



HAL
open science

Mécanisme d'érosion et de déposition de l'écoulement granulaire sur un fond meuble

Thi Thanh Thao Trinh

► **To cite this version:**

Thi Thanh Thao Trinh. Mécanisme d'érosion et de déposition de l'écoulement granulaire sur un fond meuble. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Rennes, 2017. Français. NNT : 2017REN1S093 . tel-01743771

HAL Id: tel-01743771

<https://theses.hal.science/tel-01743771>

Submitted on 26 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Physique

Ecole doctorale 3M – Matière, Molécules et Matériaux

présentée par

Thi Thanh Thao TRINH

Préparée à l'unité de recherche IPR – UMR 6251

Institut de Physique de Rennes

UFR Structure et Propriétés de la Matière

**Mécanismes
d'érosion et de
déposition dans les
écoulements
granulaires de
surface**

**Thèse soutenue à Rennes
le 14 novembre 2017**

devant le jury composé de :

Olivier ROCHE

Chargé de Recherche IRD, HDR, LVM / *rapporteur*

Patrick RICHARD

Directeur de Recherche, HDR, IFSTTAR /
rapporteur

Anne MANGENEY

Professeur, Université Paris Diderot/ examinateur

Pascal DUPONT

Maître de conférences, INSA Rennes / examinateur

Renaud DELANNAY

Professeur, IPR / directeur de thèse

Alexandre VALANCE

Directeur de Recherche, IPR / co-directeur de thèse

Avant-propos

Remerciements

C'est avec une émotion forte et beaucoup de sincérités que je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu et aidé pour la réalisation de cette thèse. Dans la limite de mon français, j'espère que tous les mots que j'adresse ici pourront vraiment exprimer toute ma reconnaissance.

Tout d'abord, je voudrais remercier Professeur Jean-Pierre Landesman, Directeur de l'IPR, pour m'avoir accueilli pendant ma thèse. Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude envers Professeur Renaud Delannay et Dr Alexandre Valance, qui ont dirigé ma thèse, pour tout ce qu'ils m'ont appris, pour leurs disponibilités, pour leurs encouragements permanents, pour leurs soutiens et leurs conseils qui ont été nombreux et importants pendant ces dernières années.

J'adresse des remerciements tout particuliers à Dr Olivier Roche et Dr Patrick Richard pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie profondément Professeur Anne Mangeney, et Professeur Pascal Dupont, pour avoir accepté volontiers de faire partie de mon jury. Merci beaucoup à Yvonnique, Michaël pour leurs aides lors de la constitution des dispositifs expérimentaux.

Pendant ces dernières années, j'ai de la chance de travailler au sein du laboratoire de l'IPR où j'ai vraiment eu des conditions de travail excellentes et une ambiance très sympathique. Je voudrais remercier tous les membres du laboratoire, en particulier Lucie, David, Mikaël qui m'ont beaucoup aidé dès le commencement de ma thèse. Merci à ma famille et à tous mes amis, en particulier Kien, My Phuong, Thong qui m'ont aidé et encouragé pendant ces années.

Je remercie de tout mon coeur mon mari "Map" pour son aide, son écoute, son soutien moral dans les moments difficiles, surtout son amour qui m'a été essentiel durant ces années. Grâce à lui et avec lui j'ai su trouver toute la motivation pour aller au bout de cette thèse.

Enfin, j'ai envie de s'exprimer tout mon amour à mon petit Minh Nhat, Alexandre pour les courages qu'il m'a apportés moralement. Grâce à lui, mes séjours de travail passaient super rapide car j'ai bien su que je vais le voir, le prendre dans mes bras tout de suite dès que je rentre. Grâce à lui, j'ai tous mes courages pour dépasser n'importe quel moments difficiles pendant la thèse et aussi dans la vie quotidienne.

Résumé

Bien que répandus dans l'environnement et dans l'industrie, les écoulements granulaires possèdent des caractéristiques particulières qui sont différentes de celles des écoulements de liquides ordinaires comme l'eau (fluides newtoniens). L'une de ces caractéristiques est de présenter un seuil d'écoulement, il est donc fréquent qu'une des frontières de l'écoulement soit constituée de grains au repos (frontière érodable). L'échange entre les deux états solide et liquide d'un écoulement granulaire est à l'origine du phénomène d'érosion et de déposition et constitue le coeur de cette thèse. Nous y effectuons à la fois des études expérimentales et des études théoriques en nous basant sur les modèles phénoménologiques concernant le taux d'échange proposés par Bouchaud, Cates, Ravi Prakash et Edwards et modifiés par Boutreux et de Gennes. À l'aide d'un dispositif expérimental permettant de lâcher sans vitesse initiale une colonne de grains sur une pente granulaire, nous avons quantifié l'importance relative des phénomènes d'érosion et de déposition notamment en déterminant l'angle neutre qui définit la pente critique pour laquelle ces deux processus s'équilibrent. Dans un deuxième temps nous avons appliqué le modèle proposé par Boutreux et de Gennes au cas de l'étalement d'une « marche » granulaire (marche du Sinai).

Mots-clés : écoulements granulaire, érosion et déposition, fond meuble, écoulements de surface, échange solide-liquide, modélisation de l'écoulement granulaire, modèle phénoménologique.

Summary

GRANULAR flows, which are common in nature and industry, have particular characteristics that are different from the ordinary flow of liquid (eg. water, oil, etc.) and are not yet well understood in the literature. This case underlines the lack of knowledge on the exchange rate between solid and liquid states of granular flows which is the origin of the erosion - deposition phenomenon and constitutes the core of this thesis. To address the issue of the exchange rate solid - liquid, this work is based mainly in two subjects. The first subject is to study the processes of erosion and deposition of a flow generated by the grains stocked in a reservoir. By releasing naturally with zero-velocity the grains to generate the granular flow, we quantified the relation between the erosion and deposition for determining the neutral angle which defines the slope where these two processes balance. The second subject is to analyze the fall of grains in Sinai step problem by studying the spread of the march. For both works, we conduct not only the experimental but also theoretical studies based on the phenomenological models of the exchange rate proposed by BCRE (Bouchaud, Cates, Ravi Prakash and Edwards) and BDG (Boutreux and de Gennes) with some modifications.

Keywords : granular flows, erosion and deposition, erodible bed, surface flows, solid -liquid exchange , granular flow modeling, phenomenological model.

Table des matières

Avant-propos	i
Résumé	iii
Summary	iv
Table des matières	v
0 Introduction	1
1 Etat de l'art	5
1.1 Stabilité d'un empilement granulaire	6
1.1.1 Milieu granulaire	6
1.1.2 Angle d'avalanche et angle de repos	7
1.2 Érosion et déposition dans l'écoulement granulaire	14
1.2.1 Modèle BCRE	17
1.2.2 Modèle BDG (BCRE saturé)	18
1.2.3 Limitations des modèles BCRE et BDG	20
1.3 Écoulements granulaires à l'échelle du laboratoire	20
1.3.1 Effet du fond : angle d'arrêt et angle de démarrage	21
1.3.2 Effet des parois latérales : angle neutre dynamique?	23
1.3.3 Étalement d'une colonne granulaire	24
1.4 Études antérieures sur l'angle neutre	26
1.4.1 Angle neutre pour une configuration 3D	27
1.4.2 Angle neutre pour une configuration 2D	31
1.4.3 Comparaison des résultats obtenus	32
1.5 Contributions de ce travail de thèse	32
2 Dispositif expérimental	35
<i>Description de dispositif expérimental et de mesures utilisées</i>	
2.1 Montage expérimental	36
2.1.1 Présentation du montage	36
2.1.2 Dimensionnement du réservoir et du lit statique	37
2.2 Caractéristiques des particules utilisées	39
2.2.1 Taille des particules	39
2.2.2 Nature des interactions inter-particulaires	40
2.3 Protocole expérimental	40
2.3.1 Remplissage du canal	40
2.3.2 Déclenchement de l'écoulement	42

2.3.3	Mesures et Analyses	43
2.3.4	Analyse des particules en sortie du canal	43
2.3.5	Analyse vidéo de l'écoulement	43
3	Angle neutre d'un lit granulaire	45
	<i>Stabilité d'un empilement granulaire sous l'effet d'un écoulement de grains</i>	
3.1	Introduction	46
3.2	Manipulations	46
3.2.1	Détermination de l'angle avalanche et de repos	46
3.2.2	Détermination de l'angle neutre	46
3.2.3	Liste des expériences effectuées	48
3.3	Résultats expérimentaux	49
3.3.1	Stabilité du lit	49
3.3.2	Angle neutre du lit	50
3.3.3	Dépendances de l'angle neutre	51
3.3.4	Dépendances du coefficient d'érosion	53
3.3.5	Influence de la longueur du lit	54
3.3.6	Influence de la hauteur du lit	55
3.3.7	Proportion de particules du réservoir dans la masse sortie	56
3.4	Comparaisons avec les études antérieures	57
3.5	Interprétations et discussions	59
3.5.1	Modèle BCRE	60
3.5.2	Modèle BDG	62
3.5.3	Détermination des paramètres pour les modèles	63
3.5.4	Discussions	66
4	Marche du Sinaï	69
4.1	Introduction	70
4.2	Prédiction théorique	70
4.2.1	Description des différentes phases de l'étalement	70
4.2.2	Modèle BCRE	71
4.2.3	Modèle "BDG saturé"	75
4.3	Dispositif expérimental	77
4.3.1	Protocole expérimental	77
4.3.2	Méthode de traitement et d'analyse de l'étalement	78
4.3.3	Listes des expériences effectuées	79
4.4	Résultats expérimentaux	80
4.4.1	Angle final d'étalement θ_f	80
4.4.1.1	Fond rigide rugueux	80
4.4.1.2	Fond meuble	81
4.4.1.3	Effet de l'inclinaison du fond	82
4.4.2	Dynamique de l'étalement	83
4.4.3	Angle neutre θ_N	85
4.5	Conclusion	85

5	Conclusion et perspectives	87
5.1	Conclusion	88
5.2	Perspectives	89
A	Méthode optique pour mesurer l'écartement entre les plaques de verres du canal d'écoulement	91
	<i>Modèle BCRE et BDG pour l'écoulement granulaire</i>	
B	Équations BCRE et BDG pour l'écoulement granulaire	93
	<i>Modèle BCRE et BDG pour l'écoulement granulaire</i>	
B.1	Formulations originales	94
B.2	Modèle BCRE	94
B.3	Modèle BDG (BCRE saturé)	95
C	Équations BDG pour la marche du Sinaï	97
	<i>Modèle BDG pour la marche du Sinaï</i>	

Table des figures

1.1	Quelques exemples de milieu granulaire dans la nature (a), l'industrie (b) et la vie quotidienne (c)-(d) extraits de [1]. (a) Avalanche de sable et de rochers dans une région côtière. (b) Fabrication des médicaments dans l'industrie pharmaceutique. (c) Empilement granulaire formé par de la semoule ou des grains des haricots. (d) Tas de sucre.	6
1.2	Configurations expérimentales pour étudier la stabilité d'un empilement granulaires (l'angle d'avalanche et l'angle de repos). (a) Fabrication d'un tas granulaire à partir d'un point source. (b) Dispositif de type boîtier inclinable. (c) Dispositif de type tambour tournant.	8
1.3	Définition des angles d'avalanche θ_A et de repos θ_R . (a) Inclinaison du boîtier expérimental. (b) Détermination d'angle d'avalanche et de repos.	8
1.4	Corrélation entre l'angle de repos et l'angle d'avalanche (noté θ_m) observée par Fischer et al. [2] pour 340 avalanches produites en tambour tournant avec des billes de verre de $1mm$. L'intersection entre l'ajustement linéaire et la bissectrice donne la valeur d'un angle appelé angle neutre.	9
1.5	(a) Dépendance de l'angle de repos en fonction du confinement latéral selon Grasselli et al. [3], a est le diamètre de grains de l'empilement et d est l'écart entre les parois latérales. (b) Dépendance de l'angle d'avalanche en fonction du confinement latéral selon Boltenhagen [4], d est l'écart entre les parois latérales de l'empilement et $D = 2mm$ est le diamètre de grains, τ est la variation relative de l'angle $\tau = (\theta - \theta_\infty)/\theta_\infty$, où θ_∞ est l'angle d'avalanche obtenu quand d tend vers l'infini.	10
1.6	Évolutions des angles avalanche (triangles) et de repos (cercles) pour des billes de verre de diamètre d en fonction de confinement latéral b entre parois du canal d'écoulement. (a) Résultats obtenus dans tambour tournant avec $d = 1,85mm$ selon Courrech du Pont [5]. (b) Résultats obtenus dans l'écoulement sur tas entre deux plaques en verre avec $d = 5mm$ selon Zhou et al. [6]. (c) Résultats obtenus en utilisant une boîte inclinable avec $d = 1mm$ selon Boltenhagen [4].	11
1.7	Angle d'avalanche et angle de repos (θ_M et θ_R) en fonction de la longueur de confinement (L_e) selon Kiegen de Richter [7]. L'angle d'avalanche atteint la valeur asymptotique quand L_e tend vers l'infini.	12
1.8	Influence de l'épaisseur (nombre de couche de grains N) sur l'angle d'avalanche θ_M (carrés pleines) et de repos θ_r (cercles vides) selon Aguirre et al. [8].	12

1.9	Influence de la fraction volumique sur l'angle d'avalanche θ_M (carrés vides) et la différence entre l'angle d'avalanche et l'angle de repos δ (cercles denses) en fonction de la masse d'avalanches M selon Evesque et al. [9]. L'étude est menée sur un empilement de 20 couche de grains ($N = 20$), la masse d'avalanche M est proportionnelle à la fraction volumique de l'empilement initial, elle est normalisée par la masse d'une couche $m = 230g$. La partie de gauche représente des empilements lâches (loose packing) et celle à droite représente des empilements denses (dense packing).	13
1.10	Influence de l'humidité relative sur l'angle d'avalanche et de repos selon Fraysse et al. [10]. Les courbes montrent que, quand l'humidité augmente, l'angle d'avalanche (triangles pleins) augmente faiblement jusqu'à 70% et plus fortement ensuite, l'angle de repos (triangles vides) semble diminuer légèrement.	14
1.11	Les trois états de l'écoulement granulaire : gazeux, solide et liquide. L'écoulement des grains en régime dense sur le plan incliné représente l'état liquide. La chute des grains représente le régime dilué et correspond à l'état gazeux. Le dépôt des grains pour former lentement un empilement granulaire sur un plan horizontal est similaire au régime solide.	15
1.12	Changement entre deux régimes d'un empilement granulaire selon Jaeger et al. [11]. (a) Régime statique. (b) Régime d'écoulement.	15
1.13	Description d'un écoulement de surface selon le modèle BCRE. h et R sont respectivement la hauteur de la phase statique et l'épaisseur de la phase roulante, à l'abscisse x et à l'instant t , l'angle θ est la pente locale du lit statique, $\tan(\theta) = \frac{\partial h}{\partial x}$	17
1.14	Dépendances angulaires des mécanismes d'accrétion $\Psi_A(\theta)$ et d'érosion $\Psi_E(\theta)$. A l'angle neutre (θ_N), ces deux phénomènes s'équilibrent.	18
1.15	Remontée d'une bosse dans le profil de la phase statique entre les instants t et $t + \Delta t$, stimulée par les grains roulants : le déplacement vers le haut est produit par une accrétion de grains roulants sur la partie amont de la bosse et une érosion sur sa partie aval.	19
1.16	Trois configurations souvent utilisées pour étudier les écoulements denses selon GDR MiDi [12] : (a) Écoulement sur fond rigide dans un plan incliné. (b) Écoulement sur fond meuble dans un plan horizontal. (c) Écoulement sur fond meuble dans un tambour tournant.	21
1.17	Stabilité de l'écoulement granulaire sur fond rigide reporté par Pouliquen et al. (1999) [13]. (a) Dispositif expérimental de type plan inclinable contient un empilement des bille vers de $0.5mm$ dans un lit de $200cm$ de longueur. (b) Diagramme de phase (θ , h/d) qui présentent des frontières des 4 régions sans et avec l'écoulement. La courbe en trait plein est la fonction $\theta_{stop}(h/d)$, et la courbe en trait pointillé correspond à la fonction $\theta_{start}(h/d)$	23

1.18 Ecoulements avec des bille de $d = 0.5\text{mm}$ présentés dans Taberlet et al. (2003) [14]. (a) Diagramme d'écoulement obtenu avec le canal de l'épaisseur $W = 10\text{mm}$: écoulement sur le plan où tous les grains s'écoulent (région I), écoulement sur tas avec des grains mobiles qui s'écoulent sur des grains statiques (région II). (b) Frontière entre deux régions I et II en fonction de l'épaisseur du canal : $W/d = 10, 20, 40$ 24

1.19 (a) Effondrement d'un colonne granulaire initialement formée dans un cylindre (3D) selon selon Lajeunesse et al. (2004) [15]. (b) Rupture d'un barrage (2D) selon Lajeunesse et al. (2005). Ces images montrent que la forme de grains étalés est très similaire pour les deux cas 2D et 3D. 25

1.20 (a) Etalement $\Delta L/L_i$ et (b) hauteur normalisé H_f/L_i de dépôt en fonction du rapport d'aspect $a = H_i/L_i$ selon Lajeunesse et al. (2004) [15]. Les cercles et les carrés sont les résultats expérimentaux pour la colonne cylindrique et le barrage. Les triangles sont les prédictions théoriques de glissement du terrain. Le rapport d'aspect critique reporté ici est $a_c = 0,74$ 26

1.21 Schéma de principe des dispositifs expérimentaux utilisés pour les études sur l'angle neutre d'un lit granulaire. La configuration 3D a été utilisée par Bideau et al. [16] et Mint Babah [17] avec des billes en verre. La configuration 2D a été utilisée par Ould Ahmedou [18] avec des pastilles circulaires et pentagonales en polystyrène. 27

1.22 Schéma de principe des deux versions du dispositif expérimental utilisé par Mint Babah (2010) [17]. (a) Version 1 avec avec le système de levage réalisé par l'intermédiaire d'un filin fixé à l'extrémité du canal. (b) Version 2 avec une structure rigide en acier et un vérin. 28

1.23 (a) Dépendance de l'angle neutre et (b) coefficient d'érosion en fonction de la masse initiale et du ratio d'aspect obtenue par Mint Babah [17] pour un écoulement 3D. La courbe de tendance est obtenue en utilisant une loi hyperbolique inspirée de Pouliquen et al. [13] : $\tan \theta_N = \frac{0,66*\tan(26,8)+\tan(24,4)*(R_0/\Delta_0)}{0,66+(R_0/\Delta_0)}$ et $e = \frac{0,63*16}{0,63+(R_0/\Delta_0)}$ 30

1.24 Dépendance linéaire du ratio d'érosion $E = M_f/M_i - 1$ en fonction de l'angle inclinaison selon les travaux de Bideau et al. (2001), Mint Babah (2010) pour une configuration 3D, et Ould Ahmedou (2005) pour une configuration 2D avec des pastilles circulaires peintes, non reportée dans la Table 1.2. Les détails sur les dimensions, la masse du lit et du réservoir, le type de grains utilisés, la valeur de l'angle neutre global θ_N et le coefficient d'érosion e sont reportés dans le Tableau 1.3. 32

2.1 Schéma de principe du dispositif expérimental composé d'un canal d'écoulement bidimensionnel avec le lit en aval, le réservoir en amont, le vérin électrique, et le tige de blocage articulée en PVC. 37

2.2 Photos du dispositif expérimental avant (a) et après (b) la libération des particules du réservoir. 38

2.3	Disques en polystyrène utilisées dans les expériences (a) Disques blancs de $8mm$ marqués avec un trait noir pour le réservoir. (b) Disques noirs de $8mm$ et de $12mm$ pour le lit.	39
2.4	Les différentes étapes du remplissage du canal : (a) Remplissage de la trémie 2D, (b) Fermeture de la trémie, (c) Positionnement de la trémie sur le canal, (d) Vidange de la trémie dans le canal, (e) Résultat du remplissage après ratissage et aplanissage.	41
2.5	Récupération des particules à la sortie du canal : (a) Sceau de récupération, (b) Exemple de particules recueillies en sortie constituées d'un mélange de disques blancs et noirs provenant respectivement du réservoir et du lit statique.	42
2.6	(a) Positionnement de l'appareil photo. (b) Lampes utilisées pour l'éclairage.	44
3.1	Dispositif expérimental détaillé. (a) Configuration initiale avant l'ouverture du tige de blocage du réservoir pour engendrer l'écoulement. (b) Configuration finale après l'écoulement avec les grains sortis récupérés dans le sceau.	47
3.2	Principe de détermination de l'angle avalanche et de repos. (a) Canal avant l'avalanche. (b) Canal après l'avalanche.	48
3.3	Principe de détermination de l'angle neutre. (a) Canal avant l'ouverture de la trappe du réservoir. (b) Canal après l'ouverture de la trappe du réservoir.	48
3.4	Efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour le grand lit ($L_b = 1700mm$) avec $M_0 = 110g$ et $R_0 = \Delta_0 = 205mm$ ($R_0/\Delta_0 = 1$).	51
3.5	Dépendance de l'efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour le grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) $M_0 = 55, 110, 220, 300g$ et $R_0/\Delta_0 = 1$. (b) $M_0 = 110g$ et $R_0/\Delta_0 = 0.57, 1, 2.14, 3.28$	52
3.6	Dépendance de l'angle neutre en fonction de la masse initiale M_0 ($\propto R_0\Delta_0$) et du rapport d'aspect R_0/Δ_0 pour le grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) $\tan \theta_N$ selon $R_0\Delta_0$ (ou M_0) pour différents rapports d'aspect R_0/Δ_0 . (b) $\tan \theta_N$ selon le rapport d'aspect R_0/Δ_0 pour différentes valeurs de M_0	53
3.7	Dépendance de l'angle neutre en fonction de la hauteur normalisée du réservoir (R_0/d). La courbe de tendance est obtenue selon l'équation 3.3.	54
3.8	Dépendance du coefficient d'érosion $e = dE/d\theta$ en fonction de la masse initiale M_0 et le rapport d'aspect R_0/Δ_0 pour le grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) e en fonction de M_0 pour différents rapports d'aspect. (b) e en fonction de R_0/Δ_0 pour différentes masses M_0 . La courbe de tendance est obtenue selon l'équation (3.4).	55

3.9	Dépendance de l'efficacité d'érosion $E = (M_f - M_0)/M_0$ et du coefficient d'érosion $e = dE/d\theta$ en fonction de la longueur du lit. (a) Efficacité d'érosion E en fonction de θ obtenue avec le petit lit et le grand lit. (b) Coefficient d'érosion e en fonction de la longueur du lit normalisée L_b/d avec $d = 8mm$	56
3.10	Dépendance de proportion des particules du réservoir dans la masse sortie dans le cas de grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) Pour un rapport d'aspect constant ($R_0/\Delta_0 = 1$) et différentes masses M_0 . (b) Pour une masse initiale constante $M_0 = 110g$ et différents rapports d'aspect.	58
3.11	Proportion moyenne des particules du réservoir dans la masse sortie en fonction de la masse initiale M_0 pour le petit lit ($L_b = 850mm$) et le grand lit ($L_b = 1700mm$).	59
3.12	Avancement des particules mobiles de tous les 0.4s après l'ouverture de la trappe du réservoir pour l'expérience avec $M_0 = 110g$ et $\theta = 30^\circ$. La courbe solide est le profil initial, et les courbes discontinues sont les avancements. Après un court instant depuis l'ouverture de la trappe du réservoir, les particules avancent avec une vitesse constante.	61
3.13	Variation de l'efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de $\Delta\theta$ avec les deux modèles BCRE et BDG (présenté par la suite) dans le régime de grand nombre de Péclet. Paramètres des modèles : $R_0 = \Delta_0 = 10d$, $v_d/\gamma = 2.5d$, $v_{up}/v_d = 4$, et $L_b/d = 100$. Ces paramètres sont choisis pour avoir la même pente au niveau de l'angle neutre ($\Delta\theta = 0$) avec deux modèles.	62
3.14	Vitesse d'advection en fonction de la masse initiale M_0 pour le grand lit ($L_b = 1700mm$).	64
4.1	Géométrie d'une marche de grains de hauteur h . (a) État initial de la marche avec un angle θ_i et de largeur s_i . (b) État intermédiaire à un instant t : la marche est caractérisée par sa pente $\theta(t)$ (dans l'hypothèse d'une pente approximée par une droite) et sa largeur $s(t)$	70
4.2	Phénomène de l'étalement d'une marche de grain en partant de l'état initial s_i (profil en couleur bleu) pour arriver à l'état final s_f (profil en couleur noir) en passant par l'état intermédiaire s_N (profil en couleur rouge).	71
4.3	Construction reliant la largeur initiale s_i à la largeur finale s_f . La fonction $f(x)$ est définie par l'équation (4.16).	73
4.4	Evolution de la largeur de la marche $s(t)$ en fonction du temps réduit γt . Dans cet exemple, on a pris les valeurs suivantes pour θ_i et θ_N : $\theta_i = 45^\circ$ et $\theta_N = 30^\circ$. On obtient ici une valeur de $\theta_f = 20^\circ$	74
4.5	Relation entre θ_i , θ_f et θ_N : angle final de l'étalement θ_f prédit par le modèle BCRE en fonction de l'angle initial de la marche θ_i pour différentes valeurs de l'angle neutre θ_N	75

4.6	Evolution comparée de la largeur réduite de la marche $s(t)/h_0$ en fonction du temps réduit γt dans le cas du modèle BCRE (ligne continue) et celui du modèle "BDG saturé" (ligne tiretée). Dans cette exemple, on a pris les valeurs suivantes pour θ_i et θ_N : $\theta_i = 45^\circ$ et $\theta_N = 30^\circ$. On obtient pour les deux modèles la même valeur finale de l'angle de la marche : $\theta_f = 20^\circ$. Nous avons ajusté le paramètre γ^* pour avoir la même durée d'étalement : $\gamma^* = \gamma/7$	76
4.7	Dispositif expérimental pour l'étude de l'étalement d'une marche sur un lit horizontal.	77
4.8	Expérience d'étalement d'une marche à l'horizontale ($\theta_b = 0^\circ$). (a) État initial : hauteur $h_0 = 24\text{cm}$ et $\theta_0 = 40^\circ$. (b) État final : $\theta_f = 29.1^\circ$. . .	78
4.9	Courbe expérimentale typique obtenue pour l'évolution de la largeur de la marche avec le fond rigide rugueux en fonction du temps. Paramètres : $\theta_0 = 40^\circ$ et $h_0 = 20\text{cm}$. Courbe continue : ajustement par le modèle BCRE ; courbe tireté : ajustement par le modèle "BDG saturé".	79
4.10	Evolution de l'angle final de la marche en fonction de la hauteur initiale h_0 pour différents angles initiaux θ_0 . Résultats obtenus sur fond rigide rugueux.	81
4.11	Evolution de l'angle final de la marche en fonction de la hauteur initiale h_i pour différents angles initiaux θ_i . Résultats obtenus sur fond meuble.	82
4.12	Evolution de l'angle final de la marche en fonction de l'inclinaison du fond θ_b pour deux hauteurs initiales de marche.	83
4.13	Evolution de la largeur de la marche s/h_0 en fonction du temps : (a) évolution comparée pour deux expériences faites avec deux hauteurs de marche différentes ($h_0 = 20\text{ cm}$ et 30 cm) et un angle initial $\theta_0 = 40^\circ$. (b) évolution comparée pour deux expériences faites avec deux hauteurs de marche différentes ($h_0 = 15\text{ cm}$ et 35 cm) et un angle initial $\theta_0 = 70^\circ$	84
4.14	Evolution de l'angle neutre θ_N en fonction de l'angle initial θ_i selon l'équation 4.18 pour un angle final θ_f donnés. Les symboles correspondent aux valeurs d'angle neutre déterminées par ajustement des courbes d'étalement.	86
A.1	Illustration de la méthode optique pour mesurer de l'écartement entre deux plaques de verre du canal.	92

Liste des tableaux

1.1	Résultats pour les angles d'avalanche θ_A , de repos θ_R et neutre θ_N présentés dans la thèse de Mint Babah en utilisant la première version du dispositif. Les angles d'avalanche et de repos ont été obtenus avec le grand canal ($L_e = 87cm$, $l_e = 22cm$ et $h_e = 5cm$), l'angle neutre avec le petit canal ($L_e = 30cm$, $l_e = 20cm$ et $h_e = 2cm$) et $M_0 = 380g$	29
1.2	Liste d'expériences et résultats obtenus par Ould Ahmedou sur des études sur l'angle neutre.	31
1.3	Comparaison des travaux sur l'angle neutre. Le rapport d'aspect du réservoir R_0/Δ_0 est fixé à 1 pour l'expérience de Mint Babah, il n'est pas reporté pour les expériences de Bideau et d'Ould Ahmedou.	33
3.1	Liste des séries d'expériences effectuées pour étudier l'angle neutre. Les notation sont celles de la Figure 3.1. La densité surfacique (g/cm^2) de pastilles de diamètre de $8mm$ ($0,15g$) et de $12mm$ ($0,35g$) est de $0,3$. Donc, le coefficient de remplissage ou la fraction surfacique du réservoir est de $0,87$ ($0,26/0,3$).	49
3.2	Angle avalanche, angle de repos et composition de la masse avalanche.	50
3.3	Angle neutre et coefficient d'érosion pour différentes hauteurs du lit ($H_b = 84mm$ et $H_b = 126mm$).	57
3.4	Masse des particules noires érodées à partir du lit en fonction de la masse du réservoir M_0 à l'angle d'inclinaison maximale de 31° et avec $H/L = 1$	57
3.5	Comparaison des travaux sur l'angle neutre.	59
3.6	Valeurs de v_d des expériences réalisées pour différentes valeurs de la masse initiale M_0 à un angle d'inclinaison proche de l'angle neutre.	65
4.1	Liste des expériences effectuées sur un fond rigide et meuble.	80

Chapitre 0

Introduction

▷ Nous présentons ici les objectifs, le périmètre scientifique et les motivations du travail de thèse, ainsi que la structure du manuscrit. ◁

Les matériaux granulaires nous sont très familiers dans la vie quotidienne. Ils se trouvent partout autour de nous. Ces matériaux présentent une variété de comportements et de propriétés extraordinaires. Ils sont assez solides pour soutenir un ouvrage et ils peuvent aussi être emportés par le vent pour former des dunes ou couler comme de l'eau dans un sablier. Malgré la complexité des systèmes granulaires, on espère toujours modéliser leur comportement physique à partir d'approches continues.

Les écoulements de liquides simples sont décrits par des équations constitutives et des lois rhéologiques connues. Le comportement d'un liquide dans des conditions données est maintenant bien connu à l'exception des écoulements turbulents. En revanche, l'écoulement granulaire présente plusieurs particularités par rapport à celui d'un liquide ordinaire. L'une des plus notables est qu'un milieu granulaire peut présenter différentes phases (gazeuse, liquide ou solide) au sein d'un même écoulement. Ainsi un écoulement de grains sur un lit granulaire (i.e., avalanches de grains sur un tas de sable) met en jeu au moins deux phases différentes, une phase mobile et une phase statique qui interagissent par échange de matière, de quantité de mouvement et d'énergie. Les échanges de matière entre ces deux phases sont appelés processus d'érosion ou de déposition selon le sens de l'échange.

L'objectif de la thèse est de comprendre les phénomènes d'érosion et de déposition au sein d'un écoulement granulaire. Ces processus sont souvent observés dans la nature : glissements de terrains, écoulement de sable ou de rochers, etc. Ce type d'écoulements granulaires qui met en jeu ces processus d'érosion et de déposition sont encore très peu étudiés malgré leur importance dans de nombreux phénomènes naturels.

Dans un écoulement à la surface d'un tas, l'évolution de la frontière entre les grains mobiles et les grains immobiles de la phase solide est directement liée aux mécanismes d'érosion et de déposition qui régit la transition entre les deux phases. En menant une expérience simple consistant à ajouter une certaine masse M_0 de grains sur une pente granulaire et à mesurer la masse M_f qui coule à une certaine distance du point d'ajout, il est possible d'observer un résultat intéressant : l'existence d'un angle d'inclinaison particulier, nommé angle neutre, où les deux phénomènes d'érosion et de déposition se compensent exactement. A cet angle, la masse de l'écoulement M_f est égale à la masse ajoutée M_0 .

Qu'est-ce qui se cache derrière cette notion d'angle neutre ? Comment les grains en mouvement interfèrent avec d'autres (mobiles ou immobiles) ? Pour essayer de répondre à cette question, nous utilisons de façon systématique l'expérience simple décrite précédemment : une masse ajoutée à la surface d'un lit granulaire disposé dans un canal incliné. On pèse la masse initiale et la masse à la sortie du canal pour chaque expérience. L'équilibre des masses permet de déterminer l'angle neutre. A partir des mesures de ces masses opérées dans des configurations très variées, nous avons pu appréhender, étape par étape, la complexité des mécanismes d'érosion et de déposition.

La structure du manuscrit de thèse est fondée sur les expériences menées et les analyses associées. Le manuscrit est organisé en 5 chapitres. Nous commençons par une introduction générale (chapitre 1) dans laquelle nous présentons l'état de l'art concernant les processus d'érosion et de déposition dans les écoulements granulaires.

Le chapitre 2 est consacré à la description du dispositif expérimental et aux moyens de mesures mises en oeuvre. Le chapitre 3 aborde les études sur l'angle neutre et le taux d'échange entre phases mobile et immobile pour un écoulement granulaire de surface. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons au problème de Sinaï (i.e., effondrement d'une marche granulaire). Le manuscrit se clot avec le chapitre 5 qui conclut et présente les perspectives possibles de ce travail.

Chapitre 1

Etat de l'art

▷ *Nous rappelons d'abord les principales propriétés physiques des milieux granulaires. Nous discutons ensuite des caractéristiques des écoulements granulaires sur fond rigide et meuble et nous présentons les différentes études expérimentales et théoriques existantes sur les processus d'érosion et de déposition. Nous introduisons également la notion d'angle neutre qui est au coeur de cette thèse.* ◁

1.1 Stabilité d'un empilement granulaire

1.1.1 Milieu granulaire

Le terme milieu granulaire décrit un matériau multi-phasique constitué d'une phase solide, composée de particules macroscopiques, immergée dans une phase fluide, gazeuse ou liquide. L'énergie d'agitation thermique est faible devant les variations d'énergie potentielle que le milieu granulaire subit (pour les matériaux usuels, dès que la taille des particules est supérieure au micromètre). Les matériaux granulaires sont aussi très présents aussi bien dans la nature que parmi les produits manufacturés : les dunes de sable ou les sédiments des rivières, la neige, les rochers, le sucre, les céréales ou encore les médicaments en poudre dans l'industrie pharmaceutique (voir Figure 1.1). Les interactions entre les grains, et entre les grains et le fluide environnant, sont à l'origine d'une grande variété de comportements. On adopte donc différentes définitions suivant la taille des grains et le milieu dans lequel ils évoluent.

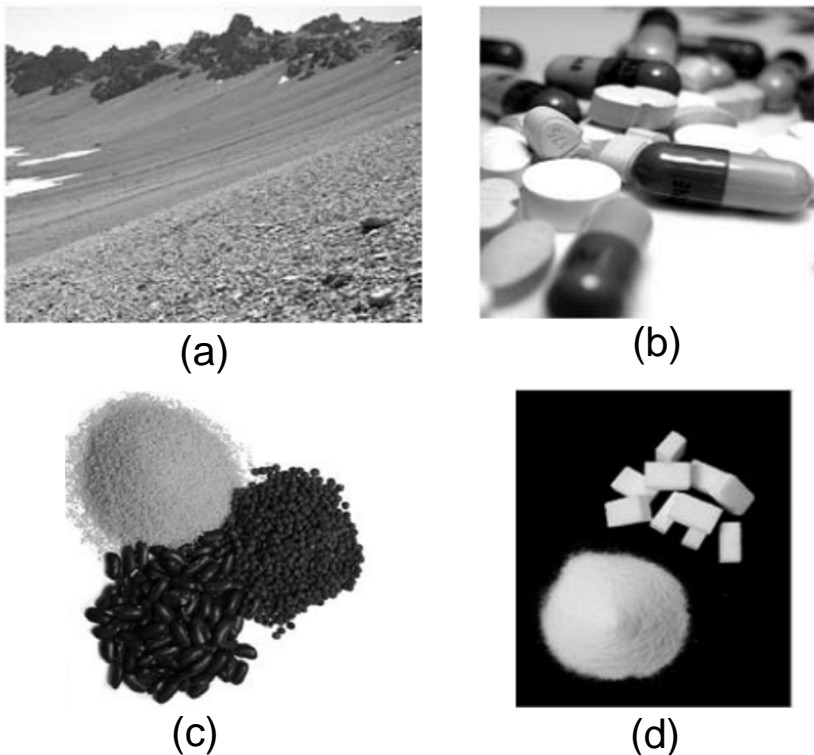


FIGURE 1.1 – Quelques exemples de milieu granulaire dans la nature (a), l'industrie (b) et la vie quotidienne (c)-(d) extraits de [1]. (a) Avalanche de sable et de rochers dans une région côtière. (b) Fabrication des médicaments dans l'industrie pharmaceutique. (c) Empilement granulaire formé par de la semoule ou des grains des haricots. (d) Tas de sucre.

Un milieu granulaire est un milieu dont les constituants élémentaires sont plus grands que $100\mu m$, dans le cas contraire, on parle de poudre. Pour les particules de petite taille ($d < 100\mu m$), la friction/compression n'est pas la seule interaction significative entre les grains, et des effets cohésifs liés aux forces électrostatiques, aux forces

de van der Waals et aux forces capillaires peuvent devenir importants selon Duran [19]. Les propriétés d'une assemblée de grains peuvent beaucoup varier suivant le milieu dans lequel elle est plongée. On parle de milieux granulaires cohésifs lorsque les forces d'attraction entre particules sont importantes. Par exemple, lorsque le milieu environnant est très humide, des ponts capillaires se forment entre les grains. Lorsque les forces d'attraction entre des grains sont considérées comme négligeables (devant le poids par exemple), on parle de granulaires secs. Ce terme concerne donc principalement des grains de taille supérieure à $100\mu m$ dans l'air. Lorsque la dynamique d'un milieu granulaire est dominée par les interactions entre la phase solide et la phase fluide, on parle de milieu granulaire immergé.

Nous allons maintenant donner quelques éléments sur la stabilité d'un empilement granulaire (angle d'avalanche, angle de repos, angle neutre) et sur l'influence de divers paramètres (nature des grains, température, humidité, géométrie de l'empilement) sur cette dernière.

1.1.2 Angle d'avalanche et angle de repos

Parmi les caractéristiques importantes des milieux granulaires figure la stabilité d'un empilement de grains. Lorsqu'on exerce un effort sur un empilement (cisaillement par exemple), une partie de l'empilement statique peut se mettre brutalement en mouvement (avalanche). La Figure 1.2 présente trois méthodes souvent utilisées en laboratoire pour étudier la stabilité d'un empilement granulaires : i) par fabrication d'un tas granulaire à partir d'une source quasi-ponctuelle, ii) par inclinaison d'un empilement granulaire, et enfin iii) par rotation à vitesse contrôlée d'un tambour tournant partiellement rempli de grains.

Chacune des méthodes évoquées ci-dessus présente des avantages et aussi des limites. La première méthode (i) est d'apparence très simple et repose sur la mesure directe de l'angle de la surface du tas (en filmant et en traitant les images, par exemple). Il faut cependant utiliser un débit d'injection assez faible pour ne pas trop perturber le tas granulaire déposé ; le mouvement des grains qui tombent sur la pente pendant l'injection crée une perturbation qui est susceptible de déclencher prématurément l'avalanche et d'entacher d'erreur la mesure. La deuxième méthode (ii) est également facile à réaliser en inclinant doucement le canal afin d'éviter toutes les perturbations liées au levage. La troisième méthode (iii) utilise une vitesse de rotation faible afin de ne pas perturber le milieu granulaire dans le tambour. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé la méthode (ii) pour déterminer le seuil de destabilisation de nos empilements. Cette méthode présente l'avantage de permettre de contrôler et de choisir l'état de l'empilement avant l'avalanche, ce qui n'est pas possible avec les autres méthodes évoquées ici. En effet, avec les méthodes (i) et (iii), le tas se construit tout seul et est déjà conditionné par les avalanches antérieures à celle sur laquelle on fait porter la mesure. Cette méthode nous permet également d'utiliser la même configuration expérimentale que pour les études sur l'angle neutre. C'est la configuration qui avait été choisie lors d'études antérieures menées dans le laboratoire. Le dispositif est donc fonctionnel et a pu être facilement adapté aux expériences menées dans le cadre de cette thèse.

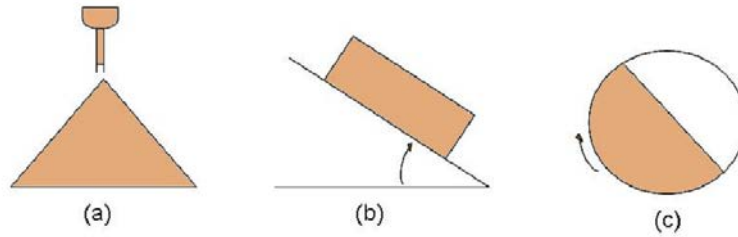


FIGURE 1.2 – Configurations expérimentales pour étudier la stabilité d'un empilement granulaires (l'angle d'avalanche et l'angle de repos). (a) Fabrication d'un tas granulaire à partir d'un point source. (b) Dispositif de type boîtier inclinable. (c) Dispositif de type tambour tournant.

Lors de l'inclinaison du boîtier contenant l'empilement de grains, la composante tangentielle du poids augmente et induit un cisaillement longitudinal sur l'ensemble de l'empilement. Partant d'une configuration où la surface libre est placée horizontalement, et on peut ensuite l'incliner progressivement. Pour des angles faibles, les grains restent stables (quasiment immobiles avec seulement des petits réarrangements). Pour un certain angle d'inclinaison, un écoulement de grains se produit brusquement. Cet angle est l'angle maximum de stabilité ou l'angle d'avalanche nommé θ_A selon les premiers travaux de Bagnold [20]. Après l'avalanche, la surface de l'empilement présente une surface plane dont l'angle d'inclinaison est inférieure à l'angle d'avalanche. Cet angle est l'angle de repos nommé θ_R . La différence $\delta\theta = \theta_A - \theta_R$ (voir Figure 1.3) est de l'ordre de quelques degrés [21, 22]. Ces deux angles constituent des caractéristiques macroscopiques des matériaux granulaires, mais ils sont liés aux propriétés microscopiques des grains. La valeur de ces angles dépend de la nature (composition, mais aussi forme et état de surface) des grains. La cohésion entre les grains peut aussi changer les forces de contact entre des grains, et donc modifier ces angles. Enfin, même en opérant dans des conditions expérimentales parfaitement identiques, la mesure de ces angles ne donne pas des résultats parfaitement reproductibles. Les valeurs fluctuent d'une expérience à l'autre. Il est donc souvent plus réaliste de considérer ces angles comme des variables aléatoires qui sont définies par une distribution (avec une moyenne, un écart type,...).

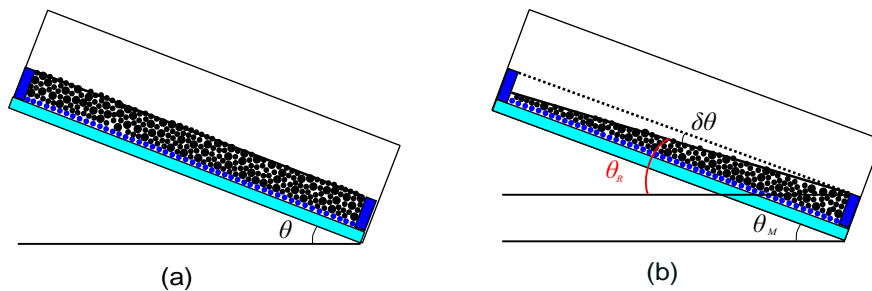


FIGURE 1.3 – Définition des angles d'avalanche θ_A et de repos θ_R . (a) Inclinaison du boîtier expérimental. (b) Détermination d'angle d'avalanche et de repos.

Plus récemment, Fischer et al. [2] ont mesuré de façon répétée l'angle d'avalanche

θ_A et de repos θ_R dans un tambour tournant en rotation lente. Ils ont observé des fluctuations des deux angles (Figure 1.4) et constaté que les variables aléatoires θ_A et θ_R sont fortement corrélées : θ_R a tendance à être d'autant plus grand que θ_A est petit. L'écart d'angle $\delta = \theta_A - \theta_R$ est directement relié à la taille de l'avalanche, c'est à dire au nombre de grains qui s'écoulent. Ils introduisent un "angle neutre", défini comme l'angle asymptotique pour lequel se produirait une avalanche infinitésimale qui laisserait l'angle de la pente localement inchangée.

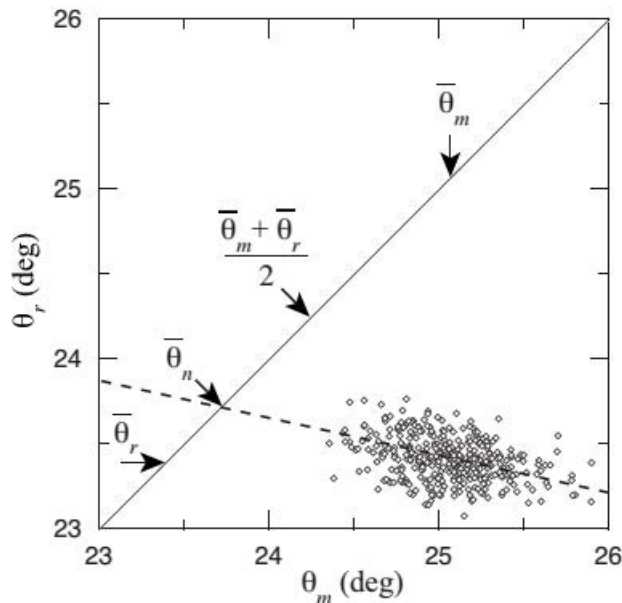


FIGURE 1.4 – Corrélation entre l'angle de repos et l'angle d'avalanche (noté θ_m) observée par Fischer et al. [2] pour 340 avalanches produites en tambour tournant avec des billes de verre de 1mm. L'intersection entre l'ajustement linéaire et la bissectrice donne la valeur d'un angle appelé angle neutre.

Par la suite, nous rappelons des travaux menés dans la littérature pour étudier la stabilité d'un ensemble de grains qui montrent le rôle de plusieurs paramètres comme : 1) les dimensions de l'empilement, 2) la rugosité du fond, 3) la nature de grains, 4) la fraction volumique de l'empilement et 5) l'humidité.

Confinement latéral et longueur de l'empilement

Les dimensions du système expérimental peuvent avoir une influence sur la stabilité de l'empilement granulaire et donc modifier les angles d'avalanche et de repos. Le confinement latéral est un paramètre très important. Un faible écart entre les parois latérales aura tendance à augmenter la stabilité d'un empilement. Plusieurs études expérimentales ont été menées pour quantifier cet effet. En fabriquant des tas granulaires confinés entre deux plaques de verre par une méthode analogue à (i)(Figure 1.5 (a)), Grasselli et al. [3] ont montré que l'angle de repos décroît sensiblement quand l'écart entre les parois latérales augmente. Des résultats analogues ont été obtenus pour l'angle d'avalanche par Boltenhagen [4] (Figure 1.5 (b)) avec des expériences menées en utilisant un dispositif de type de boîte inclinable et des billes de verre de différents diamètres (1, 2 et 4 mm). Les simulations numériques et les expériences de Zhou et al.

[6, 23] ont montré le même comportement de l'angle d'avalanche et de l'angle de repos en fonction du confinement latéral.

Dans les travaux cités ci-dessus, la décroissance de l'angle quand la distance d entre les parois augmente est exponentielle : $\theta = \theta_\infty(1 + \alpha e^{-kd})$, où θ est l'angle d'avalanche ou de repos pour la distance d , θ_∞ est l'angle asymptotique obtenu quand d tend vers l'infini, α et k sont des coefficients caractéristiques dépendant, a priori, de la rugosité des parois et de la nature des grains (matériaux, forme et diamètre,...).

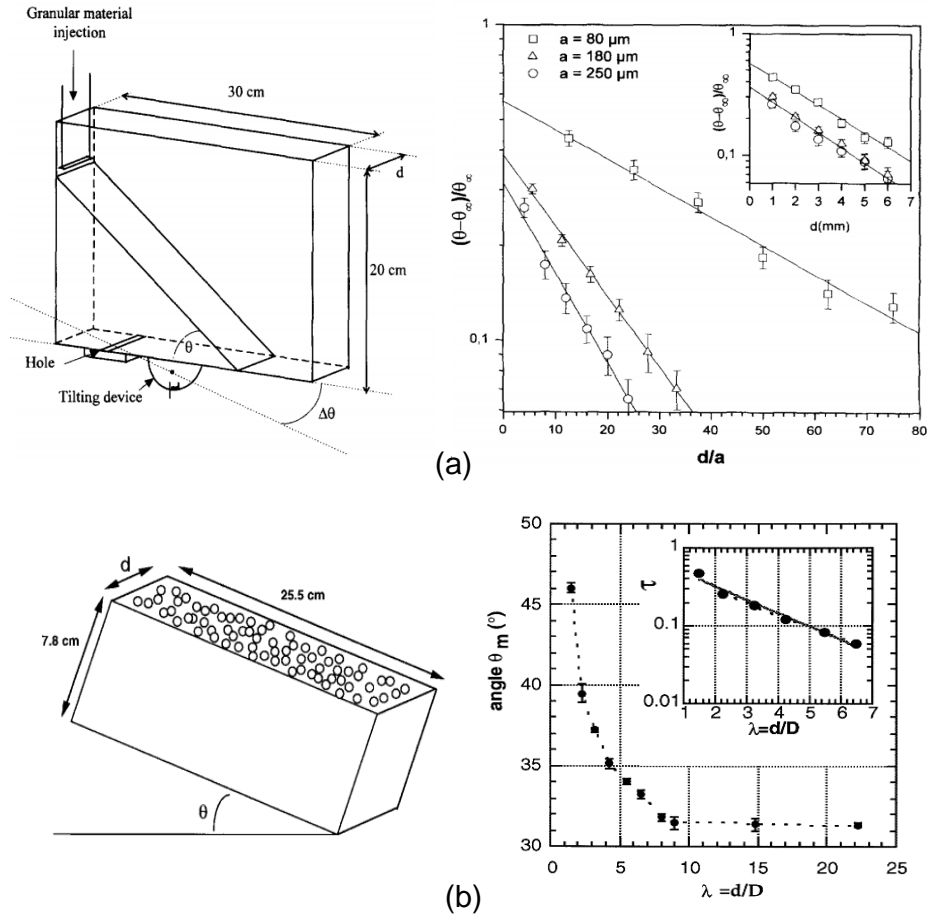


FIGURE 1.5 – (a) Dépendance de l'angle de repos en fonction du confinement latéral selon Grasselli et al. [3], a est le diamètre de grains de l'empilement et d est l'écart entre les parois latérales. (b) Dépendance de l'angle d'avalanche en fonction du confinement latéral selon Boltenhagen [4], d est l'écart entre les parois latérales de l'empilement et $D = 2\text{mm}$ est le diamètre de grains, τ est la variation relative de l'angle $\tau = (\theta - \theta_\infty)/\theta_\infty$, où θ_∞ est l'angle d'avalanche obtenu quand d tend vers l'infini.

Courech du Pont [5] a mesuré les angles d'avalanche et de repos dans un tambour tournant cylindrique, de diamètre intérieur 17 cm, rempli à mi hauteur de billes de verre de diamètre D compris entre 0,1 et 3 mm immergées dans de l'eau. Il a montré à la fois théoriquement et expérimentalement que l'angle d'avalanche et de repos décroissent en fonction de l'écartement latéral d du tambour tournant selon une loi différente : $\frac{\sin \theta - \sin \theta_\infty}{\cos \theta} = 1 - \frac{d}{B} [1 - \exp(-\frac{B}{d})]$, où B est une longueur caractéristique. La Figure 1.6 montre la comparaison entre des résultats obtenus avec le tambour tournant de

Courrech du Pont [5], l'écoulement sur tas de Zhou et al. [6], et la boîte inclinable de Boltenhagen [4].

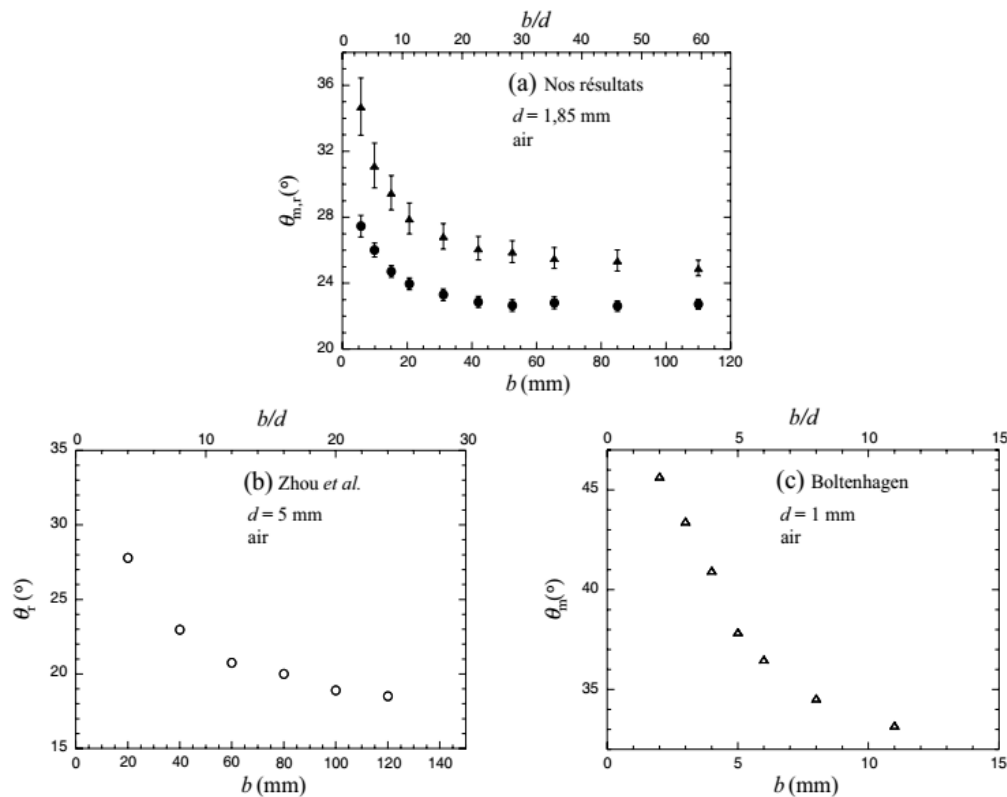


FIGURE 1.6 – Évolutions des angles avalanche (triangles) et de repos (cercles) pour des billes de verre de diamètre d en fonction de confinement latéral b entre parois du canal d'écoulement. (a) Résultats obtenus dans tambour tournant avec $d = 1,85$ mm selon Courrech du Pont [5]. (b) Résultats obtenus dans l'écoulement sur tas entre deux plaques en verre avec $d = 5$ mm selon Zhou et al. [6]. (c) Résultats obtenus en utilisant une boîte inclinable avec $d = 1$ mm selon Boltenhagen [4].

Plus récemment, Métayer [24] a étudié les écoulements de billes de verre de diamètre $D = 500\mu\text{m}$ entre deux plaques métalliques. Il a montré que l'angle d'avalanche et l'angle de repos suivent la même loi de décroissance, proche de celle proposée par Courrech du Pont [5] pour le tambour tournant : $\tan \theta = \tan \theta_\infty + \frac{B}{d}$.

Le confinement a une forte influence sur l'angle d'avalanche et l'angle de repos de l'empilement granulaire. La longueur de l'empilement joue aussi un rôle très important sur l'angle d'avalanche. Selon les travaux de Kiegen de Richter [7] et Mint Babah [17], l'angle d'avalanche décroît quand la longueur de l'empilement augmente comme dans le cas de l'écartement. Par contre, l'angle de repos est indépendant de celle-ci (Figure 1.7).

Épaisseur de l'empilement

L'épaisseur ou la hauteur de l'empilement peut influencer la stabilité d'un empilement granulaire. Aguirre et al. (2000) [22] ont effectué des mesures des angles d'avalanche et de repos en fonction du nombre N de couches de grains de l'empile-

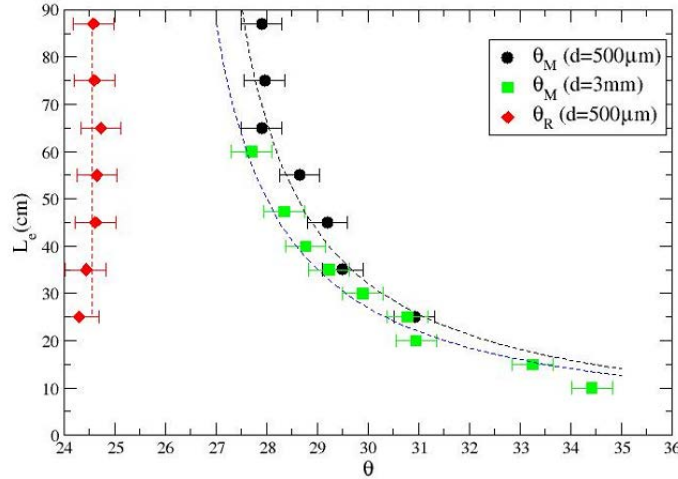


FIGURE 1.7 – Angle d’avalanche et angle de repos (θ_M et θ_R) en fonction de la longueur de confinement (L_e) selon Kiegen de Richter [7]. L’angle d’avalanche atteint la valeur asymptotique quand L_e tend vers l’infini.

ment. Ces expériences ont été réalisées avec des billes de verre de 2 mm et dans une boîte inclinable dont le fond est rendu rugueux en collant une mono-couche de billes au fond de la boîte. Ils montrent notamment que l’angle d’avalanche reste indépendant de l’épaisseur de l’empilement tant que le nombre de couche est supérieur à 6 (Figure 1.8). Quand $N < 6$, ils commencent à apparaître des effets significatifs mais difficiles à interpréter.

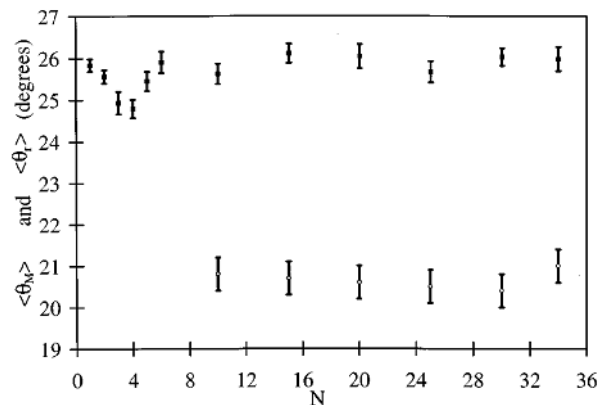


FIGURE 1.8 – Influence de l’épaisseur (nombre de couche de grains N) sur l’angle d’avalanche θ_M (carrés pleines) et de repos θ_r (cercles vides) selon Aguirre et al. [8].

Nature de grains

Le diamètre des grains a une influence sur l’angle d’avalanche comme présentée dans la thèse de Mint Babah [17] pour des expériences avec le plan incliné et dans le travail de Félix et al. [25] pour des expériences dans le tambour tournant. Plus la taille des grains est petite, plus l’angle d’avalanche est grand. Les forces de cohésion dues à l’humidité (comparées au poids des grains) sont d’autant plus importantes que les grains sont petits, il est donc logique que l’angle d’avalanche diminue avec des billes de taille croissante. Concernant l’angle de repos, la diminution est beaucoup moins

nette. Et l'écart entre l'angle d'avalanche et de repos présente donc une diminution significative avec la taille des grains.

La forme des particules joue également un rôle important sur la stabilité d'un empilement mais peu d'expériences ont été réalisées pour étudier l'influence de celle-ci sur l'angle d'avalanche. On peut citer ici comme exemple les expériences d'Ould Ahmedou [18] qui ont été réalisées avec des empilements bidimensionnels confinés entre deux plaques de verre. Il montre que l'angle d'avalanche d'un empilement de pentagones est supérieur de 10° à celui d'un empilement de disques cylindriques. Il peut être assez difficile de séparer l'effet de la forme de l'effet de la taille, en effet les procédés de fabrication sont différents suivant la taille des billes et les billes de tailles différentes ont généralement des écarts à la sphéricité différents. L'état de surface des grains peut aussi avoir une influence sur la stabilité de l'empilement granulaire car la force de friction qui permet de stabiliser l'assemblée de grains est changée.

Fraction volumique

Il apparaît que l'angle d'avalanche augmente avec la fraction volumique initiale de l'empilement de grains selon les travaux d'Aguirre et al. [8] et d'Evesque et al. [9]. La figure 1.9 montre que les empilements initialement denses sont plus stables que ceux initialement lâches et donnent lieu à des avalanches plus importantes.

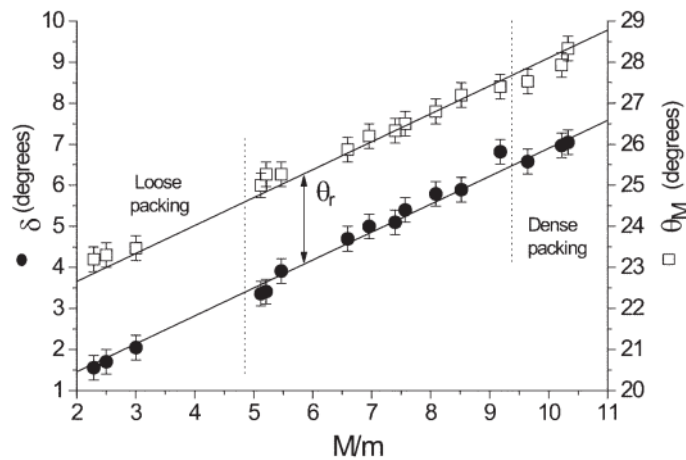


FIGURE 1.9 – Influence de la fraction volumique sur l'angle d'avalanche θ_M (carrés vides) et la différence entre l'angle d'avalanche et l'angle de repos δ (cercles denses) en fonction de la masse d'avalanches M selon Evesque et al. [9]. L'étude est menée sur un empilement de 20 couche de grains ($N = 20$), la masse d'avalanche M est proportionnelle à la fraction volumique de l'empilement initial, elle est normalisée par la masse d'une couche $m = 230g$. La partie de gauche représente des empilements lâches (loose packing) et celle à droite représente des empilements denses (dense packing).

Humidité

Les milieux granulaires sont influencés par l'humidité. En effet, selon la teneur en eau, des interactions capillaires ou électrostatiques peuvent apparaître entre les grains donnant lieu à des effets cohésifs. L'humidité peut changer les propriétés de contact entre les grains par la formation de ponts capillaires, ce qui augmente les forces de

cohésion. Celles-ci sont d'autant plus importantes (par rapport au poids des grains) que les particules sont petites. De nombreuses études expérimentales ont été réalisées pour mesurer l'effet de l'humidité sur la stabilité d'un empilement pour le cas d'une boîte inclinable selon les travaux d'Aguirre et al. [22], aussi pour le cas d'un tambour tournant selon les travaux de Restagno [26] et de Fraysse et al. [10]. Ils ont montré que l'augmentation du taux d'humidité conduit à un accroissement graduel de l'angle d'avalanche relativement faible tant que le taux d'humidité est inférieur à 70%, et beaucoup plus prononcé au delà (Figure 1.10).

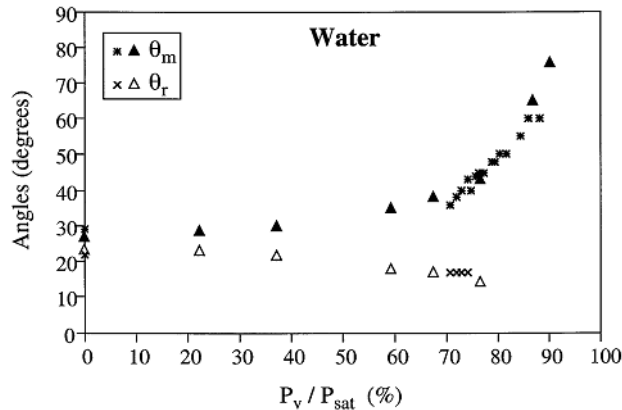


FIGURE 1.10 – Influence de l'humidité relative sur l'angle d'avalanche et de repos selon Fraysse et al. [10]. Les courbes montrent que, quand l'humidité augmente, l'angle d'avalanche (triangles pleins) augmente faiblement jusqu'à 70% et plus fortement ensuite, l'angle de repos (triangles vides) semble diminuer légèrement.

1.2 Érosion et dépôt dans l'écoulement granulaire

Les études théoriques et expérimentales des écoulements granulaires n'ont commencé qu'avec les travaux de Bagnold (1954) [20]. Selon les sollicitations extérieures et les conditions limites, les écoulements granulaires surfaciques peuvent être classés en trois catégories : gazeux, solide et liquide selon que les contacts entre les grains sont principalement collisionnels (gaz), persistants (solide) ou un mélange des deux (liquide). Ces trois régimes peuvent coexister dans le même écoulement comme illustré sur la figure (1.11). En bas de cette figure, l'état solide est obtenu lorsque les grains forment un empilement qui se déforme très lentement. Cet empilement est surmonté d'un écoulement dense assimilé à l'état liquide. Il est alimenté par des grains qui tombent sous l'effet de la gravité. Ce régime dilué est assimilé à un état gazeux.

La coexistence des régimes dans un écoulement rend nécessaire une description précise des transitions entre ces régimes. En particulier celle de la transition, dite de jamming, entre les états solide et liquide. L'érosion est la mobilisation du solide, la déposition correspond au passage du liquide au solide.

Revenons aux dispositifs classiques d'étude des avalanches, selon la valeur du débit imposé (alimentation depuis un réservoir ou rotation du tambour), nous pouvons

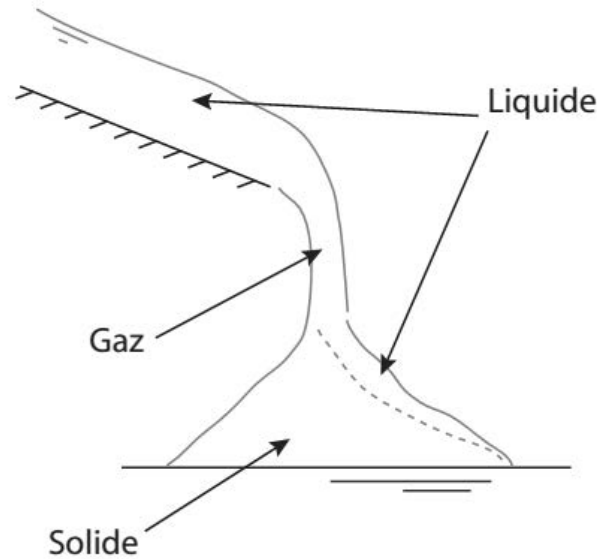


FIGURE 1.11 – Les trois états de l'écoulement granulaire : gazeux, solide et liquide. L'écoulement des grains en régime dense sur le plan incliné représente l'état liquide. La chute des grains représente le régime dilué et correspond à l'état gazeux. Le dépôt des grains pour former lentement un empilement granulaire sur un plan horizontal est similaire au régime solide.

observer plusieurs écoulements. Pour un faible débit, nous observons un régime statique perturbé par une succession d'avalanches pendant lesquelles une partie du milieu est mobilisée près de la surface. Pour un débit plus importants, un régime d'écoulement permanent est obtenu à la surface [11, 27, 28] (Figure 1.12). La transition entre ces deux régimes s'opère à un débit critique, fixe pour le tas et avec hystérésis pour le tambour. Dans le régime intermittent, avec un débit très faible, l'empilement reste statique jusqu'à ce que la pente locale atteigne l'angle maximal θ_A (angle d'avalanche). L'écoulement déclenché va se poursuivre jusqu'à ce que la pente relaxe vers l'angle de repos θ_R . L'écart entre ces deux angles est de l'ordre de quelques degrés [29, 30]. Entre ces deux valeurs, une perturbation locale peut engendrer une avalanche.

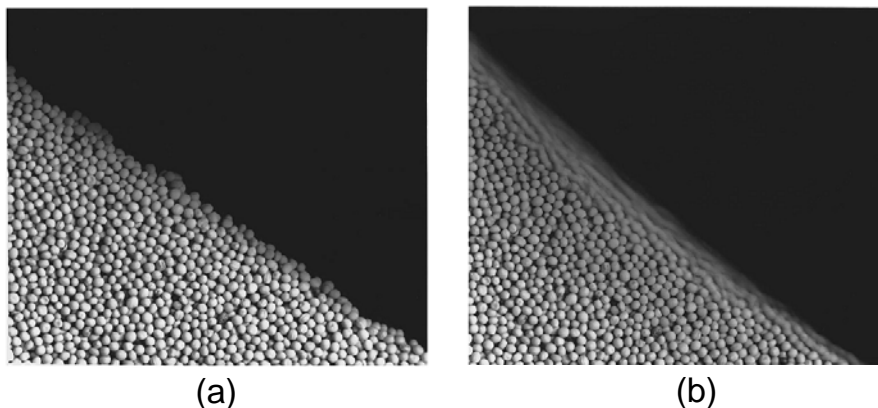


FIGURE 1.12 – Changement entre deux régimes d'un empilement granulaire selon Jaeger et al. [11]. (a) Régime statique. (b) Régime d'écoulement.

L'érosion et la déposition sont deux mécanismes importants qui déterminent l'évolution d'un écoulement granulaire sur un lit érodable : quand l'érosion domine, l'écoulement accumule des particules et prend de l'ampleur ; en revanche, quand la déposition domine, l'écoulement perd ses particules et devient de plus en plus faible, puis s'arrête totalement. Nous allons résumer les études de la littérature, sur le phénomène d'érosion et de déposition, dans cette section. Nous présenterons certains des modèles mathématiques qui sont utilisés pour le décrire. Dans les années récentes, plusieurs modèles ont été introduits pour rendre compte du phénomène d'érosion-déposition dans les écoulements superficiels. Concernant le principe d'analyse, on peut distinguer plusieurs modèles.

Un premier type de modèles est fondé sur une approche phénoménologique décrivant la dynamique couplée d'une phase roulante et d'une phase statique. Pour ces modèles, le terme d'échange entre les deux phases est le facteur principal, qui représente la relation entre l'érosion et la déposition et qui décide de l'évolution de l'écoulement granulaire. C'est donc l'expression de ce terme d'échange qui fait l'objet de l'attention. En se fondant sur ce principe, on a proposé une description des écoulements sur la base de deux équations donnant respectivement l'épaisseur de la phase statique et de la phase roulante couplées par un terme d'échange dont une expression a été proposée par Bouchaud, Cates, Prakash et Edwards [31, 32], puis modifiée par Boutreux, Raphaël et de Gennes [33, 34]. Nous évoquerons dans la suite, ces deux descriptions, sous le nom de modèle BCRE et BDG, respectivement.

Un deuxième type de modèles est fondé sur une approche hydrodynamique, introduite dans un modèle dû à Savage et al. [35] qui décrit l'écoulement d'un matériau granulaire (blocs de glace ou de pierre, etc.) sur un fond de topographie donnée (par exemple le flanc d'une montagne). Ce modèle établit deux équations hydrodynamiques de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement portant sur des grandeurs intégrées dans l'épaisseur selon Saint-Venant [36, 37, 38, 39, 40]. Leur résolution permet alors, pour une topographie donnée du fond, de calculer l'épaisseur de l'écoulement, ainsi que la vitesse (moyennée dans l'épaisseur de l'écoulement). Cette approche a ensuite été étendue à des écoulements granulaires sur un lit érodable en y incorporant des mécanismes d'érosion -déposition.

Une autre approche a été introduite par Aranson et al. [41] pour modéliser l'écoulement granulaire dans le cadre de l'avalanche : plutôt que de supposer une interface abrupte entre phase statique et phase roulante, ces auteurs proposent de décrire la transition entre ces deux états en s'inspirant de la théorie de transitions de phase, et en introduisant un paramètre d'ordre prenant la valeur zéro dans la phase roulante et un dans la phase statique. Les auteurs postulent ensuite que l'écoulement granulaire est piloté par une équation de Navier-Stokes, mais avec un tenseur des contraintes hybride, contenant à la fois un terme proportionnel aux vitesses de déformation et un terme de contraintes statiques.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous concentrons sur le modèle BCRE et le modèle BDG.

1.2.1 Modèle BCRE

On cherche à décrire l'interaction entre la phase mobile et la phase statique (figure 1.13).

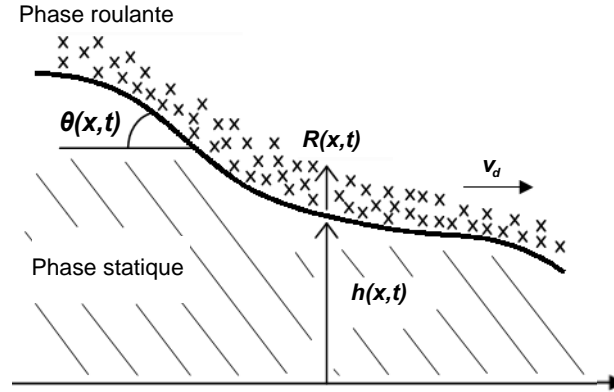


FIGURE 1.13 – Description d'un écoulement de surface selon le modèle BCRE. h et R sont respectivement la hauteur de la phase statique et l'épaisseur de la phase roulante, à l'abscisse x et à l'instant t , l'angle θ est la pente locale du lit statique, $\tan(\theta) = \frac{\partial h}{\partial x}$.

Nous notons $h(x, t)$ la hauteur de la phase statique au point d'abscisse x et au temps t , et $R(x, t)$ l'épaisseur de la phase roulante surmontant la phase statique. L'évolution de h et R est alors supposée régie par le système d'équations simple suivant :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_d \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \Gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Gamma \quad (1.2)$$

Dans ces équations $\Gamma(x, t)$ désigne le terme d'échange entre les deux phases (érosion-déposition). La première équation, qui porte sur R , est une équation de convection-diffusion avec terme source Γ , v_d est la vitesse de convection (moyennée sur l'épaisseur de la phase roulante) et D le coefficient de diffusion. La seconde équation gouverne l'évolution de h , elle assure la conservation de la masse en supposant que l'écoulement est incompressible (fraction volumique fixée).

Le terme d'échange $\Gamma(x, t)$ traduit un bilan net entre l'accrétion (les grains roulants peuvent être capturés par la phase statique en tombant par exemple dans un trou du lit) et l'érosion (les grains de la phase statique peuvent être délogés suite aux chocs avec les grains roulants, et devenir eux-mêmes mobiles). Ces deux termes dépendent fortement de la pente locale $\theta(x, t)$: l'accrétion est favorisée par les faibles pentes, et au contraire, l'érosion par les fortes pentes. Nous pouvons noter $\Psi_A(\theta)$ et $\Psi_E(\theta)$ les dépendances angulaires de l'accrétion et de l'érosion. Elles doivent avoir schématiquement l'allure présentée sur la figure 1.14. On voit qu'il existe un angle neutre θ_N pour lequel les deux mécanismes s'équilibrent, et donc pour lequel l'échange $\Gamma(x, t)$ entre les deux phases est globalement nul.

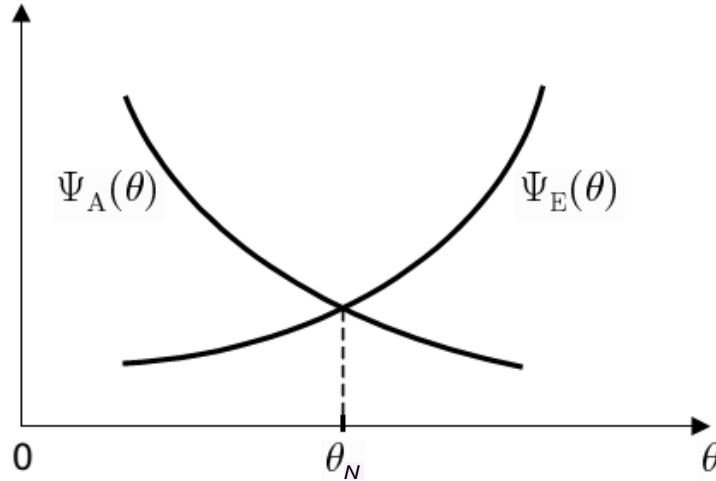


FIGURE 1.14 – Dépendances angulaires des mécanismes d'accrétion $\Psi_A(\theta)$ et d'érosion $\Psi_E(\theta)$. A l'angle neutre (θ_N), ces deux phénomènes s'équilibrent.

Le modèle BCRE propose de compléter la structure du terme d'échange $\Gamma(x, t)$ en le supposant proportionnel à la hauteur locale R de la phase roulante, ce qui traduit le fait que les échanges sont d'autant plus fréquents que le nombre de chocs entre phases est grand, c'est-à-dire que les grains roulants sont nombreux. On a donc l'expression suivante pour le terme d'échange $\Gamma(x, t)$:

$$\Gamma(x, t) = R(\Psi_E(\theta) - \Psi_A(\theta)) \quad (1.3)$$

Dans la mesure où l'on ne considère que des situations où l'angle local de la phase statique θ reste proche de θ_N , on peut linéariser les fonctions $\Psi_A(\theta)$ et $\Psi_E(\theta)$ autour de l'angle θ_N , ce qui donne une formule plus simple :

$$\Gamma(x, t) = \gamma R(\theta - \theta_N) \quad (1.4)$$

où γ est une constante ayant la dimension d'une fréquence, c'est la fréquence caractéristique de collision d'un grain mobile sur le lit statique.

1.2.2 Modèle BDG (BCRE saturé)

Le modèle BCRE a de bonnes chances de fonctionner pour des écoulements granulaires avec une faible épaisseur de couche roulante. Dans ce cas l'échange entre des grains mobiles et statiques se trouve partout identique et $\Gamma(x, t)$ suit l'expression (1.4). En revanche, lorsque l'écoulement est plus épais que quelques couches de grains, les grains appartenant au dessus de la couche roulante n'ont que de faibles échanges avec la couche statique, car ils sont en quelque sorte bloqués par les grains roulants en dessous de ceux-ci, et ils ne peuvent donc pas contribuer aux échanges entre les deux phases. Afin de rendre compte de cet effet, Boutreux, Raphaël et de Gennes ([33, 34]) ont proposé de saturer le terme d'échange lorsque l'épaisseur R de la couche roulante dépasse une certaine distance d'écrantage λ (de l'ordre de quelques diamètres d de grain).

L'expression du terme d'échange pour R plus grand que λ s'obtient en remplaçant R par λ (saturation) dans l'équation (1.5) :

$$\Gamma(x, t) = v_{up}(\theta - \theta_N) \quad (1.5)$$

où $v_{up} = \gamma\lambda$ est une constante ayant la dimension d'une vitesse.

Il existe des ondes remontant l'écoulement, à la surface de la phase statique, avec une vitesse de propagation v_{up} (où l'indice rappelle qu'il s'agit d'une remontée). Ainsi, une bosse statique initialement en bas du tas remonte au fur et à mesure de l'évolution de l'écoulement. Nous précisons cependant que la vitesse de remontée v_{up} ne correspond pas à une vitesse matérielle de remontée des grains statiques (qui n'aurait pas lieu d'être) : en fait, la remontée du profil statique est médiée par les grains roulants, comme présenté dans Figure 1.15. On peut d'ailleurs noter que cet effet de remontée est déjà présent dans les équations BCRE non-saturées, mais avec une vitesse de remontée dépendant de l'épaisseur locale en grains roulants $v_{BCRE} = \gamma R$ ([31, 32]).

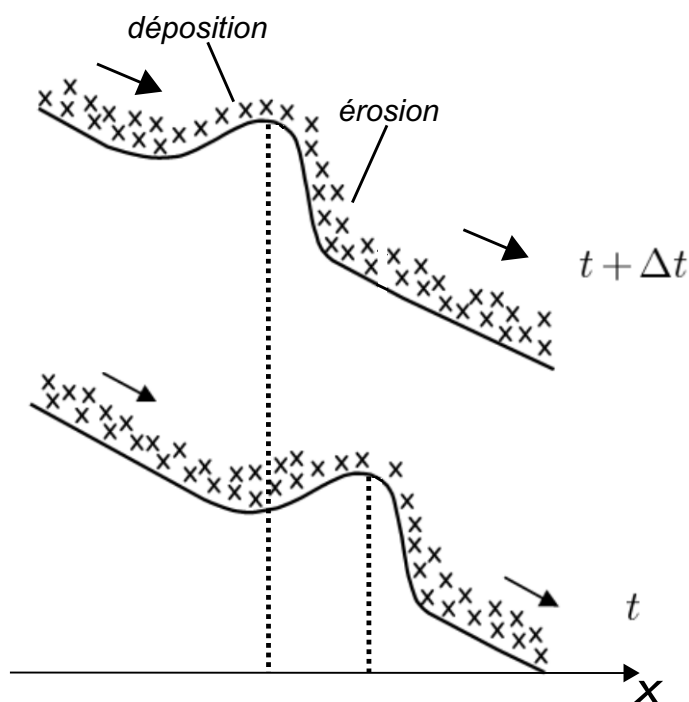


FIGURE 1.15 – Remontée d'une bosse dans le profil de la phase statique entre les instants t et $t + \Delta t$, stimulée par les grains roulants : le déplacement vers le haut est produit par une accréation de grains roulants sur la partie amont de la bosse et une érosion sur sa partie aval.

Les équations des modèles BCRE et BDG sont très voisines de celles obtenues à partir d'une description hydrodynamique de type Saint-Venant. Aradian et al. ont montré en 2002 que le modèle BDG correspond à un écoulement incompressible dont le profil de vitesse linéaire est moyenné selon l'épaisseur, avec une condition de coulomb de coefficient de frottement constant à la base. De même le modèle BCRE correspondra à un écoulement bouchon (les autres caractéristiques restant les mêmes par ailleurs). Notons que le terme de diffusion dans BCRE n'a pas de correspondance simple dans la descrip-

tion de Saint Venant, on peut le considérer comme une correction liée à la dissipation visqueuse.

Les modèles BCRE et BDG sont suffisamment simples pour permettre de donner des descriptions explicites de nombreuses situations mettant en jeu des écoulements granulaires : méta-stabilité de la surface d'un tas à l'angle de repos, remplissage stationnaire d'un silo, dynamique d'un tas dans un tambour tournant, arrêt d'un écoulement sur une pente faible ou contre un mur, étalement d'une marche de sable, phénomènes de ségrégation et de stratification dans les mélanges granulaires, avalanches descendantes et remontantes, construction progressive d'un tas à partir d'une source ponctuelle de grains, formation de rides sous l'effet du vent, etc. Cependant ni ce modèle, ni les conséquences que l'on peut en déduire n'ont reçu de confirmation expérimentale. On ne sait pas, par exemple, dans quelle mesure les hypothèses de BCRE sont vérifiées, ni s'il y a bien une saturation et, dans ce cas, pour quelle valeur de R . C'est l'objectif de notre travail de thèse de tester expérimentalement ces modèles à partir de l'étude de certaines situations simples d'écoulements granulaires sur un lit érodable.

1.2.3 Limitations des modèles BCRE et BDG

Les modèles BCRE et BDG sont des modèles 2D où les effets de la largeur latérale de l'écoulement sont négligés. Ils ne prennent pas non plus en compte les effets du fond de l'écoulement car le fond est supposé couvert par des couches de grains immobiles et les phénomènes d'érosion et de déposition ont lieu à l'interface solide - liquide (l'interface entre les couches statiques et mobiles) qui situe bien au dessus du fond. Cependant les grains doivent prendre appui sur le fond et les efforts exercés au niveau de l'interface peuvent se propager relativement loin, de même que les fluctuations de ces efforts. Si l'épaisseur h devient plus faible, on peut imaginer que le fond va jouer un rôle qui n'est pas pris en compte dans le modèle.

Les équations dynamiques des modèles BCRE et BDG sont obtenues à partir d'une expression au premier ordre du terme d'échange Γ qui n'est vérifiée que pour les angles d'inclinaison voisins de l'angle neutre. Il est probable que pour des angles d'inclinaison trop faibles ou trop élevés, l'expression ne soit plus valable. La question se pose donc de savoir dans quel domaine angulaire on peut appliquer ce modèle.

1.3 Écoulements granulaires à l'échelle du laboratoire

On utilise souvent trois configurations géométriques pour étudier le processus de l'écoulement dense à l'échelle du laboratoire selon la littérature (Figure 1.16). Il s'agit des configurations d'écoulements sur fond rigide, sur fond meuble dans un plan horizontal, sur fond meuble dans un tambour tournant. Les propriétés des écoulements de ces trois configurations ont été abordées dans l'article du GDR MiDi [12].

Nous verrons par la suite que ces configurations présentent des caractéristiques qui ne remplissent pas les hypothèses du modèle BCRE : i) l'effet du fond va conduire

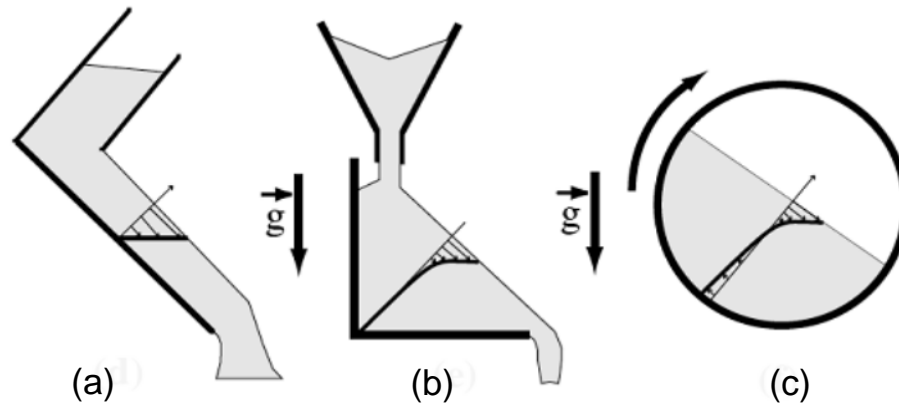


FIGURE 1.16 – Trois configurations souvent utilisées pour étudier les écoulements denses selon GDR MiDi [12] : (a) Écoulement sur fond rigide dans un plan incliné. (b) Écoulement sur fond meuble dans un plan horizontal. (c) Écoulement sur fond meuble dans un tambour tournant.

à un dépôt d'épaisseur homogène dans l'écoulement sur une surface inclinée avec le fond rigide, ii) l'effet des parois latérales conduit à des angles neutres variables pour l'écoulement stationnaire sur un tas selon le débit utilisé dans l'écoulement sur un fond meuble ou selon la vitesse dans un tambour tournant.

1.3.1 Effet du fond : angle d'arrêt et angle de démarrage

A cause de la friction, un milieu granulaire ne s'écoule pas dès que l'inclinaison du fond est non nulle comme dans le cas d'un fluide classique. Les travaux expérimentaux sur les écoulements sur un plan incliné de Pouliquen et al. [13] et Forterre et al. [42] ont montré que pour un angle donné, il existe une épaisseur minimale de matériau granulaire pour pouvoir observer un écoulement uniforme continu. Ces auteurs ont étudié les propriétés de démarrage de l'écoulement, en réalisant une couche de grains d'épaisseur h uniforme sur un plan rugueux, et en l'inclinant progressivement. A partir d'un angle critique θ_{start} la couche de grains se met à couler. De même, pour stopper l'écoulement d'épaisseur h , il faut diminuer l'angle d'inclinaison jusqu'à une valeur inférieure θ_{stop} (Figure 1.17). Les deux angles critiques dépendent de l'épaisseur h de la couche : plus la couche est fine, plus il faut incliner le plan pour faire couler l'empilement granulaire. C'est seulement aux grandes épaisseurs que l'on tend vers le comportement du tas de sable avec un angle de démarrage et d'arrêt ne dépendant plus de l'épaisseur. Ces propriétés de démarrage et d'arrêt montrent qu'une couche mince résiste mieux aux contraintes qu'une couche épaisse.

Selon la définition, la détermination expérimentale de ces angles doit se faire à partir d'un dispositif qui permet de produire un écoulement établi de hauteur h sur un plan rugueux avec une inclinaison donnée θ . Pour déterminer θ_{stop} , il faut baisser progressivement et lentement l'angle d'inclinaison (pour ne pas perturber l'écoulement) jusqu'à l'arrêt de celui-ci. Puis pour faire repartir l'écoulement, il faut ré-augmenter lentement l'angle d'inclinaison. L'angle à partir duquel l'écoulement reprend correspond

à l'angle θ_{start} . Cette procédure est en fait assez délicate car il est difficile de générer un écoulement stable de hauteur h pendant toute la durée de celle-ci.

En pratique, il est beaucoup plus facile de mesurer la courbe inverse $h_{stop}(\theta)$, c'est à dire de mesurer à angle fixé l'épaisseur critique en dessous de laquelle aucun écoulement n'est possible. Pour cela, il suffit de couper soudainement l'alimentation. L'épaisseur diminue alors jusqu'à une épaisseur critique d'arrêt h_{stop} et l'écoulement s'arrête. Le dépôt observé est uniforme, son épaisseur h_{stop} est indépendante de l'histoire de l'écoulement et dépend uniquement de l'angle d'inclinaison θ . Cet angle d'inclinaison θ est l'angle d'arrêt θ_{stop} qui correspond à l'épaisseur $h = h_{stop}$. Les données expérimentales de θ_{stop} et θ_{start} peuvent être interpolées de manière satisfaisante avec des fonctions du type [13] :

$$\tan \theta_{stop} = \frac{\gamma \tan \theta_{0,stop} + \tan \theta_{\infty,stop}(h/d)}{\gamma + (h/d)} \quad (1.6)$$

$$\tan \theta_{start} = \frac{\gamma \tan \theta_{0,start} + \tan \theta_{\infty,start}(h/d)}{\gamma + (h/d)} \quad (1.7)$$

où $\theta_{0,stop}$ (respectivement $\theta_{0,start}$) est la valeur de θ_{stop} (resp. θ_{start} quand h/d tends vers 0 et $\theta_{\infty,stop}$ (resp. $\theta_{\infty,start}$) est la limite asymptotique quand h/d tends vers l'infini. γ est un coefficient d'ajustement sans dimension.

Le diagramme des phases se sépare donc en quatre régions. Une région au-dessous de la courbe $\theta_{stop}(h/d)$ où aucun écoulement n'est observé. Une région entre les courbes $\theta_{stop}(h/d)$ et $\theta_{start}(h/d)$ où la couche peut, soit être à l'arrêt, soit être en écoulement stationnaire uniforme selon la condition initiale de démarrage. Une région au-dessus de $\theta_{start}(h/d)$ où la couche est en écoulement uniforme. Enfin une région où la couche accélère le long du plan.

En marge de ces régimes établis, il est possible d'observer la déstabilisation d'une couche de grains par une perturbation. Nous pouvons observer des régimes d'écoulements transitoires lorsque la couche est perturbée [43] : les deux comportements fluide et solide sont possibles selon l'histoire de l'empilement menant à différentes formes d'avalanches. Cette particularité est le reflet d'un phénomène d'hystérésis propre aux milieux granulaires.

Par la suite, Quartier et al. (2000) [44] ont étudié expérimentalement le mouvement d'une bille à une dimension sur un plan incliné rugueux et ont fait apparaître des comportements similaires en fonction de l'angle d'inclinaison. Ils relient ces angles à la perte d'énergie lors des chocs et à la profondeur du piège entre deux aspérités.

Un autre aspect a été aussi étudié : l'influence du fond sur l'écoulement. En absence de rugosité, le cisaillement est en effet localisé proche du fond selon Louge et al. (2001) [45]. En général, les expériences sont menées avec des fonds ayant une rugosité du même ordre de grandeur que la taille des grains qui s'écoulent (par exemple en collant les mêmes grains sur le fond). Pouliquen et al. (1996,1999) [46, 13] ont montré que les courbes $\theta_{stop}(h/d)$ et $\theta_{start}(h/d)$ dépendent fortement de la nature et la taille des rugosités. Daerr et al. (2001) [47] ont travaillé avec de la feutrine et retrouve les mêmes comportements. Plus récemment, Goujon et al. (2003) [48] ont étudié la friction développée par le fond sur l'écoulement en fonction du rapport entre le diamètre des

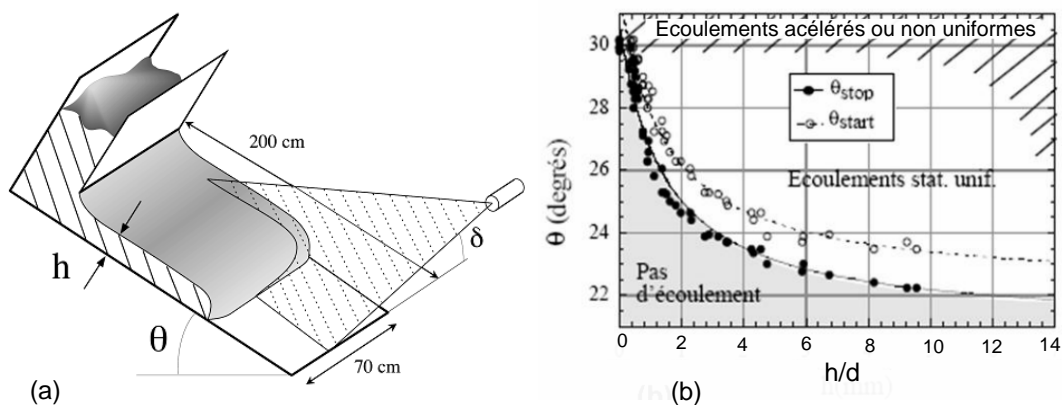


FIGURE 1.17 – Stabilité de l'écoulement granulaire sur fond rigide reporté par Pouliquen et al. (1999) [13]. (a) Dispositif expérimental de type plan inclinable contient un empilement des bille vers de $0.5mm$ dans un lit de $200cm$ de longueur. (b) Diagramme de phase $(\theta, h/d)$ qui présentent des frontières des 4 régions sans et avec l'écoulement. La courbe en trait plein est la fonction $\theta_{stop}(h/d)$, et la courbe en trait pointillé correspond à la fonction $\theta_{start}(h/d)$.

billes collées sur le plan et celui des billes qui coulent. Ces résultats mettent en évidence le rôle important de l'état de surface du fond sur l'écoulement ou sur la relation entre l'érosion et la déposition.

1.3.2 Effet des parois latérales : angle neutre dynamique ?

Les parois modifient non seulement les débits des écoulements mais aussi les profils de vitesse à cause de l'effet de la force de friction qu'elles exercent sur les grains. Lemieux et al. [28] ont mesuré des profils de vitesse à la paroi sur un tas et trouvent que l'intégrale de ces profils sur l'épaisseur ne donne que la moitié du débit mesuré. Et les résultats de Koeppe et al. [49] indiquent que la largeur du système peut changer la dynamique des écoulements. Ils ont étudié le phénomène de ségrégation d'un mélange de sable ($0.4mm$) et de sucre ($0.8mm$) dans une configuration de tas. Ils ont systématiquement fait varier le débit et la largeur entre les vitres de $2mm$ jusqu'à $10mm$. Les motifs de ségrégation laissés par les avalanches successives évoluent avec l'écartement des plaques. Tous ces résultats montrent que les parois présentent des influences non négligeables.

En tambour tournant, Bonamy et al. [50] déduisent des profils de vitesse et d'un modèle hydrodynamique pour l'écoulement, la forme de la force induite par les parois. Un peu plus tard, Taberlet et al. [14, 51] ont étudié des écoulements sur un tas à des angles très élevés supérieurs à 60 degrés dans plusieurs canaux étroits ($W/d = 10, 20, 40$) comme l'indique la Figure 1.18. Ils ont montré que, pour un angle de la surface du tas donné, l'épaisseur de l'écoulement est proportionnelle à la largeur du canal. Ils ont également montré qu'il existe des écoulements stationnaires et établis pour une infinité d'angles d'écoulement à la surface du tas. Chacun de ces écoulements stationnaires établis correspond à une situation où l'érosion et la déposition se compensent mutuel-

lement, c'est à dire que l'angle du tas est un angle neutre. Il y a donc, pour chaque valeur de débit, une valeur de l'angle neutre, ceci suppose que, au moins dans cette situation, la valeur de l'angle neutre n'est pas unique, mais est plus une caractéristique liée à la dynamique de l'écoulement qu'aux propriétés des grains.

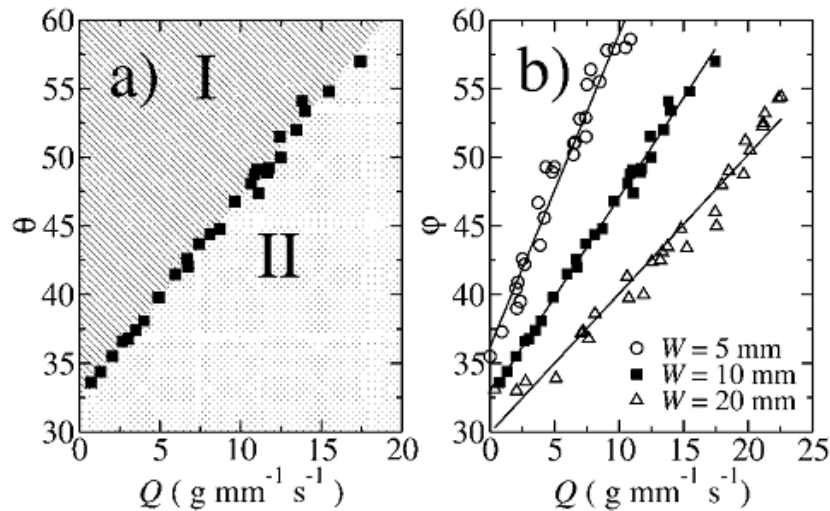


FIGURE 1.18 – Ecoulements avec des bille de $d = 0.5 \text{ mm}$ présentés dans Taberlet et al. (2003) [14]. (a) Diagramme d'écoulement obtenu avec le canal de l'épaisseur $W = 10 \text{ mm}$: écoulement sur le plan où tous les grains s'écoulent (région I), écoulement sur tas avec des grains mobiles qui s'écoulent sur des grains statiques (région II). (b) Frontière entre deux régions I et II en fonction de l'épaisseur du canal : $W/d = 10, 20, 40$.

1.3.3 Étalement d'une colonne granulaire

L'effondrement d'une colonne granulaire ou rupture de barrage est un cas particulier d'écoulement i sur fond meuble où les grains venant de l'effondrement s'écoulent sur des couches de grains précédemment déposées. Ce type découlements produit par un effondrement a été étudié notamment par Lajeunesse et al. (2004,2005) [15, 52], et Lube et al. (2004) [53] (Figure 1.19). Dans ces expériences, le fluide interstitiel, l'air, ne joue aucun rôle dans l'effondrement. Celles-ci ont permis de mettre en évidence des lois de puissance régissant la dynamique des effondrements de colonnes (Lajeunesse et al. (2005) [52], Balmforth et al. (2005), Siavoshi et al. (2005) [54], Lube et al. (2005,2007) [55, 56]) qui lient la géométrie finale des dépôts au rapport d'aspect initial de la colonne.

Le rapport d'aspect (hauteur initiale sur largeur initiale) apparaît comme le seul paramètre de contrôle pertinent qui régit l'étalement final. La forme et la largeur du dépôt résultant de l'effondrement dépend fortement du rapport d'aspect initial de la colonne $a = H_i/L_i$ (voir Figure 1.20). Par exemple, l'étalement relatif $(L_f - L_i)/L_i$ suit une loi linéaire avec a pour les petits rapports d'aspect et une loi non-linéaire à plus grand rapport d'aspect. Le rapport d'aspect critique a_c séparant les deux régimes varie selon les auteurs : Lube et al. (2005) [55] trouvent $a_c = 1,7$ tandis que Lajeunesse et al. (2004) [15] obtiennent $a_c = 0,74$. Ce processus d'effondrement n'est en fait pas

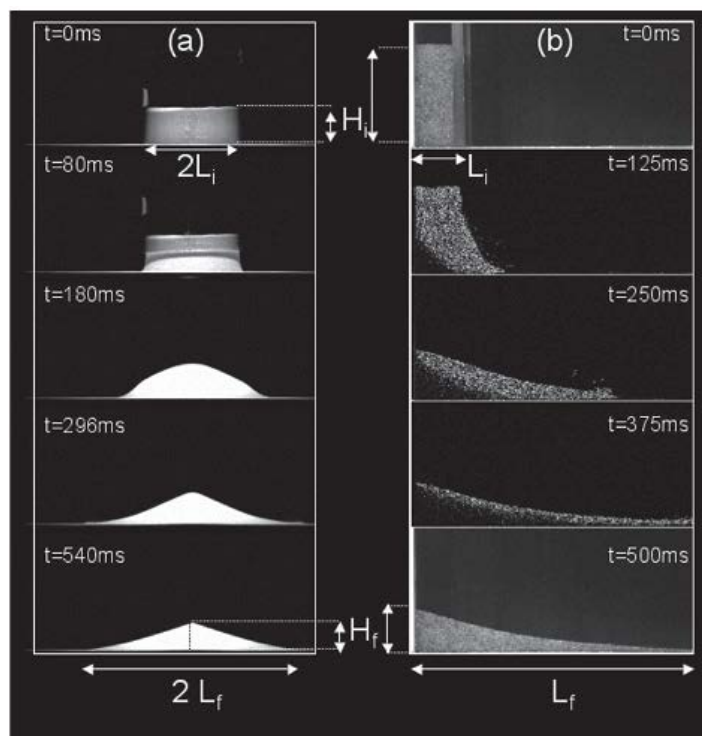


FIGURE 1.19 – (a) Effondrement d’une colonne granulaire initialement formée dans un cylindre (3D) selon Lajeunesse et al. (2004) [15]. (b) Rupture d’un barrage (2D) selon Lajeunesse et al. (2005). Ces images montrent que la forme de grains étalés est très similaire pour les deux cas 2D et 3D.

très éloigné des processus d’érosion et de déposition lors d’écoulements granulaires le long des pentes.

En complément des études expérimentales, de nombreuses études numériques ont été réalisées en utilisant les simulations discrètes (Staron et al. (2005) [57]). Des approches continues moyennées dans l’épaisseur ont été appliquées à ces géométries et malgré la présence de forts gradients, elles parviennent à décrire la dynamique pour des rapports d’aspects pas trop grands (Mangeney-Castelnau et al. (2005) [58], Larrieu et al. (2006) [59]).

D’autres modèles théoriques utilisant des approches continues ont également développées. Nous pouvons citer le travail de Boutreux et al. (1997) [33] qui exploitent le modèle de BCRE pour décrire l’étalement d’une marche granulaire.

Plus récemment, Mangeney et al. (2010) [60] ont menées des études détaillées sur l’effondrement de colonnes granulaires sur un lit granulaire incliné. Ils montrent notamment que la présence d’un substrat érodable peut augmenter dramatiquement la longueur d’étalement de la colonne.

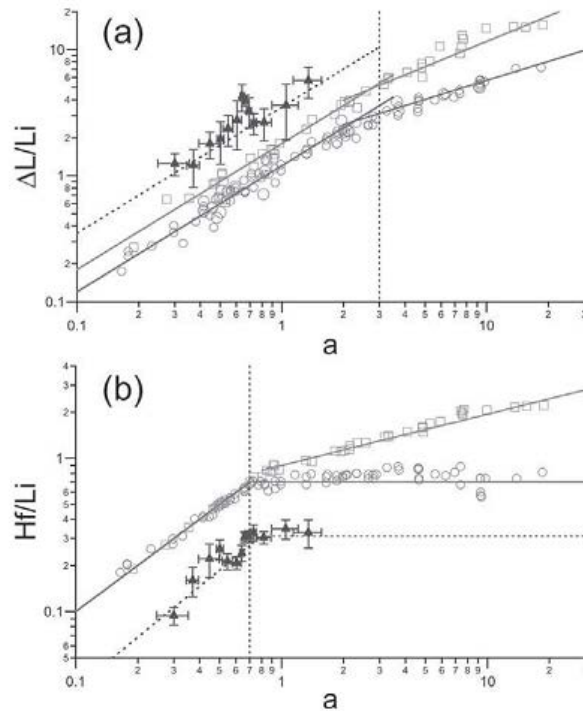


FIGURE 1.20 – (a) Etagement $\Delta L/L_i$ et (b) hauteur normalisé H_f/L_i de dépôt en fonction du rapport d'aspect $a = H_i/L_i$ selon Lajeunesse et al. (2004) [15]. Les cercles et les carrés sont les résultats expérimentaux pour la colonne cylindrique et le barrage. Les triangles sont les prédictions théoriques de glissement du terrain. Le rapport d'aspect critique reporté ici est $a_c = 0,74$.

1.4 Études antérieures sur l'angle neutre

L'angle neutre θ_N introduit théoriquement par le modèle BCRE a été "traduit" expérimentalement par Bideau et al. [16] pour en obtenir une détermination de manière globale. Pour cela ils ont utilisé un dispositif correspondant au schéma de la Figure 1.21. Une boîte inclinée contient un lit de grains. On lâche une masse M_0 en amont de la boîte, celle-ci va produire un écoulement. Si l'inclinaison est suffisante, une partie de cet écoulement va sortir de la boîte par le bas. L'angle neutre est l'angle d'inclinaison de la surface du lit pour lequel la masse recueillie à la sortie, M_f est égale à masse M_0 . Ce qui nous amène à considérer que pendant l'écoulement, l'érosion a compensé la déposition. Cet angle est un angle neutre global θ_N qui représente la balance globale entre les deux processus d'érosion et de déposition. Il n'est pas sûr que cet angle global corresponde à l'angle neutre local de BCRE. C'est une question qui sera à clarifier.

Les études sur l'angle neutre global ont été reprises dans deux thèses : celle d'Ould Ahmedou, soutenue à Rennes en 2005 [18] et celle de Mint Babah, soutenue à Rennes en 2010 [17]. Cette dernière a proposé une extension des travaux de Bideau et al. en étudiant l'influence de la taille des particules, du rapport d'aspect du réservoir, de la longueur et de la largeur du lit sur l'angle neutre et a essayé de tester les modèles BCRE et BDG dans une configuration 3D. Ould Ahmedou a réalisé des études sur l'angle neutre en configuration 2D, il a utilisé des pastilles circulaires et pentagonales.

La présente thèse s'était fixée comme objectif de compléter le travail d'Ould Ahmedou sur l'angle neutre d'un lit 2D par des études paramétriques tout en testant les modèles BCRE et BDG.

Les dispositifs expérimentaux utilisés par Bideau, Mint Babah, Ould Ahmedou sont très similaires dans le principe, ils correspondent au schéma de La Figure 1.21. C'est également ce type de dispositif qui sera utilisé dans le cadre de notre travail de thèse pour étudier l'angle neutre d'un lit granulaire. Les dispositifs (3D ou 2D) sont inclinables, ils contiennent, comme on l'a déjà mentionné, deux parties principales : un réservoir et un lit. On utilise une cale amovible pour pouvoir garder dans le réservoir, puis les libérer. Pour effectuer des expérience, on remplit d'abord le lit et le réservoir, en mesurant dans chacun des deux cas la masse de grains nécessaire. Puis on incline le dispositif jusqu'à l'angle souhaité et on pivote la cale amovible du réservoir afin de libérer les grains pour engendrer l'écoulement. Les grains sortis du canal sont récupérés pour les mesures de masse.

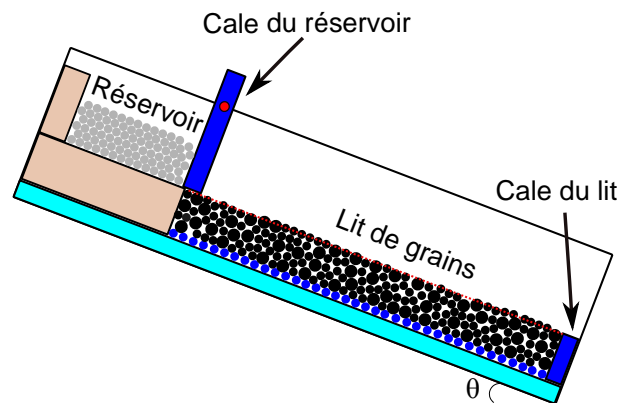


FIGURE 1.21 – Schéma de principe des dispositifs expérimentaux utilisés pour les études sur l'angle neutre d'un lit granulaire. La configuration 3D a été utilisée par Bideau et al. [16] et Mint Babah [17] avec des billes en verre. La configuration 2D a été utilisée par Ould Ahmedou [18] avec des pastilles circulaires et pentagonales en polystyrène.

1.4.1 Angle neutre pour une configuration 3D

La boîte 3D utilisée par Bideau et al. mesure 32cm en longueur, 26cm en largeur. Les grains utilisés sont des billes de verre de $2,2\text{mm}$ de diamètre. La masse du lit est fixée : $M_L = 4600\text{g}$, ce qui représente vingt couches de billes. Des mesures ont été effectuées avec deux valeurs de masse de réservoir : $M_0 = 1150\text{g}$ et $M_0 = 2300\text{g}$. Les dimensions et le rapport d'aspect du réservoir ne sont pas indiqués dans l'article. L'angle d'avalanche et l'angle de repos moyens du lit sont respectivement de l'ordre de 26° et 21° . Pour déterminer l'angle neutre, on peut utiliser l'efficacité d'érosion globale E qui quantifie la différence entre la masse de sortie M_f et la masse initiale M_0 du réservoir : $E = M_f/M_0 - 1$, en effectuant des expériences pour plusieurs angles d'inclinaison θ . Bideau et al. font varier l'angle d'inclinaison du lit dans l'intervalle $14^\circ - 24^\circ$, tous les $0,5^\circ$. Ils obtiennent bien une variation linéaire de E avec θ entre 18° et

24°. La valeur de l'angle neutre θ_N , obtenue pour $E = 0$ ($M_f = M_0$) est voisine de 21° pour les deux valeurs de la masse initiale mentionnées ci-dessus. Bideau et al. L'angle neutre semble donc, dans cette expérience, indépendant de la masse M_0 et très proche de l'angle de repos. Bideau et al. mesurent également l'écart d'angle du lit avant et après le lâcher de grains. Cet écart s'annule à l'angle neutre. Ce résultat n'est pas sans rappeler la notion d'angle neutre utilisée par Fischer et al. [2].

Par la suite, Mint Babah [17] a étudié l'angle d'avalanche, l'angle de repos et l'angle neutre dans une configuration très semblable. La Figure 1.22 représente deux versions successives du dispositif expérimental utilisé. Dans la version 1 du montage, le levage est réalisé par l'intermédiaire d'un filin fixé à l'extrémité du canal et actionné par un moteur pas à pas avec une vitesse de montée de l'ordre de $0,1^\circ$ par seconde. Ce système "rustique" engendre des vibrations importantes pendant le levage, ces vibrations affectent la stabilité de l'empilement granulaire et perturbent la mesure. Pour tenter de limiter ces vibrations, une version 2 a été développée avec une structure plus rigide en acier et un vérin électrique assurant un levage régulier à $0,33^\circ$ par seconde.

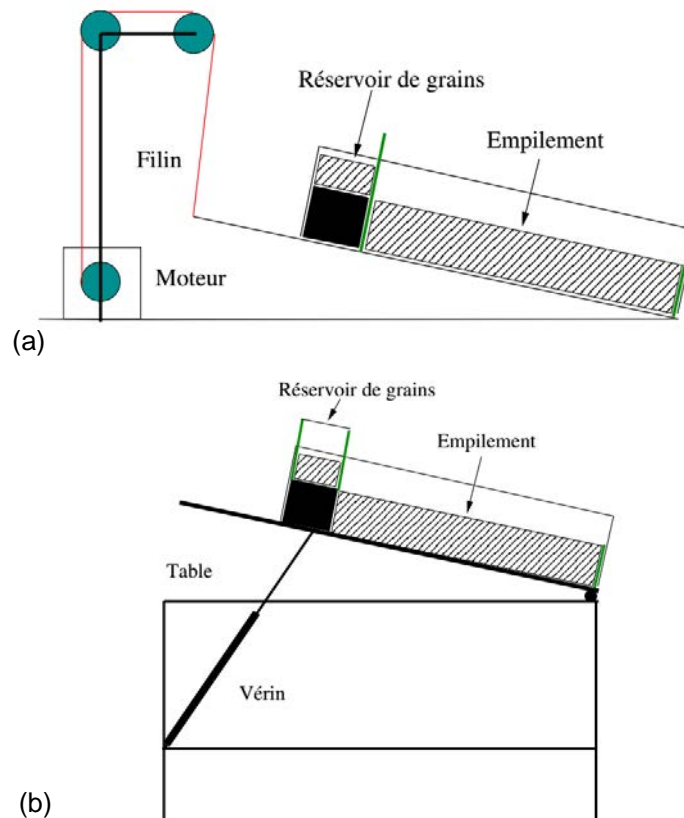


FIGURE 1.22 – Schéma de principe des deux versions du dispositif expérimental utilisé par Mint Babah (2010) [17]. (a) Version 1 avec le système de levage réalisé par l'intermédiaire d'un filin fixé à l'extrémité du canal. (b) Version 2 avec une structure rigide en acier et un vérin.

Pour la version 1 du dispositif, Mint Babah a utilisé deux canaux différents : l'un de petites dimensions (30cm de long, 20cm de large et 2cm de haut) et l'autre de plus grandes dimensions avec une longueur utile de 90cm, une largeur de 22cm et une hauteur de 30cm. Avec le petit canal, les lits de grains réalisés sont de dimensions

invariables ($30\text{cm} \times 20\text{cm} \times 2\text{cm}$), avec le grand canal, il est possible de régler la longueur L_e et la hauteur h_e du lit : $50\text{cm} < L_e < 80\text{cm}$ et $2\text{cm} < h_e < 7\text{cm}$. Les parois latérales des deux canaux sont en verre et la paroi du fond est en Dural. Pour la version 2, Mint Babah a utilisé un canal en plexiglas de 90cm de long, 22cm de large, avec une hauteur utile de 30cm . L'extrémité inférieure du canal est fermée par une cale d'épaisseur réglable permettant d'ajuster la hauteur du lit. La longueur utile est variée entre 40 et 80cm , les dimensions utiles du réservoir sont fixes avec 11cm de long, 20cm de large et 30cm de haut). De plus, le réservoir est en fait constitué d'une boîte parallélépipédique en PVC posée directement sur le fond du canal. Celle-ci peut être retirée sans perturber le système.

Mint Babah a confirmé la dépendance linéaire de l'efficacité d'érosion E en fonction de l'angle d'inclinaison qu'avaient obtenu Bideau et al. Elle a également effectué des calculs de l'efficacité d'érosion globale E en fonction de l'angle d'inclinaison en utilisant les modèles de BCRE et BDG. Le calcul avec le modèle BCRE a donné une dépendance exponentielle, alors que le calcul avec le modèle BDG a donnée une dépendance linéaire de l'efficacité d'érosion en fonction de l'angle d'inclinaison ce qui correspond bien aux résultats expérimentaux.

Pour étudier l'influence de la taille des billes sur l'angle neutre, Mint Babah a effectué des expériences avec des billes de verre de diamètre $250\mu\text{m}$, $500\mu\text{m}$ et 1mm . Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 1.1. La valeur de l'angle neutre pour les billes de $250\mu\text{m}$ est un peu plus grande (environ un degré de plus) que celles trouvées pour les billes de $500\mu\text{m}$, mais elle change très peu quand on passe de $500\mu\text{m}$ à 1mm . Ce comportement est voisin de celui de l'angle de repos, et sensiblement différent de celui de l'angle d'avalanche qui décroît nettement quand la taille des billes augmente.

d	$250 (\mu\text{m})$	$500 (\mu\text{m})$	$1 (\text{mm})$
θ_A	$27,3 \pm 1,2 (\text{°})$	$25,3 \pm 0,2 (\text{°})$	$23,8 \pm 0,4 (\text{°})$
θ_R	$23,9 \pm 0,6 (\text{°})$	$23,1 \pm 0,3 (\text{°})$	$23,2 \pm 0,4 (\text{°})$
θ_N	$25,7 \pm 0,5 (\text{°})$	$24,1 \pm 0,4 (\text{°})$	$24,7 \pm 0,5 (\text{°})$

TABLE 1.1 – Résultats pour les angles d'avalanche θ_A , de repos θ_R et neutre θ_N présentés dans la thèse de Mint Babah en utilisant la première version du dispositif. Les angles d'avalanche et de repos ont été obtenus avec le grand canal ($L_e = 87\text{cm}$, $l_e = 22\text{cm}$ et $h_e = 5\text{cm}$), l'angle neutre avec le petit canal ($L_e = 30\text{cm}$, $l_e = 20\text{cm}$ et $h_e = 2\text{cm}$) et $M_0 = 380\text{g}$.

Pour étudier l'influence de la longueur du lit, Mint babah a réalisé des expériences avec la première version du dispositif muni du grand chenal de longueur variable L_e entre 40cm et 87cm , $l_e = 22\text{cm}$, $h_e = 5\text{cm}$ en utilisant des billes de verre de $250\mu\text{m}$ de diamètre et une masse de réservoir $M_0 = 1,4\text{kg}$, la valeur de masse du lit et les dimensions du réservoir ne sont pas reportées. Contrairement à ce qui est observé pour l'angle d'avalanche, l'angle neutre ne présente pas de variation significative en fonction de la longueur, ce qui est similaire à l'observation obtenue pour l'angle de repos.

Pour savoir si la masse M_0 de grains dans le réservoir a une influence, Mint Babah a réalisé une série d'expériences en utilisant la deuxième version du dispositif. Mint

Babah fait varier la masse du réservoir M_0 entre 0, 1 et 2kg, elle observe une diminution significative de l'angle neutre avec l'augmentation de M_0 , surtout pour les faibles valeurs de M_0 . Cependant, en changeant la forme du réservoir, Mint Babah a réalisé que ce n'est pas tant la valeur de la masse qui influence l'angle neutre, que le rapport d'aspect du réservoir (R_0/Δ_0 , où R_0 est la hauteur et Δ_0 est la largeur initiale du réservoir). Pour étudier l'influence de ce paramètre, le rapport d'aspect est varié entre 1, 5 et 14, cependant, les dimensions correspondantes du réservoir et la masse du lit ne sont pas données dans sa thèse. La Figure 1.23 résume les résultats obtenus par Mint Babah [17] avec la dépendance de l'angle neutre et du coefficient d'érosion en fonction du rapport d'aspect, pour différentes masses de réservoir. Le coefficient d'érosion e est simplement la pente de la régression linéaire de l'efficacité d'érosion E : $E = e(\theta - \theta_N)$ où θ_N est l'angle neutre. Ces courbes montrent clairement qu'on obtient la même valeur d'angle neutre pour des masses différentes mais des rapports d'aspect identiques et qu'une courbe maîtresse, fonction uniquement du rapport d'aspect, se dégage. Les conclusions pour le coefficient d'érosion sont similaires.

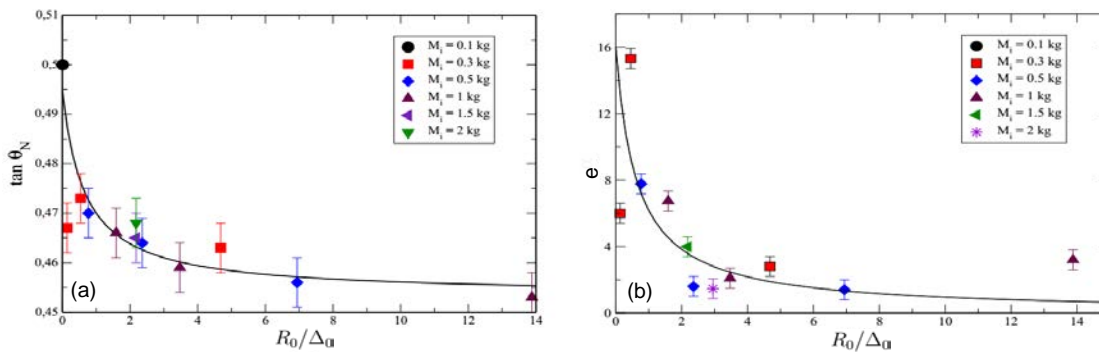


FIGURE 1.23 – (a) Dépendance de l'angle neutre et (b) coefficient d'érosion en fonction de la masse initiale et du ratio d'aspect obtenue par Mint Babah [17] pour un écoulement 3D. La courbe de tendance est obtenue en utilisant une loi hyperbolique inspirée de Pouliquen et al. [13] : $\tan \theta_N = \frac{0,66 \cdot \tan(26,8) + \tan(24,4) \cdot (R_0/\Delta_0)}{0,66 + (R_0/\Delta_0)}$ et $e = \frac{0,63 \cdot 16}{0,63 + (R_0/\Delta_0)}$.

Pour étudier l'influence du protocole de remplissage du lit de grains, Mint Babah a utilisé 2 protocoles différents. Pour le protocole 1, elle met tout d'abord le canal en position horizontale, puis elle le remplit de grains à l'aide d'un sceau en plastique. Ensuite, elle déstructure l'empilement par un mouvement aléatoire à l'aide d'un agitateur et puis elle fait passer un râteau le long de la surface pour enlever les grains en excédent. Pour améliorer la reproductibilité dans la façon de remplir, Mint Babah a procédé à une amélioration en utilisant le protocole 2. Pour cela, avant le remplissage du canal, il faut poser sur le fond une grille métallique avec une maille carrée plus grande que la taille des billes utilisées. Puis on verse les billes dans le canal. Le remplissage des billes se fait par couches successives. Une fois le canal rempli, on remonte la grille lentement à la surface de l'empilement afin d'uniformiser la distribution des grains. On aplanit ensuite la surface à l'aide d'un râteau.

Les résultats expérimentaux de Mint Babah confirment que l'angle d'avalanche (et dans une moindre mesure l'angle de repos) dépend du protocole de remplissage, tandis que l'angle neutre est indépendant de celui-ci. De façon plus générale, elle a vérifié sur

les différents dispositifs que cette conclusion reste valable : l'angle d'avalanche dépend de la version du dispositif, pas l'angle neutre (pour peu que le rapport d'aspect soit le même)

En conclusion l'étude de Mint Babah a montré que le principal paramètre influençant la valeur de l'angle neutre est le rapport d'aspect du réservoir.

1.4.2 Angle neutre pour une configuration 2D

A notre connaissance, il n'y a qu'une étude sur l'angle neutre pour une configuration 2D, c'est le travail de thèse d'Ould Ahmedou [18]. Dans le cadre de sa thèse, il a mené d'abord un certain nombre d'expériences sur les avalanches en 2D, puis des expériences sur l'angle neutre. Le dispositif 2D est un canal constitué de 2 plaques de verre de 200cm de long et de 30cm de haut, écartées de 3,5mm. Concernant le type de grains, Ould Ahmedou a utilisé des pastilles en polystyrène de 3mm d'épaisseur, circulaires de 8 et 12mm de diamètre ou pentagonales de 8mm de diamètre.

Pour étudier l'angle neutre, Ould Ahmedou a utilisé un lit de pastilles de 200cm de longueur et de 8.4cm de hauteur. Il a donné des dimensions du lit, mais celles du réservoir ne sont pas disponibles dans le manuscrit, le rapport d'aspect n'a pas été reporté non plus.

La masse du lit est 370g pour le cas monodisperse (disques ou pentagones de 8mm de diamètre) et $2 \times 170g$ pour le cas bidisperse circulaire (50 % de disques de 8mm de diamètre et 50% de disques de 12mm). Le lit monodisperse circulaire est ordonné, par contre le lit bidisperse avec le mélange de 2 tailles différentes permet de le rendre désordonné.

Les résultats obtenus par Ould Ahmedou sont résumés dans la Table 1.2. La présence d'ordre dans l'empilement des particules conduit à d'importantes fluctuations dans les mesures d'angle d'avalanche et d'angle neutre. La différence de valeur entre l'angle d'avalanche pour les disques et les pentagones met en exergue l'importance de la forme géométrique des particules constituant le milieu sur le déclenchement des avalanches. Par ailleurs, la variation de l'angle neutre pour des disques roulant sur des pentagones et des pentagones roulant sur un lit de pentagones montre l'importance de la géométrie des grains lors des processus d'érosion et d'accrétion.

Lit	M_b (g)	Réservoir	M_0 (g)	θ_A (°)	θ_N (°)
Disques 8mm	370	Disques 8mm	110	34.8 ± 0.6	-
Disques 8, 12mm	340	Disques 8mm	110	32.2 ± 0.4	30.5 ± 0.2
Pentagones 8mm	370	Disques 8mm	110	43.0 ± 0.2	37.3 ± 0.1
Pentagones 8mm	370	Pentagones 8mm	110	43.0 ± 0.2	40.8 ± 1

TABLE 1.2 – Liste d'expériences et résultats obtenus par Ould Ahmedou sur des études sur l'angle neutre.

1.4.3 Comparaison des résultats obtenus

Il est difficile de faire une comparaison des résultats obtenus dans les trois études portant sur l'angle neutre. Certes, pour déterminer l'angle neutre, les trois auteurs ont utilisé le même principe, mais ils n'ont pas tous indiqué la valeur du rapport d'aspect du réservoir qui semble être le paramètre dominant. La Figure 1.24 montre la dépendance linéaire de l'efficacité d'érosion E en fonction de l'angle inclinaison θ pour les études en 3D de Bideau (2001), Mint Babah (2010), et les études en 2D d'Ould Ahmedou (2005). Les détails sur ces expériences sont résumés dans le Tableau 1.3. Selon ces résultats, on peut remarquer que l'angle neutre θ_N et le coefficient d'érosion e sont assez différents, mais il est difficile de savoir pourquoi. Il est probable que l'aspect 2D-3D joue, mais la différence entre les résultats de Bideau et Mint Babah (deux études en 3D) est presque aussi importante que la différence entre les résultats de Mint Babah et Ould Ahmedou (respectivement en 3D et 2D).

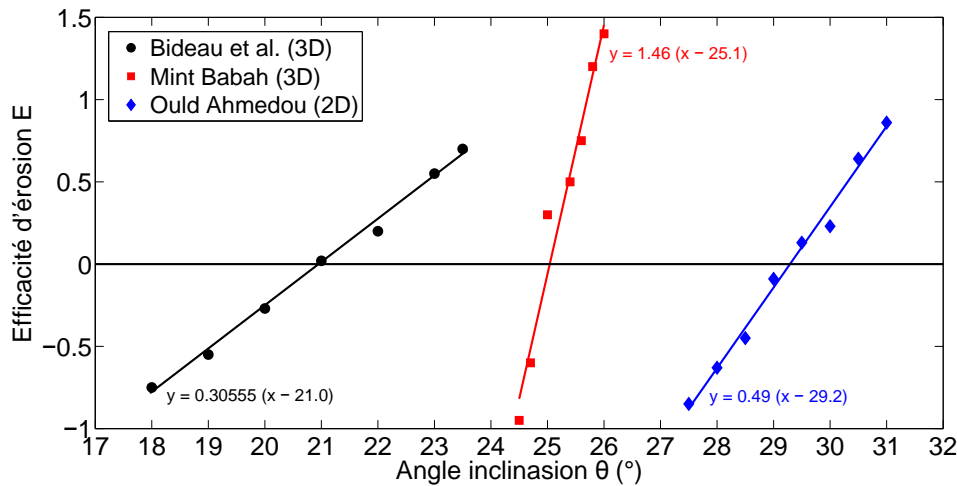


FIGURE 1.24 – Dépendance linéaire du ratio d'érosion $E = M_f/M_i - 1$ en fonction de l'angle inclinaison selon les travaux de Bideau et al. (2001), Mint Babah (2010) pour une configuration 3D, et Ould Ahmedou (2005) pour une configuration 2D avec des pastilles circulaires peintes, non reportée dans la Table 1.2. Les détails sur les dimensions, la masse du lit et du réservoir, le type de grains utilisés, la valeur de l'angle neutre global θ_N et le coefficient d'érosion e sont reportés dans le Tableau 1.3.

1.5 Contributions de ce travail de thèse

Les travaux de Mint Babah ont permis d'avancer sur l'étude de l'angle neutre et de l'érosion-déposition en lien avec les modèles BCRE-BDG, cependant ils n'ont porté que sur une étude globale. Il serait nécessaire d'aller voir de manière plus locale comment se comportent les grains par suivi individuel, de manière à estimer des quantités qui interviennent dans les équations (comme le terme d'échange, mais aussi la vitesse de convection ou le coefficient de diffusion). C'est aussi la meilleure manière de tester le modèle lui-même. Pour accéder à ces informations de suivi individuel des grains, une

Travaux	Bideau et al.	Mint Babah	Ould Ahmedou
Configuration	3D	3D	2D
Lit	32 x 26 x 4,4cm	87 x 22 x 7cm	200 x 8,4cm
Masse du lit	4,6kg	15,9kg	370g
Masse réservoir	2,3kg	2,6kg	110g
Angle d'avalanche θ_A ($^\circ$)	26	28	-
Angle de repos θ_R ($^\circ$)	21	24.6	-
Angle neutre θ_N ($^\circ$)	21	25	29.2
Coefficient d'érosion e ($1/^\circ$)	0.31	1.46	0.49

TABLE 1.3 – Comparaison des travaux sur l'angle neutre. Le rapport d'aspect du réservoir R_0/Δ_0 est fixé à 1 pour l'expérience de Mint Babah, il n'est pas reporté pour les expériences de Bideau et d'Ould Ahmedou.

configuration 2D est bien adaptée. Cependant l'étude 2D d'Ould Ahmedou n'a pas été suffisamment détaillée et n'a pas permis de montrer l'influence ou l'absence d'influence des paramètres. L'objectif de cette thèse est donc de reprendre l'étude paramétrique effectuée par Mint Babah, mais dans la configuration 2D, et de l'appliquer à des situations simples destinées à tester le modèle. Au départ, il était envisagé d'étudier en détail le mouvement des grains pour un suivi individuel, mais le temps nous a manqué pour mener cette tâche à terme.

Chapitre 2

Dispositif expérimental

▷ *Ce chapitre est dédié à la description de dispositif expérimental que nous avons utilisé pendant ce travail de thèse. Celui-ci a été conçu afin de pouvoir réaliser des écoulements bidimensionnels avec des disques.* ◁

2.1 Montage expérimental

2.1.1 Présentation du montage

Nous avons vu dans le chapitre précédent que des études sur l'angle neutre ont déjà été entreprises à l'IPR dans des configurations d'écoulements bidimensionnels dans le cadre de la thèse d'Ould Ahmedou (2005) [18] mais aussi tridimensionnels dans les travaux de Bideau et al. (2001) [16] et la thèse de Mint Babah (2010) [17]. Les 2 premiers travaux cités correspondent à des études préliminaires sur l'angle neutre basées sur un nombre restreint d'expériences. Mint Babah a effectué une série plus complète d'expériences sur des écoulements 3D mais elle a utilisé plusieurs montages et protocoles différents. L'analyse et l'interprétation furent également limitées du fait de la difficulté de sonder ce qui se passe à l'intérieur de l'écoulement 3D.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons souhaité reprendre et approfondir les expériences sur l'angle neutre en réalisant une étude paramétrique la plus complète et homogène possible. Par ailleurs, nous avons choisi de travailler dans une configuration d'écoulement 2D pour faciliter l'observation et l'analyse des processus d'érosion et de déposition. En effet, l'un des avantages de la configuration 2D est de pouvoir observer facilement l'ensemble des particules de l'écoulement à travers les parois transparentes.

Le dispositif expérimental utilisé pour cette étude est présentée sur la figure 2.1. Le canal est constitué de 2 plaques de verres transparentes de $2200mm$ de longueur et de $730mm$ de hauteur. L'écartement entre les 2 plaques de verres a été choisi de manière à pouvoir réaliser un écoulement bidimensionnel avec une mono-couche de particules. Les particules utilisées étant des disques de $3mm$ (voir section 2.2), la valeur optimale de l'écartement pour minimiser les frottements aux parois et respecter la bi-dimensionnalité de l'écoulement est autour de $3,5mm$. Si l'écartement est plus petit que cette valeur, il y a un risque non-négligeable de blocage du fait de la difficulté d'assurer un écartement uniforme sur toute la longueur du chenal, si au contraire l'écartement est plus grand, les particules peuvent s'incliner par rapport aux parois. Les faces des particules en contact avec les parois ne sont plus dans un plan qui reste parallèle à ces dernières, modifiant ainsi fortement le frottement. Pour s'assurer d'un écartement uniforme sur l'ensemble du chenal des entre-toises sont disposées à intervalles réguliers sur toute la périphérie des plaques verres. Cependant vu la longueur des plaques de verres, celles-ci peuvent se déformer et flamber sous leur propre poids. Rien ne garantit donc que l'écartement imposé à la périphérie par les entre-toises soit respecté notamment au centre des plaques. Nous avons utilisé une méthode optique (voir Annexe A pour plus de détails) pour vérifier l'uniformité de l'écartement. Nous mesurons un écartement moyen de $3,6mm$ avec un écart type de $0,2m$.

Les plaques de verres constituant les parois latérales du canal sont fixées sur un banc rigide en acier qui est équipé d'un vérin électrique permettant d'incliner le dispositif entre 0° et 35° . La vitesse d'élévation ou de descente peut être contrôlée par la tension appliquée au moteur du vérin. Un boîtier de commande a été installé offrant le choix entre deux vitesses différentes : une vitesse rapide de 10° par minute et une vitesse

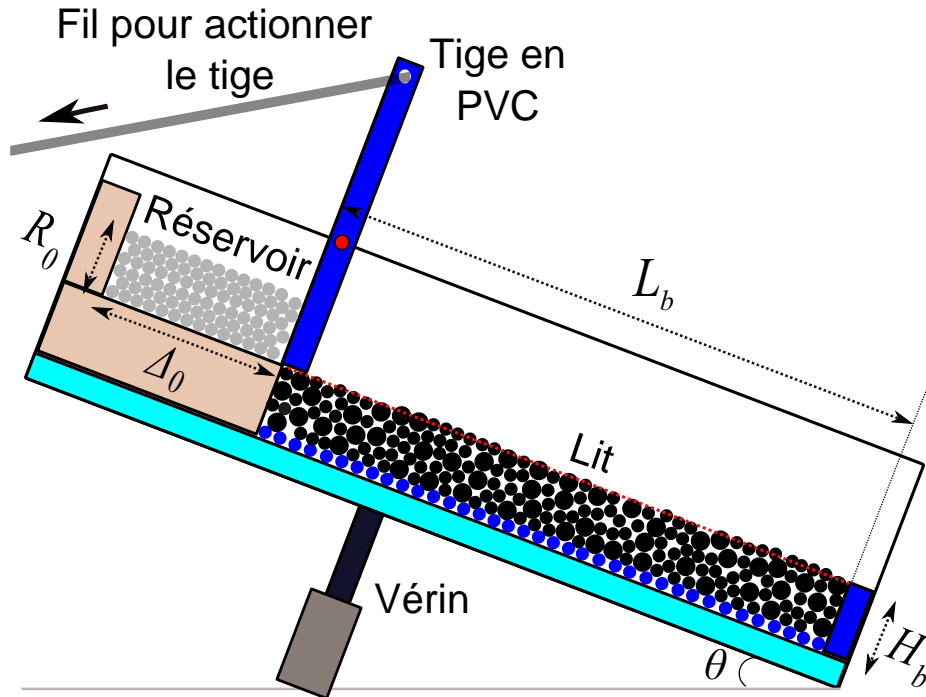


FIGURE 2.1 – Schéma de principe du dispositif expérimental composé d'un canal d'écoulement bidimensionnel avec le lit en aval, le réservoir en amont, le vérin électrique, et le tige de blocage articulée en PVC.

lente de 1° par minute. La procédure pour incliner le dispositif à un angle donné est la suivante : nous levons le châssis du canal avec la vitesse rapide et puis quand nous nous approchons de la valeur souhaitée, nous passons à la vitesse lente afin d'ajuster précisément. L'angle d'inclinaison du canal est mesuré via un inclinomètre électronique précis au dixième de degré.

Le canal est constitué deux éléments distincts : (i) un réservoir de particules situé en amont du dispositif et (ii) un lit granulaire statique sur lequel les particules du réservoir seront relâchées. Le principe des expériences consiste, une fois le canal incliné à l'angle souhaité, à libérer l'ensemble des particules de réservoir pour les faire s'écouler sur le lit statique (voir Fig. 2.2). Le système permettant de bloquer les particules est constitué d'une tige en PVC articulée autour d'un pivot ce qui permet de les libérer de manière quasi-instantanée (i.e., en quelques dixièmes de seconde).

2.1.2 Dimensionnement du réservoir et du lit statique

Un système de cales rectangulaires en PVC nous permettent de moduler respectivement la taille du réservoir Δ_0 et la longueur du lit statique L_b . La contrainte évidente est que la somme de deux longueurs ne peut dépasser la longueur totale L_{tot} du canal qui est $2200mm$. Les expériences conduites dans cette thèse ont été faites avec deux longueurs de lit différentes : $L_{b1} = 850mm$ et $L_{b2} = 1700mm$. Par contre, l'épaisseur de lit statique n'a pas été varié et est définie par la hauteur H_b de la cale placée à l'extrémité du canal. Pour la plupart des expériences réalisées, nous avons utilisé la même épaisseur $H_b = 84mm$ pour les deux longueurs de lit. Nous avons aussi effectué

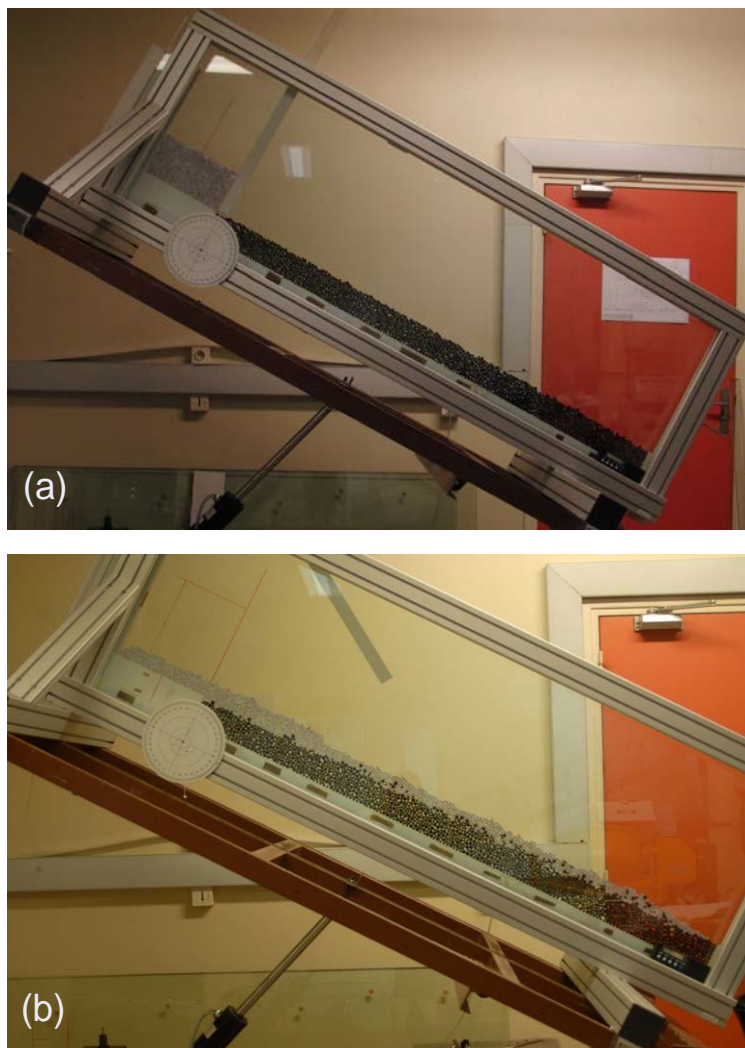


FIGURE 2.2 – Photos du dispositif expérimental avant (a) et après (b) la libération des particules du réservoir.

quelques expériences avec l'épaisseur $H_b = 126\text{mm}$ pendant les études concernant la dépendance paramétrique de l'angle neutre θ_N qu'on verra dans le prochain chapitre. Il est à noter également que la base du lit statique est constituée d'un fond rugueux pour éviter d'introduire de l'ordre dans l'empilement granulaire. Le fond rugueux est formé de particules collées de même nature que celles utilisées pour créer l'empilement, à savoir des disques de 3mm d'épaisseur et de 8mm de diamètre. Les particules collées sont séparées les unes des autres avec un écartement aléatoire compris entre 0 et 2mm . La présence d'un fond rugueux ne permet pas de supprimer totalement l'existence de régions localement ordonnées. Nous verrons plus loin que la solution consistant à utiliser un mélange bi-modal de disques permet de supprimer complètement ce problème d'existence de zones ordonnées.

Pour chaque longueur de lit, nous avons réalisé des séries successives d'expériences pour étudier l'influence de la quantité de particules stockée dans le réservoir sur les processus d'érosion et de déposition. Nous avons ainsi fait varier de manière systématique les dimensions du réservoir aussi bien sa longueur Δ_0 (sur une gamme de 80 à 388mm) que sa hauteur R_0 (sur une gamme de 145 à 525mm). Cette gamme de variation nous

a permis notamment de faire varier le rapport d'aspect du réservoir, R_0/Δ_0 , dans une gamme allant de 0,37 à 6,56.

2.2 Caractéristiques des particules utilisées

2.2.1 Taille des particules

Dans ce travail, nous avons utilisé des disques en polystyrène d'épaisseur de 3mm avec deux diamètres différents : 8 et 12mm (voir Fig 2.3). Leur masse est respectivement de $0,15\text{g}$ et $0,35\text{g}$. Comme déjà évoqué plus haut, les deux tailles de particules ont été utilisées dans le but de fabriquer un lit statique à partir d'un mélange bi-modal de petits et de grands disques, ceci pour éviter d'avoir un arrangement granulaire ordonné. Dans toutes les expériences, le lit statique a donc été construit à partir d'un mélange équi-massique de disques de 8 et 12mm . Concernant les particules du réservoir, seules les disques de 8mm ont été utilisées. Le problème d'apparition de régions ordonnées dans le réservoir nous est apparu moins important. En effet, dès que les particules sont libérées du réservoir et se mettent en mouvement, l'agencement initialement ordonné est rapidement effacé par les fluctuations de vitesse engendrées par l'écoulement.

Par ailleurs dans les expériences menées, nous avons eu besoin de distinguer les particules du lit de celles provenant du réservoir dans le but d'étudier les processus d'échanges entre l'avalanche et le lit statique. Les particules étant originellement blanches, nous avons peint en noir les particules utilisées pour former le lit statique. Nous avons cependant constaté que la présence d'une couche de peinture modifiait le coefficient de frottement des disques sur les parois verticales du canal. Nous avons évalué ce coefficient de frottement pour les particules peintes et non-peintes en mesurant l'angle de glissement de ces particules posées à plat sur une plaque de verre. Nous avons trouvé respectivement 0.45 ± 0.01 et 0.68 ± 0.01 . Les particules peintes ont donc un coefficient de frottement nettement plus faible que les particules non-peintes. Pour résoudre ce problème, nous avons décidé de peindre en blanc les particules du réservoir avec le même type de peinture de manière à avoir des coefficients de frottement identique pour les particules noires et blanches.

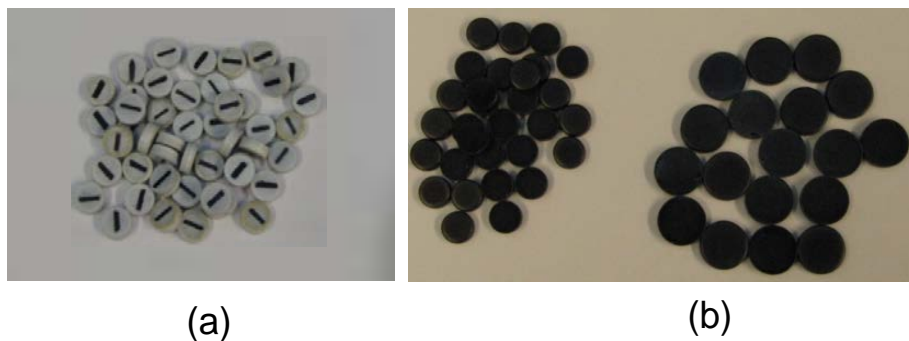


FIGURE 2.3 – Disques en polystyrène utilisés dans les expériences (a) Disques blancs de 8mm marqués avec un trait noir pour le réservoir. (b) Disques noirs de 8mm et de 12mm pour le lit.

2.2.2 Nature des interactions inter-particulaires

Dans un milieu granulaire, la nature des interactions entre les particules joue un rôle important sur les propriétés d'écoulement. En plus des interactions liés aux collisions et au frottement engendré lors de contacts persistant, d'autres types de forces inter-particulaires peuvent apparaître liés d'une part à la condensation de l'humidité de l'air et d'autre part aux phénomènes électrostatiques.

La condensation de la vapeur d'eau présente dans l'air crée une force cohésive supplémentaire. Les variations du taux d'humidité de l'air peuvent donc modifier le comportement du milieu granulaire. Afin de travailler dans les mêmes conditions, toutes nos expériences ont été réalisées dans une salle où l'hygrométrie et la température sont contrôlées avec un déshumidificateur et un climatiseur (50% pour l'humidité et 23° pour la température).

Le second problème lié aux phénomènes électrostatiques est inhérent à l'utilisation de particules isolantes. Elles peuvent se charger par contact avec les autres particules ou avec les plaques de verre. Pour réduire ces effets, les particules avant d'être insérées dans le canal d'écoulement sont passées à travers une grille métallique reliée à la terre afin d'éliminer des charges électriques.

Un troisième problème important est engendré par la présence de poussière. Il s'avère que celle-ci joue un rôle non-négligeable concernant le frottement des disques avec les plaques de verre. Pour éviter une variation du frottement liée à l'accumulation de poussière, il faut nettoyer régulièrement les particules et les plaques de verre.

2.3 Protocole expérimental

2.3.1 Remplissage du canal

La difficulté du remplissage du canal est liée au fait qu'il faut passer les disques entre les 2 plaques de verres. Pour réaliser ce remplissage de manière efficace et rapide, nous avons fabriqué une trémie bi-dimensionnelle démontable et maniable qui permet de faire l'opération de remplissage avec un minimum de manipulation. Cette trémie est constituée de deux plaques de tôle perforée (de dimensions $300mm \times 500mm$) qui se font face et qui sont écartées de $3,5mm$ grâce à la présence d'entre-toises fixées sur les bords latéraux de l'une des plaques. Les deux plaques sont maintenues solidaires grâce à de simples pinces, ce qui permet un démontage rapide du système.

Nous décrivons ci-dessous les différentes étapes de la manipulation permettant le remplissage du canal grâce à cette trémie 2D (voir la figure 2.4) :

1. Désolidariser les deux plaques de la trémie et poser l'une d'entre elles sur un plan horizontal.
2. Disposer les disques à plat sur la plaque de façon à la couvrir entièrement. C'est l'opération la plus fastidieuse car il faut s'assurer que les particules ne se chevauchent pas (figure 2.4b). A la fin de l'opération une barre en plastique est dis-

posée sur le bord inférieur de la plaque. Celle-ci sert à bloquer les grains lorsque la trémie sera disposée verticalement.

3. Refermer l'ensemble en posant la deuxième plaque de la trémie puis la rendre solidaire avec la première avec un système de pinces (Figure 2.4c).
4. Redresser verticalement la trémie puis la disposer sur le bord supérieur des plaques de verre du canal d'écoulement. Cette opération est réalisée lorsque le canal est horizontal et la trémie est positionnée à l'endroit souhaité pour remplir soit le réservoir en amont, soit le lit en aval. Des guides fixés sur la trémie permettent de la positionner de façon précise sur le canal et ainsi de garantir le bon alignement de la trémie (Figure 2.4d).
5. Retirer la barre de blocage pour faire tomber les particules dans le canal (Figure 2.4e) et étaler les particules avec un 'râteau 2D'. Ce râteau est constitué d'une longue règle en plastique de $2m$ de long et de $2mm$ d'épaisseur et s'introduit à partir de l'extrémité inférieure du canal.

Cette opération est répétée 3 à 4 fois pour compléter le remplissage de la partie du canal destinée au lit statique. Pour le remplissage du réservoir, une seule opération est suffisante. Le remplissage du lit statique fait apparaître une difficulté supplémentaire car l'empilement est constitué d'un mélange equi-massique de petits et grands disques. Le mélange est réalisé au préalable dans un récipient 3D (un seau en l'occurrence) avant l'opération de remplissage. C'est donc un mélange qui est mis en place dans la trémie. L'homogénéité du mélange est cependant vérifiée une fois le remplissage complété.

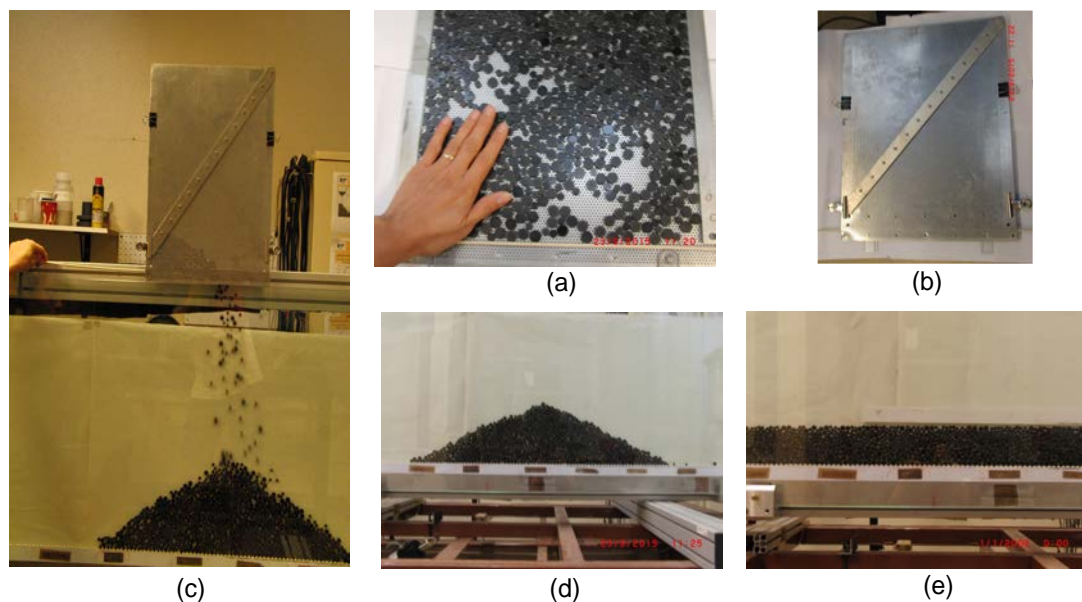


FIGURE 2.4 – Les différentes étapes du remplissage du canal : (a) Remplissage de la trémie 2D, (b) Fermeture de la trémie, (c) Positionnement de la trémie sur le canal, (d) Vidange de la trémie dans le canal, (e) Résultat du remplissage après ratissage et aplanissage.

En utilisant la méthode de préparation décrite ci-dessus, nous obtenons un lit statique bi-disperse avec une fraction surfacique de 0.84. L'empilement dans le réservoir a

une fraction surfacique de 0.92 caractéristique d'un empilement ordonné 2D. Comme déjà mentionné plus haut, le fait d'avoir une assemblée mono-disperse de disques favorise l'apparition de l'ordre.

2.3.2 Déclenchement de l'écoulement

Après avoir rempli le lit et le réservoir, le dispositif est incliné à l'angle souhaité grâce au vérin électrique. La barre bloquant les particules du réservoir est actionnée pour les libérer. Grâce au pivot installé sur la barre, cette opération est réalisée en quelques dixièmes de seconde. Les particules du réservoir se mettent alors à s'écouler sous l'effet de la gravité sur le lit statique. Des processus d'érosion (i.e., les phénomènes de mise en mouvement des particules du lit statique sous l'action de l'écoulement) ou de dépôt (i.e., les phénomènes de piégeage des particules issues du réservoir) prennent place. Selon l'angle d'inclinaison, l'un ou l'autre des processus prévaut : à faible pente, le dépôt prédomine tandis qu'à plus forte pente ce sera l'érosion. Nous verrons qu'il existe un angle critique pour lequel ces deux phénomènes s'équilibrent et que l'on appellera angle neutre (θ_N).

Pour les faibles pentes, il arrive que l'écoulement s'arrête avant la fin du canal. Dans le cas où l'écoulement se maintient jusqu'au bout du canal, les particules qui sortent du dispositif sont recueillies dans un bac de récupération pour être pesées et triées (voir Fig 2.5). Elles sont constituées d'un mélange de particules blanches et noires qui proviennent respectivement du réservoir et du lit statique.

Les particules qui sont restées piégées dans le canal sont également constituées d'un mélange de particules blanches et noires. Elles sont également collectées avant de refaire une nouvelle expérience. Pour cela, il suffit d'ôter la cale de blocage du lit statique et d'augmenter l'angle d'inclinaison du dispositif jusqu'à une valeur de 40° pour qu'elles sortent du canal sous l'effet de la gravité.



FIGURE 2.5 – Récupération des particules à la sortie du canal : (a) Sceau de récupération, (b) Exemple de particules recueillies en sortie constituées d'un mélange de disques blancs et noirs provenant respectivement du réservoir et du lit statique.

2.3.3 Mesures et Analyses

2.3.4 Analyse des particules en sortie du canal

La quantité de particules récupérées en sortie du canal rapportée à la quantité initiale introduite dans le réservoir constituent une information importante dans l'optique de caractériser les processus d'érosion et de déposition. Les particules collectées sont d'une part pesées mais aussi triées selon leur couleur ce qui permet d'estimer la proportion qui proviennent du réservoir et du lit.

La pesée est réalisée avec une balance de marque Weighing Technology qui a une précision $\pm 1g$. Nous appellerons, par la suite, M_f la masse récupérée en sortie du canal. Elle sera comparée à la masse initiale M_0 introduite dans le réservoir.

Le tri est fait de la manière suivante. Les particules récupérées diffèrent d'une part par leur couleur mais par leur taille. Rappelons que les particules du réservoir sont des particules blanches de $8mm$ de diamètre tandis que les particules noires du lit statique sont constituées d'un mélange de disques de $8mm$ et $12mm$. Un premier tri est opéré par la taille en utilisant un tamis avec des mailles carrées de $10mm \times 10mm$. Nous séparons ainsi les petits disques des grands. Ensuite, il faut opérer un tri supplémentaire sur les petits disques qui sont constituées d'une mélange de disques blancs et noirs. Ce tri basé sur la couleur est fait manuellement. Ce travail de tri est un peu fastidieux mais il est essentiel pour estimer précisément la proportion entre les particules provenant du lit et celle provenant du réservoir.

2.3.5 Analyse vidéo de l'écoulement

Un enregistrement vidéo de l'écoulement est effectué systématiquement lors de chaque expérience. Pour cela, nous avons utilisé un appareil photo Casio EXILIM Pro EX-F1 qui permet de prendre des vidéos avec une résolution de 1920×1080 et une vitesse d'acquisition jusqu'à $1200images/s$. Ces vidéos nous ont permis, entre autres, de caractériser la vitesse du front de l'avalanche, la façon dont elle s'étale au cours de sa progression le long du canal mais aussi la profondeur de la couche d'écoulement. Celles-ci n'ont pas permis par contre de faire une analyse détaillée des processus d'érosion et de déposition à l'échelle des particules en raison d'une vitesse d'acquisition et résolution trop faible.

Une analyse locale est néanmoins tout à fait possible en utilisant une caméra rapide qui permettrait un suivi individuel des particules. Ce genre d'analyse n'a pas été effectuée faute de temps mais constitue une perspective importante.

Pour effectuer les vidéos, l'appareil photo Casio EXILIM Pro EX-F1 est fixé sur un pied photo placé à $1,5m$ du châssis du canal d'écoulement comme illustré sur la figure 2.6. Pour obtenir avoir un éclairage de qualité, nous avons utilisé 3 lampes Lupolux Dayled 1000W de puissance ajustable. La position de la caméra nous permet d'avoir une vue de l'ensemble du canal permettant de suivre la totalité du processus d'avalanche.



(a)



(b)

FIGURE 2.6 – (a) Positionnement de l'appareil photo. (b) Lampes utilisées pour l'éclairage.

Chapitre 3

Angle neutre d'un lit granulaire

▷ *Ce chapitre présente des études sur la stabilité d'un lit granulaire sous l'effet d'un écoulement granulaire. Ces études expérimentales et analytiques (en utilisant les modèles mathématiques de BCRE et BDG) permettent d'évaluer la valeur de l'angle neutre du lit en étudiant la relation entre les phénomènes d'érosion et de déposition.* ◁

3.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent le dispositif expérimental et le savoir-faire pour effectuer des études de l'angle neutre. Dans ce chapitre, nous présentons pour un premier temps les études de la stabilité du lit granulaire (angle d'avalanche et angle de repos). Dans un second temps, nous montrons les résultats sur l'angle neutre et nous étudions l'influence de la masse initiale du réservoir, du rapport d'aspect de celui-ci, de la longueur et de la hauteur du lit. Enfin, nous exposons des interprétations sur les résultats obtenus en faisant le lien avec les modèles phénoménologiques de type BCRC et BDG.

3.2 Manipulations

Le dispositif expérimental présenté dans le chapitre précédent est utilisé dans ce travail sur l'angle neutre. Nous rappelons le schéma de principe de ce dispositif à la Figure 3.1 avec plus de détails dans la définition des dimensions du lit et du réservoir. Nous travaillons avec deux longueurs du lit et plusieurs configurations du réservoir (différentes masses, différents rapports d'aspect).

3.2.1 Détermination de l'angle avalanche et de repos

Pour déterminer l'angle avalanche ou l'angle maximum de stabilité θ_M et l'angle de repos θ_R du lit, nous utilisons le dispositif présenté précédemment mais sans le réservoir (qui ne sera utilisé que pour des expériences sur l'angle neutre). Nous mettons le canal à la position horizontale et nous remplissons le lit avec des disques noirs de $8mm$ et $12mm$ (lit bi-disperse avec 50% de masse pour chaque taille de disque) en utilisant le protocole de 5 étapes présenté dans le chapitre précédent. Nous inclinons progressivement le canal avec la vitesse rapide au début et puis la vitesse lente quand l'angle d'inclinaison θ dépasse une vingtaine de degrés (car l'angle d'avalanche de notre empilement granulaire est de l'ordre de 30°) pour monter plus doucement. Dès qu'une avalanche se produit, nous arrêtons immédiatement le moteur de levage. En suite, nous notons la valeur de l'angle θ_M affiché par l'inclinomètre fixé sur le canal. L'angle d'avalanche du lit est l'angle d'inclinaison du canal par rapport à l'horizontale au moment de l'avalanche. Puis nous mesurons l'angle de la surface du lit après l'avalanche qui est l'angle de repos θ_R comme montré dans Figure 3.2. Après l'avalanche, la surface du lit n'est pas lisse, donc on doit appliquer une règle qui suit cette surface et puis on aligne l'inclinomètre avec la règle pour mesurer l'angle de repos θ_R .

3.2.2 Détermination de l'angle neutre

L'expérience destinée à déterminer l'angle neutre doit être effectuée en utilisant le lit et aussi le réservoir (avec une masse initiale de disque de diamètre $8mm$ nommée M_0 et $M_0 = \rho_r \Phi_r R_0 \Delta_0$, où ρ_r et Φ_r sont respectivement la densité de surface des particules et

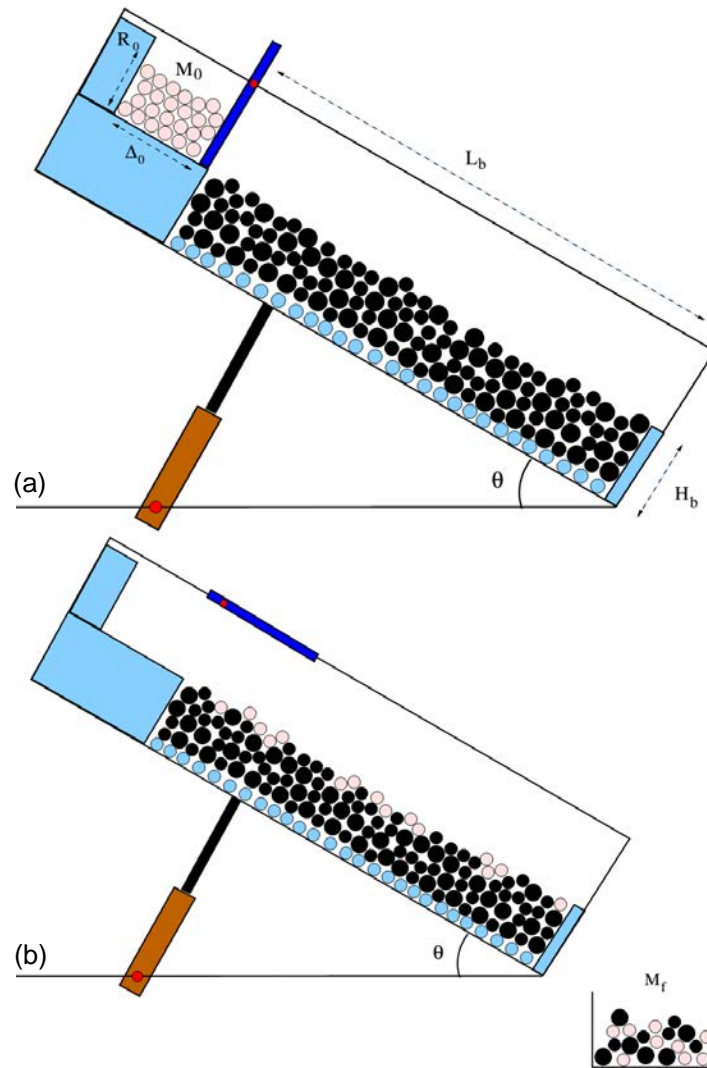


FIGURE 3.1 – Dispositif expérimental détaillé. (a) Configuration initiale avant l’ouverture du tige de blocage du réservoir pour engendrer l’écoulement. (b) Configuration finale après l’écoulement avec les grains sortis récupérés dans le seau.

la fraction surfacique du réservoir). Afin de faire apparaître les phénomènes d’érosion et de déposition, il faut engendrer un écoulement dans le canal grâce au réservoir en amont. Selon la définition de BCRE et BDG, l’angle neutre θ_N est défini comme l’angle d’inclinaison où les deux phénomènes d’érosion et de déposition s’équilibrent localement. C’est-à-dire quand le lit est incliné à l’angle neutre θ_N et si nous ouvrons la trappe du réservoir, nous devons obtenir une masse sortie M_f égale à la masse initiale du réservoir ($M_f = M_0$).

Pour déterminer l’angle neutre θ_N , nous devons remplir en premier temps le réservoir et le lit en utilisant le protocole de remplissage de 5 étapes présenté dans le chapitre précédent. Nous libérons les grains du réservoir en ouvrant la trappe (le tige de blocage) pour engendrer l’écoulement granulaire (Figure 3.3). Enfin, nous recueillons les grains sortis du lit et les pesons. Nous devons réaliser l’expérience ci-dessus avec différents angles d’inclinaison. Pour les petits angles d’inclinaison, la masse recueillie M_f est inférieure à la masse initiale M_0 introduite dans le réservoir (la déposition domine),

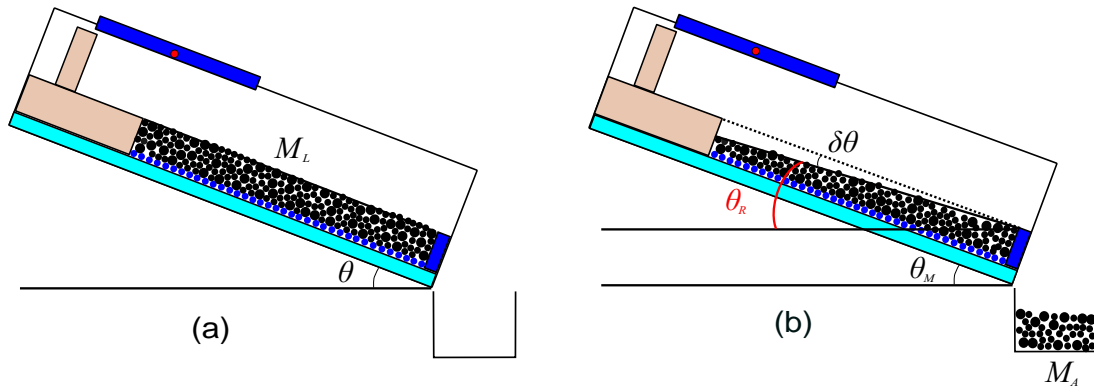


FIGURE 3.2 – Principe de détermination de l'angle avalanche et de repos. (a) Canal avant l'avalanche. (b) Canal après l'avalanche.

tandis que pour les grands angles, c'est l'inverse avec la masse M_f supérieure à la masse M_0 du réservoir (l'érosion domine). Il existe donc un angle critique pour lequel $M_f = M_0$: c'est l'angle neutre θ_N du lit associé au réservoir car en changeant le réservoir (la masse ou la géométrie), la valeur de l'angle neutre va aussi changer.

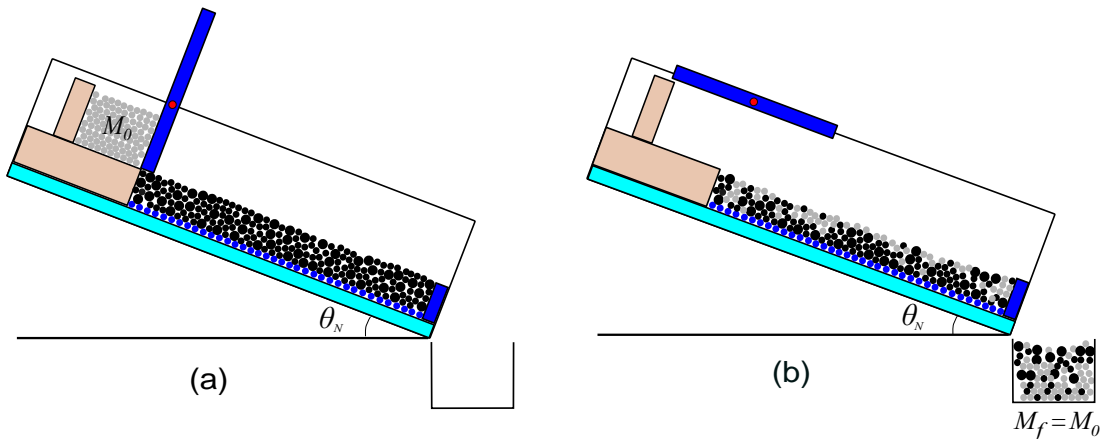


FIGURE 3.3 – Principe de détermination de l'angle neutre. (a) Canal avant l'ouverture de la trappe du réservoir. (b) Canal après l'ouverture de la trappe du réservoir.

3.2.3 Liste des expériences effectuées

Nous réalisons deux groupes d'expériences : l'une pour mesurer l'angle d'avalanche et de repos, l'autre pour déterminer l'angle neutre. Pour les expériences sur l'angle d'avalanche et de repos, nous avons utilisé deux longueurs de lit. Pour les expériences sur l'angle neutre, nous ré-utilisons aussi ces deux longueurs de lit. Par contre, nous avons besoin de plus d'expériences car il faut étudier l'influence de paramètres supplémentaires sur l'angle neutre (par exemple la masse M_0 et le rapport d'aspect R_0/Δ_0 du réservoir). Les expériences ont été regroupées en séries. Une série correspond aux expériences réalisées dans les mêmes conditions (même dimensions du lit et du réservoir). Pour chaque série, nous répétons au moins 5 fois la même expérience (voir Tableau 3.1).

Série	L_b (mm)	H_b (mm)	M_b (g)	M_0 (g)	R_0 (mm)	Δ_0 (mm)	R_0/Δ_0	$M_0/R_0\Delta_0$ (g/cm ²)
N°1	1700	74	360	55	145	145	1	0.26
N°2	1700	74	360	110	155	272	0.57	
N°3	1700	74	360	110	205	205	1	
N°4	1700	74	360	110	300	140	2.14	
N°5	1700	74	360	110	371	113	3.28	
N°6	1700	74	360	110	525	80	6.56	
N°7	1700	74	360	220	218	383	0.57	
N°8	1700	74	360	220	289	289	1	
N°9	1700	74	360	220	423	198	2.14	
N°10	1700	74	360	220	522	159	3.28	
N°11	1700	74	360	300	338	338	1	
N°12	850	74	180	110	155	272	0.57	
N°13	850	74	180	110	205	205	1	

TABLE 3.1 – Liste des séries d’expériences effectuées pour étudier l’angle neutre. Les notations sont celles de la Figure 3.1. La densité surfacique (g/cm²) de pastilles de diamètre de 8mm (0,15g) et de 12mm (0,35g) est de 0,3. Donc, le coefficient de remplissage ou la fraction surfacique du réservoir est de 0,87 (0,26/0,3).

3.3 Résultats expérimentaux

Nous allons présenter dans cette section les résultats expérimentaux obtenus sur la stabilité de l’empilement (l’angle avalanche et de repos), la dépendance de l’angle neutre aux paramètres comme la masse initiale du réservoir M_0 , le rapport d’aspect du réservoir R_0/Δ_0 et la longueur du lit L_b . Pour éviter des perturbations liées à l’humidité et à la température, nous effectuons toutes les expériences dans les mêmes conditions. Pour cela, nous utilisons un humidificateur et un climatiseur afin de fixer l’humidité à 50% et la température à 23° dans la salle de manipulation.

3.3.1 Stabilité du lit

La stabilité du lit est caractérisée par les angles d’avalanche et de repos. L’angle avalanche θ_M est défini comme l’angle d’inclinaison maximal où le lit est encore stable (voir le Tableau 3.2). Pour deux lits de différentes longueurs, l’angle avalanche est plus grand pour le petit lit ($L_b = 850mm$) que pour le grand lit ($L_b = 1700mm$) : 32.2° contre 31.4°. Ce résultat est en accord avec les travaux de Kiesgen de Richter et al. (2009) [7] ce qui montre que θ_M augmente en diminuant la longueur du lit à cause de l’effet de confinement. La masse reçue après l’avalanche est égal à environ 30% de la masse du lit. Et sa composition est d’environ 40% de petites particules (8mm) et 60% de grandes particules (12mm). Elle est différente de la composition de masse du lit avant la expérience où nous avons mis 50% de petites particules et 50% des grandes particules. La modification de cette composition est due au phénomène de ségrégation.

Pendant l'avalanche, les petites particules plongent dans le lit et poussent les grandes particules vers la surface. Ce phénomène explique pourquoi il y a moins de petites particules que de grandes particules reçues dans le seau par rapport à ce qu'il y avait dans le lit.

Observations	Grand lit	Petit lit
	($L_b = 1700mm$)	($L_b = 850mm$)
Masse du lit	360g	180g
Masse avalanche	$117.7 \pm 24.7g$	$52.4 \pm 13.3g$
Angle avalanche	$31.4^\circ \pm 0.4^\circ$	$32.2^\circ \pm 0.8^\circ$
Angle de repos	$27.5^\circ \pm 0.5^\circ$	$28.2^\circ \pm 0.2^\circ$
Composition de particules dans la masse avalanche		
Petites particules	$39.7 \pm 2.3\%$	$42.2 \pm 2.3\%$
Grandes particules	$60.3 \pm 2.5\%$	$57.8 \pm 2.5\%$

TABLE 3.2 – Angle avalanche, angle de repos et composition de la masse avalanche.

Nous avons également mesuré l'angle de repos θ_R , qui est l'angle d'inclinaison de la surface du lit après l'avalanche. Les valeurs obtenues montrent que l'angle de repos sont aussi plus grandes pour le petit lit que pour le grand lit : 28.2° contre 27.5° parce que le lit est plus stable quand sa longueur est plus petite.

La différence entre l'angle maximum de stabilité et l'angle de repos est proportionnelle à la masse d'avalanche M_A (Tableau 3.2) : $M_A = \rho_L \Phi_L L_b^2 (\theta_M - \theta_R)$ où ρ_s et Φ_s sont respectivement la densité de surface des particules et la fraction surfacique du lit granulaire.

3.3.2 Angle neutre du lit

Pour mesurer l'angle neutre, nous devons effectuer des expériences d'écoulement à plusieurs angles d'inclinaison θ . Pour faciliter l'interprétation des résultats, nous définissons le rapport $(M_f - M_0)/M_0$ comme l'efficacité d'érosion E : $E = (M_f - M_0)/M_0 = M_f/M_0 - 1$. La Figure 3.4 montre la variation de l'efficacité d'érosion E en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour le grand lit avec une masse initiale $M_0 = 110g$ et un rapport d'aspect $R_0/\Delta_0 = 1$. Nous observons que l'efficacité d'érosion varie linéairement en fonction de l'angle d'inclinaison θ .

$$E = \frac{M_f - M_0}{M_0} = M_f/M_0 - 1 = e(\theta - \theta_N) \quad (3.1)$$

Ici nous définissons $e = dE/d\theta$ comme le coefficient d'érosion et il correspond à la pente de la régression linéaire de l'efficacité d'érosion E en fonction de l'angle d'inclinaison θ . Et θ_N est l'angle neutre, c'est l'angle pour lequel l'efficacité d'érosion E est neutralisée ($E = 0$, et $M_f = M_0$). Les deux paramètres sont déterminés par la régression linéaire. Il est important de noter que la valeur de l'angle neutre θ_N est située entre celle de l'angle de repos θ_R et celle de l'angle avalanche θ_M .

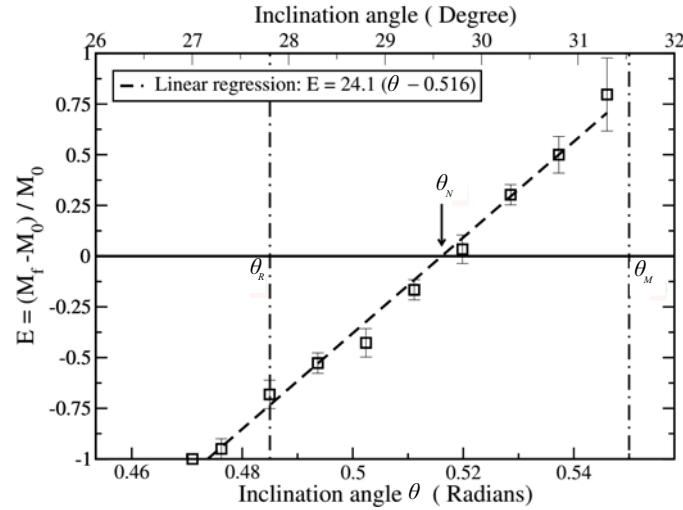


FIGURE 3.4 – Efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour le grand lit ($L_b = 1700\text{mm}$) avec $M_0 = 110\text{g}$ et $R_0 = \Delta_0 = 205\text{mm}$ ($R_0/\Delta_0 = 1$).

Une question qui se pose est de savoir si l'angle neutre θ_N et le coefficient d'érosion e dépendent ou pas des caractéristiques du réservoir comme sa masse initiale M_0 et sa géométrie (par exemple, rapport d'aspect R_0/Δ_0). Pour cela, nous étudions l'angle neutre en variant systématiquement à la fois la masse et le rapport d'aspect du réservoir. La Figure 3.5a montre l'évolution de l'efficacité d'érosion E en fonction de la masse M_0 avec un rapport d'aspect fixé, et la Figure 3.5b montre comment E varie en fonction du rapport aspect avec une masse M_0 fixée. Nous observons que l'angle neutre θ_N et le coefficient d'érosion e diminuent quand de la masse M_0 augmente. L'angle neutre θ_N est très sensible au rapport d'aspect, par contre e est presque invariant par rapport au celui-ci. Ceci explique pourquoi les droites de régression de l'efficacité d'érosion E tournent vers l'axe horizontal quand M_0 varie, et en revanche elles restent parallèles quand R_0/Δ_0 varie. De plus, nous observons aussi dans la Figure 3.5 que l'angle neutre θ_N varie largement en fonction de M_0 et R_0/Δ_0 . Nous allons détailler par la suite la dépendance paramétrique de l'angle neutre θ_N et du coefficient d'érosion e aux paramètres étudiés (M_0 et R_0/Δ_0).

3.3.3 Dépendances de l'angle neutre

La dépendance de l'angle neutre aux deux paramètres M_0 et R_0/Δ_0 est présentée dans la Figure 3.6. Nous observons que l'angle neutre θ_N diminue quand la masse initiale et le rapport d'aspect augmentent en restant toujours dans la gamme limitée par l'angle de repos et l'angle d'avalanche $\theta_R < \theta_N < \theta_M$. Ce résultat est cohérent par rapport aux études d'effondrement d'une colonne granulaire où la forme et la largeur de dépôt sont fortement lié au rapport d'aspect.

Il est à noter que la masse initiale M_0 est proportionnelle à la superficie du réservoir $R_0\Delta_0$ selon la formule : $M_0 = \rho_s\Phi_s R_0\Delta_0$ où ρ_s et Φ_s sont respectivement la densité de surface des particules et la fraction surfacique du lit granulaire. Selon nos résultats

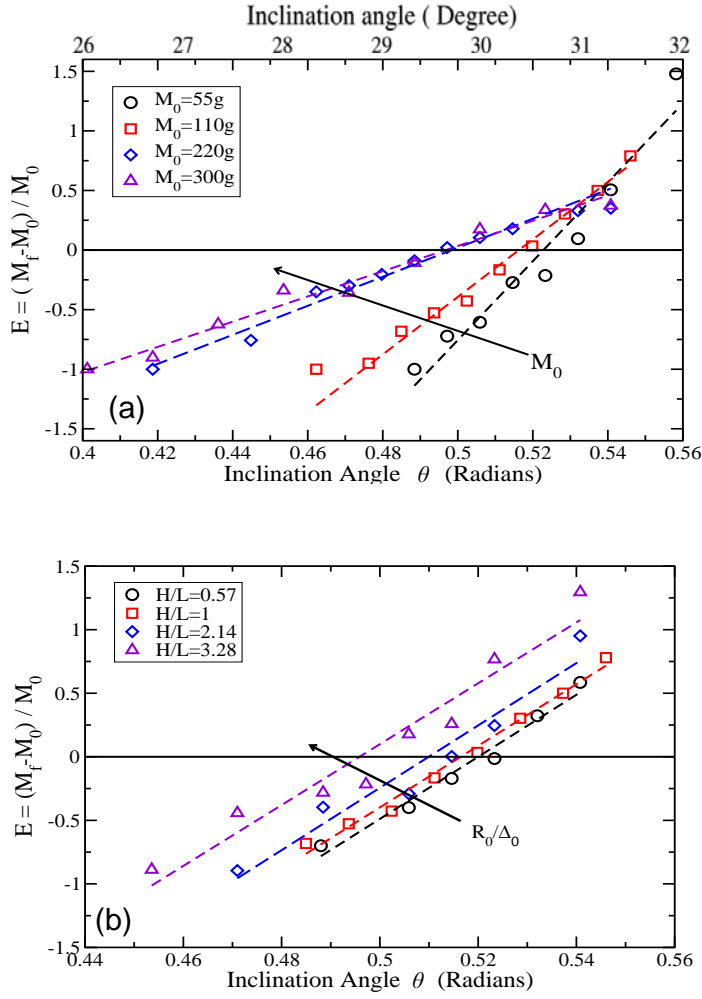


FIGURE 3.5 – Dépendance de l'efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour le grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) $M_0 = 55, 110, 220, 300g$ et $R_0/\Delta_0 = 1$. (b) $M_0 = 110g$ et $R_0/\Delta_0 = 0.57, 1, 2.14, 3.28$.

expérimentaux, l'angle neutre dépend à la fois de M_0 et R_0/Δ_0 . Il peut être approché avec une fonction de la forme suivante :

$$\tan \theta_N = \tan \theta_R + \frac{\tan \theta_M - \tan \theta_R}{1 + \frac{R_0 \Delta_0}{d^2 (\frac{a}{R_0/\Delta_0} + b)}} = \tan \theta_R + \frac{\tan \theta_M - \tan \theta_R}{1 + \frac{(R_0 \Delta_0)(R_0/\Delta_0)}{d^2 (a + b(R_0/\Delta_0))}} \quad (3.2)$$

avec $d = 8mm$ (diamètre de grain), $a = 625$ et $b = 6$. La forme ci-dessus a été choisie de façon à ce que θ_N tende vers θ_M quand nous n'avons pas de réservoir ($M_0 = 0$ et $R_0/\Delta_0 = 0$), et que θ_N tende vers θ_R quand nous utilisons un très grand réservoir. Selon la formule proposée, pour un grand rapport d'aspect (en fixant M_0), l'angle neutre diminue jusqu'à une valeur asymptotique qui varie en fonction de M_0 : $\theta_N^\infty = \tan \theta_R + bd^2(\tan \theta_M - \tan \theta_R)/(bd^2 + R_0 \Delta_0)$. La Figure 3.6 montre un très bon accord entre les courbes théoriques (en pointillées) obtenues avec l'équation (3.2) et des points de mesure (en marques rond, rectangulaire, diamond et triangle). Ces courbes pointillées sont tracées avec différentes valeurs du rapport d'aspect R_0/Δ_0 et de la masse M_0 (par

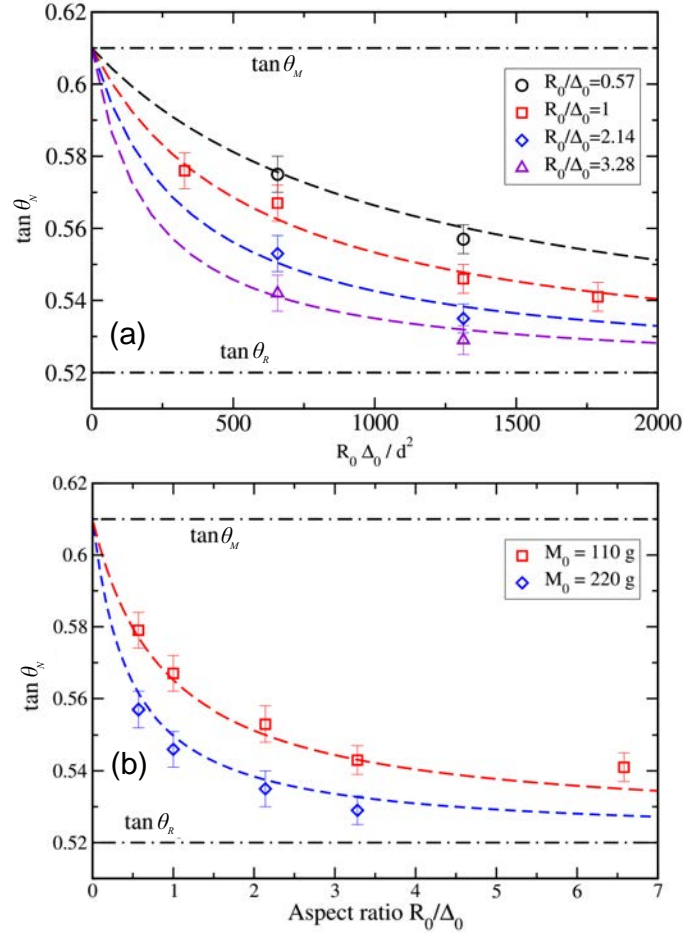


FIGURE 3.6 – Dépendance de l’angle neutre en fonction de la masse initiale M_0 ($\propto R_0 \Delta_0$) et du rapport d’aspect R_0/Δ_0 pour le grand lit ($L_b = 1700\text{mm}$). (a) $\tan \theta_N$ selon $R_0 \Delta_0$ (ou M_0) pour différents rapports d’aspect R_0/Δ_0 . (b) $\tan \theta_N$ selon le rapport d’aspect R_0/Δ_0 pour différentes valeurs de M_0 .

l’équivalence de $R_0 \Delta_0$). Et elles restent bien dans la limite supérieure θ_M et inférieure θ_R décrite selon l’équation (3.2).

Pour des petits rapports d’aspect, nous avons $\frac{a}{R_0/\Delta_0} \gg b$. Donc l’équation (3.2) peut être présentée sous une forme simplifiée comme la suivante :

$$\tan \theta_N = \tan \theta_R + \frac{\tan \theta_M - \tan \theta_R}{1 + \frac{R_0}{ad^2}} = \tan \theta_R + \frac{\tan \theta_M - \tan \theta_R}{1 + \left(\frac{R_0}{25d}\right)^2} \quad (3.3)$$

Finalement, on voit que l’angle neutre θ_N dépend uniquement de la hauteur du réservoir R_0 pour des rapports d’aspect (R_0/Δ_0) ne sont pas trop élevés (voir Figure 3.7).

3.3.4 Dépendances du coefficient d’érosion

La Figure 3.8 montre la dépendance du coefficient d’érosion e en fonction de la masse initiale M_0 et le rapport d’aspect R_0/Δ_0 . Nous observons que le coefficient d’érosion e est indépendant du rapport d’aspect R_0/Δ_0 . Par contre, il est fortement dépendant de la masse initiale M_0 . Le coefficient d’érosion e diminue en fonction de la masse M_0

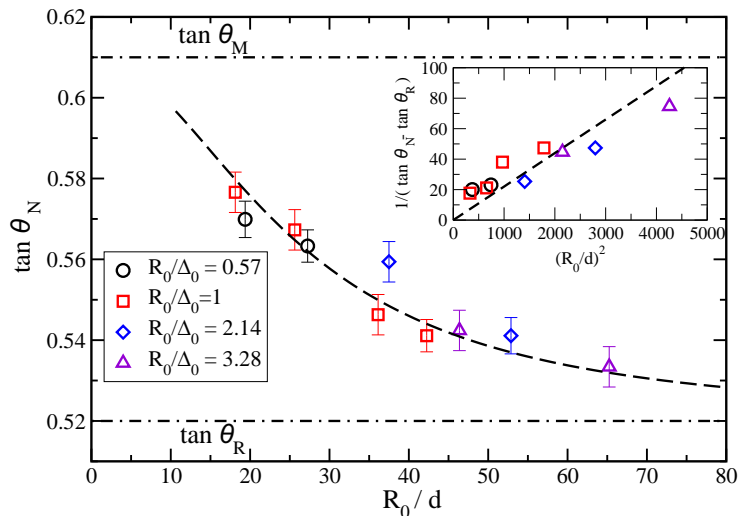


FIGURE 3.7 – Dépendance de l'angle neutre en fonction de la hauteur normalisée du réservoir (R_0/d). La courbe de tendance est obtenue selon l'équation 3.3.

et cette diminution est bien représentée par une fonction proportionnelle à $1/M_0$ selon l'équation (3.4).

$$e \propto \frac{1}{M_0} \propto \frac{1}{R_0 \Delta_0} \quad (3.4)$$

3.3.5 Influence de la longueur du lit

Nous avons effectué des expériences supplémentaires (ensembles des séries $N^\circ 12$ et $N^\circ 13$) avec un lit de longueur courte $L_b = 850\text{mm}$ (contre $L_b = 1700\text{mm}$ pour des séries de $N^\circ 1$ à $N^\circ 11$). Pour des conditions identiques de masse initiale et de rapport d'aspect du réservoir, les résultats obtenus montrent que l'angle neutre θ_N n'est pas dépendant de la longueur du lit (voir Figure 3.9).

A titre d'exemple pour $M_0 = 110\text{g}$ et $R_0/\Delta_0 = 1$, l'angle neutre θ_N est égal à 29.5° pour le petit lit contre 29.6° pour le grand lit. En revanche, le coefficient d'érosion e présente une forte diminution en fonction de la longueur du lit. Les résultats expérimentaux pour le lit court et le lit long sont compatibles avec la relation suivante entre e et L_b :

$$e \approx 66 \frac{dL_b}{R_0 \Delta_0} \quad (3.5)$$

Nous allons montrer par la suite que cette loi est obtenue en utilisant le modèle d'érosion et de déposition proposée par BDG.

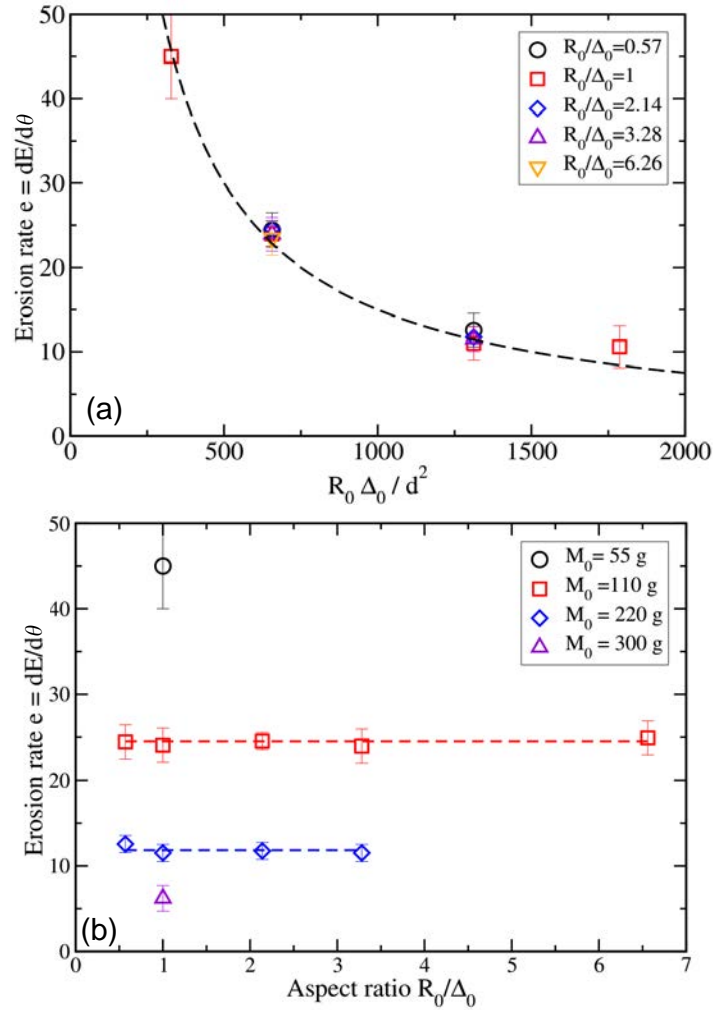


FIGURE 3.8 – Dépendance du coefficient d'érosion $e = dE/d\theta$ en fonction de la masse initiale M_0 et le rapport d'aspect R_0/Δ_0 pour le grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) e en fonction de M_0 pour différents rapports d'aspect. (b) e en fonction de R_0/Δ_0 pour différentes masses M_0 . La courbe de tendance est obtenue selon l'équation (3.4).

3.3.6 Influence de la hauteur du lit

Nous avons observé que la longueur du lit a une influence importante sur la valeur de l'angle neutre. La question qui se pose ici est le rôle de la hauteur du lit? Est-elle également importante? Pour cela, nous avons fait des mesures avec une épaisseur du lit plus importante (lit épais : $H_b = 126mm$) que dans les études précédentes (lit fin : $H_b = 84mm$) comme présentée dans le Tableau 3.3.

Nous observons que l'augmentation de l'épaisseur du lit a non seulement changé largement l'angle d'avalanche et la masse d'avalanche, mais aussi changé de façon significative l'angle neutre et le coefficient d'érosion. Une seule étude n'est pas suffisante pour clarifier le rôle de la hauteur du lit, il faut plus d'expériences pour tirer la conclusion. Par contre, ce n'est pas un paramètre essentiel du système et nous n'avons pensé à ce paramètre que pendant la rédaction du manuscrit donc nous n'avons pas assez du temps pour compléter des nouvelles expériences sur ce point.

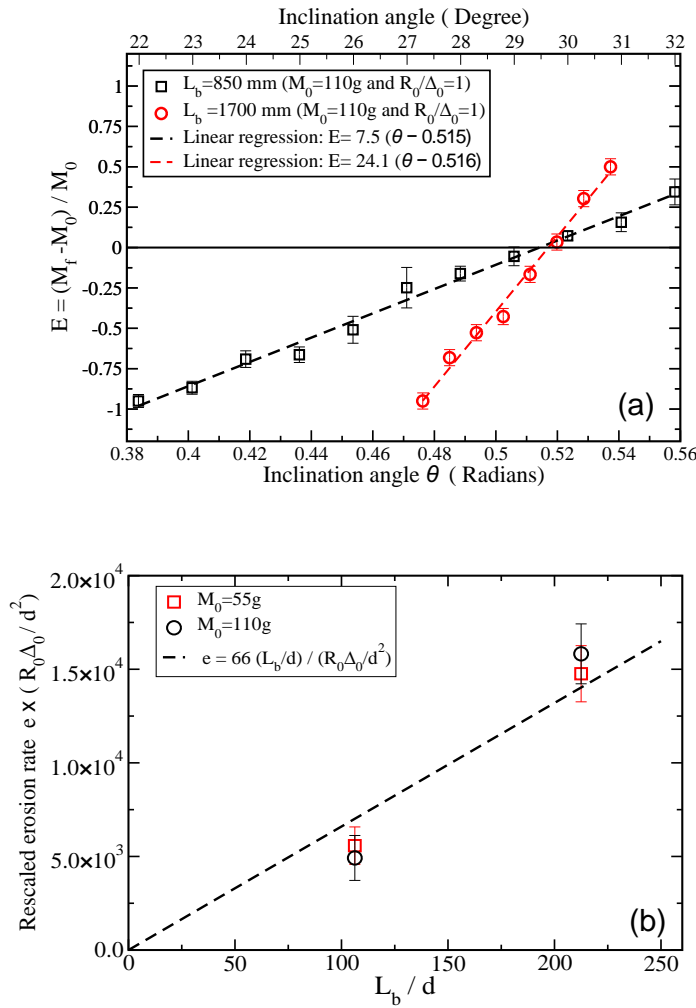


FIGURE 3.9 – Dépendance de l'efficacité d'érosion $E = (M_f - M_0)/M_0$ et du coefficient d'érosion $e = dE/d\theta$ en fonction de la longueur du lit. (a) Efficacité d'érosion E en fonction de θ obtenue avec le petit lit et le grand lit. (b) Coefficient d'érosion e en fonction de la longueur du lit normalisée L_b/d avec $d = 8\text{mm}$.

3.3.7 Proportion de particules du réservoir dans la masse sortie

Pour toutes les expériences, nous avons analysé la composition des particules dans la masse sortie M_f . Il est en effet intéressant de déterminer la proportion des particules qui vient du réservoir par rapport à celles provenant du lit. Cette proportion fournit des informations concernant les particules du réservoir qui peuvent être piégées par le lit. Nous présentons dans la Figure 3.10 la proportion massive des particules du réservoir qui sortent du canal en fonction de l'angle d'inclinaison θ pour différentes masses initiales M_0 et rapports d'aspect R_0/Δ_0 .

La première remarque est que la proportion des particules du réservoir ne dépend que faiblement de l'angle d'inclinaison θ (sauf pour une petite masse initiale M_0). Cette proportion augmente en fonction de la masse initiale M_0 de 20% pour $M_0 = 55\text{g}$ à 80% pour $M_0 = 300\text{g}$, mais elle est indépendante du rapport d'aspect du réservoir. Nous observons dans le Tableau 3.4 que la masse des particules noires érodée par le réservoir

Observations	Lit fin	Lit épais
	($H_b = 84mm$)	($H_b = 126mm$)
Longueur du lit	1700mm	
Masse du lit	360g	540g
Masse avalanche	$117.7 \pm 24.7g$	$175.3 \pm 20.2g$
Angle avalanche	$31.4^\circ \pm 0.4^\circ$	$31.1^\circ \pm 0.2^\circ$
Angle de repos	$27.5^\circ \pm 0.5^\circ$	$27.3^\circ \pm 0.3^\circ$
Masse du réservoir	110g	
Rapport d'aspect	1	
Angle neutre	29.6°	28.9°
Coefficient d'érosion	0.412	0.453

TABLE 3.3 – Angle neutre et coefficient d'érosion pour différentes hauteurs du lit ($H_b = 84mm$ et $H_b = 126mm$).

tends vers la valeur de la masse avalanche du lit. Cette observation nous aide à bien expliquer l'augmentation de la proportion massive des particules blanches du réservoir dans la masse sortie quand nous augmentons la masse M_0 du réservoir.

Masse M_0	55g	110g	220g	300g
Masse érodée	$97.6 \pm 10.1g$	$113.4 \pm 9.2g$	$116.7 \pm 11.4g$	$116.7 \pm 12.7g$
Masse avalanche	$117.7 \pm 24.7g$			
Longueur du lit	1700mm			

TABLE 3.4 – Masse des particules noires érodées à partir du lit en fonction de la masse du réservoir M_0 à l'angle d'inclinaison maximale de 31° et avec $H/L = 1$.

La deuxième remarque est que la proportion des particules noires du réservoir qui sortent du canal est également proportionnelle à l'augmentation de la longueur du lit (voir Figure 3.11). La proportion des particules du réservoir est dépendante de M_0 et la longueur L_b et elle est décrite par la loi de relaxation exponentielle présenté dans l'équation (3.6). En effet, plus le lit est long, plus la ségrégation apparaît. Et nous avons plus de grandes particules provenant du lit qui sortent dans le seau mis à la fin du canal. Cela explique pour quoi la proportion massive du réservoir est en baisse quand nous augmentons la longueur du lit.

$$P \approx 1 - \exp\left(-\frac{M_0}{M_c}\right) \quad (3.6)$$

avec $M_c = 5\rho_L\Phi_L dL_b$ est la masse M_c est la masse caractéristique du réservoir où la probabilité pour qu'on puisse capter des particules venants du réservoir est inférieur à $1/e \approx 0,3678$ ($e \approx 2,71828$ est le nombre exponentiel).

3.4 Comparaisons avec les études antérieures

Les résultats obtenus avec une configuration 2D dans notre cas présentent une dépendance linéaire du ratio d'érosion par rapport à l'angle d'inclinaison. De plus, nous

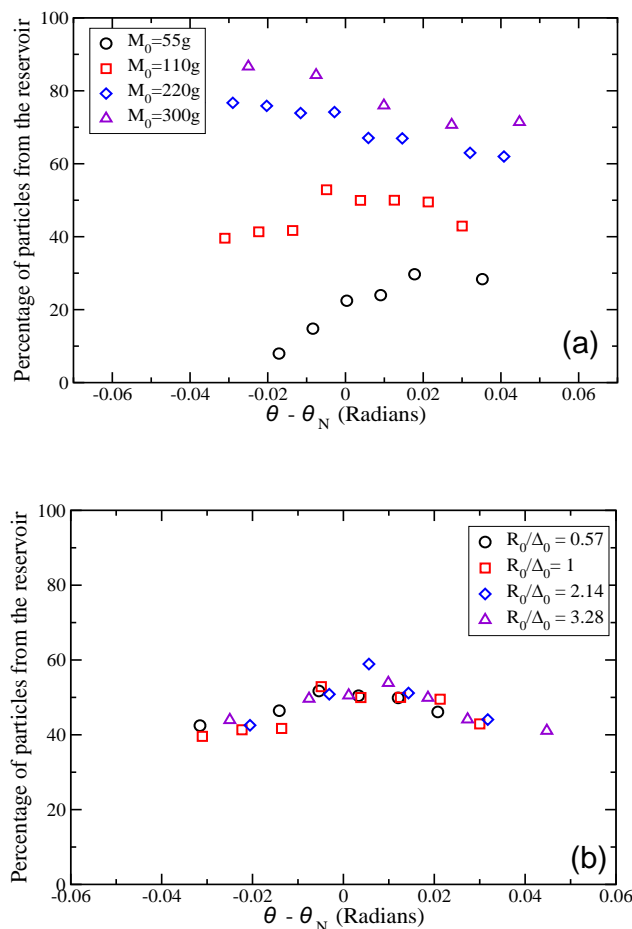


FIGURE 3.10 – Dépendance de proportion des particules du réservoir dans la masse sortie dans le cas de grand lit ($L_b = 1700mm$). (a) Pour un rapport d'aspect constant ($R_0/\Delta_0 = 1$) et différentes masses M_0 . (b) Pour une masse initiale constante $M_0 = 110g$ et différents rapports d'aspect.

avons observé que l'angle neutre dépend fortement de la masse initiale du réservoir M_0 et du rapport d'aspect R_0/Δ_0 . Ces résultats sont bien cohérents avec les études antérieures pour des configurations 3D (Bideau et al. (2001) [16], Mint Babah (2010) [17]) et aussi 2D (Ould Ahmedou (2005) [18]).

Le Tableau 3.5 résume et compare des résultats sur les études de l'angle neutre. La différence entre des valeurs de l'angle neutre obtenues pour chaque étude est liée à la configuration (2D vs. 3D), taille et forme de grain utilisées, dimension et masse du lit, du réservoir, etc. Il est intéressant ici de tirer la comparaison entre des études d'Ould Ahmedou (2005) et notre travail dans cette thèse (deux dernières colonnes n° 3 et 4 du tableau). Les deux résultats sont très proches car ils sont tous les deux des études en 2D avec même dispositif expérimental et le même type de grain. Le petit écart dans l'angle d'avalanche et l'angle neutre entre ces deux études est lié à la différence dans les dimensions du lit de du réservoir utilisés.

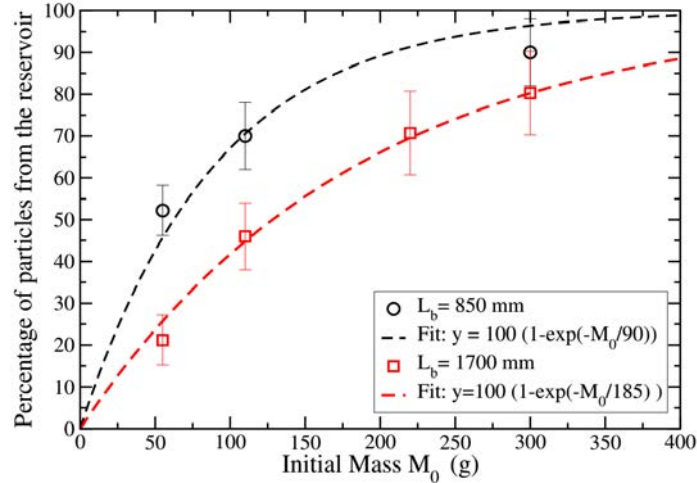


FIGURE 3.11 – Proportion moyenne des particules du réservoir dans la masse sortie en fonction de la masse initiale M_0 pour le petit lit ($L_b = 850mm$) et le grand lit ($L_b = 1700mm$).

Travaux	Bideau et al.	Mint Babah	Ould Ahmedou	Trinh
Configuration	3D	3D	2D	2D
Lit (cm ³ ou cm ²)	32 x 26 x 3,5	87 x 22 x 7	200 x 8,4	170 x 8,4
Masse du lit	4,6kg	15,9kg	370g	360g
Réservoir (cm ²)	-	-	-	14,2 x 14,2
Rapport d'aspect	-	1	-	1
Masse du réservoir	2,3kg	2,6kg	110g	110g
Angle θ_M (°)	25.8	27.9	31.2	31.4
Angle θ_R (°)	19.6	24.6	-	27.5
Angle θ_N (°)	21.0	25.1	29.2	29.6
Coefficient e (1/°)	0.31	1.46	0.49	0.37

TABLE 3.5 – Comparaison des travaux sur l'angle neutre.

3.5 Interprétations et discussions

Les résultats expérimentaux ont montré qu'il est possible de définir un angle neutre où l'érosion et la déposition s'équilibrent sur un lit de longueur finie. L'angle neutre défini de cette manière (globale) est indépendant de la longueur du lit et dépend fortement de la masse initiale du réservoir M_0 et du rapport d'aspect R_0/Δ_0 . Des questions importantes se posent : existe-il un angle neutre local comme dans les modèles BCRES et BDG ? Et est-il confondu ou relié à l'angle neutre global ? Quelles sont les dépendances paramétriques de cet angle neutre local ? Est-il dépendant de paramètres locaux (comme la hauteur locale R de la phase mobile), ou du processus d'avalanche ?

Nous ne disposons pas de réponse pour ces questions où une analyse locale des processus d'érosion et de déposition serait nécessaire. Notre but ici est de comparer les données expérimentales avec les prédictions des modèles BCRES et BDG. Ces modèles supposent l'existence d'un angle neutre local qui est indépendant des caractéristiques de

la phase mobile. Avec cette hypothèse, l'angle neutre local et global sont identiques et sont considérés comme des quantités invariantes. Ce phénomène n'est pas exactement ce qu'on observe dans les expériences, mais on peut utiliser cette hypothèse pour résoudre des équations BCRE et BDG et comparer les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux, ce qui peut contribuer comme un sorte de test du modèle.

3.5.1 Modèle BCRE

Nous avons vu dans le chapitre l'état de l'art que l'évolution de l'épaisseur de la partie roulante est gouvernée par une équation convection-diffusion selon BCRE [31], [32] :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_d \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \gamma R \Delta \theta \quad (3.7)$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, nous devons aussi préciser les conditions initiales. Au moment $t = 0$ (quand les particules sont libérées à partir du réservoir), la surface du lit statique a une pente uniforme connue de cette forme : $h(x, t = 0) = -(x - L_b) \tan \theta$, où x désigne la position du point d'observation. Nous supposons aussi que la couche mobile ne se compose que des particules du réservoir et forme une couche de l'épaisseur R_0 et de largeur Δ_0 au moment $t = 0$. De plus, la pente de l'interface entre les deux phases statique et mobile est aussi supposée uniforme et constante $\partial h / \partial x = -\tan \theta$. Toutes les étapes pour résoudre l'équation de convection-diffusion (3.7) sont détaillées dans l'annexe B à la fin du manuscrit, ici nous ne discutons que sur la solution obtenue.

Pour mieux comprendre le processus de l'étalement une fois les particules sont lâchées, nous traçons l'évolution du profil de particules mobiles dans la figure 3.12. Nous observons que les particules en mobilité se forment assez rapidement des profils de type quasi-gaussien après l'ouverture de la trappe du réservoir. Pour cette raison, nous pouvons tirer une solution approchée de l'équation de convection-diffusion BCRE sous la forme d'une fonction gaussienne :

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x - v_d t)^2}{4 D t}} e^{\gamma \Delta \theta t} \quad (3.8)$$

où $\Delta \theta = \theta - \theta_N$

Pour simplifier cette formulation afin de faciliter le calcul de la masse sortie M_f , nous proposons d'approcher la fonction gaussienne par une fonction rectangulaire qui représente correctement la solution de l'équation BCRE. La nouvelle solution approchée est présentée dans l'équation (3.9) ci-dessous.

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{\Delta(t)} \square \left(\frac{x - v t}{2 \Delta(t)} \right) e^{\gamma \Delta \theta t} \quad (3.9)$$

avec $\Delta(t) = \Delta_0 + 2\sqrt{D t}$, $\square(x)$ est la fonction rectangulaire : $\square(x) = 1$, si $x \in [-1/2; 1/2]$ et $\square(x) = 0$, si $x \notin [-1/2; 1/2]$.

La masse sortie M_f est collectée au bout du lit. Donc le débit massif est proportionnel à l'épaisseur de la couche mobile à la fin du lit ($x = L_b$) : $dM_f \propto R(x = L_b, t) v_d dt$.

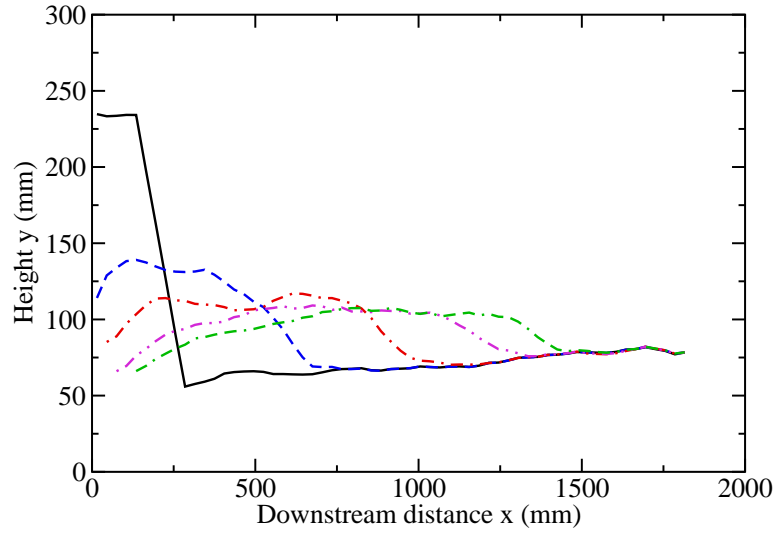


FIGURE 3.12 – Avancement des particules mobiles de tous les 0.4s après l’ouverture de la trappe du réservoir pour l’expérience avec $M_0 = 110g$ et $\theta = 30^\circ$. La courbe solide est le profil initial, et les courbes discontinues sont les avancements. Après un court instant depuis l’ouverture de la trappe du réservoir, les particules avancent avec une vitesse constante.

La masse M_f est obtenue en sommant les contributions élémentaires de masse dM_f :

$$M_f \propto \int_0^{+\infty} dM_f = \int_0^{+\infty} R(x = L_b, t) v_d dt \quad (3.10)$$

En utilisant la solution approchée de l’équation BCRE (3.9), nous pouvons simplifier l’intégration de M_f :

$$M_f \propto v_d \int_{t_i}^{t_f} \frac{R_0 \Delta_0}{\Delta_0 + 2\sqrt{DL_b/v_d}} e^{\gamma \Delta \theta t} dt \quad (3.11)$$

où t_i est le moment où le front de l’écoulement arrive à l’extrémité du lit (les grains commencent à sortir le lit) et t_f est le moment où l’arrière de l’écoulement quitte l’extrémité du lit (les grains s’arrêtent de sortir le lit).

$$t_i = \frac{L_b}{v_d} - \left(\frac{\Delta_0}{2v_d} + \frac{\sqrt{DL_b/v_d}}{v_d} \right) \quad (3.12)$$

$$t_f = \frac{L_b}{v_d} + \left(\frac{\Delta_0}{2v_d} + \frac{\sqrt{DL_b/v_d}}{v_d} \right) \quad (3.13)$$

En notant que la masse initiale est proportionnelle à la superficie du réservoir : $M_0 \propto R_0 \Delta_0$, nous obtenons finalement l’efficacité d’érosion E selon le modèle BCRE :

$$E = \frac{M_f - M_0}{M_0} = \frac{M_f}{M_0} - 1 = \frac{\sinh \left[\left(\frac{\Delta_0}{2v_d} + \frac{\sqrt{DL_b/v_d}}{v_d} \right) \gamma \Delta \theta \right]}{(\Delta_0 + 2\sqrt{DL_b/v_d}) \gamma \Delta \theta} e^{L_b \gamma \Delta \theta} - 1 \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) montre que l'efficacité d'érosion E calculé avec le modèle BCRE est une fonction non-linéaire relativement à l'angle d'inclinaison θ , elle contient une fonction sinus-hyperbolique et une fonction exponentielle avec l'argument est égale à $(L_b/d)\Delta\theta$ (en assumant que $v_d \approx \sqrt{gd}$, $\gamma \approx \sqrt{g/d}$). Pour estimer grossièrement la valeur exponentielle, il faut noter que $L_b \approx 100d$ et $\Delta\theta \approx 0.05$, nous avons finalement une valeur exponentielle est de l'ordre de 5. Ce résultat n'est pas en accord avec nos expériences où l'efficacité d'érosion dépend linéairement à l'angle θ (cf. figure 3.13).

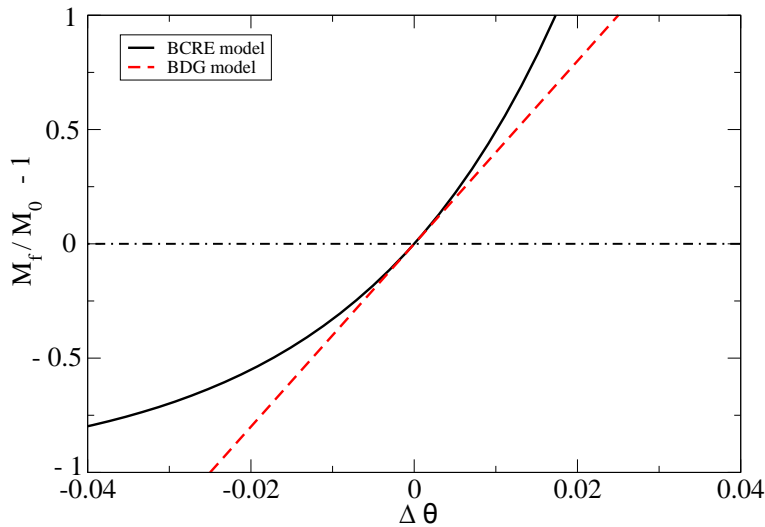


FIGURE 3.13 – Variation de l'efficacité d'érosion $E = M_f/M_0 - 1$ en fonction de $\Delta\theta$ avec les deux modèles BCRE et BDG (présenté par la suite) dans le régime de grand nombre de Péclet. Paramètres des modèles : $R_0 = \Delta_0 = 10d$, $v_d/\gamma = 2.5d$, $v_{up}/v_d = 4$, et $L_b/d = 100$. Ces paramètres sont choisis pour avoir la même pente au niveau de l'angle neutre ($\Delta\theta = 0$) avec deux modèles.

3.5.2 Modèle BDG

La modification proposée par Boutreau, Raphael et De Gennes (1997) [33], (1998) [34]) suppose que le taux d'échange local Γ est saturé et indépendant de l'épaisseur de la couche mobile R . L'équation de convection-diffusion qui décrit l'évolution de l'épaisseur de la couche mobile R devient :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_d \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + v_{up} \Delta\theta \quad (3.15)$$

En utilisant les mêmes conditions initiales et mêmes étapes de résolution que dans le cas du modèle BCRE, nous obtenons une solution approchée de l'équation (B.9) qui contient une fonction gaussienne et une fonction linéaire correspondant au taux d'échange lié à v_{up} comme présenté dans l'équation (3.16) ci-dessous (plus de détails sur les étapes de résolution de cette équation seront aussi présentées dans l'annexe B).

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} + v_{up} \Delta\theta t \quad (3.16)$$

Pour simplifier le calcul de la masse sortie M_f , nous proposons d'utiliser aussi une la forme approché de cette solution en remplaçant la fonction gaussienne par la fonction rectangulaire comme dans le cas du modèle BCRE.

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{\Delta(t)} \square \left(\frac{x - v_d t}{2\Delta(t)} \right) + v_{up} \Delta \theta t \quad (3.17)$$

En appliquant les mêmes calculs que dans le cas du modèle BCRE, nous obtenons l'efficacité d'érosion E à partir de M_f :

$$E = \frac{M_f}{M_0} - 1 \approx \frac{v_{up} L_b}{v_d R_0} \left(1 + \frac{2\sqrt{DL_b/v_d}}{\Delta_0} \right) \Delta \theta \quad (3.18)$$

L'efficacité d'érosion E obtenue avec le modèle BDG (équation (3.19) ci-dessus) est une fonction linéaire de $\Delta \theta$ qui est en accord avec les données expérimentales. Le modèle BDG donne ainsi une expression simple de la régression linéaire pour le coefficient d'érosion $e = dE/d\theta$:

$$e = \frac{v_{up} L_b}{v_d R_0} \left(1 + 2\sqrt{\frac{L_b/\Delta_0}{P_e}} \right) \quad (3.19)$$

où nous avons introduit le nombre de Péclet $P_e = v_d L_b / D$ qui présente le rapport entre les transferts par convection et par diffusion à l'échelle de notre lit. Pour un nombre de Peclet modérée ($P_e \gg 100 \gg L_b/\Delta_0 \sim 2 - 10$, le coefficient d'érosion e peut prendre une forme plus simple :

$$e = \frac{v_{up} L_b}{v_d R_0} \quad (3.20)$$

Il faut rappeler que la dernière équation nous a guidé pour trouver la courbe de tendance des données expérimentales concernant l'influence de la longueur du lit sur le coefficient d'érosion (équation (3.5)). Le coefficient d'érosion e obtenue avec le modèle BDG (équation (3.20)) présente une dépendance explicite de la longueur du lit ($e \propto L_b$). De plus, le modèle BDG est fondé en supposant que la vitesse d'advection v_d est proportionnelle à la hauteur initiale R_0 du réservoir, et v_{up} est une constant. Nous avons finalement que le coefficient d'érosion $e \propto 1/R_0^2$. Ces observations ci-dessus sont en bon accord avec des résultats expérimentaux (cf. équation (3.5)).

Avec les démonstrations ci-dessus, nous pouvons conclure que le modèle BDG fournit des prédictions qui sont en meilleur accord avec les données expérimentales que le modèle BCRE. En d'autres termes, la description des processus d'érosion et de déposition comme une fonction indépendante de l'épaisseur de la phase mobile semble être correcte. Pour aller plus loin, nous devons procéder à des comparaisons quantitatives entre les résultats obtenus avec le modèle BDG et les données expérimentales.

3.5.3 Détermination des paramètres pour les modèles

Pour une comparaison quantitative du modèle BDG par rapport aux résultats expérimentaux, nous devons étudier des différents paramètres phénoménologiques du mo-

dèle comme la vitesse d'advection moyenne v_d des particules de la phase mobile, le coefficient de diffusion D associé au mouvement des particules, le facteur v_{up} (ou vitesse de remontée) du taux d'échange $\Gamma = v_{up}\Delta\theta$. Pour cela, nous devons vérifier d'abord la dépendance linéaire de la vitesse v_d en fonction de la largeur initiale du réservoir R_0 . Comme remarqué précédemment selon figure 3.12, l'avancement du front de l'avant des particules est constant et égale à la vitesse d'advection v_d . Donc, nous pouvons utiliser les vidéos enregistrées pendant les expériences pour déterminer les positions du front de l'avant du profil des particules mobiles et puis extraire la vitesse d'advection v_d .

Nous limitons notre analyse seulement pour des configurations proches de l'angle neutre où l'avalanche peut être considérée comme une onde stationnaire d'érosion et de déposition qui conserve sa forme et son mouvement à une vitesse constante. Nous avons vérifié que dans ces configurations, la vitesse d'avalanche après une courte transition reste constante le long du lit. Cette observation est en accord avec une étude récente sur l'onde d'érosion et de déposition en surface d'un écoulement granulaire de faible épaisseur [61].

Nous avons donc déterminé la vitesse d'advection v_d pour des expériences réalisées avec différentes masses initiales M_0 (en gardant le même ratio d'aspect $R_0/\Delta_0 = 1$) à un angle d'inclinaison proche de l'angle neutre. Les valeurs obtenues sont présentées dans le tableau 3.6. La vitesse d'advection v_d dépend linéairement de la hauteur initiale du réservoir R_0 (cf. figure 3.14) :

$$v_d/\sqrt{gd} \approx 0.064(R_0/d) \quad (3.21)$$

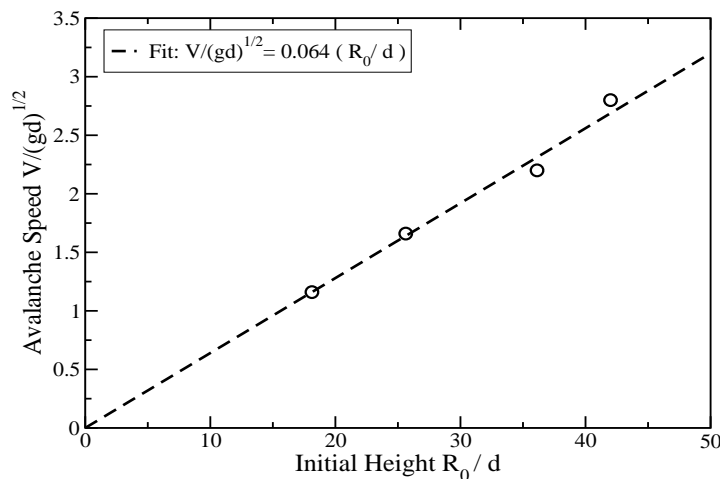


FIGURE 3.14 – Vitesse d'advection en fonction de la masse initiale M_0 pour le grand lit ($L_b = 1700mm$).

Cette relation n'est que vérifié pour des angles d'inclinaison proches de l'angle neutre. Par contre, c'est suffisant pour démontrer que la vitesse d'advection v_d est proportionnelle à l'épaisseur de l'écoulement R et que le taux d'échange Γ est indépendant de R .

$L_b = 1700mm$	θ	v_d	D	P_e
$M_0 = 55g$ $R_0 = \Delta_0 = 145mm$	30°	0.36 m/s ($1.01\sqrt{gd}$)	0.0036 m²/s ($d\sqrt{gd}$)	15
$M_0 = 110g$ $R_0 = \Delta_0 = 205mm$	29.6°	0.44 m/s ($1.66\sqrt{gd}$)	0.0036 m²/s ($d\sqrt{gd}$)	25
$M_0 = 220g$ $R_0 = \Delta_0 = 289mm$	28.7°	0.70 m/s ($2.2\sqrt{gd}$)	0.0036 m²/s ($d\sqrt{gd}$)	56
$M_0 = 300g$ $R_0 = \Delta_0 = 338mm$	28.7°	0.88 m/s ($2.8\sqrt{gd}$)	0.0036 m²/s ($d\sqrt{gd}$)	83

TABLE 3.6 – Valeurs de v_d des expériences réalisées pour différentes valeurs de la masse initiale M_0 à un angle d’inclinaison proche de l’angle neutre.

La détermination expérimentale de v_{up} et D est beaucoup plus difficile et nécessite une analyse détaillée de l’écoulement à l’échelle des particules. C’est en principe faisable en utilisant une caméra rapide de haute définition et ceci devrait être fait dans notre future travail. Pour l’instant, nous pouvons utiliser des estimations approximatives basées sur des arguments dimensionnels tels que $V_{up} \sim \sqrt{gd}$ et $D \sim d\sqrt{gd}$. Sur cette approximation, nous pouvons estimer la gamme de variation du numéro de Péclet P_e pour nos expériences. Nous obtenons que P_e varie entre 15 à 83 ce qui justifie la configuration de grand nombre de Péclet pour presque toutes les expériences effectuées. Donc, nous pouvons utiliser l’expression théorique pour calculer le coefficient d’érosion e (cf. l’équation (3.20)) obtenu avec le modèle BDG pour des grands nombres de Péclet. En combinant l’équation (3.20) avec la dépendance linéaire de v_d en fonction de R_0/d (cf. l’équation (3.21)), nous obtenons la formule théorique pour calculer le coefficient d’érosion e (avec un rapport d’aspect unitaire $R_0/\Delta_0 = 1$) comme la suivante :

$$e \approx 16 \frac{v_{up}}{\sqrt{gd}} \frac{dL_b}{R_0^2} \quad (3.22)$$

Cette prédiction théorique est parfaitement en accord avec l’interprétation expérimentale (cf. l’équation (3.5)). En comparant ces deux formules (les équations (3.22) et (3.5)), nous retirons que $v_{up} \approx 4\sqrt{gd}$ pour des rapports d’aspect unitaires $R_0 = \Delta_0$.

La dernière question à discuter ici est la dépendance paramétrique de l’angle neutre global en fonction de la hauteur initiale R_0 du réservoir. Cette dépendance n’a pas pu décrire par les modèles BCRE et BDG qui supposent que l’angle neutre est constant et indépendant de caractéristiques de l’écoulement. Nous avons observé que l’angle neutre global dépend de l’épaisseur de l’écoulement (via R_0). Et ceci suggère que l’angle neutre local (défini selon les modèles BCRE et BDG) devrait également dépendre de R_0 . Comme l’angle neutre est une mesure du frottement effectif entre la couche mobile et la couche statique des particules, nos résultats suggèrent que le frottement effectif ne devrait pas être pris comme une constante dans la plupart des modèles décrivant l’écoulement granulaire, mais en fonction de l’épaisseur de l’écoulement. Une façon simple de compléter les modèles BCRE et BDG serait de considérer que l’angle neutre

local θ_N est une fonction de de la hauteur locale R de l'écoulement avec la même forme que celle extrapolée à partir des expériences ci-dessus :

$$\tan \theta_N(R) = \tan \theta_R + \frac{\tan \theta_M - \tan \theta_R}{1 + \left(\frac{R_0}{25d}\right)^2} \quad (3.23)$$

En rajoutant cette correction sur la prédiction de l'angle neutre, les modèles simples de type BCRE et BDG sur d'érosion et de déposition sont maintenant complets et assez efficaces pour prédire nos résultats expérimentaux.

Pour aller plus loin, nous pouvons utiliser un simple modèle basé sur l'approche hydrodynamique de Saint-Vernant proposée par Edwards et Gray [61]. Cette approche utilise la version moyenne de la lois $\mu(I)$ -rhéologie en reliant avec l'angle de dépôt et l'angle d'avalanche qui est capable de modéliser les ondes d'érosion et de déposition avec une vitesse d'advection constante. Par contre, nous avons besoins plus d'investigation pour bien caractériser la forme et la vitesse de propagation de ces ondes afin de fournir des données quantitatives pour savoir quels modèles peuvent être utilisée. Pour cela, l'utilisation d'une caméra rapide de haute définition afin de filmer les mouvements de particules est bien souhaité et ça sera notre prochaine travail sur ce sujet.

3.5.4 Discussions

Nous avons présenté dans ce chapitre des études expérimentales des écoulements granulaires sur un lit érodable incliné. Ces expériences ont montrés que l'introduction de d'angle neutre global et local est pertinent. L'angle neutre est défini comme l'angle critique où l'érosion est équilibre à la déposition après le passage d'une avalanche (ou d'un écoulement) des particules du réservoir. Nous avons démontré que cet angle neutre n'est pas unique pour un lit défini, mais il dépends de l'épaisseur initiale R_0 du réservoir (c'est aussi l'épaisseur de l'avalanche). On a aussi trouvé que l'angle neutre augmente en fonction de R_0 du réservoir et sa valeur varie entre l'angle de dépôt θ_R et l'angle d'avalanche θ_M . Ces résultats suggèrent que le frottement effectif entre la phase statique et la phase mobile ne peut pas être considérée comme invariant, mais devrait être considéré comme dépendant de caractéristiques de l'écoulement granulaire.

De plus, nous avons montré que pour une masse initiale (masse d'avalanche) donnée M_0 , l'érosion du lit augmente linéairement en fonction de le écart angulaire par rapport à l'angle neutre. Cette tendance est très bien prédite par le modèle d'érosion et de déposition BDG dans lequel le taux d'échange local entre l'érosion et la déposition est indépendant de l'épaisseur d'écoulement.

Enfin, nous avons proposé comment modifier le modèle BDG pour tenir compte de la variation de l'angle neutre en fonction de l'épaisseur locale de la couche mobile R . Le modèle BDG reste cependant une description brute pour la modélisation des processus d'érosion et de déposition car il est basé seulement sur le taux d'échange global le long du lit. La prochaine étape est de développer des modèles plus adaptés qui sont capables de prédire précieusement le phénomène d'érosion et de déposition sans aucun paramètre rajouté ou à déterminer expérimentalement. Une façon prometteuse

serait d'utiliser l'approches continuités basées sur des lois rhéologiques ou des théories de plasticité non locales. Ces modèles sont capables de prédire la transition statique entre deux couches mobile et statique et qui devrait être plus précis pour modéliser les processus d'érosion et de déposition.

Chapitre 4

Marche du Sinaiï

▷ *Dans ce chapitre, nous étudions expérimentalement une autre configuration d'écoulement correspondant à l'effondrement d'une marche (problème du sinai). Les prédictions des modèles d'érosion-déposition (BCRE et BDG) sont confrontées aux résultats de ces nouvelles expériences.* ◁

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude expérimentale de l'effondrement d'une marche granulaire (problème du sinaï). Cette configuration est très similaire aux expériences d'effondrement de colonnes et correspond en fait à la limite asymptotique d'une colonne avec un rapport d'aspect approchant zéro.

Le problème du Sinaï est illustré sur la figure 4.1. Il s'agit de l'étude de l'étalement d'une marche granulaire de hauteur h , de largeur initial s_i et d'angle initial θ_i . Le processus d'étalement de la marche est caractérisé par l'évolution temporelle de la largeur de la marche $s(t)$ qui augmente au cours du temps jusqu'à se stabiliser à une valeur finale s_f . Dans l'hypothèse où la pente de la marche peut être approximée par une droite à tout instant, la largeur de la marche est alors simplement reliée à l'angle de la pente $\theta(t)$ par la relation : $s(t) = h \tan \theta(t)$.

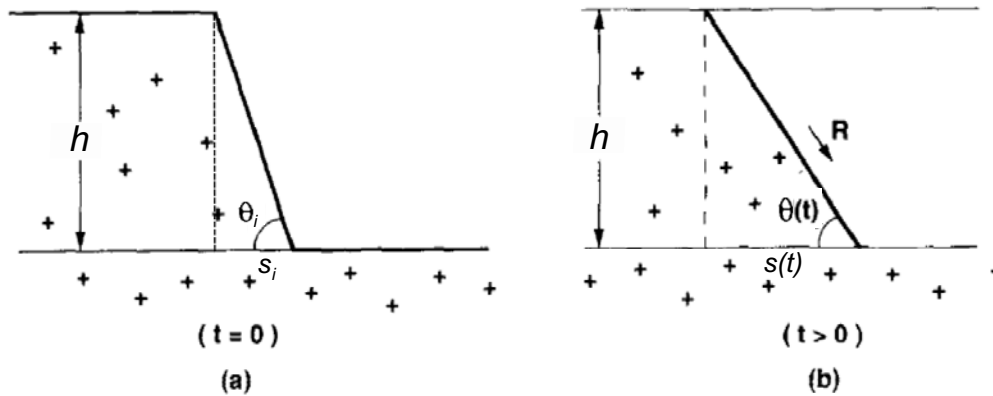


FIGURE 4.1 – Géométrie d'une marche de grains de hauteur h . (a) État initial de la marche avec un angle θ_i et de largeur s_i . (b) État intermédiaire à un instant t : la marche est caractérisée par sa pente $\theta(t)$ (dans l'hypothèse d'une pente approximée par une droite) et sa largeur $s(t)$.

Nous présentons dans un premier temps les prédictions des modèles d'érosion-déposition BRCE et BDG concernant l'évolution temporelle de la largeur de la marche, puis nous décrivons le protocole de nos expériences et discutons des résultats en les confrontant aux prédictions des modèles. Enfin, nous discutons des limites des modèles d'érosion-déposition BCRE et BDG.

4.2 Prédiction théorique

4.2.1 Description des différentes phases de l'étalement

Nous décrivons d'abord les différentes phases de l'étalement dans le cadre des modèles d'érosion-déposition de BCRE et BDG. Le processus d'étalement peut être décomposé en plusieurs étapes :

1. Une phase initiale de mise en mouvement qui se produit uniquement si l'angle initial θ_i est supérieur à l'angle maximum de stabilité de l'empilement granulaire θ_M .
2. Une première phase d'écoulement où l'érosion domine : l'angle de la marche θ est supérieur à l'angle neutre ($\theta > \theta_N$).
3. Une deuxième phase d'écoulement où la déposition prévaut : l'angle de la marche est inférieur à l'angle neutre ($\theta < \theta_N$).
4. Une phase final d'arrêt.

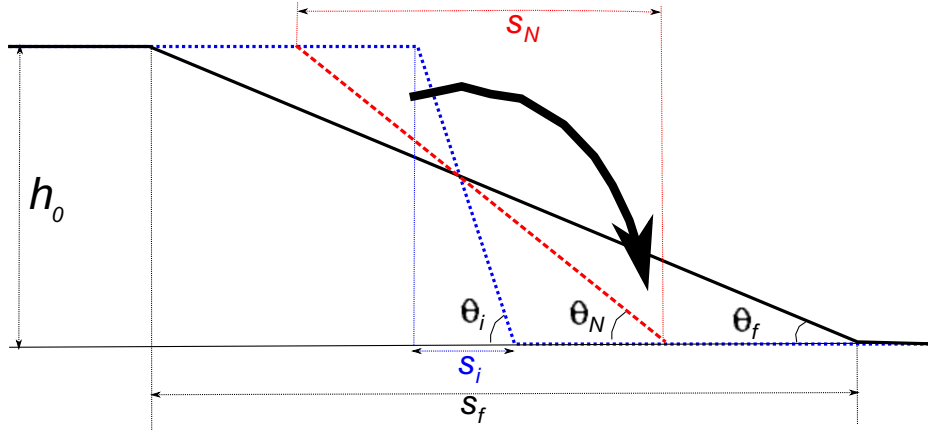


FIGURE 4.2 – Phénomène de l'étalement d'une marche de grain en partant de l'état initial s_i (profil en couleur bleu) pour arriver à l'état final s_f (profil en couleur noir) en passant par l'état intermédiaire s_N (profil en couleur rouge).

4.2.2 Modèle BCRE

Il est possible de calculer l'évolution temporelle de l'étalement de la marche à partir du modèle BCRE. Nous reprenons ici les principales étapes du calcul exposées dans l'article de Bouteux et De Gennes [33].

Rappelons tout d'abord les équations du modèle à résoudre :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = V \frac{\partial R}{\partial x} + \Gamma, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Gamma, \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

avec

$$\Gamma = \gamma R (\tan \theta - \tan \theta_N). \quad (4.4)$$

Dans ces équations, θ est l'angle d'inclinaison de la marche à l'instant t , et θ_N est l'angle neutre ou l'angle équilibre de la marche dans le processus de l'étalement.

Loin de nous est l'idée de résoudre le système de façon exacte mais plutôt de partir d'une forme simplifiée des équations pour extraire des solutions analytiques. Nous

supposons la pente $\theta(t)$ indépendante de x . En d'autres termes, nous faisons l'approximation que la pente reste une droite à tout instant. Par ailleurs, la hauteur roulante R doit s'annuler aux deux extrémités de la marche, et avoir une valeur maximale R_0 près du centre de la marche. On fait donc l'approximation suivante :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \alpha \frac{R_0}{s}, \quad (4.5)$$

où s est la largeur de la marche et α un nombre sans dimension. Sa valeur absolue $|\alpha|$ est de l'ordre de 1 près des extrémités, et elle est inférieure à 1 ailleurs ; elle est nulle là où R est maximale. On en déduit que dans l'équation (4.1) écrite près de l'endroit où R est maximale, le terme de convection est négligeable par rapport au terme d'échange lorsque la hauteur initiale de la marche h_0 est très grande devant le diamètre d des grains :

$$\left(V \frac{\alpha R_0}{s} \right) / (\gamma R_0) \sim \alpha \frac{d}{h_0} \ll 1, \quad (4.6)$$

où l'on a supposé que $V \sim \gamma d$.

Nous pouvons donc ré-écrire l'équation 4.1 sous une nouvelle forme en fonction de la valeur maximale de l'espèce roulante comme suit :

$$\frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dt} = \gamma (\tan \theta - \tan \theta_N). \quad (4.7)$$

Par ailleurs, nous pouvons remplacer l'équation de bilan (4.2) par une forme plus simple, déduite de la condition aux limites en bas de la marche ($h = 0$). Dans cette région, le flux RV de l'espèce roulante doit correspondre à l'augmentation d'espèce solide, ce qui implique :

$$\theta \frac{dx}{dt} = V \frac{\partial R}{\partial x} \quad (4.8)$$

où dx/dt est la vitesse de déplacement du bas de la marche, et les valeurs de θ et $\partial R/\partial x$ sont calculées en ce point. dx/dt est de l'ordre de ds/dt ; de plus, dans cette approximation, θ est le même partout ($\tan \theta = h_0/s$), et dR_0/dx peut être estimé en utilisant l'équation (4.5). On arrive ainsi à :

$$h_0 \frac{ds}{dt} = \beta V R_0 \quad (4.9)$$

avec β est une constante numérique de l'ordre de 1.

Finalement en combinant l'équation (4.9) avec l'équation (4.7), nous obtenons la formulation originale dérivée par Boutreux et De Gennes pour l'évolution de largeur de la marche $s(t)$:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \gamma \left(\frac{h_0}{s} - \tan \theta_N \right) \frac{ds}{dt} \quad (4.10)$$

Dans leur article, Boutreux et de Gennes utilisent l'approximation $\tan \theta \approx \theta$. Cette approximation n'est correcte que si les angles θ et θ_N sont petits. Nous nous affranchissons ici de cette approximation car les angles auxquelles on a à faire sont loin d'être petits. Ils sont en général supérieurs à 20° .

En intégrant (4.10) une fois par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d(s/h_0)}{dt} = \gamma [\ln(s/h_0) - \tan(\theta_N)(s/h_0) + C] \quad (4.11)$$

Dans cette solution, C est une constante d'intégration qui est obtenue à partir de la connaissance des conditions initiales ou finales. Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} s(t = -\infty) = h_0 / \tan \theta_i = s_i \\ \frac{ds}{dt}(t = -\infty) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

car nous choisissons de prendre une vitesse nulle au départ. En pratique, l'avalanche se déclenche en un temps fini. De même, à la fin du processus d'étalement, nous avons :

$$\begin{cases} s(t = +\infty) = h_0 / \tan \theta_f = s_f \\ \frac{ds}{dt}(t = +\infty) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

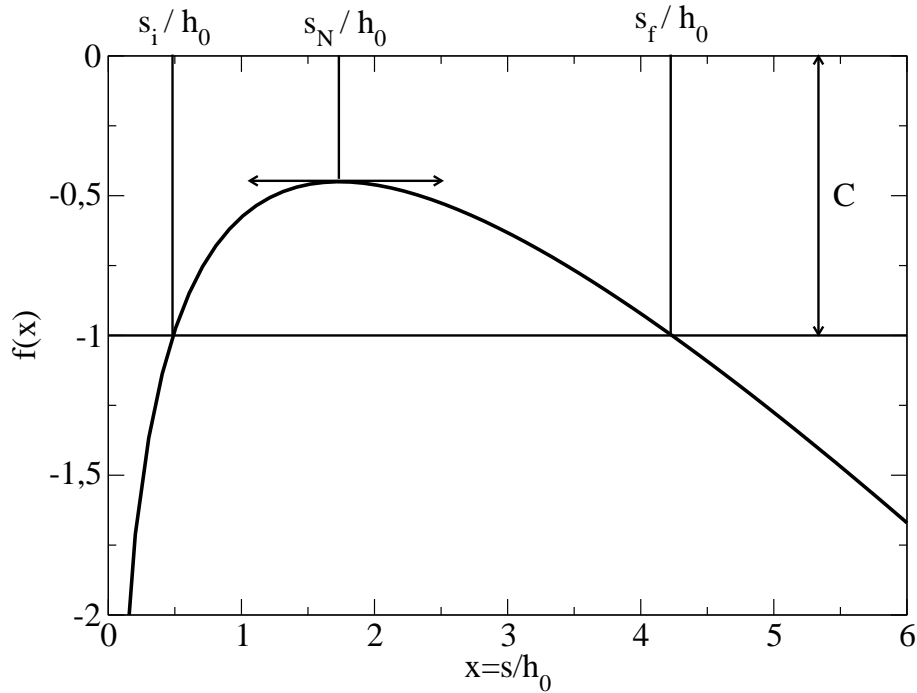


FIGURE 4.3 – Construction reliant la largeur initiale s_i à la largeur finale s_f . La fonction $f(x)$ est définie par l'équation (4.16).

La constante C s'exprime donc simplement à partir des valeurs initiales de s et θ (s_i et θ_i) ou des valeurs finales s_f et θ_f :

$$C = -\ln\left(\frac{s_i}{h_0}\right) + \tan \theta_N \left(\frac{s_i}{h_0}\right), \quad (4.14)$$

$$= -\ln\left(\frac{s_f}{h_0}\right) + \tan \theta_N \left(\frac{s_f}{h_0}\right). \quad (4.15)$$

Connaissant θ_i et s_i , il est possible de trouver de s_f/h_0 par construction sur la figure (4.3) où est représentée la fonction :

$$f(x) = \ln x - \tan \theta_N x. \quad (4.16)$$

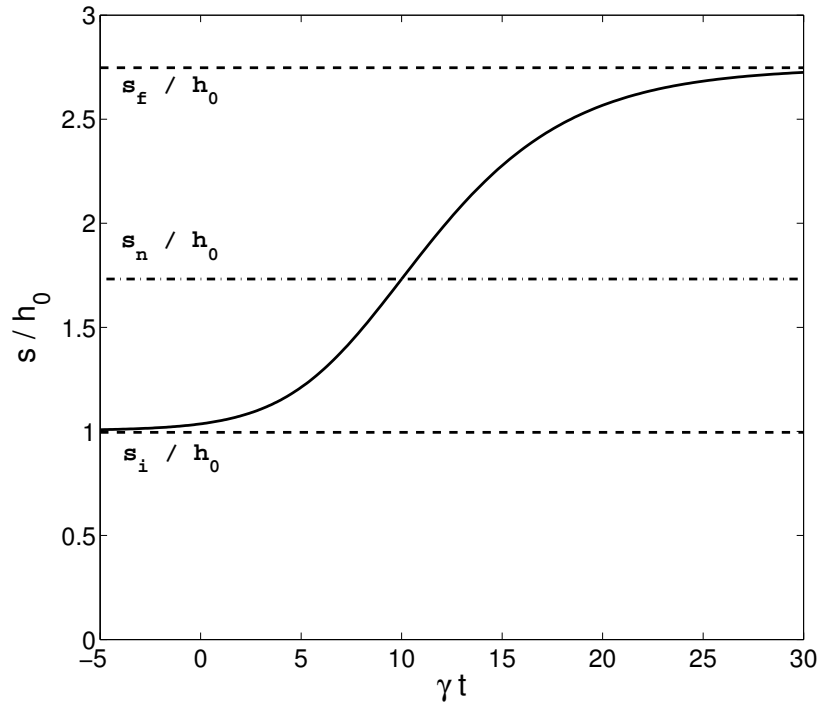


FIGURE 4.4 – Evolution de la largeur de la marche $s(t)$ en fonction du temps réduit γt . Dans cet exemple, on a pris les valeurs suivantes pour θ_i et θ_N : $\theta_i = 45^\circ$ et $\theta_N = 30^\circ$. On obtient ici une valeur de $\theta_f = 20^\circ$.

dont la valeur maximale est obtenue pour $x = 1/\tan\theta_N$. L'évolution de la largeur de la marche au cours du temps s'obtient par intégration numérique de l'équation 4.20 avec les conditions initiales données par l'équation 4.12 (voir figure 4.4). On peut vérifier que la fin du processus correspond à une relaxation exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = 1/(\gamma \tan\theta_f)$.

En pratique, le processus d'étalement de la marche se déclenche uniquement si l'angle initial θ_i est plus grand que l'angle maximum de stabilité θ_M qui lui-même est supérieur à l'angle neutre θ_N ; on en conclut donc à l'aide de la figure (4.3) que $s_f/\tan\theta_f > 1/\tan\theta_N$, c'est à dire $\theta_f < \theta_N$. Le modèle prédit également que plus l'angle initial est élevé plus l'angle final est petit pour un angle neutre θ_N fixé (voir figure 4.5).

Il est également intéressant de noter que le modèle permet de relier l'angle neutre aux seuls angles initial et final de la marche : θ_i et θ_f . En utilisant les équations (4.14) et (4.15), on trouve en effet que :

$$\tan\theta_N = \frac{h_0}{s_f - s_i} \left[\ln\left(\frac{s_f}{h_0}\right) - \ln\left(\frac{s_i}{h_0}\right) \right], \quad (4.17)$$

$$= \frac{\tan\theta_i \tan\theta_f}{\tan\theta_i - \tan\theta_f} \ln\left(\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_f}\right). \quad (4.18)$$

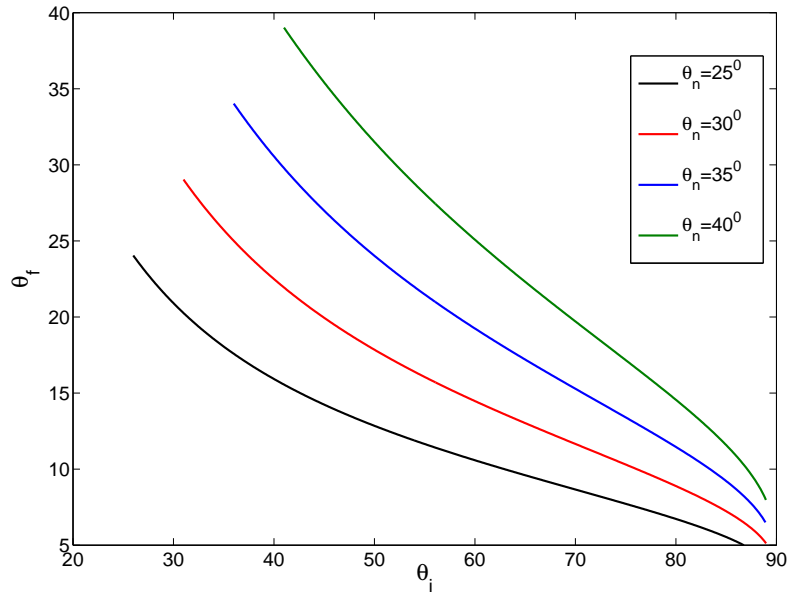


FIGURE 4.5 – Relation entre θ_i , θ_f et θ_N : angle final de l'étalement θ_f prédit par le modèle BCRE en fonction de l'angle initial de la marche θ_i pour différentes valeurs de l'angle neutre θ_N .

4.2.3 Modèle "BDG saturé"

Il est possible de faire le même genre de calcul pour prédire l'évolution de la largeur de la marche $s(t)$ pour la version "saturée" du modèle BDG, c'est à dire dans la limite des écoulements épais (i.e., $R > R_c$). Le traitement avec la version originale du modèle BDG (qui prend en compte la transition entre les écoulements fins et épais) est d'un niveau de complexité supérieure et ne sera pas abordé ici.

Dans la version "saturée" du modèle BDG, le taux d'échange Γ est considéré comme indépendant de R :

$$\Gamma = V_{up}(\tan \theta - \tan \theta_N). \quad (4.19)$$

En faisant les mêmes simplifications que dans le calcul précédent, nous obtenons l'équation suivante pour l'évolution de la largeur de la marche :

$$h_0 \frac{d^2 s}{dt^2} = \beta V V_{up} \left(\frac{h_0}{s} - \tan \theta_N \right). \quad (4.20)$$

En utilisant la largeur réduite $\tilde{s} = s/h_0$, l'équation précédente se ré-écrit :

$$\frac{d^2 \tilde{s}}{dt^2} = \gamma^{*2} \left(\frac{1}{\tilde{s}} - \tan \theta_N \right). \quad (4.21)$$

avec

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{V V_{up}}{h_0^2}}. \quad (4.22)$$

γ^* a les dimensions d'une fréquence.

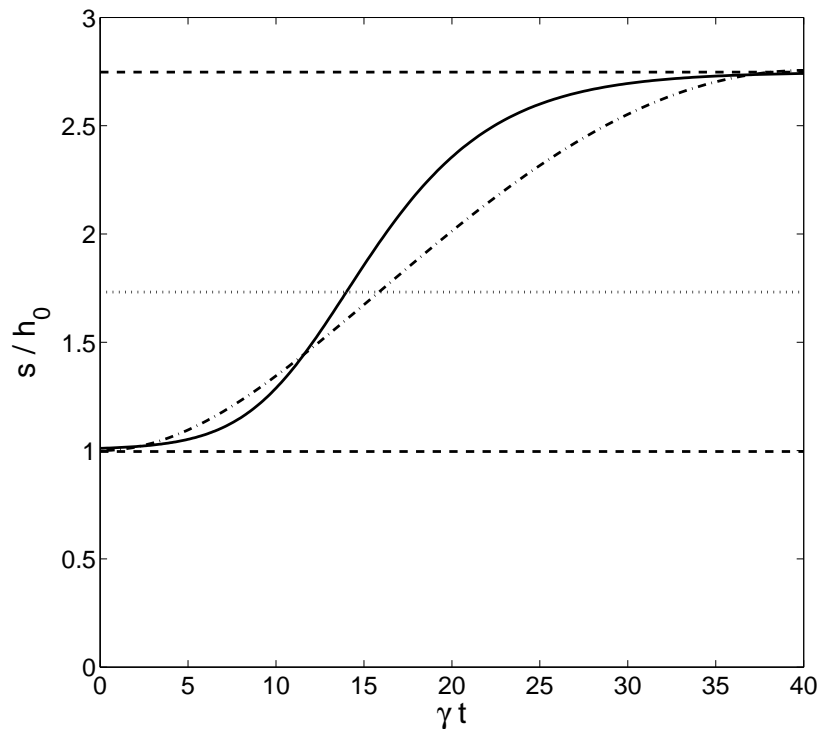


FIGURE 4.6 – Evolution comparée de la largeur réduite de la marche $s(t)/h_0$ en fonction du temps réduit γt dans le cas du modèle BCRE (ligne continue) et celui du modèle "BDG saturé" (ligne tiretée). Dans cette exemple, on a pris les valeurs suivantes pour θ_i et θ_N : $\theta_i = 45^\circ$ et $\theta_N = 30^\circ$. On obtient pour les deux modèles la même valeur finale de l'angle de la marche : $\theta_f = 20^\circ$. Nous avons ajusté le paramètre γ^* pour avoir la même durée d'étalement : $\gamma^* = \gamma/7$.

Cette équation est complétée par les mêmes conditions limites que dans le calcul précédent. Cette équation peut se résoudre numériquement. La résolution numérique montre que à la différence du modèle BCRE, l'étalement se déclenche en un temps fini et se termine également en un temps fini (voir figure 4.6). Par ailleurs, les valeurs finales s_f et θ_f ne dépendent que de la valeur initiale de l'angle de la marche θ_i et l'angle neutre θ_N comme dans le modèle de BCRE. Par ailleurs, le modèle "BDG saturé" prédit les mêmes valeurs pour l'angle final de la marche si l'on prend des valeurs identiques pour θ_i et θ_N . Enfin, le paramètre γ^* joue un rôle sur le temps de l'étalement. Un grand γ^* produit un étalement bref tandis qu'un faible γ^* engendre un processus d'étalement plus long.

Sur la figure (4.6), nous montrons également à titre de comparaison la prédiction du modèle BCRE. Nous avons pris la même valeur de l'angle initial θ_i et des valeurs identiques pour θ_N . Nous avons entre outre ajusté le paramètre γ^* pour avoir la même durée d'étalement. Pour les valeurs de θ_i et θ_N considérées, l'ajustement est obtenu pour $\gamma^* = \gamma/7$. Nous observons qu'avec le modèle "BDG saturé" l'étalement se fait de manière beaucoup plus régulière tandis dans le modèle BCRE, il est plus lent au début puis s'accélère à l'approche de l'angle neutre pour à nouveau décélérer à la fin

du processus d'étalement.

4.3 Dispositif expérimental

Nous avons effectué des expériences d'étalement de marche avec l'aide de notre dispositif 2D et confronté nos résultats avec les prédictions des modèles d'érosion-déposition BCRE et "BDG saturé". Nous avons fait varier différents paramètres : la hauteur initiale h_0 de la marche, l'angle initial expérimental θ_0 ¹, la nature du substrat sous-jacent (fond meuble ou rigide) et son inclinaison par rapport à l'horizontal θ_b .

4.3.1 Protocole expérimental

Le dispositif expérimental 2D utilisé pour l'étude de l'angle neutre est adapté ici pour l'étude de l'étalement d'une marche. La marche initiale est construite à l'aide d'une cale placée à l'angle θ_0 souhaité comme illustré sur la figure (4.7). Nous avons fait varier l'angle θ_0 entre 40° et 90° .

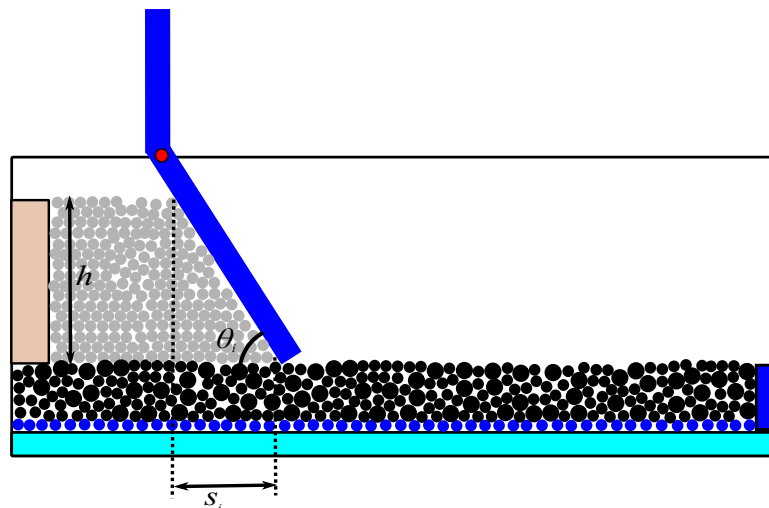


FIGURE 4.7 – Dispositif expérimental pour l'étude de l'étalement d'une marche sur un lit horizontal.

Pour préparer la marche, nous utilisons la même méthode de remplissage présenté dans le deuxième chapitre. Pour les expériences sur un fond meuble, nous construisons d'abord le lit granulaire sous-jacent avec les mêmes caractéristiques que pour les études sur l'angle neutre ($h_b = 7,4\text{cm}$ et $L_b = 170\text{cm}$). En revanche, pour les expériences sur fond rigide, cette étape est ignorée. Le fond rigide utilisé est le même que celui employé pour le fond du lit granulaire. Il est constitué de disques collés. Nous dimensionnons ensuite la hauteur (h_0) et la largeur initiale (s_0) de la marche. Pour déclencher le

1. Nous distinguons l'angle initial de la marche θ_0 dans nos expériences de l'angle initial θ_i obtenu par ajustement de l'évolution de la longueur d'étalement avec la prédiction des modèles d'érosion-déposition. En particulier dans le cas du modèle BCRE, θ_i correspond à la valeur asymptotique en $t = -\infty$ et peut être différente de la valeur θ_0 .

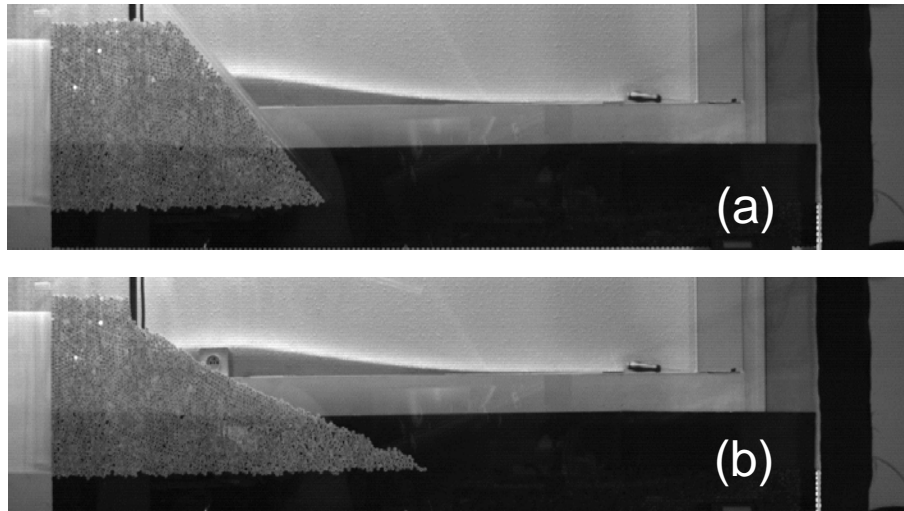


FIGURE 4.8 – Expérience d'étalement d'une marche à l'horizontale ($\theta_b = 0^\circ$). (a) État initial : hauteur $h_0 = 24\text{cm}$ et $\theta_0 = 40^\circ$. (b) État final : $\theta_f = 29.1^\circ$.

processus d'étalement de la marche, la cale est actionnée autour de son pivot et libère instantanément les grains de la marche. Le processus est filmé à l'aide d'une caméra rapide photron.

Après chaque expérience, le canal est entièrement vidé de ses grains et le même protocole de remplissage est utilisé pour préparer une nouvelle expérience.

La figure 4.8 montre un exemple d'une expérience d'étalement d'une marche dans l'état initial et final.

4.3.2 Méthode de traitement et d'analyse de l'étalement

A partir des images video, il est possible d'extraire par traitement d'image le profil de la marche et son évolution au cours du temps, et d'en déduire la variation de la largeur de la marche $s(t)$ au cours du temps (voir Figure 4.9). Ensuite, nous analysons la courbe $s(t)$ en s'appuyant sur les prédictions des modèles d'érosion-déposition BCRE et "BDG saturé" concernant le processus d'étalement d'une marche. Dans ce modèle, il existe deux paramètres qui interviennent de façon cruciale et qui ne sont pas connus a priori ; il s'agit de γ (ou γ^* dans le modèle de "BDG saturé") qui contrôle le temps du processus d'étalement et la valeur de l'angle neutre θ_N .

Nous choisissons de déterminer ces paramètres de manière à ce que la prédiction théorique du modèle (BCRE ou "BDG saturé") sur l'étalement colle au mieux à la courbe expérimentale. Pour faire cela, nous réalisons un ajustement par les moindres carrés afin de trouver les valeurs optimales de γ et θ_N . C'est ce que nous avons fait sur les données présentées sur la figure (4.9).

Dans cet exemple, l'ajustement des données expérimentales à partir du modèle BCRE donne un assez bon résultat. L'ajustement à partir du modèle "BDG saturé" donne également un résultat très satisfaisant sauf sur la fin du processus d'étalement qui n'est pas du tout capturé par le modèle. Ceci n'est pas vraiment surprenant puisque la

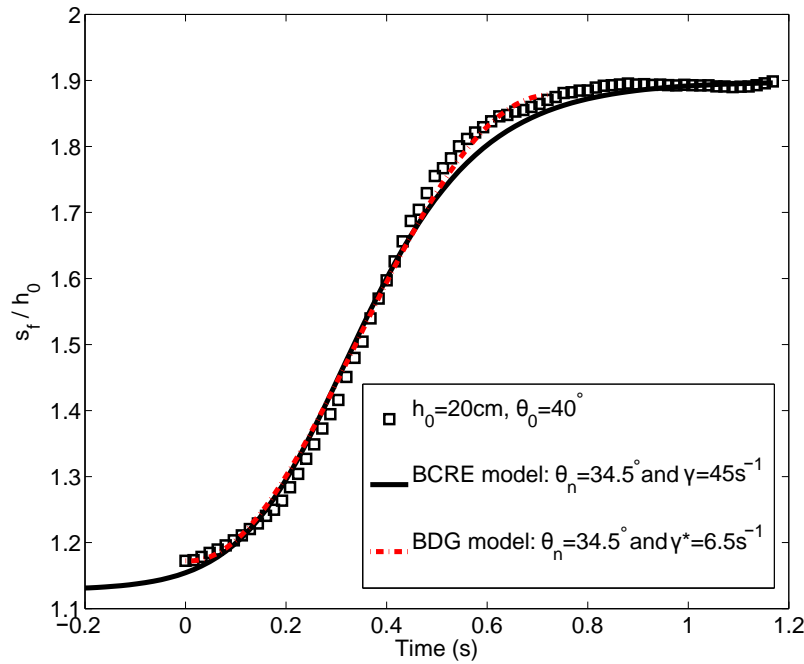


FIGURE 4.9 – Courbe expérimentale typique obtenue pour l'évolution de la largeur de la marche avec le fond rigide rugueux en fonction du temps. Paramètres : $\theta_0 = 40^\circ$ et $h_0 = 20\text{cm}$. Courbe continue : ajustement par le modèle BCRE; courbe tireté : ajustement par le modèle "BDG saturé".

version "saturée" du modèle BDG n'est censé être pertinente que pour les écoulements épais. Or, à la fin du processus d'étalement, on s'attend à avoir des écoulements très fins. On peut noter que le modèle "BDG saturé" donne un meilleur accord que le modèle BCRE dans la première partie du processus d'étalement où justement il est censé être plus adapté. Dans l'analyse des données expérimentales, nous privilégierons le modèle BCRE qui permet de capturer de manière satisfaisante l'ensemble du processus d'étalement. Une extension intéressante du travail aurait été de résoudre la version originale du modèle de BDG qui permet de différencier les écoulements fins et épais.

4.3.3 Listes des expériences effectuées

Nous avons réalisé deux séries d'expériences, l'une pour des marches posées sur un fond meuble (c'est à dire sur un lit de grains) et l'autre pour des marches posées sur un fond rigide rugueux. Pour chaque série d'expériences, nous étudions l'étalement de la marche en fonction de la hauteur initiale h_0 de la marche et de son angle initial θ_0 . Nous répétons au moins 5 fois une même expérience pour avoir une statistique minimale.

Les paramètres utilisés pour les deux séries différentes sont présentés dans les tableaux 4.1. Nous avons reportés les valeurs finales de θ_f obtenues par moyennage sur les différentes expériences réalisées dans les mêmes conditions. Nous donnons aussi les valeurs de θ_N estimées à partir de l'équation 4.18 en faisant l'hypothèse que $\theta_0 = \theta_i$. Nous verrons que cette hypothèse est satisfaisante pour les expériences faites pour

$\theta_0 = 40$ et 70° , mais pas pour $\theta_0 = 90^\circ$. En effet l'équation 4.18 est singulière pour $\theta_i = 90^\circ$ et donne un angle neutre théorique de 90° . Dans ce dernier cas, l'obtention d'une valeur pertinente de l'angle neutre ne peut se faire qu'à partir de l'ajustement de la courbe d'étalement $s(t)$ avec les prédictions des modèles d'érosion-déposition.

Fond rigide rugueux					
	θ_b	$h_0(m)$	θ_0	θ_f	θ_N
1	0	0.10	40	29.4	34.3
2	0	0.155	40	29.7	34.5
3	0	0.20	40	29.6	34.5
4	0	0.255	40	28.8	34.0
5	0	0.30	40	29.2	34.2
6	0	0.42	40	29.6	34.5
7	0	0.10	70	28.0	47.3
8	0	0.155	70	27.2	46.7
9	0	0.20	70	27.5	46.9
9	0	0.25	70	28.4	47.6
10	0	0.30	70	27.9	47.2
11	0	0.35	70	28.4	47.6
12	0	0.11	90	27.5	-
13	0	0.155	90	27.0	-
14	0	0.19	90	27.4	-
15	0	0.25	90	27.9	-
16	0	0.30	90	28.1	-

Fond meuble					
	θ_b	$h_0(m)$	θ_0	θ_f	θ_N
1	0	0.155	40	29.1	34.2
2	0	0.24	40	29.1	34.2
3	0	0.30	40	28.5	33.8
4	0	0.155	70	27.2	46.7
5	0	0.20	70	28.3	47.5
6	0	0.11	90	26.1	-
7	0	0.155	90	26.2	-
8	0	0.265	90	26.9	-
9	0	0.31	90	25.8	-
10	0	0.10	90	26.4	-
11	10	0.10	90	27.7	-
12	15	0.10	90	27.2	-
13	0	0.15	90	26.4	-
14	10	0.15	90	26.2	-
15	15	0.15	90	27.2	-
16	0	0.20	90	26.5	-
17	10	0.20	90	26.8	-
18	15	0.20	90	28.5	-

TABLE 4.1 – Liste des expériences effectuées sur un fond rigide et meuble.

Nous avons également étudié l'influence de l'angle d'inclinaison θ_b du fond meuble par rapport à l'horizontale. Pour cette étude, nous avons choisi un angle initial de marche égale à 90° et plusieurs hauteurs de marche (voir les tableaux 4.1).

4.4 Résultats expérimentaux

4.4.1 Angle final d'étalement θ_f

Nous avons analysé l'influence de la hauteur de la marche h_0 , de l'angle initial θ_0 et de la nature du substrat sur l'angle final d'étalement θ_f . Nous commençons par l'étude du fond rigide puis examinons le cas du fond meuble.

4.4.1.1 Fond rigide rugueux

Nous présentons sur la figure 4.10 l'évolution de l'angle final en fonction de la hauteur h_0 de la marche pour trois valeurs différentes d'angles initiaux $\theta_0 = 40, 70, 90^\circ$.

Ces résultats ont été obtenus sur fond rigide. Nous n’observons pas de variation significative de θ_f avec la hauteur de la marche pour un angle θ_0 donné. Cette indépendance de l’angle final d’étalement avec h_0 traduit simplement une proportionnalité entre la longueur de celle-ci.

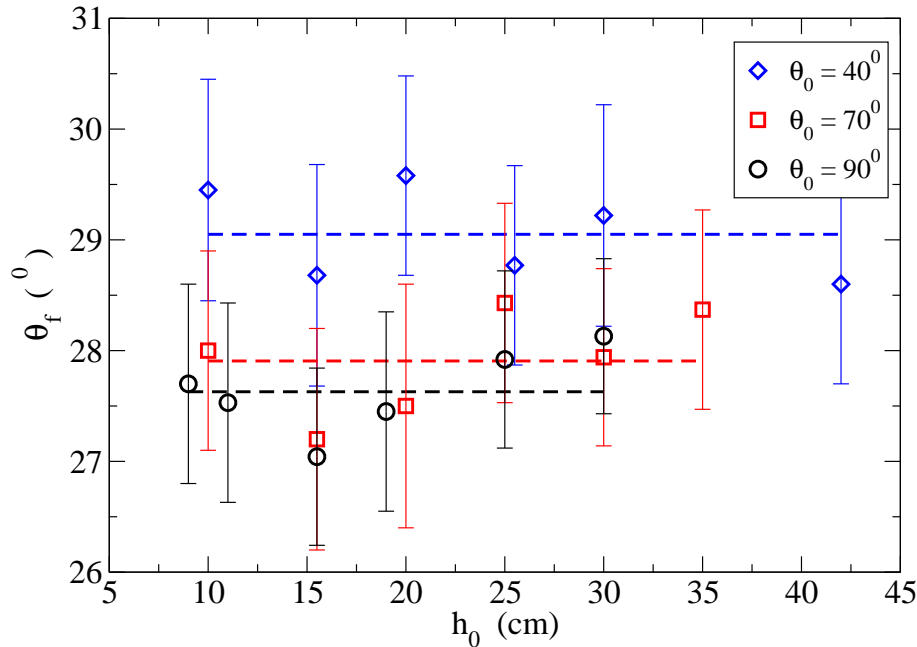


FIGURE 4.10 – Evolution de l’angle final de la marche en fonction de la hauteur initiale h_0 pour différents angles initiaux θ_0 . Résultats obtenus sur fond rigide rugueux.

Par contre, on peut noter une dépendance de l’angle final avec l’angle initial θ_0 . Plus l’angle initial est élevé, plus l’angle final est petit. Pour $\theta_0 = 40^\circ$, on obtient un angle final θ_f autour de 29° alors que pour $\theta_0 = 90^\circ$, l’angle final tombe aux alentours de $27,5^\circ$. Cet effet peut être sans doute attribuer un effet inertiel d’autant plus important que l’angle initial est abrupte.

L’indépendance de l’angle final d’étalement avec la hauteur de la marche est en accord avec les résultats obtenus sur l’effondrement de colonne de grains dans la limite d’un rapport d’aspect infini [15]. Dans cette limite, la longueur d’étalement est proportionnelle à la hauteur initiale de la colonne.

4.4.1.2 Fond meuble

Nous obtenons les mêmes tendances concernant l’angle final d’étalement sur fond meuble (voir fig. 4.11). L’angle final est indépendant de la hauteur initiale de la marche mais est sensible à l’angle initial comme pour le cas du fond rigide.

On observe cependant une différence appréciable entre fond rigide et fond meuble pour les valeurs finales d’étalement obtenues pour un angle initial de 90° . On obtient en effet un angle final d’étalement de 26° sur fond meuble alors qu’il s’établit autour de $27,5^\circ$ sur fond rigide rugueux. Ceci traduit un processus d’étalement plus efficace

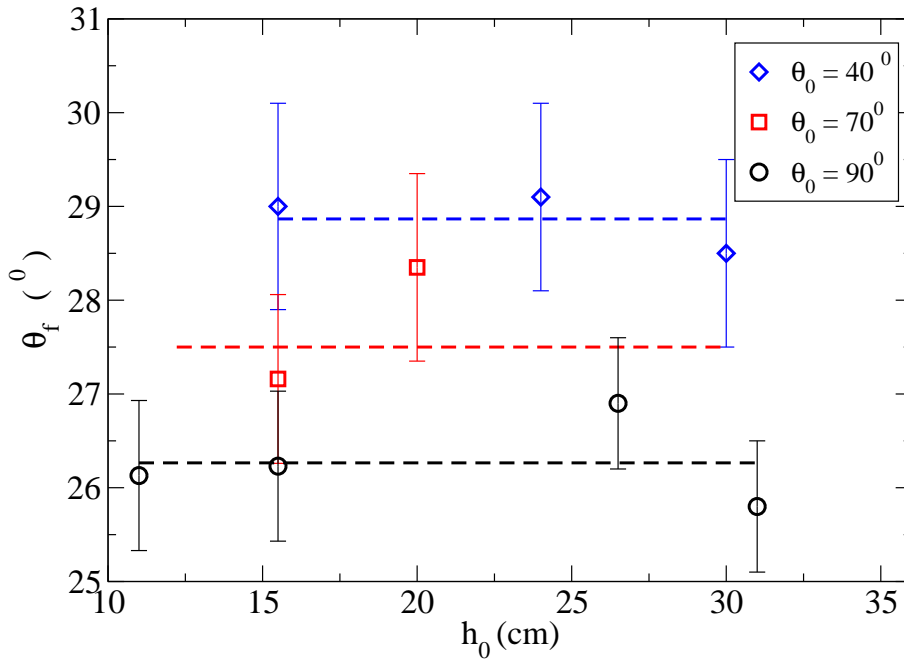


FIGURE 4.11 – Evolution de l’angle final de la marche en fonction de la hauteur initiale h_i pour différents angles initiaux θ_i . Résultats obtenus sur fond meuble.

sur fond meuble que le fond rigide rugueux. Ce résultat est loin d’être intuitif car on s’attendrait plutôt à un étalement plus difficile sur un fond meuble qui par nature dissipe plus d’énergie qu’un fond rigide. Pour les angles initiaux plus faibles (i.e., $\theta_0 = 40, 70^\circ$), la différence est cependant beaucoup moins marquée.

On peut donc conclure que la présence d’un fond meuble ne joue pas de rôle majeur sur l’étalement d’une marche sauf quand l’angle initial de la marche est de 90° .

4.4.1.3 Effet de l’inclinaison du fond

Nous avons également étudié l’influence de l’inclinaison du fond par rapport à l’horizontale sur l’angle final d’étalement dans le cas d’un fond meuble (voir figure 4.12). On semble observer une légère tendance à l’augmentation de l’angle final d’étalement avec l’angle d’inclinaison du fond ce qui traduirait un étalement moins efficace. Ce résultat est plutôt contraire à ce qu’on pouvait attendre. Néanmoins, il faut avoir à l’esprit que les résultats expérimentaux sont très sensibles à la préparation du lit granulaire sous-jacent et notamment de sa compacité. Des expériences supplémentaires semblent nécessaires pour confirmer ou infirmer ces résultats. Aussi peut-être faut-il avoir des angles d’inclinaison encore plus grand pour observer un effet d’entraînement du lit granulaire qui augmenterait l’efficacité du processus d’étalement et diminuerait l’angle final d’étalement.

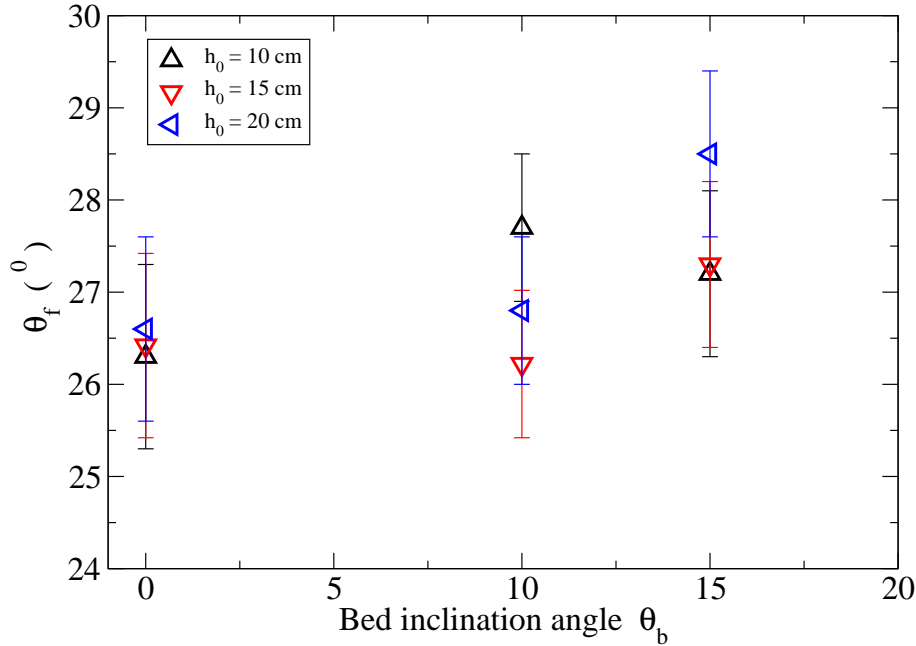


FIGURE 4.12 – Evolution de l’angle final de la marche en fonction de l’inclinaison du fond θ_b pour deux hauteurs initiales de marche.

4.4.2 Dynamique de l’étalement

Nous nous intéressons maintenant à la dynamique de l’étalement, c’est à dire l’évolution temporelle de la largeur de la marche $s(t)$ en fonction du du temps (ou de façon équivalente à l’angle d’étalement $\theta(t)$). Pour cette analyse, nous appuyons sur les prédictions des modèles d’érosion-déposition BCRE et ”BDG saturé”. Comme nous l’avons déjà annoncé, c’est le modèle de BCRE qui donne les résultats les plus probants pour capturer l’ensemble du processus d’étalement et avec lequel nous ferons les comparaisons.

Sur la figure (4.13).a, on peut observer les évolutions temporelles de l’angle d’étalement d’une marche de deux expériences faites avec deux hauteurs de marche différentes ($h_0 = 15.5$ cm et 30 cm) et un même angle initial $\theta_0 = 40^\circ$. L’ajustement des données par le modèle BCRE nous permet d’extraire les paramètres γ et θ_N . Nous trouvons des valeurs des paramètres relativement proches pour les deux expériences : $\gamma = 45$ s⁻¹, avec $\theta_N = 34.5^\circ$ pour $h_0 = 20$ cm et $\gamma = 39$ s⁻¹, avec $\theta_N = 34.2^\circ$ pour $h_0 = 30$ cm. Ce résultat confirme qu’à angle initial fixé, la processus d’étalement n’est pas influencé par la hauteur de la marche. Les valeurs de γ trouvées sont raisonnables puisqu’elles sont proches de $\sqrt{g/d} \approx 30$ s⁻¹ qui est l’ordre de grandeur attendu pour γ ($\gamma \propto g/V \propto \sqrt{g/d}$; cf chapitre 3). Par ailleurs, les valeurs trouvées pour l’angle neutre de l’ordre de 34° sont du même ordre de grandeur que celle obtenues dans les expériences sur l’angle neutre (qui varient entre 28° et 30° ; cf chapitre 3) mais néanmoins sensiblement supérieures.

Sur la figure (4.13).b, nous montrons deux autres exemples d’évolution temporelle de l’angle d’étalement d’une marche ayant un angle initial de 70° et des hauteurs différentes (respectivement $h_0 = 20$ cm et 35 cm). Ici, l’angle neutre calculé donne une

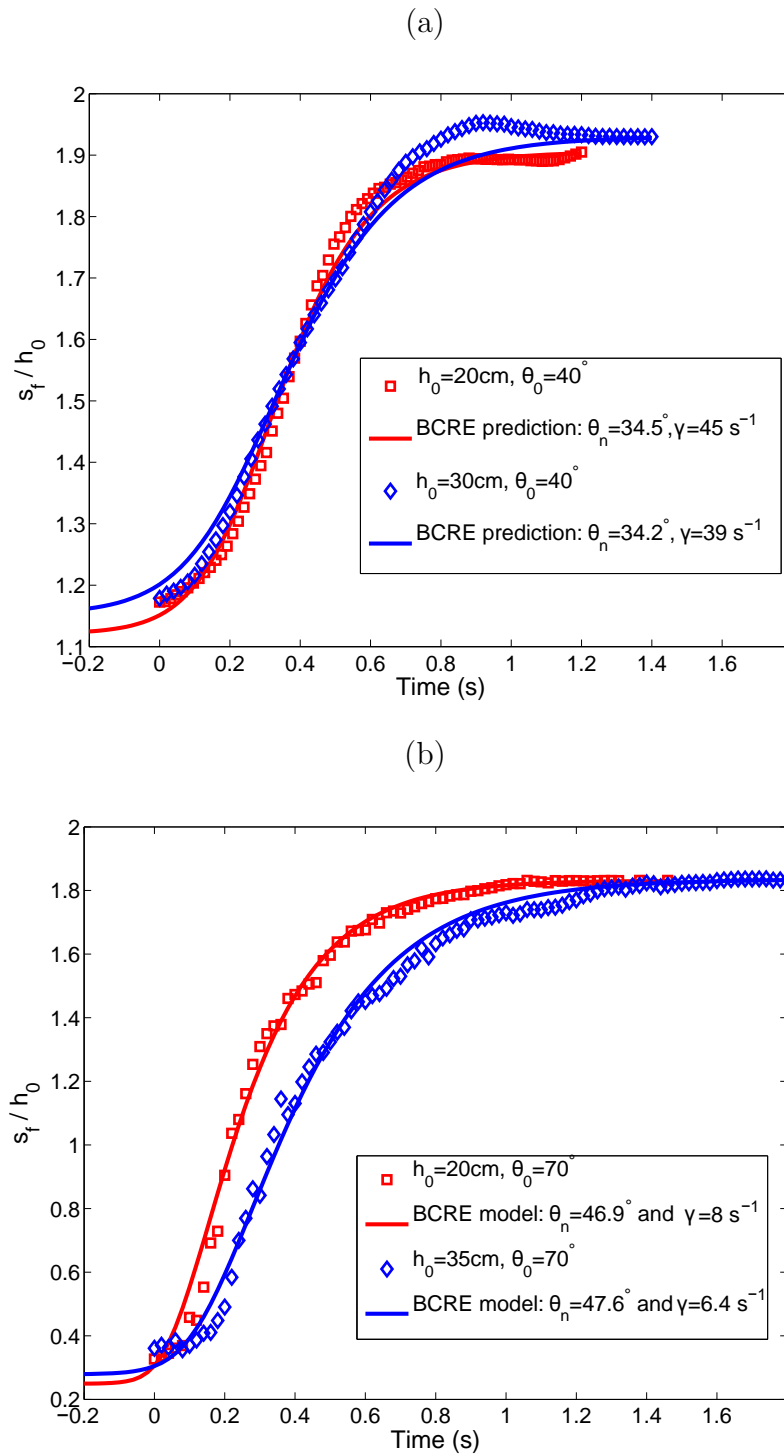


FIGURE 4.13 – Evolution de la largeur de la marche s/h_0 en fonction du temps : (a) évolution comparée pour deux expériences faites avec deux hauteurs de marche différentes ($h_0 = 20\text{ cm}$ et 30 cm) et un angle initial $\theta_0 = 40^\circ$. (b) évolution comparée pour deux expériences faites avec deux hauteurs de marche différentes ($h_0 = 15\text{ cm}$ et 35 cm) et un angle initial $\theta_0 = 70^\circ$.

valeur beaucoup plus grande de l'ordre de 47° et ne correspond pas aux valeurs trouvées dans les expériences sur l'angle neutre. Ces valeurs rappellent celles que l'on obtient dans le cas d'écoulements confinés sur un tas [14] où l'angle neutre peut atteindre des

valeurs très élevées lorsque les débits sont importants. Il semble donc que pour des angles initiaux élevés, on retrouve ici une situation analogue où en raison des forts effets inertiels, on s'attend des débits ponctuellement importants conduisant à une augmentation significative de l'angle neutre.

Le dernier point de discussion dans ce dernier exemple concerne les valeurs obtenues pour γ . Elles sont beaucoup plus faibles que celles obtenues dans le cas précédent. On trouve des valeurs de l'ordre $10s^{-1}$ contre $40s^{-1}$. Cette diminution n'est pas surprenante puisque l'on s'attend à avoir une vitesse d'écoulement V plus grande dans le cas d'effondrement de marche avec des angles initiaux plus élevés (en raison d'effets inertiels plus importants) et donc une valeur de γ plus petite en vertu du fait que $\gamma \propto g/V$.

4.4.3 Angle neutre θ_N

La détermination de l'angle neutre par ajustement de la courbe d'étalement $s(t)$ avec la prédiction du modèle de BCRE est la plus pertinente et la plus robuste. Néanmoins, il existe un moyen plus simple et plus direct en utilisant l'équation 4.18 qui relie de façon univoque θ_N avec θ_i et θ_f . Pour cela, il faut faire l'hypothèse que $\theta_i = \theta_0$ ce qui est raisonnable pour la plupart des expériences sauf celles réalisées avec un angle initial droit.

La figure 4.14 présente l'évolution de l'angle neutre θ_N en fonction de l'angle initial θ_i déduite de la relation 4.18 pour un angle final θ_f donné. Ce graphe confirme que l'angle neutre dans le cadre du modèle BCRE est sensible à une variation de l'angle initial de la marche : θ_N a d'abord une évolution à peu près linéaire avec θ_i tant que celui-ci reste inférieur à 90° puis augmente très fortement à l'approche de 90° . Sur cette figure, nous avons également indiqué les valeurs de l'angle neutre obtenues par ajustement des courbes d'étalement $s(t)$ des expériences réalisées sur fond rigide. Nous obtenons un accord très satisfaisant.

4.5 Conclusion

Le phénomène d'étalement d'une marche est une situation encore plus compliquée que la situation étudiée dans le chapitre 3. Ce phénomène est fortement instationnaire et très éloigné d'un écoulement "neutre" qui produit un équilibre entre l'érosion et la déposition. Néanmoins, les modèles d'érosion-déposition de BCRE et "BDG saturé" (qui sont des modèles au premier ordre) permettent de reproduire un certain nombre de caractéristiques de l'étalement en ajustant de façon idoine les paramètres phénoménologiques γ et θ_N .

On montre premièrement que le modèle BCRE permet de capturer l'ensemble du processus d'étalement de manière satisfaisante mais cependant pas optimale. Le modèle "BDG saturé" permet de mieux approcher le début du processus d'étalement mais faillit lourdement dans la description de la fin du processus, justement là où l'écoulement

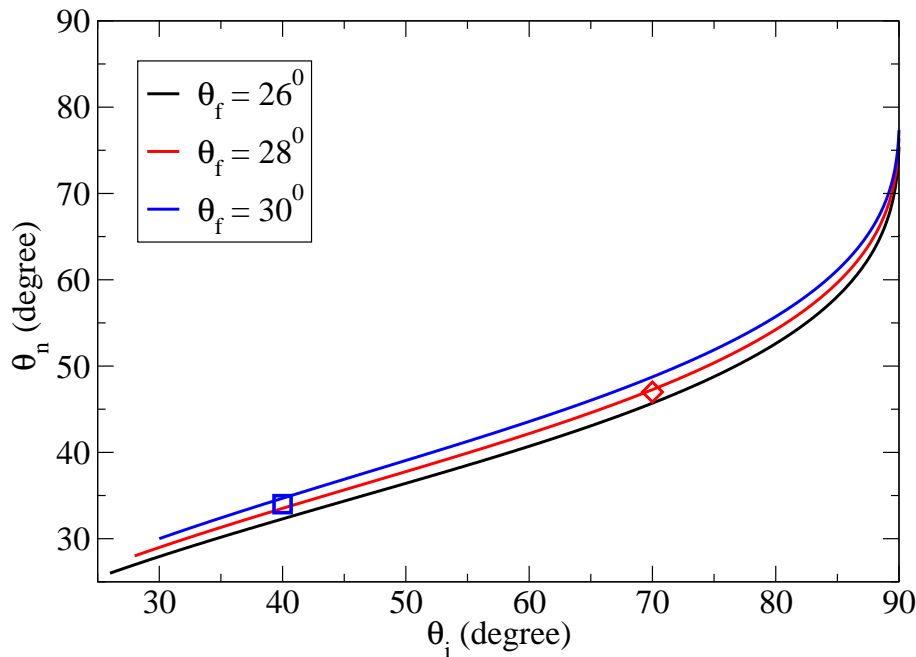


FIGURE 4.14 – Evolution de l’angle neutre θ_N en fonction de l’angle initial θ_i selon l’équation 4.18 pour un angle final θ_f donnés. Les symboles correspondent aux valeurs d’angle neutre déterminées par ajustement des courbes d’étalement.

devient peu épais et où la version ”saturée” du modèle BDG n’est plus adaptée. On s’attend donc à ce que l’utilisation du modèle original de BDG qui justement distingue les écoulements fins et épais fournisse un bien meilleur accord avec les expériences sur l’ensemble du processus d’étalement. Un des axes de travail à court terme sera donc de proposer une résolution de la version originale du modèle de BDG.

On montre également que pour un angle initial θ_0 donné, un jeu unique de valeurs de γ et θ_N permet de capturer la dynamique de l’étalement indépendamment de la hauteur initiale de la marche. En revanche, les valeurs de γ et θ_N dépendent de l’angle initial de la marche. Si celui-ci augmente, γ diminue alors que θ_N augmente significativement.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

▷ *Conclusion et perspectives* ◁

5.1 Conclusion

Nous avons étudié les phénomènes d'érosion et de déposition dans deux configurations d'écoulement différentes à l'aide d'un canal inclinable à 2 dimensions. La première configuration correspond à un écoulement sur un fond érodable engendré par un réservoir situé en amont du canal. La deuxième concerne l'effondrement d'une marche granulaire (problème du Sinai) qui est similaire à l'effondrement de colonnes granulaires. La particularité de ces écoulements est qu'ils engendrent des échanges importants entre une phase granulaire mobile (l'avalanche) et une phase granulaire immobile (le lit granulaire). Pour interpréter les résultats de nos expériences, nous nous sommes appuyés sur les prédictions théoriques obtenues à partir des modèles d'érosion-déposition phénoménologiques introduits par Bouchaud et ses collaborateurs d'une part et par Boutreux et De Gennes d'autre part.

En ce qui concerne la première configuration, l'objectif principal était de quantifier les processus d'érosion et de déposition notamment par la détermination de l'angle neutre θ_N , qui définit la pente critique pour laquelle ces deux processus s'équilibrent. Nous avons mis en évidence qu'au voisinage de l'angle neutre, l'efficacité d'érosion E ($E = M_f/M_0 - 1$) augmente avec l'angle d'inclinaison du lit et varie linéairement avec l'écart à l'angle neutre. Cette tendance est très bien prédite par le modèle d'érosion et de déposition de BDG dans lequel le taux d'échange local entre l'érosion et la déposition devient indépendant de l'épaisseur d'écoulement au dessus d'une épaisseur critique.

Nous avons également étudié l'influence de la longueur du lit et de la masse initiale du réservoir sur la valeur de l'angle neutre. Nous avons montré que l'angle neutre est indépendant de la longueur du lit dans la gamme étudiée mais qu'il n'est cependant pas une caractéristique intrinsèque du lit granulaire car il dépend de l'épaisseur initiale R_0 de l'avalanche. On trouve que l'angle neutre diminue significativement avec l'épaisseur initiale de l'avalanche. Cette dépendance n'est pas prédite par les modèles d'érosion et de déposition de BCRE et de BDG qui considèrent l'angle neutre comme une quantité intrinsèque invariable. Nous avons proposé une modification du modèle BDG pour rendre compte de cet effet en introduisant une dépendance de l'angle neutre avec l'épaisseur locale de la couche mobile R .

Le phénomène d'étalement d'une marche est fortement instationnaire et est donc assez éloigné de la situation précédente où l'on cherchait à étudier les caractéristiques des écoulements "neutres" qui produisent un équilibre entre l'érosion et la déposition. On montre que le modèle BCRE permet de capturer l'ensemble du processus d'étalement de manière relativement satisfaisante alors que la version "saturée" du modèle BDG donne un meilleur accord au début de l'étalement, jusqu'au moment où l'écoulement devient peu épais et où le modèle sort de son domaine validité. On s'attend donc à ce que la version "originale" du modèle BDG (qui tient compte de la transition entre les écoulements fins et épais) donne une description entièrement satisfaisante de l'étalement. On montre également que pour un angle initial θ_0 de la marche, un jeu unique de valeurs de γ et θ_N permet de capturer la dynamique de l'étalement indépendamment de la hauteur initiale de la marche. En revanche, les valeurs de γ et θ_N

dépendent fortement de l'angle initial de la marche.

5.2 Perspectives

Ce travail de thèse ouvre de nouvelles perspectives. Nos expériences sur l'angle neutre ont permis de clarifier et de valider certaines hypothèses des modèles phénoménologiques qui reposent cependant sur une description ultra-simplifiée des processus d'érosion et de déposition. La prochaine étape est de développer des modèles plus sophistiqués capables de prédire quantitativement les phénomènes d'érosion et de déposition. Une idée prometteuse serait d'utiliser les nouvelles approches continues basées sur des lois rhéologiques non-locales ou des théories de plasticité non-locales. Ces modèles sont en effet capables de décrire la transition entre les phases statiques et mobiles avec un minimum d'ingrédients et de paramètres.

Concernant les perspectives expérimentales, la suite naturelle serait d'analyser les processus d'érosion et de déposition à l'échelle du grain. Ceci est possible du fait du caractère 2D du dispositif expérimental qui permet un suivi des particules relativement aisé en utilisant de l'imagerie rapide. Ce travail a été commencé mais pas finalisé dans le cadre de cette thèse. Cette analyse à l'échelle des particules nous semble essentielle pour progresser dans la compréhension fine de ces phénomènes et ainsi orienter les travaux de modélisation.

Enfin, un dernier point important concerne les processus d'érosion et de déposition dans le contexte d'écoulements polydisperses. Cette question a été peu étudiée jusqu'à présent mais est pourtant fondamentale pour de nombreux écoulements géophysiques.

Annexe A

Méthode optique pour mesurer l'écartement entre les plaques de verres du canal d'écoulement

▷ Cette annexe décrit la méthode optique utilisé pour mesurer l'écartement entre les plaques de verres du canal d'écoulement. ◁

les deux plaques de verre du canal d'écoulement doivent avoir un écartement uniforme afin d'assurer d'un frottement uniforme tout au long de l'écoulement. Pour cela, il est essentiel de vérifier et contrôler cet écartement. Nous avons réalisé des mesures de l'écartement des plaques de verre à 30 endroits du canal en utilisant une méthode optique mise au point par Nicolas Taberlet dans sa thèse [51]. Ces 30 points de mesure se situent sur une grille uniforme de 10×3 avec 10 lignes verticales et 3 lignes horizontales. Cette méthode consiste à projeter un faisceau laser en incidence oblique sur les plaques de verre. En relevant la position des rayons successifs réfléchis, nous pouvons en déduire la valeur de l'écartement local entre les deux plaques de verre.

La figure A.1 présente la méthode utilisée. Pour déterminer l'écartement des deux plaques, nous identifions les trois premières réflexions et mesurons les distances successives x et y qui sont reliées aux angles incident et réfracté de la manière suivante : $x = 2d \tan r$ et $y = 2e \tan i$ où d et e sont respectivement l'épaisseur et l'écartement des plaques. En utilisant la loi de Snell-Descartes ($n_{air} \sin(i) = n_{verre} \sin(r)$), l'écartement e s'expriment simplement en fonction des distances x et y et des indices de réfraction de l'air et du verre :

$$e = \frac{y}{2 \tan i}, \quad \text{avec} \quad i = \arcsin \left(\frac{n_{verre}}{n_{air}} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2d} \right) \right) \right) \quad (\text{A.1})$$

Les mesures réalisées sur 30 points nous révèlent que les variations de l'écartement restent inférieur à $0,2mm$. On obtient un écartement moyen de $3,6mm$ avec un écart type de $0,2mm$.

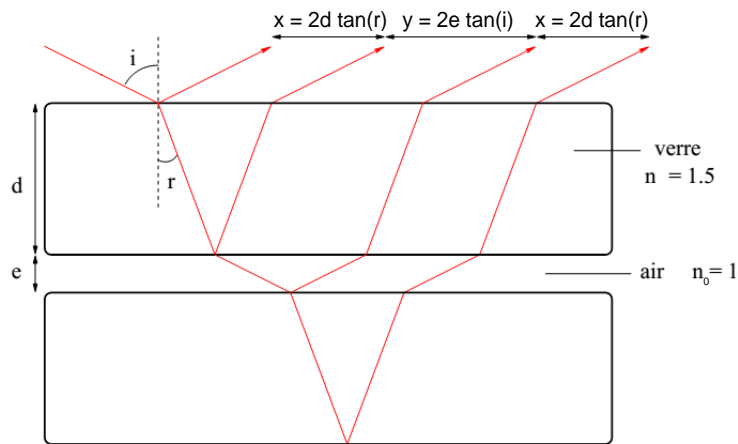


FIGURE A.1 – Illustration de la méthode optique pour mesurer de l'écartement entre deux plaques de verre du canal.

Annexe B

Équations BCRE et BDG pour l'écoulement granulaire

▷ *Cette annexe est pour le but de détailler comment résoudre des équations mathématiques proposés par BCRE (1994) [31], (1995) [32] et Bouteux, Raphaël et de Gennes (1998) [34] pour la modélisation de l'écoulement granulaire.* ◁

B.1 Formulations originales

Les modèles BCRE et BDG sont des modèles phénoménologiques avec une description de deux variables couplées : $h(x, t)$ est la hauteur (mesurée selon la direction verticale) de la phase statique au point d'abscisse x et au temps t ; $R(x, t)$ est la hauteur (mesurée aussi selon la direction verticale) de la phase roulante surmontant la phase statique, et $\theta(x, t)$ est l'angle local de la surface statique. On peut négliger les variations de la vitesse d'écoulement des grains, et la prendre constante et égale à v_d (l'indice rappelle qu'il s'agit de la vitesse d'écoulement des grains). L'évolution de h et R est alors régie par le système d'équations remarquablement simple suivant :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\Gamma(x, t) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial R(x, t)}{\partial t} = v_d \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R(x, t)}{\partial x^2} + \Gamma(x, t) \quad (\text{B.2})$$

Selon BCRE, le taux d'échange solide - liquide dépend de l'épaisseur de la couche roulante : $\Gamma(x, t) = \gamma R(\theta - \theta_N) = \gamma R \Delta\theta$. En fusionnant ces deux équations différentielles de h et R ci-dessus, nous obtenons que l'évolution de l'épaisseur R de la couche mobile est gouvernée selon l'équation de convection-diffusion ci-dessous (celle-ci est la formulation originale de BCRE) :

$$\frac{\partial R(x, t)}{\partial t} = v_d \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R(x, t)}{\partial x^2} + \gamma R \Delta\theta \quad (\text{B.3})$$

avec v_d est la vitesse d'advection de grains mobiles, D est le coefficient de diffusion que nous pouvons estimer expérimentalement.

L'équation (B.3) est une équation de convection-diffusion de deuxième ordre où nous connaissons déjà la solution générale. Nous allons présenter et compléter cette solution par la suite pour le modèle BCRE et BDG (BCRE saturé).

B.2 Modèle BCRE

La solution générale de l'équation de convection-diffusion de BCRE est obtenue sous la forme d'une fonction gaussienne comme présentée dans l'équation (B.4).

$$R(x, t) = \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} e^{\gamma \Delta\theta t} \quad (\text{B.4})$$

En appliquant la loi de conservation de masse à l'angle neutre ($\Delta\theta = 0$), nous allons obtenir la valeur de coefficient K comme suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} e^{\gamma \Delta\theta t} dx = R_0 \Delta_0 \propto M_i \quad (\text{B.5})$$

En utilisant la méthode de changement de variable avec $X = x - vt$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x)^2}{4Dt}} dX = R_0 \Delta_0 \quad (\text{B.6})$$

Pour le calcul de l'intégration gaussienne, nous avons : $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ et puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Finalement, nous pouvons déterminer le coefficient $K = R_0 \Delta_0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x)^2}{4Dt}} dX = \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4Dt}}} = K = R_0 \Delta_0 \quad (\text{B.7})$$

et puis la formulation de BCRE :

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} e^{\gamma \Delta \theta t} \quad (\text{B.8})$$

B.3 Modèle BDG (BCRE saturé)

La forme saturée du modèle BCRE est proposée par BDG pour des écoulements avec l'épaisseur de la couche roulante est important et le taux d'échange ne dépend plus de R : $E(x, t) = v_{up}(\theta - \theta_N)$, avec v_{up} est un constant équivalent a une vitesse, nommée la vitesse de remontée. Il faut préciser que la vitesse de remontée v_{up} ne correspond pas à une vitesse matérielle de remontée des grains statiques (qui n'aurait pas lieu d'être) : c'est la remontée du profil statique est méditée par les grains roulants.

L'équation convection-diffusion qui décrit l'évolution de l'épaisseur de la couche mobile R est devenue comme suivante :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_d \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + v_{up} \Delta \theta \quad (\text{B.9})$$

La solution générale de l'équation de convection-diffusion de BCRE est obtenue sous la forme d'une fonction gaussienne comme présentée dans l'équation (B.10).

$$R(x, t) = \frac{K}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} + v_{up} \Delta \theta t \quad (\text{B.10})$$

En appliquant aussi la lois de conservation de masse à l'angle neutre ($\Delta \theta = 0$), nous allons obtenir la valeur de coefficient $K = R_0 \Delta_0$ et la version finale de la formulation BDG comme le suivant :

$$R(x, t) = \frac{R_0 \Delta_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-v_d t)^2}{4Dt}} + v_{up} \Delta \theta t \quad (\text{B.11})$$

Les solutions finales des équations de BCRE ((B.8)) et BDG ((B.11)) sont utilisées pour évaluer la masse sortie et le coefficient d'érosion obtenus pendant les expériences.

Annexe C

Équations BDG pour la marche du Sinai

▷ *Cette annexe est pour le but de présenter la construction du modèle BDG en utilisant des hypothèses initiales proposées par Bouteux et al. (1997) [33].* ◁

Dans leur article [33], Boutreux et De Gennes proposent le modèle d'érosion et de déposition basé sur la conservation de masse et le terme d'échange entre deux phases mobile et statique (C.1) et (C.2). Ceci est un cas particulier du modèle introduit par Bouchaud, Cates, Ravi Prakash et Edwards (BCRE) [31, 32, 34] quand le terme diffusion est négligé à cause du parcours assez court dans l'écoulement d'une marche de grains de type Sinaï.

La valeur d'angle neutre θ_N dans le cas de la marche du Sinaï est totalement différent que celui obtenu dans le chapitre précédent (strictement lié à la fois avec le lit et le réservoir). En effet, Boutreux et De Gennes définissent l'angle neutre θ_N comme l'angle de repos du milieu granulaire avec une injection de très faible débit comme dans le cas d'une dune de sables qui se forme grâce à une dépôt de très faible débit au sommet de cette dune.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v \frac{\partial R}{\partial x} + \gamma R (\theta - \theta_N) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\gamma R (\theta - \theta_N) \quad (\text{C.2})$$

Avec $h(x, t)$ est la hauteur locale de la partie solide, $R(x, t)$ est l'épaisseur locale de la partie roulante, η et γ sont des constants. Pour être simple, nous prenons des valeurs typiques pour la vitesse $v = \gamma d$, où d est le diamètre des grains, γ est la fréquence microscopique, correspondant en gros à la fréquence d'un pendule de hauteur d ($\gamma = \sqrt{g/d}$).

Il faut noter que l'angle θ de la marche varie en fonction du temps et le système des équations ci-dessus devient très compliquées pour pouvoir résoudre comme pour le modèle BCRE où nous supposons que la pente de l'interface entre les grains statiques et les grains roulants soit inchangé. C'est la raison pour la quelle, Boutreux et De Gennes doivent les simplifier en utilisant l'hypothèse de pente droite et des observations expérimentales suivantes :

1. La pente de la surface de la marche est supposée comme une ligne droite dont l'angle θ est indépendant de x .
2. L'épaisseur de la couche roulante R doit s'annuler aux deux extrémités de la marche, et avoir une valeur maximale R_0 , près du centre de la marche.

Les remarques ci-dessus nous permettent obtenir une représentation simplifiée de la variation de l'espèce roulante en fonction de s :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \alpha \frac{R_0}{s} \quad (\text{C.3})$$

avec s est la largeur étalée de la marche, et α est un nombre sans dimension. Sa valeur absolue $|\alpha|$ est de l'ordre de 1 près des extrémités, et elle est inférieure à 1 ailleurs ; elle est nulle là où R est maximale. On en déduit que dans l'équation (C.1), écrite près de l'endroit où R est maximale, le terme de convection est négligeable par

rapport au terme d'échange lorsque la hauteur initiale de la marche h_i est très grande comparant au diamètre d des grains :

$$v \frac{\alpha R_0}{s} \frac{1}{\gamma R_0 (\theta - \theta_N)} = v \frac{\alpha}{\gamma s (\theta - \theta_N)} \leq \frac{v}{\gamma h_i} = \frac{d}{h_i} \ll 1 \quad (\text{C.4})$$

où $h_i = s(\theta - \theta_N)$ (fonction trigonométrique du triangle h_i et s). Finalement, nous avons :

$$v \frac{\partial R_0}{\partial x} \ll \gamma R_0 (\theta - \theta_N) \quad (\text{C.5})$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (C.1) sous sa nouvelle forme en fonction de la valeur maximale de l'espèce roulante comme suivant :

$$\frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dt} = \gamma (\theta - \theta_N) \quad (\text{C.6})$$

Par ailleurs, nous pouvons remplacer l'équation de bilan (C.2) par une forme plus simple, déduite de la condition aux limites en bas de la marche ($h = 0$). Dans cette région, le flux Rv de l'espèce roulante doit correspondre à l'augmentation d'espèce solide (car tous les grains s'arrêtent en bas de la marche), ce qui implique :

$$v \frac{\partial R}{\partial x} = \theta \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.7})$$

où dx/dt est la vitesse de déplacement vers la gauche du bas de la marche, et les valeurs de θ et $\partial R/\partial x$ sont calculés en ce point. Nous avons $dx/dt = ds/dt$; de plus, dans cette approximation, θ est constant par tout ($\theta = h_i/s$), et dR/dx peut être estimé en utilisant l'équation (C.3). On arrive en fin à :

$$h_i \frac{ds}{dt} = avR_0 \quad (\text{C.8})$$

avec a est un constant. Nous pouvons retirer R_0 à partir de l'équation (C.8) et le mettre dans (C.6) pour éliminer a et v . Finalement, nous obtenons la formulation originale de BDG :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \gamma (\theta - \theta_N) \frac{ds}{dt} \quad (\text{C.9})$$

La solution exacte de la formulation BDG est obtenue facilement en remplaçant θ et θ_N par $\tan \theta$ et $\tan \theta_N$ afin d'améliorer la précision du modèle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \gamma (\tan \theta - \tan \theta_N) \frac{ds}{dt} \quad (\text{C.10})$$

A partir des équations (C.9) et (C.10), nous avons utilisé des analyses algébriques (simplification et intégration de deux côtés) pour calculer la dérivée première ordre en fonction du temps de la largeur étalée de la marche comme présentées dans les études de la marche du Sinai.

Bibliographie

- [1] Bruno Andreotti, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. *Les milieux granulaires : Entre fluide et solide*. EDP sciences, 2012. ix, 6
- [2] Raphaël Fischer, Philippe Gondret, Bernard Perrin, and Marc Rabaud. Dynamics of dry granular avalanches. *Physical Review E*, 78(2) :021302, 2008. ix, 8, 9, 28
- [3] Y Grasselli and HJ Herrmann. On the angles of dry granular heaps. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3) :301–312, 1997. ix, 9, 10
- [4] Ph Boltenhagen. Boundary effects on the maximal angle of stability of a granular packing. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 12(1) :75–78, 1999. ix, 9, 10, 11
- [5] Sylvain Courrech Du Pont. *Avalanches granulaires en milieu fluide*. PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, 2003. ix, 10, 11
- [6] Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, and P. Zulli. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres. *Phys. Rev. E*, 64 :021301, Jul 2001. ix, 10, 11
- [7] Sébastien Kiesgen De Richter. *Étude de l'organisation des réarrangements d'un milieu granulaire sous sollicitations mécaniques*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2009. ix, 11, 12, 49
- [8] MA Aguirre, N Nerone, I Ippolito, A Calvo, and D Bideau. Granular packing : influence of different parameters on its stability. *Granular Matter*, 3(1-2) :75–77, 2001. ix, 12, 13
- [9] P Evesque, D Fargeix, P Habib, MP Luong, and P Porion. Pile density is a control parameter of sand avalanches. *Physical Review E*, 47(4) :2326, 1993. x, 13
- [10] N Fraysse, H Thomé, and L Petit. Humidity effects on the stability of a sand-pile. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 11(4) :615–619, 1999. x, 14
- [11] HM Jaeger, Chu-heng Liu, and Sidney R Nagel. Relaxation at the angle of repose. *Physical Review Letters*, 62(1) :40, 1989. x, 15
- [12] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4) :341–365, 2004. x, 20, 21
- [13] Olivier Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of Fluids (1994-present)*, 11(3) :542–548, 1999. x, xi, 21, 22, 23, 30
- [14] Nicolas Taberlet, Patrick Richard, Alexandre Valance, Wolfgang Losert, José Miguel Pasini, James T Jenkins, and Renaud Delannay. Superstable granular heap in a thin channel. *Physical review letters*, 91(26) :264301, 2003. xi, 23, 24, 84

- [15] E Lajeunesse, A Mangeney-Castelnau, and JP Vilotte. Spreading of a granular mass on a horizontal plane. *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(7) :2371–2381, 2004. xi, 24, 25, 26, 81
- [16] D. Bideau, I. Ippolito, M. A. Aguirre, A. Calvo, and N. Nerone. Some experiments on granular surface flow. In Y. Kishino, editor, *Proc. of 4th International Conference on Micromechanics of Granular Media - Powder and Grains 2001*. Balkema, 2001. xi, 26, 27, 36, 58
- [17] Houda Mint Babah. *Étude expérimentale de quelques aspects de la problématique des dunes éoliennes : des processus d’avalanche à la stratigraphie des dunes*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2010. xi, 11, 12, 26, 27, 28, 30, 36, 58
- [18] Dah Ould Ahmedou. *Formation et migration des dunes de sable : : Etudes expérimentales des processus d’érosion, d’avalanches et du transport éolien*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2005. xi, 13, 26, 27, 31, 36, 58
- [19] J. Duran. *Sables, poudres et grains : introduction à la physique des milieux granulaires*. Collection Eyrolles sciences. Eyrolles, 1997. 7
- [20] Ralph A Bagnold. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 225, pages 49–63. The Royal Society, 1954. 8, 14
- [21] Réka Albert, István Albert, Daniel Hornbaker, Peter Schiffer, and Albert-László Barabási. Maximum angle of stability in wet and dry spherical granular media. *Physical Review E*, 56(6) :R6271, 1997. 8
- [22] MA Aguirre, N Nerone, A Calvo, I Ippolito, and D Bideau. Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing. *Physical Review E*, 62(1) :738, 2000. 8, 11, 14
- [23] YC Zhou, BH Xu, AB Yu, and P Zulli. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder technology*, 125(1) :45–54, 2002. 10
- [24] Jean-François Métayer. *Stabilité et propriétés rhéologiques d’empilements granulaires confinés*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2008. 11
- [25] G Felix, U D’Ortona, and V Falk. Avalanches of dry granular material in rotating drums. *Powders and Grains, Swets and Zeitlinger, Lisse*, pages 475–478, 2001. 12
- [26] Frédéric Restagno, Cécile Ursini, Hervé Gayvallet, and Élisabeth Charlaix. Aging in humid granular media. *Physical review E*, 66(2) :021304, 2002. 14
- [27] Jean Rajchenbach. Flow in powders : from discrete avalanches to continuous regime. *Physical Review Letters*, 65(18) :2221, 1990. 15
- [28] P-A Lemieux and DJ Durian. From avalanches to fluid flow : A continuous picture of grain dynamics down a heap. *Physical Review Letters*, 85(20) :4273, 2000. 15, 23
- [29] Christian M Dury, Gerald H Ristow, Jamie L Moss, and Masami Nakagawa. Boundary effects on the angle of repose in rotating cylinders. *Physical Review E*, 57(4) :4491, 1998. 15

- [30] Xiao Yan Liu, E Specht, and J Mellmann. Experimental study of the lower and upper angles of repose of granular materials in rotating drums. *Powder Technology*, 154(2) :125–131, 2005. 15
- [31] J-P Bouchaud, ME Cates, J Ravi Prakash, and SF Edwards. A model for the dynamics of sandpile surfaces. *Journal de Physique I*, 4(10) :1383–1410, 1994. 16, 19, 60, 93, 98
- [32] J-P Bouchaud, ME Cates, J Ravi Prakash, and SF Edwards. Hysteresis and metastability in a continuum sandpile model. *Physical review letters*, 74(11) :1982, 1995. 16, 19, 60, 93, 98
- [33] Thomas Boutreux and Pierre-Gilles de Gennes. Étalement d’une marche de sable : Le problème du sinaï. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 325(2) :85–89, 1997. 16, 18, 25, 62, 71, 97, 98
- [34] Thomas Boutreux, Elie Raphaël, and Pierre-Gilles de Gennes. Surface flows of granular materials : a modified picture for thick avalanches. *Physical Review E*, 58(4) :4692, 1998. 16, 18, 62, 93, 98
- [35] Stuart B Savage and K Hutter. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics*, 199 :177–215, 1989. 16
- [36] AJC de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et l’introduction des marées dans leurs lits. *Comptes rendus des seances de l’Academie des Sciences*, 36 :174–154, 1871. 16
- [37] S Douady, B Andreotti, and A Daerr. On granular surface flow equations. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 11(1) :131–142, 1999. 16
- [38] Devang V Khakhar, Ashish V Orpe, and Julio M Ottino. Surface granular flows : two related examples. *Advances in Complex Systems*, 4(04) :407–417, 2001. 16
- [39] J. M. N. T. Gray and C. Ancey. Segregation, recirculation and deposition of coarse particles near two-dimensional avalanche fronts. *Journal of Fluid Mechanics*, 629 :387–423, 6 2009. 16
- [40] D Bonamy, F Daviaud, L Laurent, M Bonetti, and JP Bouchaud. Multiscale clustering in granular surface flows. *Physical review letters*, 89(3) :034301, 2002. 16
- [41] Igor S Aranson and Lev S Tsimring. Continuum description of avalanches in granular media. *Physical Review E*, 64(2) :020301, 2001. 16
- [42] Yoël Forterre and Olivier Pouliquen. Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 486 :21–50, 2003. 21
- [43] Adrian Daerr and Stéphane Douady. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, 399(6733) :241–243, 1999. 22
- [44] L Quartier, B Andreotti, S Douady, and A Daerr. Dynamics of a grain on a sandpile model. *Physical Review E*, 62(6) :8299, 2000. 22
- [45] Michel Y Louge and Stephen C Keast. On dense granular flows down flat frictional inclines. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(5) :1213–1233, 2001. 22

- [46] Olivier Pouliquen and Nathalie Renaut. Onset of granular flows on an inclined rough surface : dilatancy effects. *Journal de Physique II*, 6(6) :923–935, 1996. 22
- [47] Adrian Daerr. Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(7) :2115–2124, 2001. 22
- [48] Celine Goujon, Nathalie Thomas, and Blanche Dalloz-Dubrujeaud. Monodisperse dry granular flows on inclined planes : Role of roughness. *The European Physical Journal E*, 11(2) :147–157, 2003. 22
- [49] JP Koeppel, M Enz, and J Kakalios. Phase diagram for avalanche stratification of granular media. *Physical Review E*, 58(4) :R4104, 1998. 23
- [50] D. Bonamy, B. Faucherand, M. Planelles, F. Daviaud, and L. Laurent. Granular surface flows in a rotating drum : experiments and continuous description. In Y. Kishino, editor, *Proc. of 4th International Conference on Micromechanics of Granular Media - Powder and Grains 2001*. Balkema, 2001. 23
- [51] Nicolas Taberlet. *Écoulements gravitaires de matériaux granulaires*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2005. 23, 92
- [52] E Lajeunesse, JB Monnier, and GM Homsy. Granular slumping on a horizontal surface. *Physics of Fluids (1994-present)*, 17(10) :103302, 2005. 24
- [53] Gert Lube, Herbert E Huppert, R Stephen J Sparks, and Mark A Hallworth. Axisymmetric collapses of granular columns. *Journal of Fluid Mechanics*, 508 :175–199, 2004. 24
- [54] NJ Balmforth and RR Kerswell. Granular collapse in two dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 538 :399–428, 2005. 24
- [55] Gert Lube, Herbert E Huppert, R Stephen J Sparks, and Armin Freundt. Collapses of two-dimensional granular columns. *Physical Review E*, 72(4) :041301, 2005. 24
- [56] Gert Lube, Herbert E Huppert, R Stephen J Sparks, and Armin Freundt. Static and flowing regions in granular collapses down channels. *Physics of Fluids (1994-present)*, 19(4) :043301, 2007. 24
- [57] L Staron and EJ Hinch. Study of the collapse of granular columns using two-dimensional discrete-grain simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 545 :1–27, 2005. 25
- [58] Anne Mangeney-Castelnau, François Bouchut, JP Vilotte, E Lajeunesse, A Aubertin, and Marina Pirulli. On the use of saint venant equations to simulate the spreading of a granular mass. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 110(B9), 2005. 25
- [59] E Larrieu, L Staron, and EJ Hinch. Raining into shallow water as a description of the collapse of a column of grains. *Journal of Fluid Mechanics*, 554 :259–270, 2006. 25
- [60] A Mangeney, Olivier Roche, O Hungr, N Mangold, G Faccanoni, and A Lucas. Erosion and mobility in granular collapse over sloping beds. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface (2003–2012)*, 115(F3), 2010. 25
- [61] M Wieland, JMNT Gray, and K Hutter. Channelized free-surface flow of cohesionless granular avalanches in a chute with shallow lateral curvature. *Journal of Fluid Mechanics*, 392 :73–100, 1999. 64, 66

Erosion and deposition processes in surface granular flows

T. Trinh, P. Boltenhagen, R. Delannay and A. Valance*

*Institut de Physique de Rennes, CNRS UMR 6251,
Université de Rennes 1, 35042 Rennes Cedex, France.*

(Dated: September 22, 2017)

We report on experiments aiming at characterizing erosion and deposition processes on a tilted granular bed. We investigate the existence of the neutral angle, that is the critical angle at which erosion balances exactly accretion after the passage of a granular avalanche of a finite mass. Experiments show in particular that the neutral angle depends both on the avalanche mass and shape but is rather insensitive to the bed length. This result strongly suggests that the effective friction between the static and mobile granular phase can not be taken as an intrinsic property that is only material-dependent but should be considered as flow-dependent property. Interestingly, for a given avalanche mass, the net erosion rate increases linearly with the angular deviation from the neutral angle. We also compare our data with the predictions of the BCRE erosion-deposition model introduced by Bouchaud, Cates, Ravi Prakash and Edwards [J. Phys. I France **4**, 1283 (1994)]. We show that the predictions drawn from the modified version of the BCRE model proposed by Boutreux and De Gennes, in which the local erosion rate between the static and mobile phase is independent of the flow thickness, are in remarkable agreement with the experimental results.

PACS numbers: 45.70.-n, 45.70.Vn, 47.57.Gc.

I. INTRODUCTION

Erosion and deposition processes occur in various natural phenomena, including aquatic sediment transport in rivers and/or marine environment, aeolian sand transport, debris flows, snow avalanches and granular avalanches on the lee side of a aeolian dune. These flows are characterized by a mobile granular phase driven by the shearing of fluid (air or water) or simply by gravity, which interacts with an underlying static granular phase. While erosion and deposition processes have been widely studied in the context of fluid-mediated particle transport (aeolian and aquatic sediment transport), there has been much less attention to particle entrainment by a granular avalanche.

The present experimental study deals with the erosion and deposition processes occurring when a granular avalanche flows over an underlying particle bed. This situation is commonly observed when an avalanche is triggered at the surface of a dry granular heap or when a granular packing is tilted to a critical angle at which it fails and an avalanche is triggered. This angle, referred to as the maximum angle of stability or the static friction angle, θ_s , has been first noticed by Bagnold [2] and is several degrees larger than the angle of repose (called hereafter the dynamic friction angle), θ_d , at which the pile surface relaxes after the avalanche. This is the so-called Bagnold hysteresis. Many studies aiming at characterizing this angle difference were carried out either in a rotating drum configuration [3] or by progressively tilting a granular packing confined in a box [4, 5]. If the maximum angle of stability is essentially determined by

geometrical stability criteria regardless solid friction [6], the origin of the angle of repose has not been clearly identified.

It is worthwhile to emphasize that these two angles have their equivalents in granular flows down rigid and rough inclines: θ_{start} and θ_{stop} defined as the angle at which a static granular layer with a uniform and finite thickness starts to flow on a rough inclined plane and the one at which a flowing granular layer with a uniform and finite thickness comes at rest, respectively [7, 8]. These angles were found to be decreasing function of the layer thickness and in general do not coincide [8, 9]. There is typically a range of angles in which both static and dynamic phases coexist and this is a consequence of the Bagnold hysteresis. Importantly, in the limit of infinite large layer thickness we turn back to the situation of flows over erodible bases and θ_{start} and θ_{stop} coincide with θ_s and θ_d , respectively.

A third characteristic angle arises from theoretical ideas: The concept of a neutral angle, a priori different from the dynamic angle repose, indeed emerged progressively [1, 10, 11]. This angle, denoted later by θ_n , has been introduced as the critical inclination at which the process of grain accretion compensates exactly the process of grain erosion [1]. Surprisingly, very few experimental attempts have been made to assess this angle. We are aware of only two experimental studies that provides an estimation of the neutral angle: the first one by Bideau et al. [12] and the other by Mint Babah [13]. They both used a three-dimensional tilted open box configuration and the exploratory data from the later suggest that the neutral angle depends on the size of the avalanche.

The neutral angle is the central concept of the pioneering theoretical work by Bouchaud et al. for modeling erosion and deposition processes occurring at the surface of a granular heap [1]. They proposed a continuum model,

*Electronic address: alexandre.valance@univ-rennes1.fr

referred hereafter to as the "BCRE" model, which describes the coupled dynamics of the mobile phase (i.e., the granular avalanche) and the static phase (i.e., the underlying static granular bed). The key assumption of the model is to consider that the local mass exchange rate between the mobile and static phase is linearly dependent on the difference between the local inclination of the static bed surface, θ , and the neutral angle θ_n . For inclination angle greater than θ_n , erosion prevails over deposition. Conversely, for angle smaller than θ_n , deposition surpasses erosion. The neutral angle thus plays a central role in the BCRE model.

The BCRE model is a simple phenomenological description which provides a very intuitive picture of a flow occurring at the surface of granular pile. More rigorous approaches based on hydrodynamics models [14–18] have been developed afterwards. Hydrodynamics descriptions of granular flows have been first introduced by Savage and Hutter [19]. They are based on hydrodynamics equations (incompressibility and momentum conservation) for the flowing material. After integration over the thickness of the flowing layer, depth-averaged (Saint-Venant) flow equations are obtained allowing the calculation of the flow thickness and mean velocity over the whole sample. These approaches based on Saint-Venant equations have been first applied to granular flows over fixed bottoms with a given topography [19] and extended later to granular flows over erodible beds with the integration of erosion-deposition mechanisms [14–16, 18]. In these more elaborated models, assumptions are however still required to model mass and momentum exchange between the static and the mobile phase.

One of the key issue is to describe correctly the shear stresses at the interface between the static and mobile granular phase. Most of the theoretical descriptions [15, 16, 18, 20–22] assume a simple yield criterion based on a constant Coulomb friction. The corresponding friction angle is formally equivalent to the neutral angle introduced by Bouchaud and co-workers [1]. This constant Coulomb friction is generally identified either to the static friction angle θ_s or to the dynamic angle of repose θ_d and not considered as a distinct angle. Our experiments suggest however that the neutral angle is distinct from θ_s and θ_d and is not constant but dependent on the size and shape of the granular avalanche. We believe that this outcome directly stems from the Bagnold hysteresis which leads to the existence of a finite range of angles in which both static and dynamic phase coexist, as previously mentioned. Very few granular flow models [23–25] incorporate this hysteretic behavior which is however crucial to describe accurately the erosion and deposition processes. Models that describe the static-flowing transition as an analog of a first-order phase transition [23, 24] or those that explicitly incorporate the static and dynamic friction angles in the friction law [14, 25] are capable of accounting for the hysteretic behavior.

In this paper, we present an experimental study that provide a quantification of the erosion and deposition

processes that take place in granular flows over a tilted erodible bed. We focus in particular on the determination of the exchange rate between the static and mobile phase. The results are analyzed and interpreted in the framework of the BCRE erosion-deposition model. This allows us in particular to assess the neutral angle and determine its parametric dependence according to the dynamical features of the avalanche such the mass and the aspect ratio.

The paper is organized as follows. Section II presents the BCRE model and a variant proposed by Bouteux and De Gennes (BDG) [11]. Section III describes the experimental set-up used for the experimental study. Experimental outcomes are presented in Section IV, while Section V compares the experimental outcomes with the predictions of the BCRE model and the BDG variant. Finally, conclusion is given Section VI.

II. BCRE AND BDG EROSION-DEPOSITION MODELS

To model erosion and deposition processes in granular flows, it is necessary to describe the interaction between the mobile granular phase and the static one. Unlike flows on a rigid base where the shear spans over the whole thickness of the system, flows on erodible beds are characterized by a shear localized in a narrow region close to the bed interface. The complexity of that kind of flows arises from the fact that the boundary between the mobile and the static phase is a free boundary which is not set by the operator but self adjusted by the system.

The simplest model describing erosion and deposition processes in granular avalanches is due to Bouchaud et al. [1, 10]. This is a phenomenological model based on a description of two coupled variables: the height $h(x, t)$ of the static layer and the thickness $R(x, t)$ of the mobile layer (see Fig. 1) where x and t denote the spatial and time coordinates, respectively. The evolution of the thickness R of the mobile layer is assumed to be governed by a convection-diffusion equation:

$$\frac{\partial R(x, t)}{\partial t} + V \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 R(x, t)}{\partial x^2} + \Gamma, \quad (1)$$

where V is the depth-averaged advection speed of the mobile grains, D is the diffusion coefficient and Γ characterizes the exchange rate between the static and the mobile phase. In this description, the mobile granular phase is assumed to be incompressible. The equation governing the height h of the static phase is deduced from mass conservation and reads:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\Gamma \quad (2)$$

The process that need to be specified is the mass exchange between the two phases. The originality and simplicity of the model is to assume that the exchange rate is proportional to the thickness of the mobile phase R

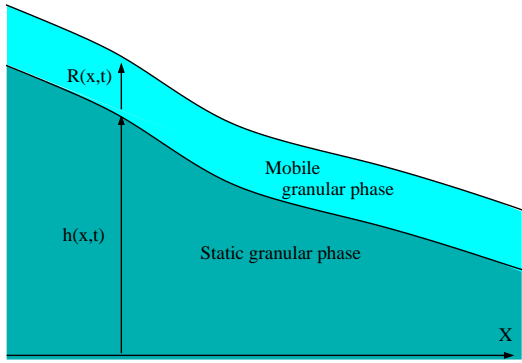


FIG. 1: Sketch representing a granular pile topped by a flowing layer: $h(x, t)$ and $R(x, t)$ are the height of the static layer and the thickness of the mobile layer, respectively, at position x and time t ; The local angle θ is defined as the local slope of the static bed: $\tan \theta = \partial h / \partial x$.

and to the departure of the local slope of the static bed from a critical bed slope:

$$\Gamma = \gamma R(x, t) (\tan \theta - \tan \theta_n) . \quad (3)$$

The critical angle θ_n is referred to as the neutral angle: When $\theta > \theta_n$ (resp. $\theta < \theta_n$), there is a net erosion (resp. accretion). If $\theta = \theta_n$, erosion and accretion exactly balance such that the exchange rate is reduced to zero. The coefficient γ denotes the typical collision frequency of a mobile grain with the static bed.

Eq.(3) for the exchange term is expected to be relevant as long as the flowing layer remains thin (typically a few grain diameters). For thick flows, the grains from the upper layers do not likely interact with the static bed so that the exchange rate is expected to saturate when R becomes larger than a screen length R_c . Using the latter argumentation, Boutreux and De Gennes [11] suggest that the exchange rate saturate for thick flows (i.e. $R > R_c$) as:

$$\Gamma = V_{up} (\tan \theta - \tan \theta_n) , \quad (4)$$

where $V_{up} = \gamma R_c$ has the dimensions of a velocity. It can be shown that V_{up} corresponds to the speed of uphill waves running at the surface of the static phase [11]. We will refer to the latter description as the BDG model in contrast with the original formulation named the BCRE description.

It is worth mentioning that BCRE and BDG models have almost exactly the same structure (except for the diffusive term) than equations derived from more rigorous Saint-Venant hydrodynamics description. Aradian and co-workers [16] showed that the BDG model is equivalent to a Saint-Venant description provided a reduced number of physical assumptions, namely a constant density, a linear velocity profile and a Coulomb friction force with a constant friction coefficient. The

term-to-term comparison allows in particular to give an explicit expression of the phenomenological parameter V_{up} and the depth-average velocity V : $V_{up} = g/\gamma_0$ and $V = \gamma_0 R \cos^2 \theta_n$ (where γ_0 is the constant velocity gradient of the flowing layer). In contrast, the BCRE model is equivalent to a Saint-Venant description assuming instead a constant velocity profile. In the latter case, the phenomenological parameter γ can be identified to g/V .

The diffusion term in the BCRE and BDG equations has not a simple physical meaning since it has no counterpart within a Saint-Venant description that keeps only leading order terms. This diffusion term can be however considered as a second-order correction and interpreted as a viscous like damping term in the context of more complex flow velocity profiles [26].

Our purpose here is not to determine what is the most appropriate rheology to describe granular flows over erodible beds but merely to determine in which extent the simple description of the mass exchange term Γ proposed in the BCRE and BDG models is pertinent to interpret experimental data extracted from simple canonical experiments allowing a simple and direct measurement of erosion and deposition processes.

III. EXPERIMENTAL SETUP

We designed a two-dimensional granular chute set-up (see Fig 2) with the aim to quantify the mass exchange rate in erosion-deposition processes and to check the relevance of the BCRE and BDG theoretical description. Particles used in the experiments are circular disks made in Polystyrene (of density 966 kg/m^3) and are 3 mm thick. The chute is 2 m long and is confined between two lateral glass walls whose gap is slightly larger than the particle thickness ($\simeq 3.5 \text{ mm}$). The system can be tilted with a hydraulic actuator at a given inclination angle between 0° to 40° . The static granular bed of length L is made of a bi-disperse mixture of 8 mm and 12 mm diameter disks with an equal mass ratio. Two different bed lengths have been used in the experiments: $L_b = 850$ and 1700 mm , respectively (see Table I). At the upper end of the chute, there is a reservoir filled with 8 mm diameter disks and whose height (R_0) and length (Δ_0) can be varied (see Fig. 2).

A typical experiment consists in releasing the particles of the reservoir and let them flow over the static granular bed tilted at a given angle. The release is quasi-instantaneous (typically 0.1 s) at the time scale of the flow. Depending on the initial mass M_0 contained in the reservoir and on the inclination angle Θ of the chute, the granular avalanche will erode material from the static bed or deposit new material on it. At low angles, deposition prevails and the avalanche stops before the end of the chute, whereas at larger angles, the avalanche is sustained down to the end of the chute and gets off the chute. The mass M_f collected at the exit of the chute is expected to grow with increasing inclination angle and

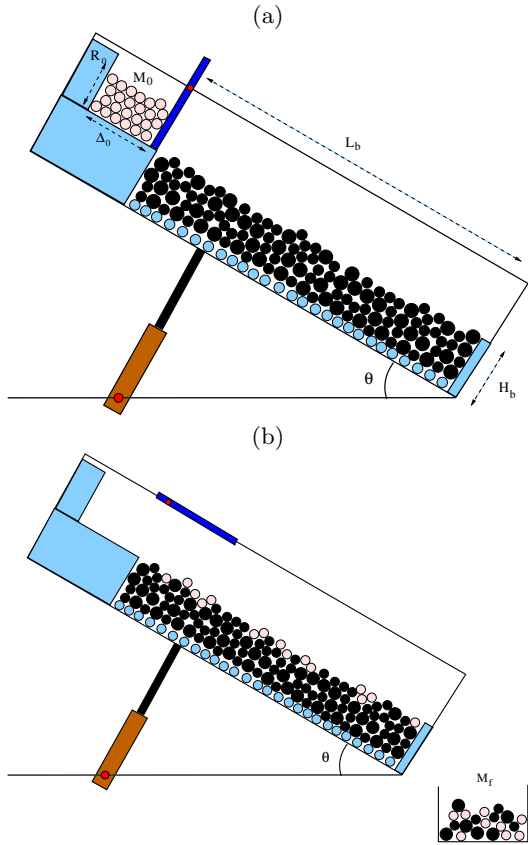


FIG. 2: Schematic view of the experimental Setup: a) Initial configuration before the release of the particles of the reservoir; b) Final configuration after the release. L_b is the length of the static granular bed and R_0 and Δ_0 are respectively the height and the width of the reservoir, which can be varied.

	Short bed	Long bed
L_b (bed length)	850 mm	1700 mm
H_b (bed height)	84 mm	84 mm
M_b (mass of the static bed)	180g	360g
θ_s (static angle)	$32.2^\circ \pm 0.8^\circ$	$31.4^\circ \pm 0.4^\circ$
θ_d (dynamical angle)	$28.2^\circ \pm 0.4^\circ$	$27.8^\circ \pm 0.5^\circ$
M_a (mass of a spontaneous avalanche)	$52g \pm 13g$	$118g \pm 25g$

TABLE I: Features of the static granular beds

to equate the initial mass M_0 released from the reservoir at a critical angle. This critical angle is expected to correspond to the neutral angle introduced in the BCRE model [1]. However, we should emphasize here that the experimental procedure does not provide a local measure of the exchange rate between the static and mobile layer but a global one integrated over the entire length of the static bed. The neutral angle determined from the experimental procedure will be referred to as Θ_n and may

Set	L_b (mm)	M_0 (g)	R_0 (mm)	Δ_0 (mm)	R_0/Δ_0
1	1700	55	145	145	1
2	1700	110	155	272	0.57
3	1700	110	205	205	1
4	1700	110	300	140	2.14
5	1700	110	371	113	3.28
6	1700	110	525	80	6.56
7	1700	220	218	383	0.57
8	1700	220	289	289	1
9	1700	220	423	198	2.14
10	1700	220	522	159	3.28
11	1700	300	338	338	1
12	850	110	155	272	0.57
13	850	110	205	205	1

TABLE II: List of the 13 sets of experiments achieved with the long bed (1-11) and the short bed (12 and 13), respectively.

a priori differ from the local neutral angle θ_n introduced in the BCRE model. We shall discuss this issue further in section 5.

As already mentioned, the reservoir is characterized by its height R_0 and length Δ_0 so that the mass M_0 of grains contained in the reservoir is simply proportional to the product $R_0 \times \Delta_0$. A given mass can be obtained with various aspect ratio R_0/Δ_0 of the reservoir. It is also important to emphasize that the surface fraction of the granular packing does not show significant variation in the experiments such that there is one-to-one relation between the mass M_0 and the effective area $R_0 \times \Delta_0$. We ran several sets of experiments where both the mass M_0 released from the reservoir and the aspect ratio of the reservoir were varied systematically (see Table II).

We also investigated the dependence of the erosion and deposition processes on the bed length using two different bed dimensions (cf Table II). We characterized for each set of experiments the erosion efficiency of the avalanche, defined as $E = (M_f - M_0)/M_f$, as a function of the inclination of the bed for angles. A given experiment is repeated at least 5 times to have a reasonable statistics on the average value of M_f . We also analyzed the origin of the particles collected at the exit of chute: the latter come either from the reservoir or from the bed. This differentiation is made possible because the particles of the reservoir and those of the granular bed are different in color, black and white, respectively.

The last experimental issue concerns the range of inclination angles relevant for such experiments. We clearly have an upper angle limit which is set by the maximum angle of stability of the granular bed (i.e., the static friction angle, θ_s). In contrast, there is a priori no lower bound but we limit ourselves to inclination angles for which the avalanche is able to exit the granular chute. This lower limit is found to be on the order of the dynamic repose angle Θ_d of the granular bed (i.e., the angle of the bed surface after the triggering of a spontaneous

avalanche).

The static friction angle θ_s for the short and long bed were found to be slightly different: 32.2° and 31.4° , respectively (cf Table I). This result is in agreement with previous studies[27] showing that the static friction angle increases with decreasing bed length as a result of a confinement effect. Concerning the dynamic angle of repose θ_d , we found almost similar values for the short and long bed: 28.2° and 27.8° , respectively. Note that the difference between the static and dynamic friction angle is a measure of the mass M_a of a spontaneous avalanche (see Table 1): $M_a = \rho_s \phi_s L_b^2 (\theta_s - \theta_d) / 2$ where ρ_s and ϕ_s are respectively the surface density of the particles and the surface fraction of the granular bed ($\rho_s \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{g/mm}^3$ and $\phi_s \approx 0.875 \pm 0.05$). M_a provides a scale for avalanche sizes. The mass M_0 released from the reservoir was varied typically from $M_a/2$ to $2M_a$.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

A. Determination of the neutral angle Θ_n

Figure (3.a) shows the typical variation of the global erosion efficiency $E = (M_f - M_0)/M_0$ as a function for the inclination angle for the long bed using a released mass $M_0 = 110 \text{ g}$ and a unit aspect ratio. The latter has a remarkable linear behavior with the inclination angle and thus well approximated by

$$E = \frac{(M_f - M_0)}{M_0} \approx e(\Theta - \Theta_n), \quad (5)$$

where the erosion rate $e = dE/d\Theta$ corresponds to the slope of the linear trend and Θ_n is the global neutral angle defined as the angle at which E vanishes. Both parameters are determined using the best linear fit. For the example shown in Fig. (3.a), $e \approx 24$ and $\Theta_n \approx 29.5^\circ$. It is important to note that the value of the neutral angle lies between the dynamic friction angle $\theta_d = 27.5^\circ$ and the static friction angle $\theta_s = 31.4^\circ$.

The natural question that arises is to know whether the neutral angle Θ_n and the erosion rate e are dependent or not on the characteristics of the released material in terms of mass (M_0) and geometry (i.e., aspect ratio R_0/Δ_0). Fig. (3.b) illustrates the evolution of the erosion efficiency E for increasing mass M_0 with a fixed aspect ratio, while Fig. (3.c) shows how it varies with increasing aspect ratio with a fixed mass M_0 .

The neutral angle Θ_n shows a moderate but continuous decreases with increasing released mass M_0 . The same trend is observed at fixed released mass M_0 with increasing aspect ratio: the neutral angle decreases weakly but continuously with increasing aspect ratio. The erosion rate e exhibits a rather different behavior: e decreases gradually and monotonically with increasing released mass M_0 whereas it appears to be independent of the aspect ratio. To confirm the above trends, a detailed parametric study was achieved by varying systematically

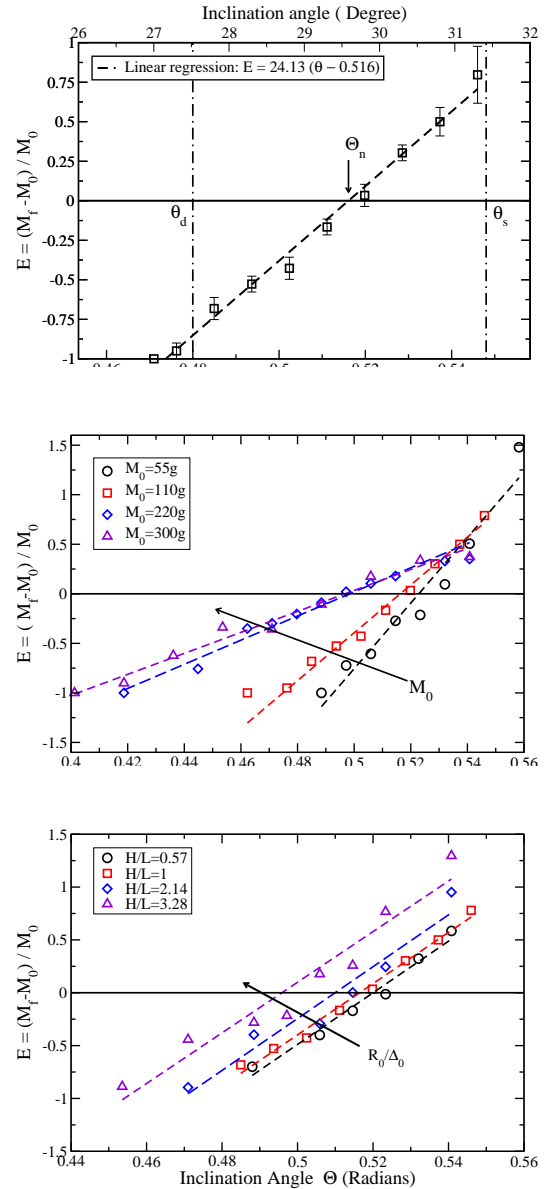


FIG. 3: Erosion efficiency $E = (M_f - M_0)/M_0$ as a function of the bed inclination Θ . (a) $M_0 = 110 \text{ g}$ and $R_0 = L_0 = 205 \text{ mm}$; (b) $M_0 = 55, 110, 220, 300 \text{ g}$ and $R_0/\Delta_0 = 1$; (c) $M_0 = 110 \text{ g}$ and $R_0/\Delta_0 = 0.57, 1, 2.14, 3.28$. All above experiments have been conducted using the long granular bed : $L_b = 1700 \text{ mm}$.

the released mass M_0 and the aspect ratio R_0/Δ_0 . The results are presented below.

B. Parametric dependence of the neutral angle Θ_n

The dependence of the neutral angle on both parameters M_0 and aspect ratio R_0/Δ_0 is shown in Fig. 4. It decreases both with increasing mass and aspect ratio but always lies in the range limited by θ_d and θ_s . The vari-

ation of Θ_n with M_0 and R_0/Δ_0 can be approximated with a function of the following form:

$$\tan \Theta_n = \tan \theta_d + \frac{(\tan \theta_s - \tan \theta_d)}{1 + a(M_0/M_a)(R_0/\Delta_0)}, \quad (6)$$

with $a \approx 0.9$. The above functional form has been chosen such that Θ_n tends towards θ_s for vanishing mass M_0 and aspect ratio R_0/Δ_0 and towards θ_d for large released mass and aspect ratio. This is what the data suggest in these two asymptotic regimes. However, additional experiments at infinitely small and large values of the released mass and aspect ratio would be required to confirm that the asymptotic values coincide with the static and dynamic friction angles, respectively.

Taking advantage that $M_0 \propto R_0\Delta_0$, Eq. 6 can be simplified into

$$\tan \Theta_n = \tan \theta_d + \frac{(\tan \theta_s - \tan \theta_d)}{1 + \left(\frac{R_0}{25d}\right)^2}. \quad (7)$$

It turns out that the parametric dependence of the neutral angle can well be approximated by a rather simple functional form which is solely dependent on R_0 (see Fig. 4c).

C. Parametric dependence of the erosion rate e

Fig. 5 shows the dependence of the erosion rate e on the initial mass M_0 and the aspect ratio R_0/Δ_0 . The latter is strongly sensitive to M_0 but does not show any significant variation with the aspect ratio. It decreases with increasing mass M_0 and this decrease is well captured by a function proportional to M_0^{-1}

$$e \propto \frac{1}{M_0} \propto \frac{1}{R_0\Delta_0}. \quad (8)$$

D. Influence of the bed length

We carried out additional experiments (sets 12 and 13) with a shorter bed length $L_b = 850 \text{ mm}$ (against $L_b = 1700 \text{ mm}$ for the sets 1 to 11). For identical initial conditions concerning the released material, the data indicate that the neutral angle is not sensitive to the bed length (see Fig. 6). As an example for $M_0 = 110 \text{ g}$ and $R_0/\Delta_0 = 1$, the neutral angle is found to be 29.5° for the short bed against 29.6° . In contrast, the erosion rate e shows an important decrease with decreasing bed length. This decrease is compatible with a linear variation with the bed length: $e \sim L_b$. Compiling data obtained for short and long beds and different released masses, we get the following scaling law for e :

$$e \approx 66 \frac{dL_b}{R_0\Delta_0}. \quad (9)$$

As shown later in the paper (see section V.B and eq. 16), we can derive this relationship in the framework of the BDG erosion-deposition model and provide a physical meaning of the prefactor.

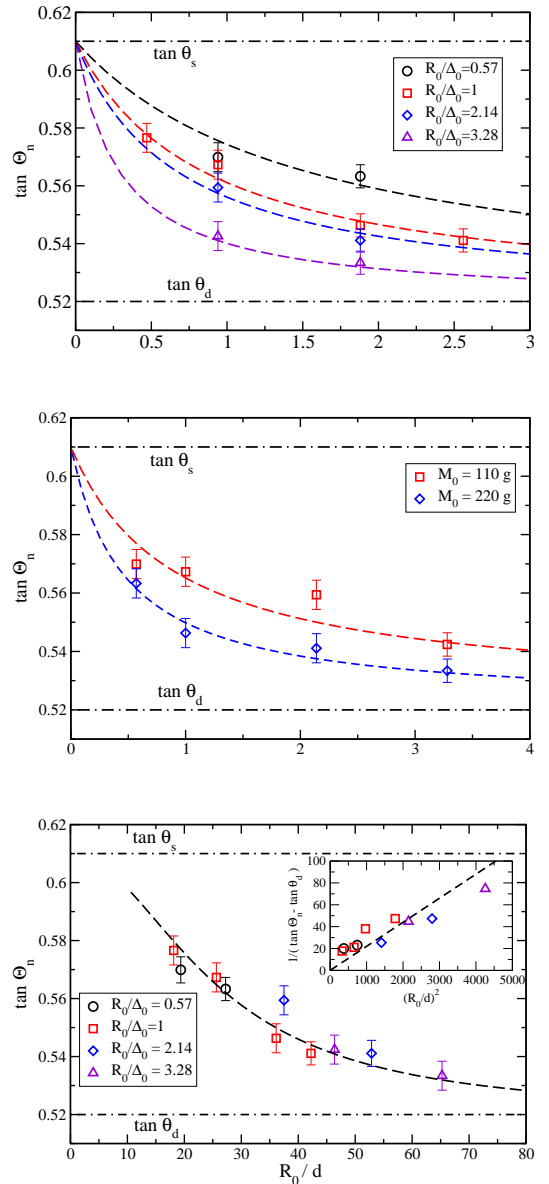


FIG. 4: Dependence of the neutral angle on the released mass M_0 ($\sim R_0\Delta_0$) and the aspect ratio (R_0/Δ_0) for the long bed configuration ($L_b = 1700 \text{ mm}$): a) Θ_n versus $R_0\Delta_0$ for a given aspect ratio; b) Θ_n versus the aspect ratio for a given mass M_0 ; c) Θ_n vs R_0 (Insert: $1/(\tan \Theta_n - \tan \theta_d)$ vs R_0^2). The experimental data are fitted using eq. (7).

E. Avalanche composition

For all the experiments, we have analyzed the particle composition of the avalanche that exits the chute. It is indeed instructive to determine the proportion of particles that comes from the reservoir in comparison with those coming from the bed. It provides information about the characteristic time and spatial scales for a particle from the reservoir to be trapped by the bed.

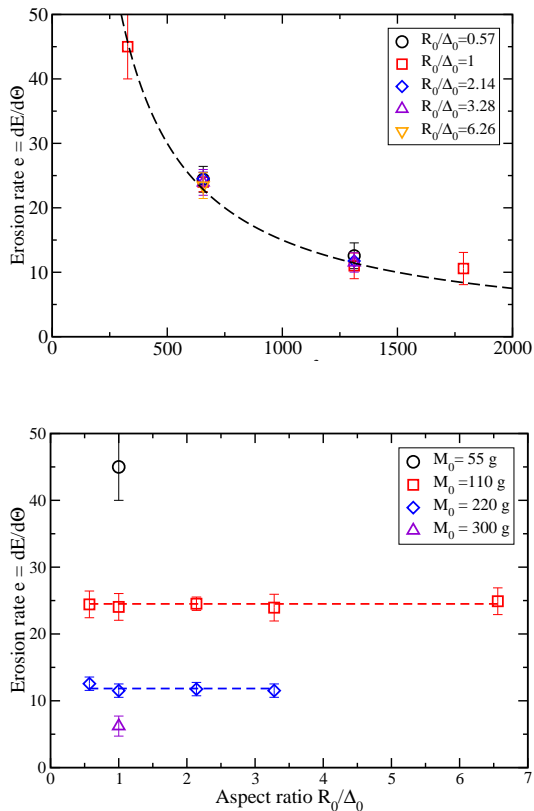


FIG. 5: Dependence of the erosion rate $e = dE/d\Theta$ on the initial mass M_0 ($\sim R_0\Delta_0$) and the aspect ratio (R_0/Δ_0) for the long bed configuration ($L_b = 1700$ mm): a) e versus $R_0\Delta_0$ for a given aspect ratio; b) e versus the aspect ratio for a given mass M_0 . In a), the data are fitted using eq. (8).

Fig. 7 present the proportion P of particles from the reservoir that exits the chute as a function of the inclination angle for different released masses M_0 and aspect ratios R_0/Δ_0 . The first observation is that the proportion P depends crucially on the released mass but it is almost insensitive to the aspect ratio. P increases with increasing mass M_0 from about 20% for $M_0 = 55$ g to about 80% for $M_0 = 300$ g. This increase is rather intuitive since for increasing released mass, a particle from the reservoir will have a smaller and smaller probability to be in close contact with the static bed and thus to be trapped by the bed. The proportion P shows also a dependence on the inclination angles: for small released mass (e.g., $M_0 = 55$ g), P increases with increasing angle while for large mass (e.g., $M_0 = 220$ and 330 g), we observe a reverse trend. In contrast, for intermediate mass (i.e., $M_0 = 110$ g), P exhibits a maximum at the neutral angle and a decrease from that point for both smaller and larger values of the inclination angle. The variability of P with the inclination angle and released mass suggests the existence of non-trivial mechanisms involved in the erosion and deposition processes.

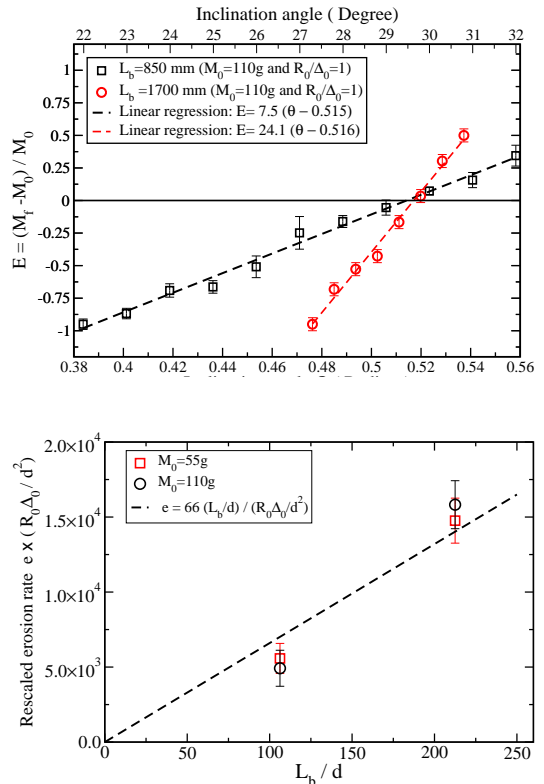


FIG. 6: (a) Erosion efficiency E versus Θ obtained with the short and long bed length. (b) Dependence of the erosion rate $e = dE/d\Theta$ on the bed length.

The proportion P of particles from the reservoir that exists the chute is also found to be strongly dependent on the chute length: It decreases with increasing bed length as expected from a simple reasoning based on probabilistic arguments (see Fig. 7.c). The observed dependence of P (at the neutral angle) on the released mass M_0 and chute length L_b can be cast into a simple exponential relaxation law:

$$P(\Theta_n) \approx 1 - \exp(-M_0/M_c), \quad (10)$$

with $M_c \approx 5 \rho_s \phi_s d L_b$. M_c stands for the characteristic released mass above which the probability of capture of the particles from the reservoir is less than $1/e$.

V. INTERPRETATION AND DISCUSSION

The experimental data have shown that it is possible to define a neutral angle at which erosion balances exactly deposition over a static bed of finite length. The neutral angle defined in this manner (and referred later as the global neutral angle) is independent on the length of the static bed but exhibits a moderate but systematic variation with the initial height R_0 of the avalanche. Important questions arise: Is it pertinent to define a local

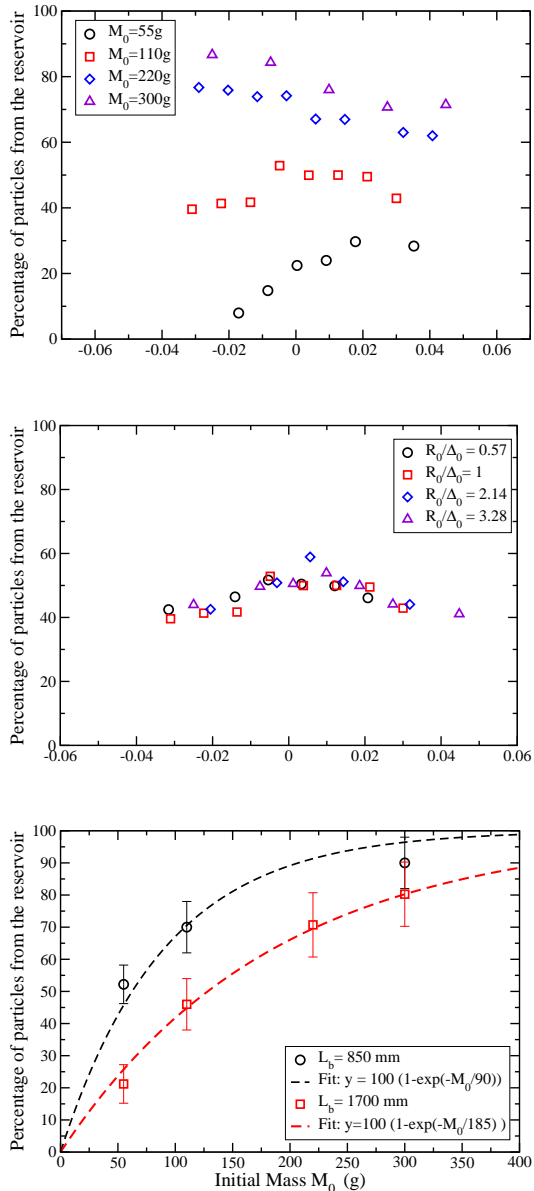


FIG. 7: Mass percentage of particles from the reservoir that exit the chute versus the inclination angle: (a) For a fixed aspect ratio $R_0/\Delta_0 = 1$ and different initial masses M_0 (Long chute $L_b = 1700$ mm); (b) For a fixed initial mass $M_0 = 110$ g and different aspect ratios R_0/Δ_0 (Long chute $L_b = 1700$ mm). (c) Average percentage versus M_0 for short and long chute.

neutral angle as done in the BCRE and BDG erosion-deposition model? Is it similar to the global one? What is the parametric dependence of the local neutral angle? Is it dependent on local parameters such as the local height R or local speed V of the avalanche?

We do not have definite answer to these crucial issues for which an analysis of the erosion and deposition processes at the grain scale would be necessary. Our purpose

here is to compare the experimental data with the predictions of the BCRE and BDG models. These models assume the existence of a local neutral angle which is independent of the features of the flowing phase. With this assumption, the local and global neutral angle are identical and are considered as invariant quantities. This is clearly not what it is seen in experiments but we will use this assumption as a first step to derive from the BCRE and BDG models theoretical expressions for the final mass M_f of the avalanche that exits the chute.

A. Predictions of the BCRE and BDG models

We first consider the BCRE model in which the exchange rate Γ is a local function of the thickness R of the mobile layer. To solve the BCRE model equations, we should as well specify the initial conditions. At $t = 0$ corresponding to the time at which the particles are released from the reservoir, the surface of the static bed has a given and uniform slope such that $h(x, t = 0) = -(x - L_b) \tan \theta$, where x denotes the distance between the lower edge of the reservoir and the current observation point. We assume that the experimental conditions used in the experiments are equivalent to consider that at $t = 0$ the mobile layer is composed of the particles of the reservoir with a thickness R_0 and a spatial extension Δ_0 , corresponding to the dimensions of the reservoir.

To derive an approximate solution, we assume in addition that the slope of the interface between the static and dynamic phases remains uniform and constant such that $\partial_x h = -\tan \theta$. With this approximation, it is almost straightforward to derive an expression for $R(x, t)$ both in the framework of the BCRE and BDG models, and deduce the mass M_f of the avalanche that exits the chute. The details are provided in the appendix.

The BCRE model provides the following expression for M_f (see appendix for further details):

$$\frac{M_f}{M_0} = \frac{\sinh \left[\left(\frac{\Delta_0}{2V} + \frac{\sqrt{DL_b/V}}{V} \right) \gamma \Delta \theta \right]}{\left(\Delta_0/2V + \sqrt{DL_b/V}/V \right) \gamma \Delta \theta} e^{L_b \gamma \Delta \theta / V}, \quad (11)$$

with $\Delta \theta = \theta - \theta_n$. We recall that D is the diffusion coefficient appearing in the equation for R (see eq. 1). At first sight, M_f is a nonlinear function of $\Delta \theta$, including of a hyperbolic sine and an exponential function. A rough estimation of the argument of the exponential term is given by $(L_b/d)\Delta \theta$ (assuming that $V \approx \sqrt{gd}$ and $\gamma \approx \sqrt{g/d}$). The argument thus reaches a magnitude of 5 for typical values of L_b and $\Delta \theta$ (i.e., $L_b \sim 100d$ and $\Delta \theta \sim 0.05$). The exponential function can definitively not be approximated a linear function even for a moderate variation of θ (see Fig. 10 in the appendix). The prediction of the BCRE model is therefore not compatible with the experimental data which suggest a linear variation over a finite range of inclination angles.

The BDG erosion-deposition model which assumes that the local exchange rate is independent of the mobile layer thickness R (cf Eq. 4) provides a different expression for the final mass M_f that exits the chute. We obtain (see appendix for further details):

$$\frac{M_f}{M_0} = 1 + \frac{V_{up}L_b}{VR_0} \left(1 + \frac{2\sqrt{DL_b/V}}{\Delta_0} \right) \Delta\theta. \quad (12)$$

We recall that V_{up} is the typical speed governing the erosion-deposition process in the BDG model (see eq. 4). The erosion efficiency derived from the BDG model is thus found to be a linear function of $\Delta\theta$ which is in agreement with the experimental data. The BDG model provides as well a simple expression for the erosion rate $e = dE/d\theta$:

$$e = \frac{V_{up}L_b}{VR_0} \left(1 + 2\sqrt{\frac{L_b/\Delta_0}{P_e}} \right) \quad (13)$$

where we have introduced the Péclet number $P_e = V\Delta_0/D$ which indicates the relative magnitude of the advection process compared to diffusion at the scale of the avalanche size. For large Péclet number (i.e., $P_e \gg L_b/\Delta_0 \sim 2 - 10$), the erosion rate e takes a particularly simple form:

$$e \approx \frac{V_{up}}{V} \frac{L_b}{R_0}. \quad (14)$$

It is worth noting that the latter prediction shares common features with the relation (9) derived from the experimental data. Eq. (14) exhibits an explicit linear dependence with the bed length in agreement with the experimental outcomes. Furthermore, the BDG model requires that V is a linear function of R_0 and V_{up} is a constant such that $e \propto 1/R_0^2$ as found in the experiments for fixed aspect ratio R_0/Δ_0 (cf Eq. 9).

At this stage, we can conclude that the BDG model provides predictions that are compatible with the experimental data while the BCRE model fails. In other words, the description of erosion-deposition processes in terms of a function independent of the thickness of the moving phase seems to be pertinent. The next step is to determine whether the BDG model is able to provide predictions in quantitative agreements with the experimental results.

B. BDG model versus experiments

For a quantitative comparison, we have to check the linear dependence of the experimental values of the depth-averaged velocity V with the initial height R_0 of the avalanche and also to estimate the phenomenological parameters of the BDG model, in particular the magnitude of the exchange rate V_{up} and the diffusion coefficient D associated to the fluctuating particle motion.

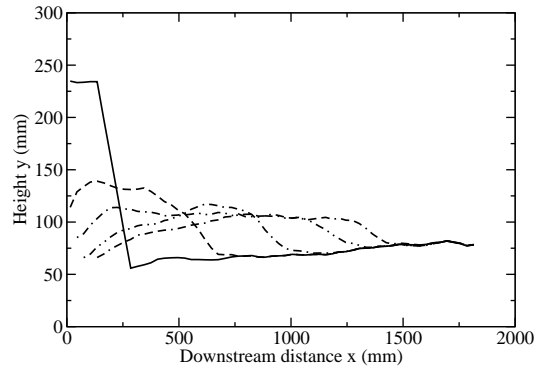


FIG. 8: Avalanche profiles extracted from video images ($M_0 = 110g$ and $\theta = 30^\circ$): successive profiles taken every 0.4s. The solid line corresponds to the initial profile at the moment where the mass is released from the reservoir. After a short transient, the fore front reaches a constant speed.

To assess the depth-averaged velocity V of the avalanche, we determine the speed of the fore front of the avalanche by simple video means (see Fig. 8). We restrain our analysis to configurations close to the neutral angle where the avalanche can be seen as a solitary erosion-deposition wave preserving its shape and moving at a constant speed. We checked that in those configurations, the avalanche speed after a short transition adopts a constant speed along the bed slope. This vision is in agreement with a recent study on erosion-deposition waves in shallow granular flows [25].

We have thus determined the avalanche speed V for experiments performed with different released masses M_0 (keeping the aspect ratio constant) at an inclination close to the neutral angle. The values are reported in Table III. The avalanche speed V is found to scale linearly with the initial height R_0 (see Fig. 9):

$$V/\sqrt{gd} \approx 0.064(R_0/d). \quad (15)$$

This scaling has been checked only for a unit aspect ratio

	Θ	V
$M_0 = 55g$	30°	0.36 m/s
$R_0 = \Delta_0 = 145mm$		$1.01\sqrt{gd}$
$M_0 = 110g$	29.6°	0.44 m/s
$R_0 = \Delta_0 = 205mm$		$1.66\sqrt{gd}$
$M_0 = 220g$	28.7°	0.70 m/s
$R_0 = \Delta_0 = 289mm$		$2.2\sqrt{gd}$
$M_0 = 300g$	28.7°	0.88 m/s
$R_0 = \Delta_0 = 338mm$		$2.8\sqrt{gd}$

TABLE III: Values of the avalanche speed V for experiments performed with different released mass M_0 and unit aspect ratio at an inclination close to the neutral angle

and would need to be confirmed for other aspect ratios. However, this outcome fully supports the requirements

of the BDG model which tell us that an exchange rate Γ independent of R is associated with a convective speed V linear

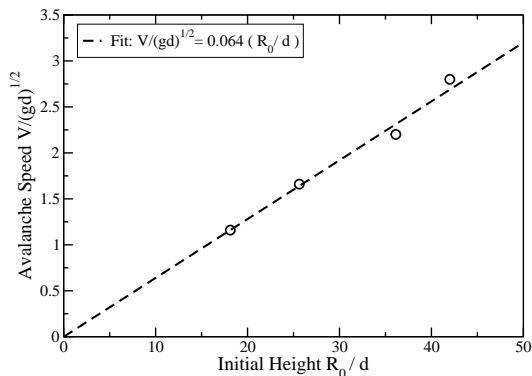


FIG. 9: Avalanche speed versus the initial height R_0 with released mass of unit aspect ratio. Bed length $L_b = 1700$ mm.

The experimental determination of V_{up} and D is much more difficult and would require a detailed analysis of the avalanche flow at the particle scale. This is in principle feasible using high-speed video camera and this is planned to be done in the near future. Instead we employ rough estimations based on dimensional arguments such that $V_{up} \approx \sqrt{gd}$ and $D \approx d\sqrt{gd}$. Based on this, we can estimate the range of variation of the Péclet number Pe in our experiments. We find that Pe ranges from 20 and 100 such that the approximation of large Péclet number is justified for almost all experiments. It is therefore legitimate to use the theoretical expression for the erosion rate e (see Eq. 14) derived from the BDG model in the limit of large Péclet number for quantitative comparison with experiments. Combining Eq. 14 with the experimental scaling found for V (cf. Eq. 15), we obtain the following theoretical prediction for the erosion rate e in the case of a unit aspect ratio:

$$e \approx 16 \frac{V_{up}}{\sqrt{gd}} \frac{dL_b}{R_0^2}. \quad (16)$$

This expression compares very well with the experimental law (see Eq. 9 setting $R_0 = \Delta_0$). A comparison of Eq. 16 with the experimental law (Eq. 9) thus provides an estimation of V_{up} : $V_{up} \approx 4\sqrt{gd}$.

The last important issue to be discussed is the parametric dependence of the global neutral angle with the initial height R_0 of the avalanche. This dependence is not described by the BCRE and BDG models that assume a constant neutral angle, that is independent on the features of the granular flow. The observation that the global neutral angle depends on the avalanche size (through R_0) suggests that the local neutral angle should also exhibit the same type of dependence. As the neutral angle is a measure of the effective friction between the mobile granular layer and the static one, our results therefore suggest that the effective friction should not be

taken as a constant as done in most models describing granular flows over erodible beds but as a function of the avalanche height. A simple way to amend the BCRE and BDG models would be to consider that the local neutral angle θ_n is a function of the local height R of the avalanche with the same functional form as that drawn from experiments:

$$\tan \theta_n(R) = \tan \theta_d + \frac{(\tan \theta_s - \tan \theta_d)}{1 + \left(\frac{R}{25d}\right)^2}. \quad (17)$$

Such a correction would provide a simple erosion-deposition model that reproduce the main experimental trends.

A simple alternative model based on Saint-Venant hydrodynamic approach has been proposed recently by Edwards and Gray [25]. This approach that uses a depth-averaged version of the $\mu(I)$ -rheology and an extended friction law incorporating static and dynamic friction angles [25] is able to model erosion-deposition waves moving at a constant speed.

Further investigations are however needed to better characterize these erosion-deposition waves in terms of shape and speed and to provide quantitative data against which erosion-deposition models can be tested. Use of high-speed video imaging in our experiments which is our next future task should permit this.

VI. CONCLUSION

We reported experimental studies on granular flows over a tilled erodible bed that showed that the concept of neutral angle is relevant. The neutral angle is defined as the critical angle at which erosion balances exactly deposition after the passage of a granular avalanche. We demonstrated that this angle is not unique but depends on the initial thickness R_0 of the avalanche. The neutral angle is found to vary from the static friction angle to the dynamic one for increasing avalanche thickness. This result strongly suggests that the effective friction between static and mobile granular phase can not be taken as a constant but should be considered as a flow-dependent property.

In addition, we showed that for a given avalanche mass, the net erosion of the bed increases linearly with the angular deviation from the neutral angle. This experimental trend is very well predicted by the BDG erosion-deposition model in which the local erosion-deposition rate is independent of the flow thickness.

Finally, we proposed how to amend the BDG model to account for the variation of the neutral angle by assuming that the latter is a decreasing function of the local flow thickness R .

The BDG erosion-deposition model remains however a crude description for modeling erosion-deposition processes. The next challenging step is to develop more elaborated models that are able to predict accurately these

processes without any free or ad-hoc parameterizations. One promising way would be to use the new continuum approaches based on non-local rheological laws [24, 28] or non-local plasticity theories [29]. These models which are able to model the static-flowing transition should provide an appropriate framework for describing accurately erosion and deposition processes.

A last important issue concerns the erosion and deposition processes in the context of polydisperse granular flows. This issue which is fundamental for many geophysical flows does not receive much attention and should be considered in the future.

Acknowledgments

The authors acknowledge the support from the Centre National de Recherche Scientifique (CNRS) and the regional council of Brittany for the PhD fellowship of T.T.

Appendix A: Derivation of the expression of the final avalanche mass M_f from the BCRE and BDG erosion-deposition models

We provide here the details of the derivation of eqs (11) and (12) derived respectively from the BCRE and BDG erosion-deposition models.

1. BCRE model

With the approximations and boundary conditions discussed in section V.A, the solution R of the BCRE model is simply given by:

$$R(x, t) \approx \frac{\Delta_0 R(x - Vt, t = 0)}{\Delta_0 + 2\sqrt{Dt}} e^{\gamma\Delta\theta t} \quad (\text{A1})$$

where $R(x, t = 0) = R_0 \Pi(x - \Delta_0/2)$ (Π is the rectangular function) and $\Delta\theta = \theta - \theta_n$.

It is then straightforward to calculate the mass M_f of the avalanche that exits the chute:

$$\begin{aligned} M_f &= V \int_0^{+\infty} R(x = L_b, t) dt \\ &\approx V \int_{t_i}^{t_f} \frac{R_0 \Delta_0}{\Delta_0 + 2\sqrt{DL_b/V}} \exp(\gamma\Delta\theta t) dt \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

where

$$t_i = \frac{L_b}{V} - \left(\frac{\Delta_0}{2V} + \frac{\sqrt{DL_b/V}}{V} \right) \quad (\text{A3})$$

$$t_f = \frac{L_b}{V} + \left(\frac{\Delta_0}{2V} + \frac{\sqrt{DL_b/V}}{V} \right) \quad (\text{A4})$$

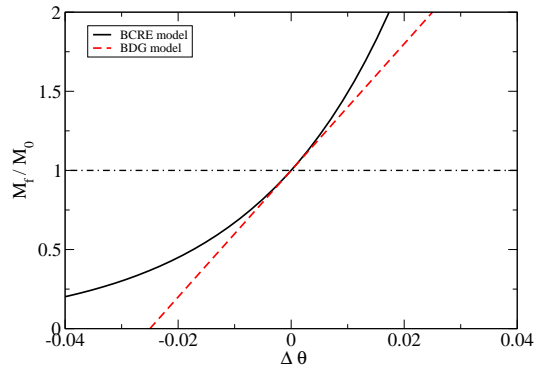


FIG. 10: Variation of M_f/M_0 as a function $\Delta\theta$ derived from the BCRE and BDG models in the regime of large Péclet number (see eqs.A6 and A9). Model parameters: $R_0 = \Delta_0 = 10 d$, $V/\gamma = 2.5 d$, $V_{up}/V = 4$ and $L_b = 100 d$. The parameters have been chosen such that the slopes at the origin of both curves coincide.

t_i is the time at which the avalanche front reaches the end of the chute and t_f the time at which the rear of the avalanche exits the chute.

The calculation yields:

$$\frac{M_f}{M_0} = \frac{\sinh \left[\left(\frac{\Delta_0}{2V} + \frac{\sqrt{DL_b/V}}{V} \right) \gamma \Delta\theta \right]}{\left(\Delta_0/2V + \sqrt{DL_b/V}/V \right) \gamma \Delta\theta} e^{L_b \gamma \Delta\theta / V}, \quad (\text{A5})$$

which is the sought expression. In the limit of large Péclet number ($Pe = V\Delta_0/D \gg 1$) and small $\Delta\theta$, the argument of the hyperbolic sine is much smaller than one while the argument of the exponential function remains much greater than one for typical values of the parameters such that Eq. (A5) simplifies into

$$\frac{M_f}{M_0} \approx e^{L_b \gamma \Delta\theta / V}. \quad (\text{A6})$$

The variation of M_f/M_0 as a function $\Delta\theta$ is shown in Fig. 10.

2. BDG model

Let us now derive the solution for the BDG erosion-deposition model which assumes that the local exchange rate is independent of the mobile layer thickness R (cf Eq. 4). Considering the same initial conditions and approximations as those made for the BCRE model, we obtain:

$$R(x, t) \approx \frac{\Delta_0 R(x - Vt, t = 0)}{\Delta_0 + 2\sqrt{Dt}} + \Delta\theta V_{up} t \quad (\text{A7})$$

which yields

$$\frac{M_f}{M_0} = 1 + \frac{V_{up} L_b}{V R_0} \left(1 + \frac{2\sqrt{DL_b/V}}{\Delta_0} \right) \Delta\theta \quad (\text{A8})$$

To derive the latter equation, we considered that the depth-averaged velocity V is independent of R although V is expected to vary linearly with R in the BDG model (see section II). This simplification does not alter the final result as long as the variation of R remains moderate along the slope. This is the case for inclination angles in the vicinity of the neutral angle.

In the limit of large Péclet number, Eq. (A8) reduces

to

$$\frac{M_f}{M_0} = 1 + \frac{V_{up}L_b}{VR_0} \Delta\theta. \quad (\text{A9})$$

The variation of M_f/M_0 as a function $\Delta\theta$ predicted by the BDG model is shown in Fig. 10.

-
- [1] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, and S. F. Edwards, *J. Phys. I France* **4**, 1383 (1994).
 - [2] R. A. Bagnold, *Proc. Roy. Soc. A* **225**, 49 (1954).
 - [3] R. Fischer, P. Gondret, B. Perrin, and M. Rabaud, *Phys. Rev. E* **78**, 021302 (2008).
 - [4] M. Caponeri, S. Douady, S. Fauve, and C. Laroche, *Mobile Particulate Systems, Vol. 287 of NATO Advanced Institute, Series E* (Kluwer Academic Publishers, Cargèse, 1995), E. Guazzelli and L. Oger ed.
 - [5] M. A. Aguirre, N. Nerone, A. Calvo, I. Ippolito, and D. Bideau, *Phys. Rev. E* **62**, 738 (2000).
 - [6] R. Albert, I. Albert, D. Hornbaker, P. Schiffer, and A. L. Barabasi, *Phys. Rev. E* **56**, R6271 (1997).
 - [7] O. Pouliquen, *Phys. Fluids* **11**, 542 (1999).
 - [8] O. Pouliquen and Y. Forterre, *J. Fluid Mech.* **453**, 133 (2002).
 - [9] A. Daerr, *Phys. Fluids* **13**, 2115 (2001).
 - [10] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, and S. F. Edwards, *Physical Review Letters* **74**, 1982 (1995).
 - [11] T. Boutreux, E. Raphaël, and P.-G. de Gennes, *Phys. Rev. E* **58**, 4692 (1998).
 - [12] D. Bideau, I. Ippolito, M. A. Aguirre, A. Calvo, and N. Nerone, in *Powders and Grains 2001* p. 59462 (2001).
 - [13] H. Mint Babah, *PhD thesis, Université de Rennes 1, France* (2010).
 - [14] S. Douady, B. Andreotti, and A. Daerr, *Eur. Phys. J. B* **11**, 131 (1999).
 - [15] D. V. Khakhar, A. V. Orpe, P. Andresen, and J. M. Ottino, *J. Fluid Mech.* **441**, 255 (2001).
 - [16] A. Aradian, E. Raphael, and P.-G. de Gennes, *Comptes Rendus Physique* **3**, 187 (2002).
 - [17] Y. Tai and C. Kuo, *Acta Mech.* **199**, 71 (2008).
 - [18] F. Bouchut, E. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, and P.-Y. Lagree, *Acta Mech.* **199**, 181 (2008).
 - [19] S. B. Savage and K. Hutter, *J. Fluid Mech.* **199**, 177 (1989).
 - [20] J. Gray, *J. Fluid Mech.* **441**, 1 (2001).
 - [21] R. M. Iverson, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* **117** (2012), f03006.
 - [22] F. Bouchut, , I. R. Ionescu, and A. Mageney, *Commun. Math. Sci.* **14**, 2101 (2016).
 - [23] I. S. Aranson and L. S. Tsimring, *Physical Review E* **65**, 061 303 (2002).
 - [24] K. Kamrin and G. Koval, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 178301 (2012).
 - [25] A. Edwards and J.M.N.T.Gray, *J. Fluid Mech.* **762**, 35 (2015).
 - [26] J.M.N.T.Gray and A. Edwards, *J. Fluid Mech.* **755**, 503 (2014).
 - [27] S. K. de Richter, G. L. Caer, and R. Delannay, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* , P04013 (2012).
 - [28] M. Bouzid, A. Izzet, M. Trulsson, E. Clément, P. Claudin, and B. Andreotti, *European Physical Journal E* **38**, 125 (2015).
 - [29] P.R. Nott, *EPJ Web of Conference* **140**, 11015 (2017).