HAL
open science

Chirurgies de Dehn sur des variétés CR-sphériques et variétés de caractères pour les formes réelles de SL(n,C)

Miguel Acosta

To cite this version:

Miguel Acosta. Chirurgies de Dehn sur des variétés CR-sphériques et variétés de caractères pour les formes réelles de SL(n,C). Géométrie métrique [math.MG]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066368 . tel-01739680

HAL Id: tel-01739680

https://theses.hal.science/tel-01739680v1

Submitted on 21 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Miguel Acosta

Chirurgies de Dehn sur des variétés CR-sphériques et variétés de caractères pour les formes réelles de SL(n,C)

---

dirigée par Antonin Guilloux et Martin Deraux

Soutenue le 7 décembre 2017 devant le jury composé de :

M. Gilles Courtois	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Martin Deraux	Université Grenoble Alpes	directeur
M. Olivier Guichard	Université de Strasbourg	rapporteur
M. Antonin Guilloux	Université Pierre et Marie Curie	directeur
Mme Fanny Kassel	Institut des Hautes Études Scientifiques	examinatrice
M. Joan Porti	Universitat Autònoma de Barcelona	examinateur
M. Jean-Marc Schlenker	Université du Luxembourg	rapporteur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

A mi familia

Caminante, son tus huellas
el camino, y nada más ;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante, no hay camino,
sino estelas en la mar.

Antonio Machado, *Proverbios y cantares (XXIX)*
Cantado por Joan Manuel Serrat

Remerciements

Le moment tant redouté d'écrire les remerciements est enfin arrivé. Ce sera, sans doute, la partie la plus lue de cette thèse, que ce soit par ceux qui assistent à la soutenance, ceux qui sont curieux de savoir qui était celui qui l'a écrite ou bien par les thésards en recherche d'idées pour leurs propres remerciements. Il y aura aussi ceux qui chercheront leur nom et seront heureux de le trouver, et ceux qui le chercheront et ne le trouveront pas. À eux, désolé, vous auriez dû être là, mais ma mémoire n'est pas parfaite et et l'art de l'énumération exhaustive n'est pas mon point fort.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux directeurs, Antonin Guilloux et Martin Deraux, pour avoir encadré et suivi mon travail de thèse, lu et relu avec patience tout ce que j'ai écrit et m'avoir donné de précieux conseils. Que ce soit dans le couloir d'à côté, pendant un aller-retour à Grenoble ou à distance, ils ont toujours pris le temps de discuter, de réfléchir sur mes questions et de me conseiller. Je leur suis très reconnaissant de leur patience et de m'avoir permis de mettre en pause ma thèse entre janvier et juillet 2017 pour prendre le temps de préparer l'agrégation de mathématiques à Nancy. Ces mois de préparation et de concours ont été très enrichissants pour moi, personnellement et mathématiquement.

Un grand merci à Jean-Marc Schlenker et à Olivier Guichard d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Même si les délais ont été courts, ils ont pris le temps de se pencher sur mon travail, de le lire et de rédiger les rapports correspondants. Je tiens à exprimer ma gratitude à Fanny Kassel, Joan Porti et Gilles Courtois qui complètent le jury de thèse. C'est un grand honneur de les avoir comme examinateurs.

Je voudrais également remercier tous les chercheurs auxquels je suis allé poser des questions, et qui m'ont aidé à trouver des réponses. Le cadre de travail à l'IMJ-PRG a été très agréable de ce point de vue : à chaque fois que j'en avais une, il y avait une porte à laquelle frapper et souvent quelqu'un pour m'aider. Ceux que je suis allé embêter le plus sont certainement Elisha Falbel, Pierre Will, Maxime Wolff, Julien Marché, Nicolas Bergeron, Catherine Gille et Gilles Courtois. Plus sporadiquement, j'ai aussi pu profiter de discutions avec Florent Schaffhauser, Cyril Demarche et Hélène Eynard-Bontemps. Je remercie également Michael Heusener et Joan Porti, qui se sont penchés à distance sur le travail qui a donné une des parties de cette thèse.

Pendant les trois années que j'ai passé dans le couloir des doctorants de l'IMJ-PRG à Jussieu, j'ai eu la chance d'avoir une superbe ambiance pour le travail, et pour tous les moments annexes. J'ai eu de très bons «co-bureau» : Ahmed, Arthur, Macarena, Xiaohua, Louis, Hugo et Thomas, merci à vous pour garder toujours une atmosphère sympathique au bureau (et, bien sûr, pour avoir monté le canapé et ouvert le tiroir condamné depuis dix ans). Il y a eu aussi le meilleur moyen de commencer la semaine (ou les jeudis matins, un peu avant) avec des croissants et des maths au moins aussi savoureuses. Merci à tous les organisateurs, orateurs et aux assistants du séminaire des lapins !

Tous les membres du BDD ont aussi une place spéciale. Même si je n'en ai pas fait partie, je suis très reconnaissant du fait qu'ils gardent le couloir vivant, et, en plus de leur thèse, ils s'occupent de la plupart des soucis qui ennuient tous les doctorants : les choses matérielles ou administratives, les bureaux, les clés, les comment-s'inscrire, le café (même si je n'en ai jamais pris). Merci aussi aux autres thésards : Anne, Ruben, Maÿlis, Juliette, François, Olivier, Andrés, Léo, Adrien, Jesua , Karam, et tous les autres, qui se reconnaîtront si ce texte leur tombe entre les mains.

Je voudrais remercier également les groupes d'amis que j'ai côtoyé pendant ces années, et avec qui j'ai passé de très bons moments en dehors du cadre de la thèse. Tout d'abord, il y les sportifs de l'ENS, et notamment les volleyeurs, avec les mardis soirs de jeu, les matchs et le gâteau. Ensuite, les anciens habitants du C3 à Montrouge, leurs mails de nouvelles et les après-midis jeux quand le temps s'y prête. Finalement, les anciens habitants du B2 (et assimilés) et leurs rencontres plus festives. Ils se reconnaîtront tous en lisant ce texte, et je préfère ne pas dresser les (longues) listes de peur d'oublier trop de noms.

D'autres connaissances de plus longue date ont leur place dans ces remerciements. Ce sont eux qui m'ont appris les maths et qui m'ont donné envie de continuer à en faire. Il y a, d'une part, mes professeurs de mathématiques : Gérard Laissue, José Lugo, Orlando Farigua, Serge Dupont et Yves Duval. Chacun a apporté énormément au mathématicien que je suis, que ce soit la curiosité, certaines façons de voir les maths ou la pure et simple rigueur. D'autre part, il y a les Olympiades Colombiennes de Mathématiques, où j'ai passé à peu près un quart de mon temps en étant lycéen. C'est là que dans une très bonne ambiance j'ai pris goût aux problèmes mathématiques et à passer des heures à essayer de les résoudre.

Je tiens à remercier très chaleureusement ma famille, au sens le plus large et à celui le plus étroit. J'ai des oncles, tantes, et cousins aux quatre coins du monde, mais surtout en Colombie : même si on ne se voit pas très souvent je suis toujours heureux de vous avoir, de savoir que je peux compter sur vous et que vous pouvez toujours compter sur moi. Je remercie aussi ma belle famille, qui est, elle, vers Nancy, qui m'a toujours accueilli et souvent hébergé, et qui se retrouve régulièrement dans la joie et la bonne humeur. Ceux qui gardent la place la plus spéciale sont sans doute mes parents, Lorenzo et Margarita, et ma sœur, Laura. Merci à vous pour toutes les années avant que je parte «de l'autre côté

de la flaque» et pour les retrouvailles hebdomadaires par écrans interposés. Vous imaginez à peine à quel point ce soutien est important pour moi.

Finalement, je veux remercier tout particulièrement Kathleen, qui a été à mes côtés tout au long de ce travail de thèse, du début jusqu'à la fin. Sa compagnie, son soutien (et sa cuisine !) on rendu ma vie heureuse ces dernières années.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à la construction et à la déformation de structures CR-sphériques sur des variétés de dimension 3. Pour le faire, on étudie en détail l'espace hyperbolique complexe, son groupe d'isométries et des objets géométriques liés à cet espace. On montre un théorème de chirurgie qui permet de construire des structures CR-sphériques sur des chirurgies de Dehn d'une variété à pointe portant une structure CR-sphérique : il s'applique aux structures de Deraux-Falbel sur le complémentaire du nœud de huit et à celles de Schwartz et de Parker-Will sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

On définit aussi les variétés de caractères de groupes de type fini pour les formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ comme des sous-ensembles de la variété des caractères $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ fixes par des involutions anti-holomorphes. Ces variétés de caractères, dont on étudie en détail l'exemple du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, fournissent des espaces de déformation pour des représentations d'holonomie de structures CR-sphériques.

À l'aide de ces espaces de déformations, et des outils liés aux sphères visuelles dans $\mathbb{CP}^2$, on construit une déformation explicite du domaine de Ford construit par Parker et Will et qui donne une uniformisation CR-sphérique sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Cette déformation fournit une infinité d'uniformisations CR-sphériques sur une chirurgie de Dehn particulière de cette variété, et des uniformisations CR-sphériques sur une infinité de chirurgies de Dehn sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

Mots-clés

Chirurgie de Dehn, structures géométriques, géométrie CR-sphérique, géométrie hyperbolique complexe, variétés de caractères, domaine de Ford.

Dehn surgeries on spherical-CR manifolds and character varieties for the real forms of SL(n,C)

Abstract

In this thesis, we study the construction and deformation of spherical-CR structures on three dimensional manifolds. In order to do it, we give a detailed description of the complex hyperbolic plane, its group of isometries and some geometric objects attached to this space such as bisectors and extors. We show a surgery theorem which allows to construct spherical-CR on Dehn surgeries of a cusped spherical-CR manifold : this theorem can be applied for the Deraux-Falbel structure on the figure eight knot complement and for Schwartz's and Parker-Will structures on the Whitehead link complement.

We also define the character varieties for a real form of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ for finitely generated groups as some subsets of the $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-character variety invariant under an anti-holomorphic involution. We study in detail the example of the group $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. These character varieties give deformation spaces for the holonomy representations of spherical-CR structures.

With these deformation spaces and tools related to the visual spheres of a point in $\mathbb{CP}^2$, we construct an explicit deformation of the Ford domain constructed by Parker and Will, which gives a spherical-CR uniformisation of the Whitehead link complement. This deformation provides infinitely many spherical-CR uniformisations of a particular Dehn surgery of the manifold, and spherical-CR unifomisations for infinitely many Dehn surgeries of the Whitehead link complement.

Keywords

Dehn surgery, geometric structures, spherical-CR geometry, complex hyperbolic geometry, character varieties, Ford domain.

Table des matières

Introduction **15**

1 Le plan hyperbolique complexe et ses isométries **23**

1.1 Introduction 23

1.2 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et ses isométries 24

1.2.1 L'espace $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et son bord à l'infini. 24

1.2.2 Isométries (holomorphes) de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ 27

1.2.3 Classification des isométries 29

1.2.4 Dualité - Polaires 31

1.2.5 Le produit vectoriel hermitien 32

1.2.6 Description des isométries 33

1.3 Convergence d'éléments réguliers 37

1.3.1 Éléments réguliers de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ 37

1.3.2 Paramétrisation des elliptiques réguliers 38

1.3.3 Paramétrisation des loxodromiques 39

1.3.4 Quelques remarques sur la convergence 39

1.4 Flots invariants 40

1.4.1 Exponentielle, sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{SU}(2,1)$ 40

1.4.2 Le logarithme et une étoile pour $\mathrm{PU}(2,1)$ 41

1.4.3 Champs de vecteurs invariants 42

1.4.4 Description des flots 43

1.5 La sphère visuelle d'un point de $\mathbb{CP}^2$ 49

1.5.1 Définition 49

1.5.2 Coordonnées pour la sphère visuelle 50

1.6 Exteurs, bissecteurs et surfaces spinales 51

1.6.1 Définition 51

1.6.2 Topologie des bissecteurs et des surfaces spinales. 54

1.6.3 Depuis la sphère visuelle 59

1.6.4 Diamètre visuel (réel) d'un bissecteur métrique 62

1.6.5 Paires d'exteurs 63

1.6.6 Paires de bissecteurs coéquidistants 65

2 Chirugies de Dehn CR-sphériques 71

2.1 Introduction 71

2.2 Chirurgies régulières 72

2.2.1 Le principe d'Ehresmann-Thurston 72

2.2.2 Un théorème de chirurgie CR-sphérique 74

2.3 Application : le complémentaire du nœud de 8 83

2.3.1 La structure de Deraux-Falbel 83

2.3.2 Vérification des hypothèses du théorème de chirurgie 84

2.3.3 Déformations de la structure 85

2.4 Les variétés $V(p,q,n)$ 88

3 Variétés de caractères pour les formes réelles 91

3.1 Introduction 91

3.2 Variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 93

3.2.1 Définition des variétés de caractères 93

3.2.2 Quelques variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ 94

3.3 Variété des caractères pour une forme réelle 96

3.3.1 Formes réelles et définition 96

3.3.2 La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$ comme quotient topologique . . 98

3.3.3 Involutions anti-holomorphes et représentations irréductibles 99

3.4 Un exemple détaillé : le produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 104

3.4.1 La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 104

3.4.2 Représentations réductibles dans la composante $X_0 \subset \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 106

3.4.3 Les points fixes de l'involution Φ_2 108

3.4.4 Description de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 112

4 Déformation effective d'un domaine de Ford 117

4.1 Introduction 117

4.2 Chirurgies sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead 119

4.2.1 Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead 119

4.2.2 Espaces de déformations 120

4.2.3 Représentations de Parker-Will 121

4.2.4 Structures d'holonomie périphérique parabolique 123

4.2.5 Chirurgies CR-sphériques. 125

4.3 Déformation effective : Énoncés et stratégie de preuve 130

4.3.1 Structures CR-sphériques : énoncés 130

4.3.2 Stratégie de preuve 131

4.3.3 Résultats utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré 133
4.4 Notations et combinatoire initiale 133
4.4.1 Notations - points remarquables 134
4.4.2 Combinatoire de l'uniformisation de Parker-Will 135
4.5 Déformation effective : Preuve 137
4.6 Topologie des faces lors de la déformation (TF) 141
4.6.1 Incidence de points et bissecteurs 141
4.6.2 Symétrie 143
4.6.3 L'intersection $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$ 143
4.6.4 Les faces dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont bien définies 150
4.7 Combinatoire locale (CL) 153
4.8 Combinatoire globale (CG) 154
4.8.1 Stratégie 154
4.8.2 Premières données 155
4.8.3 La carte $\psi_{p'_U,p''_U}$ de $L_{[p_U]}$. 157
4.8.4 Le côté loxodromique 157
4.8.5 Le côté elliptique 163

A Les variétés $V(p,q,n)$ 171

B Le théorème du polyèdre de Poincaré 175
B.1 Le théorème du polyèdre de Poincaré 175
B.2 L'énoncé de Parker-Will 175
B.2.1 Le polyèdre et sa structure cellulaire 176
B.2.2 L'identification de faces 176
B.2.3 Facettes et relations de cycles 177
B.2.4 Sommets idéaux et systèmes consistants d'horoboules 178
B.2.5 Énoncé du théorème 178
B.3 Application dans le chapitre 4 179

Bibliographie 181

Introduction

Structures géométriques

Cette thèse s'inscrit dans l'étude de la topologie des variétés de dimension trois, et plus précisément du lien entre la topologie et une structure géométrique particulière. Pour nous, les structures géométriques sont à considérer dans le langage établi par Klein dans son programme d'Erlangen, qui est celui des (G, X)-structures. On considère est une variété lisse X et un sous-groupe d'automorphismes G de X agissant transitivement et analytiquement sur X. Une (G, X)-structure sur une variété lisse M est alors un atlas de M à valeurs dans X et changements de cartes donnés par des éléments de G.

Avec cette définition, on peut mettre sur le même plan plusieurs géométries, en englobant les variétés riemanniennes à courbure constante : la géométrie euclidienne (courbure 0 ; $(\mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$, la sphérique (courbure 1 ; $(\mathrm{O}(n+1), \mathbb{S}^n))$ et hyperbolique (courbure -1 ; $(\mathrm{SO}(n,1), \mathbb{H}^n))$. On y trouve aussi les structures affines plates $((\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$, projectives plates $((\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^n))$ et conformes plates $((\mathrm{SO}(n,1), S^n))$. La géométrie CR-sphérique, que l'on définira plus loin, et sur laquelle se concentre cette thèse, vient également s'ajouter à cette liste.

Lorsqu'on s'intéresse aux variétés de dimension 2, cette approche géométrique aide en grande mesure à classifier et à comprendre les variétés compactes. En effet, les variétés compactes orientables de dimension 2 sont classifiés par le genre, et le théorème d'uniformisation de Riemann établit un lien étroit entre la topologie et les structures géométriques portées par ces variétés. Ainsi, une variété est sphérique si elle est de genre 0, euclidienne si elle est de genre 1 et hyperbolique si elle est de genre ≥ 2.

L'étude des variétés de dimension 3 s'avère beaucoup plus compliquée, mais les structures géométriques restent un outil fondamental lié à la topologie de ces variétés. La célèbre conjecture de géométrisation de Thurston, dont la preuve a été conclue par Perelman dans les années 2000, assure qu'une variété compacte et orientable de dimension 3 peut être découpée en plusieurs morceaux, chacun portant une des 8 géométries de dimension 3 de Thurston. La question générale de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété donnée porte une structure géométrique particulière reste néanmoins d'un grand intérêt.

La donnée d'une (G, X)-structure sur une variété M est équivalente à la donnée d'un difféomorphisme local $\mathrm{Dev} : \widetilde{M} \to X$ et d'une représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(M) \to G$, qui sont compatibles au sens où pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tout $\gamma \in \pi_1(M)$, on a $\mathrm{Dev}(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot \mathrm{Dev}(x)$. En particulier, l'étude des représentations de $\pi_1(M)$ à valeurs dans G est liée profondément à l'étude des (G, X)-structures sur M.

En général, la développante n'est ni injective ni surjective, et l'image de l'holonomie peut ne pas être discrète et même avoir comme ensemble limite sur X l'espace tout entier. On s'intéresse donc plutôt aux structures *complètes* ou *uniformisables*, sur lesquelles l'information se lit sur un sous-groupe de G.

Définition. On dit qu'une (G, X)-structure sur une variété M est *uniformisable* si, en tant que (G, X)-structure, $M \simeq \rho(\pi_1(M))\backslash\Omega$, où $\Omega \subset X$ est le domaine de discontinuité de $\rho(\pi_1(M))$. On dit qu'elle est *complète* si elle est uniformisable avec $\Omega = X$. Dans ce dernier cas, l'application développante est un difféomorphisme entre $\widetilde{M}$ et X.

Lorsque X possède une métrique riemannienne G-invariante, cette notion de complétude est équivalente à la complétude géodésique et à la complétude métrique de la variété (cette dernière équivalence étant donnée par le théorème de Hopf-Rinow). Par exemple, une métrique riemannienne à courbure constante sur une variété compacte donne lieu à une structure complète (sphérique, euclidienne ou hyperbolique, suivant le cas).

Variétés de caractères

Pour étudier les (G, X)-structures sur une variété M, il est très utile de comprendre l'ensemble des représentations de $\pi_1(M)$ à valeurs dans G à conjugaison près, puisque deux structures d'holonomies conjuguées sont obtenues simplement en translatant l'atlas dans X. Cependant, en général, pour un groupe de type fini Γ le quotient naïf $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$, où G agit par conjugaison, n'est pas séparé. Lorsque G est un groupe algébrique complexe réductif, la théorie géométrique des invariants (GIT) nous permet de construire un objet algébrique pour étudier les représentations à conjugaison près. En effet, dans ce cas, $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est une variété algébrique, et le quotient algébrique $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)//G$ est une variété algébrique bien définie : c'est la variété de caractères pour G du groupe Γ.

Par exemple, pour les structures hyperboliques réelles de dimension 3, le groupe G est $\mathrm{SO}(2, 1)$, et il est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$: on peut alors mettre en œuvre cette construction.

Pour les structures CR-sphériques, le groupe $\mathrm{PU}(2, 1)$ ne vérifie pas les hypothèses pour la construction du quotient GIT, et une des motivations de cette thèse est de déterminer un espace de déformations de représentations pour un groupe de type fini. Nous proposons une définition de *variété de caractères pour une forme réelle de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ comme les points de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ qui proviennent de représentations à valeurs dans cette forme réelle. Nous discuterons cette définition dans le chapitre 3.

Structures hyperboliques et chirurgies de Dehn

Dans cette thèse, on s'inspire des travaux de Thurston sur les variétés hyperboliques, et notamment de son théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique, qu'on peut trouver dans ses notes [Thu02]. Ce résultat donne un moyen de construire un grand nombre de variétés hyperboliques de dimension 3 à partir d'une variété à pointe, en «bouchant» la pointe par le recollement d'un tore plein. Ce recollement, a priori simplement topologique, et qui est paramétré par la donnée d'un couple d'entiers (p, q) premiers entre eux, est appelé une *chirurgie de Dehn.* Le théorème de chirurgie de Dehn de Thurston peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème (de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston)**.** *Soit M une variété hyperbolique complète avec une pointe. Alors toutes les chirurgies de Dehn sur M, sauf un nombre fini, portent une structure hyperbolique complète.*

Ce dernier résultat permet de construire explicitement une infinité de variétés hyperboliques compactes à partir d'une variété hyperbolique à pointe, comme par exemple le complémentaire du nœud de 8, tel que décrit par Thurston dans ses notes [Thu02]. Dans les années 1980, Thurston a montré par ailleurs que beaucoup de complémentaires de nœuds et d'entrelacs admettent des structures hyperboliques. Une dernière motivation pour insister sur les chirurgies de Dehn sur les compléments de nœuds pour l'étude générale des variétés de dimension 3 est le théorème suivant, qui assure qu'on peut obtenir n'importe quelle variété compacte uniquement à l'aide de ce procédé.

Théorème (Lickorish-Wallace)**.** *Toute variété compacte de dimension 3 peut être obtenue à partir du complémentaire d'un entrelacs dans S^3 par des chirurgies de Dehn.*

Variétés CR-sphériques

En gardant en tête les résultats du monde hyperbolique réel, nous allons nous intéresser dans cette thèse à une autre géométrie en dimension 3, mais qui n'est pas dans la liste des huit géométries de Thurston, puisqu'elle n'est pas une géométrie métrique. Il s'agit de la géométrie CR-sphérique, où l'espace modèle X est la sphère S^3, que nous considérerons comme le bord à l'infini du plan hyperbolique complexe $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et le groupe d'automorphismes G est le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$, qui est le groupe d'isométries holomorphes de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

On connaît actuellement relativement peu de choses sur les structures CR-sphériques en général, sans ajouter d'hypothèse supplémentaire. Dans [Min90], Miner explicite les domaines de discontinuité possibles pour l'image de l'holonomie d'une variété CR-sphérique compacte, lorsque ce groupe est moyennable. D'autre part, Kamishima et Tsuboi prouvent dans [KT91] qu'une variété sans bord qui admet une structure CR-sphérique S^1-invariante appartient à une liste explicite de fibrés de Seifert. Dans [FG94], Falbel et Gusevskii

montrent que, dans le cas CR-sphérique pour une variété sans bord de groupe fondamental infini, si la développante n'est pas surjective alors elle est un revêtement sur son image, et que dans ce cas l'action de l'holonomie est propre et discontinue sur ce domaine. Par la suite, ils construisent des structures CR-sphériques sur des fibrés en cercles sur des surfaces hyperboliques, avec des nombres d'Euler arbitraires.

Par ailleurs, on sait aussi qu'il existe des variétés qu'on ne peut pas munir de structures CR-sphériques : dans [Gol83] Goldman montre que le tore $\mathbb{T}^3$ n'admet pas de telle structure.

En dehors de ceux cités précédemment, on dispose de quelques exemples de structures CR-sphériques uniformisables sur des variétés à pointe. Le premier, construit par R. Schwartz dans [Sch07], est sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, et il est obtenu en considérant un groupe de réflexions dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et en constatant qu'au bord on obtient comme variété quotient le complémentaire de l'entrelacs en question. Sur cette même variété, Parker et Will construisent une autre structure uniformisable dans [PW15], en étudiant une famille de représentations du produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathrm{PU}(2,1)$ et en construisant un domaine de Ford dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour une représentation particulière.

Un autre exemple est le complémentaire du nœud de 8, pour lequel Falbel et Deraux donnent une uniformisation CR-sphérique dans [DF15], en partant d'une représentation de son groupe fondamental à valeurs dans $\mathrm{PU}(2,1)$ et en construisant des domaines fondamentaux pour cette action, dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, pour vérifier enfin que l'on obtient une structure CR-sphérique uniformisable sur la bonne variété. Finalement, dans [Der15], Deraux montre que la variété `m009` du recensement de Falbel, Koseleff et Rouillier de [FKR13] admet une uniformisation CR-sphérique.

Pour ces variétés à pointe, on peut espérer des résultats de chirurgie de Dehn analogues au cas hyperbolique. En effet, Schwartz démontre dans [Sch07] un théorème de chirurgie de Dehn CR-sphérique qui donne des uniformisations sur des chirurgies de Dehn sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead proches de la structure qu'il construit dans le même livre. Cependant, ce théorème ne s'applique pas immédiatement aux autres structures uniformisables ; une des motivations de cette thèse est d'aboutir à un résultat similaire, plus simple à utiliser, quitte à avoir des conclusions plus faibles, notamment en rapport avec l'uniformisabilité.

Plan de la thèse

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Le premier présente la géométrie sur le plan hyperbolique complexe et divers outils qui serviront dans les chapitres suivants. La première partie est plutôt standard, mais la deuxième aborde des points plus techniques. Les trois autres chapitres sont conçus pour se suivre, mais ils peuvent être lus de façon indépendante. On établit un théorème de chirurgie CR-sphérique similaire à celui de

Schwartz, qu'on applique à quelques exemples. On s'intéresse ensuite aux espaces de déformations de représentations d'holonomie, qui seront donnés par certains points de variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, correspondant au groupe $\mathrm{SU}(2,1)$: nous définirons la notion de «variété de caractères pour une forme réelle» pour avoir cet espace de déformations de façon précise. Finalement, nous donnerons une déformation explicite d'un domaine de Ford pour une variété CR-sphérique uniformisable pour obtenir des structures CR-sphérique sur des chirurgies de Dehn explicites. Nous donnons, ci-dessous, une description plus précise de chaque chapitre.

Chapitre 1 : Dans ce premier chapitre, nous exposons des généralités sur l'espace modèle $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et son groupe d'isométries $\mathrm{PU}(2,1)$, ainsi que du bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui nous servira d'espace modèle pour l'étude des variétés de dimension 3 dans la géométrie CR-sphérique. Nous étudierons le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ à l'aide de la dynamique de ses éléments dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous aborderons ensuite des objets plus techniques, qui nous servirons pour déformer un domaine de Ford au chapitre 4. Ces objets, qui interviennent naturellement, sont les bissecteurs métriques, les bissecteurs en général, et les exteurs. On les étudiera en détail et on s'intéressera à leurs intersections ; on s'en servira plus loin pour la construction de domaines de Dirichlet ou des domaines de Ford afin d'obtenir des structures CR-sphériques sur des variétés de dimension 3 ou hyperboliques complexes, sur des variétés de dimension 4.

Chapitre 2 : Dans le deuxième chapitre, nous établissons un théorème de chirurgie de Dehn CR-sphérique analogue à celui de Thurston pour les structures hyperboliques réelles. Ce théorème de chirurgie est similaire à celui de Schwartz dans [Sch07], mais a des hypothèses et des conclusions plus faibles. Le point clé dans la preuve du théorème est le principe d'Ehresmann-Thusrton, mais il est aussi crucial d'avoir compris la géométrie de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et la dynamique des sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{PU}(2,1)$. On voit apparaître des chirurgies de Dehn mais aussi des recollements avec d'autres variétés à bord torique, que nous décrivons aussi dans le chapitre, ainsi que dans l'annexe A.

On applique ensuite le théorème de chirurgie à la structure de Deraux-Falbel sur le complémentaire du nœud de huit. On décrit cette structure particulière, et on montre d'une part qu'une infinité de chirurgies du nœud de huit portent des structures CR-sphériques, et d'autre part qu'une chirurgie particulière porte une infinité de structures CR-sphérique. Plus précisément, on obtient le résultat suivant :

Théorème. *Soit M le complémentaire du nœud de huit. Pour le marquage usuel*[1] *du tore périphérique de M :*

1. *Il existe une infinité de structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de M de pente -3.*

1. Pour nous, le marquage usuel est celui donné par Thurston dans [Thu02].

2. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap (0, \delta)$, il existe une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de M de pente $-3 + r$.*

Ce chapitre a donné lieu à l'article [Aco16b].

Chapitre 3 : Dans le troisième chapitre, on propose une définition de *variété de caractères pour une forme réelle de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. La motivation de cette notion est de déterminer des espaces de déformations de représentations d'holonomie pour pouvoir applique le théorème de chirurgie du chapitre 2. Étant donné un groupe de type fini Γ, on s'intéresse aux représentations du groupe à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ à conjugaison près, en étudiant les représentations à valeurs dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ à conjugaison près, où des outils algébriques sont à disposition. Il s'avère que ce cadre s'étend sans problème à celui des représentations à valeurs dans une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, et nous le traitons dans cette généralité.

On exposera les définitions et quelques propriétés générales des variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, qui est une variété algébrique obtenue comme le quotient algébrique $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))//\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ où $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ agit par conjugaison. Ce quotient est bien défini grâce à la théorie géométrique des invariants (GIT). Puisque cet outil ne s'applique pas aux formes réelles, nous proposons comme définition de de *variété de caractères pour une forme réelle de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des points de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ qui proviennent de représentations à valeurs dans cette forme réelle. Nous introduirons deux involutions anti-holomorphes Φ_1 et Φ_2 de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ de Γ induites respectivement par les involutions $A \mapsto \overline{A}$ et $A \mapsto {}^t\overline{A}^{-1}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème. *Soit x un point de la variété de caractères de Γ pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ correspondant à une représentation irréductible ρ de Γ. Si x est fixe par Φ_1, alors ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$. Si x est fixe par Φ_2, alors ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans un groupe unitaire $\mathrm{SU}(p,q)$ avec $p + q = n$.*

Nous étudierons ensuite l'exemple détaillé des variétés de caractères pour $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3)$ du produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La variété des caractères pour $\mathrm{SU}(2,1)$ contient des composantes qui correspondent aux structures CR-sphérique sur le complémentaire du nœud de 8 et le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

Ce chapitre a donné lieu à l'article [Aco16a].

Chapitre 4 : Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous essaierons d'améliorer les conclusions de l'application du théorème de chirurgie du chapitre 2 dans un cas particulier. Le théorème de chirurgie donne des résultats uniquement sur un ouvert, mais ne donne aucune façon de le déterminer. De plus, on n'a pas d'information sur le caractère uniformisable pour une telle structure. On rendra donc effective une déformation d'un domaine

de Ford dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ dans un exemple particulier, pour obtenir des structures CR-sphériques uniformisables sur des chirurgies de Dehn explicites.

On étudiera le cas du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, en partant de la structure donnée par Parker et Will dans [PW15]. Nous exposerons rapidement une partie de leurs résultats, et notamment la paramétrisation d'une tranche de la variété des caractères pour $\mathrm{SU}(2,1)$ du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Cette paramétrisation, à deux paramètres réels, nous servira comme espace de déformation. Nous considérerons des déformations dans une des deux directions réelles pour ces paramètres, pour parvenir à faire aboutir les calculs.

Nous donnerons un intervalle explicite qui paramètre des structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de pente $-\frac{1}{3}$ sur une des pointes du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead ; et nous montrerons que les chirurgies de Dehn de pente $\frac{1}{m}$, où $m \geq 1$ sur la même pointe admettent des structures CR-sphérique. En appliquant le théorème du polyèdre de Poincaré, nous montrons que ces structures sont uniformisables, à part pour un intervalle explicite de structures sur la chirurgie de pente $-\frac{1}{3}$. Nous conjecturons que ces structures sont elles aussi unuformisables, si un énoncé plus général du théorème du polyèdre de Poincaré reste vrai. Nous discutons ce théorème dans l'annexe B

On identifie ainsi l'uniformisation de Deraux-Falbel du complémentaire du nœud de huit comme une chirurgie CR-sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Pour montrer ces résultats, nous allons considérer une déformation du domaine de Ford de Parker et Will pour avoir un domaine de Dirichlet d'un côte, et un domaine centré à l'extérieur de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour l'autre. Ces domaines sont bordés par des bissecteurs généraux, et nous étudierons leurs intersections grâce aux outils exposés dans le chapitre 1, en faisant des considérations sur des sphères visuelles.

Chapitre 1

Le plan hyperbolique complexe et ses isométries

1.1 Introduction

Pour mieux comprendre la topologie des variétés, il est souvent utile d'étudier des géométries et des structures géométriques. Le théorème d'uniformisation de Riemann pour les surfaces, et le plus récent théorème de géométrisation de Thurston-Perelman pour les variétés de dimension trois sont deux exemples aboutis de cette idée. Dans cette thèse, nous allons étudier des structures pour une géométrie particulière, appelée CR-sphérique, qui a comme espace modèle une sphère S^3 vue comme le bord à l'infini du plan hyperbolique complexe $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et comme groupe d'automorphismes le groupe d'isométrie holomorphes de cet espace, qui est naturellement isomorphe à $\mathrm{PU}(2,1)$. Cette géométrie particulière, qui est non métrique, n'est pas dans la liste des géométries de Thurston, mais elle peut tout de même donner des informations sur les variétés.

Dans ce chapitre nous exposerons des notions sur le plan hyperbolique et son bord à l'infini ainsi qu'une étude détaillée de son groupe d'isométries. Nous partirons de de la construction de cet espace et nous décririons des objets géométriques et des outils qui nous serviront dans les chapitres suivants. La plupart des constructions et des résultats énoncés dans les premières sections du chapitre sont en grande partie tirés du livre de Goldman [Gol99] et de la thèse de Genzmer [Gen10].

Les deux premières sections de ce chapitre sont plutôt introductives : dans la section 1.2 on donne une construction du plan hyperbolique complexe et on décrit ses isométries, alors que dans la section 1.3 on étudie la convergence d'éléments réguliers du groupe d'isométries. La section 1.4 suit la même ligne et on y étudie les flots de sous-groupes à un paramètre dans le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$. Cette section sera particulièrement utile dans le chapitre 2. Les sections 1.5 et 1.6 sont plus techniques et seront les outils pour la déformation effective d'un domaine de Ford du chapitre 4. Dans la section 1.5, on définit

la sphère visuelle d'un point de $\mathbb{CP}^2$ et on donne des cartes pour l'étudier. Dans la section 1.6, on étudie les bissecteurs et les exteurs, ainsi que certaines de leurs intersections. Ce sont des objets intervenant dans la construction de domaines de Dirichlet ou de Ford, et sont décrits par exemple par Goldman dans [Gol99]. On appellera tout de même *bissecteur* une classe un peu plus générale d'hypersurfaces par rapport à celle décrite par Goldman.

1.2 $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et ses isométries

Dans cette section, nous allons construire le plan hyperbolique complexe $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et son bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous allons, par ailleurs, nous intéresser au groupe d'isométries holomorphes de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, que l'on identifiera au groupe $\mathrm{PU}(2,1)$. La grande majorité des résultats énoncés ici est tirée de la thèse de Genzmer [Gen10] et du livre de Goldman [Gol99]. La construction que nous donnons est en fait une construction générale ; on construit de cette façon les espaces hyperboliques réels et complexes $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

1.2.1 L'espace $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et son bord à l'infini.

Commençons d'abord en donnant une construction du plan hyperbolique complexe. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Notons Φ la forme hermitienne associée. On supposera dans toute la suite que Φ est de signature $(2,1)$. On remarquera aussi que toutes les formes hermitiennes de signature $(2,1)$ sur V sont conjuguées.

Dans la suite, nous utiliserons deux modèles différents, en passant de l'un à l'autre par une conjugaison. Dans les deux cas, l'espace vectoriel ambiant est $\mathbb{C}^3$.

Notation 1.2.1. On note

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce sont les matrices des produits hermitiens $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ donnés, pour $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}^3$, par :

$$\begin{aligned} \langle W, Z \rangle_1 &= {}^t\overline{W} J_1 Z &= \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 - \overline{w_3} z_3 \\ \langle W, Z \rangle_2 &= {}^t\overline{W} J_2 Z &= \overline{w_1} z_3 + \overline{w_2} z_2 + \overline{w_3} z_1 \end{aligned}$$

Ces deux formes sont conjuguées par la matrice de Cayley, que nous noterons dans la suite C.

Définition 1.2.2. On définit la matrice de Cayley C comme

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle vérifie $C^{-1} = C^* = C$. De plus, elle conjugue J_1 et J_2 de sorte que $CJ_1C = J_2$ et $CJ_2C = J_1$.

Notation 1.2.3. Nous serons amenés, à plusieurs reprises, à utiliser des projectivisés d'espaces vectoriels et de groupes de matrices. Lorsque c'est le cas, nous noterons sans parenthèses ou avec des parenthèses usuelles "(" et ")" les objets avant projectivisation et avec des crochets "[" et "]" la classe d'un objet dans le projectivisé. Ainsi, si $Z \in \mathbb{C}^3$, alors $[Z] \in \mathbb{CP}^2$ est la projection de Z.

Dans le but de définir $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, on sépare les vecteurs de $V - \{0\}$ suivant s'ils sont positifs, négatifs ou nuls pour la forme Φ.

Notation 1.2.4. On notera

$$\begin{aligned} V_- &= \{v \in V - \{0\} \mid \Phi(v) < 0\} \\ V_+ &= \{v \in V - \{0\} \mid \Phi(v) > 0\} \\ V_0 &= \{v \in V - \{0\} \mid \Phi(v) = 0\} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.5. Il convient maintenant de faire deux remarques :

1. Les sous-ensembles V_-, V_+ et V_0 sont stables par homothétie et forment une partition de $V - \{0\}$; leurs projectivisés forment alors une partition de $\mathbb{CP}^2$.
2. Si $v \in V_-$, on peut identifier l'espace tangent à $[v]$ dans la variété $\mathbb{P}V_-$ avec l'orthogonal de v pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$; le produit hermitien restreint à cet espace est alors défini positif.

Définition 1.2.6. On définit le plan hyperbolique complexe $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ comme étant $\mathbb{P}V_-$, muni de la métrique hermitienne h induite par Φ.

Remarque 1.2.7. On peut calculer explicitement la distance entre deux points de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour cette métrique :

$$\cosh^2\left(\frac{\mathrm{d}([u],[v])}{2}\right) = \frac{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}.$$

Pour une explication détaillée, on pourra voir par exemple le chapitre 3 du livre de Goldman [Gol99].

On définit aussi le bord à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui sera notre espace modèle au moment de considérer des structures CR-sphériques.

Définition 1.2.8. Le *bord à l'infini* de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est défini comme étant $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}V_0$.

Nous nous servirons par la suite de quelques objets remarquables du plan hyperbolique complexe. Les plus importants seront les géodésiques complexes, dont nous donnons une définition ci-dessous.

Définition 1.2.9. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 qui intersecte V_-. $\mathbb{P}W$ est alors une droite complexe de $\mathbb{CP}^2$; on appelle *géodésique complexe* le sous-ensemble $\mathbb{P}W \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Remarque 1.2.10. Les remarques suivantes découlent presque immédiatement de la définition :

1. Une géodésique complexe est homéomorphe à un disque. Son adhérence intersecte $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ en un cercle, appelé $\mathbb{C}$-*cercle*.
2. Par deux points distincts de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ passe une unique géodésique complexe.
3. Une géodésique complexe est un sous espace totalement géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, isométrique au plan hyperbolique réel.

Ayant défini le plan hyperbolique complexe sur un espace vectoriel abstrait V, nous pouvons regarder de plus près ce que nous pouvons obtenir à l'aide des deux formes hermitiennes sur $\mathbb{C}^3$ données par J_1 et J_2. Nous aurons alors deux modèles de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, chacun adapté à des situations différentes. Nous passerons de l'un à l'autre suivant ce que nous aurons besoin de démontrer. Rappelons tout de même que ces deux modèles sont conjugués, et que l'on passe de l'un à l'autre en appliquant la matrice de Cayley.

Définition 1.2.11. En identifiant V à $\mathbb{C}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, on obtient le *modèle de la boule*. On a alors :

$$\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \right\}$$

$$\text{et } \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$

À l'aide de ce modèle, on constate que $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la boule B^4 et que $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère S^3. Voyons l'autre modèle que nous considérerons, dit de Siegel.

Définition 1.2.12. En identifiant V à $\mathbb{C}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, on obtient le *modèle de Siegel*. Il est donné par :

$$\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \mid 2\mathrm{Re}(z_1) + |z_2|^2 < 0 \right\} \subset \mathbb{CP}^2$$

$$\text{et } \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|z|^2 + it) \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \mid (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

À l'aide de ce modèle, on peut identifier $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En enlevant le point à l'infini, on retrouve le groupe de Heisenberg, défini comme $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ muni de la multiplication $(w,s)*(z,t) \mapsto (w+z, s+t+2\mathrm{Im}(w\overline{z}))$. Nous verrons le lien avec cette structure en étudiant les isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

1.2.2 Isométries (holomorphes) de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$

Nous venons de définir le plan hyperbolique complexe et nous avons vu deux de ses modèles. Nous allons maintenant nous intéresser au groupe d'isométries de cet espace.

Groupe d'isométries

Commençons par faire deux remarques :

Remarque 1.2.13. Le groupe unitaire $\mathrm{U}(\Phi) \subset \mathrm{GL}(V)$ agit sur V en préservant V_-, V_+ et V_0. Il a donc une action sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Puisque le groupe préserve la forme hermitienne Φ, il agit par des isométries.

Remarque 1.2.14. Le noyau de cette action est donné par les homothéties de $\mathrm{U}(\Phi)$. On a donc une action fidèle de $\mathrm{PU}(\Phi)$ par isométries sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui s'étend à $\mathbb{P}V$.

Lorsque nous nous placerons dans les modèles de la boule et de Siegel, nous aurons des groupes de matrices que nous noterons de la même manière. En cas d'ambiguïté, nous préciserons dans quel modèle on se place. Nous prenons donc la notation suivante.

Notation 1.2.15. On note $\mathrm{U}(2,1)$ le groupe de matrices U de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que $U^*JU = J$ pour $J = J_1$ ou J_2, suivant le modèle qu'on considère. On note $\mathrm{SU}(2,1)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1 de $\mathrm{U}(2,1)$ et $\mathrm{PU}(2,1)$ son projectivisé.

Remarque 1.2.16. Étant donné $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$, il existe exactement trois relevés de $[U]$ dans $\mathrm{SU}(2,1)$, à savoir U, ωU et $\omega^2 U$, où ω est une racine cubique de l'unité.

Nous rappelons que le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ est le groupe des isométries holomorphes de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est engendré par $\mathrm{PU}(2,1)$ et la conjugaison complexe. Ceci nous assure que l'étude de $\mathrm{PU}(2,1)$ suffit pour comprendre toutes les isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous énonçons finalement le résultat suivant, qui peut se trouver dans le chapitre 3 du livre de Goldman [Gol99] :

Proposition 1.2.17. *Le groupe* $\mathrm{PU}(2,1)$ *agit transitivement sur le fibré unitaire tangent de* $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Quelques isométries

On cherche à regarder d'un peu plus près le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ des isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et son action sur $\mathbb{CP}^2$. Pour commencer, nous allons considérer quelques isométries et tirer de l'information à partir d'elles. Nous commençons par considérer des stabilisateurs de certains points.

Stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On s'intéresse d'abord au stabilisateur d'un point. Plaçons-nous dans le modèle de la boule. Dans $\mathrm{U}(2,1)$, le stabilisateur de $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix}M & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ où $M \in \mathrm{U}(2)$. On en déduit que $\mathrm{U}(2,1)$ a une action transitive sur chaque sphère de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ centrée en $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ainsi que sur $\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. En outre, dans $\mathrm{PU}(2,1)$, un élément du stabilisateur de $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ est conjugué à une matrice du type

$$\begin{bmatrix}e^{i\alpha} & 0 & 0\\0 & e^{i\beta} & 0\\0 & 0 & e^{i\gamma}\end{bmatrix}$$

avec $\alpha+\beta+\gamma = 0 \mod \frac{2\pi}{3}$.

Stabilisateur d'un point à l'infini. Voyons ensuite ce que nous pouvons obtenir en regardant le stabilisateur d'un point de $\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Plaçons-nous dans le modèle de Siegel et considérons le stabilisateur de $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.18. *Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1)$ telle que $[U]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Alors U est de la forme :*

$$\begin{pmatrix}\lambda & -\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\overline{z} & \frac{1}{\overline{\lambda}}(-\frac{1}{2}(|z|^2+it))\\0 & \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} & \frac{1}{\overline{\lambda}}z\\0 & 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\overline{z} & -\frac{1}{2}(|z|^2+it)\\0 & 1 & z\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}}\end{pmatrix}$$

avec $\lambda, z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On sait que U stabilise $\mathbb{C}e_1$; sa première colonne est alors de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Rappelons ensuite que, dans le modèle de Siegel, $\langle e_1, e_2 \rangle_2 = \langle e_2, e_3 \rangle_2 = \langle e_3, e_3 \rangle_2 = 0$ et $\langle e_1, e_3 \rangle_2 = 2$. Comme $\langle e_1, e_2 \rangle_2 = 0$, on déduit que $U_{32} = 0$. Ensuite, puisque $\langle e_1, e_3 \rangle_2 = 2$, on a $U_{33} = \frac{1}{\lambda}$. Or, $\det U = 1$, d'où $U_{22} = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$.

Notons $z = \overline{\lambda} U_{23} \in \mathbb{C}$. Comme $\langle e_3, e_3 \rangle_2 = 0$, on a $M_{31} = \frac{1}{\lambda}(-\frac{1}{2}(|z|^2 + it))$ avec $t \in \mathbb{R}$. Finalement, on conclut en utilisant que $\langle e_2, e_3 \rangle_2 = 0$ pour calculer U_{21}. □

Faisons deux remarques de cas particuliers d'éléments de ce stabilisateur.

Remarque 1.2.19. Lorsque $z = t = 0$ et $\lambda = e^{\frac{r}{2}} \in \mathbb{R}$, la distance entre $C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et son image par U est égale à r.

Remarque 1.2.20. Lorsque $\lambda = 1$, nous avons une famille d'isométries $P_{(z,t)}$ paramétrées par $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Il s'agit d'un sous-groupe isomorphe au groupe de Heisenberg : on a $P_{(z,t)} P_{(w,s)} = P_{(z,t)*(w,s)}$, où $(z, t) * (w, s) = (z + w, 2\mathrm{Im}(z\overline{w}) + t + s)$ est le produit dans le groupe de Heisenberg.

Ayant fait ces remarques, et à l'aide de la transitivité sur les sphères et le bord du stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ que nous avons discuté dans le paragraphe précédent, nous pouvons établir le résultat suivant :

Proposition 1.2.21. *L'action de* $\mathrm{PU}(2, 1)$ *est d'une part 2-transitive sur* $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$*, et d'autre part transitive sur les couples de points de* $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ *à distance* d*, pour tout* $d > 0$*.*

1.2.3 Classification des isométries

En connaissant les isométries que nous venons de voir, nous pouvons entreprendre la classification des éléments de $\mathrm{PU}(2, 1)$. Nous reprenons ici les résultats et notations du chapitre 1 de la thèse de Genzmer [Gen10]. Chaque isométrie de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ s'étend de façon continue à $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui est compact. D'après le théorème de Brouwer, elle admet donc des points fixes. On classifie alors les isométries en termes de ces points fixes.

Définition 1.2.22. Une isométrie $g \neq id$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est dite :
- *elliptique* si elle admet au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.
- *parabolique* si elle n'est pas elliptique et a exactement un point fixe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$
- *loxodromique* si elle n'est pas elliptique et a exactement deux points fixes dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Remarque 1.2.23. Cette classification est tout à fait générale : elle est valable pour les isométries de n'importe quel espace δ-hyperbolique.

Nous pouvons traduire cette classification en termes de valeurs propres. Les valeurs propres d'un élément de $\mathrm{PU}(2,1)$ ne sont définies qu'à multiplication par ω près ; nous donnons une condition sur celles des relevés à $\mathrm{SU}(2,1)$.

Proposition 1.2.24. *Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1) - \{\mathrm{Id}\}$. Alors U est dans un des trois cas suivants :*

1. *La matrice U a une valeur propre λ de module différent de 1. Alors $[U]$ est loxodromique.*
2. *La matrice U admet un vecteur propre $v \in V_-$. Alors $[U]$ est elliptique et ses valeurs propres sont de module 1 mais pas toutes égales.*
3. *La matrice U a toutes ses valeurs propres de module 1 et a un vecteur propre $v \in V_0$. Alors $[U]$ est parabolique.*

Pour raffiner cette classification, nous allons considérer séparément les cas des valeurs propres doubles. Nous donnons donc la définition suivante :

Définition 1.2.25. Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1) - \{\mathrm{Id}\}$. On dira que U est

1. *régulier* si ses trois valeurs propres sont distinctes.
2. *unipotent* si ses trois valeurs propres sont égales (et donc égales à une racine cubique de l'unité)
3. *spécial* si U n'est pas dans un des deux cas précédents.

La définition s'étend à $\mathrm{PU}(2,1)$; nous parlerons donc d'éléments réguliers de $\mathrm{PU}(2,1)$. Dans ce cas, les valeurs propres seront bien définies à multiplication par ω près. Grâce à la remarque suivante, nous savons que les éléments réguliers sont plus simples à manipuler :

Remarque 1.2.26. Soit $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$ un élément régulier. Alors : $[U]$ est déterminé par ses trois valeurs propres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et ses trois points fixes $[u], [v], [w]$ dans $\mathbb{CP}^2$.

Il est possible de déterminer si un élément est régulier uniquement à l'aide de sa trace. En effet, un élément de $\mathrm{SU}(2,1)$ est régulier si et seulement si son polynôme caractéristique n'a pas de racine double. Or, si $U \in \mathrm{SU}(2,1)$ et $z = \mathrm{tr}(U)$, alors le polynôme caractéristique de U est $\chi_U = X^3 - zX^2 + \overline{z}X - 1$. Il suffit alors de considérer le résultant de χ_U et χ'_U. On résume tout dans la proposition suivante, qui correspond au théorème 6.2.4 du livre de Goldman [Gol99].

Proposition 1.2.27. *Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$. Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1)$. Alors U est régulier si et seulement si $f(\mathrm{tr}(U)) \neq 0$. De plus, si $f(\mathrm{tr}(U)) < 0$ alors $[G]$ est elliptique et si $f(\mathrm{tr}(U)) > 0$ alors $[U]$ est loxodromique.*

Remarque 1.2.28. Il convient de faire deux remarques sur cette proposition :

1. On a $f(z) = f(\omega z)$. On peut donc définir la fonction $f \circ \mathrm{tr}$ sur $\mathrm{PU}(2,1)$.
2. Tout élément parabolique $[U]$ vérifie $f(\mathrm{tr}(U)) = 0$.

1.2.4 Dualité - Polaires

Pour mieux comprendre l'actions des isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, nous utiliserons le langage des pôles et des polaires. Ce langage correspond à un point de vue géométrique de l'orthogonalité pour la forme hermitienne Φ. Nous allons définir les droites polaires de points de $\mathbb{CP}^2$, et les pôles de droites complexes, ce qui nous aidera par la suite à mieux voir les isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.2.29. Étant donné $[u] \in \mathbb{P}V$, on note

$$[u]^{\perp} = \mathbb{P}\left\{v \in V - \{0\} \mid \langle u, v\rangle = 0\right\}.$$

C'est le projectivisé de l'orthogonal de u pour le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Il s'agit donc une droite complexe de $\mathbb{P}V$, appelée *droite polaire* de $[u]$.

Il convient maintenant d'énoncer quelques résultats qui découlent immédiatement de considérations d'algèbre linéaire et du fait que la forme hermitienne Φ est non dégénérée, et de poser les notations que nous utiliserons par la suite.

Notation 1.2.30. Si $[u]$ et $[v]$ sont des points distincts de $\mathbb{P}V$, nous noterons $l_{[u],[v]}$ la droite complexe passant par $[u]$ et $[v]$.

Définition 1.2.31. Étant donné une droite complexe l de $\mathbb{P}V$, il existe un unique point $[v] \in \mathbb{P}V$ tel que $l = [v]^{\perp}$. On dit alors que $[v]$ est le *pôle* de l, et on le notera $[v] = l^{\perp}$

Remarque 1.2.32. Si $[u], [v] \in \mathbb{P}V$, alors :

1. $[u] \in [v]^{\perp} \iff [v] \in [u]^{\perp}$
2. $[u] \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \iff [u] \in [u]^{\perp}$
3. $[u]^{\perp} \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \neq \emptyset \iff [u] \in \mathbb{P}V^{+}$

La notion suivante de triangle autopolaire, est reliée aux éléments réguliers de $\mathrm{PU}(2,1)$, et nous l'utiliserons à plusieurs reprises.

Définition 1.2.33. Soient $[u], [v], [w] \in \mathbb{P}V$ trois points non alignés. On dit qu'ils forment un *triangle autopolaire* si les pôles des droites $l_{[u],[v]}$, $l_{[v],[w]}$ et $l_{[w],[u]}$ sont les points $[u]$, $[v]$ et $[w]$.

Finalement, nous énonçons quelques remarques générales en rapport avec les termes que nous venons de définir.

Remarque 1.2.34. Soit $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$.

1. Le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ est le sous-groupe de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ qui stabilise $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ (et donc aussi $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, ainsi que $\mathbb{P}V^{+}$).

2. Un point $[Z] \in \mathbb{CP}^2$ est fixe par $[U]$ si et seulement si Z est un vecteur propre de U.
3. Les éléments de $\mathrm{PU}(2,1)$ préservent la polarité : si $[u] \in \mathbb{CP}^2$, alors $[U]([u]^\perp) = ([U][u])^\perp$.
4. Si l est une droite complexe de $\mathbb{CP}^2$, alors l est stable par $[U]$ si et seulement si $[U](l^\perp) = l^\perp$.
5. Si $[u], [v] \in \mathbb{CP}^2$ sont fixes par $[U]$, alors la droite $l_{[u],[v]}$ passant par $[u]$ et $[v]$ est stable par $[U]$; $l^\perp_{[u],[v]}$ est alors fixe par $[U]$.
6. Si $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$ a exactement trois points fixes non alignés $[u], [v], [w] \in \mathbb{CP}^2$, alors ils sont sur un triangle autopolaire.

1.2.5 Le produit vectoriel hermitien

On peut exprimer la polarité de façon algébrique à l'aide du produit vectoriel hermitien, que nous allons définir dans cette sous-section. Il s'agit d'un analogue au produit vectoriel usuel dans $\mathbb{R}^3$. Il est décrit rapidement par Goldman dans le chapitre 2 de [Gol99]. Commençons par faire une remarque, qui nous sera utile pour la définition.

Remarque 1.2.35. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3$. Soit ψ la forme linéaire

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ r & \mapsto & \det(p,q,r) \end{array}.$$

Puisque la forme hermitienne Φ est non dégénérée, il existe un unique vecteur $s \in \mathbb{C}^3$ tel que $\psi(r) = \langle s, r\rangle$ pour tout $r \in \mathbb{C}^3$.

Avec cette remarque, nous définissons le produit vectoriel hermitien de la façon suivante :

Définition 1.2.36. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3$. On définit le *produit vectoriel hermitien de p et q*, noté $p \boxtimes q$, comme l'unique vecteur $s \in \mathbb{C}^3$ tel que $\langle s, r\rangle = \det(p,q,r)$ pour tout $r \in \mathbb{C}^3$.

La remarque suivante fait le lien entre la définition du produit vectoriel hermitien et la polarité.

Remarque 1.2.37. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3$. Si p et q sont alignés, alors $p \boxtimes q = 0$. Sinon, alors $[p \boxtimes q] = l^\perp_{[p],[q]}$. En effet, il s'agit d'un vecteur non nul et tel que $\langle p, p \boxtimes q\rangle = \langle q, p \boxtimes q\rangle = 0$.

Pour les calculs explicites que nous ferons dans le chapitre 4, nous aurons besoin de l'expression du produit vectoriel hermitien en coordonnées. Nous donnons cette expression dans le modèle de la boule et dans le modèle de Siegel dans les deux lemmes suivants, qu'on obtient immédiatement en vérifiant la condition $\langle p \boxtimes q, r\rangle = \det(p,q,r)$ pour r dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Lemme 1.2.38. *Dans le modèle de la boule, on a :*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z_2 w_3} - \overline{z_3 w_2} \\ \overline{z_3 w_1} - \overline{z_1 w_3} \\ \overline{z_2 w_1} - \overline{z_1 w_2} \end{pmatrix}$$

Lemme 1.2.39. *Dans le modèle de Siegel, on a :*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z_1 w_2} - \overline{z_2 w_1} \\ \overline{z_3 w_1} - \overline{z_1 w_3} \\ \overline{z_2 w_3} - \overline{z_3 w_2} \end{pmatrix}$$

1.2.6 Description des isométries

À l'aide des considérations sur la polarité que nous venons de faire, nous allons décrire les éléments de $\mathrm{SU}(2,1)$ en les classifiant par leur type et leur action sur $\mathbb{CP}^2$. Nous essayons de donner une description imagée à l'aide de figures. Les dessins sont en dimension 2 réelle, mais donnent une idée assez précise de la nature des isométries. Pour chaque type d'isométrie, nous dessinons :

— En bleu, $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui est homéomorphe à S^3 mais représenté par un cercle.

— En rouge, les points fixes, avec les valeurs propres associées indiquées sur la figure.

— En vert, les droites complexes stables, qui sont exactement les droites polaires des points fixes. Encore une fois, nous ne pouvons dessiner que des objets réels de dimension 1.

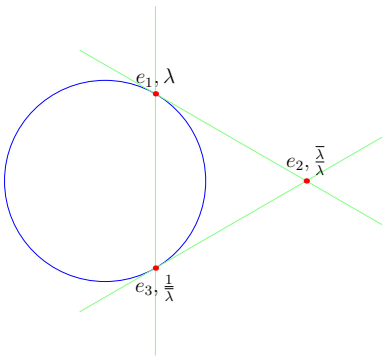
Commençons par les isométries régulières.

Isométries régulières

Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1)$ un élément régulier. Il a trois valeurs propres distinctes, et donc exactement trois points fixes $[u], [v], [w]$ dans $\mathbb{CP}^2$. D'après la remarque 1.2.34, $[u], [v], [w]$ sont sur un triangle autopolaire. Il y a donc deux cas (quitte à réordonner les trois points fixes) :

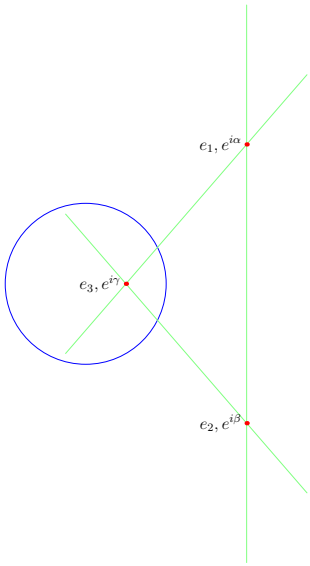
1. $[u]$ et $[v]$ sont sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; $[w]$ est à l'extérieur de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.
2. $[w]$ est dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; $[u]$ et $[v]$ sont à l'extérieur de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Isométries loxodromiques Dans le premier cas, $[U]$ est un élément loxodromique. Il stabilise la géodésique complexe reliant $[u]$ et $[v]$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. En se plaçant dans le modèle de Siegel, quitte à conjuguer, on peut supposer que $u = e_1$, $v = e_3$, $w = e_2$. L'élément U est alors conjugué



à :

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}} \end{pmatrix}$$



Isométries elliptiques régulières Dans le deuxième cas, $[U]$ est un élément elliptique régulier. Il a un point fixe $[w]$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et deux géodésiques complexes stables ($[u]^\perp$ et $[v]^\perp$) sur lesquelles $[U]$ agit comme une rotation. En se plaçant dans le modèle de la boule, quitte à conjuguer, on peut supposer que $u = e_1$, $v = e_2$ et $w = e_3$. L'élément U est alors conjugué à :

$$E_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

où $\alpha + \beta + \gamma = 0 \mod(2\pi)$.

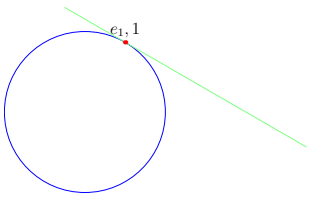
Isométries unipotentes

Soit $U \in \mathrm{SU}(2,1)$ un élément unipotent différent de l'identité. L'élément U est alors parabolique et fixe un point sur le bord. Quitte à conjuguer, on peut supposer que ce point est $[e_1]$ dans le modèle de Siegel. L'élément $[U]$ est alors conjugué à :

$$[P_{(z,t)}] = \begin{bmatrix} 1 & -\overline{z} & -\frac{1}{2}(|z|^2 + it) \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

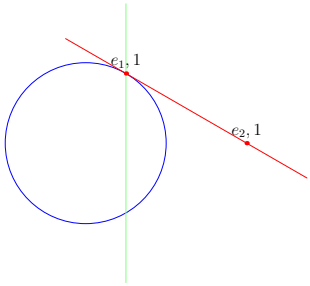
avec $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a alors deux cas, suivant si $z = 0$ ou si $z \neq 0$.

Isométries unipotentes horizontales On dit que $[U]$ est un élément *parabolique horizontal* s'il est conjugué à $[P_{(z,t)}]$ avec $z \neq 0$. Il a alors exactement un point fixe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et aucun autre dans $\mathbb{CP}^2$. Ces éléments sont tous



conjugués à

$$[P_{(1,0)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Isométries unipotentes verticales On dit que $[U]$ est un élément *parabolique vertical* s'il est conjugué à $[P_{(0,t)}]$ avec $t \neq 0$. Il est alors conjugué à

$$[P_{(0,\pm 1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

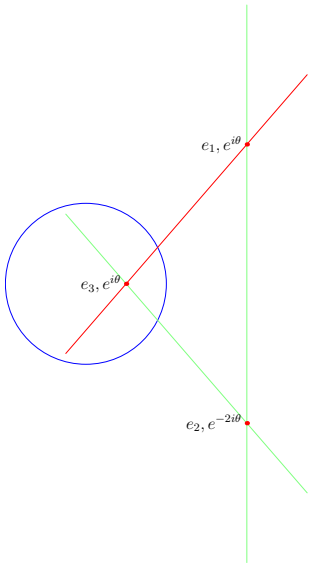
Il a alors exactement un point fixe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et aucun autre dans $\mathbb{CP}^2$. Quitte à conjuguer, on supposer qu'il s'agit de $[e_1]$. De plus, la droite complexe $[e_1]^\perp$ est fixe point par point par l'action de $[U]$, donc chaque géodésique complexe passant par $[e_1]$ est stable par $[U]$.

Isométries spéciales

Il nous reste à décrire les isométries spéciales. Elles peuvent être soit elliptiques, soit paraboliques, et parmi les elliptiques on distingue deux cas différents.

Isométries elliptiques spéciales Dans le modèle de la boule, une isométrie elliptique a au moins trois points fixes dans $\mathbb{CP}^2$: un dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et deux à l'extérieur, et elle est conjuguée à

$$[E_{\alpha,\beta,\gamma}] = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{bmatrix}$$

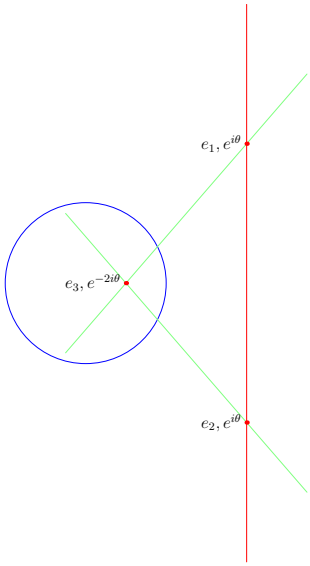


Elle est spéciale dès que deux des valeurs propres sont égales. On distingue deux cas, suivant si les deux valeurs propres égales correspondent à un point fixe de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et à

un point fixe à l'extérieur ou bien à deux points fixes de $\mathbb{P}V_+$.

On dira qu'une isométrie elliptique spéciale $[U]$ est une *réflexion complexe* dans le premier cas. Elle fixe alors une géodésique complexe de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et U est conjuguée dans $\mathrm{SU}(2,1)$ à

$$e^{i\theta}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-3i\theta} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

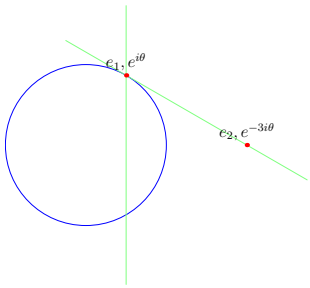


Dans le deuxième cas, on dira que $[U]$ est une *réflexion sur un point*. Elle fixe alors point par point une droite complexe incluse dans $\mathbb{P}V_+$. En passant aux polaires de ces points fixes, on sait que $[U]$ stabilise les géodésiques complexes passant par son point fixe dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'élément U est conjugué dans $\mathrm{SU}(2,1)$ à

$$e^{i\theta}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{-3i\theta}\end{pmatrix}$$

Isométries ellipto-paraboliques Il nous reste à considérer les isométries ellipto-paraboliques. Si $[U]$ est ellipto-parabolique, alors U est conjuguée dans $\mathrm{SU}(2,1)$ (pour le modèle de Siegel) à

$$e^{i\theta}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{i}{2}\\ 0 & e^{-3i\theta} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$



Elle a alors exactement deux points fixes : un sur $\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et un autre dans $\mathbb{P}V_+$. Son action sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ stabilise alors une unique géodésique complexe.

1.3 Convergence d'éléments réguliers

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la topologie de $\mathrm{PU}(2,1)$ et à la convergence de suites d'éléments réguliers en termes de leurs points fixes dans $\mathbb{CP}^2$ et de leurs valeurs propres.

1.3.1 Éléments réguliers de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$

Nous avons vu, à la définition 1.2.25, la définition d'un élément régulier de $\mathrm{SU}(2,1)$. Cette définition est un cas particulier de celle des groupes de Lie. Nous l'utiliserons dans cette section pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$.

Définition 1.3.1. Soit $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. On dira que U est *régulier* si ses trois valeurs propres sont distinctes.

Nous allons essayer de paramétrer les éléments réguliers de $\mathrm{SU}(2,1)$ par leurs éléments propres. Il sera plus simple de le faire dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ puis ensuite de se restreindre à $\mathrm{SU}(2,1)$. Fixons d'abord une notation pour l'ensemble par lequel nous voulons paramétrer les éléments réguliers. Il s'agit des valeurs propres ainsi que des vecteurs propres associés ; nous prendrons les droites propres comme des points dans $\mathbb{CP}^2$.

Notation 1.3.2. Nous noterons R_0 l'ensemble suivant :

$$R_0 = \Big\{(([u],\alpha),([v],\beta),([w],\gamma)) \in (\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{C}^*)^3 \mid [u] \neq [v] \neq [w] \neq [u], \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha\Big\}$$

Remarque 1.3.3. R_0 est un ouvert Zariski-dense de $(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{C}^*)^3$, et donc une variété $\mathcal{C}^\infty$. Un choix de relevés et des cartes affines de $\mathbb{CP}^2$ permettent de le paramétrer localement.

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations agit sans points fixes sur R_0 en permutant les facteurs. Nous pouvons alors considérer l'application suivante :

Notation 1.3.4.

$$\phi_0 \ : \ \begin{array}{ccc} R_0/\mathfrak{S}_3 & \longrightarrow & \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \\ [([u],\alpha),([v],\beta),([w],\gamma)] & \longmapsto & P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \end{array}$$

Où P est la matrice de passage de la base (u,v,w) de $\mathbb{C}^3$ vers la base canonique (e_1,e_2,e_3).

L'application ϕ_0 est bien définie. En effet, l'ordre de $(([u],\alpha),([v],\beta),([w],\gamma))$ et le choix des relevés u,v,w ne changent pas la matrice obtenue. L'application ϕ_0 est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$, et son image est exactement l'ensemble des éléments réguliers. De plus, elle est injective ; sa réciproque consiste à associer à une matrice régulière de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ ses

éléments propres. On obtient ainsi une paramétrisation des éléments réguliers de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ par $R_0/\mathfrak{S}_3$. Pour paramétrer les éléments de $\mathrm{SU}(2,1)$, il suffit de restreindre l'application ϕ_0 aux bons sous-ensembles de $R_0/\mathfrak{S}_3$. Nous posons donc :

$$R_1 = \{(([u],\alpha),([v],\beta),([w],\gamma)) \in R_0 \mid \alpha\beta\gamma = 1\}$$

et

$$R_2 = \{(([u],\alpha),([v],\beta),([w],\gamma)) \in R_1 \mid [u],[v],[w] \text{ sont sur un triangle autopolaire}\}$$

Il suffit alors de remarquer que le même argument que celui évoqué ci-dessus permet de faire la paramétrisation pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}(2,1)$:

Remarque 1.3.5. Les restrictions de ϕ_0

$$\phi_1 : R_1/\mathfrak{S}_3 \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \phi_2 : R_2/\mathfrak{S}_3 \to \mathrm{SU}(2,1)$$

sont des applications $\mathcal{C}^\infty$, et leur image est l'ensemble des éléments réguliers de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}(2,1)$ respectivement.

Regardons maintenant de plus près cette paramétrisation des éléments réguliers de $\mathrm{SU}(2,1)$. Il y a deux cas : les elliptiques et les loxodromiques. Pour chacun d'entre eux une condition particulière s'impose.

1.3.2 Paramétrisation des elliptiques réguliers

Nous reprenons la paramétrisation donnée par $R_2/\mathfrak{S}_3$. Chaque elliptique régulier U est paramétré par ses trois points fixes dans $[u],[v],[w] \in \mathbb{CP}^2$, et leurs valeurs propres associées α,β,γ à permutation près. Nous avons vu que dans ce cas, on a, quitte à réordonner :

1. $[u] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$
2. $[v] \in [u]^\perp$
3. $\{[w]\} = [u]^\perp \cap [v]^\perp$
4. $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$
5. $\alpha\beta\gamma = 1$

Nous pouvons alors paramétrer les éléments elliptiques réguliers par $\mathcal{E}/\mathfrak{S}_2$, où

$$\mathcal{E} = \{([u],[v],\alpha,\beta) \in (\mathbb{CP}^2)^2 \times \mathbb{U}^2 \mid [u] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}, [v] \in [u]^\perp, \alpha \neq \beta \neq \frac{1}{\alpha\beta} \neq \alpha\}$$

et $\mathfrak{S}_2$ agit en échangeant $([v],\beta)$ et $([w],\gamma)$.

1.3.3 Paramétrisation des loxodromiques

À nouveau, nous reprenons la paramétrisation donnée par $R_2/\mathfrak{S}_3$. Chaque élément loxodromique U est paramétré par ses trois points fixes dans $[u], [v], [w] \in \mathbb{CP}^2$, et leurs valeurs propres associées α, β, γ à permutation près. Dans ce cas, quitte à réordonner, on a :

1. $[u], [v] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$
2. $\alpha = \lambda$ est de module > 1
3. $\beta = \frac{1}{\lambda}$
4. $\gamma = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$

Nous pouvons alors paramétrer les éléments loxodromiques de $\mathrm{SU}(2,1)$ par

$$\mathcal{L} = \{([u], [v], \lambda) \in (\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})^2 \times \mathbb{C} \mid [u] \neq [v], |\lambda| > 1\}.$$

1.3.4 Quelques remarques sur la convergence

Essayons maintenant de comprendre la convergence dans $\mathrm{PU}(2,1)$. La projection de $\mathrm{SU}(2,1)$ sur $\mathrm{PU}(2,1)$ est un revêtement d'ordre 3 ; nous pouvons donc nous concentrer sur la convergence dans $\mathrm{SU}(2,1)$. Considérons une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments réguliers de $\mathrm{SU}(2,1)$ qui converge vers $U \in \mathrm{SU}(2,1) - \mathbb{C}\mathrm{Id}$.

Remarque 1.3.6. Si U est régulier, alors la convergence est donnée par la convergence de $\phi_2^{-1}(U_n)$ vers $\phi_2^{-1}(U)$ dans $R_2/\mathfrak{S}_3$. Nous nous concentrerons sur le cas où U n'est pas régulier et ce qu'on pourra dire des $\phi_2^{-1}(U_n)$.

Soit $(([u_n], \alpha_n), ([v_n], \beta_n), ([w_n], \gamma_n)) \in R_2$ tels que $U_n = \phi_2(([u_n], \alpha_n), ([v_n], \beta_n), ([w_n], \gamma_n))$. On sait alors que la suite $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{C}^3$. Quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Comme $\mathbb{CP}^2$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que $([u_n], [v_n], [w_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $([u], [v], [w]) \in (\mathbb{CP}^2)^3$. Puisque $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sont des valeurs propres de U_n et u_n, v_n, w_n sont des vecteurs propres de U_n associés à $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ respectivement, et grâce à la continuité de l'action des matrices sur des vecteurs, nous pouvons faire la remarque suivante :

Remarque 1.3.7. Les nombres complexes α, β, γ sont des valeurs propres de U et u, v, w sont des vecteurs propres de U associés à α, β, γ respectivement.

Regardons maintenant le cas où U est unipotent horizontal. Dans ce cas, U a un unique point fixe $[p] \in \mathbb{CP}^2$, qui se trouve dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et ses valeurs propres sont toutes égales à 1. On déduit alors que $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \to (1,1,1)$ et $([u_n], [v_n], [w_n]) \to ([p], [p], [p])$. D'un point de vue géométrique sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ nous pouvons alors faire les deux remarques suivantes :

Remarque 1.3.8. Si les U_n sont loxodromiques d'axes respectifs l_n alors les géodésiques complexes l_n sortent de tout compact de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\}$.

Remarque 1.3.9. Si les U_n sont elliptiques, chacun a deux géodésiques complexes invariantes $l_n^{(1)}$ et $l_n^{(2)}$ (les polaires de $[v_n]$ et $[w_n]$). Les géodésiques complexes $l_n^{(i)}$ sortent alors de tout compact de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\}$.

Ces deux remarques seront cruciales au moment de comprendre la géométrie des déformations de structures CR-sphériques en considérant une développante.

1.4 Flots invariants

Pour étudier les structures CR-sphériques et leurs chirurgies, nous utiliserons des flots de champs de vecteurs associés à certains éléments de $\mathrm{PU}(2,1)$. Nous utiliserons les résultats de cette section dans le chapitre 2. Faisons d'abord quelques rappels sur les sous-groupes à un paramètre et l'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2,1)$. Nous reprendrons la plupart des résultats généraux du livre de R. Mneimné et F. Testard [MT86].

1.4.1 Exponentielle, sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{SU}(2,1)$

Rappelons que l'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2,1)$, où J dénote J_1 ou J_2, est donnée par :

$$\mathfrak{su}(2,1) = \left\{ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0, {}^t\overline{X}J + JX = 0 \right\}.$$

Remarque 1.4.1. Puisque $\mathrm{PU}(2,1)$ est le quotient de $\mathrm{SU}(2,1)$ par un groupe fini, ils ont la même algèbre de Lie. Nous travaillerons plutôt avec les notations dans $\mathrm{SU}(2,1)$ pour avoir à faire à des matrices.

Rappelons aussi la définition de la fonction exponentielle, ainsi que quelques unes de ses propriétés.

Définition 1.4.2. Nous disposons de la fonction exponentielle $\exp : \mathfrak{su}(2,1) \to \mathrm{SU}(2,1)$ définie par

$$\exp(M) = \sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}.$$

Proposition 1.4.3. *La fonction* exp *est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, car analytique, sa différentielle en l'identité est l'identité et, en un point $M \in \mathfrak{su}(2,1)$, l'application* $\mathrm{d}\exp$ *vérifie :*

$$\exp(-M)\mathrm{d}\exp_M(X) = \frac{\mathrm{Id} - e^{-\mathrm{ad}(M)}}{\mathrm{ad}(M)}(X) \in \mathfrak{su}(2,1)$$

où

$$\frac{\mathrm{Id} - e^{-f}}{f} = \sum_{n \geq 0} (-1)^m \frac{f^m}{(m+1)!}$$

La remarque suivante, sur les valeurs propres de la différentielle de l'exponentielle, nous sera utile pour vérifier que, dans un certain ouvert, il s'agit d'un difféomorphisme local.

Remarque 1.4.4. On vérifie que, si M admet comme valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, alors les valeurs propres de $\mathrm{ad}(M)$ sont les $\mu_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ et celles de $\frac{\mathrm{Id}-e^{-\mathrm{ad}(M)}}{\mathrm{ad}(M)}$ sont les $\frac{1-e^{\mu_{ij}}}{\mu_{ij}}$ si $\mu_{ij} \neq 0$ et 1 si $\mu_{ij} = 0$.

Finalement, rappelons la correspondance entre l'algèbre de Lie et les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie.

Proposition 1.4.5. *Les sous-groupes à un paramètre de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *sont en bijection avec les éléments de* $\mathfrak{su}(2,1)$*. Si* $X \in \mathfrak{su}(2,1)$*, on lui associe le sous-groupe à un paramètre* $\phi^X : t \mapsto \exp(tX)$*.*

1.4.2 Le logarithme et une étoile pour $\mathrm{PU}(2,1)$

Nous allons nous pencher sur un domaine où l'exponentielle est un difféomorphisme sur son image. Dans ce contexte, la fonction Log nous servira le plus souvent d'inverse.

Définition 1.4.6. On définit la série du logarithme par

$$\mathrm{Log}(M) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(M-\mathrm{Id})^n}{n}.$$

Cette série est, au moins sur un ouvert, un inverse de l'exponentielle. En effet, si $\mathrm{Log}(M)$ converge, alors $\exp(\mathrm{Log}(M)) = M$. De plus elle fait correspondre nilpotents et unipotents :

Remarque 1.4.7. La fonction exp réalise un difféomorphisme entre les éléments nilpotents de $\mathfrak{su}(2,1)$ et les éléments unipotents de $\mathrm{SU}(2,1)$.

Proposition 1.4.8. *La série* $\mathrm{Log}(\mathrm{Id}+A)$ *converge dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *dès que* $\|A\| < 1$ *pour une norme sous-multiplicative de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$*. En particulier, elle converge dès que toutes les valeurs propres de* A *sont de module strictement inférieur à 1.*

Nous définissons alors l'étoile de $\mathrm{SU}(2,1)$ comme un domaine où exp sera un difféomorphisme sur son image. Cette définition est tout à fait générale ; on s'y prend de la meme façon pour tout groupe linéaire réel.

Définition 1.4.9. On définit *l'étoile de* $\mathrm{SU}(2,1)$, que nous noterons $\mathcal{E}(\mathrm{SU}(2,1))$, comme l'ensemble des $M \in \mathfrak{su}(2,1)$ dont la partie imaginaire des valeurs propres est, en valeur absolue, strictement inférieure à π.

Il convient de faire alors les remarques suivantes :

Remarque 1.4.10. Le domaine $\mathcal{E}(\mathrm{SU}(2,1))$ est ouvert, contient les matrices nilpotentes, est il est étoilé par rapport à 0.

Remarque 1.4.11. Grâce à la remarque 1.4.4, nous savons que $\exp : \mathcal{E}(\mathrm{SU}(2,1)) \to \mathrm{SU}(2,1)$ réalise un difféomorphisme sur son image, car elle est injective et que, en regardant ses valeurs propres, on vérifie que la différentielle est de rang maximal en tout point.

Définissons maintenant l'analogue pour $\mathrm{PU}(2,1)$. L'injectivité de la différentielle ne pose aucun problème, mais, puisque nous avons un quotient de $\mathrm{SU}(2,1)$, l'injectivité de la fonction $\exp : \mathcal{E}(\mathrm{SU}(2,1)) \to \mathrm{PU}(2,1)$ n'est plus garantie.

Définition 1.4.12. On définit *l'étoile de* $\mathrm{PU}(2,1)$, que nous noterons $\mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1))$, comme l'ensemble des $M \in \mathfrak{su}(2,1)$ dont la partie imaginaire des valeurs propres est, en valeur absolue, strictement inférieure à $\frac{\pi}{3}$.

Remarque 1.4.13. On déduit immédiatement les faits suivants :

1. L'ensemble $\mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1))$ contient les matrices nilpotentes, est il est étoilé par rapport à 0.
2. L'application $\exp : \mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1)) \to \mathrm{PU}(2,1)$ est un difféomorphisme sur son image.
3. Si $U \in \mathrm{SU}(2,1)$ a toutes ses valeurs propres à distance $< \frac{\sqrt{3}}{2}$ de 1, alors $\mathrm{Log}(U)$ est bien défini et appartient à $\exp(\mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1)))$. De plus, $[U] = \exp(\mathrm{Log}(U)) \in \mathrm{PU}(2,1)$.

1.4.3 Champs de vecteurs invariants

Les éléments géométriques que nous allons considérer sont des champs de vecteurs induits par des éléments de $\mathrm{PU}(2,1)$. Commençons par regarder au niveau infinitésimal : un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2,1)$ définit un champ de vecteurs sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ invariant par son exponentielle. Nous utiliserons ensuite la remarque 1.4.13 pour nous ramener à l'algèbre de Lie depuis un élément de $\mathrm{SU}(2,1)$ assez proche d'un unipotent.

Notation 1.4.14. Soit $X \in \mathfrak{su}(2,1)$. Il définit alors un champ de vecteurs sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ invariant par $\exp(X)$ donné au point x par :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tX) \cdot x.$$

Nous noterons le flot de ce champ de vecteurs ϕ_t^X, de sorte que $\phi_t^X(x) = \exp(tX) \cdot x$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur X, nous noterons le flot tout simplement ϕ_t.

Remarque 1.4.15. Si $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$ est assez proche d'un unipotent, alors il définit un champ de vecteurs invariant sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. En effet, quitte à changer de relevé, on peut supposer que les valeurs propres de U sont proches de 1, et considérer le champ de vecteurs associé à $\mathrm{Log}(U)$. $\phi_1^{\mathrm{Log}(U)}$ coïncide alors avec l'action de $[U]$.

1.4.4 Description des flots

Nous allons étudier maintenant la dynamique de quelques flots de la forme $\phi_t^{\mathrm{Log}(U)}$, où $\mathrm{Log}(U) \in \mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1))$. L'étude de ces flots nous aidera à comprendre la dynamique des éléments de $\mathrm{PU}(2,1)$ dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et sera cruciale pour établir le résultat de chirurgie du chapitre 2.

Flots elliptiques réguliers

Plaçons-nous dans un premier temps dans le modèle de la boule et considérons un élément elliptique régulier de $\mathrm{SU}(2,1)$. Quitte à conjuguer, nous pouvons supposer qu'il s'agit de

$$E_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix}.$$

Nous supposerons aussi que α, β et γ sont assez petits et non tous nuls. Dans ce cas, $\gamma = -\alpha - \beta$ et

$$\mathrm{Log}(E_{\alpha,\beta,\gamma}) = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma \end{pmatrix}.$$

Le flot du champ de vecteurs associé agit alors sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par :

$$\phi_t^{\mathrm{Log}(E_{\alpha,\beta,\gamma})} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{it(\alpha-\gamma)} z_1 \\ e^{it(\beta-\gamma)} z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{it(2\alpha+\beta)} z_1 \\ e^{it(2\beta+\alpha)} z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

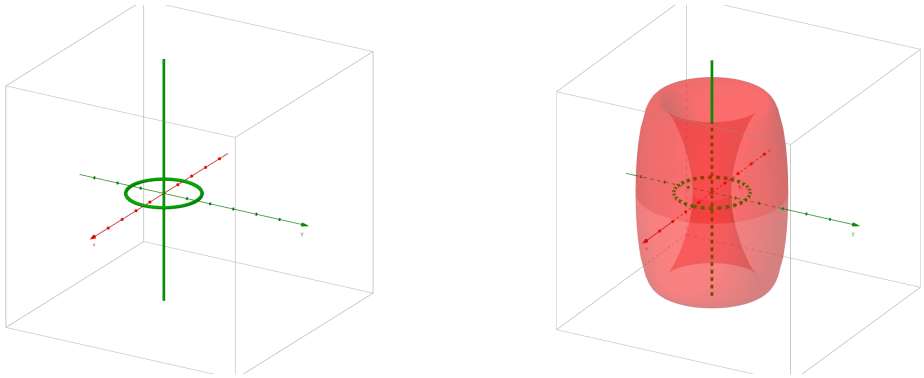
Remarque 1.4.16. Le flot laisse invariants les deux $\mathbb{C}$-cercles $C_1 = [e_1]^\perp \cap \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ et $C_2 = [e_2]^\perp \cap \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ sur lesquels il agit par des rotations d'angles $2\beta + \alpha$ et $2\alpha + \beta$ respectivement.

Remarque 1.4.17. Le centralisateur de $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ est $C(E_{\alpha,\beta,\gamma}) = \left\{ E_{\theta_1,\theta_2,-(\theta_1+\theta_2)} \mid (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Les orbites de ce sous-groupe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont C_1, C_2 et les sous-ensembles de la forme

$$T_r = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid |z_2| = r, |z_1| = \sqrt{1-r^2} \right\}$$

pour $r \in]0,1[$. Les orbites T_r sont alors des tores plongés dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ d'âmes C_1 et C_2. Ils sont tous invariants par l'action de $\phi_t^{\mathrm{Log}(E_{\alpha,\beta,\gamma})}$. On peut voir une exemple dans la

figure 1.1b.



(a) $\mathbb{C}$-cercles invariants par un flot elliptique dans le modèle de Siegel.

(b) Le tore invariant $T_{4/5}$ par un flot elliptique dans le modèle de Siegel.

FIGURE 1.1 – Ensembles invariants par un flot elliptique dans le modèle de Siegel

Voyons maintenant les orbites sous le flot $\phi_t^{\mathrm{Log}(E_{\alpha,\beta,\gamma})}$. Remarquons tout d'abord que l'orbite d'un point est incluse dans un unique tore T_r, et que toutes les orbites incluses dans T_r sont les images par les $E_{\theta_1,\theta_2,-(\theta_1+\theta_2)}$ d'une orbite fixée. Le tore T_r est alors feuilleté pas ces orbites. Fixons dans la suite $r \in]0,1[$. Nous avons deux cas à considérer :

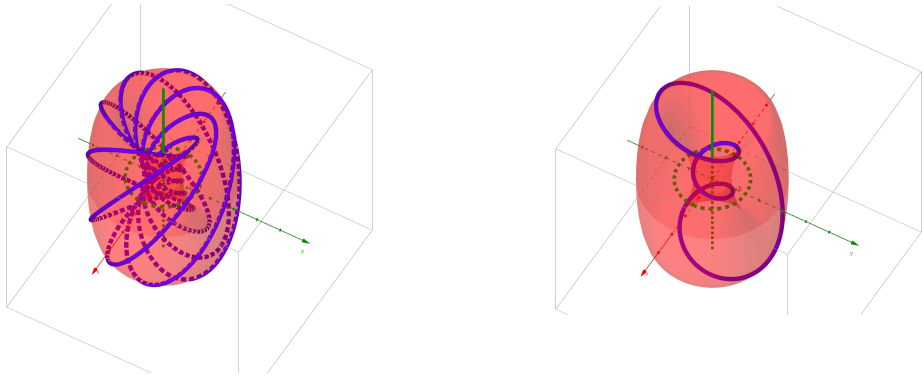
Cas 1 : $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$ Dans ce cas, les angles de rotation dans T_r pour ϕ_t sont $(2\alpha+\beta)t$ et $(2\beta+\alpha)t$. Leur rapport est irrationnel ; une orbite est alors une immersion injective d'une droite, et elle est dense dans T_r.

Cas 2 : $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ Dans ce cas, les angles de rotation dans T_r pour ϕ_t sont $(2\alpha+\beta)t$ et $(2\beta+\alpha)t$. Leur rapport est alors rationnel ; notons-le $\frac{p}{q}$ sous forme irréductible. Les orbites sont alors périodiques et de pente $\frac{p}{q}$ dans T_r : il s'agit donc de nœuds toriques de type (p,q), noués autour de C_1 et C_2. On peut voir un exemple dans la figure 1.2a.

Remarque 1.4.18. Si p et q sont différents de 1, l'orbite d'un point de T_r est un *nœud torique de type* (p,q) et il s'agit d'un nœud dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si p ou q est égal à 1, alors la trajectoire par le flot n'est pas nouée ; elle est isotope à un cercle de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Cette remarque sera cruciale au moment d'identifier des chirurgies de Dehn lors d'une déformation d'une structure CR-sphérique. On peut voir un exemple dans la figure 1.2b.

Définition 1.4.19. Soient n, p et q des entiers deux à deux premiers entre eux avec $|p| > |q|$. Nous dirons qu'un élément elliptique $U \in \mathrm{PU}(2,1)$ est *de type* $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ si U est conjugué à $E_{\alpha,\beta,\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2p-q}{3n}$, $\beta = \frac{2q-p}{3n}$ et $\gamma = -\alpha-\beta = \frac{-p-q}{3n}$. Dans ce cas $\frac{2\alpha+\beta}{2\beta+\alpha} = \frac{p}{q}$ et les orbites du flot $\phi_t^{\mathrm{Log}(G)}$ sont ses deux $\mathbb{C}$-cercles invariants et des nœuds de type (p,q).

On peut faire deux remarques importantes à propos de cette définition :



(a) Une orbite pour $\frac{2\alpha+\beta}{2\beta+\alpha} = \frac{7}{11}$: un nœud de type (7,11).

(b) Une orbite pour $\frac{2\alpha+\beta}{2\beta+\alpha} = \frac{1}{3}$: elle n'est pas nouée.

FIGURE 1.2 – Orbites pour des sous-groupes elliptiques à un paramètre

Remarque 1.4.20. 1. Seulement certains éléments elliptiques sont de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$. Nous verrons plus tard que ce sont les éléments pour lesquels notre construction de structures CR-sphériques aboutit.

2. La trace d'un élément elliptique est suffisante pour connaître ses trois valeurs propres, mais elle ne suffit pas pour connaître son type. En effet, un élément de même trace qu'un elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ aura les mêmes valeurs propres mais pas nécessairement la même associée à son point fixe dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ainsi, des éléments de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, $(\frac{-p}{n}, \frac{q-p}{n})$ et $(\frac{p-q}{n}, \frac{-q}{n})$ ont même trace.

Flots loxodromiques

Regardons maintenant les éléments loxodromiques. Pour cela, plaçons-nous dans le modèle de Siegel et considérons un élément loxodromique de $\mathrm{SU}(2,1)$. Quitte à conjuguer, nous pouvons supposer qu'il s'agit de

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}} \end{pmatrix}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ de module > 1. Il s'écrit alors $\lambda = re^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 1$. Nous supposerons dans la suite que α est assez petit, de sorte que $T_\lambda \in \exp(\mathcal{E}(\mathrm{PU}(2,1)))$. Dans ce cas, la série $\mathrm{Log}(T_\lambda)$ converge et on a

$$\mathrm{Log}(T_\lambda) = \begin{pmatrix} \log(r) + i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\log(r) + i\alpha \end{pmatrix}$$

Le flot du champ de vecteurs associé agit alors sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par :

$$\phi_t^{\mathrm{Log}(T_\lambda)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|z|^2 + is) \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(r^{2t}|z|^2 + ir^{2t}s) \\ r^t e^{-3it\alpha} z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans les coordonnés $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ il agit par $(z, s) \mapsto (\mu_t z, |\mu_t|^2 s)$ où $\mu_t = r^t e^{-3i\alpha t}$.

Remarque 1.4.21. Le flot ϕ_t fixe globalement les points $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et laisse stable le $\mathbb{C}$-cercle qui les relie ainsi que les deux arcs C_+ et C_- de ce $\mathbb{C}$-cercle, donnés par

$$C_+ = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}is \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid s > 0 \right\} \quad \text{et} \quad C_- = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}is \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid s < 0 \right\}.$$

De plus, pour tout $u \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \lim_{t \to -\infty} \phi_t(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De même que dans le cas elliptique, nous avons des objets invariants par le flot, reliés au centralisateur de T_λ. Nous pouvons faire la remarque suivante :

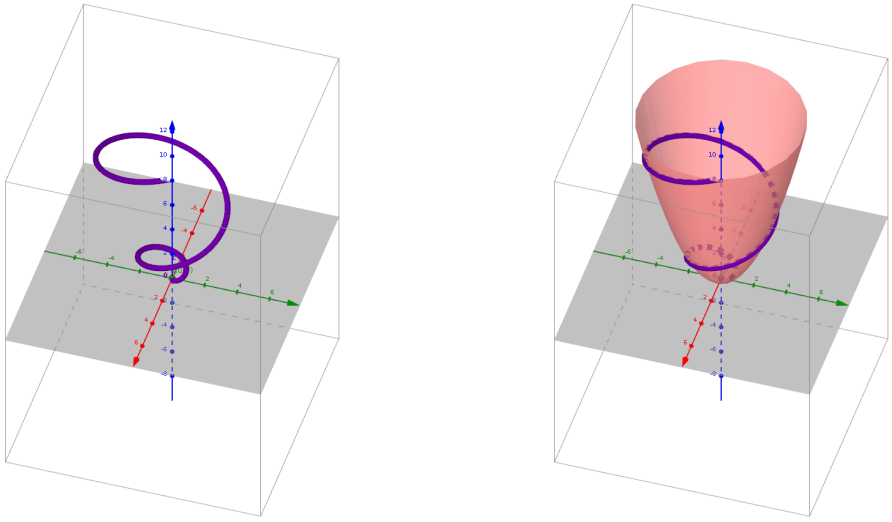
Remarque 1.4.22. Le centralisateur de T_λ est $C(T_\lambda) = \{T_\mu \mid \mu \in \mathbb{C}^*\}$. Les orbites de ce sous-groupe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont les deux points fixes de T_λ, C_+, C_- et les sous-ensembles de la forme

$$P_r = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|z|^2 + is) \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid \frac{s}{|z|^2} = r \right\}$$

pour $r \in \mathbb{R}$. Les orbites P_r sont des paraboloïdes privés du point $(0, 0)$. Topologiquement, ce sont des cylindres plongés dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, tous invariants par l'action de ϕ_t. On peut voir une exemple dans la figure 1.3b.

Flots unipotents

Considérons maintenant les éléments unipotents. Nous nous placerons ici dans le modèle de Siegel. Considérons un élément unipotent de $\mathrm{SU}(2, 1)$. Quitte à conjuguer, on peut



(a) Une trajectoire d'un flot loxodromique dans le modèle de Siegel.

(b) Un cylindre invariant par un flot loxodromique dans le modèle de Siegel.

FIGURE 1.3 – Ensembles invariants par un flot loxodromique dans le modèle de Siegel

supposer qu'il s'agit de

$$P_{(z,s)} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z} & -\frac{1}{2}(|z|^2 + is) \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La série $\mathrm{Log}(P_{(z,s)})$ converge et on a

$$\mathrm{Log}(P_{(z,s)}) = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{z} & -\frac{is}{2} \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le flot du champ de vecteurs associé agit alors sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par :

$$\phi_t^{\mathrm{Log}(P_{z,s})} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|z'|^2 + is') \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|z' + tz|^2 + i(s' + ts - 2t\mathrm{Im}(\overline{z}z'))) \\ z' + tz \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans les coordonnés $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ il agit par $(z', s') \mapsto (z' + tz, s' + ts - 2t\mathrm{Im}(\overline{z}z'))$, et les orbites du flot sont donc des droites, comme celle de la figure 1.4a.

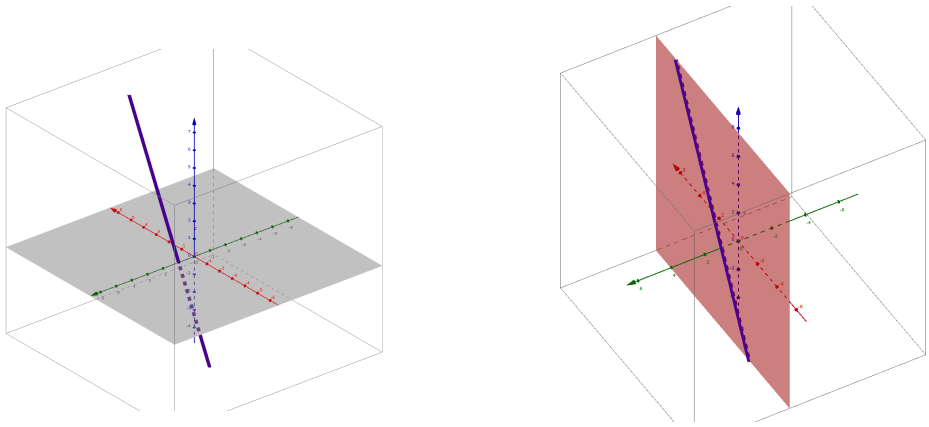
Remarque 1.4.23. Si $z = 0$, toutes les orbites sont des droites verticales. Sinon, aucune droite n'est verticale, mais elles ont des pentes distinctes.

Remarque 1.4.24. Si $z \neq 0$, le centralisateur de $P_{(z,s)}$ est $C(P_{(z,s)}) = \left\{ P_{(rz,s')} \mid (r, s') \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Les orbites de ce sous-groupe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont le point fixe de $P_{(z,s)}$ et les sous-ensembles de la forme

$$S_r = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(|w|^2 + is') \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}(\frac{w}{z}) = r \right\}$$

pour $r \in \mathbb{R}$. Les orbites S_r sont des plans verticaux dans le modèle de Siegel, tous invariants par l'action de ϕ_t. On peut voir une exemple dans la figure 1.4b.



(a) Une trajectoire d'un flot unipotent dans le modèle de Siegel.

(b) Une nappe invariante par un flot unipotent horizontal dans le modèle de Siegel.

FIGURE 1.4 – Ensembles invariants par un flot unipotent dans le modèle de Siegel

Flots ellipto-paraboliques

Finalement, regardons les éléments ellipto-paraboliques. Dans le modèle de Siegel, quitte à conjuguer, on peut considérer l'élément :

$$E = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si θ est assez proche de 0, la série $\mathrm{Log}(E)$ converge et on a

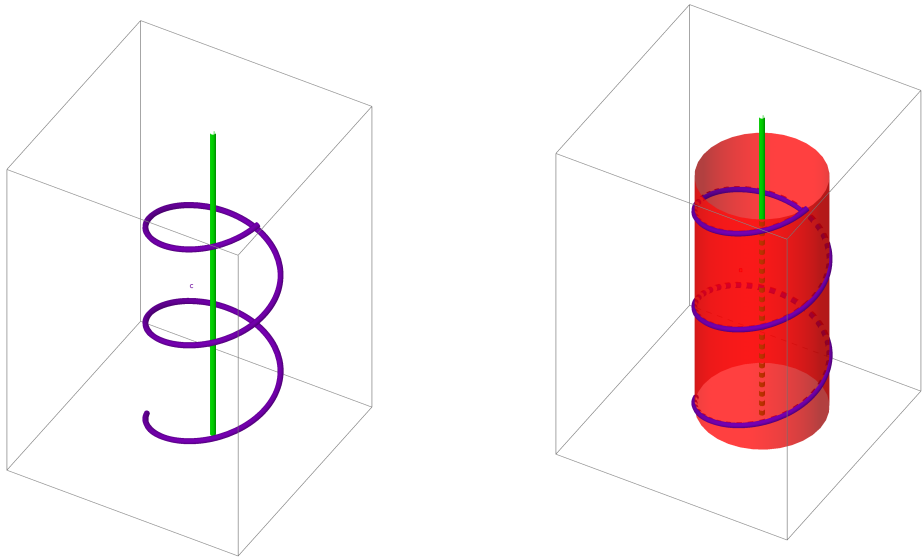
$$\mathrm{Log}(E) = \begin{pmatrix} i\theta & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & -2i\theta & 0 \\ 0 & 0 & i\theta \end{pmatrix}.$$

Dans les coordonnées $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, le flot du champ de vecteurs associé agit par $(z, s) \mapsto (e^{-3i\theta t} z, s + t)$. Les orbites du flot sont donc le $\mathbb{C}$-cercle invariant de G et des spirales autour de ce cercle, comme dans la figure 1.5a

Remarque 1.4.25. Le centralisateur $C(E)$ de E dans $\mathrm{SU}(2,1)$ est l'ensemble des éléments de la forme :

$$e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{it}{2} \\ 0 & e^{-3i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^2$. Les orbites de ce sous-groupe sont le $\mathbb{C}$-cercle invariant de $[E]$ et des cylindres autour de ce $\mathbb{C}$-cercle. On peut voir un exemple dans la figure 1.5b



(a) Une trajectoire d'un flot ellipto-parabolique dans le modèle de Siegel.

(b) Une nappe invariante par un flot ellipto-parabolique dans le modèle de Siegel.

FIGURE 1.5 – Ensembles invariants par un flot ellipto-parabolique dans le modèle de Siegel

1.5 La sphère visuelle d'un point de $\mathbb{CP}^2$

Dans cette section, nous allons définir la sphère visuelle d'un point de $\mathbb{CP}^2$ et donner des coordonnées pour certaines cartes de cet objet. Nous utiliserons la sphère visuelle d'un point de $\mathbb{CP}^2$ pour mieux comprendre les bissecteurs et leur topologie, dans la section 1.6, et pour paramétrer leurs intersections. Nous utiliserons aussi cet outil pour contrôler les intersections des faces du domaine de Ford déformé que nous construirons au chapitre 4.

1.5.1 Définition

Définition 1.5.1. Soit $[p] \in \mathbb{CP}^2$. On appellera sphère visuelle de $[p]$ l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{CP}^2$ passant par $[p]$, qu'on notera $L_{[p]}$. Ainsi :

$$L_{[p]} = \left\{ l_{[p],[q]} \mid [q] \in \mathbb{CP}^2 - \{[p]\} \right\}.$$

Remarque 1.5.2. L'espace $L_{[p]}$ est isomorphe à $\mathbb{CP}^1$. On peut l'identifier de deux autres façons. Nous ferons souvent l'abus de notation correspondant aux identifications suivantes. D'une part, l'ensemble des droites passant par $[p]$ est le projectivisé de l'espace tangent à $\mathbb{CP}^2$ en $[p]$, donc

$$L_{[p]} = \mathbb{P}(T_{[p]}\mathbb{CP}^2).$$

D'autre part, en considérant le dual, on a aussi :

$$L_{[p]} = \left\{ [\varphi] \in \mathbb{P}((\mathbb{C}^3)^*) \mid \varphi(p) = 0 \right\}.$$

Finalement, si on a à disposition un produit hermitien, $\mathbb{C}^3$ s'identifie canoniquement à son dual, et on a :

$$L_{[p]} = [p]^{\perp}.$$

1.5.2 Coordonnées pour la sphère visuelle

Dans cette sous-section, nous allons donner des coordonnées pour la sphère visuelle d'un point $[p]$. Ces coordonnées nous seront utiles lorsque nous aurons besoin de faire un calcul explicite dans cet espace. La proposition suivante donne une façon de construire une carte.

Proposition 1.5.3. *Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{C}^3)^*$ deux formes linéaires indépendantes et telles que $\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = 0$. Alors l'application*

$$f : \begin{array}{ccc} L_{[p]} & \to & \mathbb{CP}^1 \\ l_{[p],[q]} & \mapsto & \frac{\varphi_1(q)}{\varphi_2(q)} \end{array}$$

est bien définie et un isomorphisme.

En traduisant en termes d'orthogonalité, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.5.4. *Soit $[p] \in \mathbb{CP}^2$. Soient $[p'], [p''] \in [p]^{\perp}$ deux points distincts. Alors l'application*

$$f : \begin{array}{ccc} L_{[p]} & \to & \mathbb{CP}^1 \\ l_{[p],[q]} & \mapsto & \frac{\langle p', q\rangle}{\langle p'', q\rangle} \end{array}$$

est bien définie et un isomorphisme.

Notation 1.5.5. Nous noterons désormais cette application $\psi_{p',p''} : L_{[p]} \to \mathbb{CP}^1$.

La remarque suivante nous indique que si on choisit comme repère un triangle autopolaire, les coordonnées sont plus agréables dans la carte correspondante.

Remarque 1.5.6. Dans la proposition précédente, on remarque que si de plus $[p], [p']$ et $[p'']$ forment un triangle auto-polaire, alors $f([p'']) = 0$ et $f([p']) = \infty$.

Finalement, remarquons rapidement le lien entre ces cartes et les birapports de $\mathbb{CP}^1$:

Remarque 1.5.7. Si $[q], [q'] \in \mathbb{CP}^2 - \{p\}$, alors $\frac{f([q])}{f([q'])}$ est le birapport de $[p], [p'], [q]$ et $[q']$.

1.6 Exteurs, bissecteurs et surfaces spinales

Nous allons étudier ici des objets qui apparaissent naturellement lors de la construction de domaines de Dirichlet ou de Ford dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, à savoir les hypersurfaces équidistantes de deux points, que nous appellerons des bissecteurs métriques, ainsi que des généralisations naturelles de ces objets, que nous appellerons tout simplement bissecteurs. Pour les étudier, nous allons aussi étudier leur prolongement analytique dans $\mathbb{CP}^2$, appelé exteur, et leur intersection avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui seront les surfaces spinales. Dans son livre [Gol99], Goldman consacre le chapitre 5 à l'étude topologique des bissecteurs métriques, le chapitre 8 aux exteurs, qui prolongent les bissecteurs dans $\mathbb{CP}^2$, et le chapitre 9 à certaines intersections de bissecteurs. Nous utiliserons en grande partie cette étude des bissecteurs et des exteurs, même si nous prendrons un point de vue plus proche de la géométrie projective.

1.6.1 Définition

Commençons par définir les objets sur lesquels nous allons travailler, et tout d'abord les bissecteurs métriques, qui sont les hypersurfaces équidistantes de deux points de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Définition 1.6.1. Soient $[p], [q] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ deux points distincts. Le *bissecteur métrique*[1] de $[p]$ et $[q]$ est l'ensemble

$$\mathfrak{B} = \left\{ [z] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid d([z], [p]) = d([z], [q]) \right\}.$$

Si $p, q \in \mathbb{C}^3$ sont des relevés de $[p]$ et $[q]$ tels que $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle$, alors le bissecteur peut s'écrire

$$\mathfrak{B} = \left\{ [z] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid |\langle z, p \rangle| = |\langle z, q \rangle| \right\}.$$

Son bord à l'infini est une *sphère spinale*.

Remarque 1.6.2. Dans le chapitre 5 de son livre, Goldman montre que, topologiquement, les bissecteurs sont des boules de dimension trois, et que les sphères spinales sont bien des sphères lisses dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ce sont des objets analytiques, mais ils ne sont pas totalement géodésiques, puisqu'il n'existe pas de sous-espace totalement géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ de dimension 3.

1. Dans la littérature, il est tout simplement appelé *bissecteur*. Nous prendrons ce terme pour un objet un peu plus général, que nous définirons dans la définition 1.6.6

Nous définissons ci-dessous les exteurs, sont des objets de $\mathbb{CP}^2$ qui prolongent les bissecteurs métriques. Nous reprenons la terminologie de Goldman dans [Gol99] pour cet objet.

Définition 1.6.3. Soit $[f] \in \mathbb{CP}^2$. Soit C un cercle réel de $L_{[f]}$. L' *exteur* issu de $[f]$ donné par C est l'ensemble

$$\mathfrak{E} = \left\{ [z] \in \mathbb{CP}^2 \mid l_{[f],[z]} \in C \right\}.$$

Dans ce cadre, $[f]$ est le *foyer* de $\mathfrak{E}$.

On peut remarquer dès à présent que tous les exteurs sont projectivement équivalents. La remarque suivante explicite le lien entre les exteurs et les bissecteurs métriques, ce qui justifie l'étude des exteurs dans $\mathbb{CP}^2$ et de leurs intersections pour étudier aussi les bissecteurs et leurs intersections.

Remarque 1.6.4. Tout bissecteur métrique se prolonge en un exteur. Si $\mathfrak{B}$ est le bissecteur métrique de $[p]$ et de $[q]$, alors il se prolonge en un exteur issu de $[p \boxtimes q]$, donné par

$$\mathfrak{E} = \left\{ [z] \in \mathbb{CP}^2 \mid |\langle z, p\rangle| = |\langle z, q\rangle| \right\}$$

si p et q sont des relevés de $[p]$ et $[q]$ tels que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle$. Le cercle correspondant $C \subset L_{[p\boxtimes q]} \simeq [p \boxtimes q]^{\perp}$ est donné par

$$C = \left\{ [p - \alpha q] \mid \alpha \in S^1 \right\}.$$

Remarque 1.6.5. Les exteurs sont exactement les surfaces équidistantes de deux points de $\mathbb{CP}^2$ lorsqu'on le munit de la métrique de Fubini-Study. On peut trouver une preuve détaillée dans le chapitre 8 de [Gol99].

Nous allons considérer, en déformant un certain domaine de Ford dans le chapitre 4, des objets définis de la même manière, mais avec moins de restrictions sur les points $[p], [q] \in \mathbb{CP}^2$. Nous définissons donc la généralisation suivante de la notion de bissecteur métrique, que nous étudierons par la suite.

Définition 1.6.6. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$. On définit :

— l' *exteur* de p et q comme

$$\mathfrak{E}(p, q) = \{[z] \in \mathbb{CP}^2 \mid |\langle z, p\rangle| = |\langle z, q\rangle|\}.$$

— le *bissecteur* de p et q comme son intersection avec $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{B}(p, q) = \{[z] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid |\langle z, p\rangle| = |\langle z, q\rangle|\}.$$

— la *surface spinale* de p et q comme le bord à l'infini du bissecteur :

$$\mathfrak{S}(p,q) = \{[z] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid |\langle z,p\rangle| = |\langle z,q\rangle|\}.$$

Nous nous restreindrons tout de même au cas où les points p et q définissant un exteur, bisecteur ou sophère spinale sont de même norme. C'est automatiquement le cas lorsqu'ils sont dans la même orbite d'un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2,1)$. On peut retrouver les droites complexes de l'exteur $\mathfrak{E}(p,q)$ de la façon suivante :

Proposition 1.6.7. *Soient $p,q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$. L'exteur $\mathfrak{E}(p,q)$ s'écrit comme union de droites complexes de la façon suivante :*

$$\mathfrak{E}(p,q) = \bigcup_{\alpha \in S^1} [q - \alpha p]^\perp.$$

Démonstration. Un point $[z] \in \mathbb{CP}^2$ appartient à $\mathfrak{E}(p,q)$ si et seulement si $|\langle z,p\rangle| = |\langle z,q\rangle|$. Ceci a lieu si et seulement s'il existe $\alpha \in S^1$ tel que $\alpha\langle z,p\rangle = \langle z,q\rangle$, c'est-à-dire tel que $\langle z, q-\alpha p\rangle = 0$. On a donc que $[z] \in \mathfrak{E}(p,q)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in S^1$ tel que $[z] \in [q-\alpha p]^\perp$. □

Remarque 1.6.8. D'après la proposition 1.6.7, l'exteur de p et q est un exteur au sens de la définition 1.6.3. Il est clair, grâce à la définition 1.6.1, qu'un bissecteur métrique est un bissecteur et qu'une sphère spinale est une surface spinale.

Remarque 1.6.9. Si on veut définir ces objets pour $[p],[q] \in \mathbb{CP}^2$, des choix des relevés différents définissent des objets différents. On se placera ici uniquement dans le cas où les relevés vérifient $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle$.

— Si $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle < 0$, alors $\mathfrak{B}(p,q)$ et $\mathfrak{S}(p,q)$ sont le bissecteur métrique et la sphère spinale de p,q dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ comme dans la définition 1.6.1.
— Si $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle = 0$ et qu'il existe un élément privilégié G de $\mathrm{SU}(2,1)$ tel que $[G][p] = [q]$, on choisira des relevés p et q tels que $Gp = q$. Dans ce cas, $\mathfrak{B}(p,q)$ et $\mathfrak{S}(p,q)$, sont un bissecteur métrique et une sphère spinale.
— Si $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle > 0$, alors $\mathfrak{B}(p,q)$ et $\mathfrak{S}(p,q)$, sont parfois un bissecteur métrique et une sphère spinale. Nous le prouvons dans la proposition 1.6.30.

Proposition 1.6.10. *Soit $\mathfrak{E}$ un exteur de foyer $[f]$ et soit $p \in f^\perp - \{0\}$ tel que $[p]^\perp \not\subseteq \mathfrak{E}$. Alors il existe un unique $q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$, à multiplication par un nombre complexe de module un près, tel que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(p,q)$.*

Corollaire 1.6.11. *Tout exteur $\mathfrak{E}$ est de la forme $\mathfrak{E}(p,q)$.*

Pour faire la preuve de cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.6.12. *Soit $p \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ et $C \subset \mathbb{CP}^1$ un cercle qui ne contient pas $[p]$. Alors il existe un unique $q \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$, à multiplication par un nombre complexe de module un près, tel que $C = \{[p - \alpha q] \mid \alpha \in S^1\}$.*

Démonstration. Puisque $[p] \notin C$, on peut compléter p en une base (p, q) de $\mathbb{C}^2$ de sorte que, dans la carte q^* de $\mathbb{CP}^1$, le cercle C soit le cercle de centre 0 et rayon 1. Ce vecteur q est unique à multiplication par un unitaire près ; tout changement de base induit une similitude non triviale de la carte. Ce cercle s'écrit alors $\{q^*(p - \alpha q) \mid \alpha \in S^1\}$. On déduit que $C = \{[p - \alpha q] \mid \alpha \in S^1\}$. □

Démonstration. (de la proposition 1.6.10)

On sait que $\mathfrak{E}$ s'écrit comme $\bigcup_{\alpha \in S^1} l_\alpha$, où les droites complexes l_α forment un cercle dans $L_{[f]}$. Identifions $L_{[f]}$ à $[f]^\perp \simeq \mathbb{CP}^1$. On dispose donc d'un cercle C qui définit $\mathfrak{E}$ et du point $[p]$ qui n'appartient pas à C. D'après le lemme 1.6.12, il existe $q \in f^\perp \subset \mathbb{C}^3$, à multiplication par un nombre complexe de module un près, tel que $C = \{[p - \alpha q] \mid \alpha \in S^1\}$. On en déduit que $\mathfrak{E} = \bigcup_{\alpha \in S^1} l_\alpha = \bigcup_{\alpha \in S^1} [p - \alpha q]^\perp$. Or un point $[z]$ de $\mathbb{CP}^2$ appartient à $\bigcup_{\alpha \in S^1} [p - \alpha q]^\perp$ si et seulement s'il existe $\alpha \in S^1$ tel que $\alpha \langle z, p \rangle = \langle z, q \rangle$, i.e. si $|\langle z, p \rangle| = |\langle z, q \rangle|$. On en déduit que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(p, q)$. □

1.6.2 Topologie des bissecteurs et des surfaces spinales.

Nous allons étudier en détail la topologie des objets que nous venons de définir, et nous allons voir qu'il y a trois possibilités pour les bissecteurs, et que cette topologie dépend de la position de certains points par rapport à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Commençons par définir l'échine complexe et l'échine réelle d'un bissecteur ou d'un exteur, qui sont une droite complexe et une droite réelle de $\mathbb{CP}^2$ et qui nous aideront à comprendre ces objets.

Définition 1.6.13. Soit $\mathfrak{E}$ un exteur de foyer $[f]$ et donné par le cercle $C \subset L_{[f]}$. L'*échine complexe* Σ («complex spine» en anglais) de $\mathfrak{E}$ est la droite complexe $[f]^\perp$. En identifiant $L_{[f]}$ à $[f]^\perp$, on définit l'*échine réelle* («real spine» en anglais) de $\mathfrak{E}$ comme le cercle réel $\sigma \subset \Sigma$ correspondant à C.

Faisons maintenant une série de remarques autour de cette définition.

Remarque 1.6.14. Si $[f] \notin \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, alors son échine réelle σ est égale à $\mathfrak{E} \cap \Sigma$.

Remarque 1.6.15. Dans le cas des bissecteurs métriques, comme décrits par Goldman dans [Gol99], l'échine complexe et l'échine réelle sont les intersections avec $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ de celles que nous venons de définir.

Remarque 1.6.16. Un exteur $\mathfrak{E}$ est déterminé par son échine réelle σ. En effet, il y a une seule droite complexe Σ qui la contient : elle doit être son échine complexe. Le foyer de $\mathfrak{E}$ est donc $\Sigma^\perp$ et le cercle qui détermine $\mathfrak{E}$ est alors donné par σ.

Remarque 1.6.17. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ deux points distincts. L'échine complexe de l'exteur $\mathfrak{E}(p,q)$ est la droite complexe $l_{[p],[q]}$.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, l'échine réelle d'un exteur ne peut pas être n'importe quel cercle réel de $\mathbb{CP}^2$. Le lemme suivant donne une condition nécessaire pour qu'un cercle réel soit l'échine réelle d'un des exteurs que nous considérons.

Lemme 1.6.18. *Soient $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ deux points distincts tels que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle$. Notons Σ l'échine complexe de $\mathfrak{E}(p,q)$ et σ son échine réelle. Alors*

— *Si Σ intersecte $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, alors σ est un cercle orthogonal à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{CP}^2$.*

— *Si Σ est tangente à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, alors σ est un cercle contenant $[p \boxtimes q]$*

Démonstration. Commençons par le premier cas. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est de module 1, on sait que

$$\begin{aligned} |\langle p, p + \alpha q\rangle| &= |\langle p, p\rangle + \alpha\langle p, q\rangle| \\ &= |\langle q, q\rangle + \overline{\alpha}\langle q, p\rangle| \\ &= |\langle q, p + \alpha q\rangle| \end{aligned}$$

On peut donc paramétrer l'échine réelle comme $\sigma = \Sigma \cap \mathfrak{E}(p,q) = \{[p + \alpha q] \mid \alpha \in S^1\}$. Or, dans la carte $\lambda \mapsto [p + \lambda q]$ de Σ, les points de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont donnés par l'équation

$$(|\lambda|^2 + 1)\langle p, p\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle p, q\rangle) = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle (ou d'une droite passant par 0 si $\langle p, p\rangle = 0$) qui est orthogonal au cercle unité, puisque si λ est solution de l'équation, alors $\overline{\frac{1}{\lambda}}$ l'est aussi.

Pour le deuxième point, il suffit de vérifier que si Σ est tangente à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, alors au moins un point de $l_{[p],[q]}$ différent de $[p \boxtimes q]$ appartient à l'exteur $\mathfrak{E}(p,q)$. Or, comme $l_{[p],[q]}$ est tangente à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, la restriction de la forme hermitienne à $l_{[p],[q]}$ est dégénérée. Son déterminant dans la base (p,q) est égal à $\langle p, p\rangle\langle q, q\rangle - \langle p, q\rangle\langle q, p\rangle$; on en déduit que $|\langle p, p\rangle| = |\langle p, q\rangle|$ et que $[p] \in \mathfrak{E}(p,q)$. □

Deux décompositions des exteurs

En suivant la description donnée par Goldman dans les chapitres 5 et 8 de son livre [Gol99], nous donnerons ici deux décompositions des exteurs qui nous seront utiles ultérieurement. Il s'agit de la décomposition en tranches, qui sont des droites complexes, et la décomposition méridionale, en plans réels.

Proposition 1.6.19. (Décomposition en tranches) *Soit $\mathfrak{E}$ un exteur de foyer $[f]$. Alors les droites complexes contenues dans $\mathfrak{E}$ passant par $[f]$ forment un feuilletage de $\mathfrak{E} - \{[f]\}$ et ce sont les seules droites complexes contenues dans $\mathfrak{E}$. Si de plus $[f] \notin \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{E}$ admet comme échine complexe Σ et échine réelle σ, ce sont exactement les droites complexes orthogonales à Σ en les points de σ.*

Démonstration. Soit l une droite complexe contenue dans $\mathfrak{E}$. Soit $[p] \in l$ un point différent de $[f]$. On sait alors que les droites l et $l_{[f],[p]}$ sont contenues dans $\mathfrak{E}$. Or, un exteur est une sous-variété lisse de dimension 3 de $\mathbb{CP}^2$ en dehors de son foyer : l'espace tangent en $[p]$ à $\mathfrak{E}$ est alors de dimension réelle 3. Il contient donc un sous-espace holomorphe maximal de dimension complexe 1, qui doit être à la fois l'espace tangent de l et celui de $l_{[f],[p]}$ en $[p]$. On en déduit que $l = l_{[f],[p]}$, ce qui prouve la première assertion.

D'après le remarque 1.6.14, on sait que les droites contenues dans $\mathfrak{E}$ sont exactement les droites passant par $[f]$ et un point de σ. Comme les droites passant par $[f] = \Sigma^{\perp}$ sont exactement les droites orthogonales à Σ, ceci montre la deuxième assertion. □

Définition 1.6.20. Une telle droite complexe est appelee *tranche* de $\mathfrak{E}$. Cette décomposition est appelée *la décomposition en tranches de l'exteur.* On peut aussi la considérer sur le bissecteur correspondant.

L'autre décomposition donnée par Goldman est la décomposition méridionale, qui est donnée par la proposition suivante. Pour une preuve, nous renvoyons à la section 8.2.3 de [Gol99], ou au Théorème 5.1.10 de [Gol99]

Proposition 1.6.21. (Décomposition méridionale) *Soit σ un cercle réel dans $\mathbb{CP}^2$. Alors l'union des plans réels de $\mathbb{CP}^2$ contenant σ forment un feuilletage singulier de l'exteur d'échine réelle σ.*

Définition 1.6.22. Un tel plan réel est appelé *méridien* de $\mathfrak{E}$; la décomposition associée est la *décomposition méridionale* de $\mathfrak{E}$, que l'on peut aussi considérer sur le bissecteur correspondant.

Nous allons maintenant décrire la topologie des bissecteurs et des surfaces spinales, mais uniquement dans le cas que nous considérons, à savoir lorsqu'il s'agit d'un bissecteur de la forme $\mathfrak{B}(p, q)$ avec p et q de même norme. Une description générale n'est pas beaucoup plus difficile, mais il faudrait considérer quelques cas supplémentaires en fonction de la position relative de l'échine réelle et de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Bissecteurs métriques et sphères spinales.

Commençons par décrire les bissecteurs métriques, qui sont les bissecteurs usuels étudiés en détail par Goldman dans [Gol99]. On peut commencer par les caractériser par leur échine réelle, grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.6.23. *Un bissecteur est un bissecteur métrique si et seulement si son foyer est dans $\mathbb{CP}^2 - (\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$ et son échine réelle est orthogonale à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Considérons un bissecteur métrique $\mathfrak{B}(p_0, q_0)$, où $p_0, q_0 \in \mathbb{C}^3$ vérifient $\langle p_0, p_0 \rangle = \langle q_0, q_0 \rangle < 0$. D'après le lemme 1.6.18, nous savons que l'échine réelle de $\mathfrak{B}(p_0, q_0)$

est un cercle orthogonal à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et que son foyer $[f_0] = [p_0 \boxtimes q_0]$ est dans $\mathbb{CP}^2 - \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$. Ceci montre le premier sens de l'équivalence. Considérons maintenant un bissecteur $\mathfrak{B}$ de foyer $[f] \in \mathbb{CP}^2 - \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ et dont l'échine réelle σ est orthogonale à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Puisque $\mathrm{PU}(2,1)$ agit transitivement sur $\mathbb{CP}^2 - \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$, on peut supposer que $[f] = [f_0]$.

De plus, remarquons que le stabilisateur de $[f]$ est isomorphe à $\mathrm{PU}(1,1)$, et agit 2-transitivement sur le cercle $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cap [p]^\perp$. Il agit donc aussi de manière transitive sur les cercles orthogonaux à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cap [p]^\perp$. Il existe donc un élément $[G]$ de $\mathrm{PU}(2,1)$ tel que $[G]\sigma$ est l'échine réelle de $\mathfrak{B}(p_0, q_0)$; on en déduit que $[G]\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(p_0, q_0)$ et que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(G^{-1}p_0, G^{-1}q_0)$ est un bissecteur métrique. □

Avec la preuve précédente, nous pouvons faire la remarque suivante :

Remarque 1.6.24. Un bissecteur métrique est déterminé par les deux points de l'intersection de son échine réelle avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ces deux points sont appelés les *sommets du bissecteur* par Goldman dans [Gol99]. De plus, comme $\mathrm{PU}(2,1)$ agit 2-transitivement sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, il agit transitivement sur les bissecteurs métriques.

Finalement, nous pouvons montrer qu'un bissecteur est homéomorphe à une boule de dimension 3, et que son bord à l'infini est une sphère lisse dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Proposition 1.6.25. *Un bissecteur métrique est homéomorphe à une boule de de dimension 3. Une sphère spinale est une sphère lisse dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{B}$ un bissecteur métrique de foyer $[f]$ et échine réelle σ. D'après la proposition 1.6.23, on sait que $\sigma \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est un intervalle ouvert. De plus, on a $\mathfrak{B} = \bigcup_{[s] \in \sigma \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}} l_{[f],[s]} \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui est le produit d'un intervalle ouvert et d'un disque, et donc homéomorphe à une boule de dimension 3. D'après la remarque 1.6.24, on sait que $\mathrm{PU}(2,1)$ agit transitivement sur les bissecteurs métriques. On peut donc étudier le bord à l'infini d'un bissecteur métrique particulier pour finir la preuve. Considérons le bissecteur dont les sommets sont

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dans le modèle de Siegel. La surface spinale correspondante est alors donnée par :

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}|z|^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

qui est une sphère lisse dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. □

Éventails

Nous allons décrire maintenant d'autres types de bissecteurs, qui ne sont pas des bissecteurs métriques mais qui nous seront utiles dans la suite pour construire des domaines fondamentaux dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour des actions de certains sous-groupes de $\mathrm{PU}(2,1)$. On verra les éventails et les cônes de Clifford. Commençons par définir et décrire un éventail.

Définition 1.6.26. On appelle *éventail* («fan», en anglais) un bissecteur dont le foyer $[f]$ est dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et qui ne contient pas $[f]^\perp$ comme tranche. On appellera *éventail spinal* son bord à l'infini.

Proposition 1.6.27. *Un éventail est homéomorphe à une boule de dimension 3. Un éventail spinal est une sphère lisse avec un point singulier dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{E}$ un exteur de foyer $[f] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Plaçons-nous dans le modèle de Siegel et supposons, sans perte de généralité, que $[f] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le $\mathbb{R}$-plan des points de coordonnées réelles est un méridien de $\mathfrak{E}$. Les tranches du bissecteurs sont alors de la forme T_r pour $r \in \mathbb{R}$, où

$$T_r = \{[f]\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} z \\ r \\ 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Le bissecteur $\mathfrak{E} \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est alors difféomorphe à l'ensemble $\{(z,r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid 2\mathrm{Re}(z) < r^2\}$, qui est à son tour difféomorphe à une boule de dimension 3.

Son bord à l'infini est l'ensemble suivant, qui est une sphère lisse en dehors du point $[f]$, où elle est singulière :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(r^2 + it) \\ r \\ 1 \end{bmatrix} \mid (r,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

□

Cônes et tores de Clifford

Pour le dernier type de bissecteurs, qui sont les cônes de Clifford, nous reprenons en partie la terminologie donnée par Goldman dans son livre [Gol99]. Cependant, ils nous semble plus judicieux d'appeler tore de Clifford le bord à l'infini d'un cône de Clifford, bien que Goldman garde ce terme pour décrire les intersections d'exteurs.

Définition 1.6.28. On appelle *cône de Clifford* un bissecteur dont le foyer est dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On appellera *tore de Clifford* son bord à l'infini.

Proposition 1.6.29. *Un cône de Clifford est homéomorphe à* $(S^1 \times D^2)/(S^1 \times \{0\})$. *Un tore de Clifford est un tore lisse dans* $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{E}$ un exteur de foyer $[f] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Chaque droite complexe de $\mathbb{CP}^2$ passant par $[f]$ intersecte $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ en une géodésique complexe, qui est homéomorphe à un disque D^2, et qui a comme bord à l'infini un $\mathbb{C}$-cercle. Grâce à la décomposition en tranches de $\mathfrak{E}$, on sait alors que $\mathfrak{E} - \{[f]\} \cap \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à $S^1 \times (D^2 - \{[f]\})$, et son bord à l'infini est homéomorphe à $S^1 \times S^1$. □

En regroupant ces définitions et en considérant la position relative de deux points $[p]$ et $[q]$ et du pôle $[p \boxtimes q]$ de la droite $l_{[p],[q]}$, on a la proposition suivante :

Proposition 1.6.30. *Soient* $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ *non colinéaires et tels que* $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle$. *Soit* $r = \langle p, p\rangle\langle q, q\rangle - \langle p, q\rangle\langle q, p\rangle$. *On suppose que* $\mathfrak{B}(p, q) \neq \emptyset$.

— *Si* $r < 0$, *alors* $\mathfrak{B}(p, q)$ *est un bissecteur et* $\mathfrak{S}(p, q)$ *est une sphère spinale.*

— *Si* $r = 0$, *alors* $\mathfrak{B}(p, q)$ *est un éventail et* $\mathfrak{S}(p, q)$ *est un éventail spinal.*

— *Si* $r > 0$, *alors* $\mathfrak{B}(p, q)$ *est un cône de Clifford et* $\mathfrak{S}(p, q)$ *est un tore de Clifford.*

Démonstration. Notons Φ' la restriction de la forme hermitienne à $\mathrm{Vect}(p, q)$. Dans la base (p, q), son déterminant est égal à r.

Si $r < 0$, la forme hermitienne Φ' est de signature $(1, 1)$. Le foyer de $\mathfrak{B}(p, q)$, $[p \boxtimes q]$, se trouve dans $\mathbb{CP}^2 - (\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$. L'intersection d'un exteur de foyer dans $\mathbb{CP}^2 - (\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$ est un bissecteur.

Si $r = 0$, la forme hermitienne Φ' est dégénérée . Le foyer de $\mathfrak{B}(p, q)$, $[p \boxtimes q]$, se trouve dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'intersection d'un exteur de foyer dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est un éventail.

Si $r > 0$, la forme hermitienne Φ' est de signature $(2, 0)$. Le foyer de $\mathfrak{B}(p, q)$, $[p \boxtimes q]$, se trouve dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'intersection d'un exteur de foyer dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est un cône sur son bord à l'infini, qui est un tore de Clifford. □

1.6.3 Depuis la sphère visuelle

Nous allons énoncer deux faits à propos des bissecteurs en rapport avec les sphères visuelles bien choisies. Nous prendrons la notation suivante pour la projection naturelle sur la sphère visuelle :

Notation 1.6.31. Soit $[p] \in \mathbb{CP}^2$. Nous noterons

$$\pi_{[p]} \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{CP}^2 - \{[p]\} & \to & L_{[p]} \\ [q] & \mapsto & l_{[p],[q]} \end{array}$$

la projection naturelle sur la sphère visuelle $L_{[p]}$.

La première remarque découle de la définition d'un exteur par un foyer et un cercle dans sa sphère visuelle :

Remarque 1.6.32. Soient $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ des points distincts tels que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle$. Alors $\pi_{[p\boxtimes q]}(\mathfrak{E}(p,q))$ est un cercle dans $L_{[p\boxtimes q]}$. De plus, $\pi_{[p\boxtimes q]}(\mathfrak{B}(p,q))$ est un arc de cercle ou un cercle dans $L_{[p\boxtimes q]}$, suivant si $[p\boxtimes q] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ ou pas ; l'ensemble $\pi_{[p\boxtimes q]}(\mathfrak{S}(p,q))$ est son adhérence.

La proposition suivante décrit la projection d'un bissecteur défini comme $\mathfrak{B}(p,q)$ ou de sa surface spinale correspondante dans la sphère visuelle $L_{[p]}$.

Proposition 1.6.33. *Soient $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ non colinéaires et tels que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle$. Soit $r = \langle p, p\rangle\langle q, q\rangle - \langle p, q\rangle\langle q, p\rangle$.*

— *Si $r \neq 0$, alors $\pi_{[p]}(\mathfrak{S}(p,q))$ est un disque fermé de centres $l_{[p],[q]}$ et $l_{[p],[p\boxtimes q]}$.*

— *Si $r = 0$, alors $\pi_{[p]}(\mathfrak{S}(p,q))$ est un disque fermé dont le bord contient $l_{[p],[q]}$.*

Dans les deux cas $\pi_{[p]}(\mathfrak{B}(p,q))$ est l'intérieur de $\pi_{[p]}(\mathfrak{S}(p,q))$.

Démonstration. Remarquons d'abord que toute droite complexe qui intersecte $\mathfrak{B}(p,q)$ intersecte aussi $\mathfrak{S}(p,q)$, et que les droites complexes qui intersectent $\mathfrak{S}(p,q)$ intersectent aussi $\mathfrak{B}(p,q)$ sauf si elles sont tangentes à $\mathfrak{S}(p,q)$. Ceci montera le dernier point.

Supposons dans un premier temps que $r \neq 0$. Dans ce cas, $(p, q, p\boxtimes q)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Le fixateur de $([p],[q])$ dans $\mathrm{PU}(2,1)$ est alors isomorphe à S^1 et ses éléments s'écrivent dans la base $(p, q, p\boxtimes q)$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\theta} \end{bmatrix}.$$

Ces éléments laissent stable le bissecteur $\mathfrak{B}(p,q)$ et, puisqu'ils fixent $[p]$, agissent naturellement sur $L_{[p]}$. Dans la carte $\psi_{q,p\boxtimes q}$, l'action est donnée par une rotation de centre 0. Dans la carte qui envoie $l_{[p],[q]}$ sur 0 et $l_{[p],[p\boxtimes q]}$ sur ∞, la projection $\pi_{[p]}(\mathfrak{S}(p,q))$ est alors un compact, connexe, invariant par rotation de $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Il nous reste à vérifier qu'exactement un des points 0 et ∞ est dans l'image de $\pi_{[p]}$, ce qui correspond à vérifier qu'une seule ligne parmi $l_{[p],[q]}$ et $l_{[p],[p\boxtimes q]}$ intersecte $\mathfrak{B}(p,q)$.

1er **cas :** $r < 0$ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle p, \alpha q\rangle \in \mathbb{R}^-$. D'une part, on sait que $\langle p+\alpha q, p+\alpha q\rangle = 2(\langle p,p\rangle + \langle p, \alpha q\rangle) < 0$ puisque $r < 0$. D'autre part, $|\langle p, p+\alpha q\rangle| = |\langle p,p\rangle - |\langle p,q\rangle|| = |\langle q,q\rangle - |\langle p,q\rangle|| = |\langle q, p+\alpha q\rangle|$. On sait alors que $l_{[p],[q]}$ intersecte $\mathfrak{B}(p,q)$.

Montrons que $l_{[p],[p\boxtimes q]}$ n'intersecte pas $\mathfrak{S}(p,q)$. On sait que $[p\boxtimes q] \notin \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle p+\lambda p\boxtimes q, p\rangle| &= |\langle p,p\rangle| \\ |\langle p+\lambda p\boxtimes q, q\rangle| &= |\langle p,q\rangle| \end{aligned}$$

Comme $r < 0$, ces deux quantités sont différentes, donc $l_{[p],[p\boxtimes q]}$ n'intersecte pas $\mathfrak{S}(p,q)$.

2e **cas :** $r > 0$ Dans ce cas, on sait que $l_{[p],[q]}$ n'intersecte pas $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et donc pas $\mathfrak{S}(p,q)$. De plus, $[p \boxtimes q] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $\langle p, p \boxtimes q\rangle = \langle p, p \boxtimes q\rangle = 0$, donc $l_{[p],[p\boxtimes q]}$ intersecte $\mathfrak{B}(p,q)$.

3e **cas :** $r = 0$ Supposons maintenant que $r = 0$. Dans ce cas, $[p \boxtimes q] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $[p], [q]$ et $[p \boxtimes q]$ sont alignés. Le fixateur de $l_{[p],[q]}$ est alors un sous-groupe unipotent vertical isomorphe à $\mathbb{R}$, qui agit sur $L_{[p]}$ comme une translation. De plus, comme $l_{[p],[q]}$ est tangente à $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ en $[p \boxtimes q]$, $\pi_{[p]}(\mathfrak{B}(p,q)) - \{l_{[p][q]}\}$ est connexe et invariant selon une direction de translation.

Prenons des coordonnées dans le modèle de Siegel. Quitte à multiplier par un élément de $\mathrm{SU}(2,1)$, on peut supposer que

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p \boxtimes q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, q s'écrit sous la forme suivante, où $\theta \in \mathbb{R}$.

$$q = \begin{pmatrix} -1 \\ e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous prenons $\frac{z_1}{z_3}$ pour coordonnée dans $\mathcal{L}_{[p]}$ de la droite complexe passant par $[p]$ et $\begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Avec ces coordonnées, le fixateur de $l_{[p],[q]}$ agit sur $\mathcal{L}_{[p]}$ par des translations de la forme $z \mapsto z + it$, où $t \in \mathbb{R}$. Pour connaître l'image de $\mathfrak{B}(p,q)$ par $\pi_{[p]}$, il suffit alors de déterminer les $s \in \mathbb{R}$ tels qu'un point de la forme $[w_s] = \begin{bmatrix} sz_3 \\ 1 \\ z_3 \end{bmatrix}$ soit dans $\overline{\mathfrak{B}}(p,q)$. On calcule alors : $\langle p, w_s\rangle = 1$ et $\langle q, w_s\rangle = e^{i\theta} - z_3$. Pour que $[w_s] \in \mathfrak{B}(p,q)$, il est alors nécessaire que z_3 s'écrive sous la forme $z_3(\phi) = e^{i\theta} + e^{i\phi}$, où $\phi \in \mathbb{R}$.

Or $\langle w_s, w_s\rangle = 1 + 2s|z_3|^2$, et $0 \leq |z_3|^2 \leq 4$, où les deux égalités sont atteintes lorsque $\phi = \pi + \theta$ et $\phi = \theta$ respectivement. On en déduit qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $1 + 2s|z_3(\phi)|^2 \leq 0$ si et seulement si $s \leq -\frac{1}{8}$. L'image de image de $\overline{\mathfrak{B}}(p,q)$ par $\pi_{[p]}$ est alors égale à

$$\Big\{ s + it \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2, s \leq 8 \Big\} \cup \{\infty\}.$$

C'est donc un disque fermé dont le bord contient ∞, qui est la coordonnée de $l_{[p],[q]}$. $\square$

1.6.4 Diamètre visuel (réel) d'un bissecteur métrique

Nous allons nous intéresser ici au diamètre visuel (réel) d'un bissecteur de la forme $\mathfrak{B}(p,q)$ depuis $[p]$. Comprendre ce diamètre angulaire nous sera utile pour contrôler l'intersection de certains bissecteurs lors de la construction d'un domaine de Dirichlet, ce que nous ferons au chapitre 4.

Proposition 1.6.34. *Soit $[p],[q] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Soit $\theta_{\max}$ le diamètre angulaire (réel) de $\mathfrak{B}(p,q)$ depuis $[p]$. Alors*

$$\cos\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) = \tanh\left(\frac{d([p],[q])}{2}\right).$$

Démonstration. Plaçons-nous dans le modèle de la boule, et notons $r = \frac{1}{2}d([p],[q])$. Quitte à translater par un élément de $\mathrm{SU}(2,1)$, on peut supposer que

$$[p] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [q] = \begin{bmatrix} \sinh(r) \\ 0 \\ \cosh(r) \end{bmatrix}. \quad \text{Dans ce cas,} \quad p \boxtimes q = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(r) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons g_0 la géodésique réelle passant par $[p]$ et $[q]$. On cherche une géodésique réelle g passant par $[p]$ et un point $[z]$ de $\overline{\mathfrak{B}}(p,q)$ qui forme un angle maximal avec g_0. On peut supposer alors que $[z] \in \mathfrak{S}(p,q)$. Les points de $\overline{\mathfrak{B}}(p,q)$ s'écrivent sous la forme $[p + e^{i\phi}q + \lambda p \boxtimes q]$, où $\phi \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les points de cette forme sont dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ si et seulement si $|\lambda|^2 = \frac{2}{\sinh^2(r)}(1+\cos(\phi)\cosh(r))$. En particulier, $\cos(\phi) \geq \frac{-1}{\cosh(r)}$. Les points $[z] \in \mathfrak{S}(p,q)$ s'écrivent donc sous la forme

$$[z] = \begin{bmatrix} e^{i\phi}\sinh(r) \\ e^{i\psi}\sqrt{2+2\cos(\phi)\cosh(r)} \\ 1+e^{i\phi}\cosh(r) \end{bmatrix}$$

où $\psi \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant le vecteur tangent à la géodésique réelle passant par $[p]$ et $[z]$. Pour ça, commençons par paramétrer cette géodésique. Normalisons d'abord p et q, pour avoir $\langle p,q\rangle$ et $\langle z,p\rangle \in \mathbb{R}$. Nous choisirons désormais pour relevé de $[p]$ et $[q]$ les vecteurs

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+e^{i\phi}\cosh(r) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = (1+e^{i\phi}\cosh(r)) \begin{pmatrix} \sinh(r) \\ 0 \\ \cosh(r) \end{pmatrix}.$$

Avec cette normalisation, le vecteur unitaire tangent à g_0 en $[p]$ est égal à :

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos(\phi)\cosh(r)+\cosh^2(r))}} \begin{pmatrix} 1+e^{i\phi}\cosh(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que, si $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle p+tz, p+tz\rangle = -(2t+1)(1+2\cos(\theta)\cosh(r)+\cosh^2(r))$. Posons maintenant, pour $t \in \mathbb{R}$, $v_t = \frac{1}{\sqrt{-\langle p+tz,p+tz\rangle}}(p+tz)$. Il s'agit d'une paramétrisation de la géodésique réelle, avec les vecteurs normalisés de norme -1. On calcule

$$u_1 = \frac{\partial v_t}{\partial t}\restriction_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos(\phi)\cosh(r)+\cosh^2(r))}}\begin{pmatrix} \sinh(r)e^{i\phi} \\ \sqrt{2(1+\cos(\phi)\cosh(r))}e^{i\psi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a, dans ce cas, $\langle u_1, u_1\rangle = 1$. Si $\frac{\theta}{2}$ est l'angle entre u_0 et u_1, il vérifie $\cos(\frac{\theta}{2}) = \mathrm{Re}(\langle u_0, u_1\rangle)$. Or

$$\mathrm{Re}(\langle u_0, u_1\rangle) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\phi}\cosh(r)}{|1+e^{i\phi}\cosh(r)|^2}e^{-i\phi}\sinh(r)\right) = \frac{\sinh(r)(\cosh(r)+\cos(\phi))}{1+2\cos(\phi)\cosh(r)+\cosh^2(r))}$$

Cette partie réelle est minimale lorsque $\cos(\phi)$ est minimal. Or, comme $\cos(\phi) \leq \frac{-1}{\cosh(r)}$, on en déduit que

$$\mathrm{Re}(\langle u_0, u_1\rangle) \leq \frac{\sinh(r)(\cosh(r)-\frac{1}{\cosh(r)})}{\cosh^2(r)-1} = \tanh(r)$$

On remarque que cette borne est atteinte lorsque $[z]$ est l'une des deux extrémités de l'échine réelle de $\mathfrak{B}(p,q)$. L'angle maximal entre deux géodésiques réelles passant par $[p]$ et des points de $\overline{\mathfrak{B}}(p,q)$ est alors l'angle $\theta_{\max}$ entre les géodésiques passant par les extrémités de l'échine réelle. Comme g_0 est la bissectrice de ces deux géodésiques réelles, on bien

$$\cos\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) = \tanh\left(\frac{d([p],[q])}{2}\right).$$

□

Nous utiliserons de façon plus précise le corollaire suivant, qui majore le diamètre angulaire par une quantité simple à calculer.

Corollaire 1.6.35. *Soient $p, q \in \mathbb{C} - \{0\}$ sont des points distincts qui vérifient $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle < 0$. Si $\frac{\langle p,q\rangle\langle q,p\rangle}{\langle p,p\rangle\langle q,q\rangle} > 4$, alors le diamètre angulaire réel de $\mathfrak{B}(p,q)$ depuis $[p]$ est $< \frac{\pi}{3}$.*

Démonstration. En notant $r = \frac{d([p],[q])}{2}$, on a $\frac{\langle p,q\rangle\langle q,p\rangle}{\langle p,p\rangle\langle q,q\rangle} = \cosh^2(r)$. Si $\cosh^2(r) > 4$, alors $\tanh^2(r) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(r)} > \frac{3}{4}$. En notant $\theta_{\max}$ le diamètre angulaire réel de $\mathfrak{B}(p,q)$ depuis $[p]$, on a $\cos(\frac{\theta_{\max}}{2}) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, et donc $\theta_{\max} < \frac{\pi}{6}$. □

1.6.5 Paires d'exteurs

Nous allons considérer des intersections de bissecteurs pour étudier des domaines de Ford et leurs déformations. On considérera ici, comme le fait Goldman dans le chapitre

8 de son livre [Gol99], les intersections des exteurs correspondants avant de se concentrer sur les intersections des bissecteurs. Commençons par classifier les paires d'exteurs.

Définition 1.6.36. Soient $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ deux exteurs de foyers respectifs $[f_1]$ et $[f_2]$. On dit que la paire $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ est :

— *Confocale* si $[f_1] = [f_2]$.
— *Équilibrée* («balanced» en anglais) si $[f_1] \neq [f_2]$ et $l_{[f_1],[f_2]} \subset \mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$.
— *Semi-équilibrée* («semi-balanced» en anglais) si $[f_1] \neq [f_2]$ et $l_{[f_1],[f_2]}$ est incluse exactement dans un des deux exteurs.
— *Déséquilibrée* («unbalanced» en anglais) si $[f_1] \neq [f_2]$ et $l_{[f_1],[f_2]}$ n'est incluse dans aucun des deux exteurs.

Définition 1.6.37. On dira qu'une paire d'exteurs $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ est *coéquidistante* s'il existe des points distincts $p, q, r \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ tels que $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(p, q)$ et $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}(p, r)$.

Remarque 1.6.38. Une paire d'exteurs coéquidistants est soit confocale, soit déséquilibrée.

Démonstration. Soit $p, q, r \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ trois points distincts. Soit $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(p, q)$ et $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}(p, r)$. Si $[p], [q]$ et $[r]$ sont alignés, alors $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ ont la même échine complexe et donc le même foyer. Sinon, notons $[f_1] = [p \boxtimes q]$ et $[f_2] = [p \boxtimes r]$ les foyers de $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ respectivement. On a d'une part trivialement que $\langle f_1, p\rangle = 0$, et d'autre part que $\langle f_1, r\rangle = \langle p \boxtimes q, r\rangle \neq 0$ puisque p, q et r ne sont pas alignés. On en déduit que $[f_1] \notin \mathfrak{E}_2$. De même, $[f_2] \notin \mathfrak{E}_1$, ce qui suffit pour conclure. □

En s'intéressant aux domaines de Ford et à leurs déformations, nous allons considérer uniquement des bissecteurs coéquidistants par rapport à des relevés normalisés.

Remarque 1.6.39. Toute paire de bissecteurs déséquilibrée est coéquidistante.

Démonstration. Soit $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ une paire d'exteurs déséquilibrée. Soient $[f_1]$ le foyer de $\mathfrak{E}_1$ et $[f_2]$ le foyer de $\mathfrak{E}_2$. Comme $[f_1]$ et $[f_2]$ sont distincts, alors $[f_1]^\perp \cap [f_2]^\perp$ est réduit à un point dans $\mathbb{CP}^2$. Soit $[p]$ ce point et $p \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ un relevé. D'après la proposition 1.6.10, il existe $q, r \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ tels que $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(p, q)$ et $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}(p, r)$. □

Proposition 1.6.40. *Soit $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ une paire d'exteurs distincts confocale de foyer $[f]$. Alors $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ est soit $\{[f]\}$, soit une une droite complexe passant par $[f]$, soit deux droites complexes passant par $[f]$.*

Démonstration. Les exteurs $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ sont donnés par des cercles réels C_1 et C_2 de $L_{[f]}$. L'intersection est alors réduite à $\{[f]\}$ si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, elle est une droite complexe si C_1 et C_2 sont tangents, et elle consiste en deux droites complexes si C_1 et C_2 s'intersectent en deux points. □

Les deux résultats suivants décrivent l'intersection d'une paire d'exteurs équilibrée ou semi-équilibrée. Nous renvoyons au chapitre 8 de [Gol99] pour des preuves.

Théorème 1.6.41. *(Théorème 8.3.1 de [Gol99]) Soit* $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ *une paire d'exteurs équilibrée. Alors il existe une droite complexe* l *et un plan réel* P *de* $\mathbb{CP}^2$ *tels que* $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2 = P \cup l$.

Proposition 1.6.42. *(Section 8.3.3 de [Gol99]) Soit* $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ *une paire d'exteurs équilibrée, où* $\mathfrak{E}_1$ *contient* $[f_2]$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *ne contient pas* $[f_1]$. *Alors* $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2 - \{[f_2]\}$ *est un cylindre réel dans* $\mathbb{CP}^2$, *qui peut être compactifié en ajoutant* $[f_2]$.

La proposition suivante décrit l'intersection dans $\mathbb{CP}^2$ de deux exteurs dans une paire déséquilibrée. Goldman appelle cette intersection un «tore de Clifford», mais nous avons choisi d'employer ce terme pour le bord à l'infini d'un cône de Clifford.

Proposition 1.6.43. *Soit* $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ *une paire d'exteurs déséquilibrée. Alors* $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ *est un tore dans* $\mathbb{CP}^2$. *Si* $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(p, q)$ *et* $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}(p, r)$, *alors l'intersection est paramétrée par* $[(q - \alpha p) \boxtimes (r - \beta p)]$ *où* $(\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1$.

Démonstration. Soient $[f_1]$ et $[f_2]$ les foyers respectifs de $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$. On sait que $\mathfrak{E}_1$ s'écrit comme une union de droites complexes passant par $[f_1]$ et paramétrée par S^1. On peut donc écrire

$$\mathfrak{E}_1 = \bigcup_{\alpha \in S^1} l_\alpha \text{ et, de même, } \mathfrak{E}_2 = \bigcup_{\beta \in S^1} l'_\beta.$$

Comme la paire d'exteurs est déséquilibrée, on sait que chaque l_α intersecte chaque l'_β exactement en un point. On a donc :

$$\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2 = \bigcup_{\alpha \in S^1} \bigcup_{\beta \in S^1} l_\alpha \cap l'_\beta,$$

qui est un tore. Si de plus $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(p, q)$ et $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}(p, r)$, alors, d'après la proposition 1.6.7, les droites complexes l_α peuvent s'écrire comme $[q - \alpha p]^\perp$ et les droites l'_β comme $[r - \beta p]^\perp$. Dans ce cas, $l_\alpha \cap l'_\beta = [q - \alpha p]^\perp \cap [r - \beta p]^\perp = \{[(q - \alpha p) \boxtimes (r - \beta p)]\}$. □

1.6.6 Paires de bissecteurs coéquidistants

On considérera désormais des paires déséquilibrées de bissecteurs coéquidistants par des relevés normalisés, et nous nous intéresserons à leurs intersections.

Lemme 1.6.44 (Théorème 9.1.2 de [Gol99])**.** *Soient* $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *deux exteurs de foyers* $[f_1]$ *et* $[f_2]$ *respectivement. On suppose qu'ils s'intersectent en un point* $[x_0] \neq [f_1], [f_2]$. *Alors soit l'intersection* $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ *est transverse en* $[x_0]$, *soit* $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *ont une tranche commune qui passe par* $[x_0]$.

Démonstration. L'exteur $\mathfrak{E}_1$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{CP}^2$ en dehors de son foyer. Son espace tangent en $[x_0]$ est un espace réel de dimension 3. Il admet donc un sous-espace holomorphe maximal de dimension complexe 1. Ce sous-espace est l'espace tangent de la droite $l_{[f_1],[x_0]}$. Il en est de même pour $\mathfrak{E}_2$. On en déduit que soit l'intersection $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ est transverse en $[x_0]$, soit $l_{[f_1],[x_0]} = l_{[f_2],[x_0]}$ et $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ ont une tranche commune qui passe par $[x_0]$. □

Lemme 1.6.45. *Soit $[p]$ un point de $\mathbb{CP}^1$ et C_0, C_1 deux cercles dans $\mathbb{CP}^1$ passant par $[p]$. Soit $[q]$ un point de $\mathbb{CP}^1$ qui n'est pas dans $C_1 \cup C_2$. Alors il existe un chemin continu de cercles $(C_t)_{t\in[0,1]}$ de C_0 vers C_1 tels que, pour tout $t \in [0,1]$ le cercle C_t passe par $[p]$ et ne passe pas par $[q]$.*

Proposition 1.6.46. *Soit $[x_0] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. L'ensemble des paires d'exteurs déséquilibrées qui s'intersectent en $[x_0]$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ et $\mathfrak{E}_3$ trois exteurs passant par $[x_0]$ et définis par des foyers et cercles respectifs $([f_1], C_1)$, $([f_2], C_2)$ et $([f_3], C_3)$. On suppose que les paires $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ et $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_3)$ sont déséquilibrées. Nous allons construire un chemin qui déforme continûment $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ en $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_3)$ à l'intérieur des paires déséquilibrées, ce qui suffit pour conclure. Nous allons le faire en quatre étapes ; le lemme 1.6.45 nous assure qu'on peut effectuer les déformations des cercles.

1. Déformer le cercle C_1 dans $L_{[f_1]}$ vers C_1' par un chemin $C_1(t)$ de sorte de sorte que
   (a) $C_1(t)$ passe toujours par $l_{[f_1][x_0]}$ et évite $l_{[f_1][f_2]}$.
   (b) Les points $l_{[f_1][f_2]}$ et $l_{[f_1][f_3]}$ de $L_{[f_1]}$ sont du même côté de C_1' dans $L_{[f_1]}$.
2. Déformer le foyer $[f_2]$ de $\mathfrak{E}_2$ vers $[f_3]$ et le cercle C_2 vers C_2' par un chemin $([f_2(t)], C_2(t))$ tel que :
   (a) Le cercle $C_2(t)$ contient toujours $l_{[f_2(t),x_0]}$ et évite $l_{[f_2(t)],[f_1]}$.
   (b) La droite $l_{[f_1],[f_2(t)]}$ ne passe pas par C_1'. Ceci est possible car $l_{[f_1],[f_2]}$ et $l_{[f_1],[f_3]}$ sont du même côté de C_1' dans $L_{[f_1]}$.
3. Déformer le cercle C_1' de $l_{[f_1]}$ vers C_1 en passant par $l_{[f_1,x_0]}$ et en évitant $l_{[f_1],[f_3]}$.
4. Déformer le cercle C_2' vers C_3 en passant par $l_{[f_1,x_0]}$ et en évitant $l_{[f_1],[f_3]}$.

Ainsi, on a bien déformé $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ en $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_3)$. Au cours de la déformation, les conditions imposées montrent que les deux exteurs contiennent toujours $[x_0]$ et que la paire est toujours déséquilibrée. □

Remarque 1.6.47. Les paires de deux bissecteurs métriques, de deux éventails et de deux cônes de Clifford sont connexes par arcs.

Intersections de Goldman

Dans le chapitre 9 de [Gol99], Goldman considère les paires de bissecteurs coéquidistants de points de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ ou de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et montre que leur intersection est connexe et qu'il s'agit d'un disque. Nous rappelons ici certains de ses résultats, obtenus par une étude fine des tangences de sphères spinales.

Proposition 1.6.48 (Lemme 9.1.5 de [Gol99])**.** *Soient $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ deux bissecteurs métriques, de bords à l'infini $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Alors chaque composante connexe de $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ est un point ou un cercle, et chaque composante connexe de $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ est un disque.*

On donne un nom particulier à ces disques, qui interviendront systématiquement lors de constructions de domaines de Ford ou de Dirichlet.

Définition 1.6.49. Un tel disque de l'intersection est appelée *disque de Giraud.* Nous appellerons son bord un *cercle de Giraud.*

Finalement, le théorème suivant assure que l'intersection de deux bissecteurs métriques coéquidistants est soit un disque de Giraud, soit vide, et que l'intersection des sphères spinales correspondantes est soit un point, soit un cercle de Giraud.

Théorème 1.6.50 (Théorème 9.2.6 de [Gol99])**.** *Soient $p, q, r \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle = \langle r, r\rangle \leq 0$. Alors $\mathfrak{S}(p, q) \cap \mathfrak{S}(p, r)$ est connexe.*

Autres intersections

Nous aurons besoin de considérer des intersections un peu plus générales pour déformer un domaine de Ford. Nous allons considérer un exemple explicite, qui nous servira par la suite. Il s'agit d'un cas très symétrique, où les bissecteurs sont équidistants de points dans un même plan réel, et qui ont une symétrie d'ordre 3. Nous aurons besoin du lemme suivant pour un point technique concernant un signe dans la proposition que nous nous proposons de montrer par la suite.

Lemme 1.6.51. *Soient $p, q, r \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$. On suppose qu'ils sont dans le même $\mathbb{R}$-plan et qu'il existe $S \in \mathrm{SU}(2, 1)$ d'ordre 3 tel que $Sp = q$ et $Sq = r$. Alors $\langle p \boxtimes q, q \boxtimes r\rangle = \langle q \boxtimes r, r \boxtimes p\rangle = \langle r \boxtimes p, p \boxtimes q\rangle \in \mathbb{R}^-$.*

Démonstration. Puisque p, q, r sont dans le même $\mathbb{R}$-plan, les points $p \boxtimes q$, $q \boxtimes r$ et $r \boxtimes p$ sont aussi dans le même $\mathbb{R}$-plan. Grâce à la symétrie d'ordre 3, on sait que $\langle p \boxtimes q, p \boxtimes q\rangle = \langle q \boxtimes r, q \boxtimes r\rangle = \langle r \boxtimes p, r \boxtimes p\rangle$. Notons $l \in \mathbb{R}$ cette quantité. D'autre part, on sait aussi que $\langle p \boxtimes q, q \boxtimes r\rangle = \langle q \boxtimes r, r \boxtimes p\rangle = \langle r \boxtimes p, p \boxtimes q\rangle \in \mathbb{R}$. Notons k cette quantité.

Plaçons nous dans le cas générique, où $k \neq 0$ et $(p \boxtimes q, q \boxtimes r, r \boxtimes p)$ est une base de $\mathbb{C}^3$, le résultat sera vrai en général par densité. Dans cette base, la matrice de la forme

hermitienne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} l & k & k \\ k & l & k \\ k & k & l \end{pmatrix}.$$

Elle admet une valeur propre double égale à $l-k$ et une valeur propre simple égale à $l+2k$. Comme la forme hermitienne est de signature $(2,1)$, on en déduit que $l-k>0$ et $l+2k<0$, ce qui implique que $k<0$. □

Proposition 1.6.52. *Soient $p,q,r \in \mathbb{C}^3-\{0\}$. On suppose qu'ils sont dans le même $\mathbb{R}$-plan et qu'il existe $S \in \mathrm{SU}(2,1)$ d'ordre 3 tel que $Sp=q$ et $Sq=r$. On sait alors que $p\boxtimes q$, $q\boxtimes r$ et $r\boxtimes p$ sont aussi de même norme et dans le même $\mathbb{R}$-plan. Grâce au lemme 1.6.51, on sait que $\langle p\boxtimes q, q\boxtimes r\rangle = \langle q\boxtimes r, r\boxtimes p\rangle = \langle r\boxtimes p, p\boxtimes q\rangle \in \mathbb{R}^-$. Posons $u=\frac{\langle p\boxtimes q, p\boxtimes q\rangle}{\langle p\boxtimes q, q\boxtimes r\rangle}$.*

Alors

- *Si $u<\frac{2}{3}$, alors $\mathfrak{B}(p,q)\cap\mathfrak{B}(p,r)$ est un disque, et son bord à l'infini est un cercle lisse.*
- *Si $u=\frac{2}{3}$, alors $\mathfrak{B}(p,q)\cap\mathfrak{B}(p,r)$ est un disque, et son bord à l'infini est composé de trois $\mathbb{C}$-cercles.*
- *Si $u>\frac{2}{3}$, alors $\mathfrak{B}(p,q)\cap\mathfrak{B}(p,r)$ est un tore privé d'un disque, et son bord à l'infini est formé par deux cercles lisses.*

Démonstration. L'intersection des exteurs $\mathfrak{E}(p,q)$ et $\mathfrak{E}(p,r)$ est le tore paramétré par :

$$\{(q+e^{i\theta}p)\boxtimes(r+e^{i\phi}p) \mid (\theta,\phi)\in[\pi,\pi]^2\}$$

Les points de l'intersection $\mathfrak{B}(p,q)\cap\mathfrak{B}(p,r)$ sont exactement les points de ce tore admettant une norme négative. Calculons la norme de $(q+e^{i\theta}p)\boxtimes(r+e^{i\phi}p)$:

$$\begin{aligned}
&\langle (q+e^{i\theta}p)\boxtimes(r+e^{i\phi}p),(q+e^{i\theta}p)\boxtimes(r+e^{i\phi}p)\rangle \\
&\qquad = \langle q\boxtimes r + e^{i\theta}p\boxtimes r + e^{i\phi}q\boxtimes p, q\boxtimes r + e^{i\theta}p\boxtimes r + e^{i\phi}q\boxtimes p\rangle \\
&\qquad = \langle q\boxtimes r, q\boxtimes r\rangle + \langle p\boxtimes r, p\boxtimes r\rangle + \langle q\boxtimes p, q\boxtimes p\rangle \\
&\qquad + 2\mathrm{Re}(e^{i\theta}\langle q\boxtimes r, p\boxtimes r\rangle + e^{i\phi}\langle q\boxtimes r, q\boxtimes p\rangle + e^{i(\phi-\theta)}\langle p\boxtimes r, q\boxtimes p\rangle) \\
&\qquad = 3\langle q\boxtimes r, q\boxtimes r\rangle + 2\langle q\boxtimes r, p\boxtimes r\rangle(\cos(\theta)+\cos(\phi)+\cos(\phi-\theta)) \\
&\qquad = 2\langle q\boxtimes r, p\boxtimes r\rangle(\frac{3}{2}u+\cos(\theta)+\cos(\phi)+\cos(\phi-\theta))
\end{aligned}$$

Puisque $\langle q\boxtimes r, p\boxtimes r\rangle<0$, le signe de l'expression précédente est donné par le signe opposé à celui de $\frac{3}{2}u+\cos(\theta)+\cos(\phi)+\cos(\phi-\theta)$. Les lignes de niveau de la fonction $(\theta,\phi)\mapsto\cos(\theta)+\cos(\phi)+\cos(\phi-\theta)$ sont données dans la figure 1.6. L'ensemble décrivant $\mathfrak{B}(p,q)\cap\mathfrak{B}(p,r)$ est alors donné par les lignes de niveau $\geq -\frac{3}{2}u$, qui est donc

- un disque à bord lisse si $u<\frac{2}{3}$

— un disque avec pour bord les cercles d'équations $\theta = 0$, $\phi = 0$ et $\phi - \theta = \pi \mod 2\pi$ lorsque $u = \frac{2}{3}$

— Le tore privé de deux disques si $u > \frac{2}{3}$.

□

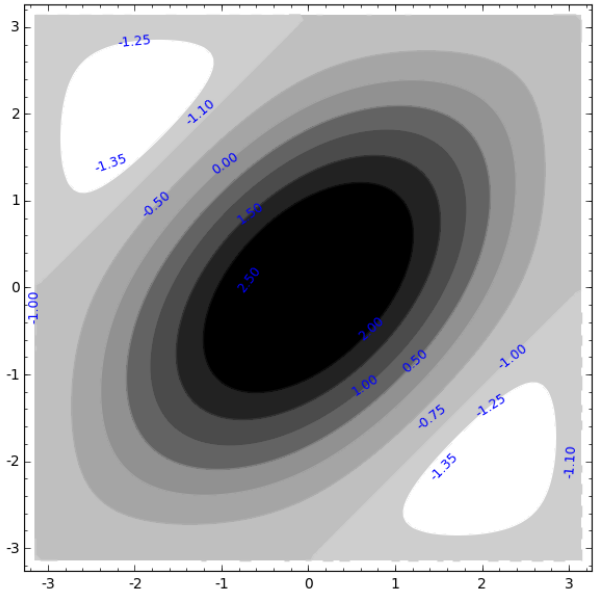


FIGURE 1.6 – Lignes de niveau de la fonction $(\theta, \phi) \mapsto \cos(\theta) + \cos(\phi) + \cos(\phi - \theta)$ pour $(\theta, \phi) \in [-\pi, \pi]^2$.

Chapitre 2

Chirugies de Dehn CR-sphériques

2.1 Introduction

Le célèbre théorème de chirurgie de Dehn de Thurston, énoncé dans ses notes [Thu02], dit que toutes les chirurgies de Dehn, sauf un nombre fini, sur une variété hyperbolique à pointe M admettent des structures hyperboliques complètes avec des développantes et des représentations d'holonomie proches de celles de M. On peut se poser la même question pour d'autres structures géométriques. Dans ce chapitre, comme dans cette thèse, nous nous concentrerons sur les structures CR-sphériques, qui ont comme espace modèle $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et comme groupe d'automorphismes $\mathrm{PU}(2,1)$. Dans son livre [Sch07], Schwartz montre un théorème de chirurgie de Dehn CR-sphérique qui donne, sous certaines hypothèses, des structures CR-sphériques uniformisables sur certaines chirurgies de Dehn sur des variétés CR-sphériques à pointe. Dans ce chapitre, nous allons montrer un résultat similaire en utilisant des techniques venant des (G, X)-structures et de la géométrie de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ au lieu de l'approche de la discrétude de représentations et d'actions sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Le théorème 2.2.24 a des hypothèses plus faibles que le théorème de Schwartz, mais nous obtenons des structures géométriques sur des chirurgies pour lesquelles nous ne savons pas déterminer si elles sont uniformisables ou pas.

Pour le lecteur, l'exemple à garder en tête est celui de la structure de Deraux-Falbel sur le complémentaire du nœud de huit, construite dans [DF15], et que nous traitons en détail dans la section 2.3. Pour cet exemple, Deraux montre dans [Der14] qu'il existe une famille à un paramètre d'uniformisations CR-sphériques du complémentaire du nœud de huit avec holonomie périphérique parabolique contenant cette structure. Dans [FGK$^+$16], Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier et Thistlethwaite décrivent la variété des caractères du groupe fondamental du complémentaire du nœud de huit sur $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Il donnent une paramétrisation explicite pour la composante qui contient la représentation d'holonomie de la structure de Deraux-Falbel. En considérant les représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, cette composante donne des structures CR-sphériques proches de celle de Deraux et Falbel.

Avec cette paramétrisation et le théorème 2.2.24, nous obtiendrons le théorème suivant :

Théorème. *Soit M le complémentaire du nœud de huit. Pour le marquage usuel*[1] *du tore périphérique de M :*

1. *Il existe une infinité de structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de M de pente -3.*
2. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap (0, \delta)$, il existe une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de M de pente $-3 + r$.*

La section 2.2 est consacrée à énoncer et prouver le théorème de chirurgie 2.2.24, qui est le résultat central de ce chapitre. Nous mettrons à l'œuvre les outils données dans la première partie du chapitre 1. Ensuite, nous détaillons un exemple d'application du théorème dans la section 2.3 pour la structure de Deraux-Falbel sur complémentaire du neud de huit. Finalement, dans la section 2.4, nous décrivons rapidement les variétés $V(p, q, n)$ qui apparaissent naturellement dans le théorème de chirurgie ; nous reviendrons sur ces variétés avec plus de détails dans l'annexe A.

2.2 Chirurgies régulières

2.2.1 Le principe d'Ehresmann-Thurston

Nous allons nous intéresser aux structures CR-sphériques sur une variété M de dimension 3. Commençons par rappeler le formalisme des (G, X)-structures, qui nous donnera le langage à utiliser. Dans les définitions générales, X sera une variété lisse connexe, et G un sous-groupe de difféomorphismes de X qui agit de façon transitive et analytique. Nous nous concentrerons très rapidement au cas où $X = \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $G = \mathrm{PU}(2, 1)$.

Définition 2.2.1. Une (G, X)-*structure* sur une variété M est la donnée, à isotopie près, d'un difféomorphisme local $\mathrm{Dev} : \widetilde{M} \to X$ et d'un morphisme de groupes $\rho : \pi_1(M) \to G$ tels que pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tout $g \in \pi_1(M)$ on ait $\mathrm{Dev}(g \cdot x) = \rho(g) \cdot \mathrm{Dev}(x)$ pour les actions de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ et de G sur X. On appelle Dev la *développante* de la structure et ρ son *holonomie*.

Remarque 2.2.2. Nous identifierons deux structures si elles sont G-équivalentes, c'est à dire s'il existe $g \in G$ tel que les développantes Dev_1 et Dev_2 vérifient $\mathrm{Dev}_2 = g \circ \mathrm{Dev}_1$. Dans ce cas les holonomies sont conjuguées et vérifient $\rho_2 = g\rho_1 g^{-1}$.

La définition que nous venons de donner n'est pas la définition usuelle, c'est pourquoi nous faisons la remarque suivante :

1. Pour nous, le marquage usuel est celui donné par Thurston dans [Thu02].

Remarque 2.2.3. Cette définition est équivalente à la définition habituelle d'une (G, X)-structure par un atlas de M à valeurs dans X dont les changements de cartes sont donnés par des éléments de G. La donnée d'un couple (Dev, ρ) donne immédiatement un tel atlas, mais la construction du couple (Dev, ρ) à partir d'un atlas demande un peu plus de travail. On pourra voir par exemple [Thu02] pour plus de détails. Nous utiliserons cependant les deux définitions : la première pour déformer une structure, et la deuxième pour en construire une autre.

Nous utiliserons aussi à quelques reprises des variétés à bord ; la définition de (G, X)-structure s'étend aux variétés à bord sans problème.

Désormais, nous allons considérer une variété M de dimension 3, compacte et à bords toriques. Nous allons étudier quelques structures géométriques sur $\mathring{M}$, où l'espace modèle X est $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et le groupe G est $\mathrm{PU}(2,1)$. Nous définissons donc une structure CR-sphérique.

Définition 2.2.4. On appelle structure CR-sphérique une $(\mathrm{PU}(2,1), \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$-structure.

L'objet essentiel pour déformer une structure, au vu du principe d'Ehresmann-Thurston que nous verrons ci-dessous, sont les représentations de $\pi_1(M)$ à valeurs dans $\mathrm{PU}(2,1)$. Prenons donc une notation pour cet espace :

Notation 2.2.5. Nous noterons $\mathcal{R}(\pi_1(M), G)$ l'ensemble des représentations de $\pi_1(M)$ à valeurs dans G, muni de la topologie de la convergence simple.

Nous allons travailler avec des déformations de structures. Pour énoncer des résultats sur une déformation, nous aurons à nous placer «loin du bord» ou «près su bord». Nous allons donc considérer l'union de M avec un épaississement de son bord pour pouvoir donner un sens précis à ces termes :

Notation 2.2.6. Pour $s \in \mathbb{R}^+$, nous noterons $M_{[0,s[}$ l'union de M avec un épaississement de son bord. Ainsi, $M_{[0,s[} = (M \cup \partial M \times [0, s[)/\sim$ où l'on identifie ∂M à $\partial M \times \{0\}$. Nous considérerons ces variétés incluses les unes dans les autres, de sorte que si $s_1 \leq s_2$, alors $M_{[0,s_1[} \subset M_{[0,s_2[}$.

Remarque 2.2.7. Les variétés $M_{[0,s[}$ sont toutes homéomorphes à l'intérieur de M. Nous utilisons ce découpage pour avoir une convergence convenable «assez loin» du bord de M pour des structures géométriques.

Énonçons maintenant le principe d'Ehresmann-Thurston, qui nous dit qu'il suffit de déformer l'holonomie d'une structure dans $\mathcal{R}(\pi_1(M), G)$ pour avoir une déformation de cette structure. Le lecteur pourra trouver une preuve dans l'article de Bergeron et Gelander [BG04] ou bien dans l'article de survol de Goldman [Gol10].

Théorème 2.2.8 (Principe d'Ehresmann-Thurston)**.** *On suppose que $M_{[0,1[}$ est munie d'une (G,X)-structure d'holonomie ρ_0. Pour tout $\epsilon > 0$, si $\rho \in \mathcal{R}(\pi_1(M),G)$ est une déformation assez proche de ρ_0, alors il existe une (G,X)-structure sur $M_{[0,1-\epsilon[}$ d'holonomie ρ et proche de la structure de départ sur $M_{[0,1-\epsilon[}$ pour la topologie $\mathcal{C}^1$.*

Le résultat est un peu plus précis. En effet, on a un paramétrage local :

Remarque 2.2.9. L'ensemble $\mathcal{R}(\pi_1(M),G)$ paramètre les (G,X)-structures sur $M_{[0,1-\epsilon[}$ au voisinage de ρ_0. Pour une preuve de ce résultat, on peut voir par exemple l'article de Canary, Epstein et Green [CEG06] ou la thèse de Lok [Lok84].

Nous allons considérer des déformations d'une structure (Dev_0, ρ_0) où ρ_0 est d'holonomie périphérique unipotente de rang 1. Comme dans l'exemple que nous traiterons, on s'attend à avoir un espace de déformations de dimension réelle $\geq 2m$, où m est le nombre de bords toriques de M.

2.2.2 Un théorème de chirurgie CR-sphérique

Comme dans le cas hyperbolique réel, nous allons nous intéresser aux chirurgies de Dehn de M, qui consistent, d'un point de vue topologique, à recoller un tore plein sur un des bords toriques de M. Nous essaierons de étendre une certaine structure sur M à une de ses chirurgies. Nous démontrons un résultat très semblable à celui de Schwartz dans [Sch07], mais il y a cependant quelques différences : nos hypothèses sont plus faibles que celles de Schwartz et nous obtenons une structure géométrique, mais nous ne savons pas si elle est ou non obtenue comme un quotient d'un ouvert de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par un sous-groupe de $\mathrm{PU}(2,1)$.

Épaississements et relevés

Prenons tout d'abord des notations pour le bord torique à considérer, un de ses relevés et l'holonomie périphérique associée.

Notation 2.2.10. Fixons un bord torique T de M. Pour $s \in [0,1[$, notons $T_s = T \times \{s\} \subset M_{[0,1[}$, puis, pour un intervalle $I \subset [0,1[$ notons $T_I = \cup_{s\in I} T_s = T \times I \subset M_{[0,1[}$. Choisissons maintenant une composante connexe de $\pi^{-1}(T_{[0,1[}) \subset \widetilde{M}_{[0,1[}$. Nous la noterons $\widetilde{T}_{[0,1[}$: c'est un revêtement universel de $T_{[0,1[}$ plongé dans $\widetilde{M}_{[0,1[}$. Finalement, pour $s \in [0,1[$, posons $\widetilde{T}_s = \pi^{-1}(T_s) \cap \widetilde{T}_{[0,1[}$ et pour un intervalle $I \subset [0,1[$, $\widetilde{T}_I = \cup_{s\in I} \widetilde{T}_s$.

Faisons quelques remarques sur les choix faits dans ces notations :

Remarque 2.2.11. Pour tout $s \in [0,1[$, $\widetilde{T}_s$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. De plus, $\widetilde{T}_I$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times I$.

Remarque 2.2.12. Le choix de $\widetilde{T}_{[0,1[}$ fixe une injection du groupe fondamental de T dans celui de M, en identifiant $\pi_1(T)$ au stabilisateur de $\widetilde{T}_{[0,1[}$ pour l'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}_{[0,1[}$. Dans le reste du chapitre, nous utiliserons une notation additive pour $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$, afin d'utiliser les notations et outils standard pour un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. L'identification de $\pi_1(T)$ avec un sous-groupe de $\pi_1(M)$ nous amènera à faire un léger abus de notation : nous garderons une notation multiplicative pour $\pi_1(M)$, mais lorsque nous considérerons des éléments de $\pi_1(T)$ nous utiliserons une notation additive.

Notation 2.2.13. Avec l'injection fixée de $\pi_1(T)$ dans $\pi_1(M)$, en restreignant l'holonomie ρ d'une (G, X)-structure nous disposons d'une *holonomie périphérique* $h_\rho : \pi_1(T) \to G$.

Nous allons nous intéresser aux représentations dont l'image de l'holonomie périphérique est monogène. Nous fixons donc une notation pour celles-ci.

Notation 2.2.14. Nous noterons $\mathcal{R}_1(\pi_1(M), G) \subset \mathcal{R}(\pi_1(M), G)$ l'ensemble des représentations ρ de $\pi_1(M)$ à valeurs dans G telles que l'image de h_ρ soit monogène. Lorsque $\rho \in \mathcal{R}_1(\pi_1(M), \mathrm{PU}(2,1))$ et que l'image de h_ρ est engendrée par $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$, nous noterons $\phi_t^\rho = \phi_t^{\mathrm{Log}([U])}$ le flot associé à $[U]$.

Horotubes

Les horotubes sont un des objets clé de la construction de structures CR-sphériques que nous allons donner. Ils nous permettront de comprendre la topologie d'une «pointe» dans le monde CR-sphérique, qui est l'objet à déformer et remplir pour obtenir des chirurgies de Dehn. Nous allons reprendre les définitions données par Schwartz dans [Sch07].

Définition 2.2.15. Soit $[P] \in \mathrm{PU}(2,1)$ un élément parabolique de point fixe $[p] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Un $[P]$-*horotube* est un ouvert H de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\}$, invariant par l'action de $[P]$ et tel que le complémentaire de $H/\langle [P] \rangle$ dans $(\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\})/\langle [P] \rangle$ soit compact.

Pour pouvoir travailler avec des objets plus réguliers, nous demanderons souvent à un horotube d'être *gentil* :

Définition 2.2.16. Un $[P]$-horotube H est dit *gentil* («nice» en anglais) si ∂H est un cylindre lisse invariant par le flot $\phi_t^{\mathrm{Log}([P])}$.

Remarque 2.2.17. Si H est un $[P]$-horotube gentil, alors ∂H est l'orbite par $\phi_t^{\mathrm{Log}([P])}$ d'un cercle plongé dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\}$. On peut voir un exemple dans la figure 2.1.

La remarque suivante nous assure que, quitte à restreindre un horotube, l'hypothèse supplémentaire d'être gentil n'est pas très forte.

Lemme 2.2.18 (2.7 de [Sch07])**.** *Soit H un $[P]$-horotube. Alors il existe un $[P]$-horotube gentil H' tel que $H' \subset H$ et que $(H - H')/\langle [P] \rangle$ soit d'adhérence compacte dans $(\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{p\})/\langle [P] \rangle$.*

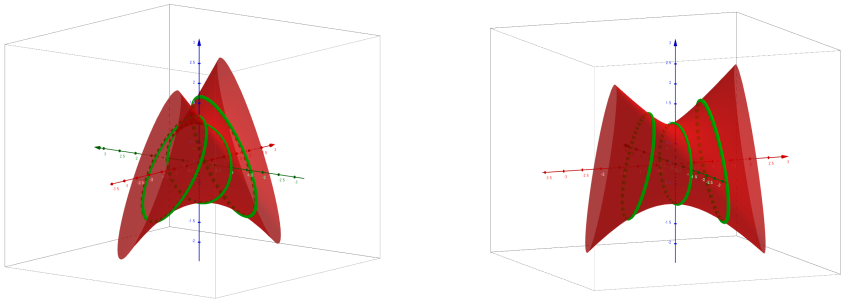


FIGURE 2.1 – Le bord d'un horotube gentil dans le modèle de Siegel. L'horotube se trouve à l'extérieur de la nappe rouge.

Dans toute la suite, nous supposerons que $M_{[0,1[}$ est munie d'une structure CR-sphérique de développante Dev_0 et d'holonomie ρ_0. Nous ferons de plus les deux hypothèses suivantes :

1. L'image de l'holonomie périphérique h_{ρ_0} est unipotente de rang 1 et engendrée par un élément $[U_0] \in \mathrm{PU}(2,1)$.
2. Il existe $s \in [0,1[$ tel que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s,1[})$ est un $[U_0]$-horotube.

Marquage de $\pi_1(T)$

En partant de la structure donnée par Dev_0 et ρ_0, nous allons fixer un marquage de $\pi_1(T)$, qui nous sera utile pour identifier les chirurgies de Dehn obtenues lors des déformations de la structure. Ce marquage est essentiellement le même que celui donné dans le chapitre 8 de [Sch07], et utilise fortement les deux hypothèses.

Notation 2.2.19. Fixons $s' \in [s,1[$ et $x_0 \in \mathrm{Dev}_0(T_{s'})$. On note l le lacet donné par la projection de $t \mapsto \phi_t^{\rho_0}(x_0)$. Comme $h_{\rho_0}(l) = [U_0]$ engendre l'image de h_{ρ_0} et qu'un sous-groupe unipotent de $\mathrm{PU}(2,1)$ n'a pas de torsion, l est un élément primitif de $\pi_1(T)$.

Notation 2.2.20. Puisque h_{ρ_0} est unipotente de rang un et qu'un sous-groupe unipotent de $\mathrm{PU}(2,1)$ n'a pas de torsion, son noyau est engendré par un élément primitif m. Nous ferons le choix d'orientation de m pour que (m,l) soit une base directe de $\pi_1(T)$ (pour l'orientation donnée par la normale entrante dans l'horotube).

Remarque 2.2.21. La définition de m et l ne dépend pas du choix de s' ni de x_0. Cependant, nous avons fait un choix pour les orientations. Celui pour m est explicite, tandis que celui de l est donné par le choix de $[U_0]$ ou $[U_0]^{-1}$ comme générateur de l'image de h_{ρ_0}.

Remarque 2.2.22. Dans [Sch07], Schwartz donne un choix «canonique» pour les orientations de m et l (notés α et β). C'est pratiquement le même choix que celui fait ci-dessus, sauf qu'il donne un choix préféré pour $[U_0]$. Par ailleurs, si on a un autre marquage de

$\pi_1(T)$, par exemple lorsque M est un complémentaire de nœud, passer d'un marquage à l'autre revient à comprendre la développante sur $\widetilde{T}_{[0,1[}$.

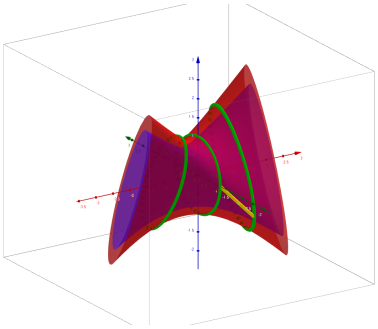


FIGURE 2.2 – La courbe m (en vert) et la courbe l (en jaune) dans l'image de $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{s'})$.

À l'aide du marquage que nous venons de décrire, nous pouvons définir sans ambiguïté les chirurgies de Dehn de M sur le bord T.

Définition 2.2.23. Pour une paire (p, q) d'entiers premiers entre eux, nous noterons $M^{(p,q)}$ la *chirurgie de Dehn de type* (p, q)*, ou de pente* $\frac{p}{q}$*, de* M. La variété $M^{(p,q)}$ est la variété obtenue en recollant un tore plein $D^2 \times S^1$ sur le bord T de M, de sorte à ce que le lacet $pl + qm$ de T devienne homotopiquement trivial dans $D^2 \times S^1$.

Énoncé du théorème de chirurgie

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de chirurgie CR-sphérique. Il dit qu'au voisinage de la structure (Dev_0, ρ_0), sous des conditions de discrétude, les structures CR-sphériques proviennent de structures portées par des chirurgies de Dehn de M.

Théorème 2.2.24. *Soit M une variété compacte de dimension 3 à bords toriques. Soit T un bord torique de M. On suppose qu'il existe une structure CR-sphérique (Dev_0, ρ_0) sur $M_{[0,1[}$ telle que :*

1. *L'holonomie périphérique h_{ρ_0} soit unipotente horizontale de rang 1 et engendrée par un élément $[U_0] \in \mathrm{PU}(2, 1)$.*
2. *Il existe $s \in [0, 1[$ tel que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s,1[})$ soit un $[U_0]$-horotube.*

Alors il existe un ouvert Ω de $\mathcal{R}_1(\pi_1(M), \mathrm{PU}(2, 1))$ tel que, pour tout $\rho \in \Omega$ tel que l'image de h_ρ soit engendrée par un élément $[U] \in \mathrm{PU}(2, 1)$, il existe une structure CR-sphérique sur M d'holonomie ρ. De plus, pour le marquage (l, m) de $\pi_1(T)$ décrit ci-dessus,

1. *Si $[U]$ est loxodromique, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de type $(0, 1)$ de M.*
2. *Si $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de type (p, n) de M.*

3. *Si $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ avec $|p|, |q| > 1$, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur un recollement de M à une variété compacte à bord torique $V(p,q,n)$ le long de leur bord. De plus, $V(p,q,n)$ est le complémentaire d'un nœud torique dans l'espace lenticulaire $L(n,\alpha)$ où $\alpha \equiv p^{-1}q \mod n$.*

Nous allons consacrer toute la suite de cette section à démontrer le théorème 2.2.24, mais avant de commencer la preuve, faisons quelques remarques.

Remarque 2.2.25. Les cas 2 est un cas particulier du cas 3. Nous le séparons car il est plus simple de comprendre l'idée de la preuve et l'identification de $V(p,1,n)$ dans ce cas.

Remarque 2.2.26. Si U est elliptique, en connaissant la trace de U, on connaît les trois valeurs propres de U, mais on ne peut pas déterminer la valeur propre associée au point fixe de U dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Uniquement à l'aide de la trace, on peut déterminer qu'on est dans un des cas 2 ou 3, mais il n'est pas possible de savoir dans lequel.

Remarque 2.2.27. Si $[U]$ est parabolique, le théorème est encore vrai, mais la structure CR-sphérique obtenue s'étend à un épaississement de M, qui est homéomorphe à M. On ne traite pas, non plus, le cas où $[U]$ est elliptique d'angles irrationnels, où il n'y a pas de façon raisonnable de remplir la pointe torique, ni le cas où $[U]$ est elliptique spécial, où les techniques utilisées dans la preuve du théorème 2.2.24 ne permettent pas de conclure.

Réécriture des hypothèses

Tout d'abord, nous allons réécrire la deuxième hypothèse du théorème de sorte a mieux pouvoir la manipuler. Fixons un difféomorphisme $\psi : \mathbb{R}^2 \times [0,1[\to \widetilde{T}_{[0,1[}$, de sorte que :

1. Pour tout $s \in [0,1[$ $\psi(\mathbb{R}^2 \times \{s\}) = \widetilde{T}_s$.
2. ψ induit un difféomorphisme, entre $\mathbb{R} \times S^1 \times [0,1[$ et $\widetilde{T}_{[0,1[}/\ker(h_{\rho_0})$.

Pour alléger les notations, nous allons faire un abus de langage et identifier $\mathbb{R}^2 \times [0,1[$ et $\widetilde{T}_{[0,1[}$, ainsi que $\mathbb{R} \times S^1 \times [0,1[$ et $\widetilde{T}_{[0,1[}/\ker(h_{\rho_0})$. Dans ce cas, la développante Dev_0 induit elle aussi un difféomorphisme entre $\widetilde{T}_{[0,1[}/\ker(h_{\rho_0})$ et $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[0,1[})$, que nous noterons encore Dev_0. Nous traduisons l'hypothèse (2) du théorème par les hypothèses (2') et (3) que nous décrivons ci-dessous :

Hypothèse (2') : Il existe $0 < s_1 < s_2 < 1$ tels que

1. Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, $\mathrm{Dev}_0(\{0\} \times S^1 \times \{s\})$ est un cercle transverse au flot.
2. Pour tout $(t, \zeta, s) \in \mathbb{R} \times S^1 \times [s_1, s_2]$, $\mathrm{Dev}_0(t, \zeta, s) = \phi_t^{\rho_0}(\mathrm{Dev}_0(0, \zeta, s))$.

Remarque 2.2.28. Grâce à la remarque 2.2.18, il est clair que l'hypothèse 2 implique la 2'. En effet, quitte à considérer une isotopie et à augmenter s, on peut supposer que l'horotube $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s,1[})$ est gentil. Il suffit ensuite de se restreindre à un segment $\widetilde{T}_{[s_1,s_2]}$.

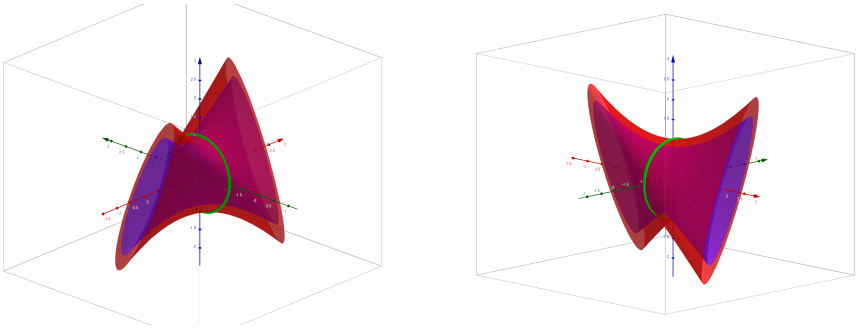


FIGURE 2.3 – Deux vues des nappes bornant un ensemble de la forme $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s_1,s_2]})$

L'hypothèse (2') nous donne, en particulier, que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{s_2})$ sépare $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p]\}$ en deux composantes connexes : un cylindre plein C_{s_2} et l'extérieur de ce cylindre, qui est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. L'hypothèse (3) nous assurera que la structure de M se trouve du bon côté du tube :

Hypothèse (3) : $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{s_1})$ est inclus dans C_{s_2}.

Remarque 2.2.29. L'hypothèse (2) est équivalente aux hypothèses (2') et (3). En effet, l'implication de (2) vers (2') et (3) est claire, et, si on suppose (2') et (3), la structure peut être étendue sans problème de sorte à ce que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s_2,1[})$ soit l'horotube de bord $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{s_2})$.

Démonstration du théorème

Nous allons démontrer le théorème 2.2.24. Plaçons-nous dans les hypothèses données dans la section 2.2.2. Soit ρ une déformation assez proche de ρ_0 dans $\mathcal{R}_1(\pi_1(M), \mathrm{PU}(2,1))$ telle que $h_\rho(m) = \mathrm{Id}$. L'image de h_ρ est alors engendrée par $[U] = \rho(l)$. On supposera que U est régulier.

Soit $\epsilon > 0$. D'après le principe d'Ehresmann-Thurston, si ρ est assez proche de ρ_0, il existe une structure CR-sphérique sur $M_{[0,s_2+\epsilon[}$ d'holonomie ρ. On dispose donc d'une développante $\mathrm{Dev}_\rho : \widetilde{M}_{[0,s_2+\epsilon[} \to \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ proche de Dev_0 pour la topologie $\mathcal{C}^1$. Ainsi, on peut supposer que Dev_ρ réalise encore un difféomorphisme entre le compact $[-\epsilon, 1+\epsilon] \times S^1 \times [s_1, s_2]$ et son image.

Remarque 2.2.30. Nous disposons alors d'un atlas de cartes de $T_{[s_1,s_2]}$ à valeurs dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ en choisissant des relevés de $T_{[s_1,s_2]}$ dans $[-\epsilon, 1+\epsilon] \times S^1 \times [s_1, s_2] \subset \widetilde{T}_{[s_1,s_2]}$. Les changements de cartes sont alors donnés par $[U] = \rho(l)$.

Fixons $s_1 < s_1' < s_2' < s_2$.

Lemme 2.2.31 (Redressement par rapport au flot)**.** *Si ρ est assez proche de ρ_0, quitte à considérer une isotopie de Dev_ρ, on a, pour tout $(t, \zeta, s) \in \mathbb{R} \times S^1 \times [s_1', s_2']$, que $\mathrm{Dev}_\rho(t, \zeta, s) = \phi_t^\rho(\mathrm{Dev}_\rho(0, \zeta, s))$.*

Démonstration. Les flots ϕ_t^ρ et $\phi_t^{\rho_0}$ sont proches pour la topologie $\mathcal{C}^1$ en fonction de ρ_0 et ρ. On déduit que la déformation de ρ_0 à ρ induit une déformation $\mathcal{C}^1$ de $\phi_t^{\rho_0} \circ \mathrm{Dev}_0$ vers $\phi_t^\rho \circ \mathrm{Dev}_\rho$. On se restreint d'abord au compact $[0,1] \times S^1 \times [s_1', s_2']$, qui est inclus dans l'intérieur de $[-\epsilon, 1+\epsilon] \times S^1 \times [s_1, s_2]$.

Puisque

$$\mathrm{Dev}_0([0,1] \times S^1 \times [s_1', s_2']) = \bigcup_{t \in [0,1]} \phi_t^{\rho_0}(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2']),$$

si ρ est assez proche de ρ_0 alors

$$\bigcup_{t \in [0,1]} \phi_t^\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$$

est inclus dans l'intérieur de $\mathrm{Dev}_\rho([0,1] \times S^1 \times [s_1', s_2'])$.

Puisque $[U] \cdot \phi_t^\rho = \phi_{t+1}^\rho$ et $[U] \cdot \mathrm{Dev}_\rho(t, \zeta, s) = \mathrm{Dev}_\rho(t+1, \zeta, s)$, on peut redresser Dev_ρ par une isotopie $[U]$-équivariante de sorte à ce que pour tout $(t, \zeta, s) \in \mathbb{R} \times S^1 \times [s_1', s_2']$ on ait $\mathrm{Dev}_\rho(t, \zeta, s) = \phi_t^\rho(\mathrm{Dev}_\rho(0, \zeta, s))$. □

On suppose désormais que pour tout $(t, \zeta, s) \in \mathbb{R} \times S^1 \times [s_1', s_2']$ on a $\mathrm{Dev}_\rho(t, \zeta, s) = \phi_t^\rho(\mathrm{Dev}_\rho(0, \zeta, s))$.

Lemme 2.2.32. *Soit C un $\mathbb{C}$-cercle invariant par $[U]$. Alors C et l'anneau $\mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$ ne sont pas enlacés.*

Démonstration. L'élément $[U]$ est un élément régulier proche de l'unipotent $[U_0]$ de point fixe $[p_0] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Grâce aux remarques 1.3.8 et 1.3.9, on sait que C sort de tout compact de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} - \{[p_0]\}$ lorsque $[U]$ se rapproche de $[U_0]$. Comme $\mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$ reste dans un même compact fixé lorsqu'on déforme ρ_0 en ρ, on déduit que C et l'anneau $\mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$ ne sont pas enlacés. □

Il ne nous reste maintenant qu'à établir un résultat de chirurgie locale. C'est essentiellement ce que fait Schwartz dans le chapitre 8 de [Sch07].

Grâce au lemme 2.2.31, nous savons que $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{[s_1', s_2' - \epsilon]})$ est l'orbite par ϕ_t^ρ de l'anneau $A = \mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2' - \epsilon])$. Cette orbite sépare $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ (si $[U]$ est elliptique) ou $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ privé de deux points (si $[U]$ est loxodromique), en deux composantes connexes C_1 et C_2, de bords respectifs $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{s_1'})$ et $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{s_2'})$. On dispose alors d'une action propre de $\langle [U] \rangle$ sur C_2, et nous pouvons considérer la variété quotient $N = C_2 / \langle [U] \rangle$. C'est une variété compacte à bord torique, portant une structure CR-sphérique qui coïncide avec celle de $M_{[0, s_2'[}$ sur $T_{]s_2' - \epsilon, s_2'[}$. Le recollement $M_{[0, s_2'[} \cup N / \sim$ porte alors une structure CR-sphérique qui étend la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ de M.

Nous allons montrer que si $[U]$ est loxodromique ou elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$, N est un tore plein et que nous avons une structure CR-sphérique sur une chirurgie de Dehn de

M de pente à déterminer. Si $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, nous montrerons que N est homéomorphe au complémentaire d'un nœud torique dans un certain espace lenticulaire.

Cas 1 : $[U]$ est loxodromique Plaçons-nous dans le modèle de Siegel, et identifions $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Quitte à conjuguer, nous pouvons supposer que

$$G = T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

L'élément $[U]$ a alors deux points fixes : $(0,0)$ et ∞. Notons S la sphère de centre $(0,0)$ et rayon 1 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Cette sphère est un domaine fondamental pour l'action du flot ϕ_t^ρ. L'élément $[U]$ agit proprement sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R} - (0,0)$, et le domaine $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_t^\rho(S)$, de bords S et $[U] \cdot S$ est alors un domaine fondamental pour cette action. L'orbite de A par ϕ_t^ρ intersecte S en un anneau qui sépare S en deux disques D_1 et D_2, de sorte que leurs orbites sous ϕ_t sont les composantes C_1 et C_2 respectivement. La figure 2.4 illustre cette situation.

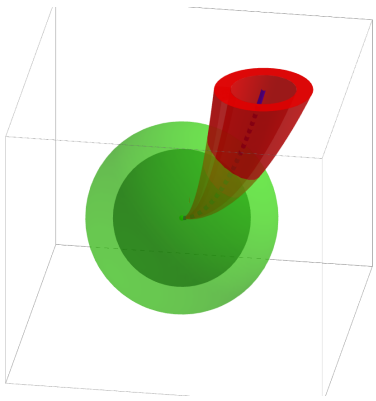


FIGURE 2.4 – L'orbite de A par ϕ_t (en rouge) et les sphères S et $[U] \cdot S$ (en vert).

La variété quotient $N = C_2/\langle [U] \rangle$ est obtenue en identifiant D_2 et $[U] \cdot D_2$ dans $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_t^\rho(D_2)$. Il s'agit donc d'un tore solide. Or, la courbe de $\pi_1(T)$ qui devient triviale dans C_2 est celle homotope au bord de D_2 : il s'agit donc de l. On en déduit que la chirurgie est de type $(1,0)$.

Cas 2 : $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$. Nous allons raisonner de la même façon que dans le cas loxodromique. Grâce au lemme 2.2.32, nous savons que $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{[s_1', s_2'-\epsilon]})$ est l'orbite par ϕ_t de l'anneau $A = \mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$, qui n'est enlacé à aucun des $\mathbb{C}$-cercles invariants de $[U]$.

L'orbite de A par le flot ϕ_t^ρ est alors homéomorphe à $S^1 \times S^1 \times [s_1', s_2']$. Son complémentaire dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ a deux composantes connexes. Notons C_2 la composante qui a

pour bord $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{s_2'})$ Or, d'après la remarque 1.4.18, les trajectoires du flot ne sont pas nouées : les deux composantes connexes sont donc des tores pleins, et $[U]$ agit proprement sur chacune d'entre elles. Or, le quotient d'un tore plein par une action propre est encore un tore plein. La variété quotient $N = C_2/\langle[U]\rangle$ est donc encore un tore plein, est nous sommes en présence d'une structure CR-sphérique sur une chirurgie de Dehn de M. Il ne nous reste plus qu'à l'identifier.

Quitte à conjuguer, nous pouvons supposer que

$$U = e^{\frac{-2i\pi(p+1)}{3n}} \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi p}{n}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dans le modèle de la boule. Dans le modèle de Siegel, en identifiant $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a que $[CUC^{-1}]$ stabilise deux $\mathbb{C}$-cercles : le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre 0 et rayon $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{C} \times \{0\}$ et $\mathcal{C}_2$, l'axe $\{0\} \times \mathbb{R}$. Une orbite du flot tourne une fois autour de $\mathcal{C}_1$ et p fois autour de $\mathcal{C}_2$. On peut voir un exemple pour $p = 4$ dans la figure 2.5.

Notons γ le lacet qui suit le $\mathbb{C}$-cercle $\mathcal{C}_2$ et qui est orienté de sorte à ce que le méridien de m soit homotope à γ dans la composante C_2. Dans ce cas, nl est homotope, aussi dans C_2, à $-p\gamma$. Donc $nl + pm$ est un lacet homotopiquement trivial dans C_2, qui est un revêtement du tore plein N que nous recollons à M. C'est donc aussi un lacet trivial dans N. On en déduit que la chirurgie est de type (n, p).

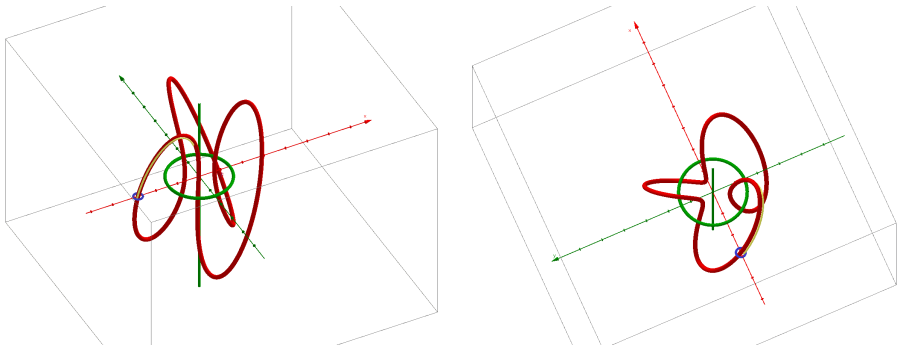


FIGURE 2.5 – L'orbite de A par ϕ_t (en rouge), la longitude l (en jaune) et le méridien m (en bleu).

Cas 3 : $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$. Nous raisonnons de la même façon que dans le cas précédent. Nous savons que $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{[s_1', s_2'-\epsilon]})$ est l'orbite par ϕ_t de l'anneau $A = \mathrm{Dev}_\rho(\{0\} \times S^1 \times [s_1', s_2'])$, qui n'est enlacé à aucun des $\mathbb{C}$-cercles invariants de $[U]$.

L'orbite de A par le flot ϕ_t^ρ est alors homéomorphe à $S^1 \times S^1 \times [s_1', s_2']$. Son complémentaire dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ a deux composantes connexes. Notons encore C_2 la composante de bord $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{s_2'})$ et C_1 celle de bord $\mathrm{Dev}_\rho(\widetilde{T}_{s_1'})$. D'après la remarque 1.4.18, les trajectoires

du flot sont des nœuds toriques de type (p, q) : C_1 est alors le voisinage tubulaire d'une des trajectoires et C_2 est homéomorphe au complémentaire d'un nœud torique de type (p, q). Or $[U]$ agit proprement sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et stabilise C_1 et C_2 ; leurs quotients par l'action de $[U]$ sont donc des variétés.

Remarquons que, dans le modèle de la boule, l'action du groupe engendré par U est la même que celle du groupe engendré par $(z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{2i\pi}{n}} z_1, e^{\frac{2i\pi\alpha}{n}} z_2)$ où $\alpha \equiv p^{-1}q$ mod n. Le quotient $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}/\langle [U] \rangle$ est alors homéomorphe à l'espace lenticulaire $L(n, \alpha)$. De plus, $C_1/\langle [U] \rangle$ est un tore solide noué dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}/\langle [U] \rangle$. La variété quotient $V(p, q, n) = C_2/\langle [U] \rangle$ est donc le complémentaire d'un nœud torique dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}/\langle [U] \rangle \simeq L(n, \alpha)$. La structure CR-sphérique de M s'étend donc au recollement de M et $V(p, q, n)$ le long de leurs bords toriques.

Remarque 2.2.33. À titre de remarque, nous précisons que les arguments de la preuve sont encore valables dans le cas d'une déformation ρ de ρ_0 où l'holonomie périphérique est ellipto-parabolique. Dans ce cas, le bord du $[U_0]$-horotube se déforme en un bord de $[U]$-horotube H, et la structure s'étend vers l'intérieur H. Dans ce cas, on obtient une structure sur M, car la variété recollée est un épaississement du bord torique T.

2.3 Application : le complémentaire du nœud de 8

Nous allons vérifier les hypothèses du théorème de chirurgie 2.2.24 dans le cas de la structure CR-sphérique sur le complémentaire du nœud de huit donnée par Deraux et Falbel dans [DF15]. Nous allons nous appuyer sur les articles [Der14], où Deraux décrit un domaine de Ford pour la structure, ainsi que sur [FGK+16], où l'on décrit les composantes irréductibles de la variété des caractères du complémentaire du nœud de huit dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

Notation 2.3.1. Dans la suite de cette section, nous noterons M le complémentaire du nœud de 8.

2.3.1 La structure de Deraux-Falbel

Commençons par résumer rapidement les résultats de l'article de Deraux et Falbel [DF15]. Dans l'article, on considère comme variété M le complémentaire du nœud de 8. Son groupe fondamental est donné par

$$\pi_1(M) = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_2 = [g_3, g_1^{-1}], g_1 g_2 = g_2 g_3 \rangle.$$

On y construit une structure CR-sphérique, uniformisable et d'holonomie périphérique unipotente sur M. La représentation d'holonomie ρ_0 est donnée par

$$\rho_0(g_1) = [G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_0(g_3) = [G_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 2.3.2. Cette représentation se trouve dans la composante R_2 de la variété des caractères décrite dans [FGK+16]. Pour les notations de la section 5.2 de cet article on a $A = g_3$ et $B = g_1$. Avec ces notations, le couple standard (l_0, m_0) longitude-méridien du complémentaire du nœud vérifie

$$m_0 = g_3 \text{ et } l_0 = g_1^{-1} g_3 g_1 g_3^{-2} g_1 g_3 g_1^{-1}.$$

De plus, on vérifie que $\rho_0(m)^3 = \rho_0(l)$, d'où $\rho_0(3m - l) = \mathrm{Id}$.

Notation 2.3.3. Dans la suite, pour être plus proches des notations de l'article [Der14], nous considérerons le couple (l_1, m_1) obtenu par conjugaison par g_2, de sorte à ce que $m_1 = g_2 g_3 g_2^{-1} = g_1$. Notons aussi $l = m_1$ et $m = 3m_1 - l_1$. Ainsi, m engendre $\ker(\rho_0)$ et $\rho(l)$ engendre $\mathrm{Im}(\rho_0)$: nous avons donc un marquage comme celui de la section 2.2.2.

2.3.2 Vérification des hypothèses du théorème de chirurgie

Rappelons maintenant les hypothèses du théorème de chirurgie 2.2.24 :

1. L'holonomie périphérique h_{ρ_0} est unipotente de rang 1 et engendrée par un élément $[U_0] \in \mathrm{PU}(2,1)$.
2. Il existe $s \in [0,1[$ tel que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T}_{[s,1[})$ soit un $[U_0]$-horotube.

La première hypothèse est vérifiée par la structure de Deraux-Falbel : l'holonomie périphérique est unipotente de rang 1 et engendrée par $[G_1] = \rho_0(l)$.

Pour vérifier la deuxième, nous utiliserons les résultats donnés par Deraux dans [Der14]. Dans cet article, Deraux retrouve la structure de Deraux-Falbel, donnée dans [DF15], en considérant un domaine de Ford F dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour le groupe $\Gamma = \rho_0(\pi_1(M))$ (théorème 5.1) puis en étudiant son bord à l'infini dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ (section 8). Il obtient M comme un quotient du domaine $[G_1]$-invariant $E = \partial_\infty F$, qui est, dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'extérieur d'un cylindre $[G_1]$-invariant C plongé dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ (proposition 8.1). L'ensemble E est alors un $[G_1]$-horotube ; il existe donc $s \in [0,1[$ tel que l'image par la développante de $\widetilde{T}_{[s,1[}$ soit un $[G_1]$-horotube inclus dans E. La deuxième hypothèse est alors vérifiée.

La conclusion du théorème de chirurgie 2.2.24 est donc vraie. En changeant de coordonnées pour avoir le marquage usuel du groupe fondamental du bord du complémentaire du nœud de 8, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.3.4. *Il existe un ouvert Ω de $\mathcal{R}_1(\pi_1(M), \mathrm{PU}(2,1))$ tel que, pour tout $\rho \in \Omega$ tel que l'image de h_ρ soit engendrée par un élément $[U] \in \mathrm{PU}(2,1)$, il existe une structure CR-sphérique sur M d'holonomie ρ. De plus, pour le marquage usuel (l_0, m_0) de $\pi_1(T)$,*

1. *Si* $[U]$ *est loxodromique, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de type* $(-1,3)$ *de* M.
2. *Si* $[U]$ *est elliptique de type* $(\frac{p}{n},\frac{1}{n})$*, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de type* $(-n,p+3n)$ *de* M.
3. *Si* $[U]$ *est elliptique de type* $(\frac{p}{n},\frac{q}{n})$ *avec* $|p|,|q|>1$*, cette structure s'étend en une structure CR-sphérique sur un recollement de* M *à une variété compacte à bord torique* $V(p,q,n)$ *le long de leur bord. De plus,* $V(p,q,n)$ *est le complémentaire d'un nœud torique dans l'espace lenticulaire* $L(n,\alpha)$ *où* $\alpha\equiv p^{-1}q \mod n$.

Remarque 2.3.5. Si $[U]$ est parabolique, alors le théorème est encore vrai, mais la structure CR-sphérique s'étend à un épaississement de M. Ces structures sont les structures données par Deraux dans [Der14].

Remarque 2.3.6. On peut se demander si le théorème de chirurgie HST de Schwartz (Théorème 1.2 de [Sch07]) peut s'appliquer dans ce cas. Pour $\Gamma=\rho_0(\pi_1(M))$, la construction de Deraux et Falbel dans [DF15] nous dit que l'ensemble de discontinuité Ω_Γ est non vide et que le quotient $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ est homéomorphe à M, mais nous n'avons pas plus d'information sur Ω_Γ ni sur l'ensemble limite $\Lambda_\Gamma=\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}-\Omega_\Gamma$. Pour appliquer le théorème de Schwartz, on doit vérifier plusieurs hypothèses non triviales. En particulier, nous ne savons pas montrer que l'ensemble limite Λ_Γ est *poreux*. Une des motivations de ce travail est d'avoir un résultat avec des hypothèses plus simples, même si les conclusions sont plus faibles lorsque les deux théorèmes s'appliquent.

2.3.3 Déformations de la structure

Il nous reste à voir que l'ouvert $\Omega\subset\mathcal{R}_1(\pi_1(M))$ n'est pas réduit à un point pour tirer des conclusions intéressantes. Nous étudierons cet espace avec plus de détail dans le chapitre 3, mais une approche en reprenant les résultats de [FGK+16] suffira pour nous dans cette section. La représentation ρ_0 se trouve dans la composante R_2 de la variété des caractères à valeurs dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ décrite dans [FGK+16] par Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier et Thistlethwaite. Dans la section 5 de cet article, les représentations dans R_2 à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ sont paramétrées, au voisinage de ρ_0, par un paramètre complexe $u=\mathrm{tr}(\rho(m_0))$. Nous noterons $G(u)=\rho(m_0)$ la matrice correspondante.

En posant $v=\overline{u}$ et $\Delta=4u^3+4v^3-u^2v^2-16uv+16$, la paramétrisation est donnée explicitement par :

$$[G_3^{-1}(u)]=\rho(a)=\begin{bmatrix}\frac{v}{2} & 1 & -\frac{(1-i)(-16+8uv-2v^3-4\sqrt{\Delta})}{8u^2-6uv^2+v^4}\\ \frac{1}{8}(1+i)(-2u+v^2) & \frac{1}{4}(1+i)v & 1\\ \frac{1}{16}(8-4uv+v^3-2\sqrt{\Delta}) & \frac{1}{8}(-4u+v^2) & \frac{1}{4}(1-i)v\end{bmatrix}$$

$$[G_1^{-1}(u)] = \rho(b) = \begin{bmatrix} \frac{v}{2} & i & \frac{(1+i)(-16+8uv-2v^3-4\sqrt{\Delta})}{8u^2-6uv^2+v^4} \\ -\frac{1}{8}(1+i)(-2u+v^2) & \frac{1}{4}(1-i)v & i \\ -\frac{1}{16}(8-4uv+v^3-2\sqrt{\Delta}) & -\frac{i}{8}(-4u+v^2) & \frac{1}{4}(1+i)v \end{bmatrix}$$

Rappelons que, pour ce choix de générateurs, le méridien usuel m_0 est donné par $m_0 = a^{-1}$. La forme hermitienne préservée par cette représentation est donnée par la matrice [2]

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(\Delta-16)(\sqrt{\Delta}+|u|^2-4) & 0 & 0 \\ 0 & 16-\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 8(\sqrt{\Delta}+4) \end{pmatrix}.$$

De plus, dans toute la composante, la relation $\rho(l) = \rho(m)^3$ est vérifiée. En projetant sur $\mathrm{PU}(2,1)$, nous pouvons donc appliquer le théorème de chirurgie 2.2.24 sur un ouvert autour de $3 = \mathrm{tr}(\rho_0(m_0))$ dans ce paramétrage.

La figure 2.6, tirée de [FGK+16] montre un ouvert de $\mathbb{C}$ où l'on a des représentations. En notant $\mathrm{tr}(\rho_0(m_0)) = x+iy$, la composante de la variété des caractères contenant ρ_0 admet comme paramétrage les régions ayant pour bord la courbe $\Delta(x,y) = 0$ et qui contiennent les points 3, 3ω et $3\omega^2$, où $\Delta(x,y) = -x^4 - y^4 - 2x^2y^2 - 24xy^2 + 8x^3 - 16x^2 - 16y^2 + 16$.

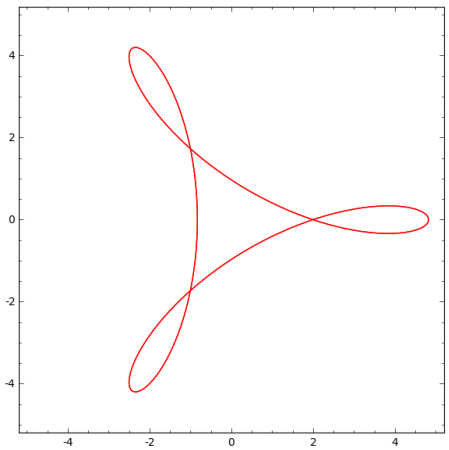


FIGURE 2.6 – Domaine paramétrant une composante de la variété des déformations autour de ρ_0.

Traçons maintenant la courbe $\mathcal{C}$ des traces des éléments spéciaux de $\mathrm{SU}(2,1)$. Elle est donnée par le lieu d'annulation de la fonction $f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$, que nous avons étudiée dans la proposition 1.2.27. Cette courbe sépare les éléments elliptiques réguliers des loxodromiques. Elle a un point de rebroussement en 3 : un voisinage de

2. Nous donnons l'opposée de la matrice H de [FGK+16] pour avoir une signature $(2,1)$ et pas $(1,2)$.

ce point contient donc des points correspondant a des représentations où l'holonomie périphérique est loxodromique et des points où elle est elliptique régulière.

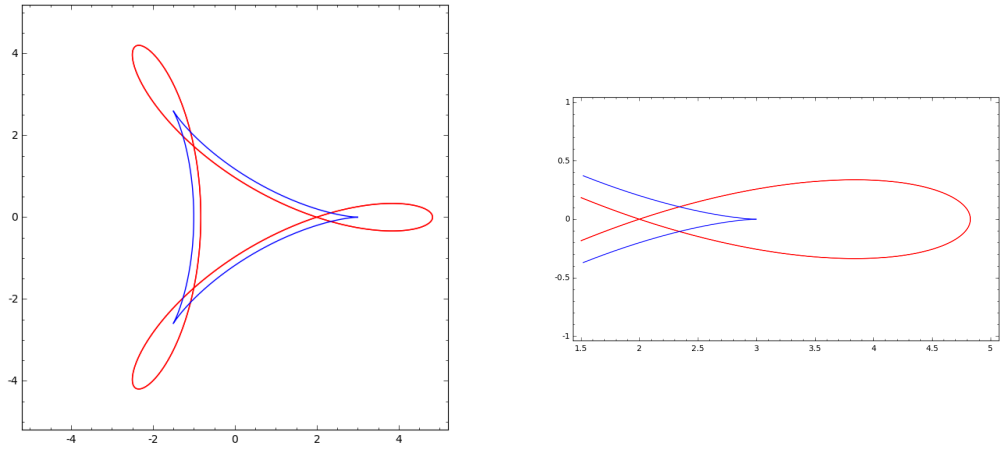


FIGURE 2.7 – Courbe des éléments spéciaux dans une composante de la variété des déformations autour de ρ_0.

Remarque 2.3.7. Les déformations paraboliques de la structure de Deraux-Falbel donnée par Deraux dans [Der14] correspondent aux points de $\mathcal{C}$.

À l'aide de ce paramétrage, on déduit la proposition suivante :

Proposition 2.3.8. *Il existe une infinité de structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de M de type $(-1, 3)$.*

Remarque 2.3.9. Cette chirurgie est le fibré unitaire tangent de l'orbifold hyperbolique $(3, 3, 4)$. C'est un fibré de Seifert de type $S^2(3, 3, 4)$. Pour une preuve, on pourra voir par exemple le chapitre 5 du livre de Cooper, Hodgson et Kerckhoff [CHK00] ou l'article de Deraux [Der15]. Deraux remarque aussi dans [Der14] (section 4) et [Der15] (théorème 4.2), que l'image de ρ_0 donne une représentation fidèle des mots de longueur paire du groupe de triangle $(3, 3, 4)$, engendré par les involutions I_1, I_2, I_3. Cette identification vérifie $G_1 = I_2I_3I_2I_1$, $G_2 = I_1I_2$, $G_3 = I_2I_1I_2I_3$ ainsi que les relation du groupe de triangle : $(G_2)^4 = (I_1I_2)^4 = \mathrm{Id}$, $(G_1G_2)^3 = (I_2I_3)^3 = \mathrm{Id}$ et $(G_2G_1G_2)^3 = (I_1I_3)^3 = \mathrm{Id}$. Par ailleurs, l'image du méridien usuel m_0 est G_3.

Ce groupe est le groupe fondamental d'un fibré de Seifert de type $S^2(3, 3, 4)$. Puisque la relation $l_0 = m_0^3$ est vérifiée dans toute la composante R_2, les images des représentations dans R_2 sont des représentations de ce sous-groupe d'indice deux du groupe de triangle $(3, 3, 4)$. De plus, Parker, Wang et Xie montrent dans [PWX16] qu'une représentation à valeurs dans $\mathrm{PU}(2, 1)$ du groupe de triangle $(3, 3, 4)$ est fidèle et discrète si et seulement si l'image de $I_1I_3I_2I_3$ n'est pas elliptique. Remarquons que $G_1I_1I_3I_2I_3 = (I_2I_3)^3 = \mathrm{Id}$, donc la représentation du groupe de triangle est fidèle et discrète si et seulement si l'holonomie périphérique correspondante n'est pas elliptique. Ils donnent aussi une famille à un

paramètre de telles représentations, correspondant aux paramètres $u \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\delta > 0$ telles que toues les structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de M de type $(-1, 3)$ de paramètre u dans l'intervalle $]3, 3+\delta[$ ont une holonomie fidèle et discrète.

Puisque le paramétrage est donné à l'aide d'une trace, on sait que les cas 2 et 3 ont lieu une infinité de fois, mais nous ne pouvons pas distinguer pour une trace donnée, a priori, s'il s'agit d'une chirurgie de Dehn ou d'un recollement avec une variété $V(p, q, n)$. Cependant, en faisant un calcul explicite avec la paramétrisation de [FGK$^+$16] et en utilisant la continuité des vecteurs propres et des valeurs propres, on montre la proposition suivante :

Proposition 2.3.10. *Il existe $\delta > 0$ tel que, si $p, n \in \mathbb{N}$ sont des entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{n} < \delta$, alors la chirurgie de Dehn sur M de type $(-n, -p+3n)$ admet une structure CR-sphérique.*

Démonstration. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ des entiers premiers entre eux. Soient $\alpha = \frac{-2p-1}{3n}$, $\beta = \frac{2+p}{3n}$, $\gamma = \frac{p-1}{3n}$ et $u = e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}$. Il suffit de montrer que si $\frac{p}{n}$ est assez petit, alors la valeur propre de $\rho(m) = G_3^{-1}(u)$ associée à un vecteur propre négatif est $e^{i\gamma}$, et donc que $G_3(u)$ sera de type $(\frac{p}{n}, \frac{-1}{n})$.

Puisque les vecteurs propres et les valeurs propres sont des fonctions continues de u dans la composante connexe des elliptiques réguliers dans R_2, comme dans la figure 2.7, l'assertion est vraie pour tous (p, n) si et seulement si elle est vraie pour un choix particulier pour (p, n). Pour le choix arbitraire $(p, n) = (3, 23)$ un calcul explicite montre que $G_3(u)$ est de type $(\frac{3}{23}, \frac{-1}{23})$. □

Corollaire 2.3.11. *Il existe une infinité de chirurgies de Dehn sur M qui portent une structure CR-sphérique.*

2.4 Les variétés $V(p, q, n)$

Nous décrivons ici brièvement les variétés $V(p, q, n)$ obtenues dans la preuve du théorème de chirurgie 2.2.24. Nous les décrirons en détail et de façon indépendante du reste du chapitre dans l'annexe A. Fixons donc des entiers p, q, n deux à deux premiers entre eux, $[U] \in \mathrm{PU}(2, 1)$ un élément elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ et ϕ_t le flot associé. Nous identifierons ici $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et S^3. Prenons quelques notations :

Notation 2.4.1.

1. Choisissons $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha p \equiv q \mod n$. Ainsi, le quotient $S^3/\langle [U] \rangle$ est homéomorphe à l'espace lenticulaire $L(n, \alpha)$. On dispose donc d'une application quotient $\pi : S^3 \to L(n, \alpha)$
2. Considérons un point $x_0 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ qui n'est pas sur un des $\mathbb{C}$-cercles invariants par $[U]$. Notons $K_{p,q}$ l'orbite de x_0 par ϕ_t. Il s'agit d'un nœud torique de type (p, q).

3. Le tore invariant par ϕ_t décrit dans la remarque 1.4.17 sépare $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ en deux tores pleins fermés T_1 et T_2, stables par ϕ_t, de sorte que $\partial T_1 = \partial T_2$ est un tore contenant $K_{p,q}$.

Rappelons que $V(p,q,n)$ est un quotient cyclique d'ordre n du complémentaire dans S^3 d'un voisinage tubulaire $K(p,q)$.

Remarque 2.4.2. La variété $V(p,q,n)$ est le complémentaire d'un nœud torique dans $L(n,\alpha)$. En effet, c'est le complémentaire d'une orbite de $\pi \circ \phi_t$ dans $S^3/\langle [U] \rangle$.

De plus, on a la proposition suivante, qui nous donne le type d'homotopie de $V(p,q,n)$:

Proposition 2.4.3. *$V(p,q,n)$ est homotopiquement équivalent à $S^3 - K_{p,q}$.*

Démonstration. Écrivons $S^3 = T_1 \cup T_2$. On sait que $V(p,q,n)$ est homotopiquement équivalent à $(S^3 - K_{p,q})/\langle [U] \rangle$, que nous pouvons écrire $(T_1/\langle [U] \rangle \cup T_2/\langle [U] \rangle) - \pi(K_{p,q})$.

Notons $T_1' = T_1/\langle [U] \rangle - \pi(K_{p,q})$ et $T_2' = T_2/\langle [U] \rangle - \pi(K_{p,q})$. Ainsi, $V(p,q,n)$ est homotopiquement équivalent à $T_1' \cup T_2'$, qui se rétractent sur des cercles, et l'intersection $T_1' \cap T_2'$ est un anneau qui se rétracte sur une courbe parallèle à $\pi(K_{p,q})$. Or, au revêtement $T_1 \cup T_2 - K_{p,q}$, une courbe parallèle à $K_{p,q}$ dans $\partial T_1 = \partial T_2$ est homologue à p fois le cœur de T_1 dans T_1 et à q fois le cœur de T_2 dans T_2. Comme le revêtement est d'ordre n sur les tores et sur la courbe, cette relation est encore vraie au quotient. □

Corollaire 2.4.4. *Le groupe fondamental $\pi_1(V(p,q,n))$ admet la présentation $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$.*

Le résultat suivant, que nous énonçons simplement ici, sera démontré dans l'annexe A.

Proposition 2.4.5. *La variété $V(p,q,n)$ est homéomorphe à $S^3 - K_{p,q}$ si et seulement si $n \equiv \pm 1 \mod pq$.*

Chapitre 3

Variétés de caractères pour les formes réelles

3.1 Introduction

Les variétés de caractères de groupes de type fini sont des objets amplement étudiés et utilisés, que ce soit du point de vue de la géométrie algébrique ou de celui des structures géométriques et de la topologie. À l'aide de la théorie géométrique des invariants (GIT pour ses initiales en anglais) on associe à un groupe de type fini Γ et à un groupe algébrique complexe réductif G, une variété algébrique $\mathcal{X}(\Gamma)$. Elle tient compte des représentations de Γ à valeurs dans G à conjugaison par un élément de G près. Les articles de Sikora [Sik12] et Heusener [Heu16] reviennent en détail sur la construction.

Lorsque Γ a un sens géométrique, comme lorsqu'il s'agit du groupe fondamental d'une variété, la variété des caractères reflète des propriétés géométriques. Pour les variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on peut citer par exemple la construction du A-polynôme pour les complémentaires de nœuds, comme détaillé dans l'article de Cooper et Long [CL98], ou les considérations liées au volume et nombre de pointes d'une variété hyperbolique, ainsi qu'aux points idéaux de variétés de caractères traités par Morgan et Shalen dant [MS84], Culler et Shalen dans [CS83] et le livre de Shalen [Sha02]. D'autre part, les variétés de caractères des groupes de surfaces compactes pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont munies de la structure symplectique d'Atiyah-Bott-Goldman (voir par exemple l'article de Goldman [Gol04a]).

La construction de la variété des caractères, lorsque G est un groupe réductif complexe, fait intervenir un quotient algébrique $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)//G$ où l'action de G est donnée par conjugaison. L'existence de ce quotient comme variété algébrique est assurée par la théorie géométrique des invariants (GIT) (comme détaillé par exemple dans l'article de Sikora [Sik12]), et il n'est pas bien défini pour un groupe algébrique en général, ou si on considère un groupe sur un corps qui n'est pas algébriquement clos. Par ailleurs, pour la forme compacte $\mathrm{SU}(n)$, le quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n)$ pris au sens des espaces topolo-

giques, est bien défini et séparé. Il a été étudié par exemple par Florentino et Lawton dans [FL09]. Cet espace, qui est un ensemble semi-algébrique, comme démontré dans l'article de Procesi et Schwartz [PS85] , se plonge dans la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nous donnerons une preuve de ce dernier fait dans la section 3.3.2. Des quotients similaires pour d'autres groupes ont été étudiés par Parreau dans [Par11], où elle étudie des représentations complètement réductibles, et dans [Par12], où elle compactifie l'espace des classes de conjugaison de représentations semi-simples à valeurs dans des groupes de Lie connexes semi-simples et de centre fini.

Il est alors naturel de s'intéresser à une construction d'un objet semblable à une variété de caractères dans des cas où G ne vérifie pas les hypothèses, par exemple lorsqu'il s'agit d'une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Pour les formes réelles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, Goldman traite, dans son article [Gol88], les points réels de la variété des caractères du groupe libre à deux générateurs F_2 et montre qu'ils correspondent à des représentations à valeurs soit dans $\mathrm{SU}(2)$, soit dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, qui sont les formes réelles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. En s'inspirant de cette dernière approche, nous nous concentrerons sur les variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et nous essaierons d'identifier les points qui proviennent d'une représentation à valeurs dans une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Pour un groupe de type fini Γ, nous introduirons deux involutions anti-holomorphes Φ_1 et Φ_2 de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ de Γ induites respectivement par les involutions $A \mapsto \overline{A}$ et $A \mapsto {}^t\overline{A}^{-1}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit x un point de la variété de caractères de Γ pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ correspondant à une représentation irréductible ρ de Γ. Si x est fixe par Φ_1, alors ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$. Si x est fixe par Φ_2, alors ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans un groupe unitaire $\mathrm{SU}(p,q)$ avec $p+q=n$.*

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous définirons les variétés des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ en donnant quelques généralités et des exemples que nous reprendrons par la suite. Dans la troisième section, après avoir rappelé la définition des formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, nous proposons une définition de «variétés de caractères pour une forme réelle» comme sous-ensemble de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nous montrerons le théorème 3.1.1 en combinant les propositions 3.3.13 et 3.3.15, afin de les identifier parmi les points fixes d'involutions de la variété des caractères usuelle. On traite finalement, dans la section 4, un exemple très détaillé : les variétés de caractères du produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3)$. Elles sont particulièrement intéressantes d'un point de vue géométrique car on y retrouve des représentations d'holonomie de structures CR-sphériques : l'uniformisation complémentaire du nœud de huit donnée par Deraux et Falbel dans [DF15] et celle du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead donnée dans [PW15]. La variété de caractères du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead pour $\mathrm{SU}(2,1)$ nous servira d'espace de déformation pour des structures CR-sphériques dans le chapitre 4.

3.2 Variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$

Soit Γ un groupe de type fini et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons nous intéresser aux représentations de Γ, à conjugaison près, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et dans ses formes réelles. Nous nous attarderons sur le cas qui concerne les structures CR-sphériques, à savoir $n = 3$ et la forme réelle $\mathrm{SU}(2,1)$. Pour étudier ces représentations, le bon objet à considérer est la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, que nous définissons dans la suite.

3.2.1 Définition des variétés de caractères

Nous allons donner une définition de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et quelques propriétés qui nous seront utiles. Les variétés de caractères de groupes de type fini ont été beaucoup étudiées, par exemple dans le cas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par Culler et Shalen dans [CS83]. On pourra retrouver les résultats généraux que nous énoncerons par exemple dans l'article de Sikora [Sik12] ou dans les premières parties de l'article de Heusener [Heu16].

Définition 3.2.1. On appelle *variété des représentations de* Γ *pour* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$.

Remarque 3.2.2. L'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ a une structure de variété algébrique, pas nécessairement irréductible. En effet, si $s_1, \dots, s_k$ est un système de générateurs de Γ, un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ correspond à la donnée de $(S_1, \dots, S_k) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^k \simeq \mathbb{C}^{kn^2}$ vérifiant les équations $\det(S_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq k$ et, pour chaque relation du groupe, les n^2 équations en les coefficients associées à une égalité de la forme $S_{i_1}^{\alpha_1} \cdots S_{i_l}^{\alpha_l} = \mathrm{Id}$. Puisque toutes ces équations sont polynomiales, on définit bien une variété algébrique, peut-être avec plusieurs composantes irréductibles. Finalement, si on change de système de générateurs, on obtient un isomorphisme de variétés algébriques.

Définition 3.2.3. Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$. La variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est le quotient algébrique $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))//\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ par cette action. On notera cette variété $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$.

Remarque 3.2.4. L'existence de ce quotient relève de la théorie géométrique des invariants, et elle est due au fait que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est réductif. La construction est faite de sorte que, dans la variété algébrique $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$, l'anneau des fonctions est exactement l'anneau des fonctions de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ invariantes par conjugaison.

De plus, l'application quotient est fonctorielle. En particulier, si on dispose d'une application surjective $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$, on a une injection $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\tilde{\Gamma}, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ qui induit à son tour une injection $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\tilde{\Gamma})$. On pourra se référer à l'article de Heusener [Heu16] pour une explication plus détaillée.

Le résultat suivant, dû à Procesi (Théorème 1.3 dans [Pro76]), nous dit qu'il suffit de comprendre les fonctions trace pour connaître l'anneau des fonctions invariantes par conjugaison.

Théorème 3.2.5. *L'anneau des fonctions de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *invariantes par conjugaison est engendré par les fonctions trace* $\tau_\gamma : \rho \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma))$*, où* $\gamma \in \Gamma$*.*

De façon plus précise, Procesi montre encore (Théorème 3.3 de [Pro76]) que cet anneau de fonctions est engendré par un nombre fini de fonctions trace. On peut traduire ce résultat en termes de variétés de caractères de la façon suivante :

Théorème 3.2.6. *Il existe un nombre fini d'éléments* $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ *de* Γ *tels que* $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$ *est isomorphe, en tant que variété algébrique, à l'image de l'application*

$$(\tau_{\gamma_1}, \ldots, \tau_{\gamma_k}) : \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}^k.$$

Les variétés des caractères ont un lien étroit avec les caractères des représentations. Rappelons rapidement leur définition :

Définition 3.2.7. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$. On appelle *caractère de* ρ la fonction $\chi_\rho : \Gamma \to \mathbb{C}$ donnée par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$.

Remarque 3.2.8. On dispose d'une application $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \to \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$. Deux représentations $\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ ont même image par cette projection si et seulement si $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. Ceci justifie le nom «variété des caractères» pour $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$. Nous ferons parfois un abus de langage en identifiant l'image d'une représentation ρ dans une variété de caractères au caractère χ_ρ.

Finalement nous donnons l'énoncé du résultat suivant, qu'on peut trouver dans le livre de Lubotzki et Magid [LM85]. Il concerne les représentations semi-simples, c'est-à-dire celles qui s'écrivent comme somme directe de représentations irréductibles. Nous l'utiliserons tout particulièrement dans le cas où les représentations sont irréductibles.

Théorème 3.2.9. *(Théorème 1.28 de [LM85]) Soient* $\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ *des représentations semi-simples. Alors* $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ *si et seulement si* ρ *et* ρ' *sont conjuguées.*

3.2.2 Quelques variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$

Nous considérons ici deux variétés de caractères pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, sur lesquelles on s'attardera ultérieurement : la variété des caractères du groupe libre à deux générateurs F_2 et celle du groupe fondamental du complémentaire du nœud de 8. Nous verrons aussi un résultat décrivant la variété des caractères de F_2 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Ces variétés nous permettront de comprendre certaines représentations des groupes fondamentaux du complémentaire du nœud de huit et du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et liées à des structures CR-sphériques.

Le groupe libre à deux générateurs

On notera ici s et t deux générateurs du groupe libre à deux générateurs F_2, de sorte que $F_2 = \langle s, t\rangle$. Nous allons utiliser les variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(F_2)$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2)$.

Considérons d'abord le théorème suivant, qui décrit la variété des caractères du groupe libre à deux générateurs pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On peut trouver une preuve détaillée et élémentaire dans l'article de Goldman [Gol04b].

Théorème 3.2.10 (Fricke-Klein-Vogt)**.** *La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(F_2)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^3$, qui est l'image de $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ par les applications trace des éléments s, t et st.*

Remarque 3.2.11. Grâce au théorème ci-dessus, on sait qu'il est possible d'exprimer la trace de l'image de st^{-1} en fonction des traces des images de s, t et st pour toute représentation $\rho : F_2 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. En notant S et T les images de s et t respectivement, les traces des images des quatre éléments sont reliées par *l'équation des traces* :

$$\mathrm{tr}(S)\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(ST) + \mathrm{tr}(ST^{-1})$$

D'autre part, dans son article [Law07], Lawton décrit la variété des caractères du groupe libre à deux générateurs F_2 pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Il obtient le résultat suivant :

Théorème 3.2.12. *La variété algébrique $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2)$ est isomorphe à la sous-variété algébrique V de $\mathbb{C}^9$, image de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ par les applications trace des éléments s, t, st, st^{-1}, de leurs inverses s^{-1}, t^{-1}, $t^{-1}s^{-1}, ts^{-1}$, et du commutateur $[s, t]$. De plus, il existe des polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_8]$ tels que $(x_1, \ldots, x_9) \in V$ si et seulement si $x_9^2 - Q(x_1, \ldots, x_8)x_9 + P(x_1, \ldots x_8) = 0$.*

Remarque 3.2.13. Les polynômes P et Q sont explicites : on peut les trouver dans l'article de Lawton [Law07] ou dans l'article de survol de Will [Wil15]. En notant $\Delta = Q^2 - 4P$, la variété V est un revêtement double de $\mathbb{C}^8$ ramifié au-dessus de la ligne de niveau $\Delta = 0$. De plus, les deux racines de $X_9^2 - Q(x_1, \ldots, x_8)X_9 + P(x_1, \ldots x_8)$, en tant que polynôme en X_9, sont donnés par les traces des commutateurs $[s, t]$ et $[t, s] = [s, t]^{-1}$.

Le complémentaire du nœud de 8

Nous présentons ici, succinctement, les résultats sur la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ du groupe fondamental du complémentaire du nœud de 8. Il s'agit d'une des très rares variétés des caractères pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ de groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 qui ont été étudiées exhaustivement. Nous reviendrons par la suite sur cette variété, dans la sous-section 3.4.4. Ces résultats on été obtenus indépendamment d'une part par Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouiller et Thistlethwaite dans [FGK+16], et d'autre part par Heusener, Muñoz et Porti dans [HMP15]. En notant Γ_8 le groupe fondamental

du complémentaire du nœud de 8, ils décrivent la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\Gamma_8)$. Le théorème 1.2 de [HMP15] peut être énoncé de la façon suivante :

Théorème 3.2.14. *La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\Gamma_8)$ a cinq composantes : X_{TR}, X_{PR}, R_1, R_2, R_3. De plus :*

1. *La composante X_{TR} contient uniquement les caractères de représentations totalement réductibles.*
2. *La composante X_{PR} contient uniquement des caractères de représentations réductibles.*
3. *Les composantes R_1, R_2, R_3 correspondent aux représentations irréductibles.*

Remarque 3.2.15. On reprend ici la notation R_1, R_2, R_3 donnée dans [FGK+16]. Ces composantes sont notées respectivement V_0, V_1 et V_2 dans [HMP15].

Remarque 3.2.16.
— La composante R_1 contient la classe de la représentation dite géométrique, obtenue à partir de la représentation d'holonomie $\Gamma_8 \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de la structure hyperbolique complète de M_8 en composant par la représentation irréductible $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.
— La composante R_3 s'obtient à partir de R_2 par pré-composition par un automorphisme extérieur de Γ_8. Ces composantes contiennent les caractères des représentations ρ_2 et ρ_3 à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ données par Falbel dans [Fal08]. Rappelons que ρ_2 est la représentation d'holonomie de la structure de Deraux-Falbel sur M_8 donnée dans [DF15], qui est d'holonomie périphérique unipotente.

En plus de déterminer les composantes irréductibles R_1, R_2 et R_3, Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier et Thistlethwaite paramètrent, dans la section 5 de leur article [FGK+16], des représentations explicites correspondant aux points de la variété des caractères

3.3 Variété des caractères pour une forme réelle

Nous allons nous intéresser aux représentations d'un groupe de type fini Γ à valeurs dans certaines formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ à conjugaison près, et tout particulièrement pour les formes réelles $\mathrm{SU}(3)$ et $\mathrm{SU}(2,1)$ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Pour le faire, nous allons considérer la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et nous essaierons de repérer les caractères provenant de représentations à valeurs dans des formes réelles. Lorsque $n = 2$ cette question a été traitée par Morgan et Shalen dans [MS84] et par Goldman dans son article [Gol88].

3.3.1 Formes réelles et définition

Commençons par rappeler la définition des formes réelles et par fixer des notations. On peut retrouver les résultats de classification présentés ici dans le livre de Helgason [Hel08].

La définition suivante, que nous utiliserons particulièrement dans le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, est celle de forme réelle :

Définition 3.3.1. Soit $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe. Une *forme réelle de* $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie réel $G_{\mathbb{R}}$ tel que $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}$.

On peut classifier les formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Elles sont dans trois familles : les groupes réels $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, les groupes unitaires $\mathrm{SU}(p,q)$ et les groupes quaternioniques $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$. Revenons sur la définitions des deux dernières familles.

Définition 3.3.2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = p + q$. Notons $I_{p,q}$ la matrice par blocs :

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

On définit le groupe $\mathrm{SU}(p,q)$ de la façon suivante :

$$\mathrm{SU}(p,q) = \{M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M} I_{p,q} M = I_{p,q}\}.$$

Il s'agit d'un groupe de Lie réel, qui est une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Définition 3.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons J_{2n} la matrice par blocs :

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

On définit le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$, noté encore $\mathrm{SU}^*(n)$ de la façon suivante :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) = \{M \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^{-1} J_{2n} M = J_{2n}\}.$$

Il s'agit d'un groupe de Lie réel, qui est une forme réelle de $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$.

Pour étudier les représentations à valeurs dans des formes réelles, nous considérerons la définition suivante de «variété de caractères pour une forme réelle» :

Définition 3.3.4. Soit G une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Soit Γ un groupe de type fini. On appellera *variété des caractères de* Γ *pour* G l'image de l'application $\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$. Ainsi,

$$\mathcal{X}_G(\Gamma) = \{\chi \in \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})} \mid \exists \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G), \chi = \chi_\rho\}.$$

Remarque 3.3.5. Cette définition donne un sous-ensemble d'une variété algébrique complexe, mais qui n'est pas a priori une variété algébrique réelle ni complexe : elle donne un ensemble qui est image d'une variété algébrique réelle par une application polynomiale, et donc un ensemble semi-algébrique. La définition peut sembler étrange si on la compare à

celle de la variété des caractères pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Ceci est dû au fait que les formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont des groupes algébriques réels et non pas complexes ; la construction algébrique de la variété des caractères ne s'adapte pas bien au cas où le corps n'est pas algébriquement clos. Cependant, lorsqu'on considère la forme réelle compacte G_c, il est possible de définir une variété des caractères pour G_c en considérant un quotient topologique. Nous montrerons, dans la prochaine sous-section, que ce quotient topologique est homéomorphe à la variété des caractères pour $\mathrm{SU}(n)$ comme définie ci-dessus.

3.3.2 La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$ comme quotient topologique

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer que le quotient topologique $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n)$, où $\mathrm{SU}(n)$ agit par conjugaison, est homéomorphe à la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$. Commençons par remarquer qu'une application naturelle entre ces deux ensembles est bien définie. En effet, puisque deux représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(n)$ qui sont conjuguées dans $\mathrm{SU}(n)$ sont aussi conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, l'application naturelle $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n)) \to \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$ se factorise par le quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n)$. On se propose de montrer que cette application est injective, et qu'il s'agit en fait d'un homéomorphisme entre le quotient topologique $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n)$ et la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$.

Proposition 3.3.6. *L'application* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n) \to \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. Par définition, on sait que l'application $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n) \to \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$ est continue et surjective. Puisqu'une bijection continue entre un compact et un espace séparé est un homéomorphisme, il suffit de montrer que l'application est injective. On veut donc montrer que si $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))$ sont des représentations telles que $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$, alors ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans $\mathrm{SU}(n)$. C'est l'objet du lemme 3.3.8, que nous montrons ci-dessous. □

Afin de terminer la preuve de la proposition 3.3.6, nous allons donc montrer le lemme suivant, qui semble standard malgré le manque de références.

Lemme 3.3.7. *Soient* $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))$. *Si elles sont conjuguées dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, *alors elles sont conjuguées dans* $\mathrm{SU}(n)$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas des représentations irréductibles, pour traiter ensuite le cas général.

Premier cas : Les représentations ρ_1 et ρ_2 sont irréductibles. Soit $G \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho_2 = G\rho_1 G^{-1}$. Soit J la forme hermitienne préservée par les images de ρ_1 et ρ_2. On sait alors que l'image de ρ_1 préserve aussi la forme ${}^tGJG$. Or ρ_1 agit de façon irréductible : son image préserve alors une unique forme hermitienne à multiplication par un scalaire près. On en déduit que $J = \lambda {}^tGJG$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme J est définie positive, on a $\lambda > 0$ puis, quitte à multiplier G par $\sqrt{\lambda}$, on a $J = {}^tGJG$, i.e. que $G \in \mathrm{SU}(n)$.

Cas général. Rappelons d'abord que toute représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))$ est semi-simple, et que ses sous-espaces stables sont en somme orthogonale.

Soit $G \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho_2 = G\rho_1 G^{-1}$. Puisque ρ_1 est à valeurs dans $\mathrm{SU}(n)$, on sait qu'elle est semi-simple. Elle s'écrit alors comme somme de représentations irréductibles $\rho_1 = \rho_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \rho_1^{(m)}$ sur des sous-espaces stables $E_1, \ldots, E_m$ de $\mathbb{C}^n$, de sorte que l'image de ρ_i agit de façon irréductible sur E_i et que les E_i sont en somme directe orthogonale. Il en est de même pour ρ_2, qui admet comme sous-espaces stables $GE_1, \ldots, GE_m$. La somme directe $GE_1 \oplus \cdots \oplus GE_m$ est donc orthogonale. Il existe alors $U_0 \in \mathrm{SU}(n)$ tel que, pour tout $i \in [|1, m|]$ on ait $U_0 GE_i = E_i$. Quitte à conjuguer ρ_2 par U_0, on peut alors supposer que pour tout $i \in [|1, m|]$ on a $GE_i = E_i$. L'endomorphisme G s'écrit alors $G_1 \oplus \cdots \oplus G_m$, agissant sur $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$. Pour chaque $i \in [|1, m|]$, puisque $\rho_1^{(i)}$ et $G_i \rho_1^{(i)} G_i^{-1}$ sont unitaires et agissent de façon irréductible sur E_i, elles sont conjuguées dans $SU(E_i)$ d'après le premier cas. On peut donc remplacer G_i par $G_i' \in \mathrm{SU}(E_i)$. En posant $G' = G_1' \oplus \cdots \oplus G_m'$, on a $G' \in \mathrm{SU}(n)$ et $\rho_2 = G'\rho_1 G'^{-1}$. □

À l'aide du lemme 3.3.7, nous allons montrer la proposition suivante, qui conclut la preuve de la proposition 3.3.6, et assure que la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(n)}(\Gamma)$ est homéomorphe au quotient topologique $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))/\mathrm{SU}(n)$.

Lemme 3.3.8. *Soient $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}(n))$ telles que $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. Alors ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans $\mathrm{SU}(n)$.*

Démonstration. Comme elles sont à valeurs dans $\mathrm{SU}(n)$, on sait que ρ_1 et ρ_2 sont semi-simples. D'après le théorème 3.2.9, comme $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$ et que ρ_1 et ρ_2 sont semi-simples, on sait que ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. On en déduit, grâce au lemme 3.3.7, que ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées dans $\mathrm{SU}(n)$. □

3.3.3 Involutions anti-holomorphes et représentations irréductibles

Dans cette section, nous allons situer les variétés de caractères pour les formes réelles de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ au sein de la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$. Avant de nous restreindre aux représentations irréductibles, considérons la proposition suivante, qui est plutôt de l'ordre de la remarque, et qui nous assure que deux variétés de caractères à valeurs dans des formes réelles unitaires et différentes s'intersectent uniquement en des points correspondant à des représentations réductibles.

Proposition 3.3.9. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $p, p', q, q' \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = p' + q' = n$ et $p \neq p', q'$. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ telle que $\chi_\rho \in \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(p,q)} \cap \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(p',q')}$. Alors ρ est une représentation réductible.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que ρ est irréductible. Il s'agit donc, à conjugaison près, de la seule représentation de caractère χ_ρ. Comme $\chi_\rho \in \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(p,q)}$, on peut supposer

que ρ est à valeurs dans $\mathrm{SU}(p,q)$. Donc, pour tout $g \in \Gamma$, on a ${}^t\overline{\rho(g)}J_{p,q}\rho(g) = J_{p,q}$. D'autre part, ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(p',q')$; il existe alors une matrice $J'_{p',q'}$, conjuguée à $J_{p',q'}$, telle que, pour tout $g \in \Gamma$, on ait ${}^t\overline{\rho(g)}J'_{p',q'}\rho(g) = J'_{p',q'}$. On en déduit que, pour tout $g \in \Gamma$,

$$J'_{p',q'}\rho(g)(J'_{p',q'})^{-1} = {}^t\overline{\rho(g)}^{-1} = J_{p,q}\rho(g)(J_{p,q})^{-1}.$$

La matrice $J'_{p',q'}(J_{p,q})^{-1}$ commute donc à toute l'image de Γ. Comme ρ est irréductible, il s'agit d'une homothétie. On en déduit que $J_{p,q}$ a soit la même signature que $J_{p',q'}$, soit la signature opposée, ce qui est absurde.

□

Désormais, nous allons nous restreindre aux représentations irréductibles et nous allons considérer deux involutions anti-holomorphes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, qui induisent des involutions anti-holomorphes dans les variétés de caractères.

Notation 3.3.10. Nous noterons dans cette section ϕ_1 et ϕ_2 deux automorphismes anti-holomorphes du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, donnés par $\phi_1(A) = \overline{A}$ et $\phi_2(A) = \overline{{}^tA^{-1}}$. Ces deux involutions induisent des involutions anti-holomorphes Φ_1 et Φ_2 de la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$, de sorte que, pour une représentation ρ, on a $\Phi_1(\rho) = \phi_1 \circ \rho$ et $\Phi_2(\rho) = \phi_2 \circ \rho$.

Notation 3.3.11. Les involutions Φ_1 et Φ_2 induisent à leur tour des involutions anti-holomorphes de la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})}(\Gamma)$, que nous noterons encore Φ_1 et Φ_2. Nous noterons $\mathrm{Fix}(\Phi_1)$ et $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ les points de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})}(\Gamma)$ fixes par Φ_1 et Φ_2 respectivement.

La remarque suivante assure que les variétés des caractères pour des formes réelles sont contenues dans les points fixes de Φ_1 et Φ_2 dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\Gamma)$:

Remarque 3.3.12. Si $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ est conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, alors $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_1)$. De plus, si elle est à valeurs dans $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$, alors $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_1)$, puisqu'une matrice $A \in \mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$ est conjuguée à $\overline{A}$. D'autre part, si ρ est conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(p,q)$, alors $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. En effet, si A est une matrice unitaire, alors elle est conjuguée à $\overline{{}^tA^{-1}}$.

Ainsi, $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}(\Gamma) \subset \mathrm{Fix}(\Phi_1)$, $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})}(\Gamma) \subset \mathrm{Fix}(\Phi_1)$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(p,q)}(\Gamma) \subset \mathrm{Fix}(\Phi_2)$.

Nous travaillerons désormais dans la direction du sens réciproque. Nous allons démontrer qu'une représentation irréductible de caractère inclus dans $\mathrm{Fix}(\Phi_1)$ ou $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ est conjuguée à une représentation à valeurs dans une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Commençons par le cas de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, qui correspond aux groupes unitaires. Le résultat est donné par la proposition suivante :

Proposition 3.3.13. *Soit* $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ *une représentation irréductible telle que* $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. *Alors il existe* $p, q \in \mathbb{N}$ *avec* $n = p + q$ *tels que* ρ *soit conjuguée à une représentation à valeurs dans* $\mathrm{SU}(p, q)$.

Démonstration. On sait que $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$, donc les représentations ρ et $\Phi_2(\rho)$ ont le même caractère. Comme ρ est irréductible, ρ et $\Phi_2(\rho)$ sont conjuguées. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, on ait $P\rho(g)P^{-1} = \overline{{}^t\rho(g)^{-1}}$. En passant à l'inverse, en conjuguant et en transposant, on obtient, pour tout $g \in \Gamma$,

$$\overline{{}^tP^{-1}{}^t\rho(g)^{-1}{}^tP} = \rho(g).$$

En remplaçant $\overline{{}^t\rho(g)^{-1}}$ dans l'expression, on déduit que

$$(P^{-1}\overline{{}^tP})^{-1}\rho(g)(P^{-1}\overline{{}^tP}) = \rho(g).$$

La matrice $P^{-1}\overline{{}^tP}$ commute donc à toute l'image de ρ. Or ρ est irréductible, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P^{-1}\overline{{}^tP} = \lambda\mathrm{Id}$. En considérant le déterminant, on sait que $|\lambda| = 1$. Quitte à multiplier P par une racine carrée de λ, on peut supposer que $\lambda = 1$. On a alors $P = \overline{{}^tP}$, ce qui veut dire que P est une matrice hermitienne. On dispose donc d'une matrice hermitienne P telle que, pour tout $g \in \Gamma$, $\overline{{}^t\rho(g)}P\rho(g) = P$. La représentation ρ est donc à valeurs dans le groupe unitaire de P. Si P est de signature (p, q), la représentation ρ est alors conjuguée à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(p, q)$. □

Remarque 3.3.14.
1. Lorsque $n = 3$, on a comme seules alternatives $\mathrm{SU}(3)$ et $\mathrm{SU}(2, 1)$.
2. Lorsque $n = 2$, les involutions Φ_1 et Φ_2 sont égales : on retrouve ici le résultat montré par Morgan et Shalen dans [MS84] (proposition III.1.1) ou par Goldman dans [Gol88] (théorème 4.3), à savoir qu'une représentation irréductible à caractère réel est conjuguée soit à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$, soit à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(1, 1)$ (sous les traits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pour Morgan et Shalen et de $\mathrm{SO}(2, 1)$ pour Goldman).

Regardons maintenant le cas de $\mathrm{Fix}(\Phi_1)$, qui correspond aux représentations à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$. Le résultat est donné par la proposition suivante :

Proposition 3.3.15. *Soit* $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ *une représentation irréductible telle que* $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_1)$. *Alors* ρ *est soit conjuguée à une représentation à valeurs dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, *soit à une représentation à valeurs dans* $\mathrm{SL}_{n/2}(\mathbb{H})$ *(lorsque* n *est pair).*

Nous allons donner deux preuves de ce résultat, de natures différentes. La première s'inspire de la démonstration de la proposition 3.3.13, et la deuxième reprend la preuve donnée par Morgan et Shalen dans [MS84] de ce fait lorsque $n = 2$. Pour la première démonstration, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.16. *Soit $P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\overline{P}P = \mathrm{Id}$. Alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P = \overline{Q}Q^{-1}$.*

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 90 de Hilbert, qui assure que $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ est trivial. On donne ici une preuve élémentaire.

Démonstration. On cherche Q sous la forme $Q_\alpha = \alpha\mathrm{Id} + \overline{\alpha}\overline{P}$. Les matrices de cette forme vérifient immédiatement $Q_\alpha P = \overline{Q_\alpha}$. Il suffit donc de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\det(Q_\alpha) \neq 0$. Or $\det(Q_\alpha) = \overline{\alpha}^n \det(\overline{P} + \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\mathrm{Id})$, donc tout α tel que $-\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$ ne soit par valeur propre de $\overline{P}$ convient. □

Lemme 3.3.17. *Soit $P \in \mathrm{SL}_{2m}(\mathbb{C})$ telle que $\overline{P}P = -\mathrm{Id}$. Alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{C})$ telle que $P = \overline{Q}J_{2m}Q^{-1}$.*

Démonstration. On cherche Q sous la forme $Q_\alpha = -\alpha\mathrm{Id} - \overline{\alpha}J_{2m}\overline{P}$. Les matrices de cette forme vérifient immédiatement $Q_\alpha P = \alpha P + \overline{\alpha}J_{2m} = J_{2m}\overline{Q_\alpha}$. Il suffit donc de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\det(Q_\alpha) \neq 0$. Or $\det(Q_\alpha) = \overline{\alpha}^{2m} \det(J_{2m}\overline{P} - \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\mathrm{Id})$, donc tout α tel que $\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$ ne soit par valeur propre de $J_{2m}\overline{P}$ convient. □

Démonstration de la proposition 3.3.15. On sait que $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_1)$, donc les représentations ρ et $\Phi_1(\rho)$ ont le même caractère. Comme ρ est irréductible, ρ et $\Phi_1(\rho)$ sont conjuguées. Il existe alors $P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, on ait $P\rho(g)P^{-1} = \overline{\rho(g)}$. En considérant la conjugaison complexe, on obtient $\overline{P}\overline{\rho(g)}\overline{P^{-1}} = \rho(g)$. En remplaçant $\overline{\rho(g)}$ dans l'expression, on déduit que pour tour $g \in \Gamma$:

$$(\overline{P}P)\rho(g)(\overline{P}P)^{-1} = \rho(g).$$

La matrice $\overline{P}P$ commute alors à toute l'image de ρ. Or ρ est irréductible, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{P}P = \lambda\mathrm{Id}$. En particulier, P et $\overline{P}$ commutent, d'où, en conjuguant l'égalité précédente, on a $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, en prenant le déterminant, on a $\lambda^n = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$ et $P\overline{P} = \pm\mathrm{Id}$. On a alors deux cas :

Premier cas : $P\overline{P} = \mathrm{Id}$

D'après le lemme 3.3.16, il existe $Q \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P = Q^{-1}\overline{Q}$.

On en déduit que, pour tout $g \in \Gamma$:

$$Q^{-1}\overline{Q}\rho(g)\overline{Q^{-1}}Q = \overline{\rho(g)}$$

$$\overline{Q^{-1}}\rho(g)\overline{Q} = Q^{-1}\overline{\rho(g)}Q$$

C'est-à-dire que la représentation $\overline{Q^{-1}}\rho\overline{Q}$ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Deuxième cas : $P\overline{P} = -\mathrm{Id}$

En prenant le déterminant, on remarque que ce cas ne peut avoir lieu que si n est pair. Posons $m = \frac{n}{2}$. D'après le lemme 3.3.17, il existe $Q \in \mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{C})$ telle que $P = \overline{Q} J_{2m} Q^{-1}$.
On en déduit que, pour tout $g \in \Gamma$:

$$\overline{Q} J_{2m} Q^{-1} \rho(g) Q J_{2m} \overline{Q^{-1}} = -\overline{\rho(g)}$$

$$(\overline{Q^{-1}\rho(g)Q})^{-1} J_{2m} Q^{-1} \rho(g) Q J_{2m} = -\mathrm{Id}$$

$$(\overline{Q^{-1}\rho(g)Q})^{-1} J_{2m} Q^{-1} \rho(g) Q = J_{2m}.$$

C'est-à-dire que la représentation $\overline{Q^{-1}} \rho \overline{Q}$ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{H})$.

□

Preuve alternative. (D'après Morgan-Shalen, proposition III.1.1 de [MS84]) On reprend ici la preuve donnée par Morgan et Shalen dans la troisième partie de l'article [MS84] pour le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Il suffit de la retranscrire pour le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, et de modifier légèrement le dernier argument.

Le sous-groupe $\rho(\Gamma)$ agit de manière irréductible sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. D'après le «lemme de Burnside» (voir par exemple le lemme 1.2 de [Bas80]), on sait d'une part que $\rho(\Gamma)$ engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme espace vectoriel et, d'autre part, qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que tout élément de $\rho(\Gamma)$ s'écrit sous la forme $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n^2} e_{n^2}$ où chaque α_i est la trace d'un élément de $\rho(\Gamma)$. Puisque $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_1)$, les α_i sont réels, et $\rho(\Gamma)$ est contenu dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_{n^2})$. On en déduit que $(e_1, \ldots, e_{n^2})$ est une $\mathbb{R}$-base pour le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A engendré par $\rho(\Gamma)$, qui est une $\mathbb{R}$-algèbre. On a alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre simple, A est une $\mathbb{R}$-algèbre simple. D'après la classification de Wedderburn des algèbres simples (voir le théorème 26.4 de [CR62]), A est isomorphe à une algèbre de matrices sur une algèbre à division sur $\mathbb{R}$. On en déduit que A est soit isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit isomorphe à $\mathcal{M}_{n/2}(\mathbb{H})$ (ce dernier cas n'ayant lieu que si n est pair). Pour conclure, il nous reste à montrer que cet isomorphisme est donné par la conjugaison par une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Détaillons le cas où A est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; l'autre cas est complètement analogue.

On a un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\varphi : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En étendant les scalaires aux complexes, on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{Id} \otimes_{\mathbb{R}} \varphi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{Id} \otimes_{\mathbb{R}} \varphi$ est un automorphisme d'algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de Skolem-Noether, comme tous les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont intérieurs, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Id} \otimes_{\mathbb{R}} \varphi$ soit la conjugaison par P. En particulier, $PAP^{-1} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

En regroupant les propositions que nous avons montré ci-dessus, on obtient que toute

représentation irréductible dont le caractère est dans $\mathrm{Fix}(\Phi_1)$ ou $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ est conjuguée à une représentation à valeurs dans une forme réelle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. En regroupant les propositions 3.3.13 et 3.3.15, on obtient immédiatement une preuve du Théorème 3.1.1.

3.4 Un exemple détaillé : le produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Dans cette section, nous allons étudier en détail les variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, qui nous fourniront des espaces de déformations des représentations d'holonomie des uniformisations CR-sphériques du complémentaire du nœud de 8 et du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Nous commencerons par étudier en détail la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ à partir de la variété $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2)$ donnée par Lawton dans [Law07]. Nous nous intéresserons ensuite aux points fixes de l'involution $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, qui nous donneront les deux variétés de caractères, pour finalement les décrire en détail et reconnaître des tranches qui ont été paramétrées auparavant par Parker et Will dans [PW15] et par Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier et Thistlethwaite dans [FGK$^+$16].

3.4.1 La variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

Nous allons nous intéresser à la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Remarquons d'abord que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un quotient du groupe libre à deux générateurs F_2. Grâce à la remarque 3.2.4, nous allons identifier $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ comme une sous-variété de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2) \subset \mathbb{C}^9$. Commençons par faire quelques remarques élémentaires sur les éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ d'ordre 3.

Remarque 3.4.1.
- Si $S \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, alors le polynôme caractéristique de S est $\chi_S = X^3 - \mathrm{tr}(S)X^2 + \mathrm{tr}(S^{-1})X - 1$.
- Si $S \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ est d'ordre 3, alors elle annule le polynôme $X^3 - 1$, qui est scindé à racines simples. La matrice S est donc diagonalisable et admet pour valeurs propres des racines cubiques de l'unité.

Le lemme suivant, élémentaire lui aussi, nous servira à séparer les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Lemme 3.4.2. *Soit $S \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. On a équivalence entre les propositions suivantes :*

1. $S^3 = \mathrm{Id}$
2. *On se trouve dans l'un des deux cas suivants :*
   (a) *Il existe $i \in \{0,1,2\}$ tel que $S = \omega^i \mathrm{Id}$.*
   (b) $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^{-1}) = 0$.

Démonstration.

$(a) \Rightarrow (1)$: Évident

$(b) \Rightarrow (1)$: Dans ce cas, $\chi_S = X^3 - 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $S^3 - \mathrm{Id} = 0$.

$(1) \Rightarrow (2)$: Si $S^3 = \mathrm{Id}$, alors S est diagonalisable et a pour valeurs propres des racines cubiques de l'unité. Si S a une valeur propre triple, on se trouve dans le cas (a). Sinon, comme $\det(S) = 1$, les trois valeurs propres sont distinctes et égales à $(1, \omega, \omega^2)$. On en déduit que $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^{-1}) = 1 + \omega + \omega^2 = 0$.

□

Nous pouvons maintenant identifier les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, grâce à la proposition suivante :

Proposition 3.4.3. *La variété $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ a 16 composantes irréductibles : 15 points et une composante irréductible X_0 de dimension complexe 4.*

Démonstration. Considérons $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2) \subset \mathbb{C}^9$, comme l'image de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}))$ par les applications trace des éléments s, t, st, st^{-1}, s^{-1}, t^{-1}, $t^{-1}s^{-1}$, ts^{-1} et du commutateur $[s,t]$. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}))$. Notons $S = \rho(s)$ et $T = \rho(t)$. D'après le lemme 3.4.2, soit l'un parmi S et T est une homothétie, soit $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^{-1}) = \mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T^{-1}) = 0$. Traitons ces deux cas séparément.

Premier cas : S ou T est une homothétie. Supposons, par exemple, que $S = \omega^i \mathrm{Id}$ avec $i \in \{0,1,2\}$. Puisque T est diagonalisable, la représentation est totalement réductible, et elle est conjuguée ou bien à une représentation de la forme

$$S = \omega^i \mathrm{Id} \qquad\qquad T = \omega^j \mathrm{Id}$$

avec $i, j \in \{0,1,2\}$, ou bien à une représentation donnée par

$$S = \omega^i \mathrm{Id} \qquad\qquad T = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En tenant compte des symétries, on obtient 15 points de la variété des caractères, classifiés par les traces de S et T de la façon suivante (où $i, j \in \{0,1,2\}$) :

$\mathrm{tr}(S)$	$3\omega^i$	0	$3\omega^i$
$\mathrm{tr}(T)$	$3\omega^j$	$3\omega^j$	0

Deuxième cas : $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^{-1}) = \mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T^{-1}) = 0$. D'après le lemme 3.4.2, tous les points de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2)$ qui vérifient cette condition sont dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Notons $z = \mathrm{tr}(ST)$, $z' = \mathrm{tr}((ST)^{-1})$, $w = \mathrm{tr}(ST^{-1})$, $w' = \mathrm{tr}(TS^{-1})$ et $x = \mathrm{tr}([S,T])$. L'équation définissant $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(F_2) \subset \mathbb{C}^9$ devient alors :

$$x^2 - (zz' + ww' - 3)x + (zz'ww' + z^3 + z'^3 + w^3 + w'^3 - 6zz' - 6ww' + 9) = 0$$

Ce polynôme est irréductible. En effet, s'il ne l'était pas, il serait égal à un produit de deux polynômes de degré 1 en x. En remplaçant z', w et w' par 0, on aurait une écriture de la forme $x^2 + 3x + z^3 + 9 = (x - R_1(z))(x - R_2(z))$, avec $R_1(z)R_2(z) = z^3 + 9$ et $R_1(z) + R_2(z) = -3$. En considérant les degrés des polynômes R_1 et R_2 on obtient facilement une contradiction.

Puisque le polynôme qui définit X_0 est irréductible, X_0 est une composante irréductible de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. De plus, elle se plonge dans $\mathbb{C}^5$ et elle est un revêtement double ramifié de $\mathbb{C}^4$. □

3.4.2 Représentations réductibles dans la composante $X_0 \subset \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

Pour finir de décrire la variété $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, nous allons caractériser les points correspondant aux représentations réductibles. Les 15 points isolés de la variété proviennent de représentations totalement réductibles ; il nous reste à déterminer les points de la composante X_0 correspondant à des représentations réductibles.

Notation 3.4.4. Nous considérons ici $X_0 \subset \mathbb{C}^5$, avec les coordonnées (z, z', w, w', x) correspondant aux traces des images de $(st, (st)^{-1}, st^{-1}, ts^{-1}, [s, t])$ respectivement. On notera X_0^{red} l'image des représentations réductibles dans X_0

Remarque 3.4.5. Si les coordonnées (z, z', w, w', x) correspondent à une représentation réductible, alors $\Delta(z, z', w, w') = 0$. En effet, lorsque la représentation est réductible, les deux commutateurs $[s, t]$ et $[t, s]$ ont même trace, et le polynôme $X^2 - Q(z, z', w, w')X + P(z, z', w, w')$ a une racine double égale à ces traces.

Nous allons monter que les caractères de représentations réductibles se trouvent dans 9 droites complexes, qui s'intersectent trois par trois en six points, correspondant aux représentations totalement réductibles. Avant de faire la démonstration, prenons une notation pour ces droites.

Notation 3.4.6. Posons, pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$,

$$L^{(i,j)} = \{(z, z', w, w', x) \in X_0 \mid \omega^i z = \omega^{-i} z'; \omega^j w = \omega^{-j} w'; \omega^i z + \omega^j w = 3\}.$$

Chaque $L^{(i,j)}$ est une droite complexe paramétrée par la coordonnée z (ou w), et ces droites s'intersectent trois par trois aux six points de coordonnées $(z, w) = (0, 3\omega^j)$ et $(z, w) = (3\omega^i, 0)$, où $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer plus simplement la proposition qui décrit les points de X_0 qui correspondent aux représentations réductibles.

Proposition 3.4.7. *Les points de X_0 correspondant à des représentations réductibles sont exactement ceux des droites $L^{(i,j)}$. En d'autres termes, on a*

$$X_0^{\mathrm{red}} = \bigcup_{i,j\in\{0,1,2\}} L^{(i,j)}.$$

Démonstration. Nous allons montrer une double inclusion. Montrons d'abord que

$$X_0^{\mathrm{red}} \subset \bigcup_{i,j\in\{0,1,2\}} L^{(i,j)}.$$

Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}))$ une représentation réductible telle que $\chi_\rho \in X_0$. Notons $S = \rho(s)$ et $T = \rho(t)$. Puisque la représentation est réductible, on peut supposer, quitte à conjuguer ρ, que

$$S = \omega^i \begin{pmatrix} S' & \\ & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \omega^j \begin{pmatrix} T' & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

avec $i, j \in \{0, 1, 2\}$, et $S', T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'ordre 3 (et de trace -1). On remarque qu'il suffit de montrer que, lorsque $i = j = 0$, on a $\chi_\rho \in L^{(0,0)}$, pour avoir les autres cas par symétrie. Plaçons-nous dans ce cas, avec $i = j = 0$. Puisque $S'T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{tr}(S'T') = \mathrm{tr}((S'T')^{-1})$, donc $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}((ST)^{-1})$ et $z = z'$. De même, on sait que $w = w'$. De plus, l'équation des traces dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ donne : $\mathrm{tr}(S')\mathrm{tr}(T') = \mathrm{tr}(S'T') + \mathrm{tr}(S'T'^{-1})$. Donc $(-1)^2 = (z-1) + (w-1)$, i.e. $z + w = 3$. On obtient bien que $\chi_\rho \in L^{(0,0)}$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Pour le faire, il suffit de montrer que tous les points de $L^{(0,0)}$ sont atteints par des représentations données par

$$S = \begin{pmatrix} S' & \\ & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} T' & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

avec $S', T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, et de retrouver les points des autres droites $L^{(i,j)}$ en considérant $(\omega^i S, \omega^j T)$. Comme l'image de toute représentation réductible de cette forme vérifie $z = z'$, $w = w'$ et $z + w = 3$, nous sommes donc ramenés à montrer que tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit comme $1 + \mathrm{tr}(S'T')$ avec $S', T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'ordre 3 et trace -1. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Puisque la variété des caractères à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de F_2 est isomorphe à $\mathbb{C}^3$ par les traces de deux générateurs et de leur produit, il existe des matrices $S', T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telles que $(\mathrm{tr}(S'), \mathrm{tr}(T'), \mathrm{tr}(S'T')) = (-1, -1, z-1)$. Dans ce cas, les deux matrices S' et T' sont de trace -1 et donc d'ordre 3, et on a $z = 1 + \mathrm{tr}(S'T')$. □

Remarque 3.4.8. Les droites $L^{(i,j)}$ s'intersectent trois par trois aux six points de co-

ordonnées $(z,w) = (3\omega^i, 0)$ et $(z,w) = (0, 3\omega^i)$ avec $i \in \{0,1,2\}$. Les représentations correspondantes sont exactement les représentations totalement réductibles, où S et T sont diagonales de valeurs propres $(1, \omega, \omega^2)$.

3.4.3 Les points fixes de l'involution Φ_2

Nous allons décrire ici les variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ en tant que points fixes de l'involution Φ_2 de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Dans cette sous-section plutôt technique, nous prendrons des coordonnées et déterminerons des équations qui définissent $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$. Nous allons identifier les caractères correspondant à des représentations réductibles comme un arrangement de 9 droites, et nous montrerons ensuite que le reste des points forment une sous-variété lisse de dimension réelle 4. Nous la décrirons ensuite en détail dans la sous-section 3.4.4.

Remarque 3.4.9. Remarquons tout d'abord que les 15 points isolés de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ proviennent de représentations totalement réductibles à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3)$; ils sont donc dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cap \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, et donc dans $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$

Nous nous concentrerons donc dans la suite sur les points de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)\cap X_0$, qui sont dans l'autre composante irréductible de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Rappelons que nous avons identifié $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ à $\{(z,z',w,w',x) \in \mathbb{C}^5 \mid x^2 - Q(z,z',w,w')x + P(z,z',w,w') = 0\}$ en considérant les traces de $st, (st)^{-1}, st^{-1}, ts^{-1}$ et $[s,t]$.

Remarque 3.4.10. Si $(z,z',w,w',x) \in \mathrm{Fix}(\Phi_2) \cap X_0$, alors $z' = \overline{z}$ et $w' = \overline{w}$. Dans ce cas, les polynômes P et Q, que nous noterons désormais $P(z,w)$ et $Q(z,w)$, sont à valeurs réelles. De plus, on peut écrire le discriminant de $X^2 - Q(z,w)X + P(z,w)$ comme

$$\Delta(z,w) = f(z) + f(w) - 2|z|^2|w|^2 + 27$$

où $f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$ est la fonction décrite par Goldman dans [Gol99] que nous avons étudié dans la section 1.2 du chapitre 1, plus précisément dans la proposition 1.2.27. En un point de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)\cap X_0$, les deux racines de $X^2 - Q(z,w)X + P(z,w)$ sont les traces des images des commutateurs $[s,t]$ et $[t,s]$. Puisque ces commutateurs sont inverses l'un de l'autre, et qu'on se trouve dans $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, les deux racines sont des nombres complexes conjugués, ce qui est équivalent à dire que $\Delta(z,w) \leq 0$.

Proposition 3.4.11. *On a :*

$$\mathrm{Fix}(\Phi_2) \cap X_0 = \{(z,z',w,w',x) \in X_0 \mid z' = \overline{z}, w' = \overline{w}, \Delta(z,w) \leq 0\}$$

Démonstration. Nous allons montrer une double inclusion. La première inclusion est donnée par la remarque 3.4.10 ; montrons la deuxième.

Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\Delta(z,w) \leq 0$. Soit x une racine de $X^2 - Q(z,w)X + P(z,w)$. Puisque $\Delta(z,w) \leq 0$, l'autre racine du polynôme est $\overline{x}$. On sait que $(z, \overline{z}, w, \overline{w}, x) \in X_0$; on veut donc montrer que $(z, \overline{z}, w, \overline{w}, x) \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}))$ une représentation semi-simple qui se projette sur X_0 en $(z, \overline{z}, w, \overline{w}, x)$. Il suffit de monter que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \overline{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)^{-1})}$. Or, la représentation ${}^t\rho^{-1}$ admet pour image $(\overline{z}, z, \overline{w}, w, \overline{x})$ dans X_0. On en déduit que les représentations ρ et ${}^t\overline{\rho}^{-1}$ sont semi-simples et ont le même caractère. Elles sont alors conjuguées et pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \overline{\mathrm{tr}(\rho(\gamma)^{-1})}$, d'où $(z, \overline{z}, w, \overline{w}, x) \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. □

Notation 3.4.12. Nous considérerons désormais $\mathrm{Fix}(\Phi_2) \cap X_0$ comme $\{(z,w,x) \in \mathbb{C}^3 \mid \Delta(z,w) \leq 0, x^2 - Q(z,w)x + P(z,w) = 0\}$. La projection sur les deux premières coordonnées est un revêtement double sur $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \Delta(z,w) \leq 0\}$ en dehors de la ligne de niveau $\Delta(z,w) = 0$, où les points ont une unique pré-image.

Nous allons identifier les points correspondant aux représentations réductibles, puis montrer qu'en dehors de ces points, les variétés de caractères pour $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3)$ sont des variétés différentielles lisses.

Commençons par identifier les points de $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$ correspondant à des représentations réductibles à l'aide des coordonnées (z,w) et de la fonction $\Delta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$.

Proposition 3.4.13. *Soit $(z,w,x) \in X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}))$ de coordonnées $(z, \overline{z}, w, \overline{w}, x)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La représentation ρ est réductible.*
2. *Il existe $i, j \in \{0,1,2\}$ tels que $\omega^i z$ et $\omega^j w$ soient réels et $\omega^i z + \omega^j w = 3$.*
3. *On a $(z,w) \neq (0,0)$ et, au point $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, la différentielle réelle $d\Delta_{(z,w)} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ est nulle.*

Dans ce cas, on a $\Delta(z,w) = 0$.

Démonstration.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.7 et du fait qu'on se trouve dans $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ et donc que, en reprenant les coordonnés $(z, z', w, w', x) \in \mathbb{C}^5$, on a $z' = \overline{z}$ et $w' = \overline{w}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Remarquons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = f(\overline{z}) = f(\omega z)$. La fonction Δ est donc invariante par conjugaison complexe et par multiplication par ω sur chacune de ses coordonnées. Il suffit donc de vérifier que si $z \in \mathbb{R}$ et $w = 3 - z$, alors $d\Delta_{(z,w)} = 0$. Or Δ est symétrique ; comme elle est aussi invariante par conjugaison complexe sur chacune de ses coordonnées, il est suffisant de vérifier que si $z \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z, 3-z) = 0$, la nullité des dérivées partielles $\frac{\partial \Delta}{\partial \overline{z}}$, $\frac{\partial \Delta}{\partial w}$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial \overline{w}}$ en découle par symétrie. On a :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z,w) = 2z\overline{z}^2 - 12z^2 + 18\overline{z} - 2\overline{z}|w|^2.$$

Lorsque $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z,w) = 2z(z^2 - 6z + 9 - |w|^2)$$

donc $\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z, 3-z) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons que $d\Delta_{(z,w)} = 0$. On sait alors que $\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z,w) = 0$, et donc

$$0 = z\frac{\partial \Delta}{\partial z}(z,w) = (2|z|^4 + 18|z|^2 - 2|z|^2|w|^2) - 12z^3.$$

On en déduit que $z^3 \in \mathbb{R}$. Quitte à multiplier z par une racine cubique de l'unité, on peut supposer que $z \in \mathbb{R}$. De même, on peut supposer que $w \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$0 = \frac{\partial \Delta}{\partial z}(z,w) = 2z(z^2 - 6z + 9 - w^2)$$

$$0 = \frac{\partial \Delta}{\partial w}(z,w) = 2w(w^2 - 6w + 9 - z^2)$$

On en déduit que $z(z+w-3)(z-w-3) = 0 = w(z+w-3)(w-z-3)$. Si $w = 0$, comme $(z,w) \neq (0,0)$, on a $z \neq 0$ et $(z-3)^2 = 0$, d'où $z = 3$ et $z + w = 3$. De même, si $z = 0$ on a le résultat. Finalement, si $z \neq 0 \neq w$, on a $(z+w-3)(z-w-3) = 0 = (z+w-3)(w-z-3)$. En additionnant les deux termes on obtient $z + w = 3$.

Finalement, on vérifie que $\Delta(z, 3-z) = 0$ lorsque $z \in \mathbb{R}$. Si on se trouve dans le cas donné par l'équivalence que nous venons de démontrer, on aura donc bien $\Delta(z,w) = 0$. $\square$

On peut faire deux remarques sur cette proposition :

Remarque 3.4.14. Puisque $\Delta(0,0) \neq 0$, les points critiques de Δ sur la ligne de niveau $\Delta(z,w) = 0$ sont exactement les points correspondant à des représentations réductibles. Un point non lisse de la courbe $\Delta(z,w) = 0$ correspond donc à une représentation réductible.

Remarque 3.4.15. Il y a exactement deux points critiques de Δ dans $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ qui ne correspondent pas à des représentations réductibles : ce sont les points de coordonnées $(z,w,x) = (0,0,3\omega)$ et $(z,w,x) = (0,0,3\omega^2)$. L'image des représentations correspondantes est un sous-groupe fini d'ordre 27 de SU(3).

Montrons maintenant que les points correspondant à des représentations irréductibles forment une variété différentielle.

Proposition 3.4.16. *En dehors des points correspondant à des représentations réductibles, l'ensemble $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{C}^3$ de dimension réelle 4.*

Démonstration. Rappelons que nous avons défini $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$ comme :

$$\{(z,w,x) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 - Q(z,w)x + P(z,w) = 0, \Delta(z,w) \leq 0\}$$

où

$$Q(z,w) = |z|^2 + |w|^2 - 3$$

$$P(z,w) = 2\mathrm{Re}(z^3) + 2\mathrm{Re}(w^3) + |z|^2|w|^2 - 6|z|^2 - 6|w|^2 + 9.$$

On peut donc ré-écrire $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$ comme :

$$\{(z,w,x) \in \mathbb{C}^3 \mid x + \overline{x} = Q(z,w), x\overline{x} = P(z,w)\}.$$

Considérons les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$ données par $f_1(z,w,x) = Q(z,w) - (x + \overline{x})$ et $f_2(z,w,x) = P(z,w) - (x\overline{x})$, puis $f = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}^2$. Avec ces notations, $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2) = f^{-1}(\{0\})$. Nous allons montrer qu'en dehors des points correspondant à des représentations réductibles, f est une submersion, i.e. que $\mathrm{d}f$ est de rang 2.

Soit $(z_0, w_0, x_0) \in X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. Remarquons d'abord que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w_0, x_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\overline{x_0} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -x_0 \end{pmatrix},$$

donc f est toujours de rang au moins 1 et, si $x_0 \notin \mathbb{R}$, l'application f est une submersion en (z_0, w_0, x_0). Supposons maintenant que $\mathrm{d}f(z_0, w_0, x_0)$ est de rang 1. En particulier, $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que dans ce cas, le point (z_0, w_0, x_0) correspond à une représentation réductible.

On a

$$z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0, x_0) = \begin{pmatrix} |z_0|^2 \\ 3z_0^3 + |z_0|^2|w_0|^2 - 6|z_0|^2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{z_0} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0, w_0, x_0) = \begin{pmatrix} |z_0|^2 \\ 3\overline{z_0}^3 + |z_0|^2|w_0|^2 - 6|z_0|^2 \end{pmatrix},$$

et, comme ces deux vecteurs sont liés, on a $z_0^3 \in \mathbb{R}$. De même, $w_0^3 \in \mathbb{R}$. Il existe donc $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et $i, j \in \{0,1,2\}$ tels que $z_0 = \omega^i r_1$ et $w_0 = \omega^j r_2$. D'après la proposition 3.4.7, il suffit de montrer que $r_1 + r_2 = 3$ pour conclure. Considérons deux cas :

Premier cas : r_1 ou r_2 est nul. Supposons, par exemple, que $r_2 = 0$. Dans ce cas, comme $f(0,0,x_0) \neq (0,0)$, on a $r_1 \neq 0$. D'une part, on a $2x_0 = Q(z,0) = r_1^2 - 3$. D'autre part, comme $z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0, x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w_0, x_0)$ sont liés, on a $x_0 = 3(r_1 - 2)$. On en déduit que $6(r_1 - 2) = 2x_0 = r_1^2 - 3$, d'où $r_1^2 - 6r_1 + 9 = 0$ et $r_1 = 3$.

Deuxième cas, $r_1, r_2 \neq 0$. On sait que les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0, x_0) = \begin{pmatrix} |z_0|^2 \\ 3z_0^3 + |z_0|^2|w_0|^2 - 6|z_0|^2 \end{pmatrix} = r_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3r_1 + r_2^2 - 6 \end{pmatrix}$$

$$w_0 \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0, x_0) = \begin{pmatrix} |w_0|^2 \\ 3w_0^3 + |w_0|^2|z_0|^2 - 6|w_0|^2 \end{pmatrix} = r_2^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3r_2 + r_1^2 - 6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $3r_1 + r_2^2 - 6 = 3r_2 + r_1^2 - 6$. Si $r_1 \neq r_2$, alors ce sont les deux racines d'un polynôme de la forme $X^2 - 3X + k$, d'où $r_1 + r_2 = 3$. Si par contre $r_1 = r_2$ on a, d'une part, $2x_0 = Q(z_0, w_0) = 2r_1^2 - 6$ et, puisque $z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0, x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w_0, x_0)$ sont colinéaires, $x_0 = r_1^2 - 3r_1 - 6$. On en déduit que $r_1 = \frac{3}{2}$ et $r_1 + r_2 = 3$. □

3.4.4 Description de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

Nous allons décrire ici les variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Pour le faire, nous allons regarder en détail $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, et vérifier qu'il est l'union des deux variétés de caractères, et que leur intersection correspond à des représentations réductibles. Nous considérerons finalement deux tranches de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, qui ont été étudiées respectivement par Parker et Will dans [PW15] et par Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouiller et Thistlethwaite dans [FGK+16].

Considérons d'abord les 15 points isolés de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, qui sont tous dans $\mathrm{Fix}(\Phi)$. Ils correspondent à des représentations totalement réductibles. Comme une matrice d'ordre 3 est conjuguée à une matrice dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3)$, on a la remarque suivante :

Remarque 3.4.17. Les points de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$ correspondant à des représentations totalement réductibles sont dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cap \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Il nous reste à considérer les représentations de $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. La proposition 3.3.9 nous assure que les points correspondant à des représentations irréductibles sont dans exactement l'une des variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. En ce qui concerne les points de X_0 correspondant à des représentations réductibles, nous reprenons rapidement la preuve de la proposition 3.4.7 pour aboutir à la remarque suivante :

Remarque 3.4.18. Les points de $\mathrm{Fix}(\Phi_2) \cap X_0$ correspondant à des représentations réductibles sont dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Seulement certains sont dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Démonstration. Une représentation réductible ρ de caractère dans X_0 est conjuguée à une représentation donnée par

$$S = \omega^i \begin{pmatrix} S' & \\ & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \omega^j \begin{pmatrix} T' & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

avec $i, j \in \{0, 1, 2\}$, et $S', T' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'ordre 3 (et de trace -1). Comme $\chi_\rho \in \mathrm{Fix}(\Phi_2)$, la représentation $\rho' : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ donnée par $\rho'(s) = S'$ et $\rho'(t) = T'$, est dans $\mathrm{Fix}(\Phi_2) \subset \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Si ρ est totalement réductible, alors, d'après la remarque 3.4.18, $\chi_\rho \in \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cap \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Sinon, ρ' est irréductible et, d'après la proposition 3.3.13, quitte à conjuguer ρ', on a $S', T' \in \mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SU}(1,1)$. Si $S', T' \in \mathrm{SU}(2)$, alors $S, T \in \mathrm{SU}(2,1) \cap \mathrm{SU}(3)$. Si par contre $S', T' \in \mathrm{SU}(1,1)$, alors $S, T \in \mathrm{SU}(2,1)$. Il nous reste uniquement à montrer que le deuxième cas a bien lieu. Or, le point $(4, -1, 7) \in X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$ correspond à une représentation réductible, dont un élément a trace 4, et donc n'est pas dans $\mathrm{SU}(3)$. □

En remarquant, de plus, qu'une représentation irréductible ne peut pas être en même temps à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et dans $\mathrm{SU}(3)$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.4.19. *On a*

$$\mathrm{Fix}(\Phi_2) = \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cup \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

Les parties $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sont non vides et s'intersectent uniquement en des points correspondant à des représentations réductibles.

Finalement, nous allons tracer quelques tranches de $\mathrm{Fix}(\Phi_2)$, qui correspondent aux projections sur les coordonnées (z, w), puis à se restreindre à une tranche de la forme $z = z_0$ ou $w = w_0$. Rappelons que la projection sur les coordonnées (z, w) est un revêtement double en dehors de la ligne de niveau $\Delta(z, w) = 0$, où les points ont une unique pré-image. Nous traçons donc, dans un plan (z, w_0), la courbe $\Delta(z, w_0) = 0$, puis nous identifions les régions contenues dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et celles contenues dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

La tranche de Parker-Will

Dans leur article, [PW15], Parker et Will donnent une paramétrisation explicite des représentations de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle s, t \rangle$ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ telles que l'image st est un élément unipotent. Ceci correspond exactement aux représentations telles que la trace de l'image de st est égale à 3. Elles forment une famille de représentations du groupe fondamental de l'entrelacs de Whitehead qui contient la représentation d'holonomie d'une uniformisation CR-sphérique de la variété. Cette représentation a pour coordonnées $(z, w, x) = (3, 3, \frac{15+3i\sqrt{15}}{2})$. On peut voir cette tranche dans la figure 3.1. On voit trois lobes correspondant à des représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, qui s'intersectent en un point singulier, de coordonnée $z = 0$, qui correspond à une représentation totalement réductible, de coordonnées $(z, w, x) = (0, 3, 3)$. En revenant aux coordonnées (z, w, x) sur $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$, les représentations de la tranche $z = 0$ forment, topologiquement, trois sphères qui se touchent en un point.

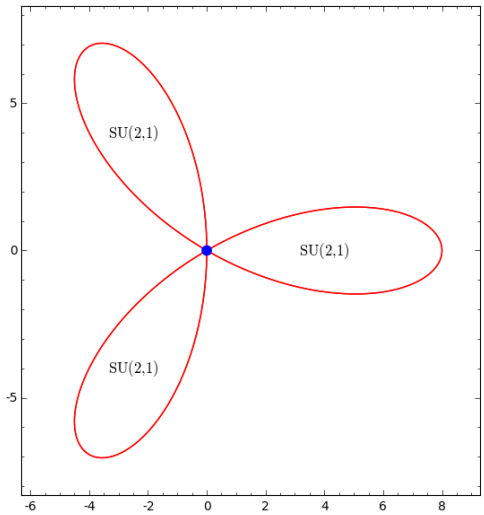


FIGURE 3.1 – La tranche de Parker-Will de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

La tranche de Thistlethwaite

Dans la dernière section de leur article [FGK$^+$16], Falbel, Guilloux, Koseleff, Roullier et Thistlethwaite donnent une paramétrisation explicite de représentations relevant les composantes irréductibles R_1, R_2 et R_3 de $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\Gamma_8)$, comme nous l'avons vu dans la sous-section 3.2.2. Ils donnent aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que les représentations soient à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ ou $\mathrm{SU}(3)$: ils donnent donc un paramétrage de relevés des intersections de R_1 et R_2 avec $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\Gamma_8)$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\Gamma_8)$. Rappelons que le groupe fondamental du nœud de huit admet la présentation :

$$\Gamma_8 = \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_2 = [g_3, g_1^{-1}], g_1 g_2 = g_2 g_3 \rangle$$

Comme le remarquent Deraux dans [Der14] et Parker et Will dans [PW15], si G_1, G_2 et G_3 sont les images de g_1, g_2 et g_3 respectivement par une représentation qui a un caractère dans R_2, alors $(G_1G_2) = (G_1^2G_2)^3 = G_2^4 = \mathrm{Id}$. En posant $T = (G_1G_2)^{-1}$ et $S = (G_1^2G_2)$, on a deux éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ d'ordre 3 qui engendrent l'image de la représentation, puisqu'on a $G_1 = ST, G_3 = TS$ et $G_2 = (TST)^{-1} = (TST)^3$. On peut donc considérer $R_2 \subset \mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$: cette composante correspond à la tranche de coordonnée $w = 1$, puisque TST est d'ordre 4 si et seulement si $\mathrm{tr}(TST) = \mathrm{tr}(ST^2) = \mathrm{tr}(ST^{-1}) = 1$. On peut voir cette tranche, que nous avons déjà étudiée dans la sous-section 2.3.3 au chapitre 2, dans la figure 3.2. Il y a trois régions de représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et une région de représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(3)$. Elles s'intersectent en trois points singuliers, qui correspondent à des représentations réductibles. En revenant aux coordonnées (z, x) sur la tranche de $w = 1$ de $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$, ces régions sont les images de quatre sphères topologiques qui s'intersectent en trois points.

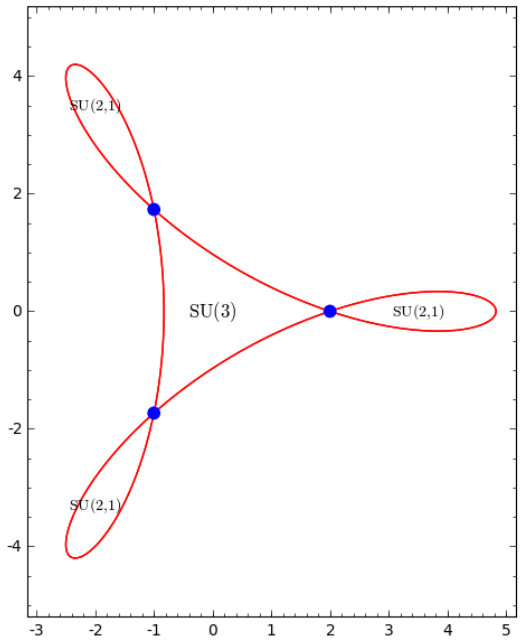
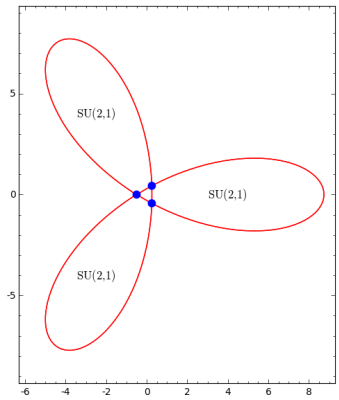


FIGURE 3.2 – La tranche de Falbel, Guilloux, Koseleff, Roullier et Thistlethwaite de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cup \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Elle est donnée par $w = 1$

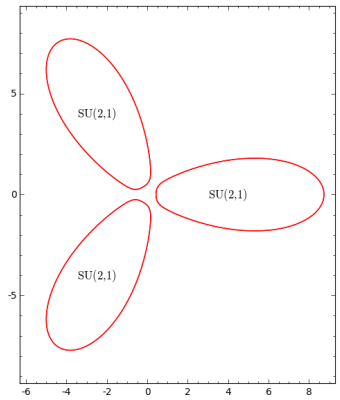
Autres tranches remarquables

Finalement, pour compléter le panorama, nous allons décrire trois tranches de plus de $X_0 \cap \mathrm{Fix}(\Phi_2)$. Rappelons que, grace à la proposition 3.4.16, une tranche de la forme $w = w_0$ n'aura des points singuliers que si $w_0^3 \in \mathbb{R}$. D'une part, dans la figure 3.3, on voit les tranches $w = 3.5$ et $w = 3.5 + 0,1i$. Dans chacune des deux, il y a trois régions qui correspondent à des représentations irréductibles à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, qui s'intersectent, dans la tranche $w = 3.5$ en trois points qui correspondent à des représentations réductibles. Il n'y a aucun point correspondant à des représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(3)$.

D'autre part, dans la figure 3.4, on voit la tranche $w = 1 + 0,1i$: il y a trois régions correspondant à des représentations irréductibles à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ et une région correspondant à des représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(3)$.



(a) La tranche $w_0 = 3.5$. Il y a trois points singuliers.



(b) La tranche $w_0 = 3.5 + 0,1i$. Le domaine est lisse.

FIGURE 3.3 – Les tranches $w_0 = 3.5$ et $w_0 = 3.5 + 0.1i$.

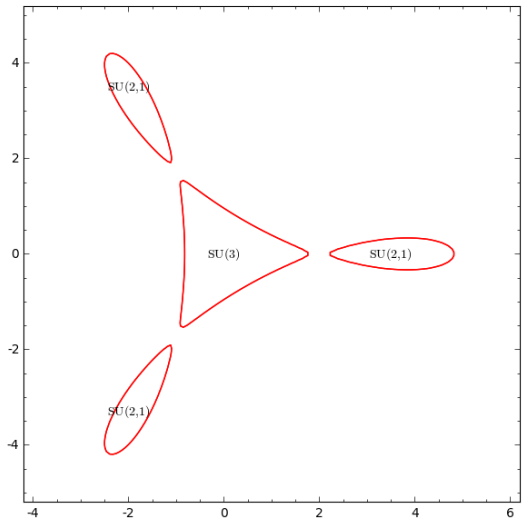


FIGURE 3.4 – La tranche $w_0 = 1 + 0,1i$. Le domaine est lisse.

Chapitre 4

Déformation effective d'un domaine de Ford

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à des déformations de structures CR-sphériques sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Dans un premier temps, dans la section 4.2.5, nous allons étudier le complémentaire de l'entrelacs de Withehead, et rappeler les uniformisations CR-sphériques données par Schwartz dans [Sch07] et par Parker et Will dans [PW15] pour appliquer le théorème de chirurgie 2.2.24. On obtiendra donc une famille infinie de chirurgies de Dehn sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead munies de structures CR-sphériques, données par certains points dans des voisinages des représentations d'holonomie des structures de Schwartz et de Parker-Will. Deux questions viennent alors naturellement :

— Peut-on avoir un ensemble explicite de représentations qui soient des représentations d'holonomie de structures CR-sphériques sur des chirurgies sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead ?

— Ces structures CR-sphériques sont-elles uniformisables ?

Nous essaierons dans la suite du chapitre de répondre aux deux questions favorablement, en étudiant une famille de représentations paramétrée par Parker et Will dans [PW15].

Nous prendrons comme point de départ l'uniformisation CR-sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead (WLC) donnée par Parker et Will dans [PW15]. Dans ce même article, Parker et Will étudient un espace de déformations à deux paramètres réels $(\alpha_1, \alpha_2) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$ de représentations de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, qui donne des représentations du groupe fondamental de WLC à valeurs dans $\mathrm{PU}(2,1)$; la représentation d'holonomie de l'uniformisation de Parker et Will ayant des coordonnées $(0, \alpha_2^{\lim})$. Ces représentations son aussi paramétrées par la trace d'un élément particulier

$U \in \mathrm{SU}(2,1)$, donné par $U = \rho(st^{-1})$ si $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle s, t \mid s^3 = t^3 = 1\rangle$. Nous allons considérer les représentations de paramètre $(0, \alpha_2)$ pour $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et nous allons montrer que lorsque $[U]$ est loxodromique ou elliptique d'ordre ≥ 9, la représentation de paramètre $(0, \alpha_2)$ est la représentation d'holonomie d'une uniformisation CR-sphérique d'une chirurgie de Dehn sur WLC. Cette chirurgie de Dehn sera obtenue comme la variété à l'infini d'une variété hyperbolique complexe. En particulier, grâce au théorème du polyèdre de Poincaré, nous obtiendrons que l'image des représentations d'holonomie est discrète dans $\mathrm{PU}(2,1)$.

Les représentations que nous considérons ont déjà été étudiées par d'autres techniques, notamment par Parker et Will dans [PW15] et par Parker, Wang et Xie dans [PWX16]. Dans [PW15], Parker et Will étudient un voisinage explicite des représentations de paramètre $\{0\}\times]-\alpha_2^{\lim}, \alpha_2^{\lim}[$, et montrent que les représentations de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ associées sont fidèles et discrètes en étudiant un domaine de Ford et en utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré. Ces points correspondent à des représentations pour lesquelles l'élément $[U]$ est loxodromique. Nous reviendrons plus en détail sur leur construction dans la section 4.2.5. D'autre part, dans [PWX16], Parker, Wang et Xie étudient des groupes de triangle $(3,3,n)$, pour lesquels un certain élément n'est pas elliptique, en construisant un domaine de Dirichlet et en utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour montrer que ces groupes sont discrets. Dans notre situation, ces groupes contiennent comme sous-groupe d'indice 2 l'image des représentations de paramètre $(0, \alpha_2)$ pour lesquelles $[U]$ est elliptique de type $(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ avec $n \geq 4$. Le domaine de Dirichlet obtenu par Parker, Wang et Xie coïncide avec celui que nous allons obtenir en déformant le domaine de Ford de Parker-Will, mais nous allons identifier la variété à l'infini et utiliser des techniques différentes pour montrer que la combinatoire du domaine de Dirichlet est bien celle qui est attendue, aussi bien dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ que dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Dans la section 4.2, nous allons reprendre rapidement les structures CR-sphériques de Schwartz et de Parker-Will sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, et nous appliquerons le théorème de chirurgie 2.2.24 du chapitre 2 dans ces deux cas. Dans ce chapitre, on se propose désormais d'exhiber une partie explicite de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ qui correspond à des holonomies de structures CR-sphériques sur des chirurgies, et de vérifier si ces structures sont uniformisables. Nous le ferons sur une famille à un paramètre, contenue dans la paramétrisation de Parker-Will donnée dans [PW15]. Dans la section 4.3, nous énoncerons les résultats de chirurgie et d'uniformisation et nous établirons une stratégie de preuve. Le reste du chapitre est consacré à la preuve de ces énoncés : la section 4.4 fixe les notations et décrit plus en détail la construction de Parker et Will ; on donnera la preuve des énoncés dans la section 4.5, en admettant des conditions techniques, que nous montrerons dans les sections suivantes. On vérifiera ensuite les conditions sur les faces du domaine que nous construisons : une condition de topologie des faces dans la section 4.6, une condition de combinatoire locale dans la section 4.7, puis nous montrons

que la combinatoire globale des intersections des faces est celle attendue dans la section 4.8.

4.2 Chirurgies sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux structures CR-sphériques sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead et aux chirurgies sur cet entrelacs portant une structure CR-sphérique. Nous utiliserons ici des résultats de R. Schwartz, qu'on peut trouver dans son livre [Sch07] et de Parker et Will, donnés dans l'article [PW15].

4.2.1 Le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead

L'entrelacs de Whitehead est l'entrelacs dont une projection est donnée dans la figure 4.1. Il a un nombre minimal de cinq croisements et deux composantes, qui sont chacune un cercle non noué.

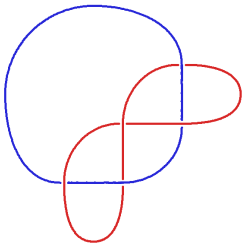


FIGURE 4.1 – L'entrelacs de Whitehead (SnapPy)

Remarque 4.2.1. Notons W l'entrelacs de Whitehead et W' le même entrelacs où l'on a échangé les composantes. Alors W et W' sont isotopes. En d'autres mots, les deux composantes de l'entrelacs de Whitehead jouent le même rôle. Ce fait se verra reflété dans la structure CR-sphérique de Parker-Will, que nous verrons plus loin.

Notation 4.2.2. Nous noterons dans la suite WLC le complément de l'entrelacs de Whitehead dans S^3. Le complémentaire d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs dans S^3 est une variété compacte à deux bords toriques que nous noterons T_1 et T_2. Son intérieur est homéomorphe à WLC ; nous identifierons $\overline{WLC}$ à $WLC \cup T_1 \cup T_2$.

Le groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead est donné par la présentation :

$$\pi_1(WLC) = \langle u, v \mid [u, v][u, v^{-1}][u^{-1}, v^{-1}][u^{-1}, v] \rangle$$

En changeant les générateurs par s, t vérifiant $u = st$ et $v = tst$, on obtient une nouvelle présentation, à savoir :

$$\pi_1(WLC) = \langle s, t \mid ts^{-1}t^{-3}s^{-2}t^{-1}st^3s^2 \rangle$$

Remarque 4.2.3. Cette présentation est celle fournie par SnapPy, avec $t = a$ et $s^{-1} = b$.

Dans cette présentation, les couples longitude-méridien des sous-groupes périphériques correspondant à T_1 et T_2 sont donnés par :

$$l_1 = t^{-2}s^{-1}ts^2t^{-1}s^{-1} \qquad m_1 = t^{-2}s^{-1}$$

$$l_2 = ststs^{-1}t^3s^{-1}t \qquad m_2 = st$$

Remarque 4.2.4. Dans ce marquage, les méridiens m_i correspondent aux courbes méridiennes de WLC dans S^3 et les longitudes sont homologiquement triviales.

Remarquons, comme le font Parker et Will dans [PW15], qu'en imposant la relation $s^3 = t^3 = 1$, le groupe obtenu est le produit libre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; $\pi_1(WLC)$ se surjecte donc sur ce groupe.

4.2.2 Espaces de déformations

Nous allons considérer des représentations de $\pi_1(WLC)$ qui transitent par ce quotient, le tout à conjugaison près. Nous avons montré dans la section 3.4 du chapitre 3, que la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ a 16 composantes irréductibles, dont 15 points isolés et une composante irréductible X_0. Dans leur article [GW16], Guilloux et Will montrent que la composante X_0 est aussi une composante irréductible de la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})}(\pi_1(WLC))$. Nous allons donc nous restreindre à cette composante X_0, et à son intersection avec la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Ceci nous fournit toute une composante de déformations pour les représentations de $\pi_1(WLC)$ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, considérées à conjugaison près.

Rappelons que cet espace peut être paramétré par des traces. Plus précisément, si $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle s, t \mid s^3, t^3 \rangle$, les traces de $s, s^{-1}, t, t^{-1}, st, (st)^{-1}, s^{-1}t, st^{-1}$ et du commutateur $[s, t]$ déterminent, à conjugaison près, une représentation irréductible de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$.

Dans la section 4 de son article [Wil15], Will se restreint au cas de $\mathrm{SU}(2,1)$. On remarque que si $U \in \mathrm{SU}(2,1)$, alors $\mathrm{tr}(U^{-1}) = \overline{\mathrm{tr}(U)}$; on peut alors considérer uniquement les traces de $s, t, st, s^{-1}t$ et du commutateur $[s, t]$.

Lorsqu'on se restreint à $\mathrm{SU}(2,1)$ ou $\mathrm{SU}(3)$, un élément U vérifie $\mathrm{tr}(U^{-1}) = \overline{\mathrm{tr}(U)}$; on peut alors considérer uniquement les traces de $s, t, st, s^{-1}t$ et du commutateur $[s, t]$. De plus, dans la composante X_0, les éléments s et t ont pour image des elliptiques réguliers

d'ordre 3, qui sont alors de trace nulle. Notons, pour $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SU}(2,1))$, $z_\rho = \mathrm{tr}(\rho(st))$, $w_\rho = \mathrm{tr}(\rho(st^{-1}))$ et $x_\rho = \mathrm{tr}(\rho([s,t]))$. Comme nous l'avons vu dans la section 3.4, dans ces coordonnées, l'union des deux variétés de caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est décrite dans X_0 par :

$$\{(z,w,x) \in \mathbb{C}^3 \mid x + \overline{x} = Q(z,w), x\overline{x} = P(z,w)\}$$

où

$$\begin{aligned} Q(z,w) &= |z|^2 + |w|^2 - 3 \\ \text{et } P(z,w) &= 2\mathrm{Re}(z^3) + 2\mathrm{Re}(w^3) + |z|^2|w|^2 - 6|z|^2 - 6|w|^2 + 9. \end{aligned}$$

4.2.3 Représentations de Parker-Will

Dans leur article [PW15], Parker et Will construisent ensuite une famille de représentations ρ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$, de sorte que $\rho(s)$ et $\rho(t)$ sont elliptiques d'ordre 3 et $\rho(st)$ et $\rho(ts)$ sont unipotents. En termes de traces, ils paramètrent la tranche de $X_0 \cap \mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ où une des coordonnées vaut 3, à savoir une partie de l'ensemble

$$\{(3,w,x) \in \mathbb{C}^3 \mid, x + \overline{x} = Q(3,w), x\overline{x} = P(3,w)\}.$$

Dans le modèle de Siegel, cette famille est paramétrée par $(\alpha_1, \alpha_2) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$, explicitement par :

$$\rho(s) = e^{-i\alpha_1/3}\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & x_1 e^{i\alpha_1 - i\alpha_2} & -1 \\ -x_1 e^{i\alpha_2} & -e^{i\alpha_1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(t) = e^{i\alpha_1/3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -e^{-i\alpha_1} & -x_1 e^{-i\alpha_1 - i\alpha_2} \\ -1 & x_1 e^{i\alpha_2} & e^{-i\alpha_1} \end{pmatrix}$$

où $x_1 = \sqrt{2\cos(\alpha_1)}$. Puisque $\rho(s)^3 = \rho(t)^3 = \mathrm{Id}$, on a :

$$\rho(l_1) = \rho(ts^{-1}ts^{-1}ts^{-1}) \qquad \rho(m_1) = \rho(ts^{-1})$$

$$\rho(l_2) = \rho(ststst) \qquad \rho(m_2) = \rho(st)$$

On déduit les relations $\rho(l_1) = \rho(m_1)^3$ et $\rho(l_2) = \rho(m_2)^3$ dans toute la famille de représentations. De plus, par construction, $\rho(m_2)$ est unipotent pour toutes les représentations paramétrées par Parker et Will. Pour l'autre représentation périphérique, le type de $\rho(m_1) = \rho(ts^{-1})$ est donné par la courbe de la figure 4.2. Si (α_1, α_2) est sur la courbe, alors $\rho(ts^{-1})$ est parabolique, s'il est à l'intérieur, $\rho(ts^{-1})$ est loxodromique, et s'il est à l'extérieur, elliptique. On note ces régions $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ respectivement. En notant $\alpha_2^{\lim} = \arccos(\sqrt{\frac{3}{8}})$, la courbe a deux points de rebroussement en $(0, \pm\alpha_2^{\lim})$, pour lesquels $\rho(ts^{-1})$ est unipotente.

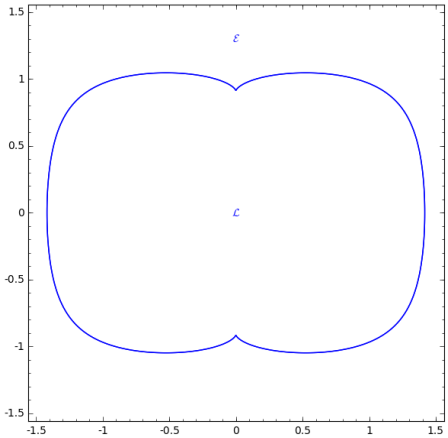


FIGURE 4.2 – Courbe des unipotents dans la tranche de Parker-Will

D'autre part, Parker et Will définissent la région $\mathcal{Z}$ par l'équation

$$D(4\cos^2(\alpha_1), 4\cos^2(\alpha_2)) > 0,$$

où $D(x, y) = x^3y^3 - 9x^2y^2 - 27xy^2 + 81xy - 27x - 27$. Ils montrent, à l'aide du théorème du polyèdre de Poincaré, que l'image de ρ est fidèle et discrète à l'intérieur de la région $\mathcal{Z}$.

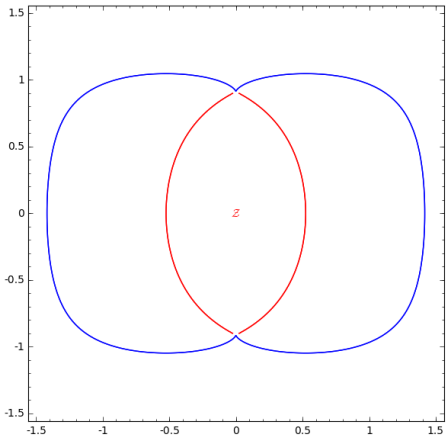


FIGURE 4.3 – La région $\mathcal{Z}$ dans la tranche de Parker-Will

Remarque 4.2.5. En reprenant les coordonnées (z, w, x) pour la variété des caractères $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ que nous avons décrite précédemment, la projection sur w de la tranche $z = 3$ est un revêtement de degré 2, en dehors de la courbe rouge de la figure 4.4, pour laquelle les points ont uniquement un antécédent.

Dans la paramétrisation de Parker-Will, l'application $\rho \mapsto z_\rho$ a pour image l'union des trois lobes dessinés dans la figure 4.4. Le type de $\rho(s^{-1}t)$ est alors déterminé par le signe

de $f(z_\rho)$, où $f(z) = |z|^4 - 8\mathrm{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$ est la fonction définie par Goldman dans [Gol99, Théorème 6.2.4] et que nous avons étudié dans la proposition 1.2.27. Les régions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ sont alors séparées par la courbe bleue de la figure 4.4, qui a pour équation $f(z) = 0$.

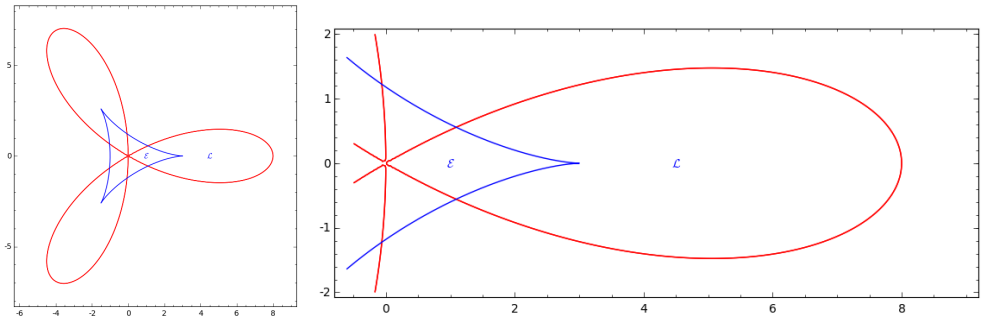


FIGURE 4.4 – La tranche de Parker-Will en coordonnées de traces.

4.2.4 Structures d'holonomie périphérique parabolique

Nous allons nous intéresser aux structures CR-sphériques sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Lorsque ces structures ont une holonomie périphérique parabolique, nous allons les déformer pour obtenir des structures CR-sphériques soit sur des chirurgies de Dehn, soit sur des variétés obtenues de façon similaire, en recollant le complémentaire d'un nœud torique dans un espace lenticulaire. Nous allons, dans un premier temps, appliquer le théorème de chirurgie 2.2.24, pour ensuite donner des bornes explicites pour les déformations et de s'interroger sur l'uniformisabilité de ces structures. Nous regarderons de près la structure construite par Parker et Will dans [PW15] qui admet comme holonomie la représentation ρ correspondant au point $(0, \alpha_2^{\lim})$. Nous considérerons aussi brièvement la structure construite par Schwartz dans son livre [Sch07], qui correspond au point $(\alpha_1^{\lim}, 0)$, où $\alpha_1^{\lim} = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{4})$.

Structure de Parker-Will

Dans [PW15], Parker et Will étudient les groupes à l'intérieur de la région $\mathcal{Z}$. Ils montrent dans ce cas, grâce au théorème du polyèdre de Poincaré, qu'il s'agit de représentations discrètes et injectives de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et qu'il s'agit des représentations d'holonomie pour des variétés ouvertes de dimension 4 portant une $(\mathrm{PU}(2,1), \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}})$-structure. Dans la section 6 de l'article, ils étudient le groupe de paramètre $(0, \alpha_2^{\lim})$ et montrent qu'il s'agit de la représentation d'holonomie d'une uniformisation CR-sphérique du complémentaire

de l'entrelacs de Whitehead. Dans ce cas, ils trouvent les images de s et t :

$$\rho(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ils construisent ensuite un domaine de Ford invariant par l'holonomie $\rho(m_2) = \rho(st)$ de la deuxième pointe. Ce domaine est un horotube (voir la figure 7 et la proposition 6.8 de [PW15]).

Remarque 4.2.6. On remarque que, pour la représentation d'holonomie de la structure uniformisable, les traces de $s, t, st, s^{-1}t$ et $[s, t]$ sont respectivement $(0, 0, 3, 3, x_0)$, où $x_0 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{15}$.

Proposition 4.2.7. *Considérons WLC muni de la structure CR-sphérique uniformisable de Parker-Will. Il existe une involution antiholomorphe ι de WLC qui échange ses deux pointes.*

Démonstration. Considérons l'automorphisme φ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donné par

$$\varphi(s) = s^{-1}, \varphi(t) = t$$

et la représentation $\rho' = \rho \circ \varphi$. Puisque $[s^{-1}, t]$ est conjugué à $[s, t]^{-1}$, le caractère χ_ρ a pour coordonnées $(0, 0, 3, 3, x_0)$ alors que $\chi_{\rho'}$ a pour coordonnées $(0, 0, 3, 3, \overline{x_0})$. D'après le théorème 3.2.9, les représentations ρ et $\overline{\rho'}$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Comme elles sont irréductibles et dans $\mathrm{SU}(2, 1)$, elles sont alors conjuguées dans $\mathrm{SU}(2, 1)$. Il existe donc des involutions antiholomorphes ι et η de $\mathbb{CP}^2$ et $\mathrm{SU}(2, 1)$ respectivement telles que :

1. ι stabilise $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ et $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$
2. Pour tous $U \in \mathrm{SU}(2, 1)$ et $[Z] \in \mathbb{CP}^2$ on a $[\eta(U)][\iota(Z)] = \iota([U][Z])$.
3. $\eta(\rho(s)) = \rho'(s) = \rho(s)^{-1}$
4. $\eta(\rho(t)) = \rho'(t) = \rho(t)$

Or $\mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{Im}(\rho') = \Gamma$, d'où l'ensemble de discontinuité Ω_Γ est stabilisé par ι. L'involution ι induit donc une involution antiholomorphe de $WLC = \Gamma\backslash\Omega_\Gamma$. La représentation d'holonomie de la structure donnée par $\iota(\Gamma\backslash\Omega_\Gamma)$ est alors ρ'. Mais $\rho'(st) = \rho(s^{-1}t) = \rho(t^{-1})\rho(ts^{-1})\rho(t)$ et $\rho'(s^{-1}t) = \rho(st)$. L'involution η échange alors les holonomies périphériques des deux pointes : on en déduit que ι échange les deux pointes de WLC. □

En particulier, on déduit qu'il existe voisinage de la première pointe dont l'image par la développante est un horotube invariant par $\rho(m_1) = \rho(ts^{-1})$. En effet, il est l'image par ι d'un voisinage de la deuxième pointe, dont l'image par la développante est un horotube invariant par $\rho(m_2) = \eta(\rho(s)^{-1}\rho(m_1)\rho(s))$.

La structure de Schwartz

Pour sa part, Schwartz avait déjà étudié dans son livre [Sch07] les groupes correspondant à l'axe réel dans le paramétrage de Parker et Will, en les construisant à partir de groupes de triangle. Il montre notamment que ces représentations sont discrètes sur le segment $[-\alpha_1^{\lim}, \alpha_1^{\lim}] \times \{0\}$, et que la représentation correspondant à $(\alpha_1^{\lim}, 0)$ est la représentation d'holonomie d'une uniformisation CR-sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. D'autre part, ses résultats peuvent être reformulés pour établir que l'image par une développante d'un voisinage de chaque pointe est un horotube. Il décrit aussi l'image des deux holonomies périphériques : la première est unipotente horizontale, et la deuxième est engendrée par un élément ellipto-parabolique $[P]$. En effectuant le calcul explicite de P à partir des données du chapitre 4 de [Sch07], on obtient que P conjugué dans $\mathrm{SU}(2,1)$ à

$$e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & e^{-3i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta = \frac{1}{3}\arccos(-\frac{7}{8})$. Dans les coordonnées de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, cette représentation se trouve au point $(3, w_{\mathrm{sch}})$, où $w_{\mathrm{sch}} = 2e^{i\theta} + e^{-2i\theta} \approx 1,09062813494126 + 0,557252430478823i$. C'est le point d'intersection des courbes rouges et bleue de la tranche de Parker-Will, tracée dans la figure 4.4.

4.2.5 Chirurgies CR-sphériques.

On se propose désormais d'appliquer le théorème de chirurgie 2.2.24 à l'uniformisation de Parker-Will du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Nous reprenons les notations de la section 2.2 du chapitre 2 en rapport avec les épaississements du bord pour énoncer les résultats plus simplement. Nous notons enfin (Dev_0, ρ_0) la structure CR-sphérique sur WLC donnée par l'uniformisation de Parker-Will. Nous utiliserons l'abus de langage qui consiste à identifier les représentations $\rho : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{SU}(2,1)$ à des représentations $\rho : \pi_1(WLC) \to \mathrm{PU}(2,1)$.

Application du théorème de chirurgie

Dans la section précédente, nous avons vu que les hypothèses du théorème de chirurgie 2.2.24 sont vérifiées : les images des deux holonomies périphériques sont engendrées par les éléments unipotents $\rho(m_1) = \rho(st)$ et $\rho(m_1) = \rho(ts^{-1})$, et il existe $s \in [0,1[$ tel que $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T_1}_{[s,1[})$ et $\mathrm{Dev}_0(\widetilde{T_2}_{[s,1[})$ soient des horotubes invariants par $\rho_0(m_1)$ et $\rho_0(m_2)$ respectivement.

Remarque 4.2.8. Pour toutes les représentations de $\pi_1(WLC)$ qui proviennent de représentations de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, les relations $\rho(l_1) = \rho(m_1)^3$ et $\rho(l_2) = \rho(m_2)^3$ sont vérifiées.

L'espace paramétré par Parker et Will est donc inclus dans $\mathcal{R}_1(\pi_1(WLC), \mathrm{PU}(2,1))$. Ces relations sont rigides, c'est à dire qu'elles sont vérifiées dans toute la composante de la variété des caractères de WLC. Ce fait est démontré, avec d'autres techniques, par Guilloux et Will dans [GW16].

En appliquant le théorème de chirurgie 2.2.24, on obtient :

Proposition 4.2.9. *Il existe un voisinage ouvert Ω de ρ_0 dans $\mathcal{R}_1(\pi_1(WLC), \mathrm{PU}(2,1))$ tel que, pour tout $\rho \in \Omega$, il existe une structure CR-sphérique $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ sur WLC et pour $i = 1, 2$:*

1. *Si $\rho(m_i)$ est loxodromique, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-1, 3)$ sur T_i.*
2. *Si $\rho(m_i)$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-p, n+3p)$ sur T_i.*
3. *Si $\rho(m_i)$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur le recollement de WLC avec la variété $V(p, q, n)$ le long de T_i.*

Remarque 4.2.10. Le marquage (l_0, m_0) du théorème 2.2.24 ne correspond pas au marquage (l_1, m_1) que nous considérons depuis la sous-section 4.2.1. Nous savons que $3m_1 - l_1 \in \ker(\rho)$ et que l'image de chaque représentation d'holonomie périphérique de T_1 est engendrée par $\rho(m_1)$. Le marquage auquel s'appliquent les conclusions du théorème est alors donné par $l_0 = m_1$ et $m_0 = 3m_1 - l_1$. En particulier, $nl_0 + pm_0 = nm_1 + p(3m_1 - l_1) = -3l_1 + (n+3p)m_1$. La relation est la même pour l'holonomie périphérique de T_2.

En particulier, dans la région paramétrée par Parker et Will, l'holonomie périphérique de T_2 reste unipotente, tandis qu'au voisinage de ρ, il existe des ouverts où l'holonomie périphérique de T_1 est loxodromique et elliptique respectivement.

On obtient donc :

Corollaire 4.2.11. *Il existe une infinité de structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-1, 3)$ sur T_1.*

Remarque 4.2.12. À l'aide de SnapPy, on sait que la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-1, 3)$ sur T_1 est une variété avec une pointe torique de groupe fondamental $\langle a, b \mid a^3 b^3 \rangle$ qui n'est pas hyperbolique. La chirurgie de Dehn sur T_2 de type $(0, 1)$ de cette variété est l'espace lenticulaire $L(3, 1)$.

Chirurgies de Dehn attendues

Afin d'expliciter le troisième point de la proposition 4.2.9 et pouvoir déterminer les chirurgies de Dehn sur T_1 qui admettent des structures CR-sphériques prolongeant $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$, nous avons besoin d'identifier le type de l'élément elliptique qui apparaît comme générateur de l'holonomie périphérique lors de la déformation. À l'extérieur de la courbe des

unipotents de la région paramétrée par Parker et Will, $\rho(m_1)$ est elliptique. On se place dans un premier temps au point ρ_1 de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, \frac{2\pi}{3})$. En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, l'élément $\rho_1(m_1)$ est conjugué à

$$\rho_1(s^{-1}t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\omega & -1 \\ -\sqrt{2}\omega & 1+2\omega^2 & -\sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & -2\omega^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $-\omega^2$, $-\omega$ et 1, de vecteurs propres respectifs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\omega \\ \sqrt{2}\omega^2 \end{pmatrix}.$$

De plus, ces vecteurs sont de normes $\Phi(V_1) = \Phi(V_2) = 1$ et $\Phi(V_3) = -1$: le point fixe de $\rho(s^{-1}t)$ est alors $[V_3]$. Après calcul, on déduit que $\rho_1(m_1)$ est de type $(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9})$. Or, si un élément elliptique régulier admet comme valeurs propres de ses vecteurs positifs $e^{2i\pi\alpha}$ et $e^{2i\pi\beta}$, les valeurs $2\alpha - \beta$ et $2\beta - \alpha$ ne s'annulent pas. Si de plus l'élément est de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, quitte à échanger α et β on a $2\alpha - \beta = \frac{p}{n}$ et $2\beta - \alpha = \frac{q}{n}$. Comme $\mathcal{E}$ est connexe, par continuité des vecteurs propres et des valeurs propres des matrices, si $\rho \in \mathcal{E}$ est de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ avec $p \geq q$, alors $p > 0 > q$.

Puisque $\mathrm{tr}(m_1)$ est un paramètre local de la région paramétrée par Parker et Will, il existe un ouvert autour de $3 \in \mathbb{C}$ de traces atteintes par $\mathrm{tr}(m_1)$. Or nous venons de voir que si $\rho(m_1)$ est dans $\mathcal{E}$ et sa trace est de la forme $e^{2i\pi\frac{2p-1}{n}} + e^{2i\pi\frac{2-p}{n}} + e^{2i\pi\frac{-p-1}{n}}$ avec $1 > 0 > p > -n$, alors $\rho(m_1)$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$. En changeant p en $-p$ pour avoir un énoncé plus lisible, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.2.13. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous les entiers p, n premiers entre eux vérifiant $0 < p < n$ et $\frac{p}{n} < \delta$, il existe une déformation de la structure (Dev_0, ρ_0) qui s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(p, n-3p)$ sur T_1.*

Remarque 4.2.14. Si l'ouvert pour lequel la proposition 4.2.13 s'applique est assez grand, on aura des structures CR-sphériques sur des variétés qui ont déjà été étudiées. En vérifiant sur SnapPy, on remarque que pour les paramètres $(p, n) = (1, 4)$, la chirurgie obtenue est celle du complémentaire du nœud de huit, et que la représentation correspondante coïncide avec celle de la structure de Deraux-Falbel. D'autre part, lorsque $(p, n) = (1, 5)$, la chirurgie de Dehn obtenue est la variété `m009` du recensement de Falbel, Koseleff et Rouillier de [FKR13], et la représentation coïncide avec celle étudiée par Deraux dans [Der15], où il montre qu'elle donne une uniformisation CR-sphérique de la variété `m009`.

On s'attend donc à ce que ces structures soient obtenues comme des chirurgies de Dehn CR-sphériques sur la structure de Parker-Will sur WLC. Nous le vérifierons dans la suite

de ce chapitre.

Chirurgies sur la structure de Schwartz

On peut aussi appliquer le théorème de chirurgie 2.2.24 à l'uniformisation de Schwartz de WLC que nous avons décrit brièvement dans le paragraphe 4.2.4. Dans la suite de ce texte nous ne reviendrions plus sur ce cas, et nous prendrons comme point de départ l'uniformisation de Parker et Will.

La structure de Schwartz vérifie les hypothèses du théorème de chirurgie 2.2.24 pour la pointe d'holonomie périphérique unipotente ; il suffit de décrire un espace de représentations pour lesquels la pointe qui n'est pas unipotente reste à holonomie périphérique constante et où l'holonomie périphérique unipotente de l'autre pointe devient elliptique ou loxodromique. Ceci revient à considérer les points de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de coordonnées (z, w_{sch}), où l'on prend comme point de départ les coordonnées $(3, w_{\mathrm{sch}})$ de la représentation de Schwartz que nous avons décrit dans le paragraphe 4.2.4.

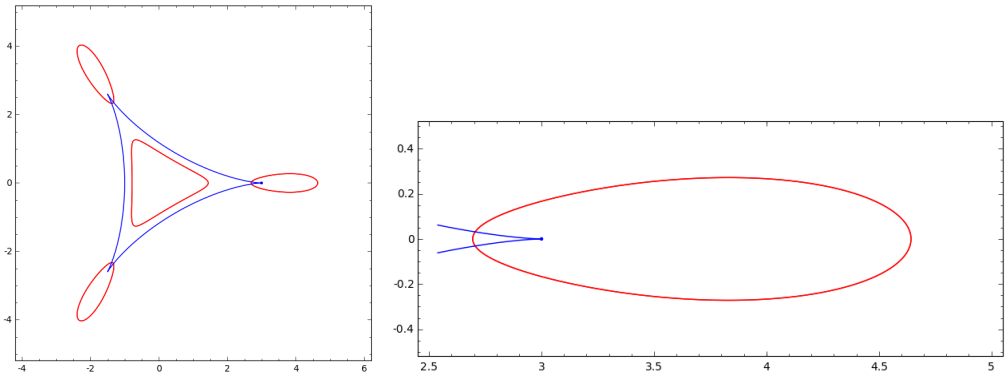


FIGURE 4.5 – La tranche de Schwartz, $w = w_{\mathrm{sch}}$ de $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Ces points correspondent à l'intérieur des lobes de la courbe rouge de la figure 4.5, sur laquelle est aussi tracée la courbe des éléments non réguliers. On constate qu'au voisinage du point de coordonnée 3, il y a des représentations pour lesquelles l'holonomie périphérique est loxodromique ou elliptique. Pour connaître en détail le type de l'elliptique obtenu par la déformation, l'argument de continuité donne dans le paragraphe 4.2.5 est encore valable : les elliptiques qui apparaissent sont donc de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, où $p > 0 > q$. En appliquant le théorème de chirurgie 2.2.24, et en notant ρ_{sch} la représentation d'holonomie de la structure de Schwartz sur WLC on obtient :

Proposition 4.2.15. *Il existe un voisinage ouvert Ω de ρ_{sch} dans $\mathcal{R}_1(\pi_1(WLC), \mathrm{PU}(2,1))$ tel que, pour tout $\rho \in \Omega$, il existe une structure CR-sphérique $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ sur WLC, proche de l'uniformisation de Schwartz, et telle que :*

1. *Si $\rho(m_1)$ est loxodromique, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-1, 3)$ sur T_1.*
2. *Si $\rho(m_1)$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-p, n+3p)$ sur T_1.*
3. *Si $\rho(m_1)$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur le recollement de WLC avec la variété $V(p, q, n)$ le long de T_1.*

Plus concrètement, pour les chirurgies de Dehn, on obtient les deux propositions suivantes :

Proposition 4.2.16. *Il existe un ouvert de dimension réelle 2 qui paramètre des structures CR-sphériques sur la chirurgie de Dehn de type $(-1, 3)$ sur T_1 sur WLC, qui s'obtiennent en déformant l'uniformisation de Schwartz.*

Proposition 4.2.17. *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous les entiers p, n premiers entre eux vérifiant $0 < p < n$ et $\frac{p}{n} < \delta$, il existe une déformation de l'uniformisation de Schwartz qui s'étend en une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(p, n-3p)$ sur T_1.*

Le complémentaire du nœud de 8

Nous faisons finalement une série de remarques autour du constat suivant, fait par Parker et Will dans [PW15] :

Remarque 4.2.18. Au point de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, \arctan(\sqrt{7}))$, en posant $G_1 = \rho(st)$, $G_2 = \rho((tst)^3)$ et $G_3 = \rho(ts)$, on obtient la représentation ρ_2 du groupe fondamental du complémentaire du nœud de huit trouvée par Falbel dans [Fal08]. Cette représentation est aussi la représentation d'holonomie de l'uniformisation de Deraux-Falbel, donnée dans [DF15].

Remarque 4.2.19. Au point de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, \arctan(\sqrt{7}))$, l'élément $\rho(m_1) = \rho(ts^{-1})$ est un elliptique de type $(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$. Si l'ouvert Ω donné par la proposition 4.2.9 contient le point $(0, \arctan(\sqrt{7}))$, la chirurgie de Dehn attendue est celle de type $(1, -1)$ sur T_1. Il s'agit, en effet, du complémentaire du nœud de huit.

En remarquant que tst est conjugué à st^{-1}, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.2.20. *Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathrm{SU}(2,1))$ une représentation. On a équivalence entre :*

1. *$\rho(tst)$ est d'ordre 4*
2. $\mathrm{tr}(\rho(st^{-1})) = 1$
3. *χ_ρ a pour coordonnées $(0, 0, z, 1, x)$ dans $\mathcal{X}_{\mathrm{SU}(2,1)}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ avec $z, x \in \mathbb{C}$*

4. *En posant* $G_1 = \rho(st)$, $G_2 = \rho((tst)^3)$ *et* $G_3 = \rho(ts)$, *on obtient une représentation de* $\pi_1(M_8)$.

Remarque 4.2.21. Dans ce cas, les coordonnées de χ_ρ sont de la forme $(0, 0, z_\rho, 1, x_\rho)$. L'application $[\rho] \mapsto z_\rho$ est un revêtement d'ordre 2 sur son image, en dehors de la courbe du bord où les points ont un unique antécédent. On retrouve ici la paramétrisation de la composante de la variété des caractères de M_8 donnée par Falbel, Guilloux, Koseleff, Rouillier et Thistlethwaite dans [FGK+16] que nous avons étudiée dans la section 3.2 du chapitre 3.

4.3 Déformation effective : Énoncés et stratégie de preuve

On se propose de donner une borne effective, au moins dans une direction, à la proposition 4.2.9, en déformant le domaine de Ford de l'uniformisation de Parker-Will. Nous allons considérer les représentations paramétrées par Parker et Will dans [PW15] de paramètre $(0, \alpha_2)$, où $\alpha_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, en prenant comme point de départ l'holonomie de l'uniformisation, qui a pour paramètre $(0, \alpha_2^{\lim})$.

4.3.1 Structures CR-sphériques : énoncés

Notation 4.3.1. Si ρ est la représentation de paramètre $(0, \alpha_2)$ dans la paramétrisation de Parker et Will, nous noterons $\Gamma(\alpha_2) = \mathrm{Im}(\rho)$ son image. Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous noterons souvent Γ pour $\Gamma(\alpha_2)$, le paramètre restant sous-entendu. Pour le paramètre $\alpha_2^{\lim}$, nous notons $\rho_\infty = \rho(\alpha_2^{\lim})$ et $\Gamma_\infty = \Gamma(\alpha_2^{\lim})$ Notons enfin ρ_n, pour $n \geq 4$, la représentation $\rho(\alpha_2)$ telle que $8\cos^2(\alpha_2) = 2\cos(\frac{2\pi}{n}) + 1$.

On se propose de montrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.3.2. *Soit* $n \geq 4$. *Soit* ρ_n *la représentation de paramètre* $(0, \alpha_2)$ *telle que* $8\cos^2(\alpha_2) = 2\cos(\frac{2\pi}{n}) + 1$ *dans la paramétrisation de Parker-Will. Alors* ρ_n *est la représentation d'holonomie d'une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead sur* T_1 *de type* $(1, n-3)$ *(i.e. de pente* $\frac{1}{n-3}$*).*

Théorème 4.3.3. *Soit* $\alpha_2 \in]0, \alpha_2^{\lim}[$. *Soit* ρ *la représentation de paramètre* $(0, \alpha_2)$ *dans la paramétrisation de Parker-Will. Alors* ρ *est la représentation d'holonomie d'une structure CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead sur* T_1 *de type* $(1, -3)$ *(i.e. de pente* $-\frac{1}{3}$*).*

Remarque 4.3.4. Nous donnerons une preuve du théorème 4.3.2 pour $n \geq 9$; les techniques que nous employons pour la preuve ne nous permettent pas de traiter les cinq derniers cas. Cependant, la combinatoire globale de bissecteurs dont nous aurions besoin pour conclure pour $n \geq 4$ est montrée par Parker, Wang et Xie dans [PWX16], mais

avec d'autres techniques, faisant intervenir notamment une paramétrisation d'une famille de groupes de triangle. Le résultat sur la combinatoire globale correspond à l'énoncé du théorème 4.3 de [PWX16] ; le lien entre leur notation et la notre est donnée par $U = I_1 I_2$, $S^{-1} = I_1 I_3$ et $T = I_3 I_2$.

4.3.2 Stratégie de preuve

À l'aide de l'image Γ_∞ de la représentation d'holonomie $\rho_\infty : \pi_1(WLC) \to \mathrm{PU}(2,1)$, Parker et Will construisent un domaine de Ford pour l'ensemble des classes à gauche $[A]\backslash\Gamma_\infty$ pour un certain élément unipotent $[A]$, qui engendre l'image d'une des holonomies périphériques. Cette structure a une symétrie qui échange les deux pointes, que nous avons vue dans la proposition 4.2.7 ; notons U l'image de A par l'involution η correspondante.

Nous allons considérer les déformations de la représentation d'holonomie ρ données par Parker et Will et déformer le domaine de Ford pour $[U]\backslash\Gamma$ en un domaine centré en un point fixe de $[U]$ et invariant par $[U]$, avec des identifications de faces donnés par des éléments de Γ et avec la même combinatoire locale que le domaine de Parker et Will. Si $[U]$ est elliptique, ce sera un domaine de Dirichlet, comme celui donné par Deraux et Falbel dans [DF15] pour le complémentaire du nœud de huit. Si par contre $[U]$ est loxodromique, le domaine sera centré *à l'extérieur* de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

En considérant séparément un voisinage de la pointe et le reste de la structure, nous identifierons la structure obtenue comme une chirurgie de Dehn, comme dans le théorème de chirurgie 2.2.24.

Nous allons déformer le domaine de Ford de Parker et Will. Pour le faire, nous déformerons leur construction en définissant une famille à paramètre de bissecteurs $(\mathcal{J}_k^\pm)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ invariante par l'action de $[U]$. On définira les 3-faces du domaine $\mathcal{F}_k^\pm \subset \mathcal{J}_k^\pm$ en coupant d'une part le bissecteur $\mathcal{J}_k^+$ par les bissecteurs $\mathcal{J}_k^-$ et $\mathcal{J}_{k+1}^-$ pour définir la face $\mathcal{F}_k^+$ et d'autre part en coupant le bissecteur $\mathcal{J}_k^-$ par les bissecteurs $\mathcal{J}_k^+$ et $\mathcal{J}_{k-1}^+$ pour définir la face $\mathcal{F}_k^-$. La figure 4.6 donne une idée de la forme de ces 3-faces. On donnera une définition plus précise dans la section 4.4, en même temps que les notations que nous utiliserons dans la suite.

Pour établir nos résultats, nous aurons besoin de vérifier trois conditions : une condition de topologie des faces, que nous noterons (TF), une condition de combinatoire locale des intersections, que nous noterons (CL) et une condition de combinatoire globale des intersections, que nous noterons (CG). Plus précisément, on peut les énoncer de la façon suivante :

Notation 4.3.5. Nous appellerons conditions (TF), (CL) et (CG) les conditions suivantes :

(TF) Les intersections de la forme $\mathcal{F}_k^+ \cap \mathcal{F}_k^-$ et $\mathcal{F}_k^+ \cap \mathcal{F}_{k-1}^-$ sont des disques de Giraud bitangents. En particulier, $\partial_\infty \mathcal{F}_k^+$ est bordée par deux cercles bitangents, qui défi-

nissent un «bigone» et un «quadrilatère». Il en est de même pour les intersections de la forme $\mathcal{F}_k^- \cap \mathcal{F}_k^+$ et $\mathcal{F}_k^- \cap \mathcal{F}_{k+1}^-$.

(CL) Les intersections de la forme $\mathcal{F}_k^+ \cap \mathcal{F}_{k+1}^+$ et $\mathcal{F}_k^- \cap \mathcal{F}_{k+1}^-$ sont réduites à deux points ; celles de la forme $\mathcal{F}_k^+ \cap \mathcal{F}_{k+1}^-$ sont réduites à un point ; tous ces points se trouvent dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

(CG) La face $\mathcal{F}_k^\pm$ intersecte $\mathcal{F}_{k+l}^\pm$ si et seulement si $l \in \{-1, 0, 1\}$. La face $\mathcal{F}_k^+$ intersecte $\mathcal{F}_{k+l}^-$ si et seulement si $l \in \{-1, 0, 1\}$. Les indices sont pris modulo n lorsque $[U]$ est elliptique d'ordre n.

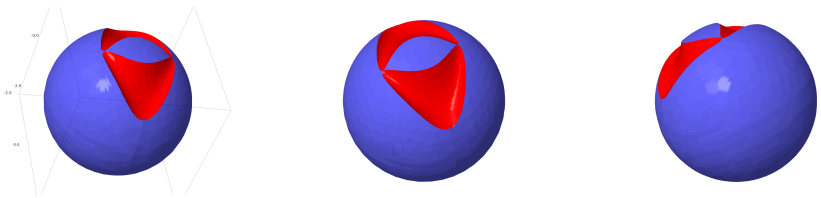


FIGURE 4.6 – Vues schématiques d'une face $\mathcal{F}_k^\pm$. La région bleue est dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; les deux régions rouges sont des disques de Giraud dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. La région bleue est composée d'un bigone $B_k^\pm$ et d'un quadrilatère $Q_k^\pm$.

Si ces trois conditions sont vérifiées, alors les faces $\mathcal{F}_k^\pm$ sont bien définies et bordent un domaine dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui est muni des mêmes identifications que celui de Parker et Will données dans [PW15]. Il en est de même pour le bord à l'infini du domaine, qui est bordé par les bigones et quadrilatères de $\partial_\infty \mathcal{F}_k^\pm$. La figure 4.6 donne une vue schématique de la topologie des faces, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Dans le cas où les trois conditions sont vérifiées, le domaine défini dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ muni des identifications de faces détermine une structure CR-sphérique sur WLC, qui s'étend à la chirurgie prévue par le théorème 4.2.9, à savoir :

1. Si $[U]$ est loxodromique, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-1, 3)$ sur T_1.
2. Si $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{1}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur la chirurgie de Dehn de WLC de type $(-p, n + 3p)$ sur T_1.
3. Si $[U]$ est elliptique de type $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, la structure $(\mathrm{Dev}_\rho, \rho)$ s'étend en une structure sur le recollement de WLC avec la variété $V(p, q, n)$ le long de T_1.

Nous allons montrer les conditions (TF), (CL) et (CG) dans le cas particulier des déformations de paramètre $(0, \alpha_2)$ pour $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ de la paramétrisation de Parker-Will. Ceci nous donnera les théorèmes 4.3.3 et 4.3.2.

Nous allons commencer par fixer les notations et rappeler la combinatoire initiale dans la section 4.4. Ensuite, en supposant vraies les conditions (TF), (CL) et (CG), nous donnerons la preuve des énoncés sur les structures CR-sphériques dans la section 4.5. Nous allons par la suite vérifier les trois conditions, ce qui relève d'un travail plus technique. Nous

montrerons la condition de topologie des faces (TF) dans la section 4.6, puis la condition de combinatoire locale (CL) dans la section 4.7, et finalement nous considérerons la condition de combinatoire globale (CG) en deux temps, dans la section 4.8 pour une stratégie globale de preuve, puis dans les sous-sections 4.8.4 pour le cas où $[U]$ est loxodromique et 4.8.5 pour le cas où $[U]$ est elliptique.

4.3.3 Résultats utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré

On peut se demander si les structures CR-sphériques données par les théorèmes 4.3.2 et 4.3.3 sont uniformisables. Pour avoir un tel résultat, nous aurons besoin d'appliquer un théorème du polyèdre de Poincaré dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nous discuterons une version de ce théorème, dont une preuve complète paraîtra dans le livre de Parker [Parar] dans l'annexe B. En appliquant le théorème du polyèdre de Poincaré dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ à partir du théorème 4.3.2, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.3.6. *Soit $n \geq 4$. Alors la chirurgie de Dehn du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead sur T_1 de pente $\frac{1}{n-3}$ admet une uniformisation CR-sphérique, donnée par le groupe Γ_n.*

Encore une fois, notre preuve n'est valable que pour $n \geq 9$; et l'application du théorème du polyèdre de Poincaré est essentiellement la même que celle faite par Parker, Wang et Xie dans [PWX16]. En reprenant les résultats de combinatoire des intersections montrés dans [PWX16] on peut compléter la preuve pour les cinq derniers cas. Pour les paramètres $\alpha_2 \in [\frac{\pi}{6}, \alpha_2^{\lim}[$, le théorème du polyèdre de Poincaré s'applique encore, et, mis à part la condition d'être un *polyèdre* (où toutes les faces sont homéomorphes à des boules), on vérifie toutes les hypothèses lorsque $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$: on pourra voir le lemme 4.6.1 pour plus de détails. Ceci nous permet de conjecturer l'énoncé suivant :

Conjecture 4.3.7. Soit $\alpha_2 \in]0, \alpha_2^{\lim}[$. Alors le groupe $\Gamma(\alpha_2)$ donne une uniformisation CR-sphérique sur la chirurgie de Dehn du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead sur T_1 de pente $-\frac{1}{3}$.

4.4 Notations et combinatoire initiale

Avec les notations et les outils liés aux bissecteurs, aux exteurs et à certaines de leurs intersections que nous avons étudié dans le chapitre 1, nous allons décrire une déformation du domaine de Ford construit par Parker et Will dans [PW15]. Commençons par rappeler la combinatoire de ce domaine et par fixer des notations pour certains éléments du groupe et des points dans $\mathbb{CP}^2$.

4.4.1 Notations - points remarquables

Fixons d'abord des notations pour certains éléments du groupe et des points remarquables de $\mathbb{CP}^2$ que nous allons considérer.

Notation 4.4.1 (Éléments)**.** Dans la famille de représentations ρ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle s, t\rangle$ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ paramétrée par par Parker et Will, notons $S = \rho(s)$ et $T = \rho(t)$. Ce sont deux éléments elliptiques réguliers d'ordre 3.

Notons, comme le font Parker et Will, $A = ST$ et $B = TS$. Ces deux éléments, conjugués par S, sont unipotents dans leur famille de représentations, paramétrée par $(\alpha_1, \alpha_2) \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$. Finalement, nous notons $U = S^{-1}T$, $V = SUS^{-1} = TS^{-1}$ et $W = SVS^{-1} = STS$.

Notation 4.4.2 (Points fixes)**.** Si $[G] \in \mathrm{PU}(2,1)$ est un élément unipotent ou régulier, nous noterons $[p_G] \in \mathbb{CP}^2$ un point fixe particulier.

— Si $[G]$ est parabolique, $[p_G]$ est son unique point fixe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.
— Si $[G]$ est elliptique régulier, $[p_G]$ est son unique point fixe dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.
— Si $[G]$ est loxodromique, $[p_G]$ est son unique point fixe dans $\mathbb{CP}^2 - \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

Remarque 4.4.3. Lorsque $[G]$ est unipotent ou régulier, l'application $[G] \mapsto [p_G]$ est continue.

Ainsi, sur toute la région paramétrée par Parker et Will, on a : $[p_A] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $[p_B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nous nous restreindrons, dans un premier temps, aux déformations à partir de la structure de Parker-Will avec coordonnée $\alpha_1 = 0$. Dans ce cas, on a :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}e^{-i\alpha_2} & -1 \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}e^{-i\alpha_2} \\ -1 & \sqrt{2}e^{i\alpha_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}e^{i\alpha_2} & -1 \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2} & 1 + 2e^{2i\alpha_2} & 2\sqrt{2}\cos(\alpha_2) \\ -1 & 2\sqrt{2}\cos(\alpha_2) & 2 + 2e^{-2i\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Puis $[p_U] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha_2} \\ e^{2i\alpha_2} \end{bmatrix}$, $[p_V] = [Sp_U] = \begin{bmatrix} -e^{2i\alpha_2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha_2} \\ -1 \end{bmatrix}$ et $[p_W] = [Sp_V] = \begin{bmatrix} -e^{2i\alpha_2} \\ \sqrt{2}e^{3i\alpha_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha_2} \\ e^{2i\alpha_2} \end{bmatrix}$

Notation 4.4.4. Lorsque U n'est pas unipotent, il a trois valeurs propres distinctes. Nous noterons p'_U et p''_U des vecteurs propres associés aux valeurs propres différentes de 1. En notant δ une racine carrée de $(8\cos^2(\alpha_2)-3)(8\cos^2(\alpha_2)+1)$, on a :

$$[p'_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1+\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)-\delta \end{bmatrix} \text{ et } [p''_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1-\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)+\delta \end{bmatrix}$$

Remarque 4.4.5. Lorsque $\alpha_2 > \alpha_2^{\lim}$, l'élément U est elliptique régulier de valeurs propres $1, e^{i\beta}$ et $e^{-i\beta}$ pour un certain $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Les vecteurs propres respectifs sont alors p_U, p'_U et p''_U. Dans ce cas, $\mathrm{tr}(U) = 2\cos(\beta)+1$ et $(8\cos^2(\alpha_2)-3)(8\cos^2(\alpha_2)+1) = (\mathrm{tr}(U)-3)(\mathrm{tr}(U)+1) = -4\sin^2(\beta)$. On prendra alors $2i\sin(\beta)$ pour valeur de δ.

Remarque 4.4.6. Lorsque $\alpha_2 < \alpha_2^{\lim}$, l'élément U est loxodromique de valeurs propres $1, e^l$ et e^{-l} pour un certain $l \in \mathbb{R}^+$. Les vecteurs propres respectifs sont alors p_U, p'_U et p''_U. Dans ce cas, $\mathrm{tr}(U) = 2\cosh(l)+1$ et $(8\cos^2(\alpha_2)-3)(8\cos^2(\alpha_2)+1) = (\mathrm{tr}(U)-3)(\mathrm{tr}(U)+1) = 4\sinh^2(l)$. On prendra alors $2\sinh(l)$ pour valeur de δ.

4.4.2 Combinatoire de l'uniformisation de Parker-Will

Notation 4.4.7. En suivant l'article de Parker et Will [PW15], on note $\mathcal{I}_0^+ = \overline{\mathfrak{B}}(p_A, S^{-1}p_A)$, puis, pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathcal{I}_k^+ = A^k\mathcal{I}_0^+ = \overline{\mathfrak{B}}(p_A, A^kS^{-1}p_A)$. De même, on note $\mathcal{I}_0^- = \overline{\mathfrak{B}}(p_A, Sp_A)$ et $\mathcal{I}_k^- = A^k\mathcal{I}_0^- = \overline{\mathfrak{B}}(p_A, A^kSp_A)$. Ce sont des bissecteurs fermés dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

Parker et Will montrent que, pour la représentation de paramètre $(0, \alpha_2^{\lim})$, les bissecteurs $\mathcal{I}_k^\pm$ bornent un polyèdre infini dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, localement fini et invariant par $[A]$, qui est muni d'identifications de faces. Son bord à l'infini est la région de $\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ contenant $[p_A]$ et délimitée par les sphères $\partial_\infty\mathcal{I}_k^+$ et $\partial_\infty\mathcal{I}_k^-$; Parker et Will montrent que cette région est un domaine de Ford invariant par $[A]$ pour l'uniformisation CR-sphérique du complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.

Le domaine dans $\partial_\infty\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ a quatre types de faces : des quadrilatères Q_k^+ et Q_k^-, inclus dans $\partial_\infty\mathcal{I}_k^+$ et $\partial_\infty\mathcal{I}_k^-$ respectivement, et des bigones B_k^+ et B_k^-, inclus dans $\partial_\infty\mathcal{I}_k^+$ et $\partial_\infty\mathcal{I}_k^-$ respectivement. On peut voir les incidences, combinatoirement, dans la figure 4.7.

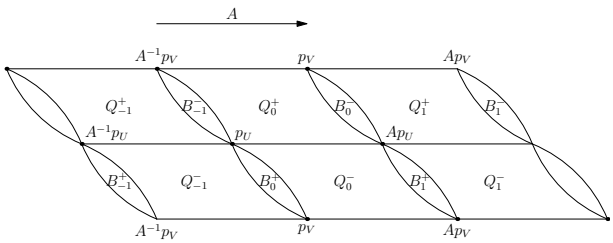


FIGURE 4.7 – Combinatoire du bord du domaine de Ford pour Γ_∞ construit par Parker et Will. Les deux bords horizontaux s'identifient par une translation verticale.

Ainsi, le quadrilatère Q_0^+ a pour sommets $[p_U]$, $[A^{-1}p_V]$, $[p_V]$ et $[Ap_U]$ et le bigone B_0^+ a pour sommets $[p_U]$ et $[p_V]$. Les arêtes de Q_0^+ et B_0^+ sont des arcs des cercles de Giraud $\partial_\infty \mathcal{I}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{I}_{-1}^+$ et $\partial_\infty \mathcal{I}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{I}_0^-$, qui contiennent respectivement $\{[A^{-1}p_V], [p_U], [p_V]\}$ et $\{[Ap_V], [p_U], [p_V]\}$.

Remarque 4.4.8. Cette configuration donne bien un bigone et un quadrilatère puisque les deux cercles de Giraud sont tangents en $[p_U]$ et $[p_V]$. La preuve est faite en détail dans [PW15], et nous redémontrerons ce fait quand nous déformerons ces domaines.

Nous n'utiliserons cependant pas ce domaine pour la déformation, mais son image par l'involution ι que nous avons définie dans la proposition 4.2.7. Rappelons que ι est compatible avec l'involution $\eta : \mathrm{Im}(\rho) \to \mathrm{Im}(\rho)$ qui vérifie $\eta(T) = T$ et $\eta(S) = S^{-1}$. Ainsi, $\eta(A) = U$ et $\eta(B) = V$.

Notation 4.4.9. Nous noterons $\mathcal{J}_0^\pm = \iota(\mathcal{I}_0^\pm)$. Ainsi, $\mathcal{J}_k^+ = U^k\overline{\mathfrak{B}}(p_U, p_V)$ et $\mathcal{J}_k^- = U^k\overline{\mathfrak{B}}(p_U, p_W)$. Par ailleurs, nous ferons un abus de langage et nous noterons encore $Q_k^\pm$ et $B_k^\pm$ les images des quadrilatères et des bigones par l'involution ι.

Les incidences et la combinatoire du bord du nouveau domaine de Ford dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ que nous considérons sont données dans la figure 4.8. Le quadrilatère Q_0^+ a pour sommets $[p_A]$, $[U^{-1}p_B]$, $[p_B]$ et $[Up_A]$ et le bigone B_0^+ a pour sommets $[p_A]$ et $[p_B]$. Les arêtes de Q_0^+ et B_0^+ sont des arcs des cercles de Giraud $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_{-1}^+$ et $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_0^-$, qui contiennent respectivement $\{[U^{-1}p_B], [p_A], [p_B]\}$ et $\{[Up_A], [p_A], [p_B]\}$.

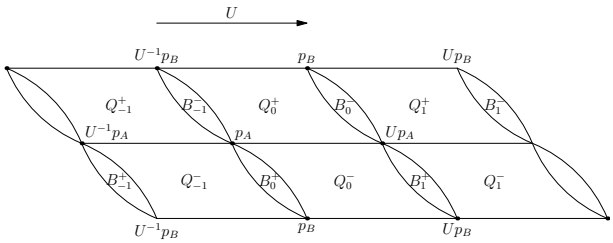


FIGURE 4.8 – Combinatoire du bord du domaine de Ford après l'involution. Les deux bords horizontaux s'identifient par une translation verticale.

Par ailleurs, nous noterons les faces du domaine contenu dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

Notation 4.4.10. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit la 3-face $\mathcal{F}_k^+$ comme

$$\mathcal{F}_k^+ = \left\{ [z] \in \mathcal{J}_k^+ \mid |\langle z, p_U\rangle| \leq \min(|\langle z, U^k p_W\rangle|, |\langle z, U^{k-1}p_W\rangle|) \right\}.$$

Son bord dans $\mathcal{J}_k^+$ est alors donné par $\mathcal{J}_k^+ \cap (\mathcal{J}_k^- \cup \mathcal{J}_{k-1}^-)$. On pose aussi la face $\mathcal{F}_k^-$ comme

$$\mathcal{F}_k^- = \left\{ [z] \in \mathcal{J}_k^- \mid |\langle z, p_U\rangle| \leq \min(|\langle z, U^k p_V\rangle|, |\langle z, U^{k+1}p_V\rangle|) \right\}.$$

Son bord dans $\mathcal{J}_k^-$ est alors donné par $\mathcal{J}_k^- \cap (\mathcal{J}_k^+ \cup \mathcal{J}_{k+1}^+)$.

Remarque 4.4.11. Le bord de la face $\mathcal{F}_k^+$ est, a priori, l'union des deux disques de Giraud $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$ et $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_{k-1}^-$. Nous allons montrer, dans la section 4.6, que c'est bien le cas, et que ces deux disques sont bi-tangents à l'infini tout au long de la déformation.

On se propose de déformer le domaine de Ford de Parker-Will en un domaine avec la même combinatoire locale. Ce sera soit un domaine de Dirichlet, soit un domaine de Ford centré *en dehors* de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ suivant que $[U]$ soit elliptique ou loxodromique. Désormais, tous les points et les éléments de la représentation de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathrm{SU}(2,1)$ dépendent du paramètre α_2, que nous faisons varier.

Rappelons que les représentations de paramètre $\alpha_2 \in [-\alpha_2^{\lim}, \alpha_2^{\lim}]$ ont été étudiées par Parker et Will dans [PW15] à l'aide d'un domaine de Ford dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ centré au point $[p_A]$. Ils montrent, grâce au théorème du polyèdre de Poincaré, que la représentation de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est alors fidèle et discrète, et que le quotient de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par son image est une variété. De plus, lorsque $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$, ils montrent que la variété au bord est le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead, comme nous venons de le décrire.

D'autre part, Parker, Wang et Xie étudient les représentations de paramètre $\alpha_2 \in]\alpha_2^{\lim}, \frac{\pi}{2}[$ pour lesquelles $[U]$ est d'ordre fini ≥ 4. Ils obtiennent ces groupes comme le sous-groupe d'indice 2 d'un certain groupe de triangle $(3,3,n)$ engendré par les involutions I_1, I_2, I_3. Pour notre notation, on a $S = I_3 I_1$, $T = I_3 I_2$ et $U = I_1 I_2$. Ils construisent un domaine de Dirichlet dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour ces groupes, et montrent à l'aide du théorème du polyèdre de Poincaré qu'ils sont discrets, et que le quotient de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ par ces groupes est une variété. Lorsque $n \geq 9$, ces domaines de Dirichlet coïncident avec ceux que nous allons construire dans la suite, mais nous allons étudier la combinatoire des intersections avec des techniques différentes, dans l'espoir que celles-ci s'adapteront aux représentations qui ne sont pas obtenues à partir de groupes de triangle. Nous reviendrons sur ceci dans la sous-section 4.8.5.

4.5 Déformation effective : Preuve

Nous allons supposer ici que les conditions de topologie des faces (TF), de combinatoire (CL) et de combinatoire globale (CG) sont vérifiées , et nous allons démontrer les théorèmes 4.3.2 et 4.3.3, puis, en considérant le théorème du polyèdre de Poincaré, nous discuterons le théorème 4.3.6 et la conjecture 4.3.7. Nous montrerons ensuite les conditions dans les sections 4.6, 4.7 et 4.8 respectivement. Nous supposons donc désormais que la combinatoire de l'incidence des faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$, ainsi que de leurs bords à l'infini, est celle attendue lorsque $\alpha_2 \in]0, \alpha_2^{\lim}]$ où l'élément $[U]$ est loxodromique ou unipotent, et lorsque $\alpha_2 \in]\alpha_2^{\lim}, \frac{\pi}{2}[$ et que $[U]$ est elliptique d'ordre fini ≥ 9.

Notation 4.5.1. Nous dirons ici que α_2 est un paramètre *admissible* si $\alpha_2 \in]0, \alpha_2^{\lim}]$ ou si $\alpha_2 \in]\alpha_2^{\lim}, \frac{\pi}{2}[$ et que $[U]$ est elliptique de type $(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ avec $n \geq 9$.

Remarque 4.5.2. Les paramètres pour lesquels $[U]$ est d'ordre $4, 5, 6, 7$ ou 8 conviennent aussi pour la suite, mais notre approche avec les sphères visuelles pour gérer les intersections globales ne nous permet pas de conclure pour ces paramètres. Le résultat est tout de même vrai ; on peut trouver une preuve dans [PWX16], où Parker, Wang et Xie montrent, avec d'autres techniques et faisant intervenir une paramétrisation de groupes de triangle, que la combinatoire globale des bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$ est celle qui est attendue lorsque $[U]$ est elliptique de type $(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ avec $n \geq 4$.

Commençons par fixer des notations et rappeler le résultat d'uniformisation de Parker et Will, qui donne une structure CR-sphérique sur WLC pour le paramètre $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$.

Notation 4.5.3. Notons $D_0 \subset \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ le domaine de Ford donné par Parker et Will dans [PW15]. Il correspond au paramètre $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$. Son bord est donné par les faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$. Notons aussi $\partial_\infty D_0 \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ son bord à l'infini. Le bord de ce dernier dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est donné par les bigones $B_k^{\pm}$ et les quadrilatères $Q_k^{\pm}$.

Dans [PW15], Parker et Will montrent que les identifications des faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$ de D_0 sont données par le groupe Γ_∞ modulo l'action de $[U]$: à l'aide du théorème du polyèdre de Poincaré, ils montrent que dans ce cas, le groupe Γ_∞ est discret et que la variété au bord, qui est homéomorphe à WLC, est uniformisable.

On sait donc que $\Gamma_\infty \backslash \partial_\infty D_0$ est homéomorphe au complémentaire de l'entrelacs de Withehead. Nous avons vu, dans la section 4.2.5, que l'image par la développante d'un voisinage de la pointe associée à T_1 est un horotube pour l'action de $[U]$. Si on considère uniquement un épaississement des quadrilatères et des bigones avant de faire le quotient de $\partial_\infty D_0$ par Γ_∞, on retrouve la structure pour WLC en dehors d'un voisinage de la pointe numéro 1.

À l'aide des conditions combinatoires (CL) et (CG), nous allons établir le lemme suivant, qui assure que le domaine D_0 se déforme en un domaine dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui a pour bord les faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$.

Lemme 4.5.4. *Si α_2 est un paramètre admissible, alors les faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$ bordent un domaine $D(\alpha_2)$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, obtenu comme déformation de D_0.*

Démonstration. Posons

$$D(\alpha_2) = \left\{ [z] \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : |\langle z, p_U \rangle| \leq \min(|\langle z, U^k p_V \rangle|, |\langle z, U^k p_W \rangle|) \right\}.$$

Ce sont les points de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ qui sont «plus près» de $[p_U]$ que des orbites par $[U]$ de $[p_V]$ et $[p_W]$. Lorsque $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$, ce domaine coïncide bien avec le domaine de Ford D_0 de Parker et Will. Il est alors bordé par les faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$ qui sont sur les bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est un paramètre admissible, l'élément $[U]$ engendre un sous-groupe discret et le domaine $D(\alpha_2)$ a son bord inclus dans les bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$. Or, d'après la

condition de combinatoire globale (CG), les bissecteurs n'intersectent que leurs voisins dans la combinatoire locale, et ils déterminent les faces $\mathcal{F}_k^{\pm}$: ces faces forment donc le bord du domaine $D(\alpha_2)$, qui est obtenu en déformant D_0. □

Il en est de même pour le bord à l'infini : les quadrilatères et les bigones bordent un domaine de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ qui s'obtient en déformant $\partial_\infty D_0$.

Lemme 4.5.5. *Si α_2 est un paramètre admissible, les bigones et quadrilatères $B_k^{\pm}$ et $Q_k^{\pm}$ bornent un domaine dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, obtenu comme déformation de $\partial_\infty D'_0$. C'est le bord à l'infini de $D(\alpha_2)$; nous le noterons $\partial_\infty D(\alpha_2)$.*

Nous allons maintenant nous intéresser à la topologie de la variété $\Gamma(\alpha_2)\backslash\partial_\infty D(\alpha_2)$ pour les paramètres admissibles, et nous allons montrer qu'elle correspond à celle attendue par le théorème de chirurgie 2.2.24, et que nous avons identifiée dans la section 4.2.5. Pour le faire, nous allons couper le domaine $\partial_\infty D(\alpha_2)$ en deux morceaux : l'un «proche» des faces, qui donnera une structure en dehors de la pointe associée à T_1, et l'autre «loin» des faces, qui donnera le tore à recoller sur le bord T_1 pour obtenir une chirurgie de Dehn.

Notation 4.5.6. Notons $\mathcal{V}_0$ un épaississement de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(Q_k^+ \cup B_k^+ \cup Q_k^- \cup B_k^-)$ dans $\partial_\infty D_0$, et N_0 son complémentaire.

Lemme 4.5.7. *Si α_2 est un paramètre admissible, $\mathcal{V}_0$ se déforme en un épaississement $\mathcal{V}(\alpha_2)$ de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(Q_k^+ \cup B_k^+ \cup Q_k^- \cup B_k^-)$ dans $\partial_\infty D(\alpha_2)$. Le quotient $\Gamma(\alpha_2)\backslash\mathcal{V}(\alpha_2)$ est homéomorphe à WLC privé de la pointe associée à T_1.*

Démonstration. D'après les conditions de combinatoire locale et globale (CL) et (CG), les bigones et les quadrilatères $B_k^{\pm}$ et $Q_k^{\pm}$. s'intersectent avec la même combinatoire locale que pour le paramètre $\alpha_2^{\lim}$, et forment donc une surface dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On peut donc considérer un épaississement $\mathcal{V}(\alpha_2)$ de cette surface, qui est alors une déformation de $\mathcal{V}_0$. Un domaine fondamental dans $\mathcal{V}(\alpha_2)$ pour l'action de $\langle[U]\rangle$ est alors donné par un épaississement de $B_0^+ \cup Q_0^+ \cup B_0^- \cup Q_0^+$. Les identifications des faces étant données par les mêmes éléments du groupe, la topologie du quotient $\Gamma(\alpha_2)\backslash\mathcal{V}(\alpha_2)$ est la même que celle de $\Gamma_\infty\backslash\mathcal{V}_0$, qui est exactement la structure de Parker-Will sur WLC privé de la pointe associée à T_1. □

Nous allons nous concentrer maintenant à l'autre partie de la structure, qui permet d'identifier la variété sur laquelle s'étend la structure sur WLC privé d'une pointe par le lemme 4.5.7. Ce sera à chaque fois la chirurgie de Dehn prévue dans la section 4.2.5.

Notation 4.5.8. Notons $N(\alpha_2) = \partial_\infty D(\alpha_2) - \mathcal{V}(\alpha_2)$

Les deux propositions suivantes concluent la preuve des théorèmes 4.3.2 et 4.3.3, en identifiant la topologie de la variété $\langle[U]\rangle\backslash N(\alpha_2)$, qui se recolle à la structure CR-sphérique sur WLC donnée par $\langle[U]\rangle\backslash D(\alpha_2)$

Proposition 4.5.9. *Si $\alpha_2 \in]0, \alpha_2^{\lim}[$, alors le quotient $\langle [U] \rangle \backslash N(\alpha_2)$ est un tore plein, où la courbe $l_1^{-1} m_1^3$ est homotopiquement triviale.*

Démonstration. Le domaine $\partial_\infty D_0$ est un horotube, qui est borné par les quadrilatères $Q_k^\pm$ et les bigones $B_k^\pm$ lorsque $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$. Si $\alpha_2 < \alpha_2^{\lim}$, l'élément $[U]$ est loxodromique. Dans ce cas, $N(\alpha_2)$ devient homéomorphe à un cylindre où la courbe $l_1^{-1} m_1^3$ est homotopiquement triviale. Cette vérification est analogue à celle que nous avons fait dans la preuve du théorème 2.2.24, plus précisément dans la section 2.2 du chapitre 2. Si $\alpha_2 < \frac{\pi}{6}$, alors le cylindre devient une surface de genre infini, mais, par continuité, la même courbe est homotopiquement triviale, car elle reste dans un compact fixé. □

Proposition 4.5.10. *Soit $\alpha_2 \in]\alpha_2^{\lim}, \frac{\pi}{2}[$ un paramètre admissible. Alors $[U]$ est elliptique d'ordre $n \geq 9$. Le quotient $\langle [U] \rangle \backslash N(\alpha_2)$ est alors un tore plein, où la courbe $l_1 m_1^{n-3}$ est homotopiquement triviale.*

Démonstration. Le domaine $\partial_\infty D_0$ est un horotube, qui est bordé par les quadrilatères $Q_k^\pm$ et les bigones $B_k^\pm$ lorsque $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$. Si $\alpha_2 > \alpha_2^{\lim}$ est un paramètre admissible, l'élément $[U]$ est elliptique et $\partial_\infty D(\alpha_2)$ est un tore invariant par $[U]$. Comme $[U] = \rho(m_1)$ est de type $(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$, ce tore n'est pas noué, et $N(\alpha_2)$ est un tore plein invariant par $[U]$ où la courbe $l_1 m_1^{n-3}$ est homotopiquement triviale. En effet, avec les notations de la remarque 4.2.10, les lacets $l_0^n = m_1^n$ et $m_0 = l_1^{-1} m_1^3$ sont homotopes dans $N(\alpha_2)$ à un des deux $\mathbb{C}$-cercles invariants par $[U]$: le lacet $l_1 m_1^{n-3}$ est homotopiquement trivial dans $N(\alpha_2)$. On en déduit que le quotient $\langle [U] \rangle \backslash N(\alpha_2)$ est, lui aussi, un tore plein où la courbe $l_1 m_1^{n-3}$ est homotopiquement triviale. Cette vérification est analogue à celle que nous avons fait dans la preuve du théorème 2.2.24, plus précisément dans la section 2.2 du chapitre 2. □

Les deux dernières propositions concluent la preuve des théorèmes 4.3.2 et 4.3.3. Il nous reste à discuter de l'utilisation du théorème du polyèdre de Poincaré pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour aboutir au théorème 4.3.6 et à une partie de la conjecture 4.3.7.

Lorsque $\alpha_2 \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ est un paramètre admissible, le domaine $D(\alpha_2)$ est un polyèdre invariant par l'action de $[U]$, et dont l'identification de faces est donnée par S et ses conjugués par $[U]$. On est dans le cadre du théorème du polyèdre de Poincaré pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ que nous décrivons dans l'annexe B, et dont une preuve paraîtra dans le livre de Parker [Parar].

En appliquant ce théorème au domaine $D(\alpha_2)$ et les identifications de faces entre les $\mathcal{F}_k^\pm$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, on déduit que pour les paramètres α_2 admissibles, le groupe $\Gamma(\alpha_2)$ est discret et que la structure de la variété au bord $\Gamma(\alpha_2) \backslash D(\alpha_2)$ est uniformisable. Ceci montre le théorème 4.3.6 et une partie de la conjecture 4.3.7.

Lorsque $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$, le domaine $D(\alpha_2)$ a les mêmes identifications de faces, mais les faces $\mathcal{F}_k^\pm$ ne sont plus homéomorphes à des boules de dimension 3 : on ne se trouve donc pas dans les conditions d'application du théorème du polyèdre de Poincaré pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On

peut tout de même concevoir qu'un énoncé analogue s'applique, pour des domaines dont les faces ne sont pas des boules, mais nous n'irons pas plus loin dans cette direction, en nous limitant à énoncer la conjecture 4.3.7.

Pour compléter les preuves que nous venons de donner, il nous reste à montrer les conditions de topologie des faces (TF), combinatoire locale (CL) et combinatoire globale (CG). La suite de ce chapitre sera donc consacrée à montrer ces trois points, qui sont plutôt techniques. En effet, ce n'est pas évident de pouvoir se ramener à un nombre fini de vérifications pour les considérations globales, et nous aurons besoin de mettre en œuvre des techniques liées aux sphères visuelles décrites dans le chapitre 1.

4.6 Topologie des faces lors de la déformation (TF)

Dans cette section, nous allons montrer la condition de topologie des faces (TF) et nous donnerons l'essentiel des outils pour montrer la condition de combinatoire locale (CL) que nous avons donné dans stratégie de preuve de la section 4.3. Remarquons d'abord qu'il y a un changement de la topologie des bissecteurs lorsque $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$.

Lemme 4.6.1. *Si $\alpha_2 \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\mathcal{J}_k^+$ et $\mathcal{J}_k^-$ sont des bissecteurs métriques. Si $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, alors $\mathcal{J}_k^+$ et $\mathcal{J}_k^-$ sont des éventails. Si $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$, alors $\mathcal{J}_k^+$ et $\mathcal{J}_k^-$ sont des cônes de Clifford.*

Démonstration. D'après la proposition 1.6.30, il suffit de considérer la signature de la restriction de la forme hermitienne au plan engendré par p_U et p_V. Or :

— $\langle p_U, p_U\rangle = \langle p_V, p_V\rangle = 4\cos^2(\alpha_2) - \frac{3}{2}$

— $\langle p_U, p_V\rangle = -\frac{3}{2}$

Dans la base (p_U, p_V), le déterminant de la forme hermitienne vaut

$$\left(4\cos^2(\alpha_2) - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\cos^2(\alpha_2)(4\cos^2(\alpha_2) - 3).$$

Il est donc strictement positif si $\alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{6}[$, nul si $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$ et strictement négatif si $\alpha_2 \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$. □

4.6.1 Incidence de points et bissecteurs

Commençons par vérifier l'incidence des points et des bissecteurs : ces points serviront de sommets pour les faces qui s'appuient sur les surfaces spinales.

Lemme 4.6.2. *Le point $[p_A]$ appartient aux bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$, $\mathcal{J}_0^-$,$\mathcal{J}_{-1}^+$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$.*

Démonstration. Il suffit de calculer les produits hermitiens de p_A avec $p_U, p_V, p_W, U^{-1}p_V$ et $U^{-1}p_W$ et de vérifier qu'ils ont le même module.

On calcule immédiatement : $\langle p_A, p_U\rangle = e^{2i\alpha_2}$, $\langle p_A, p_V\rangle = -1$ et $\langle p_A, p_W\rangle = e^{2i\alpha_2}$. De plus, $\langle p_A, U^{-1}p_V\rangle = \langle Up_A, p_V\rangle = e^{2i\alpha_2}$ et $\langle p_A, U^{-1}p_W\rangle = \langle Up_A, p_W\rangle = -1$. Tous ces produits sont de module 1, ce qui suffit à conclure. □

Lemme 4.6.3. *Le point $[p_B]$ appartient aux bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$, $\mathcal{J}_0^-$,$\mathcal{J}_1^+$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$.*

Démonstration. Il suffit de calculer les produits hermitiens de p_B avec p_U, p_V, p_W, Up_V et $U^{-1}p_W$ et de vérifier qu'ils ont le même module.

On calcule immédiatement : $\langle p_B, p_U\rangle = 1$, $\langle p_B, p_V\rangle = -e^{-2i\alpha_2}$ et $\langle p_B, p_W\rangle = 1$. De plus, $\langle p_B, Up_V\rangle = 1$ et $\langle p_B, U^{-1}p_W\rangle = \langle Up_B, p_W\rangle = 1$. Tous ces produits sont de module 1, ce qui suffit à conclure. □

On obtient, en translatant par U^k, le corollaire suivant :

Corollaire 4.6.4. *Pour $k \in \mathbb{Z}$ on a les incidences suivantes :*
- *Le bissecteur $\mathcal{J}_k^+$ contient les points $U^kp_A, U^{k+1}p_A, U^kp_B$ et $U^{k-1}p_B$.*
- *Le bissecteur $\mathcal{J}_k^-$ contient les points $U^kp_A, U^{k+1}p_A, U^kp_B$ et $U^{k+1}p_B$.*

Lemme 4.6.5. *Les intersections $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$ et $\mathcal{J}_k^- \cap \mathcal{J}_{k+1}^+$ sont des disques de Giraud. Si de plus $\alpha_2 \neq 0$, leur bord est un cercle lisse dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. On se trouve dans le cadre de la proposition 1.6.52 pour l'intersection $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$, puisque $p_V = Sp_U$ et $p_W = S^2p_U$. Il en est de même pour $\mathcal{J}_k^- \cap \mathcal{J}_{k+1}^+$ car $p_V = Tp_U$ et $p_W = T^2p_U$. Il suffit alors de calculer la quantité $\frac{\langle p_U \boxtimes p_V, p_U \boxtimes p_V\rangle}{\langle p_U \boxtimes p_V, p_W \boxtimes p_U\rangle}$ et de la comparer à $\frac{2}{3}$; l'autre cas est complètement analogue.

On calcule :

$$\langle p_U \boxtimes p_V, p_U \boxtimes p_V\rangle = -4\cos^2(\alpha_2)(4\cos^2(\alpha_2) - 3)$$
$$\langle p_U \boxtimes p_V, p_W \boxtimes p_U\rangle = -6\cos^2(\alpha_2)$$

Le quotient est alors égal à $\frac{2}{3}(4\cos^2(\alpha_2) - 3)$, qui est $\leq \frac{2}{3}$, avec égalité si et seulement si $\alpha_2 = 0$.

□

Corollaire 4.6.6. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :*
- *$\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$ est un disque de Giraud qui contient les points U^kp_A, U^kp_B et $U^{k+1}p_A$.*
- *$\mathcal{J}_k^- \cap \mathcal{J}_{k+1}^+$ est un disque de Giraud qui contient les points $U^kp_B, U^{k+1}p_A$ et $U^{k+1}p_B$.*

Remarque 4.6.7. Si $\alpha_2 = 0$ alors $\frac{2}{3}(4\cos^2(\alpha_2) - 3) = \frac{2}{3}$, et les intersections $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$ et $\mathcal{J}_k^- \cap \mathcal{J}_{k+1}^+$ sont des hexagones dont on identifie les sommets opposés. Il s'agit du cas limite de la proposition 1.6.52 ; le bord de chaque hexagone est constitué de trois $\mathbb{C}$-cercles.

Nous allons rappeler la définition des faces de dimension 3 du domaine de Ford dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui seront inclues dans les bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$ et que nous déformerons. Leur bord à l'infini sera constitué de bigones et quadrilatères, qui seront les faces bordant le domaine $\partial_\infty D(\alpha_2)$ de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ce domaine, muni des identifications de faces données par le groupe Γ, nous donne des structures CR-sphériques sur des chirurgies de Dehn de l'entrelacs de Whitehead.

Définition 4.6.8. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit la 3-face $\mathcal{F}_k^+$ comme

$$\mathcal{F}_k^+ = \left\{ [z] \in \mathcal{J}_k^+ \mid |\langle z, p_U \rangle| \leq \min(|\langle z, U^k p_W \rangle|, |\langle z, U^{k-1} p_W \rangle|) \right\}.$$

Son bord dans $\mathcal{J}_k^+$ est alors donné par $\mathcal{J}_k^+ \cap (\mathcal{J}_k^- \cup \mathcal{J}_{k-1}^-)$. On pose aussi la face $\mathcal{F}_k^-$ comme

$$\mathcal{F}_k^- = \left\{ [z] \in \mathcal{J}_k^- \mid |\langle z, p_U \rangle| \leq \min(|\langle z, U^k p_V \rangle|, |\langle z, U^{k+1} p_V \rangle|) \right\}.$$

Son bord dans $\mathcal{J}_k^-$ est alors donné par $\mathcal{J}_k^- \cap (\mathcal{J}_k^+ \cup \mathcal{J}_{k+1}^+)$.

Remarque 4.6.9. Le bord de la face $\mathcal{F}_k^+$ est, a priori, l'union des deux disques de Giraud $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_k^-$ et $\mathcal{J}_k^+ \cap \mathcal{J}_{k-1}^-$. Nous allons montrer, dans la section suivante, que c'est bien le cas tout au long de la déformation, et que ces deux disques sont bi-tangents à l'infini.

4.6.2 Symétrie

Le domaine que nous nous apprêtons à déformer admet une symétrie, qui échange les faces $\mathcal{F}_k^+$ et les faces $\mathcal{F}_k^-$. Grâce à cette symétrie et à l'invariance du domaine par $[U]$, il suffira de vérifier la plupart des énoncés que nous donnerons pour le bissecteur $\mathcal{J}_0^+$ ou $\mathcal{J}_0^-$ pour les montrer pour toute la famille.

Considérons l'involution I de $\mathrm{U}(2,1)$ donnée par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2}e^{-i\alpha_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle vérifie $Ip_U = p_U$, $Ip_V = p_W$ et $Ip_W = p_V$. De plus, on a $IUI = U^{-1}$; on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $IU^k p_V = IU^k I p_W = U^{-k} p_W$, et donc que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad I\mathcal{J}_k^+ = \mathcal{J}_{-k}^-$$

En particulier, l'action de $[I]$ sur $\mathbb{CP}^2$ échange les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_0^-$.

4.6.3 L'intersection $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$

Commençons par étudier l'intersection dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ de 3-faces de la forme $\mathcal{F}_k^{\pm} \cap \mathcal{F}_{k+1}^{\pm}$. Nous allons montrer que ces faces sont bi-tangentes dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et qu'elles ne s'intersectent pas

ailleurs. Ceci montrera la condition de topologie des faces (TF) que nous avons établi dans la section 4.3. Par symétrie, il suffit d'étudier l'intersection $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$. Nous utiliserons le lemme suivant, qui détermine l'intersection $\mathfrak{E}(p_U, p_V) \cap \mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W)$ pour étudier l'intersection des bissecteurs $\mathcal{J}_0^-$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$.

Lemme 4.6.10. *Les exteurs $\mathfrak{E}(p_U, p_V)$ et $\mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W)$ forment une paire équilibrée. Il s'intersectent en l'union d'un plan réel $\mathfrak{m}$ et d'une droite complexe l donnés par :*

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \mid z_1 \in \mathbb{R}, z_2 \in i\mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \mid z_2 \in i\mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$l = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin(\alpha_2) \end{bmatrix}^{\perp}$$

Démonstration. Considérons les vecteurs

$$f = \begin{pmatrix} -1 \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha_2) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\langle f, p_U \rangle = \langle f, p_V \rangle = \langle f', p_W \rangle = \langle f', U^{-1}p_W \rangle = 0$, donc $[f]$ est le foyer de $\mathfrak{E}(p_U, p_V)$ et $[f']$ est le foyer de $\mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W)$. Or on a :

$$\begin{aligned} \langle p_u, f' \rangle &= 2\cos(\alpha_2)e^{-i\alpha_2} \\ \langle p_V, f' \rangle &= -2\cos(\alpha_2)e^{-i\alpha_2} \\ \langle p_W, f \rangle &= (i\sin(\alpha_2)(4e^{-2i\alpha_2} + 2) - 2e^{-i\alpha_2})e^{-i\alpha_2} \\ \langle U^{-1}p_W, f \rangle &= (i\sin(\alpha_2)(4e^{2i\alpha_2} + 2) + 2e^{i\alpha_2})e^{-i\alpha_2} \\ &= -e^{-2i\alpha_2}\overline{\langle p_W, f \rangle} \end{aligned}$$

d'où $[f'] \in \mathfrak{E}(p_U, p_V)$ et $[f] \in \mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W)$. Il s'agit donc d'une paire équilibrée. D'après le théorème 1.6.41, l'intersection des deux exteurs est donnée par une droite complexe l et un $\mathbb{R}$-plan. La droite complexe est donnée par $l = l_{[f],[f']}$; on vérifie aisément qu'on a bien

$$l = l_{[f],[f']} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin(\alpha_2) \end{bmatrix}^{\perp}.$$

On sait que les points $[f], [f']$ et $[p_A]$ sont dans le $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$ donné dans l'énoncé.

Comme ces points ne sont pas alignés, il y a au plus un $\mathbb{R}$-plan qui les contient. Or, d'après le corollaire 4.6.4, nous savons que $[p_A] \in \mathfrak{E}(p_U, p_V) \cap \mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap \mathfrak{E}(p_U, U^{-1}p_W)$, et donc que $[p_A]$ appartient à $\mathfrak{E}(p_U, p_V) \cap \mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W)$. Puisque $[p_A] \notin l$, le $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$ passant par $[f], [f']$ et $[p_A]$ est le $\mathbb{R}$-plan de l'intersection de la paire équilibrée d'exteurs. $\square$

Pour comprendre l'intersection des faces $\mathcal{F}_0^-$ et $\mathcal{F}_{-1}^-$, commençons par regarder la triple intersection d'exteurs $\mathfrak{E}_0^+ \cap \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^-$. Nous utiliserons de façon cruciale le lemme précédent.

Lemme 4.6.11. *La triple intersection d'exteurs $\mathfrak{E}_0^+ \cap \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^-$ est donnée par deux cercles topologiques, un contenu dans le $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$ et l'autre contenu dans la droite complexe l. La triple intersection de bissecteurs $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_0^- \cap \mathcal{J}_{-1}^-$ est réduite à $\{[p_A], [p_B]\}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.6.4, nous savons que $[p_A]$ et $[p_B]$ sont dans la triple intersection. Considérons la triple intersection des exteurs $\mathfrak{E}_0^+ \cap \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^-$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_0^+ \cap \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^- &= \mathfrak{E}(p_U, p_V) \cap \mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap \mathfrak{E}(p_U, U^{-1}p_W) \\
&= \mathfrak{E}(p_U, p_V) \cap \mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap \mathfrak{E}(p_W, U^{-1}p_W) \\
&= \mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap (P \cup l)
\end{aligned}$$

Où $\mathfrak{m}$ et l sont le plan réel et la droite complexe du lemme 4.6.10. Regardons d'abord l'intersection $\mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap \mathfrak{m}$ avec le plan réel. Pour $r, s \in \mathbb{R}$, notons

$$q_{r,s} = \begin{pmatrix} r \\ i\sqrt{2}s \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } q_r = \begin{pmatrix} r \\ i\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$ est alors égal à $\{[p_A]\} \cup \{[\,q_r] \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{[q_{r,s}] \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\mathfrak{m} \cap \mathcal{J}_0^- = \{[p_A], [p_B]\}$. Soit $r, s \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
|\langle p_U, q_r\rangle|^2 &= r^2 + 2r\sin(\alpha_2) + 1 \\
|\langle p_W, q_r\rangle|^2 &= r^2 + 2r\sin(\alpha_2) + 1 + 8\cos^2(\alpha_2)
\end{aligned}$$

Les points de la forme $[q_r]$ ne sont donc pas dans la triple intersection. On calcule, par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\langle p_U, q_{r,s}\rangle|^2 &= r^2 + s^2 + 1 + 2r(2\cos(\alpha_2)^2 - 1) + 2(r-1)s\sin(\alpha_2) \\
|\langle p_W, q_{r,s}\rangle|^2 &= (8\cos(\alpha_2)^2 + 1)s^2 + r^2 + 2(r-1)s\sin(\alpha_2) - 2r + 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $|\langle p_W, q_{r,s}\rangle|^2 = |\langle p_U, q_{r,s}\rangle|^2$ si et seulement si $4\cos^2(\alpha_2)r = 8\cos^2(\alpha_2)s^2$. Comme $\alpha_2 \neq \pm\frac{\pi}{2}$, cette condition équivaut à $2s^2 - r = 0$. Or $\langle q_{r,s}, q_{r,s}\rangle = 2s^2 + 2r$. Si ce

point est dans $\mathcal{J}_0^-$, alors $s^2 + r \leq 0$ et $2s^2 - r \geq 3s^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $r = s = 0$. On a donc $\mathfrak{m} \cap \mathcal{J}_0^- = \{[p_A], [p_B]\}$.

Regardons maintenant l'intersection avec la droite complexe. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2}i\sin(\alpha_2) \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de $\begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin(\alpha_2) \end{bmatrix}^\perp$. Posons donc, pour $\mu \in \mathbb{C}$, $q_\mu = \begin{pmatrix} -1+\mu \\ 2\sqrt{2}i\sin(\alpha_2) \\ 1+\mu \end{pmatrix}$ On a :

$$\begin{aligned} |\langle p_U, q_\mu \rangle|^2 &= 4\cos^2(\alpha_2)|\mu|^2 \\ |\langle p_W, q_\mu \rangle|^2 &= 4(9 - 8\cos^2(\alpha_2))\cos^2(\alpha_2). \end{aligned}$$

Le point $[q_\mu]$ est donc dans la triple intersection si et seulement si $|\mu|^2 = 9 - 8\cos^2(\alpha_2)$. Or $\langle q_\mu, q_\mu \rangle = 2(|\mu|^2 - 4\cos^2(\alpha_2) + 3)$, donc pour les points de la triple intersection cette quantité est égale à $24\sin^2(\alpha_2)$. Ces points ne sont donc jamais dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

On en déduit que la triple intersection $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_0^- \cap \mathcal{J}_{-1}^-$ est réduite à $\{[p_A], [p_B]\}$. □

En étudiant le tore $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^- \subset \mathbb{CP}^2$, et ses intersections avec $\mathfrak{E}_0^+$ et $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$, nous obtenons finalement la proposition suivante. La combinatoire de ces intersections est donnée par la figure 4.9.

Proposition 4.6.12. *L'intersection $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$ est réduite à $\{[p_A], [p_B]\}$.*

Démonstration. Nous allons étudier le tore $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}_0^- \cap \mathfrak{E}_{-1}^- \subset \mathbb{CP}^2$, et ses intersections avec $\mathfrak{E}_0^+$ et $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$. Nous savons, grâce au lemme 4.6.11, que $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}_0^+$ est l'union de deux cercles qui séparent $\mathfrak{T}$ en deux parties. Nous allons montrer que $\mathfrak{T} \cap \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ est toujours du même côté de ces deux cercles, mis à part aux points $[p_A]$ et $[p_B]$; ceci permettra de conclure par un argument de continuité.

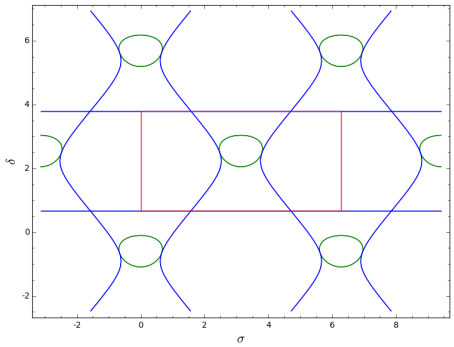
Commençons par paramétrer le tore $\mathfrak{T}$. On sait que $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}(p_U, p_W) \cap \mathfrak{E}(p_U, U^{-1}p_W)$, on peut donc le paramétrer, grâce à la proposition 1.6.43, par

$$\mathfrak{T} = \left\{ [(p_W - e^{i\theta}p_U) \boxtimes (U^{-1}p_W - e^{i\phi}p_U)] \mid (\theta, \phi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \right\}$$

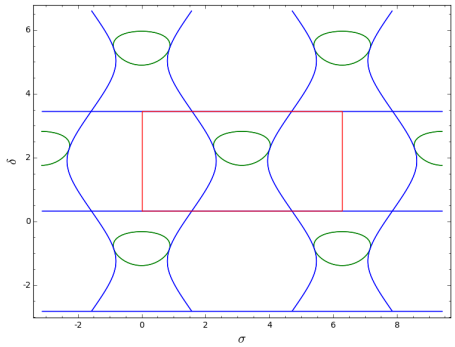
Calculons plus précisément les coordonnées de ces points. On a

$$(p_W - e^{i\theta}p_U) \boxtimes (U^{-1}p_W - e^{i\phi}p_U) = p_W \boxtimes U^{-1}p_W - e^{-i\theta}p_U \boxtimes U^{-1}p_W - e^{-i\phi}p_W \boxtimes p_U$$

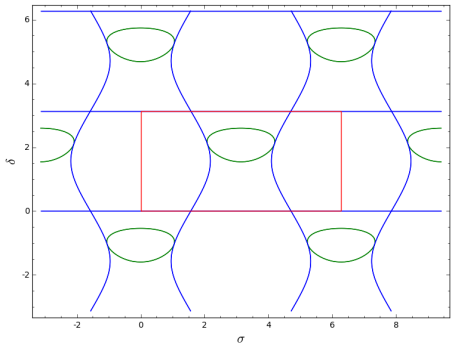
On calcule :



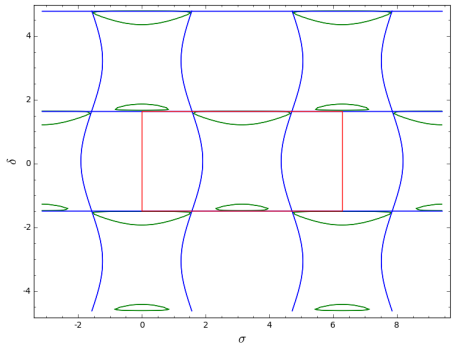
(a) $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim} \simeq 0,91$



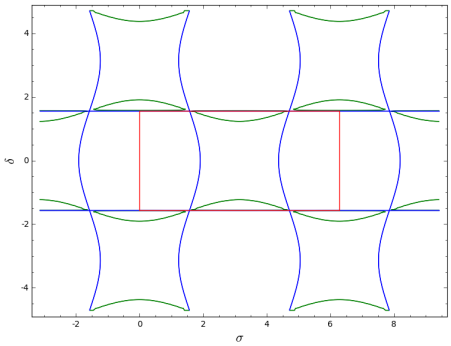
(b) $\alpha_2 = 0,7$



(c) $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$



(d) $\alpha_2 = 0,02$



(e) $\alpha_2 = 0$

FIGURE 4.9 – Les courbes des équations (4.1) et (4.2) (en bleu), la courbe d'intersection avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ (en vert) et le rectangle d'étude (en rouge) pour $\alpha_2 \in \{0; 0.02; \frac{\pi}{6}; 0.7; \alpha_2^{\lim}\}$.

$$\begin{aligned}
p_W \boxtimes U^{-1}p_W &= \sqrt{2}\cos(\alpha_2)e^{-2i\alpha_2}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}\\
p_U \boxtimes U^{-1}p_W &= \sqrt{2}\cos(\alpha_2)e^{-2i\alpha_2}\begin{pmatrix}2e^{2i\alpha_2}\\\sqrt{2}e^{i\alpha_2}\\-1\end{pmatrix}\\
p_W \boxtimes p_U &= \sqrt{2}\cos(\alpha_2)e^{-2i\alpha_2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}e^{-i\alpha_2}\\2e^{-2i\alpha_2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons, pour $(\theta,\phi)\in\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned}
v(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} - e^{-i\theta}\begin{pmatrix}2e^{2i\alpha_2}\\\sqrt{2}e^{i\alpha_2}\\-1\end{pmatrix} - e^{-i\phi}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}e^{-i\alpha_2}\\2e^{-2i\alpha_2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3-2e^{i(2\alpha_2-\theta)}+e^{-i\phi}\\-\sqrt{2}(e^{i(\alpha_2-\theta)}+e^{i(-\alpha_2-\phi)})\\-3+e^{-i\theta}-2e^{i(-2\alpha_2-\phi)}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le vecteur $v(\theta,\phi)$ est un multiple de $(p_W - e^{i\theta}p_U)\boxtimes(U^{-1}p_W - e^{i\phi}p_U)$. Ainsi, on a $\mathfrak{T} = \{[v(\theta,\phi)] \mid (\theta,\phi)\in\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\}$.

Afin de simplifier les calculs qui suivent, nous allons changer de variables. On pose

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\theta+\phi}{2}\\
\delta &= \frac{\theta-\phi}{2}
\end{aligned}$$

Avec ces nouvelles variables, on a

$$v(\theta,\phi) = e^{-i\sigma}\begin{pmatrix}-3e^{i\sigma}-2e^{i(2\alpha_2-\delta)}+e^{i\delta}\\-2\sqrt{2}\cos(\alpha_2-\delta)\\-3e^{i\sigma}-2e^{i(-2\alpha_2+\delta)}+e^{-i\delta}\end{pmatrix}.$$

Étudions maintenant l'intersection de $\mathfrak{T}$ avec $\mathfrak{E}_0^+$. Cette intersection est donnée par l'intersection de $\mathfrak{T}$ avec le plan réel $\mathfrak{m}$ et la droite complexe l données dans le lemme 4.6.10.

Commençons par regarder l'intersection avec $\mathfrak{m}$. Le point $[v(\theta,\phi)]$ appartient au $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$ si et seulement si les quotients des premier et troisième coefficients du vecteur par le

deuxième sont imaginaires purs, ce qui équivaut à :

$$-3\cos(\sigma) - 2\cos(2\alpha_2 - \delta) + \cos(\delta) = 0 \tag{4.1}$$

Remarquons que si $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, cette équation n'a pas de solutions en δ si $\sigma = 0$.

Regardons maintenant l'intersection avec la droite complexe l. Le point $[v(\theta, \phi)]$ appartient à la droite complexe l si et seulement si $\left\langle v, \begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \right\rangle = 0$, ce qui se traduit en coordonnées par :

$$2i(\cos(\alpha_2 - \delta) - \sin(\alpha_2)(2\sin(2\alpha_2 - \delta) - \sin(\delta)) = 0$$

or

$$\begin{aligned}
& (\cos(\alpha_2 - \delta) - \sin(\alpha_2)(2\sin(2\alpha_2 - \delta) - \sin(\delta)) \\
= \; & \cos(\alpha_2)\cos(\delta) + 2\sin(\alpha_2)\sin(\delta) - 2\sin(\alpha_2)(\sin(2\alpha_2)\cos(\delta) - \cos(2\alpha)\sin(\delta)) \\
= \; & \cos(\alpha_2)\cos(\delta)(1 - 4\sin^2(\alpha_2)) + 4\cos^2(\alpha_2)\sin(\alpha_2)\sin(\delta) \\
= \; & \cos(\alpha_2)(-\cos(\delta) + 2\cos(\delta)\cos(2\alpha_2) + 2\sin(2\alpha_2)\sin(\delta)) \\
= \; & \cos(\alpha_2)(-\cos(\delta) + 2\cos(2\alpha_2 - \delta))
\end{aligned}$$

Donc le point $v(\theta, \phi)$ appartient à la droite complexe l si et seulement si

$$2\cos(2\alpha_2 - \delta) - \cos(\delta) = 0 \tag{4.2}$$

Si $\alpha_2 \neq 0$, on peut ré-écrire cette condition sous la forme

$$\tan(\delta) = \frac{1 - 2\cos(2\alpha_2)}{2\sin(2\alpha_2)} \tag{4.3}$$

En notant $\delta_0 = \arctan\left(\frac{1-2\cos(2\alpha_2)}{2\sin(2\alpha_2)}\right)$, un point de $\mathfrak{T}$ appartient à la droite complexe l si et seulement si $\delta = \delta_0 \mod \pi$.

Nous prendrons désormais comme carte pour étudier $\mathfrak{T}$ le domaine $\{(\delta, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_0 \leq \delta \leq \delta_0 + \pi, 0 \leq \sigma \leq 2\pi\}$, et nous noterons $v(\sigma, \delta)$ la paramétrisation.

Pour étudier l'intersection de $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ avec $\mathfrak{T}$, nous allons étudier la fonction

$$h : (\sigma, \delta) \mapsto \langle v(\sigma, \delta), v(\sigma, \delta) \rangle$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \sigma}(\sigma,\delta) &= 2\mathrm{Re}\left(\left\langle \frac{\partial(e^{i\sigma}v(\sigma,\delta))}{\partial\sigma}, e^{i\sigma}v(\sigma,\delta)\right\rangle\right)\\
&= 2\mathrm{Re}\left(\left\langle \begin{pmatrix}-3ie^{i\sigma}\\ 0\\ -3ie^{i\sigma}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3e^{i\sigma}-2e^{i(2\alpha_2-\delta)}+e^{i\delta}\\ -2\sqrt{2}\cos(\alpha_2-\delta)\\ -3e^{i\sigma}-2e^{i(-2\alpha_2+\delta)}+e^{-i\delta}\end{pmatrix}\right\rangle\right)\\
&= 6\left(2(\sin(2\alpha_2-\delta-\sigma)+\sin(-2\alpha_2+\delta-\sigma))+\sin(\sigma-\delta)+\sin(\delta+\sigma)\right)\\
&= -12\sin(\sigma)(2\cos(2\alpha_2-\delta)-\cos(\delta))
\end{aligned}$$

Cette dérivée partielle s'annule donc si et seulement si $\delta \in \{\delta_0, \delta_0+\pi\}$ ou $\sigma \in \{0, \pm\pi\}$. Fixons $\delta_1 \in]\delta_0, \delta_0+\pi[$. On a, dans ce cas, $2\cos(2\alpha_2-\delta_1)-\cos(\delta_1) > 0$.
Considérons la fonction

$$h_{\delta_1} : \begin{array}{rcl}[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ \sigma & \mapsto & h(\sigma,\delta_1)\end{array}$$

On sait alors que $h'_{\delta_1}(\sigma) = \frac{\partial h}{\partial\sigma}(\sigma,\delta_1)$ a le même signe que $-\sin(\sigma)$; la fonction h_{δ_1} est donc strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et strictement croissante sur $[\pi, 2\pi]$. Les valeurs de σ pour lesquelles $h_{\delta_1}(\sigma) \leq 0$ forment donc un intervalle (éventuellement vide) centré en π. Or, d'après le lemme 4.6.11, on sait que $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}_0^+ \cap \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$ est réduit à $\{[p_A],[p_B]\}$, qui sont dans le $\mathbb{R}$-plan $\mathfrak{m}$. L'ensemble $\mathfrak{T} \cap \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{[p_A],[p_B]\}$ est alors dans la même composante connexe de $\mathfrak{T} - \mathfrak{E}_0^+$ que l'intervalle des points $v(\pi,\delta)$ pour $\delta_0 < \delta < \delta_0+\pi$.

Or, lorsque $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$, Parker et Will montrent dans [PW15] que $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$ est réduit à $\{[p_A],[p_B]\}$. On sait donc, pour ce paramètre α_2, que l'ensemble $\mathfrak{T} \cap \overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{[p_A],[p_B]\}$ est dans la composante connexe de $\mathfrak{T} - \mathfrak{E}_0^+$ qui n'est pas contenue dans $\mathcal{F}_0^-$. Par continuité, c'est vrai aussi pour tous les paramètres $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On en déduit que l'intersection $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$ est réduite à $\{[p_A],[p_B]\}$. □

Remarque 4.6.13. L'intersection des bissecteurs $\mathcal{J}_0^-$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$ n'est pas toujours connexe. Pour des valeurs de α_2 proches de 0, elle a deux composantes connexes, comme montré dans la figure 4.9d.

4.6.4 Les faces dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont bien définies

Nous allons montrer maintenant que les 2-faces dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont bien définies et que les incidences locales des bissecteurs sont les mêmes que celles de la structure de Parker et Will lorsque $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ceci montrera pratiquement la condition de combinatoire locale (CL) que nous avons donné dans la section 4.3. Nous devons montrer que chaque surface spinale de la forme $\partial_\infty \mathcal{F}_k^\pm$ est découpée en un quadrilatère et un bigone de sommets dans les orbites de $[p_A]$ et $[p_B]$ par des puissances de $[U]$. On prend comme point de départ,

et on s'en inspire, la preuve de Parker et Will dans [PW15]. La proposition 4.6.12 donne immédiatement le lemme suivant :

Lemme 4.6.14. *Les disques de Giraud $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_0^-$ et $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_{-1}^-$ sont tangents en $[p_A]$ et en $[p_B]$.*

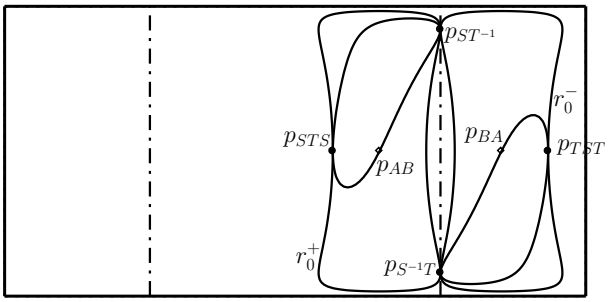


FIGURE 4.10 – (Tirée de [PW15]) Les traces des bissecteurs voisins de $\mathcal{I}_0^+$ sur $\partial_\infty \mathcal{I}_0^+$, avec des coordonnées géographiques sur la sphère $\partial_\infty \mathcal{I}_0^+$. On y voit un bigone de sommets $p_{ST^{-1}}$ et $p_{S^{-1}T}$ et un quadrilatère, de sommets $p_{ST^{-1}}$, p_{TST}, $p_{S^{-1}T}$ et p_{STS}.

Proposition 4.6.15. *Pour tout $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les bigones B_k^+ et B_k^-, ainsi que les quadrilatères Q_k^+ et Q_k^-, sont bien définis. Si $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$, alors le quadrilatère $Q_k^\pm$ est de genre 1, c'est-à-dire qu'il est difféomorphe à un tore privé d'un disque.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que le bigone B_0^+ et le quadrilatère Q_0^+ sont bien définis tout au long de la déformation. D'après le lemme 4.6.14, les cercles de Giraud $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_0^-$ et $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_{-1}^-$ sont bi-tangents et séparent la surface spinale $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+$ en quatre composantes, comme dans la figure 4.10, tirée de [PW15] et tracée pour le paramètre $\alpha_2 = \alpha_2^{\lim}$. Les points $[p_A]$ et $[p_B]$ coupent ces cercles de Giraud en deux arcs chacun. L'arc de $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_0^-$ qui contient $[Up_A]$ et l'arc de $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+ \cap \partial_\infty \mathcal{J}_{-1}^-$ qui contient $[U^{-1}p_B]$ bordent donc un «quadrilatère» qui a comme sommets $[p_A], [Up_A], [p_B]$ et $[U^{-1}p_B]$. Les deux autres arcs bordent un «bigone» de sommets $[p_A]$ et $[p_B]$.

Il nous reste maintenant une vérification d'ordre topologique à faire. En effet, si $\alpha_2 \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$, la surface spinale $\partial_\infty J_0^+$ est une sphère lisse ; si $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, alors $\partial_\infty J_0^+$ est une sphère avec un point singulier (qui est le foyer du bissecteur) ; et si $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$, alors $\partial_\infty J_0^+$ est un tore. Dans les deux premiers cas, les deux cercles de Giraud bi-tangents découpent $\partial_\infty J_0^+$ en quatre disques topologiques, mais dans le dernier cas on obtient trois disques et un tore privé d'un disque. Une vue schématique est donnée dans les figures 4.11 et 4.12. Pour identifier la composante qui devient de genre 1, il suffit de vérifier que, lorsque $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, la singularité se trouve à l'intérieur du quadrilatère Q_0^+.

Lorsque $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, on a :

$$[p_U] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ e^{i\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix}, \ [p_V] = \begin{bmatrix} -e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ -1 \end{bmatrix}, \ [Up_A] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ -1 \end{bmatrix} \text{ et } [U^{-1}p_B] = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Le foyer de $\mathfrak{E}_0^+ = \mathfrak{E}(p_U, p_V)$ est alors le point

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Les points $[f]$, $[Up_A]$ et $[U^{-1}p_B]$ sont alors alignés, dans la même tranche de l'exteur $\mathfrak{E}_0^+$. Considérons l'intersection de cette droite complexe avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. C'est le $\mathbb{C}$-cercle $\{[q_\theta] \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$, où

$$q_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{i\theta} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle p_U, q_\theta \rangle = \langle p_V, q_\theta \rangle &= -1 - e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= -e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} \\ &= -2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

On a donc :

$$|\langle p_U, q_\theta \rangle|^2 = |\langle p_V, q_\theta \rangle|^2 = 4\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = 2(1 + \sin(\theta))$$

On a, d'autre part,

$$p_W = e^{i\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U^{-1}p_W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} |\langle p_W, q_\theta \rangle|^2 &= |2 + 2e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})}|^2 \\ &= 6\sqrt{3}\cos(\theta) + 2\sin(\theta) + 11 \\ |\langle U^{-1}p_W, q_\theta \rangle|^2 &= |-2 + e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} + 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})}|^2 \\ &= -6\sqrt{3}\cos(\theta) + 2\sin(\theta) + 11 \end{aligned}$$

On en déduit que $[q_\theta] \in \mathcal{J}_0^+$ si et seulement si $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}]$. Or $Up_A = q_{\frac{4\pi}{3}}$,

$U^{-1}p_B = q_{\frac{11\pi}{6}}$ et $f = q_{\frac{3\pi}{2}}$ d'où $[f]$ se trouve à l'intérieur de Q_0^+. □

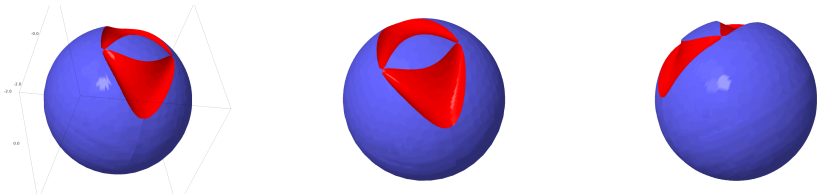


FIGURE 4.11 – Vues schématiques d'une face $\mathcal{F}_k^{\pm}$. La région bleue est dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; les deux régions rouges sont des disques de Giraud dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. La région bleue est composée d'un bigone $B_k^{\pm}$ et d'un quadrilatère $Q_k^{\pm}$.

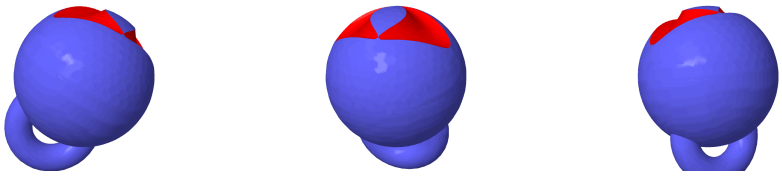


FIGURE 4.12 – Vues schématiques d'une face $\mathcal{F}_k^{\pm}$ pour $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$. La région bleue est dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; les deux régions rouges sont des disques de Giraud dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Cette fois, le bord à l'infini de la face est sur un tore, et on a un point singulier dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ qui n'apparaît pas dans la figure. Le quadrilatère $Q_k^{\pm}$ a maintenant une anse.

4.7 Combinatoire locale (CL)

En rassemblant les résultats de la section précédente, nous pouvons désormais montrer la condition de combinatoire locale (CL) que nous avons donnée dans la section 4.3. Nous allons montrer que la combinatoire locale des faces reste constante le long de la déformation. Plus précisément, on a les deux propositions suivantes. La première concerne les faces de dimension trois $\mathcal{F}_k^{\pm} \subset \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; la deuxième leur bord à l'infini constitué des bigones et des quadrilatères dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Proposition 4.7.1. *On a les intersections suivantes des 3-faces :*

1. $\mathcal{F}_0^+$ *intersecte* $\mathcal{F}_0^-$ *et* $\mathcal{F}_{-1}^-$ *le long de disques de Giraud.*
2. $\mathcal{F}_0^-$ *intersecte* $\mathcal{F}_0^+$ *et* $\mathcal{F}_1^+$ *le long de disques de Giraud.*
3. $\mathcal{F}_0^+ \cap \mathcal{F}_1^+$ *est réduit à* $\{[p_B], [Up_A]\}$
4. $\mathcal{F}_0^- \cap \mathcal{F}_{-1}^-$ *est réduit à* $\{[p_B], [p_A]\}$

Démonstration. Les deux premiers points sont donnés par le lemme 4.6.5. Le troisième et le quatrième sont symétriques, et donnés par la proposition 4.6.12. □

En considérant le bord à l'infini, la proposition suivante en découle :

Proposition 4.7.2. *Les faces Q_0^+ et B_0^+ intersectent les faces contenues dans $\mathcal{J}_0^-$, $\mathcal{J}_{-1}^-$, $\mathcal{J}_{-1}^+$ et $\mathcal{J}_1^+$ exactement comme dans la figure 4.8. À savoir :*

1. *B_0^+ intersecte Q_0^- et Q_{-1}^- en deux arcs de son bord.*
2. *Q_0^+ intersecte Q_0^- , B_0^-, Q_{-1}^- et B_{-1}^- en les quatre arcs de son bord.*
3. *L'intersection de B_0^+ et de Q_0^+ avec B_{-1}^+ et Q_{-1}^+ est réduite à $\{[U^{-1}p_B], [p_A]\}$.*
4. *L'intersection de B_0^+ et de Q_0^+ avec B_1^+ et Q_1^+ est réduite à $\{[p_B], [Up_A]\}$*

Par symétrie, on obtient la combinatoire locale pour les faces contenues dans $\mathcal{J}_0^-$:

Proposition 4.7.3. *Les faces Q_0^- et B_0^- intersectent les faces contenues dans $\mathcal{J}_0^+$, $\mathcal{J}_1^+$, $\mathcal{J}_{-1}^-$ et $\mathcal{J}_1^-$ exactement comme dans la figure 4.8. À savoir :*

1. *B_0^- intersecte Q_0^+ et Q_1^+ en deux arcs de son bord.*
2. *Q_0^- intersecte Q_0^+ , B_0^+, Q_1^+ et B_1^+ en les quatre arcs de son bord.*
3. *L'intersection de B_0^- et de Q_0^- avec B_{-1}^- et Q_{-1}^- est réduite à $\{[p_A], [p_B]\}$.*
4. *L'intersection de B_0^- et de Q_0^- avec B_1^- et Q_1^- est réduite à $\{[Up_A], [Up_B]\}$*

4.8 Combinatoire globale (CG)

Finalement, il nous reste à vérifier la condition de combinatoire globale (CG) de la stratégie de preuve de la section 4.3. Ce point s'avère bien plus technique que les deux autres : nous utiliserons ici des projections sur des sphères visuelles pour le montrer. Commençons par fixer une stratégie de preuve de la condition (CG).

4.8.1 Stratégie

On se propose de montrer que, lors de la déformation, si $[U]$ est loxodromique ou de type $(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ avec $n \geq 9$, alors les intersections des faces $\mathcal{F}_k^+$ et $\mathcal{F}_k^-$ et leurs bords à l'infini sont exactement celles décrites par la combinatoire locale. Comme le domaine est invariant par $[U]$ et que nous avons décrit la combinatoire des intersections de faces $\mathcal{F}_k^\pm$ ainsi que de $B_0^\pm$ et $Q_0^\pm$ avec les faces contenues dans les bissecteurs voisins, il suffira de montrer les deux propositions suivantes pour avoir la combinatoire globale des intersections des faces.

Proposition 4.8.1. *Si $[U]$ est loxodromique, alors*

- *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^+$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
- *$\mathcal{J}_0^-$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
- *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$. De plus, $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_1^- = \{[Up_A]\}$ et $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_{-1}^- = \{[U^{-1}p_B]\}$.*

Proposition 4.8.2. *Si $[U]$ est elliptique d'ordre ≥ 9, alors*

- *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^+$ si et seulement si $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$.*

— $\mathcal{J}_0^-$ *intersecte* $\mathcal{J}_k^-$ *si et seulement si* $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$.
— $\mathcal{J}_0^+$ *intersecte* $\mathcal{J}_k^-$ *si et seulement si* $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$. *De plus,* $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_1^- = \{[Up_A]\}$ *et* $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_{-1}^- = \{[U^{-1}p_B]\}$.

Pour montrer ces deux propositions, nous allons projeter les bissecteurs $\mathcal{J}_k^\pm$ sur la sphère visuelle de $[p_U]$. On obtiendra alors une famille de disques invariante par l'action de $[U]$ sur la sphère visuelle. Pour le cas où $[U]$ est loxodromique, cette projection suffira pour montrer la proposition 4.8.1. Dans le cas où $[U]$ est elliptique, il nous faudra raffiner l'argument avant de finir la preuve de la proposition 4.8.2.

Rappelons que dans [PW15], Parker, Wang et Xie donnent une preuve de la proposition 4.8.2 pour $n \geq 4$. La correspondance avec leurs notations est donnée par $J_k^+ = \mathcal{B}_{-2k}$ et $\mathcal{J}_k^- = \mathcal{B}_{-2k-1}$. Nous allons tout de même donner une preuve de la proposition 4.8.2 mais qui utilise des outils différents, qui pourraient être appliqués en dehors des représentations provenant de groupes de triangle. Nos méthodes ne nous permettront pas cependant d'atteindre les cas $n = 4, 5, 6, 7, 8$, qui sont traités par Parker, Wang et Xie.

4.8.2 Premières données

Commençons par établir quelques résultats sur la projection des bissecteurs $\mathcal{J}_k^\pm$ sur la sphère visuelle $L_{[p_U]}$ de $[p_U]$. Nous allons identifier ces projections comme des disques dont les bords passent par des points connus. Rappelons que nous avons étudié les sphères visuelles de points de $\mathbb{CP}^2$ dans la section 1.5 du chapitre 1. D'abord, établissons un critère de tangence d'une droite complexe à une surface spinale.

Lemme 4.8.3 (Critère de tangence)**.** *Soient* $p, q \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ *tels que* $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle \neq 0$ *et* $\langle p, q\rangle \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Soit* $[r] \in \mathfrak{S}(p, q)$. *Alors la droite complexe* $l_{[p],[r]}$ *est tangente à* $\mathfrak{S}(p, q)$ *en* $[r]$ *si et seulement s'il existe* $\epsilon \in \{\pm 1\}$ *tel que :*

1. $\langle p, r\rangle = \epsilon\langle q, r\rangle$
2. $\langle q, p\rangle \neq \epsilon\langle p, p\rangle$

Démonstration. Nous allons montrer que $l_{[p],[r]}$ intersecte $\mathfrak{S}(p, q)$ uniquement en $[r]$ si et seulement si on se trouve dans les conditions de l'énoncé. Un autre point de $l_{[p],[r]} \cap \mathfrak{S}(p, q)$ est de la forme $[p + \lambda r]$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, et vérifie :

$$\langle p + \lambda r, p + \lambda r\rangle = 0$$

$$|\langle p, p + \lambda r\rangle|^2 = |\langle q, p + \lambda r\rangle|^2$$

En développant et en utilisant que $\langle r, r\rangle = 0$ et que $\langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle \in \mathbb{R}$ et que $|\langle p, r\rangle| = |\langle q, r\rangle|$, on obtient :

$$\langle p, p\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle p, r\rangle) = 0 \tag{4.4}$$

$$\langle p,p\rangle \mathrm{Re}(\lambda\langle p,r\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle q,p\rangle\langle q,r\rangle) \tag{4.5}$$

En remplaçant $\mathrm{Re}(\lambda\langle p,r\rangle)$ dans la deuxième équation et en remarquant que $\langle q,p\rangle \in \mathbb{R} - \{0\}$, on a :

$$-\frac{1}{2}\langle p,p\rangle = \mathrm{Re}(\lambda\langle p,r\rangle) \tag{4.6}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\langle p,p\rangle^2}{\langle q,p\rangle} = \mathrm{Re}(\lambda\langle q,r\rangle) \tag{4.7}$$

On retrouve deux équations de droites réelles dans $\mathbb{C}$ pour λ. L'intersection de ces droites est vide si et seulement s'il s'agit de deux droites distinctes et parallèles. Comme $|\langle p,r\rangle| = |\langle q,r\rangle|$, ceci est équivalent à l'existence de $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\langle p,r\rangle = \epsilon\langle q,r\rangle$ et que $-\frac{1}{2}\langle p,p\rangle \neq \epsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\langle p,p\rangle^2}{\langle q,p\rangle}\right)$, i.e. $\langle q,p\rangle \neq \epsilon\langle p,p\rangle$.

□

Lemme 4.8.4. *Pour $\alpha_2 \neq \pm\alpha_2^{\lim}, \pm\frac{\pi}{2}$, les droites complexes $l_{[p_U],[Up_A]}$ et $l_{[p_U],[U^{-1}p_B]}$ sont tangentes à la sphère $\mathcal{S}(p_U,p_V)$ respectivement en $[Up_A]$ et $[U^{-1}p_B]$.*

Démonstration. D'après les lemmes 4.6.2 et 4.6.3, on sait que $[Up_A]$ et $[U^{-1}p_B]$ appartiennent à $\mathfrak{S}(p_U,p_V)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\langle pu,pu\rangle = \langle pv,pv\rangle &= 4\cos^2(\alpha_2) - \frac{3}{2} \\
\langle p_U,Up_A\rangle = \langle p_V,Up_A\rangle &= e^{-2i\alpha_2} \\
\langle p_U,U^{-1}p_B\rangle = \langle p_V,U^{-1}p_B\rangle &= 1 \\
\text{et } \langle p_V,p_U\rangle &= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.8.3, on a bien les tangences de l'énoncé. □

Puisque, grâce à la proposition 1.6.33, on sait que la projection d'un bissecteur de la forme $\mathfrak{B}(p,q)$ sur la sphère visuelle $L_{[p]}$ est un disque, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.8.5. *$\pi_{[p_U]}(\mathcal{J}_0^+)$ est un disque dont le bord passe par $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[Up_A]})$ et $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[U^{-1}p_B]})$.*

Notation 4.8.6. Nous noterons ces disques $D_k^\pm$, de sorte que $D_k^\pm = \pi_{[p_U]}(\mathcal{J}_0^\pm)$.

Rappelons aussi qu'on dispose d'une symétrie associée à l'involution $I \in \mathrm{U}(2,1)$ donnée par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2}e^{-i\alpha_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons discuté dans la section 4.6.2, elle vérifie $Ip_U = p_U$, $Ip_V = p_W$ et $Ip_W = p_V$. L'action de $[I]$ sur $\mathbb{CP}^2$ fixe $[p_U]$ et échange les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_0^-$.

4.8.3 La carte $\psi_{p'_U,p''_U}$ de $L_{[p_U]}$.

Nous allons nous placer dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$ de $L_{[p_U]}$ pour identifier les intersections des disques $D_k^{\pm}$ et en déduire la combinatoire globale des intersections des bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$.

Notation 4.8.7. Afin d'alléger les notations, pour $[q] \in \mathbb{CP}^2 - \{[p_U]\}$ nous noterons désormais $\psi(q)$ pour $\psi_{p'_U,p''_U}(l_{[p_U],[q]})$.

Remarque 4.8.8. L'image par ψ de plusieurs points est simple à calculer. En effet, on a :

— $\psi(p'_U) = \infty$ et $\psi(p''_U) = 0$
— $\psi(p_B) = 1$
— $\psi(p_A) = \frac{-(8\cos^2(\alpha_2)+1)+\delta}{-(8\cos^2(\alpha_2)+1)-\delta} = \frac{\mathrm{tr}(U)+1-\delta}{\mathrm{tr}(U)+1+\delta}$.

Les éléments U et I de $\mathrm{U}(2,1)$ fixent p_U et agissent donc naturellement sur $L_{[p_U]}$ de façon projective. Nous allons identifier maintenant ces deux actions dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$. Commençons par U :

Remarque 4.8.9. L'action de U sur $\mathbb{CP}^2$ fixe $[p_U]$, $[p'_U]$ et $[p''_U]$. Elle agit donc sur $L_{[p_U]}$ en fixant $\psi(p'_U)$ et $\psi(p''_U)$. Dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$, l'action est donc donnée soit par une rotation, soit par une homothétie de centre 0. Nous détaillerons plus loin l'angle et la raison respectifs.

Regardons maintenant l'action de I.

Lemme 4.8.10. *L'action de I sur L_{p_U} est donnée, dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$, par $z \mapsto \frac{1}{z}$.*

Démonstration. L'involution I vérifie $Ip'_U = p''_U$, $Ip''_U = p'_U$ et $Ip_B = p_B$. Comme $\psi(p'_U) = \infty$, $\psi(p''_U) = 0$ et $\psi(p_B) = 1$, l'involution I agit sur la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$ par une application projective qui fixe 1 et qui échange 0 et ∞. Il s'agit donc de $z \mapsto \frac{1}{z}$. □

4.8.4 Le côté loxodromique

Dans cette sous-section, nous allons étudier le cas où $[U]$ est loxodromique. Nous allons étudier la position relative des disques $D_k^{\pm}$ dans $L_{[p_U]}$, ce qui suffira pour déterminer la combinatoire globale des intersections des bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$. Nous montrerons que ces disques sont disposés comme dans la figure 4.13.

On s'intéresse ici aux paramètres $\alpha_2 \in]\frac{\pi}{6}, \alpha_2^{\lim}[$. Grâce à la remarque 4.4.6, nous savons que pour un tel α_2, l'élément U est loxodromique et a pour valeurs propres $1, e^l$ et e^{-l}. La longueur $l \in]0, \mathrm{argch}(\frac{5}{2})[$ sert alors aussi de paramètre pour la déformation. Elle est reliée à α_2 par la relation :

$$2\cosh(l) + 1 = \mathrm{tr}(U) = 8\cos^2(\alpha_2)$$

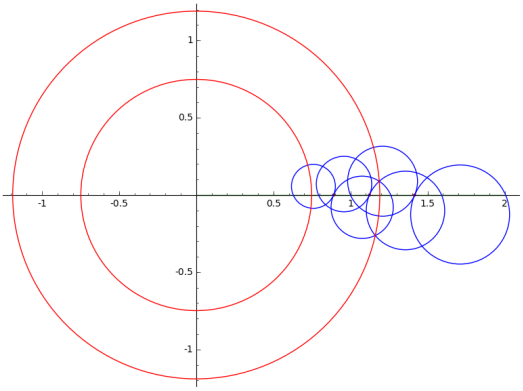


FIGURE 4.13 – Les disques $D_k^{\pm}$ (en bleu) pour $\alpha_2 = 0.91$.

Dans ce cas, rappelons aussi que, en posant $\delta = 2\sinh(l)$, on a :

$$[p'_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1+\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)-\delta \end{bmatrix} \text{ et } [p''_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1-\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)+\delta \end{bmatrix}$$

Remarque 4.8.11. Dans le côté loxodromique, $[p'_U], [p''_U] \in \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et $[p_U], [p'_U], [p''_U]$ sont sur un triangle autopolaire. On calcule les produits hermitiens suivants :

$$\begin{aligned} \langle p'_U, p'_U\rangle = \langle p''_U, p''_U\rangle &= 0 \\ \langle p_U, p_U\rangle &= \cosh(l)-1 \\ \langle p_U, p'_U\rangle = \langle p_U, p''_U\rangle &= 0 \\ \langle p'_U, p''_U\rangle &= -16\sinh^2(l) \end{aligned}$$

Remarque 4.8.12. Dans le cas où U est loxodromique, on a $\psi(p_A) = \frac{\mathrm{tr}(U)+1-\delta}{\mathrm{tr}(U)+1+\delta} = \frac{1+e^l}{1+e^l} = e^{-l}$.

Remarque 4.8.13. L'action de U sur $L_{[p_U]}$ fixe $l_{[p_U],[p'_U]}$ et $l_{[p_U],[p''_U]}$. Dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$, comme $Up'_U = e^l p'_U$ et $Up''_U = e^l p''_U$, l'action de U est donc une homothétie de centre 0 et raison e^{2l} ; elle est donnée par $z \mapsto e^{2l}z$.

Remarque 4.8.14. Puisque $\psi(p_B) = 1$, $\psi(p_A) = e^{-l}$ et que U agit par une homothétie de raison e^{2l}, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\psi(U^k p_B) = e^{2kl} \text{ et } \psi(U^k p_A) = e^{(2k-1)l}.$$

On peut déduire des actions de U et de I un résultat sur les intersections :

Proposition 4.8.15. *Les disques D_0^+ et D_1^- sont tangents au point $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[Up_A]})$.*
Les disques D_0^+ et D_{-1}^- sont tangents au point $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[U^{-1}p_B]})$.

Démonstration. Rappelons que D_0^+ est un disque dont le bord passe par $\psi(U^{-1}p_B)$ et $\psi(Up_A)$, et que D_1^- un disque dont le bord passe par $\psi(U^2p_B)$ et $\psi(Up_A)$. Soit θ l'angle en $\psi(Up_A)$ entre ∂D_0^+ et la droite réelle. Comme l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ est conforme, et qu'elle échange D_0^+ et D_0^-, l'angle entre ∂D_0^- et la droite réelle en $\psi(p_A) = \frac{1}{\psi(Up_A)}$ est aussi égal à θ. Or, puisque D_1^- est obtenu à partir de D_0^- par une homothétie de raison e^{2l}, l'angle entre la droite réelle et ∂D_1^- en $\psi(Up_A)$ est égal à θ. Comme ∂D_1^- et ∂D_0^+ intersectent la droite réelle en $\psi(Up_A)$ avec le même angle, ils sont tangents.

La preuve de l'autre tangence est complètement analogue. □

Corollaire 4.8.16. *Les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_1^-$ sont tangents en $[Up_A]$.*

Les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$ sont tangents en $[U^{-1}p_B]$.

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, nous savons que l'intersection de $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_1^-$ est contenue dans la droite $l_{[p_U],[Up_A]}$. D'après le lemme 4.6.14, cette droite est tangente à $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+$ en $[Up_A]$: l'intersection contient donc exactement un point. □

La proposition suivante est le résultat clé pour déterminer la position relative des disques $D_k^\pm$. On va montrer que chaque disque se trouve dans une certaine couronne centrée en 0 dont nous expliciterons les rayons ; nous verrons ensuite que ces couronnes sont obtenues les unes à partir des autres par des homothéties de centre 0. Une des couronnes que nous considérons est dessinée sur la figure 4.13. Les bornes effectives que nous donnons dans la proposition suivante suffiront pour déterminer la combinatoire globale des intersections des disques $D_k^\pm$ et des bissecteurs $\mathcal{J}_k^\pm$.

Proposition 4.8.17. *Le disque D_0^+ est dans inclus dans la couronne de centre 0 et rayons $e^{\frac{-5}{2}l}$ et $e^{\frac{3}{2}l}$.*

Démonstration. Nous allons montrer que les cercles de rayons $e^{\frac{-5}{2}l}$ et $e^{\frac{3}{2}l}$ n'intersectent pas le disque D_0^+. Ceci revient à montrer que, si $\theta \in \mathbb{R}$, alors aucun point d'image $e^{i\theta}e^{\frac{3l}{2}}$ ou $e^{i\theta}e^{-\frac{5l}{2}}$ par $\psi_{p'_U,p''_U}$ n'est dans le bissecteur $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$.

Commençons par le premier cas. Le deuxième est complètement analogue ; nous ferons une remarque au cours du calcul pour le vérifier. On veut montrer qu'aucun point de la forme $q_{\theta,\mu} = p''_U + e^{\frac{3l}{2}}e^{i\theta}p'_U + \mu p_U$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{C}$, n'est dans le bissecteur $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe un point de la forme $q_{\theta,\mu}$ dans $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$.

On a deux conditions pour que $q_{\theta,\mu}$ soit dans $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$:

1. $\langle q_{\theta,\mu}, q_{\theta,\mu}\rangle \leq 0$
2. $|\langle q_{\theta,\mu}, p_U\rangle| = |\langle q_{\theta,\mu}, p_V\rangle|$

Elles se traduisent par :

1. $2\mathrm{Re}(e^{\frac{3l}{2}}e^{i\theta}\langle p''_U, p'_U\rangle) + |\mu|^2\langle p_U, p_U\rangle \leq 0$
2. $|\mu||\langle p_U, p_U\rangle| = |\langle p''_U, p_V\rangle + e^{\frac{3l}{2}}e^{i\theta}\langle p'_U, p_V\rangle + \overline{\mu}\langle p_U, p_V\rangle|$

D'après les calculs ci-dessus, et en posant $h_1 = \langle p'_U, p_V \rangle$ et $h_2 = \langle p''_U, p_V \rangle$ pour simplifier les notations, les conditions deviennent :

1. $|\mu|^2 \leq 2e^{\frac{3l}{2}} \frac{16\sinh^2(l)}{\cosh(l)-1} \cos(\theta) = 32e^{\frac{3l}{2}} (\cosh(l)+1)\cos(\theta)$
2. $(\cosh(l)-1)|\mu| = |h_2 + e^{\frac{3l}{2}} e^{i\theta} h_1 - \frac{3}{2}\overline{\mu}|$

Faisons quelques calculs pour mieux expliciter la deuxième condition. Elle implique, par l'inégalité triangulaire, que :

$$(\cosh(l)-1)|\mu| \geq |h_2 + e^{\frac{3l}{2}} e^{i\theta} h_1| - \frac{3}{2}|\mu|$$

On en déduit que :

$$(\cosh(l) + \frac{1}{2})|\mu| \geq |h_2 + e^{\frac{3l}{2}} e^{i\theta} h_1|$$

D'après la condition 1, on en déduit que :

$$|h_2 + e^{\frac{3l}{2}} e^{i\theta} h_1|^2 \leq 32e^{\frac{3l}{2}} (\cosh(l) + \frac{1}{2})^2 (\cosh(l)+1)\cos(\theta)$$

Cette équation peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$|h_2 + e^{\frac{3l}{2}} e^{i\theta} h_1|^2 \leq 16e^{\frac{3l}{2}} (2\cosh(l)+1)^2 \cosh^2(\frac{l}{2})\cos(\theta). \tag{4.8}$$

Le côté gauche de l'inégalité s'écrit alors sous la forme :

$$|h_2|^2 + 2e^{\frac{3l}{2}} \mathrm{Re}(e^{i\theta} h_1 \overline{h_2}) + e^{3l}|h_1|^2 \tag{4.9}$$

Calculons ces termes. On a :

$$\begin{aligned}
h_1 = \langle p'_U, p_V \rangle &= (2\sinh(l) + 3 + 2i\sin(2\alpha_2))(e^{2i\alpha_2}+1) \\
&= 2\cos(\alpha_2)e^{i\alpha_2}(2\sinh(l) + 3 + 2i\sin(2\alpha_2)) \\
h_2 = \langle p'_U, p_V \rangle &= (-2\sinh(l) + 3 + 2i\sin(2\alpha_2))(e^{2i\alpha_2}+1) \\
&= 2\cos(\alpha_2)e^{i\alpha_2}(-2\sinh(l) + 3 + 2i\sin(2\alpha_2))
\end{aligned}$$

On en déduit aisément, en remplaçant $\sin(2\alpha_2)^2$ par $4\cos^2(\alpha_2)(1-\cos^2(\alpha_2))$ puis $\cos^2(\alpha_2)$ par $\frac{1}{8}(2\cosh(l)+1)$, que :

$$\begin{aligned}
|h_1|^2 &= 12e^{\frac{l}{2}}(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2}) \\
|h_2|^2 &= 12e^{-\frac{l}{2}}(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2}) \\
|h_1||h_2| &= 12(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2})
\end{aligned}$$

De plus,

$$h_1\overline{h_2} = 2(2\cosh(l)+1)((5-2\cosh(l))(\cosh(l)+1) - 4i\sin(2\alpha_2)\sinh(l)) \tag{4.10}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}(e^{i\theta}h_1\overline{h_2}) &= 4(2\cosh(l)+1) \\
&\quad \times((5-2\cosh(l))(\cosh(l)+1)\cos(\theta) + 4\sin(2\alpha_2)\sinh(l)\sin(\theta)) \\
&= 8(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2}) \\
&\quad \times((5-2\cosh(l))\cosh(\frac{l}{2})\cos(\theta) + 4\sin(2\alpha_2)\sinh(\frac{l}{2})\sin(\theta))
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.8) devient, après une première simplification par $4(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2})e^{\frac{3l}{2}}$:

$$\begin{aligned}
3e^{-2l} + 3e^{2l} + 2((5-2\cosh(l))\cosh(\frac{l}{2})\cos(\theta) + 4\sin(2\alpha_2)\sinh(\frac{l}{2})\sin(\theta)) \\
\leq 4(2\cosh(l)+1)\cosh(\frac{l}{2})\cos(\theta)
\end{aligned}$$

On remarque que, en mettant $-\frac{5l}{2}$ à la place de $\frac{3l}{2}$, on obtient exactement la même inégalité. En passant les termes en θ du côté droit, on a :

$$3e^{-2l} + 3e^{2l} \leq 6(2\cosh(l)-1)\cosh(\frac{l}{2})\cos(\theta) - 8\sin(2\alpha_2)\sinh(\frac{l}{2})\sin(\theta) \tag{4.11}$$

Le côté droit est de la forme $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$. Sa valeur maximale est $\sqrt{a^2+b^2}$. En particulier, on a :

$$(3e^{-2l} + 3e^{2l})^2 \leq 36(2\cosh(l)-1)^2\cosh^2(\frac{l}{2}) + 64\sin^2(2\alpha_2)\sinh^2(\frac{l}{2}) \tag{4.12}$$

En remplaçant $\sin(2\alpha_2)^2$ par son expression en termes de $\cosh(l)$ on voit que le côté droit, une fois linéarisé, est égal à $16\cosh(3l) + 16\cosh(2l) - 16\cosh(l) + 20$. On en déduit que

$$36\cosh(2l)^2 \leq 16\cosh(3l) + 16\cosh(2l) - 16\cosh(l) + 20 \tag{4.13}$$

En linéarisant le côté gauche et en divisant par 2, on obtient alors :

$$9\cosh(4l) + 8\cosh(l) \leq 8\cosh(3l) + 8\cosh(2l) + 1 \tag{4.14}$$

$$8\cosh(4l) + 8\cosh(l) + \cosh(4l) \leq 8\cosh(3l) + 8\cosh(2l) + 1 \tag{4.15}$$

Comme la fonction cosh est convexe, on a :

$$8\cosh(4l) + 8\cosh(l) \geq 8\cosh(3l) + 8\cosh(2l) \tag{4.16}$$

et d'autre part, $\cosh(4l) > 1$, ce qui aboutit à une contradiction.

□

Comme D_1^- est l'image de D_0^+ par $z \mapsto \frac{1}{z}$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.8.18. *Le disque D_0^- est inclus dans la couronne ouverte de centre 0 et rayons $e^{\frac{-3l}{2}}$ et $e^{\frac{5l}{2}}$*

Proposition 4.8.19. *Les disques $D_k^\pm$ s'intersectent de la façon suivante :*

1. *D_0^+ intersecte D_k^+ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
2. *D_0^- intersecte D_k^- si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
3. *D_0^+ intersecte D_k^- si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$. De plus, D_0^+ est tangent à D_1^- et D_0^+.*

Démonstration. Par une récurrence immédiate, on sait que le disque D_k^+ est inclus dans la couronne ouverte de rayons $e^{2kl+\frac{3l}{2}}$ et $e^{2kl-\frac{5l}{2}}$ et que le disque D_k^- est inclus dans la couronne ouverte de rayons $e^{2kl+\frac{3l}{2}}$ et $e^{2kl-\frac{5l}{2}}$. Si $|k| > 0$, les disques D_k^+ et D_0^+ se trouvent alors dans des couronnes disjointes. Il en est de même pour les disques D_k^- et D_0^-, ainsi que pour D_k^- et D_0^+. Il nous reste donc à prouver que les intersections annoncées ont bien lieu. Or d'après la proposition 4.8.1 on sait que

— $\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_1^+$ et $\mathcal{J}_{-1}^+$
— $\mathcal{J}_0^-$ intersecte $\mathcal{J}_1^-$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$
— $\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_0^-$,

ce qui montre les incidences. Finalement, d'après la proposition 4.8.15, on sait que D_0^+ est tangent à D_1^- et D_0^+. □

À l'aide de la projection que nous venons de décrire, on obtient la proposition 4.8.1. Rappelons son énoncé :

Proposition 4.8.20. *Si U est loxodromique, alors*

1. *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^+$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
2. *$\mathcal{J}_0^-$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$.*
3. *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \in \{-1, 0, 1\}$. De plus, $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_1^- = \{[Up_A]\}$ et $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_{-1}^- = \{[U^{-1}p_B]\}$.*

4.8.5 Le côté elliptique

Nous étudierons maintenant le cas où $[U]$ est elliptique. Comme dans le cas loxodromique, nous allons déterminer la position relative des disques $D_k^{\pm}$, qui seront obtenus cette fois les uns par rapport aux autres par des rotations. Des exemples de la position relative des disques $D_k^{\pm}$ sont donnés dans les figures 4.14 et 4.15. Cependant, dans ce cas il nous faudra raffiner légèrement l'argument et considérer la sphère visuelle réelle pour déterminer la combinatoire globale des intersections des bissecteurs $\mathcal{J}_k^{\pm}$. On s'intéresse ici aux paramètres $\alpha_2 \in]\alpha_2^{\lim}, \frac{\pi}{2}[$. Grâce à la remarque 4.4.5, nous savons que pour un tel α_2, l'élément U est elliptique et a pour valeurs propres $1, e^{i\beta}$ et $e^{-i\beta}$. L'angle $\beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$ sert alors aussi de paramètre pour la déformation. Il est relié à α_2 par la relation :

$$2\cos(\beta) + 1 = \mathrm{tr}(U) = 8\cos^2(\alpha_2)$$

Dans ce cas, rappelons aussi que, en posant $\delta = 2\sin(\beta)$, on a :

$$[p'_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1+\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)-\delta \end{bmatrix} \text{ et } [p''_U] = \begin{bmatrix} 2(2e^{2i\alpha_2}+1) \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha_2}(2e^{2i\alpha_2}+1-\delta) \\ -(8\cos^2(\alpha_2)+1)+\delta \end{bmatrix}.$$

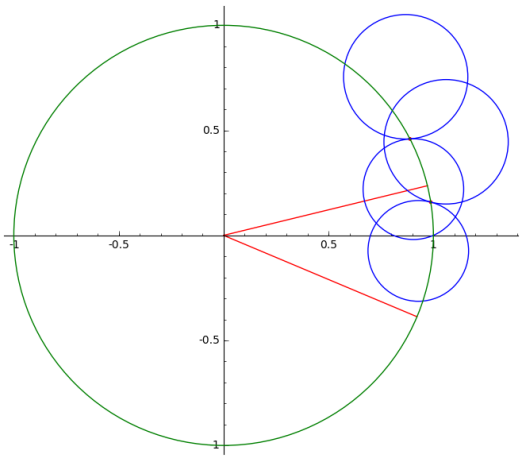
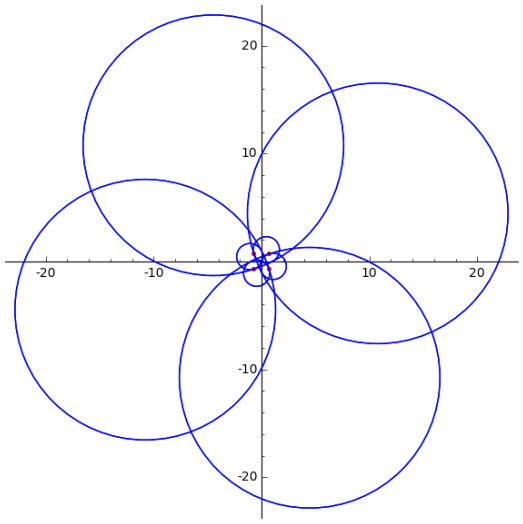


FIGURE 4.14 – Projection des bissecteurs sur $L_{[p_U]}$ pour $\alpha_2 = 0,915$.

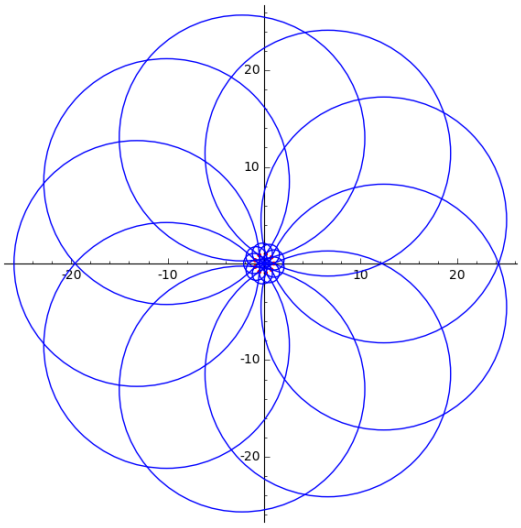
Faisons maintenant quelques remarques sur les actions sur $L_{[p_U]}$ et les images de certains points dans la carte ψ.

Remarque 4.8.21. Dans le cas où U est elliptique, on a $\psi(p_A) = \frac{\mathrm{tr}(U)+1-\delta}{\mathrm{tr}(U)+1+\delta} = \frac{1+e^{-i\beta}}{1+e^{i\beta}} = e^{-i\beta}$.

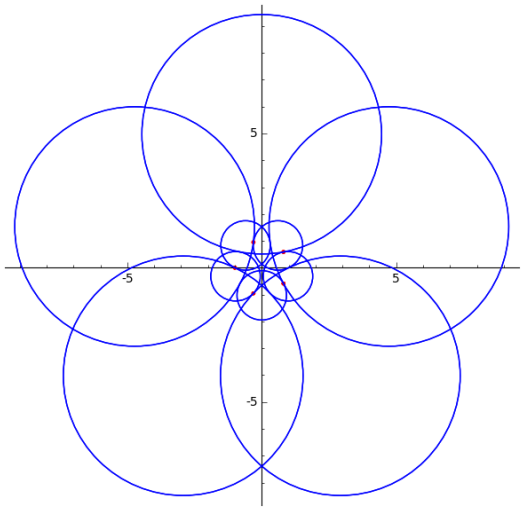
Remarque 4.8.22. L'action de U sur $L_{[p_U]}$ fixe $l_{[p_U],[p'_U]}$ et $l_{[p_U],[p''_U]}$. Dans la carte $\psi_{p'_U,p''_U}$, comme $Up'_U = e^{i\beta}p'_U$ et $Up''_U = e^{-i\beta}p''_U$, l'action de U est une rotation de centre 0 et d'angle 2β ; elle est donnée par $z \mapsto e^{2i\beta}z$.



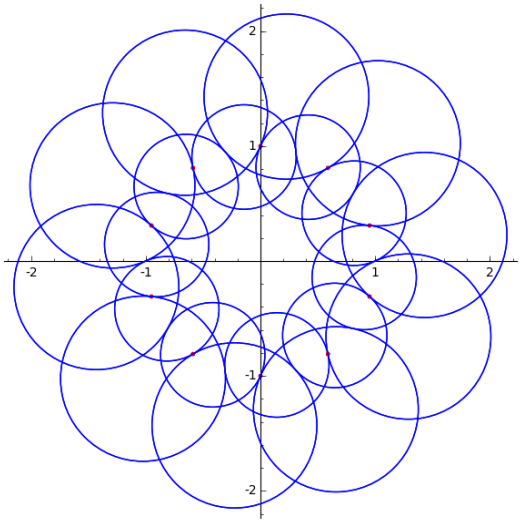
(a) $n = 8$



(b) $n = 9$



(c) $n = 10$



(d) $n = 20$

FIGURE 4.15 – Projection sur la sphère visuelle pour $n = 8, 9, 10$ et 20.

Remarque 4.8.23. Puisque $\psi(p_B) = 1$, $\psi(p_A) = e^{-i\beta}$ et que U agit par une rotation d'angle 2β, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\psi(U^k p_B) = e^{2ik\beta} \text{ et } \psi(U^k p_A) = e^{(2k-1)i\beta}.$$

On peut déduire des actions de U et de I un résultat sur les intersections :

Proposition 4.8.24. *Les disques D_0^+ et D_1^- sont tangents au point $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[Up_A]})$.*
Les disques D_0^+ et D_{-1}^- sont tangents au point $\pi_{[p_U]}(l_{[p_U],[U^{-1}p_B]})$.

Démonstration. Rappelons que D_0^+ est un disque dont le bord passe par $\psi(U^{-1}p_B)$ et $\psi(Up_A)$, et que D_1^- un disque dont le bord passe par $\psi(U^2p_B)$ et $\psi(Up_A)$. Soit θ l'angle en $\psi(Up_A)$ entre ∂D_0^+ et le cercle unité. Comme l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ est conforme, et qu'elle échange D_0^+ et D_0^-, l'angle entre ∂D_0^- et le cercle unité en $\psi(p_A) = \frac{1}{\psi(Up_A)}$ est aussi égal à θ. Or, puisque D_1^- est obtenu à partir de D_0^- par une rotation d'angle 2β, l'angle entre le cercle unité et ∂D_1^- en $\psi(Up_A)$ est égal à θ. Comme ∂D_1^- et ∂D_0^+ intersectent le cercle unité en $\psi(Up_A)$ avec le même angle, ils sont tangents.

La preuve de l'autre tangence est complètement analogue. □

Corollaire 4.8.25. *Les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_1^-$ sont tangents en $[Up_A]$. Les bissecteurs $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_{-1}^-$ sont tangents en $[U^{-1}p_B]$.*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, nous savons que l'intersection de $\mathcal{J}_0^+$ et $\mathcal{J}_1^-$ est contenue dans la droite $l_{[p_U],[Up_A]}$. D'après le lemme 4.6.14, cette droite est tangente à $\partial_\infty \mathcal{J}_0^+$ en $[Up_A]$: l'intersection contient donc exactement un point. □

De même que pour le côté loxodromique, la proposition clé pour contrôler les intersections des disques $D_k^\pm$ est donnée par la proposition suivante, qui borne le diamètre angulaire de ces disques depuis 0. L'action de $[U]$ par rotations est alors analogue à celle par homothéties que nous avons étudiée pour le côte loxodromique ; les analogues des anneaux étant les secteurs angulaires, dont un exemple est tracé dans la figure 4.14.

Proposition 4.8.26. *Si $\beta \geq \frac{2\pi}{9}$, les disques $D_k^\pm$ ont un diamètre angulaire $< 4\beta$ depuis 0.*

Démonstration. Comme $D_k^\pm$ est image de D_0^+ par une une rotation de centre 0 et éventuellement $z \mapsto \frac{1}{z}$, il suffit de montrer que le diamètre angulaire depuis 0 du disque D_0^+ est $< 4\beta$. Nous allons montrer que les demi-droites réelles d'arguments $\frac{3\beta}{2}$ et $-\frac{5\beta}{2}$ n'intersectent pas le disque D_0^+. Ceci revient à montrer que, si $k \in \mathbb{R}^+$, alors aucun point d'image $ke^{\frac{3i\beta}{2}}$ ou $ke^{-\frac{5i\beta}{2}}$ par $\psi_{p'_U,p''_U}$ n'est dans le bissecteur $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$.

Commençons par le premier cas. On veut montrer qu'aucun point de la forme $q_{k,\mu} = p''_U + ke^{\frac{3\beta}{2}}p'_U + \mu p_U$, où $k \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{C}$, n'est dans le bissecteur $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$. Ces deux demi-droites sont tracées dans la figure 4.14.

On a deux conditions pour que $q_{k,\mu}$ soit dans $\mathfrak{B}(p_U, p_V)$:

1. $\langle q_{k,\mu}, q_{k,\mu}\rangle \leq 0$
2. $|\langle q_{k,\mu}, p_U\rangle| = |\langle q_{k,\mu}, p_V\rangle|$

Elles se traduisent par :

1. $\langle p''_U, p''_U\rangle + k^2\langle p'_U, p'_U\rangle + |\mu|^2\langle p_U, p_U\rangle \leq 0$
2. $|\mu||\langle p_U, p_U\rangle| = |\langle p''_U, p_V\rangle + ke^{-\frac{3\beta}{2}}\langle p'_U, p_V\rangle + \overline{\mu}\langle p_U, p_V\rangle|$

D'après les calculs ci-dessus, et en posant $h_1 = \langle p'_U, p_V\rangle$ et $h_2 = \langle p''_U, p_V\rangle$ pour simplifier les notations, les conditions deviennent :

1. $|\mu|^2 \geq (1+k^2)\frac{16\sin^2(\beta)}{1-\cos(\beta)} = 16(1+k^2)(1+\cos(\beta))$
2. $(1-\cos(\beta))|\mu| = |h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1 - \frac{3}{2}\overline{\mu}|$

Faisons quelques calculs pour mieux expliciter la deuxième condition. Elle implique, par l'inégalité triangulaire, que :

$$(1-\cos(\beta))|\mu| \geq \frac{3}{2}|\mu| - |h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|$$

On en déduit que :

$$(\cos(\beta) + \frac{1}{2})|\mu| \leq |h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|$$

D'après la condition 1, on en déduit que :

$$|h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|^2 \geq 16(\cos(\beta) + \frac{1}{2})^2(1+k^2)(1+\cos(\beta))$$

$$|h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|^2 \geq 4(2\cos(\beta)+1)^2(1+k^2)(1+\cos(\beta)).$$

Calculons la quantité $|h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|^2$. On a :

$$|h_2 + ke^{-\frac{3\beta}{2}}h_1|^2 = |h_2|^2 + k^2|h_1|^2 + 2k\mathrm{Re}(e^{\frac{3\beta}{2}}h_2\overline{h_1})$$

Pour aboutir à une contradiction, il suffit de montrer que le polynôme suivant en k est strictement négatif :

$$\begin{aligned} P_\beta(k) &= |h_2|^2 + k^2|h_1|^2 + 2k\mathrm{Re}(e^{\frac{3\beta}{2}}h_2\overline{h_1}) - 4(2\cos(\beta)+1)^2(1+k^2)(1+\cos(\beta)) \\ &= (|h_2|^2 - 4(2\cos(\beta)+1)^2(1+\cos(\beta)) \\ &\quad +2k\mathrm{Re}(e^{\frac{3\beta}{2}}h_2\overline{h_1}) + (|h_1|^2 - 4(2\cos(\beta)+1)^2(1+\cos(\beta))k^2 \end{aligned}$$

Pour étudier le polynôme P_β, nous avons besoin de calculer quelques quantités. On le fait dans le lemme suivant :

Lemme 4.8.27. *On a :*

1. $h_2\overline{h_1} = 6(2\cos(\beta)+1)(e^{i\beta}+1) = 12e^{i\frac{\beta}{2}}(2\cos(\beta)+1)\cos(\frac{\beta}{2})$
2. $|h_1|^2|h_2|^2 = 72(2\cos(\beta)+1)^2(\cos(\beta)+1)$
3. $|h_1|^2+|h_2|^2 = 4(2\cos(\beta)+1)(5-2\cos(\beta))(\cos(\beta)+1)$

Démonstration. Explicitons h_1 et h_2 en fonction de α_2 et β. On a :

$$\begin{aligned} h_1 = \langle p'_U, p_V\rangle &= e^{-i\beta}(2i\sin(2\alpha_2)+\cos(\beta)+\frac{1}{2})+4i\sin(2\alpha_2)-1 \\ h_2 = \langle p''_U, p_V\rangle &= e^{i\beta}(2i\sin(2\alpha_2)+\cos(\beta)+\frac{1}{2})+4i\sin(2\alpha_2)-1 \end{aligned}$$

En développant $h_2\overline{h_1}$ et en exprimant $\sin^2(2\alpha_2)$ en fonction de $\cos(\beta)$, on obtient :

$$h_2\overline{h_1} = 6(2\cos(\beta)+1)(e^{i\beta}+1) = 12e^{i\frac{\beta}{2}}(2\cos(\beta)+1)\cos(\frac{\beta}{2})$$

D'autre part, on peut calculer :

$$\begin{aligned} |h_1|^2 &= 2(2\cos(\beta)+1)((\cos(\beta)+1)(5-2\cos(\beta))-4\sin(2\alpha_2)\sin(\beta)) \\ |h_2|^2 &= 2(2\cos(\beta)+1)((\cos(\beta)+1)(5-2\cos(\beta))+4\sin(2\alpha_2)\sin(\beta)) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$|h_1|^2+|h_2|^2 = 4(2\cos(\beta)+1)(5-2\cos(\beta))(\cos(\beta)+1)$$

puis, en développant et en exprimant $\sin^2(2\alpha_2)$ en fonction de $\cos(\beta)$:

$$|h_1|^2|h_2|^2 = 72(2\cos(\beta)+1)^2(\cos(\beta)+1)$$

□

On en déduit que $\mathrm{Re}(e^{\frac{3\beta}{2}}h_2\overline{h_1}) = 12\cos(2\beta)(2\cos(\beta)+1)\cos(\frac{\beta}{2})$. On remarque que c'est exactement le même terme lorsqu'on a $-\frac{5}{2}\beta$ à la place de $\frac{3}{2}\beta$. Le polynôme $P_\beta(k)$ s'écrit alors sous la forme :

$$P_\beta(k) = |h_2|^2(1-\frac{|h_1|^2}{18})+24\cos(2\beta)(2\cos(\beta)+1)\cos(\frac{\beta}{2})k+|h_1|^2(1-\frac{|h_2|^2}{18})k^2$$

Son discriminant Δ_β est alors égal à :

$$\Delta_\beta = (24\cos(2\beta)(2\cos(\beta)+1)\cos(\frac{\beta}{2}))^2-4|h_1|^2|h_2|^2(1-\frac{|h_1|^2}{18})(1-\frac{|h_2|^2}{18})$$

En écrivant le premier terme en fonction de $\cos(\beta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= 288(2\cos^2(\beta)-1)^2(2\cos(\beta)+1)^2(\cos(\beta)+1) - 4|h_1|^2|h_2|^2(1-\frac{|h_1|^2}{18})(1-\frac{|h_2|^2}{18}) \\ &= 4|h_1|^2|h_2|^2((2\cos^2(\beta)-1)^2 - (1-\frac{1}{18}|h_1|^2)(1-\frac{1}{18}|h_2|^2))\end{aligned}$$

Lorsque $\beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$, on sait que $4|h_1|^2|h_2|^2 > 0$. En développant et en écrivant le dernier facteur en fonction de $\cos(\beta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_\beta}{4|h_1|^2|h_2|^2} &= (2\cos^2(\beta)-1)^2 - (1-\frac{1}{18}|h_1|^2)(1-\frac{1}{18}|h_2|^2) \\ &= 4\cos^2(\beta)(\cos^2(\beta)-1) + \frac{|h_1|^2+|h_2|^2}{18} - \frac{|h_1|^2|h_2|^2}{18^2} \\ &= \frac{4}{9}(1-\cos^2(\beta))(2+4\cos(\beta)-9\cos^2(\beta)) \\ &= \frac{4}{9}\sin^2(\beta)(2-4\cos(\beta)-9\cos^2(\beta))\end{aligned}$$

Le discriminant a le même signe que $2+4\cos(\beta)-9\cos^2(\beta) = -(\cos(\beta)-\frac{3}{4})(9\cos(\beta)+\frac{11}{4})-\frac{1}{16}$. En particulier, si $\cos(\beta) \geq \frac{3}{4}$, il est strictement négatif. Comme $\cos(\frac{2\pi}{8}) < \frac{3}{4} < \cos(\frac{2\pi}{9})$, c'est le cas lorsque $\beta \leq \frac{2\pi}{9}$.

On en déduit que si $\beta \in]0, \frac{2\pi}{9}]$, le polynôme P_β n'a pas de racines réelles. Pour montrer qu'il est strictement négatif, il suffit de vérifier que son coefficient constant est strictement négatif. Comme le discriminant Δ_β est strictement négatif pour tout $\beta \in]0, \frac{2\pi}{9}]$, ce coefficient garde un signe constant. Or, lorsque $\beta = 0$, on a $P_0 = -36 + 72k - 36k^2$, ce qui permet de conclure.

Le calcul pour la droite d'argument $-\frac{5}{2}\beta$ est identique. □

Intersections globales

À l'aide de la projection que nous venons de décrire, nous allons montrer la proposition 4.8.2. Rappelons son énoncé :

Proposition 4.8.28. *Si U est elliptique d'ordre $n \geq 9$, alors*

1. *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^+$ si et seulement si $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$.*
2. *$\mathcal{J}_0^-$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$.*
3. *$\mathcal{J}_0^+$ intersecte $\mathcal{J}_k^-$ si et seulement si $k \equiv -1, 0, 1 \mod n$. De plus, $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_1^- = \{[Up_A]\}$ et $\mathcal{J}_0^+ \cap \mathcal{J}_{-1}^- = \{[U^{-1}p_B]\}$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui concerne le diamètre angulaire réel du bissecteur dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ pour conclure la preuve et raffiner l'argument donné sur la sphère visuelle :

Lemme 4.8.29. *Si $[U]$ est elliptique d'ordre ≥ 5, alors le diamètre angulaire de $\mathcal{J}_k^{\pm}$ vu depuis $[p_U]$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que le diamètre angulaire de $\mathcal{J}_0^+$ vu depuis $[p_U]$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$.

Notons β l'angle de rotation de $[U]$. On sait alors que $\beta \leq \frac{2\pi}{5}$, que $\mathrm{tr}(U) = 1 + 2\cos(\beta)$ et que $\langle p_U, p_U\rangle = \langle p_V, p_V\rangle = \cos(\beta) - 1$. Dans ce cas , la quantité $\frac{\langle p_U,p_V\rangle\langle p_V,p_U\rangle}{\langle p_U,p_U\rangle\langle p_V,p_V\rangle}$ est égale à $\frac{(3/2)^2}{(1-\cos(\beta))^2}$. Or $\beta \leq \frac{2\pi}{5}$, donc $\cos(\beta) \geq \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} > \frac{1}{4}$, d'où $\frac{(3/2)^2}{(1-\cos(\beta))^2} > 4$. D'après le corollaire 1.6.35 de la proposition 1.6.34, on sait alors que le diamètre angulaire de $\mathcal{J}_0^+$ vu depuis $[p_U]$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$. □

Notation 4.8.30. Pour $s \in \mathbb{R}$, notons U^s l'élément $U^s = \exp(s\mathrm{Log}(U)) \in \mathrm{SU}(2,1)$. Ainsi, $U^s p_U = p_U$, $U^s p'_U = e^{is\beta} p'_U$ et $U^s p''_U = e^{-is\beta} p''_U$. Il agit sur $L_{[p_U]}$ comme une rotation d'angle $s\beta$ dans la carte $\psi_{p'_U, p''_U}$.

Démonstration de la proposition 4.8.28. Par la symétrie du problème, les points 1 et 2 sont analogues. De plus, grâce aux corollaires 4.6.4 et 4.8.25, les intersections et les tangences annoncées ont lieu.

Commençons par montrer le premier point de l'énoncé. Notons $\beta = \frac{2\pi}{n}$. Nous savons que D_0^+ est un disque de diamètre angulaire $< 4\beta$. Si $s \in [2, \frac{n}{2} - 2] \cup [\frac{n}{2} + 2, n - 2]$, le disque D_k^+ n'intersecte pas son image par une rotation d'angle $2s\beta$, puisqu'ils se trouvent dans des secteurs angulaires disjoints. Il suffit donc de montrer que si $s \in]\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} + 2[$, alors $[U^s]\mathcal{J}_0^+$ n'intersecte pas $\mathcal{J}_0^+$

Remarquons d'abord que $[U^{\frac{n}{2}}]$ est la réflexion sur $[p_U]$. On sait alors que $[U^{\frac{n}{2}}]\mathcal{J}_0^+ = \mathfrak{B}([U^{\frac{n}{2}} p_V], p_U)$ et J_0^+ sont disjointes, puisque leurs projections orthogonales sur la géodésique complexe $l_{[p_U],[p_V]}$ sont d'une part la médiatrice (réelle) de $[p_U]$ et $[p_V]$, et d'autre part son image par la réflexion en $[p_U]$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, soit C_s le cône (réel) sur $[U^s]\mathcal{J}_0^+$ issu de $[p_U]$. On sait que C_0 et $C_{\frac{n}{2}}$ sont disjoints et opposés l'un de l'autre par rapport à $[p_U]$. De plus, la projection de C_s sur $L_{[p_U]}$ est la rotation d'angle $2s$ de D_0^+. Soit $s \in]\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} + 2[$, telle que cette projection intersecte D_0^+. Grâce au lemme 4.8.29, nous savons que le cône C_s a un diamètre angulaire strictement inférieur à $\frac{\pi}{3}$: il ne peut donc pas intersecter C_0 et $C_{\frac{n}{2}}$, car sinon on aurait une union de trois cônes de diamètres angulaires $< \frac{\pi}{3}$ qui donnerait un ensemble connexe de diamètre angulaire $\geq \pi$. Le cône C_s intersecte alors soit C_0, soit $C_{\frac{n}{2}}$. Par continuité de $s \mapsto [U^s]$, il intersecte uniquement $C_{\frac{n}{2}}$. De façon analogue, les intersections de $\mathcal{J}_0^+$ avec l'orbite par $[U]$ de $\mathcal{J}_0^-$ sont exactement celles de l'énoncé. □

Annexe A

Les variétés $V(p, q, n)$

Nous allons étudier en détail les variétés $V(p, q, n)$ qui apparaissent naturellement dans le chapitre 2, et sur lesquelles nous avons discuté brièvement dans la section 2.4. Nous donnons ici une description indépendante du chapitre 2. Commençons par fixer des notations pour cette annexe.

Notation A.0.31. Dans toute la suite, nous noterons p, q et n trois entiers, deux à deux premiers entre eux, et tels que $\max(|p|, |q|) \leq n$. On choisit aussi $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $p^{-1}q \equiv \alpha \mod n$.

Notation A.0.32. Nous allons considérer la sphère S^3 comme la sphère unité dans $\mathbb{C}^2$.

$$S^3 = \Big\{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\Big\}$$

La variété $V(p, q, n)$ est définie à partir d'un sous-groupe à un paramètre, que nous définissons de la façon suivante :

Notation A.0.33. Dans U(2), considérons le sous-groupe à un paramètre $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ donné par

$$g_t(z_1, z_2) = (e^{\frac{2i\pi p}{n}} z_1, e^{\frac{2i\pi q}{n}} z_2).$$

Notons Γ le sous-groupe engendré par g_1 ; c'est groupe cyclique d'ordre n qui agit proprement discontinûment sur S^3.

Nous allons définir $V(p, q, n)$ comme le quotient par Γ d'un sous-ensemble de S^3 ; le quotient $\Gamma\backslash S^3$ est un espace lenticulaire, que nous décrivons dans la proposition suivante.

Proposition A.0.34. *Le quotient $\Gamma\backslash S^3$ est l'espace lenticulaire $L(n, \alpha)$*

Démonstration. Notons p^{-1} l'inverse de p modulo n. Le groupe Γ est alors engendré par l'élément $g_{p^{-1}} : (z_1, z_2) \mapsto (e^{\frac{2i\pi}{n}} z_1, e^{\frac{2i\pi\alpha}{n}} z_2)$. On en déduit que $\Gamma\backslash S^3 = \langle g_{p^{-1}}\rangle\backslash S^3 = L(n, \alpha)$. $\square$

La remarque suivante décrit les orbites du sous-groupe à un paramètre $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dans S^3. Nous prendrons une de ces orbites pour définir la variété $V(p,q,n)$.

Remarque A.0.35. Les orbites du sous-groupe à un paramètre $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a comme orbites dans S^3 :

— Le cercle $C_1 = \{(e^{i\theta}, 0) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$
— Le cercle $C_2 = \{(0, e^{i\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$
— Des nœuds toriques de type (p,q), qui tournent p fois autour du cercle C_2 et q fois autour du cercle C_1

Définition A.0.36. Notons N l'orbite de $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ pour l'action de $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$. C'est un nœud torique de type (p,q) ; nous noterons $T(p,q)$ son complémentaire dans S^3. On définit alors la variété $V(p,q,n)$ comme $\Gamma\backslash T(p,q)$.

Afin d'étudier $V(p,q,n)$, considérons le tore T donné par

$$T = \left\{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Le tore T découpe S^3 en deux tores pleins stables par Γ, à savoir

$$\mathcal{T}_1 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \geq |z_2|\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \leq |z_2|\}$$

Étudions le quotient $\Gamma\backslash(\mathcal{T}_1 - N)$. Rappelons qu'on a choisi $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \equiv p^{-1}q \mod n$. Le tore $\mathcal{T}_1$ est difféomorphe à $S^1 \times D^2$ par l'application :

$$\widetilde{\varphi_1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \to & S^1 \times D^2 \\ (z_1, z_2) & \mapsto & (\frac{z_1}{|z_1|}, z_2 z_1^{-\alpha}) \end{array}$$

L'image de N dans $S^1 \times D^2$ par cette application est alors donnée par

$$N_1 = \{(e^{2i\pi\frac{p}{n}t}, e^{2i\pi\frac{q-\alpha p}{n}t}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

L'action de Γ sur $S^1 \times D^2$ est donnée par $g_1 \cdot (w_1, w_2) = (e^{2i\pi\frac{p}{n}} w_1, w_2)$. L'application quotient est alors donnée par

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times D^2 & \to & \Gamma\backslash(S^1 \times D^2) \cong S^1 \times D^2 \\ (w_1, w_2) & \mapsto & (w_1^n, w_2) \end{array}$$

L'image de N_1 dans ce quotient est la courbe $N_1' = \{(e^{2i\pi pt}, e^{2i\pi\frac{q-\alpha p}{n}t}) \mid t \in \mathbb{R}\}$. L'application $\widetilde{\varphi_1}$ induit alors un difféomorphisme entre les quotients $\varphi_1 : \Gamma\backslash\mathcal{T}_1 \to S^1 \times D^2$.

De même, en posant $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta q \equiv p \mod n$, on a le difféomorphisme

$$\widetilde{\varphi_2} : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & D^2 \times S^1 \\ (z_1, z_2) & \mapsto & (z_1 z_2^{-\beta}, \frac{z_2}{|z_2|}) \end{array},$$

et $\Gamma \backslash \mathcal{T}_2$ est difféomorphe à $D^2 \times S^1$ où l'image de N est la courbe

$$N_2' = \{(e^{2i\pi \frac{p-\beta q}{n} t}, e^{2i\pi q t}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

L'application $\widetilde{\varphi_2}$ induit, elle aussi, un difféomorphisme entre les quotients $\varphi_2 : \Gamma \backslash \mathcal{T}_2 \to D^2 \times S^1$. Calculons explicitement l'application de recollement $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$.

Lemme A.0.37. *Pour $(w_1, w_2) \in S^1 \times S^1$, on a*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(w_1, w_2) = (w_1^{\frac{1-\alpha\beta}{n}} w_2^{-\beta}, w_1^{\alpha} w_2^{n})$$

Démonstration. Soit $(w_1, w_2) \in S^1 \times S^1$. Soit ζ_1 une racine n-ème de w_1. Un antécédent de (w_1, w_2) dans $T = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est alors $(\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_1, \frac{\sqrt{2}}{2} w_2 \zeta_1^{\alpha})$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(w_1, w_2) &= \varphi_2 \left(\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_1, \frac{\sqrt{2}}{2} w_2 \zeta_1^{\alpha} \right) \right] \right) \\ &= (\zeta_1 w_2^{-\beta} \zeta_1^{-\alpha\beta}, w_2^{n} \zeta_1) \\ &= (w_1^{\frac{1-\alpha\beta}{n}} w_2^{-\beta}, w_1^{\alpha} w_2^{n}) \end{aligned}$$

puisque n divise $1 - \alpha\beta$ et que $\zeta_1^n = w_1$. □

On peut désormais montrer la proposition suivante, qui montre qu'on a une équivalence d'homotopie entre $V(p, q, n)$ et $T(p, q)$.

Proposition A.0.38. *La variété $V(p, q, n)$ est homotopiquement équivalente à $T(p, q)$. En particulier, $\pi_1(V(p, q, n)) = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$.*

Démonstration. On peut écrire $V(p, q, n)$ comme $(S^1 \times D^2 - N_1) \cup (D^2 \times S^1 - N_2)/\sim$ où on identifie les deux bords par l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

Pour le couple standard longitude-méridien (l_1, m_1) de $S^1 \times D^2$, la courbe N_1' est homotope dans T à $l_1^p m_1^{\frac{q-\alpha p}{n}}$, et donc homotope à l_1^p dans $S^1 \times D^2$. De même, pour le couple standard longitude-méridien (l_2, m_2) de $D^2 \times S^1$, la courbe N_2' est homotope dans T à $l_2^{\frac{p-\beta q}{n}} m_2^p$, et donc homotope à l_2^q dans $D^2 \times S^1$. On a exactement la même situation pour la courbe N dans les tores solides $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, qui se recollent en $S^3 - N = T(p, q)$. Le recollement $(S^1 \times D^2 - N_1) \cup (D^2 \times S^1 - N_2)/\sim$ est alors homotopiquement équivalent à $T(p, q)$. □

Sachant que les variétés $V(p, q, n)$ et $T(p, q)$ sont homotopiquement équivalentes, on peut se demander à quelle condition elles sont homéomorphes. Pour le faire, nous aurons

besoin du théorème suivant, montré par Moser dans [Mos71]. Nous avons changé les notations pour qu'elles soient adaptées à ce texte ; elles ne correspondent pas exactement aux notations de Moser.

Théorème A.0.39. *Soient $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $(p, q) = 1$ et $(r, s) = 1$. On note $\sigma = pqr + s$. Soit M la variété obtenue par la chirurgie de Dehn de pente (r, s) sur la variété $T(p, q)$. Alors*

- *Si $|\sigma| > 1$, alors M est un fibré de Seifert sur S^2 avec trois fibres singulières de type $\alpha_1 = p$, $\alpha_2 = q$ et $\alpha_3 = |\sigma|$.*
- *Si $|\sigma| = 1$, alors M est homéomorphe à l'espace lenticulaire $L(|s|, rq^2)$.*
- *Si $\sigma = 0$, alors M est homéomorphe à la somme connexe $L(p, q)\#L(q, p)$.*

On peut maintenant montrer la proposition suivante, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que $V(p, q, n)$ soit homéomorphe à $T(p, q)$.

Proposition A.0.40. *La variété $V(p, q, n)$ est homéomorphe à $T(p, q)$ si et seulement si $n \equiv \pm 1 \mod (pq)$*

Démonstration. Supposons d'abord que $V(p, q, n)$ est homéomorphe à $T(p, q)$. La chirurgie de Dehn de $V(p, q, n)$ consistant à rajouter la courbe $\Gamma \backslash N$ est l'espace lenticulaire $L(n, \alpha)$. Or, d'après le théorème A.0.39 de Moser, les seules chirurgies de Dehn sur $T(p, q)$ donnant un espace lenticulaires sont celles de pente (r, s) où $|pqr+s| = 1$; et on obtient alors l'espace lenticulaire $L(|s|, rq^2)$. On en déduit qu'il est nécessaire que $s = \pm n$ et $|pqr \pm n| = 1$. Ceci implique que $n \equiv \pm 1 \mod pq$.

Supposons maintenant que $n \equiv \pm 1 \mod pq$. Il existe alors $r \in \mathbb{Z}$ tel que $n = pqr \pm 1$. On peut alors choisir $\alpha = \mp q^2 r$ et $\beta = \mp p^2 r$. Dans ce cas, on a $\frac{q-\alpha p}{n} = \pm q$ et $\frac{p-\beta q}{n} = \pm p$. La variété $V(p, q, n)$ s'obtient alors comme $(S^1 \times D^2 - N_1') \cup (D^2 \times S^1 - N_2')/\sim$ où on identifie au bord les courbes parallèles à N_1' et N_2' respectivement, i.e. $l_1^p m_1^{\pm q}$ et $l_2^{\pm p} m_2^q$. C'est exactement le même recollement que celui de $(\mathcal{T}_1 - N) \cup (\mathcal{T}_2 - N)$, qui est égal à $T(p, q)$. $\square$

Annexe B

Le théorème du polyèdre de Poincaré

B.1 Le théorème du polyèdre de Poincaré

Le théorème du polyèdre de Poincaré est un résultat très utilisé en géométrie hyperbolique réelle. Il est un outil clé à la fois pour construire des structures géométriques sur des variétés et à montrer le caractère discret d'un groupe en construisant un domaine fondamental. Énoncé par Poincaré pour le plan hyperbolique réel puis pour l'espace hyperbolique, le théorème est valable pour des espaces à courbure constante. On pourra voir un énoncé du théorème et une vue d'ensemble dans l'article de survol de Epstein et Petronio [EP94].

Dans le cas où la courbure de l'espace n'est pas constante, par exemple pour le cas de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui nous intéresse particulièrement, les hypothèses usuelles du théorème du polyèdre de Poincaré ne sont pas vérifiées, mais un résultat analogue est tout de même vrai. On peut trouver des énoncés dans l'article de Mostow [Mos80], ou dans les travaux plus récents de Deraux, Falbel et Paupert [DFP05], Falbel et Parker [FP06], Parker [Par06], Deraux, Parker et Paupert [DPP16] ou Parker, Wang et Xie [PWX16] pour en citer quelques uns. Pour l'utilisation que nous faisons dans cette thèse, l'énoncé qui convient le plus est celui donné par Parker et Will dans [PW15]. Nous allons reprendre dans cette annexe leur énoncé du thèorème du polyèdre de Poincaré pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Une preuve complète est attendue dans le livre à paraître de Parker [Parar].

B.2 L'énoncé de Parker-Will

Dans cette section nous reprenons l'énoncé du théorème du polyèdre de Poincaré pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ donné par Parker et Will dans [PW15, Théorème 5.1]. Il s'agit ici d'une simple traduction de ce passage de l'article : nous reprenons le mêmes notations et la même structure,

en omettant les références à l'application utilisée par Parker et Will. Comme dans l'article, il faudra fixer d'abord des notations et détailler les hypothèses.

On va considérer un polyèdre D pour énoncer le théorème. On suppose que D est invariant par un groupe $\Upsilon < \mathrm{PU}(2,1)$ qui préserve sa structure cellulaire.

B.2.1 Le polyèdre et sa structure cellulaire

On considère un polyèdre ouvert D dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On note $\overline{D}$ son adhérence dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On note $\partial_\infty D$ l'intersection de $\overline{D}$ avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. Ce polyèdre a une structure cellulaire naturelle qu'on suppose localement finie dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On suppose que toutes les cellules de D sont des variétés lisses par morceaux dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

Notation B.2.1. Pour $k \in [|0,4|]$ on notera $\mathcal{F}_k(D)$ l'ensemble des cellules de codimension k de $\overline{D}$ qui ont une intersection non-vide avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$; on les considère comme des fermés dans $\overline{\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

On notera $\mathring{f}$ l'intérieur d'une cellule, c'est à dire les points qui ne sont ni dans $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ ni dans des cellules de dimension strictement inférieure.

On appellera *faces* ou *3-faces* les éléments de $\mathcal{F}_1(D)$, et *facettes* les éléments de $\mathcal{F}_2(D)$ [1].

Puisque D est un polyèdre, on sait que $\mathcal{F}_0(D) = \overline{D}$ et que chaque facette de $\mathcal{F}_2(D)$ est dans exactement deux 3-faces de $\mathcal{F}_1(D)$. De même, l'intersection des cellules de D avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ munit un sous-ensemble de $\partial_\infty D$ d'une structure de polyèdre.

Notation B.2.2. On note $\mathcal{IF}_k(D)$ les cellules idéales de $\partial_\infty D$ de codimension k telles que chaque cellule dans $\mathcal{IF}_k(D)$ est contenue dans une cellule d'un $\mathcal{F}_l(D)$ avec $l < k$. En particulier, nous aurons besoin de considérer des *sommets idéaux* dans $\mathcal{IF}_4(D)$. Ce sont soit des extrémités de cellules dans $\mathcal{F}_3(D)$, soit des points de $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ contenus dans au moins deux cellules de $\overline{D}$ qui ne s'intersectent pas dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

On remarque qu'on a défini les cellules idéales comme des sous-ensembles de cellules. Il est alors possible d'avoir des points de $\partial_\infty D$ qui n'appartiennent à aucune cellule idéale.

B.2.2 L'identification de faces

Définition B.2.3. Une *identification de faces* est une application $\sigma : \mathcal{F}_1(D) \to \mathrm{PU}(2,1)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Pour chaque face $s \in \mathcal{F}_1(D)$ avec $\sigma(s) = S$, il y a une autre face $s^- \in \mathcal{F}_1(D)$ telle que S est un homéomorphisme entre s et s^- et $\sigma(s^-) = S^{-1}$. En outre, si $s = s^-$, alors $S = S^{-1}$ et S est une involution. Dans ce cas, on appelle $S^2 = id$ une relation d'involution.

1. Les termes correspondants en anglais dans [PW15] sont «side» pour face, «ridge» pour facette, «edge» pour arête et «vertex» pour sommet.

2. Pour chaque $s \in \mathcal{F}_1(D)$ avec $\sigma(s) = S$ on a $\bar{D} \cap S^{-1}(\bar{D}) = s$ et $D \cap S^{-1}(D) = \emptyset$.
3. Pour chaque $s \in \mathcal{F}_1(D)$, et pour chaque $w \in \mathring{s}$ il existe un voisinage ouvert $U(w) \subset \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ de w contenu dans $\bar{D} \cap S^{-1}\bar{D}$.

Définition B.2.4. On dit que Υ est *compatible* avec les identifications de faces si pour tout $P \in \Upsilon$ et tout $s \in \mathcal{F}_1(D)$ on a $Ps \in \mathcal{F}_1(D)$ et $\sigma(Ps) = P\sigma(s)P^{-1}$. On appelle cette dernière relation une *relation de compatibilité.*

B.2.3 Facettes et relations de cycles

Considérons une facette $r_1 \in \mathcal{F}_2(D)$. Alors r_1 est contenue dans exactement deux 3-faces de D. Notons-les s_0^- et s_1. Considérons le triplet ordonné (r_1, s_0^-, s_1). L'identification de faces $\sigma(s_1) = S_1$ envoie s_1 sur la 3-face s_1^- en préservant la structure cellulaire. En particulier, $S_1(r_1)$ est une facette r_2 de s_1^-. Soit s_2 l'autre 3-face contenant r_2. On a un nouveau triplet (r_2, s_1^-, s_2). On applique $\sigma(s_2) = S_2$ à r_2 et on itère le procédé. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de facettes pour l'action de Υ, il existe un entier $m > 0$ tel que le triplet $(r_{m+1}, s_m^-, s_{m+1})$ soit égal à $(P^{-1}r_1, P^{-1}s_0^-, P^{-1}s_1)$ pour un unique $P \in \Upsilon$. On définit une application $\rho : \mathcal{F}_2(D) \to \mathrm{PU}(2,1)$, appelée *transformation de cycle* par $\rho(r_1) = PS_{m+1} \cdots S_1$. On remarquera que pour une facette $r_1 = s_0^- \cap s_1$, la transformation de cycle dépend du choix d'une des faces s_0^- et s_1. Si on change de choix, la transformation R devient R^{-1}, puisqu'on a une action de Υ compatible avec les identifications et que pour une 3-face s on a $\sigma(s^{-1}) = \sigma(s)^{-1}$. Par construction, la transformation de cycle $R = \rho(r_1)$ envoie la facette r_1 sur elle même. Cependant, R peut ne pas fixer r_1 point par point, ni être l'identité de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. On supposera désormais que R est d'ordre n. La relation $R^n = id$ est appelée *relation de cycle* associée à r_1.

En écrivant le relation de cycle $\rho(r_1) = R$ en termes de P et des S_j on note $\mathcal{C}(r_1)$ l'ensemble des suffixes de R^n, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(r_1) = \left\{ S_j \cdots S_1 R^k \mid 0 \leq j \leq m-1, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

On dira que la *condition de cycle* en r_1 est vérifiée si :

1. $$r_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}(r_1)} C^{-1}(\overline{D}).$$
2. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(r_1)$ sont distincts, alors $C_1^{-1}(D) \cap C_2^{-1}(D) = \emptyset$.
3. Pour tout $w \in \mathring{r}_1$, il existe un voisinage ouvert $U(w)$ de w tel que
$$U(w) \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}(r_1)} C^{-1}(\overline{D}).$$

B.2.4 Sommets idéaux et systèmes consistants d'horoboules

Supposons que l'ensemble $\mathcal{IF}_4(D)$ des sommets idéaux de D est non vide. Dans nos applications, il n'y a pas d'arêtes (c'est-à-dire que $\mathcal{F}_3(D)$ est vide) et les seuls sommets idéaux sont des points de tangence entre les bords à l'infini de facettes dans $\mathcal{F}_2(D)$. Pour simplifier la discussion ci-dessous, on traite uniquement ce cas. On appelle *système d'horoboules* une famille d'horoboules deux à deux disjointes $(H_\xi)_{\xi\in\mathcal{IF}_4(D)}$ où, pour un sommet idéal $\xi \in \mathcal{IF}_4(D)$, l'horoboule H_ξ est centrée en ξ. Soit $\xi \in \mathcal{IF}_4(D)$ et soit $s \in \mathcal{F}_1(D)$ une 3-face avec $\xi \in s$. L'identification de faces $S = \sigma(s)$ envoie alors le point ξ en un point ξ^- dans s^-. On remarquera que ξ n'est pas nécessairement un sommet idéal, puisqu'il est possible que ξ soit un point de tangence de deux faces qui sont disjointes dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$, et que ξ^- peut être un point de tangence de deux faces dont une seule forme part du bord de D. Dans notre cas ceci n'arrive pas, et on peut supposer que $\xi^- \in \mathcal{IF}_4(D)$ et qu'il admet H_{ξ^-} dans le système d'horoboules. Pour que la famille $(H_\xi)_{\xi\in\mathcal{IF}_4(D)}$ forme un *système consistant d'horoboules*, on demande que pour chaque sommet idéal ξ et chaque 3-face s contenant ξ, l'identification de faces $\sigma(s)$ envoie l'horoboule H_ξ sur l'horoboule H_{ξ^-}. En particulier, tout cycle d'identification de faces qui fixe ξ doit aussi envoyer H_ξ sur lui-même.

B.2.5 Énoncé du théorème

Théorème B.2.5. *([PW15, Théorème 5.1]) Soit D un polyèdre plongé de façon lisse dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ muni d'une identification de faces $\sigma : \mathcal{F}_1(D) \to \mathrm{PU}(2,1)$. Soit $\Upsilon < \mathrm{PU}(2,1)$ un groupe d'automorphismes de D compatible avec l'identification de faces. On suppose que chaque $\mathcal{F}_k(D)$ contient un nombre fini d'orbites sous Υ. On fixe un ensemble de générateurs $\mathcal{P}_\Upsilon$ de Υ, vérifiant des relations $\mathcal{R}_\Upsilon$. Soit Γ le groupe engendré par les identifications de faces $\{\sigma(s)\}$. On suppose que la condition de cycle est vérifiée pour chaque facette dans $\mathcal{F}_2(D)$ et qu'il existe un système consistant d'horoboules aux sommets idéaux de D (s'il y en a). Alors :*

1. *Les images de D sous l'action des classes latérales de Υ dans Γ forment un pavage de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$. En d'autres termes, $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}} \subset \bigcup_{A\in\Gamma} A(\overline{D})$ et $D \cap A(D) = \emptyset$ pour tout $A \in \Gamma - \Upsilon$.*

2. *Le groupe Γ est discret et un domaine fondamental pour son action sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$ est l'intersection de D avec un domaine fondamental pour l'action de Υ*

3. *Pour l'ensemble générateur $P_\Upsilon \cup \{\sigma(s)\}$, les relations suivantes donnent une présentation de Γ : les relations $\mathcal{R}_\Upsilon$ dans Υ, les relations de compatibilité entre σ et Υ, les relations de réflexion et les relations des cycles.*

B.3 Application dans le chapitre 4

Dans le chapitre 4, on utilise le théorème du polyèdre de Poincaré pour finir la preuve du théorème 4.3.6 et d'une partie de la conjecture 4.3.7. Nous nous référons ici tout particulièrement à la section 4.5

Lorsque $\alpha_2 \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ est un paramètre admissible, le domaine $D(\alpha_2)$ vérifie les hypothèses du théorème du polyèdre de Poincaré décrit ci-dessus : puisque la combinatoire et la topologie des faces sont les mêmes que celles du domaine de Parker-Will, les vérifications sont les mêmes que celles faites dans [PW15].

Ici, le groupe $\Upsilon = \langle [U] \rangle$ stabilise le domaine, et on a deux orbites de 3-faces [2] : celle de $\mathcal{F}_0^+$ et celle de $\mathcal{F}_0^-$. Les identifications des faces sont données par $[S]$, $[S^{-1}]$ et leurs conjugués par des puissances de $[U]$, par $\sigma(\mathcal{F}_k^+) = U^k S^{-1} U^{-k}$. Cet élément envoie $\mathcal{F}_k^+$ sur $\mathcal{F}_k^-$. Les conditions de cycles sont exactement les mêmes, et donnent les relations $[S^3] = [T^3] = \mathrm{Id}$; les facettes sont des disques de Giraud, et donc les relations de cycle sont de longueur 3. Pour les sommets idéaux, la construction d'un système consistant d'horoboules est complètement analogue à celle donnée dans la section 6.2 de [PW15] .

Si $\alpha_2 \in]0, \frac{\pi}{6}[$, on ne rentre pas dans le cadre du théorème du polyèdre de Poincaré, puisque les 3-faces ne sont pas homéomorphes à des boules de dimension 3, mais des parties de cônes de Clifford, contenant le point singulier. Cependant, les mêmes hypothèses sont vérifiées. En particulier, le domaine n'est plus un polyèdre, puisque les 3-faces ne sont pas homéomorphe à des boules, mais les recollements de faces donnent bien un voisinage ouvert pour chaque point des faces du domaine que nous considérons au chapitre 4. La preuve du théorème du polyèdre de Poincaré, qui paraîtra dans [Parar], devrait pouvoir s'adapter à ce cas.

2. Nous reprenons ici les notations du chapitre 4 pour les 3-faces. On les appelle $\mathcal{F}_k^{\pm}$ au lieu de la notation $s_k^{\pm}$ de [PW15] et du reste de cette annexe.

Bibliographie

[Aco16a] Miguel Acosta : Character varieties for real forms. *arXiv :1610.05159 [math]*, octobre 2016.

[Aco16b] Miguel Acosta : Spherical CR Dehn surgeries. *Pacific Journal of Mathematics*, 284(2):257–282, août 2016.

[Bas80] Hyman Bass : Groups of integral representation type. *Pacific Journal of Mathematics*, 86(1):15–51, 1980.

[BG04] Nicolas Bergeron et Tsachik Gelander : A note on local rigidity. *Geometriae Dedicata*, 107:111–131, 2004.

[CEG06] R. D. Canary, D. B. A. Epstein et P. L. Green : Notes on notes of Thurston [MR0903850]. *In Fundamentals of Hyperbolic Geometry : Selected Expositions*, volume 328 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–115. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006. With a new foreword by Canary.

[CHK00] Daryl Cooper, Craig David Hodgson et Steve Kerckhoff : *Three-Dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*, volume 5. Mathematical Society of Japan, 2000.

[CL98] D. Cooper et D. D. Long : Representation theory and the A-polynomial of a knot. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9(4-5):749–763, 1998. Knot theory and its applications.

[CR62] Charles W. Curtis et Irving Reiner : *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[CS83] Marc Culler et Peter B. Shalen : Varieties of Group Representations and Splittings of 3-Manifolds. *The Annals of Mathematics*, 117(1):109, janvier 1983.

[Der14] Martin Deraux : A 1-parameter family of spherical CR uniformizations of the figure eight knot complement. *arXiv preprint arXiv :1410.1198*, 2014.

[Der15] Martin Deraux : On spherical CR uniformization of 3-manifolds. *Experimental Mathematics*, 24(3):355–370, juillet 2015.

[DF15] Martin Deraux et Elisha Falbel : Complex hyperbolic geometry of the figure eight knot. *Geometry & Topology*, 19(1):237–293, février 2015.

[DFP05] Martin Deraux, Elisha Falbel et Julien Paupert : New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space. *Acta Mathematica*, 194(2):155–201, septembre 2005.

[DPP16] Martin Deraux, John R. Parker et Julien Paupert : New non-arithmetic complex hyperbolic lattices. *Inventiones mathematicae*, 203(3):681–771, mars 2016.

[EP94] David B. A. Epstein et Carlo Petronio : An exposition of Poincaré's polyhedron theorem. *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. IIe Série*, 40(1-2):113–170, 1994.

[Fal08] E. Falbel : A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy. *Journal of Differential Geometry*, 79(1):69–110, mai 2008.

[FG94] Elisha Falbel et Nikolay Gusevskii : Spherical CR-manifolds of dimension 3. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 25(1):31–56, 1994.

[FGK+16] E. Falbel, A. Guilloux, P.-V. Koseleff, F. Rouillier et M. Thistlethwaite : Character varieties for SL(3,C) : The figure eight knot. *Experimental Mathematics*, 25(2):219–235, 2016.

[FKR13] Elisha Falbel, P.-V. Koseleff et Fabrice Rouillier : Representations of fundamental groups of 3-manifolds into PGL(3,C) : Exact computations in low complexity. *Geometriae Dedicata*, pages 1–27, 2013.

[FL09] Carlos Florentino et Sean Lawton : The topology of moduli spaces of free group representations. *Mathematische Annalen*, 345(2):453–489, octobre 2009.

[FP06] Elisha Falbel et John R. Parker : The geometry of the Eisenstein-Picard modular group. *Duke Mathematical Journal*, 131(2):249–289, février 2006.

[Gen10] Juliette Genzmer : *Sur Les Triangulations Des Structures CR-Sphériques*. Thèse de doctorat, UPMC, 2010.

[Gol83] William M. Goldman : Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 278(2):573–583, 1983.

[Gol88] William M. Goldman : Topological components of spaces of representations. *Inventiones mathematicae*, 93(3):557–607, octobre 1988.

[Gol99] William M. Goldman : *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[Gol04a] William M. Goldman : The complex-symplectic geometry of SL(2,C)-characters over surfaces. *In Algebraic Groups and Arithmetic*, pages 375–407. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.

[Gol04b] William M. Goldman : An exposition of results of Fricke. *arXiv preprint math/0402103*, 2004.

[Gol10] William M. Goldman : Locally homogeneous geometric manifolds. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, pages 717–744. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[GW16] Antonin Guilloux et Pierre Will : On SL(3,C)-representations of the Whitehead link group. *arXiv :1607.01536 [math]*, juillet 2016.

[Hel08] Sigurdur Helgason : *Geometric Analysis on Symmetric Spaces*, volume 39 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2008.

[Heu16] Michael Heusener : SL(n,C)- Representation spaces of Knot Groups. *arXiv :1602.03825 [math]*, février 2016.

[HMP15] Michael Heusener, Vicente Munoz et Joan Porti : The SL(3,C)-character variety of the figure eight knot. *arXiv :1505.04451 [math]*, mai 2015.

[KT91] Yoshinobu Kamishima et Takashi Tsuboi : CR-structures on Seifert manifolds. *Inventiones mathematicae*, 104(1):149–163, 1991.

[Law07] Sean Lawton : Generators, relations and symmetries in pairs of unimodular matrices. *Journal of Algebra*, 313(2):782–801, juillet 2007.

[LM85] Alexander Lubotzky et Andy R. Magid : Varieties of representations of finitely generated groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 58(336):0–0, 1985.

[Lok84] Walter Lawrence Lok : *Deformations of Locally Homogeneous Spaces and Klinian Groups (Teichmuller, Hyperbolic)*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.

[Min90] Robert R Miner : Spherical CR manifolds with amenable holonomy. *International Journal of Mathematics*, 1(04):479–501, 1990.

[Mos71] Louise Moser : Elementary surgery along a torus knot. *Pacific Journal of Mathematics*, 38(3):737–745, 1971.

[Mos80] G. D. Mostow : On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pacific Journal of Mathematics*, 86(1):171–276, 1980.

[MS84] John W. Morgan et Peter B. Shalen : Valuations, Trees, and Degenerations of Hyperbolic Structures, I. *Annals of Mathematics*, 120(3):401–476, 1984.

[MT86] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction À La Théorie Des Groupes de Lie Classiques*, volume 41. Hermann, 1986.

[Par06] John R. Parker : Cone metrics on the sphere and Livné's lattices. *Acta Mathematica*, 196(1):1–64, juillet 2006.

[Par11] Anne Parreau : Espaces de représentations completement réductibles. *Journal of the London Mathematical Society*, 83(3):545–562, 2011.

[Par12] Anne Parreau : Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini. *Mathematische Zeitschrift*, 272(1-2):51–86, octobre 2012.

[Parar] John R. Parker : *Complex Hyperbolic Kleinian Groups*. Cambridge University Press, To appear.

[Pro76] C Procesi : The invariant theory of n x n matrices. *Advances in Mathematics*, 19(3):306–381, mars 1976.

[PS85] Claudio Procesi et Gerald Schwarz : Inequalities defining orbit spaces. *Inventiones mathematicae*, 81(3):539–554, octobre 1985.

[PW15] John R. Parker et Pierre Will : A complex hyperbolic Riley slice. *arXiv preprint arXiv :1510.01505*, 2015.

[PWX16] John R. Parker, Jieyan Wang et Baohua Xie : Complex hyperbolic (3, 3, n) triangle groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 280(2):433–453, janvier 2016.

[Sch07] Richard Evan Schwartz : *Spherical CR Geometry and Dehn Surgery (AM-165)*. Numéro 165. Princeton University Press, 2007.

[Sha02] Peter B. Shalen : Representations of 3-manifold groups. *In Handbook of Geometric Topology*, pages 955–1044. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Sik12] Adam Sikora : Character varieties. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(10):5173–5208, 2012.

[Thu02] William P. Thurston : *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Princeton lecture notes, http ://library.msri.org/books/gt3m, 2002.

[Wil15] Pierre Will : Two Generator groups acting on the complex hyperbolic plane. *arXiv preprint arXiv :1510.01500*, 2015.