



HAL
open science

Formulations intégrales magnétostatiques 2D dédiées au pré-dimensionnement des machines électriques tournantes

Quentin Debray

► **To cite this version:**

Quentin Debray. Formulations intégrales magnétostatiques 2D dédiées au pré-dimensionnement des machines électriques tournantes. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAT072 . tel-01737101

HAL Id: tel-01737101

<https://theses.hal.science/tel-01737101v1>

Submitted on 19 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Génie Électrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Quentin DEBRAY

Thèse dirigée par **Gérard MEUNIER**,
co-dirigée par **Olivier CHADEBEC** et
co-encadrée par **Jean-Louis COULOMB** et **Anthony
CARPENTIER**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Électrique de
Grenoble**
dans l'**École Doctorale Électronique, Électrotechnique,
Automatique & Traitement du Signal**

Formulations intégrales magnétostatiques 2D dédiées au pré-dimensionnement des machines électriques tournantes

Thèse soutenue publiquement le **23 Novembre 2017**,
devant le jury composé de :

M. Abdelmounaim TOUNZI

Professeur à l'Université de Lille (Président)

Mme Viviane SILVA

Professeur à l'Université de Sao Paolo (Rapporteur)

M. Denis PREMEL

Chercheur CEA Saclay, HDR (Rapporteur)

M. Gérard MEUNIER

Directeur de recherche CNRS (Examineur)

M. Olivier CHADEBEC

Directeur de recherche CNRS (Examineur)

M. Anthony CARPENTIER

Ingénieur de recherche Altair Engineering (Examineur)

M. Jean-Louis COULOMB

Professeur émérite, Grenoble INP (Invité)



*"Vous les jeunes d'aujourd'hui, vous avez des diplômes et vous êtes bien éduqués,
mais vous êtes pas bien malins..."*

La grand mère d'un pote

Remerciements

Mes remerciements les plus sincères vont en premier lieu à mon encadrement. Merci beaucoup pour ces trois excellentes années de thèse. Merci à mon directeur de thèse Gérard Meunier pour ses conseils éclairés ainsi que sa bienveillance, même lorsque les recherches pédalent dans la semoule, sans oublier sa grande compétence et le recul scientifique dont il sait faire preuve. Il a su m'otienter dans mes recherches en me laissant toute la liberté dont j'avais besoin pour avancer à mon rythme et à ma manière en étant malgré tout à l'écoute. Merci à Olivier Chadebec pour son dynamisme et son expertise, tant en méthodes intégrales que dans le code de calcul utilisé au laboratoire. Merci à Jean-Louis Coulomb pour sa disponibilité, ses grandes connaissances et son humilité. Enfin, merci à Anthony Carpentier, mon encadrant technique côté Altair.

Je voulais aussi remercier les membres du jury d'avoir accepté d'en faire partie : Mme Viviane Silva et Mr Denis Premel pour avoir accepté d'endosser le rôle de rapporteur. Merci à Mr Abdelmounaim Tounzi pour m'avoir fait l'honneur de présider.

Je tiens ensuite à remercier l'ensemble de l'équipe MAGE du laboratoire de génie électrique de Grenoble et particulièrement Bertrand Bannwarth pour son assistance technique durant ces trois années.

Merci également à l'entreprise Altair Engineering pour avoir financé et encadré ces travaux à travers les personnes de Guy Jérôme et Anthony Carpentier.

Je remercie également les futurs et ex-futurs docteurs que j'ai pu cotoyer au laboratoire et avec qui j'ai passé de bons moments : Pauline, Jonhathan, Maxime, Arnaud, Audrey, Vinh, Thomas, Lyes, Limin et consorts.

Merci à mes amis qui m'ont soutenu et encouragé durant ces trois années : la team

raidboules, les beaufs de l'ENSTA, les médecins, mes anciens et nouveaux collocataires qui m'ont souvent remonté le moral quand ça "bloquait".

Merci enfin à mes parents qui m'ont toujours encouragé et fait confiance, non seulement durant cette thèse mais pendant toute ma scolarité.

TABLE DES MATIÈRES

I	INTRODUCTION	1
II	CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART	3
II.1	CONTEXTE	5
II.2	ÉTAT DE L'ART DU CALCUL DES MACHINES ÉLECTRIQUES	6
II.2.a	Les méthodes analytiques	6
II.2.b	Les réseaux de réductance	8
II.2.c	Les méthodes numériques	9
	Formulations fortes et formulations faibles	9
	La méthode des différences finies	9
	La méthode des volumes finis	11
	La méthode des éléments finis	12
	Améliorations	14
	Les méthodes intégrales	14
	Autres méthodes	15
	Couplages	16
II.3	CONCLUSIONS	17
III	MÉTHODES INTÉGRALES	19
III.1	MISE EN EQUATIONS DU PROBLÈME	21
III.1.a	Présentation du problème type	21
III.1.b	Hypothèses du problème et lois de comportement	22
	Les matériaux ferromagnétiques	22
	Les aimants permanents	23
III.1.c	Les équations de Maxwell et potentiels magnétiques	24
	Simplifications	24
	Le potentiel vecteur magnétique	25
	Les potentiels scalaires magnétiques	25
III.2	LES FORMULATIONS INTÉGRALES EN 2D	26

III.2.a	Formulations intégrales de volume	26
	Point sur les notations intrinsèques à la 2D	27
	Méthode des moments magnétiques	27
	Méthode basée sur le champ magnétique	30
	Méthode basée sur le potentiel scalaire	32
	Formulation en induction magnétique	33
	Formulation en potentiel vecteur	38
III.2.b	Les couplages FEM-BEM	39
	Équations dans le domaine ferro-magnétique	40
	Équations dans l'air	40
	Couplage des équations	41
III.3	GESTION DE LA NON LINÉARITÉ	42
	Méthode de Newton-Raphson	42
	Application aux formulations de la magnéto-statique	43
III.4	PREMIÈRES CONCLUSIONS	45
	Choix des méthodes	46
III.5	INTÉGRATION DU NOYAU DE GREEN	47
	Intégration purement numérique	47
	Utilisation d'une méthode d'intégration semi analytique	47
III.6	PERFORMANCES DES MÉTHODES RETENUES	50
	Cas test	50
	Convergence des deux méthodes	56
	Analyse des résultats	56
III.7	CONCLUSIONS	58
 IV ADAPTATION DE LA FORMULATION INTÉGRALE DE VOLUME MAGNÉTOSTATIQUE À LA SIMULATION DES MACHINES ÉLEC- TRIQUES		59
IV.1	CALCUL ANALYTIQUE DU CHAMP SOURCE	61
	Intégration analytique du potentiel complexe	61
	Évaluation du champ et potentiel créés par un triangle quelconque	62
	Cas où le point P est interne au triangle T	63
	Validation de la méthode	64
IV.2	GESTION DU MOUVEMENT	68
	IV.2.a Intégrations partielles	68

TABLE DES MATIÈRES

Intégration de la matrice \mathcal{R}	68
Intégration partielle de la matrice \mathcal{L}_0^B	69
Intégration partielle du second membre	70
IV.2.b Recyclage de solution	72
IV.3 PRISE EN COMPTE DES PÉRIODICITÉS DU SYSTÈME	73
Mise en place des différents domaines	73
Modification du système d'équations à résoudre	73
Parenthèse sur les cas infiniment périodiques	75
Implications sur le type de solveur utilisé	77
IV.4 VALIDATION DE LA MÉTHODE ET ÉTUDE COMPARATIVE DE PER- FORMANCES	78
IV.4.a Validation et impact de la qualité du maillage	79
IV.4.b Gains en temps de calcul apportés par l'utilisation des périodicités	83
IV.4.c Comparaison de performances avec la méthode des éléments finis .	86
IV.5 CONCLUSIONS	89
V CALCULS DE COUPLE ET DE FLUX	91
V.1 CALCUL DE COUPLE	93
V.1.a État de l'art	93
Utilisation du tenseur de Maxwell	93
Utilisation du principe des travaux virtuels	94
Dérivée de la co-énergie	95
Méthodes par équivalences	95
V.1.b Utilisation du tenseur de Maxwell en méthodes intégrales	95
Présentation de la méthode	95
V.1.c Utilisation de la dérivée de la co-énergie en méthodes intégrales . .	97
V.1.d Résultats	98
Choix de la discrétisation pour le calcul du couple via le tenseur de Maxwell	98
Calcul du couple de denture	100
Calcul du couple maximal	103
Conclusions sur le calcul de couple	108
V.2 CALCUL DE FLUX DANS LES INDUCTEURS	109
Méthode de calcul	109
Validation de la méthode	110

Étude de performance de la méthode pour un moteur synchrone à aimants permanents	115
Conclusions sur le calcul de flux	118
V.3 CONCLUSIONS	119
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	121
A ANNEXES	123
A.1 FONCTIONS DE FORMES AU 1 ^{ER} ORDRE	124
A.2 INTÉGRATION ANALYTIQUE DU NOYAU DE GREEN	126
A.3 CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE ET POTENTIEL VECTEUR SOURCE	128
A.4 CALCUL ANALYTIQUE DU CHAMP ET DU POTENTIEL LORSQUE LE POINT CIBLE EST À L'INTÉRIEUR DE LA SOURCE DE COURANT . . .	131
A.5 INTÉGRATION DE LA CO-ÉNERGIE MAGNÉTIQUE	133
BIBLIOGRAPHIE	137

Nomenclature

- δM_n : saut de magnétisation entre deux éléments du maillage
- $\Gamma^{E,Fk}$: arêtes externes du domaine fantôme numéro k
- $\Gamma^{E,R}$: arêtes externes du domaine réel
- Γ^E : ensemble des arêtes externes du maillage sur Ω_m
- Γ^I : ensemble des arêtes internes du maillage sur Ω_m
- $\Gamma^{T,Fk}$: arêtes totales du domaine fantôme numéro k
- $\Gamma^{T,R}$: arêtes totales du domaine réel
- Γ^T : ensemble des arêtes du maillage sur Ω_m
- $[\nabla \times]$: matrice d'incidence face \rightarrow arête
- \mathbf{j} : densité de courant
- \mathcal{F}^B : second membre de type éléments finis de la formulation en induction
- \mathcal{G}^B : second membre de type intégral de la formulation en induction
- \mathcal{L}^B : matrice de type intégrale de la formulation en induction
- \mathcal{L}_0^B : Partie de la matrice \mathcal{L}^B concernant uniquement des intégrations géométriques
- \mathcal{M} : matrice des mailles indépendantes
- \mathcal{R}^B : matrice de type éléments finis de la formulation en induction
- μ : perméabilité magnétique

\mathbf{n}	: vecteur normal à une facette
ν	: reluctivité magnétique
Ω	: domaine contenant l'air
Ω	: domaine total
Ω_m^{Fk}	: domaine actif fantôme numéro k
Ω_m^R	: domaine actif réel
Ω_m	: domaine représentant les matériaux actifs
Ω_s	: domaine source
\mathbf{A}	: potentiel vecteur magnétique
φ	: potentiel scalaire magnétique
φ_0	: potentiel scalaire magnétique source
φ_{red}	: potentiel scalaire magnétique réduit
\mathbf{B}	: induction magnétique
\mathbf{B}_r	: induction rémanente de l'aimant permanent
\mathbf{H}	: champ magnétique
\mathbf{M}	: magnétisation
\mathbf{w}_a	: fonction de forme d'arête
\mathbf{w}_f	: fonction de forme de facette
\mathbf{w}_n	: fonction de forme nodale
$G(\mathbf{r})$: fonction de Green
l^{Ext}	: vecteur des longueurs des arêtes externes
l^{Tot}	: vecteur des longueurs des arêtes

TABLE DES FIGURES

II.1	Marché international prévisionnel pour l'automobile (IEA)	5
II.2	Géométrie dans laquelle les développements [70] sont corrects	7
II.3	Modélisation du circuit magnétique et de l'entrefer par des réductances	8
II.4	un exemple de maillage utilisé avec la MDF	11
II.5	un exemple de maillage 1D utilisé avec la méthode des volumes finis .	12
II.6	un exemple de maillage non conforme (gauche) et conforme (droite) .	12
II.7	exemple d'un maillage obtenu par la méthode de maillage par bulles (gauche, centre) et comparaison des qualités des éléments (droite) . .	14
II.8	exemple de couplage entre un circuit de réductance et la MEF pour modéliser un circuit magnétique présentant un entrefer	17
III.1	Problème type traité dans cette thèse	22
III.2	Notations utilisées pour la définition des noyaux de Green	28
III.3	Facette interne au domaine (gauche) et externe (droite)	35
III.4	Maillage dual en prenant les éléments du maillage primal comme des noeuds et les facettes du maillage primal comme arêtes	36
III.5	Étapes de l'intégration numérique formalisée par l'équation III.129 . .	48
III.6	Types de d'intégration analytique possible : (a) SAC, (b) CAC, (c) FAC. Les flèches noires symbolisent une intégration numérique, et les rouges une intégration analytique.	49
III.7	Géométrie du contacteur	51
III.8	Convergence des deux méthodes	56
IV.1	Triangles rectangles pour l'intégration	62
IV.2	Transformations effectuées sur T et P	63
IV.3	Géométrie du cas test	64
IV.4	Écart relatif pour un maillage à 1300 éléments	65
IV.5	Écart relatif pour un maillage à 10000 éléments	66
IV.6	Écart relatif pour un maillage à 47000 éléments	66
IV.7	Écart relatif pour un maillage à 100000 éléments	67

IV.8	Décomposition du domaine en deux sous domaines, Ω_{Fixe} et Ω_{Mobile}	69
IV.9	Représentation par blocs de la matrice \mathcal{L}_0^B	70
IV.10	Huitième du maillage d'un moteur étudié dans le cadre des intégrations partielles	71
IV.11	Exemple d'un système $\frac{\pi}{2}$ anti-périodique contenant des aimants permanents et des bobines	74
IV.12	Exemple d'un système périodique infini contenant aimants et bobines	76
IV.13	Cas test utilisé pour l'étude de performance	78
IV.14	Écart relatif moyen et maximum par rapport à la méthode des éléments finis convergée	81
IV.15	Profil de la composante x de l'induction dans l'entrefer pour trois niveaux de maillages	81
IV.16	Zoom de la figure IV.15 sur le premier pic d'induction	82
IV.17	Zoom de la figure IV.15 sur le second pic d'induction	82
IV.18	Écart entre la solution obtenue avec le maillage complet et la solution obtenue avec le maillage périodique	83
IV.19	Maillages éléments finis utilisés pour la comparaison avec la méthode intégrale - maillage de bonne qualité à gauche et de mauvaise qualité à droite	87
IV.20	Maillage d'une anti-périodicité à 80 éléments	87
V.1	Cas test utilisé pour les calculs de couple et de flux	98
V.2	Convergence du calcul du couple de denture en fonction du paramètre N	99
V.3	Énergie calculée dans le cadre de du calcul du couple de denture pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	101
V.4	Couple de denture calculé par la dérivée de l'énergie pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	102
V.5	Couple de denture calculé par le tenseur de Maxwell pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	102
V.6	Écart entre les deux méthodes de calcul du couple de denture et la référence pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	103

V.7	Profil des courbes de couple en fonction du paramètre T calculées avec la méthode de la dérivée de la co-énergie pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	106
V.8	Profil des courbes de couple en fonction du paramètre T calculées avec le tenseur de Maxwell pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	106
V.9	Écart entre la courbe de référence et celle calculée par la méthode de la co-énergie pour la détermination du couple maximal pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	107
V.10	Écart entre la courbe de référence et celle calculée par le tenseur de Maxwell pour la détermination du couple maximal pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))	107
V.11	Géométrie du cas test	111
V.12	Norme de l'erreur et temps de calculs pour la méthode semi analytique dans le cas où le matériaux M est de l'air	113
V.13	Norme de l'erreur et temps de calculs pour la méthode des éléments finis dans le cas où le matériaux M est de l'air	114
V.14	Norme de l'erreur pour les deux méthodes en fonction du nombre d'inconnues dans M dans le cas où M est un matériau ferro-magnétique	114
V.15	Temps de calcul pour les deux méthodes en fonction du nombre d'inconnues dans M dans le cas où M est un matériau ferro-magnétique	115
V.16	Résultats du calcul du flux dans la phase A en fonction de la position du rotor	117
V.17	Zoom sur les première positions du rotor	117
V.18	Écart entre le flux calculé et la référence	118
A.1	Notations pour l'intégration	126
A.2	Notations pour le calcul du potentiel complexe	128
A.3	Triangles rectangles pour l'intégration	129
A.4	Cas où le P est interne à T	131

Liste des tableaux

III.1	Tableau récapitulatif	45
III.2	Dimensions du contacteur	50
III.3	Matériaux du contacteur	50
III.4	Temps de calculs (Maillage à 108 éléments)	52
III.5	Temps de calculs (Maillage à 991 éléments)	52
III.6	Visualisation des solutions pour les 4 niveaux de maillage avec la correction FAC et 5 points de Gauss par facette	53
III.7	Résultats - maillages légers	54
III.8	Résultats - maillages fins	55
IV.1	Coordonnées des points décrits figure IV.3	64
IV.2	Nombre de facettes pour les différents sous domaines	70
IV.3	Temps de résolution pour les deux solveurs en fonction du nombre d'inconnues	77
IV.4	Écart relatifs moyens et maximaux par rapport à la méthode des éléments finis convergée	80
IV.5	Résultats pour le maillage à 530 éléments	85
IV.6	Résultats pour le maillage à 1640 éléments	86
IV.7	Résultats pour le maillage à 2970 éléments	86
IV.8	Temps de calcul et précision obtenue pour les deux méthodes	88
V.1	Écart moyens et maximaux pour les deux méthodes (EM : énergie magnétique, TM : Tenseur de Maxwell)	101
V.2	Temps total de résolution et de calcul de couple pour une position du rotor	101
V.3	Écart moyens et maximaux pour les deux méthodes (EM : énergie magnétique, TM : Tenseur de Maxwell)	105
V.4	Temps total de résolution et de calcul de couple pour une valeur de T	105
V.5	Dimensions du cas test	111
V.6	Valeurs de référence pour le cas test	111

V.7	Temps de calcul, écarts moyens et maximaux pour la méthode proposée	116
V.8	Temps de calcul, écarts moyens et maximaux pour la méthode des éléments finis	116

Chapitre I

Introduction

Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre l'entreprise Altair Engineering (<http://www.altair.com/>), éditeur d'outils d'aide à la conception en ingénierie, et l'équipe MAGE (Modèles, Méthodes et Méthodologies Appliqués au Génie Electrique) du laboratoire de génie électrique de Grenoble (G2ELab). Son objectif est de développer des méthodes originales et efficaces pour le pré-dimensionnement des machines électriques tournantes et en particulier des moteurs électriques synchrones à aimants permanents. Il s'agit donc de calculer de manière efficace le champ magnétique à l'intérieur d'un moteur électrique à la géométrie quelconque. Depuis quelques dizaines d'années, la méthode des éléments finis est la méthode la plus fréquemment utilisée. On la retrouve dans des logiciels industriels comme le logiciel Flux commercialisé par Altair Engineering. Cette méthode permet de modéliser des géométries et des comportements de matériaux complexes mais peut s'avérer lourde en temps de calcul.

Un état de l'art des méthodes de modélisation et de simulation des machines électriques tournantes existantes sera effectué dans le premier chapitre pour trouver une alternative à la méthode des éléments finis dans le cadre du pré-dimensionnement. Les méthodes intégrales développées au G2ELab sont une alternative intéressante à la méthode des éléments finis car elles sont capables de fournir une solution d'une qualité correcte en des temps très courts. Ces formulations font l'objet de nombreuses recherches au sein du laboratoire de génie électrique de Grenoble, à travers la plateforme de développement MIPSE (Modeling of Interconnected Power Systems), codée en JAVA, qui vise à poser les bases méthodologiques et logicielles pour la mise en oeuvre d'une plateforme de simulation numérique multi-niveaux et multi-méthodes dédiée à l'électromagnétisme basse et moyenne fréquences.

On trouvera dans le second chapitre une description exhaustive des différentes manières de formuler le problème magnéto-statique sous forme d'équation intégrale.

Les plus prometteuses de ces formulations seront testées sur un cas test académique pour déterminer laquelle de ces méthodes sera finalement utilisée dans la suite de ces travaux. Un point sera fait sur les difficultés spécifiques aux méthodes intégrales et sur les stratégies utilisées pour les dépasser. La méthode retenue sera ensuite adaptée et optimisée à la problématique du dimensionnement du moteur électrique synchrone à aimant permanent dans le troisième chapitre. Ses performances seront évaluées sur un moteur test et comparées tant en terme de précision qu'en terme de rapidité à la méthode des éléments finis qui tient lieu de référence dans le monde de la simulation numérique pour la magnéto-statique. Dans le quatrième et dernier chapitre, on trouvera des méthodes nouvelles adaptées à la formulation retenue pour calculer les couples appliqués au rotor de la machine, ainsi que les flux qui passent à travers ses bobines. Là encore, les performances de ces nouvelles approches seront comparées à des solutions déjà existantes.

Chapitre II

Contexte et état de l'art

Le vendredi premier septembre 2017 à 18h30, Jim, François, Kilian et Xavier débutaient une circumnavigation du massif du Mont Blanc. Les attentes du public étaient immenses et tous espéraient que ces fabuleux athlètes livrent le spectacle qu'on attendait d'eux. Ce chapitre ne raconte pas leur histoire.

SOMMAIRE

II.1	CONTEXTE	5
II.2	ÉTAT DE L'ART DU CALCUL DES MACHINES ÉLECTRIQUES	6
II.2.a	Les méthodes analytiques	6
II.2.b	Les réseaux de réluctance	8
II.2.c	Les méthodes numériques	9
II.3	CONCLUSIONS	17

Résumé

Ce chapitre présente le contexte général de l'industrie des moteurs électriques avant de se concentrer sur les méthodes existantes de la simulation de ceux-ci.

II.1 Contexte

La perspective d'un mode de vie écologique dans lequel s'inscrit la réduction des émissions de gaz à effet de serre, l'utilisation de véhicules moins polluants (voitures, vélos, transports câblés) ou la valorisation d'énergies dites "renouvelables"¹ a fait du domaine de la conversion de l'énergie électrique un marché en pleine expansion. La tendance à l'électrification du marché de l'automobile estimée pour l'Agence Internationale de l'Energie (IEA) en est un exemple parlant : en effet d'après l'IEA [2], plus de 80% des véhicules qui seront produits en 2050 posséderont un moteur électrique, qu'ils soient hybrides ou tout-électriques (Figure II.1).

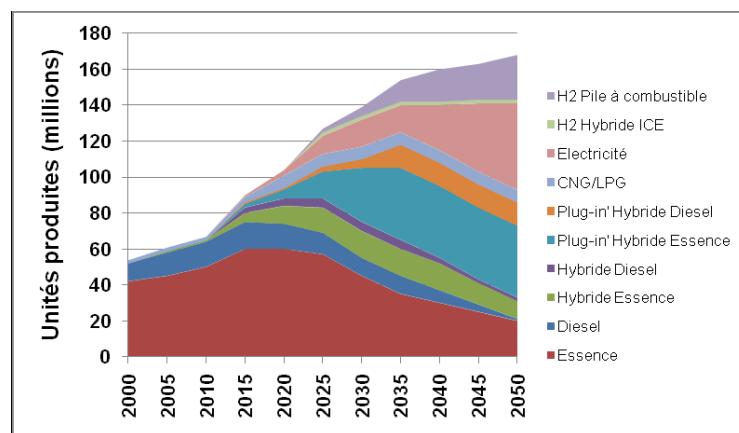


FIGURE II.1 – Marché international prévisionnel pour l'automobile (IEA)

Dans ce contexte, les besoins en mécanismes de conversion de l'énergie électrique explosent : un rapport publié par Allied Market Research [57] daté du mois de mars 2017 estime que le marché du moteur électrique dans sa globalité, relevé à 91 milliards de \$ en 2015 atteindrait 117 milliards de \$ en 2022, soit une croissance annuelle de 3.7%. Néanmoins, la conception et la réalisation d'un moteur électrique s'avère onéreuse, tant en terme de matériaux (les aimants permanents coûtent cher ainsi que le cuivre pour les bobinages) qu'en terme de temps. En effet, le prototypage se révélant onéreux il est évident qu'il faut essayer d'en faire le moins possible pour réduire les coûts. L'arrivée des méthodes numériques a été une réponse efficace à la nécessité de disposer d'outils de dimensionnements [14,21,24] efficaces et précis. Ces méthodes sont aujourd'hui incontournables et font l'objet de nombreuses études et recherche. Cette thèse s'inscrit dans cette démarche.

1. La seule énergie vraiment renouvelable est celle que l'on ne dépense pas

II.2 État de l'art du calcul des machines électriques

Le but du dimensionnement d'une machine électrique vise à fournir par le calcul les caractéristiques géométriques principales répondant à un cahier des charges établi en amont pouvant concerner l'encombrement, la puissance disponible à l'usage ou encore le couple attendu. Ces caractéristiques peuvent être obtenues par des développements analytiques pour certaines d'entre elles. Pour les autres, des méthodes numériques sont utilisées. Une liste aussi complète que possible bien que non exhaustive de ces méthodes sera présentée dans ce chapitre. Leurs principaux avantages et inconvénients y seront discutés ainsi que le principe de mise en oeuvre de celles ci.

II.2.a Les méthodes analytiques

Les modèles analytiques reposent sur la résolution directe des équations physiques du système étudié. Ces équations peuvent être paramétrées pour étudier l'influence de la variation d'une caractéristique sur le système. Si le système est entièrement décrit par des équations, et que l'on résout de manière directe toutes ces équations, on dit de la solution qu'elle est purement analytique. Ce mode de modélisation présente des qualités indéniables : une fois les équations paramétriques établies, la résolution de celles-ci sont la plupart du temps immédiates en terme de temps de calcul. Ces modèles sont très adaptés à des routines d'optimisation paramétrique d'une part par leur rapidité, et d'autre part car les solutions obtenues peuvent être dérivées de manière symbolique (et donc exacte) par rapport aux paramètres d'entrée. Ils sont très efficaces notamment dans le cadre d'étude de sensibilité. Néanmoins, l'établissement de ces modèles demande une très grande connaissance des phénomènes physiques en jeu. De plus, il est nécessaire de faire des hypothèses fortes, tant sur la géométrie que sur le comportement des matériaux, qui rendent l'utilisation de ces méthodes complexes voire impossible quand on veut calculer des moteurs avec des formes d'encoches ou d'aimants non simplifiées [70].

La rapidité de calcul et la puissance de ce formalisme sont donc obtenus au prix de nombreux sacrifices :

- Ces modèles ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes de saturation dans les matériaux non-linéaires.
- Ils ne permettent que d'obtenir des informations globales (sur les flux et

les couples par exemple), sans être capable d'apporter d'informations plus locales, sur la valeur du champ en un point donné.

- Bien que les résultats soient de bonne qualité dans le domaine de validité des hypothèses, ils ne sont pas du tout généralisables à d'autres conditions.

Des méthodes analytiques ont été notamment développées pour répondre au besoin des industriels de calculer le couple de denture d'une machine de manière efficace. Ces développements analytiques ont permis le calcul de ce couple pour un moteur synchrone à aimant permanent pour des géométries de moteur particulières [33, 70]. Ils reposent sur des hypothèses comme la nécessité que les aimants soient placés sur la surface du rotor ou que la géométrie des encoches soit très simple (Figure II.2).

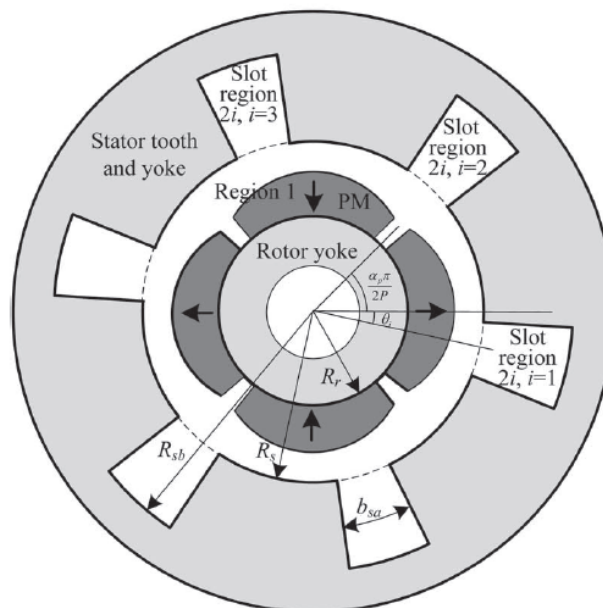


FIGURE II.2 – Géométrie dans laquelle les développements [70] sont corrects

[33] utilise une méthode de décomposition en série de Fourier pour approcher la distribution de densité de flux magnétique dans l'entrefer. Il est ensuite possible de calculer la variation de l'énergie magnétique pour obtenir le couple de denture. Il est supposé que la totalité de l'énergie magnétique est concentrée dans l'entrefer de la machine et que les aimants permanents sont montés à la surface du rotor. Ces mêmes restrictions sont faites dans [70].

II.2.b Les réseaux de réluctance

Les circuits de réluctance [26] ont été les premiers outils semi-analytiques (méthode numérique dans laquelle certaines équations sont d'abord résolues de manière analytique) utilisés pour la simulation de machines électriques, du fait de leur légèreté en terme de calcul. On utilise l'analogie entre les problèmes magnétiques et électriques pour transformer le système magnétique en un circuit électrique (Figure II.3). On pourra ensuite utiliser les lois de Kirchoff pour résoudre le problème électrique. Enfin, une transformation inverse de la solution électrique en solution magnétique est effectuée.

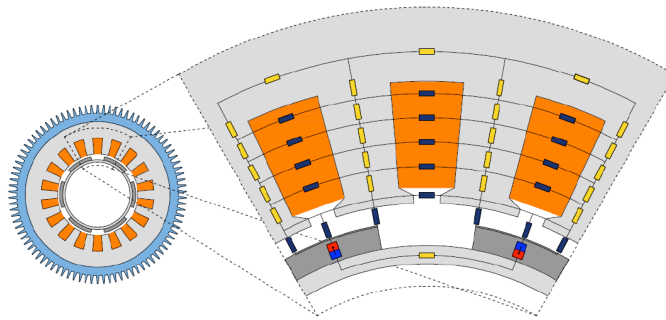


FIGURE II.3 – Modélisation du circuit magnétique et de l'entrefer par des réluctances

L'utilisation d'un réseau de réluctance présente des avantages par rapport aux méthodes analytiques. Elle permet notamment de prendre en compte la saturation des matériaux. Cette méthode est à l'instar des méthodes analytiques, très adaptée à l'optimisation, car les temps de résolutions sont encore relativement raisonnables. La précision de ce type de modèle est sujette à la qualité du découpage du circuit magnétique en tubes de flux : plus le découpage sera fin, et plus la qualité de la solution sera bonne. Cela se fera évidemment au détriment du temps de calcul.

Il est néanmoins nécessaire de connaître à priori le comportement du moteur pour faire un découpage en tubes de flux qui soit cohérent. Cette méthode demande donc une expertise certaine pour concevoir le modèle à étudier. Pour deux moteurs différents (par exemple, une machine à aimants enterrés et une à aimants saillants), le découpage en tubes de flux sera différent. La rapidité de calcul se paye donc au prix du fait que les modèles soient peu généralisables. Dans la plupart des cas, cette méthode est utilisée pour dimensionner un moteur dont on connaît à priori les caractéristiques géométriques (forme des encoches, types d'aimants et donc la direction des flux magnétiques), mais dont certaines caractéristiques moins structurantes sont encore à définir [9].

Les méthodes analytiques et les réseaux de réductances sont très utilisés pour le pré-dimensionnement des moteurs électriques. Cependant, la modification de caractéristiques structurelles de la machine (rotor à inducteurs bobinés ou rotor à aimant permanent, présence d'amortisseurs, etc...) sont autant de freins à la généralité de ces méthodes.

II.2.c Les méthodes numériques

Dans ce contexte, les méthodes numériques sont une alternative intéressante et viable. Elles permettent d'obtenir une solution approchée d'équations aux dérivées partielles. Les plus courantes sont décrites dans les paragraphes suivants.

Formulations fortes et formulations faibles

Avant de décrire ci après différentes méthodes numériques, posons les deux définitions suivantes : On considère un opérateur différentiel $\mathbf{R}(\cdot)$ et une fonction f définie sur un ouvert Ω . Les formulations fortes II.1 et faibles II.2 du problème associé à $\mathbf{R}(\cdot)$ correspondent à trouver u définie sur Ω vérifiant :

$$\mathbf{R}(u) = f \text{ en tout point de } \Omega \quad (\text{II.1})$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(u)v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad (\text{II.2})$$

pour toute fonction v de carré sommable et de gradient de carré sommable définie sur Ω . Le lecteur pourra se reporter à la lecture de [8] pour une description précise du cadre topologique dans lequel les fonctions u et v doivent être choisies.

La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est, comme la plupart des autres méthodes numériques, basée sur un maillage du domaine physique sur lequel on résout une approximation de l'équation aux dérivées partielles. On peut trouver un exemple d'un tel maillage en figure II.4. Cette méthode repose sur une formulation forte II.1 des équations aux dérivées partielles : on discrétise les opérateurs différentiels puis on met en place les équations. Cette discrétisation peut être obtenue par les formules de Taylor :

Soit I un intervalle réel, a un élément de I , E un espace vectoriel normé et f une fonction de I dans E et n fois dérivable, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (\text{II.3})$$

où $R_n(x)$ est négligeable par rapport à $(x-a)^n$ au voisinage de a . Une fois l'opérateur différentiel à résoudre discrétisé, on évalue un système d'équation sur le maillage présenté figure II.4 dont les noeuds de celui ci représentent les inconnues du problème. C'est ce système d'équation qui sera ensuite résolu.

Si l'on cherche à résoudre l'équation de Laplace en 1D :

Trouver u dérivable 2 fois et de dérivée seconde continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \text{ et } u(0) = u(1) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Soit un pas de discrétisation Δx , on obtient par les formules de Taylor :

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{\Delta x^n}{n!} u^{(n)}(x) + \Delta x^3 \epsilon_+(x, \Delta x) \quad (\text{II.5})$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{(-\Delta x)^n}{n!} u^{(n)}(x) + \Delta x^3 \epsilon_-(x, \Delta x) \quad (\text{II.6})$$

où les fonctions ϵ_+ et ϵ_- convergent vers 0 avec Δx . En additionnant (II.6) à (II.5), on obtient une approximation du second ordre en Δx de l'opérateur différentiel $\frac{d^2}{dx^2}$:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} \simeq \frac{2u(x) - u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (\text{II.7})$$

On peut alors résoudre le problème II.4 approximé en le projetant sur un maillage de dimension 1 : on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en N segments de longueur Δx et on pose $x_i = i\Delta x$. En notant u_i l'approximation de $u(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$ on a $\forall i \in [1, N]$:

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \text{ et } u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Il ne reste "plus qu'à" résoudre ce système pour obtenir la solution par la méthode des différences finies. Cette méthode peut être utilisée pour résoudre des problèmes de magnétostatique [69] bien que ce ne soit pas dans ce domaine qu'elle soit la plus répandue [25, 35, 65].

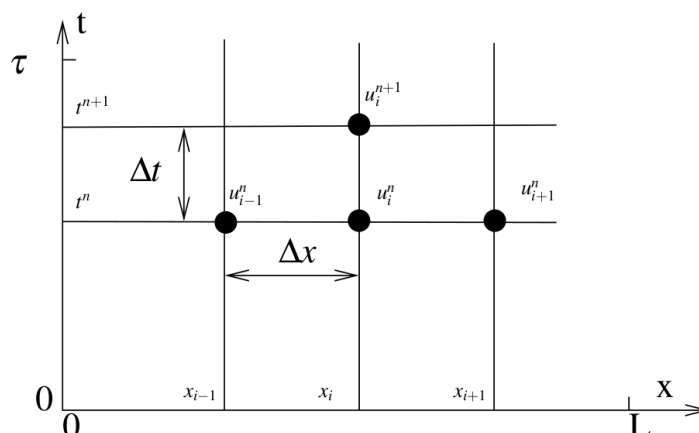


FIGURE II.4 – un exemple de maillage utilisé avec la MDF

La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis repose elle aussi sur un maillage et sur une formulation forte II.1 des équations aux dérivées partielles à résoudre. Néanmoins, contrairement à la méthode des différences finies dont les inconnues sont portées par les noeuds du maillage, les inconnues dans le cadre de la méthode des volumes finis sont les grandeurs à l'intérieur des mailles : ce maillage est en fait considéré comme un ensemble de "volumes finis" qui constituent le domaine physique sur lequel est résolu le problème. Ces volumes sont des surfaces en 2D et des segments en 1D.

Ces méthodes ont été initialement développées pour résoudre des équations aux dérivées partielles contenant des termes de divergence $\nabla \cdot \mathbf{X} = f$: en effet, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, il est possible de ramener l'intégrale d'un champ vectoriel sur un volume au flux de ce champ vectoriel à la frontière de ce volume (II.9). Ce sont ces flux qui sont numériquement évalués aux interfaces des "volumes finis". Le flux entrant dans un volume étant égal au flux sortant du volume voisin, cette méthode est conservative.

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{II.9})$$

Si l'on cherche à résoudre le problème de Laplace présenté précédemment equation II.4, sur le maillage défini figure II.5, on a en intégrant l'équation de Laplace sur chaque intervalle [50] :

$$-\frac{du_{i+\frac{1}{2}}}{dx} + \frac{du_{i-\frac{1}{2}}}{dx} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx \quad (\text{II.10})$$

On notera cette quantité $\Delta x f_i$. On écrit alors le schéma comme :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x f_i, \forall i \in [1, N] \quad (\text{II.11})$$

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}, \forall i \in [0, N] \quad (\text{II.12})$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (\text{II.13})$$

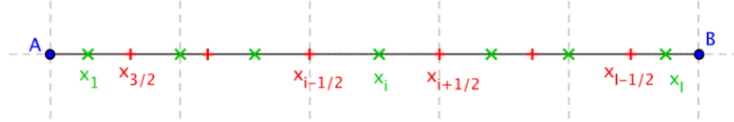


FIGURE II.5 – un exemple de maillage 1D utilisé avec la méthode des volumes finis

Un de ses avantages majeurs est de pouvoir fonctionner sur des maillages non conformes (présentés en figure II.6) étant donné qu'on ne fait qu'un bilan de ce qui rentre et de ce qui sort de chaque "volume fini". La conformité du maillage n'est donc pas nécessaire. Cette méthode est très peu utilisée en magnéto-statique bien que l'équation de la conservation du flux soit exploitable. Elle est au contraire, très utilisée en mécanique où les phénomènes de propagation et de diffusion sont courants [32, 38, 63, 64].

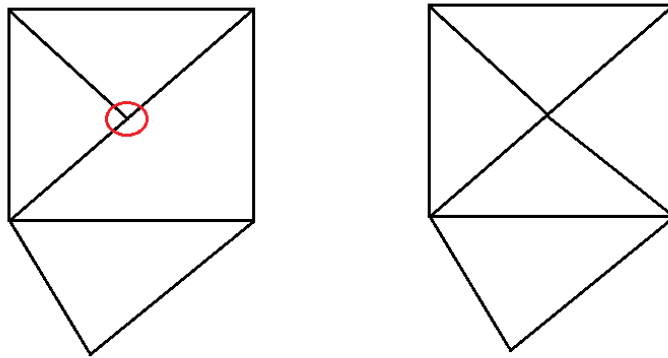


FIGURE II.6 – un exemple de maillage non conforme (gauche) et conforme (droite)

La méthode des éléments finis

C'est la méthode la plus utilisée dans le domaine du génie électrique pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles [20, 23, 27, 42, 48, 68]. Contrairement aux méthodes des différences et des volumes finis, elle est basée sur une approxi-

mation de la solution et non pas des opérateur différentiels. De plus, on utilise une formulation faible pour établir le système d'équations à résoudre numériquement.

Le domaine Ω est discrétisé via un maillage constitué d'éléments finis. Les éléments finis recouvrent entièrement le domaine d'étude : sur chaque élément fini, on approxime la variable d'état u qui est la solution recherchée du problème par une fonction u_e via des fonctions de formes qui peuvent être nodales, d'arêtes, de facettes ou de volume (ici sont présentées des fonctions de forme nodales en 1D) :

$$u_e = \sum_{i=1}^2 \phi_i^e(x) u_i^e \quad (\text{II.14})$$

où u_i^e est la valeur de u sur le noeud i de l'élément e . De manière similaire, la fonction ϕ_i^e est la fonction de forme du noeud i de l'élément e . Les fonctions de forme sont définies par morceaux et présentent les propriétés suivantes :

$$\phi_i^e(x_i) = 1, \quad \phi_{j,j \neq i}^e(x_i) = 0, \quad \sum_{k=1}^2 \phi_k^e(x) = 1 \quad (\text{II.15})$$

On obtient finalement une version approchée \tilde{u} de la variable d'état u :

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x) \quad (\text{II.16})$$

Cette approximation est injectée dans la formulation faible II.2 de l'équation aux dérivées partielles. En reprenant une dernière fois l'exemple de la résolution de l'équation de Laplace II.4, la formulation faible du problème amène à :

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v \, dx = \int_0^1 f v \, dx \text{ pour toute fonction } v \text{ définie sur } [0, 1] \quad (\text{II.17})$$

il est alors possible d'injecter la version approchée \tilde{u} dans la formulation faible du problème pour obtenir après une intégration par parties :

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \nabla \phi_i \nabla v \, dx \right) u_i = \int_0^1 v f \, dx \quad (\text{II.18})$$

Le choix des fonctions v utilisées dans (II.2) peut jouer un rôle prépondérant dans la précision ou le temps du calcul de la méthode. Une méthode couramment utilisée est l'approche de Galerkin [30, 68] qui consiste à utiliser les fonctions de forme de la discrétisation de la variable d'état u . D'autres méthodes sont néanmoins courantes, comme l'approche par collocation [18, 59] qui utilise des fonctions de pondération choisies telles que la solution vérifie (II.2) à chaque noeud du maillage [34]. Cette expression peut se mettre sous la forme d'un système matriciel du type $\mathbb{A}u = b$. La

résolution de ce système permet d'obtenir les valeurs de u aux noeuds du maillage.

La méthode des éléments finis étant très populaire, elle a été largement étudiée et couplée à d'autres techniques pour la rendre plus efficace, plus précise ou plus rapide.

Améliorations

La vitesse de l'assemblage du problème ainsi que la résolution de celui ci peuvent également être améliorées à l'aide de la parallélisation des calculs, notamment grace au calcul distribué sur carte graphique [28]. La qualité du maillage peut aussi être améliorée en utilisant des algorithmes de maillages plus gourmands en temps de calcul mais parallélisables [49]. On constate sur la Figure II.7 que l'algorithme du maillage par bulles permet d'aboutir à des maillages de meilleure qualité : en effet, le graphique de droite sur la Figure II.7 montre que la distribution des angles des triangles du maillage obtenu par l'algorithme par bulles est moins dispersée que la distribution des angles des triangles obtenus par l'algorithme de Delaunay : le maillage obtenu par bulles est donc de meilleure qualité.

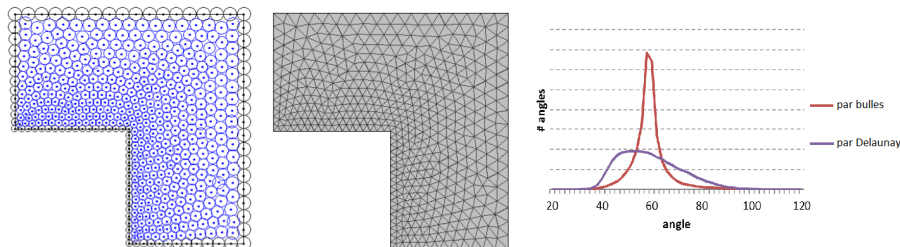


FIGURE II.7 – exemple d'un maillage obtenu par la méthode de maillage par bulles (gauche, centre) et comparaison des qualités des éléments (droite)

Malgré ces améliorations, la relative lourdeur de la méthode des éléments finis (grand nombre d'inconnues, nécessité de remailler la géométrie si il y a un mouvement) peut être limitante dans un contexte d'optimisation multi-paramétrique.

Les méthodes intégrales

Les méthodes intégrales font partie des méthodes numériques qui reposent sur un maillage et sur une formulation faible des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes sont développées depuis plusieurs années au laboratoire de génie électrique de Grenoble au sein duquel leur succès est grandissant dans le cadre de la modélisation en génie électrique en 3D [43, 44, 47, 51, 61]. Elles ressemblent à la méthode

des éléments finis d'un point de vue de la méthodologie, mais se distinguent car elles ne nécessitent que le maillage des matériaux "actifs", c'est à dire que les régions contenant de l'air ne sont pas maillées. Dès lors, la gestion du mouvement d'une partie du domaine par rapport à une autre est facilitée. De plus, contrairement à la méthode des éléments finis dont les interactions entre éléments n'ont qu'une portée locale, les méthodes intégrales prennent en compte les interactions à distance entre les éléments. La prise en compte de ces interactions à distance permet d'accroître grandement la précision de ces méthodes, et ce même pour des maillages légers [43], ceci au prix d'intégrations un peu plus coûteuses en temps de calcul. Ces méthodes ont prouvé leur efficacité en 3D par leur légèreté et la précision de leurs résultats [43, 44, 61].

On distingue deux types de méthodes intégrales :

- les méthodes intégrales de frontière qui (comme leur nom l'indique) ne nécessitent de faire des opérations que sur les frontières des matériaux actifs. Les méthodes intégrales de frontière pures sont néanmoins limitées à des domaines qui se comportent de manière linéaire. Leur principal avantage est un nombre d'inconnues fortement réduit.
- les méthodes intégrales de volume qui permettent de traiter des problèmes non linéaires ou le maillage complet des matériaux actifs est nécessaire.

Autres méthodes

D'autres méthodes existent comme les méthodes sans maillages qui sont une alternative à la MEF par exemple lorsque l'on est en présence de problèmes à très forte déformation. En effet, dans ce genre de situation, la forte déformation du maillage peut entraîner des effets indésirables, comme une dégradation de la solution due à une dégradation de la qualité des mailles.

La résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles à l'aide d'une méthode sans maillages repose sur la formulation faible II.2 de l'opérateur différentiel. On résout celle ci à l'aide :

- d'un nuage de points $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ dans un domaine Ω de l'espace, et de frontière $\partial\Omega$.
- une méthode d'interpolation permettant de construire une approximation \tilde{u} de toute fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ (avec $d = 2$ ou 3) de la forme :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)u_i, \forall x \in \Omega \quad (\text{II.19})$$

où les fonctions ϕ_i sont les fonctions de forme associées aux noeuds x_i .

- une formule de quadrature permettant d'exprimer la formulation faible du système d'équations aux dérivées partielles sous forme de système matriciel.

Les méthodes sans maillages présentent quelques avantages intrinsèques : il est par exemple très simple de rajouter des noeuds à la discrétisation puisque qu'il n'y a pas de traitements particuliers à appliquer au maillage. L'absence de remaillage nécessaire en cas de grande déformation permet quand à lui un gain important en temps de calcul. Malgré celà, les méthodes sans maillages ne présentent pas que des avantages. En effet, les fonctions de forme sont non-interpolantes (elles ne respectent pas la propriété du delta de Dirac [13]). Il est donc compliqué de traiter par exemple des interfaces entre matériaux.

On peut aussi citer dans cette revue la méthodes des éléments naturels [13]. Il s'agit d'un compromis entre la méthode des éléments finis et les méthodes sans maillages, qui tire partie du meilleur des deux méthodes : ses fonctions de forme sont interpolantes (comme dans le cas des éléments finis), mais elle présente une faible sensibilité aux effets de la discrétisation comme les méthodes sans maillage. Elle nécessite néanmoins une implémentation plus lourde que la méthode des éléments finis.

Couplages

Un couplage possible dans le domaine du génie électrique est d'associer un circuit réductant dans les régions dont le flux est facilement prévisible à la MEF. La MEF permettra de résoudre de manière fine le domaine où le flux est plus complexe à prédire tandis que le circuit réductant permettra une minimisation du nombre d'inconnues [5] (Figure II.8). Ces méthodes sont développées dans le cadre d'une collaboration entre les laboratoires de génie électrique de Florianopolis (Brésil), de Grenoble et l'université de Liège (Belgique).

On peut aussi mettre en lumière des couplages entre les méthodes intégrales de frontière et d'autres méthodes numériques pour prendre en considération les matériaux non linéaires : la partie non linéaire sera traitée par les méthodes des éléments finis [6], la méthode des éléments naturels [12] ou le circuit de reluctance [45] alors que les régions au comportement linéaire le seront par la méthode intégrale de frontière. Ces couplages ont été développés au sein du laboratoire de génie électrique de Grenoble dans le cadre de différentes thèses [13, 45].

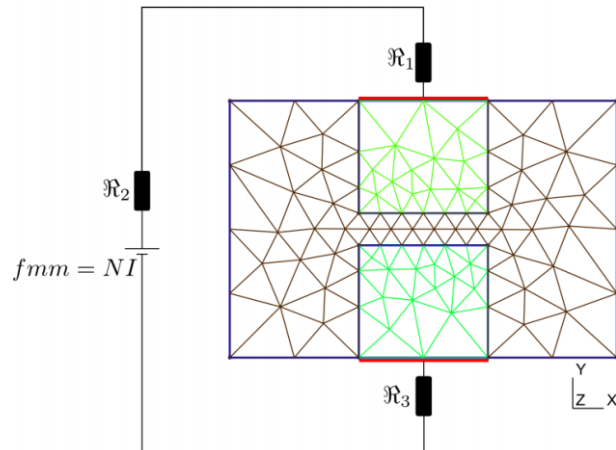


FIGURE II.8 – exemple de couplage entre un circuit de réluctance et la MEF pour modéliser un circuit magnétique présentant un entrefer

II.3 Conclusions

Au regard de la grande expérience dans le domaine des méthodes intégrales au laboratoire de génie électrique de Grenoble et des performances enthousiasmantes qu'elles ont fournies en 3D, nous avons choisi d'explorer le potentiel des méthodes intégrales dans le cadre du pré-dimensionnement des moteurs électriques en 2D. En effet, contrairement aux méthodes analytiques et aux méthodes basées sur les circuits de réluctances, les méthodes intégrales sont très générales et permettent de traiter une grande variété de problèmes (matériaux, géométries). L'absence de maillage dans les zones contenant de l'air nous a semblé intéressante dans le cadre de la simulation des moteurs électriques dans la mesure où c'est dans la zone d'air entre le rotor et le stator (appelée l'entrefer) que le nombre d'inconnues est le plus important avec la méthode des éléments finis. Nous nous affranchissons donc de traiter tous ces degrés de liberté. Enfin, la bonne qualité de la solution pour un maillage léger nous a paru cohérente avec la démarche de pré-dimensionnement.

Chapitre III

Méthodes intégrales

Durant la première nuit, le vent et la neige redoublaient d'intensité. Affaibli par un virus la semaine précédente, Xavier cédait du terrain aux trois hommes de tête qui arrivaient ensemble à la mi-parcours. Ce chapitre ne raconte pas leur histoire

SOMMAIRE

III.1 MISE EN EQUATIONS DU PROBLÈME	21
III.1.a Présentation du problème type	21
III.1.b Hypothèses du problème et lois de comportement	22
III.1.c Les équations de Maxwell et potentiels magnétiques	24
III.2 LES FORMULATIONS INTÉGRALES EN 2D	26
III.2.a Formulations intégrales de volume	26
III.2.b Les couplages FEM-BEM	39
III.3 GESTION DE LA NON LINÉARITÉ	42
III.4 PREMIÈRES CONCLUSIONS	45
III.5 INTÉGRATION DU NOYAU DE GREEN	47
III.6 PERFORMANCES DES MÉTHODES RETENUES	50
III.7 CONCLUSIONS	58

Résumé

Ce chapitre présente les différentes méthodes intégrales existantes en 2D. Ces méthodes peuvent être séparées en deux catégories : les méthodes intégrales de volume et les couplages éléments finis - méthodes intégrales de frontière. Après avoir présenté le problème magnéto-statique à résoudre, ces différentes méthodes seront étudiées. Un intérêt particulier sera porté aux stratégies d'intégration. Enfin, les formulations les plus prometteuses seront testées sur un cas test académique.

III.1 Mise en equations du problème

Cette première partie de chapitre détaille la mise en équation du problème de magnéto-statique traité dans cette thèse. Dans un premier temps, un problème type sera détaillé et les hypothèses dans lequel ce travail est effectué seront décrites. Les lois de comportement des matériaux prenant part au problème seront décrites. Les équations de maxwell seront détaillées dans un second temps ainsi que quelques hypothèses appliquées pour en obtenir une version simplifiée. Un point sur les potentiels magnétiques sera aussi effectué.

III.1.a Présentation du problème type

Le problème type est composé de quatre régions aux comportements physiques différents qui sont illustrées sur la figure III.1 :

- Un domaine ferromagnétique décrit en bleu. Cette région est considérée non conductrice. Elle peut être non connexe (comme dans l'exemple). Cette région sera nommée Ω_{ferro} .
- Un domaine aimanté de manière permanente décrit en rouge et noir. Cette région présente un champ magnétique rémanent noté H_c . Elle sera nommée Ω_{aimant} .
- Une région source, traversée par une densité de courant J_0 et créant un champ inducteur. On nomme cette région Ω_s .
- Une région d'air englobant toutes les autres régions et non bornée, symbolisée en vert sur la figure III.1. Cette région est nommée Ω_{air} .

On définit enfin les domaines Ω_m et Ω comme :

$$\Omega_m = \Omega_{ferro} \cup \Omega_{aimant} \quad (\text{III.1})$$

$$\Omega = \Omega_m \cup \Omega_s \cup \Omega_{air} \quad (\text{III.2})$$

La frontière du domaine Ω_m est nommée Γ^E . L'ensemble des arêtes internes du domaine est nommé Γ^I . On notera Γ^T l'ensemble défini par :

$$\Gamma^T = \Gamma^E \cup \Gamma^I \quad (\text{III.3})$$

III.1.b Hypothèses du problème et lois de comportement

Cette thèse ne traite que des phénomènes magnétiques, sans se soucier d'aspects mécaniques ou thermiques induits. De plus, les hypothèses suivantes sont faites :

- Les problèmes traités sont en deux dimension (2D). Dans toute la suite, on considérera que le plan d'étude est le plan P normal au vecteur unitaire $e_z = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 . On définit dès lors une base cartésienne 2D de P à l'aide des deux vecteurs $e_x = (1, 0)$ et $e_y = (0, 1)$.
- Le régime est considéré stationnaire, et les sources sont parcourues par un courant continu. Cela implique une absence de courants induits.

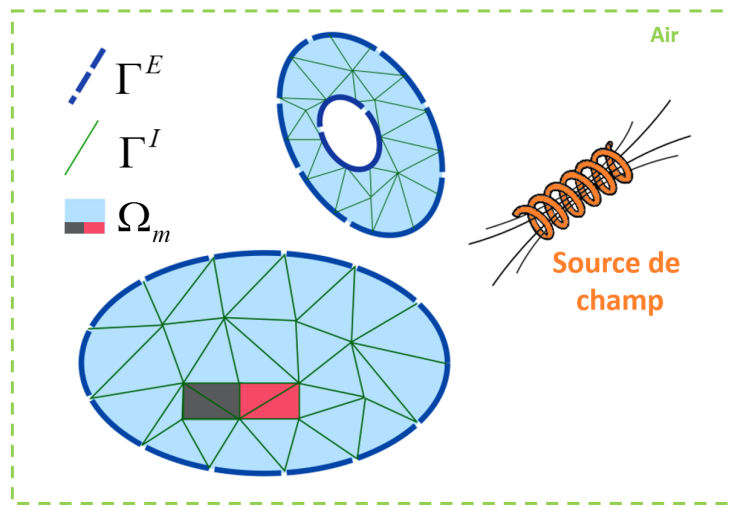


FIGURE III.1 – Problème type traité dans cette thèse

Les lois de comportement permettent de caractériser les matériaux. Elles permettent notamment d'établir une relation entre l'induction \mathbf{B} et le champ magnétique \mathbf{H} dans les différents matériaux. On peut aussi appeler ces lois de comportement des lois constitutives ou relations constitutives des matériaux. Dans cette étude, nous nous intéressons aux matériaux ferromagnétiques et aux aimants permanents. Les relations constitutives régissant les comportements de ces deux types de matériaux sont présentées dans les paragraphes suivants.

Les matériaux ferromagnétiques

Dans les matériaux ferromagnétiques sans aimantation rémanente, et sous l'hypothèse d'isotropie et de non prise en compte des phénomènes d'hystérésis, la relation constitutive peut être énoncée :

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H} \text{ ou } \mathbf{H} = \nu(\mathbf{B})\mathbf{B} \quad (\text{III.4})$$

ou μ et ν sont respectivement la perméabilité et la reluctivité magnétique. On définit μ comme :

$$\mu(\mathbf{H}) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{H}) \quad (\text{III.5})$$

avec μ_0 la perméabilité du vide, et $\mu_r(\mathbf{H})$ la perméabilité relative du matériau. ν est définie comme l'inverse de μ . Il est possible d'introduire l'aimantation \mathbf{M} du matériau et de la lier avec l'induction et le champ magnétique via les relations :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{M} = (\mu_r(\mathbf{H}) - 1)\mathbf{H}, \quad \mathbf{M} = (\nu_0 - \nu(\mathbf{B}))\mathbf{B} \quad (\text{III.6})$$

où $\nu_0 = 1/\mu_0$ et $\nu(\mathbf{B}) = 1/\mu(\mathbf{H})$.

Les aimants permanents

Les aimants permanents sont utilisés la plupart du temps dans leur zone de fonctionnement linéaire, et ce sera toujours le cas dans ces travaux. Les aimants permanents ne sont pas des matériaux isotropes. En conséquence, leur loi de comportement est la suivante :

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{III.7})$$

où $[\mu]$ est le tenseur de la perméabilité magnétique et \mathbf{B}_r est l'induction rémanente de l'aimant permanent. Le tenseur de perméabilité magnétique à l'intérieur de l'aimant est décrit de la manière suivante :

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{//} & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

avec $\mu_{//}$ la perméabilité magnétique dans la direction parallèle à la direction d'aimantation et μ_{\perp} la perméabilité dans la direction perpendiculaire. Pour les aimants parfaits, la perméabilité dans les deux directions est égale à 1, sinon légèrement plus grands. On obtient pour l'aimantation :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_{//} - 1 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} - 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} + \begin{bmatrix} M_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

De manière compacte, on peut écrire les relations :

$$\mathbf{H} = [\nu] \mathbf{B} - \mathbf{H}_c, \quad \mathbf{M} = ([\mu] - 1)\mathbf{H} + \mathbf{M}_r, \quad \mathbf{M} = (\nu_0 - [\nu](\mathbf{B}))\mathbf{B} + \mathbf{H}_c \quad (\text{III.10})$$

Pour un aimant parfait, on a $\mathbf{M}_r = \mathbf{H}_c$.

A partir de ces développements, on peut écrire les lois de comportements pour n'importe quel matériau magnétique (aimant permanent et ferromagnétique ($\mathbf{H}_c = 0$)) :

$$\mathbf{H} = [\nu] \mathbf{B} - \mathbf{H}_c, \quad \mathbf{M} = ([\mu] - 1)\mathbf{H} + \mathbf{H}_c \quad (\text{III.11})$$

où $[\nu]$ et $[\mu]$ sont des scalaires pour les matériaux ferromagnétiques doux et des tenseurs pour les aimants.

III.1.c Les équations de Maxwell et potentiels magnétiques

Les équations de Maxwell sont les équations qui régissent l'ensemble des phénomènes de l'électromagnétisme d'un point de vue macroscopique. Elles s'écrivent de la manière suivante dans les milieux continus :

$$\text{équation de Maxwell Ampère} \quad -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \quad (\text{III.12})$$

$$\text{équation de Maxwell Faraday} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$\text{équation de Maxwell Flux} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\text{équation de Maxwell Gauss} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{III.15})$$

Dans ces équations, \mathbf{H} est le champ magnétique, \mathbf{E} est le champ électrique, \mathbf{B} est l'induction magnétique et \mathbf{D} est l'induction électrique. \mathbf{j} est la densité de courant et ρ est la densité volumique de charge électrique.

Simplifications

L'hypothèse des régimes quasi-statiques énoncée précédemment permet de simplifier les équations [III.12](#) et [III.13](#) en :

$$\text{équation de Maxwell Ampère quasi statique} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \quad (\text{III.16})$$

$$\text{équation de Maxwell Faraday quasi statique} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{III.17})$$

Cette hypothèse permet de découpler les phénomènes magnétiques et les phénomènes électriques. Cette thèse est consacrée à la résolution des équations [III.16](#) et [III.14](#).

Le potentiel vecteur magnétique

Les opérateurs différentiels présents dans les différentes équations de Maxwell permettent de mettre en évidence des potentiels magnétiques. Le premier potentiel que l'on peut mettre en valeur est le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} . En effet, on peut tirer de l'équation de Maxwell-Flux III.14 qu'il existe un potentiel \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{III.18})$$

qui satisfasse l'équation III.14 car :

$$\forall \mathbf{X}(x, y) \in \mathbb{R}, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0 \quad (\text{III.19})$$

Le choix du potentiel vecteur comme variable permet d'assurer rigoureusement la conservation du flux de \mathbf{B} .

Les potentiels scalaires magnétiques

Il est possible de décomposer le champ magnétique \mathbf{H} en la somme de deux composantes :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{red} \quad (\text{III.20})$$

On suppose dans cette décomposition que \mathbf{H}_0 est le champ créé par les sources dans le vide, et que le champ réduit \mathbf{H}_{red} est le champ créé par l'aimantation de la matière. On a donc $\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}_0$ et on obtient via III.16 que $\nabla \times \mathbf{H}_{red} = 0$. On peut conclure que \mathbf{H}_{red} dérive d'un potentiel scalaire φ_{red} que l'on appelle potentiel scalaire réduit :

$$\mathbf{H}_{red} = -\nabla \varphi_{red} \quad (\text{III.21})$$

Il est de fait possible de réécrire l'équation III.20 de la manière suivante :

$$\mathbf{H} + \nabla \varphi_{red} = \mathbf{H}_0 \quad (\text{III.22})$$

Il est aussi possible de mettre en évidence un potentiel scalaire source φ_0 tel que le champ source \mathbf{H}_0 dérive de ce potentiel en supposant que le domaine Ω_m est simplement connexe :

$$\mathbf{H}_0 = -\nabla \varphi_0 \quad (\text{III.23})$$

Cette expression n'est néanmoins valable qu'à l'extérieur des sources de courant. De plus, alors que le champ magnétique source \mathbf{H}_0 peut être aisément déterminé par la loi de Biot et Savart (de manière analytique pour différentes géométries simples d'inducteurs [29, 66, 67]), ces formules n'existent pas pour le potentiel scalaire source

créée par un inducteur. On utilise pour ce faire une résolution numérique du problème de minimisation :

$$\min_{\varphi_0} ((\nabla\varphi_0 + \mathbf{H}_0)^2) \quad (\text{III.24})$$

On peut utiliser pour cela la méthode des éléments finis dont la formulation faible associée au problème est :

$$\text{trouver } \varphi_0 \text{ tel que } \int_{\Omega_m} \nabla w_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi_0 \, d\Omega_m = - \int_{\Omega_m} \nabla w_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_0 \, d\Omega_m, \quad \forall w_n \quad (\text{III.25})$$

où les w_n sont les fonctions de forme nodales. En utilisant les relations [III.21](#) et [III.23](#), on obtient :

$$\mathbf{H} = -(\nabla\varphi_{red} + \nabla\varphi_0) \quad (\text{III.26})$$

Grâce à cette égalité, il est possible d'introduire un potentiel scalaire total φ tel que :

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi \quad (\text{III.27})$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{red} \quad (\text{III.28})$$

toujours dans le cas où le domaine Ω_m est simplement connexe (ce qui n'est pas toujours le cas).

III.2 Les formulations intégrales en 2D

Après avoir introduit les différentes grandeurs physiques mises en jeu dans le problème type, les relations entre elles et les équations qui régissent leurs comportements, nous allons maintenant présenter les différentes méthodes intégrales qui permettent de résoudre le problème type. Les premières méthodes intégrales présentées seront les méthodes intégrales de volume, puis nous introduiront ensuite le couplage élément-finis et méthode intégrale de frontière.

III.2.a Formulations intégrales de volume

De nombreuses versions des méthodes intégrales ont été développées en 3D au cours des dernières années [[16,17,37,60](#)], dépendant fortement du type d'inconnue sur laquelle la méthode est basée. Ces différentes formulations seront présentées dans leur version 2D dans ce chapitre en insistant sur leurs avantages et leurs inconvénients.

Point sur les notations intrinsèques à la 2D

Le fait de travailler en 2D entraîne une dégénérescence de certains des objets géométriques habituellement manipulés en 3D. Nous avons choisis dans cette thèse de conserver le sens "physique" des objets au dépend de leur sens "géométrique" :

- Un volume en 3D dégénère en surface en 2D. Nous continuerons néanmoins à utiliser la dénomination "élément volumique"
- Une facette en 3D se dégénère en 2D en une arête au sens géométrique du terme. Néanmoins, d'un point de vue physique, la grandeur intéressante lorsque l'on parle de facette est le flux à travers celle-ci. Nous continuerons à appeler facette une arête 2D à travers laquelle on considérera un flux.
- Dans le même temps, une arête 3D peut soit rester une arête en 2D (si elle est contenue dans le plan de projection) ou dégénérer en un point. Ces deux cas se produiront dans ces travaux et à chaque fois nous précisons à titre indicatif si l'arête est dégénérée en 2D ou non. Dans tous les cas, nous continuerons à parler d'arête même s'il s'agit d'arêtes dégénérées en point.

Certaines de ces formulations reposent sur des fonctions de forme des éléments de Whitney (fonctions de formes de facettes et d'arêtes). Ces fonctions de forme sont détaillées en annexe (A.1) pour ne pas alourdir la présentation des formulations dans le corps du document. Enfin, ces formulations reposent toutes sur l'intégration d'un noyau de Green 2D. Pour simplifier les équations, nous utiliserons la notation suivante :

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, G(\mathbf{r}) = \log \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right) \quad (\text{III.29})$$

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \nabla G(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} \quad (\text{III.30})$$

où \mathbf{r} est le vecteur reliant le point d'intégration \mathbf{s} au point \mathbf{P} (voir Figure III.2).

Méthode des moments magnétiques

La méthode des moments magnétiques [19] est la méthode intégrale de volume historique. Elle est basée sur l'expression intégrale du potentiel scalaire réduit φ_{red} en un point \mathbf{P} créé par le domaine Ω_m :

$$\varphi_{red}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \nabla G \, d\Omega_m \quad (\text{III.31})$$

L'équation III.22 couplée à III.31 permet d'obtenir :

$$\mathbf{H} - \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \nabla G \, d\Omega_m = \mathbf{H}_0 \quad (\text{III.32})$$

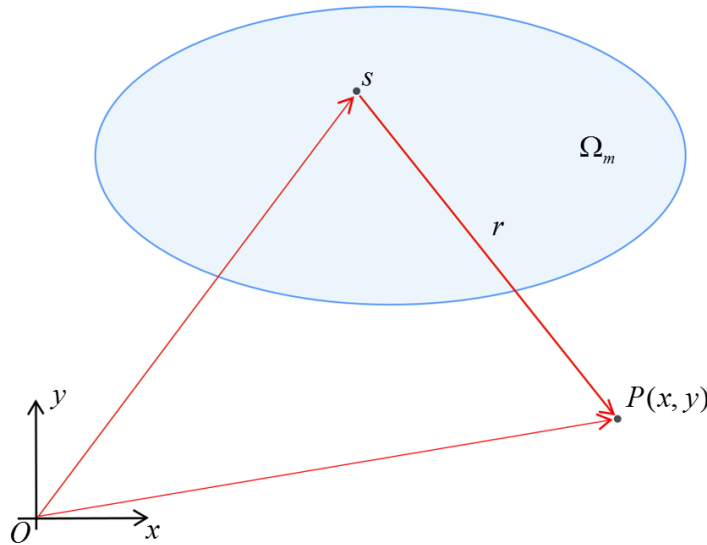


FIGURE III.2 – Notations utilisées pour la définition des noyaux de Green

En supposant les éventuels aimant parfaits ($\mathbf{H}_c = \mathbf{M}_r$) on peut décomposer \mathbf{M} en une partie inductive \mathbf{M}_{ind} et une partie d'aimantation rémanente \mathbf{M}_r telles que $\mathbf{M}_{ind} - \mathbf{M}_r = (\mu - 1)\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} - \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_m} \mathbf{M}_{ind} \cdot \nabla G \, d\Omega_m = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_m} \mathbf{M}_r \cdot \nabla G \, d\Omega_m \quad (\text{III.33})$$

En faisant l'hypothèse que l'aimantation est constante dans chaque élément du maillage, il est possible de permuter l'intégrale sur Ω_m et l'opérateur différentiel ∇ . L'application des opérateurs différentiels amène à l'équation intégrale de la méthode des moments magnétiques pour la magnéto-statique dans un matériau ferromagnétique en 2D :

$$\frac{\mathbf{M}_{ind}}{\mu_r(\mathbf{H}) - 1} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \frac{3(\mathbf{M}_{ind} \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_{ind}}{r^2} \, d\Omega_m = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \frac{3(\mathbf{M}_r \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_r}{r^2} \, d\Omega_m \quad (\text{III.34})$$

Plusieurs approches existent pour mettre en place le système d'équation à résoudre à partir de III.34. La première est appelée approche par collocation. Elle est la plus simple à implémenter et, dans le cas de la formulation en aimantation, consiste à affecter au barycentre de chaque élément du maillage une valeur discrète d'aimantation. On est alors en présence du problème :

trouver \mathbf{M}_{ind}^i tel que $\forall i \in [1, \dots, N_v]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}_{ind}^i}{\mu_r(\mathbf{H}) - 1} - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{\Omega_m} \frac{3(\mathbf{M}_{ind}^i \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_{ind}^i}{r^2} d\Omega_m = \\ \mathbf{H}_0^i - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{\Omega_m} \frac{3(\mathbf{M}_r^i \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_r^i}{r^2} d\Omega_m \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

où N_v est le nombre d'éléments présents dans la discrétisation du domaine.

Il est aussi possible de projeter et d'intégrer l'équation III.34 sur le domaine Ω_m à l'aide d'un ensemble de fonctions de pondération p_j ou $j \in [1, N_v]$. On obtient donc pour $j \in [1, N_v]$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \frac{p_j(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{ind}}{\mu_r(\mathbf{H}) - 1} d\Omega_m - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \int_{\Omega_m} p_j(\mathbf{r}) \left(\frac{3(\mathbf{M}_{ind} \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_{ind}}{r^2} \right) d\Omega_m d\Omega_m = \\ \int_{\Omega_m} p_j(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0 d\Omega_m - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \int_{\Omega_m} p_j(\mathbf{r}) \left(\frac{3(\mathbf{M}_r \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_r}{r^2} \right) d\Omega_m d\Omega_m \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

La seconde approche est dite de Galerkin si elle repose sur une projection à l'aide des fonctions de forme des éléments volumiques w_v définies par :

$$w_{vj}(\mathbf{r}) = 1 \text{ si } \mathbf{r} \in \text{l'élément numéro } j \quad (\text{III.37})$$

$$w_{vj}(\mathbf{r}) = 0 \text{ si } \mathbf{r} \notin \text{l'élément numéro } j \quad (\text{III.38})$$

Ces fonctions de forme sont utilisées pour discrétiser l'aimantation via :

$$\mathbf{M}_{ind} = \sum_{i=1}^{N_v} w_{vi} \mathbf{M}_{ind}^i \quad (\text{III.39})$$

La projection de Galerkin de l'équation III.34 amène finalement au problème :

trouver \mathbf{M}_{ind}^i tel que $\forall (i, j) \in [1, \dots, N_v]^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} \left[\int_{\Omega_m} \frac{w_{vi} w_{vj}}{\mu_r(\mathbf{H}) - 1} d\Omega_m - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} w_{vj} \int_{\Omega_m} \left(\frac{3(w_{vi} \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{w_{vi}}{r^2} \right) d\Omega_m d\Omega_m \right] \mathbf{M}_{ind}^i = \\ \int_{\Omega_m} w_{vj} \mathbf{H}_0 d\Omega_m - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} w_{vj} \int_{\Omega_m} \left(\frac{3(\mathbf{M}_r \cdot \mathbf{r})}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}_r}{r^2} \right) d\Omega_m d\Omega_m \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Cette approche plus lourde nécessitant une double intégration montre néanmoins de meilleurs résultats en terme de précision que l'approche par collocation [18]. La méthode des moments magnétiques, bien que fournissant des résultats très prometteurs présente de nombreux éléments limitants et inconvenients. On peut citer le fait

que l'inconnue \mathbf{M}_{ind} de cette formulation étant vectorielle, elle présente alors deux degrés de libertés par noeud. On est donc en présence d'un système à résoudre de taille $(2N) * (2N)$, ce qui engendre une forte consommation de mémoire ainsi qu'une durée de résolution plus longue. On peut de plus ajouter que la matrice du système devient singulière lorsque la perméabilité du matériau est infinie.

Enfin, on remarquera que l'on travaille ici avec l'aimantation qui est une grandeur "peu contrainte" par des lois de conservations physiques, contrairement au champ magnétique dont la circulation sur tout contour fermé doit être nulle si aucune source n'est présente dans le contour, ou à l'induction magnétique dont le flux à travers toute surface fermée doit être conservé (ces conditions sont imposées par les équations de Maxwell-Ampère III.16 et Maxwell-Flux III.14). Des méthodes intégrales de volume ont donc été développées avec des choix d'inconnues ayant des contraintes physiques plus fortes et des espaces fonctionnels adaptés pour essayer d'augmenter l'efficacité de la méthode. L'équation de base à partir de laquelle toutes ces nouvelles méthodes ont éclosées est l'équation III.32 rappelée ici :

$$\mathbf{H} - \frac{1}{2\pi} \nabla \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \nabla G \, d\Omega_m = \mathbf{H}_0 \quad (\text{III.41})$$

Méthode basée sur le champ magnétique

En utilisant l'équation de base III.41 ainsi que la loi de comportement liant le champ magnétique à l'aimantation, on obtient aisément :

$$\mathbf{H} - \frac{1}{2\pi} \nabla \left[\int_{\Omega_m} (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \mathbf{H} \cdot \nabla G(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \right] = \mathbf{H}_0 \quad (\text{III.42})$$

L'espace fonctionnel le plus adapté à la formulation en champ magnétique repose sur une discrétisation du champ magnétique sur les arêtes du maillage [15] : les propriétés basiques des éléments d'arête (conservation de la composante tangentielle de l'inconnue) imposent un fort degré de régularité à la solution. Dans notre cas 2D, il s'agit bien de réelles arêtes et non d'arêtes dégénérées en points : parler de conservation de la composante tangentielle de l'inconnue sur un point n'aurait pas de sens. On approxime donc le champ à l'aide des fonctions de forme d'arête \mathbf{w}_a décrites en annexe :

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{w}_{ai} H_i \quad (\text{III.43})$$

où H_i est la circulation du champ magnétique le long de l'arête i . Sous la condition que le domaine soit simplement connexe, on peut démontrer que toutes les projections du champ magnétique ne sont pas indépendantes [41]. On peut donc réduire le

nombre d'inconnues en imposant que la circulation de \mathbf{H} sur n'importe quel contour fermé contenu dans le domaine Ω_m soit nulle. D'un point de vue topologique, les seuls degrés de liberté linéairement indépendants sont les arêtes appartenant à un arbre du maillage contenant tous les noeuds mais ne fermant pas de contour dans Ω_m [41]. Le choix de cet arbre n'est pas unique [15]. L'équation III.42 peut être mise sous la forme d'un système linéaire :

$$(\mathcal{A} + \mathcal{I})\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \quad (\text{III.44})$$

où \mathbf{h} est le vecteur des composantes tangentielles du champ magnétique sur les arêtes de l'arbre de jauge et \mathbf{h}_0 est le vecteur des composantes tangentielles du champ source sur les arêtes de l'arbre de jauge. La matrice \mathcal{I} est la matrice identité et \mathcal{A} est la matrice d'interaction entre les arêtes de l'arbre de jauge. En considérant les noeuds α et β de l'arête i , on peut exprimer H_i comme :

$$H_i = \frac{\varphi_\beta - \varphi_\alpha}{l_i} \quad (\text{III.45})$$

où l_i est la longueur de l'arête i . On peut utiliser le théorème de la divergence pour modifier le potentiel scalaire équation III.31 :

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^T} \chi(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) G(\mathbf{r}) d\Gamma^T \quad (\text{III.46})$$

La contribution de l'arête i ayant un champ tangentiel H_i sur l'arête k entre les noeuds α et β peut être écrite comme :

$$\gamma_{ki} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_i^T} H_i \chi(\mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{n}) G(\mathbf{r}_\beta) d\Gamma_i^T - \int_{\Gamma_i^T} H_i \chi(\mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{n}) G(\mathbf{r}_\alpha) d\Gamma_i^T \right) \quad (\text{III.47})$$

Il faut noter que χ n'étant pas forcément constant dans tout le domaine (si l'on est en fonctionnement non linéaire par exemple), le domaine sous l'intégrande est bel et bien Γ^T et pas Γ^E (on considère la susceptibilité constante par élément). On peut ensuite écrire la condition de jauge précédemment décrite d'une manière discrète :

$$\sum_k H_k l_k = 0 \quad (\text{III.48})$$

où l'ensemble des arêtes k forment un contour fermé dans Ω_m . On peut finalement écrire pour chaque arête i de l'arbre de jauge :

$$H_i = \frac{1}{l_i} \left(-\sum_p H_p l_p \right) \quad (\text{III.49})$$

où la somme sur p est étendue à toutes les branches de l'arbre de jauge connectées à l'arête i . De cette manière, on peut exprimer le champ créé par l'arête i sur l'arête k de l'arbre via :

$$\gamma_{ki}H_i = \sum_p \left(-\frac{l_p}{l_i} \gamma_{ki} \right) H_p = \sum_p \mathcal{A}_{kp} H_p \quad (\text{III.50})$$

où les coefficients \mathcal{A}_{kp} sont les coefficients de la matrice \mathcal{A} présentée en équation III.44.

Méthode basée sur le potentiel scalaire

Cette formulation repose sur la décomposition du potentiel total introduit via l'équation III.27. Pour fonctionner, le domaine Ω_m doit être simplement connexe. Si ce n'est pas le cas, il est possible d'introduire des coupures pour travailler sur une somme de domaines simplement connexes [18]. On peut repartir des équations III.41 et III.27 pour obtenir :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \chi \nabla \varphi \cdot \nabla G(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \quad (\text{III.51})$$

Une approximation du potentiel scalaire est possible à l'aide des fonctions de forme nodales w_{ni} et des degrés de libertés de φ associés aux noeuds du maillage, et notés φ_i :

$$\varphi = \sum_{i=1}^N w_{ni} \varphi_i \quad (\text{III.52})$$

Cette manière de discrétiser le potentiel scalaire permet de respecter les conditions imposées par l'équation de Maxwell-Ampère. En effet, prendre le gradient d'une quantité nodale permet d'obtenir une quantité sur un espace fonctionnel d'arête. On aura alors une régularité aussi forte avec une formulation en potentiel scalaire discrétisée sur un espace fonctionnel nodal que pour une formulation en champ magnétique discrétisée sur un espace fonctionnel d'arête. L'approche par collocation centrée sur les noeuds du maillage donne le problème :

trouver les φ_j tels que $\forall (i, j) \in [1, \dots, N]^2$:

$$\sum_{j=1}^N \left[w_{nj}(\mathbf{r}_i) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \chi \nabla w_{nj}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}_i) \, d\Omega_m \right] \varphi_j = \varphi_0(\mathbf{r}_i) \quad (\text{III.53})$$

En posant $\boldsymbol{\varphi}$ le vecteur des degrés de liberté φ_i , on peut réécrire le problème sous la forme d'un système matriciel :

trouver $\boldsymbol{\varphi}$ tel que :

$$(\mathcal{I} - [\mathcal{A}(\chi)])\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (\text{III.54})$$

avec \mathcal{I} la matrice identité et

$$\mathcal{A}(\chi)_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} \chi \nabla w_{nj}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}_i) \, d\Omega_m \quad (\text{III.55})$$

Une approche par la méthode de Galerkin est aussi envisageable en utilisant les fonctions de forme nodales comme fonction de test. Le problème devient alors :

trouver les φ_j tels que $\forall (i, j) \in [1, \dots, N]^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega_m} w_{ni}(\mathbf{r}) w_{nj}(\mathbf{r}) \, d\Omega_m - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} w_{ni}(\mathbf{r}) \left(\int_{\Omega_m} \chi \nabla w_{nj}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \right) \, d\Omega_m \right] \varphi_j \\ = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{ni} \varphi_0(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \quad (\text{III.56}) \end{aligned}$$

Ce problème peut aussi être mis sous forme d'un système matriciel :

trouver $\boldsymbol{\varphi}$ tel que :

$$(\mathcal{R}^\varphi - [\mathcal{L}^\phi(\chi)]) \boldsymbol{\varphi} = \mathcal{F}^\phi \quad (\text{III.57})$$

avec

$$\mathcal{R}_{ij}^\varphi = \int_{\Omega_m} w_{ni}(\mathbf{r}) w_{nj}(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \quad (\text{III.58})$$

$$\mathcal{L}^\varphi(\chi)_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_m} w_{ni}(\mathbf{r}) \left(\int_{\Omega_m} \chi \nabla w_{nj}(\mathbf{r}) \cdot \nabla G(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \right) \, d\Omega_m \quad (\text{III.59})$$

$$\mathcal{F}^\varphi = \int_{\Omega_m} w_{ni}(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) \, d\Omega_m \quad (\text{III.60})$$

Cette formulation jouit de sa simplicité d'implémentation, malgré la nécessité d'une résolution en amont pour obtenir le terme φ_0 . Néanmoins, l'intégration de la dérivée du noyau de Green dans la matrice \mathcal{L}^φ peut poser des difficultés pour les termes d'interactions proches, la singularité en $\frac{1}{r}$ étant plus forte que celle en $\log(\frac{1}{r})$ du noyau de Green simple. Une stratégie d'intégration analytique serait à mettre en place pour calculer correctement ces termes.

Formulation en induction magnétique

Une autre grandeur que l'on peut utiliser est l'induction magnétique \mathbf{B} . Elle est contrainte physiquement par l'équation de Maxwell-Flux qui lui impose un flux conservatif à travers toute surface fermée en 3D, et à travers tout contour fermé en 2D. Il est donc bienvenu d'utiliser une discrétisation de l'induction sur les facettes du maillage car l'espace fonctionnel de facettes respecte naturellement la conservation

du flux [10]. On approxime donc \mathbf{B} à l'aide des éléments de facette du premier ordre \mathbf{w}_f et du flux magnétique Φ à travers les facettes :

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{w}_{fi} \Phi_i \quad (\text{III.61})$$

où Φ_i est le flux magnétique à travers la facette i . L'utilisation de la loi de comportement liant \mathbf{H} à \mathbf{B} III.4, ainsi que la relation III.22, on peut écrire :

$$\nu(\mathbf{B})\mathbf{B} + \nabla\varphi_{red} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c \quad (\text{III.62})$$

Une projection de Galerkin de l'équation III.62 sur les fonctions de forme de facettes donne :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \nu(\mathbf{B})\mathbf{B} d\Omega_m + \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (\text{III.63})$$

ce qui, en injectant III.61 dans l'équation précédente amène à :

$$\sum_{j=1}^{N_f} \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B})\mathbf{w}_j d\Omega_m \right] \Phi_j + \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (\text{III.64})$$

En définissant Φ comme le vecteur des flux de facette, on peut réécrire III.64 en un système matriciel :

$$\mathcal{R}^B \Phi + \mathcal{K} = \mathcal{F}^B \quad (\text{III.65})$$

où \mathcal{R} est une matrice de type élément finis de facette et \mathcal{F} est le vecteur second membre :

$$\mathcal{R}_{ij}^B = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B})\mathbf{w}_j d\Omega_m \quad (\text{III.66})$$

$$\mathcal{F}_i^B = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (\text{III.67})$$

$$\mathcal{K}_i = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_m \quad (\text{III.68})$$

où $(i, j) \in [1, \dots, N_f]$, avec N_f le nombre de facettes totales du domaine Ω_m . Intéressons nous au terme \mathcal{K}_i . Pour la fonction de forme de la facette i on a :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_1} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_2 \quad (\text{III.69})$$

où Ω_1 est l'élément numéro 1 contenant la facette i , et Ω_2 est l'élément 2 (figure III.3, image gauche). Le théorème de la divergence appliqué à III.69 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla\varphi_{red} d\Omega_m &= \underbrace{\int_{\partial\Omega_1} \varphi_{red} \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma^E + \int_{\partial\Omega_2} \varphi_{red} \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma^E}_{(1)} \\ &\quad - \underbrace{\left\{ \int_{\Omega_1} \varphi_{red} \nabla \cdot \mathbf{w}_{fi} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varphi_{red} \nabla \cdot \mathbf{w}_{fi} d\Omega_2 \right\}}_{(2)} \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

La conservation de φ_{red} à travers la facette i et les propriétés des fonctions de forme

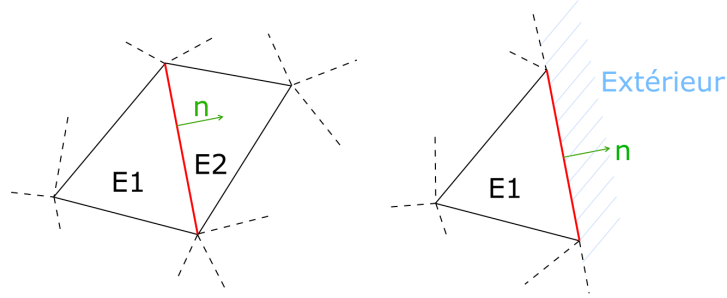


FIGURE III.3 – Facette interne au domaine (gauche) et externe (droite)

de facette :

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_{fi} = +\frac{1}{S_1} \text{ dans } \Omega_1 \text{ car la normale est sortante de l'élément 1} \quad (\text{III.71})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_{fi} = -\frac{1}{S_2} \text{ dans } \Omega_2 \text{ car la normale est entrante dans l'élément 2} \quad (\text{III.72})$$

annulent le terme (1) de l'équation précédente, et transforment le terme (2) en :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla \varphi_{red} d\Omega_m = -\frac{1}{S_1} \int_{\Omega_1} \varphi_{red} d\Omega_1 + \frac{1}{S_2} \int_{\Omega_2} \varphi_{red} d\Omega_2 \quad (\text{III.73})$$

où S_i correspond à la surface de l'élément i . On obtient donc en notant $\bar{\varphi}_1$ la valeur moyenne de φ sur l'élément $e1$:

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla \varphi_{red} d\Omega_m = \Delta\varphi_{int} = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \quad (\text{III.74})$$

Si la facette est externe au domaine (figure III.3, image droite), on obtient un résultat similaire :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla \varphi_{red} d\Omega_m = \Delta\varphi_{int} = \bar{\varphi}_\Gamma - \bar{\varphi}_1 \quad (\text{III.75})$$

où $\bar{\varphi}_\Gamma$ est la valeur moyenne du potentiel sur la facette :

$$\bar{\varphi}_\Gamma = \frac{1}{l} \int_\Gamma \varphi_{red} d\Gamma \quad (\text{III.76})$$

On peut représenter ces différences de potentiel via le maillage dual que l'on peut trouver figure III.4. On aboutit donc au système d'équation :

$$\mathcal{R}^B \Phi + \Delta\varphi_{int} = \mathcal{F}^B \quad (\text{III.77})$$

où $\Delta\varphi_{int}$ est la différence de potentiel moyen entre les éléments (ou entre élément

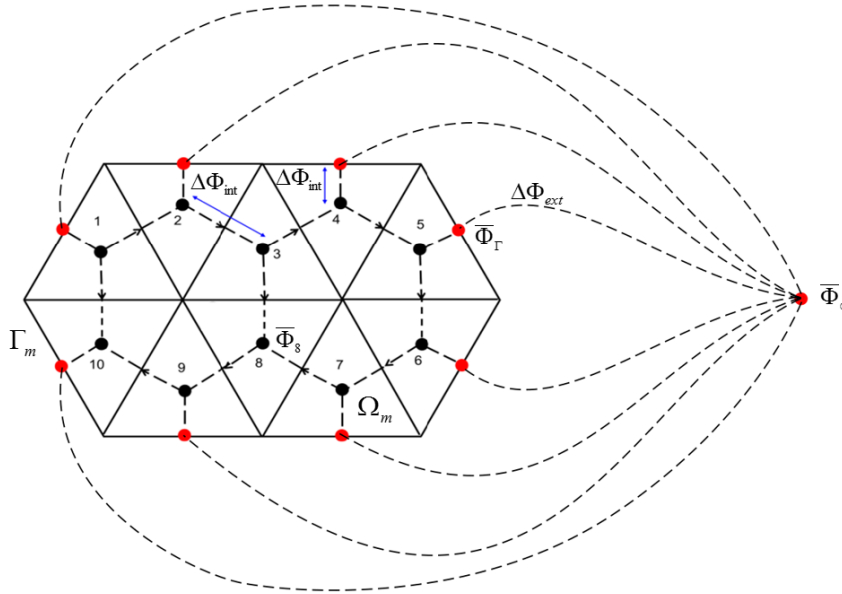


FIGURE III.4 – Maillage dual en prenant les éléments du maillage primal comme des noeuds et les facettes du maillage primal comme arêtes

et facette extérieure). On peut compléter ces équations en exprimant les valeurs du potentiel des facettes extérieures. On suppose que le potentiel à l'infini φ_∞ est égal à 0 :

$$\Delta\varphi_{ext_i} = \bar{\varphi}_{\Gamma_i^E} - \varphi_\infty \quad (\text{III.78})$$

soit, à l'aide du théorème de la divergence, de la définition de $\bar{\varphi}_{\Gamma_i^E}$ et de III.32 :

$$\Delta\varphi_{ext_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma^T} \delta M_n G(\mathbf{r}) \, d\Gamma^T \, d\Gamma_i^E \quad (\text{III.79})$$

où δM_n exprime le saut d'aimantation normal à la facette considérée. δM_n s'exprime selon qu'on soit sur une facette interne ou externe comme :

$$\delta M_n = (\nu_2 - \nu_1)B_n + (H_{cn1} - H_{cn2}) \quad \text{dans le cas d'une facette interne} \quad (\text{III.80})$$

$$\delta M_n = (\nu_0 - \nu_1)B_n + (H_{cn1}) \quad \text{dans le cas d'une facette externe} \quad (\text{III.81})$$

On obtient donc une expression finale pour $\Delta\varphi_{ext}$:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ext_i} = & -\frac{1}{2\pi l_i} \int_{\Gamma_i^E} \sum_{j=1}^{N_a} \left\{ \int_{\Gamma_j^T} (\nu_2 - \nu_1) \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{n} G(\mathbf{r}) \, d\Gamma_j^T \right\} \phi_j \, d\Gamma_i^E \\ & + \frac{1}{2\pi l_i} \int_{\Gamma_i^E} \sum_{j=1}^{N_a} \left\{ \int_{\Gamma_j^T} (H_{cn2} - H_{cn1}) G(\mathbf{r}) \, d\Gamma_j^T \right\} \, d\Gamma_i^E \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Cette expression peut aussi s'exprimer sous la forme d'un système linéaire. On aboutit donc finalement à deux systèmes linéaires :

$$\mathcal{R}^B \Phi + \Delta\varphi_{int} = \mathcal{F}^B \quad (\text{III.83})$$

$$\mathcal{L}^B \Phi + \Delta\varphi_{ext} = \mathcal{G}^B \quad (\text{III.84})$$

où \mathcal{R}^B et \mathcal{F}^B restent ceux définis équation III.65 et :

$$\mathcal{L}_{ij}^B = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\nu_j}{l_i l_j} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^T} G(r) d\Gamma_j^T d\Gamma_i^E \quad (\text{III.85})$$

$$\mathcal{G}_i^B = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i} \sum_{j=1}^{N_f} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^T} G(r) \delta H_{cnj} d\Gamma_j^T d\Gamma_i^E \quad (\text{III.86})$$

En considérant le maillage dual (équivalent à un circuit), on peut obtenir que

$$\oint_{\mathcal{C}} \Delta\varphi d\mathcal{C} = 0 \quad (\text{III.87})$$

en écrivant la seconde loi de Kirschhoff (la différence de potentiel est nulle sur un contour fermé). Une écriture matricielle de cette loi amène à :

$$\mathcal{M}\Delta\varphi = 0 \quad (\text{III.88})$$

avec \mathcal{M} une matrice des mailles indépendantes, et $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{int} + \Delta\varphi_{ext}$ la tension aux bornes du circuit dual. On obtient de cette loi la relation liant $\Delta\varphi_{ext}$ et $\Delta\varphi_{int}$:

$$\mathcal{M}\Delta\varphi_{int} = -\mathcal{M}\Delta\varphi_{ext} \quad (\text{III.89})$$

ce qui conduit en réinjectant III.83 dans III.89 à :

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}^B + \mathcal{L}^B)\mathcal{M}^T \Phi_m = \mathcal{M}(\mathcal{F}^B + \mathcal{G}^B) \quad (\text{III.90})$$

où Φ_m est le flux de mailles défini par $\Phi = \mathcal{M}^T \Phi_m$.

On peut introduire l'opérateur $\Theta(\mathcal{X}, a, b) : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ est défini comme :

$$\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \forall (a, b) \in (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l), \Theta(\mathcal{X}, a, b) = \tilde{\mathcal{X}} \text{ avec } \tilde{\mathcal{X}}_{ij} = \frac{1}{a_i b_j} \mathcal{X}_{ij} \quad (\text{III.91})$$

On constate que la matrice \mathcal{L}^B peut donc être exprimée comme :

$$\mathcal{L}^B = \Theta(\mathcal{L}_0^B, a, b) \quad (\text{III.92})$$

avec

$$(\mathcal{L}_0^B)_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^T} G(r) \, d\Gamma_j^T \, d\Gamma_i^E \quad (\text{III.93})$$

$$a = l^E \quad (\text{III.94})$$

$$b \text{ est tel que : } b_j = \frac{l_j^T}{\delta\nu_j} \quad (\text{III.95})$$

$$(\text{III.96})$$

où l^E est le vecteur des longueurs des faces externes, l^T vecteur des longueurs de toutes les faces et $\delta\nu$ le vecteur des sauts de reluctivité. Cette formulation présente l'avantage d'avoir une matrice intégrale de taille réduite puisqu'on ne calcule que les interactions entre les faces externes et les faces totales du maillage. La taille de la matrice d'interaction est donc $N_{f_E} \times N_{f_T}$. Cette taille est bien inférieure à celle de la matrice intégrale de la formulation en potentiel scalaire \mathcal{L}^φ . Il est néanmoins nécessaire de calculer une matrice des mailles indépendantes.

Formulation en potentiel vecteur

La dernière formulation intégrale de volume présentée dans ce manuscrit est basée sur une interpolation du potentiel vecteur sur les arêtes. Il s'agit cette fois ci d'arêtes dégénérées en points en 2D auxquels sont attribués une valeur scalaire pour le potentiel vecteur. En effet, en 2D on peut écrire l'induction magnétique dérivant d'un potentiel comme :

$$\mathbf{B}(x, y) = \nabla \times A = \left(-\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (\text{III.97})$$

où A est le potentiel vecteur dégénéré en valeur scalaire sur des points en 2D. On notera que cette expression 2D du potentiel scalaire vérifie bien l'équation de Maxwell-Flux :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 0 \quad (\text{III.98})$$

car d'après le théorème de Schwarz, si le champ A est suffisamment régulier (deux fois dérivable), on peut intervertir les deux dérivées. On peut donc conclure de [III.98](#) que cette version du potentiel vecteur en 2D est valide et permet de vérifier automatiquement l'équation de Maxwell-Flux [III.14](#).

Il est possible d'exploiter les travaux développés dans le paragraphe précédent pour mettre en place cette formulation : en effet, on peut créer des opérateurs différentiels

discrets sous forme de matrices d'incidence qui lient les différents types d'éléments. On a :

$$\begin{aligned} [\nabla \times] &= \text{matrice d'incidence face} \rightarrow \text{arête} \\ [\nabla \cdot] &= \text{matrice d'incidence cellule} \rightarrow \text{face} \\ [\nabla] &= \text{matrice d'incidence arête} \rightarrow \text{noeuds} \end{aligned}$$

Les relations classiques de l'analyse vectorielles sont valides pour ces opérateurs discrets : on a donc $[\nabla \cdot][\nabla \times] = [0]$ et $[\nabla \times]^T[\nabla \cdot]^T = [0]$. Sur le maillage primal, on peut écrire que le vecteur des flux est égal à l'opérateur discret rotationnel multiplié par les potentiels vecteurs : $\Phi = [\nabla \times] \mathbf{A}$. Sur le maillage dual on peut écrire [11] :

$$\Delta \varphi = [\nabla \cdot]^T \bar{\varphi} \quad (\text{III.99})$$

On peut donc écrire :

$$[\nabla \times]^T \Delta \varphi = [\nabla \times]^T [\nabla \cdot]^T \bar{\varphi} = 0 \quad (\text{III.100})$$

Le lecteur avisé remarquera que ce n'est pas tant le respect des lois de Kirschhoff que le fait de trouver une matrice \mathcal{M} telle que $\mathcal{M} \Delta \varphi = 0$ qui est importante dans la mise en place de la formulation en induction. La matrice $[\nabla \times]^T$ remplit bien ces conditions et on peut donc écrire une formulation en A :

$$[\nabla \times]^T (\mathcal{R}^B + \mathcal{L}^B) [\nabla \times] \mathbf{A} = [\nabla \times]^T (\mathcal{F}^B + \mathcal{G}^B) \quad (\text{III.101})$$

où les matrices \mathcal{R}^B , \mathcal{L}^B , \mathcal{F}^B et \mathcal{G}^B sont décrites dans le paragraphe précédent.

La méthode en A présente les mêmes avantages que la méthode en \mathbf{B} sans en avoir les inconvénients : en effet, une matrice des mailles indépendantes n'est pas à rechercher et on utilise à la place une matrice d'incidence. Le potentiel scalaire est défini à une constante près dans chaque partie connexe (rotor, stator).

III.2.b Les couplages FEM-BEM

Une autre manière d'utiliser les méthodes intégrales est de réaliser un couplage avec la méthode des éléments finis. La formulation ci dessous présente un couplage entre des éléments finis d'arête et une méthode intégrale de frontière. Dans un premier temps, la mise en place des équations dans le domaine ferromagnétique est présentée, puis dans un second temps les équations dans l'air seront discutées. On pourra ensuite mettre en place le couplage de ces équations.

Équations dans le domaine ferro-magnétique

L'équation III.16 permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nabla \times \mathbf{H} d\Omega_m = 0 \text{ car } J_s = 0 \text{ dans } \Omega_m \quad (\text{III.102})$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$\underbrace{\int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{H} d\Omega_m}_{T1} - \underbrace{\int_{\Omega_m} \nabla \cdot (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{H}) d\Omega_m}_{T2} = 0 \quad (\text{III.103})$$

En appliquant le théorème de la divergence au terme $T2$ et en utilisant la relation III.22, on peut écrire :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \cdot (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{H}) d\Omega_m = \underbrace{\int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{n} d\Gamma^E}_{T3} + \underbrace{\int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times (-\nabla \varphi_{red})) \cdot \mathbf{n} d\Gamma^E}_{T4} \quad (\text{III.104})$$

où $T3$ est un terme source dû aux sources, et $T4$ peut être modifié en :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times \nabla \varphi_{red}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma^E &= \int_{\Gamma^E} (\nabla \varphi_{red} \times \mathbf{w}_{fi}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma^E \\ &= \int_{\Gamma^E} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{n} \varphi_{red} d\Gamma^E \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

On peut finalement écrire la relation qui lie A dans Ω_m à φ_{red} sur Γ^E :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega_m + \int_{\Gamma^E} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{n} \varphi_{red} d\Gamma^E = \\ \int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_0 d\Gamma^E + \int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{H}_c d\Omega_m \end{aligned} \quad (\text{III.106})$$

Équations dans l'air

L'idée est de résoudre l'équation de Laplace en transformant l'intégrale de volume dans Ω_{air} en une intégrale de surface sur Γ^E . On peut donc obtenir grâce à la troisième identité de Green [1] :

$$c\varphi = \int_{\Gamma^E} \left(\nabla G(\mathbf{r})\varphi - G(\mathbf{r}) \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}_0 \right) \cdot \mathbf{n} \right) d\Gamma^E \quad (\text{III.107})$$

où c est l'angle solide vu de la frontière Γ^E au point de calcul. En utilisant une interpolation d'ordre zéro (le potentiel et l'induction sont constants sur chaque élément de Γ^E), on peut écrire III.107 comme [7] :

$$\mathcal{T}\Phi + \mathcal{H}\varphi_{red} = \mathcal{T}^*\mathcal{S} \quad (\text{III.108})$$

où Φ est le flux magnétique passant à travers une facette et avec :

$$\mathcal{T}_{ij} = \nu_0 \frac{1}{l_j} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^E} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^E d\Gamma_i^E \quad (\text{III.109})$$

$$\mathcal{T}^*_{ij} = l_j \mathcal{T}_{ij} \quad (\text{III.110})$$

$$\mathcal{H}_{ij} = \int_{\Gamma_i^E} \left(c_{ii} - \int_{\Gamma_j^E} \nabla G(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_j^E \right) d\Gamma_i^E \quad (\text{III.111})$$

$$\mathcal{S}_i = \int_{\Gamma_i^E} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i^E \quad (\text{III.112})$$

D'une manière analogue à la formulation intégrale de volume en A d'arête, il est possible de relier le flux à travers les facettes aux potentiels sur les arêtes via un opérateur rotationnel discret $[\nabla \times]$ tel que :

$$\Phi = [\nabla \times] A \quad (\text{III.113})$$

Couplage des équations

Nous avons donc le double système d'équations :

$$\begin{cases} \mathcal{M}A + \mathcal{B}\varphi_{red} = \mathcal{Q} \\ \mathcal{T}[\nabla \times]A + \mathcal{H}\varphi_{red} = \mathcal{T}^* \mathcal{S} \end{cases} \quad (\text{III.114})$$

avec :

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega_m \quad (\text{III.115})$$

$$\mathcal{B}_{ij} = \int_{\Gamma_i^E} \nabla \times \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i^E \quad (\text{III.116})$$

$$\mathcal{Q}_i = \int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_0 d\Gamma^E + \int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{H}_c d\Omega_m \quad (\text{III.117})$$

par ailleurs, en remarquant que :

$$\Phi = [\nabla \times] A = \sum_{j=1}^{N_a} \int_{\Gamma^E} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma^E A_j \quad (\text{III.118})$$

on constate que :

$$\mathcal{B}_{jk} = \int_{\Gamma_k^E} \nabla \times \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} d\Gamma_k^E = [\nabla \times]_{kj} \quad (\text{III.119})$$

$$\text{soit } \mathcal{B} = [\nabla \times]^T \quad (\text{III.120})$$

on obtient donc le système matriciel final :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathcal{M} & & \\ & & & \\ \hline & & & [\nabla \times]^T \\ & & & \\ \hline 0 & \mathcal{T}[\nabla \times] & & \mathcal{H} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \\ \\ \varphi_{red} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{Q} \\ \\ \\ \mathcal{T}^* \mathcal{S} \end{array} \right\}$$

On peut noter que la première partie du terme \mathcal{Q} ne nécessite qu'une intégration sur les frontières du domaine. Néanmoins, il est possible de le calculer de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma^E} (\mathbf{w}_{fi} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_0 d\Gamma^E = \int_{\Omega_m} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{H}_0 d\Omega_m \quad (\text{III.121})$$

qui permet d'obtenir un système d'équations sur A "compatible" [56] et permet d'améliorer la convergence.

III.3 Gestion de la non linéarité

Méthode de Newton-Raphson

Dans le cas de figure où la relation liant \mathbf{B} à \mathbf{H} n'est pas linéaire III.4, une résolution itérative est nécessaire pour atteindre la bonne solution. Une méthode usuelle est la méthode de Newton-Raphson qui permet de rechercher le zéro d'une fonction de plusieurs variables \mathbf{F} supposée dérivable :

$$\text{trouver le vecteur } \mathbf{x} \text{ tel que } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{III.122})$$

Un développement de \mathbf{F} en série de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{F}(\mathbf{y}) + \mathcal{J}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{III.123})$$

avec $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ la matrice jacobienne de la fonction \mathbf{F} définie comme :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (\text{III.124})$$

Une approximation de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ est donc :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.125})$$

On peut donc construire une suite récurrente pour atteindre le zéro de la fonction \mathbf{F} de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 & = & \mathbf{x}_0 \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}^k)\delta\mathbf{x}^k & = & -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} & = & \mathbf{x}^k + \delta\mathbf{x}^k, \quad \forall k \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.126})$$

où \mathbf{x}_0 est un vecteur quelconque définissant la valeur initiale de la suite récurrente. Cette suite récurrente est stoppée lorsqu'un critère d'arrêt est atteint. On choisit dans ces travaux un arrêt du processus itératif lorsque $\|\delta\mathbf{x}^k\| < 1.e^{-4}$: c'est le choix qui est fait par défaut dans le logiciel Flux qui nous sert de référence. De plus, dans notre contexte de pré-dimensionnement ce niveau de précision nous suffit (comme on pourra le constater par la suite).

Application aux formulations de la magnéto-statique

Toutes les formulations présentées peuvent être mises sous la forme d'un système linéaire du type $\mathcal{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$. La matrice jacobienne d'un système de ce type est la matrice \mathcal{Q} . On a donc :

- Pour la formulation en potentiel scalaire, la jacobienne est définie par $\mathcal{I} - \mathcal{A}(\chi)$ où \mathcal{I} et $\mathcal{A}(\chi)$ sont définies III.55 dans le cas où on utilise une approche par collocation. On peut constater que la matrice intégrale \mathcal{A} est à recalculer à chaque itération car elle dépend de χ .
- La jacobienne de la formulation induction est $\mathcal{M}(\mathcal{R}^B + \mathcal{L}^B)\mathcal{M}^T$ où les matrices sont définies par les équations III.66 et III.85. Seule la matrice de type éléments finis est à réintégrer à chaque itération de Newton-Raphson. En effet, il suffit d'appliquer l'opérateur Θ à la matrice \mathcal{L}_0^B préalablement stockée avec un vecteur des sauts de reluctivités mis à jour :

$$\mathcal{L}^B = \Theta(\mathcal{L}_0^B, l^{Ext}, \frac{l^{Tot}}{\delta\nu^k}) \quad (\text{III.127})$$

où $\delta\nu^k$ est le vecteur des sauts de reluctivité entre éléments calculé à l'itération k . Cela n'est vrai que lorsque la reluctivité est considérée constante par éléments (ce qui est vrai pour notre méthode avec des éléments triangulaires, mais faux si on utilise un maillage composé de quadrangles).

- La formulation en potentiel vecteur étant construite sur les mêmes fondations que la formulation en induction, on peut en tirer les mêmes conclusions.
- pour terminer, la matrice Jacobienne de la formulation couplée FEM-BEM est la matrice décrite équation III.2.b. La seule partie à réintégrer à chaque itération est la matrice \mathcal{M} qui est de type éléments finis et qui dépend de la reluctivité.

III.4 Premières conclusions

Les avantages et inconvénients des différentes méthodes intégrales de volume sont résumés dans la table III.1. On constate un net avantage pour les formulations en \mathbf{A} et en \mathbf{B} au détriment de celles en \mathbf{H} et ϕ qui nécessitent plus de mémoire et de temps d'assemblage du système (taille de la matrice intégrale plus importante), ainsi qu'un noyau à intégrer plus complexe (∇G au lieu de G). De plus leur convergence est moins favorable que pour les méthodes en induction et en potentiel vecteur à cause de l'exploitation d'une courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ au lieu d'une courbe $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Enfin, dans le cas non linéaire, la matrice intégrale est entièrement à réintégrer à chaque itération, processus extrêmement coûteux en temps de calcul.

TABLE III.1 – Tableau récapitulatif

Méthode	\mathbf{M}	\mathbf{H}	ϕ	\mathbf{B}	\mathbf{A}
Nombre d'inconnues	$2N_e$	N_a	N_n	N_f	N_a
Type de singularité	∇G	∇G	∇G	G	G
Calcul du champ source	direct via \mathbf{H}_0	direct via \mathbf{H}_0	réso EF pour ϕ_0	direct via \mathbf{H}_0	direct via \mathbf{H}_0
Taille de la MI	$(2N_e)^2$	$N_a * N_a^{Tree}$	N_n^2	$N_f^{\Gamma^E} \times N_f^{\Gamma^T}$	$N_f^{\Gamma^E} \times N_f^{\Gamma^T}$
Convergence	lente $\mathbf{B}(\mathbf{H})$	lente $\mathbf{B}(\mathbf{H})$	lente $\mathbf{B}(\mathbf{H})$	rapide $\mathbf{H}(\mathbf{B})$	rapide $\mathbf{H}(\mathbf{B})$
Gestion de la non linéarité	MI à re-calculer	MI à re-calculer	MI à re-calculer	MEF à re-calculer MAJ MI	MEF à re-calculer MAJ MI
Points de difficulté	\emptyset	arbre d'arête	coupure pour régions non connexes	arbre de faces	\emptyset

Le couplage FEM-BEM à deux inconnues offre lui une autre approche prometteuse. Son implémentation est plus complexe que les méthodes intégrales de volume, mais

avec une matrice de type "intégrale" de taille très réduite, et seulement une matrice de type éléments finis à réintégrer à chaque itération de Newton Raphson, elle présente des qualités indéniables.

Choix des méthodes

Plusieurs méthodes intégrales de volume ont été présentées. Alors que certaines présentent des inconvénients majeurs (taille du système matriciel pour la méthode basée sur l'aimantation par exemple), certaines se distinguent sur le papier par leur légèreté et leur efficacité. Les méthodes intégrales de volumes en induction et en potentiel vecteur sont donc retenues pour ces travaux. Nous confronterons ces deux méthodes au couplage FEM-BEM présenté précédemment pour arriver au choix final de la formulation à retenir dans cette thèse pour atteindre les objectifs de pré-dimensionnement espérés.

III.5 Intégration du noyau de Green

Toutes les formulations retenues mettent en jeu des intégrations facette/facette pour la matrice intégrale. On doit donc mettre en place une stratégie efficace pour intégrer correctement les interactions du type :

$$P_{ij} = \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{r}) \, d\Gamma_i \, d\Gamma_j \text{ et } P_{ij} = \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \nabla G(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_i \, d\Gamma_j \quad (\text{III.128})$$

particulièrement dans le cas où $i = j$.

Intégration purement numérique

Les intégrales de ce type peuvent être calculées par une stratégie purement numérique basée sur des points de Gauss pour chaque face :

$$\int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} f(\mathbf{r}) \, d\Gamma_j \, d\Gamma_i \xrightarrow{\text{intégration numérique sur } \Gamma_j} \int_{\Gamma_i} \sum_{k=1}^{N_G} f(\mathbf{r}_k) \mathbf{w}_k^G \, d\Gamma_i \quad (\text{III.129})$$

$$\xrightarrow{\text{intégration numérique sur } \Gamma_i} \sum_{l=1}^{N_G} \sum_{k=1}^{N_G} f(\mathbf{r}_{kl}) \mathbf{w}_k^G \mathbf{w}_l^G$$

où $f(\mathbf{r})$ désigne soit $G(\mathbf{r})$, soit $\nabla G(\mathbf{r})$, \mathbf{r}_k désigne le vecteur entre le point de Gauss numéro k de l'arête j et le point d'intégration le long de l'arête i , et ou \mathbf{r}_{lk} désigne le vecteur entre le point de Gauss numéro k de l'arête j et le point de Gauss numéro l de l'arête i . N_G désigne le nombre de points de Gauss choisi par arête.

La figure III.5 illustre ce mode d'intégration pour $i = j$: (a) donne le point de départ, l'arête i étant représentée en rouge et l'arête j étant représentée en bleu. (b) décrit la première étape du processus de discrétisation de l'intégrale, formalisée par la première ligne de l'équation III.129, alors que (c) représente la seconde ligne de III.129. On constate que lorsque $l = k$, la contribution du point de Gauss l sur le point de Gauss k devient infinie. Ce problème peut être résolu numériquement par une technique de changement des points de Gauss source, présentée en (d). On utilise un nombre de points de Gauss différent pour la cible que pour la source. De cette manière, aucun des points de Gauss cible ne se retrouve aux mêmes coordonnées que les points de Gauss source. Le résultat obtenu est alors une approximation de l'intégrale numérique, qui est elle-même une approximation de l'intégrale algébrique III.128.

Utilisation d'une méthode d'intégration semi analytique

Il est possible de calculer l'intégrale III.128 d'une manière semi-analytique, rendant

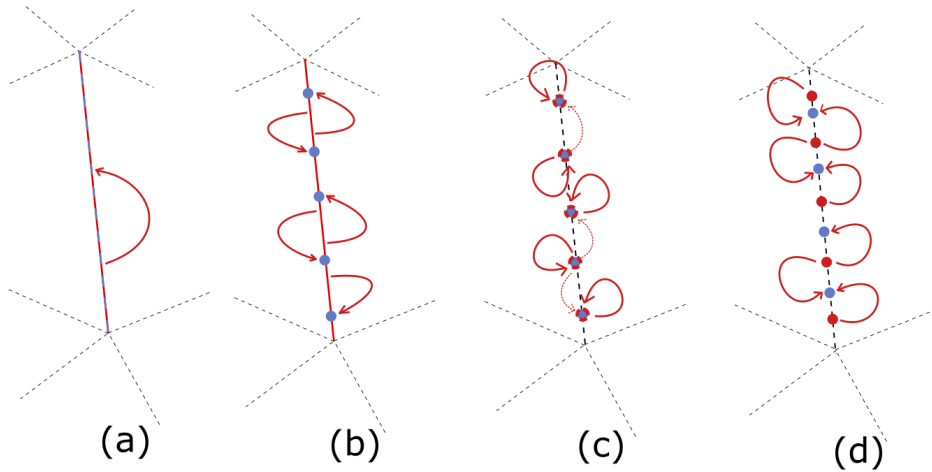


FIGURE III.5 – Étapes de l'intégration numérique formalisée par l'équation III.129

ainsi le calcul du terme P_{ij} plus précis, spécialement dans le cas $i = j$. La première étape de discrétisation reste la même que présentée précédemment (passage de (a) à (b) sur la figure III.5, mais on ne va pas plus loin d'un point de vue numérique. En effet, des formules analytiques existent [29] pour calculer de manière exacte les intégrales III.130 :

$$\int_{\Gamma_i} f(\mathbf{r}_k) d\Gamma_i \quad (\text{III.130})$$

$$(\text{III.131})$$

Ces calculs sont détaillés en annexe (A.2) pour ne pas alourdir le corps du document. Cette méthode est naturellement utilisable pour le cas où $i \neq j$. On peut donc utiliser la méthode d'intégration semi analytique de plusieurs manières illustrées en figure III.6 :

- pour traiter correctement la singularité due au noyau de green lorsque l'on calcule l'effet d'une facette sur elle même, on parlera d'intégration SAC (pour "self analytical correction") ((a) de la figure III.6).
- pour intégrer dans un rayon prédéfini tous les termes du type III.128, on parlera alors d'intégration CAC (pour "circle analytical correction"). Cela permet de calculer correctement les termes "difficiles" (proches les uns des autres) de la matrice intégrale, et de calculer numériquement les termes faciles (éloignés les uns des autres). Cette méthode permet d'atteindre une qualité d'évaluation de la matrice intégrale satisfaisante sans perdre trop de temps intégration analytique qui peut coûter cher si le nombre d'éléments à intégrer

de manière analytique est trop important ((b) de la figure III.6). Dans notre code, le rayon du cercle d'intégration est égal à trois fois le rayon du cercle circonscrit à l'élément sur lequel on effectue l'intégration.

- pour calculer la matrice intégrale de manière totalement semi-analytique. On parlera d'intégration FAC (pour "full analytical correction"). Cette méthode peut se révéler efficace si le maillage est très léger. Les temps d'intégration seront alors comparables à la méthode CAC ((c) de la figure III.6).

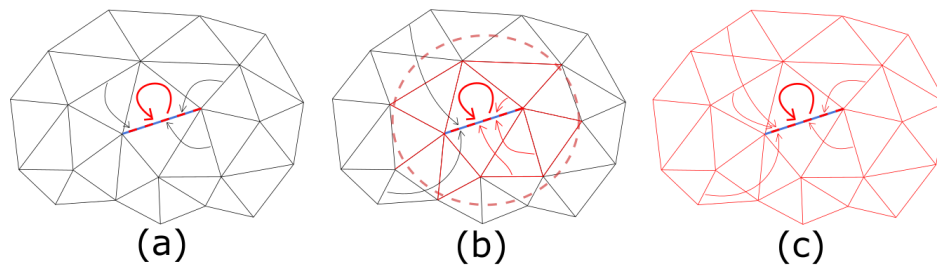


FIGURE III.6 – Types de d'intégration analytique possible : (a) SAC, (b) CAC, (c) FAC. Les flèches noires symbolisent une intégration numérique, et les rouges une intégration analytique.

III.6 Performances des méthodes retenues

Les méthodes présentées sont testées sur un cas test académique pour évaluer leurs performance, tant en terme de temps de calcul qu'en terme de précision. Pour chaque méthode, les différents types de correction seront utilisées, on fera varier le nombre de points de Gauss ainsi que la qualité de maillage. Les résultats seront confrontés à un modèle élément finis dont la solution convergée fera office de référence.

Cas test

Le cas test utilisé est celui d'un contacteur dont la géométrie est décrite via la figure III.7, le tableau des dimension III.6 et le tableau des matériaux III.3. Les zones vertes décrites sur la figure III.7 sont des bobines qui font office de champ source. Ces bobines sont traversées par un courant de 1000A. L'orientation du courant est positive lorsque le symbole \odot apparaît sur le domaine vert, et négative lorsque c'est le symbole \otimes .

TABLE III.2 – Dimensions du contacteur

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
dimension (mm)	60	5	10	60	2.5	20	25	10	5	10

TABLE III.3 – Matériaux du contacteur

	M1	M2
matériau	Fer non linéaire $\mu_r = 1000, J_s = 1T$	aimant permanent $\mu_r = 1, B_r = 1T$ dirigé vers l'axe Ox

Le but sera d'évaluer la capacité de la formulation à calculer l'induction au centre de l'entrefer de ce contacteur sur le segment XY décrit figure III.7. L'induction dans l'air est calculée via :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \nabla G(r) d\Omega_m + \mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (\text{III.132})$$

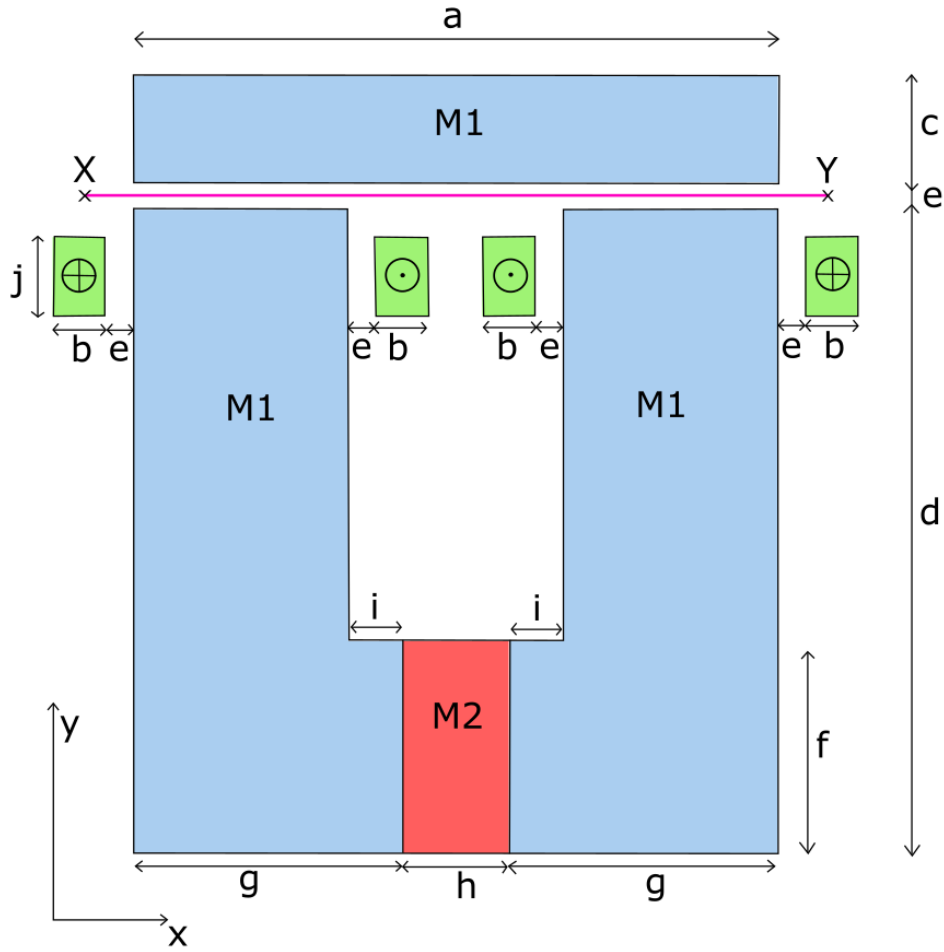


FIGURE III.7 – Géométrie du contacteur

Si \mathbf{M} est constant par élément, cette relation peut être exprimée sous la forme :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Gamma^T} \delta M_n G(r) d\Gamma^T = \sum_{j=1}^{N_{ft}} \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Gamma_j^T} \delta M_n \log\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma_j^T \quad (\text{III.133})$$

où N_{ft} est égal au nombre de facettes totales du domaine (internes et externes). Il est possible d'utiliser les corrections analytiques présentées en III.5 pour calculer cette intégrale. On utilisera une correction de type CAC avec 5 points de Gauss par facette. Le critère utilisé pour qualifier la qualité de la solution sera la norme de l'erreur entre la composante suivant l'axe Ox de l'induction fournie par la formulation intégrale et celle fournie par la méthode des éléments finis ayant convergé :

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|B_x^i - B_{x_{ref}}^i|}{B_{max}} \quad (\text{III.134})$$

où B_{max} est la valeur maximale de la valeur absolue de l'induction sur le segment XY, B_*^i correspond à la composante suivant l'axe Ox de l'induction calculée sur le i-ème

point du segment XY et N est le nombre de points de calculs sur le segment. Dans notre cas, $N = 100$. Les résultats sont consignés dans les quatre graphes présentés dans les tableaux III.7 et III.8. Les quatre niveaux de maillages contiennent respectivement 46, 108, 279 et 991 éléments. Pour chacun de ces maillages, on fait varier le nombre de points de Gauss par facette de 1 à 5 par pas de 2. On évalue l'erreur via l'équation III.134 pour les différentes formulations et pour les différentes méthodes d'intégration décrites en section III.5. Les légendes sont au format "Formulation- Nombre de points de Gauss" : par exemple la formulation en induction avec 3 points de Gauss par facettes correspond à la courbe légendée "B-3". Le tableau III.4 donne les temps de calcul pour la formulation dans le cas du maillage à 108 éléments et le tableau III.5 les temps du cas au maillage à 991 éléments.

TABLE III.4 – Temps de calculs (Maillage à 108 éléments)

	A-1	A/PHI-1	B-1	A-3	A/PHI-3	B-3	A-5	A/PHI-5	B-5
Shift	.184s	.192s	.240s	.443s	.483s	.530s	.967s	.998s	1.16s
SAC	.182s	.189s	.213s	.451s	.461s	.536s	.971s	.976s	1.19s
CAC	.190s	.214s	.249s	.493s	.495s	.558s	.960s	1.04s	1.22s
FAC	.186s	.206s	.210s	.447s	.471s	.553s	.976s	.990s	1.18s

TABLE III.5 – Temps de calculs (Maillage à 991 éléments)

	A-1	A/PHI-1	B-1	A-3	A/PHI-3	B-3	A-5	A/PHI-5	B-5
Shift	1.59s	1.49s	2.10s	4.23s	3.60s	5.13s	9.21s	7.98s	11.3s
SAC	1.60s	1.45s	2.00s	4.13s	3.62s	5.10s	9.14s	7.96s	11.3s
CAC	1.43s	1.47s	2.01s	4.25s	3.61s	5.13s	9.27s	7.94s	11.3s
FAC	1.48s	1.43s	2.04s	4.22s	3.61s	5.17s	9.20s	7.91s	11.3s

TABLE III.6 – Visualisation des solutions pour les 4 niveaux de maillage avec la correction FAC et 5 points de Gauss par facette

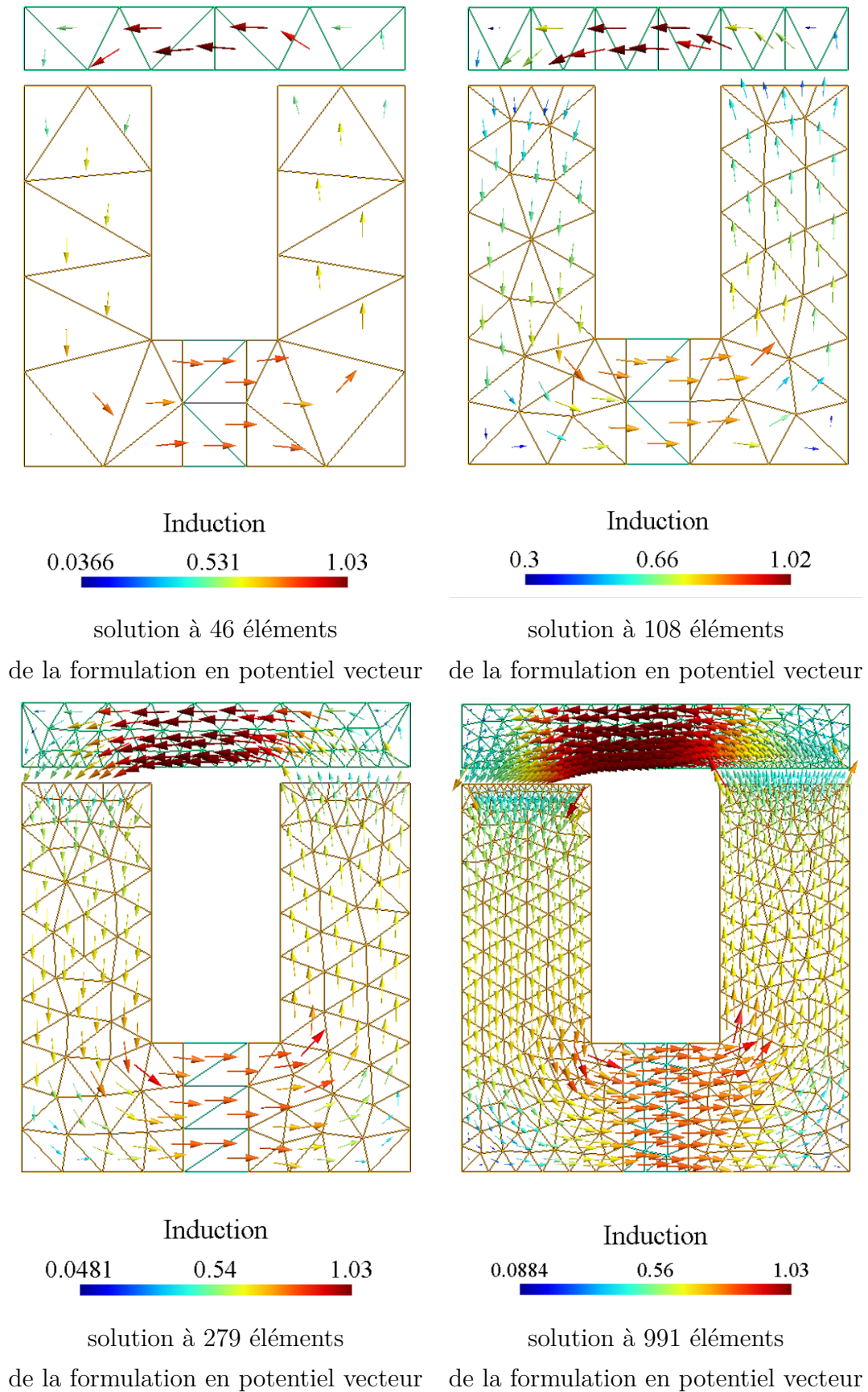
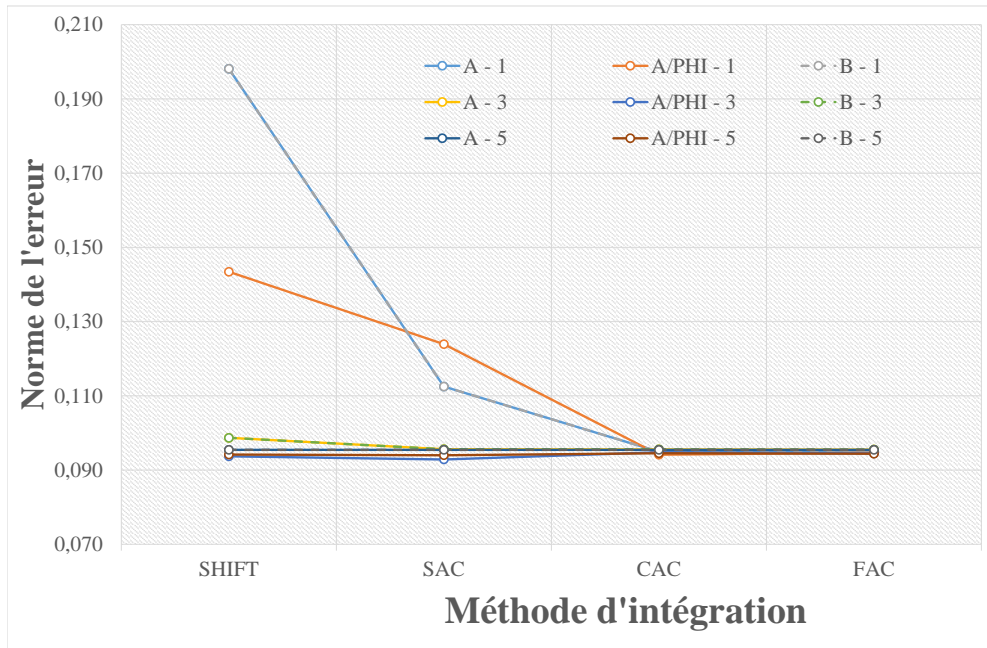
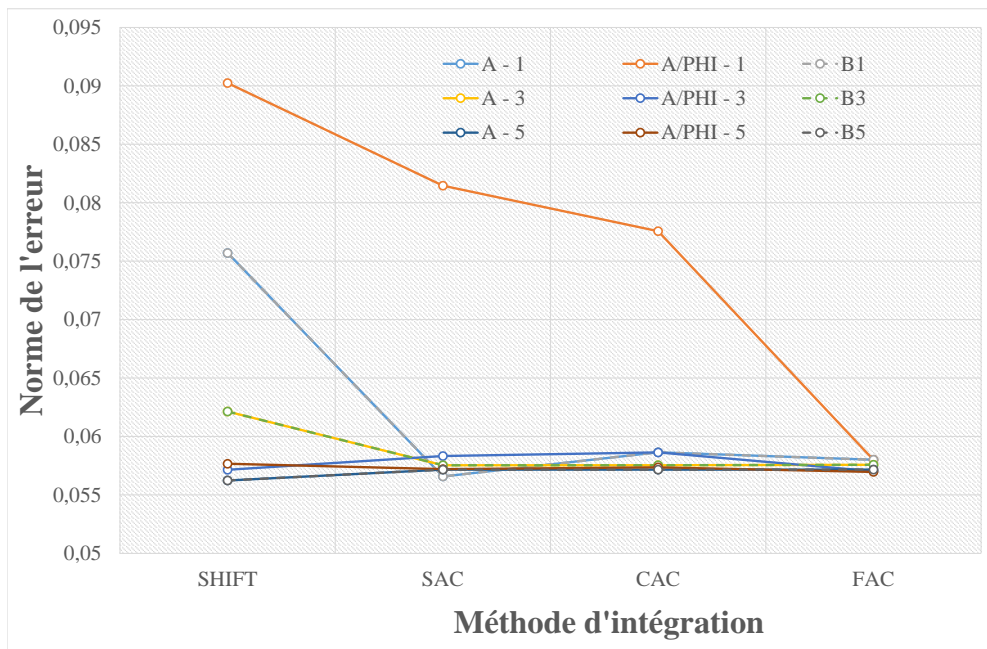


TABLE III.7 – Résultats - maillages légers

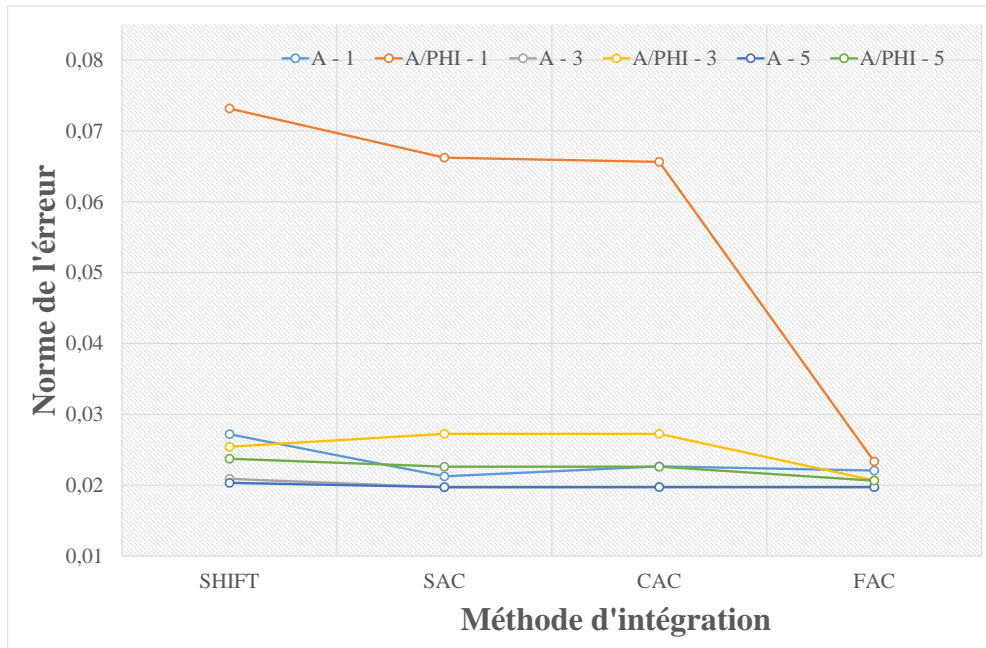


norme de l'erreur pour le maillage à 46 éléments

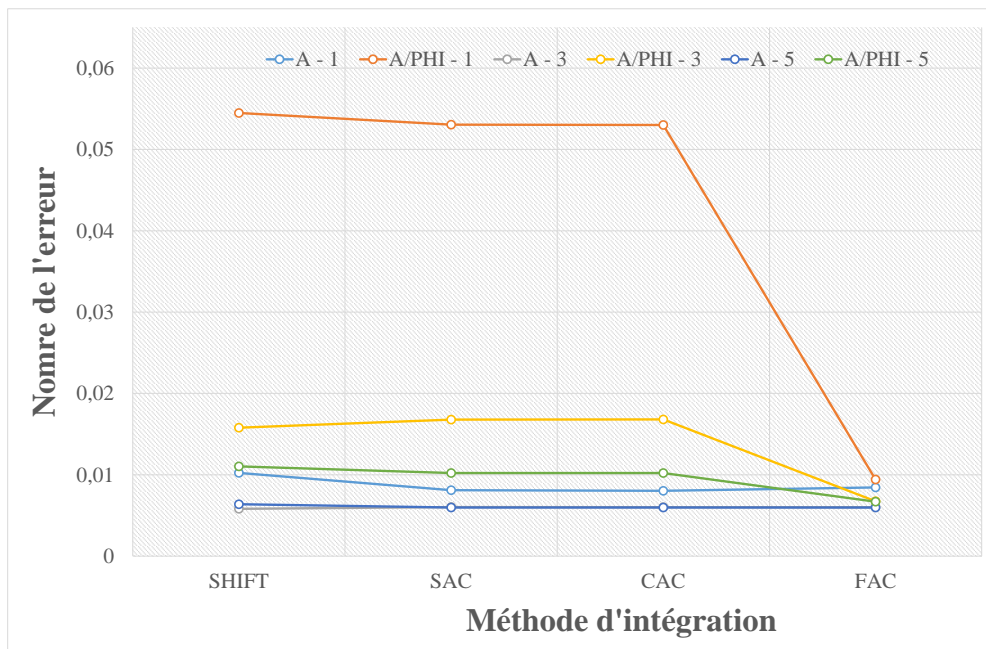


norme de l'erreur pour le maillage à 108 éléments

TABLE III.8 – Résultats - maillages fins



norme de l'erreur pour le maillage à 279 éléments



norme de l'erreur pour le maillage à 991 éléments

Convergence des deux méthodes

Nous avons réalisé une étude de convergence sur le cas test précédemment décrit pour les deux méthodes proposées. Nous avons utilisé 9 niveaux de maillages. Le même critère que le paragraphe précédent (norme de l'écart entre le profil d'induction suivant l'axe Ox calculé par la méthode étudiée et celui fourni par la référence élément finis) a été utilisé pour évaluer la qualité des résultats pour chaque maillage et chaque formulation. Le graphique correspondant peut être trouvé figure III.8. Le type d'intégration utilisé est la méthode CAC avec 3 points de Gauss par segments.

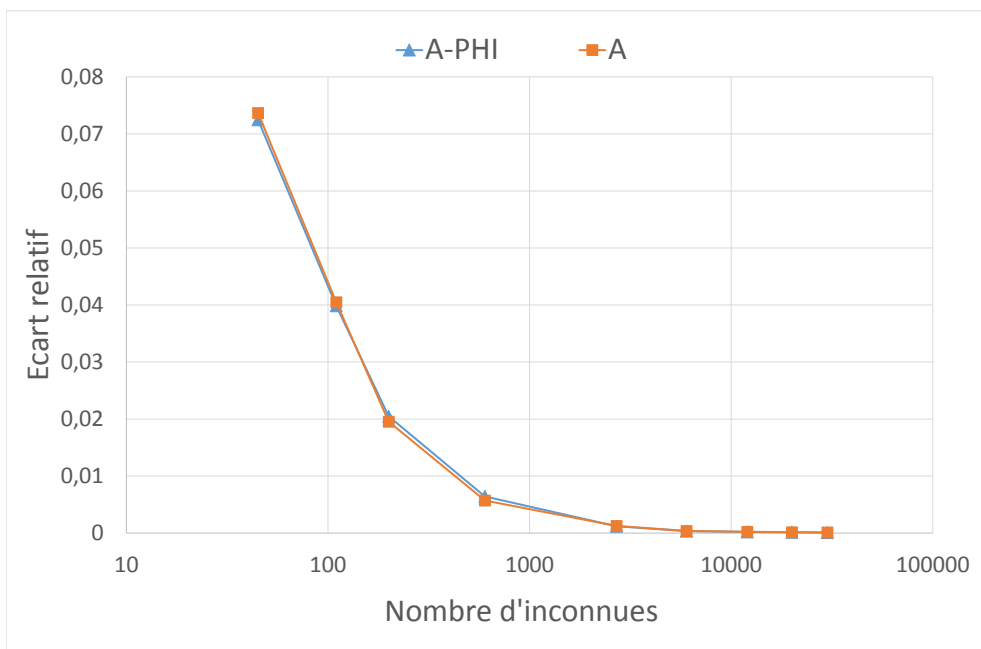


FIGURE III.8 – Convergence des deux méthodes

Analyse des résultats

Plusieurs constats ressortent de cette étude. On peut commencer par remarquer sur les figures du tableau III.7 que les formulations intégrales de volume en potentiel vecteur et en induction magnétique fournissent des résultats équivalents. Cette observation peut être prédite par la théorie : en effet, la manière dont nous avons programmé la formulation en potentiel vecteur n'est qu'un cas particulier de la méthode en induction magnétique. En conséquence, comme la méthode basée sur le

potentiel vecteur est plus rapide que celle basée sur l'induction (voir les tableaux III.4 et III.5), nous éliminerons dorénavant des résultats la méthode en induction pour nous concentrer sur la comparaison de la Méthode Intégrale de Volume en A (MIVA) et le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode intégrale de frontière (FEM-BEM).

Les graphes d'erreur montrent que quelle que soit la qualité du maillage, la MIVA est moins sensible au nombre de points de Gauss que la méthode FEM-BEM. On constate également que le type de correction a une importance plus prépondérante pour la méthode FEM-BEM que pour la MIVA. Ceci s'explique par le fait qu'il est nécessaire d'intégrer la dérivée du noyau de Green pour la méthode FEM-BEM et que ce noyau est plus singulier que le noyau de Green simple. La qualité de la correction a donc une influence plus importante pour la méthode couplée que pour la formulation en intégrale de volume. On constate également que la MIVA est légèrement plus précise que la méthode FEM-BEM. Ceci semble d'autant plus vrai que la qualité du maillage augmente. Néanmoins, les tableaux des temps de calculs montre que sur cet exemple, la méthode FEM-BEM est plus rapide que la MIVA. Cependant, les performances de la méthode FEM-BEM dépendent fortement de la géométrie du problème et surtout du ratio (nombre de facettes externes)/(nombre de facettes totales). Plus ce ratio est élevé, et moins la formulation sera efficace car la matrice intégrale \mathcal{H} est une matrice carrée dont la taille est (nombre de facettes externes)*(nombre de facettes externes). Ce cas de figure est possible dans le cadre de la simulation d'un moteur électrique car les encoches du stator sont autant de détails qui peuvent faire fortement augmenter la taille de la matrice \mathcal{H} . D'un point de vue de la convergence on constate que les méthodes convergent à la même vitesse vers la solution de référence.

Pour toutes les raisons citées précédemment (sensibilité plus faible au nombre de points de Gauss et la géométrie, noyau de Gauss moins singulier, système linéaire plus simple), c'est la méthode en potentiel vecteur qui sera retenue pour la suite des travaux. Néanmoins, la formulation couplée FEM-BEM reste une formulation très performante, surtout si on souhaite modéliser des courants de Foucault [46, 58].

III.7 Conclusions

Après avoir introduit le problème type, les équations constitutives et les lois de comportement, plusieurs formulations intégrales ont été présentées. Certaines de ces formulations intégrales de volume (en aimantation, en champ magnétique et en potentiel scalaire) ont été éliminées pour des considérations théoriques (taille de la matrice intégrale trop importante, nombre d'inconnues rédhibitoire) alors que d'autres ont été retenues pour une phase de tests.

Ces formulations retenues ont été testées sur le cas académique d'un contacteur avec entrefer fin. On a évalué l'effet de la variation du nombre de points de Gauss, du type de correction analytique ainsi que de la qualité du maillage sur la capacité de la formulation à calculer le champ au milieu de l'entrefer. Cette batterie de test a permis de constater que tant la formulation en potentiel vecteur que le couplage éléments finis/ méthode intégrale de frontière étaient des méthodes performantes de calcul de champ magnétique. Néanmoins, pour sa simplicité d'implémentation et sa robustesse, nous avons finalement porté notre choix sur la méthode intégrale de volume en potentiel vecteur pour la suite de ces travaux de thèse.

Chapitre IV

Adaptation de la formulation intégrale de volume magnétostatique à la simulation des machines électriques

Sous les attaques répétées de Jim, Kilian céda temporairement du terrain. Seul François arrivait à suivre le rythme infernal imposé par le californien. Mais ce dernier allait le payer très cher à l'entrée du territoire suisse où de terribles ampoules apparurent sous ses talons. Ce chapitre ne raconte pas leur histoire.

SOMMAIRE

IV.1 CALCUL ANALYTIQUE DU CHAMP SOURCE	61
IV.2 GESTION DU MOUVEMENT	68
IV.2.a Intégrations partielles	68
IV.2.b Recyclage de solution	72
IV.3 PRISE EN COMPTE DES PÉRIODICITÉS DU SYSTÈME	73
IV.4 VALIDATION DE LA MÉTHODE ET ÉTUDE COMPARATIVE DE PER- FORMANCES	78
IV.4.a Validation et impact de la qualité du maillage	79
IV.4.b Gains en temps de calcul apportés par l'utilisation des périodicités	83
IV.4.c Comparaison de performances avec la méthode des éléments finis .	86
IV.5 CONCLUSIONS	89

Résumé

Après avoir décrit les méthodes intégrales en général et la méthode intégrale de volume d'arête en particulier, nous allons l'appliquer aux spécificités des moteurs électriques. Nous évoquerons dans un premier temps la méthode retenue pour calculer le champ magnétique source. Dans un second temps, un point sera fait sur les optimisations possibles dans le cadre du mouvement d'une partie du système (réintégrations partielles, impact sur le solveur). Enfin, avant de passer à l'étape de validation de la méthode, un point sera fait sur l'exploitation des périodicités du système pour réduire le nombre d'inconnues.

IV.1 Calcul analytique du champ source

La formulation intégrale de volume en potentiel vecteur étant choisie, on en rappelle les équations :

$$\begin{aligned} & \text{trouver le vecteur } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_a} \text{ tel que :} \\ & [\nabla \times]^T (\mathcal{R}^B + \mathcal{L}^B) [\nabla \times] \mathbf{A} = [\nabla \times]^T (\mathcal{F}^B + \mathcal{G}^B) \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

avec :

$$\mathcal{R}_{ij}^B = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \mathbf{w}_j d\Omega_m \quad (\text{IV.2})$$

$$\mathcal{L}_{ij}^B = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j}{l_i^E l_j^T} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^T} G(r) d\Gamma_j^T d\Gamma_i^E \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathcal{F}_i^B = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_{fi} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathcal{G}_i^B = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i^E} \sum_{j=1}^{N_f} \int_{\Gamma_i^E} \int_{\Gamma_j^T} G(r) \delta H_{cn} d\Gamma_j^T d\Gamma_i^E \quad (\text{IV.5})$$

et où $[\nabla \times]$ est la matrice d'incidence face \rightarrow arête.

Une des difficultés de cette formulation lorsqu'on l'applique au calcul d'un moteur électrique est l'évaluation correcte du champ magnétique source \mathbf{H}_0 . En effet, la géométrie des inducteurs au sein d'un moteur électrique est quelconque et en aucun cas il n'est possible d'utiliser des formules analytiques pour en obtenir le champ, comme cela est possible pour des inducteurs 2D de forme circulaire ou carrée [29]. Cette section est dédiée à la résolution de cette difficulté. Dans le cas d'une résolution par éléments finis, il est usuel d'effectuer une pré-résolution pour obtenir le champ source. Il serait dommageable d'utiliser une telle technique en terme de temps de calcul. Nous proposons l'utilisation du potentiel complexe pour calculer le champ magnétique créé par une région de forme quelconque maillée avec des triangles et traversée par une densité de courant surfacique J .

Intégration analytique du potentiel complexe

Le potentiel complexe créé par une surface quelconque Ω traversée par une densité surfacique de courant J est défini par [29] :

$$P(z) = -\frac{J}{2\pi} \int_{\Omega} \log(z - z_i) d\Omega \quad (\text{IV.6})$$

où Ω est le domaine traversé par la densité de courant et z la coordonnée complexe du point de calcul. De ce potentiel peuvent être tirés le champ magnétique et le potentiel vecteur via :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -iH^* = -H_y - iH_x \quad (\text{IV.7})$$

$$A = \Re\epsilon(P(z)) \quad (\text{IV.8})$$

Le potentiel vecteur A est défini à une constante près. On considère dans ces travaux qu'il est nul à l'infini. L'expression du champ magnétique et du potentiel vecteur pour les deux triangles rectangles décrits figure IV.1 peuvent s'exprimer sous la forme :

$$H_x(x, y) = \mathcal{F}_x(x, y, a, b, r_0, r_1, r_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{IV.9})$$

$$H_y(x, y) = \mathcal{F}_y(x, y, a, b, r_0, r_1, r_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{IV.10})$$

$$A(x, y) = \mathcal{G}(x, y, a, b, r_0, r_1, r_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{IV.11})$$

Le détail du calcul et les expressions des grandeurs H_x , H_y , et A sont données en annexe (A.3) pour éviter d'alourdir le coeur du document.

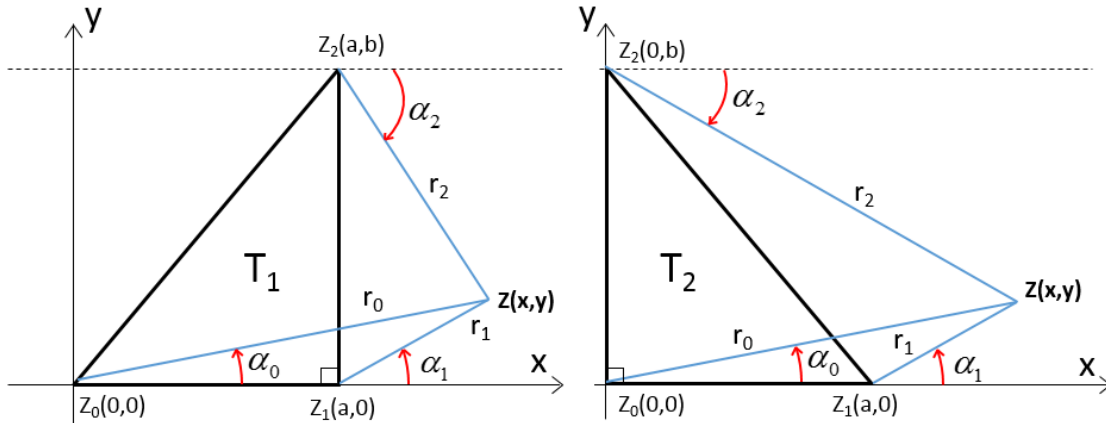


FIGURE IV.1 – Triangles rectangles pour l'intégration

Évaluation du champ et potentiel créés par un triangle quelconque

On calculera le champ magnétique et le potentiel vecteur créés par un triangle quelconque en le décomposant en une somme de deux triangles élémentaires T1 et T2 précédemment introduits. Soit un triangle T quelconque défini par ses trois sommets \mathbf{z}_0 , \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 . On suppose que le côté le plus long de ce triangle est le côté $\overline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$. Soit l'angle θ entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overline{\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1}$. On cherche à obtenir le champ

magnétique en un point $P(\mathbf{z})$. Effectuons une translation de vecteur $-\mathbf{z}_0$ au triangle T et au point P . On obtient alors un triangle T' et un point P' . Le champ créé par T en P est le même que celui créé par T' en P' . On applique finalement une rotation d'angle $-\theta$ sur le triangle T' et le point P' : on obtient un triangle T_f et un point P_f . Le triangle T_f peut être décomposé en la somme de deux triangles T_1 et T_2 similaires à ceux présentés figure IV.1. Le paragraphe précédent nous permet de calculer le champ créé par le triangle T_f sur le point P_f , comme somme du champ créé par T_1 et du champ créé par T_2 . Il suffit finalement de calculer le produit d'une matrice de rotation d'angle θ par le champ calculé en P_f pour obtenir le champ créé par T en P :

$$\mathbf{H}(P) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \mathbf{H}(P_f) \quad (\text{IV.12})$$

Cette méthode est illustrée figure IV.2

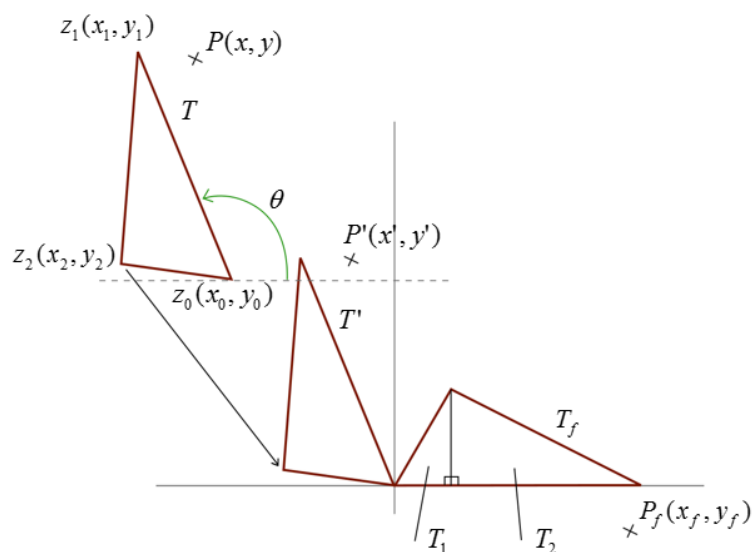


FIGURE IV.2 – Transformations effectuées sur T et P

Cas où le point P est interne au triangle T

Dans le cas où l'on cherche la valeur du champ et/ou du potentiel à l'intérieur du triangle, les formules analytiques n'étant pas valides, on peut se contenter de découper le triangle en trois sous triangles et calculer la somme des contributions de ces sous triangles. Ce procédé est décrit en annexe (A.4).

Validation de la méthode

Pour valider cette méthode de calcul de champ source, on effectue une comparaison entre le champ magnétique et le potentiel vecteur calculés par le logiciel élément finis Flux (pour lequel on impose A égal à zéro à l'infini) et ceux calculés par la méthode analytique présentée ci dessus. La géométrie du cas test utilisé est décrite figure IV.3 et les coordonnées des points peuvent être trouvées dans le tableau IV.2.

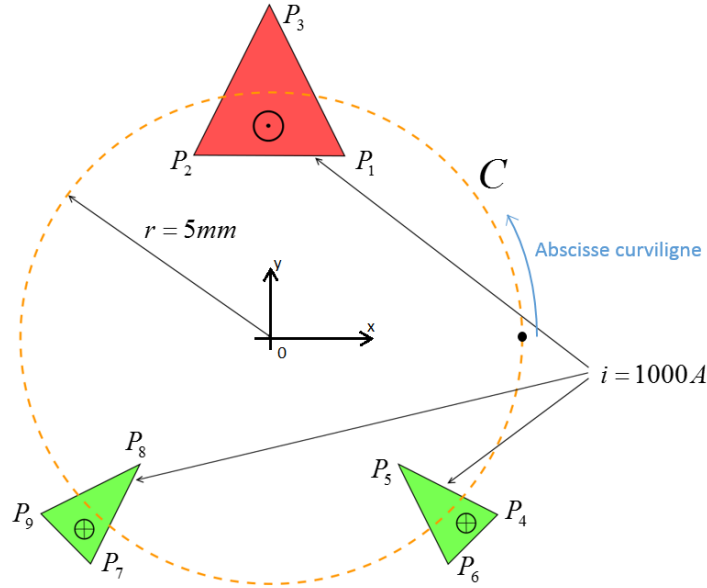


FIGURE IV.3 – Géométrie du cas test

TABLE IV.1 – Coordonnées des points décrits figure IV.3

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
abscisse (mm)	1.5	-1.5	0	4.5	2.5	3.5	-3.5	-2.5	-4.5
ordonnée (mm)	3.5	2.5	6.5	-3.5	-2.5	-4.5	-4.5	-2.5	-3.5

Le champ et le potentiel vecteur sont évalués par la méthode analytique présentée et par la méthode des éléments finis sur le cercle C décrit figure IV.3. La méthode des éléments finis utilise une formulation en potentiel vecteur :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \text{ avec } \mathbf{H} = \nu(\mathbf{B}) \nabla \times A \quad (\text{IV.13})$$

On projette cette équation sur le domaine de résolution Ω , ce qui amène au système matriciel :

$$\mathcal{M}A = \mathcal{J} \quad (\text{IV.14})$$

où les matrices \mathcal{M} et \mathcal{J} sont définies comme :

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_i \times \mathbf{n} \nu(\mathbf{B}) \nabla w_j \times \mathbf{n} \, d\Omega \quad (\text{IV.15})$$

$$\mathcal{J}_i = \int_{\Omega} J w_i \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \quad (\text{IV.16})$$

On discrétise le cercle en 360 points, et on calcule pour chaque point la valeur absolue de l'écart relatif défini par la formule IV.17 entre le résultat obtenu par la méthode des éléments finis et la méthode analytique. Cet écart est calculé pour 4 niveaux de maillage pour la méthode des éléments finis (1300, 10000, 47000 et 100000 éléments). Les graphes représentant cet écart pour les 4 niveaux de maillage sont visibles sur les figures IV.4, IV.5, IV.6 et IV.7.

$$e^i = \left| \frac{H_{analytique}^i - H_{MEF}^i}{H_{analytique}^{max}} \right| \quad (\text{IV.17})$$

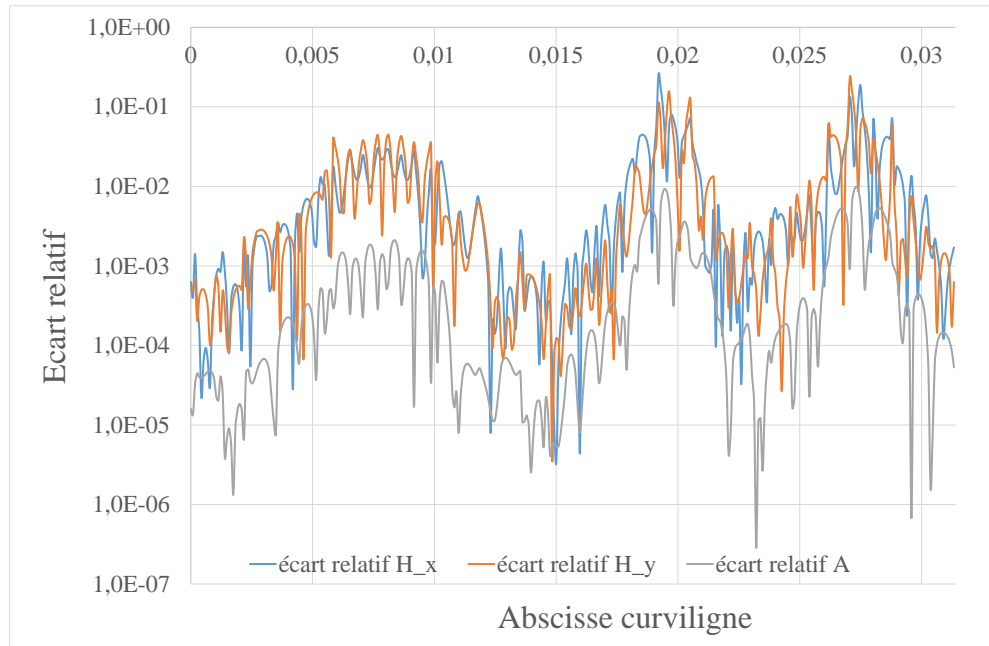


FIGURE IV.4 – Écart relatif pour un maillage à 1300 éléments

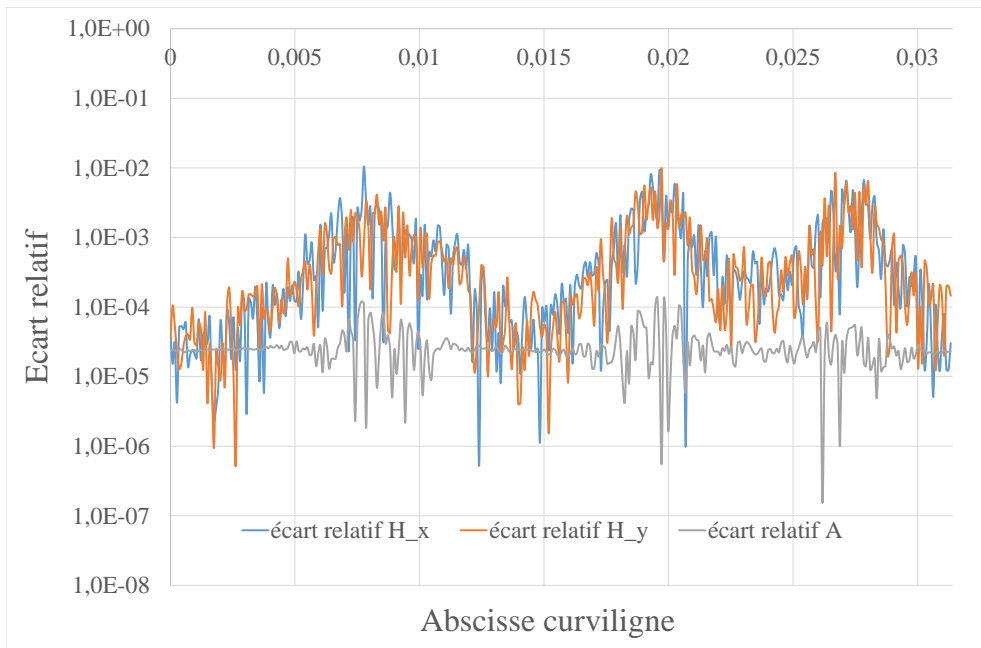


FIGURE IV.5 – Écart relatif pour un maillage à 10000 éléments

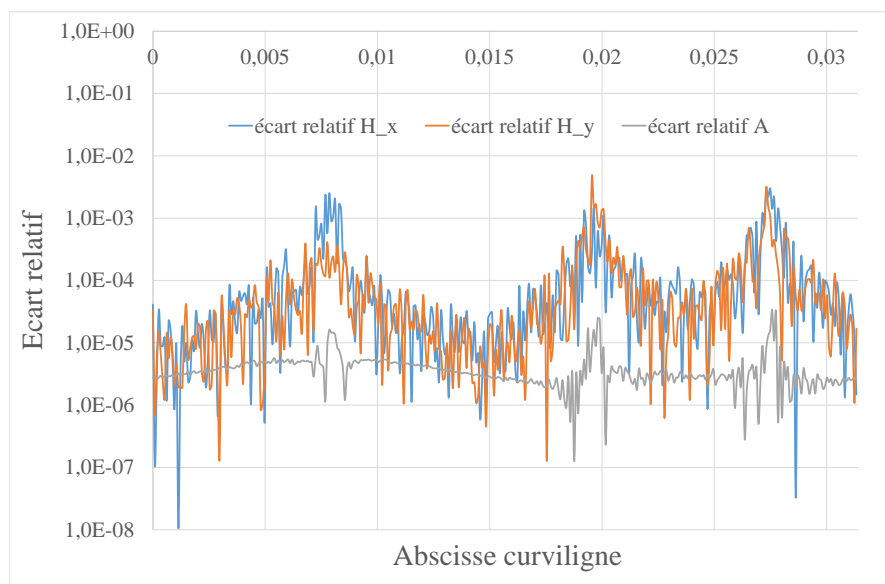


FIGURE IV.6 – Écart relatif pour un maillage à 47000 éléments

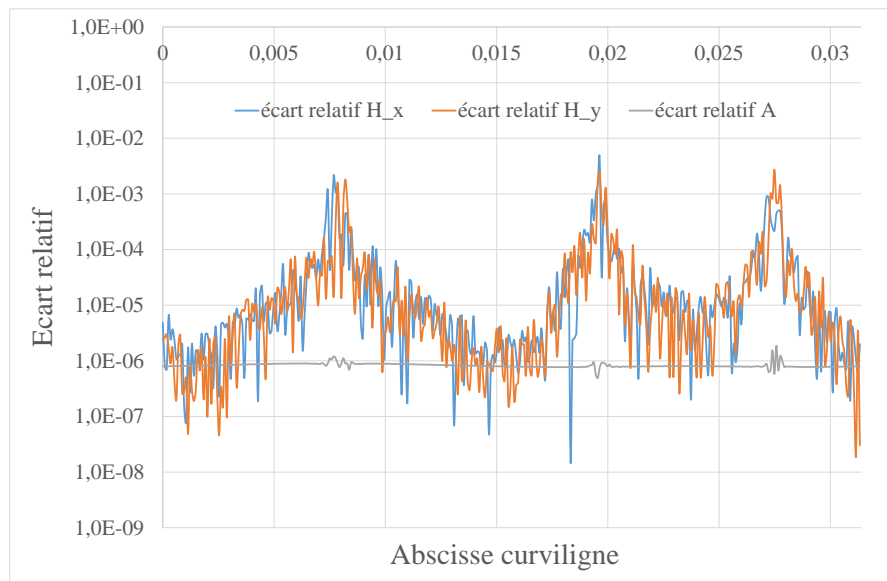


FIGURE IV.7 – Écart relatif pour un maillage à 100000 éléments

On constate que l'écart entre les résultats fournis par les deux méthodes diminue au fur et à mesure que la qualité de maillage de la MEF augmente, ce qui permet de justifier l'exactitude des formules analytiques proposées. D'un point de vue temps de calcul, la méthode analytique est grandement gagnante. Les performances de celle-ci dépendent directement du nombre de triangles sources ainsi que du nombre de points sur lesquels le calcul du champ est effectué. Dans le cas de notre exemple, on calcule le champ induit par trois éléments triangulaires sur 360 points, soit 1080 évaluations du champ. Le temps de calcul pour ces 1080 évaluations étant de 0.0118s, on en conclut que le coût du calcul du champ créé par un triangle sur un point coûte environ $1e^{-5}$ s. On aura donc un coût de calcul du champ source sur le maillage cible :

$$C = N^{tri} \times N^{cibles} \times 1e^{-5}s \quad (IV.18)$$

où N^{tri} est le nombre de triangles utilisés pour mailler les bobines du problème et N^{cible} le nombre de degrés de liberté dans le second membre (soit le nombre d'éléments multiplié par le nombre de points de Gauss utilisés pour l'intégration).

IV.2 Gestion du mouvement

La problématique du calcul du champ source au sein du moteur étant traitée, on est maintenant capable d'utiliser la formulation présentée en début de chapitre pour évaluer le champ magnétique dans le moteur électrique. Lors d'un pré-dimensionnement, on peut par exemple vouloir connaître le profil du couple appliqué sur le rotor en fonction de sa position. On effectue alors plusieurs résolutions successives avec à chaque fois un déplacement du rotor. Il est possible de tirer avantage de ce cadre de résolution pour optimiser l'efficacité de la formulation.

IV.2.a Intégrations partielles

Intégration de la matrice \mathcal{R}

Dans le cas où la région mobile est disjointe de la région fixe (ce qui sera toujours le cas dans ces travaux), la matrice \mathcal{R} se réduit à une matrice diagonale par blocs :

$$\mathcal{R}^B = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{Mobile}^B & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{Fixe}^B \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

où :

$$(\mathcal{R}_{Mobile}^B)_{ij} = \int_{\Omega_{Mobile}} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \mathbf{w}_j \, d\Omega_{Mobile} \quad (\text{IV.20})$$

$$(\mathcal{R}_{Fixe}^B)_{ij} = \int_{\Omega_{Fixe}} \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \mathbf{w}_j \, d\Omega_{Fixe} \quad (\text{IV.21})$$

Dans le cadre d'un mouvement du rotor en fonctionnement linéaire, la matrice \mathcal{R}^B , n'est pas à réintégrer du tout. En effet, les parties fixes et mobiles étant disjointes, le mouvement du rotor n'a aucune influence sur la matrice (\mathcal{R}_{fixe}^B) et vice versa. En fonctionnement non linéaire, il est nécessaire de réintégrer cette matrice à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson pour prendre en compte le changement de reluctivité.

Intégration partielle de la matrice \mathcal{L}_0^B

Comme cela a été évoqué dans le chapitre précédent, on peut décomposer la matrice \mathcal{L}^B en $\Theta(\mathcal{L}_0^B, l^E, l^T, \delta\nu)$ où l^E est le vecteur des longueurs des faces externes, l^T vecteur des longueurs de toutes les faces et $\delta\nu$ est le vecteur des sauts de relucitivité entre éléments. On constate que la matrice \mathcal{L}_0^B est construite sur des considérations purement géométriques : en effet, seule une variation de la position des faces du maillage les unes par rapport aux autres peut entraîner une variation des valeurs des coefficients de \mathcal{L}_0^B . On peut tirer parti de cette caractéristique pour optimiser la construction de la matrice \mathcal{L}_0^B lors d'une résolution multi-statique en ne réintégrant que les morceaux nécessaires de la matrice. Prenons de nouveau l'exemple du contacteur introduit en chapitre 1. On peut définir deux parties de domaine pour ce contacteur, une partie fixe nommée Ω_{Fixe} et une partie mobile nommée Ω_{Mobile} . Ces deux parties sont illustrées figure IV.8.

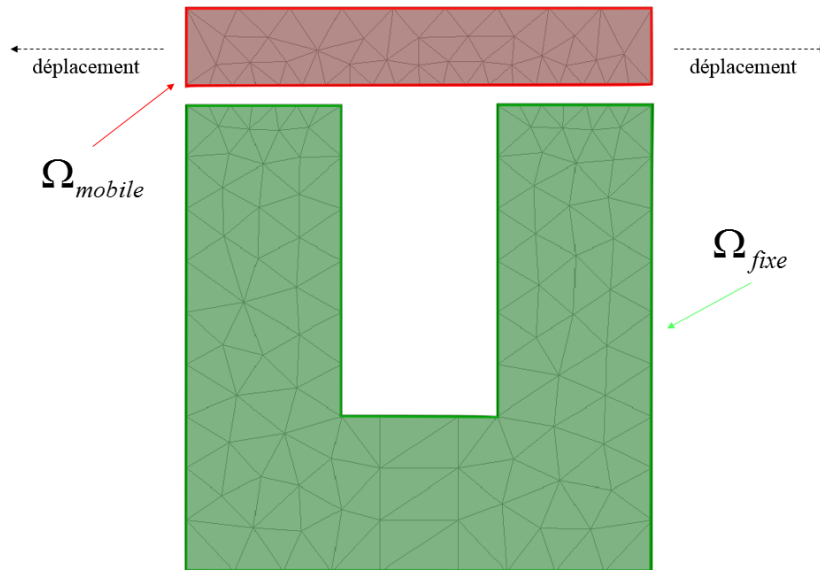


FIGURE IV.8 – Décomposition du domaine en deux sous domaines, Ω_{Fixe} et Ω_{Mobile}

Le domaine Ω_{Fixe} est représenté en vert. Sa frontière Γ_{Fixe}^E est représentée en vert foncé et le domaine Γ_{Fixe}^T correspondant aux arêtes totales correspond à l'union de Γ_{Fixe}^E et de toutes les faces contenues dans la zone vert clair. Le même code couleur et les mêmes notations sont appliqués au domaine Ω_{Mobile} avec du rouge à la place du vert. Avec ces notations, on peut représenter la matrice \mathcal{L}_0^B comme une matrice bloc :

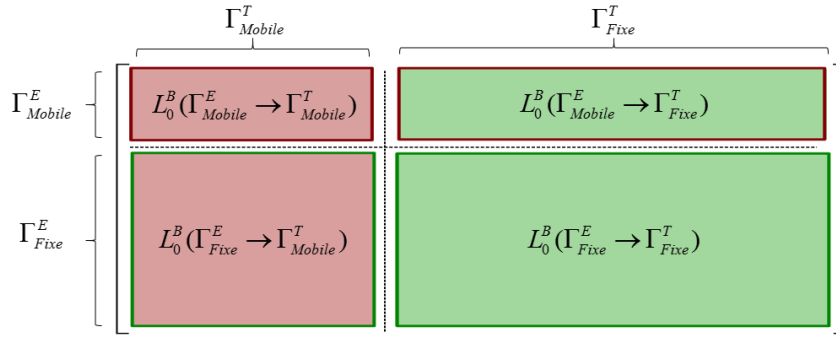


FIGURE IV.9 – Représentation par blocs de la matrice \mathcal{L}_0^B

Dans le cas d'un déplacement de la partie mobile en rouge sur la figure IV.8, seuls les blocs extra diagonaux de la matrice \mathcal{L}_0^B décrite figure IV.9 sont à réintégrer : ce sont les deux seuls cas où les faces "sources" se sont déplacées par rapport aux faces "cibles". En effet, lors du déplacement de la palette, les faces Γ_{Mobile}^T ne se déplacent pas par rapport aux faces Γ_{Mobile}^E . Le bloc en haut à gauche de la matrice décrite figure IV.9 reste donc inchangé : inutile de la calculer une nouvelle fois dans le cadre d'une résolution multi-statique. D'un point de vue économie en temps de calcul, cette non réintégration permet de gagner dans le cas le moins favorable - cas où $Card(\Gamma_{Mobile}^E) = Card(\Gamma_{Fixe}^E)$ et $Card(\Gamma_{Mobile}^T) = Card(\Gamma_{Fixe}^T) - 50\%$ du temps d'intégration. Dans le cas pratique d'un moteur dont le huitième est représenté figure IV.10 , on a pour les différents espaces :

TABLE IV.2 – Nombre de facettes pour les différents sous domaines

	Γ_{Mobile}^E	Γ_{Mobile}^T	Γ_{Fixe}^E	Γ_{Fixe}^T
Nombre de faces	160	648	442	1008

Le nombre de termes à recalculer dans les blocs extra-diagonaux est $N_{recalc} = 160 \times 1008 + 648 \times 442 = 447696$ alors que le nombre total de termes de la matrice \mathcal{L}_0^B est $N_{tot} = (160 + 442) \times (648 + 1008) = 996912$, ce qui correspond à un gain 55.1% du temps d'intégration de la matrice \mathcal{L}_0^B .

Intégration partielle du second membre

Dans le second membre du système, on constate que le calcul complet à chaque résolution est redondant si certaines parties du domaine ainsi que les sources sont immobiles (c'est le cas par exemple d'un moteur synchrone à aimant permanent) :

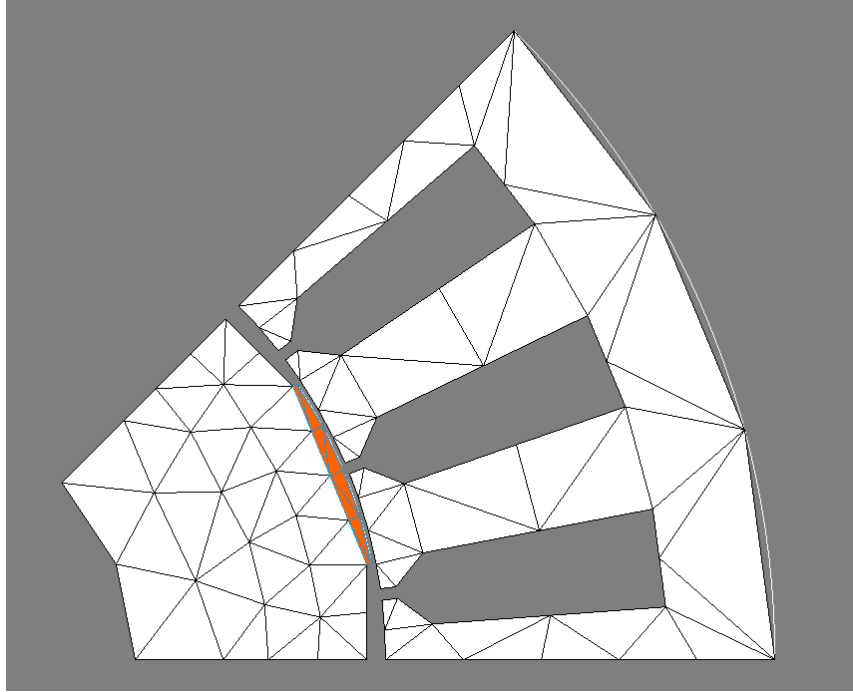


FIGURE IV.10 – Huitième du maillage d'un moteur étudié dans le cadre des intégrations partielles

en effet, le terme \mathcal{F} de l'équation IV.1 requiert de connaître le champ magnétique sur chaque élément du maillage. Dans le cas où le rotor ne comporte pas de bobines, les sources étant immobiles, il suffit de garder en mémoire le champ calculé pour tous les éléments du stator et de recalculer uniquement le champ pour chaque élément du rotor. Ce calcul de champ par la méthode analytique présentée dans la section précédente pouvant être chronophage (si les sources sont très maillées et/ou si le nombre d'éléments dans le maillage est élevé, voir équation IV.18), cette ré-intégration partielle offre une économie substantielle.

On pourra noter aussi que le terme \mathcal{G} peut être obtenu de la manière suivante :

$$\mathcal{G} = \Theta(\mathcal{L}_0^B, l^{Ext}, \mathbb{I}, \mathbb{I}) \cdot \delta H_{cn} \quad (\text{IV.22})$$

où \mathbb{I} est un vecteur de taille le nombre de colonnes de \mathcal{L}_0^B et dont toutes les composantes valent 1. On le calcule donc à partir de la matrice \mathcal{L}_0^B préalablement réintégré comme présenté après le mouvement du rotor.

IV.2.b Recyclage de solution

Dans le cadre d'une résolution multi-statique en fonctionnement non linéaire, il est possible d'utiliser la solution obtenue par l'algorithme de Newton-Raphson pour la position n du rotor et de la réinjecter dans l'algorithme pour la résolution de la position $n + 1$. On a donc :

pour la première itération :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^0 &= \{0\} \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}_0^k) \delta \mathbf{x}_0^k &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0^k) \\ \mathbf{x}_0^{k+1} &= \mathbf{x}_0^k + \delta \mathbf{x}_0^k, \quad \forall k \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

pour l'itération n :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n^0 &= \mathbf{x}_{n-1}^{conv} \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}_n^k) \delta \mathbf{x}_n^k &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n^k) \\ \mathbf{x}_n^{k+1} &= \mathbf{x}_n^k + \delta \mathbf{x}_n^k, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Cette méthode permet de diminuer fortement le nombre d'itérations nécessaire à la convergence pour toutes les positions du rotor sauf la première. Plus la variation de la position du rotor est faible par rapport à la position précédente, plus la convergence sera atteinte rapidement.

IV.3 Prise en compte des périodicités du système

Un axe fort d'optimisation de la formulation est l'exploitation des périodicités et symétries du système d'étude pour réduire le nombre d'inconnues de résolution. Cette technique est classiquement utilisée dans le cadre de la méthode des éléments finis [62]. Dans cette dernière, il suffit d'appliquer une condition aux limites adaptée pour prendre en compte les périodicités et symétries [62]. Dans le cadre des méthodes intégrales, il n'est pas possible de mettre en place des conditions aux limites car des interactions avec tout le domaine géométrique sont à considérer.

Mise en place des différents domaines

La prise en compte des périodicités en méthode intégrale nécessite donc d'avoir accès à la totalité du domaine géométrique pour calculer les termes d'interaction à distance \mathcal{L}^B et \mathcal{G}^B présentés dans l'équation IV.2. On introduit alors des domaines "fantômes" (annotés dans la suite avec un "F" en exposant) générés à partir du domaine périodique que l'on nommera "réel" (annoté avec un "R" en exposant). Les domaines "fantômes" apportent leurs contributions aux termes d'interactions à distance \mathcal{L}^B et \mathcal{G}^B sans que l'on effectue de résolution sur leurs inconnues. Le calcul du terme \mathcal{F}^B demande quant à lui la connaissance du champ source \mathbf{H}_0 total et pas seulement la contribution des bobines du domaine "réel". Il est donc aussi nécessaire de générer les maillages "fantômes" des bobines maillées. Un schéma explicatif est présenté en figure IV.11 qui utilisera l'exemple d'un système $\frac{\pi}{2}$ anti-périodique contenant des aimants permanents (symbolisés en rouge (pôle nord) et orange (pôle sud)) et des bobines (symbolisées en vert clair (orientation positive du courant) et foncé (orientation négative du courant)).

Modification du système d'équations à résoudre

Les contributions des domaines fantômes modifient les termes \mathcal{F}^B , \mathcal{L}^B et \mathcal{G}^B , dont la partie venant du domaine réel est complétée par les contributions des domaines fantômes :

$$\begin{aligned} & \text{trouver le vecteur } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_a^{per}} \text{ tel que :} \\ & [\nabla \times]^T (\mathcal{R}_{per}^B + \mathcal{L}_{per}^B) [\nabla \times] \mathbf{A} = [\nabla \times]^T (\mathcal{F}_{per}^B + \mathcal{G}_{per}^B) \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

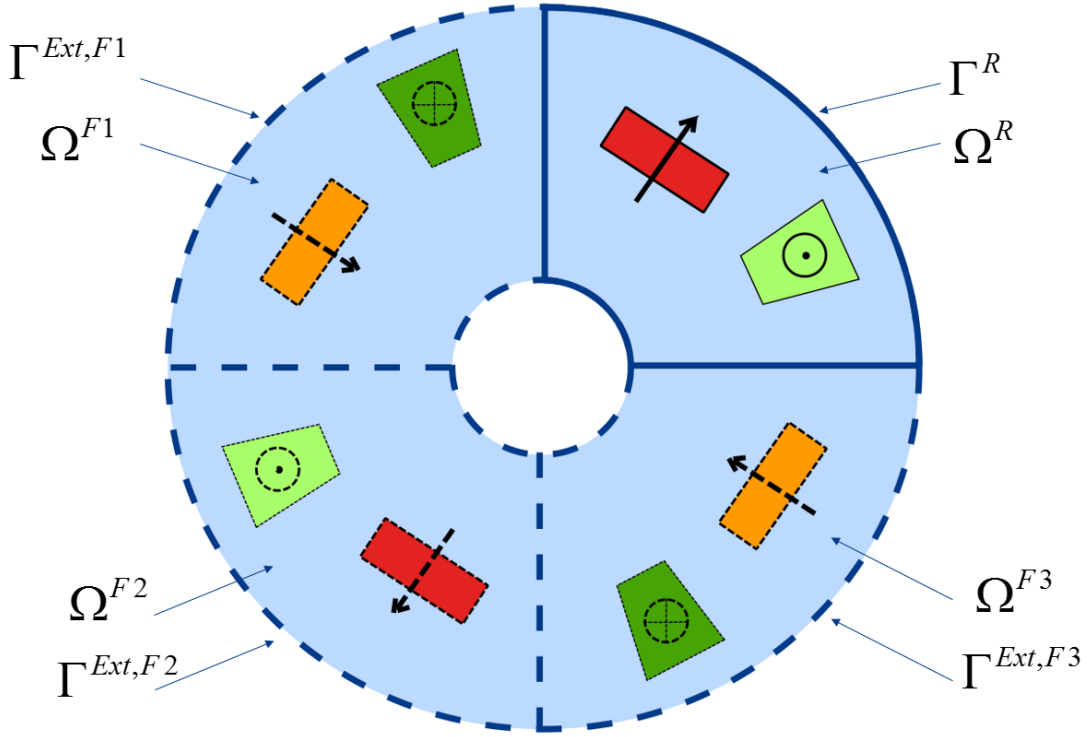


FIGURE IV.11 – Exemple d'un système $\frac{\pi}{2}$ anti-périodique contenant des aimants permanents et des bobines

avec :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}_{per}^B)_{ij} &= \int_{\Omega_m^R} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \nu(\mathbf{B}) \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega_m^R \\
 (\mathcal{L}_{per}^B)_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,R} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,R} + \\
 &\quad \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^{Fk}}{l_i^{E,Fk} l_j^{T,R}} \sum_{k=1}^{N_F} \left(\int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \\
 (\mathcal{F}_{per}^B)_i &= \int_{\Omega_m^R} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot (\mathbf{H}_c + \mathbf{H}_0^R) d\Omega_m^R + \sum_{k=1}^{N_F} \int_{\Omega_m^R} \nabla \times \mathbf{w}_{fi} \cdot \mathbf{H}_0^{Fk} d\Omega_m^R \\
 (\mathcal{G}_{per}^B)_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i^{E,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,R} + \\
 &\quad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_F} \left(\frac{1}{l_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^{Fk} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,Fk} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Ces expressions de \mathcal{L}_{per}^B et \mathcal{G}_{per}^B nécessitent à première vue la connaissance de $\delta \nu^{Fk}$ et δH_{cn}^{Fk} . Néanmoins, il est possible de s'en affranchir. En effet, ces grandeurs n'ayant pas d'orientation dans l'espace (ce sont des scalaires), on peut établir que $\delta \nu^{Fk} = \delta \nu^R$ si le domaine fantôme k est périodique par rapport au domaine réel et $\delta \nu^{Fk} = -\delta \nu^R$

s'il est anti-périodique. Il en va de même pour δH_{cn}^{Fk} . On peut donc réécrire les matrices \mathcal{L}_{per}^B et \mathcal{G}_{per}^B :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{per}^B)_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,R} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,R} + \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,Fk} l_j^{T,R}} \sum_{k=1}^{N_F} a_k^F \left(\int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \\
(\mathcal{G}_{per}^B)_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i^{E,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,R} + \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_F} a_k^F \left(\frac{1}{l_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,Fk} \right)
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

où a_k^F vaut 1 si le domaine fantôme k est périodique par rapport au domaine réel (par exemple le domaine Ω^{F2} sur la figure IV.11) et -1 si le domaine fantôme k est anti-périodique par rapport au domaine réel (par exemple les domaines Ω^{F1} et Ω^{F3} sur la figure IV.11). Il est évident que les développements présentés dans la section sur la gestion du mouvement sont encore valables. En effet, dans le cadre d'un calcul multi-statique, la matrice \mathcal{L}_{per}^B n'étant qu'une somme de matrices du type de celle présentée figure IV.9, seuls ses termes extra-diagonaux sont à recalculer à chaque étape.

Parenthèse sur les cas infiniment périodiques

Ces développements présentés pour le cas spécifique au moteur d'un nombre de périodicités fini autour d'un axe peuvent être utilisés pour le traitement d'une périodicité infinie dans une direction donnée (dont un exemple est présenté figure IV.12) au prix d'une approximation : en effet, il semble impossible d'ajouter un nombre infini de termes correspondant à un nombre infini de domaines périodiques dans les matrices \mathcal{L}_{per}^B et \mathcal{G}_{per}^B :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{per}^B)_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,R} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,R} + \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,Fk} l_j^{T,R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^F \left(\int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \\
(\mathcal{G}_{per}^B)_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i^{E,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,R} + \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^F \left(\frac{1}{l_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,Fk} \right)
\end{aligned} \tag{IV.27}$$

Néanmoins, on peut négliger les contributions des domaines périodiques jugés trop loin. En effet, les interactions étant proportionnelles à $\log(\frac{1}{r})$, en évaluant le terme :

$$c^k = \max_{i \in \mathbb{N}_k, j \in \mathbb{N}_l} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,Fk} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \times \max_{i \in \mathbb{N}_k, j \in \mathbb{N}_l} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,R} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,R} \right)^{-1} \quad (\text{IV.28})$$

et en déterminant la valeur absolue de l'indice K dont la valeur de c^K est inférieure à une tolérance fixée par l'utilisateur, on peut tronquer les termes d'interaction à distance en effectuant une erreur mineure :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{per}^B)_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,R} l_j^{T,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,R} + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \nu_j^R}{l_i^{E,Fk} l_j^{T,R}} \sum_{k=-K}^K a_k^F \left(\int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \\ (\mathcal{G}_{per}^B)_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_i^{E,R}} \int_{\Gamma_i^{E,R}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,R} + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K a_k^F \left(\frac{1}{l_i^{E,Fk}} \int_{\Gamma_i^{E,Fk}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_a^{per}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta H_{cn}^R G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} \right\} d\Gamma_i^{E,Fk} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

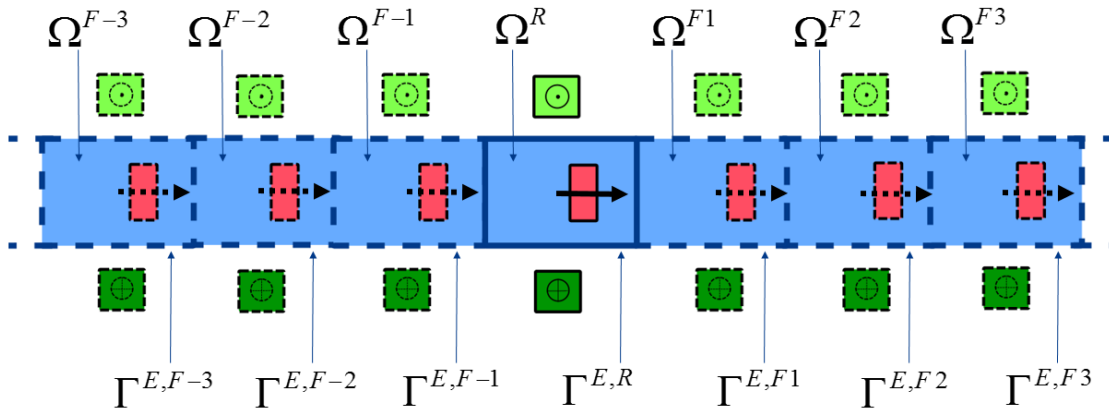


FIGURE IV.12 – Exemple d'un système périodique infini contenant aimants et bobines

Cette méthode peut être utilisée par exemple pour modéliser un fil de Litz avec les méthodes intégrales [36].

Implications sur le type de solveur utilisé

Il est usuel dans le domaine des méthodes numériques d'utiliser des solveurs itératifs pour résoudre des systèmes linéaires de grande taille. En effet, dans la méthode des éléments finis, les dizaines de milliers de degrés de liberté aboutissent à des systèmes linéaires creux de taille importante dont la résolution par des méthode itératives est de complexité $n \log n$ (où la matrice du système linéaire est de dimension $n \times n$). Au contraire des résolutions itératives, la résolution directe via une décomposition LU de la matrice du système à résoudre présente une complexité $\frac{2n^3}{3}$. Dans ces conditions de nombre de degrés de liberté important, il est inconcevable d'utiliser une méthode directe pour résoudre le système car elle prendrait trop de temps, sans parler de la mémoire nécessaire qui serait elle aussi bien plus importante que dans le cas d'un solveur itératif. Il est possible d'utiliser des bibliothèques de calcul multicoeur ou sur carte graphique pour rendre les méthodes directes plus compétitives.

Néanmoins, pour des problèmes à faible nombre d'inconnues, les méthodes directes sont bien plus efficaces car la mécanique de résolution des algorithmes itératifs devient trop lourde par rapport au nombre d'inconnues. Pour s'en convaincre, nous avons testé deux types de solveurs sur le cas test présenté dans le chapitre précédent pour des qualités de maillage différentes. Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau IV.3. La matrice éléments finis \mathcal{R}^B a été utilisée comme pré-conditionneur dans le cas du solveur itératif.

TABLE IV.3 – Temps de résolution pour les deux solveurs en fonction du nombre d'inconnues

nombre d'inconnues	99	169	282	416	847	2700
temps de résolution GMRES (s)	0.48	0.70	0.91	1.40	3.0	11
temps de résolution LU (s)	0.21	0.30	0.54	0.86	3.1	78

On constate que pour un nombre d'inconnues inférieur à environs 800, il semble plus efficace d'utiliser un solveur direct qu'un solveur itératif. Il s'agira de garder ce chiffre en tête pour le chapitre suivant. On notera que le système IV.24 est auto-jugé dans le cas où on utilise un solveur itératif. Pour utiliser un solveur direct, il est nécessaire de jauger le système en fixant un degré de liberté par région non connexe.

IV.4 Validation de la méthode et étude comparative de performances

Après avoir présenté la formulation retenue dans le chapitre précédent, la méthode de calcul du second membre et les méthodes d'optimisation dans ce chapitre, nous pouvons désormais la tester tant sur le point de la précision que sur les performances en terme de temps de calcul. Nous avons choisi un moteur synchrone à aimants permanents contenant 4 paires de pôles au rotor et 24 encoches au stator. C'est donc un moteur $\frac{\pi}{4}$ anti-périodique dont un schéma est présenté en figure IV.13.

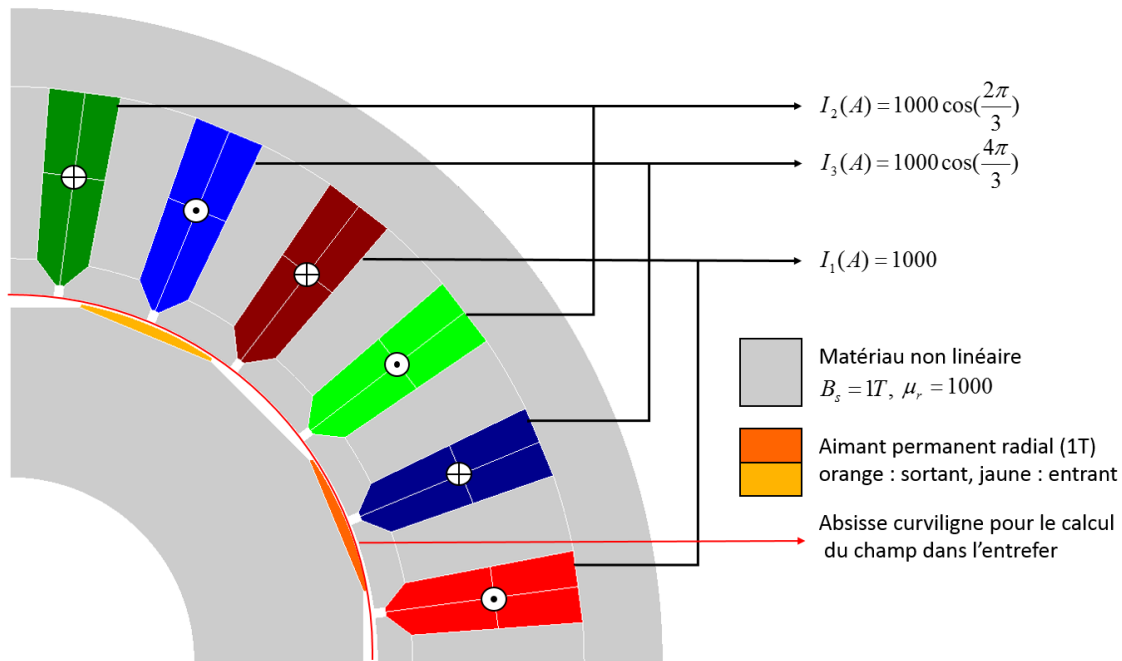


FIGURE IV.13 – Cas test utilisé pour l'étude de performance

La validation de la méthode passera par le calcul du champ dans l'entrefer du moteur (symbolisé par le quart de cercle en rouge sur la figure IV.13). En effet, bien que la formulation ait été validée dans le chapitre 1, le cas particulier du moteur électrique est autrement plus complexe qu'un simple contacteur : seulement une partie restreinte de la géométrie est constituée d'air et l'entrefer est très fin. Autant de raisons qui pourraient laisser croire que les méthodes intégrales se seraient pas performantes pour la simulation des moteurs électriques. Dans un premier temps nous validerons la formulation présentée dans ce chapitre sur le cas difficile du moteur électrique synchrone à aimant permanent et nous étudierons l'impact du maillage sur la précision de la méthode intégrale. Dans un second temps nous étudierons

l'impact de l'utilisation des périodicités sur les temps d'intégration et de résolution en méthode intégrale. Finalement la méthode intégrale de volume sera comparée à la méthode des éléments finis pour faire un état des lieux de ses performances.

IV.4.a Validation et impact de la qualité du maillage

Le cas test décrit précédemment a été simulé avec huit niveaux de maillages différents : nous avons utilisé des maillages à 768, 1096, 1552, 3736, et 6264 inconnues pour le moteur complet. La méthode d'intégration analytique retenue est la CAC ("circle analytical correction", voir chapitre 1). Nous avons utilisé 2 points de Gauss par élément linéique pour l'intégration de la matrice \mathcal{L}^B (et donc par extension pour le second membre \mathcal{G}^B (se reporter à l'équation IV.22)). En effet, on a constaté dans le chapitre 1 que l'influence du nombre de points de Gauss par élément linéique est faible lorsque l'on utilise une méthode d'intégration analytique efficace.

Les résultats de ce premier test pour la simulation d'un moteur sont consignés dans le tableau IV.4.a et les graphes IV.14, IV.15, IV.16 et IV.17. La grandeur utilisée comme test est la projection suivant l'axe Ox de l'induction dans l'entrefer le long de l'abscisse curviligne représentée en rouge sur la figure IV.13. Deux critères seront utilisés, la moyenne des écarts entre les solutions fournies par la méthode intégrale de volume et une solution obtenue par la méthode des éléments finis dont la convergence a été atteinte et la valeur maximale de cet écart :

$$\text{écart moyen} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{H_x^{VIM}(\theta_i) - H_x^{ref}(\theta_i)}{H_x^{ref}(\theta_i)} \right| \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{écart max} = \max_{i=0, \dots, N-1} \left| \frac{H_x^{VIM}(\theta_i) - H_x^{ref}(\theta_i)}{H_x^{ref}(\theta_i)} \right| \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{avec } \theta_i = \frac{i\pi}{4(N-1)} \quad (\text{IV.32})$$

où $N = 200$. La figure IV.14 résume ces écarts et les valeurs relatives à cette figure sont consignées dans le tableau IV.4.a. Les graphes IV.15, IV.16 et IV.17 présentent quand à eux les profils de la composante suivant l'axe Ox de l'induction dans l'entrefer obtenus par la méthode intégrale pour des maillages de 768, 3736 et 6264 éléments, ainsi que par la méthode des éléments finis ayant convergé. La figure IV.16 est un agrandissement de la figure IV.15 centré sur le premier saut d'induction. La figure IV.17 est un agrandissement de la figure IV.15 centré sur le second saut d'induction sur laquelle les solutions à 768 et 3736 éléments ont été retirées.

On peut tirer plusieurs conclusions de cette première batterie de tests :

TABLE IV.4 – Écart relatif moyen et maximum par rapport à la méthode des éléments finis convergée

nombre d'inconnues	768	1096	1552	3736	6264
écart moyen (%)	2,60	2,59	2,10	1,18	0,53
écart maximal (%)	21,80	21,90	14,99	10,6	5,08

- On constate sur la figure [IV.14](#) que même pour un niveau de maillage très faible - 768 éléments - l'écart avec la solution éléments finis (que l'on considère dans un premier temps comme une référence) est de moins de 3%. Ce résultat est de bonne augure dans le contexte de pré-dimensionnement dans lequel nous nous sommes placés dans ces travaux.
- On constate néanmoins que l'écart maximal reste important même lorsque l'on utilise un maillage fin. Ces écarts maximaux importants apparaissent lors d'une variation brutale du champ comme le permettent de constater la figure [IV.17](#) et dans une moindre mesure les figures [IV.15](#) et [IV.16](#). Cet écart maximal important est interprété par le fait que ce cas test, bien plus compliqué que celui présenté en chapitre 2, demande un maillage extrêmement fin pour converger. Nous ne pouvons pas nous permettre dans l'état actuel du code d'utiliser des maillages plus fins que 7000 éléments car la prise en compte des périodicités demande beaucoup d'espace mémoire. Néanmoins, dans un contexte de pré-dimensionnement, une précision moyenne de moins de 0.5% est peu intéressante.

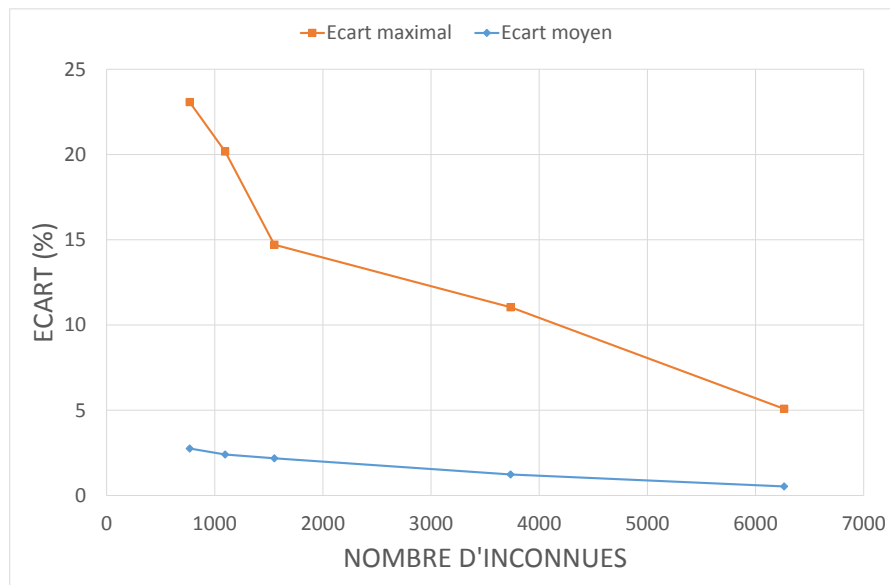


FIGURE IV.14 – Écarts relatifs moyens et maximaux par rapport à la méthode des éléments finis convergée

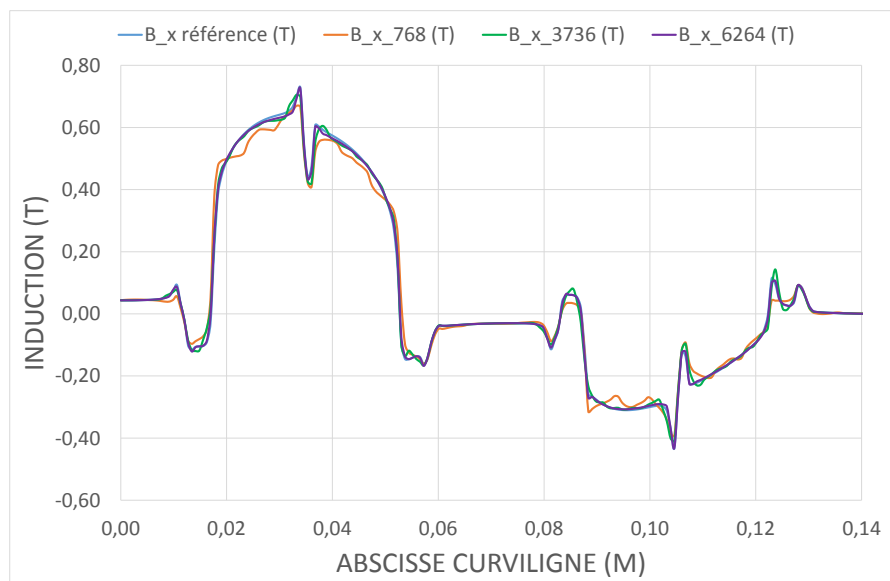


FIGURE IV.15 – Profil de la composante x de l'induction dans l'entrefer pour trois niveaux de maillages

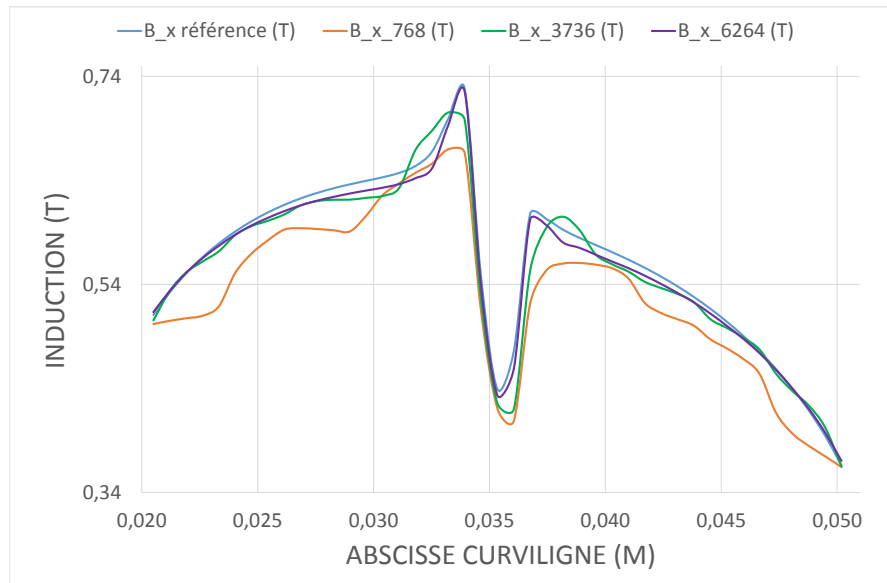


FIGURE IV.16 – Zoom de la figure IV.15 sur le premier pic d'induction

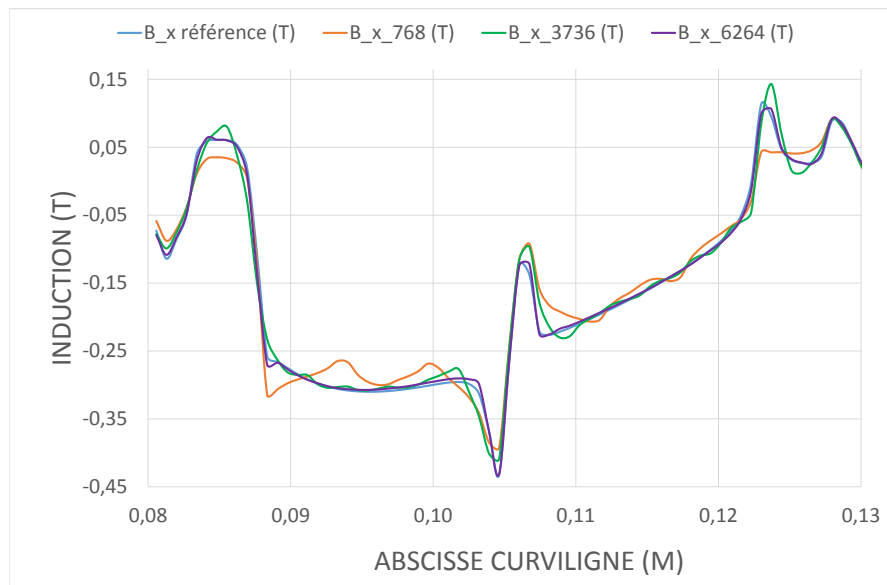


FIGURE IV.17 – Zoom de la figure IV.15 sur le second pic d'induction

IV.4.b Gains en temps de calcul apportés par l'utilisation des périodicités

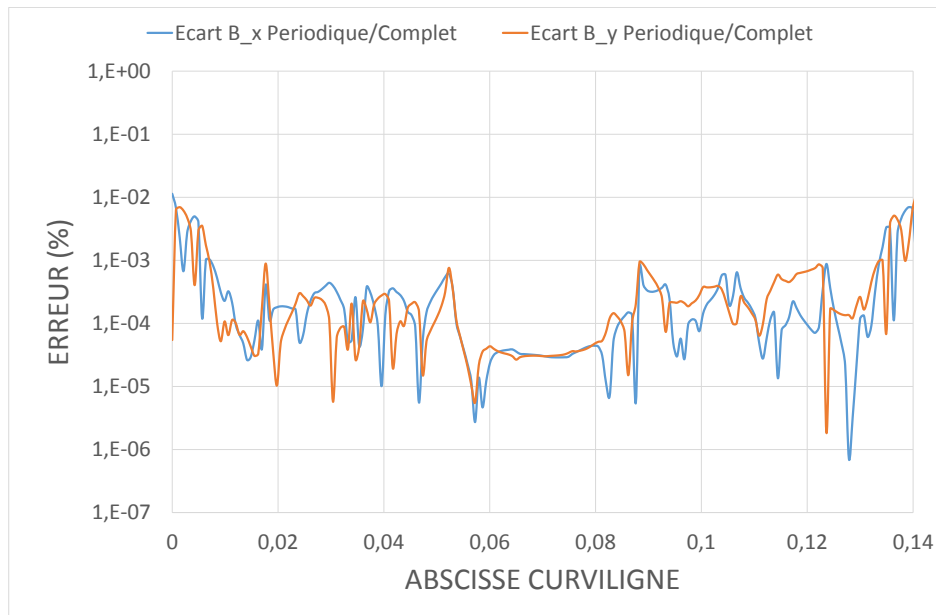


FIGURE IV.18 – Écart entre la solution obtenue avec le maillage complet et la solution obtenue avec le maillage périodique

Pour étudier l'impact de l'exploitation des périodicités, nous avons utilisé le cas test présenté figure IV.13 dans une situation où les courants I_1 , I_2 et I_3 sont nuls. Nous avons utilisé trois maillages, un à 530, un à 1640 et un à 2970 éléments pour la géométrie complète. Nous avons exploité pour ces deux maillages le fait que le problème soit $\pi/2$ périodique ainsi que $\pi/4$ anti-périodique et nous avons utilisé les deux types de solveurs à notre disposition. En préambule, nous avons évalué l'écart entre le résultat du calcul du champ dans l'entrefer entre la formulation $\pi/4$ anti-périodique et la formulation pour la géométrie complète pour le maillage à 530 éléments. L'écart entre les deux formulations peut être trouvé figure IV.18 où il est exprimé en %. On constate que celui-ci est minimale (majoré par $10^{-2}\%$). Il n'est néanmoins pas nul comme on pourrait s'y attendre ce qui peut être expliqué par l'accumulation d'erreurs numériques introduites par l'intégration et les itérations du solveur non linéaire.

Les tableaux IV.5, IV.6 et IV.7 résument les temps nécessaires pour les différents étapes du calcul pour les trois maillages, les deux types de solveur pour une périodicité et une anti-périodicité. Plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- D'un point de vue théorique, la matrice \mathcal{L}^B requiert

$$N_{int} = Card(\Gamma^E)Card(\Gamma^T) \quad (IV.33)$$

intégrations. La matrice \mathcal{L}_{per}^B requiert quand à elle

$$N_{int}^{per} = (N_F + 1)Card(\Gamma^{E,R})Card(\Gamma^{T,R}) \quad (IV.34)$$

Un lecteur avisé constatera que

$$(N_F + 1)Card(\Gamma^{E,R})Card(\Gamma^{T,R}) > \frac{Card(\Gamma^E)Card(\Gamma^T)}{N_F} \quad (IV.35)$$

En effet, l'introduction des domaines fantômes fait apparaître de nouvelles arêtes externes. La matrice \mathcal{L}_{per}^B est donc plus petite que \mathcal{L}^B (ouf!) mais demande néanmoins plus d'intégrations que $N_{int}/(N_F + 1)$ où N_{int} est le nombre d'intégrations pour la géométrie complète. On peut constater cela dans les trois tableaux IV.5, IV.6 et IV.7 : les temps d'intégration du système dans le cas anti-périodique sont supérieurs aux temps nécessaires à l'intégration du système dans le cas de la géométrie complète divisé par le nombre d'anti-périodicités.

- On constate que le solveur direct permet d'atteindre la convergence en moins d'itérations. Cela s'explique par le fait que durant chaque itération de l'algorithme de Newton Raphson le résidu obtenu par le solveur direct est de meilleure qualité.
- Comme on a pu le constater dans le paragraphe IV.3, on remarque dans le tableau IV.7 que lorsque le nombre d'inconnues est trop important, il devient problématique d'utiliser le solveur direct.
- On constate que lorsque la densité du maillage est suffisante pour que les temps d'intégration et de résolution soient prépondérants devant les opérations d'architecture, le gain en temps de calcul est toujours supérieur à $(N_F + 1)$. Au contraire, lorsque le nombre d'inconnues est trop faible (tableau IV.5), les opérations architecturales prennent le pas sur les opérations d'intégration et de résolution des systèmes linéaires, résultant une augmentation du temps de calcul. En effet, on constate que la création et la gestion dans la

mémoire des 7×4 ¹ petites matrices nécessaires à la construction des matrices d'interaction entre les domaines fantômes et le domaine réel prends plus de temps que l'intégration et la résolution elle même. On a donc un temps de création de construction du système linéaire du même ordre de grandeur pour une anti-périodicité (80 inconnues) que pour le maillage complet à 530 inconnues (!!). Ce phénomène est atténué dans le cas du solveur GMRES car on n'alourdit pas la phase de construction du système linéaire d'intégrations partielles comme on le fait pour le solveur direct. Il est possible de le faire d'un point de vue technique mais notre code n'est pas optimisé pour une telle méthode. Il n'est néanmoins pas facile d'établir un critère permettant de choisir entre utiliser une périodicité (plus d'inconnues mais architecture plus simple) qu'une anti-périodicité (moins d'inconnues mais architecture plus complexe) car cela dépend à la fois du nombre de périodicité total du moteur ainsi que du nombre de mailles du problème.

TABLE IV.5 – Résultats pour le maillage à 530 éléments

	Construction du système linéaire	Une itération du solveur NL (nombre total d'itérations)	Total
Géométrie complète (GMRES)	0.30s	0.19s (6)	1.49s
Géométrie complète (LU)	0.34s	0.10s (4)	0.92s
Domaine périodique (GMRES)	0.11s	0.074s (5)	0.49s
Domaine périodique (LU)	0.16s	0.025s (3)	0.26s
Domaine anti-périodique (GMRES)	0.11s	0.057s (5)	0.41s
Domaine anti-périodique (LU)	0.27s	0.011s (3)	0.31s

1. Il y a 7 domaines fantômes et pour chaque matrice d'interaction entre un domaine fantôme et le domaine réel on crée en réalité les 4 sous matrices présentées dans le paragraphe "intégrations partielles" IV.2.a

TABLE IV.6 – Résultats pour le maillage à 1640 éléments

	Construction du système linéaire	Une itération du solveur NL (nombre total d'itérations)	Total
Géométrie complète(GMRES)	2.52s	0.77s (9)	9.93s
Géométrie complète (LU)	2.09s	2.13s (7)	20.47s
Domaine périodique (GMRES)	0.58s	0.20s (8)	2.08s
Domaine périodique (LU)	0.56s	0.12s (5)	1.18s
Domaine anti-périodique (GMRES)	0.29s	0.091s (8)	1.01s
Domaine anti-périodique (LU)	0.32s	0.044s (5)	0.61s

TABLE IV.7 – Résultats pour le maillage à 2970 éléments

	Construction du système linéaire	Une itération du solveur NL (nombre total d'itérations)	Total
Géométrie complète (GMRES)	4.8s	1.38s (9)	17.85s
Géométrie complète (LU)	7.35s	11.1s (7)	107.4s
Domaine périodique (GMRES)	1.36s	0.41s (9)	5.22s
Domaine périodique (LU)	1.35s	0.37s (6)	4.1s
Domaine anti-périodique (GMRES)	0.73s	0.21s (9)	2.67s
Domaine anti-périodique (LU)	0.85s	0.11s (6)	1.70s

IV.4.c Comparaison de performances avec la méthode des éléments finis

Nous avons mis en lumière le fait que la méthode intégrale permettait d'utiliser des maillages très légers. Cela est dû à une combinaison de facteurs favorables que sont la non nécessité de mailler l'air, et le fait de prendre en compte des interactions de type noyau de Green qui nous permet d'être aussi efficace que possible sur un

maillage donné. Ces deux points sont les points cruciaux qui la différencient de la méthode des éléments finis. En effet, la nécessité de mailler l'entrefer dans le cadre de la méthode des éléments finis impose des contraintes fortes sur le nombre d'inconnues minimum à utiliser. Faire décroître ce nombre d'inconnues n'est pas chose facile et se fait bien souvent au détriment de la qualité des éléments (et donc de la solution). Ceci est illustré figure IV.19. Cette contrainte disparaît pour la méthode intégrale

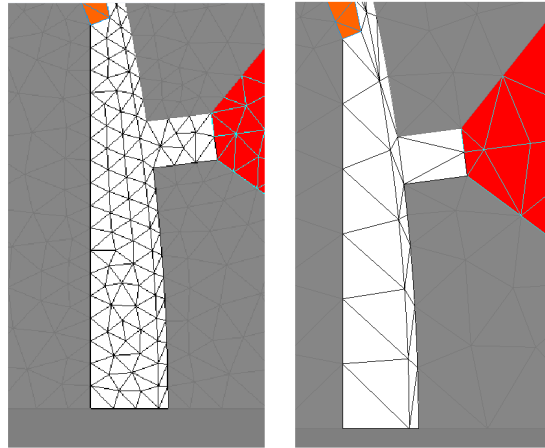


FIGURE IV.19 – Maillages éléments finis utilisés pour la comparaison avec la méthode intégrale - maillage de bonne qualité à gauche et de mauvaise qualité à droite

de volume présentée et permet d'utiliser des maillages à nombre d'inconnues très faible, comme celui utilisé dans le paragraphe précédent (530 inconnues pour le moteur complet soit 80 éléments pour un huitième de moteur) dont une vue est présentée figure IV.20. Nous avons comparé les temps de résolution ainsi que la

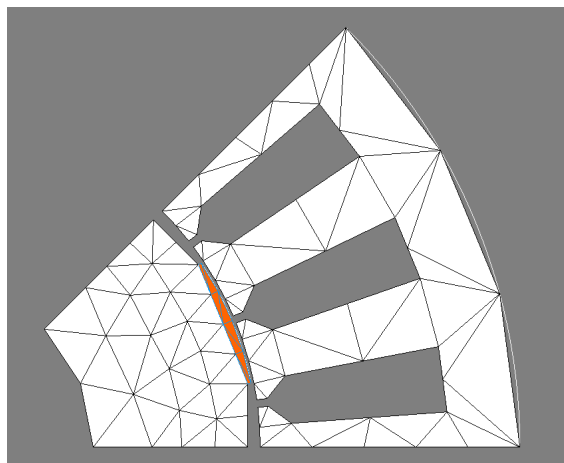


FIGURE IV.20 – Maillage d'une anti-périodicité à 80 éléments

précision des deux méthodes (méthode des éléments finis et méthode intégrale) pour mettre en évidence la capacité qu'a la méthode intégrale de volume à traiter des problématiques de pré-design. Nous avons utilisé le cas test précédent (géométrie présentée figure IV.13 avec les courants nuls) pour deux niveaux de maillages pour chaque méthode :

- les maillages à 1096 éléments et 6264 éléments pour la géométrie complète (soit 120 et 800 éléments pour une anti-périodicité) déjà utilisés dans le paragraphe IV.4.a pour la méthode intégrale de volume
- des maillages à 12000 et 20000 éléments pour la géométrie complète pour la méthode des éléments finis (soit 1500 et 2500 éléments pour une anti-périodicité). Ces deux maillages correspondent aux deux maillages présentés figure IV.19.

Dans le cas de la méthode des éléments finis, les symétries ont également été exploitées pour réduire le domaine d'étude. Les temps de calcul et l'erreur moyenne avec la valeur de "référence" calculée par la méthode des éléments finis dont la solution a convergé sont proposés dans le tableau IV.8. On constate alors que si la méthode des

TABLE IV.8 – Temps de calcul et précision obtenue pour les deux méthodes

	FEM 20000 DOF	FEM 12000 DOF	VIM 1096 DOF	VIM 6264 DOF
Temps de calcul	3.6s	3.1s	0.45s	4.6s
Erreur moyenne	0.55%	2.04%	1.5%	0.51%

éléments finis est adaptée pour obtenir des résultats précis dans un temps raisonnable, elle n'est que faiblement efficace dans un contexte de pré-dimensionnement. A l'opposé, la méthode intégrale - en plus d'être très efficace pour des calculs précis sur maillages dense - semble aussi très adaptée pour le pré-dimensionnement lorsque la qualité du maillage est fortement dégradée. De plus, la gestion du mouvement est simplifiée en méthode intégrale où il n'est nécessaire que de déplacer les noeuds des parties du maillage en mouvement. Aucune autre opération n'est nécessaire contrairement à la méthode des éléments finis où un remaillage partiel où une interpolation sont à mettre en place.

IV.5 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre les développements spécifiques à la simulation des moteurs électriques en méthode intégrale. Après avoir mis en place une méthode de calcul du champ magnétique source dans le moteur électrique efficace et adaptée à notre problématique (utilisation des méthodes intégrales et faible nombre d'inconnues), nous avons détaillé comment il était possible d'optimiser les calculs dans le cas du mouvement d'une pièce (ici : le rotor) en mettant en avant le fait que seulement une partie du système linéaire n'était à réintégrer dans le cadre d'un calcul multi-statique. Nous avons enfin présenté une méthode pour prendre en compte les périodicités de la géométrie dans le but de réduire le nombre d'inconnues de résolution et ainsi diminuer fortement les temps de calcul. Tous ces développements ont finalement été validés par un cas test exigeant (calcul de l'induction magnétique dans l'entrefer d'un moteur synchrone à aimants permanents) et nous avons comparé la méthode présentée avec la méthode des éléments finis qui fait lieu de référence dans le monde de la simulation électromagnétique. Nous avons montré qu'avec un nombre d'inconnues très faible, les résultats fournis par notre méthode étaient de bonne qualité (moins de 5% d'erreur moyenne même avec le maillage le plus faible possible). Enfin, nous avons montré que dans le cadre d'une problématique de pré-design, les méthodes intégrales étaient très performantes dans la mesure où elles fournissent des résultats de bonne qualité dans des temps bien inférieurs à la méthode des éléments finis.

Chapitre V

Calculs de couple et de flux

Le quatuor décimé n'était alors plus composé que de deux hommes séparés par quelques minutes. François tenait tête à un Kilian pour la première fois impuissant. L'écart grandit sans cesse jusqu'à Chamonix où l'on assista au sacre du roi François. Ce chapitre ne raconte pas leur histoire.

SOMMAIRE

V.1	CALCUL DE COUPLE	93
V.1.a	État de l'art	93
V.1.b	Utilisation du tenseur de Maxwell en méthodes intégrales	95
V.1.c	Utilisation de la dérivée de la co-énergie en méthodes intégrales	97
V.1.d	Résultats	98
V.2	CALCUL DE FLUX DANS LES INDUCTEURS	109
V.3	CONCLUSIONS	119

Résumé

Ce dernier chapitre est destiné à traiter de l'exploitation de la solution fournie par la méthode intégrale de volume. Deux grandeurs sont prépondérantes dans le cadre du dimensionnement d'un moteur : le couple et le flux passant à travers les bobines. Après un rapide état de l'art des méthodes de calcul de couple, deux méthodes adaptées à la formulation intégrale de volume seront présentées. Enfin, une méthode semi analytique de calcul de flux dans les bobines sera développée et testée.

V.1 Calcul de couple

Le calcul des forces dans le domaine de la magnéto-statique est un problème épineux. Il a fait l'objet de beaucoup de recherches et de publications ces 30 dernières années [22, 40, 53, 55]. Avant de présenter les méthodes développées pendant ces travaux de thèse, nous effectuerons une revue rapide des méthodes déjà existantes et utilisées dans les codes de calcul les plus répandus. Il est bon de noter que les forces et couples que l'on cherche à calculer dans ces travaux sont les grandeurs globales qui s'appliquent à des pièces mécaniques et pas des grandeurs locales.

V.1.a État de l'art

Deux méthodes de calcul de forces électro-magnétiques font référence dans le domaine. Il s'agit pour l'une de l'utilisation du tenseur de Maxwell [54] et pour l'autre du principe des travaux virtuels [22]. Nous présenterons aussi la méthode des moments magnétiques équivalents.

Utilisation du tenseur de Maxwell

Cette méthode repose en dimension 2 sur l'intégration surfacique de la divergence du tenseur de Maxwell $[T]$ défini dans le cadre de la magnéto-statique par :

$$T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 H_k B_k \quad (\text{V.1})$$

On peut obtenir la densité de force magnétique à partir du tenseur de Maxwell via :

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot [T] \quad (\text{V.2})$$

Cette densité de force magnétique permet de calculer la force globale en l'intégrant sur le domaine concerné que l'on notera Ω :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot [T] \, d\Omega \quad (\text{V.3})$$

Cette expression peut être transformée par le théorème de Stokes pour la ramener sur la frontière du domaine d'étude notée Γ :

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} [T] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{V.4})$$

En décomposant le champ et l'induction magnétique en leurs composantes normales et tangentielles sur la frontière du domaine, on peut donner l'expression finale utilisable de la force magnétique globale :

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} (B_n H_t) \mathbf{t} + \frac{1}{2} (B_n H_n - B_t H_t) \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{V.5})$$

Le couple quant à lui est calculé via la formule :

$$\mathbf{C} = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times \left[(B_n H_t) \mathbf{t} + \frac{1}{2} (B_n H_n - B_t H_t) \mathbf{n} \right] d\Gamma \quad (\text{V.6})$$

Dans le cadre des éléments finis et lorsque la densité d'éléments permet d'avoir une valeur précise du champ et de l'induction sur la surface d'intégration, cette méthode donne de bons résultats. Ce n'est pas le cas dans le cadre de notre utilisation des méthodes intégrales car nous utilisons un faible nombre d'inconnues. En effet, sur la frontière du domaine, le champ et l'induction sont constants par élément, ce qui cumulé au faible nombre d'inconnues ne permet pas d'avoir une qualité suffisante du champ et de l'induction sur la frontière.

Utilisation du principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels repose sur la conservation de l'équilibre énergétique lors d'un déplacement virtuel appliqué à la partie concernée du domaine. Cette méthode est décrite précisément dans [18], et nous en rappellerons simplement les principes généraux ici. On utilise l'expression de la différentielle de l'énergie mécanique :

$$dW_{meca} = \nabla W_{meca} \, d\mathbf{u} \quad (\text{V.7})$$

Cette différentielle est également égale au travail virtuel des forces externes \mathbf{F} appliquées sur Ω lors d'un déplacement infinitésimal $d\mathbf{u}$:

$$dW_{meca} = \mathbf{F} \, d\mathbf{u} \quad (\text{V.8})$$

En considérant que seule la force magnétique contribue au travail mécanique, on peut obtenir sa composante suivant la direction unitaire \mathbf{u} notée F_u en l'exprimant sous la forme :

$$F_u = \nabla W_{meca} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial W_{meca}}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{V.9})$$

Au prix de l'hypothèse de courant constant, on peut démontrer [18] que la composante F_u est égale à :

$$F_u = \frac{\partial W_{mag}^{co}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_I \quad (\text{V.10})$$

où W_{mag}^{co} est la co-énergie magnétique du système. La co-énergie magnétique est définie par la relation :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega \quad (\text{V.11})$$

On obtient comme expression de la force mécanique :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_x} \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_y} \left(\int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega \right) \mathbf{e}_y \quad (\text{V.12})$$

On effectue alors de manière formelle le calcul de cette expression (qui est réalisé dans [18] pour des matériaux ferromagnétiques sans aimants permanents) pour obtenir une expression finale de la force magnétique appliquée au domaine Ω .

Le développement de cette méthode date des années 1980 [22]. Cette méthode est aujourd'hui considérée comme la méthode de référence pour le calcul de forces et de couples et est implémentée dans nombre de logiciels industriels (on peut citer le logiciel Flux développé par Altair Engineering).

Dérivée de la co-énergie

Contrairement à la méthode des travaux virtuels qui requiert une dérivation formelle de la co-énergie magnétique, il est possible de calculer celle-ci à priori pour deux positions du domaine Ω proches de la position à laquelle nous voulons calculer la force et de calculer la dérivée de manière numérique par la méthode des différences finies. Cette méthode sera approfondie d'une manière adaptée aux formulations intégrales dans les paragraphes suivants.

Méthodes par équivalences

Il est aussi possible de substituer les matériaux magnétiques par une densité de courant équivalente $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ ou par une densité de charges équivalentes $\mathbf{Q} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$. La force magnétique est alors calculée en faisant une analogie avec la formule de Lorentz ou la loi de Coulomb [52]. On peut démontrer facilement que cette méthode est équivalente à celle utilisant le tenseur de Maxwell dans le cas où les matériaux sont linéaires [52].

V.1.b Utilisation du tenseur de Maxwell en méthodes intégrales

Présentation de la méthode

Comme cela a été rapidement évoqué dans le paragraphe sur le tenseur de Maxwell, il est difficile d'utiliser un contour défini par discrétisation pour le calcul du couple dans notre cadre d'utilisation des méthodes intégrales, le maillage utilisé étant trop lâche.

Une solution est donc de calculer le champ magnétique (ou l'induction magnétique) sur un contour fermé autour du domaine cible et d'effectuer ensuite l'intégration sur ce contour. Le calcul du champ dans l'air sur un contour quelconque permet d'obtenir un profil de champ magnétique bien plus lisse qu'en prenant les valeurs sur le maillage obtenues par la résolution. On utilise donc la solution sous forme d'induction magnétique pour calculer l'induction sur un contour Γ . En reprenant le formalisme utilisé dans le chapitre 2 pour les domaines réels et fantômes, on calcule l'induction sur le contour Γ via :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Gamma^{T,R}} \delta M_n G(r) d\Gamma^{T,R} + \sum_{k=1}^{N_F} \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Gamma^{T,Fk}} \delta M_n G(r) d\Gamma^{T,Fk} \quad (\text{V.13})$$

que l'on peut exprimer comme :

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N_{ft}} \int_{\Gamma_j^{T,R}} \delta M_n G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,R} + \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{j=1}^{N_{ft}} \int_{\Gamma_j^{T,Fk}} \delta M_n G(\mathbf{r}) d\Gamma_j^{T,Fk} \quad (\text{V.14})$$

Dans le cadre de notre problématique de calcul du couple du rotor d'un moteur électrique, le contour Γ est un cercle dans l'entrefer du moteur. Dans ce cas précis, on peut écrire l'expression V.6 en décomposant la force locale \mathbf{f} en une composante radiale et une composante tangentielle au contour Γ :

$$\mathbf{f} = \mathcal{F}(B_n, H_t) \mathbf{e}_r + B_n H_t \mathbf{e}_\theta \quad (\text{V.15})$$

Le fait de prendre un contour circulaire centré en le point par lequel passe l'axe de rotation permet de simplifier l'expression du couple fournie V.6 :

$$\mathbf{C} = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times [\mathcal{F}(B_n, H_t) \mathbf{e}_r + B_n H_t \mathbf{e}_\theta] d\Gamma \quad (\text{V.16})$$

qui devient :

$$\mathbf{C} = \int_{\Gamma} r \mathbf{e}_r \times B_n H_t \mathbf{e}_\theta d\Gamma = \int_{\theta} r^2 B_n H_t \mathbf{e}_\theta d\theta \mathbf{e}_z \quad (\text{V.17})$$

ce qui d'un point de vue numérique en notant $\Delta\theta$ le pas de discrétisation du contour Γ donne pour le couple appliqué sur le rotor :

$$\mathbf{C} = \sum_{i=0}^{N-1} r^2 B_n(\theta_i) H_t(\theta_i) \Delta\theta \mathbf{e}_z \quad (\text{V.18})$$

$$\text{avec } \theta_i = \frac{i2\pi}{N} + \frac{\Delta\theta}{2} \quad (\text{V.19})$$

Le contour étant baigné dans l'air de l'entrefer, il est aisé d'obtenir le champ magnétique \mathbf{H} à partir de \mathbf{B} . Pour obtenir un champ de bonne qualité dans l'entrefer (et donc un couple de bonne qualité) on utilisera la méthode de correction analytique FAC présentée dans le chapitre 1 lors du calcul de l'induction via la formule V.14. Dans notre exemple, le moteur présentant une $\frac{\pi}{2}$ périodicité, il est possible de ne calculer l'induction que sur un quart de cercle quelconque (et ce quelle que soit la position du rotor) pour accélérer les calculs. On a donc pour le couple appliqué sur le rotor :

$$\mathbf{C} = 4 \sum_{i=0}^{N-1} r^2 B_n(\theta_i) H_t(\theta_i) \Delta\theta \mathbf{e}_z \quad (\text{V.20})$$

$$\text{avec } \theta_i = \frac{i\pi}{2N} + \frac{\Delta\theta}{2} \quad (\text{V.21})$$

V.1.c Utilisation de la dérivée de la co-énergie en méthodes intégrales

Il est aussi possible, comme cela a été énoncé dans le paragraphe précédent, de calculer la coénergie magnétique et de la dériver pour obtenir le couple appliqué sur le rotor. Néanmoins, le calcul de la co-énergie d'un système ferromagnétique contenant des aimants permanents et des bobines est loin d'être trivial et de nombreux articles se contredisent régulièrement sur le sujet [3, 4, 31]. De plus, dans le cadre des méthodes intégrales, il est nécessaire de trouver une forme adaptée à la solution fournie par la formulation, et notamment au fait que le champ dans l'air n'est pas une information directement disponible.

Nous sommes partis de l'expression admise de la coénergie magnétique V.11 pour en trouver une forme adaptée à notre méthode, dont la démonstration est faite en annexe :

$$W_{mag}^{co} = W_0 + \int_{\Omega_m} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \, d\mathbf{H}' \right] d\Omega_m \quad (\text{V.22})$$

ou W_0 est l'énergie contenue dans les bobines dans le vide :

$$W_0 = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \mathbf{H}_0 \quad (\text{V.23})$$

On peut ensuite obtenir le couple appliqué sur le rotor via :

$$\mathbf{C}(\alpha) = \frac{dW_{mag}^{co}(\alpha)}{\partial\alpha} \quad (\text{V.24})$$

où α symbolise l'angle du rotor entre sa position courante et sa position initiale. Cette méthode, contrairement au tenseur de maxwell en méthode intégrale n'implique que très peu de calculs et est efficace lorsque l'on veut calculer la courbe du couple en fonction de la position du rotor. En effet, le calcul de la coénergie magnétique est numériquement quasiment gratuit. Néanmoins, si l'utilisateur veut calculer le couple en une seule position, deux résolutions proches de cette position seront nécessaires pour pouvoir calculer la dérivée V.24 par différences finies.

V.1.d Résultats

Nous reprenons le cas test utilisé dans le chapitre 2 dont le schéma et rappelé figure V.1. Pour ce moteur nous allons tester les deux méthodes présentées pour calculer le couple sur le rotor dans deux conditions différentes : le couple de denture qui correspond au couple lorsque le courant est nul dans les bobines et le couple en charge maximale pour un courant donné.

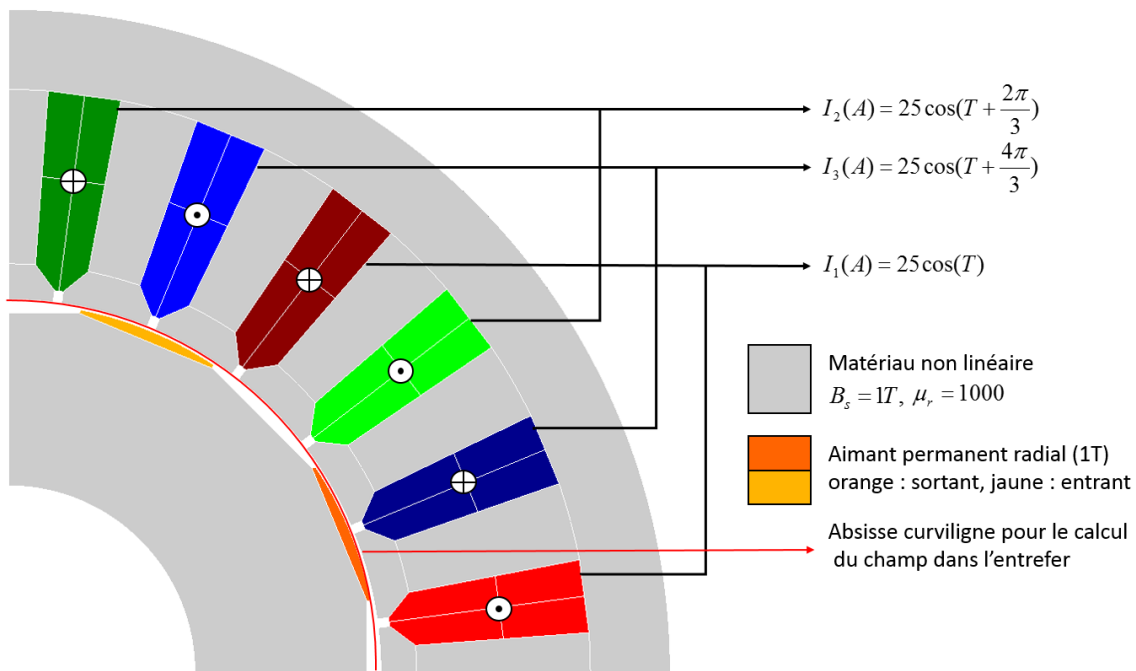


FIGURE V.1 – Cas test utilisé pour les calculs de couple et de flux

Choix de la discrétisation pour le calcul du couple via le tenseur de Maxwell

On constate que la formule du couple obtenu par le tenseur de Maxwell est fortement dépendante de la qualité de la discrétisation, c'est à dire la valeur du paramètre N

dans la formule V.20. En effet, choisir N trop faible donne une mauvaise approximation du champ dans l'entrefer et donc une valeur du couple fautive. On s'est donc placé dans le cas décrit ci-dessus, avec $T = 0$ et $\alpha = 0$. Nous avons calculé la valeur du couple par la méthode du tenseur de Maxwell pour différentes valeurs du paramètre N . Un graphe résumant cette expérience est disponible figure V.2. Nous avons considéré comme valeur de référence le couple obtenu avec une discrétisation de 400 points (l'écart entre la solution obtenue avec 300 points est la solution à 400 points est de 0.0016%, on considère donc que la méthode a convergé). L'écart est défini comme :

$$e = \left| \frac{C(D_i) - C(400)}{C(400)} \right| \quad (\text{V.25})$$

où D_i est la valeur de la discrétisation au point i , comprise entre 10 et 300.

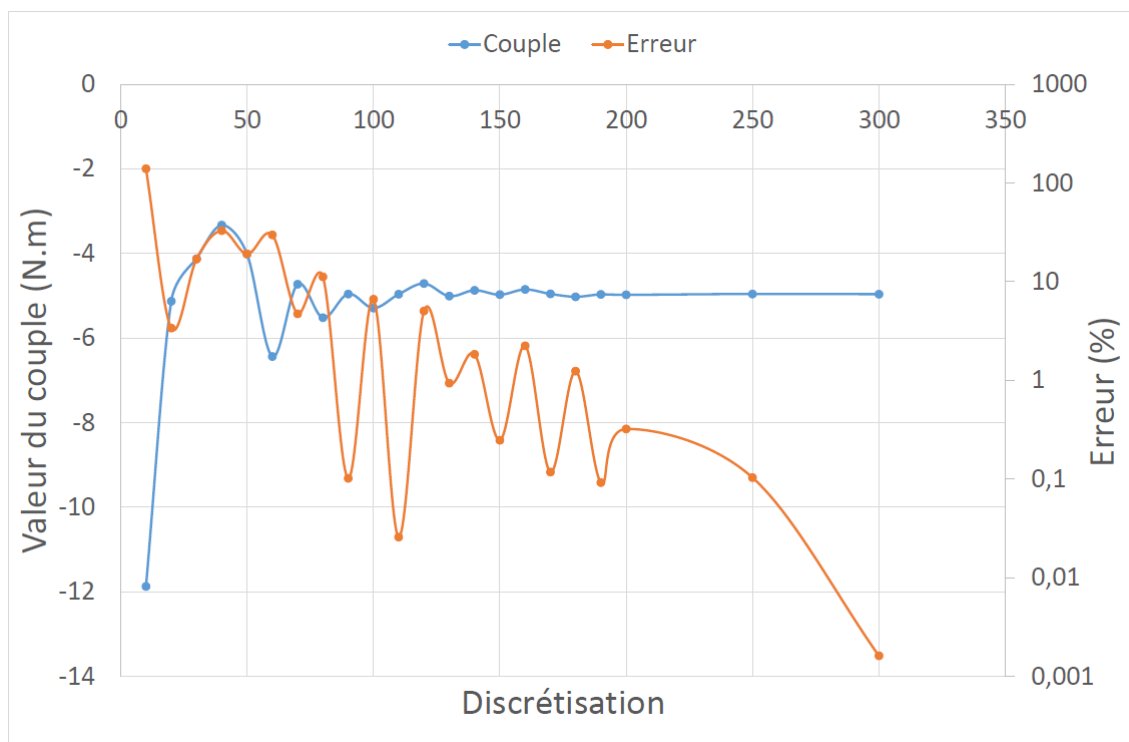


FIGURE V.2 – Convergence du calcul du couple de denture en fonction du paramètre N

On constate que pour obtenir une erreur de moins de 1% par rapport à la valeur de référence, une discrétisation de l'ordre de 200 points est nécessaire. C'est donc cette valeur qui sera utilisée dans la suite de ces travaux. Néanmoins, cette valeur est valable pour ce moteur. Si le profil de l'induction dans l'entrefer est plus "accidenté", il faudra envisager d'augmenter cette valeur de discrétisation. Pour palier à ce réglage

"à la main" de la discrétisation du calcul du tenseur de Maxwell, une piste serait d'utiliser une méthode auto-adaptative pour déterminer de manière spécifique à chaque géométrie le nombre N adapté au calcul. Nous n'avons pas eu le temps d'implémenter ce mécanisme.

Calcul du couple de denture

Dans un premier temps, nous nous concentrerons sur le couple de denture du moteur présenté dans le chapitre précédent. On se place donc dans le cas où le courant est nul et on cherchera à calculer une période de la courbe du couple qui s'applique sur le rotor à l'aide des deux méthodes présentées. Nous comparerons nos résultats à une courbe obtenue par la méthode des éléments finis dont le maillage est suffisamment fin pour obtenir une solution de référence. Nous avons utilisé quatre niveaux de maillages - grossier (G), moyen (M), fin (F) et très fin (TF) soit 530, 1640, 2970 et 7944 éléments¹ - et nous avons calculé l'écart moyen et maximal pour chaque méthode et chaque niveau de maillage. Ces résultats sont disponibles dans le tableau V.1. Les profils du couple en fonction de la position du rotor et de l'énergie ainsi que les écarts définis équation V.26 entre les valeurs calculées par les deux méthodes et la courbe de référence sont disponibles dans les figures V.3, V.4, V.5 et V.6.

$$\text{écart moyen} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{C^{VIM}(\alpha_i) - C^{ref}(\alpha_i)}{C^{ref}(\alpha_i)} \right| \quad (\text{V.26})$$

$$\text{écart max} = \max_{i=0, \dots, N-1} \left| \frac{C^{VIM}(\alpha_i) - C^{ref}(\alpha_i)}{C^{ref}(\alpha_i)} \right| \quad (\text{V.27})$$

$$\text{avec } \alpha_i = \frac{i\pi}{24(N-1)} \quad (\text{V.28})$$

où N est le nombre de points de la courbe. On divise par 24 car l'anti-périodicité du couple de denture est de 7.5 degrés (soit $\frac{\pi}{24}$).

1. Pour le maillage complet

TABLE V.1 – Écart moyen et maximaux pour les deux méthodes (EM : énergie magnétique, TM : Tenseur de Maxwell)

Maillage	écart moyen (EM)	écart max (EM)	écart moyen (TM)	écart max (TM)
grossier	79.5 %	159 %	46.1%	83.9%
normal	46.3 %	107 %	43.4%	79.3%
fin	7.10 %	21.7 %	11.2%	26.47%
très fin	2.4 %	5.89 %	2.40%	7.39%

TABLE V.2 – Temps total de résolution et de calcul de couple pour une position du rotor

Maillage	temps de résolution	temps de calcul de la co-énergie	temps de calcul par le tenseur de Maxwell
grossier	0.34s	0.026s	0.39s
normal	0.58s	0.035s	0.97s
fin	1.22s	0.044s	1.85s
très fin	7.85s	0.084s	4.91s

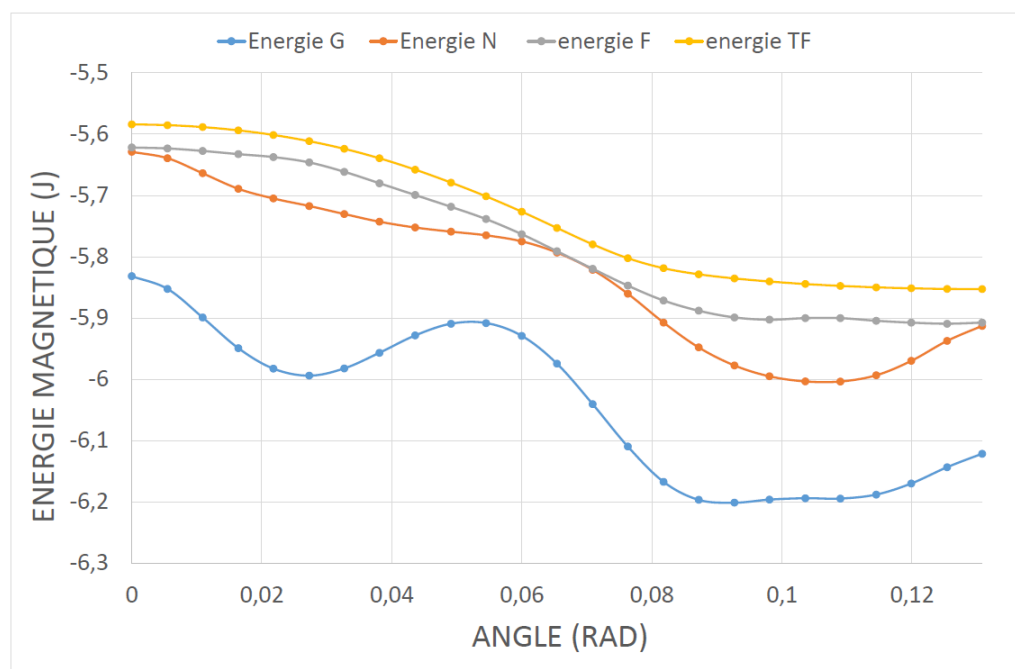


FIGURE V.3 – Énergie calculée dans le cadre de du calcul du couple de denture pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

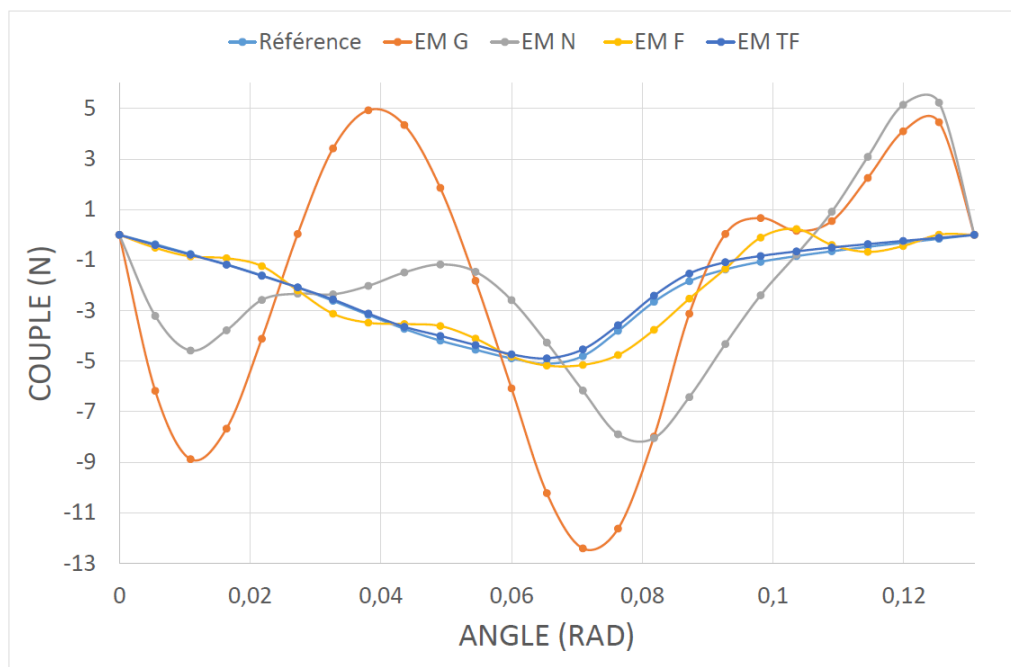


FIGURE V.4 – Couple de denture calculé par la dérivée de l'énergie pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

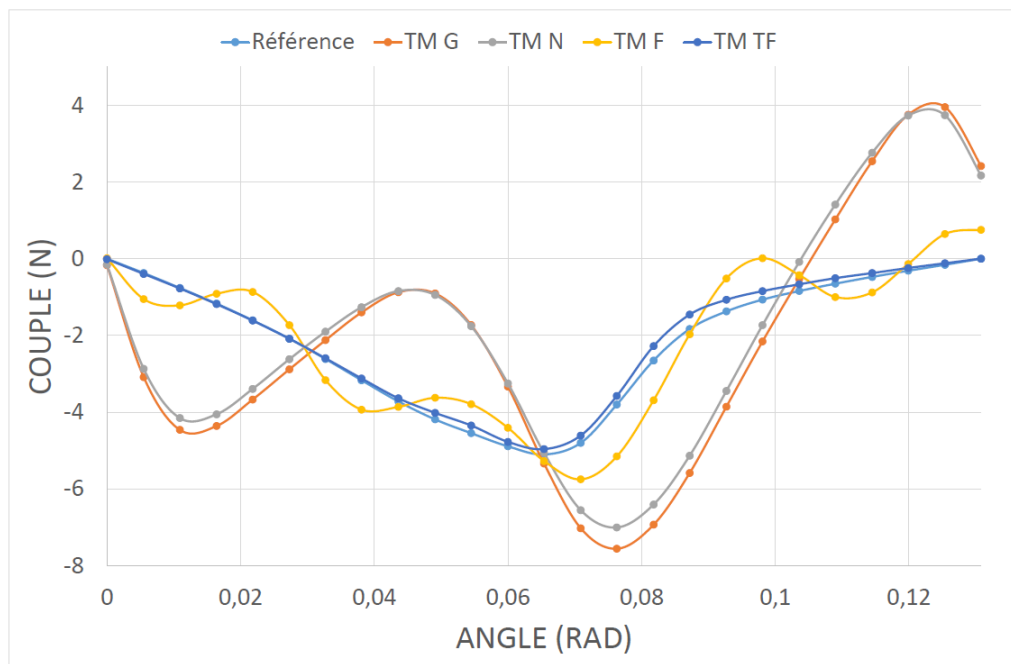


FIGURE V.5 – Couple de denture calculé par le tenseur de Maxwell pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

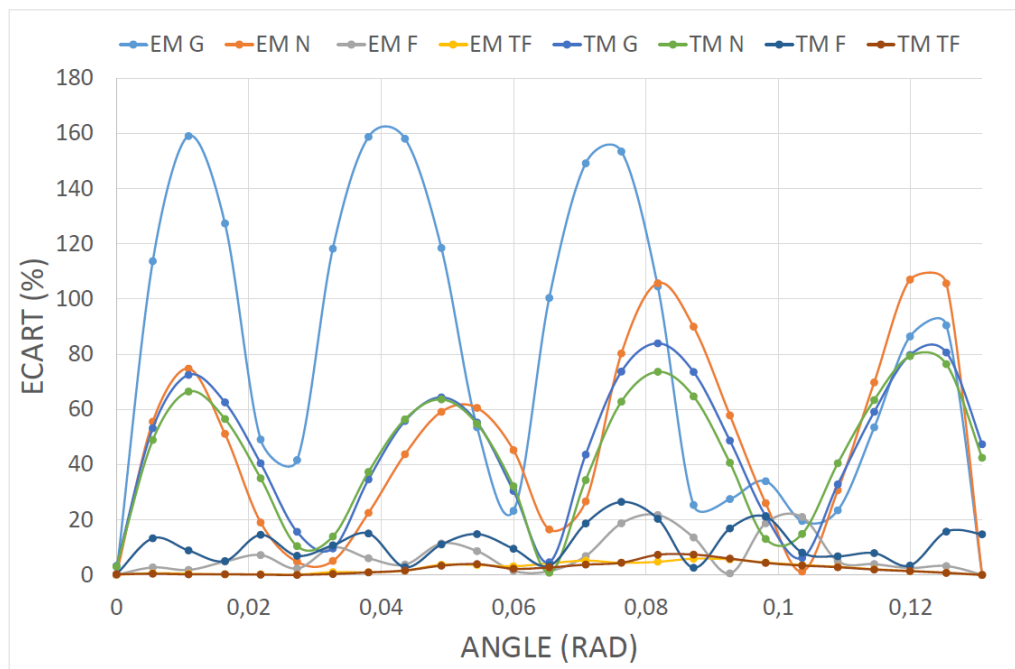


FIGURE V.6 – Écart entre les deux méthodes de calcul du couple de denture et la référence pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

Calcul du couple maximal

On cherchera à calculer le couple maximal pour un courant nominal de 25A dans chaque phase du moteur, les bobines ayant chacune 10 spires. Tous les conducteurs sont considérés en série (la phase A visible sur la figure V.1 est en série avec la phase A du quadrant suivant et ainsi de suite). On fait varier le courant dans les bobines sur une demi-période électrique (le problème étant anti-périodique, une demi période suffit) et on calcule le couple appliqué au rotor qui reste immobile avec les deux méthodes de calcul de couple présenté précédemment. L'alimentation des phases s'écrit donc :

$$I_1(A) = 25 \cos(T) \quad (\text{V.29})$$

$$I_2(A) = 25 \cos\left(T + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{V.30})$$

$$I_3(A) = 25 \cos\left(T + \frac{4\pi}{3}\right) \quad (\text{V.31})$$

en faisant varier T de 0 à π . Il est à noter que dans le cas où le courant électrique varie, l'utilisation de la dérivée de la co-énergie magnétique n'est pas optimale car ce calcul doit se dérouler à courant constant. Contrairement au cas du calcul du couple de denture où il suffisait de calculer la courbe de l'énergie en fonction de la position

puis d'en prendre une dérivée par la méthode des différences finies, il faut - dans le cas où le courant varie - effectuer deux résolutions pour des positions proches du rotor à courant fixé. On a donc le couple sur le rotor via :

$$\mathbf{C}(\alpha, T) = \frac{(W_{mag}^{co}(\alpha + \epsilon, T) - W_{mag}^{co}(\alpha - \epsilon, T))}{2\epsilon} \quad (\text{V.32})$$

où T est le paramètre faisant varier le courant, α la position du rotor (dans notre cas, $\alpha = 0$) et ϵ est un paramètre à choisir par l'utilisateur. Nous avons choisi $\epsilon = 10^{-3}$. On constate donc que cette méthode requiert deux résolutions par valeur de courant, ce qui la rend plus lourde à utiliser dans cette situation. Dans les faits, on effectue en premier toutes les résolutions avec un décalage de $+\epsilon$ de l'angle α puis ensuite toutes les résolutions avec un décalage $-\epsilon$. De ce fait, on effectue N résolutions ayant la particularité de ne nécessiter aucune réintégration de la matrice intégrale (car la géométrie ne bouge pas), ni de réintégrer le second membre dû aux bobines : en effet, mettre à jour le second membre issu des bobines se fait aisément. On décompose le champ source \mathbf{H}_0 en ses trois contributions venant des phases 1,2 et 3 :

$$\mathbf{H}_0(T) = \mathbf{H}_0^1(T) + \mathbf{H}_0^2(T) + \mathbf{H}_0^3(T) \quad (\text{V.33})$$

On obtient donc le second membre pour la valeur $T + \tau$ par :

$$\mathbf{H}_0(T + \tau) = \mathbf{H}_0^1(T) \frac{I_1(T + \tau)}{I_1(T)} + \mathbf{H}_0^2(T) \frac{I_2(T + \tau)}{I_2(T)} + \mathbf{H}_0^3(T) \frac{I_3(T + \tau)}{I_3(T)} \quad (\text{V.34})$$

Hormis pour la première valeur du paramètre T pour laquelle on effectue une intégration complète du système, un gain substantiel est donc réalisé. Ces optimisations sur la résolution dépassent le cadre du calcul via la dérivée de la co-énergie et s'appliquent tout autant lorsque que l'on utilise la méthode du tenseur de Maxwell. Les quatre mêmes niveaux de maillages utilisés dans le paragraphe précédent ont été repris pour cette étude. Comme dans le cas précédent, nous avons calculé l'écart moyen et maximal par rapport à une courbe obtenue par la méthode des éléments finis dont le maillage fournit une solution de référence- pour chaque méthode et chaque niveau de maillage. Ces résultats sont disponibles dans le tableaux [V.3](#). Les profils du couple en fonction de la valeur du paramètre T ainsi que les écarts entre les valeurs calculées par les deux méthodes et la courbe de référence sont disponibles dans les figures [V.7](#), [V.8](#), [V.9](#) et [V.10](#). Ces écarts sont définis équation [V.50](#). Les temps de calculs en fonction des maillages sont proposés dans le tableau [V.4](#). Les temps affichés sont les moyennes des temps de chaque itération (ainsi on prend bien en compte l'itération première qui est plus longue que les autres).

$$\text{écart moyen} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{C^{VIM}(T_i) - C^{ref}(T_i)}{C^{ref}(T_i)} \right| \quad (\text{V.35})$$

$$\text{écart max} = \max_{i=0, \dots, N-1} \left| \frac{C^{VIM}(T_i) - C^{ref}(T_i)}{C^{ref}(T_i)} \right| \quad (\text{V.36})$$

$$\text{avec } T_i = \frac{i\pi}{N-1} \quad (\text{V.37})$$

où N est le nombre de points de la courbe.

TABLE V.3 – Écarts moyens et maximaux pour les deux méthodes (EM : énergie magnétique, TM : Tenseur de Maxwell)

Maillage	écart moyen (EM)	écart max (EM)	écart moyen (TM)	écart max (TM)
grossier	8.52 %	15.72 %	6.37%	11.2%
normal	3.82 %	8.4 %	5.40%	10%
fin	1.78 s %	4.29 %	1.66%	3.06%
très fin	1.6 %	2.85 %	0.97%	1.72%

TABLE V.4 – Temps total de résolution et de calcul de couple pour une valeur de T

Maillage	temps de résolution	temps de calcul de la co-énergie	temps de calcul par le tenseur de Maxwell
grossier	0.081s	0.072s	0.52s
normal	0.21s	0.085s	0.97s
fin	0.51s	0.096s	1.85s
très fin	3.1s	0.13s	4.91s

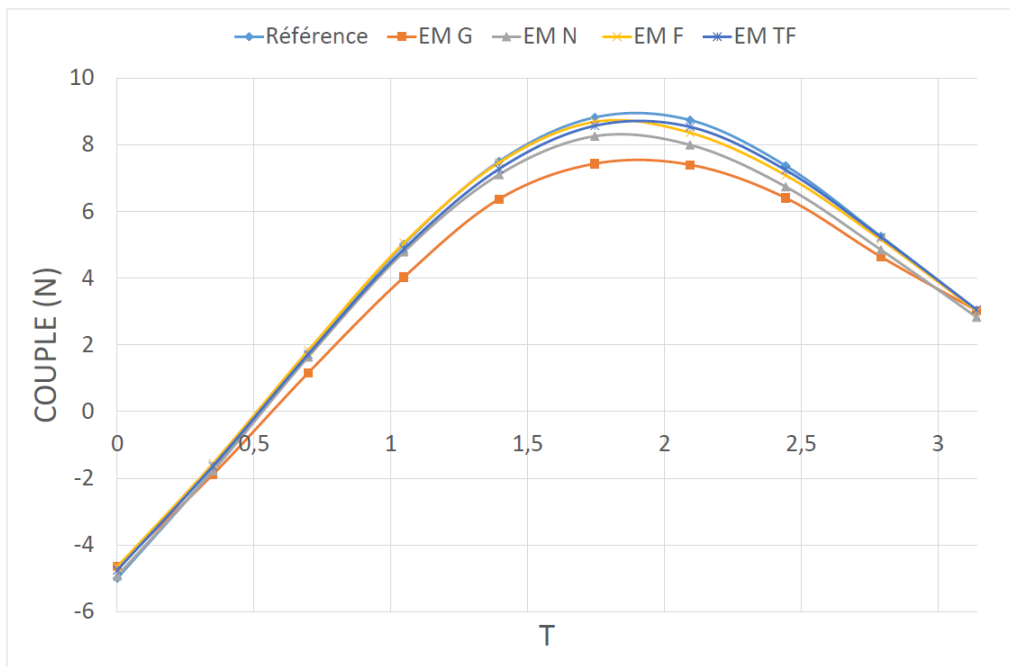


FIGURE V.7 – Profil des courbes de couple en fonction du paramètre T calculées avec la méthode de la dérivée de la co-énergie pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

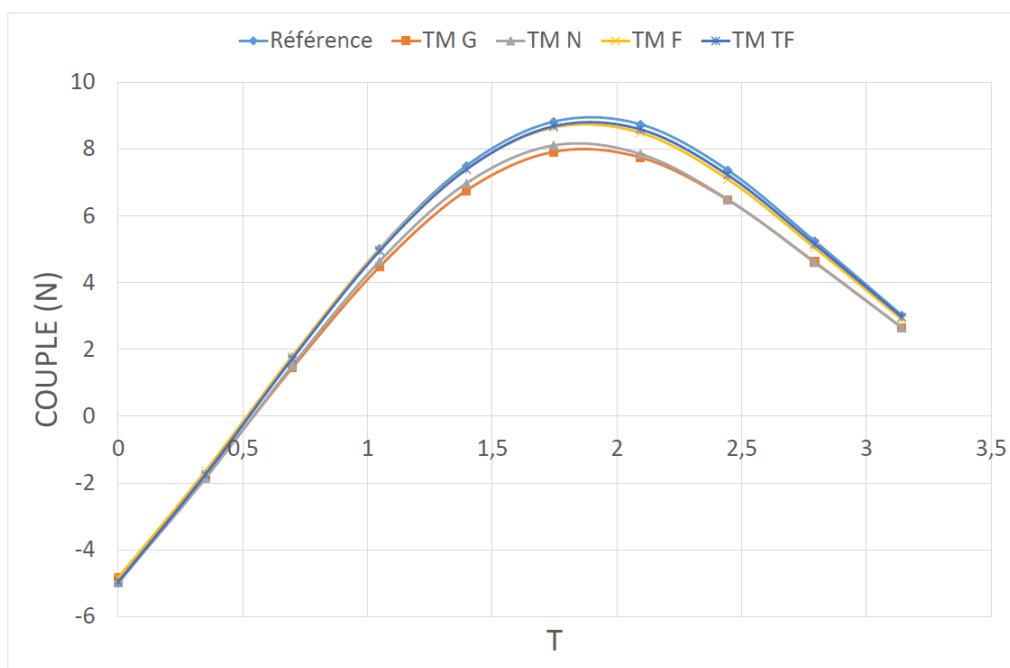


FIGURE V.8 – Profil des courbes de couple en fonction du paramètre T calculées avec le tenseur de Maxwell pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

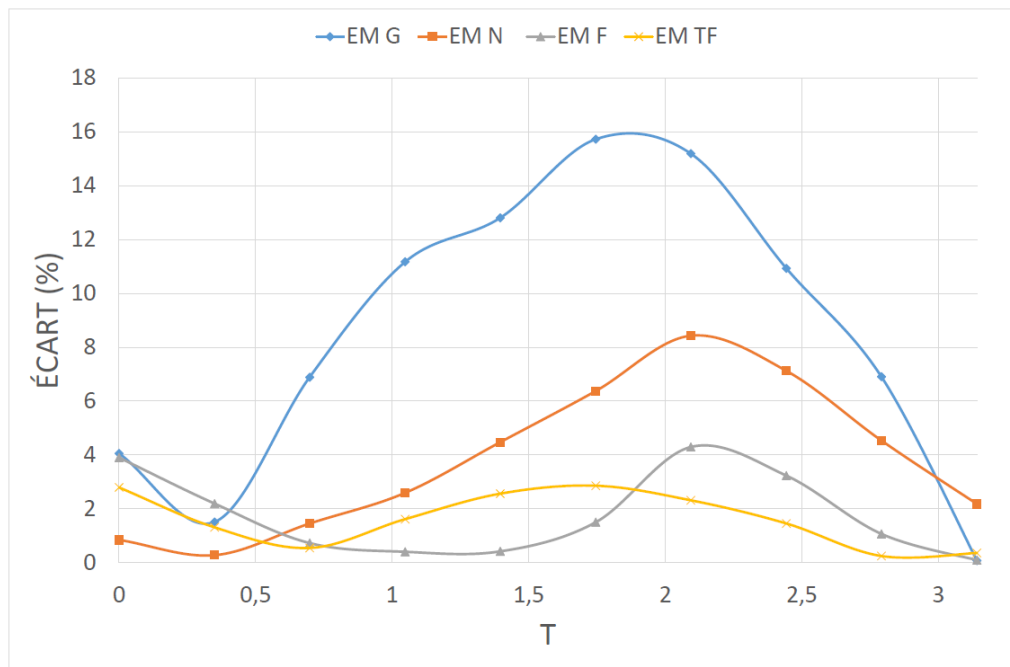


FIGURE V.9 – Écart entre la courbe de référence et celle calculée par la méthode de la co-énergie pour la détermination du couple maximal pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

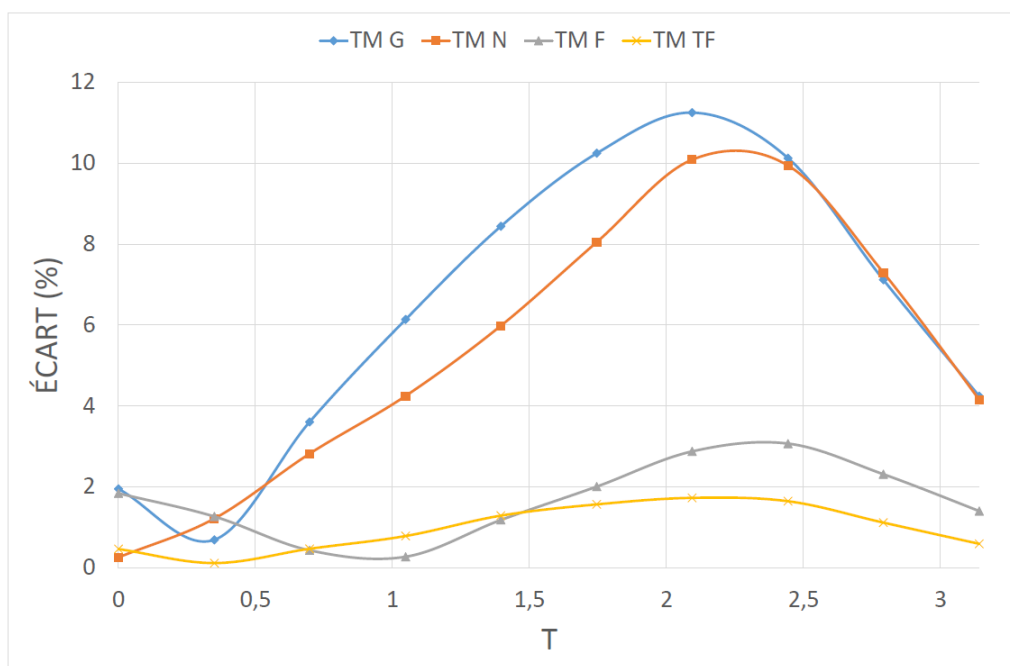


FIGURE V.10 – Écart entre la courbe de référence et celle calculée par le tenseur de Maxwell pour la détermination du couple maximal pour les différents maillages (Grossier (G), Normal (N), Fin (F) et Très Fin (TF))

Conclusions sur le calcul de couple

Ces deux cas tests apportent beaucoup d'informations concernant ces deux méthodes originales de calcul de couple, essayons de les synthétiser ici :

- Dans le cadre du calcul du couple de denture, on constate qu'un fort niveau de maillage est nécessaire pour atteindre des valeurs acceptables en terme de précision. En effet, ce couple très fin est impossible à calculer avec un maillage grossier. On constate néanmoins qu'en y mettant les moyens (dans notre cas, environs 8000 inconnues pour la géométrie complète), on obtient un couple de denture de qualité correcte avec la méthode intégrale de volume. Néanmoins, cette méthode est beaucoup moins compétitive que la méthode des éléments finis avec laquelle il est possible d'atteindre des précisions meilleures (0.7% d'erreur moyenne sur ce cas test) en 0.89s par position du rotor. On est donc dans l'ordre de grandeur du temps de résolution de la méthode intégrale avec le maillage "normal", mais avec un précision plus de 50 fois supérieure. Le résultat est sans appel.
- Dans le cadre du calcul du profil du couple en fonction de l'intensité du courant dans les bobines, le constat est différent. En effet, le profil de ce couple étant plus "facile" à calculer que le couple de denture (valeur du couple plus importante, variations plus importantes du champ dans l'espace pour les différentes valeurs du paramètre), la méthode intégrale devient plus compétitive. De plus, l'optimisation spécifique à ce cas test permettant de ne réintégrer aucun terme du système lui confère un point fort certain. En effet, il est possible de calculer avec une erreur moyenne inférieure à 10% le profil du couple appliqué sur le rotor d'une machine alimentée, et ce au coût de 0.3s par point de calcul (2 fois le temps de résolution du maillage grossier + 2 fois le temps de calcul de la co-énergie), une performance impossible pour la méthode des éléments finis qui est tributaire du maillage de l'air de l'entrefer et donc ne présente pas la possibilité de diminuer fortement le nombre d'inconnues du problème (cela a déjà été constaté dans le chapitre 2, il n'est donc pas nécessaire de revenir sur ce point).
- On constate aussi que dans le cas où il y a une alimentation, la méthode du tenseur de Maxwell se révèle plus précise que la méthode de la dérivée de la co-énergie. Cela peut s'expliquer par le fait que la partie du champ due aux bobines étant calculée de manière analytique, sa contribution dans le couple est donc évaluée avec une grande précision.

V.2 Calcul de flux dans les inducteurs

Le calcul du flux à travers les bobines dans un moteur électrique est une problématique importante car celui ci permet de connaitre la force contre-electromotrice. Cette partie est consacrée à la présentation d'une méthode de calcul du flux à travers les bobines adaptée aux méthodes intégrales.

Méthode de calcul

Le flux magnétique à travers une bobine k associée à un domaine Ω_{0k} peut être exprimé comme [39] :

$$\Phi_k = \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{A} \, d\Omega_{0k} \quad (\text{V.38})$$

où \mathbf{j}_{0k} est le vecteur densité de courant normalisé en chaque maille de la bobine. On peut décomposer le potentiel vecteur en $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_m$ où \mathbf{A}_0 est le potentiel vecteur créé par les bobines dans le vide et \mathbf{A}_m est le potentiel vecteur dans les régions magnétiques. On peut donc décomposer le flux en deux parties :

$$\Phi_k = \Phi_{0k} + \Phi_{mk} \quad (\text{V.39})$$

où Φ_{0k} est la contribution de toutes les bobines et Φ_{mk} est la contribution des parties magnétisées. Calculons en premier la contribution du flux issu de \mathbf{A}_0 . On peut écrire \mathbf{A}_0 comme :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{l=0}^{N_{bob}} \left(i_l \int_{\Omega_{0l}} \mathbf{j}_{0l} G(\mathbf{r}) \, d\Omega_{0l} \right) \quad (\text{V.40})$$

La contribution des bobines au flux à travers la bobine k est donc :

$$\Phi_{0k} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \left\{ \sum_{l=0}^{N_{bob}} \left(i_l \int_{\Omega_{0l}} \mathbf{j}_{0l} G(\mathbf{r}) \, d\Omega_{0l} \right) \right\} d\Omega_{0k} \quad (\text{V.41})$$

soit :

$$\Phi_{0k} = \sum_{l=0}^{N_{bob}} L_{kl} i_l \quad (\text{V.42})$$

avec :

$$L_{kl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \int_{\Omega_{0l}} \mathbf{j}_{0l} G(\mathbf{r}) \, d\Omega_{0l} \, d\Omega_{0k} = \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \mathbf{A}_{0l} \, d\Omega_{0k} \quad (\text{V.43})$$

représentant les inductance propres (quand $k = l$) et mutuelles des bobines dans le vide. \mathbf{A}_{0l} représente le potentiel vecteur généré par la bobine l dans le vide. Ce

potentiel vecteur est calculé de manière analytique à l'aide des formules présentées en annexes (A.5). On est donc capable de calculer de manière semi analytique les inductances propres et mutuelles.

La contribution du flux due aux régions magnétiques s'écrit :

$$\Phi_{mk} = \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{A}_m \, d\Omega_{0k} \quad (\text{V.44})$$

que l'on peut modifier par le théorème de la divergence en :

$$\Phi_{mk} = \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{H}_{0k} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_m \, d\Omega_{0k} + \int_{\Gamma_{0k}} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_m \times \mathbf{H}_{0k}) \, d\Gamma_{0k} \quad (\text{V.45})$$

dont le second terme est nul [39]. On obtient donc :

$$\Phi_{mk} = \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{H}_{0k} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_m \, d\Omega_{0k} \quad (\text{V.46})$$

que l'on peut modifier en (la démonstration de ce point de calcul est faite en A.5) :

$$\Phi_{mk} = \int_{\Omega_m} \mu_0 \mathbf{H}_{0k} \cdot \mathbf{M} \, d\Omega_m \quad (\text{V.47})$$

Nous obtenons donc une formule finale pour le calcul du flux à travers une bobine k :

$$\Phi_k = \sum_{l=0}^{N_{bob}} \int_{\Omega_{0k}} \mathbf{j}_{0k} \mathbf{A}_{0l} \, d\Omega_{0k} + \int_{\Omega_m} \mu_0 \mathbf{H}_{0k} \cdot \mathbf{M} \, d\Omega_m \quad (\text{V.48})$$

Validation de la méthode

Nous avons utilisé un cas test académique pour valider notre méthode de calcul de flux. La description de ce cas test peut être trouvée en figure V.11 et dans le tableau V.6. On fait passer un courant de 1000A dans la bobine A et de 500A dans la bobine B. On cherche à calculer le flux à travers la bobine B dans deux conditions : d'abord en considérant le matériau M comme de l'air, puis en le considérant comme un matériau magnétique non linéaire à deux coefficients ($\mathbf{J}_s = 1T, \mu_r = 1000$). Le cas test présente une symétrie plane suivant l'axe Ox et l'axe Oy. Dans les deux conditions, on mettra en opposition tant en terme de précision qu'en terme de temps de calcul la méthode semi analytique présentée à la méthode des éléments finis dans des conditions similaires. La valeur de référence permettant de calculer les erreurs sera calculée elle aussi par la méthode des éléments finis dont la solution a convergé. Les valeurs de référence pour les flux peuvent être trouvées dans le tableau V.5.

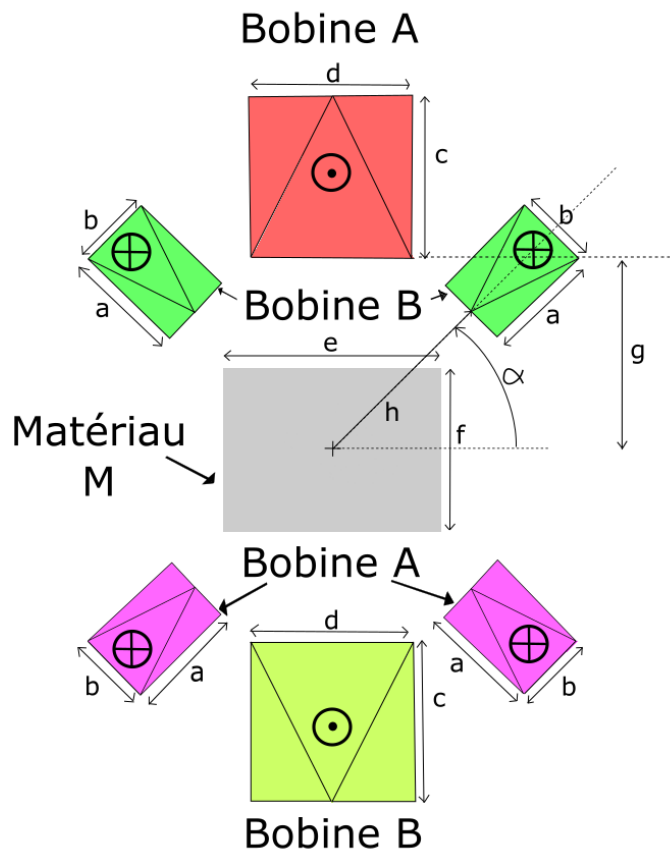


FIGURE V.11 – Géométrie du cas test

TABLE V.5 – Dimensions du cas test

	a	b	c	d	e	f	g	h	α
dimension (mm si non précisé)	2.12	1.4	3	3	4	3	3.5	3.53	$\frac{\pi}{4}$ (rad)

TABLE V.6 – Valeurs de référence pour le cas test

	Cas dans le vide	Cas en présence d'un matériau magnétique
valeur du flux à travers B (Wb)	$1,792 \cdot 10^{-5}$	$6,23 \cdot 10^{-4}$

Le premier test - à vide, dont les résultats sont consignés dans le graphe V.12 - nous permet de constater l'effet du nombre de points de gauss dans le calcul des inductances. Sur notre cas test, on constate que 16 points de gauss permettent un résultat de bonne qualité (moins de 0.001% d'erreur). On constate aussi que même

pour un nombre de points de gauss important, les temps de calculs sont faibles lorsqu'on les compare aux temps de calculs nécessaires pour obtenir la même précision avec la méthode des éléments finis. En effet, pour obtenir une précision similaire avec la méthode des éléments finis, 12 secondes et plus de 80000 inconnues sont nécessaires.

On peut néanmoins constater dans la formule V.48 que le flux à travers la bobine k est fonction du potentiel vecteur créé par elle même ainsi que par les autres bobines. Soit une autre bobine l , le potentiel vecteur \mathbf{A}_{0l} qu'elle crée est relativement uniforme sur le domaine Ω_{0k} si elle est éloignée de la bobine k , et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser autant de points de gauss que lorsque l'on calcule le terme L_{kl} où la bobine l est proche de la bobine k . On peut donc, pour gagner en efficacité, se placer dans une démarche de point de gauss adaptatif. Il suffit de décider d'une tolérance ϵ définie par l'utilisateur qui servira à définir si le calcul de l'inductance L_{kl} a convergé. On note $L_{kl}(n)$ la valeur de l'inductance L_{kl} calculée avec n points de gauss. Si :

$$|L_{kl}(i) - L_{kl}(i + 1)| > \epsilon |L_{kl}(i + 1)| \quad (\text{V.49})$$

alors on augmente le nombre de points de gauss pour le calcul de L_{kl} . Sinon, on garde la valeur $L_{kl}(i + 1)$. Cette méthode permet de garantir la convergence du calcul du flux tout en gagnant en temps de calcul lorsque les bobines sont éloignées les unes des autres. C'est dans ce cadre que l'on a effectué la seconde partie de cette validation : on utilise une stratégie de points de gauss adaptatif pour le calcul de Φ_{0k} et on considère maintenant que le matériau M est magnétique non linéaire comme précisé plus tôt dans ce paragraphe.

Les résultats du cas test en présence d'un matériau magnétique peuvent être trouvés dans les figures V.14 et V.15. On constate sur la figure V.14 que la convergence est quasi identique pour les deux méthodes. Néanmoins, lorsque l'on se penche sur le second graphe, on constate que la méthode semi analytique couplée à la méthode intégrale de volume retenue dans le chapitre 1 permet d'obtenir des résultats équivalents à la méthode des éléments finis en des temps 10 fois inférieurs. Il est bon de noter que la partie Φ_{0k} du flux à travers la bobines B est égale à la valeur du flux obtenue pour le cas test dans le vide. Dès lors, celle ci étant environs 50 fois inférieure (voir tableau V.5) à la valeur du flux total et correctement calculée dans le cadre de notre approche par points de gauss adaptatifs, l'erreur tracées dans le

graphe V.14 correspond à l'erreur faite sur le terme Φ_{mk} (second terme de la formule V.48). La qualité du calcul du flux de cette seconde partie de test repose donc sur la qualité de la solution obtenue par la méthode intégrale. On en conclut que ce cas test met en valeur une fois de plus la très bonne qualité de la solution fournie par la méthode intégrale de volume pour un temps de calcul très restreint.

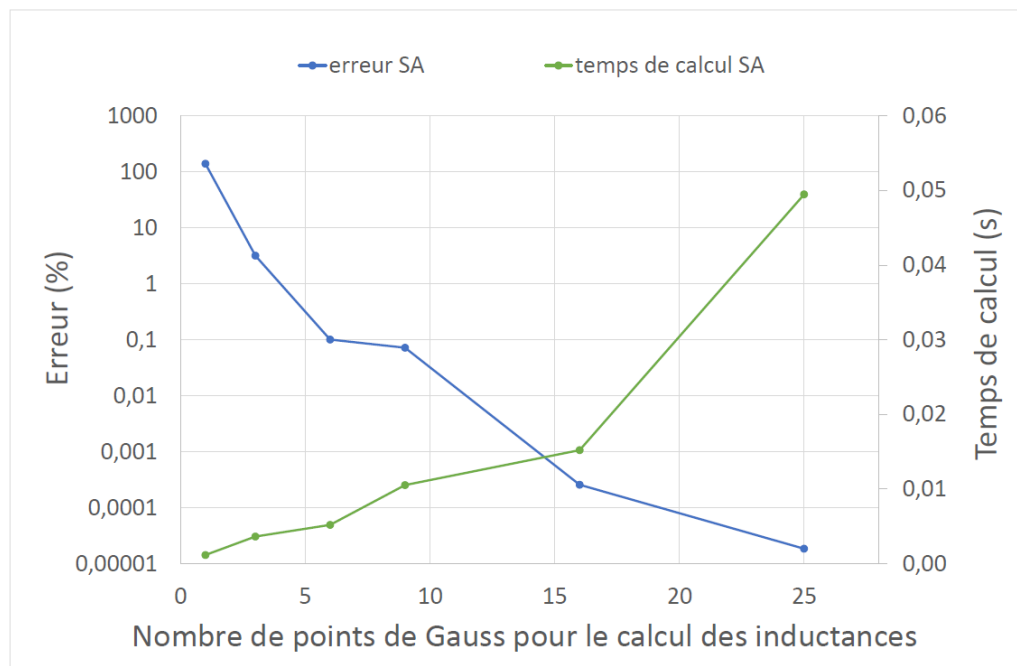


FIGURE V.12 – Norme de l'erreur et temps de calculs pour la méthode semi analytique dans le cas où le matériaux M est de l'air

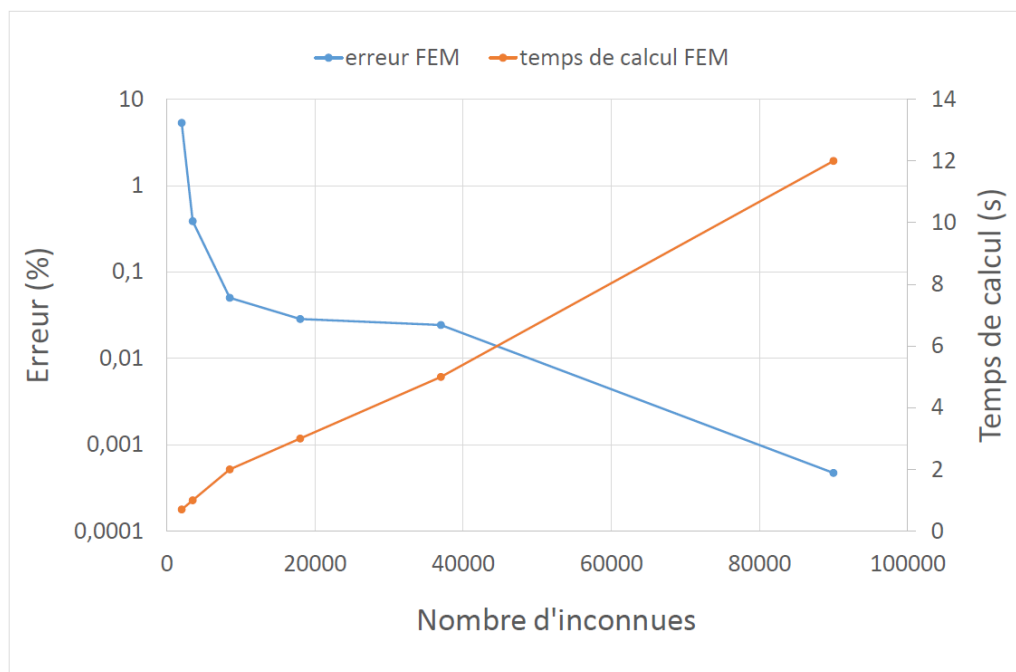


FIGURE V.13 – Norme de l'erreur et temps de calculs pour la méthode des éléments finis dans le cas où le matériaux M est de l'air

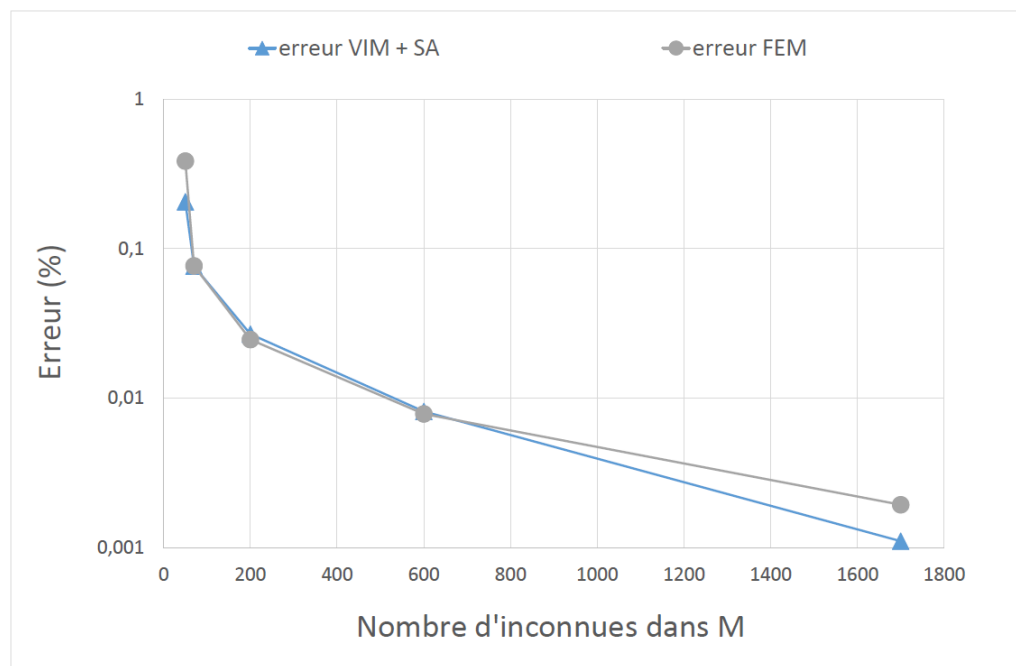


FIGURE V.14 – Norme de l'erreur pour les deux méthodes en fonction du nombre d'inconnues dans M dans le cas où M est un matériau ferro-magnétique

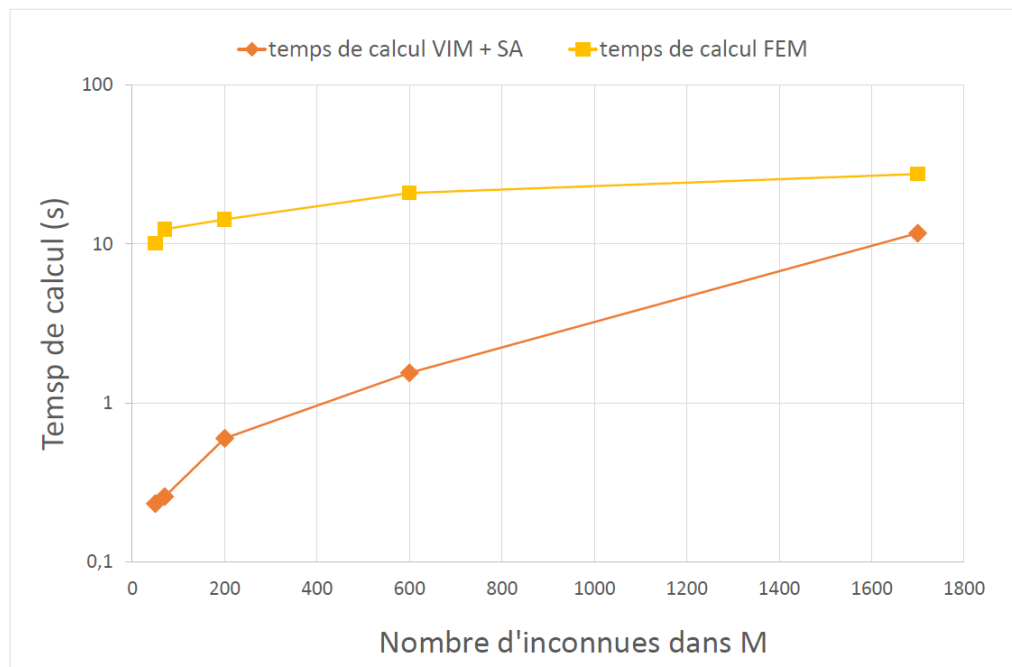


FIGURE V.15 – Temps de calcul pour les deux méthodes en fonction du nombre d'inconnues dans M dans le cas où M est un matériau ferro-magnétique

Étude de performance de la méthode pour un moteur synchrone à aimants permanents

On utilise une dernière fois le cas test présenté dans le chapitre 2 pour tester la méthode de calcul de flux présentée ci-dessus. On cherchera à calculer le flux dans la phase A du moteur dans le cas où le courant passant à travers les bobines est nul, et ce pour différentes positions du rotor. Une dernière fois, nous comparerons les performances de la méthode intégrale de volume couplée au calcul semi analytique présenté dans le paragraphe précédent à la méthode des éléments finis. La courbe des valeurs de référence sera une fois de plus obtenue grâce à la méthode des éléments finis dont le maillage sera suffisamment dense pour obtenir un résultat ayant convergé. Nous avons utilisé pour cela trois niveaux de maillages - fins (2970 éléments²), moyen (1640 éléments²) et grossier (530 éléments²) - et nous avons calculé l'écart moyen et maximal pour chaque méthode et chaque niveau de maillage. Ces résultats, ainsi que les temps de calculs associés sont disponibles dans les tableaux V.7 pour la méthode intégrale de volume et V.8 pour la méthode des éléments finis. Le profil du flux en fonction de la position du rotor est disponible Figure V.16 et V.17 et les écarts entre les valeurs calculées par les deux méthodes peuvent être

trouvés Figure V.18. Ces écarts sont définis par :

$$\text{écart moyen} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\Phi^{VIM}(\alpha_i) - \Phi^{ref}(\alpha_i)}{\Phi^{ref}(\alpha_i)} \right| \quad (\text{V.50})$$

$$\text{écart max} = \max_{i=0, \dots, N-1} \left| \frac{\Phi^{VIM}(\alpha_i) - \Phi^{ref}(\alpha_i)}{\Phi^{ref}(\alpha_i)} \right| \quad (\text{V.51})$$

$$\text{avec } \alpha_i = \frac{i\pi}{4(N-1)} \quad (\text{V.52})$$

où N est le nombre de points de la courbe.

TABLE V.7 – Temps de calcul, écarts moyens et maximaux pour la méthode proposée

Maillage	temps de calcul	écart moyen	écart maximal
Grossier	8.69 s	2.28 %	3.81%
Moyen	20.52 s	0.54 %	1.03%
Fin	46.26 s	0.33 %	0.79%

TABLE V.8 – Temps de calcul, écarts moyens et maximaux pour la méthode des éléments finis

	temps de calcul	écart moyen	écart maximal
grossier (12800 inconnues) ²	27.29 s	0.16 %	0.45%
normal (31520 inconnues) ²	38.98 s	0.12 %	0.19%
fin (47952 inconnues) ²	54.81 s	0.10 %	0.18%

2. Pour le maillage complet
2. Pour le maillage complet

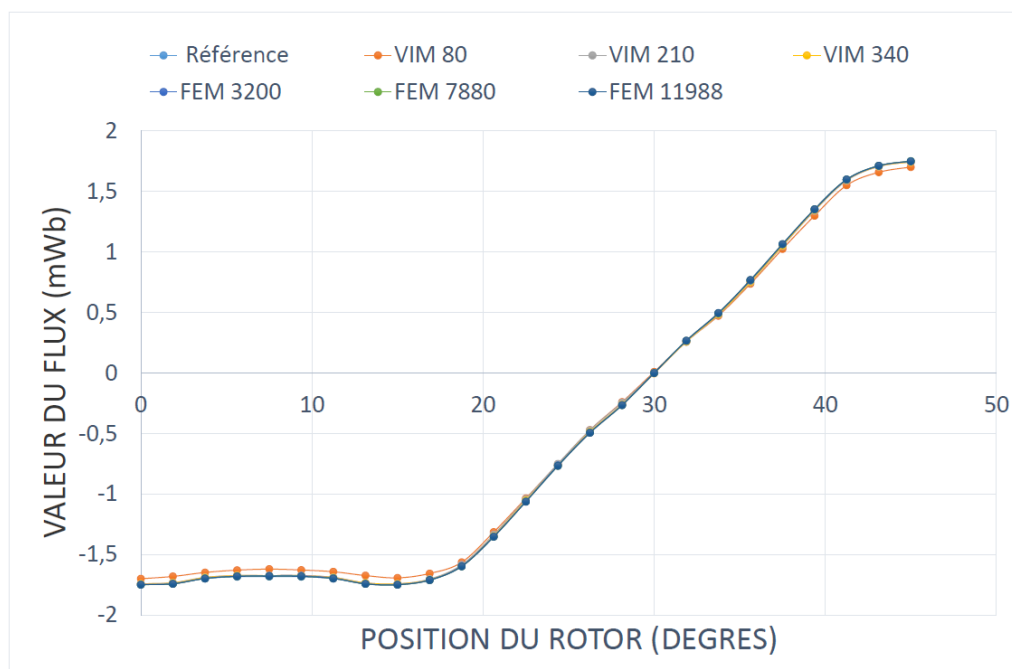


FIGURE V.16 – Résultats du calcul du flux dans la phase A en fonction de la position du rotor

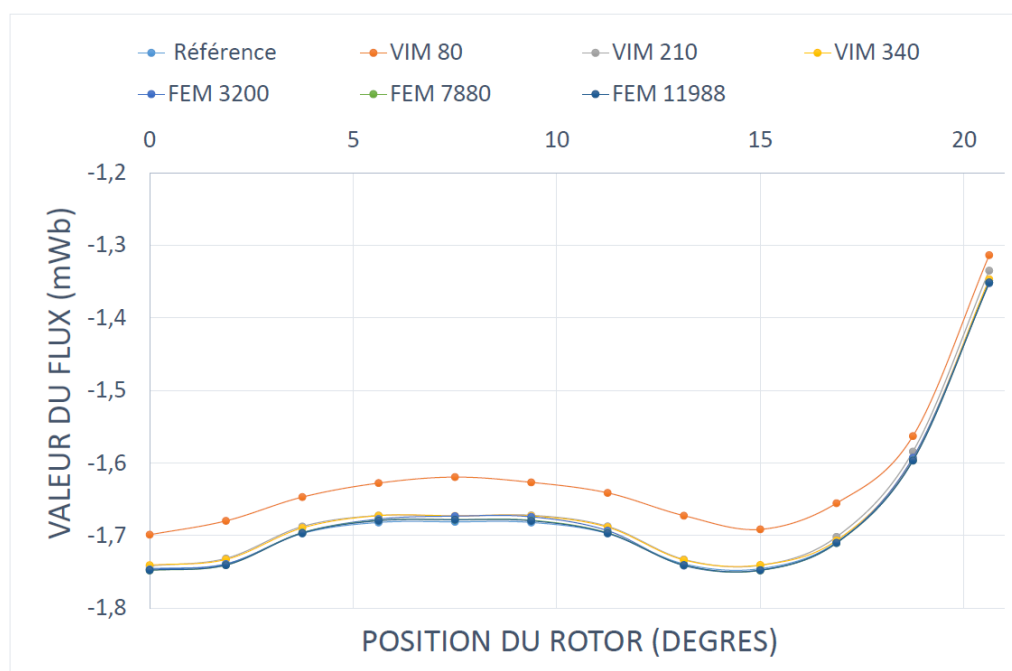


FIGURE V.17 – Zoom sur les premières positions du rotor

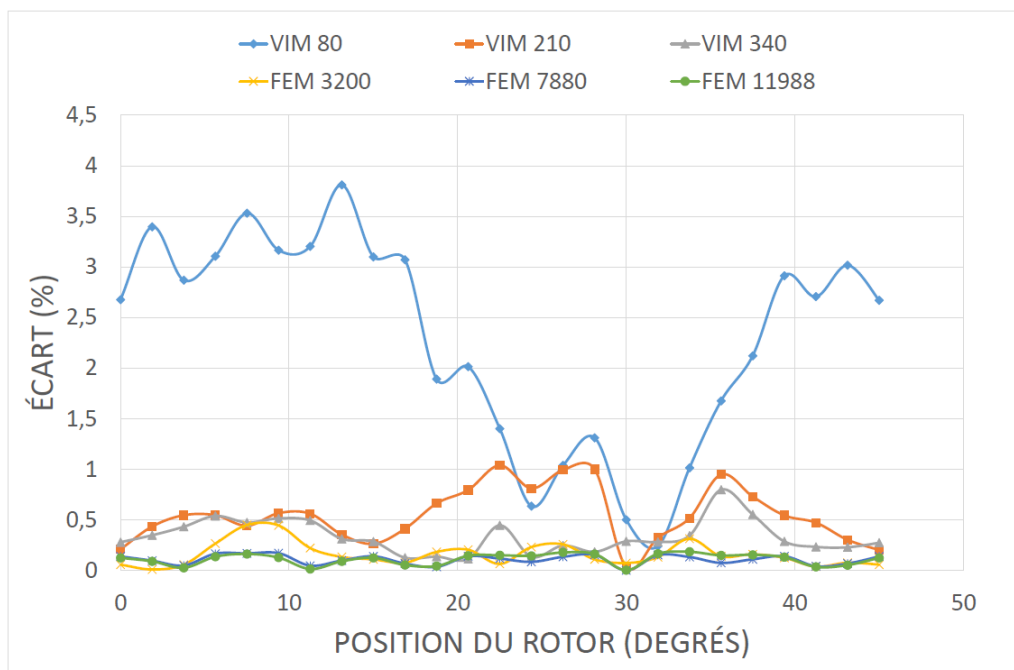


FIGURE V.18 – Écart entre le flux calculé et la référence

Conclusions sur le calcul de flux

On constate dans les tableaux V.7 et V.8 que la méthode des éléments finis est meilleure en terme de précision. Néanmoins, ceci est au prix d'un temps de calcul plus important et surtout incompressible. En effet, comme cela a été mis en valeur dans le chapitre 2, il est impossible de démailler fortement la géométrie dans le cadre d'une résolution par éléments finis à cause de contraintes géométriques fortes (dans l'entrefer en particulier). La méthode proposée, permet d'atteindre des temps de calculs bien inférieurs pour une précision qui reste acceptable, ce qui est précisément l'objectif recherché dans cette thèse.

V.3 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre deux méthodes originales de calcul de couple magnétique adaptées à la méthode intégrale de volume. Ces méthodes se révèlent plus ou moins performantes en fonction des conditions rencontrées dans les cas test. On a constaté que dans des situations où les variations de champ magnétique sont très fines, comme dans le cas du calcul du profil du couple de denture, les méthodes intégrales ont du mal à être aussi performantes que la méthode des éléments finis. Au contraire, lorsque les variations du champ sont plus importantes (dans l'espace entre deux jeux de paramètres), les méthodes intégrales se révèlent très performantes pour une problématique de pré-design (précision acceptable pour un temps de calcul très réduit). Il sera bon de noter que le cas du calcul du couple du rotor d'une machine électrique tournante est un cas extrêmement défavorable aux méthodes intégrales dans leur ensemble. En effet, il y a très peu d'air dans ce cas précis et la faible épaisseur de l'entrefer implique d'utiliser de nombreuses intégrations analytiques. Il est légitime de penser que dans des cas moins défavorables, les méthodes présentées se comporteraient de manière bien plus performantes. Enfin, le lecteur pourra constater que les développements effectués sur le calcul de la co-énergie magnétique ne se limitent pas au cadre de la méthode intégrale de volume : la formule est utilisable dans le cadre de la méthode des éléments finis également. Concernant le calcul du flux dans les bobines, on aura constaté encore une fois que la méthode intégrale couplée au calcul semi-analytique du flux permet d'obtenir très rapidement des résultats de bonne qualité (de l'ordre de 2% d'écart moyen par rapport à la méthode des éléments finis), ce qui était l'objectif recherché dans ces travaux.

Conclusions et perspectives

L'objectif des travaux réalisés dans cette thèse était de développer une méthode alternative à la méthode des éléments finis dans le but de pré-dimensionner les machines électriques tournantes. Les méthodes intégrales de volume ont été utilisées et en particulier la méthode intégrale de volume en potentiel vecteur décrite dans le chapitre 2. Cette méthode a été développée en 2D et utilisée pour calculer le champ magnétique à l'intérieur de dispositifs magnétiques complexes (matériaux non linéaires, présence d'aimants et de bobines, régions non simplement connexes).

La formulation intégrale de volume a été testée sur le cas académique du contacteur magnétique et nous avons pu constater qu'elle fournissait des résultats très satisfaisants pour des maillages très légers. Des développements ont ensuite été effectués pour adapter cette formulation à la simulation des moteurs électriques, notamment concernant la problématique du calcul du champ source, ainsi que des optimisations pour la rendre plus efficace dans le cadre de calculs multi-statiques où plusieurs résolutions sont effectuées à la suite. Une méthode efficace de prise en compte des périodicités a aussi été développée pour accélérer les temps de résolution et arriver à une méthode compétitive en terme de précision et de temps de calcul par rapport aux solutions déjà existantes dans l'industrie. Enfin, des méthodes adaptées à la formulation intégrale de volume ont été développées pour calculer le couple appliqué sur le rotor des machines et les flux à travers leurs bobines. Ces méthodes originales sont elles aussi compétitives par rapport à des codes de calcul industriels mêmes si certaines d'entre elles ont montré leurs limites dans certaines circonstances (calcul du couple de denture). On peut donc dire que l'objectif de trouver des méthodes de pré-dimensionnement plus efficaces que les éléments finis a été atteint pour certains cas tests puisque que l'on arrive à être deux ou trois fois plus rapide que les éléments finis pour une précision acceptable. Il sera bon de noter que le cas du moteur électrique est un cas fortement défavorable aux méthodes intégrales (peu d'air dans le domaine global, entrefer fin), et que les méthodes développées sont valables dans un

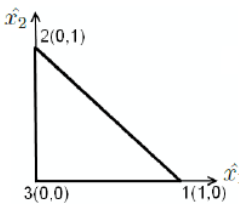
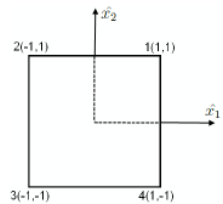
cadre plus général que le cas spécifique du moteur électrique. Il serait alors légitime de supposer que pour des dispositifs électromagnétiques dont la géométrie est plus "favorable" aux méthodes intégrales (on peut penser à des actionneurs par exemple), les développements présentés dans ces travaux se révéleraient extrêmement efficaces.

Quelques perspectives sont envisagées à la suite de ces travaux. D'un point de vue des phénomènes physiques, il serait bon de pouvoir étendre ces méthodes valables pour des problèmes magnéto-statiques à des problèmes magnéto-harmoniques et de mettre en place des couplages magnéto-mécaniques. Cela nécessite de modifier la formulation pour prendre en compte les courants induits. D'un point de vue informatique, on aura constaté que les méthodes intégrales de volume fournissent des matrices pleines. On pourrait donc mettre en place dans le futur des algorithmes de compression matricielle pour diminuer les temps d'assemblage et de résolution du problème si l'on souhaite obtenir une grande précision avec la méthode intégrale. Ces algorithmes ont déjà été développés dans la plateforme MIPSE en 3D. Enfin, dans un contexte de pré-dimensionnement, un couplage avec le logiciel GOT développé au G2Elab pourrait permettre de faire de l'optimisation paramétrique de manière automatisée.

Annexe A

Annexes

A.1 Fonctions de formes au 1^{er} ordre

		Triangle (2D)	Quadrangle (2D)
			
Sommets	n_1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	n_2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
	n_3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
	n_4		$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Fonctions de forme nodales	w_{n_1}	u	$\frac{(1+u)(1+v)}{4}$
	w_{n_2}	v	$\frac{(1-u)(1+v)}{4}$
	w_{n_3}	$1-u-v$	$\frac{(1-u)(1-v)}{4}$
	w_{n_4}		$\frac{(1+u)(1-v)}{4}$
Gradients des fonctions de forme nodales	grad w_{n_1}	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+v \\ 1+u \end{pmatrix}$
	grad w_{n_2}	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-v \\ 1-u \end{pmatrix}$
	grad w_{n_3}	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+v \\ -1+u \end{pmatrix}$
	grad w_{n_4}		$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-v \\ -1-u \end{pmatrix}$
Arêtes	a_1	$1-2$	$1-2$
	a_2	$2-3$	$2-3$
	a_3	$3-1$	$3-4$
	a_4		$4-1$
Fonctions de forme d'arêtes	w_{a_1}	$\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-v \\ 0 \end{pmatrix}$
	w_{a_2}	$\begin{pmatrix} -v \\ -1+u \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -1+u \end{pmatrix}$
	w_{a_3}	$\begin{pmatrix} 1-v \\ u \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-v \\ 0 \end{pmatrix}$
	w_{a_4}		$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+u \end{pmatrix}$

		Triangle (2D)	Quadrangle (2D)
Rotationnels des fonctions de forme d'arête	$rot w_{a_1}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
	$rot w_{a_2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
	$rot w_{a_3}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
	$rot w_{a_4}$		$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
Facettes	f_1	1 - 2	1 - 2
	f_2	2 - 3	2 - 3
	f_3	3 - 1	3 - 4
	f_4		4 - 1
Fonctions de forme de facettes	w_{f_1}	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + v \end{pmatrix}$
	w_{f_2}	$\begin{pmatrix} -1 + u \\ v \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + u \\ 0 \end{pmatrix}$
	w_{f_3}	$\begin{pmatrix} u \\ -1 + v \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + v \end{pmatrix}$
	w_{f_4}		$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + u \\ 0 \end{pmatrix}$
Divergences des fonctions de forme de facettes	$div w_{f_1}$	2	$\frac{1}{4}$
	$div w_{f_2}$	2	$\frac{1}{4}$
	$div w_{f_3}$	2	$\frac{1}{4}$
	$div w_{f_4}$		$\frac{1}{4}$

A.2 Intégration analytique du noyau de green

On cherche à calculer de manière exacte les intégrales :

$$\int_{\Gamma} G(\mathbf{r}) \, d\Gamma \text{ et } \int_{\Gamma} \nabla G(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{A.1})$$

soit avec les notations de la figure A.1 :

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \log r \, d\Gamma \text{ et } I_2 = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \, d\Gamma \quad (\text{A.2})$$

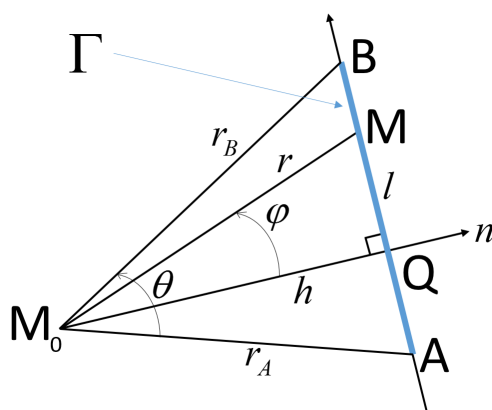


FIGURE A.1 – Notations pour l'intégration

M_0 n'appartient pas à Γ

Si A, B et M_0 sont alignés

$$I_1 = - \int_{r_A}^{r_B} \log r \, dl = - \int_{r_A}^{r_B} \log |l| \, dl \quad (\text{A.3})$$

on obtient donc pour I_1 :

$$I_1 = [(1 - \log |l|)l]_{r_A}^{r_B} = [(1 - \log |r_B|)QB] - [(1 - \log |r_A|)QA] \quad (\text{A.4})$$

et pour $I_2 = 0$ car $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Si A, B et M_0 ne sont pas alignés

On effectue l'intégration par parties avec :

$$u = \log(r), \quad v = l \text{ soit } du = \frac{dr}{r} \text{ et } dv = dl \quad (\text{A.5})$$

On a donc :

$$I_1 = - [l \log r]_A^B + \int_A^B \frac{l}{r} dr \quad (\text{A.6})$$

on a

$$l = h \tan \varphi \text{ et } r \cos \varphi = |M_0 Q| \text{ soit } dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (\text{A.7})$$

on obtient donc :

$$\frac{l}{r} dr = h \tan \varphi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi} = h \tan^2 \varphi d\varphi \quad (\text{A.8})$$

En écrivant que :

$$d(\tan \varphi) = d\left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) = (1 + \tan^2 \varphi) d\varphi \quad (\text{A.9})$$

on obtient que :

$$\frac{l}{r} dr = dl - h d\varphi \quad (\text{A.10})$$

On obtient donc pour I_1 :

$$I_1 = - [l \log r]_A^B + [l - h\varphi]_A^B = - [(1 - \log r)l]_A^B - h [\varphi]_A^B \quad (\text{A.11})$$

On a pour I_2 :

$$I_2 = - \int_A^B \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} = - \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{\frac{h}{\cos \varphi} \cos \varphi}{\frac{h^2}{\cos \varphi}} (1 + \tan^2 \varphi) h d\varphi = - \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi \quad (\text{A.12})$$

On a donc :

$$I_2 = -\theta \quad (\text{A.13})$$

M_0 appartient à Γ

Alors on $I_2 = 0$ car $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ et :

$$I_1 = - \int_0^{r_B} \log r dr - \int_0^{r_A} \log r dr = [(1 - \log r_B)|QB] - [(1 - \log r_A)|QA] \quad (\text{A.14})$$

A.3 Calcul du champ magnétique et potentiel vecteur source

Le potentiel complexe créé par une surface quelconque Ω traversée par une densité surfacique de courant J est défini par [29] :

$$P(z) = -\frac{J}{2\pi} \int_{\Omega} \log(z - z_i) d\Omega \quad (\text{A.15})$$

où Ω est le domaine traversé par la densité de courant et z la coordonnée complexe du point de calcul. Un schéma explicatif est donné figure A.2. De ce potentiel peut être tiré le champ magnétique et le potentiel vecteur via :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -iH^* = -H_y - iH_x \quad (\text{A.16})$$

$$A = \Re(P(z)) \quad (\text{A.17})$$

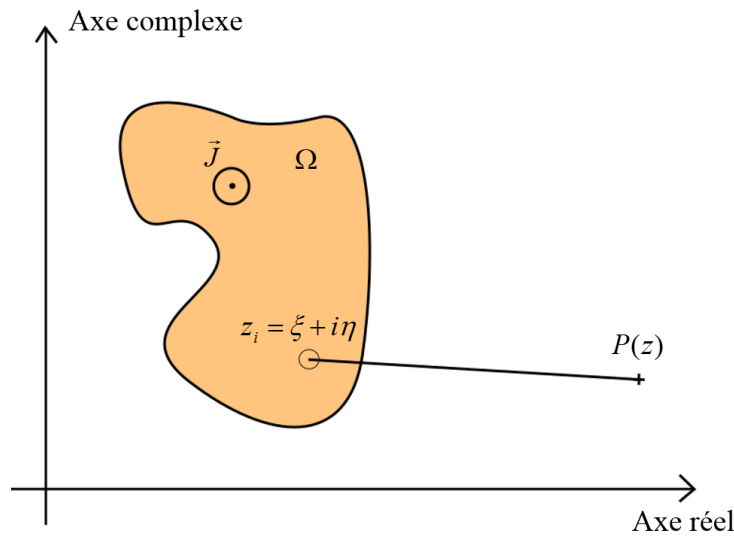


FIGURE A.2 – Notations pour le calcul du potentiel complexe

Calculons le potentiel complexe créé par les deux triangles rectangles décrits figure A.3. La formule du potentiel complexe A.15 devient pour chaque triangle :

$$P(z)_{T1} = -\frac{J}{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\xi/a} \log(z - (\xi + i\eta)) d\eta d\xi \quad (\text{A.18})$$

$$P(z)_{T2} = -\frac{J}{2\pi} \int_0^a \int_0^{b-b\xi/a} \log(z - (\xi + i\eta)) d\eta d\xi \quad (\text{A.19})$$

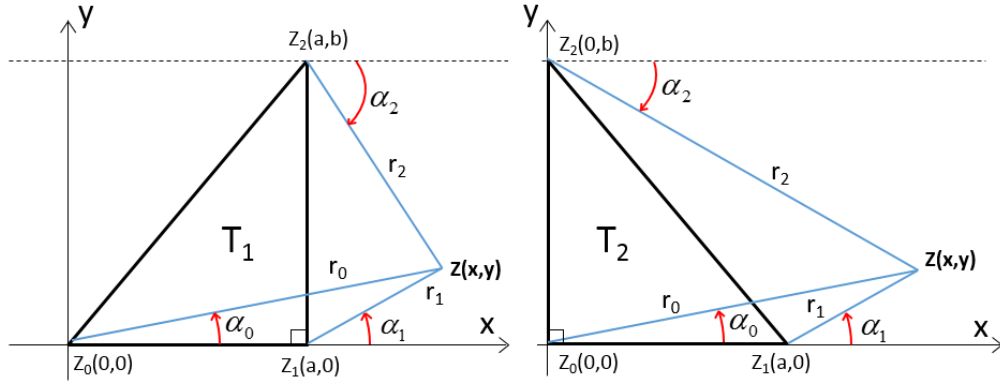


FIGURE A.3 – Triangles rectangles pour l'intégration

Effectuons le calcul de $P(z)_{T_1}$. On utilise le fait qu'une primitive de $\log(u)$ est $u[\log(u) - 1]$:

$$\begin{aligned}
 P(z)_{T_1} &= \frac{J}{2\pi} \int_0^a [(z - \xi - i\eta)(\log(z - \xi - i\eta) - 1)]_0^{b\xi/a} d\xi \\
 &= \frac{J}{2\pi} \left\{ \underbrace{\int_0^a -\xi \frac{ib}{a} d\xi}_{\text{indépendant de } z} + \int_0^a [z - \xi(1 + \frac{ib}{a})] \log(z - \xi(1 + \frac{ib}{a})) - [z - \xi] \log(z - \xi) d\xi \right\}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Ce qui conduit, en posant $z_0 = 0$, $z_1 = a$, $z_2 = a + ib$ à :

$$\begin{aligned}
 P(z)_{T_1} &= \frac{J}{2\pi} [iCte + \frac{(z - z_1)^2}{2} (\log(z - z_1) - \frac{1}{2}) - \frac{(z - z_0)^2}{2} (\log(z - z_0) - \frac{1}{2}) - \\
 &\quad \frac{1}{1 + \frac{ib}{a}} (\frac{(z - z_2)^2}{2} (\log(z - z_2) - \frac{1}{2}) - \frac{(z - z_0)^2}{2} (\log(z - z_0) - \frac{1}{2}))] \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

On utilise ensuite les relations données en A.16 pour obtenir le potentiel vecteur :

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi A}{J} &= \frac{ba}{2} + D_0 \frac{\alpha_0}{2} + P_0 (\frac{1}{2} - \log(r_0)) - D_1 \frac{\alpha_1}{2} + P_1 (\log(r_1) - \frac{1}{2}) \\
 &\quad + \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} (D_2 \frac{\alpha_2}{2} + P_2 (\frac{1}{2} - \log(r_2)) - D_0 \frac{\alpha_0}{2} + P_0 (\log(r_0) - \frac{1}{2})) \\
 &\quad + \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} (D_2 (\frac{1}{4} - \frac{\log(r_2)}{2}) - P_2 \alpha_2 + D_0 (\frac{\log(r_0)}{2} - \frac{1}{4}) + P_0 \alpha_0) \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

où $D_i = (y - y_i)^2 - (x - x_i)^2$, et $P_i = (x - x_i)(y - y_i)$. et le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \frac{-2\pi H_x}{J} = & x \log\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + y(\alpha_1 - \alpha_0) + a \log(r_1) \\ & + \frac{x \log\left(\frac{r_2}{r_0}\right) + y(\alpha_0 - \alpha_2) - a \log(r_2) + b\alpha_2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ & + \frac{b}{a} \left(\frac{y \log\left(\frac{r_2}{r_0}\right) + x(\alpha_2 - \alpha_0) - b \log(r_2) - a\alpha_2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi H_y}{J} = & y \log\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + x(\alpha_0 - \alpha_1) + a\alpha_1 \\ & + \frac{y \log\left(\frac{r_2}{r_0}\right) + x(\alpha_2 - \alpha_0) - a\alpha_2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ & + \frac{b}{a} \left(\frac{x \log\left(\frac{r_0}{r_2}\right) + y(\alpha_2 - \alpha_0) - b\alpha_2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

Les formules analytiques du potentiel et du champ créé par TR2 sont obtenues de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi A}{J} = & D_0 \frac{\alpha_0}{2} + P_0 \left(\frac{1}{2} - \log(r_0) \right) - D_1 \frac{\alpha_1}{2} + P_1 \left(\log(r_1) - \frac{1}{2} \right) \\ & + \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \left(D_1 \frac{\alpha_1}{2} + P_1 \left(\frac{1}{2} - \log(r_2) \right) - D_2 \frac{\alpha_2}{2} + P_2 \left(\log(r_2) - \frac{1}{2} \right) \right) \\ & - \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \left(D_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{\log(r_1)}{2} \right) - P_1 \alpha_1 + D_2 \left(\frac{\log(r_2)}{2} - \frac{1}{4} \right) + P_2 \alpha_2 \right) \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

où les D_i et P_i sont définis de la même manière que précédemment.

$$\begin{aligned} \frac{-2\pi H_x}{J} = & x \log\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + y(\alpha_1 - \alpha_0) + a \log(r_1) \\ & + \frac{x \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + y(\alpha_2 - \alpha_1) - a \log(r_1) - b\alpha_2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ & + \frac{b}{a} \left(\frac{y \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + x(\alpha_2 - \alpha_1) - b \log(r_2) + a\alpha_1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi H_y}{J} = & y \log\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + x(\alpha_0 - \alpha_1) + a\alpha_1 \\ & + \frac{y \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - a\alpha_1 + b \log(r_2)}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ & + \frac{b}{a} \left(\frac{x \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + y(\alpha_2 - \alpha_1) - b\alpha_2 - a \log(r_1)}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

Grâce à ces formules, il nous est possible de calculer de manière purement analytique le champ et le potentiel vecteur créé par les deux triangles rectangles T1 et T2.

A.4 Calcul analytique du champ et du potentiel lorsque le point cible est à l'intérieur de la source de courant

Pour obtenir le champ et le potentiel à l'intérieur d'un triangle, on découpe ce triangle en trois sous-triangles comme illustré figure A.4. Le point de calcul est décalé de ϵ pour le sortir de chaque sous triangle et utiliser les résultats précédents. On choisi pour ϵ :

$$\epsilon = \max(\|\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1\|, \|\mathbf{z}_0\mathbf{z}_2\|, \|\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\|) * 10^{-4}$$

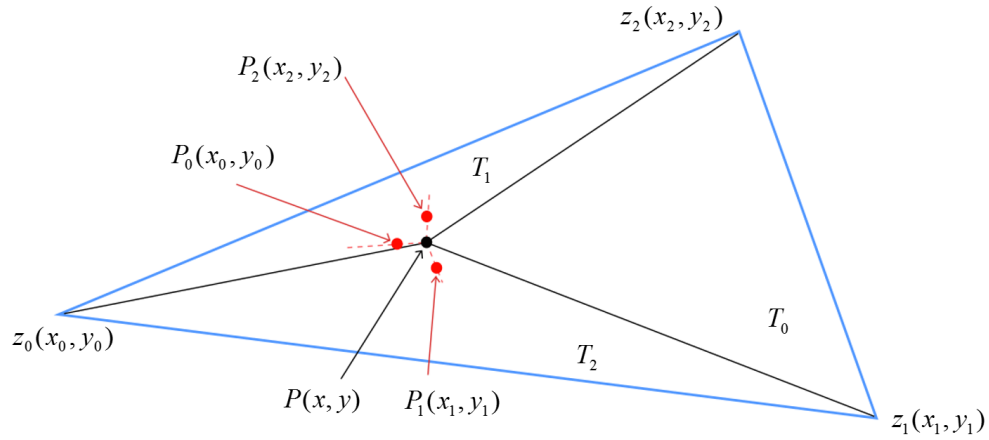


FIGURE A.4 – Cas où le P est interne à T

On a :

$$A_z(x, y) = \frac{A_z^{T_0}(x_{p0}, y_{p0}) * S(T_0) + A_z^{T_1}(x_{p2}, y_{p2}) * S(T_1) + A_z^{T_2}(x_{p2}, y_{p2}) * S(T_2)}{S(T_0) + S(T_1) + S(T_2)} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{H}(x, y) = \frac{\mathbf{H}^{T_0}(x_{p0}, y_{p0}) * S(T_0) + \mathbf{H}^{T_1}(x_{p2}, y_{p2}) * S(T_1) + \mathbf{H}^{T_2}(x_{p2}, y_{p2}) * S(T_2)}{S(T_0) + S(T_1) + S(T_2)} \quad (\text{A.29})$$

où

$$\begin{aligned}
 x_{p0} &= x + \epsilon(x - x_1) + \epsilon(x - x_2) \\
 y_{p0} &= y + \epsilon(y - y_1) + \epsilon(y - y_2) \\
 x_{p1} &= x + \epsilon(x - x_0) + \epsilon(x - x_2) \\
 y_{p1} &= y + \epsilon(y - y_0) + \epsilon(y - y_2) \\
 x_{p2} &= x + \epsilon(x - x_1) + \epsilon(x - x_0) \\
 y_{p2} &= y + \epsilon(y - y_1) + \epsilon(y - y_0)
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

et où $A_z^{T_i}(P_i)$ (respectivement $\mathbf{H}^{T_i}(x_{pi}, y_{pi})$) est le potentiel (respectivement le champ magnétique) créé par le triangle T_i en le point $P_i(x_{pi}, y_{pi})$ et $S(T_i)$ est la surface du triangle i .

A.5 Intégration de la co-énergie magnétique

La co-énergie magnétique est définie par la relation :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega \quad (\text{A.31})$$

Matériaux linéaires

On a :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{A.32})$$

ce qui donne pour l'expression de la co-énergie :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 + \mathbf{B}_r \cdot \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{A.33})$$

que l'on peut décomposer en

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 d\Omega + \int_{\Omega_{aimant}} \mathbf{B}_r \cdot \mathbf{H} d\Omega_{aimant} \quad (\text{A.34})$$

car $\mathbf{B}_r = 0$ en dehors des aimants permanents. L'équation A.32 permet de modifier le premier terme de l'équation A.34 :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{H} - \mathbf{B}_r\mathbf{H}) d\Omega + \int_{\Omega_{aimant}} \mathbf{B}_r \cdot \mathbf{H} d\Omega_{aimant} \quad (\text{A.35})$$

ce qui nous amène à :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{H} d\Omega + \int_{\Omega_{aimant}} \frac{1}{2} \mathbf{B}_r\mathbf{H} d\Omega_{aimant} \quad (\text{A.36})$$

En utilisant les équations constitutives $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \nabla\varphi$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_m)$ (où \mathbf{A}_0 est le potentiel vecteur dû aux sources et \mathbf{A}_m est le potentiel vecteur dû à l'aimantation) on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{H} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{H}_0 - \int_{\Omega} \mathbf{B}\nabla\varphi d\Omega \quad (\text{A.37})$$

On peut de plus utiliser que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}\nabla\varphi d\Omega = 0 \quad (\text{A.38})$$

En effet, on peut utiliser le théorème de la divergence pour écrire l'équation précédente comme :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}\nabla\varphi d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi B_n d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{A.39})$$

et étant donné que B_n et φ sont continus aux interfaces, que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\varphi = 0$ à l'infini, cela permet de conclure. On obtient donc que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}_0 \, d\Omega \quad (\text{A.40})$$

On peut ensuite écrire :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}_0 \, d\Omega = W_0 + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{A}_m \mathbf{H}_0 \, d\Omega \quad (\text{A.41})$$

où W_0 est l'énergie stockée dans les bobines en l'absence de matériaux actifs définie comme :

$$W_0 = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \mathbf{H}_0 \quad (\text{A.42})$$

Cette énergie peut être calculée via :

$$W_0 = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{N_c} \frac{1}{2} L_{kl} I_l I_k \quad \text{with} \quad L_{kl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Omega_k^C} j_0^k \int_{\Omega_l^C} j_0^l \log\left(\frac{1}{r}\right) \, d\Omega_l^C \, d\Omega_k^C \quad (\text{A.43})$$

où L_{kl} est l'inductance mutuelle entre la bobine l et k en l'absence de matériaux actifs, N_c est le nombre de bobines dans le problème et I_k est le courant passant à travers la bobine k . Ω_k^C est le domaine de la bobine k , et j_0^k est la densité de courant dans la bobine k induisant un courant de 1A. La double intégrale équation (A.43 right) peut être calculée par une approche semi analytique : la première intégrale sur la région Ω_l^C peut être calculée de manière analytique [?] alors que la seconde peut être obtenue par une approche numérique par points de Gauss adaptatifs. On peut ensuite modifier le terme A.41 en utilisant la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_m + \nabla \times \mathbf{A}_0 = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H}_0 - \nabla\varphi + \mathbf{M})$:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{A}_m \mathbf{H}_0 \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{H}_0 \cdot \mu_0(-\nabla\varphi + \mathbf{M}) \, d\Omega \quad (\text{A.44})$$

On utilise encore un fois le fait que $\varphi = 0$ à l'infini et que $\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ pour prouver que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}_0 \cdot \mu_0 \nabla\varphi \, d\Omega = 0 \quad (\text{A.45})$$

et conclure que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{A}_m \mathbf{H}_0 \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{H}_0 \cdot \mu_0 \mathbf{M} \, d\Omega = \int_{\Omega_m} \mathbf{H}_0 \cdot \mu_0 \mathbf{M} \, d\Omega_m \quad (\text{A.46})$$

où Ω_m est le domaine ferromagnétique du problème car $\mathbf{M} = 0$ en dehors des matériaux ferro-magnétiques. On obtient donc l'expression de la co-énergie magnétique :

$$W_{mag}^{co} = W_0 + \int_{\Omega_m} \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{M} \, d\Omega_m + \int_{\Omega_{aimant}} \frac{1}{2} \mathbf{B}_r \mathbf{H} \, d\Omega_{aimant} \quad (\text{A.47})$$

Cas général

On repart de la définition de la co-énergie :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega \quad (\text{A.48})$$

et on la sépare cette fois en deux domaines :

- Ω_{air} qui correspond à la partie du problème contenant de l'air
- Ω_m qui correspond comme précisé plus haut à la partie ferromagnétique

On a donc :

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega_{air}} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega_{air} + \int_{\Omega_m} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega_m \quad (\text{A.49})$$

auquel on ajoute et on retire le terme $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega$:

$$\begin{aligned} W_{mag}^{co} = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega + \\ & \int_{\Omega_{air}} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega_{air} - \int_{\Omega_{air}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega_{air} + \\ & \int_{\Omega_m} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega_m - \int_{\Omega_m} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega_m \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Les deux termes dans l'air s'annulent et on peut utiliser les développements vus dans la partie linéaire pour le terme en $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega$ pour obtenir finalement :

$$W_{mag}^{co} = W_0 + \int_{\Omega_m} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}' \right] d\Omega_m \quad (\text{A.51})$$

Il est bon de noter que dans le cas où l'énergie magnétique est utilisée pour le calcul de force ou de couple magnétique, la dérivée de celle-ci doit être faite à courant constant. Il n'est donc pas nécessaire de calculer le terme W_0 pour cette utilisation car si le courant est constant, ce terme est lui aussi constant et n'a aucun impact sur la valeur de la dérivée de l'énergie.

Bibliographie

- [1] Solution of poisson equation by analytical boundary element integration. Applied Mathematics and Computation, 217(1) :152 – 163, 2010.
- [2] International Energy Agency. Biofuels and transport futures : Iea views to 2015, 2030 & 2050, Mars 2012.
- [3] G. Akoun and J. P. Yonnet. 3d analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets. IEEE Transactions on Magnetics, 20(5) :1962–1964, Sep 1984.
- [4] H. Allag and J. P. Yonnet. 3-d analytical calculation of the torque and force exerted between two cuboidal magnets. IEEE Transactions on Magnetics, 45(10) :3969–3972, Oct 2009.
- [5] Gerard Meunier Anderson S. Nunes, Olivier Chadebec and Patrick Kuo-Peng. Magnetic devices analysis by face fem coupled with standard reluctance network. 20hCompumag Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2015.
- [6] D. M. Araujo, G. Meunier, O. Chadebec, J. L. Coulomb, and L. Rondot. 3-d hybrid fem-bem using whitney facet elements and independent loops. IEEE Transactions on Magnetics, 51(3) :1–4, March 2015.
- [7] D. Martins Araujo, G. Meunier, O. Chadebec, J-L. Coulomb, and L. Rondot. 3-d hybrid fem-bem using whitney facet elements and independent loops. journal, Janvier 2014.
- [8] K. J. Bathe. Numerical methods in finite element analysis. 1976.
- [9] T. Bazzo, R. Carlson, and F. Wurtz. Wind power pmsg optimally designed for maximum energy proceeds and minimum cost. pages 1464–1470, June 2015.

-
- [10] A. Bossavit. Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. IEE Proceedings A - Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, 135(8) :493–500, November 1988.
- [11] A. Bossavit. Champs et equations en electromagnetisme. 2003.
- [12] D. P. Botelho, D. M. Araujo, G. Meunier, Y. Marechal, J. L. Coulomb, B. Ramdane, and O. Chadebec. Hybrid natural element method-boundary element method for unbounded problems. IEEE Transactions on Magnetics, 51(3) :1–4, March 2015.
- [13] Diego Pereira Botelho. Methodes des elements naturels appliquee aux problemes electromagnetiques : developpement d’un outil de modelisation et de conception des dispositifs electriques. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2015.
- [14] P. Campbell, M. Chari, and J. D’Angelo. Three-dimensional finite element solution of permanent magnet machines. IEEE Transactions on Magnetics, 17(6) :2997–2999, Nov 1981.
- [15] A. Canova and M. Repetto. Integral solution of nonlinear magnetostatic field problems. IEEE Transactions on Magnetics, 37(3) :1070–1077, May 2001.
- [16] A. Carpentier, O. Chadebec, N. Galopin, G. Meunier, and B. Bannwarth. Resolution of nonlinear magnetostatic problems with a volume integral method using the magnetic scalar potential. IEEE Transactions on Magnetics, 49(5) :1685–1688, May 2013.
- [17] A. Carpentier, N. Galopin, O. Chadebec, and G. Meunier. Modeling of magneto-mechanical coupling using magnetic volume integral and mechanical finite-element methods. IEEE Transactions on Magnetics, 50(2) :233–236, Feb 2014.
- [18] Anthony Carpentier. Formulation integrale de volume magnetostatique et calcul des densites de force magnetique. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2013.
- [19] O. Chadebec, J. L. Coulomb, and F. Janet. A review of magnetostatic moment method. IEEE Transactions on Magnetics, 42(4) :515–520, April 2006.
- [20] M. V. K. Chari, Z. J. Csendes, P. Silvester, A. Konrad, and M. A. Palmo. Three-dimensional magnetostatic field analysis of electrical machinery by the finite-element method. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-100(8) :4007–4019, Aug 1981.

- [21] J. Coulomb. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. IEEE Transactions on Magnetics, 19(6) :2514–2519, Nov 1983.
- [22] J. Coulomb and G. Meunier. Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. IEEE Transactions on Magnetics, 20(5) :1894–1896, Sep 1984.
- [23] J. Coulomb, Y. Du Terrail, and G. Meunier. Flux3d, a finite element package for magnetic computation. IEEE Transactions on Magnetics, 21(6) :2499–2502, Nov 1985.
- [24] J. D’Angelo, M. V. K. Chari, and P. Campbell. Three-dimensional finite element solution for a permanent magnet axial-field machine. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-102(1) :83–90, Jan 1983.
- [25] Javier de Frutos, Volker John, and Julia Novo. Projection methods for incompressible flow problems with weno finite difference schemes. Journal of Computational Physics, 309 :368 – 386, 2016.
- [26] A. Demenko, L. Nowak, and W. Szlag. Reluctance network formed by means of edge element method. IEEE Transactions on Magnetics, 34(5) :2485–2488, Sep 1998.
- [27] N. A. Demerdash and R. Wang. Theoretical and numerical difficulties in 3-d vector potential methods in finite element magnetostatic computations. IEEE Transactions on Magnetics, 26(5) :1656–1658, Sep 1990.
- [28] Q. Dinh and Y. Marechal. Toward real-time finite-element simulation on gpu. IEEE Transactions on Magnetics, 52(3) :1–4, March 2016.
- [29] Emile Durand. Magnetostatique. 1968.
- [30] P. Ferrouillat, C. Guerin, G. Meunier, B. Ramdane, P. Dular, P. Labie, and D. Dupuy. Computation of source for non-meshed coils in a reduced domain with a-v. IEEE Transactions on Magnetics, 52(3) :1–4, March 2016.
- [31] W. N. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. J. Cendes. Magnetic force computation in permanent magnets using a local energy coordinate derivative method. IEEE Transactions on Magnetics, 40(2) :683–686, March 2004.
- [32] F.G. Fuchs, A.D. McMurry, S. Mishra, N.H. Risebro, and K. Waagan. High order well-balanced finite volume schemes for simulating wave propagation in stra-

- tified magnetic atmospheres. Journal of Computational Physics, 229(11) :4033 – 4058, 2010.
- [33] Jacek F. Gieras. Analytical approach to cogging torque calculation of pm brushless motors. IEEE transactions on industry applications, September 2004.
- [34] Gilbert Touzot Gouri Dhatt. Une presentation de la methode des elements finis. 1981.
- [35] Zhen Guan, Vili Heinonen, John Lowengrub, Cheng Wang, and Steven M. Wise. An energy stable, hexagonal finite difference scheme for the 2d phase field crystal amplitude equations. Journal of Computational Physics, 321 :1026 – 1054, 2016.
- [36] S. Hiruma and H. Igarashi. Fast 3-d analysis of eddy current in litz wire using integral equation. IEEE Transactions on Magnetics, 53(6) :1–4, June 2017.
- [37] R. Hong, S. Li, J. Zhang, Y. Zhang, N. Liu, Z. Yu, and Q. H. Liu. 3-d mri-based electrical properties tomography using the volume integral equation method. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, PP(99) :1–10, 2017.
- [38] Guanghui Hu. An adaptive finite volume method for 2d steady euler equations with weno reconstruction. Journal of Computational Physics, 252 :591 – 605, 2013.
- [39] L. Huang, G. Meunier, O. Chadebec, J. M. Guichon, Y. Li, and Z. He. General integral formulation of magnetic flux computation and its application to inductive power transfer system. IEEE Transactions on Magnetics, 53(6) :1–4, June 2017.
- [40] M. Jarnieux, D. Grenier, G. Reyne, and G. Meunier. F.e.m. computation of eddy currents and forces in linear moving system by post-processing and user’s programs. In Digest of the Fifth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, pages TP48–TP48, Aug 1992.
- [41] L. Kettunen and L. R. Turner. A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements. IEEE Transactions on Magnetics, 28(2) :1639–1642, Mar 1992.
- [42] H. Kim, S. Hong, K. Choi, H. Jung, and S. Hahn. A three dimensional adaptive finite element method for magnetostatic problems. IEEE Transactions on Magnetics, 27(5) :4081–4084, Sep 1991.

- [43] V. Le-Van, G. Meunier, O. Chadebec, and J. M. Guichon. A magnetic vector potential volume integral formulation for nonlinear magnetostatic problems. IEEE Transactions on Magnetics, 52(3) :1–4, March 2016.
- [44] V. Le-Van, G. Meunier, O. Chadebec, and J. M. Guichon. A magnetic vector potential volume integral formulation for nonlinear magnetostatic problems. IEEE Transactions on Magnetics, 52(3) :1–4, March 2016.
- [45] Douglas Araujo Martins. Plateforme de conception d’actionneurs : methodes et outils pour le pre-dimensionnement d’actionneurs. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2015.
- [46] F. Matsuoka and A. Kameari. Calculation of three dimensional eddy current by fem-bem coupling method. IEEE Transactions on Magnetics, 24(1) :182–185, Jan 1988.
- [47] G. Meunier, O. Chadebec, J. M. Guichon, V. Le-Van, J. Siau, B. Bannwarth, and F. Sirois. A-t volume integral formulations for solving electromagnetic problems in the frequency domain. IEEE Transactions on Magnetics, 52(3) :1–4, March 2016.
- [48] Yong Gyu Park, Hyeong-Seok Kim, and Song-Yop Hahn. An adaptive finite element method for magnetostatic force computations. IEEE Transactions on Magnetics, 26(2) :1031–1034, Mar 1990.
- [49] Van Quang DINH. Vers une simulation par elements finis en temps reel pour le genie electrique. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2016.
- [50] T. Gallouët et R. Herbin R. Eymard. Handbook of Numerical Analysis. 2000.
- [51] B. Ramdane, G. Meunier, G. Escamez, O. Chadebec, A. Badel, and P. Tixador. 3d volume integral formulation based on facet elements for the computation of ac losses in superconductors. pages 1–1, Nov 2016.
- [52] Z. Ren. Comparison of different force calculation methods in 3d finite element modelling. IEEE Transactions on Magnetics, 30(5) :3471–3474, Sept 1994.
- [53] Z. Ren and Z. Cendes. Shell elements for the computation of magnetic forces. IEEE Transactions on Magnetics, 37(5) :3171–3174, Sep 2001.
- [54] Z. Ren and A. Razek. Force calculation by maxwell stress tensor in 3d hybrid finite element- boundary integral formulation. In International Conference on Magnetics, pages HD–HD, April 1990.
- [55] Z. Ren and A. Razek. Local force computation in deformable bodies using edge elements. IEEE Transactions on Magnetics, 28(2) :1212–1215, Mar 1992.

- [56] Zhuoxiang Ren. Influence of the rhs on the convergence behaviour of the curl-curl equation. IEEE Transactions on Magnetics, 32(3) :655–658, May 1996.
- [57] Allied Market Research. Electric motor market report - global opportunity analysis and industry forecast, 2016 - 2022, Mars 2017.
- [58] M. E. Royak, I. M. Stupakov, and N. S. Kondratyeva. Coupled vector fem and scalar bem formulation for eddy current problems. In 2016 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), volume 02, pages 330–335, Oct 2016.
- [59] Dominik Schillinger, John A. Evans, Felix Frischmann, Rene R. Hiemstra, Ming-Chen Hsu, and Thomas J.R. Hughes. A collocated c0 finite element method : Reduced quadrature perspective, cost comparison with standard finite elements, and explicit structural dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 102(3-4) :576–631, 2015.
- [60] K. Sertel and J. L. Volakis. Method of moments solution of volume integral equations using parametric geometry modeling. Radio Science, 37(1) :1–7, Jan 2002.
- [61] J. Siau, G. Meunier, O. Chadebec, J. M. Guichon, and R. Perrin-Bit. Volume integral formulation using face elements for electromagnetic problem considering conductors and dielectrics. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 58(5) :1587–1594, Oct 2016.
- [62] B. Stoev, G. Todorov, P. Rizov, G. Pagiatakis, and L. Dritsas. Finite element analysis of rotating electrical machines x2014 ; an educational approach. In 2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON), pages 262–269, April 2017.
- [63] A. Susanto, L. Ivan, H. De Sterck, and C.P.T. Groth. High-order central eno finite-volume scheme for ideal mhd. Journal of Computational Physics, 250 :141 – 164, 2013.
- [64] Kirill M. Terekhov, Bradley T. Mallison, and Hamdi A. Tchelepi. Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem. Journal of Computational Physics, 330 :245 – 267, 2017.
- [65] Philipp Trisjono, Seongwon Kang, and Heinz Pitsch. On a consistent high-order finite difference scheme with kinetic energy conservation for simulating turbulent reacting flows. Journal of Computational Physics, 327 :612 – 628, 2016.

-
- [66] L. Urankar. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part i : Filament approximation. IEEE Transactions on Magnetics, 16(5) :1283–1288, Sep 1980.
- [67] L. Urankar and P. Henninger. Compact extended algorithms for elliptic integrals in electromagnetic field and potential computations. i. elliptic integrals of the first and second kind with extended integration range. IEEE Transactions on Magnetics, 27(5) :4338–4342, Sept 1991.
- [68] E. Vassent, G. Meunier, and J. C. Sabonnadier. Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements. IEEE Transactions on Magnetics, 25(4) :3064–3066, Jul 1989.
- [69] Alan M. Winslow. Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh. Journal of Computational Physics, 135(2) :128 – 138, 1997.
- [70] Guangwei Meng Shi Zhou Yu Zhou, Huaishu Li and Qing Cao. Analytical calculation of magnetic field and cogging torque in surface-mounted permanent-magnet machines accounting for any eccentric rotor shape. IEEE transactions on industrial electronics, Juin 2015.

Résumé - Cette thèse vise à développer une méthode alternative à la méthode des éléments finis pour pré-dimensionner des machines électriques tournantes. Le pré-dimensionnement consiste en un calcul rapide du champ magnétique à l'intérieur d'une machine électrique pour en extraire des caractéristiques physiques. Les caractéristiques physiques recherchées sont le couple appliqué sur le rotor ainsi que les flux à travers les bobines du moteur électrique.

Après une revue des différentes méthodes existantes dans le domaine de la modélisation des moteurs électriques, on retiendra pour ces travaux les méthodes intégrales qui sont développées au laboratoire de génie électrique de Grenoble pour résoudre la problématique du calcul du champ magnétique à l'intérieur du moteur. Ces méthodes permettent un calcul précis du champ magnétique à l'intérieur de tout dispositif électromagnétique dans un temps de calcul relativement réduit par rapport à la méthode des éléments finis grâce à une meilleure évaluation des interactions entre les éléments du maillage.

La formulation intégrale utilisée dans ces travaux est une formulation intégrale de volume dont l'inconnue est le potentiel vecteur interpolé sur les arêtes des éléments du maillage utilisé pour discrétiser la machine tournante. Cette formulation a été adaptée aux spécificités des moteurs électriques et optimisée dans le cadre de résolutions multi-statiques. Enfin, des méthodes originales sont présentées pour calculer les caractéristiques physiques du moteur : deux méthodes de calcul de couple ont été mises au point, une première se basant sur le tenseur de Maxwell adapté aux méthodes intégrales de volume et une seconde basée sur la dérivée de la co-énergie magnétique dont une nouvelle formule ne nécessitant que la connaissance de l'induction dans les matériaux actifs est présentée. Une méthode semi-analytique de calcul de flux dans les bobines maillées du moteur est présentée.

Il ressort de cette étude que le couplage entre la méthode intégrale de volume en potentiel vecteur et les trois méthodes évoquées ci-dessus fournit dans des temps inférieurs à la méthode des éléments finis certaines des caractéristiques recherchées.

Mots clés : méthodes numériques, méthodes intégrales, calcul de champ magnétique, calcul de couple électromagnétique, calcul de flux électromagnétique, dimensionnement de moteur électrique

Abstract - This PhD thesis aims to develop an alternative method to the finite elements method for an efficient electrical rotating machines pre-design. Electrical engine pre-design involve of a quick calculation of the magnetic field within the rotating machine and be able to extract of this field the main physical characteristics of the machine. The physical characteristics searched for are the magnetic torque applied on the rotor and the magnetic flux through the coils of the engine.

After a quick review of the existing methods for electrical engine pre-design, integral methods developed in Grenoble's electrical engineering laboratory will be took on to carry out the calculation of the magnetic field in the engine. Those methods allow a fast and precise calculation of the magnetic field thanks to an excellent evaluation of the interaction between the elements of the mesh.

The integral formulation used in this thesis is a vector potential volume integral formulation where the vector potential is interpolated over the edges of the mesh. This formulation has been adapted to the specificities of the electrical engine simulation and optimized for the case of multi-static computations. Finally, original post functions have been developed to compute the physical characteristics of the electrical engine from the magnetic field solution provided by the volume integral formulation. Two methods of torque computation are presented along with one semi-analytical method for the computation of the flux through the coils of the engine.

This study brings out that the coupling between the vector potential volume integral method and the post functions described above provides good results faster than the finite elements method for several physical characteristics of the electrical machine.

Key words : numerical methods, integral method, magnetic field computation, torque computation, flux computation, electrical engine pre-design