



HAL
open science

**Caractérisation de la géométrie locale et globale de
textures directionnelles par reconstruction
d'hypersurfaces et transformations d'espace: application
à l'analyse stratigraphique des images sismiques**

Salma Doghraj

► **To cite this version:**

Salma Doghraj. Caractérisation de la géométrie locale et globale de textures directionnelles par reconstruction d'hypersurfaces et transformations d'espace: application à l'analyse stratigraphique des images sismiques. Automatique / Robotique. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0814 . tel-01731593

HAL Id: tel-01731593

<https://theses.hal.science/tel-01731593>

Submitted on 14 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur
Spécialité : Automatique, Productique, Signal et Image, Ingénierie Cognitive

par

Salma DOGHRAJI

**Caractérisation de la géométrie locale et globale de textures
directionnelles par reconstruction d'hypersurfaces et
transformations d'espace**

—

Application à l'analyse stratigraphique des images sismiques

Soutenue le 05 décembre 2017 devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------|---|-----------------------|
| Michel BERTHIER | Professeur des Universités, Université de la Rochelle | Rapporteur |
| Yannick BERTHOUMIEU | Professeur des Universités, Bordeaux INP, ENSEIRB-MATMECA | Directeur de thèse |
| Philippe BOLON | Professeur des Universités, Polytech Annecy-Chambéry | Examinateur |
| Marc DONIAS | Maître de Conférences, Bordeaux INP, ENSEIRB-MATMECA | Co-encadrant de thèse |
| Sébastien GUILLON | Ingénieur de Recherche, Total CSTJF Pau | Membre invité |
| Nicolas PASSAT | Professeur des Universités, Université de Reims Champagne-Ardenne | Rapporteur |

Préparée à l'Université de Bordeaux
Laboratoire d'accueil : Laboratoire IMS
351 avenue de la Libération - 33405 Talence

“ The world is full of magical things patiently waiting for our wits to grow sharper. ”

- Bertrand Russell (1872–1970)

Résumé

Les textures directionnelles forment la classe particulière des images texturées représentant des hypersurfaces (lignes dermiques, fibres de matériaux, horizons sismiques, etc.). Pour ce type de textures, la reconstruction d'hypersurfaces permet ainsi d'en décrire la géométrie et la structure. À partir du calcul préalable du champ d'orientation, des reconstructions peuvent être obtenues au moyen de la minimisation d'une équation aux dérivées partielles sous contraintes, linéarisée et résolue itérativement de manière optimale dans le domaine de Fourier.

Dans ce travail, les reconstructions d'hypersurfaces sont considérées comme un moyen de description à la fois amont et aval de la géométrie des textures directionnelles. Dans une démarche amont, la reconstruction de faisceaux locaux et denses d'hypersurfaces conduit à un modèle de transformation d'espace permettant de déplier localement la texture ou son champ de gradient et d'améliorer l'estimation du champ d'orientation par rapport au classique tenseur de structure. Dans une démarche aval, des reconstructions d'hypersurfaces effectuées sur des supports polygonaux quelconques, isolés ou imbriqués, permettent d'obtenir des reconstructions plus pertinentes que par les méthodes existantes. Les démarches proposées mettent en œuvre des chaînes de transformations d'espace conformes (transformation de Schwarz-Christoffel, de Möbius, etc.) afin de respecter les contraintes et d'accéder à des schémas de résolution rapide.

Mots-clés : Reconstruction d'hypersurfaces, équation aux dérivées partielles, transformations d'espace, champ d'orientation, transformations conformes, Schwarz-Christoffel, images sismiques.

Abstract

Directional textures are the particular class of textured images representing hypersurfaces (dermal lines, material fibers, seismic horizons, etc.). For this type of textures, the reconstruction of hypersurfaces describes their geometry and structure. From the preliminary estimation of the orientation field, reconstructions can be obtained by means of the minimization of a partial differential equation under constraints, linearized and iteratively resolved in the Fourier domain.

In this work, the reconstructions of hypersurfaces are considered as means of description both upstream and downstream of the geometry of the directional textures. In an upstream approach, the reconstruction of local and dense streams of hypersurfaces leads to a spatial transformation model to locally unfold the texture or its gradient field and to improve the estimation of the orientation field in comparison with the classic structure tensor. In a downstream approach, reconstructions of hypersurfaces carried out on any polygonal supports, either isolated or imbricated, lead to more accurate reconstructions than existing methods. The proposed approaches implement chains of conformal space transformations (transformation of Schwarz-Christoffel, Möbius, etc.) in order to respect the constraints and to access fast solution schemes.

Keywords : Hypersurface reconstruction, partial differential equations, space transformations, orientation field, conformal mapping, Schwarz-Christoffel, seismic images.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes | 5 |
| 1.1 Introduction | 6 |
| 1.2 Reconstruction par minimisation sous contraintes | 8 |
| 1.2.1 Notion d'orientation | 8 |
| 1.2.2 Reconstruction à partir du champ d'orientation | 10 |
| 1.2.2.1 Hypersurface explicite | 10 |
| 1.2.2.2 Types de contraintes | 11 |
| 1.2.2.3 Reconstruction numérique | 13 |
| 1.3 Reconstruction dans le cas de changements d'espace | 15 |
| 1.3.1 Transformation du pendage dans le cas d'un changement d'espace | 16 |
| 1.3.2 Transformation du pendage dans le cas d'une chaîne de changements d'espace | 18 |
| 1.4 Reconstruction rapide sur domaine non-rectangulaire | 19 |
| 1.4.1 Méthode du masque | 20 |
| 1.4.1.1 Prise en compte d'un terme de pondération | 20 |
| 1.4.1.2 Pondération binaire | 21 |
| 1.4.2 Méthode des quadrangles | 22 |
| 1.4.2.1 Construction des quadrangles | 23 |
| 1.4.2.2 Reconstruction rapide sur un quadrangle | 24 |
| 1.4.2.3 Reconstruction de l'hypersurface complète | 25 |
| 1.5 Conclusion | 26 |
| 2 Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux | 29 |
| 2.1 Introduction | 31 |
| 2.2 Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes | 33 |
| 2.2.1 Définition d'un polygone | 33 |
| 2.2.1.1 Notations et propriétés | 33 |

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2.2 | Transformation d'un polygone en rectangle | 35 |
| 2.2.2.1 | Notion de transformation conforme | 36 |
| 2.2.2.2 | Transformation de Schwarz-Christoffel | 38 |
| 2.2.2.3 | Chaîne de transformations | 40 |
| 2.2.3 | Régularisation du maillage | 41 |
| 2.2.3.1 | Méthode naïve | 43 |
| 2.2.3.2 | Méthode interactive | 43 |
| 2.2.3.3 | Méthode automatique | 45 |
| 2.2.4 | Complexité calculatoire | 45 |
| 2.2.5 | Résultats | 46 |
| 2.2.5.1 | Image sismique synthétique avec faille | 47 |
| 2.2.5.2 | Image sismique réelle faillée avec régions d'occlusion | 49 |
| 2.2.5.3 | Image sismique réelle avec réseau de failles | 50 |
| 2.2.6 | Conclusions partielles | 52 |
| 2.3 | Reconstruction sur domaines imbriqués | 54 |
| 2.3.1 | Problématique | 54 |
| 2.3.2 | Transformation de Schwarz-Christoffel dans le cas doublement connexe | 55 |
| 2.3.3 | Chaîne de transformations d'espace pour la reconstruction d'une couronne | 58 |
| 2.3.3.1 | Respect des contraintes extérieures | 60 |
| 2.3.3.2 | Respect des contraintes intérieures | 61 |
| 2.3.3.3 | Combinaison des contraintes intérieures et extérieures | 63 |
| 2.3.4 | Résultats | 64 |
| 2.3.5 | Conclusions partielles | 66 |
| 2.4 | Résumé des contributions et conclusion | 67 |
| 3 | Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure | 69 |
| 3.1 | Introduction | 71 |
| 3.2 | Estimation d'orientation par la méthode du tenseur de structure | 74 |
| 3.2.1 | Méthode classique du tenseur de structure | 74 |
| 3.2.1.1 | Calcul du champ gradient | 74 |
| 3.2.1.2 | Calcul du tenseur de structure | 75 |
| 3.2.1.3 | Décomposition en éléments propres | 75 |
| 3.2.2 | Approche robuste | 76 |
| 3.3 | Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure | 76 |
| 3.3.1 | Aplanissement local | 78 |
| 3.3.1.1 | Reconstruction du flux d'hypersurfaces | 78 |
| 3.3.1.2 | Estimation du modèle de transformation | 80 |
| 3.3.1.3 | Application du modèle de transformation | 82 |
| 3.3.2 | Estimation locale de l'orientation | 83 |

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|---|---|------------|
| 3.3.2.1 | Calcul du tenseur de structure | 83 |
| 3.3.2.2 | Application de la transformation inverse | 84 |
| 3.3.3 | Algorithmes proposés | 84 |
| 3.3.4 | Complexité calculatoire et accélération | 84 |
| 3.3.4.1 | Complexité calculatoire | 84 |
| 3.3.4.2 | Approche accélérée par patch | 86 |
| 3.3.5 | Choix des paramètres | 88 |
| 3.4 | Résultats | 90 |
| 3.4.1 | Images synthétiques | 90 |
| 3.4.1.1 | Régions de courbure asymétrique | 90 |
| 3.4.1.2 | Régions de convergence asymétrique | 93 |
| 3.4.2 | Image d’empreinte digitale | 95 |
| 3.4.3 | Image de matériau | 98 |
| 3.4.4 | Image sismique | 100 |
| 3.5 | Résumé des contributions et conclusion | 102 |
| Conclusion | | 105 |
| Annexes | | 111 |
| A Estimation de la transformation de Schwarz-Christoffel | | 111 |
| A.1 | Problème des paramètres | 112 |
| A.2 | Application de la transformation de Schwarz-Christoffel | 112 |
| A.3 | Transformation de Schwarz-Christoffel inverse | 113 |
| B Biais du tenseur de structure | | 115 |
| C Imagerie sismique | | 119 |
| Bibliographie | | 121 |

Acronymes et notations

| | |
|-----------------|---|
| EDP | Equation aux Dérivées Partielles |
| RSB | Rapport Signal à Bruit |
| SC | Schwarz-Christoffel |
| TFD | Transformée de Fourier Discrète |
| TFDI | Transformée de Fourier Discrète Inverse |
| FDC | Fonction de Distribution Cumulée |
| | |
| \mathbb{R} | Ensemble des nombres réels |
| \mathbb{C} | Ensemble des nombres complexes |
| \mathcal{C}^k | Ensemble des fonctions de classe de régularité au moins égale à k |
| $[a, b]$ | Intervalle d'entiers entre a et b |
| | |
| $\ \cdot\ $ | Norme euclidienne |
| $[\cdot]$ | Partie entière |
| \circ | Opérateur de composition de fonctions |
| \circledast | Opérateur de convolution circulaire |
| \odot | Opérateur de multiplication terme à terme |
| ∇ | Opérateur gradient |
| ∂ | Opérateur de dérivée partielle |
| div | Opérateur divergence |
| Δ | Opérateur Laplacien |
| tA | Matrice transposée de A |
| \mathcal{O} | Ordre de grandeur |
| \Re | Partie réelle d'un nombre complexe |
| \Im | Partie imaginaire d'un nombre complexe |

Introduction

Les textures directionnelles linéiques, appelées également textures directionnelles ou textures linéaires, sont une classe particulière d’images texturées faisant apparaître des structures directionnelles. Regroupant notamment les images d’empreintes digitales, de matériaux fibreux, de bras de galaxies spirales ou encore les images sismiques, elles sont composées de structures apparentes nommées *hypersurfaces*. Les hypersurfaces sont des lignes courbes dans le cas de données bidimensionnelles, des surfaces dans le cas de données tridimensionnelles ou des structures à $N - 1$ dimensions dans le cas général de données à N dimensions. Les hypersurfaces s’agencent de manière caractéristique telle que des lignes dermiques concentriques pour les images d’empreintes digitales, des successions de fibres pour les images de matériaux fibreux, des enroulements spiraux des bras de galaxies pour des images astronomiques, des horizons sismiques empilés pour les images sismiques, etc.

Pour ce type d’images, la reconstruction d’hypersurfaces permet d’en décrire la géométrie et la structure. Elle consiste à reconstituer les structures directionnelles au sein de la donnée et ce à partir de l’image d’intensité. L’approche de reconstruction retenue dans ce mémoire se base sur une minimisation globale sous contraintes de valeurs de passage de l’hypersurface, à partir d’un champ d’orientation préalablement estimé en chaque point de l’image en utilisant la méthode du tenseur de structure [Big86, Don99]. La minimisation globale se rapporte à la résolution d’une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) non-linéaire sous contraintes de passage [LGF⁺06, Zin12].

Dans ce mémoire, les reconstructions d’hypersurfaces sont considérées comme étant un moyen de description à la fois amont et aval de la géométrie des textures directionnelles. Dans une démarche amont, la reconstruction de faisceaux locaux et denses d’hypersurfaces conduit à un modèle de transformation d’espace local permettant de déplier localement la texture ou son champ de gradient et d’améliorer l’estimation du champ d’orientation au moyen du classique tenseur de structure. Dans une démarche aval, des reconstructions d’hypersurfaces effectuées sur des supports polygonaux quelconques, isolés ou imbriqués, permettent d’obtenir des reconstructions plus pertinentes que par les méthodes existantes. Les démarches proposées mettent en œuvre des chaînes de transformations d’espace conformes afin, d’une part, de respecter les contraintes et, d’autre part, d’accéder à des schémas de résolution rapide.

Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire s’inscrit dans le cadre d’une collaboration contractuelle entre le groupe TOTAL et le groupe Signal et Image du laboratoire IMS et s’intègre notamment dans le cadre de l’analyse d’images sismiques afin de décrire la succession des couches sédimentaires. Ce contexte applicatif motive fortement les travaux présentés qui sont génériques et applicables à d’autres textures directionnelles.

Ce document s’articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous dressons un bilan des méthodes de reconstruction d’hyper-surfaces existant dans la littérature. Nous nous intéressons plus particulièrement à la méthode par minimisation globale sous contraintes par résolution d’une EDP. L’EDP peut être résolue de manière itérative avec un terme de mise-à-jour se rapportant, après linéarisation, à une équation de Poisson. Au vu de la taille des données considérées pour les applications sismiques, seule une résolution rapide peut être retenue. Celle-ci se base sur le passage dans le domaine de Fourier lorsque le domaine de reconstruction est rectangulaire. Lorsque tel n’est pas le cas, une transformation d’espace peut donner lieu à une résolution rapide de l’EDP en transformant le domaine de reconstruction en rectangle. Dans des contextes bruités, de régions de ruptures (cicatrices de l’épiderme, failles sismiques, régions d’occlusion, etc.), ou de textures directionnelles présentant des géométries asymétriques, dites complexes en terme de courbures ou de convergences, le champ d’orientation est biaisé et donne lieu à des reconstructions erronées. Des contraintes supplémentaires doivent alors être imposées. Selon la nature des contraintes, des méthodes dites “par masque” [LG06, Zin12] ou “par parties quadrangulaires” [ZDDL13] peuvent être mises en œuvre mais présentent, respectivement, des limitations en nombre de contraintes de passage prises en compte ou un caractère non global.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons tout d’abord une méthode de reconstruction globale basée sur la minimisation de l’EDP lorsque les points de contrôle définissent le contour d’un polygone. Une chaîne de transformations d’espace conformes faisant intervenir des transformations de Schwarz-Christoffel et de Möbius permet de transformer le domaine polygonal défini par les contraintes en un domaine rectangulaire pour la résolution de l’EDP. Cette transformation donne accès à une résolution rapide par passage dans le domaine de Fourier et conserve le caractère global de la reconstruction. Cependant, cette méthode ne permet pas la prise en compte de points de passage imposés à l’intérieur du contour polygonal. Nous présentons ensuite un schéma incrémental qui consiste à prendre en compte les points de passage de manière progressive sous la forme de polygones imbriqués définissant des domaines d’aires croissantes. Le premier polygone fait tout d’abord l’objet de la reconstruction par la méthode globale précédemment présentée. Par la suite, chaque ajout d’un polygone conduit à une reconstruction rapide sur une couronne à l’aide d’une chaîne de transformations d’espace de Schwarz-Christoffel entre régions doublement connexes. Ne modifiant pas les reconstructions déjà effectuées et étendant le domaine total, la démarche est en ce sens stable et peut être qualifiée de quasi-globale. Les résultats obtenus sur des images sismiques montrent l’intérêt de nos approches.

Dans le troisième chapitre de ce manuscrit, la reconstruction d'hypersurfaces est un outil de description de la géométrie des structures directionnelles dans les régions complexes où les orientations estimées au moyen du tenseur de structure sont biaisées. Dans ce contexte, nous proposons un canevas d'estimation d'orientation invariant à la géométrie locale et se basant sur la méthode du tenseur de structure. Au lieu d'être appliquée dans l'espace initial de la donnée, la moyenne spatiale isotrope de la méthode du tenseur de structure est effectuée dans un espace aplani obtenu à partir d'un modèle paramétrique de transformation d'espace issu de reconstructions locales d'hypersurfaces. L'aplanissement peut être appliqué aussi bien au champ de gradient qu'à l'image d'intensité. Le processus est itéré afin de reconstruire des hypersurfaces plus représentatives de la texture conduisant à une estimation d'orientation plus exacte. Des expériences sont finalement conduites sur des images synthétiques, des images d'empreintes digitales, de matériaux fibreux et des images sismiques présentant des géométries complexes.

Après avoir dressé des conclusions et perspectives générales des trois chapitres, trois annexes sont présentées à la fin de ce mémoire. La première détaille l'approche algorithmique pour estimer les transformations de Schwarz-Christoffel directe et inverse utilisées dans le deuxième chapitre. Dans la deuxième annexe, nous présentons une démonstration mathématique du biais d'estimation introduit par le tenseur de structure dans le cadre d'une image présentant des courbures asymétriques. La troisième et dernière annexe présente le procédé d'acquisition et de construction des images sismiques par réflexion, qui sont l'application principale des contributions de ce mémoire, ainsi que différentes configurations texturales d'intérêt.

Chapitre 1

Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Introduction | 6 |
| 1.2 | Reconstruction par minimisation sous contraintes | 8 |
| 1.2.1 | Notion d'orientation | 8 |
| 1.2.2 | Reconstruction à partir du champ d'orientation | 10 |
| 1.2.2.1 | Hypersurface explicite | 10 |
| 1.2.2.2 | Types de contraintes | 11 |
| 1.2.2.3 | Reconstruction numérique | 13 |
| 1.3 | Reconstruction dans le cas de changements d'espace | 15 |
| 1.3.1 | Transformation du pendage dans le cas d'un changement d'espace | 16 |
| 1.3.2 | Transformation du pendage dans le cas d'une chaîne de changements d'espace | 18 |
| 1.4 | Reconstruction rapide sur domaine non-rectangulaire | 19 |
| 1.4.1 | Méthode du masque | 20 |
| 1.4.1.1 | Prise en compte d'un terme de pondération | 20 |
| 1.4.1.2 | Pondération binaire | 21 |
| 1.4.2 | Méthode des quadrangles | 22 |
| 1.4.2.1 | Construction des quadrangles | 23 |
| 1.4.2.2 | Reconstruction rapide sur un quadrangle | 24 |
| 1.4.2.3 | Reconstruction de l'hypersurface complète | 25 |
| 1.5 | Conclusion | 26 |

1.1 Introduction

Les textures linéiques directionnelles sont composées d'hypersurfaces qui apparaissent sous forme de lignes dans les images bidimensionnelles ou de surfaces dans les images tridimensionnelles. Les hypersurfaces peuvent s'organiser de façon caractéristique à la manière de lignes dermiques concentriques dans les images d'empreintes digitales, de couches sédimentaires empilées dans les images sismiques ou encore d'entassement de fibres dans les images de matériaux fibreux.

La reconstruction d'hypersurfaces permet, à partir d'une image d'intensité, de suivre une ou plusieurs structures constituées de pixels connexes dont la luminance est très voisine et ce sur toute la donnée ou une partie de celle-ci. Elle trouve de nombreuses applications dans les espaces bidimensionnels et tridimensionnels. Notamment, de nombreux algorithmes de reconnaissance d'empreintes digitales [Qi05, WH11] se basent sur la reconstruction des hypersurfaces de lignes dermales. Dans un contexte industriel, la reconstruction des hypersurfaces de fibres permet la caractérisation et la modélisation [EC02] des matériaux. De même, la reconstruction d'horizons sismiques qui sont les hypersurfaces des images sismiques est une étape clé lors du processus de compréhension de la structure du sous-sol par l'étude de la succession des différentes couches géologiques terrestres, désignée par le terme d'*interprétation sismique*.

Durant les trente dernières années, de nombreuses méthodes de reconstruction d'hypersurfaces ont été proposées. On retrouve notamment les méthodes par croissance de région à partir d'un ou plusieurs points initiaux, appelés *germes*, [BS98, Don99, BSR03, PLV09] et celles basées sur un processus de minimisation globale [KWT88, OS88, LGF⁺06, Zin12].

Les méthodes par croissance de région se basent sur une mesure de similarité de forme [Don99, BSR03, PLV09] ou sur l'intégration d'une information sur le champ normal de l'image [BS98, BP05]. Elles sont par nature sensibles au bruit et au choix des germes. La conciliation des reconstructions issues de plusieurs germes est une tâche délicate. Par ailleurs, si le parcours de droite à gauche est naturel dans le cas 2D, le passage au cas 3D multiplie les possibilités de sens de croissance et conduit à autant de solutions.

Les méthodes par minimisation globale se basent sur des approches diverses. Les méthodes basées sur les contours actifs [KWT88, Coh91, CC93, CKS97], aussi appelés *snakes*, consistent à faire évoluer un ensemble de points à partir d'une position initiale jusqu'à épouser le contour de l'hypersurface. Elles se basent sur la minimisation d'une fonction qui dépend de trois types de contraintes : des contraintes internes représentent les caractéristiques géométriques telles que la courbure ou la normale, des contraintes d'attaches aux données traduisent notamment des informations sur la valeur approchée de l'intensité de la structure directionnelle et des contraintes externes introduites par l'utilisateur telles que le pas d'échantillonnage des contours. Cependant, elles sont utilisées uniquement dans le cas où le support de reconstruction est un fermé. Les approches régions, initialement proposées par [OS88] tiennent compte des caractéristiques globales de la région à l'intérieur d'une hypersurface fermée ainsi que de paramètres locaux selon

le contour. Dans un espace à N dimensions, il s'agit de contours actifs de dimension $N - 1$ où l'hypersurface correspond à l'annulation d'une fonction dite *level set* [SSO94, EFFM02]. Ces deux méthodes ne peuvent pas être utilisées dans un cadre de résolution rapide, généralement exécuté dans le domaine de Fourier.

La méthode qui nous intéresse dans ce mémoire offre la possibilité d'accéder à une reconstruction rapide. Elle repose sur la résolution sous contraintes d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) non linéaire de type Poisson basée sur le champ de normales [LGF⁺06, LG06, Zin12]. Cette méthode permet la reconstruction d'une hypersurface explicite notamment sous contraintes de la connaissance de points de passage de l'hypersurface ou de la valeur de l'hypersurface sur les frontières de son domaine de définition. Elle permet également la prise en compte de changements d'espace à l'aide de transformations bijectives de classe \mathcal{C}^1 . Dans les deux cas, le passage au domaine de Fourier permet d'obtenir une reconstruction rapide sur un support rectangulaire dans le contexte supervisé d'imposition de contraintes.

Les images traitées contiennent souvent, voire toujours, des zones bruitées relatives au procédé d'acquisition des images ou à la structure même de la donnée pouvant être chaotique par endroits. De plus, il se peut que la donnée présente des régions d'intensité constante en raison, par exemple, de la présence d'un objet occultant l'acquisition.

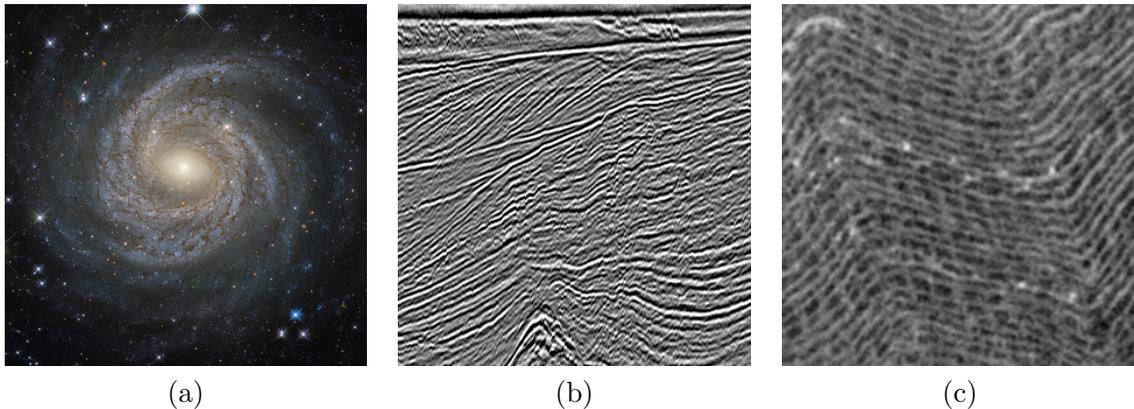


Figure 1.1 – *Galaxie spirale NGC 6814 avec courbures asymétriques - crédits image : NASA / ESA / Hubble (a), image sismique avec convergences (b) et image de matériau fibreux avec surpiqûres (c).*

Des propriétés propres au type de texture directionnelle traitée complexifient également le processus de reconstruction d'hypersurfaces. La géométrie des structures directionnelles impacte l'estimation de l'orientation et donc la qualité de la reconstruction. Les géométries complexes désignent ici des phénomènes de courbures asymétriques souvent présents dans les images d'empreintes digitales ou de bras de galaxies spirales (voir figure 1.1.a), ou encore de convergence qu'on retrouve notamment dans les régions d'érosion pour les images sismiques (voir figure 1.1.b) ainsi que des géométries à forte variation spatiale pouvant correspondre à des micro-structures

marginales (voir figure 1.1.c). L’introduction de contraintes supplémentaires permet de rendre les reconstructions plus fiables.

Lorsque les contraintes et le domaine de reconstruction sont quelconques, une méthode matricielle lente, par nature, est utilisée. Dans le cas où le domaine de reconstruction se rapporte à un rectangle sous une seule contrainte de passage, les méthodes par masque [LG06, Zin12] peuvent être utilisées. Lorsqu’on peut considérer les domaines de reconstruction comme étant l’enveloppe convexe des contraintes, la méthode des quadrangles est utilisée [ZDDL13]. Ces deux méthodes permettent d’accéder à des schémas de résolution rapide par analyse de Fourier.

Dans ce chapitre nous présentons tout d’abord les travaux existants concernant la reconstruction d’hypersurfaces par minimisation d’EDP sous contraintes, ainsi que les types de contraintes pouvant être considérées. Les méthodes de résolutions numériques sont présentées, notamment dans le cas rapide par transformée de Fourier. Nous traitons ensuite la reconstruction d’hypersurfaces dans le cas d’une transformation d’espace. Nous présentons enfin les variantes de l’algorithme permettant la prise en compte de contraintes définissant un domaine non-rectangulaire dans un contexte supervisé.

1.2 Reconstruction par minimisation sous contraintes

Nous nous intéressons dans cette partie à la reconstruction d’hypersurfaces d’un espace vectoriel E_N de dimension N sur \mathbb{R} muni d’un repère orthonormé \mathcal{R}_1 défini par un centre O_1 et une base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_1^N)$.

Le préfixe “hyper” du terme hypersurface fait référence à la notion d’hyperplan. Un hyperplan de l’espace vectoriel E_N est un sous-espace vectoriel de dimension $N - 1$ et donc de codimension 1. De même, les hypersurfaces sont des objets de dimension $N - 1$ dans un espace vectoriel de dimension N . Ainsi, dans le cas particulier où $N = 2$, une hypersurface est une ligne. En dimension 3, une hypersurface est une surface. Dans le cas plus abstrait d’un espace vectoriel de dimension 4, une hypersurface représente un volume plein.

1.2.1 Notion d’orientation

Pour un espace vectoriel de dimension 2, le *champ d’orientation* d’une image d’intensité peut être défini comme étant l’ensemble des vecteurs normaux (voir figure 1.2) ou tangents à la direction de plus forte variation d’intensité décrite par les gradients pour chaque point de l’image. Dans le cas d’une texture directionnelle, il s’agit de l’ensemble des vecteurs normaux ou tangents à la pente en chaque point de l’image. Dans les applications qui nous intéressent, le sens du champ d’orientation n’a pas d’importance et, par conséquent, l’angle d’orientation est π -périodique. En dimensions supérieures $N > 2$, une hypersurface est localement caractérisée par un vecteur normal et $N - 1$ vecteurs tangents. Aussi, dans la suite de ce manuscrit, le champ d’orientation désignera toujours l’ensemble des vecteurs normaux.

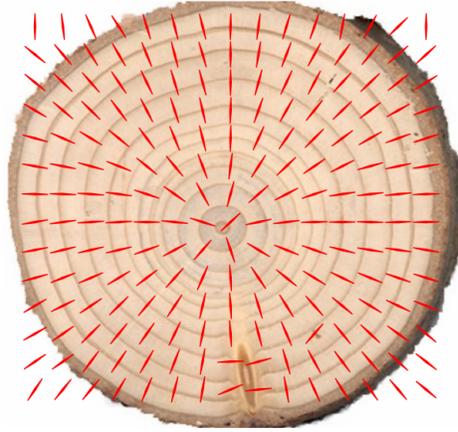


Figure 1.2 – Anneaux de croissance d’un arbre et champ d’orientation correspondant (en rouge).

Pour les textures directionnelles, le champ d’orientation fournit des caractéristiques clés à propos de l’organisation directionnelle telles que la courbure, l’anisotropie ou encore la régularité de la texture. Ainsi, de nombreux algorithmes proposés dans la littérature se basent sur le champ d’orientation comme donnée d’entrée pour diverses applications. Il permet notamment de rehausser et d’interpréter les empreintes digitales [HWJ98, YFJ11, SM93], de régulariser les images [TD05], d’effectuer la segmentation d’images [RBD03] et de synthétiser des textures [Pey09, AYD⁺15].

Le champ d’orientation est généralement estimé à travers l’analyse en composantes principales du champ de gradients de l’image. Cette méthode, que nous présenterons dans le chapitre 3, est connue sous le nom de tenseur de structure.

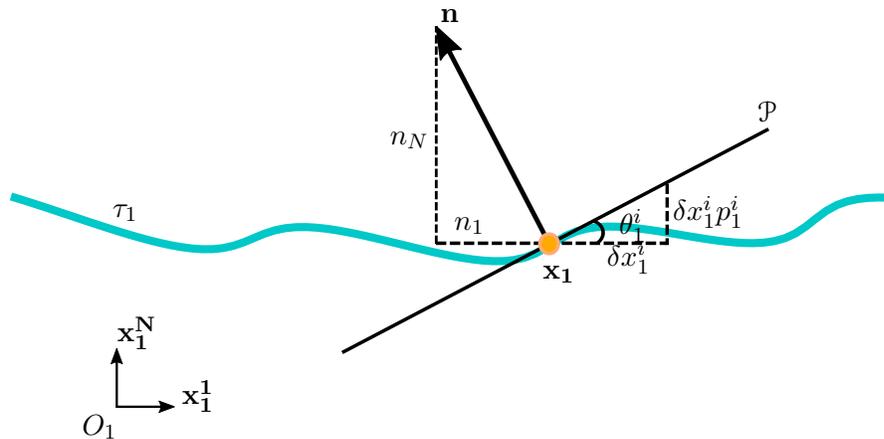


Figure 1.3 – Représentation de l’angle θ_1^i de la i -ème composante du pendage au point \mathbf{x}_1 dans le repère \mathcal{R}_1 .

Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes

Le terme *pendage* est issu du vocabulaire géologique. Il désigne l'inclinaison d'une structure géologique par rapport à l'horizontale. En d'autres termes, il s'agit de la tangente à la pente locale selon chaque direction de l'hyperplan défini par \mathcal{R}_1 et est donc perpendiculaire au vecteur d'orientation en tout point (voir figure 1.3).

Pour un point \mathbf{x}_1 de l'espace vectoriel E_N , le pendage exprimé dans le repère \mathcal{R}_1 est un vecteur $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_1^{N-1})$ de dimension $N - 1$ dont les composantes sont les tangentes des angles θ_1^i formés par la perpendiculaire à l'orientation et les directions respectives définies par \mathcal{R}_1 (voir figure 1.3). Les composantes de θ_1 sont définies par l'arctangente de la projection du déplacement infinitésimal δx_1^i selon la i -ème dimension selon l'hyperplan tangent \mathcal{P} . Les composantes du pendage s'expriment :

$$\forall i \in [1, N - 1], p_1^i(\mathbf{x}_1) = \tan \theta_1^i(\mathbf{x}_1) = -\frac{n_i(\mathbf{x}_1)}{n_N(\mathbf{x}_1)}. \quad (1.1)$$

1.2.2 Reconstruction à partir du champ d'orientation

1.2.2.1 Hypersurface explicite

Dans un espace vectoriel à N -dimensions (x_1^1, \dots, x_1^N) , une hypersurface explicite est représentée par une fonction τ_1 définie sur un domaine fermé borné Ω_1 de \mathbb{R}^{N-1} , par :

$$x_1^N = \tau_1(x_1^1, \dots, x_1^{N-1}), \quad (1.2)$$

par opposition à une hypersurface implicite définie par :

$$\tau_1(x_1^1, \dots, x_1^{N-1}, x_1^N) = 0. \quad (1.3)$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous confondrons l'hypersurface avec la fonction τ_1 . L'hypersurface est orthogonale en chaque point au champ d'orientation \mathbf{n} [Zin12] (voir figure 1.4).

Une hypersurface explicite τ_1 vérifie donc une EDP non linéaire reliant le gradient $\nabla(\tau_1)$ au pendage \mathbf{p}_1 déduit du champ d'orientation \mathbf{n} et exprimé dans le repère \mathcal{R}_1 [LGF+06] :

$$\forall \mathbf{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_1^{N-1}) \in \Omega_1, \nabla \tau_1(\mathbf{x}_1) = \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1, \tau_1(\mathbf{x}_1)). \quad (1.4)$$

L'hypersurface est reconstruite de manière itérative en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le gradient de τ_1 et la tangente du pendage \mathbf{p}_1 , ce qui se ramène à résoudre un problème d'optimisation non linéaire globale sur Ω_1 :

$$\tau_1 = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2} \int_{\Omega_1} \|\nabla g(\mathbf{x}_1) - \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1))\|^2, \quad (1.5)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne et \mathcal{C}^2 l'ensemble des fonctions au moins deux fois dérivables

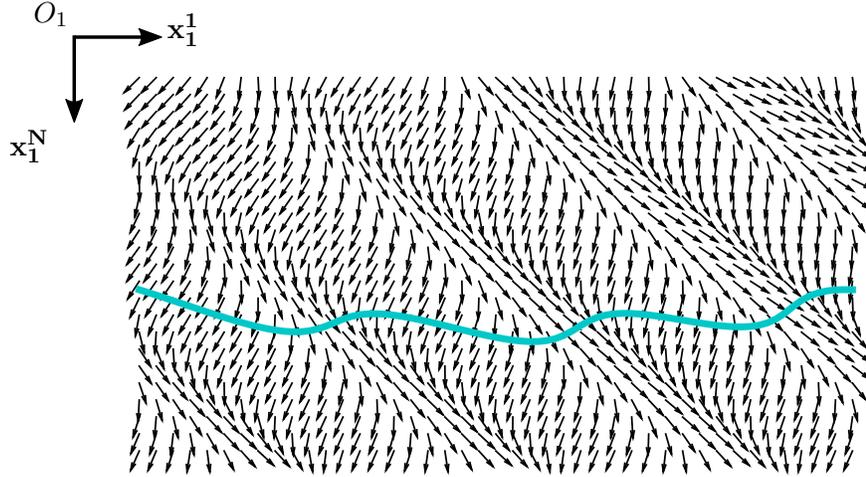


Figure 1.4 – *Hypersurface d'un champ d'orientation exprimée de manière explicite dans le repère (O, x_1^1, \dots, x_1^N) .*

et dont la dérivée seconde est continue.

Après linéarisation, la solution est obtenue par un procédé itératif dont le terme de mise à jour δg vérifie une équation de Poisson :

$$\Delta(\delta g(\mathbf{x}_1)) = -\text{div}(\nabla g(\mathbf{x}_1) - \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1))), \quad (1.6)$$

où Δ et div désignent respectivement les opérateurs Laplacien et divergence :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1.7)$$

$$\text{div } u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.8)$$

En l'absence de contraintes, l'équation (1.5) admet de nombreuses solutions et le problème est mal posé. Des contraintes sont à déterminer pour obtenir une solution unique.

1.2.2.2 Types de contraintes

Nous désignons par le terme *contraintes* une connaissance ou un a priori supplémentaire. On distingue entre les *contraintes de domaine* qui peuvent concerner la forme ou l'étendue du domaine de reconstruction Ω_1 et les *contraintes de valeurs* qui sont directement relatives à la fonction à reconstruire. Les contraintes de domaine concernent la grille et ont $N - 1$ coordonnées tandis que les contraintes de valeurs ont N coordonnées chacune. Les contraintes de domaine et

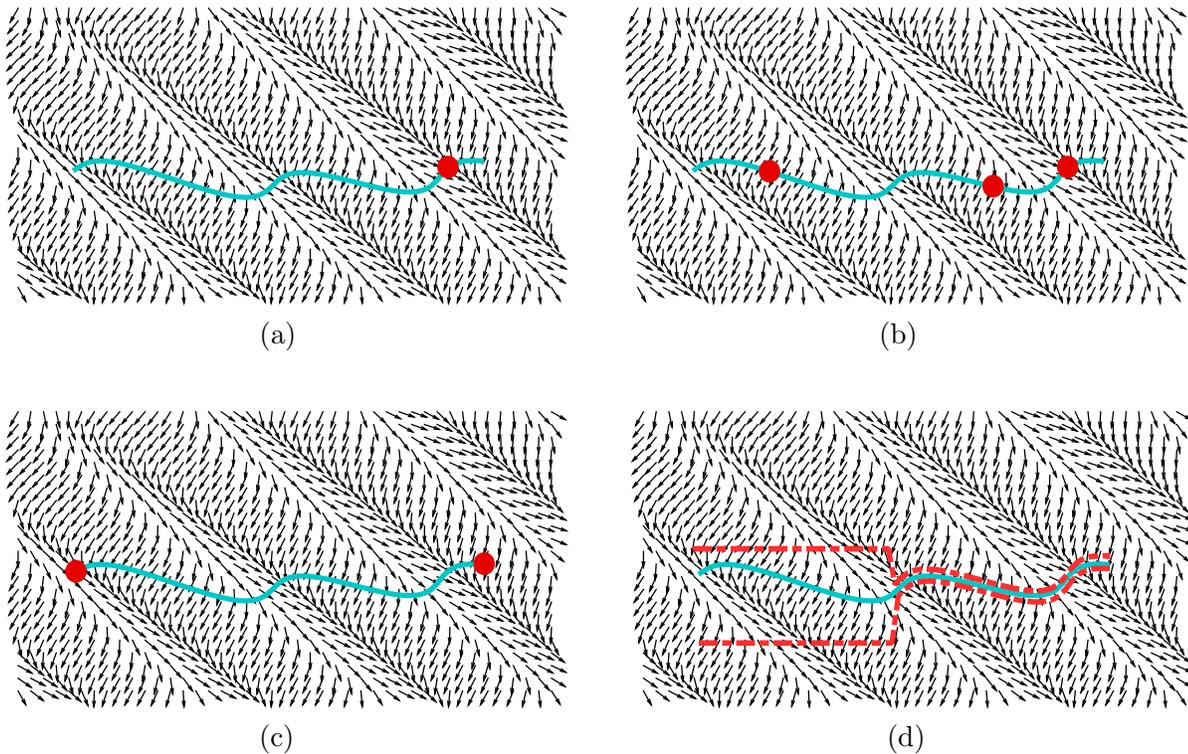


Figure 1.5 – *Hypersurface d'un champ d'orientation bidimensionnel reconstruite sous contraintes d'un point de passage (a), de trois points de passage (b), de frontières (c) et de bornes (d).*

de valeurs peuvent être combinées.

En l'absence de contraintes de valeurs, le système (1.4) a une infinité de solutions. Les contraintes de valeurs permettent de définir une solution unique au problème, elles peuvent être regroupées en contraintes de points de passage, contraintes aux limites et contraintes de bornes :

- Les contraintes de points de passage déterminent la valeur de τ_1 en un nombre fini de points de Ω_1 (figures 1.5.a et 1.5.b).
- Les contraintes ou conditions aux limites se subdivisent en contraintes de Dirichlet (ou contraintes de frontières), Neumann, Robin et mixtes :
 - Les contraintes de Dirichlet (ou contraintes de frontières) désignent les contraintes de valeurs imposées sur τ_1 sur les frontières du domaine Ω_1 (figure 1.5.c). Il s'agit d'un cas particulier de contraintes de points de passage.
 - Les contraintes de Neumann spécifient les valeurs des dérivées de la solution sur les frontières du domaine Ω_1 .
 - Les contraintes de Robin sont des combinaisons pondérées de contraintes aux frontières de Dirichlet de Neumann.
 - Les contraintes mixtes désignent la juxtaposition de différentes contraintes aux limites

1.2 - Reconstruction par minimisation sous contraintes

sur différentes parties de la frontière du domaine.

- Les contraintes de bornes consistent à approcher la fonction τ_1 par une borne supérieure et une borne inférieure :

$$\forall \mathbf{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_1^{N-1}) \in \Omega_1, \tau_{down}(\mathbf{x}_1) \leq \tau_1(\mathbf{x}_1) \leq \tau_{up}(\mathbf{x}_1). \quad (1.9)$$

Le cas particulier $\tau_{down}(\mathbf{x}_1) = \tau_{up}(\mathbf{x}_1)$ sur une région de Ω_1 permet d'y imposer les valeurs exactes de τ_1 (figure 1.5.d) ou de borner la fonction tout en imposant ses valeurs sur un nombre fini de points.

En pratique, dans un contexte supervisé et interactif, les contraintes les plus naturelles sont la définition des lieux de passages d'une hypersurface ou de la région d'intérêt. Aussi, dans le reste de ce document, nous nous intéresserons en particulier aux contraintes de frontières et aux contraintes de points de passage combinées à des contraintes de domaine.

1.2.2.3 Reconstruction numérique

La résolution numérique du problème de reconstruction se fonde sur la méthode des éléments finis [SF08, ZTZ09] en discrétisant le domaine Ω_1 par échantillonnage régulier dans chacune des $N - 1$ directions de l'espace vectoriel. Cet échantillonnage donne lieu à la grille de reconstruction constituée de N_Ω points.

Les opérateurs différentiels sont approximés dans ce mémoire par différences finies en utilisant des filtres convolutifs appliqués à trois échantillons consécutifs :

$$(T_1) : \quad \frac{1}{2h_i} [1 \quad 0 \quad -1] \quad (1.10)$$

$$(T_2) : \quad \frac{1}{h_i^2} [1 \quad -2 \quad 1] \quad (1.11)$$

où h_i désigne le pas d'échantillonnage dans la i -ème dimension. Les filtres (T_1) et (T_2) permettent respectivement de calculer les dérivées première et seconde. Un point supplémentaire est nécessaire pour le calcul des dérivées sur la frontière du domaine. Il est choisi égal au point d'application pour la dérivée première et à son opposé pour le calcul de la dérivée seconde [Zin12].

1.2.2.3.1 Méthode matricielle

Par application de la méthode des éléments finis, l'équation (1.6) donne lieu à un système matriciel [BGN70, Swe73, Swa74] de la forme :

$$A\tau_1 = B, \quad (1.12)$$

Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes

où A est une matrice creuse de taille $M_\Omega \times N_\Omega$ contenant les coefficients du filtre Laplacien, τ_1 est un vecteur de taille N_Ω et B est le vecteur lié aux données et est de taille M_Ω .

Dans le cas d'un seul point de passage ou de 2^{N-1} contraintes de frontières, $N_\Omega = M_\Omega$, A est une matrice carrée et le problème est bien posé. La solution s'exprime :

$$\tau_1 = A^{-1}B, \quad (1.13)$$

où A^{-1} est l'inverse de A .

Autrement, $M_\Omega > N_\Omega$ et le système (1.12) est sur-déterminé. La solution s'obtient par minimisation aux moindres carrés et s'exprime :

$$\tau_1 = A^*B, \quad (1.14)$$

où $A^* = ({}^tAA)^{-1} {}^tA$ est la pseudo-inverse de A et tA désigne la transposée de A .

Le calcul des matrices A^* et A^{-1} se base sur la décomposition de la matrice A en matrices triangulaires, diagonales et de permutations. Le calcul de l'inverse ou de la pseudo-inverse de A présente une complexité calculatoire cubique et la méthode matricielle directe est, par conséquent, dite lente.

Des approches itératives permettent d'atteindre une complexité calculatoire quadratique à chaque itération en convergeant vers la solution à partir d'un vecteur initial. Elles peuvent se baser sur des méthodes de relaxation faisant intervenir des matrices dont l'inversion est peu coûteuse ou par une méthode du gradient. Cependant, elles sont sensibles à l'initialisation et peuvent converger vers un minimum local.

1.2.2.3.2 Méthode rapide par transformée de Fourier

Pour les domaines hyperrectangulaires qui généralisent la notion de domaine rectangulaire dans le cas tridimensionnel au cas général, des approches basées sur la transformée de Fourier [Hoc65, Swa77, Pin03] et une variante basée sur la transformée en cosinus [ANR74, Str99] permettent la résolution rapide du problème (1.6). Elles permettent d'obtenir la solution exacte de (1.12) avec un coût calculatoire quasi-linéaire en $N_\Omega \log N_\Omega$.

Ces méthodes sont applicables lorsque le domaine de reconstruction est rectangulaire avec l'hypothèse que la fonction soit périodique. Or ce n'est généralement pas le cas. Pour respecter la périodicité et la continuité des dérivées aux frontières, ces méthodes se basent sur l'agrandissement des signaux en appliquant un miroir discret périodique des composantes de τ_1 et de B pour obtenir respectivement $\tilde{\tau}_1$ et \tilde{B} . Elles sont liées par un opérateur de convolution circulaire ϕ_Δ représentant le Laplacien discret selon :

$$\tilde{\tau}_1 \otimes \phi_\Delta = \tilde{B}, \quad (1.15)$$

1.3 - Reconstruction dans le cas de changements d'espace

où \circledast désigne l'opérateur de convolution circulaire. Par passage au domaine de Fourier, l'équation (1.15) devient :

$$\text{TFD}(\tilde{\tau}_1) \circledast \text{TFD}(\phi_\Delta) = \text{TFD}(\tilde{B}), \quad (1.16)$$

où TFD et \circledast désignent respectivement la transformée de Fourier discrète et l'opérateur de multiplication terme à terme. La solution du système s'exprime alors :

$$\tilde{\tau}_1 = \text{TFDI}(\text{TFD}(\tilde{B}) \circledast \text{TFD}(\phi_\Delta^{-1})), \quad (1.17)$$

où TFDI désigne la transformée de Fourier discrète inverse. Selon le type de contraintes, le miroir est soit pair soit impair et la transformée de Fourier se rapporte respectivement à une transformée en cosinus ou en sinus discrète.

1.3 Reconstruction dans le cas de changements d'espace

Dans le cadre de la reconstruction rapide d'hypersurfaces sous contraintes par transformée de Fourier, un changement (ou une transformation) d'espace peut être introduit soit pour traiter le cas d'une hypersurface implicite soit pour changer le domaine de reconstruction. Dans le premier cas, le changement d'espace permet d'exprimer l'hypersurface implicite sous forme explicite dans un nouveau repère (voir figure 1.6). Dans le second cas, il s'agit de la transformation du domaine initial en domaine hyperrectangulaire qui est la généralisation d'un domaine rectangulaire pour un espace vectoriel tridimensionnel à un espace vectoriel de n'importe quelle dimension.

Un changement d'espace (ou de repère) est un ensemble de transformations mathématiques d'un espace vectoriel E_N vers E_N . Les principaux exemples de changements d'espace sont les transformations affines (rotations, translations, homothéties, etc.) ou encore les changements de système de coordonnées tels que le passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires ou sphériques.

Tout point de E_N est représenté dans le repère $(O_1, \mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_1^N)$ par $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_1^N)$ et dans le repère $(O_2, \mathbf{x}_2^1, \dots, \mathbf{x}_2^N)$ par $\mathbf{x}_2 = (x_2^1, \dots, x_2^N)$. Le passage de \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_2 se fait par le changement d'espace noté \mathcal{F} qui est une transformation bijective définie comme suit :

$$\forall \mathbf{x}_1 \in \Omega_1, \mathcal{F}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2 \in \Omega_2. \quad (1.18)$$

La transformation inverse est notée \mathcal{F}^{-1} :

$$\forall \mathbf{x}_2 \in \Omega_2, \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \in \Omega_1. \quad (1.19)$$

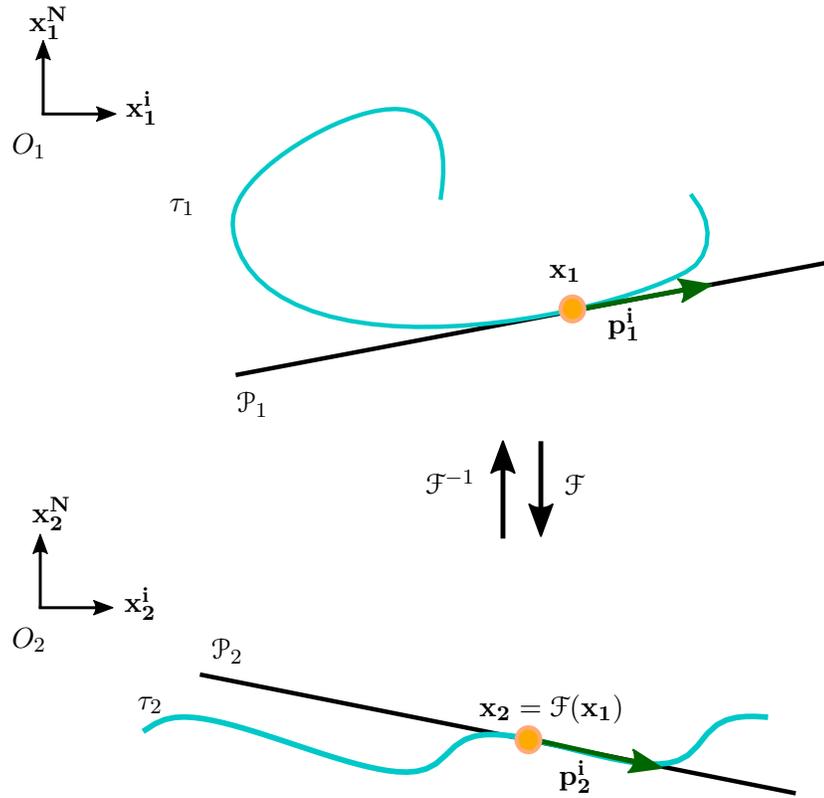


Figure 1.6 – *Hypersurface implicite τ_1 transformée en hypersurface explicite τ_2 par le changement d'espace \mathcal{F} .*

1.3.1 Transformation du pendage dans le cas d'un changement d'espace

Nous introduisons les notions de *domaine de reconstruction* noté Ω_1 et de *domaine de résolution* noté Ω_2 . Le *domaine de reconstruction* correspond au domaine de définition de la donnée. Le *domaine de résolution* correspond, quant à lui, à l'image de Ω_1 par la transformation d'espace \mathcal{F} . Dans le contexte de reconstruction rapide par minimisation sous contraintes, Ω_2 est nécessairement un domaine hyperrectangulaire.

Lorsqu'un changement d'espace bijectif \mathcal{F} allant de \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_2 est requis, une reconstruction s'obtient [ZDL12] à partir de l'équation (1.4) exprimée dans l'espace transformé :

$$\forall \mathbf{x}_2 \in \Omega_2, \nabla \tau_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_2, \tau_2(\mathbf{x}_2)), \quad (1.20)$$

De même que pour le problème (1.4), la reconstruction de l'hypersurface s'obtient par mini-

1.3 - Reconstruction dans le cas de changements d'espace

minimisation non-linéaire sous contraintes sur le domaine Ω_2 :

$$\tau_2 = \operatorname{argmin}_{g \in \mathcal{C}^2} \int_{\Omega_2} \|\nabla g(\mathbf{x}_2) - \mathbf{p}_2(\mathbf{x}_2, g(\mathbf{x}_2))\|^2, \quad (1.21)$$

La résolution de l'EDP dans le domaine Ω_1 est quasi-équivalente à la résolution dans le domaine transformé Ω_2 . En effet, la forme de l'équation de Poisson est conservée sous certaines conditions sur \mathcal{F} .

Si \mathcal{F} est différentiable, elle est caractérisée par son Jacobien direct \mathcal{J}_1^2 qui s'exprime ainsi :

$$\mathcal{J}_1^2(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^1}(\mathbf{x}_1) & \cdots & \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^N}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_2^N}{\partial x_1^1}(\mathbf{x}_1) & \cdots & \frac{\partial x_2^N}{\partial x_1^N}(\mathbf{x}_1) \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Exemple 1.3.1. Le Jacobien d'une translation en espace de dimension N est la matrice identité I_N de taille N .

Exemple 1.3.2. Le Jacobien direct d'une rotation bidimensionnelle d'angle α est :

$$\mathcal{J}_1^2(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Le pendage \mathbf{p}_2 dans l'espace transformé s'exprime en fonction des données dans l'espace initial Ω_1 . Considérons le vecteur \mathbf{p}_2^i au point \mathbf{x}_2 appartenant à τ_2 d'hyperplan tangent \mathcal{P}_2 (voir figure 1.3). Soit le déplacement infinitésimal positif δx_2^i selon le vecteur \mathbf{x}_2^i , la i -ème composante du pendage s'exprime alors :

$$\mathbf{p}_2^i = \delta x_2^i \mathbf{x}_2^i + \delta x_2^i p_2^i \mathbf{x}_2^N. \quad (1.24)$$

Sous l'hypothèse que \mathcal{F} préserve les angles, la transformation réciproque $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_2^i)$ appartient à l'hyperplan tangent \mathcal{P}_1 [BG92] et est orthogonale à la normale au point \mathbf{x}_1 . Les composantes p_2^i du pendage correspondent donc à la projection des vecteurs $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_2^i)$ sur les composantes des normales en $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2)$, ce qui est équivalent à annuler le produit scalaire entre $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2)$ et le vecteur normal.

Si la transformation \mathcal{F} préserve les angles, on a :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}_2) = \sum_{j=1}^N \delta x_1^j \mathbf{x}_1^j, \quad (1.25)$$

où δx_1^i est le déplacement infinitésimal positif selon le vecteur \mathbf{x}_1^i dans l'espace de départ cor-

Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes

respondant au déplacement infinitésimal δx_2^i dans l'espace d'arrivée. On a alors :

$$\delta x_1^i = \mathcal{F}_j^{-1}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{p}_2) - \mathcal{F}_j^{-1}(\mathbf{x}_2), \quad (1.26)$$

où \mathcal{F}_i^{-1} est la i -ème composante de \mathcal{F}^{-1} . Si \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} sont différentiables, (1.26) devient :

$$\delta x_1^i = \delta x_2^i \frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^i}(\mathbf{x}_2) + \delta x_2^i p_2^i \frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^N}(\mathbf{x}_2). \quad (1.27)$$

Les composantes des normales sont obtenues en annulant le produit scalaire, ce qui conduit à :

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^i}(\mathbf{x}_2) + p_2^i \frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^N}(\mathbf{x}_2) \right) n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2)) = 0. \quad (1.28)$$

Le vecteur des pentes est donc déduit des composantes des orientations $n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2))$ dans le domaine initial :

$$\forall i \in [1, N-1], p_2^i = - \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^i}(\mathbf{x}_2) \cdot n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2))}{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_1^j}{\partial x_2^N}(\mathbf{x}_2) \cdot n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_2))}. \quad (1.29)$$

L'expression du pendage transformé introduit les termes du Jacobien \mathcal{J}_2^1 de la transformation inverse \mathcal{F}^{-1} :

$$\mathcal{J}_2^1(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^1}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^N}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1^N}{\partial x_2^1}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \frac{\partial x_1^N}{\partial x_2^N}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} = [\mathcal{J}_1^2(\mathbf{x}_1)]^{-1}. \quad (1.30)$$

On obtient alors la relation entre les tangentes aux pendages dans l'espace de reconstruction et de résolution :

$$\mathbf{p}_2 = [{}^t \mathcal{J}_1^2]^{-1} \mathbf{p}_1 \quad (1.31)$$

1.3.2 Transformation du pendage dans le cas d'une chaîne de changements d'espace

Soit \mathcal{F} la transformations d'espace constituée d'une chaîne de M transformations d'espace f_1, \dots, f_M bijectives, de classe \mathcal{C}^1 et allant de \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_{M+1} (voir figure 1.7) :

$$\mathcal{F} = f_1 \circ \cdots \circ f_M. \quad (1.32)$$

La composée \mathcal{F} est bijective et de classe \mathcal{C}^1 de même que ses fonctions composantes. Sa

1.4 - Reconstruction rapide sur domaine non-rectangulaire

$$\mathbf{x}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbf{x}_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{M-1}} \mathbf{x}_M \xrightarrow{f_M} \mathbf{x}_{M+1}$$

Figure 1.7 – Sens de la chaîne de transformations de \mathcal{F} .

transformée réciproque \mathcal{F}^{-1} s'exprime :

$$\mathcal{F}^{-1} = f_M^{-1} \circ \dots \circ f_1^{-1}, \quad (1.33)$$

où $f_k^{-1}, k \in [1, M]$ désignent les transformées réciproques de $f_k, k \in [1, M]$.

Une reconstruction de l'hypersurface s'obtient par minimisation non-linéaire sous contraintes de l'équation (1.21). Le domaine de résolution est Ω_{M+1} et la grille de résolution est \mathbf{x}_{M+1} .

Les composantes du vecteur des pentes s'écrivent :

$$\forall i \in [1, N-1], p_{M+1}^i = - \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_1^j}{\partial x_{M+1}^i}(\mathbf{x}_{M+1}) \cdot n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_{M+1}))}{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_1^j}{\partial x_{M+1}^N}(\mathbf{x}_{M+1}) \cdot n_j(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}_{M+1}))}. \quad (1.34)$$

L'équation (1.34) fait intervenir les termes des Jacobiens \mathcal{J}_{k+1}^k des transformations d'espace inverses $f_k^{-1}, k \in [1, M]$:

$$\forall k \in [1, M], \mathcal{J}_{k+1}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k^1}{\partial x_{i+k}^1} & \dots & \frac{\partial x_k^N}{\partial x_{k+1}^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_k^1}{\partial x_{k+1}^N} & \dots & \frac{\partial x_k^N}{\partial x_{k+1}^N} \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

où $\mathbf{x}_k = (f_M \circ \dots \circ f_k)^{-1}(\mathbf{x}_{M+1})$. Il en découle que :

$$\mathcal{J}_{M+1}^1 = \prod_{k=1}^M \mathcal{J}_{k+1}^k(\mathbf{x}_{k+1}) \quad (1.36)$$

1.4 Reconstruction rapide sur domaine non-rectangulaire

De manière générale, les contraintes permettent d'imposer une connaissance supplémentaire sur l'hypersurface (*points de passage*) ou de contourner les régions complexes ou d'occlusion (*points de domaine*). Comme nous l'avons mentionné précédemment, les points de domaine délimitent le domaine de reconstruction sans en définir la valeur. Lorsque les points de domaine s'accompagnent d'un point de passage, la méthode du masque [LG06, Zin12] convient dans une variante binaire. Il s'agit de circonscrire la région d'intérêt non-rectangulaire à l'intérieur d'un rectangle afin de conserver le caractère rapide de la reconstruction. Lorsque plusieurs points

de passage sont imposés et que leur enveloppe définit une région convexe, la méthode des quadrangles [ZDDL13] permet de respecter les contraintes tout en maintenant le caractère rapide de la reconstruction. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons ces deux méthodes.

1.4.1 Méthode du masque

Dans le cadre de reconstruction d'une hypersurface par minimisation globale sous contraintes de valeurs, un terme de pondération peut être introduit afin d'atténuer la contribution de certains points ou de certaines régions de la donnée.

Dans un espace vectoriel de dimension N , le pondérateur est un masque W de même dimension $N - 1$ et taille N_Ω que l'hypersurface. La construction d'un masque permettant de tenir compte des régions complexes peut s'avérer difficile. Le masque peut-être déduit d'une fonction de pondération dont la classe de régularité sur le domaine de résolution est au moins égale à 1 [LG06] ou correspond à une image binaire [Zin12].

1.4.1.1 Prise en compte d'un terme de pondération

Le masque traduit la confiance en certaines valeurs du champ d'orientation. Ainsi, dans les régions où l'orientation est correctement estimée, le masque vaut 1 et il tend vers 0 dans les régions où le champ est chaotique ou ne traduit pas la structure texturée. Ceci peut être traduit par un terme de cohérence issu d'une analyse en composantes principales du tenseur de structure [Don99, ZDGL11] ou d'une fonction de pondération basée sur des attributs physiques de l'objet traité (vitesse de propagation des ondes, rejet des failles pour les images sismiques [LG06], modèle d'image dans le cas d'empreintes digitales, etc.), ou encore de pondérateurs gaussiens centrés autour des contraintes de valeur.

Le terme de pondération W intervient dans l'expression du résidu de l'équation (1.4). En l'absence de transformation d'espace, le résidu s'exprime comme suit :

$$\forall \mathbf{x}_1 \in \Omega_1, r(\mathbf{x}_1) = W(\mathbf{x}_1)(\nabla g(\mathbf{x}_1) - \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1))). \quad (1.37)$$

En supposant que le masque n'influe pas sur l'opérateur laplacien, ceci revient à multiplier le vecteur B du système matriciel (1.12) par la forme vectorielle de W :

$$A\tau_1 = W \odot B. \quad (1.38)$$

Dans le cas général, ce système est résolu par les méthodes matricielles présentées dans le paragraphe 1.2.2.3.1. Dans le cas particulier d'une seule contrainte de point de passage, la méthode rapide par transformée de Fourier du paragraphe 1.2.2.3.2 peut être utilisée pour la résolution.

1.4.1.2 Pondération binaire

Par nature, les horizons sismiques d’une image sismique ne traversent pas les failles sismiques. L’utilisation d’un masque binaire défini à partir des attributs des failles a prouvé son efficacité dans un contexte sismique où la donnée présente une géométrie non-courbée [Zin12]. L’utilisation de la méthode du masque binaire peut être étendue aux cas de régions d’occlusion, de zones fortement bruitées ou encore de défauts d’estimation de l’orientation pour n’importe quel type de texture directionnelle.

Zinck et *al.* ont proposé l’utilisation d’une pondération binaire [Zin12] qui permet d’annuler l’impact de certaines orientations sur la reconstruction. Cependant, cette méthode présente des limitations relatives aux bords du masque qui doivent être suffisamment éloignés. Si le masque contourne des points spatialement voisins (voir figure 1.8.a), le schéma de reconstruction ne tient pas compte du modèle de discontinuité. Ceci conduit à des reconstructions erronées contrairement au cas où les points des bords du masque sont suffisamment éloignés (voir figure figure 1.8.b), pour lesquels les orientations des points rouges n’interfèrent pas. De plus, la méthode du masque reconstruit l’hypersurface sur le rectangle englobant les points de domaine. Le fait d’annuler les contributions de certaines régions a un impact sur la solution globale et peut donner lieu à des erreurs de reconstruction.

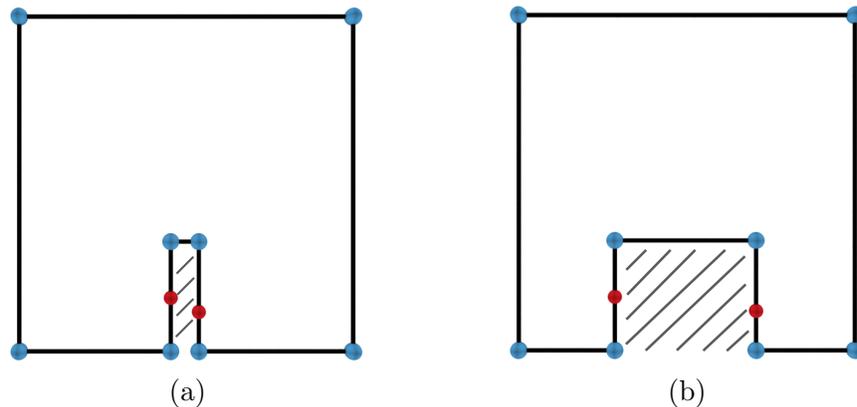


Figure 1.8 – Masques construits à partir des contraintes de points de domaines en bleu et points du bord des masques en rouge.

La définition du masque peut se révéler difficile car elle nécessite une connaissance a priori de la donnée et des lieux problématiques mais également de connaître le lieu de passage de l’hypersurface afin de définir la région à contourner au mieux. Aussi, une première reconstruction sans masque peut être effectuée afin de définir l’intersection entre l’hypersurface et les zones perturbatrices.

1.4.2 Méthode des quadrangles

Dans le cas général de contraintes de plusieurs points de passage, les méthodes globales sont coûteuses en ressources de temps de calcul et de mémoire. Une méthode basée sur la juxtaposition de plusieurs reconstructions partielles a été introduite [ZDDL13] dans le cas de données tridimensionnelles lorsque le domaine de reconstruction est le contour convexe des points de passage. La définition du contour convexe d'un ensemble de points peut se faire par l'algorithme de la marche de Jarvis [Jar73], du Parcours de Graham [Gra72], ou d'Andrew [And79] dans le cas où $N = 3$ et l'algorithme quickhull [BDH96] ou l'algorithme de Chan [Cha96] pour $N \geq 3$.

La méthode des quadrangles se base sur la construction d'un ensemble de quadrangles à partir des contraintes connues. Une reconstruction rapide est obtenue pour chaque quadrangle par passage au domaine de Fourier et ce en introduisant une transformation géométrique du quadrangle en domaine rectangulaire par le biais d'un Jacobien de transformation.

La méthode se base d'abord sur la construction des quadrangles à partir des contraintes de valeur, puis la reconstruction partielle de l'hypersurface sur chaque quadrangle avant de juxtaposer les reconstructions partielles obtenues.

Une autre méthode permettant de tenir compte de plusieurs contraintes de valeurs consiste à subdiviser le domaine en sous-parties rectangulaires au lieu de réaliser un pavage quadrangulaire [Zin12]. Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter d'effectuer de changement d'espace ni d'estimer de Jacobien. Cependant, la subdivision du domaine en rectangles n'est pas triviale et doit se faire en plusieurs étapes. Les deux méthodes possèdent des temps de calcul comparables [Zin12] mais la subdivision quadrangulaire permet de reconstruire des régions ne pouvant pas être reconstruites par pavage rectangulaire (voir figure 1.9).

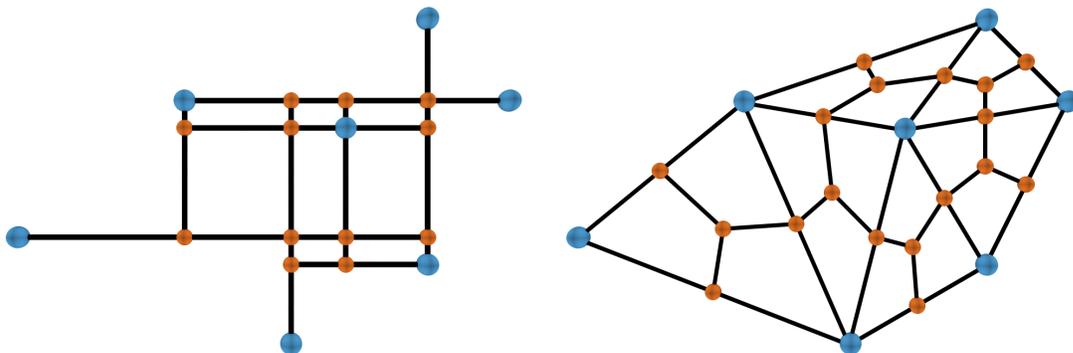


Figure 1.9 – *Différence entre le pavage rectangulaire et le pavage quadrangulaire issus des contraintes en bleu.*

Dans ce paragraphe nous nous intéressons en particulier au cas d'un espace vectoriel tridimensionnel. Pour les espaces bidimensionnels, il s'agit de cas particuliers où les quadrangles correspondent à des segments du domaine de reconstruction. Dans la suite, nous abordons en

particulier la transformation d'un quadrangle en rectangle.

1.4.2.1 Construction des quadrangles

La construction du pavage quadrangulaire se base tout d'abord sur une triangulation de Delaunay [Del34] à partir de l'enveloppe convexe des contraintes de valeur. Les contraintes de points de passage constituent les sommets des triangles et chaque paire de triangles adjacents a deux sommets en commun (voir figure 1.10.a). La triangulation de Delaunay permet de maximiser le plus petit angle des triangles générés [LS80] ce qui donne lieu à des pavages réguliers au sens des angles.

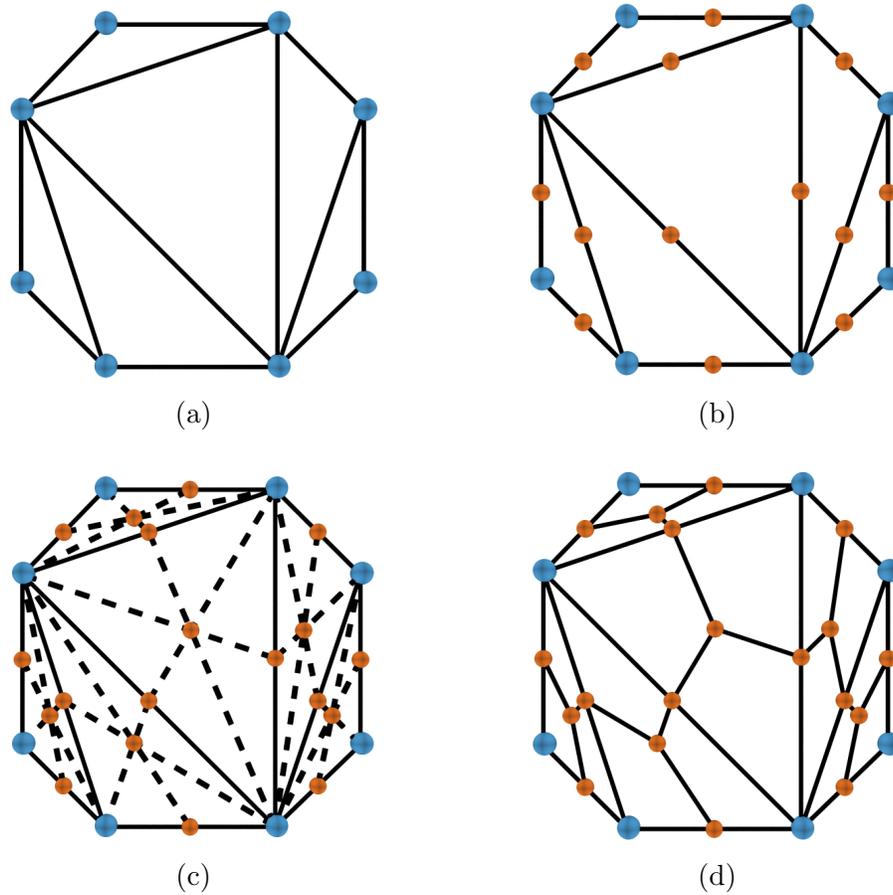


Figure 1.10 – Étapes de construction du pavage quadrangulaire à partir des contraintes en bleu selon la triangulation de Delaunay. Milieu des arêtes et centres de gravité des triangles en orange.

Soient K le nombre de contraintes et $K_{\partial\Omega}$ le nombre de contraintes formant l'enveloppe des contraintes, selon la formule d'Euler la triangulation de Delaunay donne lieu à $2K - 2 - K_{\partial\Omega}$ triangles.

Le milieu de chaque arête est ensuite calculé (figure 1.10.b) puis le centre de gravité de

Reconstruction d'hypersurfaces par minimisation sous contraintes

chaque triangle est déterminé (figure 1.10.c). Enfin chacun des $2K - 2 - K_{\partial\Omega}$ triangles donne lieu à 3 quadrangles. $N_K = 3(2K - 2 - K_{\partial\Omega})$ reconstructions partielles sont à mener. Les sommets de chaque quadrangle sont constitués d'une contrainte de valeur, du centre de gravité du triangle dans lequel il s'inscrit et de deux milieux d'arête (figure 1.10.d).

1.4.2.2 Reconstruction rapide sur un quadrangle

Le nombre de points d'échantillonnage diffère d'un quadrangle à un autre. Étant donné que les côtés opposés ont généralement des longueurs différentes, il existe plusieurs propositions [ZDDL13] pour les échantillonner : l'entier le plus proche du nombre d'échantillon minimal ou maximal des côtés opposés, ou encore la moyenne arithmétique ou géométrique de leurs sommets.

Deux méthodes de reconstruction partielle rapide peuvent être envisagées : par un seul point de passage correspondant à la contrainte connue sur le quadrangle en question ou en deux étapes en reconstruisant les lignes du pourtour du quadrangle qui deviennent des contraintes de frontière de la surface sur le quadrangle.

Dans les deux cas, l'étape clé est la transformation du domaine de reconstruction quadrangulaire en domaine de résolution rectangulaire. En effet, en supposant que l'hypersurface est exprimable de manière explicite sur le domaine quadrangulaire et rectangulaire, la dernière composante du changement d'espace est l'identité et le Jacobien est nul ou vaut 1 selon la troisième dimension :

$$\mathcal{J}_1^2(x_1^1, x_1^2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^1}(x_1^1, x_1^2) & \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^2}(x_1^1, x_1^2) & 0 \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1^1}(x_1^1, x_1^2) & \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1^2}(x_1^1, x_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Le passage du domaine quadrangulaire au domaine rectangulaire est effectué par une homographie définie par la matrice réelle $H = [h_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ de taille 3×3 . Aussi :

$$\begin{cases} x_2^1 = \frac{h_{11}x_1^1 + h_{21}x_1^2 + h_{31}}{h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33}} \\ x_2^2 = \frac{h_{12}x_1^1 + h_{22}x_1^2 + h_{32}}{h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33}} \end{cases}. \quad (1.40)$$

1.4 - Reconstruction rapide sur domaine non-rectangulaire

Les termes du Jacobien \mathcal{J}_1^2 sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^1}(x_1^1, x_1^2) = \frac{(h_{11}h_{23} - h_{13}h_{21})x_1^2 + h_{11}h_{33} - h_{13}h_{31}}{(h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33})^2} \\ \frac{\partial x_2^1}{\partial x_1^2}(x_1^1, x_1^2) = \frac{(h_{21}h_{13} - h_{23}h_{11})x_1^1 + h_{21}h_{33} - h_{32}h_{13}}{(h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33})^2} \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1^1}(x_1^1, x_1^2) = \frac{(h_{12}h_{23} - h_{13}h_{22})x_1^2 + h_{12}h_{33} - h_{13}h_{32}}{(h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33})^2} \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1^2}(x_1^1, x_1^2) = \frac{(h_{22}h_{13} - h_{23}h_{12})x_1^1 + h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32}}{(h_{13}x_1^1 + h_{23}x_1^2 + h_{33})^2} \end{cases} \quad (1.41)$$

1.4.2.3 Reconstruction de l'hypersurface complète

Les N_K reconstructions partielles sur domaines quadrangulaires sont combinées par juxtaposition. La continuité nécessaire des différentes parties de l'hypersurface est garantie par les arêtes communes aux triangles adjacents issus de la triangulation uniquement dans le cas de reconstruction en deux étapes par contraintes de frontière. Dans le cas d'une reconstruction par un seul point de passage, la différence d'échantillonnage impacte la continuité de la reconstruction aux frontières des domaines quadrangulaires. La classe de régularité au moins égale à 1 du pendage traité assure une concordance des dérivées de l'horizon sur les frontières des sous-domaines mais la dérivée n'est pas continue à l'endroit des frontières des quadrangles. Par ailleurs, la différence de pas d'échantillonnage d'un quadrangle à un autre mène à des reconstructions partielles de précision différente.

La méthode des quadrangles est sous-optimale dans le sens où elle s'appuie sur des reconstructions locales, ce qui peut fausser la reconstruction partielle sur les quadrangles correspondant à des régions à faible Rapport Signal à Bruit (RSB) ou à celles où les orientations sont mal estimées. La complexité calculatoire pour l'estimation de l'homographie a une complexité calculatoire en $\mathcal{O}(8)$ pour chaque quadrangle et la reconstruction possède une complexité C_{Quad} de :

$$C_{Quad} = \mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{N_K} N_{\Omega_{Q_k}} \log N_{\Omega_{Q_k}}\right) > \mathcal{O}(N_{\Omega} \log N_{\Omega}), \quad (1.42)$$

où $N_{\Omega_{Q_k}}$ est le nombre de points d'échantillonnage du k -ième quadrangle.

L'ajout, la suppression ou la modification d'une contrainte peut modifier le pavage en entier (voir figure 1.11) ce qui induit de reconstruire non seulement les parties connectées à la contrainte ajoutée ou déplacée mais toutes les parties quadrangulaires du domaine complet de reconstruction. Cette méthode ne garantit donc pas le maintien des reconstructions partielles déjà effectuées.

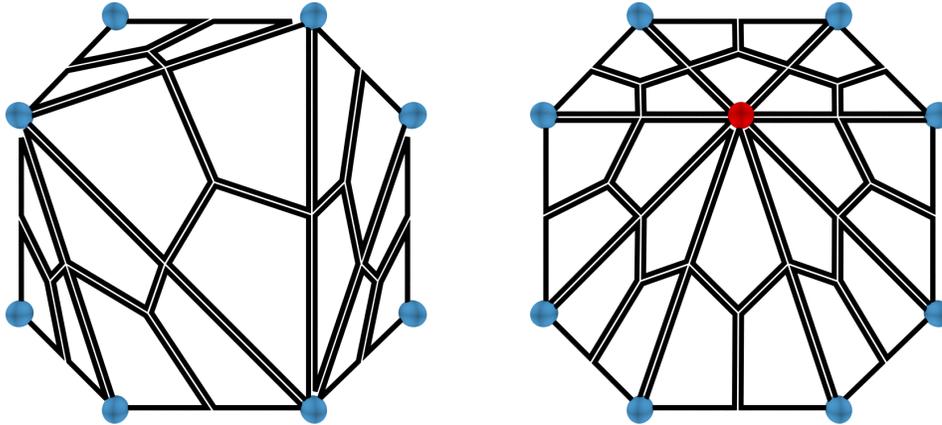


Figure 1.11 – *Différence entre les pavages quadrangulaires générés par ajout / suppression de la contrainte en rouge et respectant les contraintes en bleu.*

1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un état de l'art des méthodes de reconstruction d'hypersurfaces. En particulier, les méthodes par minimisation globale sous contraintes donnent lieu à une reconstruction d'un seul tenant. En fonction des contraintes, les solutions sont obtenues de manière lente par voie matricielle ou de manière rapide par transformée de Fourier.

La reconstruction de l'hypersurface par transformée de Fourier nécessite que le domaine de reconstruction soit hyperrectangulaire. Lorsque ce n'est pas le cas, la méthode du masque binaire sous contrainte d'un seul point de passage permet de circonscrire la région d'intérêt à l'intérieur d'un rectangle et de conserver le caractère rapide de la reconstruction. Les points du rectangle situés en dehors de la région d'intérêt ne sont pas pris en compte au moyen d'une pondération nulle. Néanmoins, la définition du masque de pondération peut s'avérer compliquée et les points du bord du masque doivent être suffisamment éloignés. Dans le cas de plusieurs points de passage, la méthode des quadrangles permet d'obtenir des reconstructions partielles sur l'enveloppe convexe des contraintes par transformation d'espace. Cependant, la continuité de la dérivée aux frontières des sous-parties n'est pas garantie et l'enveloppe concave du domaine est transformée en enveloppe convexe ce qui donne lieu à des reconstructions partielles supplémentaires. De surcroît, la reconstruction ne peut plus être qualifiée de globale, les reconstructions partielles sont sensibles au bruit. Par ailleurs, ces deux méthodes ne conservent pas une partie des reconstructions lors de l'ajout ou de la modification de contraintes, ce qui nécessite de reconstruire toute l'hypersurface.

La tableau 1.1 résume les différentes méthodes abordées dans ce chapitre selon la forme du domaine et le nombre de contraintes ainsi que les avantages (+) et limitations (–) de chaque méthode.

| Containtes | Méthode | Propriétés |
|---|------------------------|---|
| Domaine et points de passage quelconques | Matricielle | + Globale – Lente |
| Domaine hyperrectangulaire | Transformée de Fourier | + Globale + Rapide – Forme du domaine |
| Domaine quelconque et 1 point de passage | Masque binaire | + Rapide (Fourier) + Globale – 1 point de passage – Définition du masque – Dépendance aux points du bord du masque – Non-interactive |
| Points de passage définissant domaine convexe | Quadrangles | + Rapide (Fourier) + Plusieurs contraintes de passage – Par parties – Non-interactive |

Tableau 1.1 – *Récapitulatif des méthodes de l'état de l'art de reconstruction par minimisation globale sous contraintes*

Chapitre 2

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction | 31 |
| 2.2 | Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes | 33 |
| 2.2.1 | Définition d'un polygone | 33 |
| 2.2.1.1 | Notations et propriétés | 33 |
| 2.2.2 | Transformation d'un polygone en rectangle | 35 |
| 2.2.2.1 | Notion de transformation conforme | 36 |
| 2.2.2.2 | Transformation de Schwarz-Christoffel | 38 |
| 2.2.2.3 | Chaîne de transformations | 40 |
| 2.2.3 | Régularisation du maillage | 41 |
| 2.2.3.1 | Méthode naïve | 43 |
| 2.2.3.2 | Méthode interactive | 43 |
| 2.2.3.3 | Méthode automatique | 45 |
| 2.2.4 | Complexité calculatoire | 45 |
| 2.2.5 | Résultats | 46 |
| 2.2.5.1 | Image sismique synthétique avec faille | 47 |
| 2.2.5.2 | Image sismique réelle faillée avec régions d'occlusion | 49 |
| 2.2.5.3 | Image sismique réelle avec réseau de failles | 50 |
| 2.2.6 | Conclusions partielles | 52 |
| 2.3 | Reconstruction sur domaines imbriqués | 54 |
| 2.3.1 | Problématique | 54 |
| 2.3.2 | Transformation de Schwarz-Christoffel dans le cas doublement connexe | 55 |
| 2.3.3 | Chaîne de transformations d'espace pour la reconstruction d'une couronne | 58 |
| 2.3.3.1 | Respect des contraintes extérieures | 60 |

Chapitre 2 - Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.3.3.2 | Respect des contraintes intérieures | 61 |
| 2.3.3.3 | Combinaison des contraintes intérieures et extérieures | 63 |
| 2.3.4 | Résultats | 64 |
| 2.3.5 | Conclusions partielles | 66 |
| 2.4 | Résumé des contributions et conclusion | 67 |

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, bien que le terme hypersurface soit utilisé par souci d’homogénéité avec le reste du manuscrit, seules des hypersurfaces de dimension 2 dans un espace tridimensionnel, appelées communément surfaces, sont considérées. Les deux propositions que nous présentons ici sont principalement motivées par le contexte des images sismiques. Alors que l’utilisation de ces méthodes semble en premier abord restreinte à la reconstruction et à l’analyse des couches sédimentaires, il est à noter que l’ensemble des travaux est applicable à toute texture directionnelle volumique.

Dans les images sismiques, la présence de régions chaotiques, de ruptures telles que les failles, ou de géométries complexes (régions de convergence ou de courbure asymétrique) impose l’utilisation de méthodes de reconstruction supervisées permettant la prise en compte interactive et rapide de contraintes sous la forme de nombreux points de passage et/ou de points de domaine.

Dans ce contexte, Zinck *et al.* [Zin12] ont proposé la méthode du masque binaire dans laquelle le domaine de reconstruction est défini par le rectangle contenant l’enveloppe polygonale des points de domaine sous contrainte d’un seul point de passage. Cette méthode ne permet pas d’imposer plus d’un point de passage. Une alternative réside dans la méthode des quadrangles [ZDDL13] dans laquelle l’enveloppe convexe des points de passage définit le domaine de reconstruction. Cependant, la méthode présente des défauts liés à son caractère local : la sensibilité au bruit est dépendante des dimensions des domaines quadrangulaires tandis que la continuité des dérivées des reconstructions partielles n’est pas assurée à leurs frontières. Par ailleurs, la rapidité de l’approche dépend en pratique du nombre de quadrangles nouveaux ou à reconstruire induits par l’ajout ou la modification de toute contrainte. Enfin, la méthode souffre d’une limitation relative à la prise en compte de nouveaux points de passage qui peut parfois conduire à la modification de l’ensemble des reconstructions partielles déjà calculées.

Dans ce chapitre, nous traitons de la reconstruction d’une hypersurface respectant un nombre quelconque de contraintes de passage ou de domaine tout en conservant le caractère global de la reconstruction. Pour ce faire, nous nous intéressons à la reconstruction d’hypersurface sur le polygone défini par les points de domaine ou de passage.

Lorsque les contraintes de domaine ou de passage définissent l’enveloppe d’un polygone simplement connexe, nous proposons la reconstruction sur le domaine polygonal en utilisant des transformations d’espace de Schwarz-Christoffel [DD16]. Cette méthode conserve le caractère global de la reconstruction moins sensible au bruit tout en permettant une reconstruction rapide par une formulation dans le domaine de Fourier. Nous la désignons par *méthode globale par polygones*. Les contraintes définissant un polygone simplement connexe permettent de définir précisément les contours du domaine de reconstruction, notamment pour exclure certaines régions. La conséquence est que les points de passage ne peuvent pas être imposés à l’intérieur du domaine de reconstruction.

Afin de permettre la prise en compte de plusieurs contraintes de passage à l’intérieur de l’en-

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

veloppe du domaine de reconstruction, nous proposons une approche incrémentale qui consiste à intégrer les points de passage de manière progressive sous la forme de polygones imbriqués [DDG17]. Les polygones imbriqués sont délimités par les points de passage définissant des polygones allant du plus interne au plus externe. Le premier polygone, que nous appelons *noyau*, fait tout d'abord l'objet de la reconstruction présentée dans [DD16]. Ensuite, chaque ajout de polygone conduit à une reconstruction rapide sur une région que nous appelons *couronne*, et ce à l'aide d'une chaîne de transformations d'espace de Schwarz-Christoffel entre régions doublement connexes. Ne modifiant pas les reconstructions déjà effectuées et étendant le domaine total, la démarche est en ce sens stable et peut être qualifiée de *méthode quasi-globale par polygones*.

Dans les deux approches proposées, la reconstruction rapide utilisant la transformation de Fourier impose que le domaine de résolution soit rectangulaire, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent. Elles exploitent des transformations d'espace qui garantissent la transformation des domaines de reconstruction polygonaux en domaines de résolution rectangulaires. Le problème de transformer une région en une autre région est généralement difficile. Cependant, dans le cas de régions polygonales, le problème est grandement simplifié [Tre80]. De plus, tout domaine peut être approché par un polygone. En effet, tout type de domaine de l'espace est un polygone ou peut être approché par un polygone en considérant un nombre suffisant de sommets. Deux exemples sont présentés dans la figure 2.1.

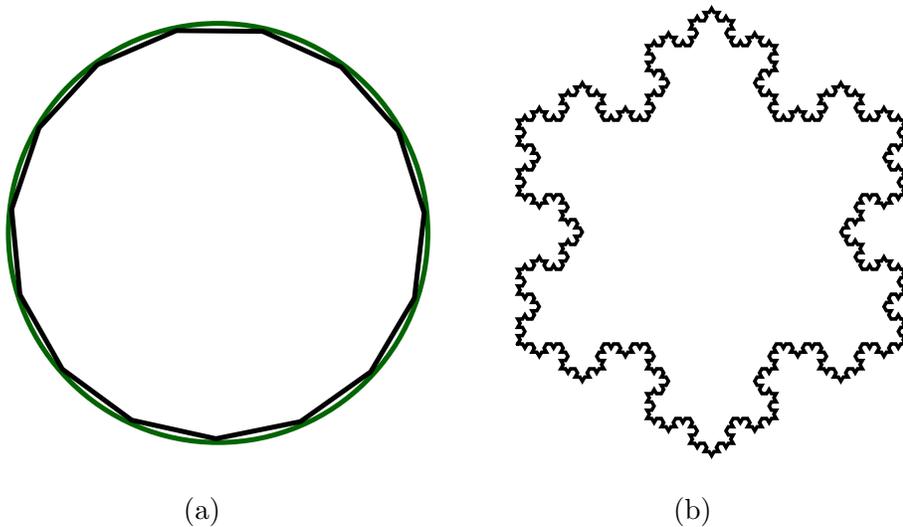


Figure 2.1 – Approximation polygonale : cercle (en vert) approché par un polygone régulier de 15 sommets (a) et fractale d'un flocon de Koch constituée de 193 sommets (b).

Ce chapitre se scinde naturellement en deux parties. Dans un premier temps, nous introduisons des notions et notations concernant les polygones avant de présenter la chaîne de transformations d'espace menant à la transformation du polygone de reconstruction en rectangle de résolution. Ensuite, nous présentons la méthode appliquée aux domaines simplement connexes pour un certain nombre d'images sismiques synthétiques et réelles et nous comparons les résultats

à ceux des méthodes du masque binaire [Zin12] et des quadrangles [ZDDL13]. Dans un second temps, nous présentons l'extension naturelle de la méthode au cas des polygones doublement connexes pour des domaines imbriqués. Nous montrons comment la combinaison de changements d'espace permet de conserver à la fois la reconstruction sur le noyau issu des étapes précédentes et les contraintes de la nouvelle couronne. Différentes stratégies de combinaison des contraintes sont également présentées dans cette partie avant de montrer les résultats obtenus avec la méthode sur des images sismiques et de les comparer à ceux des méthodes de l'état de l'art.

2.2 Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

2.2.1 Définition d'un polygone

En géométrie euclidienne, un polygone est la concaténation d'un nombre fini de segments dans le même plan. Nous ne considérons pas dans le présent manuscrit les polyèdres, généralisation des polygones en dimension supérieure à 2.

2.2.1.1 Notations et propriétés

Un polygone P est défini par un ensemble de *sommets* w_1, w_2, \dots, w_K (voir figure 2.2) qui sont les intersections de deux segments consécutifs. Chaque sommet w_k , où $k \in [1, K]$, possède une *angle intérieur* $\alpha_k \pi$ défini comme étant l'angle intérieur dans le sens trigonométrique entre le côté entrant et le côté sortant. De même, les *angles extérieurs* $\beta_k \pi$ pour chaque sommet sont définis comme étant les angles entre l'extension du côté entrant et le côté sortant dans le sens trigonométrique (voir figure 2.2). Ainsi, la somme de chaque angle intérieur et angle extérieur correspondant vaut π et :

$$\forall k \in [1, K], \beta_k = 1 - \alpha_k. \quad (2.1)$$

Les angles extérieurs varient entre -1 et 1 . Il est à noter que :

$$\sum_{k=1}^K \beta_k = 2. \quad (2.2)$$

Dans ce manuscrit, nous considérons la convention que les sommets sont ordonnés dans le sens trigonométrique. Ainsi, par passage en coordonnées polaires, les angles des sommets sont ordonnés de façon croissante.

Vocabulaire 2.2.1. Nous définissons ici quelques notions clés :

- **Ordre d'un polygone** : L' ordre d'un polygone est le nombre de ses sommets que nous noterons généralement K .

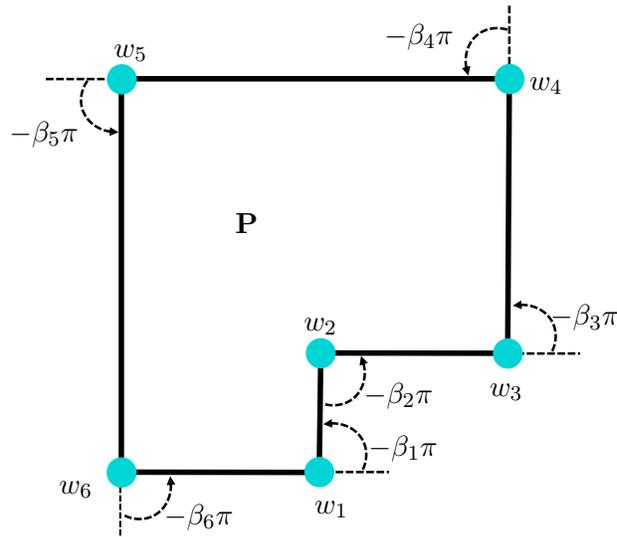


Figure 2.2 – Polygone P défini par ses sommets w_k (en cyan) et angles extérieurs $\beta_k \pi$, $k \in [1, 6]$.

- **Simplicité** : Un polygone est dit *simple* si ses côtés ne s'intersectent qu'à leurs sommets communs. Un polygone non simple est dit *croisé*.

Un polygone simple vérifie le **Théorème de la courbe de Jordan** (Théorème 2.2.1).

Théorème 2.2.1. Le complémentaire d'une courbe de Jordan S (*i.e.* courbe fermée simple dans \mathbb{R}^2) dans un plan affine réel est formé exactement de deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan S .

En d'autres termes, une courbe de Jordan divise le plan en 2 parties : l'intérieur de la courbe qui est borné et le reste du plan. Si cette assertion paraît intuitive, la démonstration par les axiomes de géométrie élémentaire n'est pas triviale.

- **Convexité** : Un polygone simple est dit *convexe* si tout segment délimité par deux points du polygone est entièrement inclus dans le polygone. Autrement dit :

$$\forall x, y \in P, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in P. \quad (2.3)$$

L'*enveloppe convexe* d'un polygone non convexe est le plus petit sous-ensemble convexe de l'espace vectoriel contenant P .

- **Connexité** : Un polygone est dit *connexe* s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints. Une autre définition est que P est une partie d'un espace topologique E qui est un espace topologique connexe pour la topologie induite sur P par celle de E .

Autrement dit, P est un objet d'un seul tenant.

Propriété 2.2.1. Un convexe est connexe par arcs.

Nous nous intéressons particulièrement aux notions de connexité *simple* et *multiple*. Une région connexe par arcs est *simplement connexe* lorsque toute courbe fermée peut être ramenée à un point par homotopie. En particulier, une région bornée P de E est simplement connexe si P et $P \setminus E$ sont connexes (voir figure 2.3).

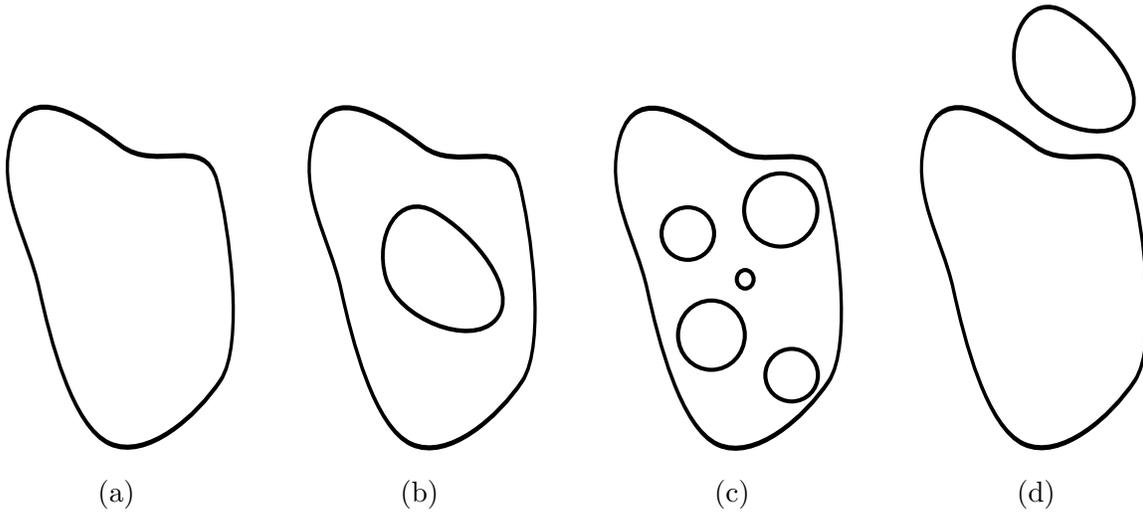


Figure 2.3 – Exemples de domaines de différente connexité : *simplement connexe* (a), *doublément connexe* (b), *multiplément connexe* (c) et *non connexe* (d).

Intuitivement, une région simplement connexe ne contient pas de trou. Une région connexe non simplement connexe est *multiplément connexe*. Si elle “contient un seul trou”, la région est dite *doublément connexe*. Une région doublement connexe P est une région simplement connexe P_0 privée d’une région simplement connexe P_1 incluse dans P_0 .

2.2.2 Transformation d’un polygone en rectangle

Afin de conserver le caractère rapide de la reconstruction sous un nombre quelconque de contraintes de passage et/ou de domaine, nous introduisons une transformation d’espace. Cette transformation d’espace \mathcal{F} relie les points du domaine de reconstruction polygonale à ceux du domaine de résolution rectangulaire. Le problème posé est donc de transformer un polygone donné en un rectangle et inversement tout en conservant la forme de l’EDP.

Or, dans le chapitre précédent, nous avons cité les conditions requises sur la transformation d’espace. Aussi, \mathcal{F} doit vérifier les conditions suivantes :

- De classe \mathcal{C}^1 pour pouvoir calculer le Jacobien - équation (1.22) ;
- Bijective pour pouvoir calculer les normales dans l’espace initial - équation (1.34) ;

- Préserve les angles de manière à ce que l'expression du pendage transformé - équation (1.34) - reste valable.

Par définition, ces conditions sont vérifiées par les transformations *conformes*. Par la suite, nous présentons des notions relatives aux transformations conformes, plus particulièrement la transformation de Schwarz-Christoffel et l'expression de la transformation conforme permettant le passage bijectif du polygone des contraintes au rectangle de résolution.

2.2.2.1 Notion de transformation conforme

L'origine de la notion de transformation conforme remonte à la deuxième décennie du XIX-ème siècle durant laquelle Gauss a traité des questions relatives au sujet. Elles trouvent des applications en mécanique des fluides, en cartographie ou encore en électromagnétisme. Elles permettent notamment d'écrire le laplacien de manière simple dans le cas de problèmes faisant intervenir une EDP [Hen93].

2.2.2.1.1 Définition et propriétés des transformations conformes

Définition 2.2.1. Une transformation conforme est une application qui préserve localement les angles.

Une autre définition peut être rencontrée dans la littérature :

Définition 2.2.2. Une transformation conforme est une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule jamais.

Corolaire 2.2.1. Tout biholomorphisme (*i.e.* toute application holomorphe et bijective) est une transformation conforme.

Exemple 2.2.1. Les fonctions affines (telles que les translations, les multiplications et les rotations) sont des transformations conformes.

Exemple 2.2.2. La fonction d'inversion allant de \mathbb{C}^* à \mathbb{C}^* définie par $z \mapsto \frac{1}{z}$ est conforme.

De manière générale :

Exemple 2.2.3. Toute transformation de Möbius du plan complexe définie par :

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ où } (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ et } ad - bc \neq 0 \quad (2.4)$$

est conforme. Les transformations de Möbius incluent les translations ($a = d = 1, c = 0$), les multiplications ($d = 1, b = c = 0$), les rotations ($|a| = d = 1, b = c = 0$) et les inversions ($a = d = 0, b = c = 1$). La transformation inverse de la fonction de l'équation (2.4) s'exprime par :

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}, \text{ où } (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \text{ et } ad - bc \neq 0 \quad (2.5)$$

2.2.2.1.2 Équation de Poisson dans le cas d'une transformation conforme

Si les transformations conformes sont largement utilisées dans la résolution de problèmes mettant en jeu des équations de Laplace de la forme :

$$\Delta\phi(\mathbf{x}_1) = 0, \mathbf{x}_1 \in \Omega_1, \quad (2.6)$$

avec contraintes sur la frontière du domaine $\partial\Omega_1$, les transformations conformes peuvent également être utilisées pour résoudre leur équivalent non homogène, à savoir les équations de Poisson de la forme :

$$\Delta\phi(\mathbf{x}_1) = \gamma(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1 \in \Omega_1. \quad (2.7)$$

Cette équation nous intéresse plus particulièrement car elle se rapporte au problème de minimisation sous contraintes de l'équation (1.6). Nous montrons dans cette partie comment les transformations conformes préservent la nature du problème.

Soit f la transformation conforme allant de Ω_1 à Ω_2 définie comme suit :

$$f : \mathbf{x}_1 \mapsto f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2 \quad (2.8)$$

et sa transformation inverse g sur Ω_2 définie comme suit :

$$g : \mathbf{x}_2 \mapsto f^{-1}(\mathbf{x}_2). \quad (2.9)$$

Pour plus de rigueur dans les notations, nous notons Δ_1 le Laplacien sur Ω_1 et Δ_2 le Laplacien sur Ω_2 :

$$\Delta_1 u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i{}^2} \quad (2.10)$$

$$\Delta_2 u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^i{}^2} \quad (2.11)$$

Soit Γ l'image conforme de γ par f qui s'exprime alors $\Gamma(\mathbf{x}_2) = \gamma(g(\mathbf{x}_2))$ sur Ω_2 , Henrici [Hen93] montre que si ϕ satisfait l'équation (2.7) et que l'on pose $\Psi(\mathbf{x}_2) = \phi(g(\mathbf{x}_2))$ alors on a la relation suivante entre les Laplaciens Δ_1 et Δ_2 :

$$\Delta_1\phi(\mathbf{x}_1) = \Delta_2\Psi(\mathbf{x}_2)|f'(\mathbf{x}_1)|^2. \quad (2.12)$$

Il découle de l'équation (2.7) que :

$$\Delta_2\Psi = \Gamma(\mathbf{x}_2)|g'(\mathbf{x}_2)|^2. \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) est également une équation de Poisson qui peut être plus simple à résoudre du fait que les contraintes de frontières sont simplifiées par la transformation conforme f .

L'utilisation des transformations conformes garantit donc la conservation des propriétés du problème ainsi que la possibilité de le résoudre de manière rapide par passage dans le domaine de Fourier de par l'expression connue du pendage transformé (équation (1.34)). Nous présentons dans la suite la transformation conforme permettant la transformation entre le domaine polygonal et le domaine rectangulaire à partir de la transformation de Schwarz-Christoffel.

2.2.2.2 Transformation de Schwarz-Christoffel

Le théorème de l'application conforme de Riemann [Rie51] (connu également sous le nom de la représentation conforme de Riemann) énonce que :

Théorème 2.2.2. Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et différent de $\{\emptyset, \mathbb{C}\}$, alors il existe une bijection holomorphe f entre Ω et le disque unité $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Par ailleurs, Henri Poincaré a prouvé que cette application f est *essentiellement unique*, c'est-à-dire que toutes les transformations qui vérifient la proposition sont équivalentes.

Le théorème de l'application conforme de Riemann n'indique aucune méthode pratique permettant la construction d'une expression pour une telle transformation. En effet, le cas général ne peut être traité que par des méthodes d'approximation. Néanmoins, il est possible de trouver une formule analytique pour la transformation dans le cas d'un polygone [DT02].

Selon [DT02], cette transformation a été découverte de manière indépendante par deux mathématiciens allemands : Elwin Bruno Christoffel en 1867 [Chr67] et Hermann Amandus Schwarz en 1869 [Sch69]. Elle porte le nom conjoint de *transformation de Schwarz-Christoffel*.

L'étude des transformations conformes et plus particulièrement celle de Schwarz-Christoffel a longtemps fasciné les mathématiciens et physiciens. Au delà de l'élégance de sa formulation et des diverses variantes, celle-ci a été utilisée dans la résolution de nombreux problèmes. L'application la plus commune est la résolution des équations de Laplace. En électromagnétique, les problèmes de flux magnétique ou électrique sont souvent résolus en transformant le domaine en rectangle [Ver83, TW86, Cos87, BJW97, GLPV08, BZI⁺09, BL13]. L'étude de la mécanique des fluides et des flux de température [Wal64, GC87, Mil96, MRB94, Bil74, ESM06, WBK12] ou encore du mouvement Brownien d'une particule immergée dans un fluide [HLS85, TW86, M⁺11] sont des applications largement discutées dans la littérature .

2.2.2.2.1 Transformation directe

La transformation de Schwarz-Christoffel (SC) directe formalise la transformation du disque unité \mathcal{D} en un polygone P (voir figure 2.4). Nous la noterons f_P en référence au polygone d'arrivée.

Théorème 2.2.3. Soit P le polygone simplement connexe de sommets w_1, w_2, \dots, w_K et d'angles extérieurs respectifs $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \dots, \beta_K\pi$. Pour tout point z du disque unité \mathcal{D} , la trans-

2.2 - Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

formation de Schwarz-Christoffel f_P s'exprime par :

$$f_P(z) = a + c \int_0^z \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{s}{z_k}\right)^{-\beta_k} ds, \quad (2.14)$$

où a, c sont des constantes complexes et les $z_k, k \in [1, K]$ appelés *pré-sommets* sont les images inverses des sommets $w_k, k \in [1, K]$:

$$\forall k \in [1, K], f_P(z_k) = w_k. \quad (2.15)$$

La détermination des K pré-sommets $z_k, k \in [1, K]$ et des constantes a et c , désignée par le terme “Problème des paramètres” est une tâche fortement simplifiée depuis la fin du XX-ème siècle. Dans l'annexe A, nous présentons la proposition de Driscoll et Trefthen pour résoudre numériquement le problème des paramètres de manière rapide et précise [Tre80, Dri96, DT02].

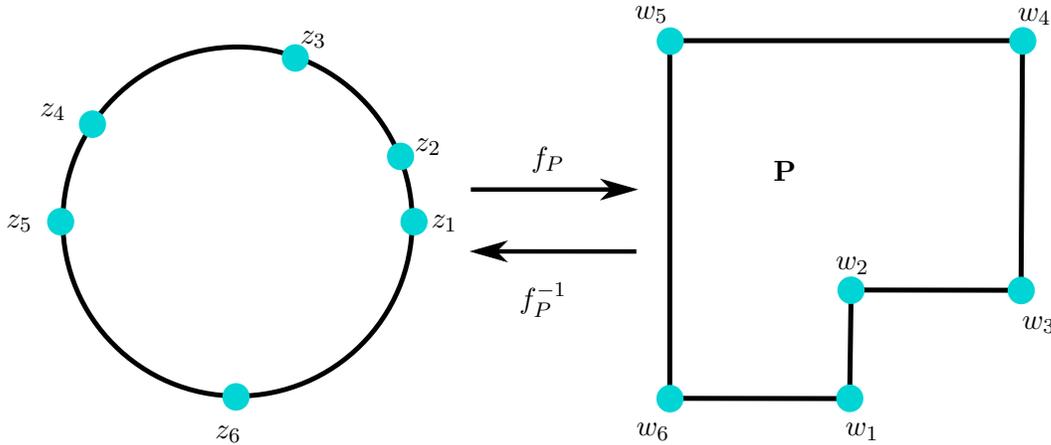


Figure 2.4 – Transformation de SC directe et inverse entre le disque unité \mathcal{D} et le polygone P .

2.2.2.2.2 Transformation inverse

Étant donné que la transformation de SC directe est conforme, elle est bijective. La transformation de SC inverse permet donc de transformer n'importe quel polygone P en disque unité \mathcal{D} (voir figure 2.4). Nous la noterons f_P^{-1} en référence au polygone de départ.

L'estimation de la transformation inverse se ramène à estimer $f_P^{-1}(w), \forall w \in P$. Or, il n'existe pas d'expression analytique pour la transformation inverse de SC. À partir de l'estimation des paramètres de la transformation de SC directe, Trefthen [Tre80] propose de dériver puis d'inverser l'équation :

$$w = f(z). \quad (2.16)$$

Nous détaillons les étapes de l'estimation de la transformation inverse dans l'annexe A.

2.2.2.3 Chaîne de transformations

La transformation de SC directe permet le passage du disque unité à un polygone donné, tandis que la transformation de SC inverse transforme un polygone donné en disque unité.

Nous proposons donc de considérer la transformation du domaine de reconstruction de support polygonal P en domaine de résolution de support rectangulaire R comme étant la composition de deux transformations de SC (voir figure 2.5) :

1. La première transformation est la transformation de SC inverse f_P^{-1} du polygone P dans le disque unité \mathcal{D} .
2. La seconde transformation est la transformation de SC directe f_R de \mathcal{D} dans le rectangle R .

La transformation d'espace composée \mathcal{F} , qui est également une transformation conforme, s'exprime comme suit :

$$\mathcal{F} = f_R \circ f_P^{-1}. \quad (2.17)$$

La transformation \mathcal{F} permet de calculer le pendage dans le domaine de reconstruction en utilisant la formule de l'équation (1.34) à partir des Jacobiens de la transformation directe et inverse de SC. Étant donné que la dérivée de la transformation de SC directe s'exprime :

$$f'_P(z) = c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{-\beta_k}, \quad (2.18)$$

et en posant $z = x_1^1 + ix_1^2$:

$$\frac{df_P}{dz} = \frac{\partial f_P}{\partial x_1^1} + \frac{1}{i} \frac{\partial f_P}{\partial x_1^2}, \quad (2.19)$$

alors :

$$\frac{\partial f_P}{\partial x_1^1} = \Re \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] \quad (2.20)$$

et :

$$\frac{\partial f_P}{\partial x_1^2} = -\Im \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] \quad (2.21)$$

où \Re et \Im sont respectivement les parties réelle et imaginaire.

Ainsi, le Jacobien \mathcal{J}_{f_P} de la transformation de SC directe s'exprime :

$$\mathcal{J}_{f_P}(x_1^1, x_1^2) = \begin{bmatrix} \Re \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{x_1^1}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] & -\Im \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{x_1^1}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] & 0 \\ \Re \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{x_1^2}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] & -\Im \left[c \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{x_1^2}{z_k}\right)^{-\beta_k} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.2 - Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

Le Jacobien $\mathcal{J}_{f_P^{-1}}$ de la transformée inverse de SC est calculé à partir de celui de la transformation directe f_P sur les points du disque \mathcal{D} puis en l'inversant (voir équation (1.30)).

$$\mathcal{J}_{f_P^{-1}}(x_1^1, x_1^2) = [\mathcal{J}_{f_P}(x_1^1, x_1^2)]^{-1} \quad (2.23)$$

Selon l'équation (1.36), le Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$ de la chaîne de transformation \mathcal{F} s'exprime comme :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}} = \mathcal{J}_{f_R}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{f_P^{-1}}(x_1^1, x_1^2) \quad (2.24)$$

$$= \mathcal{J}_{f_R}(f_P^{-1}(x_1^1, x_1^2)) \times \mathcal{J}_{f_P^{-1}}(x_1^1, x_1^2). \quad (2.25)$$

La transformation d'espace inverse \mathcal{F}^{-1} transformant le rectangle R en polygone P s'exprime comme suit (voir figure 2.5) :

$$\mathcal{F}^{-1} = (f_R \circ f_P^{-1})^{-1} \quad (2.26)$$

$$= f_P \circ f_R^{-1} \quad (2.27)$$

et le Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^{-1}}$ de la chaîne de transformation \mathcal{F}^{-1} s'exprime comme :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{J}_{f_P}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{f_R^{-1}}(x_3^1, x_3^2) \quad (2.28)$$

$$= \mathcal{J}_{f_P}(f_R^{-1}(x_3^1, x_3^2)) \times \mathcal{J}_{f_R^{-1}}(x_3^1, x_3^2), \quad (2.29)$$

où (x_3^1, x_3^2) est la grille de résolution régulièrement échantillonnée en R .

La résolution du problème d'optimisation sous contraintes (équation (1.21)) est effectuée sur une grille régulièrement échantillonnée dans l'espace de résolution d'arrivée afin de pouvoir utiliser la méthode de reconstruction rapide basée sur l'analyse de Fourier. Le domaine rectangulaire de support R est ainsi régulièrement échantillonné (voir figure 2.5). La transformation inverse \mathcal{F}^{-1} conduit à un maillage irrégulier dans le domaine polygonal initial de support P (voir figure 2.5).

Les pendages de certains points de la grille de reconstruction dans le polygone P ne sont pas utilisés tandis que d'autres points ont une contribution multiple. Cela conduit à une précision de reconstruction variable sur le domaine de reconstruction. Une solution est de régulariser le maillage afin de faire en sorte que toutes les orientations aient une contribution semblable.

2.2.3 Régularisation du maillage

Nous désignons par le terme "maillage régulier" une grille dont les points des voisinages immédiats définissent des rectangles identiques. La grille présente alors un pas d'échantillonnage constant selon chaque direction. Dans la figure 2.5, le maillage de P est irrégulier contrairement à celui de R . La régularisation du maillage concerne la grille délimitée par P et relative à la grille régulièrement échantillonnée délimitée par R . Le but est de rendre la grille en P plus régulière.

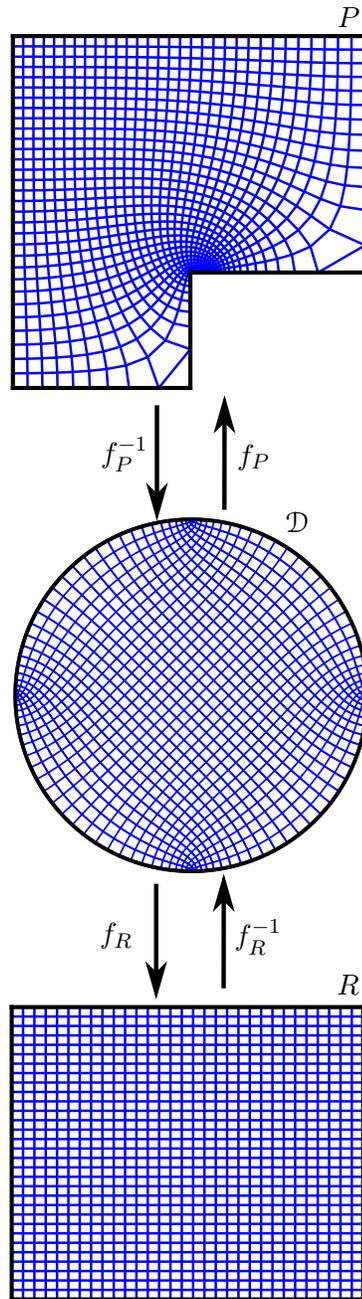


Figure 2.5 – Chaîne de transformations entre le polygone de reconstruction P et le rectangle de résolution R .

Nous proposons dans cette section des méthodes de régularisation du maillage relatif à la transformation de SC. La régularisation doit conserver le caractère rapide de la reconstruction sans modifier l'échantillonnage régulier du domaine de résolution. L'introduction d'une transformation supplémentaire impose que celle-ci soit conforme, à l'instar des transformations de

2.2 - Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

SC directe et inverse. Nous présentons tout d'abord une méthode naïve, puis une méthode interactive et finalement une méthode automatique.

2.2.3.1 Méthode naïve

Une solution naïve serait d'augmenter le nombre de points d'échantillonnage. Par exemple, si l'erreur moyenne de reconstruction en utilisant une grille de N_Ω points est ε , alors il faudrait considérer $4 \times N_\Omega$ points pour obtenir une erreur moyenne de $\frac{\varepsilon}{2}$.

De manière générale, l'obtention d'une erreur de $\frac{\varepsilon}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ requiert l'utilisation de $2^{2n} \times N_\Omega$ points. Cela conduit à une complexité calculatoire très élevée en comparaison avec la faible amélioration de la précision de reconstruction apportée.

2.2.3.2 Méthode interactive

Nous introduisons, ici, une transformation spatiale intermédiaire h_D entre les transformations de SC directe et inverse afin de rendre la grille plus régulière tout en conservant la géométrie du domaine sans modifier la taille de la grille de résolution N_Ω .

Considérons les coordonnées polaires (ρ_{in}, θ_{in}) de la grille correspondant à la transformation f_P^{-1} de la grille régulière de P (voir la figure 2.6). Nous nous intéressons au maillage du disque unité \mathcal{D} . L'objectif est d'estimer les paramètres d'une transformation qui régularise la distribution du disque unité \mathcal{D} dans le domaine polaire sans altérer l'image des sommets des polygones. Par conséquent :

$$h_D : (\rho_{in}, \theta_{in}) \mapsto (\rho_{out}, \theta_{out}), \quad (2.30)$$

tel que :

$$\theta_{out} = \theta_{in} + \sum_{k=1}^K u(\beta_k) \mathcal{N}(\beta_k, \sigma_{\theta_k}), \quad (2.31)$$

où $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est une loi normale repliée de moyenne μ et d'écart-type σ . Le paramètre β_k est l'angle extérieur du k -ième sommet. La fonction u est définie en analysant la distribution angulaire θ_{in} . En notant $\beta_{K+1} = \beta_1$, la fonction u s'exprime :

$$u(\beta_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_{in} \text{ est croissant sur } [\beta_k, \beta_{k+1}] \\ -1 & \text{si } \theta_{in} \text{ est décroissant sur } [\beta_k, \beta_{k+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad k \in [1, K]. \quad (2.32)$$

De la même manière, la distribution radiale est modifiée lorsque la distribution angulaire

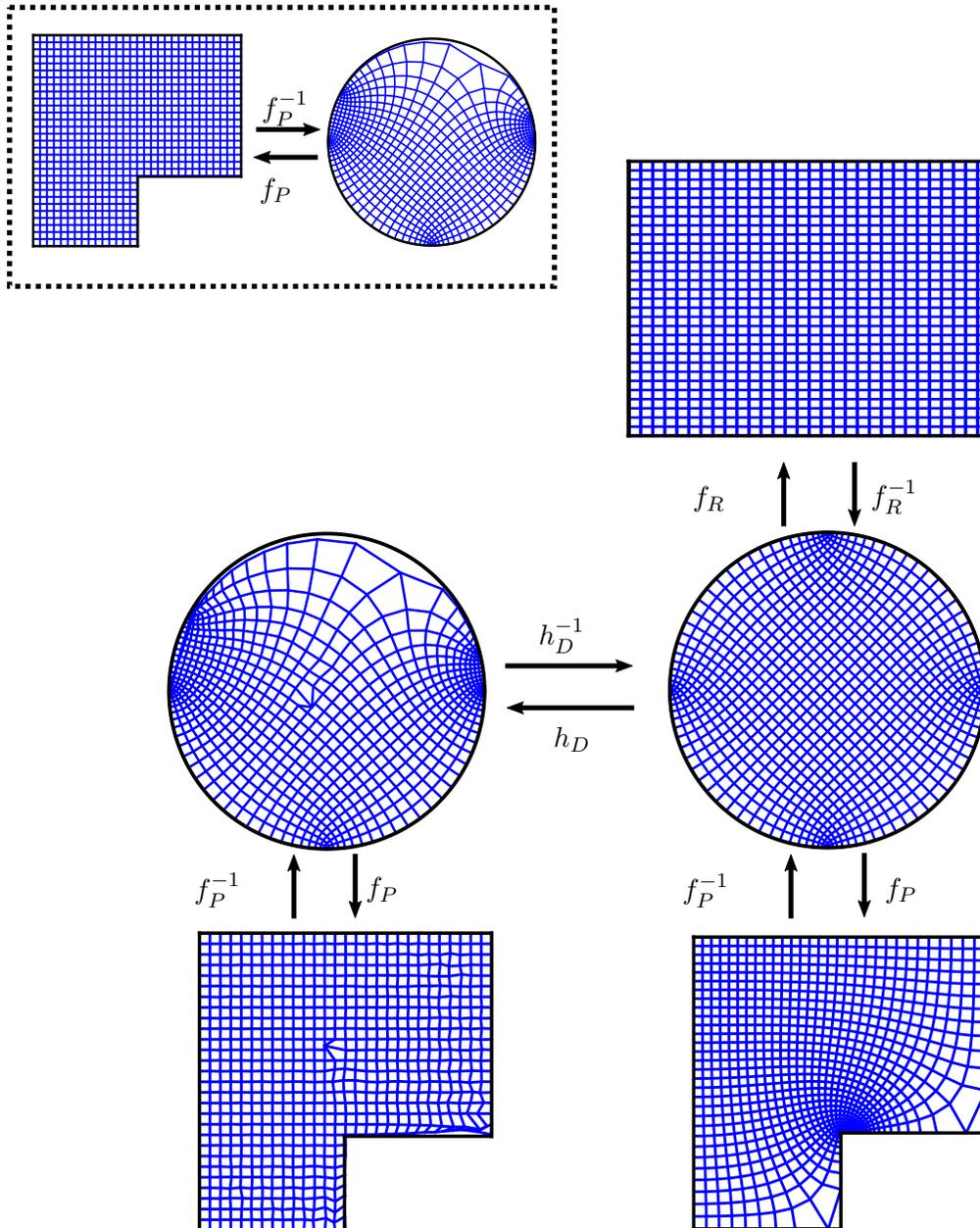


Figure 2.6 – Transformation d'un rectangle en polygone sans régularisation et avec régularisation h_D basée sur la consigne de transformation de SC du polygone régulièrement échantillonné (cadre en pointillés).

l'est, à moins que le rayon soit égal à 1 :

$$\rho_{out} = \rho_{in} + \sum_{k=1}^N |u(\beta_k)| \mathcal{N}(\rho_k, \sigma_{\rho_k}), \quad (2.33)$$

2.2 - Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

où $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est une distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ et :

$$\rho_k = \frac{1 + \rho_{k_{min}}}{2}, \quad (2.34)$$

où $\rho_{k_{min}}$ est le rayon minimal correspondant aux angles $\beta_{out} \neq \beta_{in}$ sur $[\beta_k, \beta_{k+1}]$.

Sur l'exemple précédent du polygone en forme de L, un échantillonnage régulier du polygone donne lieu au maillage du disque irrégulier du cadre en pointillés (figure 2.6). Il s'agit de la consigne de laquelle le maillage du polygone de reconstruction doit s'approcher. La transformation h_D transforme le maillage du disque correspondant au rectangle régulièrement échantillonné à celui du disque qui s'approche au mieux de la consigne. Cela donne lieu à une grille pratiquement régulière (voir maillage en bas à droite de la figure 2.6) où quasiment tous les points (mis-à-part un nombre marginal) ont la même contribution.

Cette méthode de régularisation de la grille de recherche des orientations dans l'espace polygonal s'avère efficace, mais sa mise en œuvre peut être laborieuse en raison du choix empirique des paramètres $u(\beta_k), \sigma_{\theta_k}, \sigma_{\rho_k}$ qui sont relatifs au nombre de sommets K du polygone P . Il faut définir la configuration idéale de manière empirique.

2.2.3.3 Méthode automatique

Pour l'approche automatique, la transformation inverse h_D^{-1} est d'abord estimée.

Selon la "règle des trois sigma", 99.7% des valeurs d'une distribution normale (normale-repliée respectivement) d'écart-type σ et de moyenne μ se situe dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ ($[0, \mu + 3\sigma]$ respectivement). À partir de la consigne, la différence angulaire entre deux sommets consécutifs est connue. On considère donc :

$$\sigma_{\theta_k} = \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{3}, \quad k \in [1, K]. \quad (2.35)$$

De même, nous avons :

$$\sigma_{\rho_k} = \frac{1 - \rho_k}{3}, \quad k \in [1, K]. \quad (2.36)$$

La fonction $u(\beta_k)$ est déduite de la comparaison des différences angulaires du maillage du disque de la contrainte et de celui relatif au rectangle de résolution régulièrement échantillonné. En analysant les maillages des disques de la figure 2.6, on voit bien que seule la moitié supérieure du disque doit être modifiée. De plus, $u(\beta_1) = -1$ car les mailles doivent être resserrées, $u(\beta_2) = u(\beta_3) = 1$ et $u(\beta_k) = 0$ sinon.

La méthode peut être réajustée de manière assez simple.

2.2.4 Complexité calculatoire

Le tableau 2.1 présente la complexité calculatoire des transformations de SC directe et inverse pour une grille de N_Ω points. Les méthodes et les différentes étapes de mise en œuvre sont celles

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

proposées par [Dri96, DT02] (voir annexe A).

| Étape | Méthode | Complexité |
|-------------------------|------------------------------------|---------------------|
| Problème des paramètres | Intégration : Gauss-Jacobi | N_Ω |
| | Mise-à-jour Jacobien : Broyden | $\sqrt{N_\Omega}$ |
| Intégration | Intégration : Gauss-Jacobi | N_Ω |
| Inversion | Initialisation : Newton | N_Ω |
| | Itération : <i>valeur initiale</i> | $N_\Omega \times K$ |

Tableau 2.1 – Complexité calculatoire des étapes de transformations directe et inverse de SC.

La transformation directe a une complexité numérique de $\mathcal{O}(N_\Omega)$. La transformation inverse est basée sur le calcul préalable de la transformation directe et l'inversion a une complexité de $\mathcal{O}(N_\Omega \times K)$.

Les régularisations angulaire et radiale ont une complexité de $\mathcal{O}(K)$. Les transformations de SC directes et inverses sont calculées une fois pour estimer les termes $\mathbf{x}^i, i \in [2, M + 1]$. Les Jacobiens des transformations SC directes et inverses sont calculés de manière analytique ou par différenciation. Chacune des deux transformations est évaluée 4 fois pour l'estimation du Jacobien par différenciation. La méthode analytique d'estimation du Jacobien a une complexité en $\mathcal{O}(N_\Omega)$.

La reconstruction a une complexité calculatoire de $N_\Omega \log(N_\Omega)$ par la résolution dans le domaine de Fourier (voir chapitre 1.2.2.3.2). La méthode proposée a donc une complexité calculatoire de $N_\Omega(\log N_\Omega + K + 2)$ dans la cas du calcul analytique du Jacobien et de $N_\Omega(\log N_\Omega + 5K + 9)$ dans le cas du calcul par différenciation.

Cette complexité est à comparer à celle de la méthode des quadrangles pour laquelle la reconstruction a une complexité calculatoire de $\sum_{k=1}^{3(K-2)} N_{Q_k} \log(N_{Q_k})$ où N_{Q_k} est le nombre de points d'échantillonnage pour le k -ième quadrangle. Pour chaque quadrangle, la transformation d'espace et le Jacobien correspondant sont calculés avec une complexité linéaire.

La complexité calculatoire de la méthode globale est supérieure à celle de la méthode des quadrangles et est bien inférieure à celle de la méthode matricielle. En pratique, un facteur d'environ 30 existe entre la méthode globale et celle des quadrangles en terme de temps de calcul. La méthode globale par polygones est un bon compromis entre complexité calculatoire et précision des reconstructions.

2.2.5 Résultats

Nous présentons à présent les résultats de la méthode de reconstruction globale sur supports polygonaux simplement connexes pour des images sismiques. Nous nous comparons à la méthode

2.2 - Reconstruction sur domaines polygonaux simplement connexes

du masque binaire [Zin12] lorsque les contraintes sont constituées d'un seul point de passage combiné à plusieurs points de domaine. Nous comparons également nos résultats à la méthode des quadrangles [ZDDL13] lorsque les contraintes sont constituées de plusieurs points de passage.

Les contraintes sont ajustées de manière à contourner les régions de failles ou à géométrie complexe pour obtenir des reconstructions pertinentes.

2.2.5.1 Image sismique synthétique avec faille

Dans un premier temps, les résultats sont présentés sur une image synthétique de $300 \times 300 \times 300$ caractérisée par de fortes courbures (voir figure 2.7). La faille théorique apparaît en rouge et certaines surfaces théoriques sont présentées en bleu.

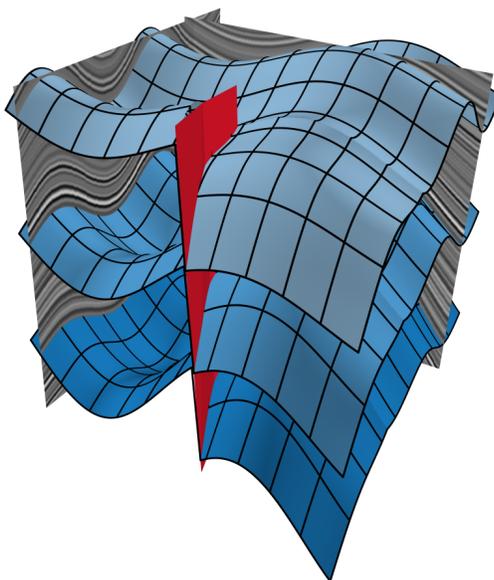


Figure 2.7 – *Volume sismique synthétique faillé, modèle de faille (en rouge) et quelques surfaces théoriques (en bleu).*

La reconstruction par la méthode proposée utilise un domaine polygonal (voir figure 2.8) défini de manière à contourner la faille en rouge de la figure 2.7. Le masque binaire utilisé pour la méthode du masque de [Zin12] est défini en annulant la contribution des points extérieurs au polygone dans le domaine rectangulaire qui englobe le polygone des contraintes afin de les exclure.

Le champ d'orientation est estimé par la méthode du tenseur de structure avec des écarts-types de $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 2$ respectivement pour le calcul du champ gradient et de la matrice d'auto-corrélation. Le polygone de reconstruction permet d'éviter les effets de bord de la convolution gaussienne (voir figure 2.8). Dans les simulations présentées, 40 itérations sont effectuées dans le domaine de Fourier pour la méthode du masque et la méthode proposée.

La méthode du masque donne lieu à une surface qui se décale de la surface analytique une

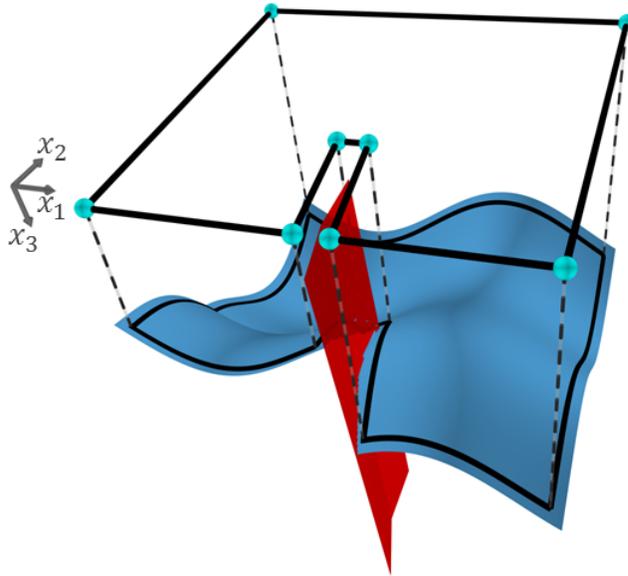


Figure 2.8 – *Domaine de reconstruction polygonal défini par les contraintes de domaine (en bleu) et projeté sur la surface analytique à reconstruire.*

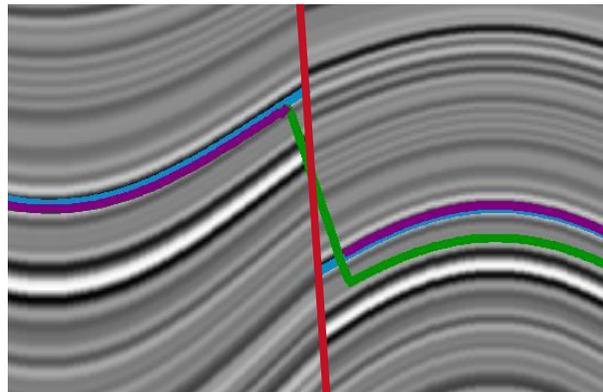


Figure 2.9 – *Section de surfaces reconstruites sur la 20-ième section en x_2 : théorique (en bleu), en utilisant la méthode du masque (en vert) et la méthode proposée (en indigo).*

fois la faille traversée puisque les normales sont perturbées par la présence de la faille. La mise à zéro du masque conserve la relation de voisinage entre les normales qui ne devraient pas être connectées. La surface à gauche de la faille est convexe alors qu'elle est concave à droite de la faille sur la section de la figure 2.9 (la convexité ici n'est pas à confondre avec la notion de polygone convexe). Ceci donne lieu à un écart important entre la surface théorique et celle reconstruite par la méthode du masque.

Bien que la reconstruction soit moins précise dans les régions où la transformation de SC aboutit à un échantillonnage large, la méthode proposée conduit à de meilleurs résultats. Le terme d'erreur quadratique moyenne par rapport à la surface analytique est de 0.18 pixels

en utilisant la méthode proposée lorsque la méthode du masque binaire entraîne une erreur quadratique moyenne de 0.97 pixels.

2.2.5.2 Image sismique réelle faillée avec régions d'occlusion

Nous considérons dans cette section une image sismique réelle présentant une faille de taille $329 \times 376 \times 195$ contenant des régions d'occlusion à l'intérieur du volume (voir figure 2.10). Comme les failles ainsi que les régions d'occlusion sont quasi-verticales, nous reconstruisons la surface sismique sur le domaine représenté sur la figure 2.10 à partir d'un seul point de passage de coordonnées (194, 208, 90).

Nous confrontons les résultats de la méthode proposée à ceux de la méthode du masque binaire. Nous utilisons le même point de passage et le masque binaire défini par le polygone de la figure 2.10 tout en annulant la contribution des points extérieurs au polygone dans le domaine rectangulaire qui englobe le polygone des contraintes. Nous comparons ces résultats également à la méthode par minimisation globale sous contrainte d'un point de passage sans utiliser de masque.

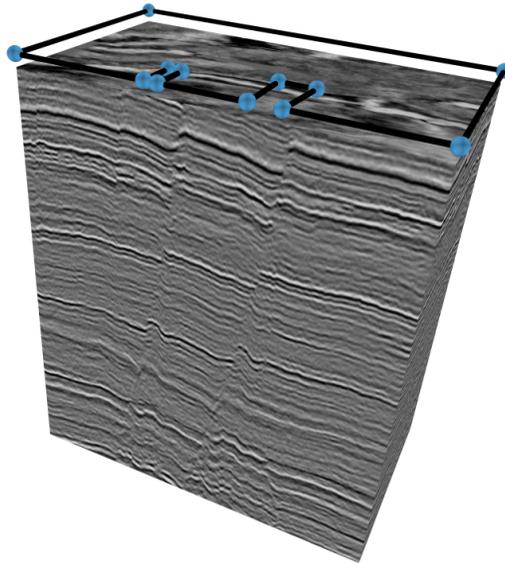


Figure 2.10 – *Image sismique contenant des failles verticales et des régions d'occlusion contournées par le domaine défini par le polygone de sommets en bleu.*

Le champ d'orientation est estimé par la méthode du tenseur de structure avec des écarts-types de $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 2$ pour le calcul du champ gradient et de la matrice d'auto-corrélation respectivement. Le polygone de reconstruction permet d'éviter les effets de bord de la convolution gaussienne. Nous effectuons 40 itérations dans le domaine de Fourier pour la méthode du masque et la méthode proposée.

Les résultats de la figure 2.11 montrent que les reconstructions utilisant la méthode de

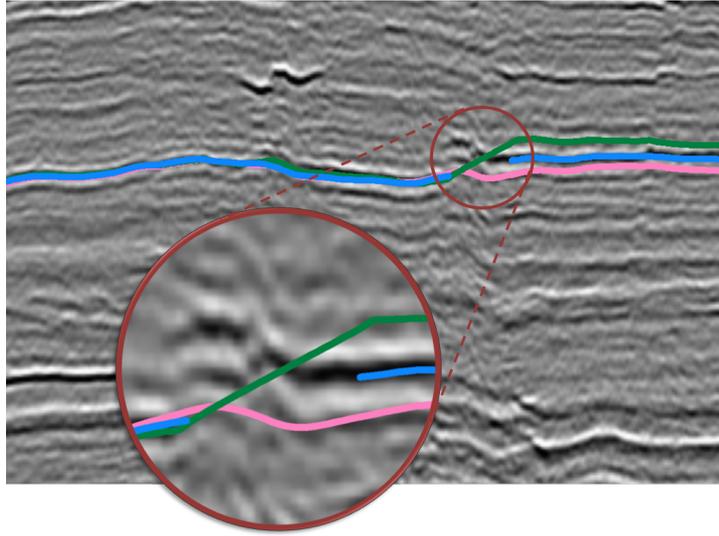


Figure 2.11 – Reconstructions d'hypersurfaces sismiques faillées sur la 172-ième section en x_2 en utilisant la méthode de minimisation sous contrainte de point de passage sans le masque (en rose), avec masque (en vert) et en utilisant la méthode proposée (en bleu).

minimisation sous contrainte d'un point de passage avec ou sans masque conduisent à des hypersurfaces qui s'éloignent de la structure perçue de l'hypersurface à droite de la région de la faille alors que notre méthode conduit à de bons résultats dans toute la région faillée. Ceci est dû au fait que même si les approches utilisent les mêmes points, ceux-ci n'ont pas la même relation de voisinage. En effet, les côtés opposés des parties sectionnées par le polygone n'ont pas d'impact les unes sur les autres en utilisant notre méthode ce qui l'avantage pour les mêmes raisons que pour l'image synthétique de la partie précédente.

Les différences de reconstruction les plus marquantes sont situées sur les sections traversées par les failles avec une différence quadratique moyenne de 2.43 pixels entre la reconstruction obtenue en utilisant notre méthode et celle de la méthode du masque et 3.16 pixels en comparaison avec la méthode sans masque.

2.2.5.3 Image sismique réelle avec réseau de failles

Nous confrontons à présent la méthode proposée à la méthode des quadrangles pour une image sismique réelle de taille $400 \times 350 \times 400$ contenant un réseau de failles et des structures de bassin complexes (figure 2.12).

Le champ d'orientation est estimé à l'aide de la méthode conventionnelle du tenseur de structure avec des écarts-types de 1 et 2 respectivement pour l'estimation du champ de gradients et le calcul de la matrice d'auto-corrélation. Comme nous le montrons dans le dernier chapitre de ce manuscrit, les orientations des régions présentant une convergence asymétrique sont biaisées. Ceci a pour effet de fausser les reconstructions obtenues par optimisation globale. Les points de

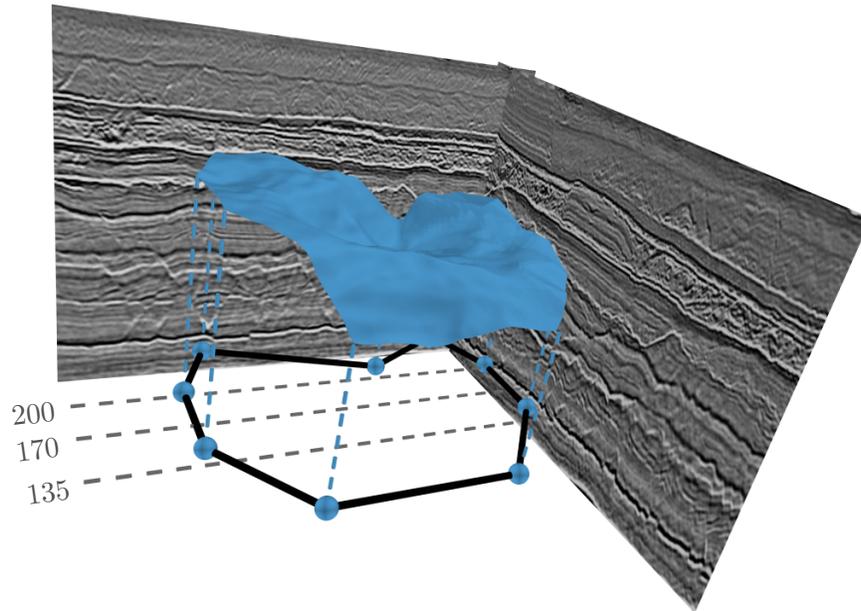


Figure 2.12 – Sections d’image sismique et horizons sismiques reconstruits sur le domaine polygonal défini par les points de passage (en cyan). Sections frontales de la figure 2.15 (en lignes pointillées).

passage de la figure 2.12 définissent un polygone non convexe de 9 sommets qui contourne la région des failles afin de reconstruire la zone du bassin. Les reconstructions sont obtenues après 40 itérations dans le domaine de Fourier.

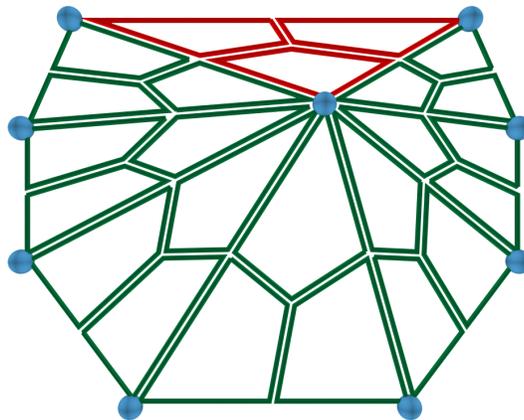


Figure 2.13 – Quadrangles déduits de la triangulation de Delaunay des points de passage (en bleu) - quadrangles à l’intérieur du polygone convexe (en vert) et à l’extérieur (en rouge) -.

Pour la méthode globale par polygones, la reconstruction a 410×320 points d’échantillonnage. Les quadrangles obtenus par triangulation de Delaunay sont présentés dans la figure 2.13. Le domaine non convexe est naturellement transformé en domaine convexe en ajoutant la région en

rouge, ce qui conduit à des reconstructions partielles supplémentaires sur l'extension du domaine. La grille d'échantillonnage est imposée par le plus grand côté du quadrilatère, ce qui conduit à une résolution dense mais non homogène le long de reconstructions partielles comme le montre la figure 2.14 représentant la différence d'échantillonnage de quelques quadrangles du domaine de reconstruction.

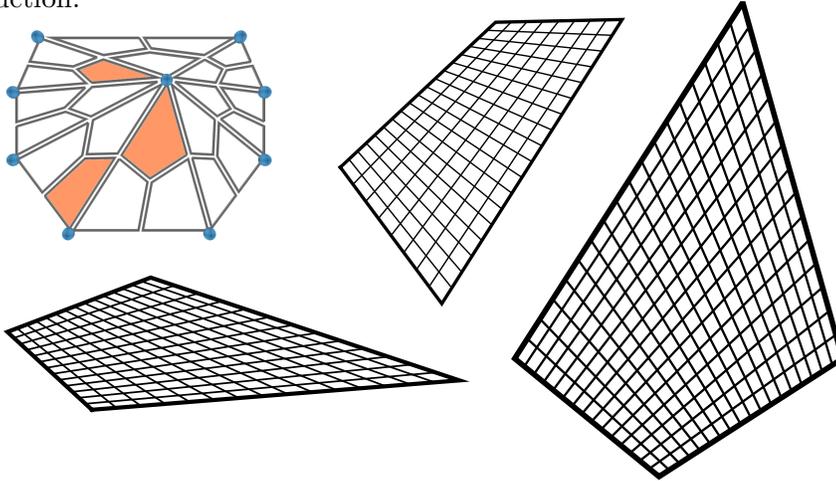


Figure 2.14 – *Indépendance d'échantillonnage entre les quadrangles du polygone.*

La figure 2.15 montre les résultats de reconstruction en utilisant notre approche globale en comparaison avec la méthode des quadrangles sur différentes sections frontales de la donnée sismique présentées dans la figure 2.12.

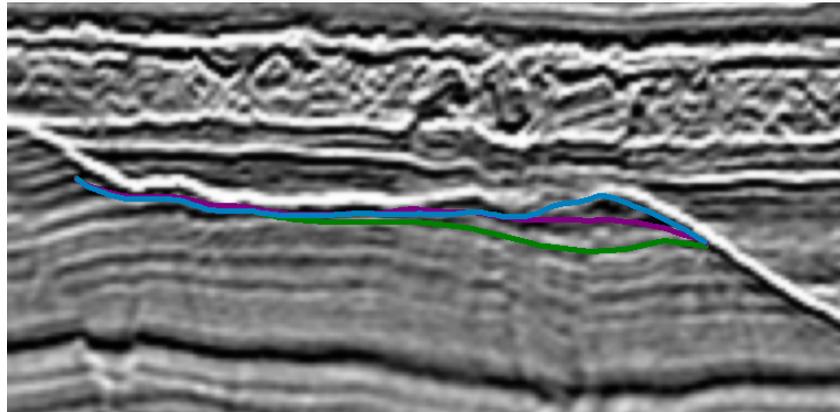
Il semble que l'aspect local de la méthode des quadrangles conduit à des reconstructions qui divergent de l'horizon perceptible.

Les transformations de SC conduisent à des régions sous-échantillonnées visibles à gauche du domaine polygonal. Cela affecte la précision de la reconstruction dans ces régions. Notre méthode avec régularisation de la grille conduit à une meilleure reconstruction de l'horizon et corrige les erreurs de reconstruction dans les régions sous-échantillonnées après transformation de SC.

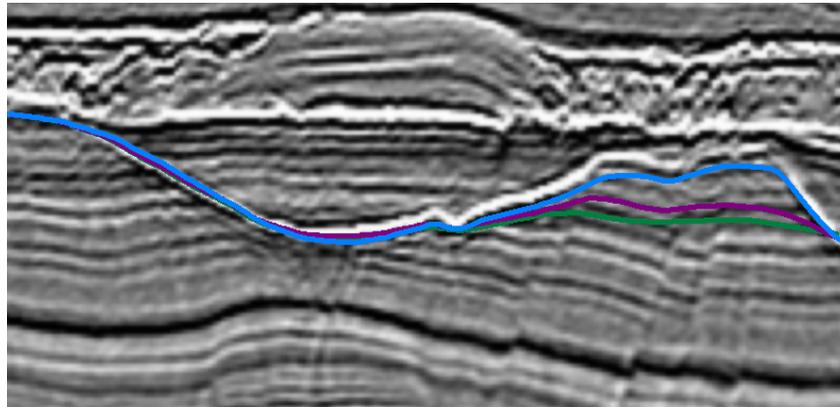
La différence absolue entre notre méthode et la méthode des quadrangles met en évidence jusqu'à 9 pixels de différence localement et une différence absolue moyenne de 2.48 pixels sur le domaine de reconstruction.

2.2.6 Conclusions partielles

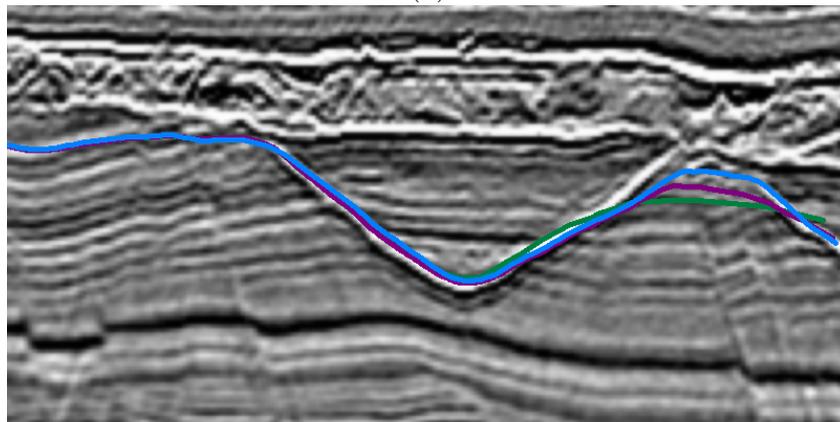
Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre une alternative aux méthodes du masque binaire et des quadrangles dans le cadre de contraintes définissant un polygone simplement convexe. Si cette méthode présente une complexité calculatoire plus importante que les méthodes du masque binaire et des quadrangles, elle permet de respecter plusieurs



(a)



(b)



(c)

Figure 2.15 – Reconstructions en utilisant la méthode des quadrangles (en vert) et notre méthode sans régularisation (en indigo) et avec régularisation (en bleu) sur les 135-ième (a), 170-ième (b) et 200-ième (c) section en x_2 .

points de passage contrairement à la méthode du masque binaire. Elle est, de plus, qualifiée de globale puisque la reconstruction est faite d'un seul tenant en opposition avec la méthode des

quadrangles.

La méthode globale par polygones est basée sur la transformation du polygone défini par les contraintes en rectangle et ce par la combinaison de transformations de SC directe et inverse ainsi que d'une régularisation du maillage si nécessaire. La chaîne de transformations est conforme, ce qui permet de reconstruire la surface de manière rapide par transformée de Fourier.

Cette méthode requiert d'ordonner les points de domaine ou de passage qui, par ailleurs, ne peuvent pas être imposés à l'intérieur du domaine de reconstruction. Pour répondre à cette problématique, nous proposons une approche incrémentale où les contraintes à l'intérieur du domaine polygonal font l'objet d'une reconstruction séparée par la méthode présentée dans cette première partie. Une deuxième reconstruction permet d'étendre le domaine tout en conservant la reconstruction à l'intérieur du domaine. Cette nouvelle approche sera qualifiée de quasi-globale.

2.3 Reconstruction sur domaines imbriqués

2.3.1 Problématique

Vis-à-vis de l'application sismique considérée, le cadre de travail naturel pour un géologue ou un géophysicien consiste à imposer et modifier des contraintes pour obtenir des reconstructions fidèles à la structure perçue des textures directionnelles. À cette fin, des points de passage peuvent être ajoutés à l'intérieur du domaine, des régions complexes situées à l'intérieur du domaine peuvent être contournées, ou le domaine de reconstruction peut être étendu à partir d'une reconstruction initiale juste et à conserver. Dans ces deux derniers cas de figure, l'approche globale que nous proposons dans la section 2.2 ne peut pas être utilisée puisque le domaine de reconstruction n'est pas simplement connexe. En outre, la méthode des quadrangles ne permet également pas de toujours répondre à ces configurations. Bien qu'elle respecte un nombre quelconque de points de passage, elle ne peut être utilisée que dans le cas de géométries simplement connexes et convexes. Par ailleurs, il n'est pas garanti qu'elle préserve les maillages quadrangulaires reconstruits lors de l'ajout de contraintes supplémentaires ou la modification de celles déjà imposées.

Dans l'approche présentée dans cette section, les points de passage définissent des polygones imbriqués (figure 2.16) pris en compte dans la reconstruction de manière incrémentale sous la forme de contraintes de valeurs. Le polygone dit intérieur, délimitant la région de plus petite aire, donne lieu à une première reconstruction en utilisant la méthode globale de la section 2.2. Les autres polygones sont considérés de manière progressive dans l'ordre croissant des aires des régions qu'ils délimitent. Le domaine de reconstruction est alors étendu de manière continue sous la forme de couronnes délimitées chacune par le polygone courant dit extérieur et le polygone précédent dit intérieur. Dans la figure 2.16, la couronne de la deuxième étape est délimitée par les polygones des contraintes en bleu et en vert. À chaque étape, la couronne de reconstruction est délimitée par le polygone reconstruit à l'étape précédente, dit le noyau, et le polygone qui

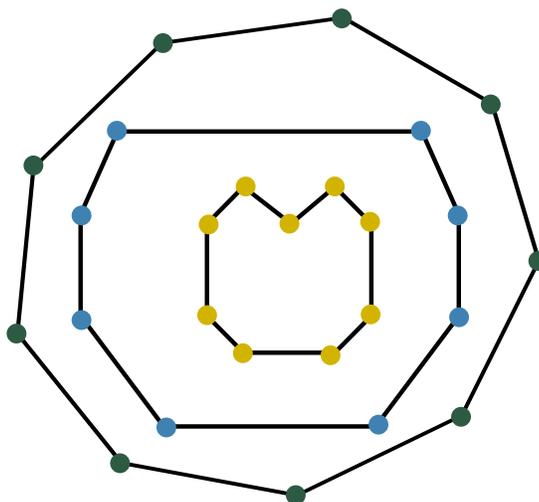


Figure 2.16 – Domaines imbriqués définis par les contraintes de points de passage en couleur.

l’englobe. Il s’agit d’un polygone doublement connexe.

De la même manière que précédemment, l’objectif est de conserver le caractère à la fois rapide et global de la reconstruction. Comme il s’agit d’une méthode incrémentale par croissance de régions imbriquées, nous la désignerons comme étant une méthode “quasi-globale” en contraste avec la méthode globale de la section 2.2.

La résolution rapide de l’EDP respecte les contraintes exprimées à la frontière extérieure du domaine. Aussi, pour respecter conjointement les contraintes intérieures et extérieures de chaque couronne, nous introduisons deux schémas de chaînes de transformations à combiner. Cette combinaison se fait a posteriori ou à la volée.

Afin de conserver le caractère rapide de la reconstruction, la couronne du domaine polygonal est transformée en domaine rectangulaire pour la résolution. Pour ce faire, nous nous sommes naturellement intéressés à la variante de la transformation de Schwarz-Christoffel étendue au cas d’un polygone doublement connexe.

Dans la suite de cette section, nous présentons la transformation de SC dans le cadre d’un polygone doublement connexe avant de présenter les chaînes de transformations utilisant toutes les deux les variantes de la transformation de SC simplement connexe. Nous présenterons finalement les résultats de la méthode sur des images sismiques avant de les comparer à ceux de la méthode des quadrangles.

2.3.2 Transformation de Schwarz-Christoffel dans le cas doublement connexe

La transformation de SC a initialement été proposée dans le cadre de polygones simplement connexes vérifiant le théorème de Jordan. Dans les cas multiplement connexes, la formalisation de la transformation a été présentée dans le début des années 2000 [DEP04, DeL06] et utilise des produits croisés. Cependant, l’intégration est difficile à calculer numériquement à cause des

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

termes croisés. Ceci rend les estimations des transformations directes et inverses compliquées. Cependant, il existe une extension naturelle de l'expression de la transformation de SC dans le cas de régions doublement connexes en substituant le disque unité \mathcal{D} par un anneau de rayon extérieur unitaire. Cette extension donne lieu à un nombre réduit de paramètres à estimer en comparaison au cas multiplément connexe et n'introduit pas de forte complexité calculatoire supplémentaire.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux couronnes délimitées par des contours intérieurs et extérieurs qui définissent des régions grandissantes. Chaque couronne représente un polygone doublement connexe. Son contour intérieur est défini par le polygone des contraintes extérieures du noyau et son contour extérieur est défini par les points de passage englobant le noyau (voir figure 2.17).

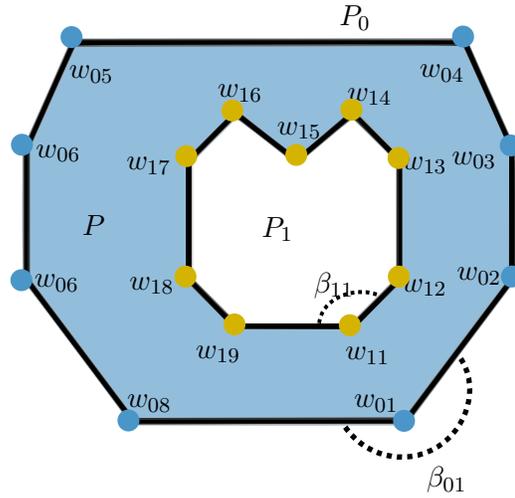


Figure 2.17 – Région doublement connexe P définie par le polygone intérieur P_1 et extérieur P_0 .

Soit P le polygone doublement connexe délimité par un polygone extérieur $P_0 = w_{01}, w_{02}, \dots, w_{0L}$ et un polygone intérieur $P_1 = w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1K}$ (figure 2.17), il existe [Hen93] un unique nombre $\mu > 0$ garantissant une transformation conforme de l'anneau $A_\mu = \{z \mid \mu < |z| < 1\}$ vers P . En posant $\Theta(z, \mu) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \mu^{2j-1}z)(1 - \mu^{2j-1}z^{-1})$ [DEP01], cette transformation s'exprime par :

$$\forall z \in A, f_{P,\mu}(z) = a + c \int_0^z \prod_{k=1}^L \left(\Theta\left(\frac{s}{\mu z_{0k}}\right) \right)^{-\beta_{0k}} \prod_{k=1}^K \left(\Theta\left(\frac{\mu s}{z_{1k}}\right) \right)^{-\beta_{1k}} ds, \quad (2.37)$$

où $a, c \in \mathbb{C}$, $\beta_{0k}, z_{0k}, \beta_{1k}, z_{1k}$ sont respectivement les angles et les pré-sommets de P_0 et de P_1 .

Notons que le paramètre μ est intrinsèque au polygone choisi. Aussi, en dehors de cas par-

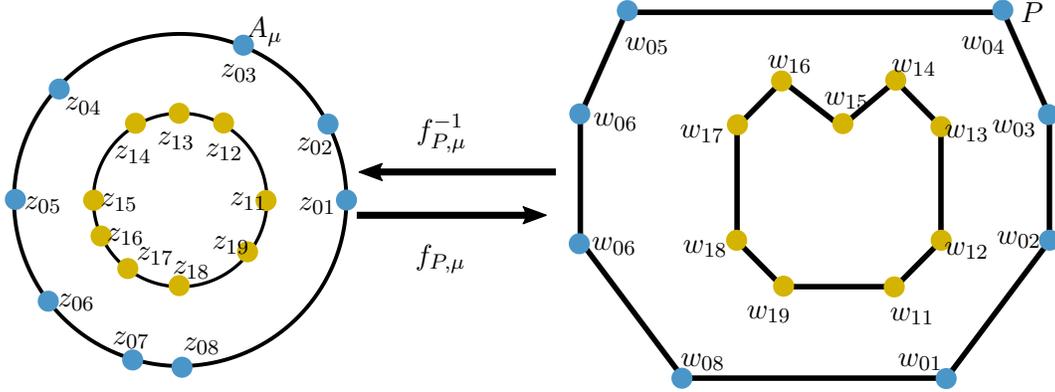


Figure 2.18 – Transformations de SC directe et inverse entre le polygone P doublement connexe et l'anneau A_μ .

ticuliers, deux polygones distincts correspondent à des anneaux de rayon intérieur différents.

La dérivée de la transformation de SC doublement connexe s'exprime :

$$\forall z \in A, f'_{P,\mu}(z) = c \prod_{k=1}^L \left(\Theta\left(\frac{z}{\mu z_{0k}}\right) \right)^{-\beta_{0k}} \prod_{k=1}^K \left(\Theta\left(\frac{\mu z}{z_{1k}}\right) \right)^{-\beta_{1k}}. \quad (2.38)$$

Aussi, les termes du Jacobien direct s'expriment :

$$\mathcal{J}_{f_{P,\mu}}(x_1^1, x_1^2) = \begin{bmatrix} \Re[f'_{P,\mu}(x_1^1)] & -\Im[f'_{P,\mu}(x_1^1)] & 0 \\ \Re[f'_{P,\mu}(x_1^2)] & -\Im[f'_{P,\mu}(x_1^2)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

La transformation de SC étant inversible, son inverse $f_{P,\mu}^{-1}$ transforme un polygone doublement connexe P en anneau A_μ . De même que précédemment, l'estimation de la transformation inverse se ramène à estimer $f_{P,\mu}^{-1}(w), \forall w \in P$. Or, il n'existe pas d'expression analytique pour la transformation inverse de SC. Son estimation se fait à partir de l'estimation des paramètres de la transformation de SC directe puis la dérivation et l'inversion de l'équation :

$$w = f(z). \quad (2.40)$$

Le Jacobien $\mathcal{J}_{f_{P,\mu}^{-1}}$ de la transformée inverse de SC est obtenu en calculant celui de la transformation directe $f_{P,\mu}$ sur les points de l'anneau A_μ puis en l'inversant (voir équation (1.30)).

$$\mathcal{J}_{f_{P,\mu}^{-1}}(x_1^1, x_1^2) = [\mathcal{J}_{f_{P,\mu}}(x_1^1, x_1^2)]^{-1} \quad (2.41)$$

En pratique, huit termes suffisent pour le calcul de $\Theta(z, \mu)$ [Hu98]. Aussi, la complexité calculatoire de la transformation directe de SC dans le cas doublement connexe est équivalente

à celle de la transformation de SC dans le cas simplement connexe, à savoir en $\mathcal{O}(N_\Omega)$. La transformation inverse est basée sur le calcul préalable de la transformation directe et l'inversion a une complexité de $\mathcal{O}(N_\Omega \times K)$ de même que pour le cas simplement connexe.

2.3.3 Chaîne de transformations d'espace pour la reconstruction d'une couronne

De même que pour le cas simplement connexe, la transformation d'espace a pour but de transformer le polygone de reconstruction en domaine rectangulaire régulièrement échantillonné pour la résolution rapide de l'EDP. Or, étant donné que la couronne de reconstruction est un polygone doublement connexe, celle-ci donne lieu à un rectangle doublement connexe.

Les tailles des contours extérieur et intérieur du rectangle de résolution ainsi que l'emplacement du contour intérieur peuvent être choisis librement. Néanmoins, étant donné que les transformations de SC concernent des anneaux concentriques, l'idéal est de considérer un rectangle concentrique pour domaine de résolution afin de ne pas introduire de dissymétrie dans les régions et dégrader la qualité de l'application de la transformation de SC. La région intérieure du rectangle doublement connexe ne doit pas être prise en compte pour la solution de l'EDP car elle correspond à des régions où la reconstruction n'est pas recherchée. Dans le schéma de résolution de l'EDP, un masque binaire dont les valeurs s'annulent à l'endroit du rectangle intérieur est utilisé.

Le schéma de résolution rapide dans le domaine de Fourier de l'équation (1.21) concerne des contraintes exprimées sous la forme d'un point de passage unique ou de plusieurs points de passage sous forme d'une frontière extérieure. Étant donné que la reconstruction d'une couronne doit respecter à la fois les polygones extérieur et intérieur, l'approche proposée met en œuvre deux voies de résolution (figure 2.19) respectant alternativement les contraintes de passage sur chacun des contours intérieur et extérieur. La combinaison des deux schémas permet le respect de l'ensemble des contraintes de points de passage tout en préservant les reconstructions précédentes par la définition du domaine polygonal doublement connexe.

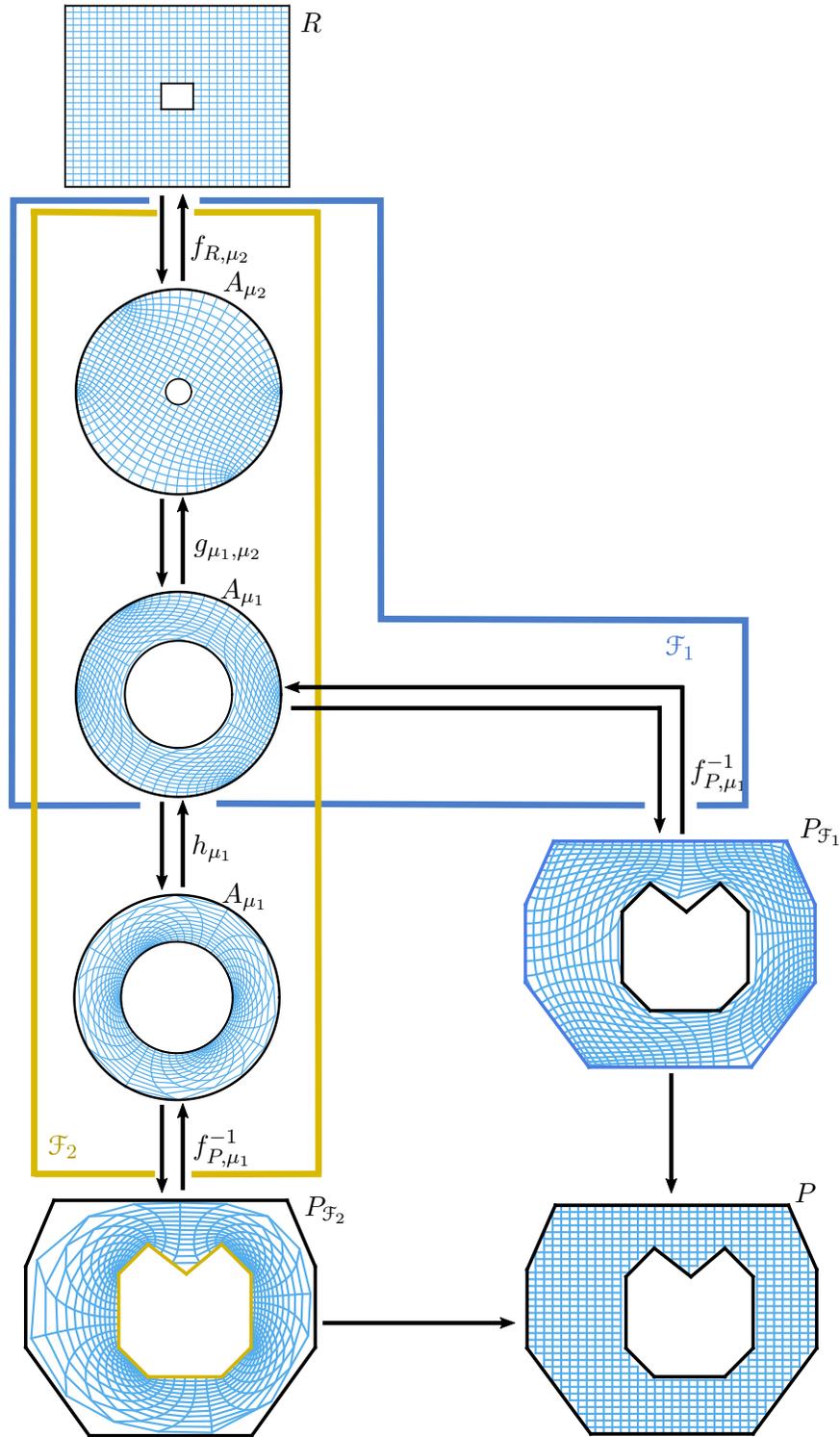


Figure 2.19 – Chaîne de transformations d'espace du support polygonal délimité par P en support rectangulaire défini par R sans inversion \mathcal{F}_1 (en bleu) et avec inversion \mathcal{F}_2 (en jaune).

2.3.3.1 Respect des contraintes extérieures

La première reconstruction se fait par le biais d'une chaîne de transformations d'espace notée \mathcal{F}_1 qui permet de transformer la région doublement connexe P , délimitée par les contraintes de point de passage, en domaine rectangulaire doublement connexe R . La chaîne \mathcal{F}_1 donne lieu à une reconstruction respectant les contraintes sur la frontière extérieure de P . Elle comporte naturellement une transformation de SC inverse et directe :

- la transformation de SC inverse f_{P,μ_1}^{-1} du polygone P en anneau A_{μ_1} ,
- la transformation de SC directe f_{R,μ_1} de l'anneau A_{μ_1} en rectangle de résolution R .

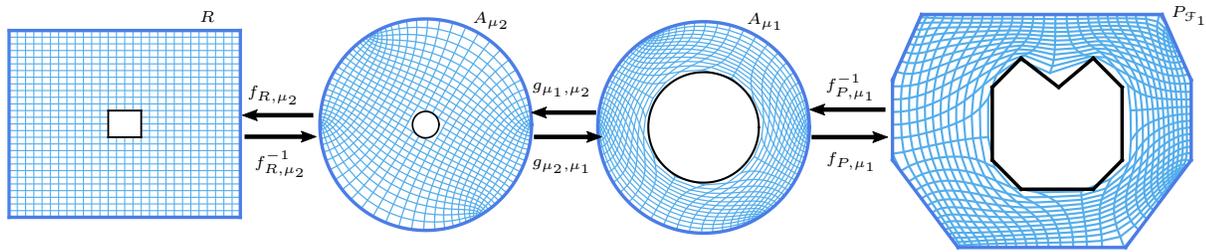


Figure 2.20 – Chaîne de transformations d'espace du support polygonal délimité par P en support rectangulaire défini par R conservant les contraintes extérieures.

Dans ce cas, le rectangle de résolution est nécessairement celui lié à l'anneau de rayon intérieur μ_1 et donc imposé par le polygone P . Cependant, il ne s'agit pas de la configuration la plus pertinente. En effet, la taille du rectangle intérieur influence les relations de voisinage entre les points des contours ainsi que la contribution des points de la grille polygonale. Un rectangle intérieur de faible dimension implique une forte contribution des points du contour initialement éloignés dans le domaine polygonal mais permet de tenir compte des contributions des points de la grille polygonale sans augmenter le nombre de points d'échantillonnage. Un rectangle intérieur de grande dimension sépare la contribution des points des contours mais nécessite une augmentation drastique de la densité de la grille de résolution. Un compromis est donc nécessairement à trouver.

De ce fait, nous différencions l'anneau A_{μ_1} relatif au polygone P et l'anneau A_{μ_2} de rayon intérieur μ_2 relatif au rectangle. Nous introduisons une transformation intermédiaire d'adaptation de rayon entre les anneaux A_{μ_1} et A_{μ_2} . La transformation \mathcal{F}_1 se compose au final de trois transformations (voir figure 2.20) :

- la transformation de SC inverse f_{P,μ_1}^{-1} du polygone P en anneau A_{μ_1} ,
- la transformation d'adaptation de rayons de A_{μ_1} en A_{μ_2} qu'on notera g_{μ_1,μ_2} dont la transformation inverse est notée g_{μ_2,μ_1} . Il s'agit d'une transformation de Möbius qui s'exprime en coordonnées polaires par :

$$z(\rho_1, \theta_1) \mapsto z(\rho_2, \theta_2) = \left(\frac{\rho_1 - \mu_1}{1 - \mu_1} (1 - \mu_2) + \mu_2, \theta_1 \right) \quad (2.42)$$

2.3 - Reconstruction sur domaines imbriqués

- la transformation de SC directe f_{R,μ_2} de l'anneau A_{μ_2} en rectangle de résolution R .

Cette transformation s'exprime donc comme suit :

$$\mathcal{F}_1 = f_{R,\mu_2} \circ g_{\mu_1,\mu_2} \circ f_{P,\mu_1}^{-1}. \quad (2.43)$$

Selon l'équation (1.36), le Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$ de la chaîne de transformation \mathcal{F} s'exprime :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{J}_{f_{R,\mu_2}}(x_3^1, x_3^2) \times \mathcal{J}_{g_{\mu_1,\mu_2}}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{f_{P,\mu_1}^{-1}}(x_1^1, x_1^2) \quad (2.44)$$

où (x_i^1, x_i^2) , $i \in [2, 4]$ est l'image de la grille (x_1^1, x_1^2) de P par la composée des $f_1 \circ \dots \circ f_i$ composantes de la chaîne de transformation.

La transformation d'espace inverse \mathcal{F}_1^{-1} transformant le rectangle R en polygone P s'exprime comme suit (voir figure 2.20) :

$$\mathcal{F}_1^{-1} = (f_{R,\mu_2} \circ g_{\mu_1,\mu_2} \circ f_{P,\mu_1}^{-1})^{-1} \quad (2.45)$$

$$= f_{P,\mu_1} \circ g_{\mu_2,\mu_1} \circ f_{R,\mu_2} \quad (2.46)$$

Son Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}_1^{-1}}$ s'exprime :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}_1^{-1}} = \mathcal{J}_{f_{P,\mu_1}}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{g_{\mu_2,\mu_1}}(x_3^1, x_3^2) \times \mathcal{J}_{f_{R,\mu_2}}(x_4^1, x_4^2). \quad (2.47)$$

La grille régulière (x_4^1, x_4^2) en R donne lieu à la grille notée $P_{\mathcal{F}_1} = (x_1^1, x_1^2)$ respectant les contours intérieur et extérieur de P par la transformation \mathcal{F}_1 . Elle présente une plus grande densité sur le contour extérieur à conserver.

2.3.3.2 Respect des contraintes intérieures

La seconde reconstruction se fait par le biais d'une chaîne de transformations d'espace notée \mathcal{F}_2 semblable à \mathcal{F}_1 qui permet également le passage au domaine rectangulaire doublement connexe R . La chaîne \mathcal{F}_2 doit donner lieu à une reconstruction respectant les contraintes sur la frontière intérieure de P .

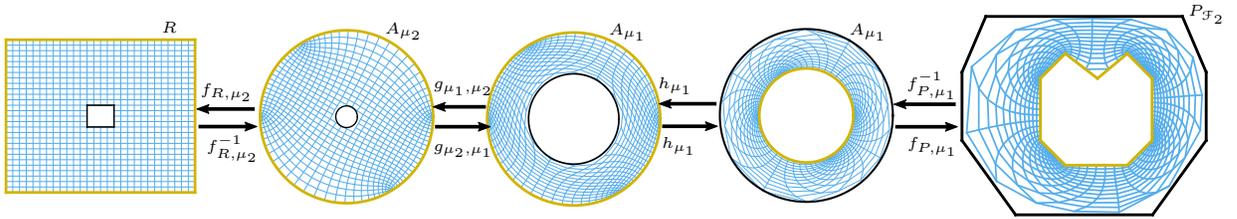


Figure 2.21 – Chaîne de transformations d'espace du support polygonal délimité par P en support rectangulaire défini par R conservant les contraintes intérieures.

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

Or, la résolution rapide de l'EDP par passage dans le domaine de Fourier est possible sous contraintes exprimées sur la frontière extérieure du domaine de résolution. L'objectif est donc de transformer les contraintes intérieures en contraintes extérieures. Pour ce faire, il suffit d'une inversion d'espace. Elle se fait en intercalant une transformation de Möbius supplémentaire h_{μ_1} de l'anneau A_{μ_1} en anneau de rayon extérieur unitaire et rayon intérieur μ_1 s'exprimant :

$$h_{\mu_1} : z \mapsto \mu_1/z. \quad (2.48)$$

Cette transformation renvoie le centre de l'anneau vers l'infini, et les points à l'extérieur vers le centre. Plus particulièrement, le contour extérieur de A_{μ_1} se transforme en contour intérieur et vice versa.

La transformation \mathcal{F}_2 se compose donc de quatre transformations (voir figure 2.21) :

- la transformation de SC inverse f_{P,μ_1}^{-1} du polygone P en anneau A_{μ_1} ,
- la transformation d'inversion d'espace h_{μ_1} de l'anneau A_{μ_1} ,
- la transformation d'adaptation de rayons g_{μ_1,μ_2} de A_{μ_1} en A_{μ_2} ,
- la transformation de SC directe f_{R,μ_2} de l'anneau A_{μ_2} en rectangle de résolution R .

Cette transformation s'exprime donc comme suit :

$$\mathcal{F}_2 = f_{R,\mu_2} \circ g_{\mu_1,\mu_2} \circ h_{\mu_1} \circ f_{P,\mu_1}^{-1}. \quad (2.49)$$

Selon l'équation (1.36), le Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}_2}$ de la chaîne de transformation \mathcal{F}_2 s'exprime :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}_2} = \mathcal{J}_{f_{R,\mu_2}}(x_4^1, x_4^2) \times \mathcal{J}_{g_{\mu_1,\mu_2}}(x_3^1, x_3^2) \times \mathcal{J}_{h_{\mu_1}}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{f_{P,\mu_1}^{-1}}(x_1^1, x_1^2). \quad (2.50)$$

La transformation d'espace inverse \mathcal{F}_2^{-1} transformant le rectangle R en polygone P s'exprime comme suit (voir figure 2.20) :

$$\mathcal{F}_2^{-1} = (f_{R,\mu_2} \circ g_{\mu_1,\mu_2} \circ h_{\mu_1} \circ f_{P,\mu_1}^{-1})^{-1} \quad (2.51)$$

$$= f_{P,\mu_1} \circ h_{\mu_1} \circ g_{\mu_2,\mu_1} \circ f_{R,\mu_2}^{-1} \quad (2.52)$$

Son Jacobien $\mathcal{J}_{\mathcal{F}_2^{-1}}$ s'exprime :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}_2^{-1}} = \mathcal{J}_{f_{P,\mu_1}}(x_2^1, x_2^2) \times \mathcal{J}_{h_{\mu_1}}(x_3^1, x_3^2) \times \mathcal{J}_{g_{\mu_2,\mu_1}}(x_4^1, x_4^2) \times \mathcal{J}_{f_{R,\mu_2}^{-1}}(x_5^1, x_5^2). \quad (2.53)$$

La grille régulière (x_5^1, x_5^2) en R donne lieu à la grille notée $P_{\mathcal{F}_2} = (x_1^1, x_1^2)$ respectant les contours intérieur et extérieur de P par la transformation \mathcal{F}_2 . Elle présente une plus grande densité sur les contours intérieurs à conserver.

2.3.3.3 Combinaison des contraintes intérieures et extérieures

La combinaison des transformations \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectant respectivement les contraintes extérieures et intérieures s’appuie sur la transformation des grilles $P_{\mathcal{F}_1}$ et $P_{\mathcal{F}_2}$ en une seule et même grille. Celle-ci correspond au maillage régulièrement échantillonné de P (voir figure 2.22). Le passage de $P_{\mathcal{F}_1}$ et $P_{\mathcal{F}_2}$ en P se fait par une interpolation bilinéaire.

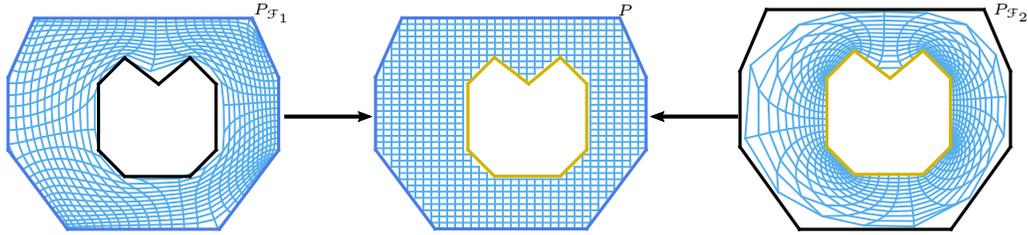


Figure 2.22 – Maillage du polygone par transformations \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 et grille finale.

La densité de la grille d’échantillonnage issue de la transformation de R en P est la plus forte au niveau des contraintes conservées respectivement par les chaînes \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (voir figure 2.22). Aussi, la combinaison des deux reconstructions ne souffre pas, de manière générale, de l’impact des grilles sous-échantillonnées par endroits relatif aux transformations de SC. Néanmoins, à l’instar du cas simplement connexe, les grilles peuvent être régularisées, si nécessaire, en insérant une transformation de régularisation du maillage au niveau de l’anneau A_{μ_1} .

Chaque nœud de la grille de reconstruction finale est pondéré selon une fonction décroissante allant de 1 sur la frontière de la contrainte respectée à 0 sur la frontière opposée. La fonction de pondération est issue de la grille de l’anneau A_{μ_1} . Notons W_2 la fonction de pondération respectant les contraintes intérieures, nous choisissons la fonction de pondération comme étant une Gaussienne de moyenne nulle et d’écart-type $\sigma_W = \frac{1-\mu_1}{3}$. La relation entre la fonction de pondération respectant les contraintes intérieures et la fonction de pondération W_2 respectant les contraintes extérieures est :

$$W_1 = 1 - W_2. \tag{2.54}$$

Afin de combiner les deux chaînes de transformations pour pouvoir respecter à la fois les contraintes intérieures et extérieures, nous proposons une méthode “à la volée” et une méthode dégradée et plus rapide “a posteriori”.

Pour la méthode de combinaison à la volée, le terme de pondération intervient dans l’expression du résidu de l’équation (1.4) à l’instar de la méthode du masque. Notons r_{k,\mathcal{F}_1} et r_{k,\mathcal{F}_2} les résidus de la k -ième itération de la résolution de l’EDP, le résidu r_k à la k -ième itération s’exprime :

$$r_k(\mathbf{x}_{M+1}) = W_1 r_{k,\mathcal{F}_1}(\mathbf{x}_{M+1}) + (1 - W_1) r_{k,\mathcal{F}_2}(\mathbf{x}_{M+1}), \tag{2.55}$$

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

ou encore en fonction de W_2 comme suit :

$$r_k(\mathbf{x}_{M+1}) = (1 - W_2)r_{k,\mathcal{F}_1}(\mathbf{x}_{M+1}) + W_2r_{k,\mathcal{F}_2}(\mathbf{x}_{M+1}). \quad (2.56)$$

Les résidus r_{k,\mathcal{F}_1} et r_{k,\mathcal{F}_2} sont calculés sur la grille régulière en P . Cette approche garantit de minimiser l'écart du gradient de la reconstruction finale par rapport au pendage.

La méthode de combinaison a posteriori est une version dégradée mais plus rapide. Elle consiste à combiner les deux reconstructions issues des deux chaînes de transformations séparément de sorte à respecter à la fois les contraintes intérieures et extérieures de P . Notons $\tau_{\mathcal{F}_1}$ et $\tau_{\mathcal{F}_2}$ les reconstructions issues respectivement des chaînes de transformations $\tau_{\mathcal{F}_1}$ et $\tau_{\mathcal{F}_2}$ et interpolées sur la grille régulièrement échantillonnée en P . La reconstruction finale τ_M s'exprime alors :

$$\tau_M = W_1\tau_{\mathcal{F}_1} + (1 - W_1)\tau_{\mathcal{F}_2}, \quad (2.57)$$

ou encore en fonction de W_2 comme suit :

$$\tau_M = (1 - W_2)\tau_{\mathcal{F}_1} + W_2\tau_{\mathcal{F}_2}. \quad (2.58)$$

La combinaison des reconstructions a posteriori permet une plus grande liberté dans la combinaison. La fonction de pondération n'intervient qu'à l'étape finale et non pas dans chaque étape de la résolution de l'EDP. Cependant la reconstruction finale peut ne pas respecter, par endroits, le champ d'orientation sous-jacent contrairement à la reconstruction avec combinaison à la volée.

2.3.4 Résultats

L'approche proposée est confrontée à la méthode des quadrangles dans le cas d'une image sismique réelle $400 \times 350 \times 400$ qui comporte des structures chenalisantes complexes.

Les points de passages (figure 2.24) définissent deux polygones imbriqués : le polygone intérieur à 9 sommets est concave tandis que le polygone extérieur à 8 sommets est convexe. Le champ d'orientation est estimé par la méthode classique du tenseur de structure [Big86, Don99] avec des écarts-types égaux respectivement à 1 et 2 pour l'estimation du champ de gradients et le calcul de la matrice d'autocorrélation. Les reconstructions sont effectuées à l'aide de 40 itérations dans le domaine de Fourier.

Pour l'approche proposée, le domaine intérieur associé au premier polygone est tout d'abord reconstruit sur 180×180 points d'échantillonnage. Dans un second temps, la couronne délimitée par les deux polygones est reconstruite sur 160×205 points d'échantillonnage. Pour la méthode des quadrangles, le nombre de points d'échantillonnage de chaque partie quadrangulaire est imposé par la longueur maximale des côtés [ZDL12].

La figure (2.23) fait apparaître les quadrangles issus de la triangulation de Delaunay en

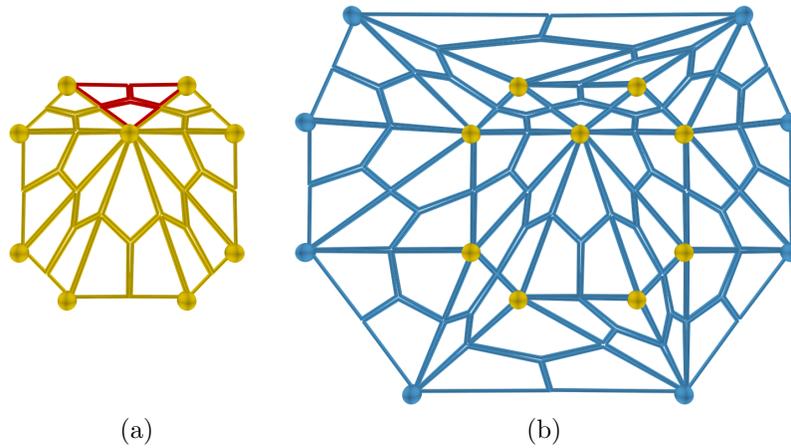


Figure 2.23 – Quadrangles issus des points de passage du polygone intérieur (a) et de l'ensemble des polygones (b).

utilisant respectivement comme contraintes les sommets du polygone intérieur concave (figure 2.23.a) et des deux polygones (figure 2.23.b). Comme attendu, l'ensemble des parties quadrangulaires forme une région convexe incluant des quadrangles supplémentaires (en rouge). Il est à noter que, sur cet exemple, les quadrangles définis par les sommets du polygone intérieur appartiennent à l'ensemble de ceux définis par les sommets des deux polygones (figure 2.23.b).

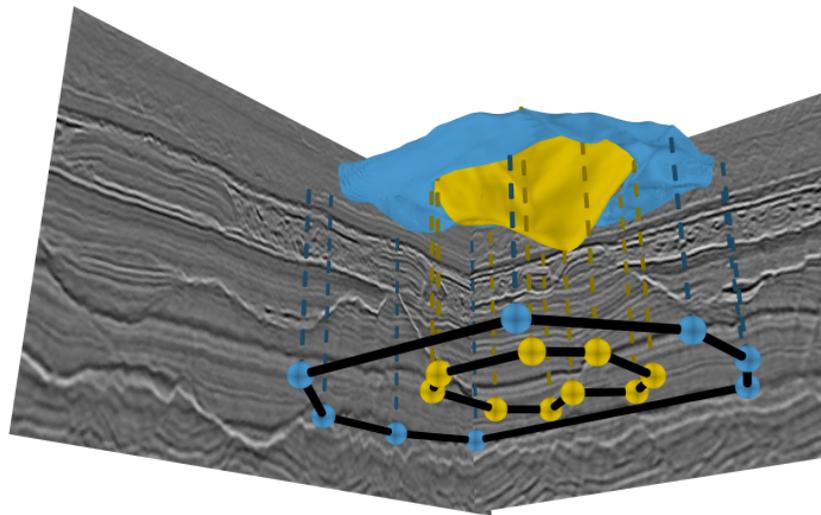


Figure 2.24 – Polygones de contraintes et horizons sismiques reconstruits respectivement sur le domaine intérieur (en jaune) et sur la couronne (en bleu).

La figure 2.24 montre les structures chenalisantes reconstruites par les deux étapes de notre méthode. Les reconstructions des deux approches comparées sont représentées (figure 2.25) sur une section de la donnée sismique. Il apparaît que la reconstruction obtenue par la méthode des quadrangles s'éloigne sensiblement de l'horizon visible recherché tandis que notre méthode

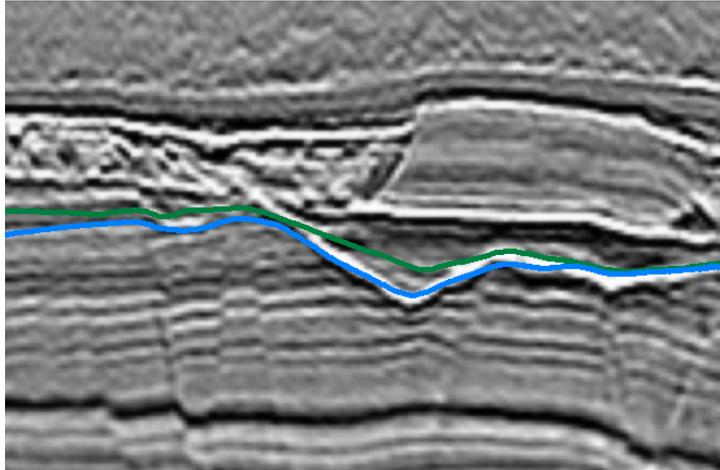


Figure 2.25 – *Horizon sismique reconstruit sur le domaine extérieur (en bleu) et par la méthode des quadrangles (en vert).*

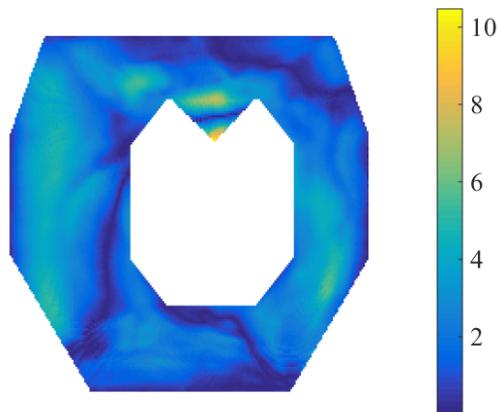


Figure 2.26 – *Différence absolue de reconstruction (en pixels) entre la méthode des quadrangles et la méthode proposée.*

reconstruit au plus près sa géométrie. La différence absolue entre les reconstructions (figure 2.26) met en évidence des différences significatives sur tout le domaine de reconstruction notamment valant 11 pixels par endroits. Étant donné qu'un pixel correspond à environ 10 mètres, la différence est significative lors de l'étape d'exploration.

2.3.5 Conclusions partielles

Dans cette section, nous avons pallié une limitation de la méthode globale de la section 2.2 concernant la définition de points de passage à l'intérieur du polygone de reconstruction. Une approche incrémentale sur supports imbriqués et grandissants donne lieu à une méthode dite quasi-globale.

Cette méthode se base sur la combinaison de deux chaînes de transformations conformes

respectant alternativement les contraintes sur les contours extérieur et intérieur du domaine de reconstruction doublement connexe.

Chacune des chaînes se compose de trois transformations communes : une transformation de SC doublement connexe directe, une transformation de SC doublement connexe inverse et une transformation d'adaptation de rayons d'anneaux. Le respect des contraintes intérieures se fait par le biais d'une transformation supplémentaire d'inversion d'espace. La forme relativement simple de la transformation de SC dans le cas doublement complexe donne lieu à une complexité calculatoire comparable à celle du cas simplement connexe.

Les reconstructions quasi-globales incrémentales permettent de conserver les reconstructions fiables tout en préservant le caractère global de la méthode, ce qui donne lieu à de meilleurs résultats que par la méthode des quadrangles.

2.4 Résumé des contributions et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit, pour la première fois dans le cadre applicatif de l'interprétation des images sismiques, la notion de transformations conformes permettant la résolution à la fois globale et rapide de l'EDP reliant l'hypersurface au pendage. Ces transformations modifient le domaine défini par les points de passage en un domaine rectangulaire régulièrement échantillonné donnant lieu à une résolution rapide par transformée de Fourier.

Nous avons proposé deux méthodes de reconstruction d'hypersurfaces dans un espace vectoriel à 3 dimensions selon l'organisation des contraintes de points de passage.

Lorsque les points de passage sont ordonnés sous forme de contour d'un polygone, une chaîne constituée de transformations de Schwarz-Christoffel directe et inverse transforme le domaine polygonal simplement connexe en rectangle de résolution. Afin de traiter la problématique des grilles non-régulières induites par les transformations de Schwarz-Christoffel, nous avons proposé une transformation optionnelle pour régulariser la grille d'échantillonnage des pendages. Si la seule méthode permettant jusque là de respecter diverses contraintes de passage dans un temps quasi-réel est la méthode des quadrangles, celle-ci est néanmoins locale du fait de la juxtaposition de reconstructions partielles et nécessite que le polygone des contraintes soit convexe. Par contre, notre méthode est globale et sans contraintes de convexité du domaine. Les résultats pour des régions complexes pouvant être contournées par un polygone concave montrent la supériorité de notre méthode par rapport à celle des quadrangles. Dans le cas d'un seul point de passage et d'un domaine de forme polygonale, notre méthode permet de ne pas prendre en compte des relations de voisinage erronées, comme dans le cas de failles, et donne également lieu à de meilleurs résultats que par la méthode du masque binaire.

Lorsque des points de passage sont définis à l'intérieur du contour polygonal, la méthode globale ne peut pas être utilisée. Nous avons donc proposé dans la seconde partie de ce chapitre une méthode incrémentale en considérant des couronnes imbriquées délimitées par les contraintes

Reconstruction d'hypersurfaces sur domaines polygonaux

de points de passage. L'initialisation se fait en reconstruisant le noyau simplement connexe par la méthode globale de la première partie du chapitre. L'approche pour les supports imbriqués se base sur la combinaison de deux chaînes de transformations afin de transformer le polygone doublement connexe des contraintes en rectangle régulièrement échantillonné à chaque étape. La première chaîne permet de respecter les contraintes sur le contour extérieur du domaine et met en œuvre des transformations d'espace de Schwarz-Christoffel doublement connexes ainsi que des transformations de Möbius. La seconde chaîne respecte les contraintes sur le contour intérieur du domaine et ce, notamment, à travers l'inversion du domaine ce qui permet de transformer les contraintes intérieures en contraintes extérieures pour la résolution rapide de l'EDP. Les résultats obtenus montrent de meilleures reconstructions que par la méthode des quadrangles.

Parmi les perspectives de ces méthodes, un premier point concerne l'accroissement automatique du domaine de reconstruction. Ce processus peut être basé sur une mesure de similarité de forme dans chaque direction de l'espace pour déterminer la forme du nouveau support avec un taux d'accroissement fixe jusqu'à recouvrir la totalité de la donnée. Ainsi, les reconstructions aux premières étapes sont fiables et leurs contours le sont également, ce qui impose des contraintes de points de passage fidèles aux textures donnant lieu à des reconstructions de meilleure qualité que par un procédé de reconstruction en un seul temps sur l'ensemble de la donnée. Un second point concerne le cas multiplement connexe. Il s'agit ici de fixer les reconstructions justes sur plusieurs domaines suffisamment séparés spatialement et d'imposer plus de contraintes à respecter dans la région englobant l'ensemble des sous-régions non connexes. Bien que la complexité calculatoire résultante associée soit très importante, il est vraisemblable que le calcul des transformations de Schwarz-Christoffel multiplement connexes puisse être effectué dans un temps raisonnable et compatible avec l'interaction dans un avenir relativement proche.

Chapitre 3

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Introduction | 71 |
| 3.2 | Estimation d'orientation par la méthode du tenseur de structure | 74 |
| 3.2.1 | Méthode classique du tenseur de structure | 74 |
| 3.2.1.1 | Calcul du champ gradient | 74 |
| 3.2.1.2 | Calcul du tenseur de structure | 75 |
| 3.2.1.3 | Décomposition en éléments propres | 75 |
| 3.2.2 | Approche robuste | 76 |
| 3.3 | Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure | 76 |
| 3.3.1 | Aplanissement local | 78 |
| 3.3.1.1 | Reconstruction du flux d'hypersurfaces | 78 |
| 3.3.1.2 | Estimation du modèle de transformation | 80 |
| 3.3.1.3 | Application du modèle de transformation | 82 |
| 3.3.2 | Estimation locale de l'orientation | 83 |
| 3.3.2.1 | Calcul du tenseur de structure | 83 |
| 3.3.2.2 | Application de la transformation inverse | 84 |
| 3.3.3 | Algorithmes proposés | 84 |
| 3.3.4 | Complexité calculatoire et accélération | 84 |
| 3.3.4.1 | Complexité calculatoire | 84 |
| 3.3.4.2 | Approche accélérée par patch | 86 |
| 3.3.5 | Choix des paramètres | 88 |

Chapitre 3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

- 3.4 Résultats 90**
- 3.4.1 Images synthétiques 90
 - 3.4.1.1 Régions de courbure asymétrique 90
 - 3.4.1.2 Régions de convergence asymétrique 93
- 3.4.2 Image d'empreinte digitale 95
- 3.4.3 Image de matériau 98
- 3.4.4 Image sismique 100
- 3.5 Résumé des contributions et conclusion 102**

3.1 Introduction

Conformément à la section 1.2.1, le champ d'orientation est défini comme étant le champ normal (voir figure 1.2) à la pente en tout point de l'image. Pour les textures directionnelles, le champ d'orientation fournit des caractéristiques clés de l'organisation des structures directionnelles, telles que la courbure, l'anisotropie et la régularité. Dans ce chapitre, la reconstruction d'hypersurfaces s'inscrit dans un contexte d'estimation récursive afin d'améliorer l'estimation du champ d'orientation qui donne lieu, in fine, à des reconstructions de meilleure qualité comme nous le verrons plus loin. L'estimation du champ d'orientation est ici à la fois un outil et une finalité.

Les histogrammes d'orientation, tels que Scale-Invariant Feature Transform (SIFT) [Low04, KS04] ou Histogram of Oriented Gradients (HOG) [DT05], jouent un rôle majeur dans le traitement d'images et la vision par ordinateur dans des contextes de reconnaissance, d'indexation d'images et de définition de structures à partir du mouvement. Toutefois, si ces applications précédentes peuvent se satisfaire d'un champ d'orientation décrit selon un nombre limité de valeurs, d'autres applications impliquant l'analyse d'images texturées directionnelles denses imposent une connaissance précise du champ d'orientation. C'est le cas notamment pour des applications d'amélioration et d'interprétation des images d'empreintes digitales [HWJ98, YFJ11, SM93], de régularisation d'images [TD05], de segmentation [RBD03], de synthèse de textures [Pey09, AYD⁺15] et d'estimation de courbure [DBK98].

Les méthodes numériques d'estimation de l'orientation ont été largement discutées au cours des trois dernières décennies. Elles se basent principalement sur l'analyse directionnelle de l'image d'intensité tandis que certaines parmi elles sont fondées sur une approche par apprentissage supervisée.

Les premières méthodes dépendent des dérivées spatiales des images d'intensité [Big86, Knu89, VV95, RS89, BWB⁺06, B⁺06]. La plus populaire est basée sur le tenseur de structure [Big86, Knu89, VV95]. La méthode du tenseur de structure notée ST, consiste tout d'abord à estimer les composantes des vecteurs gradients en utilisant une combinaison de filtres dérivatifs passe-haut et de filtres passe-bas orthogonaux. Le champ gradient obtenu est souvent sujet à des distorsions locales en raison de crêtes, de vallées, de bruit, d'artefacts d'échantillonnage, etc. Une régularisation non-linéaire est alors effectuée en utilisant une décomposition en éléments propres de la matrice d'autocorrélation locale convoluée par un filtre passe-bas généralement de type gaussien. L'orientation locale correspond au vecteur propre associé à la valeur propre la plus élevée. Cependant, dans le cas de certaines géométries complexes de textures directionnelles, telles que les régions de convergence non linéairement distribuée, de courbure asymétrique (voir figure 3.1.a) ou de superposition de géométries, la méthode ST conduit à un champ d'orientation biaisé. Le traitement des données structurelles, soit des gradients, soit des champs tensoriels, doit être adapté afin de limiter le biais d'orientation induit par la géométrie locale de configurations texturales particulières. Premièrement, une plus grande taille de fenêtre spatiale pour calculer

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

le tenseur de structure induit une détérioration en termes de biais de l'estimation d'orientation correspondant à ces régions (figure 3.1.b). Deuxièmement, les méthodes de régularisation des champs tensoriels par tenseurs de diffusion [PFA06, AFPA06] ou par filtrage adaptatif [TDB10] peuvent également être utilisées. Cependant, ces approches considèrent les champs tensoriels, et non pas les champs d'orientation, comme des entrées/sorties. Si les tenseurs en entrée sont biaisés en termes d'estimation d'orientation, *i.e.* vecteurs propres principaux, la régularisation du champ de tenseur ne pourra pas supprimer le biais d'une distribution non-linéaire des tenseurs en entrée. Troisièmement, des variantes robustes [BWB⁺06, B⁺06] de la méthode ST ont été introduites plus particulièrement dans le contexte des mélanges de populations. Le fil conducteur de ces variantes consiste à adopter une pondération sur les vecteurs gradients pour calculer le tenseur de structure local. Ici, la contribution de chaque vecteur gradient est pondérée en fonction de sa distance au point central dans la fenêtre voisine ainsi que de sa conformité à la tendance centrale. Néanmoins, la pondération n'est pas basée sur la géométrie locale.

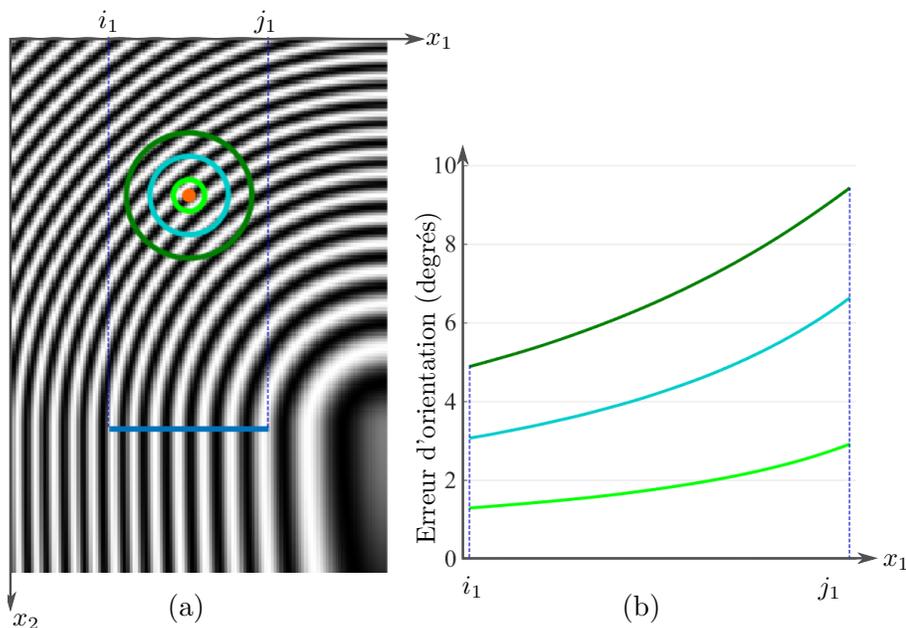


Figure 3.1 – *Texture directionnelle synthétique de géométries circulaires et hyperboliques juxtaposées (a) avec représentation des tailles de lissage pour l'estimation du gradient (en orange) et différentes tailles pour le calcul du tenseur de structure (en vert et cyan) conduisant à une erreur d'estimation en degrés (b) sur la ligne bleue à partir des indexes en x_1 de i_1 à j_1 sur laquelle la variation de la courbure augmente*

D'autres méthodes basées sur des bancs de filtres directionnels [BS92, BW02, JPHP00] ont été proposées. Elles relient l'orientation au filtre directionnel qui fournit la réponse la plus élevée. L'orientation peut également être estimée à l'aide de filtres en quadrature [KW87, Big94]. Ces méthodes consistent à filtrer l'image avec un ensemble de filtres directionnels en quadrature et à combiner les images filtrées. Cependant, ces méthodes fournissent moins de précision que la

méthode du tenseur de structure. Ceci est dû au nombre limité de filtres qui définit la qualité de l'estimation.

Dans le cas des images sismiques, Claerbout [Cla92] et ultérieurement Fomel [Fom02] ont proposé la méthode des filtres de destruction d'ondes planes, dite "Plane Wave Destruction" (PWD), qui est basée sur l'équation d'onde plane locale. L'orientation est déterminée par convolution des données avec un filtre 2D appelé filtre d'annihilation et en utilisant la méthode du gradient. Les oscillations de haute fréquence dans l'estimation d'orientation sont supprimées à l'aide d'un filtrage passe-bas approprié.

Les méthodes basées sur des approches par apprentissage [Abe05, WAW13] consistent à construire un dictionnaire exhaustif de toutes les configurations possibles à l'aide d'un ensemble d'images dit d'apprentissage. L'orientation locale correspond à la configuration la plus proche dans le dictionnaire. Bien que ces méthodes soient relativement robustes au bruit, la construction du dictionnaire est habituellement un processus fastidieux. Le dictionnaire est aussi large que les configurations possibles sont nombreuses. Sa qualité définit la précision de l'estimation. Ces méthodes ne sont pas utilisables dans le cas d'images sismiques ou de matériaux où les configurations possibles sont pratiquement en nombre infini.

Nous présentons dans ce chapitre un canevas d'estimation récursive d'orientation qui repose sur les méthodes de tenseur de structure et tient compte de la géométrie locale à travers un modèle de transformation d'espace. On peut noter que l'idée de modéliser la géométrie locale a été abordée pour l'estimation de la courbure locale [WVVG01]. Pour que la méthode d'estimation d'orientation soit invariante vis-à-vis de la géométrie locale, nous proposons de décrire celle-ci par un ensemble d'hypersurfaces appelé flux d'hypersurfaces. En partant de l'hypothèse que le biais du tenseur de structure est plus faible dans un espace aplani, nous déduisons, ensuite, une transformation d'espace paramétrique entre le flux d'hypersurfaces et un flux horizontal parallèle. Le modèle de transformation paramétrique est appliqué au champ de gradients et l'orientation moyenne est obtenue à partir du tenseur de structure [DDB15a]. La transformation peut également être appliquée à l'image d'intensité qui conduit au calcul du champ de gradients localement aplani sur lequel la méthode du tenseur de structure est appliquée [DDB15b]. Ce processus est itéré pour définir des transformations spatiales plus précises, ce qui conduit à une estimation d'orientation plus fine.

Ce chapitre s'organise comme suit. Nous présentons tout d'abord la méthode du tenseur de structure et sa variante robuste en détails. Nous décrivons ensuite les méthodes d'estimation d'orientation que nous proposons et nous introduisons les transformations spatiales conduisant à l'espace aplani. La complexité calculatoire ainsi qu'une accélération par patch sont également présentées avant de discuter des paramètres du canevas proposé. Par la suite, nous présentons les résultats de la méthode sur des images synthétiques comportant des géométries complexes, une image d'empreinte réelle, une image de matériau fibreux qui comporte une orientation perturbatrice et une image sismique. Enfin, des conclusions et perspectives sont formulées à la

fin de ce chapitre.

3.2 Estimation d'orientation par la méthode du tenseur de structure

3.2.1 Méthode classique du tenseur de structure

La méthode conventionnelle d'estimation du champ d'orientation par le tenseur de structure est basée sur l'analyse directionnelle de l'image d'intensité. Elle est constituée des étapes suivantes que nous détaillons plus bas :

1. Calcul du champ gradient,
2. Calcul du tenseur de structure,
3. Décomposition en éléments propres.

Elle peut également être considérée comme étant une analyse en composantes principales du champ local de gradients [Don99].

3.2.1.1 Calcul du champ gradient

Les vecteurs gradients indiquent la direction de plus forte variation d'intensité en tout point. Ils sont par conséquent perpendiculaires aux structures composant les textures directionnelles et supposés être assimilables à des lignes d'isovaleurs. L'ensemble des vecteurs gradients est désigné par champ gradient ou champ des gradients et est noté $\{g_{x_1}, g_{x_2}\}$.

Le champ des gradients s'obtient par convolution de l'image d'intensité avec un filtre passe-bas dans une direction suivie de la convolution avec un filtre dérivatif dans la direction perpendiculaire. Les filtres utilisés sont généralement les dérivées premières horizontales et verticales de la fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ_G .

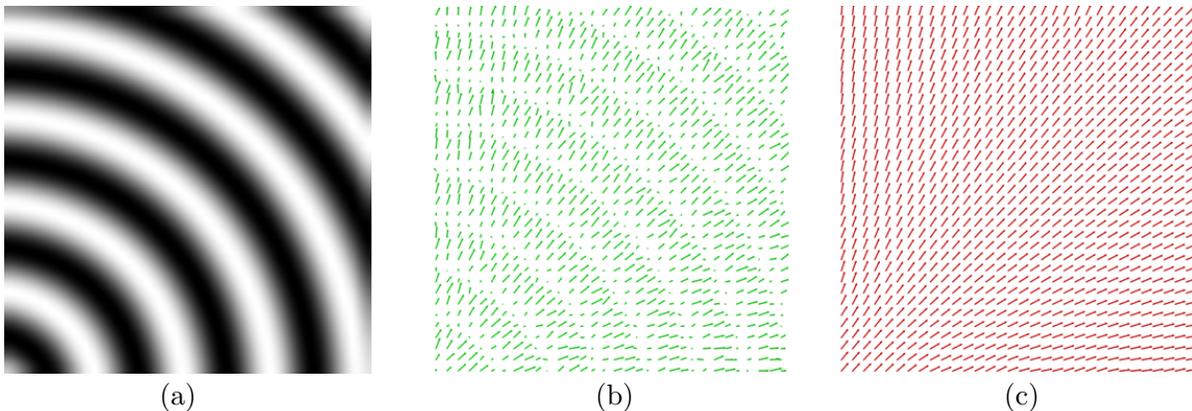


Figure 3.2 – *Texture synthétique circulaire (a), champ gradient correspondant pour $\sigma_G = 1$ (b) et champ normal pour $\sigma_T = 3$*

3.2 - Estimation d'orientation par la méthode du tenseur de structure

Le champ gradient est sensible aux régions où l'intensité de l'image est constante ou quasiment constante, ce qui donne lieu à de faibles normes de vecteurs et des directions erronées (voir figure 3.2.b). Il est nécessaire d'effectuer une régularisation des vecteurs gradients calculés.

3.2.1.2 Calcul du tenseur de structure

La méthode ST est basée sur une moyenne non-linéaire du champ de gradient spatial $\{g_{x_1}, g_{x_2}\}$ de l'image d'intensité I [Big86, Knu89, VV95]. La moyenne non-linéaire est réalisée en calculant la matrice d'autocorrélation pondérée qui correspond au tenseur de la structure :

$$T = W_{\sigma_T} * \begin{bmatrix} g_{x_1}^2 & g_{x_1}g_{x_2} \\ g_{x_1}g_{x_2} & g_{x_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

où $*$ est l'opérateur de convolution et W_{σ_T} est un filtre passe-bas Gaussien d'écart-type σ_T . Ce lissage spatial réduit en particulier l'effet du bruit (voir figure 3.2.c) en diffusant les valeurs des gradients sur un voisinage $[-3\sigma_T, 3\sigma_T]$.

3.2.1.3 Décomposition en éléments propres

L'orientation locale est fournie par la décomposition en éléments propres du tenseur de structure T . En effet, l'orientation correspond au vecteur propre $\mathbf{e}_1 = \{e_{1x_1}, e_{1x_2}\}$ associé à la valeur propre la plus élevée λ_1 :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|} \begin{bmatrix} e_{1x_1} \\ e_{1x_2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

En outre, des mesures de confiance sur l'orientation estimée, appelées facteurs de cohérence, peuvent être déduites de la décomposition en éléments propres de T . Un facteur de cohérence de l'orientation estimée se déduit de la différence normalisée des valeurs propres [RS89] λ_1 et λ_2 de T :

$$c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3.3)$$

Ce facteur de cohérence varie entre 0 et 1. Plus la cohérence est proche de 1, plus la confiance dans la valeur de l'orientation estimée est élevée.

La méthode ST est sensible aux variations locales d'intensité d'image en raison du bruit. De plus, des directions opposées lors du calcul du champ de gradients indiquent la même orientation mais donnent lieu à des valeurs d'orientation erronées par régularisation non-linéaire. Les valeurs des écarts-types des filtres gaussiens sont cruciales car les valeurs supérieures conduisent à un champ d'orientation plus lisse, mais elles le rendent plus sensible aux configurations asymétriques. Les valeurs faibles conduisent à des estimations plus locales mais avec une plus grande sensibilité au bruit.

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

De plus, dans le cas d'un mélange de populations, la moyenne isotrope introduite par les différents filtres gaussiens conduit à des estimations d'orientation erronées. Pour résoudre ce problème, une variante appelée méthode RST pour Robust Structure Tensor et basée sur une moyenne non isotrope a été décrite comme étant une méthode robuste de tenseur de structure [BWB⁺06, B⁺06].

3.2.2 Approche robuste

Une variante pondérée de la méthode ST a montré sa robustesse dans le cas d'un mélange de populations [BWB⁺06, B⁺06]. Elle consiste à mesurer la similitude entre $\{g_{x_1}, g_{x_2}\}$ et un champ d'orientation $\{n'_{x_1}, n'_{x_2}\}$ estimé à l'aide de la méthode ST avec un écart-type σ'_T pour la matrice d'autocorrélation. Un masque gaussien W_{σ_ψ} d'écart-type σ_ψ exprime cette similitude et est donné par l'expression suivante [BWB⁺06] :

$$W_{\sigma_\psi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_\psi}} \exp\left(\frac{g_{x_1}n'_{x_2} + g_{x_2}n'_{x_1}}{2\|\mathbf{g}\|\sigma_\psi}\right). \quad (3.4)$$

Ce masque est utilisé pour effectuer un filtrage angulaire selon la similitude au champ de gradients avec le champ de normales $\{n'_{x_1}, n'_{x_2}\}$:

$$T' = W_{\sigma_\psi} \times T = W_{\sigma_T} * \begin{bmatrix} W_{\sigma_\psi} g_{x_1}^2 & W_{\sigma_\psi} g_{x_1} g_{x_2} \\ W_{\sigma_\psi} g_{x_1} g_{x_2} & W_{\sigma_\psi} g_{x_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.3 Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

La géométrie locale correspond à l'organisation locale de la texture directionnelle dans l'image d'intensité. Le champ d'orientation local sous-jacent décrit cette organisation (voir les flèches rouges dans la figure 3.3.b).

Lorsque la géométrie locale présente une courbure distribuée asymétriquement, des textures directionnelles convergentes et/ou une superposition de géométries (voir figure 1.1), la moyenne introduite par les méthodes ST et RST conduit à une estimation d'orientation biaisée (voir l'annexe B).

Pour compenser les effets de la géométrie locale, nous proposons un schéma itératif (voir la figure 3.4) à partir d'une estimation d'orientation effectuée en amont à l'aide de la méthode ST. Le procédé d'estimation repose sur une description grossière à fine de la donnée. La description grossière est faite de manière indirecte en utilisant le modèle de transformation d'espace. En effet, la géométrie locale est exprimée de manière implicite à travers le changement d'espace par une transformation \mathcal{F} . Cette transformation permet de déformer le flux d'hypersurfaces reconstruit autour du point courant pour le transformer en un flux horizontal où le biais du tenseur de

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

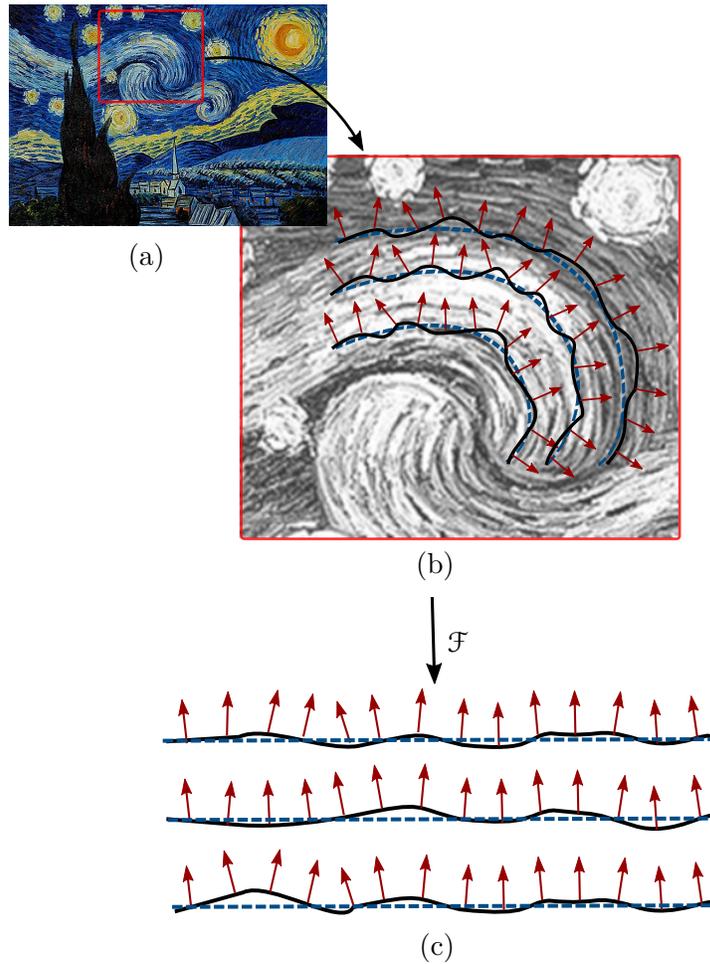


Figure 3.3 – Image d'intensité initiale : *Nuit étoilée* de V. Van Gogh (a), Géométrie locale (en trait plein), représentation du modèle de transformation (en trait pointillé) et champ de gradients local (en flèches rouges) dans l'espace initial (b) et aplani (c)

structure est plus faible. Le tenseur de structure est ensuite appliqué dans l'espace aplani afin de capturer les variations fines des structures une fois que la géométrie locale a été supprimée.

La méthode est constituée de deux grandes étapes (voir la figure 3.4) qui sont l'aplanissement local de la donnée et l'estimation d'orientation locale et que nous décrivons ci-après.

1. *L'aplanissement local* : La première étape consiste à appliquer une transformation spatiale locale \mathcal{F} afin d'aplanir la géométrie locale (voir lignes pleines dans la figure 3.3 .c). Les courbures asymétriques deviennent symétriques et les structures directionnelles convergentes deviennent parallèles.

Deux variantes dénotées méthodes GST-ST et IST-ST peuvent être considérées et correspondent respectivement à la méthode de tenseur de structure par transformation d'espace du champ de gradient (Gradient Space Transformation Structure Tensor) et à la méthode

de tenseur de structure par transformation d'espace de l'image d'intensité (Intensity Space Transformation Structure Tensor). Soit le champ de gradient local de l'image est transporté (méthode GST-ST) dans l'espace aplani [DDB15a], soit l'image d'intensité locale est transportée (méthode IST-ST) et conduit au calcul d'un nouveau champ de gradients [DDB15b]. Le processus d'aplanissement se compose des étapes suivantes :

- Reconstruction du flux de reconstructions
 - Estimation du modèle de transformation
 - Application du modèle de transformation à l'image d'intensité ou au champ gradient locaux
2. *L'estimation d'orientation locale* : Dans cette seconde étape la méthode ST conventionnelle est appliquée dans l'espace aplani. Le champ de gradients quasi-vertical obtenu (voir les flèches rouges dans la figure 3.3 .c) donne lieu à une nouvelle estimation d'un vecteur propre principal. Par transformation inverse \mathcal{F}^{-1} , ce vecteur propre conduit à une estimation d'orientation moins biaisée.

L'ensemble du processus est appliqué de manière dense, point par point, ou discrète à des points d'intérêt selon les étapes de la figure 3.4. La méthode proposée peut être itérée et converge après quelques itérations.

La transformation spatiale adéquate \mathcal{F} transforme le flux local d'hypersurfaces en un ensemble d'hypersurfaces horizontales (voir figure 3.3). La transformation \mathcal{F} doit être conforme comme pour les transformations décrites dans le chapitre 2.

Les hypersurfaces sont d'abord reconstruites par résolution de l'EDP (voir équation 1.4) à partir du champ d'orientation estimé en amont pour le premier passage et mis-à-jour pour les itérations suivantes.

Les paramètres de la transformation, choisie polynomiale pour décrire les différentes configurations, sont estimés à la même échelle que celle du tenseur de structure de la seconde étape.

3.3.1 Aplanissement local

3.3.1.1 Reconstruction du flux d'hypersurfaces

Afin de décrire la géométrie locale du voisinage du point courant, nous définissons un flux d'hypersurfaces comme étant un ensemble dense de N_2 hypersurfaces. Chacune des hypersurfaces de longueur N_1 est reconstruite à partir d'un point de passage qui se situe le long de la droite normale au point actuel.

Afin d'utiliser le schéma de résolution de l'EDP de l'équation 1.4 par transformée de Fourier, les hypersurfaces du flux doivent avoir une forme explicite ce qui n'est pas nécessairement le cas dans l'espace initial de l'image d'intensité. Dans le cas des textures directionnelles et en raison du caractère local des reconstructions, nous supposons qu'une rotation d'angle α centrée autour

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

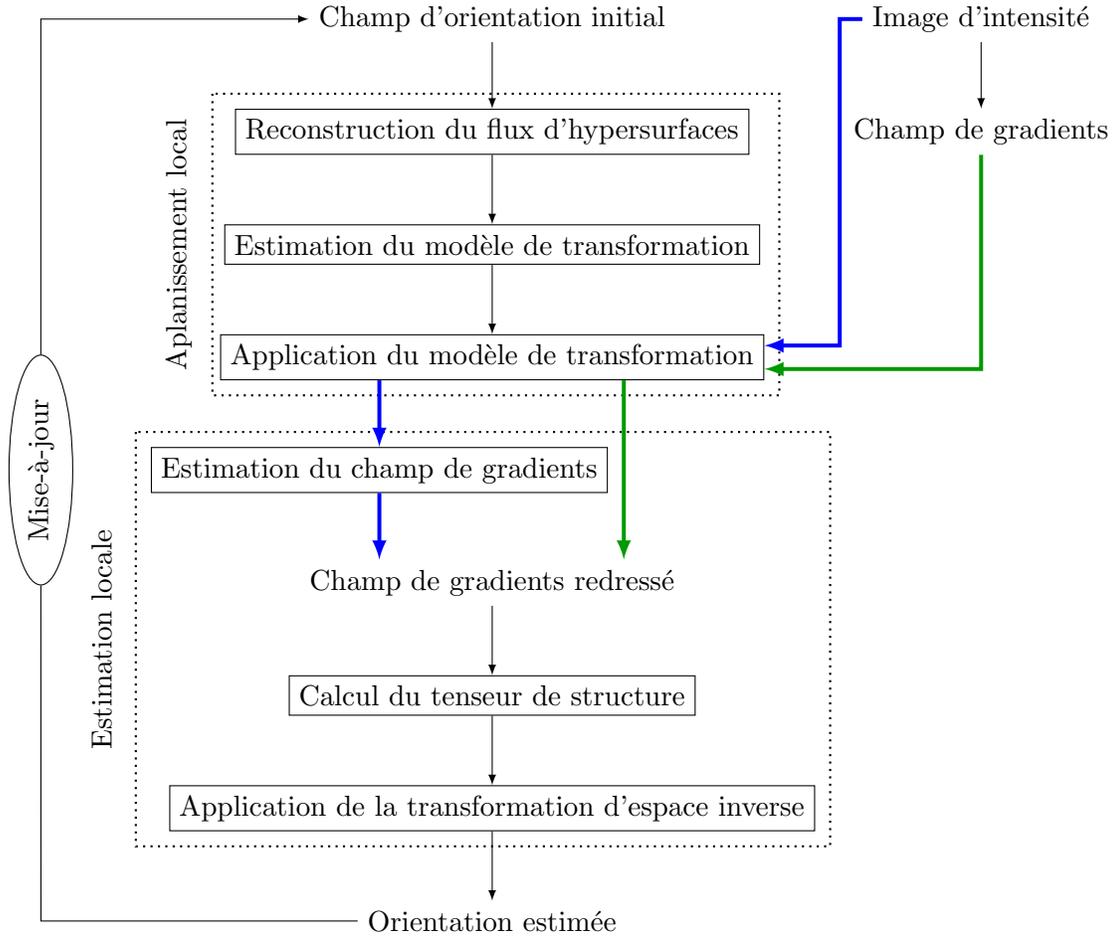


Figure 3.4 – Schéma bloc de la méthode proposée pour l'estimation d'orientation à partir de l'image d'intensité (bleu) ou du champ de gradients (vert)

du point courant, notée \mathcal{R}_α , transforme localement les hypersurfaces implicites en hypersurfaces explicites.

L'angle α de la transformation de rotation \mathcal{R}_α est défini comme étant l'angle entre le vecteur normal au point courant M et l'axe vertical dans la base initiale (voir figure 3.5 .a). Un champ d'orientation lisse fournit une approximation grossière de la tendance générale du voisinage et donc de l'angle α . Ce champ d'orientation est calculé à l'aide de la méthode ST avec des écarts-types σ_G et σ'_T respectivement pour le filtre Gaussien du gradient et du calcul de la matrice d'autocorrélation.

La transformation \mathcal{R}_α est conforme. Pour rappel, le Jacobien \mathcal{J}_α de la rotation \mathcal{R}_α d'angle α s'exprime :

$$\mathcal{J}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Les termes du Jacobien \mathcal{J}_α permettent de calculer les termes du pendage dans l'espace tourné

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

et de reconstruire les hypersurfaces successives par minimisation globale sur le voisinage local Ω de l'équation 1.4.

3.3.1.2 Estimation du modèle de transformation

La reconstruction du flux d'hypersurfaces fournit une description de la géométrie locale. Cependant, afin de s'affranchir de cette géométrie locale, une expression analytique et inversible de transformation d'espace $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}$ est nécessaire. La transformation paramétrique $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}$ transforme le flux horizontal $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ de taille $(N_1 \times N_2)$ en flux d'hypersurfaces reconstruit $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ de taille $(N_1 \times N_2)$ également où $\mathbf{y}_2 = \{\tau_k(\mathbf{y}_1)\}_{k \in [1, N_2]}$ est l'ensemble des reconstructions d'hypersurfaces sur la grille de reconstruction y_1 (voir figure 3.5).

La transformation d'espace locale de la géométrie locale \mathcal{F} est donc la composée de la rotation \mathcal{R}_α et de la transformation paramétrique inverse $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1}$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1} \circ \mathcal{R}_\alpha. \quad (3.7)$$

Pour être inversible, l'expression de la transformation doit être bijective. En outre, le modèle de transformation devrait être adaptable à de nombreuses configurations d'hypersurfaces et son estimation devrait avoir une faible complexité de calcul ainsi qu'une bonne stabilité numérique.

Dans [WVVG01], la géométrie de la texture est estimée à l'aide de modèles curvilignes paramétriques circulaires et paraboliques dans un contexte d'estimation de courbure. Cependant, ceux-ci ne peuvent pas décrire toutes les géométries des textures directionnelles. Aussi, nous choisissons d'utiliser un modèle polynomial analytique de degré d . Ce modèle qui permet de respecter tous les critères énoncés précédemment offre, en outre, une adaptabilité variable à la géométrie locale selon la valeur du degré du polynôme d . Un compromis doit être adopté dans le choix de d . Il doit être choisi suffisamment grand pour décrire les variations des hypersurfaces mais également suffisamment petit pour offrir un faible coût calculatoire et ne pas décrire le comportement du bruit.

Soit $\theta = \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq i}$ la matrice des paramètres du modèle de taille $\frac{(d+1)(d+2)}{2} \times 2$. On peut alors écrire :

$$(y_1, y_2) = \mathcal{F}_\theta(z_1, z_2), \quad (3.8)$$

i.e. :

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^i a_{ij} z_1^{i-j} z_2^j + o(z_1^d, z_2^d) \\ y_2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^i b_{ij} z_1^{i-j} z_2^j + o(z_1^d, z_2^d) \end{cases} \quad (3.9)$$

Le modèle de transformation est caractérisé par l'estimation de la matrice des paramètres θ . Pour ce faire, notons $Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_1^2 & z_1 z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^d \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ les matrices des flux sous forme discrète où chaque élément des matrices est un vecteur colonne. L'équation 3.9 peut

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

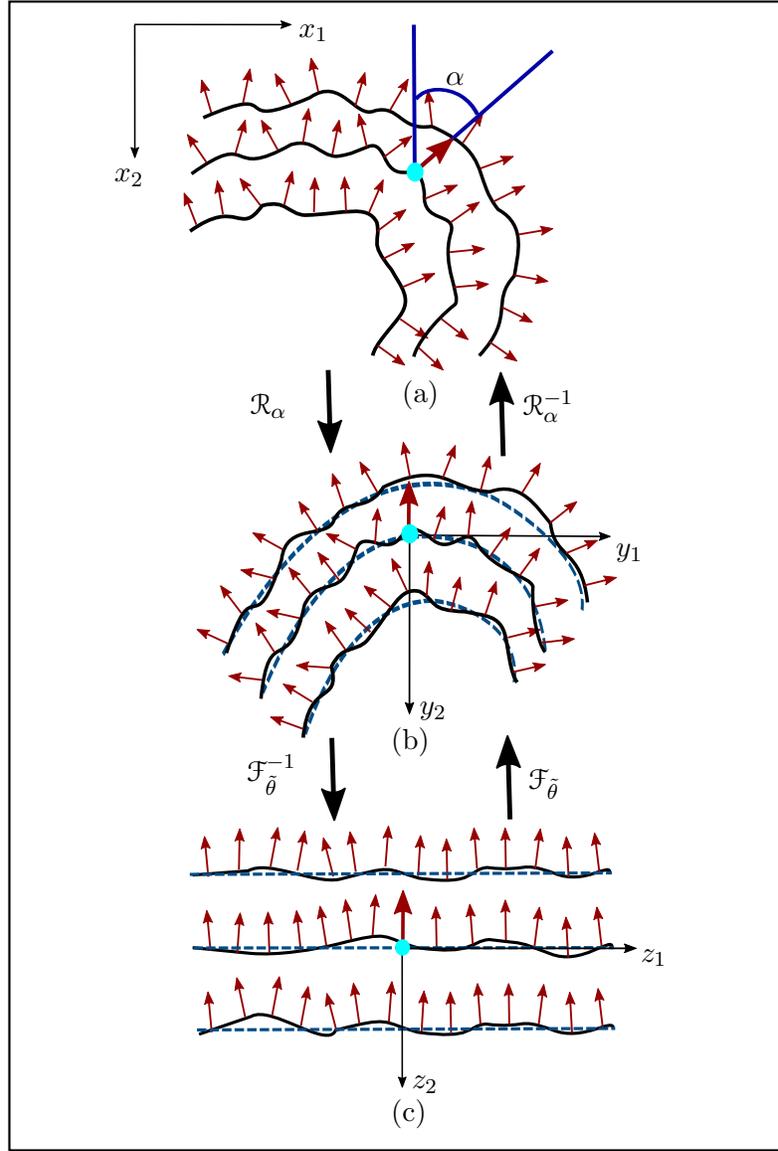


Figure 3.5 – *Hypersurfaces implicites dans l'espace initial de l'image (x_1, x_2) (a), hypersurfaces explicites obtenues par rotation \mathcal{R}_{α} (trait plein) et modèle de transformation $\mathcal{F}_{\tilde{\theta}}$ appliqué au flux horizontal (trait pointillé) dans l'espace tourné (y_1, y_2) (b), flux horizontal (trait pointillé) et flux aplani par la transformation $\mathcal{F}_{\tilde{\theta}}^{-1}$ (trait plein) dans l'espace aplani (z_1, z_2) (c)*

être exprimée sous la forme du système matriciel surdéterminé suivant :

$$Y = Z\theta. \quad (3.10)$$

L'estimation $\tilde{\theta}$ de la matrice des paramètres θ dans l'équation 3.10 peut être obtenue en utilisant différentes méthodes. Nous utilisons la méthode la plus simple qui est la solution par

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

la méthode des moindres carrés de l'équation 3.10. Cela conduit à l'expression suivante :

$$\tilde{\theta} = Z^*Y \quad (3.11)$$

$$= ({}^tZZ)^{-1} {}^tZY. \quad (3.12)$$

Dans notre application, la grille de reconstruction des hypersurfaces est généralement régulière dans la première dimension. Dans ce cas : $y_1 = \lambda z_1$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui simplifie l'estimation de $\tilde{\theta}$.

Le Jacobien $\mathcal{J}_{\tilde{\theta}}$ correspondant au modèle transformation s'exprime comme suit :

$$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

3.3.1.3 Application du modèle de transformation

Le modèle de transformation combiné à la rotation d'espace fournit une description analytique de la géométrie locale. L'expression de la géométrie locale permet la transformation vers l'espace aplani pour supprimer la géométrie non-isotrope de la texture.

La procédure d'aplanissement est effectuée sur une grille de taille $M_1 \times M_2$ qui peut être indépendante de la grille de reconstruction de taille $N_1 \times N_2$.

Le modèle de transformation peut être pris en compte en utilisant deux approches différentes. Dans la première, on suppose que l'estimation du gradient et l'application du tenseur de la structure sont corrompus par la géométrie locale. Par conséquent, le processus d'estimation est basé sur l'image d'intensité aplanié le long du voisinage du point d'intérêt (méthode IST-ST) afin d'estimer le champ de gradients redressé ainsi que le vecteur normal. Dans la méthode GST-ST, qui est la seconde approche, seul le tenseur de structure est supposé erroné puisque le champ de gradients est généralement plus local que le champ d'orientation et donc moins impacté par les géométries asymétriques. Dans cette configuration, les données initiales à aplanir à l'aide de la transformation d'espace sont le champ de gradients locaux.

3.3.1.3.1 Méthode de l'image d'intensité (IST-ST)

L'application du modèle de transformation permet d'aplanir localement l'image d'intensité initiale. L'image aplanié I_f est moins sensible aux géométries asymétriques et permet donc une estimation d'orientation plus précise. Elle s'exprime comme suit :

$$I_f(z_1, z_2) = I(\mathcal{F}^{-1}(z_1, z_2)), \quad (3.14)$$

et nécessite d'interpoler les valeurs d'intensité de l'image I .

Plus le modèle décrit la structure directionnelle locale de façon précise, plus l'image I_f est plate. L'image aplanié I_f permet alors de calculer le champ de gradients redressé noté $\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}$

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

en combinant un filtre dérivatif Gaussien et le filtre Gaussien passe-bas perpendiculaire d'écart-types σ_G .

3.3.1.3.2 Méthode du champ de gradients (GST-ST)

Au lieu d'aplanir l'image d'intensité, l'application du modèle de transformation permet de redresser directement le champ gradient. La méthode ST permet de s'affranchir des défauts dus à la présence de bruit.

Comme les vecteurs tangents conservent leur propriété de tangence lors de l'application d'une transformation d'espace, toutes les transformations qui vont suivre sont appliquées aux tangentes qui sont définies perpendiculaires aux gradients ou aux normales :

$$(t_{x_1}, t_{x_2}) = (-g_{x_2}, g_{x_1}). \quad (3.15)$$

Le champ de gradients $\{(g_{y_1}, g_{y_2})\}$ de la grille du modèle de transformation est calculé en utilisant une interpolation de vecteurs du champ de gradient initial. L'interpolation peut se faire au sens du plus proche voisin ou une interpolation bilinéaire en utilisant les quatre vecteurs gradients les plus proches.

La transformation de l'espace qui "horizontalise" les tangentes $\{(t_{x_1}, t_{x_2})\}$ en $\{(t_{z_1}, t_{z_2})\}$ s'exprime :

$$(t_{z_1}, t_{z_2}) = \mathcal{J}_{\bar{\theta}}^{-1} \times \mathcal{J}_{\alpha} \times (t_{x_1}, t_{x_2}). \quad (3.16)$$

Le champ de gradients redressé est :

$$\{(g_{z_1}, g_{z_2})\} = \{(t_{z_2}, -t_{z_1})\} \quad (3.17)$$

Le vecteur normal central est obtenu à partir du tenseur de structure en déterminant le vecteur propre principal.

3.3.2 Estimation locale de l'orientation

3.3.2.1 Calcul du tenseur de structure

Le champ gradient "redressé" n'est pas toujours parfaitement vertical. Tel est le cas lorsque la région d'intérêt comprend un mélange de populations ou lorsque le modèle de transformation d'espace obtenu du flux de reconstructions d'hypersurfaces ne retranscrit pas assez fidèlement la géométrie locale.

Pour diminuer l'impact des vecteurs gradients "perturbateurs" dans l'estimation du vecteur normal central, nous utilisons un filtrage angulaire basé sur un filtre passe-bas Gaussien d'écart type σ_{ψ} .

Le vecteur normal central $(n_{z_1}, n_{z_2})_M$ est calculé en utilisant le tenseur de structure d'écart type σ_T et en déterminant le vecteur propre principal correspondant à la valeur propre la plus

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

élevée.

En raison de l'effet de bords du tenseur de structure, les dimensions de la grille d'aplanissement, M_1 et M_2 , doivent être supérieures à la valeur $M_{min} = 2 \times \lfloor 3\sigma_T \rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la valeur entière. L'estimation du vecteur normal dans l'espace aplani conduit à un vecteur normal semi-vertical dont la composante horizontale n_{z_2} tend vers zéro.

3.3.2.2 Application de la transformation inverse

La nouvelle estimation d'orientation est déduite de $(n_{z_1}, n_{z_2})_M$ en appliquant la transformation d'espace inverse.

Cela se fait en appliquant le Jacobien inverse du modèle de transformation $\mathcal{J}_{\tilde{\theta}_{inv}}$ qui correspond à la grille de transformation du modèle en grille horizontale :

$$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}_{inv}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

3.3.3 Algorithmes proposés

Nous décrivons dans ce paragraphe le canevas général de l'algorithme proposé pour l'estimation d'orientation (Algorithme 1) qui met en œuvre les méthodes IST-ST (Algorithme 2) ou GST-ST (Algorithme 3).

3.3.4 Complexité calculatoire et accélération

3.3.4.1 Complexité calculatoire

Les méthodes IST-ST et GST-ST sont toutes deux basées sur les mêmes étapes de reconstruction d'hypersurfaces, d'estimation du modèle de transformation et d'application du tenseur de structure avant d'appliquer la transformation d'espace inverse. La reconstruction du flux d'hypersurfaces a un coût calculatoire de $N_1 N_2 \log(N_1)$. L'estimation des $N_\theta = (d+1)(d+2)$ paramètres du modèle de transformation a un coût calculatoire de $N_\theta^2 \log(N_\theta)$.

La différence de complexité calculatoire entre les deux approches IST-ST et GST-ST est due essentiellement au calcul du champ de gradients local. En effet, pour chaque point, l'interpolation bilinéaire de l'image d'intensité locale a un coût calculatoire de K_I et l'interpolation bilinéaire du vecteur de gradients a un coût calculatoire de K_V où $K_V > K_I$. Ceci est dû au fait que l'interpolation des vecteurs gradients passe par la décomposition en éléments propres du tenseur correspondant aux quatre vecteurs voisins immédiats pour chaque vecteur.

Cependant, la méthode IST-ST nécessite une étape supplémentaire d'estimation du champ de gradients locaux pour obtenir le champ de gradients redressé à partir de l'image aplaniée. Cette étape a un coût calculatoire de $N_1 N_2 K_{\sigma_G}$ (voir tableau 3.1). Comme $K_V < K_I + K_{\sigma_G}$, la

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

Algorithme 1 : Méthode d'estimation d'orientation proposée

Entrées : $I, \sigma_G, \sigma_T, \sigma'_T, \sigma_\psi, N_1, N_2, M_1, M_2, d, maxIter$

Sorties : $\{(n_{x_1}, n_{x_2})\}$

Initialisation : $\{(n_{x_1}, n_{x_2})\} \leftarrow$ calcul tenseur de structure(I, σ_G, σ'_T)

Pour i allant de 1 à $maxIter$ **faire**

Pour chaque point M **faire**

$$\alpha \leftarrow \arctan\left(-\frac{n_{x_1}(M)}{n_{x_2}(M)}\right)$$

$$\mathcal{J}_\alpha \leftarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Pour k allant de 1 à N_1 **faire**

$$\tau_k \leftarrow \text{reconstruction d'hypersurface}(n_{x_1}, n_{x_2}, \alpha) \text{ au point de passage } M + \left(k - \frac{N_1-1}{2} - 1\right)$$

Fin pour

$$\{(y_1, y_2)\} \leftarrow \{(\text{grid}(\tau_k), \tau_k)\}_{k=[1, N_1]}$$

$$Y \leftarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$\{(z_1, z_2)\} \leftarrow \text{flux horizontal de taille } (M_1 \times M_2)$$

$$Z \leftarrow \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_1^2 & z_1 z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^d \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\theta} \leftarrow ({}^t Z Z)^{-1} {}^t Z Y$$

$$\{(g_{z_1}, g_{z_2})\} \leftarrow \text{méthode IST-ST ou GST-ST}$$

$$(n_{z_1}, n_{z_2})_M \leftarrow \text{calcul tenseur de structure filtré } (\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}, \sigma_T, \sigma_\psi)$$

$$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}_{inv}} \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}$$

$$(t_{x_1}, t_{x_2})_M \leftarrow \mathcal{J}_\alpha^{-1} \times \mathcal{J}_{\tilde{\theta}_{inv}} \times (-n_{z_2}, n_{z_1})_M$$

$$(n_{x_1}, n_{x_2})_M \leftarrow (t_{x_2}, -t_{x_1})_M$$

Mise-à-jour de $\{(n_{x_1}, n_{x_2})\}$

Fin pour chaque

Fin pour

Retourner $\{(n_{x_1}, n_{x_2})\}$

méthode GST-ST offre une complexité calculatoire légèrement inférieure à celle de la méthode IST-ST.

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

Algorithme 2 : Méthode IST-ST

Entrées : $I, z_1, z_2, \sigma_G, \alpha, \tilde{\theta}$

Sorties : $\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}$

$\mathcal{R}_\alpha \leftarrow$ transformation de rotation d'angle α

$\mathcal{F}_{\tilde{\theta}} \leftarrow$ transformation polynomiale de paramètres $\tilde{\theta}$

$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}_{\tilde{\theta}}^{-1} \circ \mathcal{R}_\alpha$

$I_f \leftarrow I(\mathcal{F}^{-1}(z_1, z_2))$

$\{(g_{z_1}, g_{z_2})\} \leftarrow$ calcul champ de gradients (I_f, σ_G)

Retourner $\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}$

Algorithme 3 : Méthode GST-ST

Entrées : $\{(g_{x_1}, g_{x_2})\}, \mathcal{J}_\alpha, z_1, z_2, y_1, y_2$

Sorties : $\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}$

$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}} \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$

$\{(t_{z_1}, t_{z_2})\} \leftarrow \mathcal{J}_{\tilde{\theta}}^{-1} \times \mathcal{J}_\alpha \times \{(-g_{x_2}, g_{x_1})\}$

$\{(g_{z_1}, g_{z_2})\} \leftarrow \{(t_{z_2}, -t_{z_1})\}$

Retourner $\{(g_{z_1}, g_{z_2})\}$

| | Méthode IST-ST | Méthode GST-ST |
|-------------------------------------|---|----------------|
| Reconstruction flux d'hypersurfaces | $N_1 N_2 \log(N_1)$ | |
| Estimation modèle de transformation | $N_{\tilde{\theta}}^2 \log(N_{\tilde{\theta}})$ | |
| Aplanissement local | $N_1 N_2 K_I$ | $N_1 N_2 K_V$ |
| Calcul champ de gradients | $N_1 N_2 K_{\sigma_G}$ | – |
| Calcul vecteur normal | $N_1 N_2 (K_{\sigma_T} + K_V)$ | |
| Application transformation inverse | 1 | |

Tableau 3.1 – Coût calculatoire des méthodes IST-ST et GST-ST

3.3.4.2 Approche accélérée par patch

Puisque les hypersurfaces du voisinage sont reconstruites le long de l'orientation de chaque pixel, nous proposons d'exploiter ces reconstructions pour tous les points d'une fenêtre ou *patch*

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

au lieu de ne considérer que le pixel central du voisinage local. L'image est subdivisée en patches distincts de taille $p \times p$. Le flux d'hypersurfaces est reconstruit uniquement pour le pixel central de chaque patch. Ce faisant, le même modèle de transformation est utilisé pour l'ensemble du patch et le champ de gradients est calculé comme dans le cas pixel par pixel en utilisant soit la méthode IST-ST soit la méthode GST-ST.

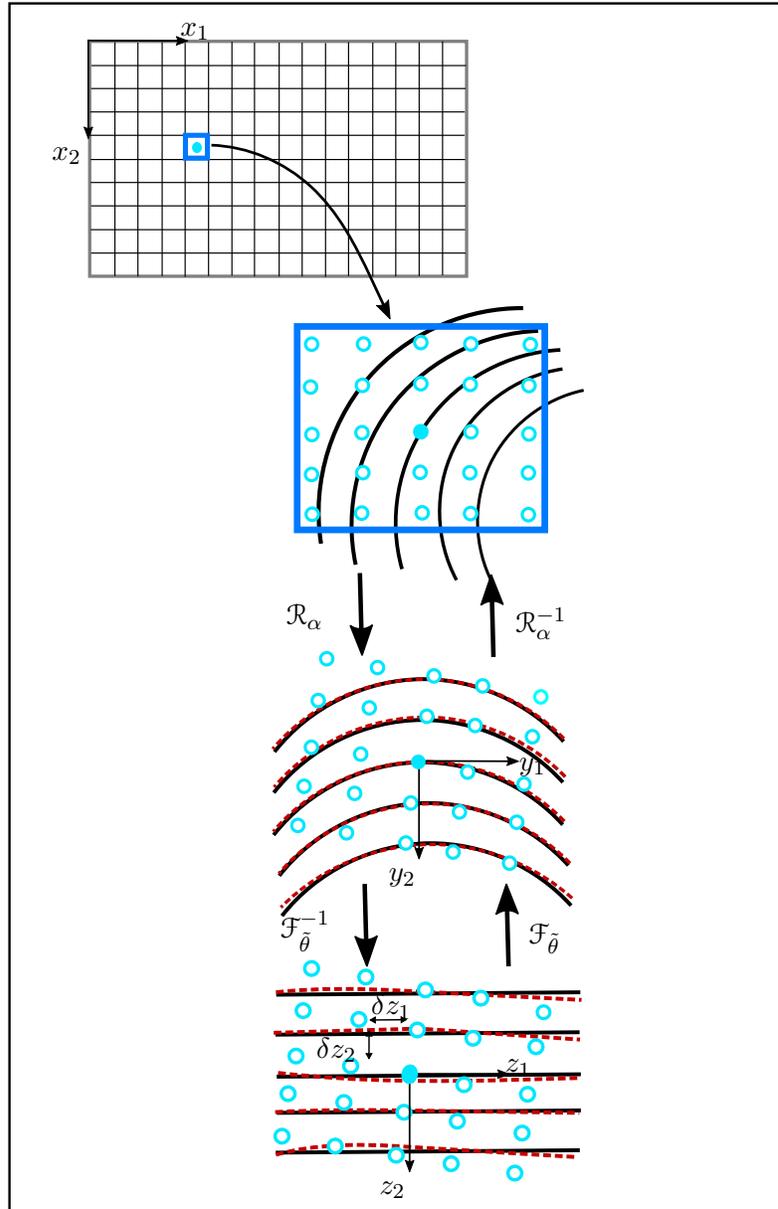


Figure 3.6 – De haut en bas : hypersurfaces implicites et hypersurfaces explicites (trait plein) obtenues par rotation d'angle α et modèle de transformation appliqué au flux horizontal (trait pointillé) et flux horizontal (trait plein) et flux aplani à l'aide du modèle de transformation (trait pointillé) pour un patch de taille 5×5

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

Au lieu de calculer le vecteur normal central, les $p \times p$ normales du patch sont déduites du champ de gradients redressé par calcul du tenseur de structure. Pour ce faire, la taille du modèle de transformation doit être plus grande. En effet, p pixels supplémentaires peuvent être nécessaires dans chaque dimension afin que le tenseur de structure produise les $(p \times p)$ normales :

$$N_{p_{min}} = N_{min} + p - 1 = 2 \times \lceil 3\sigma_T \rceil + p. \quad (3.19)$$

En utilisant la méthode IST-ST, l'équation 3.14 devient :

$$I_f(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2) = I(\mathcal{F}^{-1}(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2)), \quad (3.20)$$

où $\delta z_1, \delta z_2 \in \{-\frac{p-1}{2}, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.

Une interpolation est effectuée pour trouver les intensités correspondant à la grille initiale du voisinage considéré (voir figure 3.6). Il en va de même pour la méthode GST-ST.

La même rotation d'angle α associée au pixel central du patch courant est appliquée à chaque pixel du patch. Cependant, le Jacobien du modèle de transformation tient compte du décalage $(\delta z_1, \delta z_2)$ correspondant au pixel courant dans le patch :

$$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}, p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1 + \delta z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1 + \delta z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2 + \delta z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2 + \delta z_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

La transformation inverse est réalisée, comme auparavant, à l'aide des matrices Jacobiennes. De la même manière, le Jacobien inverse $\mathcal{J}_{\tilde{\theta}, p_{inv}}$ correspondant à la transformation $\mathcal{F}_{\tilde{\theta}, p}^{-1}$ est exprimé comme suit :

$$\mathcal{J}_{\tilde{\theta}, p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1 + \delta y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1 + \delta y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_2 + \delta y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2 + \delta y_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

où :

$$(\delta y_1, \delta y_2) = \mathcal{F}_{\tilde{\theta}}(\delta z_1, \delta z_2). \quad (3.23)$$

Globalement, ce processus conduit à une accélération multiplicative de l'ordre de p^2 . En pratique, p devrait dépendre de la complexité de la géométrie locale de la texture directionnelle. Les fortes variations de la géométrie des textures devraient être associées à des valeurs faibles de p . Ces variations peuvent être indiquées par les valeurs du facteur de cohérence le long du patch.

3.3.5 Choix des paramètres

Dans le tableau 3.2, nous résumons comment les paramètres de la méthode proposée sont fixés pour obtenir les meilleurs résultats.

La performance de la méthode proposée repose sur la qualité du champ d'orientation initial

3.3 - Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

déduit de la méthode ST. Plus l'estimation est juste, plus la méthode converge rapidement. Ainsi, plus l'écart-type du tenseur de structure du champ d'orientation initial σ_T est élevé, plus le champ d'orientation est lisse. Les valeurs faibles de σ_T conduisent à une estimation d'orientation plus locale mais également plus sensible au bruit [TDB10]. La valeur de σ_T est choisie pour que la fenêtre Gaussienne $[-3\sigma_T, 3\sigma_T]$ capture au moins une période du motif de la texture directionnelle. Afin de capturer les variations fines dans l'image d'intensité, la valeur de σ_G pour le calcul des gradients doit être fixée plus faible ($\sigma_G < \sigma_T$). Le champ d'orientation lisse, qui correspond au champ d'orientation initial, conduit à l'angle α . Ainsi, $\sigma'_T \geq \sigma_T$ pour le calcul du tenseur de structure.

| Étape | Paramètres | Valeur |
|-----------|---------------|--|
| 3.2.1.2 | σ_T | > taille du motif de texture |
| 3.2.1.1 | σ_G | $< \sigma_T$ |
| 3.3.1.1 | σ'_T | $\geq \sigma_T$ |
| 3.3.1.2 | N_1, N_2 | $\geq \max(\frac{1}{step} M_{min}, size_{discont.} + 1)$ |
| 3.3.1.2 | d | $3 \leq d \leq 7$ |
| 3.3.1.3 | M_1, M_2 | $\geq M_{min}$ |
| 3.3.2.1 | σ_ψ | $0.1 \leq \sigma_\psi \leq 0.3$ |
| Itération | $maxIter$ | ≤ 10 |

Tableau 3.2 – Résumé du choix des paramètres de la méthode proposée

La taille de la grille du flux de reconstruction (N_1, N_2) doit être choisie de manière à garantir la stabilité de l'estimation. Par conséquent, elle doit être plus grande que la taille des discontinuités. Des grilles plus larges conduisent à une moindre sensibilité au bruit mais à une complexité de calcul plus élevée. Afin de maintenir une faible sensibilité au bruit et une faible complexité calculatoire, il est possible de réduire la valeur de N_1 et N_2 tout en augmentant l'échantillonnage de la grille $step$. Le domaine de reconstruction est alors de taille $step \times N_1$. La taille de la grille d'application du modèle de transformation (M_1, M_2) peut être différente de celle du flux de reconstructions, mais doit rester supérieure à N_{min} .

Le degré d du modèle polynomial est choisi suffisamment grand pour décrire les hypersurfaces mais assez faible pour garantir la stabilité numérique de l'estimation. Selon la complexité de la géométrie locale, une valeur de d dans l'intervalle $[3, 7]$ garantit usuellement une description assez fidèle de la texture ainsi qu'une bonne stabilité numérique.

3.4 Résultats

3.4.1 Images synthétiques

Dans cette section, nous évaluons les résultats des méthodes IST-ST et GST-ST pour des images synthétiques présentant des régions de courbure ou de divergence asymétriques.

3.4.1.1 Régions de courbure asymétrique

Tout d'abord, nous présentons les résultats des méthodes proposées sur une image directionnelle de taille (200×200) quantifiée sur 256 niveaux et présentant de fortes variations de géométrie. L'image synthétique s'exprime comme suit :

$$I(x_1, x_2) = \sin(\Gamma(x_1)[2\pi f_s x_2 + 2\pi a \sin(2\pi(f_{x_1} x_1 + f_{x_2} x_2))]), \quad (3.24)$$

où $\Gamma(x_1) = \frac{1}{1+(x_1-0.5)^2}$ et f_s, a, f_{x_1}, f_{x_2} sont des constantes réelles respectivement égales à 15, 0.5, 3, 2 .

Le champ d'orientation analytique associé est calculé par dérivation de l'expression de I (voir figure 3.7). Cette image présente des régions de courbures asymétriques où la méthode ST conduit à une estimation d'orientation biaisée.

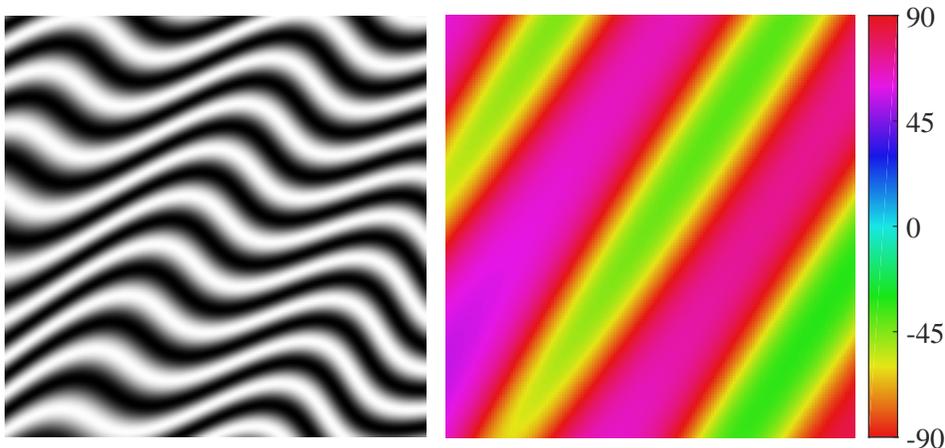


Figure 3.7 – Image synthétique (gauche) et champ d'orientation analytique en degrés (droite)

Nous confrontons les résultats des cinq méthodes suivantes :

- La méthode ST [Big86, Knu89, VV95] avec des écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 2.5$.
- La méthode RST [BWB⁺06] à l'aide d'un filtre Gaussien d'écart-type $\sigma_\psi = 0.2$ pour mesurer la similitude avec la tendance centrale du voisinage.
- La méthode PWD [Cla92] en utilisant un filtre passe-bas de taille σ_T et 10 itérations.
- Les méthodes IST-ST et GST-ST proposées où le champ d'orientation initial est calculé à l'aide de la méthode ST avec les écarts-types précédents.

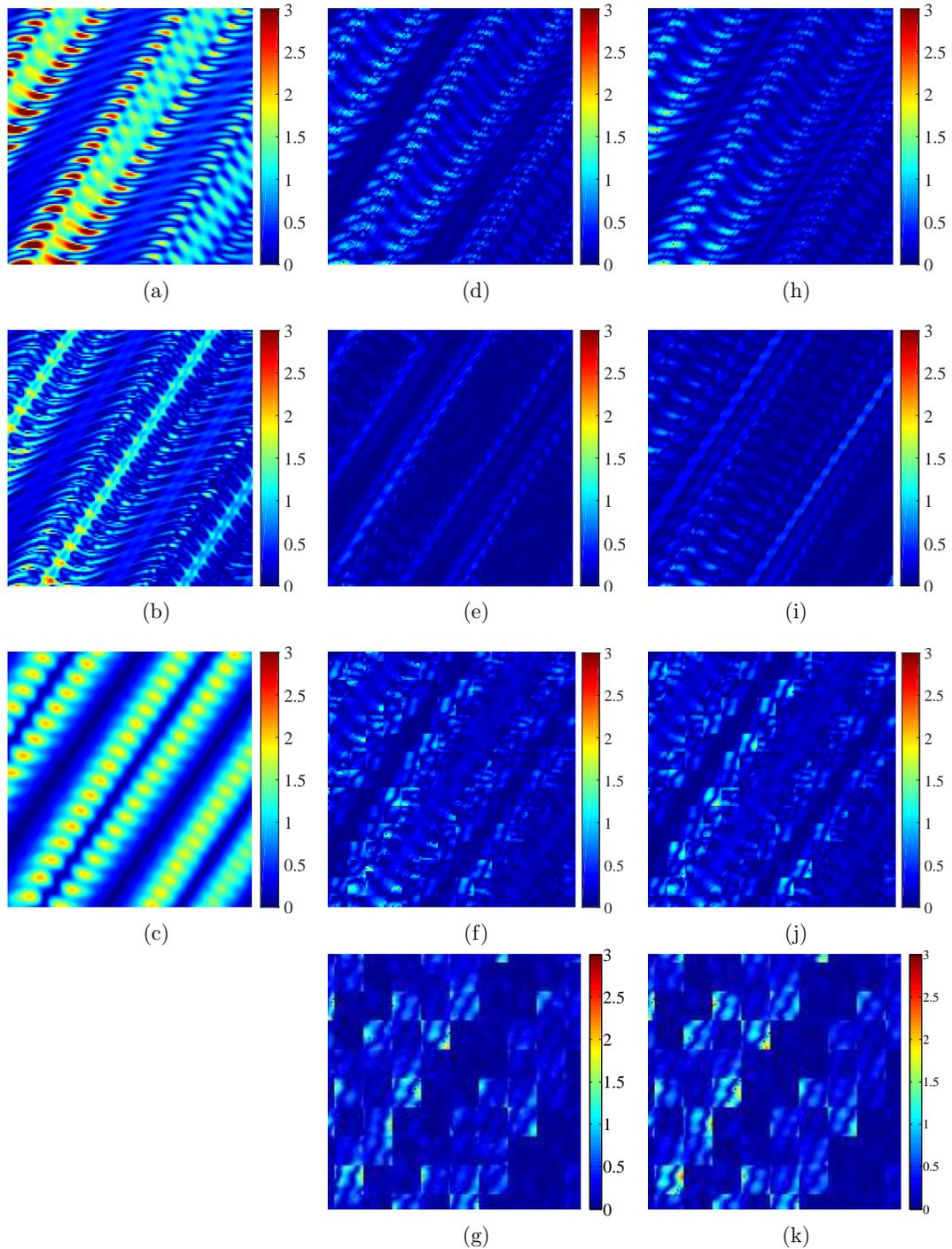


Figure 3.8 – Images d'erreur d'estimation en utilisant les méthodes *ST* (a), *RST* (b), *PWD* (c), la méthode *IST-ST* après 1 (d) et 3 (e) itérations et la méthode *GST-ST* après 1 (h) et 3 (i) itérations ainsi que les méthodes *IST-ST* et *GST-ST* par patch après 3 itérations pour $p = 9$ et $p = 17$ (f, j, g, k respectivement)

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

Les tailles de grilles sont $N_1 = N_2 = 25$ et $M_1 = M_2 = 17$. Le degré du modèle polynomial est $d = 5$. Nous utilisons les écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 2.5$ pour la méthode IST-ST et $\sigma_T = 2.5$ pour la méthode GST-ST.

La figure 3.8 montre les images d'erreur associées à la méthode ST, à la méthode RST, à la méthode PWD et aux méthodes proposées IST-ST et GST-ST à la fois après 1 et 3 itérations. Les images d'erreur sont déduites de la différence absolue entre les champs d'orientation résultant et analytique. Nous attirons l'attention sur le fait que cette différence est π -périodique.

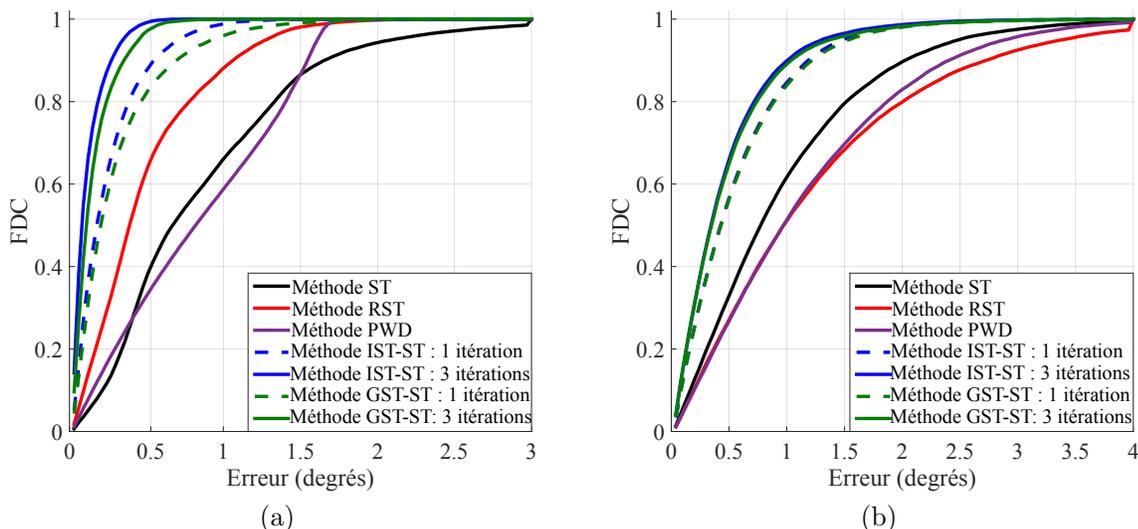


Figure 3.9 – Fonctions de Distribution Cumulée des erreurs d'estimation pour l'image synthétique sans bruit (a) et bruitée (b)

La méthode ST conduit à de grandes erreurs, en particulier dans les régions présentant des courbures asymétriques. Ces erreurs atteignent jusqu'à 8 degrés. Cette méthode conduit à un biais de 0.5 degrés et un terme d'erreur moyenne de 0.82 degrés. La méthode RST donne de meilleurs résultats en termes de qualité d'estimation. Cependant, elle entraîne des erreurs dans des régions de faible valeur de gradient où l'intensité d'image est quasiment constante. La méthode PWD présente globalement des performances comparables à celles de la méthode ST.

Les méthodes proposées permettent d'obtenir les meilleurs résultats (voir la figure 3.9.a). Les termes d'erreur moyenne sont de l'ordre 10^{-4} après 3 itérations seulement en utilisant les méthodes IST-ST et GST-ST et le biais est fortement atténué. Les estimations sont plus cohérentes puisque plus de 97% des orientations ont une erreur inférieure à 0.5 degrés. La figure 3.9.a montre que la méthode IST-ST conduit à des résultats légèrement meilleurs que la méthode GST-ST. Les méthodes itératives que nous proposons convergent, ici, après 3 itérations.

Enfin, les figures 3.8.f-g-j-k montrent les images d'erreur d'estimation en utilisant les méthodes IST-ST et GST-ST accélérées sur l'image synthétique de la figure 3.7 pour des tailles de patch $p = 9$ et $p = 17$. La taille des grilles est $N_1 = N_2 = M_1 = M_2 = 27$. Les mêmes écarts-

types que précédemment sont considérés ($\sigma_G = 1$, $\sigma_T = 2.5$) et le degré du modèle polynomial est fixé à $d = 5$. Approximativement 94% des orientations ont une erreur inférieure à 0.5 degrés après 3 itérations (voir figure 3.9.a). Cela montre que le champ d'orientation estimé est encore précis.

Cependant, les reconstructions ont tendance à être plus stables près du point de passage. Par conséquent, pour les plus grands voisinages, l'estimation est plus biaisée sur les points les plus éloignés du centre de patch ce qui donne lieu à un champ d'estimation d'orientation présentant un aspect patch-work (voir figure 3.8.g-k). Ce problème peut être résolu en considérant des patches qui se recouvrent. Les estimations sur les points de recouvrement correspondraient à la moyenne des estimées issues de chaque patch. Cela conduit naturellement à une accélération de calcul inférieure à p^2 . Un compromis doit être adopté entre les critères de précision de l'estimation et ceux d'accélération.

Nous considérons à présent l'image synthétique de la figure 3.7 avec un bruit blanc Gaussien additif d'écart-type équivalent à 10% de l'amplitude d'intensité de l'image. Nous utilisons les mêmes paramètres qu'auparavant.

La figure 3.9.b montre que les méthodes RST et PWD sont moins performantes en comparaison avec la méthode ST conventionnelle en présence de bruit. Les résultats utilisant le schéma proposé conduisent à une estimation plus précise (voir la figure 3.10). Approximativement 90% des estimations ont une erreur inférieure à 1 degré après 3 itérations. Les méthodes proposées présentent de meilleures performances pour le cas bruité grâce à l'utilisation de la méthode de reconstruction globale. Cependant, ces résultats dépendent de la qualité de l'estimation initiale du champ d'orientation en utilisant la méthode ST. Par conséquent, les résultats sont moins précis que ceux de l'image sans bruit. Les performances des méthodes IST-ST et GST-ST dans le cas d'images bruitées sont équivalentes. Étant donné que la méthode GST-ST est plus efficace calculatoirement (comme nous l'avons montré dans la section 3.3.4.1), nous avons choisi de l'utiliser dans les expériences sur les images réelles dans la suite de ce chapitre.

La figure 3.11 montre le biais d'estimation d'orientation au centile 80 en utilisant les méthodes de l'état de l'art (ST, RST et PWD), la méthode ST avec un sur-lissage pour le calcul du tenseur en utilisant $\sigma_T = 4$, ainsi que les méthodes IST-ST et GST-ST à la fois avec et sans accélération pour différentes valeurs de Rapport Signal Bruit (RSB). Les méthodes que nous proposons donnent les meilleurs résultats en termes de précision d'estimation. En outre, les versions accélérées et non accélérées convergent vers les mêmes performances lorsque le niveau de bruit dans l'image augmente.

3.4.1.2 Régions de convergence asymétrique

Dans cette section, nous présentons les résultats des méthodes proposées sur une image directionnelle synthétique de taille (150×150) exprimée par l'équation 3.25 et quantifiée sur 256 niveaux avec un bruit blanc Gaussien additif d'écart-type équivalent à 10% de l'amplitude

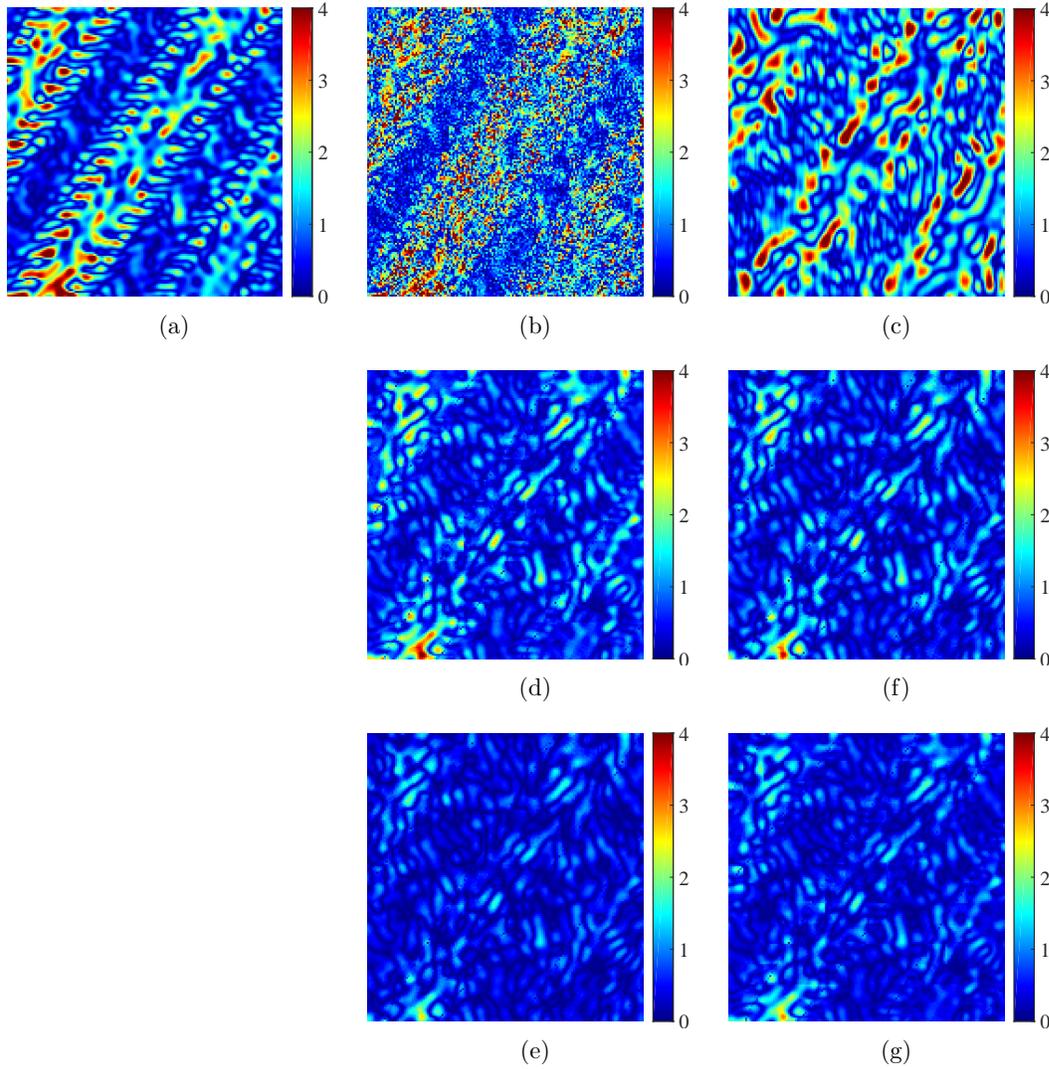


Figure 3.10 – Images d'erreur d'estimation en utilisant les méthodes *ST* (a), *RST* (b), *PWD* (c), la méthode *IST-ST* après 1 (d) et 3 (e) itérations et la méthode *GST-ST* après 1 (f) et 3 (g) itérations

d'intensité de l'image.

$$I(x_1, x_2) = \sin(2\pi f \arctan(\frac{x_2 - \delta x_2}{x_1 - \delta x_1} + d)), \quad (3.25)$$

où $f, \delta x_1, \delta x_2, d$ sont des constantes réelles qui valent respectivement 6, 1, 0.2 et 0.02 .

Cette image présente des courbures non-linéairement distribuées (voir figure 3.12.a). Le champ d'orientation analytique associé est calculé par dérivation de l'équation 3.25 et est représenté dans la figure 3.12.b.

La figure 3.13 montre que les méthodes *IST-ST* et *GST-ST* réduisent considérablement le biais d'erreur d'estimation. Le terme d'erreur moyen valant initialement 0.37 degrés en utilisant

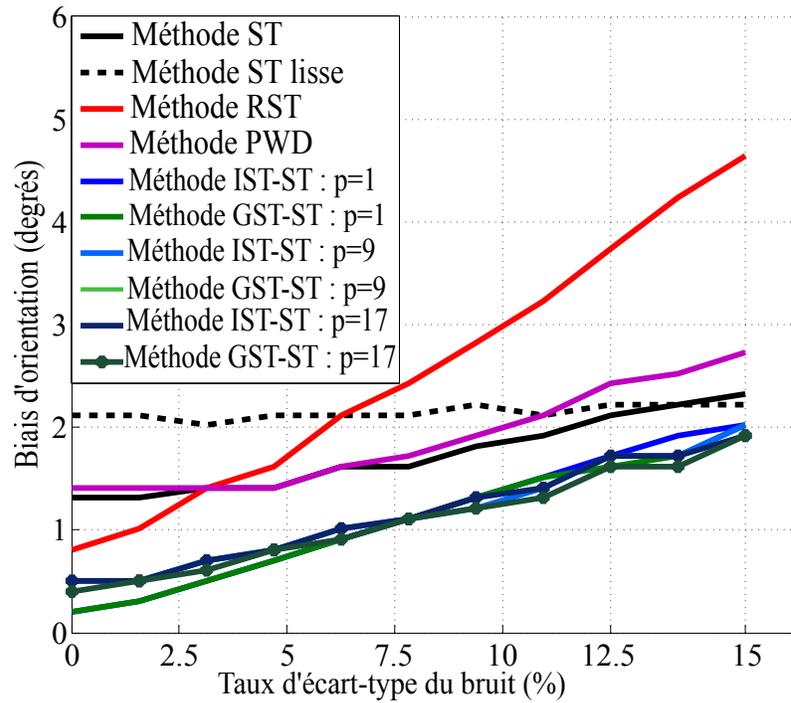


Figure 3.11 – Biais pour les Fonctions de Distribution Cumulée au centile 80 pour les méthodes de l'état de l'art et les méthodes proposées avec et sans accélération pour différents niveaux de bruit

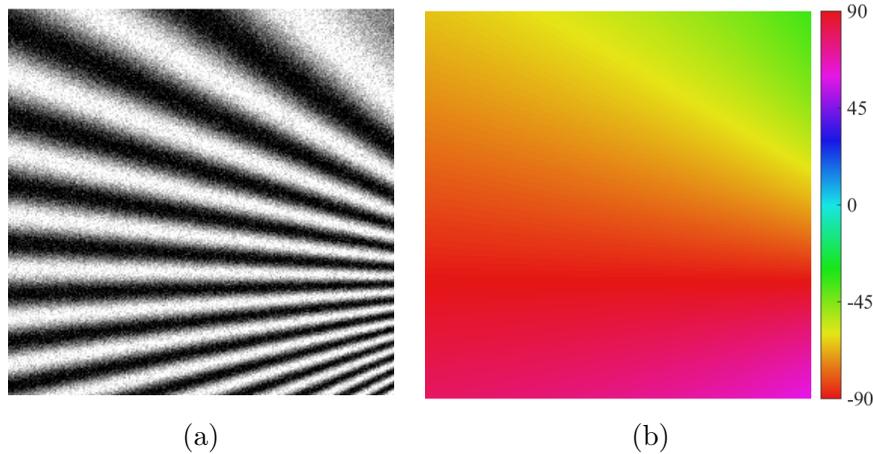


Figure 3.12 – Image synthétique(a) et champ d'orientation analytique en degrés (b)

la méthode ST est de l'ordre de 10^{-4} degrés en utilisant nos méthodes.

3.4.2 Image d'empreinte digitale

Dans cette section, nous présentons les résultats de la méthode proposée sur une image d'empreinte digitale de taille (300×350) (voir figure 3.14). Cette image comporte à la fois des

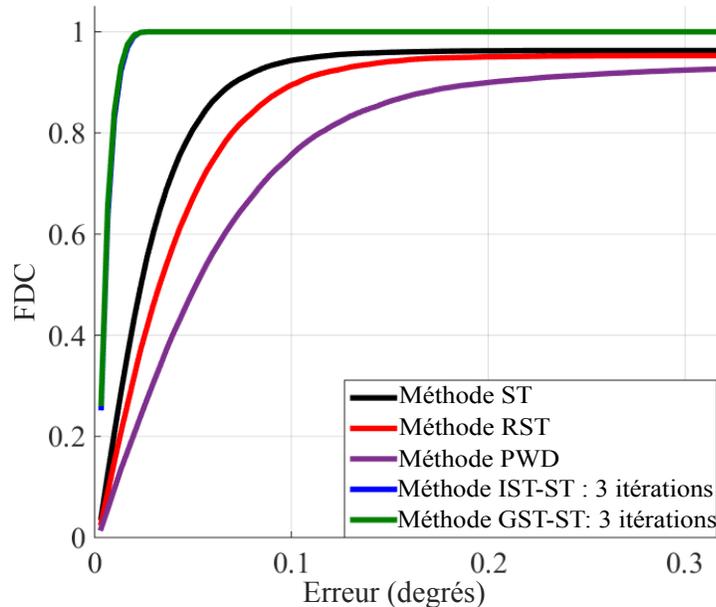


Figure 3.13 – Fonction de Distribution Cumulée des erreurs d'estimation d'orientation

régions de convergence, des courbures asymétriques en plus de régions de ruptures correspondant à des cicatrices.

Le champ d'orientation lisse initial est calculé en utilisant la méthode ST avec des écarts-types $\sigma_G = 0.5$ et $\sigma'_T = 10$ respectivement pour le filtre de gradient et pour calculer la matrice d'autocorrélation. Les tailles des grilles de reconstructions et d'application du modèle sont $N_1 = N_2 = 45$ et $M_1 = M_2 = 35$ respectivement. Nous générons 10 itérations pour la méthode GST-ST. L'écart-type σ_T dans l'espace aplani évolue progressivement de 5 à 3 au long des itérations. Le filtre passe-bas Gaussien pour le filtrage angulaire a un écart-type de $\sigma_\psi = 0.2$. Nous confrontons les résultats de notre méthode à ceux de la méthode ST en utilisant les écarts-types $\sigma_G = 0.5$ et $\sigma_T = 3$.

Le champ d'orientation déduit de la méthode ST a de nombreux artefacts. Ces artefacts apparaissent comme des régions où les valeurs des orientations locales s'éloignent des valeurs des orientations voisines (voir la figure 3.14). De plus, les régions des cicatrices affectent l'estimation de l'orientation. Ce phénomène ne peut pas être corrigé même en augmentant la valeur de σ_T qui ne fait qu'étaler l'influence des gradients erronés dans ces régions. Ceci conduit à répandre l'impact des géométries superposées le long d'un plus grand voisinage. Le champ d'orientation obtenu par la méthode GST-ST a un aspect beaucoup plus lisse (voir figure 3.14) ce qui décrit bien les aspects circulaires de la texture directionnelle de l'empreinte digitale.

La figure 3.15 montre les champs tangents correspondant aux champs d'orientation résultants en utilisant les méthodes ST et GST-ST sur les régions des cicatrices dans l'empreinte digitale de la figure 3.14.a. Le champ d'orientation résultant de la méthode ST (en rouge) suit l'orientation

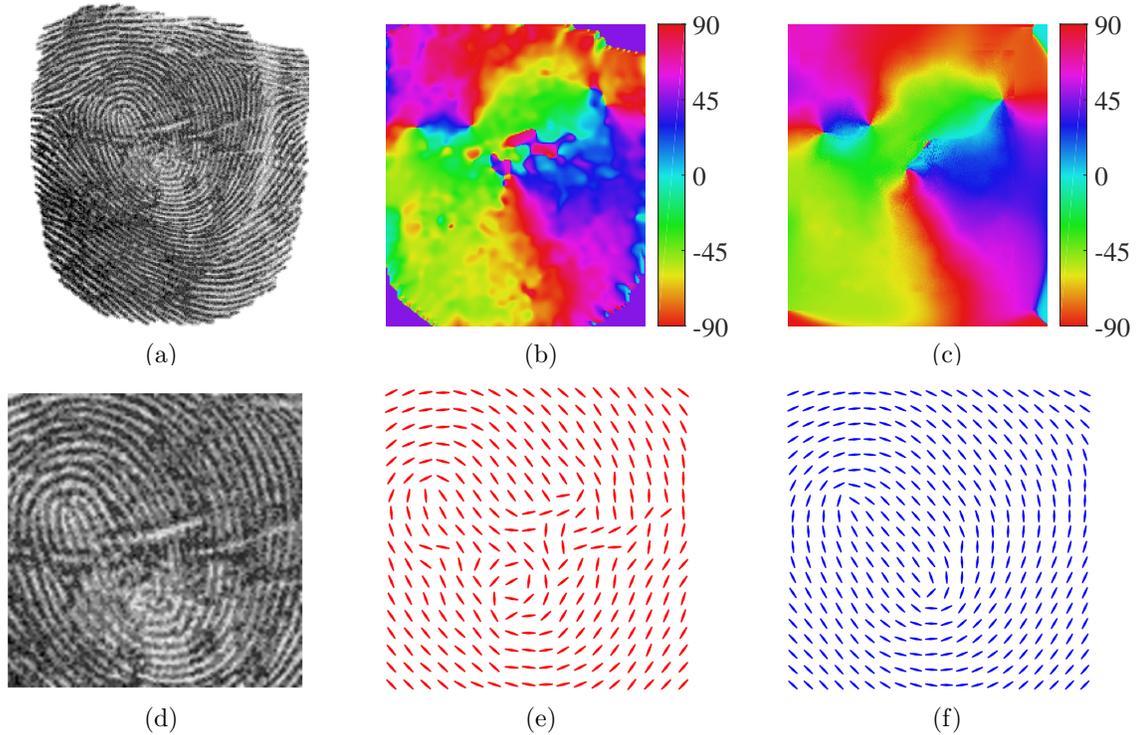


Figure 3.14 – Image d’empreinte digitale (a), champ d’orientation estimé par la méthode ST ($\sigma_G = 0.5$, $\sigma_T = 3$) (b) et par la méthode GST-ST après 10 itérations ($\sigma_G = 0.5$, $\sigma'_T = 10$, $\sigma_T = 3$) (c), image d’empreinte zoomée (d) et champ tangent correspondant déduit du champ d’orientation estimé par la méthode ST (e) et GST-ST (f)

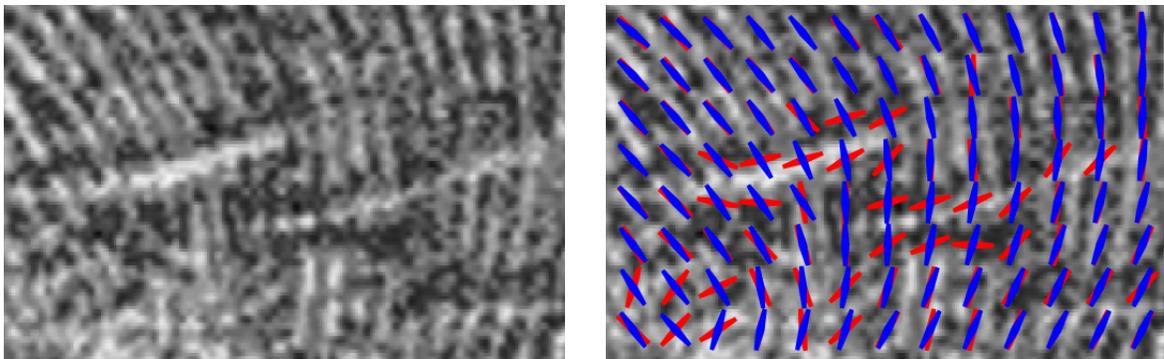


Figure 3.15 – Zoom sur la région des cicatrices dans l’empreinte digitale de la figure 3.14.a et champs tangents correspondant aux champs d’orientations par la méthode ST (rouge) et la méthode GST-ST après 10 itérations (bleu)

des cicatrices plutôt que l’aspect général de la texture. Cela conduit à une mauvaise estimation sur le voisinage immédiat des cicatrices. Après 10 itérations, notre méthode GST-ST redresse les orientations estimées dans ces domaines. Les estimations dans les régions perturbées sont

plus précises en utilisant la méthode GST-ST car elles retracent l'aspect visuel de la texture. La valeur de cohérence moyenne est de 0.53 par la méthode ST et vaut 0.94 par la méthode GST-ST ce qui indique la stabilité de l'estimateur.

3.4.3 Image de matériau

Nous considérons à présent une image de matériau fibreux de taille (704×320) (voir figure 3.16). Cette image présente des surpiqûres qui apparaissent comme des lignes orthogonales à la texture ainsi que des courbures asymétriques. L'objectif ici est d'estimer l'orientation du matériau fibreux sans tenir compte de la superposition géométrique qui correspond aux surpiqûres et est considérée comme une information parasite.

Le champ d'orientation lisse initial est calculé en utilisant la méthode ST avec respectivement les écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma'_T = 15$ pour le filtre gradient et le calcul de la matrice d'autocorrélation. Les tailles des grilles sont $N_1 = N_2 = 51$ et $M_1 = M_2 = 35$. L'écart-type σ_T dans l'espace aplani évolue progressivement de 5 à 4 à travers les itérations. Nous utilisons un filtre passe-bas Gaussien d'écart-type $\sigma_\psi = 0.2$ pour le filtrage angulaire. Nous confrontons les résultats de notre méthode aux résultats des méthodes ST et RST. La méthode ST a des écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 4$. Le champ d'orientation robuste est calculé par rapport au champ d'orientation lisse précédent ($\sigma_G = 1$ et $\sigma'_T = 15$) et la conformité à la tendance centrale est mesurée à l'aide d'un filtre Gaussien d'écart-type $\sigma_\psi = 0.2$.

Le champ d'orientation de la figure 3.16 a une structure chaotique en raison des variations locales d'intensité. Pour résoudre ce problème, nous augmentons la taille de la fenêtre de calcul du tenseur de structure σ_T à 15. Le champ d'orientation résultant est en effet plus lisse et montre les différentes populations d'orientation dans la donnée. Cependant, toute l'information locale est perdue et la sensibilité aux courbures asymétriques est augmentée. Bien que la méthode RST estime approximativement les bonnes populations d'orientations sans sensibilité aux surpiqûres parasites, elle conduit à un aspect très granulaire du champ estimé. Cela indique que l'estimation est instable. Après 5 itérations, notre méthode conduit à une estimation fine des tendances d'orientation sans perte d'information quant aux variations locales de l'image et sans reproduire les orientations parasites contrairement au champ de la figure 3.16.

Afin de confirmer ces observations, nous comparons les reconstructions locales des hypersurfaces en utilisant l'équation 1.4 et les champs d'orientation résultants de la figure 3.16. Les hypersurfaces sont reconstruites le long d'une grille de 101 pixels centrée sur le point de passage de coordonnées $(105, 60)$.

La reconstruction à l'aide du champ d'orientation de la méthode ST ($\sigma_G = 1$, $\sigma_T = 4$) de la figure 3.17 s'éloigne de la texture perceptible. Le champ d'orientation lisse et celui résultant de la méthode RST entraînent de mauvaises reconstructions dues aux courbures asymétriques. Les orientations erronées entraînent un décalage dans les reconstructions contrairement à la reconstruction utilisant les orientations de la méthode GST-ST qui suit bien la géométrie perceptible

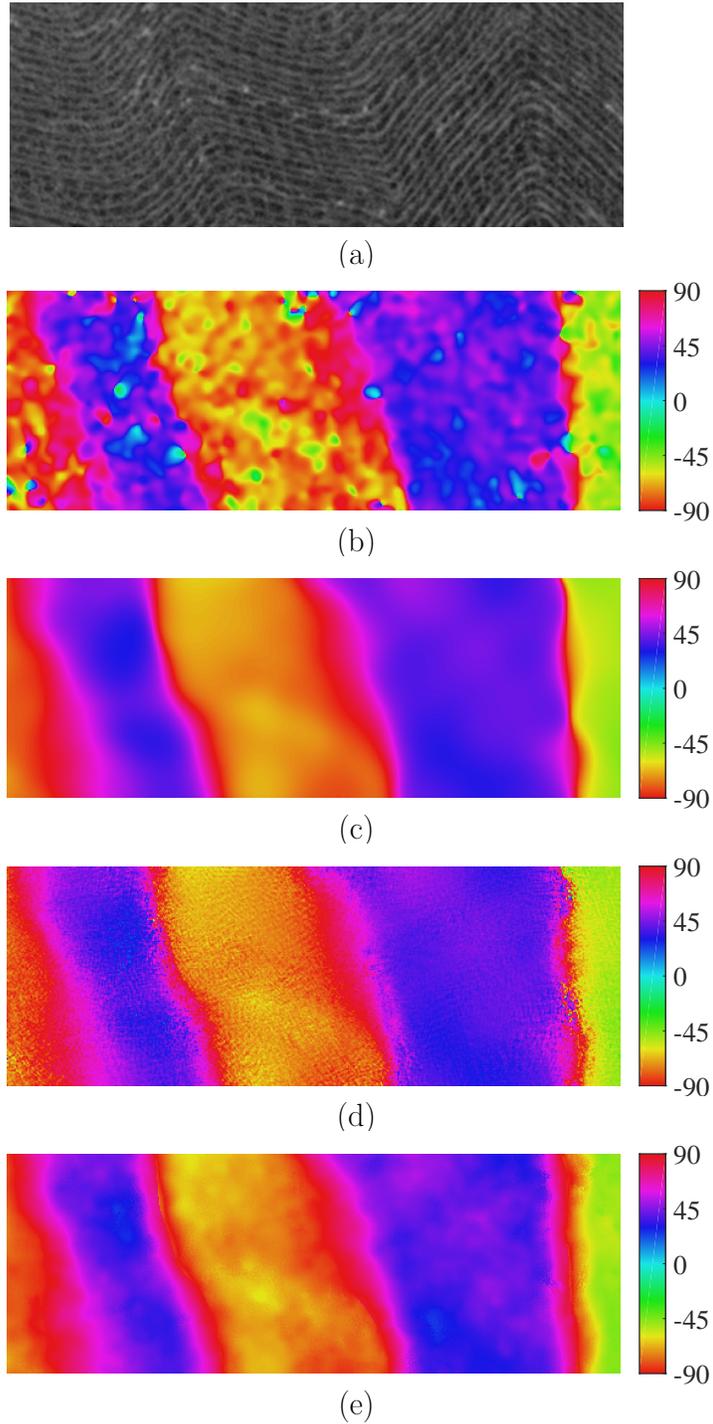


Figure 3.16 – Image d'un matériau fibreux (a) et champs d'orientation en degrés obtenus par les méthode *ST* $\sigma_G = 1, \sigma_T = 4$ (b), $\sigma_G = 1, \sigma'_T = 15$ (c), *RST* $\sigma_G = 1, \sigma'_T = 15, \sigma_T = 4, \sigma_\psi = 0.2$ (d) et *GST-ST* proposée après 5 itérations $\sigma_G = 1, \sigma'_T = 15, \sigma_T = 4, \sigma_\psi = 0.2$ (e)

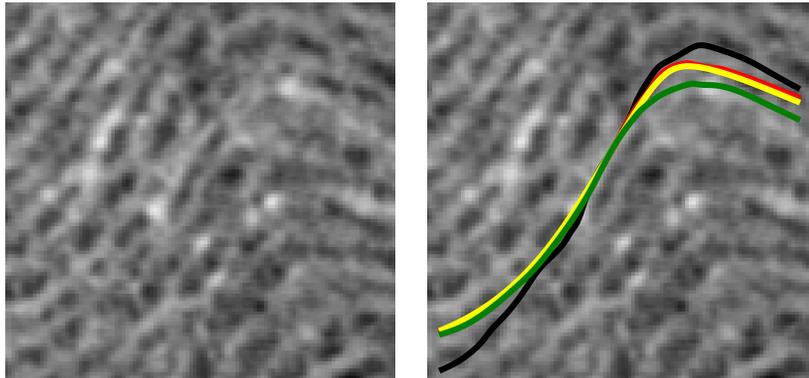


Figure 3.17 – *Hypersurfaces reconstruites à partir des champs d'orientation issus de la méthode ST ($\sigma_G = 1$, $\sigma_T = 4$) - en noir -, ST lisse ($\sigma_G = 1$, $\sigma_T = 15$) - en rouge -, RST - en jaune - et GST-ST proposée - en vert -*

de la texture directionnelle.

3.4.4 Image sismique

Finalement, nous présentons les résultats de notre méthode pour une image sismique de dimensions (730×318) qui contient des régions de convergence asymétrique (voir figure 3.18). Nous montrons ici que l'amélioration de la qualité des orientations impacte la qualité des reconstructions obtenues.

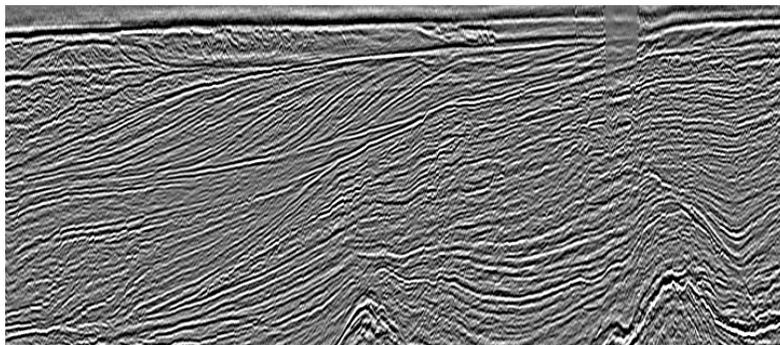


Figure 3.18 – *Image sismique avec régions de convergence asymétrique*

Le champ d'orientation lisse initial est calculé en utilisant la méthode ST avec respectivement les écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma'_T = 4$ pour le filtre gradient et le calcul de la matrice d'autocorrélation. Les tailles des grilles sont $N_1 = N_2 = 33$ et $M_1 = M_2 = 31$. L'écart-type σ_T dans l'espace aplani évolue progressivement de 3 à 2 à travers trois itérations. Nous utilisons un filtre passe-bas Gaussien d'écart-type $\sigma_\psi = 0.2$ pour le filtrage angulaire. Nous confrontons les résultats de notre méthode aux résultats des méthodes ST, RST et PWD. La méthode ST a des écarts-types $\sigma_G = 1$ et $\sigma_T = 2$. Le champ d'orientation robuste est calculé par rapport au

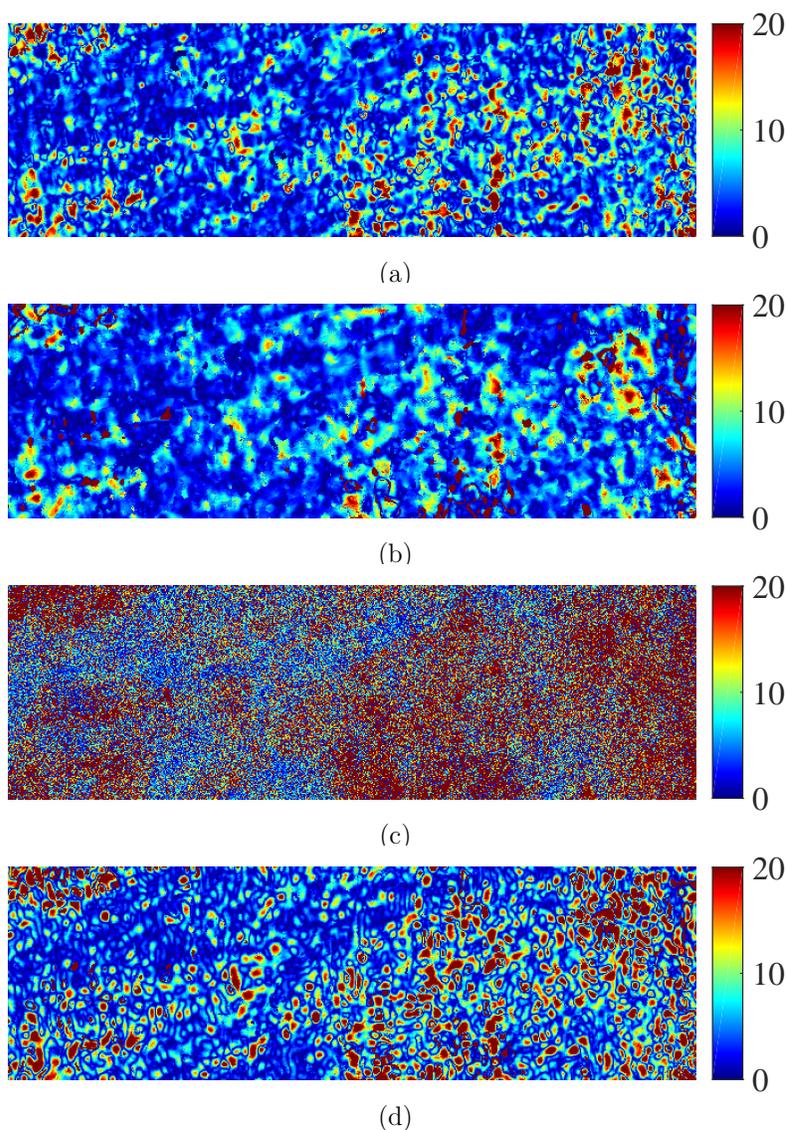


Figure 3.19 – Différences absolues en degrés entre le champ d'orientation estimé par la méthode GST-ST proposée après 3 itérations $\sigma_G = 1, \sigma'_T = 4, \sigma_T = 2, \sigma_\psi = 0.2$ et les champs d'orientation obtenus par les méthode ST $\sigma_G = 1, \sigma_T = 2$ (a), ST lisse $\sigma_G = 1, \sigma_T = 4$ (b), RST $\sigma_G = 1, \sigma'_T = 4, \sigma_T = 2, \sigma_\psi = 0.2$ (c) et PWD $\sigma_G = 1, \sigma_T = 2$ (d)

champ d'orientation lisse précédent ($\sigma_G = 1$ et $\sigma'_T = 4$) et la conformité à la tendance centrale est mesurée à l'aide d'un filtre Gaussien d'écart-type $\sigma_\psi = 0.2$. La taille du filtre passe-bas pour la méthode PWD est σ_T et 20 itérations permettent de converger.

Les différences absolues entre les orientations estimées à travers la méthode GST-ST et les méthodes auxquelles nous nous confrontons (ST, RST et PWD) sont importantes par endroits (voir figure 3.19) et atteignent 32 degrés en valeur maximale. Les différences les plus importantes se situent dans les régions où la courbure est asymétriquement distribuée et dans les régions

Estimation d'orientation par transformation d'espace et tenseur de structure

fortement bruitées où les reconstructions d'hypersurfaces de la méthode GST-ST permettent de décrire la structure de la donnée sous-jacente.

Nous comparons les reconstructions le long d'une grille de 671 pixels à partir du point de passage de coordonnées (444, 88) en effectuant 100 itérations dans le domaine de Fourier. Les champs d'orientation utilisés pour les reconstructions sont obtenus par les méthodes précédemment citées.

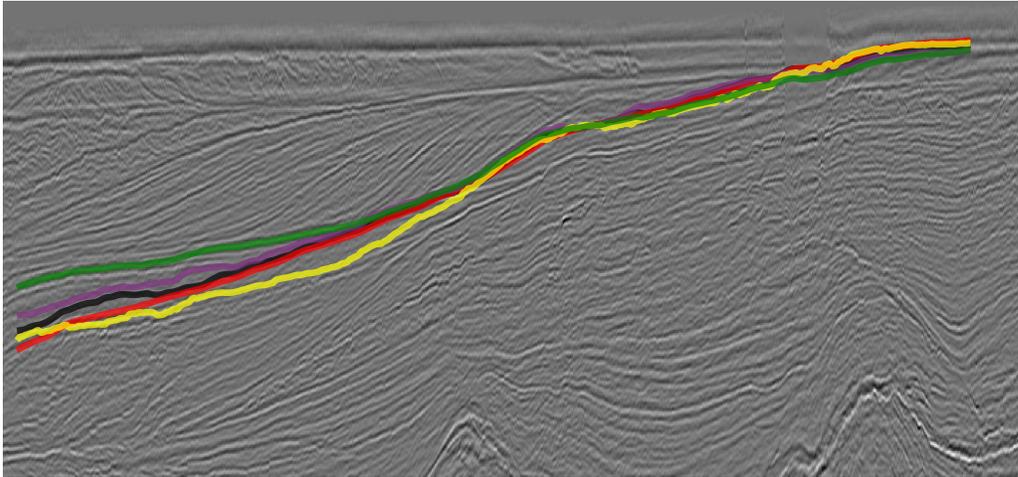


Figure 3.20 – *Hypersurfaces reconstruites à partir des champs d'orientation issus de la méthode ST - en noir -, ST lisse - en rouge -, RST - en jaune -, PWD - en violet - et GST-ST proposée - en vert -*

Le point de passage utilisé se situe dans une région comportant un artefact d'acquisition qui apparaît dans l'image 3.18 sous forme d'une ligne quasi-verticale. De plus, l'hypersurface perçue traverse une région de convergence. Les reconstructions de la figure 3.20 montrent que la seule méthode permettant de retrouver l'hypersurface perçue est la méthode GST-ST que nous proposons. La méthode RST conduit à la reconstruction la plus instable à cause des différentes populations dont l'orientation est très voisine. Les reconstructions à partir des orientations obtenues par les méthodes ST, RST et PWD traversent la région de convergence dans la partie droite de l'image 3.20. Les différences entre les reconstructions sont les plus significatives dans la région de convergence et s'élèvent à 44 pixels par endroits, ce qui correspond à une différence de l'ordre de 400 mètres en réalité.

3.5 Résumé des contributions et conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre un nouveau schéma d'estimation d'orientations pour les textures directionnelles qui s'avère être plus juste que les méthodes classiques, en particulier dans les régions de courbures asymétriques, de convergences et / ou de géométries distribuées de

manière asymétrique. Ce schéma est basé sur une transformation d'espace locale et paramétrique basée sur le flux d'hypersurfaces reconstruit sur le voisinage local. La transformation spatiale peut être appliquée soit au champ de gradients locaux, soit à l'image locale d'intensité avant d'utiliser la méthode du tenseur de structure.

Une accélération utilisant une approche par patch a été proposée. Elle est basée sur la reconstruction d'un flux d'hypersurfaces pour l'ensemble du patch et a conduit à des résultats comparables à la méthode non-accélérée.

Nous avons validé l'efficacité de l'approche que nous avons proposée sur une image synthétique, à la fois avec et sans bruit, et présentant des courbures asymétriques. Notre méthode a conduit à une forte atténuation du biais d'estimation dans le cas de l'image sans bruit en comparaison avec le tenseur de structure classique. Les méthodes IST-ST et GST-ST, basées sur l'image d'intensité et le champ de gradients respectivement, ont des performances équivalentes avec une efficacité de calcul légèrement meilleure pour la méthode des gradients. Par conséquent, il est préférable d'utiliser l'approche basée sur le champ de gradients, en particulier dans le cas de données de taille importante.

Dans le cas d'images réelles d'empreintes digitales, de matériaux fibreux et d'images sismiques, notre méthode conduit à une estimation plus juste que les méthodes classiques. L'orientation estimée respecte les variations locales et n'est pas sensible aux courbures asymétriques ni à la superposition de géométries due à des populations parasites telles que les cicatrices de l'épiderme ou les surpiqûres dans les matériaux fibreux.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la retranscription fidèle de la géométrie des textures directionnelles au moyen de la reconstruction d'hypersurfaces. Les travaux présentés s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat avec le groupe TOTAL. Ils sont motivés par le contexte applicatif des images sismiques, en particulier l'interprétation automatique ou supervisée des couches sédimentaires pour laquelle la reconstruction d'horizons sismiques est un point clé. Celle-ci s'appuie sur l'estimation préalable du champ d'orientation qui est rendue difficile dans le cas de régions complexes telles que des ruptures, des convergences et des courbures asymétriquement réparties. L'amélioration de la qualité du champ d'orientation et la prise en compte appropriée de contraintes de passage conduit à des reconstructions qui permettent une meilleure description de la géométrie locale et globale de la texture directionnelle. La reconstruction d'hypersurfaces discutée dans des travaux existants est considérée dans ce travail comme étant à la fois un outil et une finalité. Des transformations d'espace, dites conformes, appliquées à l'ensemble de la grille de reconstruction combinées à la prise en compte de contraintes de domaine et de passage permettent d'obtenir des reconstructions justes. D'autre part, des reconstructions locales d'hypersurfaces permettent d'accéder à des modèles de transformation d'espace afin de s'affranchir de la géométrie locale et donnent, ainsi, lieu à des estimations d'orientations non biaisées dans des contextes complexes. La fidélité des estimations d'orientation à la structure directionnelle mène à des reconstructions plus justes et s'insère dans un schéma récursif.

Dans le premier chapitre, nous avons dressé un état de l'art des méthodes de reconstruction d'hypersurfaces. Nous nous sommes attardés en particulier sur les méthodes par minimisation globale sous contraintes reliant l'hypersurface au pendage et qui se rapportent à la résolution d'une EDP non-linéaire. Ces méthodes donnent lieu à une reconstruction rapide par transformée de Fourier mais celle-ci nécessite que le domaine de reconstruction soit hyperrectangulaire. Lorsque ce n'est pas le cas, pour contourner les régions complexes de l'image par exemple, la méthode du masque binaire sous contrainte d'un seul point de passage permet de conserver le caractère rapide de la reconstruction en annulant la contribution des régions du rectangle englobant les points de domaine dans la solution. Dans le cas de plusieurs points de passage, la méthode des quadrangles permet d'obtenir des reconstructions partielles sur l'enveloppe convexe des contraintes par transformation d'espace. Cependant, la continuité de la dérivée aux frontières

Conclusion

des sous-parties n'est pas garantie et l'enveloppe concave du domaine est transformée en enveloppe convexe ce qui donne lieu à des reconstructions partielles supplémentaires. De plus, les reconstructions partielles sont sensibles au bruit. Par ailleurs, ces deux méthodes ne conservent pas une partie des reconstructions lors de l'ajout ou de la modification de contraintes, ce qui nécessite de reconstruire toute l'hypersurface.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté deux contributions pour la reconstruction d'hypersurfaces de manière globale et rapide. Pour les deux méthodes, la reconstruction est effectuée sur le domaine polygonal défini par les contraintes transformé en domaine rectangulaire pour la résolution de l'EDP et le choix de la méthode à utiliser est déterminé par l'organisation des contraintes de points de passage. Lorsque les points de passage ou de domaine sont ordonnés sous forme de contour d'un polygone, une chaîne constituée de transformations de Schwarz-Christoffel directe et inverse permet de transformer le domaine polygonal simplement connexe en rectangle de résolution. Une transformation supplémentaire optionnelle permet de régulariser les grilles relatives aux transformations de Schwarz-Christoffel afin que tous les points du maillage de départ aient la même contribution dans la résolution de l'EDP. La méthode globale par polygones proposée permet de dépasser les limitations de la méthode des quadrangles concernant la convexité du domaine de reconstruction et de reconstructions partielles. Lorsque des points de passage sont définis à l'intérieur du contour polygonal, nous avons donc proposé une méthode quasi-globale et incrémentale en considérant les polygones des points de passages par aires croissantes. L'initialisation se fait en reconstruisant le noyau simplement connexe par la méthode globale par polygones. L'approche pour les supports imbriqués se base sur la combinaison de deux chaînes de transformations afin de transformer le polygone doublement connexe des contraintes en rectangle régulièrement échantillonné à chaque étape. La première chaîne permet de respecter les contraintes sur le contour extérieur du domaine et met en œuvre des transformations d'espace de Schwarz-Christoffel doublement connexes ainsi que des transformations de Möbius. La seconde chaîne respecte les contraintes sur le contour intérieur du domaine et ce, notamment, à travers l'inversion du domaine ce qui permet de transformer les contraintes intérieures en contraintes extérieures pour la résolution rapide de l'EDP. Les résultats obtenus pour des régions complexes d'images sismiques montrent de meilleures reconstructions que par les méthodes par résolution de l'EDP du premier chapitre.

Le dernier chapitre est consacré à l'estimation des orientations des éléments structuraux des textures directionnelles. Nous avons tout d'abord discuté les méthodes conventionnelles basées sur la décomposition en éléments propres du tenseur de structure déduit du champ de gradients. Nous avons ensuite présenté un nouveau schéma d'estimation d'orientation pour les textures directionnelles qui s'avère être plus précis que les méthodes classiques, en particulier dans les régions de courbures asymétriques, de convergences et / ou de géométries distribuées de manière asymétrique. Ce schéma est basé sur une transformation d'espace locale et paramétrique déduite du flux d'hypersurfaces reconstruit sur le voisinage local. La transformation spatiale peut être

appliquée soit au champ de gradients locaux, soit à l'image locale d'intensité avant d'utiliser la méthode du tenseur de structure. Une accélération utilisant une approche par patch a été proposée. Elle est basée sur la reconstruction d'un flux d'hypersurfaces pour l'ensemble du patch et a conduit à des résultats comparables à la méthode non-accélérée. Les méthodes IST-ST et GST-ST, basées sur l'image d'intensité et le champ de gradients respectivement, ont des performances équivalentes avec une efficacité de calcul légèrement meilleure pour la méthode des gradients. Par conséquent, il est préférable d'utiliser l'approche basée sur le champ de gradients, en particulier dans le cas de données de taille importante. Nous avons validé l'efficacité de l'approche que nous avons proposée à la fois sur des images synthétiques et réelles présentant des régions complexes. Notre méthode a conduit à une forte atténuation des erreurs d'estimation en comparaison avec les méthodes classiques de tenseur de structure.

Les perspectives de poursuite des travaux de ce mémoire portent aussi bien sur la reconstruction d'hypersurfaces que sur l'estimation d'orientations. Le premier point concerne la reconstruction globale et rapide d'horizons sismiques traversant des régions complexes. Au lieu d'imposer l'intégralité des contraintes définissant les polygones imbriqués, seuls le noyau initial et le domaine d'intérêt sont fixés. Des couronnes successives sont ensuite définies automatiquement jusqu'à recouvrir la totalité du domaine d'intérêt. La reconstruction à chaque étape respecte les contraintes sur les frontières intérieures issues des reconstructions précédentes. Un deuxième point concerne la reconstruction d'horizons sismiques respectant des régions d'exclusion et / ou plusieurs reconstructions sur domaines spatialement séparés. Le domaine englobant est alors un polygone multiplement connexe qui peut être transformé en domaine rectangulaire par une transformation d'espace. Bien que la complexité calculatoire résultante associée soit très importante, il est vraisemblable que le calcul des transformations de Schwarz-Christoffel multiplement connexes puisse être effectué dans un temps raisonnable et compatible avec l'interaction dans un avenir relativement proche. Un troisième point porte sur l'estimation d'orientations dans des régions de juxtaposition de géométries pour lesquelles les voisinages locaux centrés utilisés pour les reconstructions, l'aplanissement et le tenseur de structure ne sont pas adaptés. Une pré-segmentation permettrait de restreindre l'étendue des domaines de reconstruction des flux d'hypersurfaces et des données aplanies. Un dernier point concerne la diminution de la complexité calculatoire de l'estimation d'orientations. En remplacement d'un nombre fixe d'itérations, il s'agirait de déterminer, pour chaque point, le nombre de répétitions suffisantes du procédé complet pour atteindre la convergence.

Annexes

Annexe A

Estimation de la transformation de Schwarz-Christoffel

Pour rappel, la transformation de Schwarz-Christoffel (SC) permet notamment de transformer un disque unitaire en polygone et vice-versa. L'expression de la transformation de SC du disque unitaire \mathcal{D} en polygone simplement connexe $P = \{w_1, w_2, \dots, w_K\}$ est la suivante :

$$\forall z \in \mathcal{D}, f_P(z) = a + c \int_0^z \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{s}{z_k}\right)^{-\beta_k} ds, \quad (\text{A.1})$$

où a, c sont des constantes complexes et $z_k, k \in [1, K]$ sont les images inverses des $w_k, k \in [1, K]$ appelés *pré-sommets* :

$$\forall k \in [1, K], f_P(z_k) = w_k. \quad (\text{A.2})$$

Des méthodes de calcul numérique de la transformation de SC ont été proposées au cours des cinquante dernières années et des améliorations continuent à voir le jour. Si la complexité du calcul formel rendait la transformation de SC difficile à utiliser dans le cas de polygones à plus de 4 sommets, il est désormais possible d'estimer de manière numérique précise la cartographie de régions contenant quelques dizaines voire centaines de sommets.

L'estimation des $K+2$ paramètres a, c, z_k , désignée par *problème des paramètres*, est au cœur de l'estimation de la transformation de SC et sa relative complexité rendait l'utilisation de cette transformation difficile, hormis dans des cas particuliers, jusqu'à la fin du XX-ème siècle.

Dans cette annexe, nous montrons comment les problématiques algorithmiques relatives à l'estimation et à l'application des transformations de SC sont analysées. Nous nous basons sur le travail de Trefethen et Driscoll [Tre80, TW86, DT02] qui ont développé la toolbox Matlab [Dri96], en accès libre, que nous avons utilisée dans les expériences présentées dans ce manuscrit.

A.1 Problème des paramètres

Dans [Tre80], les paramètres a, c, z_1 sont fixés comme suit : $a = w_1, z_1 = 1$ et

$$c = \frac{w_K - w_1}{\int_0^{z_K} \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{s}{z_k}\right)^{-\beta_k} ds} \quad (\text{A.3})$$

Le problème des paramètres revient donc à l'estimation des $K - 1$ paramètres $z_k, k \in [2, K]$. Pour ce faire, on pose les conditions des longueurs des côtés suivantes :

$$\left| \int_{z_k}^{z_{k+1}} f'_P(s) ds \right| = |w_{k+1} - w_k|, 1 \leq k \leq K - 1. \quad (\text{A.4})$$

En posant $z_k = e^{i\theta_k}$ avec $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_K = 2\pi$, l'équation A.4 donne lieu à un système carré non-linéaire et contraint de par les conditions sur les angles θ_k .

Le changement de variables :

$$\Phi_k = \log \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\theta_{k+1} - \theta_k} \right), 1 \leq k \leq K - 1, \theta_0 = 0 \quad (\text{A.5})$$

donne lieu à un système non-contraint.

Soit $p_j = \prod_{k=1}^j e^{-i\Phi_k}$, $p_0 = 1$ et $\phi_k = \pi \frac{\sum_{j=0}^k p_j}{\sum_{j=0}^{k-1} p_j}$, les équations A.4 et A.5 donne lieu à :

$$\left| \int_{e^{i\phi_k}}^{e^{i\phi_{k+1}}} f'_P(s) ds \right| = |w_{k+1} - w_k|, 1 \leq k \leq K - 1. \quad (\text{A.6})$$

La résolution numérique de A.6 se fait par la méthode itérative de Gauss-Newton [Har61, Sch70] avec mise-à-jour du Jacobien par la méthode de Broyden [Bro65].

A.2 Application de la transformation de Schwarz-Christoffel

L'estimation et l'application de la transformation de SC requièrent l'approximation rapide et précise d'intégrales de la forme :

$$\int_a^b \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{s}{z_k}\right)^{-\beta_k} ds \quad (\text{A.7})$$

Pour cela, la quadrature de Gauss-Jacobi est utilisée pour approcher l'intégrale par une

A.3 - Transformation de Schwarz-Christoffel inverse

somme discrète de fonctions pondérées et s'exprime [Nou85] :

$$\int_{-1}^1 f(s)(1-s)^\alpha(1+s)^\beta ds \approx \sum_1^n w_k f(s_k). \quad (\text{A.8})$$

Dans [HT13], une méthode basée sur la recherche de racines de Newton et l'évaluation de fonctions asymptotiques donne lieu à une estimation de bonne précision et en complexité calculatoire linéaire.

A.3 Transformation de Schwarz-Christoffel inverse

Une fois que les paramètres de la transformation directe de SC sont estimés, l'application de la transformation directe de SC revient au calcul d'une intégrale. L'inversion de la transformation est quelque peu plus compliquée car, d'une manière générale, il n'existe pas de formule pour la transformation inverse. Trefethen [Tre80] a proposé deux stratégies approchées pour l'inversion, c'est-à-dire pour l'estimation de $z = f_P^{-1}(w)$:

1. Méthode de Newton appliquée au problème directe $f_P(z) - w = 0$,
2. Résolution numérique du problème dit de *valeur initiale* [CL55] :

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'_P(z)} \text{ et } z(w_0) = z_0, \quad (\text{A.9})$$

où z_0 est la valeur initiale.

La solution finalement retenue dans [DT02] est une combinaison de ces deux approches. La résolution du problème de la *valeur initiale* se fait à partir d'une valeur approchée obtenue par la méthode de Newton.

Annexe B

Biais du tenseur de structure

Dans cette section, nous démontrons que la méthode ST introduit un biais d'estimation dans le cas d'une image présentant des régions de courbure asymétriquement distribuée. Ces régions se distinguent par une répartition asymétrique des normales dans le voisinage de certains points et ce selon la direction de la normale en chacun de ces points. Considérons pour cela le cas simple (voir figure B.1.a) d'une texture directionnelle elliptique I_{sin} :

$$I_{\text{sin}}(x_1, x_2) = \sin(2\pi f e^{-(ax_1^2 + bx_2^2)}), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

où $x_1, x_2 \in [-1, 1]$. L'objectif est, ici, de comparer l'expression du champ normal analytique avec l'expression du champ d'orientation estimé à l'aide de la méthode ST. Deux simplifications sont effectuées afin d'accéder au calcul du biais de l'estimation à l'aide du tenseur de la structure :

1. Le champ de gradient est obtenu analytiquement au lieu d'utiliser des filtres convolutifs,
2. L'image I_{sin} est simplifiée en utilisant une image I dont le champ de gradient est le même que celui de I_{sin} à une modulation d'amplitude près. Cette image est définie comme suit :

$$I(x_1, x_2) = e^{-(ax_1^2 + bx_2^2)}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{B.2})$$

Dans ce cas précis, le champ d'orientation est donné par le champ normal \mathbf{n} qui s'exprime :

$$\mathbf{n} \sim \begin{bmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Les composantes du champ gradient analytique sont :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ax_1 e^{ax_1^2 + bx_2^2} \\ -2bx_2 e^{ax_1^2 + bx_2^2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

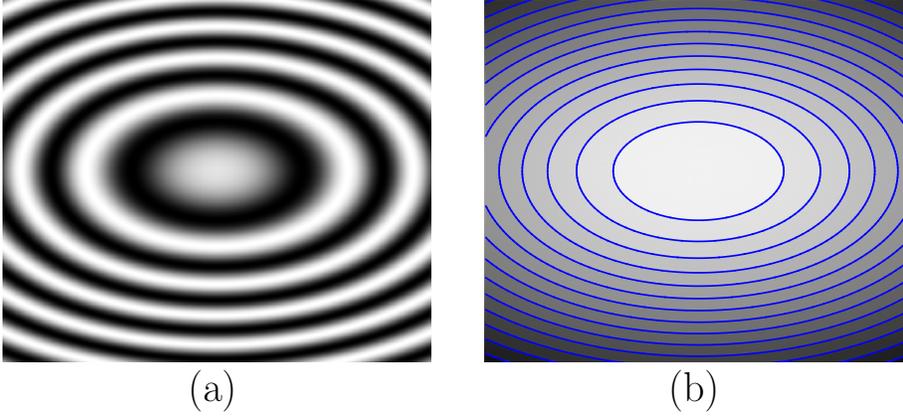


Figure B.1 – Image de texture elliptique de l'équation (B.1) avec $a = 1, b = 3, f = 2$ (a) et version simplifiée de l'équation (B.2) avec iso-contours (b)

Le tenseur de structure s'exprime comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} T_{x_1x_1}(x_1, x_2) & T_{x_1x_2}(x_1, x_2) \\ T_{x_1x_2}(x_1, x_2) & T_{x_2x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

et la matrice d'autocorrélation est calculée par convolution avec une Gaussienne d'écart-type σ_T .

Nous utilisons les propriétés suivantes pour exprimer les composantes de T :

Propriété B.0.1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad (a > 0), \quad (\text{B.6})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}b}{2a^{3/2}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad (a > 0), \quad (\text{B.7})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2a + b^2p)}{4a^{5/2}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \quad (a > 0). \quad (\text{B.8})$$

Les équations (B.6,B.7,B.8) mènent aux expressions suivantes des composantes du tenseur de structure T :

$$T_{x_1x_1}(x_1, x_2) \sim a^2 \left(b + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right)^2 \left[2\left(a + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right) + \frac{x_1^2}{\sigma_T^4}\right], \quad (\text{B.9})$$

$$T_{x_2x_2}(x_1, x_2) \sim b^2 \left(a + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right)^2 \left[2\left(b + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right) + \frac{x_2^2}{\sigma_T^4}\right], \quad (\text{B.10})$$

$$T_{x_1x_2}(x_1, x_2) \sim ab \left(a + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right) \left(b + \frac{1}{2\sigma_T^2}\right) \frac{x_1x_2}{\sigma_T^4}. \quad (\text{B.11})$$

Le déterminant de T est :

$$\Delta = \left[a^2 \left(b + \frac{1}{2\sigma_T^2} \right)^2 \frac{x_1^2}{\sigma_T^4} + b^2 \left(a + \frac{1}{2\sigma_T^2} \right)^2 \frac{x_2^2}{\sigma_T^4} \right]^2. \quad (\text{B.12})$$

Finalement, l'orientation estimée s'exprime comme suit :

$$\tilde{\mathbf{n}}(x_1, x_2) \sim \begin{bmatrix} -2T_{x_1x_2}(x_1, x_2) \\ T_{x_1x_1}(x_1, x_2) - T_{x_2x_2}(x_1, x_2) - \sqrt{\Delta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\sim \begin{bmatrix} a \left(b + \frac{1}{2\sigma_T^2} \right) x_1 \\ b \left(a + \frac{1}{2\sigma_T^2} \right) x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

L'expression de l'orientation estimée $\tilde{\mathbf{n}}$ dépend de a, b et de σ_T . Dans le cas de courbures symétriques, ce qui correspond à un modèle circulaire, nous avons $a = b$ et :

$$\tilde{\mathbf{n}}(x_1, x_2) \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sim \mathbf{n}(x_1, x_2). \quad (\text{B.15})$$

Par conséquent, il n'y a pas d'erreur dans l'estimation en cas de courbures symétriques comme prévu.

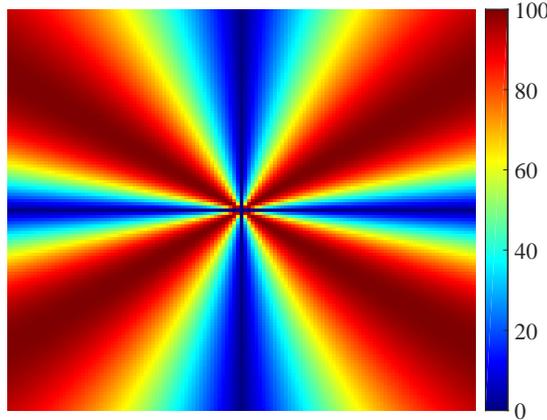


Figure B.2 – Pourcentage de biais d'orientation estimée par rapport à l'erreur maximale pour I en utilisant la méthode ST ($\sigma_T = 0.05$)

Cependant, lorsque $a \neq b$, il existe une courbure asymétriquement distribuée et le tenseur de structure introduit une erreur d'estimation (voir l'équation B.14). Lorsque σ_T tend vers zéro, l'erreur est faible et lorsque $\sigma_T \rightarrow \infty$, l'expression de la normale est identique au cas circulaire ce qui induit des erreurs plus importantes.

Annexe - Biais du tenseur de structure

Nous définissons le biais d'estimation comme étant la différence angulaire $\delta\theta$:

$$\delta\theta(x_1, x_2) = \left| \arcsin\left(\frac{\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{n}}}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{n}}\|}\right) \right| \quad (\text{B.16})$$

$$= \left| \arcsin\left(\frac{ab(b-a)x_1x_2}{\sqrt{(a^2x_1^2 + b^2x_2^2)(a^2\gamma_b^2x_1^2 + b^2\gamma_a^2x_2^2)}}\right) \right|, \quad (\text{B.17})$$

où $\gamma_a = a + \frac{1}{2\sigma_T^2}$ and $\gamma_b = b + \frac{1}{2\sigma_T^2}$. Le biais maximal d'estimation se situe sur les axes d'équation $x_2 = \pm x_1 \frac{a\gamma_b}{b\gamma_a}$, et ce biais maximal s'exprime :

$$\delta\theta_{max} = \left| \arcsin\left(\frac{b-a}{\sqrt{\gamma_a^2 + \gamma_b^2}}\right) \right|. \quad (\text{B.18})$$

La figure B.2 montre la distribution du taux d'erreur par rapport au biais maximal. Le biais d'estimation d'orientation le plus important correspond aux régions où la courbure évolue asymétriquement alors que celui-ci est négligeable à proximité de régions symétriques de l'image I .

Annexe C

Imagerie sismique

L'optimisation de la production pétrolière s'appuie sur une interprétation géologique précise du sous-sol dans la région d'intérêt. Un procédé d'acquisition en surface par mesure de réflexion d'ondes, nommé *sismique réflexion*, permet d'obtenir une échographie des couches sédimentaires constituant la donnée d'entrée de l'interprétation.

L'acquisition sismique par réflexion consiste à enregistrer, au niveau d'un récepteur, les réflexions d'ondes acoustiques produites artificiellement en surface. Les ondes se propagent dans les premiers kilomètres de la surface terrestre et une partie est réfléchi aux frontières des couches sédimentaires en fonction des différentes hétérogénéités (discontinuités) rencontrées. Les ondes réfléchies sont recueillies aux niveaux de récepteurs en surface. L'acquisition sismique peut se faire en milieu terrestre (*on-shore*) ou en milieu marin (*off-shore*).

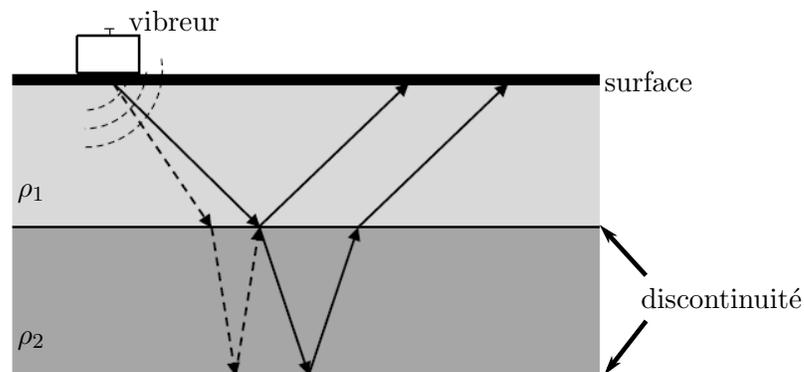


Figure C.1 – Propagation des ondes sismiques dans des milieux de coefficients de réflexion ρ_1 et ρ_2

Dans les deux cas, les acquisitions ne diffèrent que par le type de matériel utilisé, le principe d'acquisition reste globalement le même (voir figure C.1). En milieu terrestre, les vibrations sont créées par le biais de camion-vibreurs ou d'explosifs. Les ondes réfléchies sont recueillies à l'aide de capteurs nommés *géophones*, posés à même le sol et quadrillant la zone d'étude, qui

Annexe - Imagerie sismique

convertissent les vibrations mécanique en tension électrique. En milieu marin, un canon à air permet de générer des vibrations qui vont ensuite se propager dans l'eau puis dans le sous-sol à partir d'un bateau. Les vibrations sont récupérées grâce à des capteurs nommés *hydrophones* répartis le long de grands câbles, appelés *streamers*, tractés par le bateau.

À partir des informations collectées, les géophysiciens, en étroite coopération avec les géologues, créent des modèles de vitesse et d'anisotropie décrivant le sous-sol de la région d'acquisition. Le résultat est une image bidimensionnelle ou tridimensionnelle qui fait l'objet d'application des méthodes de reconstructions présentées dans le manuscrit en vue de reconstruire les horizons sismiques.

La reconstruction des horizons sismiques permet notamment d'ordonner ceux-ci en termes de période de formation et ce en leur attribuant un numéro d'ordre, désigné par *pseudo-âge géologique*. Une carotte sismique permet de dater les horizons sismiques et de déterminer si les pièges à hydrocarbures qui auront été déterminés par l'interprétation sont des réservoirs d'hydrocarbures. En effet, dans un piège à hydrocarbures trop jeune les fossiles ne se seront pas encore transformés en hydrocarbures. Les hydrocarbures qui auraient pu être présents dans un piège trop vieux peuvent avoir déjà été consommés par les bactéries du sous-sol.

Des configurations particulières rendent le procédé d'interprétation plus compliqué. Par exemple, les failles sismiques consistent en un plan ou une zone de rupture le long duquel deux blocs rocheux se déplacent l'un par rapport à l'autre sous l'effet de la tectonique des plaques (voir figure C.2.a). Un autre exemple est constitué des régions de convergence des structures directionnelles (voir figure C.2.b), notamment dans les régions d'érosion. Une autre configuration intéressante concerne les régions de courbure asymétrique souvent associées à des structures chenalisantes (voir figure C.2.c).

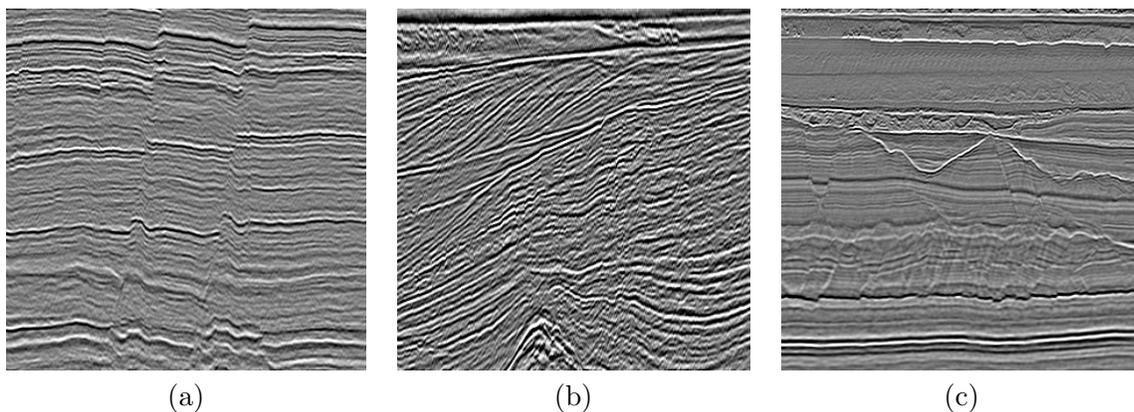


Figure C.2 – Images sismiques réelles présentant des failles (a), des régions de convergence (b) et un mélange de régions de courbure asymétrique et de populations parasites (c)

Bibliographie

- [Abe05] Shigeo Abe. *Support vector machines for pattern classification*, volume 2. London : Springer, 2005.
- [AFPA06] Vincent Arsigny, Pierre Fillard, Xavier Pennec, and Nicholas Ayache. Log-euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors. *Magnetic resonance in medicine*, 56(2) :411–421, 2006.
- [And79] Alex M Andrew. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5) :216–219, 1979.
- [ANR74] Nasir Ahmed, T. Natarajan, and Kamisetty R. Rao. Discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Computers*, 100(1) :90–93, 1974.
- [AYD⁺15] Adib Akl, Charles Yaacoub, Marc Donias, Jean-Pierre Da costa, and Christian Germain. Texture synthesis using the structure tensor. *IEEE Transactions on Image Processing*, 24(11) :4082–4095, 2015.
- [B⁺06] Thomas Brox et al. *Adaptive structure tensors and their applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [BDH96] C. Bradford Barber, David P. Dobkin, and Hannu Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 22(4) :469–483, 1996.
- [BG92] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 1992.
- [BGN70] Billy L. Buzbee, Gene H. Golub, and Clair W. Nielson. On direct methods for solving poisson’s equations. *SIAM Journal on Numerical analysis*, 7(4) :627–656, 1970.
- [Big86] Josef Bigun. *Optimal orientation detection of linear symmetry*. PhD thesis, Linköping Univ., Sweden, 1986.
- [Big94] Josef Bigun. Speed, frequency, and orientation tuned 3-d gabor filter banks and their design. *Pattern Recognition, 1994. Vol. 3-Conference C : Signal Processing, Proceedings of the 12th IAPR International Conference on. IEEE*, pages 184–187, 1994.
- [Bil74] Alberto A. Bilotti. Static temperature distribution in IC chips with isothermal heat sources. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 21(3) :217–226, 1974.

BIBLIOGRAPHIE

- [BJW97] Arun Balakrishnan, William T. Joines, and Thomas G. Wilson. Air-gap reluctance and inductance calculations for magnetic circuits using a schwarz-christoffel transformation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 12(4) :654–663, 1997.
- [BL13] Kenneth John Binns and Peter John Lawrenson. *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems : Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies*. Elsevier, 2013.
- [BP05] Alexander Blinov and Maria Petrou. Reconstruction of 3D horizons from 3D seismic datasets. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(6) :1421–1431, 2005.
- [Bro65] Charles G. Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, 19(92) :577–593, 1965.
- [BS92] Roberto H. Bamberger and Mark JT. Smith. A filter bank for the directional decomposition of images : theory and design. *IEEE Transactions on Signal processing*, 40(4) :882–893, 1992.
- [BS98] N. Bienati and U. Spagnolini. Traveltime picking in 3-D data volumes. In *Extended Abstracts*, pages 98–112. 60th EAGE Meeting, 1998.
- [BSR03] Hilde G. Borgos, Thorleif Skov, and Trygve Randen. Automated geometry extraction from 3d seismic data. *73rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, pages 1541–1544, 2003.
- [BW02] Rein Van Den Boomgaard and Joost Van De Weijer. Robust estimation of orientation for texture analysis. *Proc. Texture 2002, 2nd International Workshop on Texture Analysis and Synthesis*, 2002.
- [BWB⁺06] Thomas Brox, Joachim Weickert, Bernhard Burgetj, et al. Nonlinear structure tensors. *Image and Vision Computing*, 24(1) :41–55, 2006.
- [BZI⁺09] Kamel Boughrara, D Zarko, Rachid Ibtouen, Omar Touhami, and Abderezzak Rezzoug. Magnetic field analysis of inset and surface-mounted permanent-magnet synchronous motors using schwarz–christoffel transformation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(8) :3166–3178, 2009.
- [CC93] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, 1993.
- [Cha96] Timothy M. Chan. Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, 16(4) :361–368, 1996.
- [Chr67] Elwin Bruno Christoffel. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)*, 1(1) :89–103, 1867.
- [CKS97] Vicent Caselles, Ron Kimmel, and Guillermo Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.

- [CL55] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [Cla92] J. F. Claerbout. Earth soundings analysis : Processing versus inversion. *Blackwell Scientific Publications, Inc.*, 1992.
- [Coh91] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53(2) :211–218, 1991.
- [Cos87] Eugenio Costamagna. On the numerical inversion of the schwarz-christoffel conformal transformation. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 35(1) :35–40, 1987.
- [DBK98] Marc Donias, Pierre Baylou, and Noomane Keskes. Curvature estimation of oriented patterns. *Signal Processing Conference (EUSIPCO 1998), 9th European*, pages 1–4, 1998.
- [DD16] Salma Doghrajji and Marc Donias. Seismic horizon reconstruction on polygonal domains using the schwarz-christoffel transformation. In *Image Processing (ICIP), 2016 IEEE International Conference on*, pages 4057–4061. IEEE, 2016.
- [DDB15a] Salma Doghrajji, Marc Donias, and Yannick Berthoumieu. Estimation récursive du champ d’orientation par reconstruction d’hypersurfaces et changement d’espace. In *XXVème Colloque GRETSI (Gretsi 2015)*, pages 1–4, 2015.
- [DDB15b] Salma Doghrajji, Marc Donias, and Yannick Berthoumieu. Recursive orientation estimation based on hypersurface reconstruction. In *2015 IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2015, Quebec City, QC, Canada, September 27-30, 2015*, pages 368–372, 2015.
- [DDG17] Salma Doghrajji, Marc Donias, and Sébastien Guillon. Reconstruction d’horizons sismiques sur supports imbriqués par transformations d’espace. In *XXVIème Colloque GRETSI (Gretsi 2017)*, pages 1–4, 2017.
- [Del34] Boris Delaunay. Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7(793-800) :1–2, 1934.
- [DeL06] Thomas K. DeLillo. Schwarz-christoffel mapping of bounded, multiply connected domains. *Computational Methods and Function Theory*, 6(2) :275–300, 2006.
- [DEP01] Thomas K. DeLillo, Alan R. Elcrat, and John A. Pfaltzgraff. Schwarz–christoffel mapping of the annulus. *SIAM review*, 43(3) :469–477, 2001.
- [DEP04] Thomas K. DeLillo, Alan R. Elcrat, and JA. Pfaltzgraff. Schwarz-christoffel mapping of multiply connected domains. *Journal d’Analyse Mathématique*, 94(1) :17–47, 2004.
- [Don99] Marc Donias. *Caractérisation de champs d’orientation par analyse en composantes principales et estimation de la courbure. Application aux images sismiques*. PhD thesis, Univ. Bordeaux 1, 1999.

BIBLIOGRAPHIE

- [Dri96] Tobin A. Driscoll. Algorithm 756 : A matlab toolbox for schwarz-christoffel mapping. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 22(2) :168–186, 1996.
- [DT02] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen. *Schwarz-Christoffel mapping*, volume 8. Cambridge University Press, 2002.
- [DT05] Navneet Dalal and Bill Triggs. Histograms of oriented gradients for human detection. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1 :886–893, 2005.
- [EC02] CN. Eberhardt and AR. Clarke. Automated reconstruction of curvilinear fibres from 3d datasets acquired by x-ray microtomography. *Journal of Microscopy*, 206(1) :41–53, 2002.
- [EFFM02] Douglas Enright, Ronald Fedkiw, Joel Ferziger, and Ian Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journal of Computational Physics*, 183(1) :83–116, 2002.
- [ESM06] Robert R. Erickson, Marios C. Soteriou, and Prashant G. Mehta. The influence of temperature ratio on the dynamics of bluff body stabilized flames. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January*, pages 9–12, 2006.
- [Fom02] Sergey Fomel. Applications of plane-wave destruction filters. *Geophysics*, 67(6) :1946–1960, 2002.
- [GC87] Ahmed F. Ghoniem and Yves Cagnon. Vortex simulation of laminar recirculating flow. *Journal of Computational Physics*, 68(2) :346–377, 1987.
- [GLPV08] BLJ Gysen, EA Lomonova, JJH Paulides, and AJA Vandenput. Analytical and numerical techniques for solving Laplace and Poisson equations in a tubular permanent magnet actuator : Part ii. Schwarz–Christoffel mapping. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(7) :1761–1767, 2008.
- [Gra72] Ronald L Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Information processing letters*, 1(4) :132–133, 1972.
- [Har61] Herman O. Hartley. The modified gauss-newton method for the fitting of non-linear regression functions by least squares. *Technometrics*, 3(2) :269–280, 1961.
- [Hen93] Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis, Volume 3 : Discrete Fourier analysis, Cauchy integrals, construction of conformal maps, univalent functions*, volume 3. John Wiley & Sons, 1993.
- [HLS85] JM Harrison, HJ Landau, and LA Shepp. The stationary distribution of reflected brownian motion in a planar region. *The Annals of Probability*, pages 744–757, 1985.
- [Hoc65] Roger W. Hockney. A fast direct solution of Poisson’s equation using fourier analysis. *Journal of the ACM (JACM)*, 12(1) :95–113, 1965.
- [HT13] Nicholas Hale and Alex Townsend. Fast and accurate computation of gauss–legendre and gauss–jacobi quadrature nodes and weights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(2) :A652–A674, 2013.

- [Hu98] Chenglie Hu. Algorithm 785 : a software package for computing schwarz-christoffel conformal transformation for doubly connected polygonal regions. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 24(3) :317–333, 1998.
- [HWJ98] Lin Hong, Yifei Wan, and Anil K. Jain. Fingerprint image enhancement : algorithm and performance evaluation. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(8) :777–789, 1998.
- [Jar73] Ray A. Jarvis. On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane. *Information Processing Letters*, 2(1) :18–21, 1973.
- [JPHP00] Anil K. Jain, Salil Prabhakar, Ling Hong, and Sharath Pankanti. Filterbank-based fingerprint matching. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(5) :846–859, 2000.
- [Knu89] Hans Knutsson. Representing local structure using tensors. *6th Scandinavian Conference on Image Analysis*, pages 244–251, 1989.
- [KS04] Yan Ke and Rahul Sukthankar. Pca-sift : A more distinctive representation for local image descriptors. *Computer Vision and Pattern Recognition, 2004. CVPR 2004. Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on*, 2 :66–75, 2004.
- [KW87] Michael Kass and Andrew Witkin. Analyzing oriented patterns. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 37(3) :362–385, 1987.
- [KWT88] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4) :321–331, 1988.
- [LG06] J. Lomask and A. Guitton. Flattening with geological constraints. In *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pages 1053–1056. Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2006.
- [LGF⁺06] J. Lomask, A. Guitton, S. Fomel, J. Claerbout, and A. Valenciano. Flattening without picking. *Geophysics*, 71(1) :13–20, 2006.
- [Low04] David G Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International journal of computer vision*, 60(2) :91–110, 2004.
- [LS80] Der-Tsai Lee and Bruce J Schachter. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *International Journal of Parallel Programming*, 9(3) :219–242, 1980.
- [M⁺11] Greg Markowsky et al. On the expected exit time of planar brownian motion from simply connected domains. *Electronic Communications in Probability*, 16 :652–663, 2011.
- [Mil96] Kenneth G. Miller. Stationary corner vortex configurations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 47(1) :39–56, 1996.
- [MRB94] KB McGrattan, RG Rehm, and HR Baum. Fire-driven flows in enclosures. *Journal of Computational Physics*, 110(2) :285–291, 1994.
- [Nou85] Jean-Pierre Nougier. *Méthodes de calcul numérique*, volume 3. Masson Paris, 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [OS88] Stanley Osher and James A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, 1988.
- [Pey09] Gabriel Peyré. Texture synthesis with grouplets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(4) :733–746, 2009.
- [PFA06] Xavier Pennec, Pierre Fillard, and Nicholas Ayache. A riemannian framework for tensor computing. *International Journal of Computer Vision*, 66(1) :41–66, 2006.
- [Pin03] Mark A. Pinsky. *Partial differential equations and boundary-value problems with applications*. Waveland Press, 2003.
- [PLV09] Fabien Pauget, Sebastien Lacaze, and Thomas Valding. A global approach in seismic interpretation based on cost function minimization. In *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pages 2592–2596. Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2009.
- [Qi05] Yaxuan Qi. *Fingerprint Ridge Line Reconstruction*, pages 211–220. Springer US, Boston, MA, 2005.
- [RBD03] Mikael Rousson, Thomas Brox, and Rachid Deriche. Active unsupervised texture segmentation on a diffusion based feature space. *Proc. 2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 699–704, 2003.
- [Rie51] Bernhard Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. PhD thesis, EA Huth, 1851.
- [RS89] A. Ravishankar Rao and Brian G. Schunck. Computing oriented texture fields. *Proc. IEEE Computer Science Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 61–68, 1989.
- [Sch69] Hermann Amandus Schwarz. Conforme abbildung der oberfläche eines tetraeders auf die oberfläche einer kugel. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70 :121–136, 1869.
- [Sch70] LK Schubert. Modification of a quasi-newton method for nonlinear equations with a sparse jacobian. *Mathematics of Computation*, 24(109) :27–30, 1970.
- [SF08] Gilbert Strang and George Fix. *An analysis of the finite element method*. Wellesley-Cambridge, 2008.
- [SM93] Baary G. Sherlock and Donald M. Monro. A model for interpreting fingerprint topology. *Pattern recognition*, 26(7) :1047–1055, 1993.
- [SSO94] Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1) :146–159, 1994.
- [Str99] Gilbert Strang. The discrete cosine transform. *SIAM review*, 41(1) :135–147, 1999.
- [Swa74] Paul N Swarztrauber. A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 11(6) :1136–1150, 1974.

-
- [Swa77] Paul N Swarztrauber. The methods of cyclic reduction, fourier analysis and the facr algorithm for the discrete solution of poisson's equation on a rectangle. *Siam Review*, 19(3) :490–501, 1977.
- [Swe73] Roland A Sweet. Direct methods for the solution of poisson's equation on a staggered grid. *Journal of Computational Physics*, 12(3) :422–428, 1973.
- [TD05] David Tschumperle and Rachid Deriche. Vector-valued image regularization with pdes : A common framework for different applications. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(4) :506–517, 2005.
- [TDB10] Vincent Toujas, Marc Donias, and Yannick Berthoumieu. Structure tensor regularization based on geometric features. *18th European Signal Processing Conference (Eusipco-2010)*, pages 1330–1334, 2010.
- [Tre80] Lloyd N Trefethen. Numerical computation of the schwarz–christoffel transformation. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1(1) :82–102, 1980.
- [TW86] Lloyd N Trefethen and Ruth J Williams. Conformal mapping solution of laplace's equation on a polygon with oblique derivative boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 14(1-2) :227–249, 1986.
- [Ver83] W Versnel. Electrical characteristics of an anisotropic semiconductor sample of circular shape with finite contacts. *Journal of Applied Physics*, 54(2) :916–921, 1983.
- [VV95] Lucas J. Van Vliet and Piet W. Verbeek. Estimators for orientation and anisotropy in digitized images. *Proc. First Conf. Advanced School for Computing and Imaging*, pages 442–450, 1995.
- [Wal64] Miles Walker. *The Schwarz-Christoffel transformation and its applications : a simple exposition*. Dover Publications Inc., 1964.
- [WAW13] Yanping Wu, Tong Ahao, and Shuguang Wang. A svm-based method for the estimation of fingerprint and palmprint orientation. *Intelligent Control and Information Processing (ICICIP)*, pages 343–348, 2013.
- [WBK12] Aaron Waters, François Blanchette, and Arnold D Kim. Modeling huddling penguins. *PLoS One*, 7(11) :e50277, 2012.
- [WH11] Yi Alice Wang and Jiankun Hu. Global ridge orientation modeling for partial fingerprint identification. *IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE*, 33(1) :72–86, 2011.
- [WVVG01] Joost Van de Weijer, Lucas Van Vliet, Piet W. Verbeek, and Michael Van Ginke. Curvature estimation in oriented patterns using curvilinear models applied to gradient vector fields. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(9) :1035–1043, 2001.

BIBLIOGRAPHIE

- [YFJ11] Soweon Yoon, Jianjiang Feng, and Anil K. Jain. Latent fingerprint enhancement via robust orientation field estimation. *Biometrics (ICJB), 2011 International Joint Conference on. IEEE*, pages 1–8, 2011.
- [ZDDL13] Guillaume Zinck, Marc Donias, Jacques Daniel, and Olivier Laviaille. Local dip transformation for fast seismic horizon reconstruction. In *Image Processing (ICIP), 2013 20th IEEE International Conference on*, pages 2368–2372. IEEE, 2013.
- [ZDGL11] Guillaume Zinck, Marc Donias, Sébastien Guillon, and Olivier Laviaille. Discontinuous seismic horizon tracking based on a Poisson equation with incremental Dirichlet boundary conditions. In *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3385–3388. IEEE, 2011.
- [ZDL12] Guillaume Zinck, Marc Donias, and Olivier Laviaille. N-dimensional surface reconstruction from a noisy normal vector field. In *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 395–399. EURASIP, 2012.
- [Zin12] Guillaume Zinck. *Reconstruction d’hypersurfaces de champs de normales sous contraintes – Application à l’analyse stratigraphique des images sismiques*. PhD thesis, Univ. Bordeaux, 2012.
- [ZTZ09] O. C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2009.