.

relation (6.1). En outre, nous utilisons l'exposant $r15a$ pour indiquer que le champ en question est considéré à l'instant correspondant à la fin des 15 a de relaxation. Ainsi, la distribution du coefficient de la loi de Weertman non linéaire $C_{W,nl}$ permettant de reproduire le champ $\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}$ lorsque cette loi est substituée à la loi de Weertman linéaire, est donnée par :

$$C_{W,nl} = C_{W,l}|\mathbf{u}_{bW,l}^{r15a}|^{1-m} \tag{6.11}$$

Aux endroits où le coefficient $C_{W,nl}$ ne peut pas être déterminé selon cette procédure (zones de glace flottante ou rares zones non englacées), il est fixé de manière arbitraire à $C_{W,nl} = 10^{-6}\ \mathrm{MPa\,m^{-1/3}\,a^{1/3}}$. Comme au Chapitre 5, ce choix n'est pas réellement critique car l'ensemble des expériences transitoires menées par la suite induisent un recul de la ligne d'échouage.

#### 6.3.1.2 Comparaison des états obtenus

L'identification des coefficients de frottement par le biais de la relation (6.11) se fait au niveau des nœuds du maillage mais la résolution des équations de la *SSA* (3.26) requiert l'interpolation de ces valeurs nodales au niveau des points de Gauss afin de permettre les intégrations numériques sur lesquelles reposent la méthode des éléments finis (cf Section 3.3.1.5). Ce schéma numérique peut être à l'origine d'erreurs aux endroits où le maillage est trop grossier. La Figure 6.8 représente, pour chacun des trois états inversés, l'écart relatif entre le champ de vitesse produit par la loi de Weertman linéaire (6.1) et celui produit par la loi de Weertman non linéaire (2.15) - avec l'exposant $m = 1/3$ - associée au coefficient $C_{W,nl}$ identifié via la relation (6.11). Notons que l'écart est donné en pourcent. Cette figure confirme l'existence de légères différences d'origine numérique entre les champs de vitesse produits par les deux lois à l'issue de l'étape d'identification. En comparant la

Figure 6.8 à la Figure 3.2 on constate que, conformément à nos attentes, les erreurs se concentrent essentiellement là où les mailles sont grandes.

### 6.3.2 Identification pour la loi de Schoof non linéaire

#### 6.3.2.1 Méthodologie

Il s'agit ici d'identifier la distribution du coefficient de la loi de Schoof non linéaire $C_S$ permettant de retrouver, avec cette loi, le champ $\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}$. Cette distribution est donnée par :

$$C_S = \frac{|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|}{|\mathbf{u}_{bW,l}^{r15a}|^m \left(1 - \left(\frac{|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|}{C_{max} N^{r15a}}\right)^{1/m}\right)^m} \tag{6.12}$$

Comme cela a déjà été le cas à plusieurs reprises dans ce manuscrit, l'utilisation de la loi de Schoof nécessite de prescrire une distribution de pression effective. A nouveau, cette distribution est estimée en faisant appel à l'hypothèse simplificatrice supposant une connexion parfaite entre le réseau hydraulique sous-glaciaire et l'océan qui se traduit par la relation (4.24).

Comme il en a été question à la Section 5.2.2.2, $C_S$ n'est défini que si $|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|/N^{r15a} < C_{max}$ (borne d'Iken). Rappelons également que $C_{max}$ peut être vu comme un équivalent au paramètre $f_C$ intervenant dans la loi de Coulomb (2.21) dont les valeurs mesurées expérimentalement s'échelonnent entre 0.17 et 0.84. Bien sûr, la valeur de $C_{max}$ n'est *a priori* pas uniforme sur l'ensemble du socle mais comme il n'existe aucun moyen de contraindre la distribution spatiale de ce paramètre, nous n'avons d'autre choix que de lui attribuer une valeur constante qui soit réaliste. La Figure 6.9 montre, pour les trois états inversés, le pourcentage de nœuds posés du maillage où la borne d'Iken n'est pas satisfaite en fonction de la valeur attribuée au paramètre $C_{max}$. On constate que la borne d'Iken n'est respectée sur l'ensemble du domaine posé que pour des valeurs de $C_{max}$ bien au-delà des valeurs expérimentales évoquées ci-dessus. Cela tient à la présence de nœuds posés très proches de la flottaison pour lesquels le rapport $|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|/N^{r15a}$ est très élevé. Aussi, préférons-nous choisir une valeur réaliste de $C_{max}$ et interpoler (voire extrapoler pour certains nœuds situés en bordure du domaine posé) la valeur de $C_S$ aux nœuds au niveau desquels la borne d'Iken n'est pas satisfaite : les valeurs de $C_S$ au niveau de ces nœuds sont déduites de celles identifiées via l'équation (6.12) aux nœuds les plus proches au niveau desquels la borne d'Iken est satisfaite. En l'occurrence, nous considérons deux valeurs de $C_{max}$, à savoir $C_{max} = 0.4$ et $C_{max} = 0.6$.

De surcroît, afin de lisser le champ de $C_S$ ainsi obtenu, nous imposons une restriction supplémentaire par rapport à la borne d'Iken en interpolant (ou extrapolant) la valeur de $C_S$ en tous les nœuds au niveau desquels le rapport $|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|/N^{r15a}$ est supérieur à 80 % de $C_{max}$. Sans cette condition supplémentaire, on observe des maximums locaux extrêmement élevés de $C_S$. Au final, nous obtenons 6 distributions de $C_S$ différentes correspondant à deux valeurs de $C_{max}$ appliquées aux trois

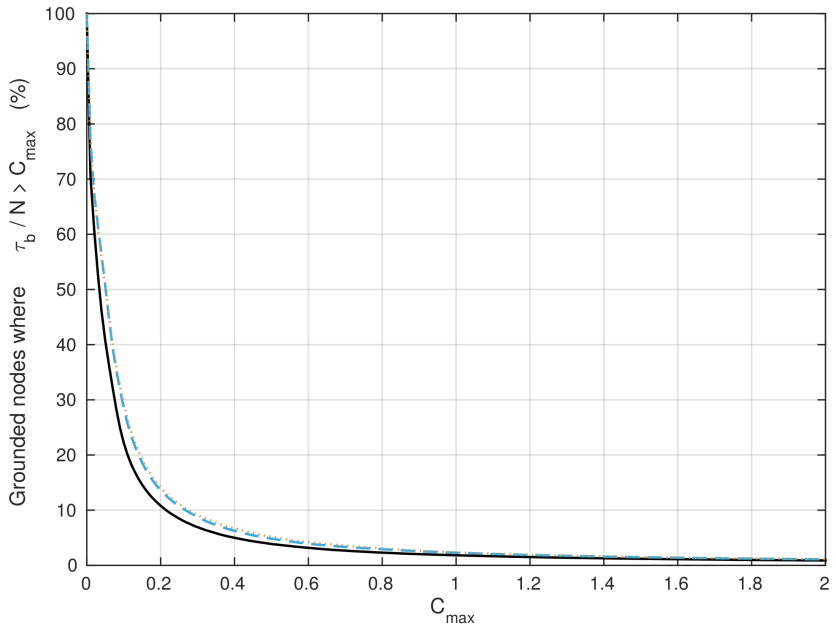


FIGURE 6.9 – Pourcentage de nœuds posés où la borne d'Iken n'est pas satisfaite en fonction de la valeur attribuée au paramètre $C_{max}$, pour les états inversés $I_{SV}$ (trait continu noir), $I_{R\gamma,100}$ (trait interrompu bleu) et $I_{R\gamma,1}$ (trait pointillé marron).

états inversés $I_{SV}$, $I_{R\gamma,1}$ et $I_{R\gamma,100}$. Le pourcentage minimum de nœuds posés au niveaux desquels la valeur de $C_S$ est interpolée est de $\sim 4$ % (pour l'état inversé $I_{SV}$ associé au paramètre $C_{max} = 0.6$) tandis que le pourcentage maximum de nœuds posés au niveaux desquels la valeur de $C_S$ est interpolée est de $\sim 8$ % (pour l'état inversé $I_{R\gamma,1}$ associé au paramètre $C_{max} = 0.4$). La Figure 6.10 montre, pour le cas le plus défavorable (i.e. l'état inversé $I_{R\gamma,1}$ associé au paramètre $C_{max} = 0.4$), les nœuds au niveau desquels la valeur de $C_S$ est directement déterminée à partir de l'équation (6.12) (en bleu) et ceux au niveau desquels la valeur de $C_S$ doit être interpolée (ou extrapolée) car le rapport $|\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}|/N_S^{r15a}$ y est supérieur à 80 % de $C_{max}$ (en rouge). Les nœuds flottants y sont représentés en vert et la valeur de $C_S$ y est fixée arbitrairement à $C_S = 10^{-3}$ MPa m$^{-1/3}$ a$^{1/3}$. Sans surprise, les nœuds pour lesquels $C_S$ ne peut pas être déterminé directement à partir de la relation (6.12) sont majoritairement situés en bordure de la partie posée, dans les régions où la pression effective est la plus faible. Notons que pour tous les autres cas (états inversés $I_{SV}$ et $I_{R\gamma,100}$ pour les deux valeurs de $C_{max}$ testées) le nombre de nœuds auxquels une interpolation de $C_S$ est requise sont localisés au sein des mêmes régions et leur nombre est un peu plus réduit.

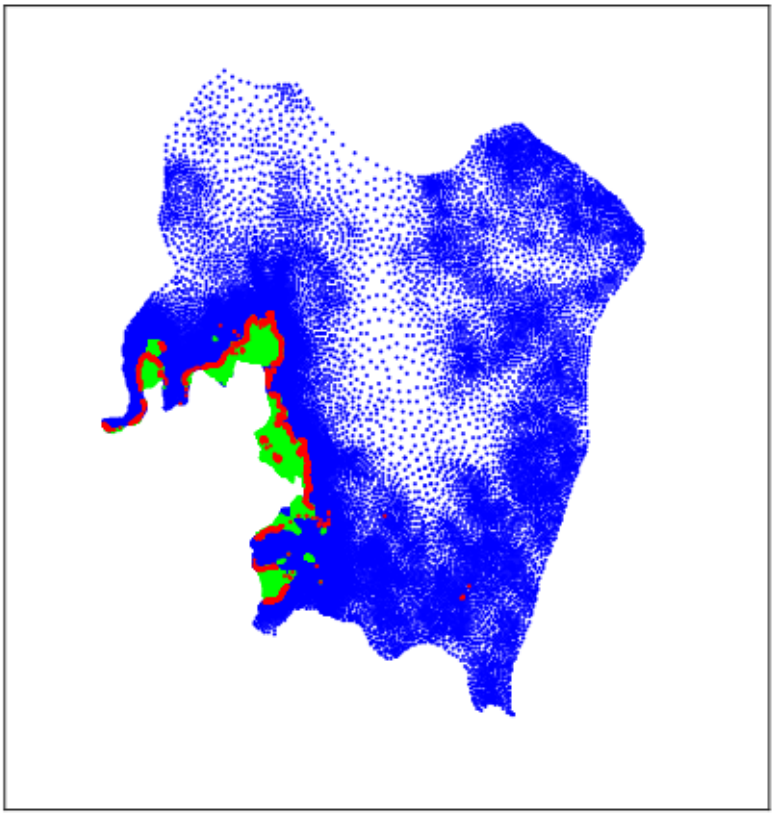

FIGURE 6.10 – Localisation des nœuds du maillage au niveau desquels $C_S$ est obtenu directement par identification (bleu) et de ceux au niveau desquels $C_S$ doit être interpolé ou extrapolé (rouge), pour l'état $I_{R\gamma,1}$ associé au paramètre $C_{max} = 0.4$. Les nœuds flottants sont représentés en vert et la valeur de $C_S$ y est fixée arbitrairement.

#### 6.3.2.2 Comparaison des états obtenus

Du fait de l'existence de nœuds au niveau desquels $C_S$ n'est pas identifié directement via l'équation (6.12) mais doit être interpolé, le champ de contrainte de cisaillement basale $\boldsymbol{\tau}_{bW,l}^{r15a}$ servant de référence pour l'identification n'est pas recréé à l'identique avec la loi de Schoof. Les Figures 6.11a-c proposent un grossissement des régions au sein desquelles se concentrent les écarts relatifs entre le champ de contrainte de cisaillement basale de référence et celui recréé par la loi de Schoof associée au paramètre $C_{max} = 0.4$. Ces écarts relatifs sont donnés en % dans une échelle de couleur dont la borne supérieure est fixée à 10 % ; les plateformes flottantes, au niveau desquelles $\boldsymbol{\tau}_b$ est forcé à zéro indépendamment de la loi de frottement utilisée, sont représentées en vert. Sans surprise, les écarts relatifs non nuls sont obtenus au niveau des nœuds proches de la flottaison pour lesquels une interpolation s'est avérée nécessaire ; partout ailleurs, les champs de $\boldsymbol{\tau}_b$ produit par les deux lois de frottement sont identiques aux erreurs numériques près. La comparaison de la Figure 6.10 et de la Figure 6.11c permet de constater que l'interpolation (ou l'extrapolation) du $C_S$ est

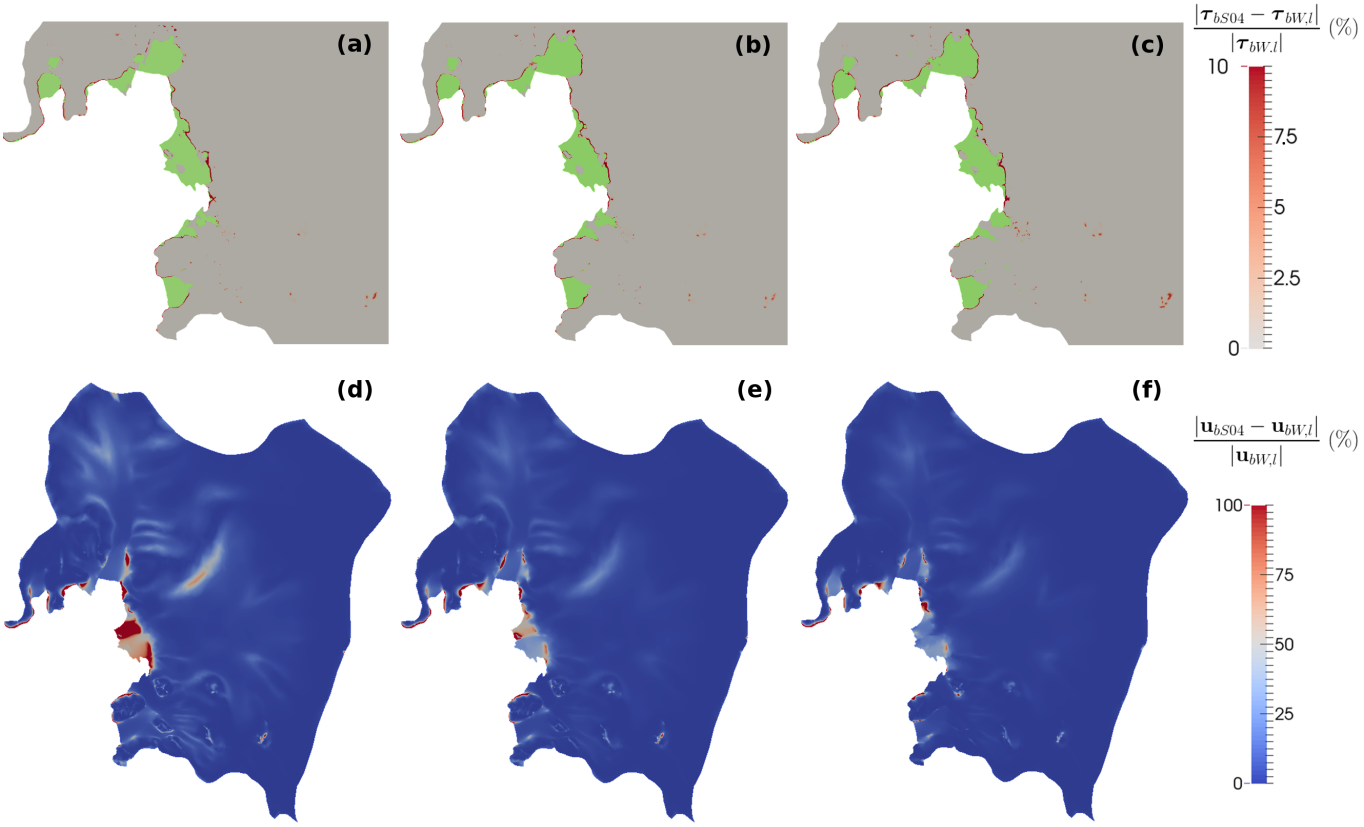


FIGURE 6.11 – Ecarts relatifs (en %) entre les champs de $\boldsymbol{\tau}_b$ (première ligne) et de $\mathbf{u}_b$ (deuxième ligne) produits par la loi de Weertman linéaire (6.1) et ceux produits par la loi de Schoof non linéaire (2.18) associée au paramètre $C_{max} = 0.4$ et à la distribution $C_S$ obtenue par identification selon l'équation (6.12) ou par interpolation, pour les états inversés $I_{SV}$ - panneaux **(a)** et **(d)** -, $I_{R\gamma,100}$ - panneaux **(b)** et **(e)** - et $I_{R\gamma,1}$ - panneaux **(c)** et **(f)**. Les figures de la première ligne constituent un grossissement centré sur les régions des plateformes flottantes (représentées en vert) où se concentrent les écarts en terme de $\boldsymbol{\tau}_b$ tandis que les figures de la seconde ligne représentent l'ensemble du bassin d'Amundsen.

satisfaisante pour de nombreux nœuds où celle-ci s'avère nécessaire puisque l'erreur qui en résulte sur le champ de $\boldsymbol{\tau}_b$ est souvent inférieure à 10 %. Des écarts plus importants (jusqu'à 100 %) sont obtenus, de manière très locale, au niveau de certains des derniers nœuds posés. Les nœuds au niveau desquels l'écart relatif est supérieur à 100 % sont anecdotiques. Notons que les résultats obtenus avec le paramètre $C_{max} = 0.6$ (non représentés) sont similaires si ce n'est que les nœuds concernés par l'interpolation sont encore moins nombreux. Il est essentiel de noter que là où des écarts de $\boldsymbol{\tau}_b$ existent, c'est la loi de Schoof qui produit la contrainte la plus faible.

Un autre intérêt des Figures 6.11a-c est de permettre une comparaison des positions respectives des lignes d'échouage (interface entre les parties vertes et marrons) obtenues, à l'issue des 15 a de relaxation, en fonction de la stratégie d'initialisation adoptée. En effet, bien que les évolutions observées au cours de la période de relaxation soient similaires pour les trois états inversés considérés

et relativement modérées, les positions des lignes d'échouage obtenues à l'issue de cette période pour chacun des trois états diffèrent très légèrement. On peut notamment le remarquer au niveau de la plateforme flottante Cosgrove (en vert sur la Figure 6.1) où deux zones flottantes, disjointes pour les états inversés $I_{SV}$ et $I_{R\gamma,100}$, ont fusionné pour l'état $I_{R\gamma,1}$.

Aussi localisés soient-ils, les écarts rapportés précédemment sur les champs de $\boldsymbol{\tau}_b$ produits par les lois de Weertman linéaire et Schoof non linéaire se traduisent nécessairement par des écarts sur les champs de vitesse produits, à l'issue de l'étape d'identification, par chacune des deux lois. Ces écarts relatifs sont représentés en %, pour chacun des trois états inversés, sur les Figures 6.11d-f. Tout d'abord, en comparant ces figures aux Figures 6.8, on remarque la présence des mêmes erreurs d'origine numérique dans les régions où le maillage est grossier que celles rapportées dans le cas de la loi de Weertman non linéaire. En dehors de ces erreurs d'origine numérique, des écarts relatifs sur le champ des vitesses produits par les deux lois s'observent dans les régions au sein desquelles il existe des écarts importants de $\boldsymbol{\tau}_b$ ainsi que sur les zones flottantes situées en aval de ces régions (particulièrement visible sur la plateforme flottante de Thwaites). Cela s'explique de la manière suivante : l'interpolation du $C_S$ en certains nœuds voisins de la ligne d'échouage est à l'origine d'une diminution de la contrainte de cisaillement basale totale qui doit être compensée ailleurs de sorte que l'équilibre global des contraintes soit satisfait ; les zones flottantes ne supportant aucune contrainte de cisaillement basale, la perturbation à la ligne d'échouage se transmet jusqu'au front des plateformes flottantes sauf si elle peut être reprise par une augmentation de l'effet d'arc-boutant via un contact local sur un point d'ancrage ou une augmentation des contraintes latérales aux marges de cisaillement pour les plateformes confinées ; ce dernier mécanisme est particulièrement bien illustré par les Figures 6.11d-f sur lesquelles on observe une augmentation importante des vitesses au niveau des marges de cisaillement de Pine Island lorsque la loi de Schoof est substituée à la loi de Weertman linéaire. En outre, on remarque également que l'écart relatif observé sur les vitesses est d'autant plus important que le poids attribué au frottement lors des inversions initiales est élevé. Cela n'est pas étonnant dans la mesure où lorsque seul le frottement est inversé, le champ de contrainte de cisaillement basale joue un rôle prépondérant dans l'équilibre global des contraintes ce qui rend l'écoulement d'autant plus sensible à une perturbation de ce champ.

A nouveau, nous n'avons pas représenté les écarts relatifs sur le champ des vitesses obtenus lorsque la loi de Schoof non linéaire associée au paramètre $C_{max} = 0.6$ est substituée à la loi de Weertman linéaire mais ceux-ci sont distribués aux mêmes endroits que les résultats présentés ici et sont légèrement moins importants.

### 6.3.3 Conclusion sur l'identification des coefficients de frottement

Au cours de cette section, nous avons identifié les distributions des coefficients des lois de Weertman non linéaire, Schoof non linéaire associée au paramètre $C_{max} = 0.4$ et Schoof non linéaire associée au paramètre $C_{max} = 0.6$ permettant de retrouver, avec chacune de ces lois, un champ de contrainte de cisaillement basale le plus proche possible de celui produit par la loi de Weertman linéaire à la fin de la période de relaxation. Ces identifications ont été menées pour chacun des trois états inversés $I_{SV}$, $I_{R\gamma,100}$ et $I_{R\gamma,1}$. Contrairement à ce que nous avions obtenus au Chapitre 5 pour un cas synthétique, les champs de vitesse produits par les quatre lois à l'issue de ces étapes d'identification ne sont pas rigoureusement identiques : d'abord, il y a de légères erreurs d'origine numérique ; ensuite, dans le cas des lois de Schoof, il y a des écarts dus à l'interpolation de la valeur du coefficient de frottement en certains nœuds proches de la flottaison. Néanmoins, nous pensons que les différents états ainsi obtenus sont suffisamment proches pour que les différences observées, pour un état inversé donné, au cours des expériences transitoires menées par la suite puissent être attribuées en premier lieu aux différentes formulations des lois de frottement plutôt qu'à ces faibles écarts sur les états initiaux.

Suite à ces identifications, une période de relaxation supplémentaire d'une durée de 5 ans est menée avec chacune des quatre lois de frottements pour chacun des états inversés. A l'issue de ces 5 ans, nous obtenons les 12 états initiaux qui vont servir de points de départ pour les expériences transitoires InitMIP-Antarctica (états $\mathrm{INIT}_x$ associés aux points jaunes sur la Figure 6.2). Notons que ces états initiaux diffèrent nécessairement les uns des autres puisqu'ils ont été produits avec des lois de frottement différentes à partir d'états très proches les uns des autres (états obtenus à la suite de l'étape d'identification et décrits dans la section précédente) mais non stationnaires (les états inversés sur lesquelles se basent ces identifications étant eux-mêmes non stationnaires) ; or, nous avons montré au Chapitre 5 que même pour des états initiaux numériquement identiques, des lois de frottement différentes induisent des évolutions transitoires différentes.

## 6.4 Expériences transitoires

Pour chacun des 12 états initiaux obtenus selon la procédure décrite dans la section précédente nous menons les trois expériences transitoires d'une durée de 100 a conçues pour l'initiative InitMIP Antarctica : l'expérience non perturbée EXP_CONTROL, l'expérience de perturbation du bilan de masse de surface EXP_ASMB et l'expérience de perturbation de la fonte sous les plateformes flottantes EXP_ABMB. Dorénavant, l'instant initial $t = 0$ a se réfère au début des expériences transitoires (points jaunes sur la Figure 6.2) et tous les temps évoqués dans la suite sont donnés relativement à cet instant initial.

### 6.4.1 Description des expériences

L'expérience EXP_CONTROL consiste simplement à poursuivre la relaxation faisant suite à l'identification des coefficients des lois de frottement sans prescrire de perturbation. Hormis la condition aux limites au niveau des lignes de crête qui est remplacée par la condition de flux nul (3.14) et la loi de frottement qui est adaptée pour chacun des états initiaux considérés, le modèle utilisé pour mener cette expérience est en tout point identique à celui décrit à la Section 6.2.2. En particulier, le bilan de masse de surface $a_{s,CONTROL}$ et la fonte sous les plateformes flottantes $a_{b,CONTROL}$ prescrits pour cette expérience sont ceux présentés à la Section 6.2.1. Cette expérience pourra donc servir de référence afin de distinguer les évolutions imputables aux perturbations imposées lors des deux autres expériences de l'évolution "naturelle" liée au fait que les trois états inversés ne sont pas stationnaires malgré l'usage d'une fonction coût visant à pénaliser les anomalies de divergence de flux.

L'expérience EXP_ASMB consiste à introduire, de manière progressive au cours des premiers 40 a de la simulation, une anomalie sur le bilan de masse de surface adopté pour EXP_CONTROL. Ainsi, le bilan de masse de surface $a_{s,ASMB}$ prescrit pour cette expérience dépend du temps selon la relation :

$$\begin{cases} a_{s,ASMB} = a_{s,CONTROL} + asmb\frac{\text{floor}(t)}{40} & \text{si } t < 40\,\text{a} \\ a_{s,ASMB} = a_{s,CONTROL} + asmb & \text{si } t \geq 40\,\text{a} \end{cases} \tag{6.13}$$

où floor représente la fonction partie entière tandis que $asmb$ (m a$^{-1}$) désigne l'anomalie sur le bilan de masse de surface, représentée sur la Figure 6.12a. Comme on peut le voir sur cette figure, cette anomalie consiste en une augmentation de l'accumulation. Hormis cette modification du bilan de masse de surface, le modèle utilisé est identique à celui utilisé pour l'expérience EXP_CONTROL.

Enfin, l'expérience EXP_ABMB consiste à introduire, de manière progressive au cours des premiers 40 a de la simulation, une anomalie uniforme sur la fonte sous les plateformes flottantes adoptée pour EXP_CONTROL. Ainsi, l'ablation basale $a_{b,ABMB}$ prescrite pour cette expérience dépend également du temps selon une relation similaire à (6.13), à savoir :

$$\begin{cases} a_{b,ABMB} = a_{b,CONTROL} + abmb\frac{\text{floor}(t)}{40} & \text{si } t < 40\,\text{a} \\ a_{b,ABMB} = a_{b,CONTROL} + abmb & \text{si } t \geq 40\,\text{a} \end{cases} \tag{6.14}$$

où $abmb$ (m a$^{-1}$) désigne l'anomalie sur la fonte basale et consiste en une augmentation uniforme de 13.2 m a$^{-1}$ de cette fonte sous la totalité des plateformes flottantes. Hormis cette modification de l'ablation basale, le modèle utilisé pour cette expérience est identique à celui utilisé pour l'expérience EXP_CONTROL.

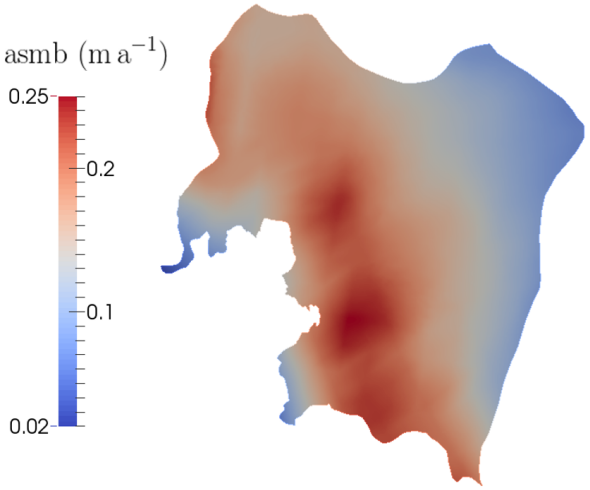


FIGURE 6.12 – Anomalie en m a$^{-1}$ sur le bilan de masse de surface pour l'expérience transitoire EXP_ASMB.

### 6.4.2 Résultats

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus dans les derniers mois de cette thèse. Nous n'en présentons ici que certains aspects préliminaires dans la mesure où leur analyse est encore en cours. En outre, certaines des simulations dont il est question ici ne sont pas encore arrivées au terme des 100 a des expériences transitoires. C'est la raison pour laquelle certaines des courbes tracées dans les figures que nous présentons par la suite sont incomplètes. Enfin, la ligne d'échouage à laquelle nous nous référerons dans cette partie consiste en réalité en plusieurs sections potentiellement disjointes de ligne d'échouage. Comme les positions de ces sections dépendent des deux coordonnées $x$ et $y$ et qu'elles prennent des formes potentiellement complexes, nous utilisons un proxy afin de caractériser leur évolution temporelle au cours des expériences transitoires, à savoir l'aire de glace posée : un retrait (respectivement une avancée) de la ligne d'échouage se traduira par une diminution (respectivement une augmentation) de l'aire de glace posée.

La Figure 6.13 montre, pour chacun des douze états initiaux, l'évolution temporelle de l'aire de glace posée relativement à sa valeur à l'instant initial (en %) au cours de l'expérience non perturbée EXP_CONTROL. Cette figure montre qu'indépendamment de la loi de frottement choisie et de l'état inversé considéré, l'évolution "naturelle" (c'est-à-dire non perturbée) du domaine consiste en une diminution de l'aire posée. Le retrait de la ligne d'échouage associé à cette évolution est plus important pour les lois de Schoof que pour les lois de Weertman et est d'autant plus marqué que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion est faible. Notons toutefois que les évolutions obtenues avec les deux lois de Weertman à partir des états inversés $I_{R\gamma,100}$ et $I_{R\gamma,1}$ sont très similaires. A la fin de l'expérience EXP_CONTROL, la réduction de l'aire de glace posée est comprise entre $\sim 0.6$ %

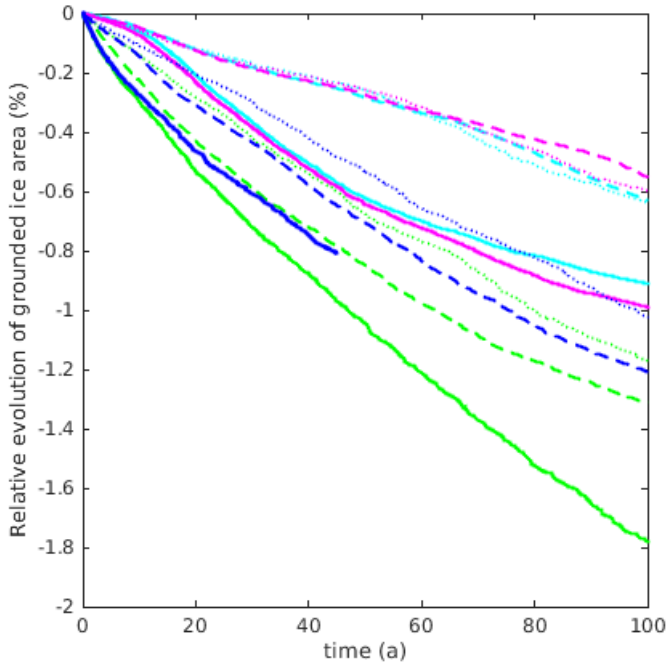


FIGURE 6.13 – Evolution relative (en %) de l'aire de glace posée au cours de l'expérience EXP_CONTROL menée avec les lois de Weertman linéaire (cyan), de Weertman non linéaire (magenta), de Schoof pour $C_{max} = 0.6$ (bleu) et de Schoof pour $C_{max} = 0.4$ (vert) et à partir des états inversés $I_{SV}$ (trait continu), $I_{R\gamma,100}$ (trait interrompu) et $I_{R\gamma,1}$ (pointillé).

(soit une diminution de 2400 km$^2$) pour la loi de frottement de Weertman non linéaire appliquée à l'état inversé $I_{R\gamma,100}$ et $\sim 1.8$ % (soit une diminution de 7700 km$^2$) pour la loi de frottement de Schoof avec $C_{max} = 0.4$ appliquée à l'état inversé $I_{SV}$.

La Figure 6.14 représente l'évolution des aires de glace posées pour les expériences EXP_ASMB (courbes situées au-dessus de $y = 0$) et EXP_ABMB (courbes situées en dessous de $y = 0$) relativement à l'évolution obtenue pour l'expérience EXP_CONTROL. De cette manière, les évolutions observées sont uniquement imputables aux perturbations appliquées et on s'affranchit du fait que les 12 états initiaux utilisés pour mener ces simulations sont hors équilibre. On notera tout d'abord le très faible impact de l'augmentation de l'accumulation - prescrite dans le cadre de l'expérience EXP_ASMB - sur la dynamique de la ligne d'échouage. En effet, à l'issue de cette expérience, l'aire posée n'a augmenté que de $\sim 0.2$ % au maximum (en ne considérant que les simulations étant arrivées au terme des 100 a) relativement à l'évolution observée pour EXP_CONTROL. Cette évolution est trop faible pour produire des différences significatives - sur un intervalle de temps aussi bref - en fonction de la loi de frottement et/ou de l'état inversé testé. Dans la suite, nous nous focaliserons donc sur l'expérience EXP_ABMB qui, pour sa part, induit une diminution importante de l'aire de glace posée (relativement à celle obtenue pour EXP_CONTROL). Les trois panneaux représentés sur la Figure 6.14 correspondent aux trois états inversés. Ainsi, il est possible d'évaluer

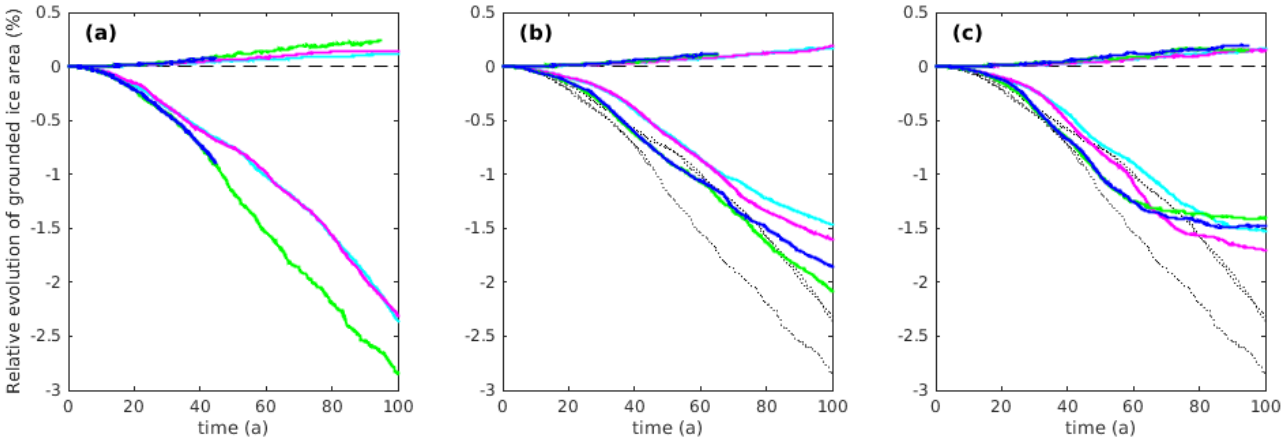


FIGURE 6.14 – Evolution de l'aire de glace posée au cours des expériences EXP_ASMB (courbes situées au-dessus de $y = 0$) et EXP_ABMB (courbes situées en dessous de $y = 0$) relativement à l'évolution obtenue au cours de l'expérience EXP_CONTROL (en %) pour les lois de Weertman linéaire (cyan), de Weertman non linéaire (magenta), de Schoof pour $C_{max} = 0.6$ (bleu) et de Schoof pour $C_{max} = 0.4$ (vert) et à partir des états inversés $I_{SV}$ **(a)**, $I_{R\gamma,100}$ **(b)** et $I_{R\gamma,1}$ **(c)**. Les résultats obtenus pour l'expérience EXP_ABMB à partir de l'état inversé $I_{SV}$ sont reportés en pointillés noirs sur **(b)** et **(c)**.

la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement pour un état inversé donné. En regardant la Figure 6.14a, on remarque que pour l'état initial $I_{SV}$ les lois de Weertman et la loi de Schoof avec $C_{max} = 0.4$ (le cas $C_{max} = 0.6$ n'étant pas arrivé au terme des 100 a de l'expérience EXP_CONTROL) donnent des évolutions nettement différentes (aire posée réduite de $\sim 2.8$ % pour la loi de Schoof et de respectivement $\sim 2.3$ % et $\sim 2.4$ % pour les lois de Weertman non linéaire et linéaire). Au contraire, les lois de Weertman non linéaire et linéaire affichent des comportements très similaires pour cet état inversé. A mesure que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion augmente, le retrait de la ligne d'échouage est de moins en moins important et il y a moins de différence entre les dynamiques produites par les lois de Schoof et celles produites par les lois de Weertman ; en revanche, les différences entre les dynamiques produites par la loi de Weertman non linéaire et celles produites par la loi de Weertman linéaire semblent devenir plus importantes. Il est également intéressant de remarquer que pour les états inversés $I_{SV}$ et $I_{R\gamma,100}$ les lois de Schoof produisent un retrait plus important que les lois de Weertman (ce qui est conforme aux résultats rapportés au Chapitre 5). Au contraire, pour l'état inversé $I_{R\gamma,1}$ (Figure 6.14c) l'aire de glace posée se stabilise autour de l'année 60 avec les lois de Schoof tandis qu'elle continue à diminuer pendant quelques années supplémentaires avec les lois de Weertman, si bien que les aires posées obtenues en fin de simulation avec ces deux dernières lois sont légèrement inférieures à celles produites par les lois de Schoof : la réduction de l'aire posée (relativement à EXP_CONTROL) est de $\sim 1.7$ % pour la loi de Weertman non linéaire et de seulement $\sim 1.4$ %

pour la loi de Schoof avec $C_{max} = 0.4$ ; les lois de Weertman linéaire et de Schoof avec $C_{max} = 0.6$ affichent toutes deux une réduction de $\sim 1.5$ %. Compte tenu des résultats obtenus au Chapitre 5, il peut paraître surprenant que l'aire de glace posée produite par la loi de Schoof soit plus faible lorsque $C_{max} = 0.6$ que lorsque $C_{max} = 0.4$. Néanmoins, la différence n'est pas significative et cette tendance est inversée pour l'état $I_{R\gamma,100}$. D'une manière générale, bien qu'il manque la fin de la simulation EXP_CONTROL pour l'état initial $\mathrm{INIT}_{S06}^{SV}$, l'évolution de l'aire posée se montre peu sensible à la valeur attribuée au paramètre $C_{max}$. Enfin, l'intercomparaison des différents panneaux de la Figure 6.13 donnent des informations intéressantes quant à la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la stratégie adoptée pour l'inversion. En particulier, on remarque que plus le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion est important, moins le domaine est affecté par la perturbation en fonte sous la plateforme flottante.

La Figure 6.15 représente la position de la ligne d'échouage après 50 a (panneaux de la première ligne) et 100 a (panneaux de la seconde ligne) de simulation pour l'expérience EXP_ABMB. Cette position est donnée pour chacune des lois frottements (courbes en couleur) et les différentes colonnes correspondent aux différents états inversés. Par ailleurs, sur chaque panneaux on représente en noir la position de la ligne d'échouage obtenue immédiatement après l'étape d'identification des coefficients des lois de frottement (points rouges sur la Figure 6.2). Ainsi, cette position est la même pour toutes les lois de frottement testées mais elle dépend de l'état inversé considéré. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ces positions ne sont pas les positions obtenues à $t = 0$ a : durant la période de relaxation de 5 a faisant suite à l'étape d'identification, chaque loi de frottement a induit une évolution propre de la ligne d'échouage si bien que les 12 positions de ligne d'échouage associées aux 12 états initiaux diffèrent toutes légèrement les unes des autres.

Le fond de carte des différents panneaux de la Figure 6.15 représente l'élévation du socle (m). Cela permet de mettre en lumière le fait que la répartition spatiale des retraits est contrôlée par la topographie du socle : les retraits les plus importants sont observés dans les régions où la pente est peu marquée (particulièrement visible en amont de la plateforme de Thwaites) tandis que la ligne d'échouage a tendance à s'enrouler autour des proéminences du socle. Les résultats mis en évidence par cette figure sont cohérents avec ceux illustrés par la Figure 6.14. Toutefois, le fait que la loi de Weertman non linéaire appliquée à l'état inversé $I_{R\gamma,1}$ produise, en fin de simulation, une ligne d'échouage globalement plus avancée que les autres lois (Figure 6.14f) peut sembler en contradiction avec les résultats présentés précédemment concernant l'évolution de l'aire posée ; en fait, cela peut s'expliquer par le fait que les évolutions d'aire de glace posée représentées sur la Figure 6.14 sont données relativement à l'évolution observée pour EXP_CONTROL tandis que les positions de ligne d'échouage signalées sur la Figure 6.15 sont absolues. Ainsi, pour l'expérience EXP_ASMB, les lignes d'échouage obtenues avec les lois de Schoof sont systématiquement plus

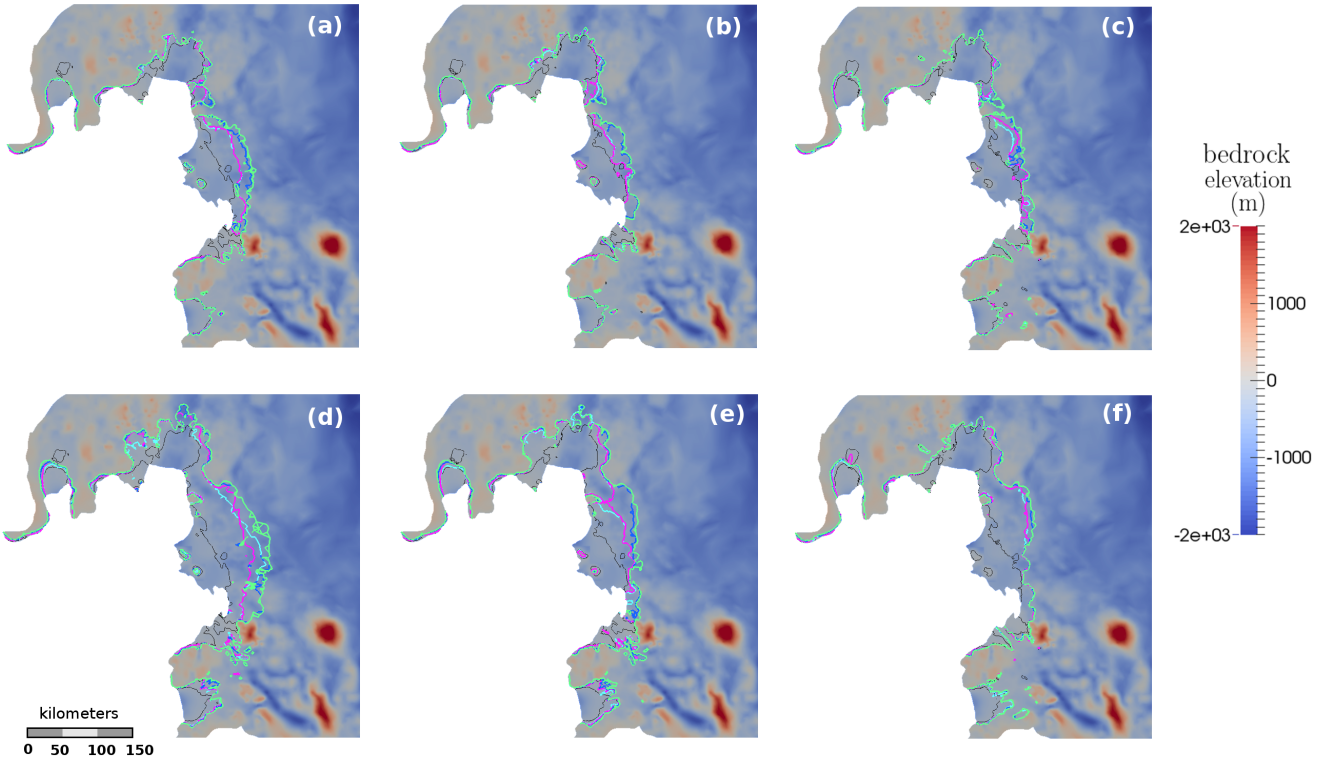


FIGURE 6.15 – Position de la ligne d'échouage obtenue après 50 a (première ligne) et 100 a (deuxième ligne) de simulation lors de l'expérience EXP_ABMB menée avec les lois de Weertman linéaire (cyan), de Weertman non linéaire (magenta), de Schoof pour $C_{max} = 0.6$ (bleu) et de Schoof pour $C_{max} = 0.4$ (vert) et à partir des états inversés $I_{SV}$ - panneaux **(a)** et **(d)** - , $I_{R\gamma,100}$ - panneaux **(b)** et **(e)** - et $I_{R\gamma,1}$ - panneaux **(c)** et **(f)**. Sur chacun des panneaux, le fond de carte représente l'élévation du socle (m) et la ligne noire correspond à la position de la ligne d'échouage obtenue immédiatement après l'étape d'identification des coefficients des lois de frottement (points rouges sur la Figure 6.2).

reculées que celles produites par les lois de Weertman tandis que les lois de Schoof avec $C_{max} = 0.4$ et avec $C_{max} = 0.6$ produisent des lignes d'échouage proches les unes des autres. De même, la similarité des comportements rapportés pour les états initiaux $INIT^{SV}_{w,l}$ et $INIT^{SV}_{w,nl}$ concernant l'évolution temporelle relative de l'aire de glace posée (Figure 6.14a) masque en réalité des disparités régionales importantes dans la localisation de la ligne d'échouage : celle produite par la loi de Weertman linéaire est plus avancée que celle produite par la loi de Weertman non linéaire dans certaines régions et plus reculée dans d'autres (courbes cyan et magenta non superposées sur la Figure 6.15d).

Enfin, pour l'état inversé $I_{R\gamma,1}$, les lignes d'échouage semblent entrer, à la fin de l'expérience EXP_ABMB, dans une phase de stabilisation. Il est difficile de déterminer si cette stabilisation, que l'on peut observer sur la Figure 6.14c, est le résultat d'un mécanisme physique lié au retrait de la ligne d'échouage dans des zones de forte viscosité (voir Figure 6.6i) ou bien s'il s'agit d'un artefact

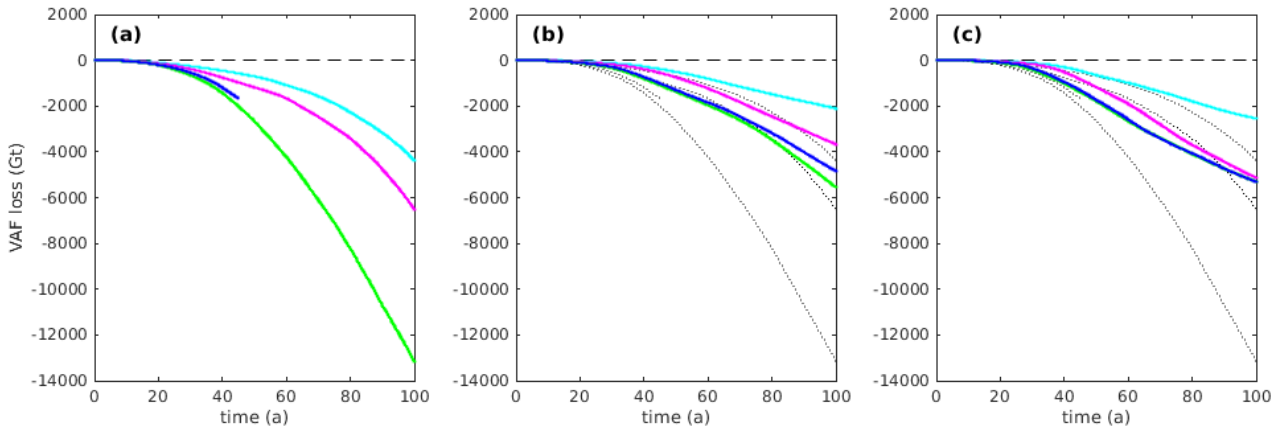


FIGURE 6.16 – Evolution des volumes au-dessus de la flottaison (convertis en Gt) au cours de l'expérience EXP_ABMB relativement à l'évolution obtenue au cours de l'expérience EXP_CONTROL pour les lois de Weertman linéaire (cyan), de Weertman non linéaire (magenta), de Schoof pour $C_{max} = 0.6$ (bleu) et de Schoof pour $C_{max} = 0.4$ (vert) et à partir des états inversés $I_{SV}$ **(a)**, $I_{R\gamma,100}$ **(b)** et $I_{R\gamma,1}$ **(c)**. Les résultats obtenus pour l'expérience EXP_ABMB à partir de l'état inversé $I_{SV}$ sont reportés en pointillés noirs sur **(b)** et **(c)**.

numérique : en effet, à la fin de la simulation de nombreuses sections de la ligne d'échouage sont sorties de la zone au sein de laquelle le maillage est très raffiné ; cela n'est pas encore le cas après 50 a de simulation et les différentes lois de frottement produisent des lignes d'échouage relativement éloignées à ce moment-là (Figure 6.15c). Notons toutefois que ce retrait de certaines sections de la ligne d'échouage au-delà de la zone de maillage raffiné à l'issue des 100 a d'expérience est également observé pour les états inversés $I_{SV}$ et $I_{R\gamma,100}$ qui, pourtant, ne semblent pas concernés par ce début de stabilisation.

La Figure 6.16 représente l'évolution des volumes stockés au-dessus de la flottaison (VAF), convertis en Gt, au cours de l'expérience EXP_ABMB relativement à l'évolution obtenue pour EXP_CONTROL. Cette figure permet d'illustrer le fait que, compte tenu de l'étendue du domaine étudié, des variations d'aire posée de seulement quelques pourcents se traduisent par des pertes de masse de plusieurs milliers de Gt. On remarque notamment que lorsque la viscosité n'est pas inversée (Figure 6.16a), la masse perdue par le domaine au cours de l'expérience EXP_ABMB (relativement à celle perdue au cours de EXP_CONTROL) avec la loi de Schoof associée au paramètre $C_{max} = 0.4$ est de $\sim 13.2 \times 10^3$ Gt tandis qu'elle n'est que de, respectivement, $\sim 6.5 \times 10^3$ Gt et $\sim 4.4 \times 10^3$ Gt pour les lois de Weertman non linéaire et linéaire. Il est intéressant de noter que, pour l'état inversé $I_{R\gamma,1}$, bien que les positions finales des lignes d'échouage soient proches les unes des autres pour les différentes lois testées, la masse perdue avec la loi de Weertman linéaire est assez nettement inférieure aux masses perdues avec les autres lois.

### 6.4.3 Discussion

La perturbation en bilan de masse de surface n'affectant que très faiblement l'évolution "naturelle" de la ligne d'échouage, nous nous focalisons ici sur la perturbation en fonte sous les plateformes flottantes (EXP_ABMB). Cette perturbation est responsable d'un amincissement des plateformes flottantes et, de fait, d'une réduction de leur effet d'arc-boutant qui induit un retrait de la ligne d'échouage. L'amplitude de ce retrait est d'autant plus important que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion est faible. En effet, plus on met de poids sur la viscosité lors de l'inversion plus l'effet d'arc-boutant exercé par les plateformes flottantes sur leurs glaciers tributaires est réduit à l'état initial ; cela tient à l'apparition de bandes de faible viscosité au niveau des marges de cisaillement qui contrarient les transferts de contrainte vers l'intérieur des plateformes. Ainsi, les états initiaux pour lesquels la viscosité a été inversée sont moins sensibles à une réduction de l'effet d'arc-boutant dans la mesure où, déjà à l'état initial, la contribution de cet effet à l'équilibre global des contraintes était moins importante que pour les états initiaux issus de l'état inversé $I_{SV}$.

Pour des raisons similaires, on remarque que les différences obtenues entre les lois de Weertman d'une part et les lois de Schoof d'autre part sont plus faibles lorsque la viscosité est inversée : pour l'état inversé $I_{SV}$, seul le champ de la contrainte de cisaillement basale est ajusté de manière à ce que l'équilibre global des contraintes soit satisfait ; or, comme nous l'avons vu au Chapitre 5, l'évolution temporelle de ce champ en réponse à une perturbation diffère nettement selon que l'effet de la pression effective au voisinage de la ligne d'échouage est pris en compte de manière explicite ou pas. Il n'est donc pas étonnant que la réponse dynamique de la ligne d'échouage à la perturbation soit d'autant plus sensible à la loi de frottement que ce dernier joue un rôle prépondérant dans la construction des états initiaux.

Conformément aux résultats présentés au Chapitre 5, les lois de Weertman sous-estiment la contribution du bassin d'Amundsen à l'élévation du niveau des mers par rapport aux lois de Schoof. Ainsi, avec la loi de Schoof associée au paramètre $C_{max} = 0.4$, la masse perdue par le domaine à l'horizon du siècle en réponse à la perturbation en fonte est plus de deux fois supérieure à la perte prédite par le modèle lorsqu'une loi de Weertman est utilisée. En outre, la loi de Weertman linéaire est plus optimiste que la loi de Weertman non linéaire quant à la contribution du domaine à l'élévation du niveau des mers. Ce résultat est en accord avec ceux obtenus par Ritz *et al.* (2015) qui suggèrent une contribution de la calotte antarctique à l'élévation du niveau des mers d'autant plus importante que la loi de Weertman se rapproche d'une loi parfaitement plastique (i.e. $m = 0$). Par ailleurs, au cours du Chapitre 5 nous avions noté une sensibilité significative de la dynamique de la ligne d'échouage à la valeur attribuée au paramètre $C_{max}$. Cette sensibilité est moins flagrante dans les résultats que nous présentons ici mais malheureusement la simulation EXP_CONTROL concernant l'état initial $INIT_{S06}^{SV}$ n'ayant couvert que 45 a, il est difficile de conclure sur ce point

en l'état.

Le choix de la loi de frottement tend à perdre de son influence sur les projections en terme d'augmentation du niveau des mer lorsque le poids attribué à la viscosité au moment de l'inversion augmente. Toutefois, les différences observées entre les résultats produits par les lois de Schoof d'une part et ceux produits par la loi de Weertman non linéaire et, à plus forte raison, par la loi de Weertman linéaire d'autre part demeurent significatives pour l'état inversé $I_{R\gamma,100}$ qui, nous le rappelons, nous semble être le plus réaliste.

## 6.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons profité de l'initiative Init-MIP Antarctica afin d'étendre les conclusions du Chapitre 5 concernant la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la loi de frottement à un cas réel, en l'occurrence le bassin d'Amundsen. Pour cela, nous avons commencé par construire trois états inversés en attribuant, pour chacun d'eux, un poids relatif plus ou moins important au frottement et à la viscosité. Un choix judicieux de ce poids relatif s'avère primordial pour obtenir l'état inversé le plus réaliste possible. Nous avons en effet constaté que le fait de ne pas inverser la viscosité empêche une reproduction satisfaisante des vitesses observées au niveau des plateformes flottantes ; au contraire, un poids trop important attribué à ce paramètre conduit à des champs de viscosité irréalistes. Parmi les différentes stratégies d'inversion testées, l'inversion $I_{R\gamma,100}$ nous semble être la plus satisfaisante. En effet, les légères modifications de la viscosité de référence qu'elle induit ont généralement une amplitude équivalente à des erreurs de quelques degrés sur la température utilisée pour construire ce champ de viscosité de référence ; d'autre part, l'inversion $I_{R\gamma,100}$ produit des bandes de faible viscosité au niveau des marges de cisaillement qui sont parfaitement en accord avec la présence attendue de glace endommagée dans ces zones.

Après une période de relaxation de 15 a, nous procédons à l'identification des coefficients des lois de frottement de Weertman non linéaire et de Schoof non linéaire - pour les paramètres $C_{max} = 0.4$ d'une part et $C_{max} = 0.6$ d'autre part - permettant de recréer, avec ces lois, les états les plus proches possibles de ceux obtenus avec la loi de Weertman linéaire. Du fait du schéma utilisé pour la résolution des équations de la *SSA*, on observe de légers écarts d'origine numérique sur le champ des vitesses initial produit par ces différentes lois après l'étape d'identification ; à ces écarts d'origine numérique s'ajoutent, dans le cas des deux lois de Schoof, un écart lié au fait que le coefficient $C_S$ ne peut pas être identifié directement au niveau de certains nœuds lorsque ceux-ci sont trop proches de la flottaison ; il doit alors être interpolé à partir des valeurs identifiées aux nœuds les plus proches. Néanmoins, les écarts sur les champs de vitesse qu'induit nécessairement cette méthode sont très localisés et les états obtenus avec les différentes lois de frottement suffisamment proches les uns

des autres pour que les divergences observées lors des expériences transitoires soient attribuées en premier lieu aux spécificités des différentes formulations des lois de frottement testées.

Une fois l'identification réalisée, et après une période de relaxation supplémentaire de 5 a au cours de laquelle chaque loi de frottement induit une évolution qui lui est propre, nous réalisons les expériences transitoires conçues dans le cadre de l'initiative Init-MIP Antarctica. Une première expérience consistant en une augmentation graduelle du bilan de masse de surface n'a que peu de conséquence sur l'évolution du domaine. En revanche, l'expérience de perturbation de la fonte sous-glaciaire provoque une réponse dynamique marquée, liée à une diminution de l'effet d'arc-boutant exercé par les plateformes flottantes sur les glaciers émissaires. Comme la part de cet effet dans l'équilibre global initial des contraintes est d'autant plus important que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion est faible, les différents états inversés produisent des réponses d'amplitude différente. Conformément aux résultats obtenus au Chapitre 5, les retraits de ligne d'échouage - et donc la contribution du bassin d'Amundsen à l'élévation du niveau des mers - produits par les lois de Schoof sont systématiquement plus importants que ceux obtenus avec les lois de Weertman. Si l'écart entre ces lois tend à se réduire à mesure que le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion augmente, il demeure significatif pour l'état inversé le plus réaliste $I_{R\gamma,100}$ : à l'issue des 100 a de simulation, la loi de Schoof est associée à une perte de masse (relativement à la masse perdue au cours de l'expérience non perturbée) comprise entre 5550 Gt et 4850 Gt tandis qu'elle se limite à 3670 Gt avec la loi de Weertman non linéaire et à seulement 2110 Gt avec la loi de Weertman linéaire.

Comme au Chapitre 5, la limitation principale de notre étude réside dans la simplicité de l'hypothèse utilisée pour estimer la distribution de la pression effective requise par la loi de Schoof. Là encore, le couplage du modèle d'écoulement à un modèle d'hydrologie sous-glaciaire reposant sur des bases physiques solides constituerait un progrès important dans la modélisation de la dynamique d'échouage et permettrait d'affiner nos projections concernant la contribution des calottes marines à l'élévation future du niveau des mers.

Chapitre 7

# Conclusions et perspectives

## 7.1 Conclusions

L'élévation du niveau des mers constatée actuellement dans un contexte de réchauffement climatique constitue une réelle menace pour une proportion importante de l'humanité et, à ce titre, nécessite la mise en œuvre de mesures adaptées. La conception de telles mesures requiert une meilleure quantification de l'élévation future du niveau des mers à diverses échéances. Avec les immenses volumes de glace qu'elle stocke, la calotte antarctique représente le premier contributeur potentiel à cette élévation future et des observations récentes montrent que sa décharge dynamique de glace dans l'océan accélère. Comme l'essentiel de la glace déchargée de cette calotte transite par une ligne d'échouage, la modélisation réaliste de la dynamique de cette dernière est une condition *sine qua non* à l'obtention de projections fiables. Récemment, d'importants efforts ont été déployés par la communauté des glaciologues afin d'atteindre cet objectif. Malheureusement, la dynamique de la ligne d'échouage est complexe : elle est affectée par un certain nombre de processus physiques qui, encore aujourd'hui, ne sont pas tous représentés de manière convenable par les modèles de calotte. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux de ces processus : l'endommagement d'une part et le frottement basal en lien avec l'hydrologie sous-glaciaire d'autre part. Plus précisément, nous nous sommes attachés à quantifier les incertitudes sur la dynamique de la ligne d'échouage (et donc sur l'évolution du niveau des mers) liées à l'absence de prise en compte - ou à une prise en compte inadaptée - de ces deux processus.

Au Chapitre 2, nous avons décrit les deux composantes du mouvement glaciaire, à savoir la déformation visco-plastique de la glace et le mouvement basal. Nous avons commencé par mettre en lumière la double nature ductile/fragile de la glace : aux grandes échelles de temps la glace peut être vue comme un fluide non-newtonien à très forte viscosité tandis qu'aux échelles de temps courtes, la glace est fragile et se fracture dans les régions où règnent de fortes contraintes. Ces fractures affectent la rhéologie de la glace en réduisant sa viscosité, phénomène qui peut être modélisé en faisant appel à la théorie de l'endommagement. Dans un second temps, nous avons recensé les différents processus à l'origine du mouvement basal et énoncé les lois de frottement les plus classiquement utilisées en glaciologie afin de modéliser ces processus. Ces lois sont développées sur des bases théoriques ou à partir d'expériences réalisées en laboratoire mais, à l'heure actuelle, leur validation *in situ* est hors de portée du fait de la démesure des échelles spatiales et temporelles mises en jeu dans les

problèmes d'écoulement glaciaire. Aussi, les modélisateurs privilégient-ils généralement la simplicité en adoptant la loi de frottement de Weertman dont la distribution du coefficient de frottement est déduite à partir d'observations de vitesses de surface par l'intermédiaire de méthodes inverses. Lors du traitement de cas réels, la sensibilité des résultats à la valeur attribuée à l'exposant intervenant dans cette loi est régulièrement testée ; en revanche, la sensibilité des résultats à la forme de la loi de frottement, et particulièrement au fait de ne pas prendre en compte de manière explicite l'effet de la pression effective, est généralement occultée. Or, comme nous l'avons expliqué en fin de chapitre, la prise en compte de cet effet modifie la distance caractéristique de la région au voisinage de la ligne d'échouage au sein de laquelle s'opère un couplage mécanique entre partie posée et partie flottante et qui joue un rôle de premier plan dans la dynamique de la ligne d'échouage. Par ailleurs, le flux de glace au sein de cette région étant également fonction de la viscosité, la prise en compte de l'endommagement affecte nécessairement ce flux et, par conséquent, la dynamique de la ligne d'échouage.

L'écoulement d'un glacier émissaire est régi par un certain nombre d'équations qui ont été présentées au Chapitre 3 aux côtés de leurs différentes approximations couramment utilisées en glaciologie. Ce fut aussi l'occasion d'introduire le modèle *Elmer/Ice* sur lequel s'appuient l'ensemble des travaux effectués au cours de cette thèse et de présenter, dans les grandes lignes, la méthode des éléments finis qui est exploitée par ce modèle. Bien que succincte, cette présentation est importante car elle permet de comprendre l'origine des difficultés numériques mises en évidence dans les chapitres suivants.

L'intégration d'un processus physique au sein d'un modèle tel qu'*Elmer/Ice* comporte deux étapes : d'abord, il faut formuler les équations mathématiques qui décrivent ce processus ; ensuite, il faut réaliser l'implémentation numérique de ces équations au sein du modèle. Les équations régissant l'évolution de l'endommagement (sa création et son transport avec l'écoulement) avaient déjà été formulées et implémentées au sein de la version *full-Stokes* d'*Elmer/Ice* préalablement à cette thèse. Cependant, compte tenu des temps de calcul très importants mis en jeu en *full-Stokes*, nous avons décidé d'adapter ce modèle d'endommagement à la version *SSA* du logiciel. Le transport de l'endommagement est décrit par une équation d'advection dont les solutions numériques sont caractérisées par des instabilités et requièrent la mise en œuvre de méthodes de stabilisation. Des expériences simplifiées ont été réalisées afin de comparer les performances de ces différentes méthodes selon les résolutions spatiales et temporelles employées. De ces expériences, il ressort que la méthode DG est la plus stable et une des moins diffusives parmi les méthodes testées. Cependant, d'autres difficultés ont motivé le remplacement de cette méthode par les méthodes SUPG ou Bubbles. Dans ce contexte, la dernière expérience présentée au Chapitre 4 avait pour but de s'assurer que la dynamique de la ligne d'échouage est indépendante de la méthode de stabilisa-

tion choisie. La conclusion de cette expérience est sans appel : pour que la dynamique de la ligne d'échouage soit effectivement insensible à la méthode de stabilisation retenue, il faut que le maillage soit très raffiné au niveau des régions où se crée l'endommagement. De tels maillages aboutissent rapidement à des coûts numériques prohibitifs, d'autant plus que le manque de contraintes sur les paramètres intervenant au sein du modèle d'endommagement (contrainte seuil $\sigma_{th}$ et facteur d'amplification $B$) nécessite de multiplier les simulations afin d'ajuster les valeurs de ces paramètres. Une autre limitation du modèle physique d'endommagement a été mise en évidence au cours de cette expérience, à savoir l'absence d'un processus de cicatrisation sans lequel l'endommagement en profondeur devient rapidement irréaliste et affecte la viscosité de la glace de manière excessive. Qui plus est, du fait de l'état de contrainte particulier que suppose l'utilisation d'un modèle *SSA*, celui-ci a probablement tendance à exagérer l'étendue des régions au sein desquelles l'endommagement est créé (notamment, au voisinage des dômes), ce qui contribue à créer des distributions d'endommagement irréalistes.

Au Chapitre 5, nous nous sommes penchés sur l'influence du choix de la loi de frottement sur la dynamique de la ligne d'échouage. Le fait de modéliser le frottement à l'aide d'une loi de Weertman associée à une distribution stationnaire du coefficient de frottement - que celle-ci soit obtenue par inversion ou bien fixée empiriquement - induit une discontinuité de frottement à la ligne d'échouage dès lors que celle-ci recule. Avec un modèle *full-Stokes*, il existe trois manières distinctes de traiter numériquement cette discontinuité qui produisent des différences significatives de la dynamique de la ligne d'échouage lorsque le maillage est insuffisamment raffiné au voisinage de celle-ci. Dans le cas où l'on veut conserver la loi de Weertman, nous suggérons d'utiliser la méthode DI car c'est elle qui respecte le mieux la physique du problème tout en étant la moins sensible à la résolution du maillage. Néanmoins, la meilleure manière de procéder consiste, selon nous, à adopter une loi de frottement dont la formulation fait intervenir explicitement la pression effective. Ainsi, on obtient naturellement une contrainte de cisaillement basale qui décroît de manière continue à l'approche de la ligne d'échouage jusqu'à s'annuler au niveau de celle-ci. Un tel choix permet donc de s'affranchir de la discontinuité de frottement à la ligne d'échouage et s'avère plus en accord avec les observations récentes suggérant l'existence d'une connexion entre le réseau hydraulique basal et l'océan. Ce travail a fait l'objet d'une publication à laquelle j'ai contribué en effectuant les simulations tridimensionnelles et en participant à la rédaction (Gagliardini *et al.*, 2016).

Plusieurs lois de frottement intégrant explicitement l'effet de la pression effective ont été formulées au fil des décennies. Dans la seconde partie du Chapitre 5, nous construisons une expérience se voulant être une reproduction, sur un cas synthétique, de la procédure adoptée lorsqu'on simule un cas réel. L'objectif de cette expérience est de comparer les dynamiques de ligne d'échouage produites par les lois de Weertman, Budd, Schoof et Tsai lorsque les coefficients intervenant au sein

de ces lois sont ajustés de manière à débuter d'états initiaux identiques : si les réponses transitoires produites par les lois de Schoof et Tsai s'avèrent similaires, les lois de Weertman, Budd et Schoof/Tsai produisent en revanche des réponses très différentes. Un résultat important de cette étude réside dans l'obtention d'états stationnaires situés sur la section de pente rétrograde avec la loi de Weertman pour certaines distributions du coefficient de frottement. Ce résultat remet en cause l'idée selon laquelle la seule topographie du socle suffit à délimiter les régions sujettes au phénomène de MISI. Par ailleurs, notre étude montre que la loi de Weertman a tendance à sous-estimer la contribution dynamique des calottes à l'élévation du niveau des mers. Compte tenu des résultats obtenus au cours de l'ensemble des travaux présentés au Chapitre 5, nous suggérons d'opter pour une loi de frottement de Schoof en raison de sa prise en compte explicite de la pression effective, de son respect de la borne d'Iken et du fait que, contrairement à la loi de Tsai, elle implique une transition continue entre un régime de frottement de type Weertman loin en amont de la ligne d'échouage et un régime de frottement de type Coulomb au voisinage immédiat de cette dernière. Ce travail a également fait l'objet d'une publication (Brondex *et al.*, 2017).

Afin de nous assurer que les conclusions formulées au Chapitre 5 à partir d'un cas synthétique demeurent valables pour un cas réel, nous profitons du projet InitMIP-Antarctica et étudions le bassin d'Amundsen. Dans un premier temps, nous faisons appel aux méthodes inverses pour construire trois états initiaux à partir d'observations des vitesses de surface : le premier état initial est obtenu en ajustant uniquement le coefficient de frottement de la loi de Weertman linéaire tandis que les deux autres sont obtenus en ajustant simultanément ce même coefficient de frottement et la viscosité de la glace ; ces deux états initiaux se distinguent par le poids relatif plus ou moins important portant sur chacun des deux paramètres. Lorsque la viscosité est inversée, on observe distinctement l'apparition de bandes de faible viscosité au niveau de certaines marges de cisaillement qui suggèrent la présence de zones fortement endommagées. En revanche, si le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion est trop important, le champ qui en découle peu s'avérer irréaliste. Dans un deuxième temps, nous identifions, selon la même procédure que celle appliquée au Chapitre 5, les distributions des coefficients de frottement de la loi de Weertman non linéaire et de la loi de Schoof non linéaire - d'abord avec $C_{max} = 0.4$ puis avec $C_{max} = 0.6$ - permettant d'obtenir, avec les différentes lois et pour chacun des trois états inversés considérés, les champs de $\tau_b$ les plus proches possibles de celui produit par la loi de Weertman linéaire. Dans le cas de la loi de Schoof, ce coefficient de frottement ne peut être déterminé dans les régions où la glace est trop proche de la flottaison ; au sein de telles régions, la distribution du coefficient de frottement doit alors être interpolée (voire extrapolée pour certains nœuds en bordure de partie posée) à partir des valeurs définies aux nœuds avoisinants. De fait, le champ de $\boldsymbol{\tau}_b$ ainsi recréé diffère nécessairement du champ de référence utilisé pour l'identification : il s'avère que lorsqu'on compare le champ

de vitesse obtenu avec la loi de Weertman linéaire (référence pour l'identification) à celui obtenu avec la loi de Schoof après identification du coefficient $C_S$, les écarts observés sont très localisés et suffisamment modérés pour que la sensibilité de la dynamique de la ligne d'échouage à la loi de frottement puisse être évaluée. Pour permettre cette évaluation, nous soumettons les douze états initiaux créés en appliquant les quatre lois de frottement à chacun des trois états inversés aux expériences transitoires conçues dans le cadre du projet InitMIP-Antarctica. Une intensification de la fonte sous les plateformes flottantes induit un retrait de la ligne d'échouage lié à une réduction de l'effet d'arc-boutant exercé par ces plateformes sur les glaciers émissaires. L'amplitude de ce retrait dépend à la fois de la stratégie d'inversion adoptée et de la loi de frottement choisie. En particulier, la loi de Schoof prédit systématiquement des retraits de ligne d'échouage plus marqués que la loi de Weertman non linéaire et, à plus forte raison, que la loi de Weertman linéaire. L'écart entre les projections réalisées avec les différentes lois se réduit lorsque le poids attribué à la viscosité lors de l'inversion augmente ; il demeure néanmoins significatif pour l'état inversé que nous considérons être le plus réaliste. Ce dernier chapitre a vocation à faire l'objet d'une publication dans un futur proche.

## 7.2 Perspectives

### 7.2.1 Modélisation de l'endommagement

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis de mettre en lumière certaines difficultés importantes qu'implique la modélisation de l'endommagement. Au premier rang de ces difficultés, il y a la sensibilité importante de la dynamique de la ligne d'échouage au choix de la méthode de stabilisation lorsque le maillage est insuffisamment raffiné. La méthode Semi-Lagrangienne, récemment implémentée au sein d'*Elmer/Ice*, nécessite des développements supplémentaires pour permettre la parallélisation des calculs et a donc été laissée de côté au cours de notre étude. Cependant, sa nature particulière en fait une méthode prometteuse dans la mesure où elle semble autoriser l'usage de pas de temps et tailles de maille plus grands que ceux requis par les méthodes SUPG, Bubbles et DG. L'adaptation de la méthode Semi-Lagrangienne aux calculs parallèles est un thème sur lequel le *CSC* travaille actuellement.

Au-delà de l'aspect numérique, notre modèle d'endommagement possède quelques limitations dans sa formulation mathématique actuelle. D'abord, il repose sur un critère simple qui ne permet la création d'endommagement que pour des contraintes principales extensives. Une nouvelle formulation permettant une fermeture de l'enveloppe du critère d'endommagement serait sans doute plus réaliste. Plus important encore, nos travaux montrent l'importance de la modélisation des processus de cicatrisation et de réels efforts doivent être déployés dans cette direction. Il est en effet irréaliste d'avoir un niveau d'endommagement élevé au-delà d'une certaine profondeur puisque la pression

cryostatique devient telle que les fractures se referment naturellement par fluage de la glace ; la dynamique de la ligne d'échouage qui résulte de ces distributions irréalistes d'endommagement est probablement elle-même irréaliste. Une nuance doit néanmoins être apportée à l'affirmation selon laquelle l'endommagement doit être inexistant au-delà d'une certaine profondeur : la présence de crevasses basales sous les plateformes flottantes d'Antarctique a été mise en évidence par plusieurs auteurs, et la pression hydrostatique de l'eau de mer s'infiltrant à l'intérieur de celles-ci leur permet de pénétrer sur des hauteurs importantes au sein de la plateforme flottante, ce qui est susceptible de leur conférer un rôle mécanique important. Pour cette raison, un module permettant la prise en compte de ces crevasses basales a été développé au cours de cette thèse mais n'a pas été exploité à cause des difficultés numériques mises en évidence par la suite. Si l'on parvient à s'affranchir de ces difficultés (en développant la méthode Semi-Lagrangienne par exemple), il serait intéressant d'étudier l'effet que peut avoir l'intégration de ce module sur la dynamique de la ligne d'échouage.

Enfin, bien que l'adaptation de l'endommagement au cadre de la *SSA* s'avère nécessaire si l'on veut intégrer ce processus dans le cas d'applications grande échelle, nous savons que cette approximation implique des états de contrainte irréalistes dans certaines régions d'écoulement lent au sein desquelles les contraintes de cisaillement verticales ne sont pas négligeables. Ces états de contrainte irréalistes, combinés à notre critère d'endommagement qui ne s'intéresse qu'aux contraintes principales extensives, sont susceptibles de donner lieu à des zones de création d'endommagement (zones au sein desquelles le critère $\chi$ est positif) trop étendues. Une solution serait alors d'identifier les zones au sein desquelles l'approximation de la *SSA* est adaptée et de n'autoriser la création d'endommagement que dans ces zones.

### 7.2.2 Modélisation du frottement basal

Les résultats obtenus au cours de cette thèse suggèrent l'abandon de la loi de frottement de Weertman au profit d'une loi de frottement de type Schoof. Le dernier exercice d'intercomparaison de modèle MISMIP+ s'inscrit dans cette dynamique puisque, contrairement aux exercices précédents MISMIP et MISMIP3D qui imposaient l'utilisation d'une loi de Weertman, il encourage ses participants à utiliser une loi de frottement de Schoof ou Tsai.

La difficulté principale qu'induit l'utilisation de telles lois est la nécessité de connaître la distribution de pression effective, et donc de la pression de l'eau régnant au sein du réseau hydraulique basal. Un certain nombre de modèles d'hydrologie sous-glaciaire ont d'ores et déjà été développés afin de répondre à cette exigence. En outre, plusieurs travaux visant à coupler ces modèles à des modèles d'écoulement glaciaire ont été publiés au cours des dernières années et affichent des résultats encourageants. Cependant, du fait de l'inaccessibilité de l'interface glace/socle, les modèles d'hydrologie sous-glaciaire sont souvent développés sur des bases théoriques et font appel à un nombre

important de paramètres mal contraints. L'acquisition d'informations supplémentaires concernant la structure et l'évolution temporelle du réseau de drainage s'avère donc nécessaire. De nouvelles techniques de mesure innovantes, comme la cryo-sismologie, pourraient permettre d'atteindre cet objectif dans un futur relativement proche.

Annexe A

# Résolution des équations de la SSA par la MEF

Afin d'illustrer de manière plus concrète les concepts abordés dans la section 3.3, nous nous proposons de revenir sur les équations de la *SSA* présentées à la Section 3.2.2. Dans un soucis de clarté, nous considérons le problème simplifié d'écoulement d'un plateau glaciaire - ce qui permet de ne pas tenir compte du frottement basal - le long d'une ligne de flux prise selon l'axe $x$. Dans ce cas, le système (3.26) se résume à :

$$4\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \tag{A.1}$$

Ce système est complété par : (1) la condition aux limites de Dirichlet $u(x_0) = c$, où $c$ est une constante positive et $x_0$ désigne la limite amont du domaine $\Gamma$, et (2) la condition aux limites de Neumann (3.28) au front de vêlage $x_{cf}$, qui se résume à :

$$4\bar{\eta}\frac{\partial u(x_{cf})}{\partial x} = \frac{\rho_i}{\rho_w}(\rho_w - \rho_i)\frac{gH^2(x_{cf})}{2} \tag{A.2}$$

### Formulation faible

La formulation faible du problème (A.1) s'écrit :

$$\int_\Gamma 4\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Phi d\Gamma = \int_\Gamma \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x}\Phi d\Gamma \quad \forall\Phi \tag{A.3}$$

Une intégration par partie du membre de gauche nous donne une nouvelle formulation faible :

$$\int_{x_0}^{x_{cf}} 4\bar{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx = \left[4\bar{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}\Phi\right]_{x_0}^{x_{cf}} - \int_{x_0}^{x_{cf}} \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x}\Phi dx \quad \forall\Phi \tag{A.4}$$

### Discrétisation

La discrétisation est réalisée selon la méthode de Galerkin : nous nous affranchissons de la condition "$\forall\Phi$" de l'équation (A.3) et nous nous restreignons à un nombre fini de fonctions tests $\Phi_i$ cinématiquement admissibles, c'est à dire compatibles avec la condition aux limites de Dirichlet. Les fonctions tests sont prises égales aux fonctions de forme permettant d'interpoler la solution sur l'ensemble du domaine à partir des solutions aux nœuds :

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \Phi_j \tag{A.5}$$

Dans notre cas, chaque nœud ne possédant que $u_j$ pour unique *ddl*, $n$ est égal au nombre total de nœuds. L'équation (A.4) peut alors se discrétiser sous la forme d'un système de $n$ équations algébriques, chacune des équations se formulant :

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \int_{x_0}^{x_{cf}} 4\bar{\eta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx = \left[ 4\bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \Phi_i \right]_{x_0}^{x_{cf}} - \int_{x_0}^{x_{cf}} \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \Phi_i dx \tag{A.6}$$

Le premier terme du membre de droite fait clairement apparaître les différentes conditions aux limites imposées en $x_0$ et $x_{cf}$.

**Assemblage**

L'étape précédente permet donc d'aboutir à un système de $n$ équations - une pour chaque $\Phi_i$ - à $n$ inconnues, pouvant s'écrire sous la forme matricielle (3.34). Les coefficients de la matrice de rigidité $\mathbf{K}^g$ sont alors donnés par :

$$k_{ij}^g = \int_{x_0}^{x_{cf}} 4\bar{\eta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx \tag{A.7}$$

Quant aux coefficients du vecteur des efforts $\mathbf{f}^g$, ils sont donnés par :

$$f_i^g = \left[ 4\bar{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} \Phi_i \right]_{x_0}^{x_{cf}} - \int_{x_0}^{x_{cf}} \rho_i g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \Phi_i dx \tag{A.8}$$

en notant bien que le premier terme du membre de droite n'intervient que pour les nœuds aux limites du domaine où il est déterminé par les conditions aux limites. Les diverses intégrales intervenant dans les égalités (A.7) et (A.8) sont alors calculées via la méthode de quadrature de Gauss évoquée dans la Section 3.3.1.5.

Finalement, il ne reste plus qu'à linéariser et résoudre ce système matriciel en se conformant aux procédures décrites dans les Sections 3.3.1.6 et 3.3.1.7 afin d'obtenir les vitesses nodales $u_j$ ; la solution $u$ valable sur le domaine complet $\Gamma$ se déduit des vitesses nodales par une simple interpolation réalisée à partir des fonctions tests $\Phi_j$.

# Liste des figures


1.1 Elévation du niveau des mers pour la période 1880-2010 . . . . . 2
1.2 Carte des vitesses de surface de la calotte antarctique . . . . . 5
1.3 Variation de masse des trois régions principales de la calotte antarctique cumulée sur la période 1992-2011 . . . . . 7
1.4 Retrait de la ligne d'échouage du glacier Pine Island sur la période 1992-2011 . . . . 9

2.1 Bandes de Forbes . . . . . 17
2.2 Modes de fluage de la glace . . . . . 20
2.3 Inversion de l'endommagement sur le Larsen C . . . . . 26
2.4 Dispositif de mesure des vitesses basales . . . . . 32
2.5 Dispositif de mesure de la résistance au cisaillement du till . . . . . 33
2.6 Illustration de la théorie de Weertman (1957) . . . . . 34
2.7 Réseaux de cavités interconnectées par des orifices . . . . . 35
2.8 Loi de frottement proposée par Gagliardini *et al.* (2007) . . . . . 45
2.9 Comparaison des quatre lois de frottement principales . . . . . 48
2.10 Points remarquables de la "zone d'échouage" . . . . . 51
2.11 Illustration du couplage entre les deux régimes d'écoulement . . . . . 53

3.1 Représentation générale du domaine modélisé . . . . . 60
3.2 Exemple de maillage pour le bassin d'Amundsen . . . . . 75

4.1 Enveloppe d'endommagement dans l'espace des contraintes principales . . . . . 86
4.2 Solutions numériques de l'équation d'advection stationnaire monodimensionnelle pour différents nombres de Péclet . . . . . 92
4.3 Maillage du domaine rectangulaire et distribution gaussienne initiale de la quantité scalaire $D$ . . . . . 95
4.4 Mise en évidence de la diffusion numérique . . . . . 97
4.5 Influence relative des discrétisations temporelles et spatiales sur la diffusion numérique pour les quatre méthodes de stabilisation . . . . . 98
4.6 Distribution du bilan de masse de surface pour le cas test *"Ice Shelf Ramp"* . . . . . 102
4.7 Distribution du critère d'endommagement et de l'endommagement à la fin de la simulation *"Ice Shelf Ramp"* . . . . . 103
4.8 Profil vertical d'endommagement pour différentes résolutions verticales du maillage . 105

4.9 Profil vertical d'endommagement pour différents pas de temps . . . . . 106
4.10 Géométrie stationnaire avant introduction de l'endommagement . . . . . 110
4.11 Illustration du maillage employé pour l'expérience d'advection de l'endommagement 112
4.12 Réponse dynamique de la ligne d'échouage suite à l'introduction de l'endommagement pour les différentes méthodes de stabilisation . . . . . 113
4.13 Distribution de la viscosité moyennée verticalement à l'issue des 10 ka de simulation pour les 12 simulations réalisées . . . . . 115

5.1 Représentation des différents traitements numériques possibles du frottement à la ligne d'échouage . . . . . 126
5.2 Illustration du maillage employé pour l'expérience 3 de MISMIP . . . . . 129
5.3 Expérience 3 de MISMIP : avancée et retrait de la ligne d'échouage . . . . . 130
5.4 Expérience 3 de MISMIP : position stationnaire de la ligne d'échouage . . . . . 131
5.5 Expériences MISMIP3D P75S et P75R : réponse dynamique de la ligne d'échouage . 135
5.6 Expériences MISMIP3D P75S et P75R : évaluation de la sensibilité numérique . . . 136
5.7 Géométrie stationnaire avant perturbation . . . . . 143
5.8 Réponse dynamique de la ligne d'échouage à la perturbation pour différentes lois de frottement . . . . . 148
5.9 Taux de variation d'épaisseur pour les différentes lois de frottement . . . . . 151
5.10 Coefficients de frottement, vitesses basales, contraintes de cisaillement basales et géométries obtenus avec les différentes lois de frottement . . . . . 152
5.11 Evolution relative des VAF à un horizon de 100 ans pour les différentes lois de frottement . . . . . 156
5.12 Bilan de masse de surface intégré et flux de Schoof (2007a,b) à la ligne d'échouage pour différents $C_W^{t_i}$ . . . . . 159

6.1 Bassin d'Amundsen et ses plateformes flottantes . . . . . 170
6.2 Déroulement des expériences pour une inversion donnée . . . . . 173
6.3 Observations des vitesses d'écoulement en surface . . . . . 175
6.4 Courbes en L pour l'inversion $I_{SV}$ . . . . . 181
6.5 Adaptation de la méthode de la courbe en L pour l'inversion $I_{R_{\gamma,1}}$ . . . . . 182
6.6 Comparaison des trois états inversés . . . . . 184
6.7 Evolution de l'épaisseur de glace au cours de la relaxation . . . . . 187
6.8 Ecarts relatifs entre les champs de $\mathbf{u}_b$ produits par les lois de Weertman non linéaire et linéaire pour les différents états inversés . . . . . 188

6.9 Pourcentage de nœuds posés où la borne d'Iken n'est pas satisfaite en fonction de $C_{max}$ . . . . . 190
6.10 Localisation des nœuds où $C_S$ doit être interpolé pour l'état $I_{R\gamma,1}$ associé au paramètre $C_{max} = 0.4$ . . . . . 191
6.11 Ecarts relatifs entre les champs de $\boldsymbol{\tau}_b$ (respectivement $\mathbf{u}_b$) produits par les lois de Weertman linéaire et ceux produits par la loi de Schoof (avec $C_{max} = 0.4$) pour les différents états inversés . . . . . 192
6.12 Anomalie sur le bilan de masse de surface pour l'expérience EXP_ASMB . . . . . 196
6.13 Evolution relative de l'aire de glace posée pour EXP_CONTROL . . . . . 197
6.14 Evolution de l'aire de glace posée au cours de EXP_ASMB et EXP_ABMB relativement à EXP_CONTROL pour les différents états initiaux . . . . . 198
6.15 Position de la ligne d'échouage obtenue après 50 a et 100 a de simulation lors de l'expérience EXP_ABMB pour les différentes lois de frottement et états inversés . . . 200
6.16 Evolution des VAF au cours de EXP_ABMB relativement à EXP_CONTROL pour les différents états initiaux . . . . . 201

# Références bibliographiques


Adhalgeirsdóttir, G., Aschwanden, A., Khroulev, C., Boberg, F., Mottram, R., Lucas-Picher, P., and Christensen, J. (2014). Role of model initialization for projections of 21st-century Greenland ice sheet mass loss. *Journal of Glaciology*, **60**(222), 782–794.

Agassiz, L. and Bettannier, J. (1840). *Etudes sur les glaciers*. Jent et Gassmann.

Ahlkrona, J., Lötstedt, P., Kirchner, N., and Zwinger, T. (2016). Dynamically coupling the non-linear Stokes equations with the Shallow Ice Approximation in glaciology : Description and first applications of the ISCAL method. *Journal of Computational Physics*, **308**, 1–19.

Albrecht, T. and Levermann, A. (2012). Fracture field for large-scale ice dynamics. *Journal of Glaciology*, **58**(207), 165–176.

Albrecht, T. and Levermann, A. (2014). Fracture-induced softening for large-scale ice dynamics. *The Cryosphere*, **8**(2), 587–605.

Alley, R. B., Blankenship, D. D., Bentley, C. R., and Rooney, S. (1986). Deformation of till beneath ice stream B, West Antarctica. *Nature*, **322**(6074), 57–59.

Alley, R. B., Horgan, H. J., Joughin, I., Cuffey, K. M., Dupont, T. K., Parizek, B. R., Anandakrishnan, S., and Bassis, J. (2008). A simple law for ice-shelf calving. *Science*, **322**(5906), 1344–1344.

Allison, I., Bindoff, N. L., Bindschadler, R. A., Cox, P., de Noblet, N., England, M., Francis, J., Gruber, N., Haywood, A., Karoly, D., *et al.* (2011). *The Copenhagen diagnosis : updating the world on the latest climate science*. Elsevier.

Arnold, D. N., Brezzi, F., and Fortin, M. (1984). A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, **21**(4), 337–344.

Arthern, R. J. and Gudmundsson, G. H. (2010). Initialization of ice-sheet forecasts viewed as an inverse Robin problem. *Journal of Glaciology*, **56**(197), 527–533.

Asay-Davis, X. S., Cornford, S. L., Galton-Fenzi, B. K., Gladstone, R. M., Gudmundsson, G. H., Holland, D. M., Holland, P. R., and Martin, D. F. (2016). Experimental design for three interrelated marine ice sheet and ocean model intercomparison projects : MISMIP v. 3 (MISMIP+), ISOMIP v. 2 (ISOMIP+) and MISOMIP v. 1 (MISOMIP1). *Geoscientific Model Development*, **9**(7), 2471.

Azuma, N., Wang, Y., Mori, K., Narita, H., Hondoh, T., Shoji, H., and Watanabe, O. (1999). Textures and fabrics in the Dome F (Antarctica) ice core. *Annals of Glaciology*, **29**(1), 163–168.

Baiocchi, C., Brezzi, F., and Franca, L. P. (1993). Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods (Ga. LS). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **105**(1), 125–141.

Bamber, J., Griggs, J., Hurkmans, R., Dowdeswell, J., Gogineni, S., Howat, I., Mouginot, J., Paden, J., Palmer, S., Rignot, E., *et al.* (2013). A new bed elevation dataset for Greenland. *The Cryosphere*, **7**(2), 499–510.

Bamber, J. L., Riva, R. E., Vermeersen, B. L., and LeBrocq, A. M. (2009). Reassessment of the potential sea-level rise from a collapse of the West Antarctic Ice Sheet. *science*, **324**(5929), 901–903.

Barnes, P., Tabor, D., and Walker, J. (1971). The friction and creep of polycrystalline ice. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 324, pages 127–155. The Royal Society.

Bartholomew, I., Nienow, P., Mair, D., Hubbard, A., King, M. A., and Sole, A. (2010). Seasonal evolution of subglacial drainage and acceleration in a Greenland outlet glacier. *Nature Geoscience*, **3**(6), 408–411.

Bartholomew, I., Nienow, P., Sole, A., Mair, D., Cowton, T., King, M., and Palmer, S. (2011). Seasonal variations in Greenland Ice Sheet motion : Inland extent and behaviour at higher elevations. *Earth and Planetary Science Letters*, **307**(3), 271–278.

Bassis, J. N. (2011). The statistical physics of iceberg calving and the emergence of universal calving laws. *Journal of Glaciology*, **57**(201), 3–16.

Bell, R. E., Studinger, M., Tikku, A. A., Clarke, G. K., Gutner, M. M., and Meertens, C. (2002). Origin and fate of Lake Vostok water frozen to the base of the East Antarctic ice sheet. *Nature*, **416**(6878), 307–310.

Benn, D. I., Warren, C. R., and Mottram, R. H. (2007). Calving processes and the dynamics of calving glaciers. *Earth-Science Reviews*, **82**(3), 143–179.

Bentley, C. R. (1997). Rapid Sea-Level Rise Soon from West Antarctic Ice-Sheet Collapse ? *Science*, **275**(5303), 1077–1078.

Bindschadler, R. and Scambos, T. (1991). Satellite-image-derived velocity field of an Antarctic ice stream. *Science*, **252**(5003), 242–246.

Bindschadler, R., Choi, H., Wichlacz, A., Bingham, R., Bohlander, J., Brunt, K., Corr, H., Drews, R., Fricker, H., Hall, M., *et al.* (2011). Getting around Antarctica : new high-resolution mappings of the grounded and freely-floating boundaries of the Antarctic ice sheet created for the International Polar Year. *The Cryosphere.*

Bindschadler, R. A. (2002). History of lower Pine Island Glacier, West Antarctica, from Landsat imagery. *Journal of Glaciology*, **48**(163), 536–544.

Björnsson, H. (1988). *Hydrology of ice caps in volcanic regions.* Societas Scientarium Islandica, University of Iceland.

Blake, E., Clarke, G. K., and Gérin, M. C. (1992). Tools for examining subglacial bed deformation. *Journal of Glaciology*, **38**(130), 388–396.

Blake, W., Fischer, U. H., Bentley, C., and Clarke, G. K. (1994). Instruments and Methods : Direct measurement of sliding at the glacier bed. *Journal of Glaciology*, **40**(136), 595–599.

Blankenship, D. D., Bentley, C. R., Rooney, S., and Alley, R. B. (1986). Seismic measurements reveal a saturated porous layer beneath an active Antarctic ice stream. *Nature*, **322**(6074), 54–57.

Blatter, H. (1995). Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *Journal of Glaciology*, **41**(138), 333–344.

Bondzio, J. H., Morlighem, M., Seroussi, H., Kleiner, T., Rückamp, M., Mouginot, J., Moon, T., Larour, E. Y., and Humbert, A. (2017). The mechanisms behind Jakobshavn Isbræ´ s acceleration and mass loss : a 3D thermomechanical model study. *Geophysical Research Letters.*

Borstad, C. and McClung, D. (2011). Numerical modeling of tensile fracture initiation and propagation in snow slabs using nonlocal damage mechanics. *Cold Regions Science and Technology*, **69**(2), 145–155.

Borstad, C., Khazendar, A., Larour, E., Morlighem, M., Rignot, E., Schodlok, M., and Seroussi, H. (2012). A damage mechanics assessment of the Larsen B ice shelf prior to collapse : Toward a physically-based calving law. *Geophysical Research Letters*, **39**(18).

Borstad, C., Rignot, E., Mouginot, J., and Schodlok, M. (2013). Creep deformation and buttressing capacity of damaged ice shelves : theory and application to Larsen C ice shelf. *The Cryosphere*, **7**(6).

Borstad, C., Khazendar, A., Scheuchl, B., Morlighem, M., Larour, E., and Rignot, E. (2016). A constitutive framework for predicting weakening and reduced buttressing of ice shelves based

on observations of the progressive deterioration of the remnant Larsen B ice shelf. *Geophysical Research Letters*.

Bougamont, M., Christoffersen, P., A L, H., Fitzpatrick, A., Doyle, S., and Carter, S. (2014). Sensitive response of the Greenland Ice Sheet to surface melt drainage over a soft bed. *Nature communications*, **5**, 5052.

Boulton, G. and Hindmarsh, R. (1987). Sediment deformation beneath glaciers : rheology and geological consequences. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **92**(B9), 9059–9082.

Boulton, G. and Jones, A. (1979). Stability of temperate ice caps and ice sheets resting on beds of deformable sediment. *Journal of Glaciology*, **24**(90), 29–43.

Boulton, G. and Vivian, R. (1973). Underneath the glaciers. *Geogr. Mag*, **45**(4), 311–316.

Box, J. E. and Ski, K. (2007). Remote sounding of Greenland supraglacial melt lakes : implications for subglacial hydraulics. *Journal of glaciology*, **53**(181), 257–265.

Brezzi, F., Bristeau, M.-O., Franca, L. P., Mallet, M., and Rogé, G. (1992). A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **96**(1), 117–129.

Brezzi, F., Marini, L. D., and Süli, E. (2004). Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Mathematical models and methods in applied sciences*, **14**(12), 1893–1903.

Bromwich, D. H., Nicolas, J. P., and Monaghan, A. J. (2011). An assessment of precipitation changes over Antarctica and the Southern Ocean since 1989 in contemporary global reanalyses. *Journal of Climate*, **24**(16), 4189–4209.

Brondex, J., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., and Durand, G. (2017). Sensitivity of grounding line dynamics to the choice of the friction law. *Journal of Glaciology*, **63**(241), 854–866.

Brown, C. S., Meier, M. F., Post, A., *et al.* (1982). Calving speed of Alaska tidewater glaciers, with application to Columbia Glacier.

Budd, W., Keage, P., and Blundy, N. (1979). Empirical studies of ice sliding. *Journal of glaciology*, **23**(89), 157–170.

Budd, W., Jenssen, D., and Smith, I. (1984). A three-dimensional time-dependent model of the West Antarctic ice sheet. *Annals of Glaciology*, **5**, 29–36.

Bueler, E. and Brown, J. (2009). Shallow shelf approximation as a sliding law in a thermomechanically coupled ice sheet model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **114**(F3).

Campbell, W. J. and Rasmussen, L. A. (1970). A heuristic numerical model for three-dimensional time-dependent glacier flow. *IASH Publication*, **86**, 177–190.

Carter, S. and Fricker, H. (2012). The supply of subglacial meltwater to the grounding line of the Siple Coast, West Antarctica. *Annals of Glaciology*, **53**(60), 267–280.

Chadbourne, B., Cole, R., Tootill, S., and Walford, M. (1975). The movement of melting ice over rough surfaces. *Journal of Glaciology*, **14**(71), 287–292.

Chugunov, V. A. and Wilchinsky, A. V. (1996). Modelling of a marine glacier and ice-sheet-ice-shelf transition zone based on asymptotic analysis. *Annals of Glaciology*, **23**, 59–67.

Church, J. A. and White, N. J. (2011). Sea-level rise from the late 19th to the early 21st century. *Surveys in Geophysics*, **32**(4-5), 585–602.

Church, J. A., Clark, P. U., Cazenave, A., Gregory, J. M., Jevrejeva, S., Levermann, A., Merrifield, M. A., Milne, G. A., Nerem, R. S., Nunn, P. D., *et al.* (2013). Sea level change. Technical report, PM Cambridge University Press.

Copland, L., Harbor, J., Minner, M., and Sharp, M. (1997). The use of borehole inclinometry in determining basal sliding and internal deformation at Haut Glacier d´ Arolla, Switzerland. *Annals of Glaciology*, **24**, 331–337.

Cornford, S., Martin, D., Lee, V., Payne, A., and Ng, E. (2016). Adaptive mesh refinement versus subgrid friction interpolation in simulations of Antarctic ice dynamics. *Annals of Glaciology*, **57**(73), 1–9.

Cornford, S. L., Martin, D. F., Graves, D. T., Ranken, D. F., Le Brocq, A. M., Gladstone, R. M., Payne, A. J., Ng, E. G., and Lipscomb, W. H. (2013). Adaptive mesh, finite volume modeling of marine ice sheets. *Journal of Computational Physics*, **232**(1), 529–549.

Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische annalen*, **100**(1), 32–74.

Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, **11**(2), 215–234.

Cuffey, K., Conway, H., Hallet, B., Gades, A., and Raymond, C. (1999). Interfacial water in polar glaciers and glacier sliding at- 17 C. *Geophysical Research Letters*, **26**(6), 751–754.

Cuffey, K. M. and Paterson, W. S. B. (2010). *The physics of glaciers*. Academic Press.

Das, S. B., Joughin, I., Behn, M. D., Howat, I. M., King, M. A., Lizarralde, D., and Bhatia, M. P. (2008). Fracture propagation to the base of the Greenland Ice Sheet during supraglacial lake drainage. *Science*, **320**(5877), 778–781.

De Fleurian, B. (2010). *Développement d'un modèle d'hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers.* Ph.D. thesis, Université de Grenoble.

De Fleurian, B., Gagliardini, O., Zwinger, T., Durand, G., Meur, E. L., Mair, D., and Råback, P. (2014). A double continuum hydrological model for glacier applications. *The Cryosphere*, **8**(1), 137–153.

DeConto, R. M. and Pollard, D. (2016). Contribution of Antarctica to past and future sea-level rise. *Nature*, **531**(7596), 591–597.

Doake, C. and Wolff, E. (1985). Flow law for ice in polar ice sheets. *Nature*, **314**(6008), 255–257.

Donea, J. (1984). Recent advances in computational methods for steady and transient transport problems. *Nuclear Engineering and Design*, **80**(2), 141–162.

Doyle, S. H., Hubbard, A., Fitzpatrick, A. A., As, D., Mikkelsen, A. B., Pettersson, R., and Hubbard, B. (2014). Persistent flow acceleration within the interior of the Greenland ice sheet. *Geophysical Research Letters*, **41**(3), 899–905.

Drapier, S. and Fortunier, R. (2015). Méthodes numériques d'approximation et de résolution en mécanique. *École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne.*

Drouet, A.-S., Docquier, D., Durand, G., Hindmarsh, R., Pattyn, F., Gagliardini, O., Zwinger, T., *et al.* (2013). Grounding line transient response in marine ice sheet models. *The Cryosphere*, **7**, 395–406.

Duddu, R. and Waisman, H. (2012). A temperature dependent creep damage model for polycrystalline ice. *Mechanics of Materials*, **46**, 23–41.

Duddu, R. and Waisman, H. (2013). A nonlocal continuum damage mechanics approach to simulation of creep fracture in ice sheets. *Computational Mechanics*, pages 1–14.

Dupont, T. and Alley, R. (2005). Assessment of the importance of ice-shelf buttressing to ice-sheet flow. *Geophysical Research Letters*, **32**(4).

Durand, G. and Pattyn, F. (2015). Reducing uncertainties in projections of Antarctic ice mass loss. *The Cryosphere*, **9**(6), 2043–2055.

Durand, G., Gagliardini, O., Zwinger, T., Le Meur, E., and Hindmarsh, R. C. (2009a). Full Stokes modeling of marine ice sheets : influence of the grid size. *Annals of Glaciology*, **50**(52), 109–114.

Durand, G., Gagliardini, O., De Fleurian, B., Zwinger, T., and Le Meur, E. (2009b). Marine ice sheet dynamics : Hysteresis and neutral equilibrium. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface (2003–2012)*, **114**(F3).

Duval, P. (1984). Mécanismes de la déformation plastique de la glace polycristalline. *La Houille Blanche*, (6-7), 499–504.

Engelhardt, H. and Kamb, B. (1998). Basal sliding of ice stream B, West Antarctica. *Journal of Glaciology*, **44**(147), 223–230.

Eyring, V., Bony, S., Meehl, G. A., Senior, C. A., Stevens, B., Stouffer, R. J., and Taylor, K. E. (2016). Overview of the Coupled Model Intercomparison Project Phase 6 (CMIP6) experimental design and organization. *Geoscientific Model Development*, **9**(5), 1937–1958.

Favier, L. and Pattyn, F. (2015). Antarctic ice-rise formation, evolution and stability. *Geophysical Research Letters*.

Favier, L., Gagliardini, O., Durand, G., Zwinger, T., *et al.* (2012). A three-dimensional full Stokes model of the grounding line dynamics : effect of a pinning point beneath the ice shelf. *The Cryosphere*, **6**, 101–112.

Favier, L., Durand, G., Cornford, S., Gudmundsson, G., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., Zwinger, T., Payne, A., and Le Brocq, A. (2014). Retreat of Pine Island Glacier controlled by marine ice-sheet instability. *Nature Climate Change*, **4**(2), 117–121.

Favier, L., Pattyn, F., Berger, S., and Drews, R. (2016). Dynamic influence of pinning points on marine ice-sheet stability : a numerical study in Dronning Maud Land, East Antarctica. *The Cryosphere*, **10**(6), 2623.

Feldmann, J., Albrecht, T., Khroulev, C., Pattyn, F., and Levermann, A. (2014). Resolution-dependent performance of grounding line motion in a shallow model compared with a full-Stokes model according to the MISMIP3d intercomparison. *Journal of Glaciology*, **60**(220), 353–360.

Fischer, U. and Clarke, G. K. (1994). Ploughing of subglacial sediment. *Journal of Glaciology*, **40**(134), 97–106.

Flament, T. and Rémy, F. (2012). Dynamic thinning of Antarctic glaciers from along-track repeat radar altimetry. *Journal of Glaciology*, **58**(211), 830–840.

Flament, T., Berthier, E., and Rémy, F. (2014). Cascading water underneath Wilkes Land, East Antarctic ice sheet, observed using altimetry and digital elevation models. *Cryosphere*, **8**(2), 673–687.

Flato, G., Marotzke, J., Abiodun, B., Braconnot, P., Chou, S. C., Collins, W. J., Cox, P., Driouech, F., Emori, S., Eyring, V., *et al.* (2013). Evaluation of Climate Models. In : Climate Change 2013 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. *Climate Change 2013*, **5**, 741–866.

Forbes, J. D. (1845). *Travels through the Alps of Savoy and other parts of the Pennine chain : with observations on the phenomena of glaciers*. A. and C. Black.

Fountain, A. G. (1994). Borehole water-level variations and implications for the subglacial hydraulics of South Cascade Glacier, Washington State, USA. *Journal of Glaciology*, **40**(135), 293–304.

Fountain, A. G. and Walder, J. S. (1998). Water flow through temperate glaciers. *Reviews of Geophysics*, **36**(3), 299–328.

Fowler, A. (1979). A mathematical approach to the theory of glacier sliding. *Journal of Glaciology*, **23**(89), 131–141.

Fowler, A. (1981). A theoretical treatment of the sliding of glaciers in the absence of cavitation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **298**(1445), 637–681.

Fowler, A. (1986). A sliding law for glaciers of constant viscosity in the presence of subglacial cavitation. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 407, pages 147–170. The Royal Society.

Fowler, A. (1987). Sliding with cavity formation. *Journal of Glaciology*, **33**(115), 255–267.

Fretwell, P., Pritchard, H. D., Vaughan, D. G., Bamber, J., Barrand, N., Bell, R., Bianchi, C., Bingham, R., Blankenship, D., Casassa, G., *et al.* (2013). Bedmap2 : improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica. *The Cryosphere*, **7**(1).

Frezzotti, M., Scarchilli, C., Becagli, S., Proposito, M., and Urbini, S. (2013). A synthesis of the Antarctic surface mass balance during the last 800 yr. *The Cryosphere*, **7**(1), 303.

Fricker, H. A. and Padman, L. (2006). Ice shelf grounding zone structure from ICESat laser altimetry. *Geophysical Research Letters*, **33**(15).

Fricker, H. A. and Scambos, T. (2009). Connected subglacial lake activity on lower Mercer and Whillans ice streams, West Antarctica, 2003–2008. *Journal of Glaciology*, **55**(190), 303–315.

Fricker, H. A., Scambos, T., Bindschadler, R., and Padman, L. (2007). An active subglacial water system in West Antarctica mapped from space. *Science*, **315**(5818), 1544–1548.

Fricker, H. A., Coleman, R., Padman, L., Scambos, T. A., Bohlander, J., and Brunt, K. M. (2009). Mapping the grounding zone of the Amery Ice Shelf, East Antarctica using InSAR, MODIS and ICESat. *Antarctic Science*, **21**(05), 515–532.

Fürst, J. J., Durand, G., Gillet-Chaulet, F., Tavard, L., Rankl, M., Braun, M., and Gagliardini, O. (2016). The safety band of Antarctic ice shelves. *Nature Climate Change*, **6**(5), 479–482.

Gagliardini, O. and Zwinger, T. (2008). The ISMIP-HOM benchmark experiments performed using the Finite-Element code Elmer. *The Cryosphere*, **2**(1), 67–76.

Gagliardini, O., Cohen, D., Råback, P., and Zwinger, T. (2007). Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface (2003–2012)*, **112**(F2).

Gagliardini, O., Durand, G., Zwinger, T., Hindmarsh, R., and Le Meur, E. (2010). Coupling of ice-shelf melting and buttressing is a key process in ice-sheets dynamics. *Geophysical Research Letters*, **37**(14).

Gagliardini, O., Zwinger, T., Gillet-Chaulet, F., Durand, G., Favier, L., De Fleurian, B., Greve, R., Malinen, M., Martín, C., Råback, P., *et al.* (2013). Capabilities and performance of Elmer/Ice, a new-generation ice sheet model. *Geoscientific Model Development*, **6**(4), 1299–1318.

Gagliardini, O., Brondex, J., Gillet-Chaulet, F., Tavard, L., Peyaud, V., and Durand, G. (2016). Brief communication : Impact of mesh resolution for MISMIP and MISMIP3d experiments using Elmer/Ice. *The Cryosphere*, **10**(1), 307–312.

Garrigues, J. (2002). La méthode des éléments finis. *École Supérieure de Mécanique de Marseille*.

Gilbert, J. C. and Lemaréchal, C. (1989). Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical programming*, **45**(1), 407–435.

Gillet-Chaulet, F. and Durand, G. (2010). Glaciology : Ice-sheet advance in Antarctica. *Nature*, **467**(7317), 794–795.

Gillet-Chaulet, F., Hindmarsh, R. C., Corr, H. F., King, E. C., and Jenkins, A. (2011). In-situquantification of ice rheology and direct measurement of the Raymond Effect at Summit, Greenland using a phase-sensitive radar. *Geophysical Research Letters*, **38**(24).

Gillet-Chaulet, F., Gagliardini, O., Seddik, H., Nodet, M., Durand, G., Ritz, C., Zwinger, T., Greve, R., and Vaughan, D. G. (2012). Greenland ice sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model. *The Cryosphere*, **6**(6), 1561–1576.

Gillet-Chaulet, F., Durand, G., Gagliardini, O., Mosbeux, C., Mouginot, J., Rémy, F., and Ritz, C. (2016). Assimilation of surface velocities acquired between 1996 and 2010 to constrain the form of the basal friction law under Pine Island Glacier. *Geophysical Research Letters*, **43**(19).

Gilpin, R. (1980). Wire regelation at low temperatures. *Journal of Colloid and Interface Science*, **77**(2), 435–448.

Gimbert, F., Tsai, V. C., Amundson, J. M., Bartholomaus, T. C., and Walter, J. I. (2016). Subseasonal changes observed in subglacial channel pressure, size, and sediment transport. *Geophysical Research Letters*, **43**(8), 3786–3794.

Gladstone, R., Lee, V., Vieli, A., and Payne, A. (2010). Grounding line migration in an adaptive mesh ice sheet model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **115**(F4).

Gladstone, R., Schafer, M., Zwinger, T., Gong, Y., Strozzi, T., Mottram, R., Boberg, F., and Moore, J. C. (2014). Importance of basal processes in simulations of a surging Svalbard outlet glacier. *The Cryosphere*, **8**(4), 1393–1405.

Gladstone, R. M., Warner, R. C., Galton-Fenzi, B. K., Gagliardini, O., Zwinger, T., and Greve, R. (2017). Marine ice sheet model performance depends on basal sliding physics and sub-shelf melting. *The Cryosphere*, **11**(11), 319–329.

Glasser, N., Kulessa, B., Luckman, A., Jansen, D., King, E. C., Sammonds, P., Scambos, T., and Jezek, K. (2009). Surface structure and stability of the Larsen C ice shelf, Antarctic Peninsula. *Journal of Glaciology*, **55**(191), 400–410.

Glen, J. W. (1955). The creep of polycrystalline ice. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 228, pages 519–538. The Royal Society.

Goldberg, D., Holland, D., and Schoof, C. (2009). Grounding line movement and ice shelf buttressing in marine ice sheets. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **114**(F4).

Goldstein, R. M., Engelhardt, H., Kamb, B., and Frolich, R. M. (1993). Satellite radar interferometry for monitoring ice sheet motion : application to an Antarctic ice stream. *Science*, **262**, 1525–1525.

Gong, Y., Zwinger, T., Cornford, S., Gladstone, R., Schäfer, M., and Moore, J. C. (2016). Importance of basal boundary conditions in transient simulations : case study of a surging marine-terminating glacier on Austfonna, Svalbard. *Journal of Glaciology*, pages 1–12.

Gray, L., Short, N., Bindschadler, R., Joughin, I., Padman, L., Vornberger, P., and Khananian, A. (2002). RADARSAT interferometry for Antarctic grounding-zone mapping. *Annals of Glaciology*, **34**(1), 269–276.

Gray, L., Joughin, I., Tulaczyk, S., Spikes, V. B., Bindschadler, R., and Jezek, K. (2005). Evidence for subglacial water transport in the West Antarctic Ice Sheet through three-dimensional satellite radar interferometry. *Geophysical Research Letters*, **32**(3).

Greve, R. and Blatter, H. (2009). *Dynamics of ice sheets and glaciers*. Springer Science & Business Media.

Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, **221**, 163–198.

Griggs, J. and Bamber, J. (2009). A new 1 km digital elevation model of Antarctica derived from combined radar and laser data-Part 2 : Validation and error estimates. *The Cryosphere*, **3**(1), 113.

Gudmundsson, G. (2013). Ice-shelf buttressing and the stability of marine ice sheets. *The Cryosphere*, **7**(2), 647.

Gudmundsson, G., Krug, J., Durand, G., Favier, L., and Gagliardini, O. (2012). The stability of grounding lines on retrograde slopes. *The Cryosphere*, **6**, 1497–1505.

Gudmundsson, G. H. (1997). Basal-flow characteristics of a non-linear flow sliding frictionless over strongly undulating bedrock. *Journal of Glaciology*, **43**(143), 80–89.

Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, pages 49–52.

Hallegatte, S., Green, C., Nicholls, R. J., and Corfee-Morlot, J. (2013). Future flood losses in major coastal cities. *Nature climate change*, **3**(9), 802–806.

Hallet, B. (1979). Subglacial regelation water film. *Journal of Glaciology*, **23**(89), 321–334.

Hallet, B. and Anderson, R. (1980). Detailed glacial geomorphology of a proglacial bedrock area at Castleguard Glacier, Alberta, Canada. *Z. Gletscherkd. Glazialgeol*, **16**(2), 171–184.

Hansen, P. C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM review*, **34**(4), 561–580.

Hansen, P. C. and O'Leary, D. P. (1993). The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14**(6), 1487–1503.

Harper, J. T., Bradford, J. H., Humphrey, N. F., and Meierbachtol, T. W. (2010). Vertical extension of the subglacial drainage system into basal crevasses. *Nature*, **467**(7315), 579.

Hartmann, D. L., Tank, A. M. K., Rusticucci, M., Alexander, L. V., Brönnimann, S., Charabi, Y. A. R., Dentener, F. J., Dlugokencky, E. J., Easterling, D. R., Kaplan, A., *et al.* (2013). Observations : atmosphere and surface. In *Climate Change 2013 the Physical Science Basis : Working Group I Contribution to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press.

Hewitt, I. (2013). Seasonal changes in ice sheet motion due to melt water lubrication. *Earth and Planetary Science Letters*, **371**, 16–25.

Hewitt, I., Schoof, C., and Werder, M. (2012). Flotation and free surface flow in a model for subglacial drainage. Part 2. Channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **702**, 157–187.

Hindmarsh, R. (1996). Stability of ice rises and uncoupled marine ice sheets. *Annals of Glaciology*, **23**(1), 105–115.

Hindmarsh, R. C. (1993). Qualitative dynamics of marine ice sheets. In *Ice in the climate system*, pages 67–99. Springer.

Holland, P. R., Corr, H. F., Vaughan, D. G., Jenkins, A., and Skvarca, P. (2009). Marine ice in Larsen ice shelf. *Geophysical Research Letters*, **36**(11).

Hollier, J. and Hollier, A. (2016). The glacier theory of Louis Rendu (1789–1859) and the Forbes–Tyndall controversy. *Earth Sciences History*, **35**(2), 346–353.

Hooke, R. L., Laumann, T., and Kohler, J. (1990). Subglacial water pressures and the shape of subglacial conduits. *Journal of Glaciology*, **36**(122), 67–71.

Hooke, R. L., Iverson, N. R., Hanson, B., Jansson, P., and Fischer, U. H. (1997). Rheology of till beneath Storglaciären, Sweden. *Journal of Glaciology*, **43**(143), 172–179.

Hughes, T. J. (1987). Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, **7**(11), 1261–1275.

Hutter, K. (1983). Theoretical glaciology ; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets, D. *D. Reidel Publishing Co./Tokyo, Terra Scintific Publishing Co.*

Huybrechts, P. (1990). A 3-D model for the Antarctic ice sheet : a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. *Climate Dynamics*, **5**(2), 79–92.

Huybrechts, P. (1998). Report of the third EISMINT workshop on model intercomparison.

Iken, A. (1981). The effect of the subglacial water pressure on the sliding velocity of a glacier in an idealized numerical model. *Journal of Glaciology*, **27**(97), 407–421.

Iken, A. and Bindschadler, R. A. (1986). Combined measurements of subglacial water pressure and surface velocity of Findelengletscher, Switzerland : conclusions about drainage system and sliding mechanism. *Journal of Glaciology*, **32**(110), 101–119.

Iverson, N. R., Jansson, P., and Hooke, R. L. (1994). In-situ measurement of the strength of deforming subglacial till. *Journal of Glaciology*, **40**(136), 497–503.

Iverson, N. R., Hooyer, T. S., and Baker, R. V. (1998). Ring-shear studies of till deformation : Coulomb-plastic behavior and distributed strain in glacier beds. *Journal of Glaciology*, **44**(148), 634–642.

Jansen, D., Luckman, A. J., Cook, A., Bevan, S., Kulessa, B., Hubbard, B., and Holland, P. (2015). Brief Communication : Newly developing rift in Larsen C Ice Shelf presents significant risk to stability. *The Cryosphere*, **9**(3), 1223–1227.

Jenssen, D. (1977). A three-dimensional polar ice-sheet model. *Journal of Glaciology*, **18**(80), 373–389.

Jevrejeva, S., Moore, J., Grinsted, A., and Woodworth, P. (2008). Recent global sea level acceleration started over 200 years ago ? *Geophysical Research Letters*, **35**(8).

Jezek, K. C. (1984). A modified theory of bottom crevasses used as a means for measuring the buttressing effect of ice shelves on inland ice sheets. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **89**(B3), 1925–1931.

Jezek, K. C. and Bentley, C. R. (1983). Field studies of bottom crevasses in the Ross Ice Shelf, Antarctica. *Journal of Glaciology*, **29**(101), 118–126.

Jezek, K. C., Bentley, C. R., and Clough, J. W. (1979). Electromagnetic sounding of bottom crevasses on the Ross Ice Shelf, Antarctica. *Journal of Glaciology*, **24**(90), 321–330.

Joughin, I., MacAyeal, D. R., and Tulaczyk, S. (2004). Basal shear stress of the Ross ice streams from control method inversions. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **109**(B9).

Joughin, I., Smith, B. E., and Holland, D. M. (2010). Sensitivity of 21st century sea level to ocean-induced thinning of Pine Island Glacier, Antarctica. *Geophysical Research Letters*, **37**(20).

Joughin, I., Smith, B. E., and Medley, B. (2014). Marine ice sheet collapse potentially under way for the Thwaites Glacier Basin, West Antarctica. *Science*, **344**(6185), 735–738.

Kachanov, L. M. (1958). Time of the Rupture Process under Creep Conditions, Izy Akad. *Nank SSR Otd Tech Nauk*, **8**, 26–31.

Kamb, B. (1970). Sliding motion of glaciers : theory and observation. *Reviews of Geophysics*, **8**(4), 673–728.

Kamb, B. (1991). Rheological nonlinearity and flow instability in the deforming bed mechanism of ice stream motion. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **96**(B10), 16585–16595.

Kamb, B. and LaChapelle, E. (1964). Direct observation of the mechanism of glacier sliding over bedrock. *Journal of Glaciology*, **5**(38), 159–172.

Kapitsa, A., Ridley, J., de Q Robin, G., Siegert, M., and Zotikov, I. (1996). A large deep freshwater lake beneath the ice of central East Antarctica. *Nature*, **381**(6584), 684.

Kavanaugh, J. L. and Clarke, G. K. (2006). Discrimination of the flow law for subglacial sediment using in situ measurements and an interpretation model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **111**(F1).

Keller, A. and Hutter, K. (2014). A viscoelastic damage model for polycrystalline ice, inspired by Weibull-distributed fiber bundle models. Part II : Thermodynamics of a rank-4 damage model. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **26**(6), 895.

Khazendar, A. and Jenkins, A. (2003). A model of marine ice formation within Antarctic ice shelf rifts. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **108**(C7).

Khazendar, A., Rignot, E., and Larour, E. (2007). Larsen B Ice Shelf rheology preceding its disintegration inferred by a control method. *Geophysical Research Letters*, **34**(19).

Khazendar, A., Rignot, E., and Larour, E. (2011). Acceleration and spatial rheology of Larsen C ice shelf, Antarctic Peninsula. *Geophysical Research Letters*, **38**(9).

Krug, J. (2014). *Intéractions Calotte Polaire / Océan : Modélisation des processus de vêlage au front des glaciers émissaires*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble.

Krug, J., Weiss, J., Gagliardini, O., and Durand, G. (2014). Combining damage and fracture mechanics to model calving. *The Cryosphere*, **8**(6), 2101–2117.

Krug, J., Durand, G., Gagliardini, O., and Weiss, J. (2015). Modelling the impact of submarine frontal melting and ice mélange on glacier dynamics. *The Cryosphere*, **9**, 989–1003.

Kuzmin, D. (2010). A guide to numerical methods for transport equations. *University Erlangen-Nuremberg*.

Lambeck, K., Rouby, H., Purcell, A., Sun, Y., and Sambridge, M. (2014). Sea level and global ice volumes from the Last Glacial Maximum to the Holocene. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **111**(43), 15296–15303.

Larour, E., Seroussi, H., Morlighem, M., and Rignot, E. (2012a). Continental scale, high order, high spatial resolution, ice sheet modeling using the Ice Sheet System Model (ISSM). *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **117**(F1).

Larour, E., Schiermeier, J., Rignot, E., Seroussi, H., Morlighem, M., and Paden, J. (2012b). Sensitivity analysis of Pine Island Glacier ice flow using ISSM and DAKOTA. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **117**(F2).

Le Brocq, A. M., Ross, N., Griggs, J. A., Bingham, R. G., Corr, H. F., Ferraccioli, F., Jenkins, A., Jordan, T. A., Payne, A. J., Rippin, D. M., *et al.* (2013). Evidence from ice shelves for channelized meltwater flow beneath the Antarctic Ice Sheet. *Nature Geoscience*, **6**(11), 945–948.

Le Meur, E., Gagliardini, O., Zwinger, T., and Ruokolainen, J. (2004). Glacier flow modelling : a comparison of the Shallow Ice Approximation and the full-Stokes solution. *Comptes Rendus Physique*, **5**(7), 709–722.

Le Meur, E., Sacchettini, M., Garambois, S., Berthier, E., Drouet, A., Durand, G., Young, D., Greenbaum, J., Holt, J., Blankenship, D., *et al.* (2014). Two independent methods for mapping the grounding line of an outlet glacier-an example from the Astrolabe Glacier, Terre Adélie, Antarctica. *The Cryosphere*, **8**(4), 1331–1346.

Leguy, G., Asay-Davis, X., and Lipscomb, W. (2014). Parameterization of basal friction near grounding lines in a one-dimensional ice sheet model. *The Cryosphere*, **8**(4), 1239–1259.

Lemaitre, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nuclear engineering and design*, **80**(2), 233–245.

Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J Méc Appl*, **2**(3).

Lenaerts, J., Den Broeke, M., Berg, W., Meijgaard, E. v., and Kuipers Munneke, P. (2012). A new, high-resolution surface mass balance map of Antarctica (1979–2010) based on regional atmospheric climate modeling. *Geophysical Research Letters*, **39**(4).

Letréguilly, A., Reeh, N., and Huybrechts, P. (1991). The Greenland ice sheet through the last glacial-interglacial cycle. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, **90**(4), 385–394.

Lingle, C. S. (1984). A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean : Application to ice stream E, West Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **89**(C3), 3523–3549.

Lipenkov, V. Y., Barkov, N., Duval, P., and Pimienta, P. (1989). Crystalline texture of the 2083 m ice core at Vostok Station, Antarctica. *Journal of Glaciology*, **35**(121), 392–398.

Lliboutry, L. (1958). Contribution à la théorie du frottement du glacier sur son lit. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, **247**(3), 318–320.

Lliboutry, L. (1959). Une théorie du frottement du glacier sur son lit. In *Annales de Geophysique*, volume 15, page 250.

Lliboutry, L. (1968). General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers. *Journal of Glaciology*, **7**(49), 21–58.

Lliboutry, L. and Duval, P. (1985). Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies : Ann Geophys V3, N2, March–April 1985, P207–224. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, volume 22, page 198. Pergamon.

Luckman, A., Jansen, D., Kulessa, B., King, E. C., Sammonds, P., and Benn, D. I. (2012). Basal crevasses in Larsen C Ice Shelf and implications for their global abundance. *The Cryosphere*, **6**(1), 113–123.

MacAyeal, D. R. (1989). Large-scale ice flow over a viscous basal sediment : Theory and application to ice stream B, Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, **94**(B4), 4071–4087.

MacAyeal, D. R. (1993). A tutorial on the use of control methods in ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, **39**(131), 91–98.

MacClintock, P. and Dreimanis, A. (1964). Orientation of till fabric by overriding glacier in the Saint Lawrence Valley. *American Journal of Science*, **262**(1), 133–142.

Mahaffy, M. (1976). A three-dimensional numerical model of ice sheets : Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories. *Journal of Geophysical Research*, **81**(6), 1059–1066.

Martin, M., Winkelmann, R., Haseloff, M., Albrecht, T., Bueler, E., Khroulev, C., and Levermann, A. (2011). The Potsdam Parallel Ice Sheet Model (PISM-PIK)–Part 2 : Dynamic equilibrium simulation of the Antarctic ice sheet. *The Cryosphere*, **5**(3), 727–740.

Masters, D., Nerem, R., Choe, C., Leuliette, E., Beckley, B., White, N., and Ablain, M. (2012). Comparison of global mean sea level time series from TOPEX/Poseidon, Jason-1, and Jason-2. *Marine Geodesy*, **35**(sup1), 20–41.

McGranahan, G., Balk, D., and Anderson, B. (2007). The rising tide : assessing the risks of climate change and human settlements in low elevation coastal zones. *Environment and urbanization*, **19**(1), 17–37.

McGrath, D., Steffen, K., Scambos, T., Rajaram, H., Casassa, G., and Rodriguez Lagos, J. L. (2012). Basal crevasses and associated surface crevassing on the Larsen C ice shelf, Antarctica, and their role in ice-shelf instability. *Annals of Glaciology*, **53**(60), 10–18.

Millan, R., Rignot, E., Bernier, V., Morlighem, M., and Dutrieux, P. (2017). Bathymetry of the Amundsen Sea Embayment sector of West Antarctica from Operation IceBridge gravity and other data. *Geophysical Research Letters*, **44**(3), 1360–1368.

Moeller, C. A., Mickelson, D., Anderson, M., and Winguth, C. (2007). Groundwater flow beneath Late Weichselian glacier ice in Nordfjord, Norway. *Journal of glaciology*, **53**(180), 84–90.

Morland, L. (1987). Unconfined ice-shelf flow. *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, **4**, 99–116.

Morlighem, M. (2011). *Ice sheet properties inferred by combining numerical modeling and remote sensing data*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale Paris.

Morlighem, M., Rignot, E., Seroussi, H., Larour, E., Ben Dhia, H., and Aubry, D. (2010). Spatial patterns of basal drag inferred using control methods from a full-Stokes and simpler models for Pine Island Glacier, West Antarctica. *Geophysical Research Letters*, **37**(14).

Mosbeux, C. (2016). *Quantification des processus responsables de l'accélération des glaciers émissaires par méthodes inverses*. Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes.

Mosbeux, C., Gillet-Chaulet, F., and Gagliardini, O. (2016). Comparison of adjoint and nudging methods to initialise ice sheet model basal conditions. *Geoscientific Model Development*, **9**(7), 2549–2562.

Mouginot, J., Rignot, E., and Scheuchl, B. (2014). Sustained increase in ice discharge from the Amundsen Sea Embayment, West Antarctica, from 1973 to 2013. *Geophysical Research Letters*, **41**(5), 1576–1584.

Murakami, S. and Ohno, N. (1981). A continuum theory of creep and creep damage. *Creep in structures*, pages 422–444.

Nadukandi, P., Oñate, E., and Garcia, J. (2010). A high-resolution Petrov–Galerkin method for the 1D convection–diffusion–reaction problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **199**(9), 525–546.

Nakicenovic, N., Alcamo, J., Grubler, A., Riahi, K., Roehrl, R., Rogner, H.-H., and Victor, N. (2000). *Special Report on Emissions Scenarios (SRES), A Special Report of Working Group III of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press.

Nicholls, R. J. and Cazenave, A. (2010). Sea-level rise and its impact on coastal zones. *science*, **328**(5985), 1517–1520.

Nicholls, R. J., Marinova, N., Lowe, J. A., Brown, S., Vellinga, P., De Gusmao, D., Hinkel, J., and Tol, R. S. (2011). Sea-level rise and its possible impacts given a "beyond 4 C world" in the twenty-first century. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **369**(1934), 161–181.

Nicolas, J. P., Vogelmann, A. M., Scott, R. C., Wilson, A. B., Cadeddu, M. P., Bromwich, D. H., Verlinde, J., Lubin, D., Russell, L. M., Jenkinson, C., *et al.* (2017). January 2016 extensive summer melt in West Antarctica favoured by strong El Niño. *Nature Communications*, **8**, ncomms15799.

Norton, F. H. (1929). *The creep of steel at high temperatures*. Number 35. McGraw-Hill Book Company, Incorporated.

Nowicki, S. and Wingham, D. (2008). Conditions for a steady ice sheet–ice shelf junction. *Earth and Planetary Science Letters*, **265**(1), 246–255.

Nowicki, S. M., Payne, A., Larour, E., Seroussi, H., Goelzer, H., Lipscomb, W., Gregory, J., Abe-Ouchi, A., and Shepherd, A. (2016). Ice Sheet Model Intercomparison Project (ISMIP6) contribution to CMIP6. *Geoscientific Model Development*, **9**(12), 4521.

Nye, J. (1957). The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 239, pages 113–133. The Royal Society.

Nye, J. (1969). A calculation on the sliding of ice over a wavy surface using a Newtonian viscous approximation. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 311, pages 445–467. The Royal Society.

Nye, J. (1970). Glacier sliding without cavitation in a linear viscous approximation. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 315, pages 381–403. The Royal Society.

Nye, J. (1973). Water at the bed of a glacier. *IAHS Publication*, **95**, 189–194.

Orheim, O. (1982). Radio Echo-Sounding of Riiser-Larsenisen. *Annals of Glaciology*, **3**(1), 355–355.

Oswald, G. and Robin, G. d. Q. (1973). Lakes beneath the Antarctic ice sheet. *Nature*, **245**, 251–254.

Palerme, C., Genthon, C., Claud, C., Kay, J. E., Wood, N. B., and L'Ecuyer, T. (2017). Evaluation of current and projected Antarctic precipitation in CMIP5 models. *Climate Dynamics*, **48**(1-2), 225–239.

Palmer, S., Shepherd, A., Nienow, P., and Joughin, I. (2011). Seasonal speedup of the Greenland Ice Sheet linked to routing of surface water. *Earth and Planetary Science Letters*, **302**(3), 423–428.

Parizek, B., Christianson, K., Anandakrishnan, S., Alley, R., Walker, R., Edwards, R., Wolfe, D., Bertini, G., Rinehart, S., Bindschadler, R., *et al.* (2013). Dynamic (in) stability of Thwaites Glacier, West Antarctica. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **118**(2), 638–655.

Parizek, B. R. and Alley, R. B. (2004). Implications of increased Greenland surface melt under global-warming scenarios : ice-sheet simulations. *Quaternary Science Reviews*, **23**(9), 1013–1027.

Park, J., Gourmelen, N., Shepherd, A., Kim, S., Vaughan, D., and Wingham, D. (2013). Sustained retreat of the Pine Island Glacier. *Geophysical Research Letters*, **40**(10), 2137–2142.

Pattyn, F. (1996). Numerical modelling of a fast-flowing outlet glacier : experiments with different basal conditions. *Annals of Glaciology*, **23**(1), 237–246.

Pattyn, F. (2003). A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model : Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **108**(B8).

Pattyn, F. and Durand, G. (2013). Why marine ice sheet model predictions may diverge in estimating future sea level rise. *Geophysical Research Letters*, **40**(16), 4316–4320.

Pattyn, F., Huyghe, A., De Brabander, S., and De Smedt, B. (2006). Role of transition zones in marine ice sheet dynamics. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **111**(F2).

Pattyn, F., Perichon, L., Aschwanden, A., Breuer, B., De Smedt, B., Gagliardini, O., Gudmundsson, G. H., Hindmarsh, R., Hubbard, A., Johnson, J. V., *et al.* (2008). Benchmark experiments for higher-order and full Stokes ice sheet models (ISMIP-HOM). *The Cryosphere Discussions*, **2**(1), 111–151.

Pattyn, F., Schoof, C., Perichon, L., Hindmarsh, R. C. A., Bueler, E., de Fleurian, B., Durand, G., Gagliardini, O., Gladstone, R., Goldberg, D., Gudmundsson, G. H., Lee, V., Nick, F. M., Payne, A. J., Pollard, D., Rybak, O., Saito, F., and Vieli, A. (2012). Results of the Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project, MISMIP. *The Cryosphere Discussions*, **6**(1), 267–308.

Pattyn, F., Perichon, L., Durand, G., Favier, L., Gagliardini, O., Hindmarsh, R. C., Zwinger, T., Albrecht, T., Cornford, S., Docquier, D., *et al.* (2013). Grounding-line migration in plan-view marine ice-sheet models : results of the ice2sea MISMIP3d intercomparison. *Journal of Glaciology*, **59**(215), 410–422.

Payne, A. J., Vieli, A., Shepherd, A. P., Wingham, D. J., and Rignot, E. (2004). Recent dramatic thinning of largest West Antarctic ice stream triggered by oceans. *Geophysical Research Letters*, **31**(23).

Pelto, M. S. and Warren, C. R. (1991). Relationship between tidewater glacier calving velocity and water depth at the calving front. *Annals of Glaciology*, **15**, 115–118.

Pimentel, S. and Flowers, G. E. (2011). A numerical study of hydrologically driven glacier dynamics and subglacial flooding. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 467, pages 537–558. The Royal Society.

Pimentel, S., Flowers, G., and Schoof, C. (2010). A hydrologically coupled higher-order flow-band model of ice dynamics with a Coulomb friction sliding law. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **115**(F4).

Podolskiy, E. A. and Walter, F. (2016). Cryo-seismology. *Reviews of Geophysics*.

Pollard, D. and DeConto, R. M. (2009). Modelling West Antarctic ice sheet growth and collapse through the past five million years. *Nature*, **458**(7236), 329–332.

Pollard, D. and DeConto, R. M. (2012). Description of a hybrid ice sheet-shelf model, and application to Antarctica. *Geoscientific Model Development*, **5**(5), 1273–1295.

Pralong, A. and Funk, M. (2005). Dynamic damage model of crevasse opening and application to glacier calving. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **110**(B1).

Pralong, A., Funk, M., and Lüthi, M. P. (2003). A description of crevasse formation using continuum damage mechanics. *Annals of Glaciology*, **37**(1), 77–82.

Pralong, A., Hutter, K., and Funk, M. (2006). Anisotropic damage mechanics for viscoelastic ice. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **17**(5), 387–408.

Price, S. F., Conway, H., Waddington, E. D., and Bindschadler, R. A. (2008). Model investigations of inland migration of fast-flowing outlet glaciers and ice streams. *Journal of Glaciology*, **54**(184), 49–60.

Pritchard, H., Ligtenberg, S., Fricker, H., Vaughan, D., Van den Broeke, M., and Padman, L. (2012). Antarctic ice-sheet loss driven by basal melting of ice shelves. *Nature*, **484**(7395), 502–505.

Ray, R. D. and Douglas, B. C. (2011). Experiments in reconstructing twentieth-century sea levels. *Progress in Oceanography*, **91**(4), 496–515.

Reed, W. H. and Hill, T. (1973). Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA).

Rémy, F. and Testut, L. (2006). Mais comment s' écoule donc un glacier ? Aperçu historique. *Comptes Rendus Geoscience*, **338**(5), 368–385.

Rendu, L. and Bischof, G. (1840). *Théorie des glaciers de la Savoie*. Puthod.

Riedel, B., Nixdorf, U., Heinert, M., Eckstaller, A., and Mayer, C. (1999). The response of the Ekströmisen (Antarctica) grounding zone to tidal forcing. *Annals of Glaciology*, **29**(1), 239–242.

Rignot, E. (1998). Hinge-line migration of Petermann Gletscher, north Greenland, detected using satellite-radar interferometry. *Journal of Glaciology*, **44**(148), 469–476.

Rignot, E. (2008). Changes in West Antarctic ice stream dynamics observed with ALOS PALSAR data. *Geophysical Research Letters*, **35**(12).

Rignot, E. and Kanagaratnam, P. (2006). Changes in the velocity structure of the Greenland Ice Sheet. *Science*, **311**(5763), 986–990.

Rignot, E., Casassa, G., Gogineni, P., Krabill, W., Rivera, A. u., and Thomas, R. (2004). Accelerated ice discharge from the Antarctic Peninsula following the collapse of Larsen B ice shelf. *Geophysical Research Letters*, **31**(18).

Rignot, E., Bamber, J. L., Van Den Broeke, M. R., Davis, C., Li, Y., Van De Berg, W. J., and Van Meijgaard, E. (2008). Recent Antarctic ice mass loss from radar interferometry and regional climate modelling. *Nature geoscience*, **1**(2), 106–110.

Rignot, E., Velicogna, I., Van den Broeke, M., Monaghan, A., and Lenaerts, J. (2011a). Acceleration of the contribution of the Greenland and Antarctic ice sheets to sea level rise. *Geophysical Research Letters*, **38**(5).

Rignot, E., Mouginot, J., and Scheuchl, B. (2011b). Antarctic grounding line mapping from differential satellite radar interferometry. *Geophysical Research Letters*, **38**(10).

Rignot, E., Mouginot, J., and Scheuchl, B. (2011c). Ice flow of the Antarctic ice sheet. *Science*, **333**(6048), 1427–1430.

Rignot, E., Mouginot, J., Morlighem, M., Seroussi, H., and Scheuchl, B. (2014). Widespread, rapid grounding line retreat of Pine Island, Thwaites, Smith, and Kohler glaciers, West Antarctica, from 1992 to 2011. *Geophysical Research Letters*, **41**(10), 3502–3509.

Rist, M., Sammonds, P., Murrell, S., Meredith, P., Doake, C., Oerter, H., and Matsuki, K. (1999). Experimental and theoretical fracture mechanics applied to Antarctic ice fracture and surface crevassing. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **104**(B2), 2973–2987.

Rist, M., Sammonds, P., Oerter, H., and Doake, C. (2002). Fracture of Antarctic shelf ice. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B1).

Ritz, C., Fabre, A., and Letréguilly, A. (1996). Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters : consequences for the evolution through the last climatic cycle. *Climate Dynamics*, **13**(1), 11–23.

Ritz, C., Edwards, T. L., Durand, G., Payne, A. J., Peyaud, V., and Hindmarsh, R. C. (2015). Potential sea-level rise from Antarctic ice-sheet instability constrained by observations. *Nature*, **528**(7580), 115–118.

Röthlisberger, H. (1972). Water pressure in intra-and subglacial channels. *Journal of Glaciology*, **11**(62), 177–203.

Rovere, A., Raymo, M. E., Mitrovica, J., Hearty, P. J., O'Leary, M., and Inglis, J. (2014). The Mid-Pliocene sea-level conundrum : Glacial isostasy, eustasy and dynamic topography. *Earth and Planetary Science Letters*, **387**, 27–33.

Sandhäger, H. (2003). Numerical study on the influence of fractures and zones of weakness on the flow regime of Larsen Ice Shelf. *Filchner Ronne Ice Shelf Programme (FRISP) Report*, (14).

Scambos, T. A., Bohlander, J., Shuman, C. u., and Skvarca, P. (2004). Glacier acceleration and thinning after ice shelf collapse in the Larsen B embayment, Antarctica. *Geophysical Research Letters*, **31**(18).

Schäfer, M., Zwinger, T., Christoffersen, P., Gillet-Chaulet, F., Laakso, K., Pettersson, R., Pohjola, V. A., Strozzi, T., and Moore, J. C. (2013). Sensitivity of basal conditions in an inverse model : Vestfonna ice cap, Nordaustlandet/Svalbard. *The Cryosphere*, **6**, 771–783.

Schoof, C. (2005). The effect of cavitation on glacier sliding. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, **461**(2055), 609–627.

Schoof, C. (2007a). Ice sheet grounding line dynamics : Steady states, stability, and hysteresis. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface (2003–2012)*, **112**(F3).

Schoof, C. (2007b). Marine ice-sheet dynamics. Part 1. The case of rapid sliding. *Journal of Fluid Mechanics*, **573**, 27–55.

Schoof, C. (2010). Ice-sheet acceleration driven by melt supply variability. *Nature*, **468**(7325), 803–806.

Schoof, C. (2011). Marine ice sheet dynamics. Part 2. A Stokes flow contact problem. *Journal of Fluid Mechanics*, **679**, 122–155.

Schoof, C. and Hindmarsh, R. C. (2010). Thin-film flows with wall slip : an asymptotic analysis of higher order glacier flow models. *QJ Mech. Appl. Math*, **63**(1), 73–114.

Schoof, C., Rada, C., Wilson, N., Flowers, G., and Haseloff, M. (2014). Oscillatory subglacial drainage in the absence of surface melt. *The Cryosphere*, **8**(3), 959–976.

Schoof, C., Davis, A. D., and Popa, T. V. (2017). Boundary layer models for calving marine outlet glaciers. *The Cryosphere Discussions*, **2017**, 1–30.

Seroussi, H., Morlighem, M., Rignot, E., Larour, E., Aubry, D., Ben Dhia, H., and Kristensen, S. S. (2011). Ice flux divergence anomalies on 79north Glacier, Greenland. *Geophysical Research Letters*, **38**(9).

Seroussi, H., Ben Dhia, H., Morlighem, M., Larour, E., Rignot, E., and Aubry, D. (2012). Coupling ice flow models of varying orders of complexity with the Tiling method. *Journal of Glaciology*, **58**(210), 776–786.

Seroussi, H., Morlighem, M., Larour, E., Rignot, E., and Khazendar, A. (2014a). Hydrostatic grounding line parameterization in ice sheet models. *Cryosphere*, **8**(6).

Seroussi, H., Morlighem, M., Rignot, E., Mouginot, J., Larour, E., Schodlok, M., and Khazendar, A. (2014b). Sensitivity of the dynamics of Pine Island Glacier, West Antarctica, to climate forcing for the next 50 years. *Cryosphere*, **8**(5).

Seroussi, H., Nakayama, Y., Larour, E., Menemenlis, D., Morlighem, M., Rignot, E., and Khazendar, A. (2017). Continued retreat of Thwaites Glacier, West Antarctica, controlled by bed topography and ocean circulation. *Geophysical Research Letters*, pages n/a–n/a. 2017GL072910.

Shabtaie, S. and Bentley, C. R. (1982). Tabular icebergs : implications from geophysical studies of ice shelves. *Journal of Glaciology*, **28**(100), 413–430.

Shannon, S. R., Payne, A. J., Bartholomew, I. D., van den Broeke, M. R., Edwards, T. L., Fettweis, X., Gagliardini, O., Gillet-Chaulet, F., Goelzer, H., Hoffman, M. J., *et al.* (2013). Enhanced basal lubrication and the contribution of the Greenland ice sheet to future sea-level rise. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(35), 14156–14161.

Sharp, M., Tison, J.-L., and Fierens, G. (1990). Geochemistry of subglacial calcites : implications for the hydrology of the basal water film. *Arctic and Alpine Research*, pages 141–152.

Shepherd, A., Hubbard, A., Nienow, P., King, M., McMillan, M., and Joughin, I. (2009). Greenland ice sheet motion coupled with daily melting in late summer. *Geophysical Research Letters*, **36**(1).

Shepherd, A., Ivins, E. R., Geruo, A., Barletta, V. R., Bentley, M. J., Bettadpur, S., Briggs, K. H., Bromwich, D. H., Forsberg, R., Galin, N., *et al.* (2012). A reconciled estimate of ice-sheet mass balance. *Science*, **338**(6111), 1183–1189.

Shreve, R. (1984). Glacier sliding at subfreezing temperatures. *Journal of Glaciology*, **30**(106), 341–347.

Shuman, C. A., Berthier, E., and Scambos, T. A. (2011). 2001–2009 elevation and mass losses in the Larsen A and B embayments, Antarctic Peninsula. *Journal of Glaciology*, **57**(204), 737–754.

Siegert, M. J. (2005). Lakes beneath the ice sheet : the occurrence, analysis, and future exploration of Lake Vostok and other Antarctic subglacial lakes. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **33**, 215–245.

Siegert, M. J., Ellis-Evans, J. C., Tranter, M., Mayer, C., Petit, J.-R., Salamatin, A., and Priscu, J. C. (2001). Physical, chemical and biological processes in Lake Vostok and other Antarctic subglacial lakes. *Nature*, **414**(6864), 603–609.

Sole, A., Nienow, P., Bartholomew, I., Mair, D., Cowton, T., Tedstone, A., and King, M. A. (2013). Winter motion mediates dynamic response of the Greenland Ice Sheet to warmer summers. *Geophysical Research Letters*, **40**(15), 3940–3944.

Solomon, S., Qin, D., Manning, M., Marquis, M., Averyt, K., Tignor, M., Miller, H., and Chen, Z. (2007). Climate change 2007 : The physical science basis.

Staniforth, A. and Côté, J. (1991). Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review. *Monthly weather review*, **119**(9), 2206–2223.

Stearns, L. A., Smith, B. E., and Hamilton, G. S. (2008). Increased flow speed on a large East Antarctic outlet glacier caused by subglacial floods. *Nature Geoscience*, **1**(12), 827–831.

Stephenson, S., Doake, C., and Horsfall, J. (1979). Tidal flexure of ice shelves measured by tiltmeter. *Nature*, **282**(5738), 496–497.

Sugiyama, S. and Gudmundsson, G. (2004). Short-term variations in glacier flow controlled by subglacial water pressure at Lauteraargletscher, Bernese Alps, Switzerland. *Journal of Glaciology*, **50**(170), 353–362.

Swithinbank, C. (1977). Glaciological research in the Antarctic Peninsula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, pages 161–183.

Tedstone, A. J., Nienow, P. W., Sole, A. J., Mair, D. W., Cowton, T. R., Bartholomew, I. D., and King, M. A. (2013). Greenland ice sheet motion insensitive to exceptional meltwater forcing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(49), 19719–19724.

Tedstone, A. J., Nienow, P. W., Gourmelen, N., Dehecq, A., Goldberg, D., and Hanna, E. (2015). Decadal slowdown of a land-terminating sector of the Greenland Ice Sheet despite warming. *Nature*, **526**(7575), 692–695.

Telford, J. and Turner, J. (1963). The motion of a wire through ice. *Philosophical Magazine*, **8**(87), 527–531.

Thomas, R. (1977). Calving bay dynamics and ice sheet retreat up the St. Lawrence valley system. *Géographie physique et Quaternaire*, **31**(3-4), 347–356.

Thomas, R. H. and Bentley, C. R. (1978). A model for Holocene retreat of the West Antarctic Ice Sheet. *Quaternary Research*, **10**(2), 150–170.

Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J., and Miller, H. (1997). Textures and fabrics in the GRIP ice core. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, **102**(C12), 26583–26599.

Truffer, M., Harrison, W. D., and Echelmeyer, K. A. (2000). Glacier motion dominated by processes deep in underlying till. *Journal of Glaciology*, **46**(153), 213–221.

Truffer, M., Echelmeyer, K. A., and Harrison, W. D. (2001). Implications of till deformation on glacier dynamics. *Journal of Glaciology*, **47**(156), 123–134.

Tsai, V. C., Stewart, A. L., and Thompson, A. F. (2015). Marine ice-sheet profiles and stability under Coulomb basal conditions. *Journal of Glaciology*, **61**(226), 205–215.

Tulaczyk, S., Kamb, W. B., and Engelhardt, H. F. (2000). Basal mechanics of ice stream B, West Antarctica : 1. Till mechanics. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **105**(B1), 463–481.

Tyndall, J. and Huxley, T. H. (1857). On the structure and motion of glaciers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **147**, 327–346.

Van de Wal, R., Boot, W., Van den Broeke, M., Smeets, C., Reijmer, C., Donker, J., and Oerlemans, J. (2008). Large and rapid melt-induced velocity changes in the ablation zone of the Greenland Ice Sheet. *science*, **321**(5885), 111–113.

van den Broeke, M., Bamber, J., Ettema, J., Rignot, E., Schrama, E., van de Berg, W. J., van Meijgaard, E., Velicogna, I., and Wouters, B. (2009). Partitioning recent Greenland mass loss. *science*, **326**(5955), 984–986.

Van der Veen, C. (1985). Response of a marine ice sheet to changes at the grounding line. *Quaternary Research*, **24**(3), 257–267.

Van der Veen, C. (1998). Fracture mechanics approach to penetration of bottom crevasses on glaciers. *Cold Regions Science and Technology*, **27**(3), 213–223.

Van Der Veen, C. J. and Whillans, I. (1989). Force budget : I. Theory and numerical methods. *Journal of Glaciology*, **35**(119), 53–60.

Van Liefferinge, B. and Pattyn, F. (2013). Using ice-flow models to evaluate potential sites of million year-old ice in Antarctica. *Climate of the Past*, **9**(5), 2335.

Van Vuuren, D. P., Edmonds, J., Kainuma, M., Riahi, K., Thomson, A., Hibbard, K., Hurtt, G. C., Kram, T., Krey, V., Lamarque, J.-F., *et al.* (2011). The representative concentration pathways : an overview. *Climatic change*, **109**(1-2), 5.

Vaughan, D., Comiso, J., Allison, I., Carrasco, J., Kaser, G., Kwok, R., Mote, P., Murray, T., Paul, F., Ren, J., Rignot, E., Solomina, O., Steffen, K., and Zhang, T. (2013). Observations : Cryosphere. Technical report, PM Cambridge University Press.

Vaughan, D. G. (1993). Relating the occurrence of crevasses to surface strain rates. *Journal of Glaciology*, **39**(132), 255–266.

Vaughan, D. G. (1994). Investigating tidal flexure on an ice shelf using kinematic GPS. *Annals of Glaciology*, **20**(1), 372–376.

Vaughan, D. G. (2008). West Antarctic Ice Sheet collapse–the fall and rise of a paradigm. *Climatic Change*, **91**(1), 65–79.

Vieli, A. and Nick, F. M. (2011). Understanding and modelling rapid dynamic changes of tidewater outlet glaciers : issues and implications. *Surveys in geophysics*, **32**(4-5), 437–458.

Vieli, A. and Payne, A. (2005). Assessing the ability of numerical ice sheet models to simulate grounding line migration. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **110**(F1).

Vieli, A. and Payne, A. J. (2003). Application of control methods for modelling the flow of Pine Island Glacier, West Antarctica. *Annals of Glaciology*, **36**(1), 197–204.

Vieli, A., Funk, M., and Blatter, H. (2001). Flow dynamics of tidewater glaciers : a numerical modelling approach. *Journal of Glaciology*, **47**(159), 595–606.

Vieli, A., Payne, A. J., Du, Z., and Shepherd, A. (2006). Numerical modelling and data assimilation of the Larsen B ice shelf, Antarctic Peninsula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **364**(1844), 1815–1839.

Vieli, A., Payne, A., Shepherd, A., and Du, Z. (2007). Causes of pre-collapse changes of the Larsen B ice shelf : Numerical modelling and assimilation of satellite observations. *Earth and Planetary Science Letters*, **259**(3), 297–306.

Vincent, C. and Moreau, L. (2016). Sliding velocity fluctuations and subglacial hydrology over the last two decades on Argentière glacier, Mont Blanc area. *Journal of Glaciology*, pages 1–11.

Walder, J. (1979). Geometry of former subglacial water channels and cavities. *Journal of Glaciology*, **23**(89), 335–346.

Walker, R., Dupont, T., Parizek, B., and Alley, R. (2008). Effects of basal-melting distribution on the retreat of ice-shelf grounding lines. *Geophysical Research Letters*, **35**(17).

Wang, Y., Kipfstuhl, S., Azuma, N., Thorsteinsson, T., and Miller, H. (2003). Ice-fabrics study in the upper 1500 m of the Dome C (East Antarctica) deep ice core. *Annals of glaciology*, **37**(1), 97–104.

Weertman, J. (1957). On the sliding of glaciers. *Journal of glaciology*, **3**(21), 33–38.

Weertman, J. (1974). Stability of the junction of an ice sheet and an ice shelf. *Journal of Glaciology*, **13**(67), 3–11.

Weertman, J. and Birchfield, G. (1982). Subglacial water flow under ice streams and West Antarctic ice-sheet stability. *Annals of glaciology*, **3**(1), 316–320.

Weinberg, B. (1907). Über die innere Reibung des Eises. II. *Annalen der Physik*, **327**(2), 321–332.

Weiss, J. (2004). Subcritical crack propagation as a mechanism of crevasse formation and iceberg calving. *Journal of Glaciology*, **50**(168), 109–115.

Werder, M. A., Hewitt, I. J., Schoof, C. G., and Flowers, G. E. (2013). Modeling channelized and distributed subglacial drainage in two dimensions. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, **118**(4), 2140–2158.

Whillans, I. and Van Der Veen, C. J. (1993). New and improved determinations of velocity of Ice Streams B and C, West Antarctica. *Journal of Glaciology*, **39**(133), 483–590.

Willis, I. C. (1995). Intra-annual variations in glacier motion : a review. *Progress in Physical Geography*, **19**(1), 61–106.

Wingham, D. J., Siegert, M. J., Shepherd, A., and Muir, A. S. (2006). Rapid discharge connects Antarctic subglacial lakes. *Nature*, **440**(7087), 1033–1036.

Winkelmann, R., Martin, M. A., Haseloff, M., Albrecht, T., Bueler, E., Khroulev, C., and Levermann, A. (2011). The Potsdam parallel ice sheet model (PISM-PIK)-Part 1 : Model description. *The Cryosphere*, **5**(3), 715.

Zhang, T., Price, S. F., Ju, L., Leng, W., Brondex, J., Durand, G., and Gagliardini, O. (2017). A comparison of two Stokes ice sheet models applied to the Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project for plan view models (MISMIP3d). *The Cryosphere (Online)*, **11**(LA-UR–16-21019).

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. (1977). *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London.

Zwally, H. J., Abdalati, W., Herring, T., Larson, K., Saba, J., and Steffen, K. (2002). Surface melt-induced acceleration of Greenland ice-sheet flow. *Science*, **297**(5579), 218–222.

Zwally, H. J., Giovinetto, M. B., Beckley, M. A., and Saba, J. L. (2012). Antarctic and Greenland drainage systems. *GSFC Cryospheric Sciences Laboratory*.