



HAL
open science

Fusion d'un corps algébriquement clos avec un sous-groupe non-algébrique d'une variété Abélienne : corps octarines

Olivier Roche

► **To cite this version:**

Olivier Roche. Fusion d'un corps algébriquement clos avec un sous-groupe non-algébrique d'une variété Abélienne : corps octarines. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSE1097 . tel-01736272

HAL Id: tel-01736272

<https://theses.hal.science/tel-01736272>

Submitted on 16 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N°d'ordre NNT : xxx



THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

**Ecole Doctorale N° 512
InfoMath**

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 21 juin 2017, par :

Olivier Roche

Fusion d'un corps algébriquement clos avec un sous-groupe non-algébrique d'une variété Abélienne

Devant le jury composé de :

Chatzidakis, Zoé	DR CNRS	ENS Paris	Examinatrice
Hils, Martin	Professor	Universitat Munster, Allemagne	Rapporteur
Point, Françoise	DR FNRS	Université de Mons, Belgique	Examinatrice
Wagner, Frank	Professeur	Université Lyon 1	Directeur de thèse
Ziegler, Martin	Professeur	Universitat Freiburg, Allemagne	Co-directeur de thèse

Fusion d'un corps algébriquement clos avec
un sous-groupe non-algébrique d'une variété Abélienne
Corps octarines



Olivier Roche
Thèse de doctorat

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	4
1 Le langage de la dimension négative	9
1.1 Quasi-endomorphismes	9
1.2 L’anneau des quasi-endomorphismes d’une variété abélienne modulo la torsion	10
1.3 Algèbre linéaire dans A	14
2 Corps octarines	19
2.1 La classe \mathcal{C}	19
2.2 Prédimension, ormessiennité	19
2.3 La classe \mathcal{C}^0	21
2.4 Clôture ormessienne	22
2.5 Extensions minimales	24
3 Hic amalgamatur	28
3.1 Classes d’amalgamation	28
3.2 Structures riches	29
3.3 Riches avec théorie	31
4 Choix des racines : le Kummer Kummer	33
4.1 Système de racines octarines	33
4.2 Kummer pour l’amalgame libre	33
4.3 Kummer uniforme	35
5 Axiomatisation des corps octarines	37
5.1 La conjecture d’intersection avec les tores	37
5.2 La théorie de \mathcal{C}^0	39

5.3	Codage des extensions minimales préalgébriques	40
5.4	L'amalgame libre	45
5.5	Théorie des riches libres	45
6	Cryptographie : coder les extensions minimales	50
6.1	Formules cryptiques	50
6.2	Codes	52
6.3	Bons codes	54
7	Suites de Morley de bons codes	56
7.1	Suites dérivées	56
7.2	Suites de différence	56
7.3	Ein schrecklich kompliziertes Lemma	58
8	La classe d'amalgamation collapsée	61
8.1	La classe \mathcal{C}^μ	61
8.2	Le lemme d'amalgamation collapsée	65
8.3	Théorie des riches collapsés	68
9	Rangs et déviation des riches	70
9.1	De la prédimension à la dimension	70
9.2	Clôtures algébriques des riches	70
9.3	Rangs dans $T_{\mathcal{K}}$	71
9.4	Rangs dans les riches collapsés	77
	Annexe : le cas d'une courbe elliptique	78

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mes deux directeurs de thèse, Frank Wagner et Martin Ziegler, pour avoir su me guider et m'avoir permis de m'enrichir à leur contact. Je remercie également les équipes de logique de Freiburg et de Lyon : les échanges, souvent animés, y furent prolifiques.

Je remercie chaudement tous ceux qui ont contribué à lever le « Kummer Kummer¹ » : Anand Pillay, Daniel Bertrand, Amaury Thuillier, et Martin Hils.

Un immense merci à mon épouse Lena, d'avoir toléré ma thèse cette maîtresse encombrante. Merci pour son soutien et sa confiance.

Enfin, je dois remercier l'équipe médicale de l'Intensivstation de l'Uniklinik de Freiburg : ils m'ont sauvé la vie. Merci à tous mes proches, qui m'ont soutenu lors de ce passage terriblement difficile et m'ont donné l'énergie de continuer à exercer ma passion : les mathématiques. Merci à l'équipe de la BDH Klinik Elzach pour son excellent travail.

1. Le « soucis avec la théorie de Kummer », merci à Sabine Schneider pour ce jeu de mots.

Introduction

Dans les théories stables, on constate l'existence de nombreux groupes de rang de Morley fini inattendus, que ce soient des groupes correspondants à des configurations de groupe ou des groupes de liaison. Cherlin a entrepris de les classifier, et a formulé la conjecture que tout groupe de rang de Morley fini devrait être un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

En s'attaquant à cette conjecture, Cherlin a buté sur deux obstacles majeurs : les mauvais groupes et les mauvais corps. Les mauvais groupes sont des groupes de rang de Morley fini connexes non résolubles dont tous les sous groupes définissables connexes sont nilpotents, la question de leur existence reste ouverte. Les mauvais corps sont des corps de rang de Morley fini dans lequel il y a un sous groupe multiplicatif définissable infini propre.

L'existence de mauvais corps en caractéristique positive est peu probable (cf [15] et [6]). En revanche, en utilisant les méthodes de fusion de Hrushovski, Baudisch et al ont construit des mauvais corps de caractéristique nulle appelés corps verts dans [1]. Un détail technique qui avait échappé aux auteurs de [1] est désormais réglé, en utilisant des résultats de Hils et les méthodes du présent ouvrage. D'autres corps « collorés » ont été construits avant les corps verts : les corps noirs et les corps rouges. Les corps noirs furent les premiers corps de rang de Morley fini mais différent de 1 connus. Les corps rouges sont des corps de rang de Morley fini avec un sous groupe additif définissable infini propre (ils sont nécessairement de caractéristique positive!). C'est Poizat qui a proposé une adaptation des méthodes de Hrushovski pour construire les corps colorés.

Poizat remarque qu'il est tout à fait légitime de fusionner « librement », c'est à dire sans chercher à faire en sorte que les types de dimension 0 soient algébriques. Il distingue ainsi la fusion « libre » de la fusion « collapsée »².

Zilber s'est intéressé aux corps colorés non collapsés, dont il a trouvé des modèles « naturels » sous réserve de la véracité de la conjecture de Shanel (cf [20]). Pour $G := \{exp((1+i)t+q) \mid t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\}$, il montre que la théorie de $(\mathbb{C}, +, \times, G)$ est celle des corps verts non-collapsés. Pour $P := \{f((1+i)t+q) \mid t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\}$ où f est une fonction de Liouville, il montre que la théorie de $(\mathbb{C}, +, \times, P)$ est celle des corps noirs non-collapsés.

C'est probablement ce qui a motivé les travaux de Caycedo dans [3]. Il y construit des corps verts dont le sous-groupe multiplicatif possède une torsion raisonnable, mais aussi des corps de rang de Morley $\omega \cdot 2$ avec un sous-groupe propre d'une courbe elliptique, qu'il appelle corps « émeraude ». Zilber et lui fournissent ensuite dans [4] des modèles « naturels ».

Nous proposons une notion de classe d'amalgamation qui nous semble unifier au moins toutes les constructions de corps colorés réalisées jusqu'ici. Sous réserve que les amalgames d'une classe d'amalgamation soient axiomatisables, leur théorie est complète et ω -stable. La notion cruciale dans une classe d'amalgamation est la pré-stabilité : elle nous permet de construire des amalgames

2. Cette métonymie est trompeuse : la fusion collapsée n'est pas obtenue en collapsant la fusion libre, mais en construisant la limite de Fraïssé d'une classe restreinte qui satisfait un « lemme d'amalgamation collapsée »

dénombrables ; c'est ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que les amalgames soient ω -stables s'ils sont axiomatisables. En suivant ce paradigme, nous construisons de nouveaux corps colorés par fusion d'un corps algébriquement clos et d'une variété abélienne simple A munie d'un prédicat pour un sous- $End^0(A)$ -espace vectoriel au dessus du corps gauche $End^0(A)$ des quasi-endomorphismes de A . Soit $g = dim(A)$ le genre de A , nous obtenons ainsi :

- lorsque $g = 1$, un corps de RM 2 avec un sous groupe définissable infini propre d'une courbe elliptique. C'est le collapse des corps émeraudes de Caycedo mentionnés plus haut.
- lorsque $g > 1$, avant collapse, des corps de RM ω avec un sous groupe définissable infini propre de A .
- lorsque $g > 1$, après collapse, des corps fortement minimaux avec un sous groupe définissable infini propre de A .

Plan

Chapitre 1

Nous dotons une variété abélienne simple A modulo la torsion d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur un corps gauche, le corps $End^0(A)$ des quasi-endomorphismes de A modulo les quasi-endomorphismes triviaux.

Nous montrons que cette structure est suffisamment expressive pour nos besoins, en ceci qu'elle permet de définir les sous-groupes des puissances de A , ce dont nous auront besoin pour axiomatiser. Nous établissons également un lien entre la dimension linéaire pour cet espace vectoriel et le degré de transcendance.

Chapitre 2

Nous définissons les structures que nous allons amalgamer. Ces structures sont des corps L avec un prédicat O pour un sous-groupe divisible et sans torsion de $A(L)$ que nous dotons d'une structure d' $End^0(A)$ -espace vectoriel.

Nous dotons ces structures d'une *prédimension*. Comme son nom l'indique, la prédimension est le germe de la dimension des amalgames que nous allons construire.

Afin que la prédimension remplisse sa tâche, il faut s'assurer que nous travaillons dans des structures où rien ne se présente qui aurait une prédimension négative. C'est le rôle des *extensions ormessiennes* (strong extensions en anglais). Une extension est ormessienne si elle ne fait pas apparaître de prédimension négative sur sa base.

Les *corps octarines* sont les structures qui sont des extensions ormessiennes d'une structure initiale (ici un corps algébriquement clos dénombrable K sur lequel A est définie, avec $O(K) = \{0_A\}$). Nous allons donc restreindre notre attention aux *corps octarines* algébriquement clos³, et aux

3. Nous restreignons notre attention aux corps algébriquement clos afin de ne pas avoir à s'embarasser d'extensions ormessiennes que nous jugeons triviales : les extensions algébriques sans ajout de points colorés.

plongements ormessiens entre de telles structures.

Afin d'analyser les extensions ormessiennes, nous montrons l'existence d'une clôture ormessienne et nous établissons que toute extension ormessienne finiment engendrée se décompose en une tour finie d'extensions ormessiennes minimales. Nous classifions ces extensions minimales, dont l'étude va être prépondérante.

Chapitre 3

Nous tentons ici de proposer un contexte général pour l'amalgamation. Nous définissons de manière abstraite une *classe d'amalgamation* comme une catégorie dont les objets sont des structures, et les flèches les plongements ormessiens entre ces structures.

Faire une amalgamation, c'est construire des structures *riches*. Une structure est riche si l'on peut plonger ormessiennement dans cette structure toute extension ormessienne d'une petite sous-structure ormessienne.

Une structure riche pour une classe d'amalgamation tient lieu de modèle d'une modèle compagne : lorsque les riches sont axiomatisables, leur théorie satisfait une forme affaiblie de modèle complétude (remarque 3.3.3) : lorsqu'un modèle de cette théorie est une extension ormessienne d'un autre modèle de cette théorie, l'extension est élémentaire.

Comme nous voulons construire des riches ω -stables, il semble raisonnable d'introduire une condition nécessaire à leur stabilité, que nous nommons *pré-stabilité*. Elle garantit en effet que chaque structure considérée a un nombre raisonnable d'extensions ormessiennes finiment engendrées. Ce n'est en outre qu'à cette condition que nous pouvons espérer construire des riches dénombrables.

Sous réserve que les riches soient axiomatisables, nous décrivons leurs types en terme d'extensions ormessiennes, et nous montrons que les riches sont ω -stables.

La définition que nous proposons d'une classe d'amalgamation semble convenir dès que l'on considère, comme c'est le cas pour nos corps octarines, une classe de structures avec des plongements ormessiens définis par une prédimension. Tous les corps colorés construits jusqu'ici peuvent être vus comme des riches pour une classe d'amalgamation au sens où nous la décrivons.

Chapitre 4

Nous allons dès le chapitre 5 décrire des formules du langage des corps telles qu'un uple octarine engendrera une extension minimale si et seulement si il est corpiquement générique dans une de ces formules.

Donné un corps octarine $(L, O(L))$ et une réalisation générique \bar{a} d'une telle formule il faut pour chaque entier n préciser quel élément de $n^{-1} \cdot \bar{a}$ sera octarine. Il y a ainsi \beth_1 possibilités de choisir pour chaque n laquelle des racines de \bar{a} est colorée.

Il nous a fallu, pour garantir la préstabilité de la classe des corps octarines, montrer que -à isomor-

phismes près- il n'y a qu'un nombre fini de possibilités de colorer les racines.

Pour démontrer le lemme d'amalgamation collapsée, il nous a fallu une version uniforme de ce dernier résultat. Elle garantit que l'on peut modifier les formules évoquées plus haut afin qu'il n'y ait à isomorphisme près qu'une seule possibilité de colorer les racines d'une de leur réalisation générique.

Chapitre 5

Nous montrons comment exprimer au premier ordre qu'un corps octarinaire est une extension ormesienne de la base K .

Nous achevons la construction des riches libres, ce qui nécessite plusieurs étapes. Nous donnons le lemme d'amalgamation libre. Nous commençons le codage des extensions minimales préalgébriques en définissant les *formules raffinées*, qui sont des formules du langage des corps dont les réalisations génériques octarinales engendrent des extensions minimales, et dont les réalisations octarinales ne peuvent être que génériques ou algébriques sur les paramètres.

Ce codage nous permet d'axiomatiser les riches pour la classe d'amalgamation « libre ».

Chapitre 6

Nous construisons un ensemble de formules du langage des corps appelées *bons codes*. Les bons codes codent effectivement les extensions minimales préalgébriques en ce sens qu'il y a une correspondance biunivoque entre les bons codes et les extensions minimales préalgébriques à isomorphisme près.

Chapitre 7

Pour collapser, il nous faut une stratégie pour limiter le nombre de réalisations d'une instance donnée d'un bon code. Les instances de bons codes étant des formules raffinées, on constate que les suites de réalisations de ces instances dans les corps octarinales tendent à être de Morley ou à avoir des termes algébriques sur les autres.

Cette observation nous permet d'établir un lemme combinatoire vital pour la suite. Nous exhibons des formules du langage des corps, dont les réalisations seront appelées *suites de différence*, qui isolent suffisamment de propriétés des suites de Morley de bons codes.

Ce lemme combinatoire statue que dans une extension de corps octarinales, une suite de différence suffisamment longue doit ou bien comporter une sous-suite de Morley au dessus de la base d'une certaine longueur prescrite, ou alors on peut en dériver une suite de différence longue vivant dans la base. Ceci est particulièrement pertinent lorsque, comme ce sera le cas par la suite, on exclue que la base puisse avoir des suites de différence longues.

Chapitre 8

Nous définissons la classe d'amalgamation collapsée, et démontrons que c'est bien une classe d'amalgamation au sens du chapitre 3 en prouvant le lemme d'amalgamation pour cette classe. Il s'agit d'une sous classe de la classe d'amalgamation libre, et les notions d'extension ormessienne et d'extension minimale y sont les mêmes.

Nous axiomatisons les riches pour cette classe, et obtenons ainsi un corps octarine ω -stable dans lequel les suites de différences trop longues n'ont pas droit de cité.

Chapitre 9

Nous étudions les rangs des riches que nous avons construits et montrons que le rang de Lascar et le rang de Morley coïncident. Nous montrons que le riche libre est de rang ω , et que le riche collapsé est fortement minimal.

Annexe

Nous expliquons brièvement comment adapter nos méthodes pour collapser les corps émeraudes de J.D. Caycedo.

Sources

Le chapitre 1 reprend beaucoup de matériel de [11] et [18].

Le concept de corps colorés est dû à B. Poizat qui a amalgamé puis collapsé les corps noirs dans [12], et amalgamé les corps rouges et verts dans [14]. C'est plus particulièrement les méthodes de [14] que nous suivons dans les chapitres 2 et 5.

Le chapitre 4 a nécessité le concours de D. Bertrand ([2]) et de M. Hils ([9]).

Les chapitres 6,7 et 8 reprennent les méthodes de A. Martin-Pizaro, A. Baudisch, M. Hils, F. O. Wagner et M. Ziegler dans [10] et [1], où sont respectivement collapsés les corps rouges en caractéristique positive et les corps verts.

1 Le langage de la dimension négative

La structure au dessus de laquelle nous voulons fusioner est un groupe abélien, et sa géométrie sera de nature modulaire. Comme notre variété abélienne A est commutative et divisible, il semblerait naturel de la voir comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel (modulo la torsion). Cependant, cette option ne permettrait pas de voir tous les sous-groupes algébriques de A . Par exemple, lorsqu'il s'agira d'exprimer au premier ordre qu'un uple de points est suffisamment indépendant linéairement, nous aurons besoin du fait 5.1.1 et il apparaîtra qu'il est essentiel que les sous-variétés abéliennes de A^n , $n \in \mathbb{N}$, s'expriment comme des sous-espaces vectoriels de A^n modulo la torsion.

1.1 Quasi-endomorphismes

Ce qui suit est inspiré de [18]. Nous définissons la notion de quasi-homomorphisme de manière plus spécifique afin de l'adapter à nos besoins. Il s'agit d'une multifonction qui se comporte comme un morphisme.

Quasi-homomorphismes Soient $(G, +)$ et $(H, +)$ deux groupes commutatifs. Un quasi-homomorphisme $\gamma : G \rightarrow H$ est un sous groupe de $G \times H$ satisfaisant :

- $\gamma(0) := \{h \in H \mid (0, h) \in \gamma\}$ est fini.
- $\Pi_1(\gamma) = G$.⁴

Pour $g \in G$, on définit $\gamma(g) := \{h \in H \mid (g, h) \in \gamma\}$, l'image de g par γ . Si $H = G$, on dit que γ est un quasi-endomorphisme de G .

Remarque 1.1.1. Soit $\gamma : G \rightarrow H$ un quasi-homomorphisme, alors $\forall x \in G$, $\gamma(x)$ est de la forme $y + \gamma(0)$ pour $y \in \gamma(x)$. En particulier, les $\gamma(x)$ sont tous de même cardinal.

Un quasi-homomorphisme γ se comporte comme un morphisme en ce sens que :

- $0 \in \gamma(0)$
- $\gamma(x + y) = \gamma(x) + \gamma(y)$
- $\gamma(-x) = -\gamma(x)$

Réciproquement, une multifonction $\gamma : G \rightarrow H$ satisfaisant :

- $\gamma(x + y) = \gamma(x) + \gamma(y)$
- $\gamma(-x) = -\gamma(x)$
- $\gamma(0)$ est un sous-groupe fini de H

est un quasi-homomorphisme.

L'ensemble des quasi-endomorphismes de G On note $\mathcal{Q}End(G)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes de G . Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}End(G)$, On définit naturellement :

- $\alpha \circ \beta := \{(g, h) \in G^2 \mid \exists r \in \beta(g), h \in \alpha(r)\}$
- $\alpha + \beta := \{(g, h + h') \mid g \in G, h \in \alpha(g), h' \in \beta(g)\}$

4. La définition de [18] est " $\Pi_1(\gamma)$ est d'indice fini dans G ". Pour nos besoins, cette définition n'apporterait rien : nous ne considérerons vite que des quasi-homomorphismes définissables partant d'un groupe connexe.

Notons 0 les sous-ensembles $\{0\} \subseteq A$ et $A \times 0 \in \mathcal{Q}End(A)$. On constate aisément que $\alpha \circ \beta$ et $\alpha + \beta$ sont des quasi-endomorphismes de G , et que \circ et $+$ sont associatives. Nous montrons la distributivité à gauche de \circ sur $+$ ci-dessous. En revanche, $\mathcal{Q}End(G)$ n'est pas un anneau car α n'a pas d'opposé si $\alpha(0) \neq 0$. Ce n'est pas non plus un semi-anneau car 0 n'est pas absorbant à droite : si $\alpha(0) \neq 0$, $\alpha \circ 0 = A \times \alpha(0) \neq 0$. Nous notons tout de même $-\alpha := (-Id) \circ \alpha$ et $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$.

Démonstration de la distributivité à gauche: Soient α, β_1, β_2 des quasi-endomorphismes de G . Il s'agit de montrer l'égalité entre les deux ensembles suivants :

$$\alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2 = \{(g, h_1 + h_2) \mid g \in G, \exists r_i \in \beta_i(g), h_i \in \alpha(r_i), i = 1, 2\}$$

$$\alpha \circ (\beta_1 + \beta_2) = \{(g, h) \mid g \in G, \exists r \in (\beta_1 + \beta_2)(g), \alpha(r) = h\}$$

\subseteq : Soit $(g, h_1 + h_2) \in \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$, il y a r_1, r_2 avec $r_i \in \beta_i(g)$ tels que $h_i = \alpha(r_i)$. Posons $r = r_1 + r_2$. On a par définition $r \in (\beta_1 + \beta_2)(g)$. Comme $h_1 + h_2 \in \alpha(r_1) + \alpha(r_2) = \alpha(r_1 + r_2) = \alpha(r)$, il apparait que $(g, h_1 + h_2) \in \alpha \circ (\beta_1 + \beta_2)$.

\supseteq : Soit $(g, h) \in \alpha \circ (\beta_1 + \beta_2)$, il y a $r \in (\beta_1 + \beta_2)(g)$ tel que $\alpha(r) = h$. Par définition de $\beta_1 + \beta_2$, on peut décomposer $r = r_1 + r_2$ avec $r_i \in \beta_i(g)$. Comme $\alpha(r) = \alpha(r_1) + \alpha(r_2)$, il y a $h_1 \in \alpha(r_1)$ et $h_2 \in \alpha(r_2)$ tels que $h = h_1 + h_2$. Nous avons donc $(g, h) = (g, h_1 + h_2) \in \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$. \square

1.2 L'anneau des quasi-endomorphismes d'une variété abélienne modulo la torsion

Dans tout ce chapitre, A dénotera une variété abélienne définie sur le corps algébriquement clos K . Pour un corps $L \supseteq K$, $A(L)$ dénote l'ensemble des points L -rationnels de A . Par abus de notation, on note A l'ensemble $A(\mathcal{C})$, où \mathcal{C} est une extension élémentaire très saturée et très homogène de K .

Par un (quasi-)endomorphisme de A , nous entendons un (quasi-)endomorphisme définissable dans le langage des corps. Nous notons $End(A)$ l'anneau des endomorphismes définissables de A , et $\mathcal{Q}End(A)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes (définissables) de A . Il est naturel d'introduire $End^0(A) := End(A) \otimes \mathbb{Q}$, qui est l'objet que nous convoitons.

Quasi-endomorphismes triviaux Un quasi-endomorphisme α de A est dit trivial s'il est de la forme $A \times F$ pour $F \leq A$ fini. Nous notons $Triv \subseteq \mathcal{Q}End(A)$ l'ensemble des quasi-endomorphismes triviaux. Bien que $\mathcal{Q}End(A)$ ne soit pas un anneau, $Triv$ peut être considéré comme un idéal bilatère en ce sens que :

- $\forall r, s \in Triv, r + s \in Triv$ et $-s \in Triv$.
- $\forall r \in Triv, \forall \alpha \in \mathcal{Q}End(A), r \circ \alpha \in Triv$ et $\alpha \circ r \in Triv$.

Cependant, comme dans [18], nous définissons la relation d'équivalence :

$$\alpha \equiv \beta :\iff \exists s \in Triv, \alpha + s = \beta + s$$

Fait 1.2.1 ([11]). *Soit $n \geq 2$, la n -torsion de A est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2dim(A)}$. En particulier, la torsion est petite : $Tor(A) \subseteq A(K)$.*

Lemme 1.2.2. *Soit $\alpha \in \mathcal{Q}End(A)$ tel que $\forall x \in A, \alpha(x) \subseteq Tor(A)$. Alors, $\alpha \in Triv$.*

Démonstration: Il y a $F \leqslant Tor(A)$ fini tel que $\forall x \in A, \alpha(x) \subseteq F$: sinon, par compacité on trouve x tel que $\alpha(x) \not\subseteq Tor(A)$.

Posons $G := \alpha(0)$, on a un morphisme bien défini :

$$\begin{aligned} \tau : A &\longrightarrow F/G \\ x &\longrightarrow \bar{y} \text{ pour } y \in \alpha(x) \end{aligned}$$

F/G est fini, et donc $ker(\tau) = \{x \in A \mid \alpha(x) = G\}$ est un sous groupe définissable d'indice fini de A . Comme A est connexe, $ker(\tau) = A$, d'où $\alpha = A \times G \in Triv$. \square

Remarque 1.2.3. \equiv est "l'égalité modulo $Triv$ " :

$$\alpha \equiv \beta \iff \alpha - \beta \in Triv$$

En particulier, \equiv est compatible avec $+$ et \circ .

Démonstration: Soit $F \leqslant A$ fini. Supposons que $\alpha - \beta = A \times F$, alors pour $x \in A$, on a $\alpha(x) \subseteq \beta(x) + F$ et $\beta(x) \subseteq \alpha(x) + F$. Par conséquent, $\alpha(x) + F = \beta(x) + F$ pour tout $x \in A$, d'où $\alpha + A \times F = \beta + A \times F$.

Réciproquement, supposons $\alpha + A \times F = \beta + A \times F$, alors, quitte à prendre $F := F + \alpha(0) + \beta(0)$, on constate aisément que $(\alpha - \beta)(x) \subseteq F$ pour tout $x \in A$. Par conséquent, $\alpha - \beta \in Triv$ d'après le lemme 1.2.2. \square

Lemme 1.2.4 (Action de $\mathcal{Q}End(A)$ modulo la torsion). *Un quasi-endomorphisme α induit un morphisme bien défini*

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : A/Tor(A) &\longrightarrow A/Tor(A) \\ \bar{x} &\longrightarrow \bar{y} \text{ pour } y \in \alpha(x) \end{aligned}$$

De plus, on a $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ssi $\alpha \equiv \beta$.

Démonstration:

$\bar{\alpha}$ est bien défini : Soient $x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 - x_2 \in Tor(A)$, et $y_i \in \alpha(x_i)$, $i = 1, 2$. Soit $m \geqslant 0$ tel que $m \cdot (x_1 - x_2) = 0$, alors $m \cdot (y_1 - y_2) \in \alpha(m \cdot (x_1 - x_2)) = \alpha(0)$. En particulier, $|\alpha(0)| \cdot m \cdot (y_1 - y_2) = 0$, d'où $y_1 - y_2 \in Tor(A)$.

$\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ssi $\alpha \equiv \beta$: Supposons que $\alpha \equiv \beta$, disons $\alpha + s = \beta + s$, avec $s \in Triv$. Alors clairement $\overline{\alpha + s} = \bar{\alpha}$ et $\overline{\beta + s} = \bar{\beta}$, d'où $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Réciproquement, si $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, alors $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0$. En particulier, $(\alpha - \beta)(x) \subseteq Tor(A)$ pour tout x , d'où $\alpha - \beta \in Triv$ d'après le lemme 1.2.2. \square

Le défaut de centralité de \mathbb{Q} dans $\mathcal{Q}End(A)$ Écrivons

$$\frac{p}{q} := \{(x, y) \in A^2 \mid q \cdot y = p \cdot x\} \in \mathcal{Q}End(A)$$

Si nous voulons identifier l'ensemble des quasi-endomorphismes de cette forme à \mathbb{Q} , nous nous heurtons au fait que pour $n > 1$, $\frac{1}{n} \cdot n \neq n \cdot \frac{1}{n} = Id$, et que de manière générale les quasi-endomorphismes de cette forme ont tendance à ne pas être centraux.

Multiplicité d'un quasi-endomorphisme Soit $\alpha \in \mathcal{Q}End(A)$, Nous définissons la multiplicité $mult(\alpha)$ de α comme étant l'exposant du groupe $\alpha(0)$. Ainsi, $mult(\alpha)$ est le plus petit entier tel que $mult(\alpha) \circ \alpha$ soit un endomorphisme de A . Il nous permet de définir la fonction de réduction modulo la torsion :

$$\begin{aligned} Red : \mathcal{Q}End(A) &\longrightarrow End^0(A) \\ \alpha &\longrightarrow mult(\alpha) \circ \alpha \otimes \frac{1}{mult(\alpha)} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant démontrer ce à quoi on s'attendait :

Lemme 1.2.5. *Red est un \mathcal{L}_{anneau} -morphisme surjectif, qui induit un isomorphisme entre $\mathcal{Q}End(A)/\equiv$ et $End^0(A)$.*

Démonstration:

Red est un morphisme pour + : Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}End(A)$. On pose $m := mult(\alpha + \beta)$. Comme $(\alpha + \beta)(0) = \alpha(0) + \beta(0)$, il vient $mult(\alpha)|m$ et $mult(\beta)|m$. On a donc :

$$\begin{aligned} Red(\alpha) + Red(\beta) &= mult(\alpha) \circ \alpha \otimes \frac{1}{mult(\alpha)} + mult(\beta) \circ \beta \otimes \frac{1}{mult(\beta)} \\ &= m \circ \alpha \otimes \frac{1}{m} + m \circ \beta \otimes \frac{1}{m} \\ &= m \circ (\alpha + \beta) \otimes \frac{1}{m} \\ &= Red(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Red est un morphisme pour \cdot : Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}End(A)$. On pose $m := mult(\alpha) \cdot mult(\beta)$. Clairement, $mult(\alpha \circ \beta)|m$.

$$\begin{aligned} Red(\alpha \circ \beta) &= mult(\alpha \circ \beta) \circ \alpha \circ \beta \otimes \frac{1}{mult(\alpha \circ \beta)} \\ &= m \circ \alpha \circ \beta \otimes \frac{1}{m} \\ &= mult(\beta) \circ (mult(\alpha) \circ \alpha) \circ \beta \otimes \frac{1}{m} \\ &= (mult(\alpha) \circ \alpha) \circ mult(\beta) \circ \beta \otimes \frac{1}{m} && (1) \\ &= (mult(\alpha) \circ \alpha) \otimes \frac{1}{mult(\alpha)} \cdot mult(\beta) \circ \beta \otimes \frac{1}{mult(\beta)} && (2) \\ &= Red(\alpha) \cdot Red(\beta) \end{aligned}$$

Pour (1), on utilise que \mathbb{Z} est central dans $End(A)$ et que $mult(\alpha) \circ \alpha \in End(A)$. (2) est juste la définition de la multiplication dans un produit tensoriel.

Red est surjectif : Soit $\alpha \in End(A)$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $pgcd(p, q) = 1$. Alors $mult(\frac{p}{q} \circ \alpha) = q$. On a donc

$$Red(\frac{p}{q} \circ \alpha) = p \circ \alpha \otimes \frac{1}{q} = \alpha \otimes \frac{p}{q}$$

$\ker(\text{Red}) = \text{Triv}$: Soit $\alpha \in \mathcal{Q}\text{End}(A)$ tel que $\text{Red}(\alpha) = 0$, alors on doit avoir $\text{mult}(\alpha) \circ \alpha = 0$ puisque $\frac{1}{\text{mult}(\alpha)} \neq 0$.

Par conséquent, $\alpha(x) \subseteq \text{Tor}_{\text{mult}(\alpha)}(A)$ pour tout $x \in A$. D'après le lemme 1.2.2, on a donc $\alpha \in \text{Triv}$: nous avons montré que $\ker(\text{Red}) \subseteq \text{Triv}$.

Soit $\alpha \in \text{Triv}$ disons $\alpha = A \times F$ pour $F \leq A$ fini. Alors $\text{mult}(\alpha)$ est l'exposant de F , si bien que $\text{mult}(\alpha) \circ \alpha = 0$, d'où $\text{Red}(\alpha) = 0$ c'est à dire $\alpha \in \ker(\text{Red})$.

Red induit un isomorphisme entre $\mathcal{Q}\text{End}(A)/\equiv$ et $\text{End}^0(A)$:

Comme $\ker(\text{Red}) = \text{Triv}$, l'application induite $\alpha^{\equiv} \rightarrow \text{Red}(\alpha)$ est bien définie puisque \equiv est l'égalité modulo Triv .

Par surjectivité de Red , on a une application $\text{End}^0(A) \rightarrow \mathcal{Q}\text{End}(A)/\equiv$ donnée par $\text{Red}(\alpha) \rightarrow \alpha^{\equiv}$, qui est bien définie puisque $\text{Red}(\alpha) = \text{Red}(\beta) \Rightarrow \alpha \equiv \beta$. Cette application est clairement l'inverse de celle induite par Red . \square

Définition Nous considérons $\alpha \otimes \frac{p}{q} \in \text{End}^0(A)$ comme l'endomorphisme $\overline{\frac{p}{q} \circ \alpha}$ de $A/\text{Tor}(A)$. Ainsi, $\text{Red}(\alpha)$ opère comme $\bar{\alpha}$.

En ce sens, nous appelons $\text{End}^0(A)$ l'anneau des quasi-endomorphismes de A modulo la torsion.

Le cas où A est simple A est dite simple si elle ne contient pas de sous-variété abélienne propre, c'est à dire si tout sous-groupe algébrique propre de A est fini. Dans tout le reste de cet ouvrage, A sera une variété abélienne définie sur le corps algébriquement clos dénombrable de caractéristique nulle \bar{K} .

Fait 1.2.6 ([11]). *Tout endomorphisme non trivial α de A est une isogénie : il y a $\beta \in \text{End}(A)$ tel que $\beta \circ \alpha = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.*

En particulier, $\text{End}^0(A)$ est un corps gauche.

1.3 Algèbre linéaire dans A

Comme $End^0(A)$ est un corps gauche, l'action de $End^0(A)$ sur $A/Tor(A)$ que nous avons décrite en fait un $End^0(A)$ -espace vectoriel à gauche. Pour que cela ait un sens, il nous faut vérifier que $End^0(A)$ ne dépend pas du corps ambiant :

Remarque 1.3.1. *Deux quasi-endomorphismes qui coïncident sur une partie infinie de A sont égaux.*

En particulier, tout quasi-endomorphisme est défini sur K .

Démonstration: Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}End(A)$, alors $\{x \in A \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$ est un sous groupe algébrique de A . S'il est infini, il doit être égal à A par simplicité de A .

Soit $\alpha \in \mathcal{Q}End(A)$, et σ un K -automorphisme global. Alors, α et $\sigma(\alpha)$ coïncident sur $A(K)$. Or, $A(K) \supseteq Tor(A)$ et $Tor(A)$ est infini. Par conséquent, $\alpha = \sigma(\alpha)$ \square

La dimension linéaire Pour $B \subseteq A$, nous définissons la dimension linéaire $ldim(B)$ de B comme la dimension du sous $End^0(A)$ -espace vectoriel de $A/Tor(A)$ engendré par $B/Tor(A)$.

Si $\bar{a} = a_0, \dots, a_n$, on écrit $ldim(B\bar{a})$ pour $ldim(B \cup \{a_0; \dots; a_n\})$.

Dépendances quasilineaires Nous appelons (abusivement) formes quasilineaires les quasi-homomorphismes définissables dans le langage des corps du type

$$\begin{aligned} E : A^n &\longrightarrow A \\ \bar{x} &\longrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i) \end{aligned}$$

où $\alpha_i \in \mathcal{Q}End(A)$, $1 \leq i \leq n$. Nous dirons que des formes quasilineaires $(E), (E')$ sont indépendantes si les vecteurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sont $\mathcal{Q}End(A)$ -linéairement indépendants à gauche. Une dépendance quasilineaire est une formule du type $E(\bar{x}) \ni 0_A$. Des dépendances quasilineaires sont indépendantes si les formes quasilineaires qui les définissent le sont.

Clairement, les dépendances quasilineaires définissent des sous-groupes de A^n . Nous allons montrer que les sous groupes de A^n sont exactement les intersections de dépendances quasilineaires. De plus, nous allons établir les liens entre la dimension linéaire et la dimension de ces groupes.

Quasi-endomorphismes de A^n

Fait 1.3.2 ([11]). *Soient A une variété abélienne, et $G \neq 0$ une sous-variété abélienne de A^n . Il existe une sous-variété abélienne G' de A^n définie sur les paramètres de G et de A telle que l'application suivante soit une isogénie :*

$$\begin{aligned} G \times G' &\rightarrow A^n \\ (b, b') &\rightarrow b + b' \end{aligned}$$

Donnés G, G' comme ci-dessus, nous définissons :

$$\alpha := \{(a, b) \in A^n \times G \mid a - b \in G'\}$$

D'après le fait ci dessus, $\alpha \in \mathcal{Q}End(A^n)$ et α est surjectif. Nous avons montré :

Lemme 1.3.3. *Soit A une variété abélienne, toute sous-variété abélienne de A^n est l'image de A^n par un quasi-endomorphisme de A^n .*

[11] nous dit que $End^0(A^n) \cong \mathcal{M}_n(End^0(A))$. Nous incluons ici une preuve, pour spécifier l'isomorphisme.

Fait 1.3.4 ([11]). *$End^0(A^n) \cong \mathcal{M}_n(End^0(A))$ (les matrices $n \times n$ à coefficients dans $End^0(A)$).*

Tout quasi-homomorphisme $A^n \rightarrow A$ est une forme quasilinéaire.

Démonstration: Une matrice $M = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'éléments de $End^0(A)$ donne lieu à un quasi-endomorphisme α_M de A^n/Tor défini par

$$\alpha_M((a_1, \dots, a_n)) := \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}(a_j) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, π_i est la projection sur la $i^{\text{ème}}$ composante, et on définit :

$$\begin{aligned} P_i : A &\rightarrow A^n \\ a &\rightarrow (0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0) \text{ (} i^{\text{ème}} \text{ position)} \end{aligned}$$

À $\alpha \in End^0(A^n)$, on associe la matrice $M_\alpha := (\overline{\pi_i} \circ \alpha \circ \overline{P_j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(End^0(A))$.

Clairement, $M \rightarrow \alpha_M$ et $\alpha \rightarrow M_\alpha$ sont des morphismes pour $+$, vérifions que ce sont des morphismes d'anneau :

Soient $\alpha, \beta \in End^0(A^n)$, alors $M_\alpha \cdot M_\beta = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $c_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n} (\overline{\pi_i} \circ \alpha \circ \overline{P_k}) \circ (\overline{\pi_k} \circ \beta \circ \overline{P_j})$. Pour i, j fixés et pour $x \in A^n/Tor(A)$, notons $\beta \circ \overline{P_j}(x) = (y_1, \dots, y_n)$, alors $\overline{P_k} \circ \overline{\pi_k} \circ \beta \circ \overline{P_j}(x) = (0, \dots, 0, y_k, 0, \dots, 0)$. Par conséquent,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \overline{P_k} \circ \overline{\pi_k} \circ \beta \circ \overline{P_j} = \beta \circ \overline{P_j}$$

En multipliant à gauche par $\bar{\pi}_i \circ \alpha$, on voit que $c_{i,j} = \bar{\pi}_i \circ \alpha \circ \beta \circ \bar{P}_j$, c'est à dire le terme de coordonnées i, j de $M_{\alpha \circ \beta}$. On a donc bien $M_{\alpha \circ \beta} = M_\alpha \cdot M_\beta$.

Soient $M = (\alpha_{i,j})$ et $N = (\beta_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\text{End}^0(A))$, alors $M \cdot N = (\gamma_{i,j})$ où $\gamma_{i,j} = \sum_k \alpha_{i,k} \circ \beta_{k,j}$. Soit $a_1, \dots, a_n \in A/\text{Tor}$. Écrivons $\alpha_N(a_1, \dots, a_n) = b_1, \dots, b_n$ et $(\alpha_M \circ \alpha_N)(a_1, \dots, a_n) = \alpha_M(b_1, \dots, b_n) = c_1, \dots, c_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$c_i = \sum_k \alpha_{i,k}(b_k) = \sum_k \alpha_{i,k} \left(\sum_j \beta_{k,j}(a_j) \right) = \sum_k \sum_j \alpha_{i,k}(\beta_{k,j}(a_j)) = \sum_j \gamma_{i,j}(a_j)$$

Par conséquent, on a bien $\alpha_{M \cdot N} = \alpha_M \circ \alpha_N$.

Il est clair que $M \rightarrow \alpha_M$ et $\alpha \rightarrow M_\alpha$ sont mutuellement inverses.

Pour la deuxième assertion, si $\alpha : A^n \rightarrow A$ est un quasi-homomorphisme, on pose $\alpha_i := \alpha \circ P_i \in \mathcal{Q}\text{End}(A)$. Clairement, $\alpha(\bar{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(x_i)$.

□

Lemme 1.3.5. *Soit $G = \alpha(A^n) \leq A^n$ un sous-groupe algébrique de A^n . Alors, $\dim(G) = g \cdot \text{rg}(M_\alpha)$.*

En particulier, pour tout sous-groupe algébrique $G \leq A^n$, $g \mid \dim(G)$, puisque G^0 est l'image d'un quasi-endomorphisme de A^n .

Démonstration: Posons $d := \text{rg}(M_\alpha)$. d est égal à la dimension linéaire du système des vecteurs ligne de M_α (cf [17]).

Si $d = 0$, alors α est trivial et G est fini ($\dim(G) = 0$). Nous pouvons donc supposer $d > 0$.

Soient v_1, \dots, v_n les vecteurs lignes de M_α , et v_{i_1}, \dots, v_{i_d} une base extraite de ce système de vecteurs.

Nous montrons que M_α contient une sous-matrice $d \times d$ régulière :

Considérons la sous-matrice $d \times n$ M formée des vecteurs lignes v_{i_1}, \dots, v_{i_d} . Cette matrice est de rang d . Comme $\text{rg}(M)$ est aussi la dimension linéaire du système des vecteurs (à droite) colonne de M (ibid.), la sous-matrice $d \times d$ de M formée des vecteurs colonne formant une base extraite des vecteurs colonne de M est de rang d , et est donc régulière. Appelons cette matrice R . Disons que $M_\alpha = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Il y a $j_1 < \dots < j_d$ tels que $R = (\alpha_{i_k, j_m})_{1 \leq k,m \leq d}$.

Soient \bar{x} générique dans A^n , et $\bar{y} := \alpha(\bar{x})$. Comme \bar{y} est générique dans G , il nous suffit de montrer que $RM(\bar{y}) = d \cdot \dim(A)$.

Constatons que $RM(\bar{y}) \geq d \cdot \dim(A)$:

On a

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i_k} &= \bar{\alpha}(\bar{x}) = \sum_j \alpha_{i_k, j}(\bar{x}_j) = \sum_{1 \leq k \leq d} \alpha_{i_k, j_m}(\bar{x}_{j_m}) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \notin \{j_1, \dots, j_d\}}} \alpha_{i_k, j}(\bar{x}_j) = \\ &= \pi_{i_k}(\alpha_R(\bar{x}_{j_1}, \dots, \bar{x}_{j_d})) + \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \notin \{j_1, \dots, j_d\}}} \alpha_{i_k, j}(\bar{x}_j)}_{r_k} \end{aligned}$$

Soient $\bar{t}, \bar{u} \in A^d$ tels que $y_{i_k} = t_k + u_k$ et $\bar{t}_k = \pi_{i_k}(\alpha_R(\bar{x}_{j_1}, \dots, \bar{x}_{j_d}))$ et $\bar{u}_k = r_k$. Comme α_R est un quasi-isomorphisme de A modulo la torsion, \bar{t} est interalgébrique au dessus de K avec x_{j_1}, \dots, x_{j_d} et donc $RM(\bar{t}/K) = d \cdot \dim(A)$. Comme \bar{r} ne dépend que de K et des x_j , $j \notin \{j_1, \dots, j_d\}$, on a $\bar{t} \perp_K \bar{r}$. Par conséquent, $RM(y_{i_1}, \dots, y_{i_d}) = RM(\bar{t}) = d \cdot \dim(A)$. On a donc bien $RM(\bar{y}) \geq d \cdot \dim(A)$.

Pour prouver la proposition, il ne nous reste donc qu'à démontrer que pour $i \neq i_1, \dots, i_d$, $y_i \in \text{acl}(y_{i_1}, \dots, y_{i_d})$:
Soit $i \neq i_1, \dots, i_d$. On a $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \text{End}^0(A)$ tels que

$$v_i = \sum_{1 \leq k \leq d} \lambda_k \cdot v_{i_k}$$

Par conséquent,

$$y_i = \sum_{1 \leq k \leq d} \lambda_k(y_{i_k}) \in \text{acl}(y_{i_1}, \dots, y_{i_d})$$

Ce qui prouve la proposition, puisque $RM(\bar{y}) = RM(y_{i_1}, \dots, y_{i_d}) = d \cdot RM(A)$. \square

Lemme 1.3.6. *Soit G un sous-groupe algébrique infini de A^n , alors il existe $I \subseteq n$ tel que $\pi_I : G \rightarrow A^{|I|}$ soit une isogénie.*

Démonstration: Nous procédons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est trivial car A est simple.

Supposons l'hypothèse de récurrence démontrée pour les ordres $\leq n$. Soit $G \leq A^{n+1}$ un sous-groupe algébrique. Prenons $I \subseteq n+1$ minimal pour l'inclusion tel que $\pi_I : G \rightarrow A^{|I|}$ ait un noyau fini. Un tel I existe puisqu'au pire on pourra prendre $I = n+1$.

On distingue alors deux cas :

cas 1 : $I \subsetneq n+1$. Dans ce cas, G est isogène à $\pi_I(G) \subseteq A^k$, avec $k := |I| \leq n$. Par hypothèse de récurrence, on a $I' \subseteq I$ tel que $\pi_{I'} : \pi_I(G) \rightarrow A^k$ soit une isogénie. Notons que $\pi_{I'} \circ \pi_I = \pi_{I'} : G \rightarrow A^k$ et donc, par minimalité de I , on a $I = I'$. Par conséquent, $\pi_I : G \rightarrow A^{|I|}$ est une isogénie.

cas 2 : $I = n+1$. Nous montrons que dans ce cas, $G = A^{n+1}$ et donc π_I est l'identité.

Soit $i \in n+1$. Posons $J := (n+1) \setminus \{i\}$. Par minimalité de I , le noyau $\ker_G(\pi_J)$ est infini. Or, $\ker_G(\pi_J)$ est précisément l'ensemble G_i des éléments de G dont les coordonnées sont nulles partout en dehors de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Il vient $(\pi_{\{i\}}(\ker_G(\pi_J))) = A$ par simplicité de A . Par conséquent, pour tout $i \in n+1$, $G_i = \{\bar{a} \in A^{n+1} \mid a_j = 0 \text{ si } j \neq i, \text{ et } a_i \in A\}$. On a donc

$$A^{n+1} = \sum_{i \in n+1} G_i \subseteq G$$

d'où la proposition. \square

Corollaire 1.3.7. *a) Soit $\bar{a} \in A^n$, il y a $G \leq A^n$ avec $\dim(G) = \text{ldim}(\bar{a}) \cdot g$ tel que $\bar{a} \in G$.
b) Soit $G \leq A^n$ un sous-groupe algébrique infini de A^n , alors G est intersection des solutions de $n - \frac{\dim(G)}{g}$ dépendances quasilineaires indépendantes.
c) En particulier, pour $\bar{a} \in G \leq A^n$, $\text{ldim}(\bar{a}) \leq \frac{\dim(G)}{g}$.*

Démonstration de a): Si $ldim(\bar{a}) = 0$, alors $\bar{a} \in Tor(A)$ et la proposition est évidente, on peut donc supposer que $ldim(\bar{a}) > 0$.

Soit $\bar{b} = b_1, \dots, b_{ldim(\bar{a})}$ tels que $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{ldim(\bar{a})}}$ soit une base $End^0(A)$ -linéaire extraite de \bar{a} . Alors il y a des $\alpha_{i,j} \in \mathcal{Q}End(A)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq ldim(\bar{a})$, tels que $a_i = \sum_{1 \leq j \leq ldim(\bar{a})} \alpha_{i,j}(b_j)$. On peut supposer que \bar{b} est un segment initial de \bar{a} pour simplifier les notations. Considérons le quasi-endomorphisme α de A^n défini comme suit :

$$\alpha(\bar{x}) = \left(\sum_{1 \leq j \leq ldim(\bar{a})} \alpha_{i,j}(x_j) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Clairement, $M_{\bar{\alpha}}$ est la matrice dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne est $(\overline{\alpha_{i,1}}, \dots, \overline{\alpha_{i,ldim(\bar{a})}}, 0, \dots, 0)$, et est de rang $ldim(\bar{a})$. Soit G l'image de α , alors $\bar{a} = \alpha(\bar{b}) \in G$, et $dim(G) = g \cdot ldim(\bar{a})$. \square

Démonstration de b): D'après le lemme 1.3.6, il y a $I \subseteq n$ tel que $\pi_I : G \rightarrow A^{|I|}$ soit une isogénie. Considérons les quasi-homomorphismes :

$$\begin{aligned} \Gamma_i : A^{|I|} &\rightarrow A \\ \bar{a} &\rightarrow \pi_i(\pi_I^{-1}(\bar{a})) \end{aligned}$$

Soit $(\alpha_{i,j})_{j \in I} \in \mathcal{Q}End(A)$ tel que $\Gamma_i(\bar{a}) = \sum_{j \in I} \alpha_{i,j}(a_j)$. Pour $i \in n$, nous considérons la forme quasilinéaire :

$$E_i : \bar{x} \rightarrow x_i - \sum_{j \in I} \alpha_{i,j}(x_j)$$

Notons $\bar{x}_I = (x_j)_{j \in I}$. Par construction, on a

$$\begin{aligned} \bar{x} \in G &\iff \bar{x} \in \pi_I^{-1}(A^{|I|}) \\ &\iff \bar{x} \in \pi_I^{-1}(\bar{x}_I) \\ &\iff \forall i \in n, x_i \in \pi_i(\pi_I^{-1}(\bar{x}_I)) = \Gamma_i(\bar{x}_I) = \sum_{j \in I} \alpha_{i,j}(x_j) \\ &\iff \forall i \in n, E_i(\bar{x}) \ni 0 \end{aligned}$$

Notons que si $i \in I$, la dépendance quasilinéaire $E_i(\bar{x}) \ni 0$ est l'équation triviale $\Gamma_i(0) \ni 0$. Pour $i \notin I$, la seule dépendance quasilinéaire qui mentionne x_i est $E_i(\bar{x}) = 0$. Les dépendances quasilinéaires $(E_i(\bar{x}) = 0)_{i \notin I}$ sont donc indépendantes. Comme $|I| \cdot dim(A) = dim(G)$, nous avons le résultat souhaité. \square

2 Corps octarines

2.1 La classe \mathcal{C}

Nous considérons la classe \mathcal{C} des anneaux M contenant K , avec un sous groupe $O(M)$ de $A(M)$ divisible, sans torsion, et clos par $End(A)$. Les éléments de $O(M)$ sont vus comme étant colorés en octarine, et on dit qu'un élément de $A(M)$ est blanc s'il n'est pas octarine.

Pour $M \in \mathcal{C}$, $O(M)$ est un $End^0(A)$ espace-vectoriel, isomorphe à son image modulo la torsion. En conséquence, nous introduisons pour chaque $\alpha := \gamma \otimes \frac{p}{q} \in End^0(A)$ un symbole de fonction $\underline{\alpha}$ qui sera interprété comme suit :

Si $x \in O(M)$, $\underline{\alpha}(x)$ est l'unique élément de $\frac{p}{q} \circ \gamma(x)$ qui appartient à $O(M)$. Sinon, $\underline{\alpha}(x) = 0_A$.

Le langage \mathcal{L}_O Outre ces fonctions, nous introduisons pour chaque $k \in K$ une constante c_k , qui sera interprétée comme l'élément k . Le langage de l'amalgame, puis du collapse sera :

$$\mathcal{L}_O := \mathcal{L}_{anneau} \cup \{\underline{\alpha} \mid \alpha \in End^0(A)\} \cup \{c_k \mid k \in K\} \cup \{O\}$$

Les éléments de \mathcal{C} sont naturellement des \mathcal{L}_O -structures. Pour $M, N \in \mathcal{C}$, on écrit $M \subseteq N$ si M est une sous-structure de N . N est alors une extension de M , que l'on écrit N/M .

Remarque 2.1.1. *Par choix du langage \mathcal{L}_O , toute sous structure de $M \in \mathcal{C}$ est aussi dans \mathcal{C} .*

2.2 Prédimension, ormessiennité

Notre but étant de construire un collapse fortement minimal, il est exclu que A soit de dimension 1. En effet, si A était de dimension 1, son rang de Morley dans un collapse fortement minimal serait également de 1. Or, comme A est divisible, A n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini, et donc notre sous-groupe définissable serait égal à A ou fini. Sauf mention explicite du contraire, nous supposons dans tout le reste de cet ouvrage que la dimension g de A est ≥ 2 . Le cas $g = 1$, sera traité en annexe où nous expliquerons comment construire un corps de rang 2 avec un sous-groupe définissable de rang 1 de A .

Extensions de base finie Une extension $N/M \in \mathcal{C}$ est dite de base finie si le degré de transcendance de N/M et la dimension linéaire de $O(N)/O(M)$ sont finis.

La prédimension Pour $L'/L \in \mathcal{C}$, de base finie, on pose

$$\delta(L'/L) := dtr(L'/L) - (g - 1) \cdot ldim(O(L')/O(L))$$

Si A, B sont des sous-ensembles quelconques de $L \in \mathcal{C}$, alors $\delta(A/B)$ dénotera $\delta(M/N)$, où M la sous structure de L engendrée par $A \cup B$, et N celle engendrée par B .

Remarque 2.2.1. Pour $L'/L \in \mathcal{C}$, de base finie, $ldim(O(L')/O(L)) = ldim(O(L')/A(L))$. On peut donc réécrire $\delta(L'/L) = dtr(L'/L) - (g-1) \cdot ldim(O(L')/A(L))$.

Démonstration: Soient $a_1, \dots, a_n \in O(L')$, indépendants sur $O(L)$. Supposons que a_n soit linéairement dépendant de a_1, \dots, a_{n-1} sur $A(L)$. Alors, il y a $b \in A(L)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in End^0(A)$ tels que $\bar{a}_n = \alpha_1(\bar{a}_1) + \dots + \alpha_{n-1}(\bar{a}_{n-1}) + \alpha_n(\bar{b})$, ce qui fait de \bar{b} une combinaison linéaire des \bar{a}_i . Donc, $\bar{b} = \bar{a}$ pour $a \in O(L)$. Du coup, on a $\bar{a}_n = \alpha_1(\bar{a}_1) + \dots + \alpha_{n-1}(\bar{a}_{n-1}) + \alpha_n(\bar{a})$, ce qui contredit l'indépendance sur $O(L)$. \square

Extensions ormessiennes Une extension $L'/L \in \mathcal{C}$ est dite ormessienne (et on note $L \leq L'$) si pour tout $L \subseteq X \subseteq L'$ de base finie sur L , $\delta(X/L) \geq 0$.

Propriétés élémentaires Les lemmes suivants sont bien connus.

Remarque 2.2.2. Pour $X, Y \in \mathcal{C}$, tous deux de base finie au dessus de $C \in \mathcal{C}$,

$$\delta(XY/C) = \delta(X/C) + \delta(Y/XC)$$

Si $M \leq L$ et $M \subseteq S \subseteq L$, alors $M \leq S$.

Ceci est une transcription du lemme 1.1 de [14] :

Lemme 2.2.3 (transitivité de \leq). Soient $k, k', L \in \mathcal{C}$ avec $k \leq k'$ et $k' \leq L$. Alors, $k \leq L$.

Démonstration: Soit $R \in \mathcal{C}$ avec $k \subseteq R \subseteq L$, de base finie sur k . Nous démontrons que $\delta(R/k) \geq 0$. On pose $S := R \cap k'$. Comme $k \leq k'$, $\delta(S/k) \geq 0$. Soit \vec{a} une base de $O(R)$ au dessus de $O(S)$. Comme $O(S) = O(k') \cap O(R)$, on a $ldim(O(R)/O(S)) = ldim(O(R)/O(k')) = |\vec{a}|$. Puisque $k' \leq L$, on a $\delta(k'(\vec{a})/k') \geq 0$, d'où $dtr(k'(\vec{a})/k') \geq (g-1) \cdot |\vec{a}|$. A fortiori, $dtr(S(\vec{a})/S) \geq (g-1) \cdot |\vec{a}|$.

Maintenant, comme $dtr(R/S) \geq dtr(S(\vec{a})/S)$, on a $\delta(R/S) \geq 0$. On a donc bien $\delta(R/k) = \delta(R/S) + \delta(S/k) \geq 0$. \square

Lemme 2.2.4 (Sous-Modularité de δ). Soient $L, X, Y \subseteq M \in \mathcal{C}$. Si X, Y sont de base finie sur L , on a :

$$\delta(XY/Y) \leq \delta(X/L) - \delta(Y \cap X/L)$$

$$\delta(XY/L) + \delta(X \cap Y/L) \leq \delta(X/L) + \delta(Y/L)$$

Démonstration: Plaçons nous dans la clôture algébrique blanche \widetilde{M} de M , c'est à dire que $O(\widetilde{M}) = O(M)$. On a $dtr(\widetilde{X}/L) - dtr(\widetilde{Y} \cap \widetilde{X}/L) \geq dtr(\widetilde{Y} \widetilde{X}/\widetilde{Y})$. Comme $dtr(X/L) = dtr(\widetilde{X}/L)$, il vient $dtr(YX/Y) = dtr(\widetilde{Y} \widetilde{X}/\widetilde{Y})$, et $dtr(X \cap Y/L) \leq dtr(\widetilde{Y} \cap \widetilde{X}/L)$, on a

$$(1) \quad dtr(X/L) - dtr(Y \cap X/L) \geq dtr(YX/Y)$$

On a

$$ldim(O(X)/O(L)) - ldim(O(X) \cap O(Y)/O(L)) = ldim(O(X) + O(Y)/O(Y))$$

Comme $O(X \cap Y) = O(X) \cap O(Y)$ et $O(XY) \supseteq O(X) + O(Y)$, il vient

$$(2) \quad ldim(X/L) - ldim(Y \cap X/L) \leq ldim(XY/Y)$$

(1) + $(g - 1) \cdot (2)$ est la première inégalité du lemme puisque :

$$\delta(X/L) - \delta(Y \cap X/L) = dtr(X/L) - dtr(Y \cap X/L) - (g - 1) \cdot (ldim(X/L) - ldim(Y \cap X/L))$$

Pour la seconde inégalité du lemme, on la déduit de la première en utilisant le fait que $\delta(XY/L) = \delta(XY/Y) + \delta(Y/L)$. \square

2.3 La classe \mathcal{C}^0

Corps octarine : On appelle corps octarine tout corps $L \in \mathcal{C}$ tel que $K \leq L$. \mathcal{C}^0 est la classe des corps octarine dont le support est algébriquement clos.

Fait 2.3.1 (Théorème de Lang-Néron). *Soit L/M une extension de corps régulière et finiment engendrée, alors le groupe $A(L)/Tr_{L/M}(A)(M)$ est finiment engendré.*

En particulier, $A(L)/A(M)$ est finiment engendré.

Lemme 2.3.2. *Soient $M \leq L \in \mathcal{C}$, tous deux algébriquement clos. Soit $R \subseteq L$, supposons que R est un corps finiment engendré sur M , alors la clôture algébrique \tilde{R} de R dans L est de base finie sur M .*

En particulier, tout corps octarine inclus dans L et de degré de transcendance fini sur M est de base finie sur M .

Démonstration: Supposons que non, alors comme $dtr(\tilde{R}) = dtr(R)$, $O(\tilde{R})$ est de dimension linéaire infinie. Soit n suffisamment grand pour que $dtr(R) - (g - 1) \cdot n < 0$. Nous prenons n éléments a_1, \dots, a_n linéairement indépendants sur M de $O(\tilde{R})$. Alors, comme $R(a_1, \dots, a_n)$ est finiment engendré sur M , et comme c'est une extension régulière de M puisque M est algébriquement clos, $R(a_1, \dots, a_n)$ est de base finie sur M d'après le théorème de Lang-Néron. Or, par choix de n , $\delta(R(a_1, \dots, a_n)/M) < 0$. Ceci est une contradiction à $M \leq L$. \square

Unions de chaîne Soit $M_0 \xrightarrow{\leq} M_1 \xrightarrow{\leq} \dots$ une chaîne d'éléments de \mathcal{C}^0 . On définit son union de chaîne $M := \lim_{\leq} M_i$ comme suit : Le support de M est la limite directe des M_i , un uple est octarine s'il est l'image d'un élément de $O(M_i)$ par l'injection canonique $\varphi_i : M_i \rightarrow M$ pour un certain i .

Lemme 2.3.3. Soit $M_0 \xrightarrow{\leq} M_1 \xrightarrow{\leq} \dots$ une chaîne d'éléments de \mathcal{C}^0 . Pour tout i , $M_i \leq \lim_{\leq} M_i$ via l'injection canonique φ_i . En particulier, $\lim_{\leq} M_i \in \mathcal{C}^0$.

Démonstration: La définition de $\lim_{\leq} M_i$ nous permet d'identifier M_i avec son image par φ_i pour tout i . $\lim_{\leq} M_i$ est évidemment algébriquement clos, et $O(\lim_{\leq} M_i)$ est clos par $End(A)$ et sans torsion. Par conséquent, $\lim_{\leq} M_i \in \mathcal{C}$.

Soit M_i un élément de la chaîne. Nous montrons que $M_i \leq \lim_{\leq} M_i$. Soit $M_i \subseteq R \subseteq \lim_{\leq} M_i$ de base finie sur M_i . Alors, il y a $j \geq i$ tel que $R \subseteq M_j$. Comme $M_i \leq M_j$, on a $\delta(R/M_i) \geq 0$, cqfd. \square

Lemme 2.3.4. Soit $L \in \mathcal{C}^0$, l'ensemble $\{B \in \mathcal{C}^0 \mid B \leq L\}$ est stable par union de chaîne (pour l'inclusion).

Démonstration: Soit $(B_i)_{i \in I}$ une chaîne d'éléments de \mathcal{C}^0 ormessiens dans L et différents de L . Supposons que $B := \bigcup_{i \in I} B_i$ ne soit pas ormessien dans L , c'est à dire qu'il y a $C \in \mathcal{C}$ avec $B \subseteq C \subseteq L$ tel que $dtr(C/B)$ fini et $\delta(C/B) < 0$. Sans perte de généralité, $C \subseteq B(O(C))$ (il suffit de prendre $C := C \cap B(O(C))$).

Comme $(g-1) \cdot ldim(O(C)/O(B)) > dtr(C/B)$, il y a un uple octarine \bar{a} de C , linéairement indépendant au dessus de B , tel que $dtr(\bar{a}/B) < (g-1) \cdot |\bar{a}|$. Il y a donc $i \in I$ tel que $dtr(\bar{a}/B_i) < (g-1) \cdot |\bar{a}|$. Mais alors $\delta(B_i(\bar{a})/B_i) < 0$, une contradiction puisque $B_i \leq L$.

B est donc bien ormessien dans L . \square

2.4 Clôture ormessienne

Proposition et définition 2.4.1. Soit L un sous-ensemble de $M \in \mathcal{C}^0$. Il y a un plus petit $X_0 \in \mathcal{C}^0$ contenant L et ormessien dans M . On le note $cl_M(L)$ et le nomme clôture ormessienne de L dans M .

cl_M est un opérateur de clôture et vérifie le caractère local.

Démonstration: Voici le plan de cette démonstration :

- On définit $cl_M(L)$ pour L de base finie sur K (lemme 2.4.2).
- On étend la définition par caractère local.

Lemme 2.4.2. Soit L un sous-ensemble de $M \in \mathcal{C}^0$. Supposons que L est un corps algébriquement clos de base finie sur $B \leq M$. Il y a un plus petit $X_0 \in \mathcal{C}^0$ contenant L et ormessien dans M . On le note $cl_M(L)$ et le nomme clôture ormessienne de L dans M . De plus, $cl_M(L)$ est de base finie sur B , et $\delta(cl_M(L)/L) \leq \delta(X/L)$ pour tout $L \subseteq X \subseteq M$.

Démonstration du lemme 2.4.2: Pour $Y \subseteq M$ de base finie sur L , on doit avoir $\delta(Y/L) \geq -\delta(L/B)$ puisque $0 \leq \delta(Y/B) = \delta(Y/L) + \delta(L/B)$. On peut donc prendre $X \subseteq M$ de degré de transcendance fini sur L tel que $\delta(X/L)$ soit minimal, disons $\delta(X/L) =: k \in \mathbb{Z}$. Notons que $k \leq 0$.

Un tel X est ormessien dans M : si $X \subseteq Y \subseteq M$, on a $\delta(Y/L) \geq \delta(X/L)$ d'où $\delta(Y/X) \geq 0$.

En particulier, $\delta(\tilde{X}/L) = k$. On a donc un ensemble non vide

$$\mathcal{X} := \{L \subseteq X = \tilde{X} \subseteq M \mid \delta(X/L) = k \text{ et } X \text{ est de base finie sur } L\}$$

Nous montrons que \mathcal{X} est stable par intersections quelconques, et possède donc un minimum pour l'inclusion. Nous affirmons que :

1. Soient $L \subseteq Y = \tilde{Y} \leq M$ avec L de degré de transcendance fini sur K et $X \in \mathcal{X}$, alors $X \cap Y \in \mathcal{X}$.
2. \mathcal{X} est stable par intersections quelconques.

Démonstration de 1.: Par sous-modularité de δ , on a

$$\delta(XY/Y) \leq \delta(X/L) - \delta(Y \cap X/L)$$

Comme $Y \leq M$, le terme de gauche est positif, si bien que $\delta(Y \cap X/L) \leq \delta(X/L) = k$, d'où $\delta(Y \cap X/L) = k$ par minimalité de k . Comme en outre X et Y sont algébriquement clos, $Y \cap X$ l'est aussi, et donc $Y \cap X \in \mathcal{X}$. \square^1 .

Démonstration de 2.: Soit $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$. Nous ramenons $\bigcap \mathcal{Z}$ à une intersection finie d'éléments de \mathcal{Z} pour pouvoir utiliser 1..

Prenons $Z_0 \in \mathcal{Z}$ arbitraire. Nous contruisons une suite (Z_i) d'intersections finies d'éléments de \mathcal{Z} dont le degré de transcendance sur L décroît par récurrence. Soit $i \in \mathbb{N}$, supposons que Z_i a été construit.

Si $Z_i = \bigcap \mathcal{Z}$, nous avons ce que nous cherchions et nous posons $Z_{i+1} := Z_i$.

Sinon, il y a $Z \in \mathcal{Z}$ tel que $Z \cap Z_i \subsetneq Z_i$, et on pose $Z_{i+1} := Z \cap Z_i$. Comme ces corps sont algébriquement clos, on a bien $dtr(Z_{i+1}/L) < dtr(Z_i/L)$.

Clairement, si $n := dtr(Z_0/L)$, alors $Z_n = \bigcap \mathcal{Z}$. $\bigcap \mathcal{Z}$ étant une intersection finie d'éléments de \mathcal{X} , on a $\bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{X}$. \square^2 .

Soit $cl_M(L)$ le minimum de \mathcal{X} . Il découle du point 2. ci dessus que pour $Y \leq M$, on a $cl_M(L) \cap Y \in \mathcal{X}$, d'où $cl_M(L) \cap Y = cl_M(L)$ et donc $cl_M(L) \subseteq Y$, ce qui montre que $cl_M(L)$ est bien le plus petit élément de \mathcal{C}^0 ormessien dans M et contenant L .

Ceci fait de cl_M un opérateur de clôture sur $\{L \subseteq M \mid \exists B \leq M, L \text{ de base finie sur } B\}$ muni de l'inclusion.

Comme $cl_M(L) \in \mathcal{X}$, on voit que $cl_M(L)$ est de base finie sur L , et donc sur B . En outre, comme $\delta(cl_M(L)/L) = k \leq 0$, on a bien $\delta(cl_M(L)/B) \leq \delta(L/B)$. $\square^{\text{lemme 2.4.2}}$

Pour $L \subseteq M$ quelconque, nous posons

$$cl_M(L) := \bigcup_{\substack{K \subseteq L' \subseteq L \\ L' \in \mathcal{C} \text{ de base finie sur } K}} cl_M(L')$$

$cl_M(L)$ est ormessien dans M : Soit $N \subseteq M$ de base finie sur $cl_M(L)$. Il nous faut montrer qu'alors $\delta(N/cl_M(L)) \geq 0$. Supposons le contraire : $\delta(N/cl_M(L)) < 0$. Soit a_1, \dots, a_n une base octarine de

$O(N)$ au dessus de $O(\text{cl}_M(L))$. Alors, $\text{dtr}(a_1, \dots, a_n) < n \cdot (g - 1)$. Soit V le locus de a_1, \dots, a_n sur $\text{cl}_M(L)$. Il y a $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{C}$ algébriquement clos, inclus dans L et de base finie sur K tels que V est définie sur $\bigcup_{1 \leq i \leq k} \text{cl}_M(L_i)$. Comme, pour chaque i , $\text{cl}_M(L_i)$ est de base finie sur K , $L' := \text{acl}(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \text{cl}_M(L_i))$ l'est aussi. V est définie sur $\text{cl}_M(L')$. Considérons N' la clôture algébrique dans M du corps engendré par $\text{cl}_M(L')$ et par a_1, \dots, a_n . Comme $a_1, \dots, a_n \in V$, et comme a_1, \dots, a_n reste linéairement indépendant au dessus de $O(\text{cl}_M(L'))$, on a $\delta(N'/\text{cl}_M(L')) \leq \dim(V) - n \cdot (g - 1) < 0$. Ceci est une contradiction car $\text{cl}_M(L') \leq M$!

$\text{cl}_M(L)$ est le plus petit élément de \mathcal{C}^0 contenant L et ormessien dans M :

Soit $N \in \mathcal{C}^0$ contenant L et ormessien dans M .

Considérons $L' \in \mathcal{C}$ contenu dans L , de base finie sur K . Comme $L' \subseteq N \leq M$, on doit avoir $\text{cl}_M(L') \subseteq N$ par minimalité de $\text{cl}_M(L')$. On a donc bien $\text{cl}_M(L) \subseteq N$.

Comme $\text{cl}_M(L)$ est le plus petit élément de \mathcal{C}^0 contenant L et ormessien dans M , on voit que cl_M est un opérateur de clôture. Il vérifie le caractère local par construction. \square

2.5 Extensions minimales

Nous commençons ici l'étude d'une notion prépondérante dans la construction de tout amalgame de Hrushovski : les extensions minimales. Nos amalgames (collapsés ou non) seront essentiellement des corps octarines existentiellement clos, c'est à dire qui réalisent leurs extensions ormessiennes. Il est donc naturel que l'étude de leurs types se ramène à l'étude des extensions ormessiennes de corps octarines. Or, et c'est l'objet de cette section, on peut décomposer toute extension ormessienne de corps octarine algébriquement clos en une tour d'extension minimales. Ceci a une autre application importante : pour garantir la modèlè complétude, il suffira de garantir la réalisation des extensions minimales.

Définition Une extension ormessienne $L \leq L' \in \mathcal{C}^0$ est dite minimale si L, L' sont algébriquement clos, $L \neq L'$, et L n'a pas d'extension algébriquement close propre qui soit ormessienne dans L' ormis L .

Lemme 2.5.1. *Une extension minimale est de base finie.*

Démonstration: Soient $M \leq L \in \mathcal{C}^0$ une extension minimale. D'après le lemme 2.3.2, l'ensemble suivant n'est pas vide :

$$B := \{M \subsetneq R \subseteq L \mid R \in \mathcal{C}^0, R \text{ est de base finie sur } M\}$$

Choisissons $R \in B$ tel que $\delta(R/M)$ soit minimal. Nous montrons que $R \leq L$, ce qui conclut la démonstration puisqu'alors on doit avoir $R = L$.

Soit $R \subseteq S \subseteq L$, de base finie sur R . $\text{dtr}(S/M)$ est fini, et d'après le lemme 2.3.2 \tilde{S} est de base finie sur M , et donc $\tilde{S} \in B$. Par minimalité de $\delta(R/M)$, il vient $\delta(R/M) \leq \delta(\tilde{S}/M) \leq \delta(S/M)$, d'où $\delta(S/R) \geq 0$. Nous avons montré $R \leq L$. \square

Fait 2.5.2 (Critère pour la minimalité). Soit $L \leq L' \in \mathcal{C}^0$. On a l'équivalence :

- (1) $L \leq L'$ est minimale.
- (2) L' est de base finie sur L , et pour tout $L \subsetneq X \subsetneq L'$ algébriquement clos de base finie sur L , $\delta(L'/X) < 0$.
- (3) L' est de base finie sur L , et pour tout $L \subsetneq X \subsetneq L'$ algébriquement clos de base finie sur L , $\delta(L'/L) < \delta(X/L)$.

Démonstration: Notons tout d'abord que pour $L \subsetneq X \subsetneq L'$, on a $\delta(L'/L) = \delta(L'/X) + \delta(X/L)$. Or, $\delta(L'/L) \geq 0$, si bien que $\delta(L'/X) < 0 \iff \delta(X/L) > \delta(L'/L)$. Ceci montre (2) \iff (3).

(2) \implies (1) : Supposons (2). Soit $L \subsetneq X \subsetneq L'$ algébriquement clos. X n'est pas ormessien dans L' puisque $\delta(L'/X) < 0$. L'extension $L \leq L'$ est donc bien minimale.

(1) \implies (3) : On prouve cette implication par contraposition. Supposons $\neg(3)$. On peut supposer que L' est de base finie sur L , sinon cette extension n'est pas minimale (lemme 2.5.1). On considère $L \subsetneq X_0 \subsetneq L'$ de base finie sur L tel que $\delta(X_0/L)$ est minimal. On peut supposer que $X_0 = \widetilde{X}_0$ puisque $\delta(\widetilde{X}_0/L) \leq \delta(X_0/L)$. Nous avons alors $X_0 \leq L'$:

Il nous reste à vérifier que pour $X_0 \subsetneq X \subsetneq L'$ de base finie sur L , $\delta(X/X_0) \geq 0$. En effet, par minimalité, nous avons $\delta(X_0/L) \leq \delta(X/L)$, d'où $\delta(X/X_0) \geq 0$. Nous avons montré $\neg(1)$: X_0 est algébriquement clos, ormessien dans L' , et différent de L et L' . \square

Proposition 2.5.3 (Classification des extensions minimales). Soit $L \leq L' \in \mathcal{C}^0$ minimale, alors on est dans un des deux cas suivants :

générique blanc : $O(L') = O(L)$, et $L' = \widetilde{L(x)}$ pour x transcendant sur L . $\delta(L'/L) = 1$.

extension préalgébrique : $L' = \widetilde{L(O(L'))}$. Pour toute base a_0, \dots, a_{n-1} de $O(L')$ au dessus de $O(L)$, on a $dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) < |I| \cdot (g-1) \forall I \subsetneq n$ avec $I \neq \emptyset$. De plus, $\delta(L'/L) = 0$.

On appelle *longueur* d'une extension minimale préalgébrique L'/L le cardinal d'une base de $O(L')$ au dessus de $O(L)$, c'est à dire la quantité $ldim(O(L')/O(L))$.

Démonstration: Nous étudions en premier le cas $O(L) \neq O(L')$. On a alors $L' = \widetilde{L(O(L'))}$. Sinon on aurait $\delta(L'/L(O(L'))) \geq 0$ puisque $L' \setminus O(L')$ est blanc, ce qui contredirait le critère pour la minimalité.

Soit a_0, \dots, a_{n-1} une base de $O(L')$ au dessus de $O(L)$. Soit $I \subsetneq n$, $I \neq \emptyset$, nous montrons que $dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) < |I| \cdot (g-1)$:

Si $\widetilde{L(a_i)_{i \notin I}} = L'$, alors $dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) = 0 < |I| \cdot (g-1)$.

Sinon, $\delta(L'/L(a_i)_{i \notin I}) < 0$ d'après notre critère pour la minimalité, et on a donc $dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) < (g-1) \cdot ldim(O(L')/O(L(a_i)_{i \notin I}))$.

Or, $ldim(O(L')/O(L(a_i)_{i \notin I})) \leq |I|$. Dans les deux cas, on a bien :

$$dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) < |I| \cdot (g-1)$$

Il nous reste à montrer qu'alors $\delta(L'/L) = 0$. Soit $x \in L' \setminus L$, alors d'après le critère pour la

minimalité $\delta(L'/L) < \delta(\widetilde{L(x)}/L)$. Or, $\delta(\widetilde{L(x)}/L) \leq 1$, d'où $\delta(L'/L) = 0$.

Le cas $O(L) = O(L')$ est évident : comme $L' \setminus L$ est blanc, toute extension intermédiaire serait ormessienne dans L' . On ne peut donc avoir que $L' = \widetilde{L(x)}$ pour x transcendant sur L . \square

Le générique coloré Dans [14], [1] et [10], la classification des extensions minimales fait mention d'un "générique coloré". Dans les articles en question, les points colorés forment un sous groupe du groupe additif (resp. multiplicatif) vu en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p ou \mathbb{Q} , et la prédimension est deux fois le degré de transcendance moins la dimension linéaire des points colorés. Dans ce contexte, il y a des extensions minimales constituées de l'extension par un point coloré transcendant (générique coloré).

Nous considérons la situation analogue. Soit $L' \geq L$ avec $O(L') = \langle O(L), a \rangle$ et $L' = L(\widetilde{O(L')})$ où $a \in O(L') \setminus O(L)$ est générique dans A (i.e. $dtr(a/L) = g$). Écrivons $a = x_1, \dots, x_r$, avec x_1, \dots, x_g transcendants et indépendants sur L . On constate que $\delta(L'/\widetilde{L(x_1)}) = 0$. L'extension $L \leq L'$ n'est donc pas minimale. Cependant, par analogie, nous l'appellerons générique colorée.

Remarque 2.5.4. *Une extension générique colorée se décompose en une extension générique blanche et une extension préalgébrique.*

Démonstration: Nous conservons les notations ci-dessus.

On montre d'abord que $\widetilde{L(x_1)} \leq L'$:

Soit $\widetilde{L(x_1)} \subsetneq X \subseteq L'$. Si X n'a pas de nouveau point octarine, $\delta(X/\widetilde{L(x_1)}) \geq 0$. Sinon, on doit avoir $a \in X$ et alors $\widetilde{X} = L'$. On a bien $\widetilde{L(x_1)} \leq L'$.

Puis on montre la minimalité :

Soit $L(x_1) \subsetneq X \leq L'$ algébriquement clos. Nous prétendons que a doit appartenir à X . Supposons que $a \notin X$, alors $\delta(X/\widetilde{L(x_1)}) \geq 1$. Or, $\delta(L'/\widetilde{L(x_1)}) = 0$, donc $\delta(L'/X) < 0$, une contradiction ! On a donc $a \in X$. Par conséquent, $X = L'$. \square

Décomposition en extensions minimales

Lemme 2.5.5. *Soient $L, M \in \mathcal{C}^0$ avec $L \lesssim M$. Alors il y a une extension minimale N de L avec $L \leq N \leq M$.*

Démonstration: Soit $x \in L \setminus M$. D'après le lemme 2.4.2, $N_0 := cl_M(L(x))$ est de base finie sur L . Nous construisons une suite décroissante $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0$ d'extensions de L de base finie sur L et ormessiennes dans M par récurrence.

Pour $i \in \mathbb{N}$, si $N_i \leq M$ a été construite, nous posons :

- $N_{i+1} := N_i$ si N_i est une extension minimale de L .
- Si N_i n'est pas une extension minimale de L , il doit y avoir une extension intermédiaire algébriquement close $L \subsetneq N_{i+1} \lesssim N_i$, qui est de base finie sur L puisque N_i l'est, et

qui est ormessienne dans M par transitivité de \leq . Notons que, comme N_i et N_{i+1} sont algébriquement clos, $dtr(N_{i+1}) < dtr(N_i)$.

Comme le degré de transcendance décroît à chaque étape, cette suite doit être stationnaire à partir d'un certain rang r . N_r est alors une extension minimale de L ormessienne dans M . \square

Proposition 2.5.6. *Toute extension ormessienne $L \leq M$ avec $L, M \in \mathcal{C}^0$ se décompose en une tour d'extensions minimales.*

Démonstration: Nous construisons par récurrence transfinie une chaîne $(M_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ d'éléments de \mathcal{C}^0 ormessiens dans M telle que $\alpha < \beta \implies M_\alpha \leq M_\beta$. Posons $M_0 := L$.

$\alpha = \beta + 1$: Si $M_\beta = M$, on pose $M_\alpha := M$. Sinon, d'après le lemme 5.5.2, il y a une extension minimale N de M_β , ormessienne dans M , et on pose $M_\alpha := N$.

α limite : On pose alors que M_α est l'union de chaîne des M_β , $\beta < \alpha$. D'après le lemme 2.3.3, on a bien $M_\alpha \leq M$.

Nous montrons maintenant qu'il y a γ tel que $M_\gamma = M$. Sinon, pour tout γ , le cardinal de M_γ est supérieur ou égal à celui de γ , ce qui devient absurde lorsque $|\gamma|$ devient plus grand que $|M|$!

Par conséquent, il y a un γ minimal tel que $M_\gamma = M$. $(M_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ est la décomposition recherchée. \square

3 Hic amalgamatur

Nous souhaitons réaliser des amalgames de Fraïssé de classes de corps octarine. Dans ce chapitre, nous décrivons quelles sont les classes que l'on peut raisonnablement amalgamer, nous réalisons l'amalgame pour de telles classes que l'on nommera "corps riches", et nous donnons quelques propriétés d'homogénéité et de saturation pour les riches.

3.1 Classes d'amalgamation

Définition Soit \mathcal{D} une catégorie dont les objets sont des \mathcal{L} -structures et les flèches des \mathcal{L} -injections distinguées pour un langage dénombrable \mathcal{L} . Nous notons $M \in \mathcal{D}$ pour "M est un objet de \mathcal{D} ". $L \rightarrow M$ signifie qu'il y a une flèche de \mathcal{D} allant de L à M , on dit alors que L se plonge ormessiennement dans M . Lorsque cette flèche est une inclusion, on dit que M est une extension ormessienne de L et on note $L \leq M$.

Amalgame Soient $R, L, M \in \mathcal{D}$ et des flèches $f_{RL} : R \rightarrow L$ et $f_{RM} : R \rightarrow M$ de \mathcal{D} . On dit que $N \in \mathcal{D}$ est un amalgame de f_{RL} et f_{RM} au dessus de R lorsqu'il y a des flèches $f_{LN} : L \rightarrow N$ et $f_{MN} : M \rightarrow N$ telles que $f_{LN} \circ f_{RL} = f_{MN} \circ f_{RM}$.

\mathcal{D} est une *classe d'amalgamation* si elle satisfait :

Stabilité par \mathcal{L} -isomorphismes : Les \mathcal{L} -isomorphismes sont des flèches de \mathcal{D} . En particulier, si $L \rightarrow M, L' \cong L$ et $M' \cong M$ alors $L' \rightarrow M'$.

Ormessiennité de l' acl : Si $L \in \mathcal{D}$ et $A \subseteq L$ alors $acl_L(A) \in \mathcal{D}$ et $acl_L(A) \leq L$.

Unions de chaîne : Si $(L_i)_{i < \alpha}$ est une suite d'éléments de \mathcal{D} avec $L_i \rightarrow L_j$ pour $i \leq j$, alors $(L_i)_{i < \alpha}$ a une limite directe dans \mathcal{D} , que l'on nomme union de chaîne des L_i .

Monotonie de \leq : Soient $L, M, N \in \mathcal{D}$. Si $L \leq N$ et $L \subseteq M \leq N$, alors $L \leq M$.

Clôture ormessienne : Pour tout $L \in \mathcal{D}$, pour tout $A \subseteq L$, il y a $M \leq L$ contenant A minimal pour l'inclusion. On appelle un tel M *clôture ormessienne* de A dans L et on le note $cl_L(A)$. Notons que $cl_L(A) \leq acl_L(A)$ puisque $acl_L(A) \leq L$.

— Nous disons que $L \in \mathcal{D}$ est *de base $< \kappa$* s'il y a $A \subseteq L$ de cardinal $< \kappa$ tel que $L = cl_L(A)$. Pour $L \leq M$, M est une extension de base $< \kappa$ de L s'il y a $A \subseteq M$ de cardinal $< \kappa$ tel que $M = cl_M(LA)$. Lorsque $\kappa = \omega$, nous parlerons de structures (resp. d'extensions) *de base finie*.

Propriété d'amalgamation : Pour L et M dans \mathcal{D} de base finie sur une structure commune $R \in \mathcal{D}$, disons via f_{RL} et f_{RM} , il y a $N \in \mathcal{D}$ un amalgame de f_{RL} et f_{RM} qui est de base finie sur R .

Extensions minimales : Pour toute extension propre $L \leq M$, il y a $X \in \mathcal{D}$ une extension propre de L avec $L \leq X \leq M$ minimale pour l'inclusion. On appelle alors X une *extension minimale* de L . Notons qu'une extension minimale de L est nécessairement de base finie sur L par ormessiennité de l' acl .

Analysabilité : Toute extension ormessienne de base $< \kappa$ se décompose en une tour d'extensions minimales de longueur $\lambda < \kappa$.

Pré-stabilité : Pour $L \in \mathcal{D}$, il n'y a à \mathcal{L} -isomorphie au dessus de L près que $|L|$ extensions de base finie de L dans \mathcal{D} .

Lemme 3.1.1. *Soit \mathcal{D} une classe d'amalgamation. Soient $M, N \in \mathcal{D}$ avec $M \preceq N$, et $A \subseteq M$. On a :*

1. $M \leq N$
2. $cl_M(A) = cl_N(A)$.

Démonstration:

1. Dans N , $M = acl_N(M) \leq N$.
2. On a $cl_M(A) \leq M \leq N$ donc par minimalité dans N $cl_N(A) \leq cl_M(A)$.
En particulier, $cl_N(A) \leq M$. Par minimalité dans M il vient donc $cl_M(A) \leq cl_N(A)$. \square

Classes d'amalgamation de corps octarines Nous allons voir que la catégorie ayant pour objets les $L \in \mathcal{C}^0$ et pour flèches les injections ormessiennes (comme défini au chapitre 2) est une classe d'amalgamation. L'élémentarité de \mathcal{C}^0 sera établie au chapitre 5.

L'ormessiennité de l' acl peut sembler étrange, mais c'est un phénomène qui survient naturellement :

Lemme 3.1.2. *Supposons que \mathcal{E} est une sous-classe élémentaire de \mathcal{C}^0 .*

Pour $A \subseteq M \in \mathcal{E}$, $acl_M(A) \leq M$. En particulier, comme \mathcal{C}^0 est élémentaire, elle satisfait l'ormessiennité de l' acl .

Démonstration: Supposons que $acl_M(A)$ n'est pas ormessien dans M , alors il y a un n -uple octarine $\bar{a} \in O(M) \setminus O(acl_M(A))$, linéairement indépendant au dessus de $O(acl_M(A))$ et avec $dtr(\bar{a}/acl_M(A)) < (g-1) \cdot n$. Soient U le locus de \bar{a} et $L = \tilde{L} \subseteq acl_M(A)$ un corps de degré de transcendance fini sur lequel U est défini. Soit M' une extension élémentaire très saturée de M . Alors, $M' \in \mathcal{E}$ et donc $K \leq M'$. Comme $\bar{a} \notin acl_M(A)$, on peut réaliser $tp(\bar{a}/acl_M(A))$ un nombre suffisant de fois pour qu'il ait une suite $(\bar{a}_i)_{i < \omega} \subseteq M'$ de réalisations telle que $\forall i \neq j, \forall I \subseteq \omega \setminus \{i, j\}, \bar{a}_i$ et \bar{a}_j sont indépendants linéairement au dessus des $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ ⁵. Soit i suffisamment grand pour que $i \cdot \delta(\bar{a}/L) < -\delta(L/K)$. Alors on a $\delta(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i/L) < -\delta(L/K)$. En particulier, $\delta(L\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i/K) < 0$, une contradiction à $K \leq M'$. Par conséquent, $acl_M(A) \leq M$. \square

Établir la pré-stabilité a été la première difficulté que nous avons rencontrée. Nous désirons que \mathcal{C}^0 elle-même soit une classe d'amalgamation de corps octarine, ce qui n'était pas si clair car donné une base octarine d'une éventuelle extension ormessienne de base finie de $L \in \mathcal{C}^0$, il y a potentiellement \beth_1 manières de colorier cette extension. Nous aborderons ce point en détail dans le chapitre prochain.

3.2 Structures riches

Donné une classe d'amalgamation \mathcal{D} , une structure κ -riche (pour \mathcal{D}) est une structure $\mathcal{K} \in \mathcal{D}$ satisfaisant :

Pour tout $L \leq \mathcal{K}$ de base $< \kappa$, pour toute extension $M \in \mathcal{D}$ ormessienne de L de base finie, M se plonge ormessiennement dans \mathcal{K} au dessus de L .

5. l'espace vectoriel octarine engendré par un nombre fini d'éléments est dénombrable

Nous suivons les conventions classiques, et L est dit *riche* s'il est riche dans sa propre cardinalité.

Comme toute extension ormessienne de base $< \kappa$ se décompose en une tour d'extensions minimales de longueur $\lambda < \kappa$ (analysabilité), il suffit de garantir que

Pour tout $L \leq \mathcal{K}$ de base $< \kappa$, pour toute extension $M \in \mathcal{D}$ minimale de L , M se plonge ormessiennement dans \mathcal{K} au dessus de L .

La propriété d'amalgamation telle que nous l'avons énoncée n'est pas restrictive. On peut aussi amalgamer des structures qui ne sont pas de base finie sur leur sous-structure ormessienne commune après les avoir décomposées en tours d'extensions minimales. Nous précisons un détail technique :

Lemme 3.2.1. *Soient $R, L, M \in \mathcal{D}$, et des flèches f_{RL} et f_{RM} . Supposons que L/R est de base dénombrable et que M/R est de base finie. Alors il y a un amalgame $N \in \mathcal{D}$ de f_{RL} et f_{RM} au dessus de R , qui est de base dénombrable sur R .*

Démonstration: Décomposons L/R en une tour dénombrable d'extensions minimales $R \leq L_0 \leq L_1 \leq \dots$ dont L est l'union de chaîne. Soit N_0 un amalgame de L_0 et M de base finie au dessus de R , et pour tout i , N_{i+1} un amalgame de N_i et L_{i+1} de base finie au dessus de L_i . L'union de chaîne N des N_i convient. \square

Proposition 3.2.2. *Soit \mathcal{D} une classe d'amalgamation, et $M \in \mathcal{D}$ dénombrable. M se plonge ormessiennement dans une structure dénombrable riche pour \mathcal{D} .*

Démonstration: Par pré-stabilité de \mathcal{D} , pour chaque $L \in \mathcal{D}$ de base finie il y a un ensemble dénombrable $MIN(L) = \{(E_i, L)\}_{i < \omega}$ tel que toute extension minimale de L soit isomorphe au dessus de L à l'un des E_i .

Par diagonalisation, nous construisons une chaîne $K_0 \leq K_1 \leq \dots$ d'objets dénombrables de \mathcal{D} telle que :

1. $K_0 = M$
2. Pour tout $n < \omega$, pour tout $L \leq K_n$ de base finie, pour toute extension minimale M de L , M s'injecte ormessiennement dans K_{n+1} au dessus de L .

On pose $K_0 = M$. Supposons que K_n soit construit pour $n < \omega$. Soit $\{(F_i, L_i)\}_{i < \omega}$ une énumération de

$$\bigcup_{\substack{L \in \mathcal{C}^0 \\ L \leq K_n \\ \text{de base finie}}} MIN(L)$$

En commençant par $N_0 := K_n$, on définit une chaîne $N_0 \leq N_1 \leq \dots$ en posant que N_{i+1} est un amalgame de N_i et F_i au dessus de L_i . On définit alors K_{n+1} comme l'union de chaîne des N_i . On a bien $K_n \leq K_{n+1}$, et K_{n+1} est de base dénombrable puisque chaque N_i est de base dénombrable.

L'union de chaîne des K_n est le corps riche dénombrable désiré. \square

Proposition 3.2.3 (Va et vient). *Soient \mathcal{D} une classe d'amalgamation, et κ un cardinal infini.*

Dans les κ -riche pour \mathcal{D} , les isomorphismes entre sous structures ormessiennes de base $< \kappa$ ont la propriété du va et vient infini.

Démonstration: Soient $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ deux κ -riches pour \mathcal{D} . Par symétrie, il suffit de prouver le va.

Soient donc M, M' des sous-structures ormessiennes de base $< \kappa$ de \mathcal{K} et \mathcal{K}' respectivement, et $\sigma : M \rightarrow M'$ un \mathcal{L} -isomorphisme. Soit $M \leq N \leq \mathcal{K}$ de base $< \kappa$, alors M' se plonge ormessiennement dans N (via σ^{-1}) et nous pouvons donc plonger ormessiennement N dans \mathcal{K}' au dessus de M' . \square

3.3 Riches avec théorie

Fixons une classe élémentaire d'amalgamation de corps octarines \mathcal{D} .

Pour les classes d'amalgamation qui nous concernent, nous donnerons par la suite des théories qui satisferont l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3.1. *T est une \mathcal{L} -théorie consistante telle que pour tout cardinal infini κ , tout modèle κ -saturé de T est κ -riche pour \mathcal{D} .*

Sous l'hypothèse ci dessus, T est complète. En effet, un κ -riche et un κ' -riche sont ω -équivalents. Ainsi, tout κ -riche est modèle de T . Nous appelons alors T LA théorie des riches (pour \mathcal{D}).

Lemme 3.3.2 (Types de la théorie des riches). *Sous l'hypothèse 3.3.1, soient $A \subseteq M \models T$ et $B \subseteq N \models T$. Alors $tp(A) = tp(B)$ si et seulement si $cl_M(A) \cong cl_N(B)$ via un isomorphisme qui envoie A sur B .*

Démonstration: “ \Leftarrow ” Soient M' et N' des extensions élémentaires $|cl_M(A)|^+$ -saturées de M et N respectivement. M' et N' sont donc $|cl_M(A)|^+$ -riches. Comme $cl_M(A) \cong cl_N(B)$, il vient que $tp(A)$ et $tp(B)$ sont ω -équivalents d'après le lemme 3.2.3. Donc, $tp(A) = tp(B)$.

“ \Rightarrow ” Supposons que $tp(A) = tp(B)$, alors il y a une extension élémentaire \mathcal{M} commune à M et N dans laquelle $acl(A)$ et $acl(B)$ sont conjugués par un automorphisme σ envoyant A sur B .

Nous constatons que $\sigma(cl_{\mathcal{M}}(A)) = cl_{\mathcal{M}}(B)$:
 $\sigma(cl_{\mathcal{M}}(A)) \leq \mathcal{M}$ donc $cl_{\mathcal{M}}(B) \subseteq \sigma(cl_{\mathcal{M}}(A))$ par minimalité. De même, $cl_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \sigma^{-1}(cl_{\mathcal{M}}(B))$.
On a donc $\sigma(cl_{\mathcal{M}}(A)) = cl_{\mathcal{M}}(B)$.

Or, $cl_M(A) = cl_{\mathcal{M}}(A)$ et $cl_N(B) = cl_{\mathcal{M}}(B)$. \square

Remarque 3.3.3. *Soient $M, N \models T$ avec $M \leq N$, alors $M \preceq N$.*

Démonstration: Soit $\bar{a} \in M$. Comme $M \leq N$, on a $cl_M(\bar{a}) = cl_N(\bar{a})$. Donc \bar{a} a le même type dans M et dans N d'après le lemme 3.3.2. \square

Théoreme 3.3.4 (Saturation et stabilité). *Sous l'hypothèse 3.3.1 :*

1. *Tout corps κ -riche pour \mathcal{D} est κ -saturé.*
2. *T est ω -stable.*

Démonstration de 1.: Soit \mathcal{K} un κ -riche. Soit $A \subseteq \mathcal{K}$ un ensemble de cardinal $< \kappa$, et $p \in S_1(A)$. Réalisons p par a dans une extension élémentaire \mathcal{M} de \mathcal{K} . Alors $cl_{\mathcal{M}}(Aa)$ est de base finie sur

$cl_{\mathcal{M}}(A) = cl_{\mathcal{K}}(A)$ et $|cl_{\mathcal{K}}(A)| \leq |acl(A)| < \kappa$. Nous pouvons injecter ormessiennement $cl_{\mathcal{M}}(Aa)$ dans \mathcal{K} au dessus de $cl_{\mathcal{K}}(A)$, disons via σ . Soit $b = \sigma(a)$.

Nous constatons que $\sigma(cl_{\mathcal{M}}(Aa)) = cl_{\mathcal{K}}(Ab)$ afin de conclure que $b \models p$ grâce au lemme 3.3.2 : Par minimalité, on a $cl_{\mathcal{K}}(Ab) \leq \sigma(cl_{\mathcal{M}}(Aa))$. Supposons que cette inclusion soit stricte, alors $\sigma^{-1}(cl_{\mathcal{K}}(Ab))$ serait ormessien dans \mathcal{M} et strictement inclus dans $cl_{\mathcal{M}}(Aa)$, ce qui serait absurde. \square

Démonstration de 2.: Tout modèle dénombrable M de T se plonge élémentairement dans un riche dénombrable \mathcal{K} d'après 3.2.2 et 3.3.3. Or, \mathcal{K} est saturé d'après ce qui précède. Par conséquent, $S_1(M)$ est dénombrable. \square

4 Choix des racines : le Kummer Kummer

4.1 Système de racines octarines

Soient $L \in \mathcal{C}^0$ et $a_1, \dots, a_m \in A$ linéairement indépendants au dessus de $A(L)$. Nous étudions les corps octarines de support $L(a_1, \dots, a_m)$ tels que a_1, \dots, a_m engendrent l'espace vectoriel octarine au dessus de $O(L)$.

Soit M un tel corps, alors pour tout $n \geq 1$ il y a un unique m -uplet octarine \bar{b}_n tel que $n \cdot \bar{b}_n = \bar{a}$, qui correspond à $(Id \otimes \frac{1}{n}) \cdot \bar{a}$. Les $(\bar{b}_n)_{n \geq 1}$ vérifient en outre

$$(1) \quad k \cdot \bar{b}_{k \cdot n} = \bar{b}_n \quad \text{et} \quad \bar{b}_1 = \bar{a}$$

On appelle système de racines octarines de \bar{a} toute suite $(\bar{b}_n)_{n \geq 1} \subseteq A^m$ satisfaisant (1).

Réciproquement, donné un système de racines octarines $(\bar{b}_n)_{n \geq 1}$ de \bar{a} , on définit un espace vectoriel octarine engendré par \bar{a} au dessus de $O(L)$ en décrétant que les \bar{b}_n , $n \geq 1$ et leurs images par $End(A)$ sont octarines. Pour $\alpha = \gamma \otimes \frac{p}{q} \in End^0(A)$ et $1 \leq i \leq m$, on pose $\alpha \cdot a_i := p \cdot \gamma((\bar{b}_q)_i)$. Notre espace vectoriel est alors le sous-groupe engendré par $\{\alpha \cdot a_i \mid \alpha \in End^0(A), 1 \leq i \leq m\}$.

Comme $A[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, l'ensemble des systèmes de racines octarines de \bar{a} est isomorphe à la limite projective $\widehat{\mathbb{Z}}^{2g}$. Il y a donc \beth_1 systèmes de racines octarines de \bar{a} , qui correspondent à autant de manières de faire de $L(a_1, \dots, a_m)$ un corps octarine engendré par \bar{a} . Cependant, nous ne nous intéressons qu'au type d'isomorphie de ces corps octarines au dessus de L et de \bar{a} . En effet, dans la pratique, \bar{a} sera une réalisation générique d'une formule du langage des corps qui décrira un certain type d'extension que l'on aura à réaliser.

Problème 4.1.1 (Kummer Kummer). *Donnés L et \bar{a} comme ci-dessus, combien y a-t'il à isomorphie près de systèmes de racines octarines de \bar{a} ? Comment cette quantité varie-t'elle lorsque le locus de \bar{a} sur L parcourt une famille uniforme?*

4.2 Kummer pour l'amalgame libre

Pour réaliser un corps octarine riche dénombrable qui soit ω -saturé, nous aurons besoin de savoir que les classes d'isomorphismes des corps octarines de base finie sur K forment un ensemble dénombrable.

Théorie de Kummer Soient L un corps clos et $a_1, \dots, a_m \in A$. On note $L(n^{-1} \cdot \bar{a})$ l'extension de L obtenue par adjonction des $\alpha \in A^m(\tilde{L})$ tels que $n \cdot \alpha = \bar{a}$. L'extension $L(n^{-1} \cdot \bar{a})/L$ est galoisienne, on note G_n son groupe de Galois. Le lemme qui suit est une transposition du chapitre sur les extensions de Kummer dans [8] :

Lemme 4.2.1. *Soit $n \geq 1$. L'application*

$$\begin{aligned} \rho_n : G_n &\rightarrow A^m[n] \\ \sigma &\rightarrow \sigma(\alpha) - \alpha \text{ pour } \alpha \in n^{-1} \cdot \bar{a} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe bien défini. Son noyau est trivial.

Bien défini : Soient $\alpha, \alpha' \in n^{-1} \cdot \bar{a}$. Alors $\alpha' = \alpha + \xi$ pour $\xi \in A^m[n]$. Or, $A^m[n] \subseteq A(L)$. On a donc

$$\sigma(\alpha') - \alpha' = \sigma(\alpha + \xi) - (\alpha + \xi) = \sigma(\alpha) + \xi - (\alpha + \xi) = \sigma(\alpha) - \alpha$$

$\rho_n(\alpha)$ est donc bien défini.

Morphisme : Soient $\sigma, \tau \in G_n$ et $\alpha \in n^{-1} \cdot \bar{a}$. Comme $\sigma(\alpha) \in n^{-1} \cdot \bar{a}$, on a $\rho_n(\tau) = \tau(\sigma(\alpha)) - \sigma(\alpha)$. Or, $\rho_n(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha$. Donc,

$$\rho_n(\tau) + \rho_n(\sigma) = \tau(\sigma(\alpha)) - \alpha = \rho_n(\tau \circ \sigma)$$

De plus, $\rho_n(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}(\alpha) - \alpha \in A^m[n] \subseteq A(\text{fix}(\sigma))$. On a donc :

$$\rho_n(\sigma^{-1}) = \sigma(\rho_n(\sigma^{-1})) = \alpha - \sigma(\alpha) = -\rho_n(\sigma)$$

Noyau : Soit $\sigma \in G_n$ tel que $\rho_n(\sigma) = 0$. Alors pour tout les générateurs α de $L(n^{-1} \cdot \bar{a})/L$, on a $\sigma(\alpha) = \alpha$ et donc $\sigma = \text{Id}$. Le noyau est donc trivial.

□

Le système des ρ_n induit

$$\rho_\infty : \text{Aut}(L(\bigcup_n n^{-1} \cdot \bar{a})/L) \rightarrow \varprojlim_n A^m[n]$$

Nous remercions chaleureusement Daniel Bertrand pour nous avoir écouté et nous avoir indiqué que nous pourrions sûrement déduire la proposition suivante de son article [2].

Proposition 4.2.2. *Soient $L \in \mathcal{C}^0$ de base finie sur K , et $\bar{a} \in A$ linéairement indépendant au dessus de $A(L)$. Alors il n'y a à isomorphie près qu'un nombre fini de systèmes de racines octarines de \bar{a} .*

Démonstration: La clôture de Zariski de $\mathbb{Z} \cdot \bar{a}$ est un sous groupe de A^m . Comme $\bar{a} \in A$ est linéairement indépendant au dessus de $A(L)$, d'après le corollaire 1.3.7, la clôture de Zariski de $\mathbb{Z} \cdot \bar{a}$ est A^m tout entier. Comme $M := L(\bar{a})$ est de type fini sur L , il y a une L -variété affine W , irréductible sur L , telle que $M = L(W)$. Comme L est algébriquement clos, $W_{\mathbb{C}} = \text{Spec}(L[W] \otimes_M \mathbb{C})$ est irréductible. On note $M_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}(W_{\mathbb{C}})$. Comme L est de degré de transcendance fini, L se plonge dans \mathbb{C} . On identifie $M = L(\bar{a})$ avec son image dans $M_{\mathbb{C}}$.

Comme $M \downarrow_L \mathbb{C}$, on voit que $tp(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ est une extension non déviante de $tp(M/L)$, sa restriction à L . Par conséquent, $tp(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ hérite de $tp(M/L)$ et donc \bar{a} est linéairement indépendant au dessus de $A(\mathbb{C})$. En particulier, la clôture de Zariski de $\mathbb{Z} \cdot \bar{a}$ au dessus de \mathbb{C} est A^m .

Fait 4.2.3 ([2]). *Il existe un entier ν tel que pour tout n , le groupe de Galois $\text{Gal}(M_{\mathbb{C}}(n^{-1} \cdot \bar{a})/M_{\mathbb{C}})$ soit isomorphe à un sous-groupe de $A^m[n]$ d'indice borné par ν .*

Comme $tp(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ hérite de $tp(M/L)$, on a $G_n \cong \text{Gal}(M_{\mathbb{C}}(n^{-1} \cdot \bar{a})/M_{\mathbb{C}})$. En particulier, G_n est isomorphe à un sous groupe de $A^m[n]$ d'indice borné par ν . Comme les ρ_n sont injectifs, cela implique que les $\rho_n(G_n)$ sont d'indice dans $A^m[n]$ borné par ν . Par conséquent, $\text{Im}(\rho_\infty)$ est d'indice fini dans la limite projective des $A^m[n]$. □

Cette proposition nous a suffi pour réaliser l’amalgame libre. Avec le codage (faible en ce sens qu’à un code pouvait correspondre plusieurs extensions octarines non isomorphes correspondant au différents types de racines octarines) des extensions minimales préalgébriques, nous avons pu garantir la pré-stabilité de C^0 , et donc amalgamer. Nous avons même pu axiomatiser l’amalgame libre.

En revanche, pour prouver le lemme d’amalgamation collapsée, il nous fallait de “vrais” codes : des formules des corps dont toutes les réalisations octarines engendrent une extension minimale, unique à isomorphisme près. Il semble difficile, pour un amalgame à la dimension négative modulaire, de se passer de ce qui suit.

4.3 Kummer uniforme

C’est donc la deuxième partie de la question 4.1.1 qui nous a posé le plus de problème. Malgré tous nos efforts, il nous a été impossible de la contourner. Il est temps de remercier chaleureusement Martin Hils. C’est lui qui nous a sorti de l’impasse.

Il y avait dans la preuve de la construction des corps verts [1] un trou. Étrangement, il a donné la preuve de l’ingrédient essentiel pour combler ce trou dans [5] sans avoir conscience dudit trou. C’est lui et Martin Bays qui ont su formuler le problème (dans le cas des variétés abéliennes) de manière à obtenir la réponse d’Ofar Gabber. Ce qui suit est tiré de leur article [9].

Variété Kummer-générique Une sous-variété irréductible V d’une variété abélienne S est dite Kummer-générique si pour tout $n \geq 1$, la variété $n^{-1} \cdot X$ est irréductible. Un ensemble définissable dans le langage des corps est Kummer-générique si sa clôture de Zariski l’est.

Ceci est la bonne définition pour notre problème :

Remarque 4.3.1. *Soit $L \in C^0$, et V une variété Kummer générique définie sur L . Tous les éléments de \mathcal{C} obtenus en adjoignant à L un générique de V peint en octarine pour base sont isomorphes sur L .*

Une sous-variété irréductible V d’une variété abélienne S est dite libre si elle n’est pas contenue dans le translaté d’un sous-groupe de S , c’est à dire si un générique de V est linéairement indépendant. Nous verrons qu’être libre est une condition définissable (lemme 5.3.1). Un ensemble définissable dans le langage des corps est libre si sa clôture de Zariski l’est. Une formule du langage des corps est libre si l’ensemble qu’elle définit l’est.

Fait 4.3.2 ([9]). *Soit $V \subseteq S$ une variété libre, alors il y a $n \geq 1$ tel que toutes les composantes irréductibles de $n^{-1} \cdot V$ sont Kummer-génériques.*

Fait 4.3.3 ([9]). *Soit $V \subseteq S$ une famille de sous-variétés, alors $\{t \mid V_t \text{ est Kummer-générique}\}$ est un ensemble définissable.*

Par compacité, on obtient immédiatement une version uniforme du fait 4.3.2 :

Corollaire 4.3.4. *Soit $V \subseteq S$ une famille de variétés libres, alors il y a $n \geq 1$ tel que pour tout \bar{b} , toutes les composantes irréductibles de $n^{-1} \cdot V_{\bar{b}}$ sont Kummer-génériques.*

5 Axiomatisation des corps octarines

5.1 La conjecture d'intersection avec les tores

La CIT a été l'ingrédient essentiel à Bruno Poizat pour axiomatiser les corps verts non-collapsés dans [14]. Elle est aussi utilisée dans [1] pour encoder les extensions minimales préalgébriques.

Jonathan Kirby en a démontré une transposition dans le contexte des variétés abéliennes. Dès lors, il semblait clair que l'on pourrait un jour amalgamer un corps avec un sous groupe d'une variété abélienne :

Fait 5.1.1 ([7], Th. 4.7). *Soient Θ une variété semiabélienne définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et V une famille uniforme de sous-variétés de Θ . Alors, il existe une famille finie $\mathcal{T}(\Theta, V)$ de sous-groupes algébriques propres de Θ satisfaisant : pour tout sous-groupe algébrique T de Θ , si W est une composante irréductible de $(\bar{a} + T) \cap V_{\bar{b}}$ pour certains \bar{a} et \bar{b} , telle que $\dim(T) - \dim(W) < \dim(\Theta) - \dim(V_{\bar{b}})$, alors il y a $T' \in \mathcal{T}(\Theta, V)$, de dimension $\leq \dim(T) + \dim(V_{\bar{b}}) - \dim(W)$ tel que W est incluse dans un translaté de T' .*

Codimension, variété cd-maximale Soit G un groupe algébrique, et $V \subseteq G$ une variété irréductible. Notons T le plus petit sous-groupe de G dont un translaté contient V , nous appelons T sous-groupe minimal de V . Nous appelons codimension de V la quantité $cd(V) := \dim(T) - \dim(V)$.

Une sous-variété irréductible V de W est dite cd-maximale (au sein de W) si pour toute variété irréductible $V' \subsetneq V \subseteq W$, $cd(V') > cd(V)$. Nous omettrons de préciser au sein de quelle variété une variété est cd-maximale, ce sera clair dans le contexte.

La proposition suivante a été prouvée dans le cas des tores (au lieu des variétés semiabéliennes) dans [14]. Nous tenons à remercier Martin Hils pour nous en avoir donné une preuve moins elliptique que la preuve originale.

Proposition 5.1.2. *Soient S une variété semiabélienne, et V une famille uniforme de sous-variétés de S . Alors il y a un ensemble fini $Sub(V)$ de sous-groupes de S tel que pour tout \bar{b} et toute sous-variété cd-maximale W de $V_{\bar{b}}$, le groupe minimal de W appartient à $Sub(V)$.*

Démonstration: Nous construisons tout d'abord un arbre (fini) dont les noeuds sont étiquetés par des sous groupes de S par induction comme suit :

Nous partons d'une racine R , étiquetée par le groupe S . Supposons qu'à une étape de la construction de l'arbre, L soit une feuille étiquetée par un groupe T . Nous considérons V' la famille (uniforme) $(V_{\bar{b}} \cap \bar{a} \cdot T)_{\bar{b}, \bar{a}}$. Soient I_0, \dots, I_s des familles uniformes de variétés telles que toute composante irréductible d'une instance de V' soit une instance de I_i pour un certain i . Pour chaque

$$T' \in \bigcup_{i \leq s} \mathcal{T}(T, I_i)$$

nous ajoutons alors un fils à L , étiqueté par T' (nous ne faisons rien s'il n'y a pas de tels T'). La construction s'arrête s'il n'y a plus rien à faire ou à l'étape ω .

L'arbre que nous avons construit est à branchement fini, et toutes ses branches sont de longueur finie puisque la dimension des étiquettes décroît. D'après le lemme de König, il est donc fini.

Soit $Sub(V)$ l'ensemble des composantes connexes des étiquettes de notre arbre. Nous prétendons que $Sub(V)$ satisfait l'énoncé de la proposition.

Soient $U := V_{\bar{b}}$ pour un \bar{b} , et W une sous-variété cd-maximale de U ayant M comme sous groupe de S minimal. Comme W est irréductible, M est connexe : sinon, W serait partitionné en fermés par les translantés de M° . Nous montrons que $M \in Sub(V)$ par induction sur l'arbre ci-dessus, en commençant par la racine R . Soit T une étiquette d'un noeud de notre arbre telle que $W \subseteq \bar{a} \cdot T$ pour un certain \bar{a} . Comme W est irréductible, W est incluse dans une composante irréductible I de $U \cap \bar{a} \cdot T$.

Nous distinguons alors deux cas :

cas 1 : $cd(W) = \dim(M) - \dim(U) < \dim(T) - \dim(I)$. Par construction de notre arbre et par le fait 5.1.1, un translanté de l'étiquette T' d'un des fils de ce noeud contient W . Remarquons que $\dim(T') < \dim(T)$. Nous continuons alors l'induction avec ce fils.

cas 2 : $cd(W) = \dim(M) - \dim(U) \geq \dim(T) - \dim(I)$. On a $\dim(T) - \dim(I) \geq cd(I)$. Comme W est cd-maximale et I est irréductible, on doit avoir égalité, et donc nous devons avoir $I = W$. Par conséquent, $M \subseteq T$, et donc $M = T^\circ$, et alors $M = T^\circ \in Sub(V)$, QED.

Comme la dimension de T décroît à chaque étape, il est nécessaire que le cas 2 finisse par se présenter. \square

La finitude de cette famille $Sub(V)$ est un ressort d'axiomatisation crucial. Par exemple, cela nous permet d'exprimer la *non-ormessianité* au premier ordre, comme l'avait remarqué Bruno Poizat :

Lemme 5.1.3. *Soient L un corps algébriquement clos contenant K , V une sous variété algébrique de A^n de dimension $n \cdot (g - 1)$, de sous groupe minimal A^n , et \bar{a} générique dans V . Supposons que pour le sous-groupe minimal T de toute sous-variété cd-maximale W de V , on ait $\dim(V \cap \bar{a} + T) < \frac{g-1}{g} \cdot \dim(T)$ à moins que $T = A^n$ ou $T = 0$.*

Sous ces hypothèses, soit W une variété irréductible de $V \cap \bar{a} + T$, où T est le sous-groupe minimal de W . Alors, si T est propre, on a $\dim(W) < \frac{g-1}{g} \cdot \dim(T) < n$.

Démonstration: Supposons que non. Alors pour W, T comme ci dessus on a $cd(W) = \dim(T) - \dim(W) \leq \frac{1}{g} \dim(T) < n$.

Soit $W \subseteq W' \subseteq V$ irréductible contenant W et telle que $cd(W') \leq cd(W)$ de dimension maximale. W' est cd-maximale. Soit T' son sous groupe minimal. Alors $W' \subseteq V \cap \bar{a} + T'$. Notons que $\dim(T') \geq \dim(T)$.

Constatons que $\dim(W') = \dim(V \cap \bar{a} + T')$: sinon, il y a une composante irréductible X de $V \cap \bar{a} + T'$ contenant strictement W' . Comme W' est cd-maximale, $cd(X) > cd(W')$ et donc la dimension du sous groupe minimal U de X est strictement supérieure à celle de T' . Ceci est une

contradiction puisque X est inclus dans $\bar{a} + T'$.

T' ne peut pas être trivial puisque $T' \supseteq T \neq 0$. $T' \neq A^n$ car sinon $cd(W') \geq n > cd(W)$. Par hypothèse, on a donc $dim(W') = dim(V \cap \bar{a} + T') < \frac{g-1}{g} \cdot dim(T')$, d'où $cd(W') > \frac{1}{g} dim(T') \geq \frac{1}{g} dim(T)$, et donc $cd(W') > cd(W)$. Une contradiction. \square

5.2 La théorie de \mathcal{C}^0

La théorie T_0 est la théorie dans le langage \mathcal{L}_O dont les modèles M vérifient :

(OCT) $M \in \mathcal{C}$

(ACF) $(M, +, -, \cdot)$ est un corps algébriquement clos contenant K .

(VEC) $O(M)$ est un sous groupe de $A(M)$ divisible et clos par $End(A)$, et $O(K)$ est trivial.

(ORM) Pour toute sous-variété V de A^n définie sur K avec $dim(V) < n \cdot (g-1)$,

$$M \models \forall x_1, \dots, x_n \left(V(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(x_i) \right) \rightarrow \bigvee_{\substack{T \in \mathcal{T}(A^n, V) \\ dim(T) \leq \frac{g}{g-1} \cdot dim V}} T(\bar{x})$$

où $\mathcal{T}(A^n, V)$ est la famille finie donnée par le fait 5.1.1.

On notera que (VEC) implique que $O(M)$ est un $End^0(A)$ -espace vectoriel.

Le schema d'axiomes (ORM) est une transposition dans notre contexte de l'astuce de Bruno Poizat pour axiomatiser les corps verts dans [14]. On pourra comparer le théorème suivant avec le corollaire 3.4 du même article.

Théorème 5.2.1. \mathcal{C}^0 est la classe des modèles de T_0 .

Démonstration: Soit $L \in \mathcal{C}^0$. (OCT), (ACF) et (VEC) sont évidents. Montrons que L satisfait (ORM). Soit V une sous variété de A^n avec $dim(V) < n \cdot (g-1)$, et \bar{a} un uple octarine de $V(L)$. Soit W le locus de \bar{a} sur K .

Soit $\bar{b} = b_1, \dots, b_{ldim(\bar{a})}$ une base $End^0(A)$ -linéaire extraite de \bar{a} . Par définition, pour $1 \leq i \leq n$, $a_i = \sum_j \alpha_j^i \cdot b_j$ avec $(\alpha_j^i)_{i,j} \in End^0(A)$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(End^0(A))$ dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne est $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{ldim(\bar{a})}^i, 0, \dots, 0)$. Il est évident par construction que $rg(M) = ldim(\bar{a})$. Soit G l'image de A^n par α_M . On a $\bar{a} \in G$ puisque $\bar{a} = \alpha_M((b_1, \dots, b_l, 0, \dots, 0))$, et donc $W \subseteq G$. De plus, $dim(G) = g \cdot ldim(\bar{a})$ d'après le lemme 1.3.5.

Comme $K \leq L$, on doit avoir $dim(W) = dtr(\bar{a}) \geq (g-1) \cdot ldim(\bar{a})$, d'où $dim(G) - dim(W) \leq ldim(\bar{a}) \leq n$. D'un autre côté, $dim(A^n) - dim(V) = g \cdot n - dim(V) > n$. On a donc $dim(G) - dim(W) < dim(A^n) - dim(V)$, et par conséquent d'après le fait 5.1.1 il y a $T \in \mathcal{T}(A^n, V)$, avec $dim(T) \leq dim(V) + dim(G) - dim(W)$ tel que W est incluse dans un translaté de T . Comme $dim(G) - dim(W) \leq ldim(\bar{a}) \leq \frac{dim(V)}{g-1}$, on a bien

$$dim(T) \leq \frac{g}{g-1} \cdot dim(V)$$

Comme W et T sont définies sur K , il y a $\bar{c} \in A(K)$ tel que $W \subseteq \bar{c} + T$. Nous montrons que $\bar{a} \in T$, ce qui montrera $L \models T_0$. Comme W est irréductible, $W \subseteq \bar{c} + T^0$.

D'après le corollaire 1.3.7, T^0 est une intersection de dépendances quasilineaires, disons

$$\bar{x} \in T^0 \Leftrightarrow \forall i \in n, \sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(x_j) \ni 0 \quad (\alpha_{i,j} \in \text{End}^0(A))$$

Quitte à multiplier par le ppcm des multiplicités des $\alpha_{i,j}$, on peut supposer que $\alpha_{i,j} \in \text{End}(A) \forall i, j$ et que

$$\bar{x} \in T^0 \Leftrightarrow \forall i \in n, \sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(x_j) = 0$$

Comme $\bar{a} \in \bar{c} + T^0$, on a pour $i \in n$

$$\sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(a_j - c_j) = 0$$

d'où

$$\sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(a_j) = \sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(c_j)$$

Le second terme de cette égalité est octarine. Comme il est dans $A(K)$, il est nul. En résumé,

$$\sum_{j \in n} \alpha_{i,j}(a_j) = 0 \quad \forall i \in n$$

d'où $\bar{a} \in T^0 \subseteq T$.

Réciproquement, soit $L \models T_0$. Pour montrer $L \in \mathcal{C}^0$, il suffit de montrer que pour tout uplet octarine $a_1, \dots, a_n \in O(L)$, $dtr(\bar{a}) \geq (g-1) \cdot ldim(\bar{a})$.

Soit V le locus de \bar{a} sur K . Si $dim(V) \geq (g-1) \cdot n$, il n'y a pas de problème vu que $ldim(\bar{a}) \leq n$.

Sinon, (ORM) s'applique. On a un T avec $dim(T) \leq \frac{g}{g-1} \cdot dim(V)$ tel que $\bar{a} \in T$. D'après le corollaire 1.3.7, $ldim(\bar{a}) \leq \frac{dim(T)}{g}$. Il vient donc $(g-1) \cdot ldim(\bar{a}) \leq \frac{g-1}{g} \cdot dim(T) \leq dim(V) = dtr(\bar{a})$. \square

5.3 Codage des extensions minimales préalgébriques

Lemme 5.3.1. *Soit $V_{\bar{y}}(\bar{x})$ une famille uniforme de sous-variétés de A^n . L'ensemble des \bar{b} tels que $V_{\bar{b}}$ est irréductible et libre est définissable.*

Démonstration: Soit $\mathcal{T}(A^n, V)$ la famille donnée par le fait 5.1.1. L'ensemble des \bar{b} tels que $V_{\bar{b}}$ est irréductible est définissable. Pour un tel \bar{b} , $V_{\bar{b}}$ est libre ssi pour tout $T \in \mathcal{T}(A^n, V)$, pour tout $\bar{a} \in A^n$, $V_{\bar{b}}$ n'est pas contenue dans $\bar{a} + T$:

La condition est clairement nécessaire. Nous voyons aussi qu'elle est suffisante car si $V_{\bar{b}} \subseteq \bar{a} + T$ pour T un sous groupe propre de A^n , alors $V_{\bar{b}}$ est une composante irréductible de $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ et il y a donc $T' \in \mathcal{T}(A^n, V)$ tel que $V_{\bar{b}} \subseteq \bar{a} + T'$. \square

Soit $V_{\bar{y}}(\bar{x}) \subseteq A^n$ une famille uniforme de sous-variétés de A^n . Nous allons “coder” les extensions minimales préalgébriques dans le sens suivant :

Théoreme 5.3.2. *Il existe pour chaque $V_{\bar{y}}(\bar{x}) \subseteq A^n$ une formule $\psi_{V,n}(\bar{y})$ du langage des corps, et ces formules satisfont :*

1. *Pour $L \in \mathcal{C}^0$ et $\bar{b} \in L$ avec $L \models \psi_{V,n}(\bar{b})$, si l'on prend une réalisation générique \bar{a} de $V_{\bar{b}}$ peinte en octarine et que l'on peint un système de racines de \bar{a} en octarine, alors $\widetilde{L}(\bar{a})$ est une extension minimale préalgébrique de L . De plus, à isomorphie près, $\widetilde{L}(\bar{a})$ ne dépend pas du choix de \bar{a} ni du choix d'un système de racines octarines pour \bar{a} .*
2. *Pour $L \leq M$ une extension minimale préalgébrique, si \bar{a} est une base octarine de M au dessus de L , il y a $m \geq 1$ tel que si $V_{\bar{b}}$, $\bar{b} \in L$ est le locus de $m^{-1} \cdot \bar{a}$ sur L , alors $\models \psi_{V,n}(\bar{b})$.*

Pour T une sous-variété abélienne de A^n et $\bar{a} \in A^n$, on note $[\bar{a} + T]$ le paramètre canonique du définissable $\bar{a} + T$.

Lemme 5.3.3. *Soient $V \subseteq A^n$ une variété définie au dessus de $B \supseteq K$, et T un sous-groupe algébrique de A^n , et $\bar{a} \in V$ générique au dessus de B , et $W = V \cap \bar{a} + T$. Soit $\bar{x} \in W$, alors \bar{x} est générique dans W au dessus des paramètres $B[\bar{a} + T]$ ssi il est générique dans V au dessus de B .*

Démonstration du lemme: Soit $\bar{x} \in W$. Comme T est défini sur K , la classe $\bar{a} + T$ est définissable sur $K\bar{x}$, on a donc $[\bar{a} + T] \in dcl(B\bar{x})$.

Pour tout $\bar{x} \in W$, on a :

$$\begin{aligned} \dim(\bar{x}/B[\bar{a} + T]) &= \dim(\bar{x}[\bar{a} + T]/B) - \dim([\bar{a} + T]/B) = \dim(\bar{x}/B) - \dim([\bar{a} + T]/B) \\ &\leq \dim(\bar{a}/B) - \dim([\bar{a} + T]/B) = \dim(\bar{a}/B[\bar{a} + T]) \end{aligned}$$

Ainsi, $\dim(\bar{x}/B[\bar{a} + T])$ atteint son maximum (i.e. \bar{x} générique dans W au dessus de $B[\bar{a} + T]$) ssi $\dim(\bar{x}/B)$ est maximal (i.e. \bar{x} générique dans V). \square

Démonstration du théorème: Soit $V_{\bar{y}}(\bar{x})$ une famille uniforme de sous variétés algébriques de A^n .

Soit $\psi_{V,n}^0$ une formule du langage des corps telle que $\bar{b} \models \psi_{V,n}^0 \iff RM(V_{\bar{b}}) = n \cdot (g - 1)$ et $DM((V_{\bar{b}})) = 1$.

$\psi_{V,n}^1(\bar{y})$ est la formule « $V_{\bar{y}}$ est irréductible, libre et Kummer-générique », donnée par le lemme 5.3.1 et le fait 4.3.3.

Pour T une sous variété abélienne de A^n , soit

$$\theta_T(\bar{x}, \bar{y}) := V_{\bar{y}}(\bar{x}) \wedge \ll RM(V_{\bar{y}}(\cdot) \wedge T(\cdot - \bar{x})) < \frac{g-1}{g} \cdot \dim(T) \gg$$

$$\psi_{V,n}^2(\bar{y}) := \bigwedge_{\substack{T \in \text{Sub}(V) \\ T \neq A^n, T \neq 0}} \ll RM(\theta_T(\cdot, \bar{y})) = n \cdot (g - 1) \gg$$

$$\psi_{V,n} := \psi_{V,n}^0 \wedge \psi_{V,n}^1 \wedge \psi_{V,n}^2.$$

Démonstration de 1.: Soient $V_{\bar{y}}(\bar{x}) \subseteq A^n$ et $\bar{b} \in L$ tels que $\models \psi_{V,n}(\bar{b})$, soit \bar{a} générique dans $V_{\bar{b}}$ au dessus de L .

Comme $V_{\bar{b}}$ est libre, \bar{a} est linéairement indépendant au dessus de $A(L)$.

Nous considérons le corps octarinaire M défini comme suit : le support de M est le corps $\widetilde{L(\bar{a})}$. Nous choisissons un système $(\bar{b}_n)_{n \geq 1}$ de racines octarines pour \bar{a} , et nous posons $O(M) = \langle O(L), (\bar{b}_n)_{n \geq 1} \rangle$. Comme \bar{a} est indépendant au dessus de $O(L)$, on voit que \bar{a} est une base de $O(M)$ au dessus de $O(L)$, et $\text{ldim}(O(M)/O(L)) = n$. En outre, comme $\text{dim}(V_{\bar{b}}) = n \cdot (g-1)$, il vient $\text{dtr}(M/L) = n \cdot (g-1)$. Par conséquent, $\delta(M/L) = 0$.

Nous montrons que pour $X \in \mathcal{C}$ avec $L \subsetneq X \subsetneq M$, $\delta(X/L) > 0$. Sans perte de généralité, X est engendré au dessus de L par un uplet octarinaire linéairement indépendant, disons x'_1, \dots, x'_k avec $k < n$. Nous montrons en fait que $\delta(M/X) < 0$, ce qui revient au même puisque $\delta(M/L) = 0$.

Pour $1 \leq i \leq k$, écrivons $x'_i := y_i + \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{i,j}(a_j)$ où $\alpha_{i,j} \in \text{End}^0(A)$ et $y_i \in O(L)$. Sans perte de généralité, $y_i = 0$ pour tout i , puisque les x'_i et les $x'_i - y_i$ engendrent la même extension intermédiaire. Considérons le sous groupe algébrique de A^n défini par ces équations :

$$T := \{ \bar{x} \in A^n \mid \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{i,j}(x_j) \ni 0 \forall 1 \leq i \leq k \}$$

Alors \bar{x}' est la base canonique $[\bar{a} + T]$, puisque

$$\bar{x} \in \bar{a} + T \iff \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{i,j}(x_j) \ni x'_i$$

Comme les x'_i sont linéairement indépendants, les vecteurs $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ le sont aussi. On a donc $\text{dim}(T) = \text{dim}(A) \cdot (n-k)$.

D'après le lemme 5.3.3, \bar{a} est générique au dessus de $L\bar{x}'$ dans $V_{\bar{y}} \cap \bar{a} + T$. On a donc $\delta(M/X) = \text{dim}(V \cap \bar{a} + T) - (g-1)(n-k)$, autrement dit :

$$\delta(M/X) = \text{dim}(V \cap \bar{a} + T) - \frac{g-1}{g} \cdot \text{dim}(T)$$

Soient W le locus de \bar{a} sur $L\bar{x}'$ et G le sous-groupe minimal de W , alors $\text{dim}(G) \leq \text{dim}(T)$ et $W \subseteq V \cap \bar{a} + G$. Comme $\bar{y} \models \psi_{V,n}^2$, on a $\text{dim}(W) < \frac{g-1}{g} \cdot \text{dim}(G)$ d'après le lemme 5.1.3. A fortiori, $\text{dim}(W) < \frac{g-1}{g} \cdot \text{dim}(T)$, d'où $\delta(M/X) < 0$. Par conséquent, $\delta(X/L) > 0$.

Ceci montre que $L \leq M$, puisque toute extension intermédiaire a une prédimension positive sur L , et en particulier $M \in \mathcal{C}^0$. Comme nous pouvons appliquer le critère pour la minimalité (lemme 2.5.2), on en déduit aussi que l'extension $L \leq M$ est minimale. Elle est minimale préalgébrique puisque $\delta(M/L) = 0$.

Unicité En outre, soient \bar{a}' générique dans $V_{\bar{b}}$ et $(\bar{b}'_n)_{n \geq 1}$ un système de racine octarine pour \bar{a}' . Dans $\widetilde{L(\bar{a}')}$, en peignant $(\bar{b}'_n)_{n \geq 1}$ en octarine, on obtient $M' \in \mathcal{C}^0$ de la même manière que ci-dessus. Comme $V_{\bar{b}}$ est irréductible, \bar{a} et \bar{a}' on même type si bien qu'il y a un isomorphisme au dessus de L envoyant \bar{a} sur \bar{a}' . L'image de $(\bar{b}_n)_{n \geq 1}$ est alors un système de racines octarines pour \bar{a}' . Par Kummer-généricité de $V_{\bar{b}}$, on sait que $(\bar{b}_n)_{n \geq 1}$ est conjugué à $(\bar{b}'_n)_{n \geq 1}$ au dessus de L .

□¹.

Démonstration de 2.: Soient $L \leq M$ une extension minimale préalgébrique et \bar{a} une base octarine de M au dessus de L . Alors, M est engendrée corpiquement par \bar{a} . Soit X le locus de \bar{a} sur L . D'après le fait 4.3.2, il y a $m \geq 1$ tel que les composantes irréductibles de $m^{-1} \cdot X$ sont Kummer génériques. Soit $V = V_{\bar{b}}$ la composante irréductible de $m^{-1} \cdot X$ à laquelle $m^{-1} \cdot \bar{a}$ appartient. Soit $n = |\bar{a}|$, alors $\dim(V_{\bar{b}}) = n \cdot (g - 1)$.

Clairément $\bar{b} \models \psi_{V,n}^0 \wedge \psi_{V,n}^1$. Montrons que $\models \psi_{V,n}^2(\bar{b})$. Pour ce, comme $\text{dtr}(\bar{a}/L) = n \cdot (g - 1)$, il suffit de montrer $\bar{a} \models \theta_T$ pour tout $T \in \text{Sub}(V)$ propre.

Soit $T \in \text{Sub}(V)$ un sous groupe propre de A^n . Posons $d = \frac{\dim(T)}{g}$. D'après le corollaire 1.3.7, T est l'intersection de $n - d$ équations A -linéaires indépendantes, disons $E_1(\bar{x}) = 0, \dots, E_{n-d}(\bar{x}) = 0$ où :

$$E_j : \bar{x} \rightarrow \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i,j}(x_i) \quad 1 \leq j \leq n - d$$

Pour $1 \leq j \leq n - d$, soit o_j le point octarine de $E_j(\bar{a})$. Comme auparavant nous identifions le uplet \bar{o} et $[\bar{a} + T]$. Comme les E_j sont indépendants, les points octarines o_j sont linéairement indépendants. On a donc $\text{ldim}(\langle \bar{o} \rangle / O(L)) = n - d$, d'où $\text{ldim}(\langle \bar{a} \rangle / \langle \bar{o} \rangle) = d$. Par hypothèse, l'extension L'/L est préalgébrique minimale. Par conséquent, $\delta(L'/\widetilde{L(\bar{o})}) < 0$ et donc $\text{dtr}(\bar{a}/\bar{o}) < d \cdot (g - 1)$.

D'après le lemme 5.3.3, \bar{a} est générique dans $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ au dessus de \bar{o} . Donc, $\dim(V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T) = \text{dtr}(\bar{a}/\bar{o}) < \frac{g-1}{g} \cdot \dim(T)$. □

Corollaire 5.3.4. \mathcal{C}^0 satisfait la pré-stabilité.

Démonstration: Toute extension de base finie de corps de \mathcal{C}^0 se décompose en une tour finie d'extensions minimales, il suffit donc de montrer qu'il n'y a à isomorphie près qu'un ensemble dénombrable d'extensions minimales au dessus d'un corps octarine de base finie L . Or, chaque type d'isomorphie d'une extension minimale préalgébrique correspond à au moins un $V_{\bar{b}}$ pour $\bar{b} \models \psi_{V,n}$. On a donc au plus $|\mathcal{L}_{cps}(L)|$ extensions minimales préalgébriques à isomorphie près, et une unique extension générique blanche. □

Lemme 5.3.5. Soit W une sous-variété irréductible de A^n définie sur un corps algébriquement clos B contenant K , et $\bar{a} \in W$ générique au-dessus de B . Le groupe minimal G de W est de dimension $g \cdot \text{ldim}(\bar{a}/B)$.

Démonstration: Soit $k = \text{ldim}(\bar{a}/B)$. Quitte à permuter le uplet \bar{a} , on fait en sorte que a_1, \dots, a_k soit une base de \bar{a} au dessus de B . C'est à dire que pour $j > k$, il y a $b_j \in A(B)$ et des quasi-endomorphismes $\alpha_1^j, \dots, \alpha_k^j$ de A tels que $a_j - b_j \in \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_i^j(a_i)$. Appelons T le groupe $\{\bar{x} \in A^n \mid \forall k < j \leq n, 0 \in x_j - \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_i^j(x_i)\}$, qui est de dimension $g \cdot \text{ldim}(\bar{a}/B)$.

Prenons $\bar{b} = 0, \dots, 0, b_{k+1}, \dots, b_n \in B$. Comme $\bar{a} \in \bar{b} + T$, $W \subseteq \bar{b} + T$ et donc $G \subseteq T$, d'où $\dim(G) \leq g \cdot \text{ldim}(\bar{a}/B)$. En outre, $g \cdot \text{ldim}(\bar{a}/B) \leq \dim(G)$ puisque G exprime des dépendances linéaires que doit satisfaire \bar{a} . \square

Formules raffinées Pour $V_{\bar{y}}$ une famille uniforme de sous-variétés algébriques de A^n , on considère la formule $\phi_V(\bar{x}, \bar{y})$ des corps (que l'on appellera *formule raffinée* associée à V) dont les réalisations (\bar{a}, \bar{b}) satisfont :

- $\phi_V(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq V_{\bar{b}}$ et pour $T \in \mathcal{T}(A^n, V)$, $T \neq A^n$, si $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ est infini, alors pour toute composante irréductible de dimension maximale W de $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ ayant pour sous groupe minimal U , on a $\frac{g-1}{g} \dim(U) > \dim(W)$.

Cette condition est exprimable dans le langage des corps car la décomposition en irréductibles l'est, et les sous groupes U qui nous concernent font partie de la famille finie $\text{Sub}(V_{\bar{y}} \cap \bar{x} + T)$ donnée par la proposition 5.1.2.

Lemme 5.3.6. *Avec les notations ci-dessus, pour $\bar{b} \models \psi_{V,n}(\bar{y})$, $\phi_V(\bar{x}, \bar{b})$ est générique dans $V_{\bar{b}}$.*

De plus, pour $B, L \in \mathcal{C}^0$ avec $B \leq L$, si $B \models \psi_{V,n}(\bar{b})$, alors toute réalisation octarinaire $\bar{a} \in L$ de $\phi_V(\cdot, \bar{b})$ qui n'est pas contenue dans B est corpiquement générique dans $V_{\bar{b}}$ (et donc engendre une extension minimale préalgébrique de longueur n).

Démonstration: Pour la première assertion : si $\bar{b} \models \psi_{V,n}$ et \bar{a} est générique dans $V_{\bar{b}}$, alors pour le sous groupe minimal T de toute sous-variété de $V_{\bar{b}}$, $\models \theta_T(\bar{a}, \bar{b})$. C'est à dire que $\dim(V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T) < \frac{g-1}{g} \dim(T)$. Par conséquent, on a bien $\models \phi_V(\bar{a}, \bar{b})$.

Pour la deuxième assertion :

Nous vérifions que pour $\bar{a} \in O(L)$ réalisant $\phi_V(\cdot, \bar{b})$ avec $0 < RM(\bar{a}/B) < n \cdot (g-1)$ on aurait $\delta(\bar{a}/B) < 0$, ce qui contredirait $B \leq L$.

Soit W le locus de \bar{a} sur B . On considère le sous-groupe minimal G de W . Alors, d'après le lemme 5.3.5, $\dim(G) = g \cdot \text{ldim}(\bar{a}/B)$, d'où

$$\delta(\bar{a}/B) = \dim(W) - (g-1) \cdot \frac{\dim(G)}{g} = \frac{1}{g} \cdot (\dim(W) - (g-1) \cdot \text{cd}(W))$$

On distingue alors deux cas :

Cas $\text{cd}(W) \geq \text{cd}(V_{\bar{b}})$: Comme $\dim(W) < \dim(V_{\bar{b}})$,

$$\delta(\bar{a}/B) \leq \frac{1}{g} \cdot (\dim(W) - (g-1) \cdot \text{cd}(W)) < \frac{1}{g} \cdot (\dim(V_{\bar{b}}) - (g-1) \cdot \text{cd}(V_{\bar{b}})) = 0$$

Cas $\text{cd}(W) < \text{cd}(V_{\bar{b}})$: Nous prenons $W \subseteq W' \subseteq V_{\bar{b}}$ irréductible telle que $\text{cd}(W') \leq \text{cd}(W)$ de dimension maximale. Alors, W' est cd-maximale. Soit U son sous-groupe minimal.

Constatons que $\dim(W') = \dim(V \cap \bar{a} + U)$: sinon, il y a une composante irréductible X de $V \cap \bar{a} + U$ contenant strictement W' . Comme W' est cd-maximale, $\text{cd}(X) > \text{cd}(W')$ et donc

la dimension du sous groupe minimal T de X est strictement supérieure à celle de U . Ceci est une contradiction puisque X est inclus dans $\bar{a} + U$.

Par conséquent, comme $\models \phi_V(\bar{a}, \bar{b})$, $\frac{g-1}{g} \dim(U) > \dim(W') = \dim(V \cap \bar{a} + U)$, et par conséquent, $\delta(\bar{a}/B) < 0$. \square

5.4 L'amalgame libre

Pour établir que \mathcal{C}^0 est une classe d'amalgamation (élémentaire!) de corps octarines, il ne nous reste qu'à montrer le lemme d'amalgamation pour \mathcal{C}^0 .

Amalgamation libre Soient $L, M, N \in \mathcal{C}^0$ avec $L \leq M$ et $L \leq N$. Dans $\widetilde{M \otimes_L N}$ (ie. la clotûre algébrique du produit de deux copies indépendantes au dessus de L de M et N), on colorie en octarine l'espace vectoriel $O(M) + O(N)$. La structure ainsi obtenue est un élément de \mathcal{C} , que l'on note $M \otimes_L^0 N$. On identifie les structures M et N avec leurs images canoniques respectives dans $M \otimes_L^0 N$. Dès lors, $M \downarrow_L^{alg} N$.

On note que si M et N sont de base finie au dessus de L , alors $M \otimes_L^0 N$ l'est aussi.

Proposition 5.4.1. $M \leq M \otimes_L^0 N$ et $N \leq M \otimes_L^0 N$.

En particulier, $M \otimes_L^0 N \in \mathcal{C}^0$.

Démonstration: Comme la situation est symétrique, il suffira de prouver $M \leq M \otimes_L^0 N$.

Soit $M \subseteq X \subseteq M \otimes_L^0 N$ de base finie sur M . Si $X \setminus M$ est blanc, $\delta(X/M) \geq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que X est engendré corpiquement par une base de $O(X)$ au dessus de $O(M)$, puisque $\delta(X/M(\widetilde{O(X)})) \geq 0$.

Soit $a_1, \dots, a_n \in O(X)$ une base de $O(X)$ au dessus de $O(M)$. Pour $1 \leq i \leq n$, écrivons $a_i = b_i + c_i$ avec $b_i \in O(M)$ et $c_i \in O(N) \setminus O(L)$ (on peut décomposer les a_i ainsi car $O(M) \cap O(N) = O(L)$). On a $\text{ldim}(\bar{c}/O(M)) = n$ puisque \bar{a} est indépendant linéairement au dessus de $O(M)$.

$L \leq N$. Donc, $\text{dtr}(c_1, \dots, c_n/L) \geq n \cdot (g-1)$. Comme $M \downarrow_L^{alg} N$,

$$\text{dtr}(b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n/M) = \text{dtr}(c_1, \dots, c_n/M) = \text{dtr}(c_1, \dots, c_n/L) \geq n \cdot (g-1)$$

.

Nous avons montré que $\delta(X/M) \geq 0$. Comme $M \subseteq X \subseteq M \otimes_L^0 N$ était quelconque, on a $M \leq M \otimes_L^0 N$. \square

5.5 Théorie des riches libres

Nous avons montré que \mathcal{C}^0 est une classe élémentaire d'amalgamation de corps octarines. Nous pouvons donc construire des corps riches pour \mathcal{C}^0 .

La théorie $T_{\mathcal{K}}$ La théorie $T_{\mathcal{K}}$ est constituée des axiomes de la théorie T_0 et du schéma d'axiomes :
(MIN) pour toute famille uniforme $V_{\bar{y}}$ de sous variétés de A^n , pour toute famille uniforme $W_{\bar{z}}$ de sous variétés de A^n ,

$$\forall \bar{y} \forall \bar{z} \left[(\psi_{V,n}(\bar{y}) \wedge \ll RM(V_{\bar{y}} \cap W_{\bar{z}}) < n \cdot (g-1) \gg) \rightarrow \exists \bar{x} (V_{\bar{y}}(\bar{x}) \wedge \neg W_{\bar{z}}(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(x_i)) \right]$$

Lemme 5.5.1. *Soit \mathcal{K} un ω -riche, alors $\mathcal{K} \models T_{\mathcal{K}}$. En particulier, cette théorie est consistante.*

Démonstration: Donnés $\bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{K}$ tels que $\mathcal{K} \models \psi_{V,n}(\bar{b}) \wedge \ll RM(V_{\bar{b}} \cap W_{\bar{c}}) < n \cdot (g-1) \gg$. Soit $L = cl_{\mathcal{K}}(K\bar{b}\bar{c})$. Il découle du théorème 5.3.2 que si l'on prend une réalisation générique \bar{a} de $V_{\bar{b}}$ peinte en octarine, on obtient une extension minimale préalgébrique $\bar{L}(\bar{a})$ de L , que l'on peut injecter ormessienement dans \mathcal{K} au dessus de L . L'image \bar{a}' de \bar{a} par cette injection satisfait alors

$$\mathcal{K} \models V_{\bar{b}}(\bar{a}') \wedge \neg W_{\bar{c}}(\bar{a}') \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(a'_i) \quad \square$$

Lemme 5.5.2. *Pour tout $m \geq 3$, pour tout $L \in \mathcal{C}^0$, il existe une extension minimale préalgébrique de L de longueur m .*

Démonstration: Afin de fixer les idées, nous commençons par le cas où $g = 2$. Soit $m \geq 3$, nous nous plaçons dans $M := acl(L(X_1, \dots, X_m))$. Nous allons colorier m points de $A(M)$ de $dtr = 2$ de façon à obtenir une extension minimale préalgébrique. Le plan consiste à prendre chaque point octarine dans $A(acl(L(X_i, X_j)))$ pour certains $i \neq j$ afin de pouvoir associer à chaque point octarine une paire $\{X_i, X_j\}$ qui lui sera propre. En voyant chaque variable X_i comme un sommet et chaque paire $\{X_i, X_j\}$ associée à un point octarine comme une arrête, on obtient un graphe non-orienté⁶. Notons que les points octarines ainsi obtenus sont linéairements indépendants.

Pour un ensemble X de taille $0 < |X| < m$ de points octarines, nous voulons que $\delta(X) > 0$, c'est à dire que $dtr(X) > ldim(X)$. Traduit en terme de graphe, cela signifie que pour tout ensemble propre d'arrêtes S , l'ensemble E_S des sommets présents dans l'une des arrêtes de S vérifie $|E_S| > |S|$. Le lemme combinatoire suivant montre que le graphe cyclique de longueur m va nous convenir :

Lemme 5.5.3. *Dans un graphe cyclique (E, V) , pour tout $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, on a $|E_S| > |S|$.*

Démonstration: Nous montrons ceci par récurrence sur $n = |S|$. Pour $n = 1$, c'est évident : $|E_S| = 2$.

Soient $0 < n < m =: |E|$, et $S \subseteq V$ de cardinal n . Si E_S est connexe, alors S forme un chemin qui n'est pas un cycle car $n < m$ et donc $|E_S| = |S| + 1$. Si E_S n'est pas connexe, nous pouvons le décomposer en composantes connexes, disons $E_S = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k$. Alors,

$$|E_S| = \sum_{1 \leq i \leq k} |E_i|$$

⁶. Dans un graphe non-orienté, nous estimons plus judicieux de considérer les arrêtes comme des paires que comme des couples : $V \subseteq \mathcal{P}_2(E)$.

Pour $1 \leq i \leq k$, posons $S_i = S \cap \mathcal{P}_2(E_i)$. Ainsi, les S_i forment une partition de S et vérifient $E_{S_i} = E_i$. Par hypothèse de récurrence, nous avons donc

$$|E_S| = \sum_{1 \leq i \leq k} |E_i| > \sum_{1 \leq i \leq k} |S_i| = |S| \quad \square$$

Passons au cas général : $g \geq 2$. Nous prenons cette fois $n = m \cdot (g - 1)$ éléments transcendants indépendants X_1, \dots, X_n . Soit (E, V) un graphe cyclique sur $E = \{X_1, \dots, X_m\}$. Numérotions les arêtes : $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Nous choisissons une base octarine de $M := \text{acl}(L(X_1, \dots, X_n))$ comme suit :

Pour chaque $1 \leq i \leq m$, nous complétons v_i avec $g - 2$ éléments *frais* de $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$ de sorte à obtenir un ensemble V_i (par exemple, $V_i = v_i \cup \{X_{m+1+(g-2) \cdot (i-1)}, \dots, X_{m+(g-2) \cdot i}\}$). Nous colorions un point $a_i \in A(\widetilde{L(V_i)}) \setminus A(L)$ en octarine.

Chaque a_i n'étant pas algébrique sur $L(a_j)_{j \neq i}$, ces points octarines sont linéairement indépendants. On a ainsi $\delta(M/L) = 0$.

M est une extension ormessienne de L : soit $X \in \mathcal{C}$ intermédiaire, que nous pouvons supposer algébriquement close et engendrée au dessus de L par ses points octarines, disons $X = \text{acl}(L(I))$ pour $I \subsetneq \{a_1, \dots, a_m\}$ non vide. Avec $S = \{v_i \mid a_i \in I\}$, on a

$$\text{dtr}(X/L) = |E_S| + |S| \cdot (g - 2) > |S| + |S| \cdot (g - 2) = (g - 1) \cdot \text{ldim}(X/L)$$

Comme cette inégalité est stricte, il apparaît que M/L est une extension minimale. \square

Proposition 5.5.4. *Tout modèle κ -saturé de $T_{\mathcal{K}}$ est un corps κ -riche.*

Démonstration: Soit \mathcal{K} un modèle κ -saturé de $T_{\mathcal{K}}$. Soient $L \leq \mathcal{K}$ de base $< \kappa$, et $M \in \mathcal{C}^0$ une extension minimale de L . Il nous faut plonger ormessiennement M dans \mathcal{K} au dessus de L .

Nous distinguons deux cas, suivant que M/L est préalgébrique minimale ou non :

M/L est préalgébrique minimale : Soit \bar{a} une base octarine de M/L , de longueur n . Quitte à multiplier par m^{-1} pour m suffisamment grand, on peut supposer que le locus $V = V_{\bar{b}}$ de \bar{a} sur L est tel que $L \models \psi_{V,n(\bar{b})}$. Comme $\psi_{V,n}$ est une formule du langage des corps, $\mathcal{K} \models \psi_{V,n}(\bar{b})$.

Comme \mathcal{K} satisfait (MIN), le type partiel suivant y est consistant :

$$\pi(\bar{x}) := \{\neg W(\bar{x}) \mid W \text{ sous variété propre de } V_{\bar{b}} \text{ définie sur } L\} \cup \{V_{\bar{b}}(\bar{x}); \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(x_i)\}$$

Soit $\bar{a}' \in \mathcal{K}$ une réalisation de ce type partiel. \bar{a}' est corpiquement générique dans $V_{\bar{b}}$ et donc, d'après le théorème 5.3.2, $M' := \widetilde{L(\bar{a}'')}$ est une extension préalgébrique minimale de L isomorphe à M . En particulier, $\delta(M'/L) = 0$.

Enfin, $M' \leq \mathcal{K}$ puisque pour $X \subseteq \mathcal{K}$ de base finie sur M' , on a $\delta(X/M') = \delta(X/M') + \delta(M'/L) = \delta(X/L) \geq 0$.

Nous avons donc injecté M ormessiennement dans \mathcal{K} au dessus de L .

M/L est générique blanche : D'après le lemme 5.5.2, on peut appliquer le lemme suivant à L :

Lemme 5.5.5. *Soit \mathcal{K} un corps octarine κ -saturé, et $L \leq \mathcal{K}$ de base $< \kappa$. Supposons qu'il y a des extensions minimales préalgébriques de L de longueur arbitrairement grande qui se plongent ormessiennement dans \mathcal{K} . Alors, toute extension générique blanche de L se plonge ormessiennement dans \mathcal{K} .*

Soit $L \leq M$ une extension octarine blanche minimale, disons $M = \widetilde{L(x_0)}$ et $O(M) = O(L)$ avec x_0 transcendant sur L . Soit C une base de transcendance de L . Considérons l'ensemble $\pi(x)$ des négations des formules en la variable x à paramètres dans C de l'une des formes suivantes :

1. Pour V^1, \dots, V^n , où V^i est une famille uniforme de sous-variétés de A^{n_i} , pour $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \xi$ des formules du langage des corps à paramètres dans C , et pour $\phi_{V^1}, \dots, \phi_{V^n}$ les formules raffinées associés aux V^i :

$$\exists \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left[\ll RM(\varphi_i(\cdot, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}) = 0 \gg \wedge \varphi_i(\bar{z}_i, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{i-1}) \right. \\ \left. \wedge \psi_{V^i, n_i}(\bar{z}_i) \wedge \phi_{V^i}(\bar{y}_i, \bar{z}_i) \wedge O(\bar{y}_i) \wedge \ll RM(\xi(\cdot, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)) = 0 \gg \wedge \xi(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \right]$$

2. Pour φ une formule algébrique sur C au sens des corps,

$$\varphi(x)$$

Nous montrons que $\pi(x)$ est finiment consistant, et donc réalisé dans \mathcal{K} . Soit $q(x)$ une partie finie de $\pi(x)$. Soit m plus grand que tous les n_i apparaissant dans les formules de type 1 que mentionne q et tel qu'il y a $N \leq \mathcal{K}$ une extension préalgébrique minimale de longueur m de L qui se plonge dans \mathcal{K} . Soit $y \in N \setminus L$. Nous montrons que $\mathcal{K} \models q(y)$.

Soient V^1, \dots, V^n , où V^i est une famille uniforme de sous-variétés de A^{n_i} et $n_i < m \forall 1 \leq i \leq n$. Supposons pour obtenir une contradiction que y satisfasse la formule du type 1 correspondant à ces V^i . Alors il y a $L = L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_n \leq \mathcal{K}$ tels que $y \in L_n$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, ou bien $L_{i-1} = L_i$ ou alors L_i est une extension minimale préalgébrique de longueur n_i de L_{i-1} encryptée par $V_{\bar{b}}^i$ pour $\bar{b} \in L_{i-1}$. Nous montrons par récurrence sur i que L_i et NL_{i-1} sont algébriquement indépendants au dessus de L_{i-1} pour $1 \leq i \leq n$. Ceci entraînera la contradiction cherchée puisqu'il y a i tel que $y \in L_i \cap N$ mais $y \notin L_{i-1}$.

Cas $i = 1$: On peut supposer $L_1 \neq L_0$. On a $n_1 < m$, donc L_1 n'est pas inclus dans N par minimalité de N , en particulier, L_1 contient un point octarine qui n'est pas dans N . Supposons que $L_1 \not\leq_{L_0} N$. Alors on distingue deux cas : Si $O(L_1) \cap O(N) \subseteq O(L_0)$, $\delta(NL_1/N) = dtr(L_1/N) - (g-1) \cdot n_1 < 0$ puisque $dtr(L_1/N) < dtr(L_1/L_0)$. Si au contraire $O(L_1) \cap O(N)$ n'est pas inclus dans $O(L_0)$, on a $\delta(L_1 \cap N/L_0) > 0$ puisque N est minimale préalgébrique. Par submodularité, on a alors $\delta(NL_1/N) \leq \delta(N/L_0) - \delta(L_1 \cap N/L_0) < 0$. Dans les deux cas, $\delta(NL_1/N) < 0$, une contradiction au fait que $N \leq \mathcal{K}$.

Récurrence : Soit $i \geq 2$. On suppose $L_{i-1} \downarrow_{L_{i-2}} NL_{i-2}$. Alors, NL_{i-1} est une extension minimale préalgébrique de longueur m de L_{i-1} . On peut donc réutiliser l'argument du cas $i = 1$ avec cette fois NL_{i-1} , L_i et L_{i-1} à la place de N , L_1 et L_0 respectivement. On a donc $L_i \downarrow_{L_{i-1}} NL_{i-1}$.

$\pi(x)$ est finiment consistant, et donc réalisé dans \mathcal{K} , disons par t . Nous montrons que $X := \widetilde{L}(t)$ est ormessienne dans \mathcal{K} . Sinon, il y a $Y \subseteq \mathcal{K}$ de base finie sur X avec $\delta(Y/X) < 0$. Comme $\delta(X/L) = 1$, on doit avoir $\delta(Y/L) = 0$, si bien que Y/L se décompose en une tour finie d'extensions minimales préalgébriques. Or, c'est précisément ce que π interdit !

On peut donc injecter M ormessiennement dans \mathcal{K} au dessus de L via $x_0 \mapsto t$ \square

Corollaire 5.5.6. $T_{\mathcal{K}}$ est la théorie des corps riches pour \mathcal{C}^0 . Elle est ω -stable.

6 Cryptographie : coder les extensions minimales

6.1 Formules cryptiques

Une variété $V = V(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq A^n$ est cryptique si $\models \psi_V(\bar{b})$, c'est à dire si une réalisation générique octarine de V définit une extension minimale préalgébrique, unique à isomorphisme près.

Une formule $\varphi(\bar{x})$ du langage des corps de degré 1 est cryptique si sa clôture de Zariski l'est.

Une formule $\varphi(\bar{x})$ du langage des corps de degré 1 à paramètres dans B est minimale préalgébrique si pour tout (pour un) $M \in \mathcal{C}^0$ contenant B , pour \bar{a} une réalisation octarine générique de φ , \bar{a} est une base octarine de l'extension minimale préalgébrique $\widetilde{M(\bar{a})}/M$. En particulier, une formule minimale préalgébrique est libre. Un ensemble définissable est minimal préalgébrique (*resp.* cryptique) si la formule qui le définit l'est.

Notons qu'une formule est cryptique si et seulement si elle est minimale préalgébrique et Kummer-générique.

À une formule cryptique φ correspond une unique extension minimale préalgébrique (à isomorphie près). Cependant, à une extension minimale préalgébrique peuvent correspondre de multiples formules cryptiques. Par exemple, le choix d'une réalisation de φ comme base octarine est arbitraire.

Le but de ce chapitre est de rendre le choix d'une formule cryptique décrivant une extension minimale préalgébrique donnée canonique. Nous parviendrons, en plusieurs étapes, à donner un ensemble de bons codes.

Nous commençons par régler le problème du choix d'une base octarine.

Donnons nous $L, M \in \mathcal{C}^0$ tels que M soit une extension minimale préalgébrique de L , dont une base octarine \bar{a} de longueur n est un générique de l'ensemble cryptique X . Soit \bar{b} une autre base octarine de M/L et Y le locus de \bar{b} au dessus de L . Notons que Y est minimale préalgébrique. Il y a $(\alpha_{i,j})_{i,j < n} \subseteq \text{End}^0(A)$ et $\bar{c} \in O(L)$ tels que $b_j = c_j + \sum_{i < n} \alpha_{i,j}(a_i)$ pour tout $j < n$. Autrement dit, $\bar{b} = \bar{c} + \alpha(\bar{a})$ où α est l'endomorphisme de $A^n/\text{Tor}(A)$ ayant $(\alpha_{i,j})_{i,j < n}$ pour matrice. Nous remplaçons dans la suite \bar{b} et Y par leurs translatés $\bar{b} - \bar{c}$ et $Y - \bar{c}$.

Soit $T \in \mathcal{Q}\text{End}(A^n)$ tel que $\bar{T} = \alpha$ (cf lemme 1.2.4). Pour tout quasi-endomorphisme $T' \subseteq T$, on a $\bar{T}' = \bar{T}$, si bien qu'on peut prendre $T = T^0$. Nous constatons désormais que $(X \times Y) \cap T$ est de degré 1 (T est donc son sous-groupe minimal).

Soit (\bar{a}', \bar{b}') générique dans $(X \times Y) \cap T$. T étant connexe, il est divisible, et il y a donc $(\bar{a}'_0, \bar{b}'_0) \in T$ tel que $m \cdot (\bar{a}'_0, \bar{b}'_0) = (\bar{a}', \bar{b}')$, où $m := |T(0)|$. Par choix de m , on a $m \circ T \in \text{End}(A^n)$. Comme $T(\bar{a}'_0) \ni \bar{b}'_0$, on a $(m \circ T)(\bar{a}'_0) = \bar{b}'_0$. De même, $(m \circ T)(\frac{1}{m} \cdot \bar{a}) = \bar{b}$. Or, \bar{a}' étant générique dans X , on a $tp(\bar{a}'_0/L) = tp(\frac{1}{m} \cdot \bar{a}/L)$ car X est cryptique. Par conséquent, $tp((\bar{a}', \bar{b}')/L) = tp((\bar{a}, \bar{b})/L)$. Nous avons montré que $(X \times Y) \cap T$ est de degré 1.

En résumé, ce groupe T est de dimension $n \cdot g$, est le groupe minimal de $(X \times Y) \cap T$, et il y a \bar{a} et \bar{b} génériques dans X et Y respectivement tels que $(\bar{a}, \bar{b}) \in T$.

C'est ce qui motive la définition suivante.

Correspondance torique Soient $X_1, X_2 \subseteq A^n$ deux ensembles définissables dans le langage des corps de même dimension et de degré 1. Une *correspondance torique* entre X_1 et X_2 est un sous-groupe T de A^{2n} , de dimension $n \cdot g$, tel qu'il y a \bar{a} et \bar{b} génériques dans X_1 et X_2 respectivement avec $(\bar{a}, \bar{b}) \in (X_1 \times X_2) \cap T$, et qui est le sous-groupe minimal de $(X_1 \times X_2) \cap T$.

Une correspondance torique entre deux formules des corps est une correspondance torique entre les définissables correspondants.

Les lemmes suivants montrent que nous avons capturé la bonne notion :

Lemme 6.1.1. *Soit T une correspondance torique entre deux sous-ensembles définissables libres de A^n . Alors T est un quasi-endomorphisme de A^n tel que pour tout $\bar{y} \in A^n$, il y a $\bar{x} \in A^n$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$.*

En particulier, le morphisme $\bar{T} : A^n/Tor(A) \rightarrow A^n/Tor(A)$ que T induit modulo la torsion est un isomorphisme.

Démonstration: Soient $X_1, X_2 \subseteq A^n$ libres de degré 1, et T une correspondance torique entre X_1 et X_2 . On peut supposer que X_1 et X_2 sont Zariski-clos. Soit M algébriquement clos au dessus duquel X_1, X_2 et A sont définis. On considère \bar{a} et \bar{b} génériques respectivement dans X_1 et X_2 , tels que $(\bar{a}, \bar{b}) \in T$. Par liberté, il vient $ldim(\bar{a}/M) = ldim(\bar{a}\bar{b}/M) = ldim(\bar{b}/M) = n$. Par conséquent, il y a $(\alpha_{i,j})_{i,j < n} \in \mathcal{Q}End(A)$ et $\bar{c} \in A(M)$ tels que

$$b_j \in c_j + \sum_{i < n} \alpha_{i,j}(a_i)$$

Notons G le sous groupe de A^{2n} défini par

$$G = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in A^{2n} \mid \forall j < n, y_j \in \sum_{i < n} \alpha_{i,j}(x_i)\}$$

Alors G est le groupe minimal du locus V de (\bar{a}, \bar{b}) sur M , et $V \subseteq (X_1 \times X_2) \cap T$, si bien que $G \subseteq T$. On a $dim(G) \geq g \cdot ldim(\bar{a}\bar{b}) = dim(T)$, et donc $T = G$ puisque T est connexe. Ceci montre que T est un quasi-endomorphisme de A^n .

Considérons la projection $\pi(T)$ de T sur les n dernières composantes, qui est un sous groupe algébrique de A^n puisque T est projective. Elle contient \bar{b} , et donc $dim(\pi(T)) \geq g \cdot n$, d'où $\pi(T) = A^n$. Ceci montre la "surjectivité" du quasi-endomorphisme T .

Enfin, l'égalité $ldim(\bar{a}/M) = ldim(\bar{a}\bar{b}/M) = ldim(\bar{b}/M) = n$ restant vraie modulo la torsion, on voit que l'endomorphisme induit

$$\bar{T} : A^n/Tor(A) \rightarrow A^n/Tor(A)$$

(cf lemme 1.2.4) est bien un isomorphisme. \square

Lemme 6.1.2. *Soit $\varphi(\bar{x})$ une formule Kummer-générique. Alors, pour $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$, $\varphi(\bar{a} + \bar{x})$ est aussi Kummer-générique.*

Démonstration: Soit L la clôture algébrique de K , \bar{a} et des paramètres de φ . Prenons \bar{x} générique dans $\varphi(\bar{a} + \bar{x})$ au dessus de L . Alors, $\bar{a} + \bar{x}$ est une réalisation générique de φ .

Soit $m \geq 1$, et \bar{y}, \bar{y}' tels que $m \cdot \bar{y} = m \cdot \bar{y}' = \bar{x}$. Soit $\bar{b} \in m^{-1} \cdot \bar{a}$, on a $m \cdot (\bar{y} + \bar{b}) = m \cdot (\bar{y}' + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{x}$ si bien que $(\bar{y} + \bar{b})$ et $(\bar{y}' + \bar{b})$ sont conjugués au dessus de L , disons par σ . Alors, comme $\sigma(\bar{b}) = \bar{b}$, il vient $\sigma(\bar{y}) = \bar{y}'$. Donc, \bar{y} et \bar{y}' sont conjugués au dessus de L . \square

Lemme 6.1.3. *Soit $\varphi(\bar{x})$ une formule minimale préalgébrique, alors*

- *Soit $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$. Alors $\varphi(\bar{x} + \bar{a})$ est minimale préalgébrique. En particulier, si $\varphi(\bar{x})$ est cryptique, $\varphi(\bar{x} + \bar{a})$ l'est aussi.*
- *Soit $\psi(\bar{x})$ une formule libre de degré 1. S'il y a une correspondance torique entre $\varphi(\mathfrak{C})$ et $\psi(\mathfrak{C})$, alors $\psi(\bar{x})$ est minimale préalgébrique. En particulier, si $\psi(\bar{x})$ est Kummer-générique, elle est alors cryptique.*

Démonstration: La première assertion est assez évidente : Soit $\varphi(\bar{x})$ une formule minimale préalgébrique. Prenons \bar{x} une réalisation de φ générique au dessus de $L \in \mathcal{C}^0$ avec $\bar{a} \in A(L)$, nous obtenons en coloriant \bar{x} en octarine une extension minimale préalgébrique M de support $\widetilde{L(\bar{x})}$ de L . Soit $y_i := x_i - a_i$ pour tout $i < n$. Ainsi, \bar{y} est générique dans $\varphi(\bar{a} + \bar{x})$. On voit pour tout $I \subseteq n$ que $dtr((y_i)_{i \in I}/L) = dtr((x_i)_{i \in I}/L)$ et que $ldim((y_i)_{i \in I}) = ldim((x_i)_{i \in I})$.

Par conséquent, en peignant \bar{y} en octarine dans $\widetilde{L(\bar{x})}$, on obtient aussi une extension minimale préalgébrique de L . Ainsi, $\varphi(\bar{a} + \bar{x})$ est minimale préalgébrique. Le lemme 6.1.2 montre en outre que si φ est cryptique, $\varphi(\bar{a} + \bar{x})$ est aussi cryptique.

Pour la seconde assertion, soit T la correspondance torique entre $\varphi(\mathfrak{C})$ et $\psi(\mathfrak{C})$, toutes deux contenues dans A^n . Nous allons montrer que ψ est minimale préalgébrique. D'après le lemme 6.1.1, \overline{T} est un automorphisme linéaire de $A^n/Tor(A)$. Soit $(\alpha_{i,j})_{i,j < n} \in GL_n(End^0(A))$ sa matrice.

Soit $L \in \mathcal{C}^0$ contenant les paramètres de φ et ψ . Soient \bar{a} et \bar{b} des génériques sur L de φ et ψ respectivement, tels que $(\bar{a}, \bar{b}) \in (\varphi \times \psi) \cap G$.

Plaçons nous dans l'extension minimale préalgébrique N de L engendrée par le uple octarine \bar{a} . Dans N , soit $b'_i = \sum_{i < n} \alpha_{i,j}(a_i)$. Ainsi, \bar{b}' est une base octarine de N/L .

Pour tout $i < n$, il y a $\epsilon_i \in Tor(A)$ tel que $b'_i = b_i + \epsilon_i$. Ainsi, $\bar{b}' \models \psi(\bar{y} - \bar{\epsilon})$, si bien que $\psi(\bar{y} - \bar{\epsilon})$ est minimale préalgébrique. D'après la première assertion, $\psi(\bar{y})$ est donc minimale préalgébrique. \square

6.2 Codes

Pour X_1, X_2 deux ensembles définissables dans le langage des corps, nous notons $X_1 \sim X_2$ ssi $(RM(X_1 \triangle X_2) < RM(X_1) \text{ ou } X_1 = X_2 = \emptyset)$. \sim est une relation d'équivalence. Par abus de

notations, on écrit $\phi(x) \sim \psi(x)$ pour $\phi(\mathfrak{C}) \sim \psi(\mathfrak{C})$.

Codes Un code α est la donnée d'un entier n_α , d'une formule $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ définissable sur K dans le langage des corps tels que :

- a) Chaque x_i est un uplet de même longueur que le uplet de variables libres de la formule définissant A , et $|\bar{x}| = n_\alpha$.
- b) Pour tout \bar{b} , $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq A^{n_\alpha}$.
- c) Pour tout \bar{b} , soit $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) = \emptyset$ soit $RM(\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})) = n_\alpha \cdot (g-1)$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ est de degré 1.
- d) Pour tout \bar{b} , si $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) \neq \emptyset$, alors $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ est cryptique.
- e) Pour tout $B, L \in \mathcal{C}^0$, pour tout \bar{b} avec $\bar{b} \in B \leq L$, si $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) \neq \emptyset$, alors pour tout $\bar{a} \in O(L)$ tel que $\models \varphi_\alpha(\bar{a}, \bar{b})$, ou bien $\bar{a} \in B$ ou alors \bar{a} est générique corpiquement dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de B .
- f) Pour tout \bar{b} tel que $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) \neq \emptyset$, pour tout $\bar{a} \in A^{n_\alpha}$, il y a un \bar{b}' tel que $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{a}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$.
- g) Pour tout \bar{b}, \bar{b}' , si $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) \neq \emptyset$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$, alors $\bar{b} = \bar{b}'$.

Notations Il y a une famille de variétés $V(\bar{x}, \bar{y})$ définie sur K telle que si $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) \neq \emptyset$, alors $V(\bar{x}, \bar{b})$ est la clôture de Zariski de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Nous notons cette famille V_α . Nous posons en outre $\theta_\alpha(\bar{y}) := \exists \bar{x} \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{y})$.

Encoder Soit $X \subseteq A^n$ un ensemble définissable dans le langage des corps, de degré 1. Nous disons qu'une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ encode X s'il y a un \bar{b} tel que $\phi(\mathfrak{C}, \bar{b}) \sim X$. Un code α encode X si φ_α encode X .

Nous disons que $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ encode X via un tore T s'il y a un \bar{b} tel que T soit une correspondance torique entre $\phi(\mathfrak{C}, \bar{b})$ et X . De même, un code α encode X via T si φ_α le fait.

Lemme 6.2.1. *Tout ensemble définissable cryptique est encodé par un code α .*

Démonstration: Soit X un ensemble cryptique. Soit $V = V(\bar{x}, \bar{b})$ le locus de X au dessus de la clôture algébrique de K et des paramètres de X . On prend $n_\alpha := |\bar{x}|$. On a $\bar{b} \models \psi_{V, n_\alpha}$.

Soit ϕ_V la formule raffinée associée à V (cf. lemme 5.3.6). On pose :

$$\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{y}\bar{y}') := \phi_V(\bar{x} - \bar{y}', \bar{y}) \wedge \psi_{V, n_\alpha}(\bar{y})$$

Par construction, les propriétés a)-d) et f) sont vérifiées. Vérifions la propriété e) : Soient $\bar{b}, \bar{b}' \in B \leq L \in \mathcal{C}^0$ et $\bar{a} \in O(L)$ tels que $\models \phi_V(\bar{a} - \bar{b}', \bar{b}) \wedge \psi_{V, n_\alpha}(\bar{b})$. Alors le lemme 5.3.6 laisse deux possibilités. Ou bien $\bar{a} - \bar{b}' \in B$ et alors $\bar{a} \in B$, ou alors $\bar{a} - \bar{b}'$ est générique dans $\phi_V(\cdot, \bar{b})$. Dans le second cas, comme $RM(\phi_V(\cdot, \bar{b})) = RM(\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b}\bar{b}'))$ et $RM(\bar{a} - \bar{b}'/B) = RM(\bar{a}/B)$, on constate que \bar{a} est bien générique dans $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b}\bar{b}')$ au dessus de B , cqfd.

Par élimination des imaginaires dans ACF, on peut baser φ_α , de sorte que la condition (g) soit vérifiée. On a $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}\bar{0}) \sim X$, et donc α est un code qui encode X . \square

Maintenant que nous avons défini la notion de code, nous pouvons voir ce que la définition -un peu étrange- des correspondances toriques apporte : on peut exprimer au premier ordre que deux codes codent des bases différentes d'une même extension minimale préalgébrique.

Lemme 6.2.2. *Soient α, β deux codes. L'ensemble $G(\alpha, \beta)$ des sous-variétés abéliennes de A^{2n_α} qui sont une correspondance torique entre des instances de φ_α et φ_β est fini.*

Démonstration: Nous montrons que $G(\alpha, \beta)$ est contenu dans la famille finie $Sub(V_\alpha \times V_\beta)$ donnée par la proposition 5.1.2.

Soient \bar{b}, \bar{b}' et T tels que T soit une correspondance torique entre $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ et $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$. Considérons $B := K(\overline{bb'})$, et (\bar{a}, \bar{a}') une réalisation générique de $(\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \times \varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')) \cap T$. Soit W le locus de (\bar{a}, \bar{a}') sur B . Comme T est le tore minimal de W , il nous suffit de montrer que W est cd-maximale.

Soient $W \subsetneq W' \subseteq V_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \times V_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$ une variété irréductible, que nous pouvons supposer définie sur B , et (\bar{f}, \bar{f}') une réalisation générique de W' . Notons que \bar{f} est générique dans $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ et donc dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. De plus, comme $W \subsetneq W'$, $dim(\bar{f}'/B\bar{f}) > 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} cd(W') &= g \cdot ldim(\bar{f}\bar{f}'/B) - dim(\bar{f}\bar{f}'/B) \\ &= g \cdot (ldim(\bar{f}/B) + ldim(\bar{f}'/B\bar{f})) - (dim(\bar{f}/B) + dim(\bar{f}'/B\bar{f})) \\ &= g \cdot ldim(\bar{f}/B) - dim(\bar{f}/B) + g \cdot ldim(\bar{f}'/B\bar{f}) - dim(\bar{f}'/B\bar{f}) \\ &= cd(W) + g \cdot ldim(\bar{f}'/B\bar{f}) - dim(\bar{f}'/B\bar{f}) \\ &= cd(W) - \delta(\bar{f}'/B\bar{f}) + ldim(\bar{f}'/B\bar{f}) \end{aligned}$$

Comme $\bar{f}' \models \varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$, on a $\delta(\bar{f}'/B\bar{f}) \leq 0$. Comme $\bar{f}' \notin acl(B\bar{f})$, il n'y a que deux possibilités : ou bien \bar{f}' est générique au dessus de $B\bar{f}$ et alors $ldim(\bar{f}'/B\bar{f}) > 0$ et $\delta(\bar{f}'/B\bar{f}) = 0$, ou alors $\delta(\bar{f}'/B\bar{f}) < 0$. On a donc bien $cd(W') > cd(W)$: W est cd-maximale. \square

6.3 Bons codes

Proposition 6.3.1 (Bons codes). *Il y a un ensemble \mathcal{A} de codes tel que pour tout ensemble cryptique X , il y a un unique $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que X soit encodé par α via une correspondance torique.*

Nous appellerons les éléments de \mathcal{A} bons codes.

Démonstration: Nous construisons pour tout $n \geq 1$ un ensemble \mathcal{A}_n de codes tel que pour tout ensemble cryptique $X \subseteq A^n$ il y a un unique $\beta \in \mathcal{A}_n$ tel que X soit encodé par β via une correspondance torique. On pourra alors prendre $\mathcal{A} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$.

Soit $n \geq 1$. Soit $(X_i)_{i < \omega}$ une énumération des ensembles cryptiques contenus dans A^n à un K -automorphisme près. On prend α codant X_0 comme dans le lemme 6.2.1 et on pose $C_0 := \{\alpha\}$. Soit $i \geq 1$, supposons qu'on a un ensemble fini C_i de codes tel que pour tout $j \leq i$, X_j est encodé par un unique $\beta \in C_i$ via une correspondance torique. Si X_{i+1} est déjà encodé par un élément de C_i via une correspondance torique, on pose $C_{i+1} := C_i$. Sinon, soit α un code codant X_{i+1} comme

dans le lemme 6.2.1. Posons

$$\rho(\bar{z}) := \forall \bar{y} \left(\bigwedge_{\beta \in C_i} \bigwedge_{T \in G(\beta, \alpha)} \neg \chi_{\beta, \alpha}^T(\bar{y}, \bar{z}) \right)$$

où $\chi_{\beta, \alpha}^T(\bar{b}, \bar{b}')$ exprime que T est une correspondance torique entre $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b})$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$.

On prend α' tel que $\varphi_{\alpha'}(\bar{x}, \bar{z}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \rho(\bar{z})$. Montrons que α' vérifie la propriété f) (les autres propriétés ne posent pas de difficulté) :

Supposons pour aboutir à une contradiction que ce ne soit pas le cas, c'est à dire qu'il y a $\bar{a} \in A^n$ et un \bar{b} avec $\varphi_{\alpha'}(\bar{x}, \bar{b}) \neq \emptyset$ tel que pour tout \bar{b}' , $\varphi_{\alpha'}(\bar{x} - \bar{a}, \bar{b}) \approx \varphi_{\alpha'}(\bar{x}, \bar{b}')$. Considérons alors \bar{b}' tel que $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{a}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$. On doit avoir que $\bar{b}' \neq \rho(\bar{z})$, c'est à dire qu'il y a $\beta \in C_i$, $T \in G(\beta, \alpha)$ et \bar{b}'' tels que T induise une correspondance torique entre $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}'')$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$, et donc entre $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}'')$ et $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{a}, \bar{b})$. D'après le lemme 6.1.1, il y a $\bar{a}' \in A^n$ tel que $(\bar{a}', -\bar{a}) \in T$. Alors T induit une correspondance torique entre $\varphi_\beta(\bar{x} - \bar{a}', \bar{b}'')$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Comme il y a \bar{b}_0 tel que $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}_0)$ encode $\varphi_\beta(\bar{x} - \bar{a}', \bar{b}'')$, nous avons une correspondance torique entre une instance de β et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, une contradiction au fait que $\bar{b} \models \rho(\bar{z})$.

Ainsi, α' est bien un code, et nous posons $C_{i+1} := C_i \cup \{\alpha'\}$. On prend $\mathcal{A}_n = \bigcup_{i < \omega} C_i$. \square

Corollaire 6.3.2. *Soient $M \in \mathcal{C}^0$ et N une extension minimale préalgébrique, engendrée par une réalisation générique peinte en ocarine d'instances de deux bons codes α et α' . Alors, $\alpha = \alpha'$.*

Démonstration: Nous avons \bar{b} et \bar{b}' dans M avec $\models \theta_\alpha(\bar{b}) \wedge \theta_{\alpha'}(\bar{b}')$, \bar{a} générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ et \bar{a}' générique dans $\varphi_{\alpha'}(\bar{x}, \bar{b}')$ tels que \bar{a} et \bar{a}' forment une base de $O(N)$ au dessus de $O(M)$.

Comme \bar{a} et \bar{a}' engendrent le même espace vectoriel au dessus de $O(M)$, il doit y avoir $\bar{c} \in O(M)$ et une correspondance torique T entre $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{c}, \bar{b})$ et $\varphi_{\alpha'}(\bar{x}, \bar{b}')$, tels que $(\bar{a} + \bar{c}, \bar{a}') \in T$. D'après la propriété f) des codes, $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{c}, \bar{b})$ est une instance de α .

Les bons codes α et α' encodent tous deux la formule cryptique $\varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{c}, \bar{b})$ via une correspondance torique. Par unicité, on a donc $\alpha = \alpha'$. \square

Remarque 6.3.3. *Soient $L, M, N \in \mathcal{C}^0$ avec $L \leq M, N$. Supposons que N est une extension minimale préalgébrique de L donnée par le code α . Alors, $M \otimes_L^0 N$ est une extension minimale préalgébrique de M donnée par le code α .*

Démonstration: Soient $\bar{a} \in O(N)$ et $\bar{b} \in L$ tels que \bar{a} soit générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de L . $M \perp_L N$, donc \bar{a} est générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de M . \square

7 Suites de Morley de bons codes

Maintenant que nous avons de bons codes, nous allons pouvoir exprimer au premier ordre qu'un élément de \mathcal{C}^0 ne contient que peu de réalisations d'extensions minimales préalgébriques d'un certain type.

7.1 Suites dérivées

Pour $i \leq \lambda$, on définit la $i^{\text{ème}}$ dérivation de base

$$\partial_i : \begin{array}{ccc} A^{\lambda+1} & \rightarrow & A^{\lambda+1} \\ (\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda) & \rightarrow & (\bar{e}_0 - \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_{i-1} - \bar{e}_i, -\bar{e}_i, \bar{e}_{i+1} - \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{e}_i) \end{array}$$

Une dérivation est une composition d'un nombre fini de dérivations de base. Soit $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda) \in A^{\lambda+1}$ une suite de longueur $\lambda+1$. On appelle suite dérivée de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ une suite obtenue à partir de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ par application d'une dérivation. Si en outre on n'utilise que des compositions des dérivations de base $(\partial_i)_{i \leq \nu}$ pour $\nu \leq \lambda$, on parle de suite ν -dérivée.

Un rapide calcul permet de constater que pour $i, j \leq \lambda$:

$$\partial_j \circ \partial_i = \begin{cases} \partial_i \circ \tau_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ Id & \text{si } i = j \end{cases}$$

où $\tau_{i,j}$ est la transposition (ij) .

Par conséquent, les suites dérivées de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ sont les suites de la forme $\partial \circ \sigma(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ pour $\partial \in \{\partial_0, \dots, \partial_\lambda\} \cup \{Id\}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda+1}$.

On obtient donc que l'ensemble des composées de dérivations est un groupe de cardinal $(\lambda+2)!$. En résumé :

Remarque 7.1.1. Soit $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda) \in A^{\lambda+1}$, l'ensemble des suites dérivées de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ est de cardinal $\leq (\lambda+2)!$, et est clos par permutations.

7.2 Suites de différence

Fait 7.2.1 ([19]). Soient G un groupe stable commutatif, et $a, b, c \in G$ des éléments deux à deux indépendants tels que $a + b + c = 0$. Alors, a, b, c sont des éléments génériques dans des translatés d'un même sous groupe définissable connexe de G , qui se trouve être le stabilisateur de leurs types au dessus de $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$.

Lemme 7.2.2. Soit $V_{\bar{b}} \subseteq A^n$ une variété cryptique, alors le stabilisateur de $V_{\bar{b}}$ est fini.

Démonstration: Soit $T = \text{stab}_+(V_{\bar{b}})^0$ la composante connexe du stabilisateur de $V_{\bar{b}}$ dans A^n . Soient \bar{g} générique dans T et \bar{a} générique dans $V_{\bar{b}}$ avec $\bar{g} \downarrow_{K\bar{b}} \bar{a}$. Comme $\bar{g} + \bar{a}$ est générique dans $V_{\bar{b}}$ au dessus de \bar{b} , on a $\delta(\bar{g} + \bar{a}/K\bar{b}) = 0$. A fortiori, $\delta(\bar{g} + \bar{a}/K\bar{a}\bar{b}) \leq 0$. Or, $\delta(\bar{g} + \bar{a}/K\bar{a}\bar{b}) = \delta(\bar{g}/K\bar{a}\bar{b})$. Comme

$$\delta(\bar{g}/K\bar{a}\bar{b}) = \dim(\bar{g}/K\bar{a}\bar{b}) - (g-1) \cdot \text{ldim}(\bar{g}/K\bar{a}\bar{b}) = \dim(T) - (g-1) \frac{\dim(T)}{g}$$

on a $\frac{\dim(T)}{g} = \delta(\bar{g}/K\bar{a}\bar{b}) \leq 0$, d'où $\dim(T) = 0$. \square

Suites de différence À un code α nous associons le plus petit entier m_α tel que pour tout $\bar{b} \models \theta_\alpha$, \bar{b} appartienne à la clôture définissable d'une (et donc de toute) suite de Morley pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ de longueur m_α .

Proposition 7.2.3. *Il y a une famille $(\psi_{\alpha,\lambda}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda) \mid \alpha \in \mathcal{A}, \lambda \geq m_\alpha)$ de formules à paramètres dans K , dont les réalisations seront appelées suites de différence, satisfaisant :*

- h) Si $\models \psi_{\alpha,\lambda}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, alors $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$ pour $i \neq j$.
- i) Pour tout $\bar{b} \models \theta_\alpha$, pour toute suite de Morley $\{\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda, \bar{f}\}$ pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, $\models \psi_{\alpha,\lambda}(\bar{e}_0 - \bar{f}, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{f})$
- j) Pour tout $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda) \models \psi_{\alpha,\lambda}$, il y a une unique \bar{b} tel que $\models \varphi_\alpha(\bar{e}_i, \bar{b})$ pour tout $0 \leq i \leq \lambda$. De plus, \bar{b} est dans la clôture définissable de K et de n'importe quel segment de longueur m_α des \bar{e}_i . On appelle \bar{b} paramètre canonique de la suite $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda$.
- k) Si $\models \psi_{\alpha,\lambda}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, alors $\models \psi_{\alpha,\lambda'}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\lambda'})$ pour tout $m_\alpha \leq \lambda' \leq \lambda$.
- l) Si $i \neq j$ et $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda$ est une réalisation de $\psi_{\alpha,\lambda}$ ayant pour paramètre canonique \bar{b} telle que \bar{e}_i soit générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de \bar{b} , alors pour tout $T \in G(\alpha, \alpha)$ et tout \bar{e}' tel que $\bar{e}_j \bar{e}' \in T$, $\bar{e}_i \not\downarrow_{\bar{b}} \bar{e}' - \bar{e}_i$.
- m) Si $\models \psi_{\alpha,\lambda}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$, alors $\models \psi_{\alpha,\lambda}(\partial_i(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda))$ pour tout $i \leq \lambda$.

Démonstration: Soit α un bon code. Nous construisons les $\psi_{\alpha,\lambda}$ par récurrence sur $\lambda \geq m_\alpha$. Soit $\lambda \geq m_\alpha$. Supposons que les $(\psi_{\alpha,\lambda'})_{m_\alpha \leq \lambda' < \lambda}$ ont été construites. Nous considérons le type partiel $\Sigma(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ exprimant :

il existe \bar{b}' et une suite de Morley $\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_\lambda, \bar{f}$
pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$ tels que $\bar{e}_i = \bar{e}'_i - \bar{f}$.

Montrons que $\Sigma(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ vérifie les propriétés h)-l) :

- h) et i) Claires par construction.
- j) D'après la propriété f) des codes, il y a \bar{b} tel que $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \sim \varphi_\alpha(\bar{x} - \bar{f}, \bar{b}')$, et alors on a $\models \varphi_\alpha(\bar{e}_0, \bar{b})$. $\bar{b} \in \text{dcl}(K\bar{b}'\bar{f})$ et d'après la propriété g), \bar{b} est unique avec la propriété $\models \varphi_\alpha(\bar{e}_0, \bar{b})$. Comme $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda$ est une suite de Morley au dessus de $\bar{b}\bar{f}$, on a $\models \varphi_\alpha(\bar{e}_i, \bar{b})$ pour tout $i \leq \lambda$. Comme $\lambda \geq m_\alpha$, on voit que \bar{b} est dans la clôture définissable de K et de n'importe quel segment de longueur m_α des \bar{e}_i .
- k) Supposons que $\lambda > m_\alpha$. Comme $\psi_{\alpha,\lambda-1}$ vérifie k), il suffit de vérifier que $\models \psi_{\alpha,\lambda-1}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\lambda-1})$ pour une réalisation $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda)$ de Σ . Comme $\psi_{\alpha,\lambda-1}$ vérifie i), il est clair que $\models \psi_{\alpha,\lambda-1}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\lambda-1})$.
- l) Soient $i \neq j \leq \lambda$, et $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda$ une réalisation de Σ ayant pour paramètre canonique \bar{b} , et $T \in G(\alpha, \alpha)$, et \bar{e}' tel que $\bar{e}_j \bar{e}' \in T$. Alors, comme $\bar{e}' \in \text{acl}(\bar{e}_j)$, on a $\bar{e}' \downarrow_{\bar{b}} \bar{e}_i$. Supposons

pour obtenir une contradiction que $\bar{e}_i \downarrow_b \bar{e}' - \bar{e}_i$. Alors, le triplet $\bar{e}_i, -\bar{e}', \bar{e}' - \bar{e}_i$ satisfait les hypothèses du fait 7.2.1 et donc le stabilisateur de $tp(\bar{e}_i/acl(K, \bar{b}))$ est infini. Ceci contredit le lemme 7.2.2 : comme \bar{e}_i est générique dans $V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, qui est cryptique, le stabilisateur de son type fort au dessus de $K\bar{b}$ doit être fini.

Par compacité, nous pouvons trouver un fragment fini de $\Sigma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)$ dont la conjonction $\psi(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)$ a les propriétés h)-l). On pose

$$\psi_{\alpha, \lambda}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda) := \bigwedge_{\partial \text{ dérivation}} \psi(\partial(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda))$$

Il ne reste qu'à vérifier que $\psi_{\alpha, \lambda}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_\lambda)$ satisfait i).

Pour ce, nous montrons que si $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\lambda, \bar{f}$ est une suite de Morley pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, alors $\partial_i(\bar{e}_0 - \bar{f}, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{f})$ est de la forme $(\bar{e}'_0 - \bar{f}', \dots, \bar{e}'_\lambda - \bar{f}')$ pour $\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_\lambda, \bar{f}'$ une suite de Morley pour $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$. En effet,

$$\partial_i(\bar{e}_0 - \bar{f}, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{f}) = (\bar{e}_0 - \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_{i-1} - \bar{e}_i, \bar{f} - \bar{e}_i, \bar{e}_{i+1} - \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{e}_i)$$

et on peut prendre $\bar{e}'_i = \bar{f}$, $\bar{f}' = \bar{e}_i$ et $\bar{e}'_j = \bar{e}_j$ pour $j \neq i$.

Ainsi, comme ψ a la propriété i), on a $\models \psi(\partial_i(\bar{e}_0 - \bar{f}, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{f}))$ pour tout i . Par conséquent, $\models \psi_{\alpha, \lambda}(\bar{e}_0 - \bar{f}, \dots, \bar{e}_\lambda - \bar{f})$. $\psi_{\alpha, \lambda}$ satisfait bien h)-m). \square

7.3 Ein schrecklich kompliziertes Lemma

Lemme 7.3.1. *Pour tout code α , il y a une fonction $\lambda_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $M \leq N \in \mathcal{C}^0$, pour tout $n \geq m_\alpha$ et toute suite de différence octarine $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu) \in N$ pour α ayant pour paramètre canonique \bar{b} avec $\mu \geq \lambda_\alpha(n)$ on se trouve dans l'un des cas suivant :*

1. le paramètre canonique d'une suite $\lambda_\alpha(n)$ -dérivée de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)$ appartient à M .
2. $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)$ contient une sous-suite de Morley pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de $M\bar{b}$ de longueur n .

Démonstration: Nous construisons en premier lieu une énumération commode de notre séquence de différence par récurrence : Pour $0 \leq i \leq \mu$, si $\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}$ sont déjà choisis, on choisit $\sigma_i \in \llbracket 0, \mu \rrbracket \setminus \{\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}\}$ tel que $dtr(\bar{e}_{\sigma_i}/M, \bar{e}_{\sigma_0}, \dots, \bar{e}_{\sigma_{i-1}})$ soit maximal, et, lorsque c'est possible, tel que $\bar{e}_{\sigma_i} \notin \langle M, \sigma_0, \dots, \sigma_{i-1} \rangle$. Notons que $i \rightarrow \sigma_i$ est une permutation et que par conséquent le uple $\bar{e}_{\sigma_0}, \dots, \bar{e}_{\sigma_\mu}$ reste une suite de différence pour α . Nous pouvons supposer que notre suite de différence est $\bar{e}_{\sigma_0}, \dots, \bar{e}_{\sigma_\mu}$.

Soient

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{i \in \llbracket m_\alpha, \mu \rrbracket \mid \bar{e}_i \text{ est générique au dessus de } M, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{i-1} \text{ dans } \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})\} \\ X_2 &:= \{i \in \llbracket m_\alpha, \mu \rrbracket \mid \bar{e}_i \in \langle M, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{i-1} \rangle\} \\ X_3 &:= \llbracket m_\alpha, \mu \rrbracket \setminus (X_1 \cup X_2) \end{aligned}$$

Par choix de notre énumération, nous avons $X_1 < X_3 < X_2$.

Soit $r = m_\alpha + n + m_\alpha \cdot n_\alpha$, et $s = g \cdot (r \cdot n_\alpha + m_\alpha)$. Par élimination des quanteurs, nous trouvons une famille finie V_0, \dots, V_l de variétés irréductibles et des variétés W_0, \dots, W_l telles que $\psi_{\alpha, r+s}(\cdot) = \bigcup_{i < l} (V_i \setminus W_i)$ (rappelons que les réalisations de $\psi_{\alpha, r+s}$ sont des suites de différence de longueur $r + s + 1$). Soit $\mathcal{T} := \bigcup_{i < l} \text{Sub}(V_i)$ l'ensemble des sous-groupes minimaux des sous-variétés cd-maximales des V_i . \mathcal{T} est fini.

Nous posons $\lambda_\alpha(n) = m_\alpha + m_\alpha \cdot n_\alpha + n + \mu_0$, où μ_0 est tel que tout ensemble de cardinal $\geq \mu_0$ dont les sous-uplets de taille $s + 1$ sont colorés en $(s + 1) \cdot |\mathcal{T}|$ couleurs admette un sous-ensemble monochrome de taille $m_\alpha + s + 1$ (théorème de Ramsey).

Nous pouvons supposer que $\mu = \lambda_\alpha(n)$.

Notons que le paramètre canonique \bar{b} de notre suite de différence appartient à $K(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{m_\alpha-1})$. Par conséquent, pour $i \geq m_\alpha$, $\delta(\bar{e}_i/M(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{i-1})) \leq 0$, avec inégalité stricte ssi $i \in X_3$.

Comme $M \leq N$, on a $0 \leq \delta(M(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)/M)$. Or, $\delta(M(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)/M) \leq$

$$\delta(M(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{m_\alpha-1})/M) + \sum_{m_\alpha \leq i \leq \mu} \delta(\bar{e}_i/M(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{i-1})) \leq m_\alpha \cdot n_\alpha - |X_3|$$

Par conséquent, $|X_3| \leq m_\alpha \cdot n_\alpha$.

On suppose que le cas 2. ne se présente pas. Alors, $|X_1| < n$. On a donc $r = m_\alpha + n + m_\alpha \cdot n_\alpha \geq m_\alpha + |X_1| + |X_3|$.

Soit $i_0 < \dots < i_s \in X_2$ un uplet de longueur $s + 1$. À cet uplet nous associons une couleur $(t, T) \in (s + 1) \times \mathcal{T}$. Donnée un ordre arbitraire sur $(s + 1) \times \mathcal{T}$, la couleur de notre uplet est le plus petit $(t, T) \in (s + 1) \times \mathcal{T}$ tel que la dépendance linéaire de \bar{e}_{i_t} sur $M, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{r-1}, \bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_{t-1}}$ est induite par T . Nous vérifions maintenant que chaque uplet comme ci-dessus a une couleur :

Soit W le locus de $\epsilon := \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{r-1}, \bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_s}$ au dessus de M . Soit j tel que $\epsilon \in V_j \setminus W_j$. Soit $W \subseteq W' \subseteq V_j$ irréductible telle que $cd(W') \leq cd(W)$ de dimension maximale. Par construction, W' est cd-maximale et donc son sous-groupe minimal T appartient à \mathcal{T} . Soit $\bar{a} = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{r+s})$ une réalisation générique de W' , que nous peignons en octarine (ainsi, nous voyons $M(\bar{a})$ comme appartenant à \mathcal{C}). Comme $\epsilon \notin W_j$, on a $\bar{a} \notin W_j$. Par conséquent, $\bar{a} \models \psi_{\alpha, r+s}$.

Comme les $\bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_s}$ appartiennent au span de $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{r-1}$, on a $g \cdot r \cdot n_\alpha \geq g \cdot ldim(\epsilon/M) \geq cd(W) \geq cd(W')$. Or,

$$\begin{aligned} cd(W') &= \sum_{0 \leq i \leq r+s} (g \cdot ldim(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) - dtr(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1})) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq r+s} (ldim(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) - \delta(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1})) \end{aligned}$$

Comme $\bar{a} \models \psi_{\alpha, r+s}$, on a pour $m_\alpha \leq i \leq r + s$ que $\delta(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) \leq 0$ et donc $ldim(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) - \delta(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) \geq 0$.

Or, $\sum_{i < r} (g \cdot ldim(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) - dtr(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1})) \geq -g \cdot m_\alpha$ et on a donc :

$$s = g \cdot (r \cdot n_\alpha + m_\alpha) \geq \sum_{r \leq i \leq r+s} (ldim(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}) - \delta(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}))$$

Et a fortiori $s \geq \sum_{r \leq i \leq r+s} \text{ldim}(\bar{a}_i/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1})$.
Donc, il y a $t \leq s$ tel que $\text{ldim}(\bar{a}_{r+t}/M, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{r+t-1}) = 0$. Cette dépendance linéaire est induite par la classe $\bar{m} + T$, où $\bar{m} \in W'(M)$ est tel que $W' \subseteq \bar{m} + T$. Par conséquent, ϵ_{r+t} vérifie la même dépendance linéaire sur ses prédécesseurs. En résumé, il y a $(t, T) \in (s+1) \times \mathcal{T}$ tel que la dépendance linéaire de \bar{e}_{i_t} sur $M, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{r-1}, \bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_{t-1}}$ est induite par T . Notre uplet a donc une couleur au sens donné plus haut.

Par choix de $\lambda_\alpha(n)$, il vient $|X_2| \geq \mu_0$. Par conséquent, on trouve un sous-ensemble $I \subseteq X_2$ monochrome (disons de couleur (t, T)) pour la coloration ci-dessus et de taille $m_\alpha + s + 1$. Soient $i_0 < i_1 < \dots$ les éléments de I . Pour $u \geq t$, nous avons par choix de la coloration de $\bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_{t-1}}, \bar{e}_{i_u}, \dots$ que la dépendance linéaire de \bar{e}_{i_u} sur $\bar{e}_{i_0}, \dots, \bar{e}_{i_{t-1}}$ est induite par $\bar{m} + T$ pour un $\bar{m} \in A(M)$. Par conséquent, les $(\bar{e}_{i_u})_{u \geq t}$ sont tous dans la même classe modulo $O(M)$. La suite $(\bar{e}_{i_u} - \bar{e}_{i_t})_{u > t}$ est une suite d'éléments de $O(M)$ de longueur $\geq m_\alpha$, extraite de la suite $\partial_{i_t}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_\mu)$, qui est $\lambda_\alpha(n)$ -dérivée puisque $i_t \leq \mu = \lambda_\alpha(n)$. Le paramètre canonique de cette dernière est donc dans M . Nous sommes donc dans le cas 1. \square

8 La classe d'amalgamation collapsée

8.1 La classe \mathcal{C}^μ

Nous choisissons des fonctions à fibres finies $\mu, \mu' : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\begin{aligned} \mu'(\alpha) &> g \cdot n_\alpha \\ \mu'(\alpha) &\geq \lambda_\alpha(m_\alpha + 1) \\ \mu(\alpha) &> \lambda_\alpha(\mu'(\alpha)) \end{aligned}$$

Définition La classe \mathcal{C}^μ est la classe des éléments $M \in \mathcal{C}^0$ tels qu'aucun bon code α n'a de suite de différence octarine de longueur $\geq \mu(\alpha) + 1$ dans M .

\mathcal{C}^μ est la classe des modèles de T_μ , où T_μ est l'union de la théorie T_0 et de l'ensemble de formules :

$$\{\neg\exists \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{\mu(\alpha)} (\psi_{\alpha, \mu(\alpha)}(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{\mu(\alpha)}) \bigwedge_{i \leq \mu(\alpha)} O(\bar{x}_i)) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$$

Lemme 8.1.1. Soient $M \in \mathcal{C}^\mu$, $M' \in \mathcal{C}^0$, où M' est une extension minimale préalgébrique de M , et α un bon code. Supposons qu'il y a $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M'$ une suite de différence octarine pour α , dont le paramètre canonique \bar{b} est dans M . Alors, il y a $i \leq \mu(\alpha)$ tel que $\forall j \neq i, \bar{e}_j \in M$ et tel que \bar{e}_i est une base octarine de M'/M .

Démonstration: D'après la propriété e), pour $j \leq \mu(\alpha)$, $\bar{e}_j \in M$ ou \bar{e}_j est générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de M . Comme $M \in \mathcal{C}^\mu$, il doit y avoir $\bar{e}_i \notin M$, et alors \bar{e}_i forme une base octarine de l'extension minimale préalgébrique M'/M . Montrons que c'est le seul : si $j \neq i$ est tel que \bar{e}_j est générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de M , alors \bar{e}_j est une base octarine de l'extension minimale préalgébrique M'/M , et donc il y a $\bar{a} \in O(M)$ et $T \in G(\alpha, \alpha)$ tel que $(\bar{a} + \bar{e}_i, \bar{e}_j) \in T$. Posons $\bar{e}' = \bar{a} + \bar{e}_i$. Alors, $\bar{e}_i \downarrow_{\bar{b}} \bar{e}' - \bar{e}_i$. Comme $(\bar{e}', \bar{e}_j) \in T$, nous avons une contradiction à la propriété l) des suites de différence. \square

Lemme 8.1.2. Soient $M \in \mathcal{C}^\mu$, $M' \in \mathcal{C}^0$ avec $M \leq M'$ minimale. Si l'extension est blanche générique, alors $M' \in \mathcal{C}^\mu$. Si M'/M est préalgébrique minimale, alors $M' \notin \mathcal{C}^\mu$ ssi il y a un bon code α et une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M'$ pour α , et on est alors dans l'un des cas suivants :

- Une suite $\lambda_\alpha(\mu'(\alpha))$ -dérivée de $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ a son paramètre canonique dans M , et on est dans la situation du lemme 8.1.1.
- Sinon, il y a une sous suite de $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ de longueur $\mu'(\alpha)$, de paramètre canonique \bar{b} , qui est une suite de Morley pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de $M\bar{b}$.

Démonstration: Si M'/M est blanche générique, $O(M') = O(M)$, et il n'y a pas de nouvelles suites de différence octarines. Supposons que M'/M soit minimale préalgébrique et que $M' \notin \mathcal{C}^\mu$. Soient α un bon code et une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M'$ pour α de paramètre canonique \bar{b} . Si le cas a) ne se présente pas, alors nous sommes dans le cas b) du lemme 7.3.1, et il y a une suite de Morley pour $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de $M\bar{b}$ de longueur $\mu'(\alpha)$. \square

Nous dirons qu'une extension minimale préalgébrique M'/M est donnée par un bon code α s'il y a $\bar{b} \in M$ et une réalisation octarine générique \bar{e} de $\phi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ telle que \bar{e} soit une base octarine de M' au dessus de M .

Remarquons que α est uniquement déterminé par l'extension M'/M : si M'/M est donnée par un bon code β , disons via \bar{e}' une réalisation octarine générique de $\varphi_\beta(\bar{x}, \bar{b}')$ pour $\bar{b}' \in M$, alors il y a $\bar{a} \in O(M)$ et une correspondance torique T telle que $(\bar{a} + \bar{e}', \bar{e}) \in T$. D'après la propriété f) des codes et la proposition 6.3.1, on a donc $\alpha = \beta$.

Lemme 8.1.3. *Soit $M \in \mathcal{C}^\mu$, alors toute extension générique octarine de M est dans \mathcal{C}^μ .*

Démonstration: Soit M' une extension générique octarine, c'est à dire $dtr(M'/M) = g$ et $ldim(O(M')/M) = 1$. Alors M'/M se décompose en une extension générique blanche $N \cong \widetilde{M}(t)$ et une extension minimale préalgébrique de longueur 1 M'/N . Supposons pour obtenir une contradiction que $M' \notin \mathcal{C}^\mu$. Alors, comme $N \in \mathcal{C}^\mu$, le lemme 8.1.2 s'applique à M'/N : soit α le bon code et $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M'$ la suite de différence pour α comme dans ce lemme.

Dans le cas a), nous remplaçons cette suite de différence par une suite dérivée dont le paramètre canonique est dans N . Alors, tous les éléments de notre suite de différence sauf un, disons \bar{e}_0 , appartiennent à N et M'/N est une extension minimale préalgébrique engendrée par \bar{e}_0 . Comme $O(M) = O(N)$, nous en déduisons que $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M$. Par conséquent, le paramètre canonique \bar{b} de la suite de différence est dans M . Comme $\bar{e}_0 \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, on a $\delta(\bar{e}_0/M) = 0$. Or, $\delta(\bar{e}_0/M) = 1$ puisque \bar{e}_0 engendre l'extension M'/M , une absurdité!

Dans le cas b), il y a une sous suite de la suite de différence de longueur $\mu'(\alpha)$ qui est de Morley au dessus de $N\bar{b}$, où \bar{b} est son paramètre canonique. Or,

$$ldim(M'/N) \geq ldim(M'/N\bar{b}) = \mu'(\alpha) > 1$$

ce qui est une absurdité car $ldim(M'/N) = 1$. \square

Proposition 8.1.4. *Pour tout bon code α , il y a une \mathcal{L} -formule $\chi_\alpha(\bar{y})$ telle que pour $\bar{b} \in M \in \mathcal{C}^\mu$ avec $M \models \theta_\alpha(\bar{b})$, on a $M \models \chi_\alpha(\bar{b})$ ssi aucune extension minimale préalgébrique de M codée par $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b})$ n'appartient à \mathcal{C}^μ .*

Démonstration: Nous donnons tout d'abord une formule $\chi_1(\bar{y})$ qui force le cas a) du lemme 8.1.2 dans toute extension minimale préalgébrique donnée par α , puis nous faisons de même avec $\chi_2(\bar{y})$ pour le cas b). On pourra alors prendre $\chi_\alpha = \chi_1 \vee \chi_2$.

cas a) Nous considérons la formule $\chi_1(\bar{y})$ qui énonce qu'il existe une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ pour α , et $\bar{a} \in O(M)$, tels qu'il y a $T \in G(\alpha, \alpha)$ qui induit une correspondance torique entre $\phi_\alpha(\bar{x} - \bar{a}, \bar{y})$ et $\psi_{\alpha, \mu(\alpha)}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}, \bar{x})$.

Si $M \models \chi_1(\bar{b})$, on considère $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ et $\bar{a} \in O(M)$ attestant de ceci. Soit M' une extension minimale préalgébrique de M donnée par α , disons de base octarine $\bar{e} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Alors on trouve $\bar{e}' \in \psi_{\alpha, \mu(\alpha)}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}, M')$ et $T \in G(\alpha, \alpha)$ tels que $(\bar{a} + \bar{e}, \bar{e}') \in T$. On constate alors que $\bar{e}' \in O(M')$. Par conséquent, $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}, \bar{e}'$ est une suite de différence octarine, et $M' \notin \mathcal{C}^\mu$.

Réciproquement, soient α et α' des bons codes. Supposons que pour une extension minimale préalgébrique M' de M ayant pour base octarine \bar{e} un générique de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$, il y a une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha')}$ pour α' de paramètre canonique $\bar{b}' \in M$ (quitte à remplacer $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha')}$ par une de ses suites dérivées, cela correspond bien au cas a) du lemme 8.1.2).

Le lemme 8.1.1 nous garantit (sans perte de généralité) que $\bar{e}_{\mu(\alpha')}$ est une base octarine de M'/M et que pour $j < \mu(\alpha')$, $\bar{e}_j \in M$. On doit avoir $\alpha = \alpha'$ puisque ce sont des bons codes (corollaire 6.3.2). Au dessus de $O(M)$, les uplets \bar{e} et $\bar{e}_{\mu(\alpha')}$ engendrent le même espace vectoriel, ce qui se traduit par l'existence de $\bar{a} \in O(M)$ et de $T \in G(\alpha, \alpha)$ tels que $(\bar{e} + \bar{a}, \bar{e}_{\mu(\alpha)}) \in T$. Ainsi, $M \models \chi_1(\bar{b})$.

cas b) Dans ce cas, M admet une extension minimale préalgébrique M' codée par α de base octarine $\bar{a} \models \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ dans laquelle il y a une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)}$ pour β dont une sous-suite de longueur $\mu'(\beta)$ est linéairement indépendante au dessus de M .

Notons que nous n'avons qu'à considérer un nombre fini de bons codes β puisque $n_\beta \cdot \mu'(\beta) \leq \text{ldim}(\bar{a}/M) = n_\alpha$ et donc $\mu'(\beta) \leq n_\alpha$.

Considérons V_1, \dots, V_o des variétés irréductibles et W_1, \dots, W_o des variétés telles que

$$\psi_\beta = \bigcup_{1 \leq i \leq o} V_i \setminus W_i$$

Soit $V = V_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ le locus de \bar{a} sur M , et $1 \leq i \leq o$ tel que $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)} \in V_i$. On considère $W \subseteq V \times V_i$ le locus de $\bar{a}, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)}$ sur M .

Comme $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)} \in \langle O(M), \bar{a} \rangle$, on a $cd(W) = cd(V) = n_\alpha$.

Soit $W \subsetneq W' \subseteq V \times V_i$ irréductible, nous montrons que $cd(W') \geq cd(V)$.

Soit $(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$ générique dans W' . Notons que $\bar{e}'_{\leq \mu(\beta)} \models \psi_\beta$. Comme \bar{a}' est générique dans V , nous avons $g \cdot \text{ldim}(\bar{a}'/M) - \text{dim}(\bar{a}'/M) = cd(V)$. Soit Z le locus de $(\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$ au dessus de $\widetilde{M(\bar{a})}$. Il vient :

$$\begin{aligned} cd(W') &= g \cdot \text{ldim}(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}) - \text{dim}(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}) \\ &= g \cdot \text{ldim}(\bar{a}'/M) - \text{dim}(\bar{a}'/M) + g \cdot \text{ldim}(\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}/M\bar{a}) - \text{dim}(\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}/M\bar{a}) \\ &= cd(V) + cd(Z) \geq cd(V) \end{aligned}$$

Soient T le sous-groupe minimal de W , et $\bar{m} \in A(M)$ tel que $W \subseteq \bar{m} + T$. Considérons $W \subseteq W' \subseteq V \times V_i$ irréductible telle que $cd(W') \leq cd(V)$ de dimension maximale. Alors, W' est cd-maximale et $cd(W') = cd(V)$. Ainsi, le sous-groupe minimal T' de W' appartient à la famille finie $\text{Sub}(V \times V_i)$. On notera que l'on doit avoir $\text{dim}(W') = \text{dim}((V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i) \cap \bar{m} + T')$, si bien que W' est une composante irréductible de $(V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i) \cap \bar{m} + T'$.

Soit $(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$ une réalisation générique de W' . Comme \bar{a}' est générique dans V , nous pouvons supposer que $\bar{a}' = \bar{a}$.

Notons $\bar{e}' = (\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{r-1})$ la concaténation des uples $\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}$. Comme $cd(W') = cd(V)$, il vient

$\frac{\dim(\bar{e}'/M\bar{a})}{g} = \text{ldim}(\bar{e}'/M\bar{a}) =: l$. Soit $B \subseteq [0, r-1]$ tel que $(e'_i)_{i \in B}$ soit une base du span de \bar{e}' au dessus de $M\bar{a}$ modulo la torsion. Alors, comme $\bar{e}' \in \text{acl}(M\bar{a}(e'_i)_{i \in B})$, on a $\dim((e'_i)_{i \in B}/M\bar{a}) = l \cdot g$, d'où $\dim(e'_i/M, \bar{a}, (e'_j)_{j \in B, j \neq i}) = g$ pour tout $i \in B$: $(e'_i)_{i \in B}$ est une suite de Morley du générique de A au dessus de $M\bar{a}$.

Soit $\bar{e} = (e_0, \dots, e_{r-1})$ la concaténation des uples $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)}$. Écrivons T comme l'intersection des formes $\sum_{i < n_\alpha + r} \alpha_{i,j}(x_i) \ni 0, j \in J$ où $\alpha_{i,j} \in \mathcal{Q}End(A)$ pour tout i, j . Comme $\bar{a}\bar{e}$ est octarine et $\bar{a}\bar{e} \in W \subseteq \bar{m} + T$, il vient

$$(1) \quad \sum_{i < n_\alpha + r} \alpha_{i,j}(m_i) \text{ contient un élément octarine pour tout } j$$

Nous appelons la propriété (1) : « \bar{m} colorie T en octarine ».

Comme $T \subseteq T'$, on voit que \bar{m} colorie aussi T' en octarine.

Nous voyons que $M \models \rho_\beta(\bar{b})$, où $\rho_\beta(\bar{y})$ est une formule qui énonce :

Il y a $1 \leq i \leq o$, et $T' \in \text{Sub}(V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i)$, et $\bar{m} \in A(M)$, et W' une composante irréductible de $(V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i) \cap \bar{m} + T'$ tels que :

- 1) \bar{m} colorie T' en octarine.
- 2) W' se projette génériquement sur $V_\alpha(\cdot, \bar{y})$.
- 3) $\dim(T') - \dim(W') = n_\alpha$.
- 4) Pour $(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$ générique dans W' , $\models \psi_\beta(\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$.
- 5) Il y a $B \subseteq [0; r-1]$, de cardinal $\frac{\dim(\bar{e}'/\bar{a}')}{g}$, tel que $(e'_i)_{i \in B}$ soit une suite de Morley du générique de A au dessus de \bar{a} lorsque $\bar{a}'\bar{e}'$ est générique dans W' .

Nous définissons $\chi_2(\bar{y})$ comme la disjonction des $\rho_\beta(\bar{y})$ pour β tel que $\mu'(\beta) \leq n_\alpha$.

Le lemme suivant établit que la propriété « \bar{m} colorie T en octarine » est adéquate.

Lemme 8.1.5. *Soit W une variété irréductible définie sur $M \in \mathcal{C}$, de sous groupe minimal T . Supposons qu'il y a $\bar{m} \in A(M)$ avec $W \subseteq \bar{m} + T$ qui colorie T en octarine.*

Alors, pour \bar{a} générique dans W , il y a $N \in \mathcal{C}$ de support $\widetilde{M(\bar{a})}$ tel que $O(N) = \langle O(M), \bar{a} \rangle$.

Démonstration du lemme: Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $\bar{a} = (\bar{a}', \bar{a}'')$ où \bar{a}' est linéairement indépendant et $\text{ldim}(\bar{a}''/M\bar{a}') = 0$. Nous découpons par la suite \bar{x} et \bar{m} de la même manière que \bar{a} , à savoir : $\bar{x} = (\bar{x}', \bar{x}'')$ avec $|\bar{x}'| = |\bar{a}'|$ et $|\bar{x}''| = |\bar{a}''|$, de même pour \bar{m} .

Par généralité de \bar{a} , T est un quasi-homomorphisme $T : A^{|\bar{a}'|} \rightarrow A^{|\bar{a}''|}$. Il y a donc des quasi-endomorphismes $\alpha_{i,j} \in \mathcal{Q}End(A)$ tels que

$$T = \{(\bar{x}', \bar{x}'') \in A^{|\bar{a}'|} \times A^{|\bar{a}''|} \mid x''_j \in \sum_{i < |\bar{a}'|} \alpha_{i,j}(x'_i) \text{ pour tout } j < |\bar{a}''|\}$$

Prenons \bar{m} comme dans l'énoncé, on note c_j l'unique élément octarine de $\sum_{i < |\bar{a}'|} \alpha_{i,j}(m'_i) - m''_j$, et $d_j := c_j + m''_j$ pour tout $j < |\bar{a}''|$. Ainsi, $d_j \in \sum_{i < |\bar{a}'|} \alpha_{i,j}(m_i)$ pour tout j , ce qui s'écrit $(\bar{m}', \bar{d}) \in T$.

Comme $(\bar{a}' - \bar{m}', \bar{a}'' - \bar{m}'') \in T$ et $(\bar{m}', \bar{d}) \in T$, on a

$$(\bar{a}' - \bar{m}', \bar{a}'' - \bar{m}'') + (\bar{m}', \bar{d}) = (\bar{a}', \bar{a}'' + \bar{c}) \in T$$

Soit n l'ordre de $T(0)$. Comme T est le groupe minimal de W , il est connexe, et donc divisible et on trouve par conséquent $(\bar{b}', \bar{b}'') \in T$ avec

$$n \cdot (\bar{b}', \bar{b}'') = (\bar{a}', \bar{a}'' + \bar{c})$$

Comme \bar{b}' est linéairement indépendant, il y a $N \in \mathcal{C}$ de support $\widetilde{M(\bar{a})}$ avec $O(N) = \langle O(M), \bar{b}' \rangle$. Clairement, $\bar{a}' = n \cdot \bar{b}' \in O(N)$. De même, comme $n \circ T$ est le graphe d'un homomorphisme, il vient $\bar{a}'' + \bar{c} = (n \circ T)(\bar{b}'') \in O(N)$. Or, $\bar{c} \in O(M)$ par hypothèse : on a bien $\bar{a}'' \in O(N)$. \square^{lemme}

Nous vérifions maintenant que si $M \models \theta_\alpha(\bar{b}) \wedge \rho_\beta(\bar{b})$, une (et donc toute) extension minimale préalgébrique de M codée par $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b})$ n'est pas dans \mathcal{C}^μ .

Soient $M \in \mathcal{C}^\mu$, et $\bar{b} \in M$ tel que $M \models \theta_\alpha(\bar{b}) \wedge \rho_\beta(\bar{b})$. Prenons $(\bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$ générique dans W' . Comme \bar{m} colorie T' en octarine, nous obtenons une extension $N \in \mathcal{C}$ de M en peignant $\langle O(M), \bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)} \rangle$ en octarine dans $acl(O(M), \bar{a}', \bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)})$.

Nous montrons que $M \leq N$. En fait, N s'obtient à partir de l'extension minimale préalgébrique $M' := \widetilde{M(\bar{a}')}$ par une tour d'extensions génériques octarine.

En effet, $cd(W') = n_\alpha = cd(V)$. Or,

$$cd(W') = \underbrace{g \cdot ldim(\bar{a}') - dim(\bar{a}')}_{=cd(V)} + g \cdot ldim(\bar{e}'/\bar{a}') - dim(\bar{e}'/\bar{a}')$$

donc $|B| = \frac{dim(\bar{e}'/\bar{a}')}{g} = ldim(\bar{e}'/\bar{a}')$. Par conséquent, $(e'_i)_{i \in B}$ est une base de $O(N)$ au dessus de $O(M')$: on a en fait $N = \widetilde{M'(e'_i)_{i \in B}}$.

Comme $(e'_i)_{i \in B}$ est une suite de Morley du générique de A au dessus de $M\bar{a}'$, N s'obtient à partir de M' par une tour d'extensions génériques octarine, comme désiré.

$N \notin \mathcal{C}^\mu$ puisque $(\bar{e}'_0, \dots, \bar{e}'_{\mu(\beta)}) \models \psi_\beta$. D'après le lemme 8.1.3 ci-dessus, on a donc $M' \notin \mathcal{C}^\mu$. \square

8.2 Le lemme d'amalgamation collapsée

Nous vérifions que la classe \mathcal{C}^μ a la propriété d'amalgamation.

Lemme 8.2.1. Soient $L, M, N \in \mathcal{C}^\mu$ avec $L \leq M$ et $L \leq N$. Soit $R = M \otimes_L^0 N$ leur amalgame libre. Supposons que R contient une suite de différence longue $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$ pour α . Alors, il y a une suite dérivée dont le paramètre canonique est dans M ou N .

Démonstration: Soit \bar{b} le paramètre canonique de $(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)})$. Dans notre situation, supposons pour obtenir une contradiction que le paramètre canonique d'aucune suite dérivée n'appartient à M ou N .

Alors, en appliquant deux fois le lemme 7.3.1, on voit que notre suite de différence contient une sous-suite de longueur $m_\alpha + 1$ qui est de Morley à la fois au dessus de $M\bar{b}$ et de $N\bar{b}$, disons $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{m_\alpha}$.

Soit $E = \{\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{m_\alpha-1}\}$. On a $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{L\bar{b}} ME$ et $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{L\bar{b}} NE$.

Pour chaque $i \leq m_\alpha$, décomposons \bar{e}_i en la somme d'un élément \bar{m}_i de $O(M)$ et d'un élément \bar{n}_i de $O(N)$. Soit $E' = \{\bar{m}_0, \dots, \bar{m}_{m_\alpha-1}, \bar{n}_0, \dots, \bar{n}_{m_\alpha-1}\}$. Notons que E et E' sont interdéfinissables au dessus de M (resp. de N).

On a donc $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{L\bar{b}} ME'$ et $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{L\bar{b}} NE'$. Par transitivité de l'indépendance, il vient $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{LE'} M$ et $\bar{e}_{m_\alpha} \downarrow_{LE'} N$ (notons que $\bar{b} \in dcl(LE')$ par définition des suites de différence).

On a $M \downarrow_L N$ d'où $M \downarrow_{LE'} N$ par transitivité. Ainsi, $\bar{m}_{m_\alpha} \downarrow_{LE'} \bar{n}_{m_\alpha}$.

Par conséquent, \bar{e}_{m_α} , $-\bar{m}_{m_\alpha-1}$ et $-\bar{n}_{m_\alpha-1}$ sont indépendants deux à deux au dessus de LE' , si bien que le fait 7.2.1 s'applique : \bar{e}_{m_α} est générique dans une cossette du stabilisateur de son type fort, ce qui est absurde vu que ce dernier est fini d'après le lemme 7.2.2. \square

Proposition 8.2.2 (Amalgame collapsé). Pour $L, M, N \in \mathcal{C}^\mu$ avec $L \leq M$ et $L \leq N$, il y a un élément $R \in \mathcal{C}^\mu$ tel que M, N se plongent ormessiennement dans R au dessus de L .

Ainsi, \mathcal{C}^μ satisfait la propriété d'amalgamation.

Démonstration: Quitte à décomposer M/L et N/L en tours d'extensions minimales, nous pouvons supposer que M/L et N/L sont des extensions minimales ou triviales (M/L est triviale si $L = M$).

Si l'une de ces extensions est générique blanche ou triviale, $M \otimes_L^0 N \in \mathcal{C}^\mu$.

Si $M \otimes_L^0 N \in \mathcal{C}^\mu$, nous avons gagné. Sinon, il y a une suite de différence longue $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)} \in M \otimes_L^0 N$, et le lemme 8.2.1 s'applique. Remplaçons $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ par une suite dérivée dont le paramètre canonique \bar{b} est dans M ou dans N , disons $\bar{b} \in M$. Comme $M \otimes_L^0 N$ est une extension minimale préalgébrique de M , le lemme 8.1.1 s'applique : sans perte de généralité, $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ est une réalisation générique de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au dessus de M , qui engendre $M \otimes_L^0 N$ au dessus de M et $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1} \in M$.

Nous montrons désormais que M et N sont isomorphes au dessus de L , ce qui permettra de poser $M \otimes_L^\mu N := M$.

Cas 1 Il y a une suite $\mu(\alpha) - 1$ -dérivée dont le paramètre canonique \bar{b}' est dans L . De nouveau, nous remplaçons $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ par cette suite dérivée.

Nous allons voir que ceci correspond au cas où M et N sont toutes les deux engendrées par une réalisation générique octarine de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}')$. D'où l'isomorphisme annoncé.

Commençons par vérifier que $\bar{e}_{\mu(\alpha)} \in N$. Si ce n'était pas le cas, comme $N \leq M \otimes_L^0 N$, on aurait $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ générique au dessus de N d'après la propriété e) des codes. Décomposons $\bar{e}_{\mu(\alpha)} = \bar{m} + \bar{n}$ où $\bar{m} \in O(M)$ et $\bar{n} \in O(N)$. Alors, $\bar{e}_{\mu(\alpha)}, -\bar{m}$ et $-\bar{n}$ sont indépendants deux à deux, si bien que le fait 7.2.1 s'applique : $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ est générique dans un translaté du stabilisateur de son type fort, ce qui est absurde vu que ce dernier est fini d'après le lemme 7.2.2.

Rappelons que $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1} \in M$. Par conséquent, il doit y avoir $i \leq \mu(\alpha) - 1$ tel que $\bar{e}_i \in M \setminus L$: sinon, $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ serait contenu dans N , une contradiction au fait que $N \in \mathcal{C}^\mu$!

D'après la propriété e) des codes, \bar{e}_i est générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Par conséquent, \bar{e}_i engendre l'extension minimale M , cqfd.

Cas 2 : Le paramètre canonique d'aucune suite $\mu(\alpha) - 1$ -dérivée n'appartient à L .

Décomposons $\bar{e}_{\mu(\alpha)} = \bar{m} + \bar{n}$ où $\bar{m} \in O(M)$ et $\bar{n} \in O(N)$. Notons que $\delta(\bar{e}_{\mu(\alpha)}/acl(L\bar{b}\bar{m})) = 0$ puisque $\bar{e}_{\mu(\alpha)} \downarrow_{L\bar{b}} \bar{m}$.

Par choix de μ , il y a une suite extraite de longueur $\mu'(\alpha)$ de $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ qui est de Morley au dessus de $L\bar{b}$. Comme $MR(\bar{m}) \leq g \cdot n_\alpha < \mu'(\alpha)$, il y a $i < \mu(\alpha)$ tel que $\bar{e}_i \downarrow_{L\bar{b}} \bar{m}$.

Par conséquent, $\bar{e}_{\mu(\alpha)}$ et \bar{e}_i ont le même type au dessus de $acl(L\bar{b}\bar{m})$. Comme $\bar{n} = \bar{e}_{\mu(\alpha)} - \bar{m}$, on a donc $tp(\bar{n}/acl(L\bar{b}\bar{m})) = tp(\bar{e}_i - \bar{m}/acl(L\bar{b}\bar{m}))$ et a fortiori $p(\bar{x}) := tp(\bar{n}/L) = tp(\bar{e}_i - \bar{m}/L)$. Soit V une variété irréductible définie sur L isolant p parmi les types de $RM \geq RM(p)$. V est libre car \bar{n} est linéairement indépendant. Il y a donc d'après le fait 4.3.2 un entier k tel que toutes les composantes irréductibles de $k^{-1} \cdot V$ soient Kummer-génériques.

Nous pourrions donc appliquer la remarque 4.3.1 à $tp(k^{-1} \cdot (\bar{e}_i - \bar{m})/L)$ et $tp(k^{-1} \cdot \bar{n}/L)$.

Par minimalité de M et N , $\bar{e}_i - \bar{m}$ engendre M et \bar{n} engendre N . Nous allons montrer que $tp(k^{-1} \cdot (\bar{e}_i - \bar{m})/L) = tp(k^{-1} \cdot \bar{n}/L)$, ce qui permettra de conclure que M et N sont isomorphes (en tant que \mathcal{L}_O -structures) via le L -isomorphisme de corps qui envoie $k^{-1} \cdot (\bar{e}_i - \bar{m})$ sur $k^{-1} \cdot \bar{n}$.

Comme $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ est Kummer générique, $k^{-1} \cdot \bar{e}_i$ et $k^{-1} \cdot \bar{e}_{\mu(\alpha)}$ ont le même type sur $\text{acl}(L\bar{b}\bar{m})$. Par conséquent, $k^{-1} \cdot \bar{e}_i - k^{-1} \cdot \bar{m}$ et $k^{-1} \cdot \bar{n} = k^{-1} \cdot \bar{e}_{\mu(\alpha)} - k^{-1} \cdot \bar{m}$ ont le même type sur $\text{acl}(L\bar{b}\bar{m})$. A fortiori, ils ont le même type sur L . \square

Remarque 8.2.3. *Sous les hypothèses de la proposition 8.2.2, si M est une extension minimale de L , alors l'amalgame collapsé R que nous avons construit est égal à $M \otimes_L^O N$ ou à N .*

Corollaire 8.2.4. *\mathcal{C}^μ est une classe d'amalgamation de corps octarines. Il y a donc des κ -riches pour \mathcal{C}^μ .*

8.3 Théorie des riches collapsés

Nous définissons la théorie T^μ comme l'union de la théorie T_μ et, pour chaque bon code α , de $\forall \bar{y}(\theta_\alpha(\bar{y}) \rightarrow \chi_\alpha(\bar{y}))$ (voir la proposition 8.1.4).

Ainsi, les modèles M de T^μ sont éléments de \mathcal{C}^μ n'ayant aucune extension minimale préalgébrique propre dans \mathcal{C}^μ . Cette astuce d'axiomatisation remonte à [10].

Lemme 8.3.1. *Tout ω -riche pour \mathcal{C}^μ est modèle de T^μ . En particulier, T^μ est consistante.*

Démonstration: Soient M un riche pour \mathcal{C}^μ . Clairement, $M \models T_\mu$. Soit α un bon code, il nous faut montrer que M n'a pas d'extension dans \mathcal{C}^μ codée par α .

Supposons le contraire : il y a $N \in \mathcal{C}^\mu$ une extension minimale préalgébrique de M codée par α . Alors il y a $\bar{b} \in M$ et \bar{a} une base octarine de N générique dans $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b})$. Nous construisons alors par récurrence des suites corpiquement de Morley de réalisations octarines de $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b})$ de longueur arbitrairement grande :

Supposons que $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}$ ait été construite. $K_n := \text{cl}_M(K, \bar{b}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1})$ est de base finie. Comme $\text{cl}_N(K_n(\bar{a})) \in \mathcal{C}^\mu$, nous pouvons plonger ormessiennement cette structure dans M au dessus de K_n . L'image \bar{a}_n de \bar{a} est alors une réalisation octarine de $\varphi_\alpha(\cdot, \bar{b})$ générique au dessus de K_n .

On obtient une contradiction pour $n > \mu(\alpha)$ puisque la suite $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n$ est une suite de différence. \square

Dans la théorie T^μ , les formules codant les extensions minimales préalgébriques sont algébriques :

Lemme 8.3.2. *Soient $M \models T^\mu$, α un bon code, et \bar{b} tel que $M \models \theta_\alpha(\bar{b})$. Alors la formule $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \ll \bar{x} \text{ est octarine} \gg$ est algébrique.*

Démonstration: Supposons que non, alors on peut trouver dans une extension élémentaire \mathcal{M} de M un ensemble X de réalisations de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \ll \bar{x} \text{ est octarine} \gg$ de cardinal κ non dénombrable. Nous montrons que nous pouvons trouver des suites de Morley corpiques du générique de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ de longueur finie arbitraire dans X .

Pour $n \geq 0$, supposons que nous ayons déjà trouvé $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1} \in X$ une suite de Morley du générique de $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Comme $\text{cl}_{\mathcal{M}}(K\bar{b}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1})$ est dénombrable, il y a $\bar{a}_n \in X$ tel que $\bar{a}_n \notin \text{cl}_{\mathcal{M}}(K\bar{b}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1})$. Comme \bar{a}_n est octarine, \bar{a}_n est corpiquement générique dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ au

dessus de $cl_{\mathcal{M}}(\bar{K}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1})$ d'après la propriété e) des codes, et $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n$ est de Morley. Prenons $n > \mu(\alpha)$, alors $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n$ est une suite de différence pour α de longueur $\geq \mu(\alpha) + 1$, ce qui est absurde puisque $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^\mu$! \square

Vérifions que T^μ est bien la théorie des riches de \mathcal{C}^μ :

Théoreme 8.3.3. *Tout modèle κ -saturé de T^μ est κ -riche pour \mathcal{C}^μ .*

Démonstration: Soit \mathcal{M} un modèle κ -saturé de T^μ . Considérons $L \leq \mathcal{M}$ de base $< \kappa$, et $M \in \mathcal{C}^\mu$ une extension minimale de L .

Nous distinguons deux cas, suivant que M/L est préalgébrique ou non :

M/L est minimale préalgébrique : Soit $R \in \mathcal{C}^\mu$ l'amalgame collapsé de \mathcal{M} et M au dessus de L . Alors, comme \mathcal{M} n'a pas d'extension minimale préalgébrique dans \mathcal{C}^μ , on doit avoir $\mathcal{M} = R$ d'après la remarque 8.2.3.

Par conséquent, M se plonge ormessiennement dans \mathcal{M} au dessus de L .

M/L est générique blanche : Comme L est de base $< \kappa$, on peut par κ -saturation trouver $x \in \mathcal{M} \setminus acl(L)$. Il y a donc une extension minimale N de $acl(L)$ ormessienne dans \mathcal{M} . D'après le lemme 8.3.2, N ne peut être minimale préalgébrique. Par conséquent, N est une extension générique blanche de L , et $M \cong_L N$. \square

Corollaire 8.3.4. *T^μ est la théorie des riches pour \mathcal{C}^μ . C'est une théorie ω -stable.*

9 Rangs et déviation des riches

Nous savons déjà que les théories des riches, libres ou collapsés, sont ω -stables. Par conséquent, tout ensemble définissable dans l'une de ces théories y est rangé par le rang de Morley. Nous étudions dans ce chapitre les rangs des différents types afin d'établir que :

- a) La théorie $T_{\mathcal{K}}$ des riches libres est de rang ω avec $\text{RM} = \text{RU}$.
- b) La théorie T^μ des riches collapsés est fortement minimale.

9.1 De la prédimension à la dimension

La dimension d Pour $B, C \subseteq M \in \mathcal{C}^0$ avec BC de base finie sur B , nous posons $d_M(C/B) := \delta(\text{cl}_M(BC)/\text{cl}_M(B))$

Comme cl_M est invariante par extension élémentaire de M , on a $d_M(C/B) = d_N(C/B)$ pour $M \preceq N$.

Remarque 9.1.1. Soient $M \in \mathcal{C}^0$, $B \subseteq M$ et $\bar{x} \in M$, alors $d_M(\bar{x}/B) \leq \delta(\bar{x}/B)$ d'après le lemme 2.4.2. En particulier, pour $x \in M$, on a $d_M(x/B) \leq 1$.

La d -clôture Pour $B \subseteq M \in \mathcal{C}^0$, on définit

$$\text{cl}_M^d(B) := \{x \in M \mid d_M(x/B) = 0\}$$

Nous allons voir que, pour $M \models T^\mu$, cl_M^d est une pré-géométrie dont la dimension associée est d_M . En fait, nous démontrerons que $\text{cl}_M^d = \text{acl}$ et que $d = \text{RM}$ pour les modèles de T^μ .

9.2 Clôtures algébriques des riches

Proposition 9.2.1. Dans tout modèle M de $T_{\mathcal{K}}$, la clôture algébrique acl est égale à la clôture ormessienne cl_M .

Démonstration: Soit $B \subseteq M$. Quitte à prendre une extension élémentaire saturée, nous pouvons supposer que M est $|B|^+$ -riche. D'après le lemme 3.1.2, $L := \text{cl}_M(B) \subseteq \text{acl}(B)$. Nous montrons que le type sur L de tout $x \notin L$ a une infinité de réalisations. Soit $N = \text{cl}_M(Lx)$. Il suffit d'après le lemme 3.3.2 de trouver un nombre arbitrairement grand de copies de N ormessiennes dans M et isomorphes au dessus de L .

Notons $N^{\otimes L^n}$ l'amalgame $\underbrace{N \otimes_L^0 \cdots \otimes_L^0 N}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $N^{\otimes L^0} = L$. Alors, $N^{\otimes L^n} \in \mathcal{C}^0$, et

$$L \leq N^{\otimes L^n}$$

Par richesse de M , on peut pour tout $n \geq 2$ injecter $N^{\otimes L^n}$ ormessiennement dans M au dessus de $N^{\otimes L^{n-1}}$. On obtient ainsi un nombre arbitrairement grand de réalisations de $\text{tp}(x/L)$. \square

Proposition 9.2.2. *Dans tout modèle M de T^μ , la clôture algébrique acl est égale à la d -clôture cl_M^d .*

Démonstration: Soit $B \subseteq M \models T^\mu$.

$acl(B) \subseteq cl_M^d(B)$: Comme $cl_M(B) \subseteq acl(B)$ (lemme 3.1.2), on peut supposer que $B \leq M$. Soit $x \in acl(B)$. Supposons pour obtenir une contradiction que $d(x/B) = 1$. Considérons une décomposition de $cl_M(Bx)/B$ en une tour d'extensions minimales $B = N_0 \leq \dots \leq N_n = cl_M(Bx)$.

Une de ces extensions, disons N_i/N_{i-1} est générique blanche. Dans une extension élémentaire très saturée (et donc très riche) \mathcal{M} de M , on trouve une infinité de copies N_{i-1} -isomorphes de N_i , que l'on peut prolonger en copies N_{i-1} -isomorphes de $N_i \leq \dots \leq N_n$. On voit ainsi que $tp(x/B)$ a une infinité de réalisations, ce qui contredit $x \in acl(B)$!

Par conséquent, on a bien $d_M(x/B) = 0$, c'est à dire $x \in cl_M^d(B)$.

$cl_M^d(B) \subseteq acl(B)$: Soit $x \in cl_M^d(B)$. Alors, $cl_M(Bx)/cl_M(B)$ se décompose en une tour d'extensions minimales préalgébriques $cl_M(B) = N_0 \leq \dots \leq N_n = cl_M(Bx)$. D'après le lemme 8.3.2, $N_i \subseteq acl(N_{i-1})$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En outre, $N_0 = cl_M(B) \subseteq acl(B)$. Par conséquent, $x \in acl(B)$. \square

9.3 Rangs dans $T_{\mathcal{K}}$

Lemme 9.3.1. *Soient $\mathcal{K} \models T_{\mathcal{K}}$, α un code et \bar{b} tels que $\mathcal{K} \models \theta_\alpha(\bar{b})$. Considérons la formule $\phi(\bar{x}) = \varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \ll \bar{x} \text{ est octarine} \gg$.*

L'ensemble définissable $\phi(\mathcal{K})$ est fortement minimal.

Démonstration: On se place au dessus de $B := cl_{\mathcal{K}}(K\bar{b}) = acl(\bar{b})$. Nous montrons qu'il y a un unique type non algébrique sur \bar{b} dans $\phi(\mathcal{K})$. Soient $\bar{x}, \bar{x}' \in \phi(\mathcal{K})$ non algébriques sur \bar{b} . D'après la propriété e) des codes, ils sont tous deux génériques corpiquement dans $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Donc, ils engendrent tous deux une extension minimale préalgébrique codée par $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$. Par Kummer-généricité de cette dernière formule, \bar{x} et \bar{x}' engendrent des extensions ormessiennes dans \mathcal{K} isomorphes au dessus de B : on a donc $tp(\bar{x}/B) = tp(\bar{x}'/B)$. \square

Chaînes d'extensions minimales préalgébriques Soit \mathcal{K} un modèle de $T_{\mathcal{K}}$. Une chaîne $N_0 \leq \dots \leq N_n$ est une chaîne d'extensions minimales préalgébriques si $N_0 \leq \mathcal{K}$, et $N_n \leq \mathcal{K}$ et l'extension N_i/N_{i-1} est minimale préalgébrique pour tout $1 \leq i \leq n$.

Pour $M, B \leq \mathcal{K}$, nous disons qu'une chaîne T d'extensions minimales préalgébriques $N_0 \leq \dots \leq N_n$ décompose M/B si $N_0 = B$ et $N_n = M$. Pour $x \in \mathcal{K}$ avec $d_{\mathcal{K}}(x/B) = 0$, on peut décomposer $cl_{\mathcal{K}}(Bx)$ en une chaîne d'extensions minimales préalgébriques. On dit alors que cette chaîne décompose $tp(x/B)$.

La *hauteur* d'une chaîne d'extensions minimales préalgébriques $N_0 \leq \dots \leq N_n$ est le nombre n .

Pour $1 \leq i \leq n$, soient $\bar{b}_i \in N_{i-1}$, α_i un bon code et $\bar{a}_i \in O(N_i)$ tels que $\mathcal{K} \models \varphi_{\alpha_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ et \bar{a}_i engendre l'extension N_i/N_{i-1} . Nous appelons le uplet $\mathbf{a} = \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ *base de la chaîne* $N_0 \leq \dots \leq N_n$.

Dans la situation ci-dessus, considérons pour tout i une formule des corps $\tau_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i)$ ⁷ à paramètres dans B qui algébrise \bar{b}_i sur $B, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}$. Nous appelons *code de la chaîne* $N_0 \leq \dots \leq N_n$ la formule :

$$\phi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) := \exists \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(\tau_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i) \wedge \varphi_{\alpha_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \wedge O(\bar{x}_i) \right)$$

Clairement, une base \mathbf{a} de cette chaîne satisfait ϕ . Une réalisation octarine $\mathbf{a}' = \bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_n$ de ϕ est dite *générique dans la chaîne* si \bar{a}'_i est corpiquement générique dans $\varphi_{\alpha_i}(\bar{x}_i, \bar{b}_i)$, où $\models \tau_i(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_{i-1}, \bar{b}_i)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, autrement dit si elle est une base d'une chaîne d'extensions minimales préalgébriques dont le code est ϕ .

Lemme 9.3.2. *Soit $B = N_0 \leq \dots \leq N_n$ une chaîne d'extensions minimales préalgébriques. Les types sur B de réalisations génériques dans cette chaîne sont en nombre fini.*

Démonstration: Nous montrons ceci par récurrence sur $1 \leq i \leq n$. Nous conservons les notations ci-dessus.

Pour $i = 1$, on n'a qu'une seule possibilité pour $tp(\bar{a}_1/B)$.

Soit $i > 1$. Supposons que l'on a qu'un nombre fini de possibilités pour $tp(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}/B)$. Fixons $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}$ satisfaisant un de ces types, et prenons \bar{b}_i satisfaisant la formule algébrique $\tau_i(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{y}_i)$. Nous n'avons qu'un nombre fini de choix pour \bar{b}_i , et ce choix détermine $tp(\bar{a}_i/B\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1})$ lorsque \bar{a}_i est une réalisation octarine et corpiquement générique de $\varphi_{\alpha_i}(\bar{x}_i, \bar{b}_i)$. On n'a donc qu'un nombre fini de possibilités pour $tp(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i/B)$. \square

Lemme 9.3.3. *Soient $\mathcal{K} \models T_{\mathcal{K}}$, $B \leq \mathcal{K}$ et $x \in \mathcal{K}$ avec $d_{\mathcal{K}}(x/B) = 0$.*

Alors, $\text{RU}(x/B)$ est égal à la hauteur d'une chaîne quelconque d'extensions minimales préalgébriques qui décompose $cl_{\mathcal{K}}(Bx)/B$.

En particulier, cette hauteur ne dépend pas du choix de la chaîne.

Démonstration:

Pour $1 \leq i \leq n$, soient $\bar{b}_i \in N_{i-1}$, α_i un bon code et $\bar{a}_i \in O(N_i)$ tels que $\mathcal{K} \models \varphi_{\alpha_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ et \bar{a}_i engendre l'extension N_i/N_{i-1} . Dans \mathcal{K} , x est interalgébrique avec le uple $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$, si bien qu'il suffit de montrer que $\text{RU}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/B) = n$.

D'après le lemme 9.3.1, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\text{RU}(\bar{a}_i/B\bar{a}_{i-1}, \dots, \bar{a}_1) = 1$. Par additivité du rang de Lascar, on a bien $\text{RU}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/B) = n$. \square

Pour $x \in \mathcal{K}$ et $B \leq \mathcal{K}$ avec $d(x/B) = 0$, la hauteur de x au dessus de B est la hauteur d'une chaîne d'extensions minimales préalgébriques qui décompose $cl_{\mathcal{K}}(Bx)/B$. On parle alors également de la hauteur de $tp(x/B)$.

⁷. Pour $\tau_1(\bar{y}_1)$, nous prenons la formule $\bar{y}_1 = \bar{b}_1$!

Lemme 9.3.4. Soient $\mathcal{K} \models T_{\mathcal{K}}$, $B \leq \mathcal{K}$ et $x \in \mathcal{K}$ avec $d_{\mathcal{K}}(x/B) = 0$.

Alors, $\text{RU}(x/B) = \text{RM}(x/B)$.

Démonstration: Nous montrons ceci par récurrence sur la hauteur n d'une chaîne d'extensions minimales préalgébriques qui décompose $cl_{\mathcal{K}}(Bx)/B$: (HR) $\text{RM}(x/B) = n = \text{RU}(x/B)$.

D'après le lemme 9.3.1, si $n = 1$, alors $\text{RM}(x/B) = \text{RU}(x/B) = 1$.

Soit $n > 1$, supposons l'hypothèse de récurrence démontrée jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit $B = N_0 \leq \dots \leq N_n$ une chaîne d'extensions minimales préalgébriques décomposant $cl_{\mathcal{K}}(Bx)/B$. Pour $1 \leq i \leq n$, soient $\bar{b}_i \in N_{i-1}$, α_i un bon code et $\bar{a}_i \in O(N_i)$ tels que $\mathcal{K} \models \varphi_{\alpha_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ et \bar{a}_i engendre l'extension N_i/N_{i-1} . Dans \mathcal{K} , x est interalgébrique avec le uple $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$, si bien qu'il suffit de montrer que $\text{RM}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/B) \leq n$ (puisque $\text{RM}(x/B) \geq \text{RU}(x/B) = n$).

Soit ϕ le code de la chaîne $N_0 \leq \dots \leq N_n$. Il nous suffit de montrer que $\text{RM}(\phi) \leq n$. Nous y parvenons en montrant que si $(\psi_j)_{j \in J}$ est une famille infinie de formules deux à deux contradictoires impliquant ϕ et toutes de $\text{RM} = k$, alors $k < n$.

En effet, soit $(\psi_j)_{j \in J}$ une famille de formules deux à deux contradictoires impliquant ϕ et toutes de $\text{RM} \geq n$. Nous considérons pour chaque $j \in J$ une réalisation B -générique $\mathbf{a}^j = \bar{a}_1^j, \dots, \bar{a}_n^j$ de ψ_j . Par contraposition de l'hypothèse de récurrence, $\text{RU}(\bar{a}_1^j, \dots, \bar{a}_n^j/B) \geq n$. Comme \mathbf{a}^j satisfait ϕ , \mathbf{a}^j est donc générique dans la chaîne. Les types des \mathbf{a}^j sont deux à deux distincts. J doit donc être fini d'après le lemme 9.3.2. \square

Lemme 9.3.5. Soient $\alpha, \bar{b}, \phi(\bar{x})$ comme dans le lemme 9.3.1. Le type générique de ϕ a une prégéométrie triviale.

Démonstration: Plaçons nous dans un modèle $|B|^+$ -saturé \mathcal{K} de $T_{\mathcal{K}}$, où $\bar{b} \in B$. Il s'agit de montrer que pour des réalisations génériques, que l'on peut supposer indépendantes, $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ de ϕ , et pour $\bar{a} \models \phi$, $\bar{a} \in cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \Rightarrow \exists i, \bar{a} \in cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_i)$.

Nous montrons ceci par récurrence sur n . Soit $N_i = cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_i)$, alors N_i est une extension minimale préalgébrique de B . Comme les \bar{a}_i sont indépendants, $cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ est isomorphe à l'amalgame libre $\bigotimes_B^{i \leq n} N_i$ des N_i au dessus de B .

Comme $\bar{a} \in O(\bigotimes_B^{i \leq n} N_i)$, il y a $\bar{c} \in O(B)$ et des quasi-homomorphismes γ, β tels que $\bar{a} = \gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}) + \beta(\bar{a}_n) + \bar{c}$. Ainsi, on doit avoir $\bar{a} \not\downarrow_B \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{n-1}$ ou $\bar{a} \not\downarrow_B \bar{a}_n$:

Si on a $\bar{a} \not\downarrow_B \gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$ et $\bar{a} \not\downarrow_B \beta(\bar{a}_n) + \bar{c}$. Notons \downarrow^{alg} l'indépendance au sens de la théorie des corps algébriquement clos. Comme $B = \tilde{B}$, il vient (cf [16], lemme 2.1) $\bar{a} \not\downarrow_B^{alg} \gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$ et $\bar{a} \not\downarrow_B^{alg} \beta(\bar{a}_n) + \bar{c}$. Le lemme 7.2.1 nous dit alors que \bar{a} est générique dans le stabilisateur de son type corpique, ce qui est absurde puisque ce dernier est fini d'après le lemme 7.2.2!

Rappelons que $\text{RM}(\bar{a}/B) = 1$. Dans le cas où $\bar{a} \not\downarrow_B \bar{a}_n$, on a ainsi $\bar{a} \in acl(B\bar{a}_n) = cl_{\mathcal{K}}(\bar{a}_n)$. Dans

l'autre cas, on obtient $\bar{a} \in cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$ et notre hypothèse de récurrence s'applique : il y a $i \leq n-1$ tel que $\bar{a} \in cl_{\mathcal{K}}(B\bar{a}_i)$. \square

Proposition 9.3.6. *Soit X un ensemble définissable de $T_{\mathcal{K}}$ fortement minimal dont le générique a des réalisations de dimension nulle. Alors X a une prégéométrie triviale.*

Démonstration: Soit \mathcal{K} un modèle $|B|^+$ -saturé de $T_{\mathcal{K}}$ avec $B \leq \mathcal{K}$. Soit a une réalisation du générique p de X au dessus de B . D'après les lemmes 9.3.3 et 9.3.4, $cl_{\mathcal{K}}(Ba)$ est une extension minimale préalgébrique de B , disons de base octarine \bar{a} générique dans $\varphi_{\alpha}(\bar{x}, \bar{b})$ pour $\bar{b} \in B$.

Par conséquent, il y a une $\mathcal{L}_O(B)$ -formule $\delta(x, \bar{x})$ algébrique en x et en \bar{x} telle que $p(x) \vdash \exists \bar{x} \varphi_{\alpha}(\bar{x}, \bar{b}) \wedge O(\bar{x}) \wedge \delta(x, \bar{x})$. Ainsi, si on prend des B -génériques x_0, \dots, x_n de X , chaque x_i est B -interalgébrique (au sens de $T_{\mathcal{K}}$!) avec une réalisation générique \bar{a}_i de $\varphi_{\alpha}(\bar{x}, \bar{b}) \wedge O(\bar{x})$. Ainsi, si $x_0 \in acl(B, x_1, \dots, x_n)$, on a $\bar{a}_0 \in acl(B, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ et donc $\bar{a}_0 \in acl(B\bar{a}_{i_0})$ pour $1 \leq i_0 \leq n$ d'après le lemme 9.3.5. Par conséquent, $x_0 \in acl(Bx_{i_0})$. \square

Fait 9.3.7. *Soit X un ensemble fortement minimal dont la prégéométrie est triviale, alors aucun groupe infini n'est interprétable dans X .*

Démonstration: Supposons qu'un groupe (G, \circ) soit interprétable dans X . On considère a, b, c des uples d'éléments de X et R, S, T des relations d'équivalence définissables tels que a_R et b_S sont génériques et indépendants dans G , et $c_T = a_R \circ b_S$. Ainsi, c_T est générique dans G , et indépendant de a_R et de b_S .

Quitte à changer $a \in \pi_R^{-1}(a_R)$, on peut supposer que $a \downarrow_{a_R} b_S$. De même, on choisit ensuite b de sorte que $b \downarrow_{b_S} a$, puis c tel que $c \downarrow_{c_T} ab$.

Comme $c_T \in dcl(a_R b_S)$, on a $a \downarrow_{a_R} c_T$. Or, $a_R \downarrow c_T$, donc $a \downarrow c_T$. En outre, $a \downarrow_{c_T} c$, d'où $a \downarrow c$. On montre de la même manière que $b \downarrow c$.

Enfin, comme $a \downarrow_{a_R} b_S$ et $a_R \downarrow b_S$, on a $a \downarrow b_S$. Comme en outre $b \downarrow_{b_S} a$, il vient $a \downarrow b$.

a, b et c étant indépendants deux à deux, il vient par trivialité de X que $c \downarrow ab$. Par conséquent, $c_T \downarrow a_R b_S$, ce qui est absurde car c_T est générique dans G mais $c_T \in dcl(a_R b_S)$! \square

Lemme 9.3.8. *Dans $T_{\mathcal{K}}$, il y a des 1-types dont les réalisations sont de dimension 0 de rang (et donc de hauteur) arbitraire.*

Démonstration: Soit \mathcal{K} un modèle $|B|^+$ -saturé de $T_{\mathcal{K}}$, où $B \leq \mathcal{K}$.

Il est simple de trouver des types de hauteur 1 : si $N \leq \mathcal{K}$ est une extension minimale préalgébrique de B , alors pour $x \in N \setminus B$ on a $cl_{\mathcal{K}}(Bx) \subseteq N$, si bien que $cl_{\mathcal{K}}(Bx) = N$ par minimalité de N/B . Par conséquent, $tp(x/B)$ est de hauteur 1.

Soit $p \in S_1(B)$ fortement minimal, et $x \models p$. Nous considérons dans la suite une formule fortement minimale ϕ de p , définissant l'ensemble X .

On peut supposer que X est additivement indécomposable (cf [13]) : l'intersection H de tous les sous-groupes définissables G de $(\mathcal{K}, +)$ tels que $(a + G) \cap X$ est infini pour un certain a est un groupe définissable (c'est en fait l'intersection d'un nombre fini de ces groupes), et il y a a tel que $(a + H) \cap X$ est infini. Comme l'ensemble définissable $(a + H) \cap X$ est B -invariant, on voit que la formule qui le définit est dans p . Or, $(a + H) \cap X$ est additivement indécomposable. On pose $X := (a + H) \cap X$.

On note $n \star X$ l'ensemble définissable $\underbrace{X + \cdots + X}_{n \text{ fois}}$.

Nous affirmons que pour tout n , $\text{RM}(n \star X) = n$. Sinon, pour n minimal tel que $\text{RM}(n \star X) \neq n$ peut appliquer les arguments du théorème des indécomposables (cf [13], théorème 2.9) pour montrer que $2(n - 1) \star (X - x)$ est un groupe additif (rappelons que $X - x$ est également additivement indécomposable et contient 0) :

Soit q de rang maximal dans $S := (n - 1) \star (X - x)$, et G son stabilisateur additif. $(X - x)/G$ ne peut être infini car sinon $(X - x) + S = n \star (X - x)$ contiendrait une infinité de translatés de q et on aurait ainsi $\text{RM}(n \star X) = n$, une absurdité!

Comme $X - x$ est indécomposable et contient 0, il vient $X - x \subseteq G$ et donc $S \subseteq G$, si bien que $q \vdash x \in G$. Comme le rang d'un type est toujours supérieur à celui de son stabilisateur, on doit avoir $\text{RM}(G) = \text{RM}(q) = n - 1$ (ibid., lemme 2.3). Par conséquent, q est générique dans le groupe G , qui est connexe (ibid.).

Comme S est générique dans G , on doit avoir $2(n - 1) \star (X - x) = S + S = G$ comme voulu. G est alors un groupe interprétable dans $X^{2(n-1)}$, ce qui est absurde car la pré-géométrie de X est triviale! \square

Corollaire 9.3.9. $T_{\mathcal{K}}$ est une théorie de rang de Morley ω , dans laquelle $\text{RU} = \text{RM}$.

Démonstration: Soit $B \leq \mathcal{K} \models T_{\mathcal{K}}$ où \mathcal{K} est $|B|^+$ -saturé.

Nous montrons que si $d(x/B) = 1$ pour $x \in \mathcal{K}$, alors $cl_{\mathcal{K}}(Bx)$ est une extension générique blanche de B . On a $O(\widetilde{B(x)}) = O(B)$. De plus, $\widetilde{B(x)}$ est ormessien dans \mathcal{K} . Sinon, $\widetilde{B(x)}$ aurait une extension de base finie X avec $\delta(X/\widetilde{B(x)}) < 0$, si bien que $\delta(X/B(x)) \leq 0$. D'après le lemme 2.4.2, on aurait donc $d(x/B) = \delta(cl_{\mathcal{K}}(Bx)/B) \leq \delta(X/B(x)) \leq 0$ ce qui est absurde!

Par conséquent, il y a un unique 1-type sur B dont les réalisations sont de dimension 1 (lemme 3.3.2). Appelons le p_{gen} .

Nous montrons désormais que $\text{RM}(p_{gen}) = \omega$. Comme il y a des 1-types de RM fini arbitrairement grand, on a $\text{RM}(x = x) \geq \omega$. Comme tout type dont les réalisations sont de dimension 0 a un rang de Morley fini, p_{gen} est le seul type qui peut avoir le même rang que $x = x$. Il vient donc $\text{RM}(p_{gen}) = \text{RM}(x = x) \geq \omega$. Il ne reste qu'à montrer que les extensions déviantes de p_{gen} sont de rang fini. En effet, soit $M \models T_{\mathcal{K}}$ contenant B , et $q \in S_1(M)$ un fils non déviant de p_{gen} . Alors, $\text{RM}(q) = \text{RM}(p_{gen}) \geq \omega$ et donc q est le 1-type sur M dont les réalisations sont de dimension 1.

Ainsi, si une extension q de p_{gen} a des réalisations de dimension 1, alors q ne peut être que l'extension

non déviante de p_{gen} . Les extensions déviantes de p_{gen} ont donc des réalisations de dimension 0, qui ont un rang de Morley fini.

Par conséquent, $\text{RM}(p_{gen}) = \omega$ et p_{gen} est le type générique du corps \mathcal{K} .

p_{gen} étant le type générique du corps \mathcal{K} , il doit avoir un rang de Lascar maximal parmi les 1-types. On a donc $\text{RU}(p_{gen}) = \omega = \text{RM}(p_{gen})$. \square

Nous collectons maintenant quelques faits supplémentaires sur la géométrie des types de rang fini dans $T_{\mathcal{K}}$.

Remarque 9.3.10. *Aucun groupe infini de rang fini n'est définissable dans $T_{\mathcal{K}}$.*

Démonstration: En effet, dans un groupe de rang de Morley fini (G, \circ) , On peut trouver $X \subseteq G$ fortement minimal et indécomposable avec $1_G \in X$. Alors, le sous-groupe de G engendré par X est définissable, et interprétable dans X ([13], théorème 2.9), ce qui est impossible si comme dans $T_{\mathcal{K}}$ X a une pré-géométrie triviale. \square

Bon code associé à un type fortement minimal On se place dans un modèle monstre \mathcal{K} de $T_{\mathcal{K}}$. Soit $p \in \mathcal{S}_1(B)$ un type fortement minimal. Toute réalisation de p étant indépendante de $\text{acl}(B) = \text{cl}_{\mathcal{K}}(B)$, on peut supposer que $B \leq \mathcal{K}$. Comme p est de dimension 0 et de hauteur 1, il vient que $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx)$ est une extension minimale préalgébrique de B pour $x \models p$. $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx)/B$ est donc engendrée par une réalisation octarine d'une instance d'un bon code α , uniquement déterminé d'après le corollaire 6.3.2. α ne dépend pas du choix de $x \models p$ car pour $x' \models p$, on a $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx) \cong_B \text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx')$.

On appelle α le *bon code associé à p* .

Lemme 9.3.11. *Soit p un type fortement minimal, le bon code associé à p ne dépend que de la classe de parallélisme de p .*

Démonstration: Disons que $p \in \mathcal{S}_1(B)$, de bon code associé α . Soit $C \supseteq B$, on peut supposer que $B \leq C \leq \mathcal{K}$. Soit $x \models p$, par richesse, on peut plonger $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx) \otimes_B C$ ormessiennement dans \mathcal{K} au dessus de C . Soit x' l'image de x par ce plongement, on a alors $tp(x'/B) = tp(x/B)$.

Comme il n'est pas algébrique, $tp(x'/C)$ est l'unique fils non déviant de p à C .

D'après la remarque 6.3.3, $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx) \otimes_B C$ est une extension minimale préalgébrique de C engendrée par une réalisation octarine d'une instance de α . En particulier, $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Cx') = \text{cl}_{\mathcal{K}}(Bx) \otimes_B C$ par minimalité. Le bon code associé à $tp(x'/C)$ est donc bien α . \square

Corollaire 9.3.12. *Soient p et q deux types fortement minimaux dont les bons codes associés sont distincts, alors p est orthogonal à q .*

Démonstration: Soient α et β les bons codes associés à p et q respectivement. Soit $C \leq \mathcal{K}$ contenant les paramètres de p et q , considérons des réalisations a et b indépendantes de C de p et q respectivement. Il s'agit de montrer que si $a \not\perp_C b$, alors $\alpha = \beta$.

En effet, si $a \not\sim_C b$, il vient $b \in \text{acl}(Ca) = \text{cl}_{\mathcal{K}}(Ca)$, d'où $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Ca) = \text{cl}_{\mathcal{K}}(Cb)$. Donc, $\text{cl}_{\mathcal{K}}(Ca)$ est une extension minimale préalgébrique de C donnée par le code α et par le code β . D'après le corollaire 6.3.2, on a donc $\alpha = \beta$. \square

9.4 Rangs dans les riches collapsés

Théoreme 9.4.1. *La théorie T^μ est fortement minimale.*

Démonstration: Soit \mathcal{M} un modèle saturé de T^μ . Soit $B \leq \mathcal{M}$.

Considérons $x \notin \text{acl}(B)$. Alors, $x \notin \text{cl}_{\mathcal{M}}^d(B)$ et donc $d(x/B) = 1$. Nous montrons que $\widetilde{B(x)} \leq \mathcal{M}$:

Sinon, il y aurait une extension de base finie N de $\widetilde{B(x)}$ avec $\delta(N/\widetilde{B(x)}) < 0$. On aurait donc $\delta(N/B) = 0$ et donc $N \subseteq \text{cl}_{\mathcal{M}}^d(B) = \text{acl}(B)$, ce qui est absurde puisque $x \in N$ et $x \notin \text{acl}(B)$!

Ainsi, pour tout $x \notin \text{acl}(B)$, la clôture ormessienne de $B(x)$ est une extension générique blanche de B . Les $x \notin \text{acl}(B)$ ont donc tous le même type d'après le lemme 3.3.2. \square

Annexe

Nous décrivons ici comment nos méthodes permettent, lorsque la dimension g de la variété abélienne A est 1, de construire des corps octarines de rang $\omega \cdot 2$ puis 2. Il est à noter que J. D. Caycedo a déjà fait l'amalgame libre dans ce cas, voir [3].

Prédimension Nous modifions la prédimension, qui devient similaire à celle des corps verts et rouges :

$$\delta(M/L) := 2 \cdot dtr(M/L) - ldim(O(M)/O(L))$$

Extensions minimales Nous avons ici trois types possibles pour une extension minimale M/L :

extension minimale préalgébrique : $M = L(\widetilde{O(M)})$ et $\delta(M/L) = 0$.

Pour toute base a_0, \dots, a_{n-1} de $O(M)$ au dessus de $O(L)$, pour tout $\emptyset \neq I \subsetneq n$, on a $2 \cdot dtr((a_i)_{i \in I} / L(a_i)_{i \notin I}) < |I|$.

extension générique octarine : $M = L(\widetilde{O(M)})$ et $\delta(M/L) = 1$.

$O(M) = \langle O(L), a \rangle$, où a est générique dans A au dessus de L .

extension générique blanche : $O(M) = O(L)$ et $M = \widetilde{L(x)}$ pour x transcendant sur L . $\delta(M/L) = 2$.

On remarque que toutes les extensions génériques octarines sont isomorphes puisque la variété A elle-même est Kummer-générique (en fait, $n^{-1} \cdot A = A$ pour tout n).

Axiomatisabilité de \mathcal{C}^0 Il suffit de remplacer le schéma d'axiomes (ORM) par :

Pour toute sous-variété V de A^n définie sur K avec $\dim(V) < \frac{1}{2}n$,

$$M \models \forall x_1, \dots, x_n \left(V(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(x_i) \right) \rightarrow \bigvee_{\substack{T \in \mathcal{T}(A^n, V) \\ \dim(T) \leq \frac{1}{2} \cdot \dim V}} T(\bar{x})$$

où $\mathcal{T}(A^n, V)$ est la famille finie donnée par le fait 5.1.1.

Variétés cryptiques et formules raffinées On obtient un équivalent du théorème 5.3.2 en posant pour $V_{\bar{y}}(\bar{x}) \subseteq A^{2n}$

$\psi_{V,n} = \psi_{V,n}^0 \wedge \psi_{V,n}^1 \wedge \psi_{V,n}^2$, où :

1. $\bar{b} \models \psi_{V,n}^0 \iff RM(V_{\bar{b}}) = n$ et $DM((V_{\bar{b}})) = 1$.
2. $\psi_{V,n}^1(\bar{y})$ est la formule « $V_{\bar{y}}$ est irréductible, libre et Kummer-générique »
- 3.

$$\psi_{V,n}^2(\bar{y}) := \bigwedge_{\substack{T \in \text{Sub}(V) \\ T \neq A^n, T \neq \emptyset}} \ll RM(\theta_T(\cdot, \bar{y})) = n \gg$$

où

$$\theta_T(\bar{x}, \bar{y}) := V_{\bar{y}}(\bar{x}) \wedge \ll RM(V_{\bar{y}}(\cdot) \wedge T(\cdot - \bar{x})) < \frac{1}{2} \cdot \dim(T) \gg$$

La formule raffinée associée à V (lemme 5.3.6) devient la formule $\phi_V(\bar{x}, \bar{y})$ dont les réalisations (\bar{a}, \bar{b}) satisfont :

- $\phi_V(\bar{x}, \bar{b}) \subseteq V_{\bar{b}}$ et pour $T \in \mathcal{T}(A^n, V)$ avec $T \neq A^n$, si $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ est infini, alors pour toute composante irréductible de dimension maximale W de $V_{\bar{b}} \cap \bar{a} + T$ ayant pour sous groupe minimal U , on a $\frac{1}{2} \dim(U) > \dim(W)$.

Théorie des riches libres Outre les nouveaux axiomes pour \mathcal{C}^0 , on modifie le schéma d'axiomes (MIN) :

- (MIN) pour toute famille uniforme $V_{\bar{y}}$ de sous-variétés de A^{2n} , pour toute famille uniforme $W_{\bar{z}}$ de sous variétés de A^n ,

$$\forall \bar{y} \forall \bar{z} \left((\psi_{V,n}(\bar{y}) \wedge \ll RM(V_{\bar{y}} \cap W_{\bar{z}}) < n \gg) \rightarrow \exists \bar{x} (V_{\bar{y}}(\bar{x}) \wedge \neg W_{\bar{z}}(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} O(x_i)) \right)$$

Comme J. D. Caycedo l'a démontré dans [3], il y a des extensions minimales préalgébriques de longueur arbitrairement grande.

(MIN) garantit la réalisation de toutes les extensions minimales préalgébriques dans les modèles ω -saturés.

Soit un sous-corps ormessien M d'un modèle $|M|^+$ -saturé \mathcal{K} de cette théorie. Le type partiel $\pi(x)$ qui dit que x n'est pas dans une chaîne d'extensions minimales préalgébriques de M et que x est la première coordonnée d'un point octarine⁸ est consistant (cf lemme 5.5.5). Soit $a \in \mathcal{K}$ réalisant π , alors $cl_{\mathcal{K}}(Ma)$ est une extension générique octarine de M .

Enfin, on trouve une extension générique blanche comme combinaison de deux génériques octarines indépendants comme dans [3], lemme 3.30.

Codes et suites de différence Pour les codes, il suffit de remplacer a) et c) par :

a') $|\bar{x}| = n_\alpha$ où n_α est pair.

c') Pour tout \bar{b} , soit $\varphi_\alpha(\mathfrak{C}, \bar{b}) = \emptyset$ soit $RM(\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})) = \frac{1}{2} \cdot n_\alpha$ et $\varphi_\alpha(\bar{x}, \bar{b})$ est de degré 1.

Les suites de différence sont définies de la même manière que dans le chapitre 7. La preuve du lemme 7.3.1 fonctionne aussi lorsque $g = 1$.

La classe \mathcal{C}^μ Les définitions de μ , μ' et de la classe \mathcal{C}^μ restent inchangées. Le lemme d'amalgamation collapsé fonctionne tel quel, ce qui nous permet de construire des riches collapsés.

⁸. ce point octarine est alors corpiquement algébrique sur $M(x)$

Théorie des riches collapsés La proposition 8.1.4 tient toujours, en prenant cette fois ci

$$\chi_\alpha(\bar{y}) = \chi_1(\bar{y}) \vee \left(\bigvee_{\substack{\beta \in \mathcal{A} \\ \mu'(\beta) \leq n_\alpha}} \rho_\beta(\bar{y}) \right) \quad \text{où :}$$

χ_1 exprime qu'il existe une suite de différence octarine $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}$ pour α , et $\bar{a} \in O(M)$, tels qu'il y a $T \in G(\alpha, \alpha)$ qui induit une correspondance torique entre $\phi_\alpha(\bar{x} - \bar{a}, \bar{y})$ et $\psi_{\alpha, \mu(\alpha)}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\alpha)-1}, \bar{x})$.

Et, pour β un bon code, on choisit V_1, \dots, V_o des variétés irréductibles, W_1, \dots, W_o des variétés telles que $\psi_\beta = \bigcup_{1 \leq i \leq o} V_i \setminus W_i$. $\rho_\beta(\bar{y})$ est alors la formule qui exprime qu'il y a $1 \leq i \leq o$, $T' \in \text{Sub}(V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i)$, et $\bar{m} \in A(M)$, et W' une composante irréductible de $(V_\alpha(\cdot, \bar{y}) \times V_i) \cap \bar{m} + T'$ tels que :

- 1) \bar{m} colorie T' en octarine.
- 2) W' se projette génériquement sur $V_\alpha(\cdot, \bar{y})$.
- 3) $\dim(T') - \dim(W') = \frac{n_\alpha}{2}$.
- 4) Pour $(\bar{a}, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$ générique dans W' , $\models \psi_\beta(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)})$.
- 5) Il y a $B \subseteq [0; r-1]$, de cardinal $\dim(\bar{e}/\bar{a})$, tel que $(e_i)_{i \in B}$ soit une suite de Morley du générique de A au dessus de \bar{a} lorsque $\bar{a}\bar{e}$ est générique dans W' .

Où \bar{e} est la concaténation de $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{\mu(\beta)}$.

Les axiomes de la théorie T^μ des riches collapsés sont ceux de T_μ et, pour chaque bon code α , de $\forall \bar{y} (\theta_\alpha(\bar{y}) \rightarrow \chi_\alpha(\bar{y}))$.

Comme pour les riches libres, le type générique octarine est un ultraproduct de types de chaîne d'extensions minimales préalgébriques, et le générique blanc s'obtient en combinant deux génériques octarines indépendants.

Clôtures et rangs dans les riches La clôture algébrique est la clôture ormessienne cl dans les riches libres, et la d -clôture cl^d dans les riches collapsés.

Dans les deux cas, $\text{RU} = \text{RM}$. Les riches libres sont de rang $\omega \cdot 2$. Les riches collapsés sont de rang 2, et le prédicat O y est fortement minimal.

Références

- [1] Amador Martin-Pizarro, Andreas Baudisch, Martin Hils and Frank O. Wagner. Die böse farbe. *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu*, to appear.
- [2] Daniel Bertrand. Galois descent in Galois theories. 2010.
- [3] Juan Diego Caycedo. Theories of green points. arXiv :1401.0495.
- [4] Juan Diego Caycedo and Boris Zilber. Natural models of theories of green points. arXiv :1401.3326.
- [5] Martin Hils. Generic automorphisms and green fields. *Journal of London mathematical society*, 2012.
- [6] Ehud Hrushovski and Frank O. Wagner. Counting and dimensions. In Z. Chatzidakis et al, editor, *Model theory with Applications to algebra and analysis*, volume 2, pages 171–176. Cambridge university press edition.
- [7] Jonathan Kirby. *The theory of exponential differential equations*. PhD thesis, University of Oxford, 2006.
- [8] Serge Lang. *Algebra*. Addison-Wesley publishing company, second edition, 1984.
- [9] Misha Gavrilovich, Martin Bays and Martin Hils. Some definability results in abstract Kummer theory. *Int. Math. Res. Notices*, 2013.
- [10] Amador Martin-Pizarro and Martin Ziegler. Red fields. *Journal of symbolic logic*, 1(72) :207–225, 2007.
- [11] James S. Milne. Abelian varieties (v2.00), 2008. Available at www.jmilne.org/math/.
- [12] Bruno Poizat. Le carré de l'égalité. *Journal of symbolic logic*, 64(3), 1999.
- [13] Bruno Poizat. *Groupes stables*. American Mathematical Society, 2001.
- [14] Bruno Poizat. L'égalité au cube. *Journal of symbolic logic*, 66, 2001.
- [15] Olivier A. Roche and Frank O. Wagner. Bad fields with a torus of rank 1. 2005.
- [16] Amador Martin-Pizarro, Thomas Blossier and Frank Wagner. Géométries relatives. *J. Europ. Math. Soc.*, to appear.
- [17] Bartel Leendert van der Waerden. *Algebra, erster Teil (siebente Auflage)*. Springer Verlag, 1966.
- [18] Frank O. Wagner. Quasi-endomorphisms in small stable groups. *The journal of symbolic logic*, 58(3), 1993.
- [19] Martin Ziegler. Lemma für Daniels beschränkte Automorphismen. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/Preprints.html>.
- [20] Boris Zilber. Bi-coloured fields on the complex numbers. *Journal of symbolic logic*, 69(4) :1171–1186, Dec. 2004.

Fusion d'un corps algébriquement clos avec un sous-groupe non-algébrique d'une variété Abélienne

Corps octarines

Résumé : Nous construisons des corps de rang de Morley fini avec un prédicat O pour un sous groupe non-algébrique infini d'une variété Abélienne simple A . Lorsque $\dim(A) \geq 2$, ils sont fortement minimaux. Lorsque $\dim(A) = 1$, ils sont de rang de Morley 2.

Mots clés : Amalgames de Fraïssé-Hrushovski

Fusion of an algebraically closed field with a non-algebraic subgroup of an Abelian variety

Abstract : We construct fields of finite Morley rank with a predicate O for an infinite non-algebraic subgroup of a given simple Abelian variety A . The fields we construct are strongly minimal when $\dim(A) \geq 2$, and of Morley rank 2 when $\dim(A) = 1$.

Keywords : Fraïssé-Hrushovski amalgams

Image en couverture : Sigil. Crédit image : Trace.

