



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation, l'identification et la commande d'un hélicoptère miniature

Emmanuel Roussel

► **To cite this version:**

Emmanuel Roussel. Contribution à la modélisation, l'identification et la commande d'un hélicoptère miniature. Automatique / Robotique. Université de Strasbourg, 2017. Français. NNT: 2017STRAD030 . tel-01743829

**HAL Id: tel-01743829**

**<https://theses.hal.science/tel-01743829>**

Submitted on 26 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG**

**Discipline :** Signal, Image, Automatique et Robotique  
**École Doctorale :** Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur  
**Unité de recherche :** Laboratoire ICube (UMR CNRS 7357)

---

## CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION, L'IDENTIFICATION ET LA COMMANDE D'UN HÉLICOPTÈRE MINIATURE

---

Présentée par  
**Emmanuel ROUSSEL**

Soutenue le 12 octobre 2017

---

### Composition du jury :

<i>Directeur de thèse :</i>	Edouard LAROCHE	Professeur, Université de Strasbourg et Laboratoire ICube (UMR CNRS 7357)
<i>Encadrant :</i>	Vincent GASSMANN	Chercheur, Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis
<i>Président du jury :</i>	Tarek HAMEL	Professeur, I3S, Université de Nice-Sophia Antipolis
<i>Rapporteurs :</i>	Marion GILSON-BAGREL	Professeur, Université de Lorraine
	Nicolas MARCHAND	Directeur de recherche CNRS, GIPSA Lab Grenoble



*« Notre pouvoir de modifier la nature en utilisant ses lois s'accroît chaque jour de l'expérience de ceux qui nous ont précédés. Mais utiliser ce pouvoir avec sagesse, voilà ce que chaque génération doit apprendre à son tour. Certes, nous sommes aujourd'hui plus puissants qu'autrefois, mais pas mieux avisés : la technologie est cumulative, la sagesse ne l'est pas. »*

— Jérôme Lejeune, *Lettre à Guillaume*





# Remerciements

Au moment de mettre un point final à ce manuscrit et de retirer mon doigt de l'engrenage (un travail de recherche n'est jamais fini!), il est temps d'exprimer par quelques lignes bien maigres ma gratitude aux personnes qui m'ont aidé, soutenu, appris durant ces années de thèse.

Je souhaite en premier lieu exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, Edouard Laroche. Merci de partager ainsi avec une générosité exemplaire ton temps, ton expérience, ta sagacité, ton sens de la justesse et de la clarté dans les raisonnements. Merci pour la confiance que tu m'as témoignée, et encore aujourd'hui à travers les enseignements à Strasbourg. Je souhaite également remercier chaleureusement mon encadrant, Vincent Gassmann. Merci pour ton aide, ton soutien, ta compagnie à l'ISL et le temps que tu m'as consacré. Merci à vous deux pour votre encadrement que j'ai vécu comme un bon équilibre entre l'autonomie dont j'avais besoin et le suivi, les relectures, l'aide et les conseils quand il le fallait. Merci pour vos qualités scientifiques et humaines, je garderai un excellent souvenir de cette aventure.

Un grand merci aux membres du jury qui ont accepté de consacrer du temps pour examiner ces travaux. Merci pour votre regard d'expert toujours bienveillant. Merci à Tarek Hamel d'avoir présidé la soutenance et pour les discussions constructives. Merci à Nicolas Marchand et Marion Gilson pour vos rapports, votre intérêt, vos remarques et commentaires toujours pertinents et judicieux. Je tiens également à remercier vivement les membres invités. Patrick Gnemmi, de m'avoir toujours activement soutenu et encouragé depuis mon arrivée à l'ISL comme stagiaire, pour la confiance que tu m'as témoignée sur le projet GLMAV et durant ma thèse. Simona Dobre, pour tes relectures spontanées et approfondies en particulier sur la partie identification, et pour ta gentillesse. Renaud Kiefer, pour ta passion (très) contagieuse pour les drones, l'aéromodélisme et les autres objets volants! Merci de m'avoir encouragé sur la piste de l'ISL et pour ton soutien sans failles depuis les années INSA.

Je souhaite à présent adresser de profonds remerciements à mes collègues de l'ISL. Emmanuel Pecheur, avec qui j'ai pu perfectionner dans la bonne humeur mes compétences en limage, perçage, vissage, soudage, collage, montage, démontage, remontage, rafistolage, etc (et tout ça). Sébastien Changey pour son aide au quotidien sur des points aussi bien scientifiques qu'administratifs (parfois bien plus obscurs) et son soutien invariable depuis mes débuts à l'ISL. Merci au groupe GNC, en particulier à Philippe Wernert, Guillaume Strub, Christophe Combettes, Spiros Theodoulis, Thomas Brunner. Merci aux membres de la confrérie du café, en particulier à Loïc Bernard, Ronan Adam, Etienne Bieber. Merci également à Christian Rey, Bastien Martinez, Michel Libsig, Marie Albisser. Merci également à mes collègues de l'équipe AVR de Strasbourg, en particulier à Lionel Génévé, Jacques Gangloff, Loïc Cuvillon. Merci aux développeurs du système Pixhawk/PX4 de partager ainsi votre travail et pour les échanges par écran interposé. Merci à l'équipe du CRAN pour l'école doctorale de printemps qui m'a clarifié les idées lors de la rédaction du chapitre identification. Enfin, je remercie tout spécialement mes prédécesseurs doctorants sur le projet GLMAV : Arnaud Koehl, Adrien Drouot et Corentin Chauffaut.

J'adresse un merci éléphantique à mes amis de Strasbourg et d'ailleurs, que je ne m'aventurerai pas à lister ici. Votre fidèle amitié m'est précieuse! Un merci gargantuesque à ma famille. Mes chers grands-parents, ici et là-bas. Mes chers parents pour avoir laissé leur fiston perdre son temps et leur argent sur des bidouilles électroniques et aéronautiques. Mes chers beaux-parents, mes chers (beaux) frères et sœurs : Nicolas, Jeanne qui ont, avant moi, franchi cette étape avec succès; Marie et Olivier, Véronique, Jade. Et pour finir, *last but not least*, un merci pantagruésque à ma chère épouse Camille qui partage ma vie pour ma plus grande joie.

Enfin, merci à toi, lecteur, d'avoir ouvert cette thèse. Je sais que tu es impatient de plonger dans le vif du sujet (passionnant, je t'assure, je suis bien placé pour le savoir!), je m'arrête donc là et t'invite à tourner la page...



# Sommaire

<b>Sommaire</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>3</b>
<b>1 Les aéronefs sans pilote miniatures : éléments constitutifs</b>	<b>5</b>
1.1 Les drones - contexte, structures et classification . . . . .	7
1.2 Les drones à voilure tournante . . . . .	12
1.3 Le projet GLMAV . . . . .	16
1.4 Description de la plateforme utilisée dans cette étude . . . . .	20
1.5 Avionique . . . . .	23
1.6 Capteurs et navigation . . . . .	29
1.7 Actionneurs . . . . .	36
1.8 Conclusion du chapitre . . . . .	52
<b>2 Modélisation d'un hélicoptère</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction . . . . .	55
2.2 Modélisation cinématique et dynamique : équations de mouvement . . . . .	58
2.3 Modélisation aérodynamique . . . . .	68
2.4 Conclusion du chapitre . . . . .	90
<b>3 Identification</b>	<b>91</b>
3.1 Méthodologie d'identification . . . . .	93
3.2 Identifiabilité structurelle locale . . . . .	94
3.3 Acquisition de données d'entrée-sortie . . . . .	98
3.4 Méthodologie d'estimation des paramètres . . . . .	104
3.5 Évaluation du modèle identifié . . . . .	111
3.6 Conclusion du chapitre . . . . .	134
<b>4 Commande</b>	<b>135</b>
4.1 Introduction . . . . .	137
4.2 Validation préalable de la démarche . . . . .	138
4.3 Modèle pour la commande . . . . .	143
4.4 Objectifs de la commande . . . . .	152
4.5 La commande en cascade . . . . .	154
4.6 Étude de la boucle interne : commande de l'attitude du drone . . . . .	157
4.7 Boucle externe : commande de la position . . . . .	168
4.8 Conclusion du chapitre . . . . .	171

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>173</b>
<b>Annexes</b>	<b>177</b>
<b>Table des matières</b>	<b>183</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>187</b>

# Nomenclature

## Notations

$x$	Scalaire.
$\mathbf{x}$	Vecteur.
$\mathbf{M}$	Matrice.
$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$	Produit vectoriel.
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Produit scalaire.
$\mathbf{x}^A$	Vecteur $\mathbf{x}$ exprimé dans le repère A.
$(a, b, c)$	Vecteur constitué de trois composantes.
$[a, b, c]$	Vecteur-ligne, de dimension $1 \times 3$ .
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$ .
$\mathbf{T}^{BA}$	Matrice de passage du repère A vers le repère B. On a ainsi, pour un vecteur $\mathbf{v}$ donné, $\mathbf{v}^B = \mathbf{T}^{BA} \mathbf{v}^A$ .
$\xi_B^I$	Position du point B par rapport au repère A.
$\mathbf{v}_B^A$	Vecteur vitesse du mouvement du point B par rapport au repère A.
$\mathbf{a}_B^A$	Accélération du mouvement du point B par rapport au repère A.
$\boldsymbol{\omega}^{B/A}$	Vecteur des vitesses angulaires du mouvement du repère B par rapport au repère A.
$x^T$	Transposée de $x$ .
$x^{-1}$	Inverse de $x$ .
$\dot{x}$	Dérivée temporelle de $x$ , $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .
$x_m$	Mesure de $x$ .
$\bar{x}$	Valeur de $x$ en un point d'équilibre.
$\hat{x}$	Valeur estimée de $x$ .
$x^*$	Valeur de référence ou de consigne.

## Repères

I	Repère considéré inertiel, lié au sol, dont les axes sont orientés vers le Nord, l'Est, et le bas. On note $I = \{O, x^I, y^I, z^I\}$ .
B	Repère lié au centre de gravité $G$ du véhicule, dont les axes sont orientés vers l'avant, la droite et le bas. On note $B = \{G, x^B, y^B, z^B\}$ .

## Cinématique et dynamique du corps rigide

$\boldsymbol{\eta}$	Angles d'Euler codant l'attitude du véhicule, constitués des angles de roulis $\phi$ , tangage $\theta$ et lacet $\psi$ , respectivement. On note $[\boldsymbol{\eta}_B^I]^I = \boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^T$ , [rad].
$\mathbf{F}$	Force appliquée au véhicule, $\mathbf{F}^B = [F_X, F_Y, F_Z]^T$ , [N].
$g$	Accélération de la gravité, [m/s <sup>2</sup> ].
$\mathbf{I}$	Matrice d'inertie de dimension (3 × 3), [kg m <sup>2</sup> ].
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Moments d'inertie suivant $x^B$ , $y^B$ et $z^B$ .
$m$	Masse du véhicule, [kg].
$\boldsymbol{\Gamma}$	Moment de la force appliquée au véhicule, $\boldsymbol{\Gamma}^B = [L, M, N]^T$ , [N.m].
$\boldsymbol{\omega}^B$	Vecteur des vitesses angulaires du mouvement de B par rapport à I. On note $[\boldsymbol{\omega}^{B/I}]^B = \boldsymbol{\omega}^B = [p, q, r]^T$ , [rad/s].
$\mathbf{q}$	Quaternion codant l'orientation de B par rapport à I, $q_0$ étant la composante réelle. On note $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ .
$\mathbf{v}^B$	Vitesse du véhicule par rapport au sol, c'est-à-dire la vitesse du mouvement du repère B par rapport au repère I, exprimé dans B. On note $[\mathbf{v}_B^I]^B = \mathbf{v}^B = [u, v, w]^T$ , [m/s].
$\mathbf{v}^I$	Vitesse du mouvement de B par rapport à I, exprimé dans I. On a $[\mathbf{v}_B^I]^I = \mathbf{v}^I = \dot{\boldsymbol{\xi}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z)$ , [m/s].
$\boldsymbol{\xi}$	Position du centre de gravité du véhicule par rapport au sol, c'est-à-dire la position du repère B par rapport au repère inertiel I, exprimé dans I. On note $[\boldsymbol{\xi}_B^I]^I = \boldsymbol{\xi} = [x, y, z]^T$ , [m].

### Modélisation aérodynamique

$S$	Aire du disque-rotor, $S = \pi R^2$ , [m <sup>2</sup> ].
$\alpha_b$	Angle d'incidence de la pale (angle entre la corde de référence du profil de la pale et le vecteur vitesse du vent relatif), [rad].
$\alpha_l$	Coefficient de poussée du rotor inférieur, [N/s <sup>2</sup> ].
$\alpha_u$	Coefficient de poussée du rotor supérieur, [N/s <sup>2</sup> ].
$\beta$	Angle de battement de la pale (positif vers le haut), [rad].
$\beta_{lc}, \beta_{ls}$	Angle de battement longitudinal (resp. latéral) (projection sur B).
$c$	Corde de profil de la pale (segment qui joint le bord d'attaque et le bord de fuite), [m].
$C_D$	Coefficient de traînée aérodynamique dans le repère "vent".
$C_L$	Coefficient de portance dans le repère "vent".
$C_l, C_m, C_n$	Coefficients aérodynamiques des moments en roulis, tangage et lacet.
$C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}$	Coefficients d'amortissement aérodynamique.
$C_x, C_y, C_z$	Coefficients axial, latéral et normal de traînée aérodynamique (repère B).
$\mathbf{d}_{cp}$	Coordonnées du centre de pression du véhicule dans le repère B, [m].
$\Delta_u$	Rapport entre $\gamma_u$ et $\gamma_l$ .
$\phi_{lat}$	Angle d'inclinaison du plateau cyclique, latéralement, [rad].
$\phi_{lon}$	Angle d'inclinaison du plateau cyclique, longitudinalement, [rad].
$\mathbf{d}_u, \mathbf{d}_l$	Coordonnées du centre du disque-rotor supérieur (resp. inférieur) dans le repère B, [m].

$F_C$	Force centrifuge, [N].
$F_R$	Résultante des forces aérodynamiques, [N].
$F_D$	Force de trainée aérodynamique, [N].
$F_L$	Force de portance, [N].
$\gamma$	Nombre de Lock associé aux pales du rotor.
$\gamma_l$	Coefficient de trainée du rotor inférieur, [N/m s <sup>2</sup> ].
$\gamma_u$	Coefficient de trainée du rotor supérieur, [N/m s <sup>2</sup> ].
$K_\beta$	Raideur associée à la liaison de battement équivalente de la pale.
$\lambda_\beta$	Fréquence relative des battements.
$\lambda_i$	Vitesse du vent induit au niveau du disque-rotor normalisée par la vitesse en bout de pale $\Omega R$ .
$\mathbf{n}_{TPP}$	Vecteur normal au TPP ("Tip-Path-Plane", plan décrit par le bout des pales du rotor).
$\Omega$	Vitesse angulaire du rotor de l'hélicoptère [rad/s].
$\Omega_l$	Vitesse angulaire du rotor inférieur, [rad/s].
$\Omega_u$	Vitesse angulaire du rotor supérieur, [rad/s].
$\varphi_\beta$	Retard angulaire du battement de la pale, [rad].
$\delta_{lat}$	Angle de sortie du servomoteur latéral, [rad].
$\delta_{lon}$	Angle de sortie du servomoteur longitudinal, [rad].
$P_i$	Puissance induite au rotor, [W].
$Q$	Couple du rotor, [N.m].
$\bar{q}$	Pression dynamique, [N/m <sup>3</sup> ].
$R$	Rayon du rotor, [m].
$\rho$	Déphasage total, autour de $z^B$ , entre l'angle d'inclinaison du plateau cyclique et l'angle de battement, [rad].
$\rho_{air}$	Masse volumique de l'air, [kg/m <sup>3</sup> ].
$T$	Poussée du rotor, [N].
$\theta_b$	Angle de pas de la pale (angle que fait la corde de profil de la pale avec le plan de référence perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor), [rad].
$v_i$	Vitesse induite (vitesse de l'air au passage du disque-rotor).

### Modélisation des actionneurs

$\Gamma$	Couple externe, [N.m].
$f$	Coefficient de frottement visqueux, [N.m.s].
$i$	Courant dans l'induit, [A].
$J$	Moment d'inertie, [kg.m <sup>2</sup> ].
$K_c$	Constante mécanique de couple électromagnétique, [N.m/A].
$K_e$	Constante électrique de force électromotrice, [V.s].
$K_{mot}$	Gain de l'ensemble moteur et contrôleur, [rad/s].
$K_{ser}$	Gain du servomoteur, [rad].
$L$	Inductance des enroulements, [H].
$\omega$	Vitesse de rotation du moteur, [rad/s].
$R$	Résistance interne, [ $\Omega$ ].
$\tau_{mot}$	Constante de temps du moteur, [s].
$\tau_{ser}$	Constante de temps du servomoteur, [s].



$T_e$	Période d'échantillonnage, [s].
$v$	Tension aux bornes du moteur, [V].

### Symboles et grandeurs liés à l'identification

$\Sigma$	Matrice de covariance des erreurs de prédiction.
$\mathbf{C}$	Matrice de covariance associée aux paramètres du modèle.
$\mathbf{e}$	Signal d'erreur.
$\mathbf{E}$	Matrice des erreurs de simulation, de dimension $(N_e \times N_y)$ .
$e_{MSE}$	Moyenne des erreurs au carré (scalaire).
$\mathbf{e}_k$	Erreur de simulation à l'instant $t = kT_e$ , de dimension $(N_y \times 1)$ .
$e_{SSE}$	Somme des erreurs au carré (scalaire).
$\mathbf{F}$	Matrice de Fisher observée.
$\mathbf{J}$	Matrice Jacobienne.
$L$	Fonction de vraisemblance.
$\mathcal{M}$	Modèle générique.
$\mu$	Valeur moyenne.
$\boldsymbol{\theta}$	Vecteur des paramètres du système, de dimension $(N_p \times 1)$ .
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Vecteur des paramètres estimés.
$\mathbf{S}_y$	Matrice de sensibilité globale, composée des fonctions de sensibilité de chaque sortie par rapport à chaque paramètre, de dimension $((N_e N_y) \times N_p)$ .
$\hat{\mathbf{S}}_y$	Matrice de sensibilité globale normalisée par la valeur des paramètres et par la norme de la sortie.
$\sigma$	Ecart-type.
$T_e$	Période d'échantillonnage, [s].
$\mathbf{u}$	Vecteur des entrées de commande.
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état du système étudié.
$\mathbf{y}$	Vecteur des sorties, de dimension $(N_y \times 1)$ .
$\mathbf{y}_m$	Vecteur des sorties mesurées.
$\hat{\mathbf{y}}$	Vecteur des sorties simulées ou prédites.

### Symboles et grandeurs liés à la commande

$\mathbf{e}$	Signal d'erreur.
$\mathbf{A}$	Matrice d'état.
$\mathbf{B}$	Matrice de commande.
$\mathbf{C}$	Matrice d'observation.
$\mathbf{D}$	Matrice d'action directe.
$\mathbf{G}$	Fonction de transfert.
$\mathbf{K}$	Correcteur.
$\mathbf{r}$	Entrée de référence.
$\mathbf{u}$	Vecteur des entrées de commande.
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état du système étudié.
$\mathbf{y}$	Vecteur des sorties.

# Introduction

## Contexte

Les progrès effectués ces dernières décennies sur les capteurs, les batteries et les processeurs, leur miniaturisation et leur production en masse ont permis l'engouement spectaculaire pour les drones que nous connaissons aujourd'hui. Le terme "drone" regroupe tout une gamme de véhicules aériens qui peuvent être radicalement différents de par leur taille, leur structure, leur complexité ou leur autonomie. Par ailleurs, les frontières entre les grandes catégories de drones (quadricoptères, drones coaxiaux, drones à aile battante ou à aile fixe...) sont rendues floues par l'apparition des drones convertibles. C'est le cas du prototype GLMAV (*Gun-Launched Micro Aerial Vehicle*), un hélicoptère coaxial miniature pouvant être propulsé sous la forme d'un projectile grâce à un tube dédié, qui est à l'origine de cette étude.

Le GLMAV a fait l'objet d'un projet financé par l'Agence Nationale de la Recherche qui a mobilisé une petite équipe durant plusieurs années. Ce projet ambitieux présentait des difficultés techniques et scientifiques considérables, et un certain nombre d'entre elles restaient non résolues à la fin du projet. C'est le cas de la phase de vol opérationnel, où le GLMAV se présente comme un hélicoptère de structure coaxiale. En effet, les essais expérimentaux ont mis en lumière diverses problématiques qui peuvent se résumer au constat suivant : les lois de commandes synthétisées sur un modèle du véhicule et testées en simulation ne produisent pas les résultats escomptés lors des essais expérimentaux.

Outre les problèmes mécaniques ou électroniques rencontrés, deux explications peuvent être avancées : les lois de commande synthétisées manquent de robustesse ou le modèle de commande est trop éloigné du système réel. Ces deux explications sont liées : dans une certaine mesure, les erreurs de modélisation peuvent être vues comme des perturbations et traitées comme un problème de robustesse. Néanmoins, une augmentation de la robustesse de la commande entraîne une diminution des performances : il apparaît donc essentiel d'améliorer le modèle de l'hélicoptère miniature afin d'obtenir des simulations plus proches du comportement réel.

D'autre part, malgré un nombre croissant de travaux sur la commande des drones miniatures, la problématique de la commande d'un hélicoptère coaxial reste une thématique ouverte du fait de l'originalité de sa structure.

Dans ce contexte, la thèse est motivée par deux objectifs complémentaires. D'une part la partie liée aux développements autour du prototype GLMAV, d'autre part la partie scientifique dont l'objectif est le développement d'une méthodologie d'identification permettant l'obtention d'un modèle pour la synthèse et la simulation de lois de commande.

## Objectifs de la thèse et contributions

Pour répondre à ces objectifs, nous étudions tout d'abord le comportement en vol d'un hélicoptère. Nous développons ensuite une méthodologie d'identification permettant l'étude de plusieurs modèles de complexité croissante. Ces modèles sont identifiés, évalués et comparés sur

des données de vol, mettant ainsi en évidence les phénomènes aérodynamiques prépondérants ou négligeables en vue de la synthèse de lois de commandes. En dernière partie de la thèse, nous utilisons le modèle identifié pour synthétiser et simuler différentes lois de commande, qui sont ensuite implémentées. Les lois de commande étudiées restent classiques, mais démontrent la validité de l'approche et notamment des modèles utilisés. L'accent de cette dernière partie est porté sur les contraintes pratiques et les problématiques liées à la mise en œuvre des lois de commandes pour drones, souvent négligées dans la littérature.

## **Organisation du manuscrit**

Suivant la logique des objectifs visés, la thèse se divise en quatre grandes parties. Le chapitre 1 positionne l'étude dans le contexte diversifié et hautement concurrentiel des drones aériens. La plateforme expérimentale sur laquelle est appliquée l'étude y est également décrite. La modélisation du système, sous forme d'un ensemble d'équations différentielles basées sur les principes fondamentaux de la physique, fait l'objet du chapitre 2. Une attention particulière est portée au modèle aérodynamique, principale difficulté de la modélisation, en particulier pour les hélicoptères. Au chapitre 3 sont étudiées les problématiques d'identifiabilité, de manière à obtenir un modèle fiable permettant de reproduire les dynamiques du système réel. Enfin, le chapitre 4 est dédié à la synthèse de lois de commande grâce aux modèles identifiés. Ces lois de commande sont évaluées par des essais expérimentaux. Un état de l'art du sujet abordé est présenté au début de chaque chapitre.

# Liste des publications

## Journaux à comité de lecture :

- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Accuracy-simplicity trade-off for small-scale helicopter models : A comparative study based on flight data. *Control Engineering Practice (CEP)*, 73 :56-65, 2017
- P. Gnemmi, S. Changey, P. Wey, **E. Roussel**, C. Rey, M. Boutayeb, et R. Lozano. Flight phases with tests of a projectile-drone hybrid system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology (TCST)*, 2017
- S. Changey, **E. Roussel**, R. Syriani, L. Bernard, S. Schertzer, et P. Gnemmi. Electronics and vision system of a projectile-drone hybrid system. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 32(10) :38-51, 2017
- P. Gnemmi, S. Changey, K. Meder, **E. Roussel**, C. Rey, C. Steinbach, et C. Berner. Conception and manufacturing of a projectile-drone hybrid system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(2) :940–951, 2017

## Conférences internationales à comité de lecture :

- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Nonlinear modeling of miniature helicopters : A comparative study based on flight data. In *World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC WC)*, Toulouse, France, 2017
- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Modelling and identification of a coaxial birotor UAV from scarce flight data. In *European Control Conference (ECC)*, Aalborg, DK, Jan. 2016
- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Performance improvement of a motor speed controller for low-cost MAVs. In *CEAS EuroGNC Conference*, Toulouse, France, Apr. 2015
- **E. Roussel**, P. Gnemmi, et S. Changey. Gun-launched micro air vehicle : Concept, challenges and results. In *IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Atlanta, USA, pages 143–151, 2013
- V. Gassmann, A. Drouot, C. Chauffaut, **E. Roussel**, S. Changey, P. Gnemmi, E. Richard, M. Boutayeb, and R. Lozano. Control of a gun-launched MAV for scene observation. In *2nd IFAC Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*, Compiègne, France, volume 2, pages 187–192, Nov. 2013
- **E. Roussel**, P. Gnemmi, et S. Changey. State of progress of the Gun Launched Micro Air Vehicle. In *International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competitions (IMAV)*, Braunschweig, Germany, July 2012

## Conférences nationales :

- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Modeling and identification of a small-scale unmanned coaxial helicopter. In *ISL Budding Science Colloquium*, Saint-Louis, France, 2017
- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Strategy for robust navigation and control of a coaxial birotor UAV. In *ISL Budding Science Colloquium*, Saint-Louis, France, 2016
- **E. Roussel**, C. Rey, E. Pecheur, P. Gnemmi, K. Meder, and V. Gassmann. Control of the GL-MAV : automatic transition of a projectile to an MAV. In *ISL Scientific Symposium*, Saint-Louis, France, 2015
- **E. Roussel**, S. Changey, L. Bernard, S. Schertzer, E. Pecheur, and F. Christnacher. Embedded

electronics, vision and transmission of the GLMAV. *Research Meeting Topic 2.14 on Guided Ammunition, Saint-Louis, France*, Mar. 2012

**Posters :**

- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Flight dynamics modeling of a coaxial birotor mav for control system design. In *ISL Budding Science Colloquium, Saint-Louis, France*, 2015
- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Flight dynamics modeling of a coaxial birotor mav for control system design. *Workshop ISL-UHA-ICube*, 2015
- **E. Roussel**, V. Gassmann, et E. Laroche. Contribution to the control of a coaxial birotor mav in autonomous flight. *Journée "Posters" de l'École Doctorale "Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur"*, 2014

# Les aéronefs sans pilote miniatures : éléments constitutifs

## Sommaire

---

<b>1.1 Les drones - contexte, structures et classification</b>	<b>7</b>
1.1.1 Drones et vols autonomes	7
1.1.2 Un domaine en révolution	8
1.1.3 Une large variété de structures	9
1.1.4 Classification des drones	10
1.1.5 Des “aéromodèles automatisés” aux micro-drones modernes	10
1.1.6 Principes de guidage, navigation et commande	11
<b>1.2 Les drones à voilure tournante</b>	<b>12</b>
1.2.1 Comparaison de la puissance induite pour les principales structures	13
1.2.2 Un intérêt exponentiel pour les multicoptères	14
1.2.3 Avantages et inconvénients de la structure coaxiale	15
<b>1.3 Le projet GLMAV</b>	<b>16</b>
1.3.1 Concept et objectifs du projet	16
1.3.2 Historique du projet et acteurs principaux	17
1.3.3 Description du GLMAV	17
1.3.4 Phases de vol et problématiques associées	18
<b>1.4 Description de la plateforme utilisée dans cette étude</b>	<b>20</b>
1.4.1 Une version allégée du GLMAV	20
1.4.2 Caractéristiques inertielles	21
1.4.3 Télémétrie	22
1.4.4 Enregistrement de données de vol	23
<b>1.5 Avionique</b>	<b>23</b>
1.5.1 État de l’art des principaux autopilotes pour drones	23
1.5.2 Les choix pour le projet GLMAV	26
<b>1.6 Capteurs et navigation</b>	<b>29</b>
1.6.1 Capteurs inertiels	30
1.6.2 Capteurs extéroceptifs	31
1.6.3 Navigation inertielle et hybride	34
<b>1.7 Actionneurs</b>	<b>36</b>
1.7.1 Identification des servomoteurs	37
1.7.2 Identification des moteurs	43
<b>1.8 Conclusion du chapitre</b>	<b>52</b>

---

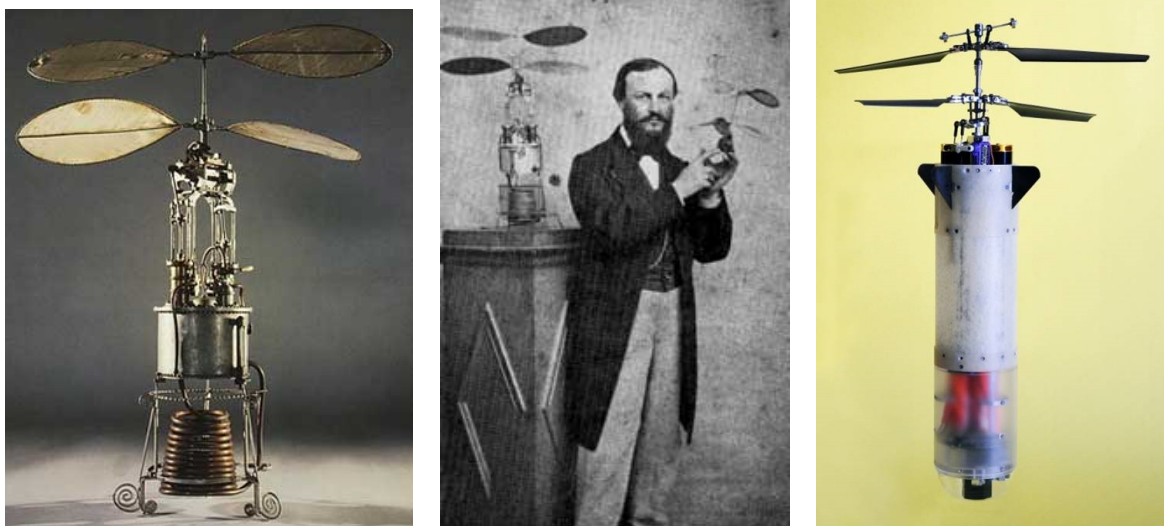


## 1.1 Les drones - contexte, structures et classification

### 1.1.1 Drones et vols autonomes

Un drone désigne un engin inhabité capable de mener à bien une mission de manière plus ou moins autonome. Le terme drone désigne surtout les engins aériens, mais il existe également des drones terrestres, marins ou sous-marins. Les drones aériens sont en général désignés par l'appellation UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*). Cependant, la mise en action d'un drone nécessite également, et a minima, une station de contrôle au sol et un opérateur. Cet ensemble est désigné par le terme UAS (*Unmanned Aircraft System*), ou encore RPAS dans le domaine réglementaire (*Remotely Piloted Aircraft System* ou "Système d'aéronef télépiloté"), qui rappelle que ces engins ne sont pas totalement autonomes mais que l'intervention humaine reste au centre du système.

En effet, bien que les recherches et développements en guidage, navigation et commande (GNC) apportent des améliorations spectaculaires en performance et robustesse des vols (voir par exemple Cai *et al.* (2014)), la plupart des drones doivent être pilotés par un opérateur au sol qui a une vision déportée de la scène par une caméra embarquée. En conséquence, il est plus approprié de parler d'automatisation que d'autonomie : bien qu'il puisse avoir une action "automatisée" sans intervention du pilote (évitement d'obstacles, suivi de cibles, retour à la base, etc.), le drone suit des instructions préprogrammées ou des ordres extérieurs<sup>1</sup>.



**Figure 1.1** – L'hélicoptère coaxial à vapeur réalisé par Ponton d'Amécourt en 1863, qui inventa également le mot "hélicoptère" (popularisé par Jules Verne à travers ses écrits (Leishman, 2006, p. 10)). C'est le premier hélicoptère à moteur mécanique. Il est conservé au Musée de l'Air et de l'Espace du Bourget. On notera l'étrange ressemblance avec le GLMAV, présenté à droite et détaillé en section 1.3.

L'augmentation de l'automatisation et, à terme, la possibilité pour les drones de prendre des décisions de manière "autonome" posent un certain nombre de difficultés. En matière de sécurité, tout d'abord : les systèmes de détection de défaillances (comme la panne d'un actionneur ou d'un capteur, ou même l'endommagement d'une aile (Sadeghzadeh et Zhang, 2011)) et de récupération (vol en mode dégradé, atterrissage automatique, etc.) font l'objet d'une recherche active actuellement. En matière de perception, également : le drone doit être capable de percevoir son environnement, mais également d'interpréter les données de ses capteurs afin de prendre une décision. En matière d'automatique : cette thèse en témoigne, la mise en place d'une commande performante et robuste reste un domaine de recherche très actif. Enfin, cette augmenta-

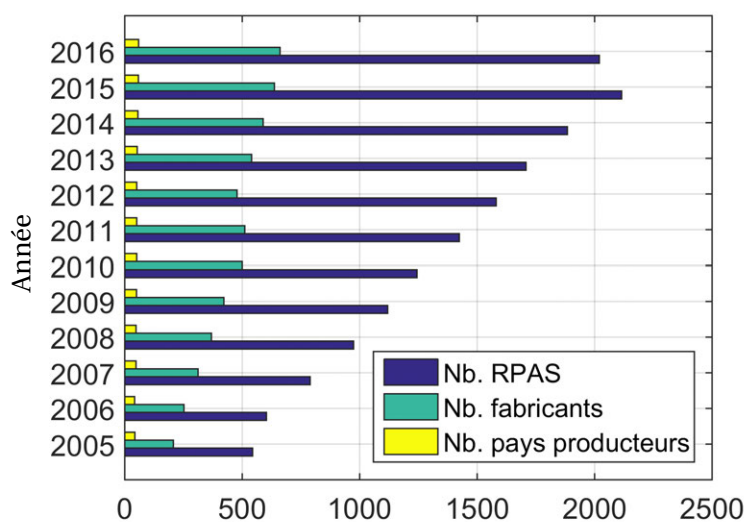
1. Huang *et al.* (2005) proposent une terminologie et un cadre permettant d'évaluer le degré d'autonomie d'un drone, basé sur la complexité de sa mission, l'adaptabilité à son environnement et le type d'interaction avec l'opérateur.



tion constante de l'autonomie pose des questions éthiques, la plus flagrante étant probablement la décision autonome d'une mise à feu pour les drones armés (jusqu'à présent très clairement refusée par les autorités militaires françaises), mais aussi en termes de responsabilité en cas d'accident, par exemple. Une évolution des règles de droit civil concernant la robotique est d'ailleurs actuellement à l'étude au parlement européen<sup>2</sup>.

### 1.1.2 Un domaine en révolution

Les progrès effectués ces dernières dizaines d'années sur les capteurs, les batteries et les processeurs, leur miniaturisation et leur production en masse pour les smartphones<sup>3</sup> ont permis un essor extraordinaire des drones. En France, le nombre de sociétés autorisées officiellement à effectuer des opérations à l'aide de drones (licence délivrée par la DGAC - Délégation Générale de l'Aviation Civile) a été multiplié par trente ces quatre dernières années, atteignant quatre mille licences ces derniers mois<sup>4</sup>.



**Figure 1.2** – Évolution du nombre de systèmes de drones référencés dans le monde (à partir de données issues de van Blyenburgh (2016)).

La figure 1.2 montre l'évolution du nombre de "systèmes de drones" référencés dans le monde et la figure 1.3 en montre les principaux producteurs. La France est ainsi le premier producteur en Europe en 2016, et le quatrième dans le monde derrière les États-Unis, la Chine et l'Israël.

Conjointement, les activités de recherche liées aux drones sont également en très forte augmentation depuis 20 ans, comme l'illustre la figure 1.4. Entre l'année 2000 et l'année 2016, le nombre de publications scientifiques par an sur les drones<sup>5</sup> a été multiplié par dix, pour atteindre près de 20000 nouveaux articles sur l'année 2016.

2. Le parlement européen a adopté, le 16 février 2017, un projet de motion préconisant l'établissement d'un cadre juridique sur la responsabilité des robots (rapport "Delvaux" Delvaux (2016)). Ce texte propose de mettre en place "un cadre éthique pour la conception, la fabrication et l'utilisation des robots" et suggère d'attribuer une "personnalité juridique spécifique" aux robots, pour que "les plus sophistiqués puissent être considérés comme des personnes électroniques dotées de droits et de devoirs bien précis, y compris celui de réparer tout dommage causé à un tiers". Néanmoins, malgré la complexité des algorithmes le contrôlant et le mimétisme dont il peut faire preuve, un robot reste une machine. Peut-on parler de droits et de devoirs pour une machine? (voir également Bernanos (1947))

3. Les capteurs et processeurs utilisés sur les smartphones et sur les drones grand public sont en effet de technologie similaire, voire exactement les mêmes.

4. Le nombre de licences délivrées était de 127 en avril 2013, 2080 en octobre 2015, et plus de 3900 en avril 2017. Ces chiffres ont été obtenus en analysant la page <http://listedrones.dsac.fr> à ces dates. Cette page référence la liste des sociétés autorisées par la DGAC à effectuer des opérations à l'aide de drones.

5. Chiffres obtenus à l'aide de requêtes automatisées sur la base de données <https://scholar.google.com>, à l'aide d'un script en langage "Bash".

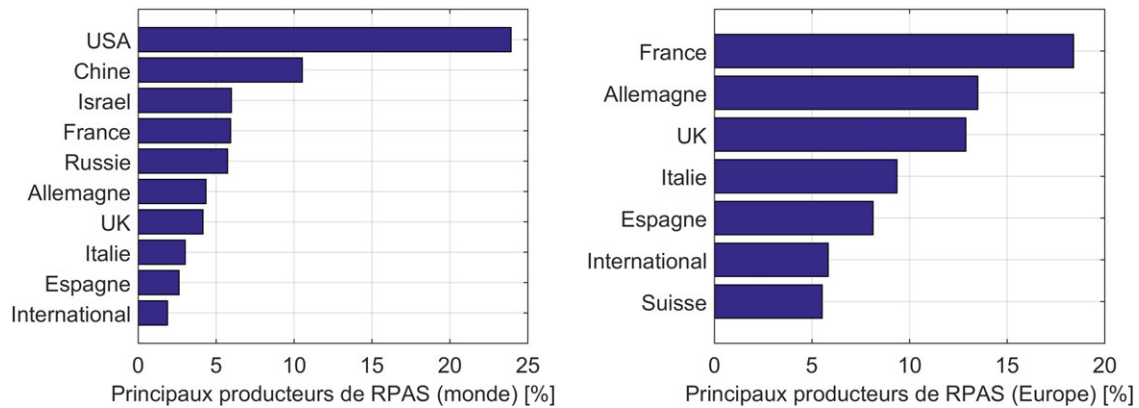


Figure 1.3 – Les principaux producteurs de drones dans le monde et en Europe (données issues de van Blyenburgh (2016))

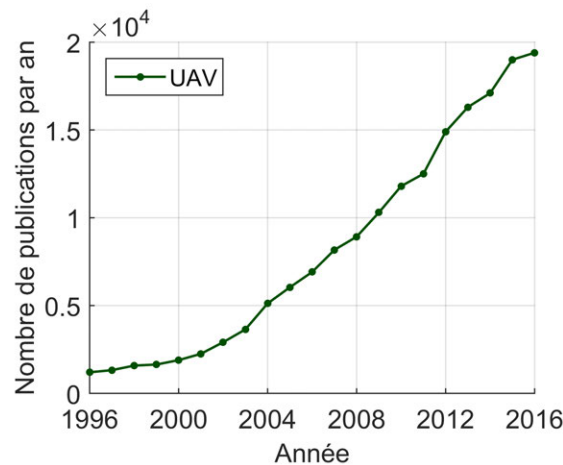


Figure 1.4 – Nombre de publication par an contenant le terme "UAV" , depuis 20 ans.

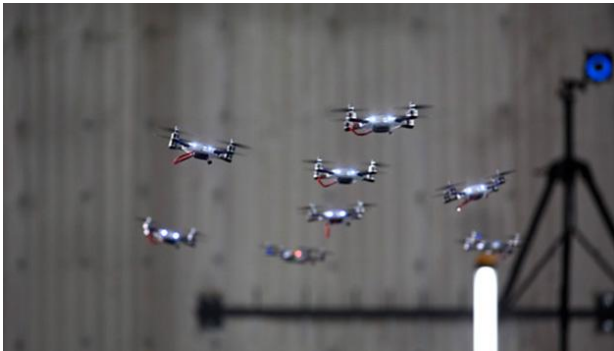
### 1.1.3 Une large variété de structures

Le terme de drone aérien regroupe toute une gamme de véhicules, qui peuvent être radicalement différents en termes de taille, de structure, de complexité ou d'autonomie : drones à voilure tournante ou fixe, à décollage vertical, convertibles, de la taille d'un avion ou d'un insecte (figure 1.5). Pour les drones de petite taille, en particulier, la disponibilité des différents composants "sur étagère" a permis l'émergence de structures aérodynamiques très variées : type avion, aile volante, à ailes battante, multicoptères (figure 1.9), et toute une gamme de systèmes hybrides (comme le GLMAV, présenté en section 1.3 et visible en figure 1.1). Les drones se distinguent également selon le type de mission qu'ils sont amenés à réaliser, liée à leur charge utile. Ils permettent en effet d'embarquer un ensemble de capteurs et d'obtenir des informations sur un environnement hostile ou difficile d'accès : le plus souvent une caméra (visible, infrarouge, ou encore thermique), mais également bien d'autres types de capteurs (télémètres (Jacome *et al.*, 2008), gaz, ondes radio, mesure de caractéristiques du sol (Roussel *et al.*, 2016b)).

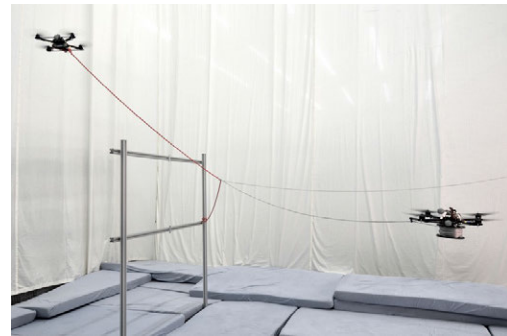
La recherche sur les "essaims" (*swarm* en anglais) et la coopération de drones (figure 1.6), les interactions entre les drones et leur environnement ou encore la réalité virtuelle ont actuellement le vent en poupe. Parmi les innombrables exemples, on peut mentionner par exemple les travaux du LAAS-CNRS (figure 1.7), de l'ETH de Zürich sur la construction coopérative à l'aide de drones (figure 1.6b) ou encore les travaux du GIPSA-Lab sur la réalité virtuelle (vol en immersion avec incrustation d'éléments virtuels).



**Figure 1.5** – le PD-100 “Black Hornet” développé par Prox Dynamics (Norvège) (racheté par FLIR Systems, USA, fin 2016), utilisé par l’armée britannique depuis 2012 puis par l’armée de nombreux autres pays depuis (Seck, 2016). C’est un hélicoptère miniature de 12 cm d’envergure. Il pèse 18 g avec ses trois caméras et a une endurance de 20 à 25 minutes. Il est capable de vols par points de passage GPS.



**(a)** Chorégraphie de quadricopters réalisée à l’aide d’un système de Motion Capture par KMeL Robotics (racheté par Qualcomm Technologies en 2015).



**(b)** Construction coopérative d’un pont (Augugliaro et al., 2014).

**Figure 1.6** – Essaims de drones et coopérations.

#### 1.1.4 Classification des drones

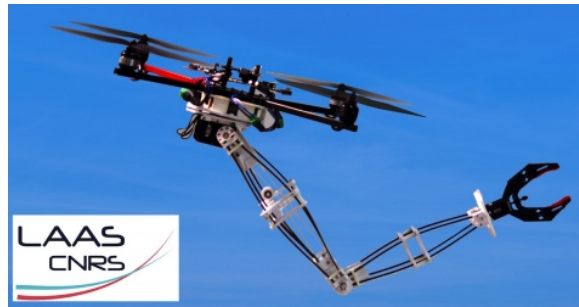
Cette variété des types de drones rend leur classification difficile. La plus courante se fait en fonction de leur taille et de leurs performances (portée et altitude d’opération essentiellement), mais se fait également par rapport à leur emploi ou à leur type de voilure. L’OTAN donne trois classes de drones selon leur poids (tableau 1.1).

Depuis 2016, la législation française classe les drones suivant leur masse et le scénario visé. Ainsi, les autorisations de vol accordées par la DGAC dépendent du scénario (altitude envisagée, distance au pilote, zone survolée, type de vol) et non plus de la catégorie seule. De plus, un usage de loisir et un usage professionnel ne feront pas l’objet de la même réglementation. La figure 1.8a montre la production mondiale et européenne de systèmes de drones, classée par catégorie. En France, la majorité des drones référencés sont de type Micro<sup>6</sup> (53%) ou Mini (35%).

#### 1.1.5 Des “aéromodèles automatisés” aux micro-drones modernes

Les drones miniatures (catégorie “Micro”, c’est-à-dire d’un poids inférieur à 2 kg), qui nous intéressent dans cette étude, sont un concentré de technologies diverses, à la croisée des chemins entre la robotique et l’aéromodélisme. Les domaines concernés sont variés : électronique, au-

6. Le terme “Micro” pour les drones est bien sûr un abus de langage, les micro-drones ayant en général une envergure de quelques dizaines de centimètres. Les “Nano” drones, quant à eux, ont un poids de quelques dizaines de grammes.



**Figure 1.7** – Interactions physiques d'un drone avec son environnement, LAAS-CNRS Tognon et al. (2017); Yüksel et al. (2015)

**Table 1.1** – Classification OTAN des drones (tableau adapté de Chauprade (2014)). L'acronyme "AGL" signifie Above Ground Level (au-dessus du sol), et "LoS" signifie Line of Sight (portée optique). Un drone "MALE" est un drone de Moyenne Altitude et Longue Endurance tandis qu'un drone "HALE" est un drone de Haute Altitude et Longue Endurance.

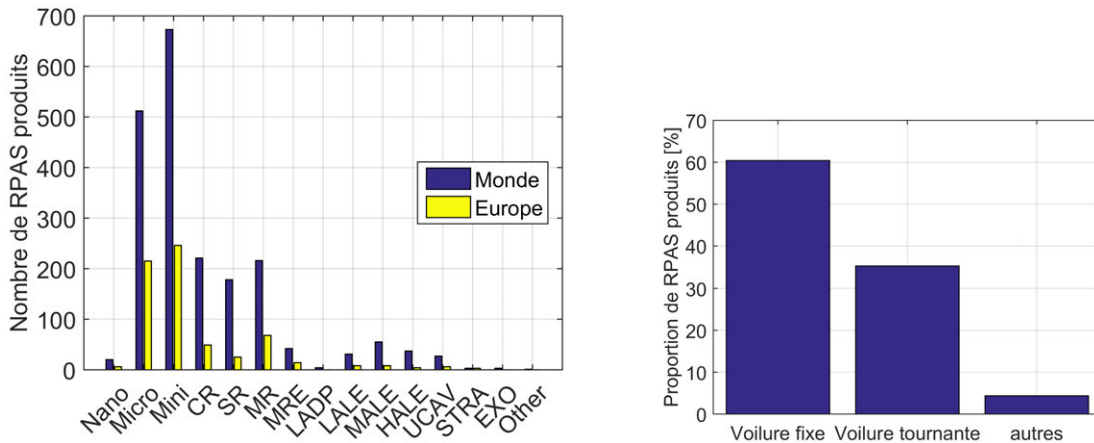
Classe OTAN	Catégorie	Alt. max. (AGL)	Rayon d'action (LoS)	Exemple de RPAS
<b>Classe I</b> ( $< 150$ kg)	Micro ( $< 2$ kg)	60 m	5 km	Black Widow, Wasp, AR. Drone
	Mini (de 2 à 20 kg)	1000 m	25 km	Scan Eagle, skylark, Raven
	Petit ( $> 20$ kg)	1500 m	50 km	Luna, Hermes 90
<b>Classe II</b> (de 150 à 600 kg)	Tactique	3000 m	200 km	Sperwer, Hermes 450, Shadow RQ-7
<b>Classe III</b> ( $> 600$ kg)	MALE	15000 m	Non limité	Predator MQ-1, Reaper MQ-9, Heron TP
	HALE	20000 m	Non limité	Global Hawk
	Armés (combat)	20000 m	Non limité	X47-B

tomatique, mécanique, aérodynamique, communications radio, traitement du signal, programmation temps réel, etc. Les premiers drones de cette catégorie étaient le fruit d'aéromodélistes passionnés ayant automatisé leur modèle radiocommandé en embarquant capteurs et micro-contrôleurs. Ce n'est plus le cas des drones commercialisés ces dernières années qui ont acquis une grande stabilité et sûreté de fonctionnement, et dont l'utilisation ne nécessite plus aucune connaissance technique ou de pilotage. Un enfant peut à présent les piloter, à l'aide de son smartphone ou tout simplement de ses mains, comme le montre la figure 1.9. L'évolution des performances aux compétitions de l'IMAV (*International Micro Air Vehicles Conference and Flight Competition*) au fil des années le montre également. Cela est rendu possible par des algorithmes avancés de guidage, navigation et commande, appelés algorithmes GNC.

### 1.1.6 Principes de guidage, navigation et commande

Les algorithmes de GNC sont incontournables pour le vol de tout drone, quelque soit sa catégorie ou sa structure. Les trois fonctions qu'ils accomplissent peuvent être définies de la manière suivante :

- Navigation : à partir des données issues des différents capteurs, les algorithmes de navigation estiment l'état du drone (position, vitesse et orientation dans l'espace).
- Commande : à partir de l'état estimé du drone et de l'état désiré (consignes issues de la boucle de guidage), la boucle de commande calcule les commandes à envoyer aux actionneurs pour que le drone suive la consigne tout en garantissant la stabilité du système.



(a) Catégorie des drones référencés en Europe et dans le monde (b) Proportion de drones produits en fonction du type de voilure.

Figure 1.8 – Production de RPAS en fonction de la catégorie et du type de voilure (tracé à partir de données issues de van Blyenburgh (2016)).



Figure 1.9 – Le nouveau quadricoptère "Spark" de l'entreprise chinoise DJI (leader mondial dans les drones de loisirs), sorti début 2017. Il pèse 300 g, permet des vols automatisés et un pilotage par reconnaissance gestuelle.

- Guidage : à partir des ordres envoyés par l'opérateur (des points de passage par exemple), les algorithmes de guidage déterminent une trajectoire de vol à suivre par la boucle de commande en fonction des données de navigation.

La figure 1.10 représente schématiquement les interactions entre ces trois composantes. La conception de ces algorithmes repose sur un modèle du drone, dont l'objectif est de reproduire de manière fiable son comportement en vol. L'obtention d'un tel modèle comporte différentes étapes : élaboration d'une structure mathématique, acquisition de données expérimentales, estimation des paramètres, et enfin évaluation du modèle. Cela constitue la première partie de la thèse. La seconde partie concerne l'élaboration et la mise en œuvre de commandes de vol, à l'aide du modèle obtenu.

## 1.2 Les drones à voilure tournante

Les drones à voilure tournante font l'objet d'un intérêt particulier en raison de leur capacité de vol stationnaire que n'ont pas les drones à voilure fixe. Koehl *et al.* (2012, chap. 1) dressent un tableau détaillé des drones à voilure tournante dont nous rappelons ici les grandes familles :

- Les hélicoptères conventionnels, munis d'un plateau cyclique modifiant l'orientation du rotor principal (variation du pas des pales) et d'un rotor de queue permettant d'annuler le

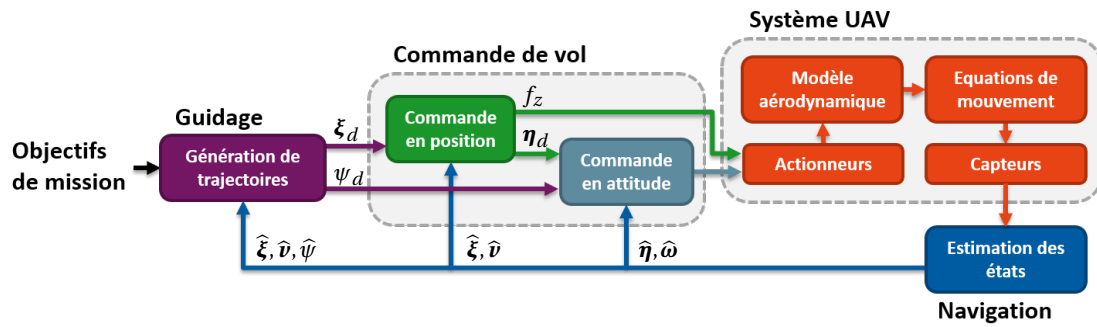


Figure 1.10 – Schéma-bloc des boucles GNC (Guidage, Navigation et Commande)

moment cinétique généré par la rotation du rotor principal (figure 1.5).

- La structure à double rotors contrarotatifs étudiée dans cette thèse. Ces véhicules sont dépourvus de rotor de queue : les deux rotors fournissent la poussée, tandis que leur différentiel de vitesse permet un pilotage de l'axe de lacet.
- Les multirotors, ou “multicopters”, composés de deux à 16 rotors et plus. La structure à quatre rotors (quadricoptère) est de loin la plus courante (figure 1.6), dans le domaine de la recherche et à destination du grand public.
- Les structures hybrides ou convertibles, qui visent à combiner les avantages de plusieurs structures. Le prototype GLMAV (*Gun-Launched Micro Air Vehicule*) dont découle cette étude en est un exemple (section 1.3).

### 1.2.1 Comparaison de la puissance induite pour les principales structures

Dans ce paragraphe nous proposons une comparaison des différentes structures de drones à voilure tournante en terme de puissance nécessaire à la sustentation. La puissance requise pour le vol d'un hélicoptère est approximativement donnée par la puissance “induite”  $P_i$ , nécessaire à l'accélération de l'air par les pales du rotor. Cette puissance est liée à la poussée  $T$  du rotor par la relation  $P_i = T v_i$ , avec  $v_i$  la vitesse induite (vitesse de l'air au passage du disque-rotor) (Padfield, 2008). La théorie de Froude<sup>7</sup> donne l'expression de la vitesse induite au vol stationnaire :  $v_i = \sqrt{T/(2\rho S)}$ , avec  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $S$  la surface du disque-rotor et  $R$  son rayon. On a alors la relation :

$$P_i = \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\rho S}} = \frac{(mg)^{3/2}}{R\sqrt{2\pi\rho}} \quad (1.1)$$

Avec cette équation, nous pouvons alors comparer la puissance requise par différentes structures à voilure tournante pour effectuer un vol stationnaire<sup>8</sup>. Pour un disque-rotor donné, elle est inversement proportionnelle à son rayon. Pour que les résultats soient comparables, nous considérons pour chaque structure la surface maximale couverte par les rotors comprise dans une même empreinte au sol  $S_{sol,h}$  (surface projetée). Les calculs sont récapitulés dans le tableau 1.2.

Ainsi, pour une même empreinte au sol et une même masse du véhicule, un quadricoptère nécessite une puissance environ 20% supérieure à celle requise pour un hélicoptère convention-

7. La théorie de Froude est l'application de la conservation de la quantité de mouvement au disque-rotor, considéré comme un disque uniforme. Voir également la théorie de Glauert pour l'étude des bi-rotors contrarotatifs (Crul, 2016).

8. Des hypothèses simplificatrices sont faites lors de l'application de la théorie de Froude, et des pertes de puissance sont négligées (pas de perte de profil ou de traînée de la pale, pas de tourbillon hélicoïdal de sillage...). Ainsi, pour le calcul de la puissance mécanique fournie au rotor par l'arbre moteur, on introduit le facteur (ou figure) de mérite  $M$  du rotor qui caractérise son efficacité. Il est compris entre 0 et 100% (hélice idéale). Pour un hélicoptère, il varie en général entre 60% et 70%. On a ainsi  $P_{meca} = P_i/M$ . Le facteur de mérite dépend de la taille du rotor; un rotor de grande taille aura un meilleur rendement qu'un rotor de petite taille. Pour le calcul de la puissance du moteur, il faut prendre en compte des pertes de puissance supplémentaires.



**Table 1.2** – Calcul de la puissance nécessaire pour soulever une charge donnée, pour différentes structures de véhicules à voilure tournante.

	Hélicoptère	Quadricoptère	Hélicoptère coaxial
Rayon d'un rotor	$R_h$	$R_q$	$R_c$
Surface rotor	$\pi R_h^2$	$4\pi R_q^2$	$2\pi R_c^2$
Surface max. couverte	$S_{sol,h} = \pi R_h^2$	$\frac{4}{(1 + \sqrt{2})^2} S_{sol,h} \approx 0.69 S_{sol,h}$	$2S_{sol,h}$
Puissance requise	$P_{i,h}$	$\frac{1}{\sqrt{0.69}} P_{i,h} \approx 1.21 P_{i,h}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} P_{i,h} \approx 0.71 P_{i,h}$

nel<sup>9</sup>. On comprend aisément que la puissance nécessaire est encore supérieure pour les multicoptères comportant un plus grand nombre de rotors. Au contraire, un hélicoptère coaxial ne nécessite que 70% de la puissance d'un hélicoptère et 60% de la puissance d'un quadricoptère<sup>10</sup>.



**Figure 1.11** – L'hélicoptère "gros porteur" Kamov Ka-32 appartenant la compagnie Heliswiss, pouvant soulever jusqu'à 5 tonnes de charge utile.

Pour ces raisons, dans le domaine des aéronefs à voilure tournante de taille réelle, le développement est allé en faveur des hélicoptères conventionnels plutôt que vers les quadricoptères. Il existe également des hélicoptères coaxiaux, principalement utilisés pour du transport de charges et développés quasi-exclusivement par le constructeur russe Kamov (figure 1.11). La complexité de la mécanique de leur double rotor, équipé de deux plateaux permettant une variation cyclique et collective du pas des pales, en est le principal inconvénient.

## 1.2.2 Un intérêt exponentiel pour les multicoptères

Dans le domaine des drones, la tendance est nettement en faveur des quadricoptères. Pourtant, l'une des grandes faiblesses des drones à voilure tournante est leur faible autonomie de vol, ou de manière équivalente leur faible charge utile. Au regard de la comparaison des puissances induites, l'avantage est clairement en faveur des structures coaxiales. Pourquoi alors un tel engouement pour les drones quadricoptères?

9. Les calculs sont particulièrement simplifiés et il y aurait en toute rigueur un grand nombre de paramètres supplémentaires à prendre en compte. On néglige par exemple les pertes dues au rotor de queue sur un hélicoptère conventionnel, représentant environ 10% de la puissance consommée (Koehl *et al.*, 2012).

10. On néglige les pertes dues aux interactions entre les rotors superposés

La figure 1.12 montre l'évolution du nombre de publications par an associées à différentes structures de drones<sup>5</sup>. On remarque l'intérêt particulier pour les drones à voilure fixe et les hélicoptères depuis 20 ans. Mais le plus remarquable est la croissance exponentielle du nombre d'articles par an sur les quadricoptères, depuis 2002, passant de 56 articles en 2002 à 5380 sur l'année 2016.

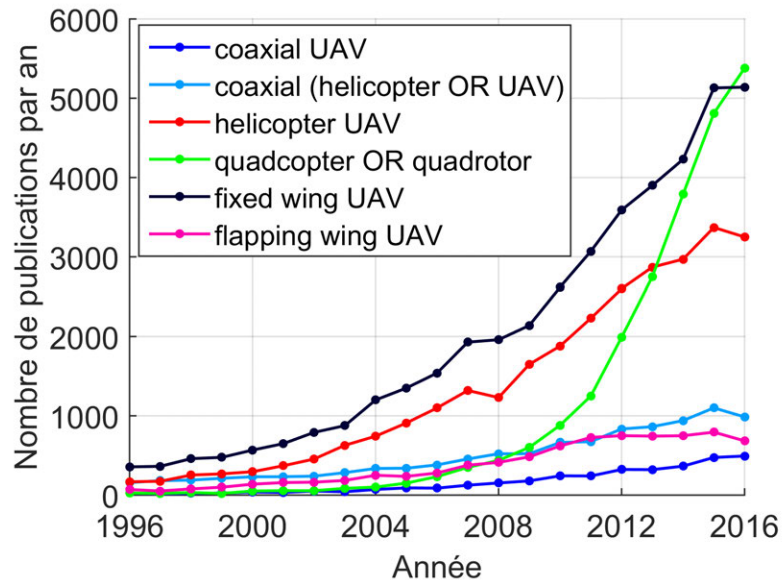


Figure 1.12 – Nombre de publication par an, pour différents mots clés.

Cet engouement s'explique principalement par les points suivants :

- Simplicité mécanique : les pales sont en général liées directement aux moteurs, et les moteurs sont directement fixés à une structure en croix.
- Simplicité aérodynamique : les rotors sont de taille réduite et les phénomènes de battement des pales, primordiaux pour les hélicoptères, sont en général négligeables. De plus, la poussée générée par chaque rotor est toujours dans l'axe du moteur.
- Simplicité de commande : les quatre entrées de commande (roulis, tangage, lacet et poussée) sont découplées et simplement produites par la variation de vitesse des moteurs.

Ces avantages permettent aux chercheurs de se concentrer sur des problématiques de plus haut niveau, indépendantes de la structure (vol en coopération, guidage ...).

### 1.2.3 Avantages et inconvénients de la structure coaxiale

Malgré l'engouement pour les structures multicoptères, le travail réalisé au cours de cette thèse s'est concentré sur les structures coaxiales. Celles-ci présentent divers avantages, dont les principaux sont listés ci-dessous :

- Ils ont un meilleur rendement que les hélicoptères et multicoptères, et permettent donc d'embarquer une charge utile plus importante à puissance égale.
- Le rotor d'anticouple (rotor de queue) est absent<sup>11</sup> : les couples opposés générés par les deux rotors s'annulent. Cela implique des avantages de compacité, mais permet également une manœuvrabilité accrue (moments d'inertie plus faibles).
- Il n'y a pas de dissymétrie de portance<sup>12</sup>, au contraire des hélicoptères conventionnels.
- Ils sont plus compacts et ont une empreinte au sol réduite.

11. Le rotor de queue crée une force latérale qui ne participe pas à la portance, et qui génère donc des pertes.

12. Lorsque l'hélicoptère est en vol d'avance, la portance augmente du côté de la pale avançante car elle a une vitesse relative plus importante que la pale reculante. L'hélicoptère a alors un mouvement de roulis vers la droite pour un rotor tournant dans le sens horaire. Dans le cas d'un hélicoptère bi-rotor, cette dissymétrie se produit au niveau de chaque rotor et s'annule donc.



En contrepartie, on peut lister les principaux inconvénients suivants :

- Les hélicoptères coaxiaux ont une complexité mécanique et une fragilité accrue à cause du plateau cyclique et des axes contrarotatifs.
- La hauteur de l'appareil est généralement plus importante.
- Les phénomènes aérodynamiques en jeu sont plus complexes que dans le cas des quadri-coptères notamment à cause de la taille des rotors et de leur commande.
- Leur vitesse d'avance est limitée, à cause de la traînée importante du bi-rotor. Ils sont également plus sensibles aux conditions extérieures.
- Des problèmes de vibrations et de résonance peuvent survenir à basses fréquences, favorisés par la longueur importante des axes des rotors.

Le choix de l'étude de cette structure a par ailleurs été motivé par les travaux effectués par l'Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis (ISL) dans le domaine des drones miniatures, en particulier sur les modèles capables d'être lancés grâce à un canon d'artillerie. Ce contexte opérationnel nécessite que la plateforme soit compacte et contenue dans une enveloppe axisymétrique ne permettant pas la présence d'un rotor de queue. Ces contraintes fortes associées à une charge utile importante ont été à l'origine du développement par l'ISL d'un concept de drone hybride à rotors coaxiaux contrarotatifs appelé GLMAV (Gnemmi et Haertig, 2008).

### 1.3 Le projet GLMAV

#### 1.3.1 Concept et objectifs du projet

Le GLMAV (*Gun-Launched Micro Air Vehicule*) est un hélicoptère coaxial miniature pouvant être projeté grâce à un tube dédié, suivant le scénario illustré en figure 1.13. Son double rotor peut être replié dans le corps est il se présente alors sous la forme d'un projectile d'un diamètre de 80 mm, pouvant être tiré par un canon à poudre. A la sortie du lanceur, il suit une trajectoire balistique jusqu'à l'apogée, moment où les rotors sont déployés : le GLMAV prend alors la forme d'un hélicoptère coaxial. Les rotors sont utilisés dans un premier temps pour freiner et stabiliser le véhicule. Il est alors capable d'évoluer de la même manière qu'un hélicoptère classique pour la collecte d'informations par transmission vidéo en temps réel (Gnemmi *et al.*, 2017a).

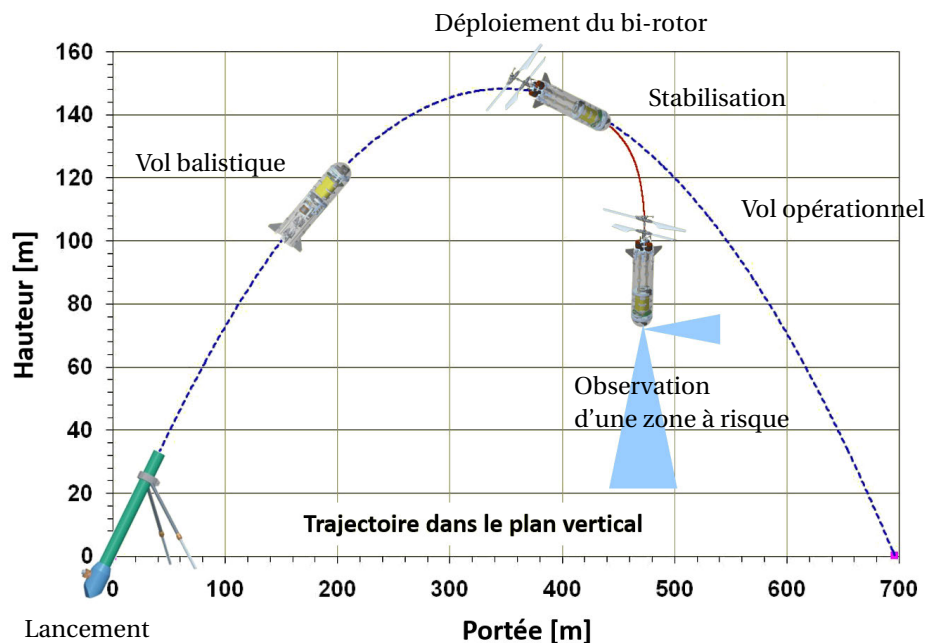


Figure 1.13 – Principe de fonctionnement du GLMAV

Ce mode opératoire apporte un certain nombre d'avantages dont le principal est la mise en

place très rapide du drone au dessus de la zone à observer (de l'ordre d'une dizaine de secondes), tout en bénéficiant de la capacité de vol stationnaire de l'hélicoptère. C'est également et avant tout la démonstration d'un concept, ouvrant la voie à un nouveau type de véhicule hybride. En effet, s'il existe un certain nombre de drones miniatures de type avion<sup>13</sup> ou aile volante<sup>14</sup> pouvant être lancés de cette manière, il n'existe pas, à ma connaissance, de prototype fonctionnel de véhicule hybride projectile/hélicoptère comme le GLMAV.

### 1.3.2 Historique du projet et acteurs principaux

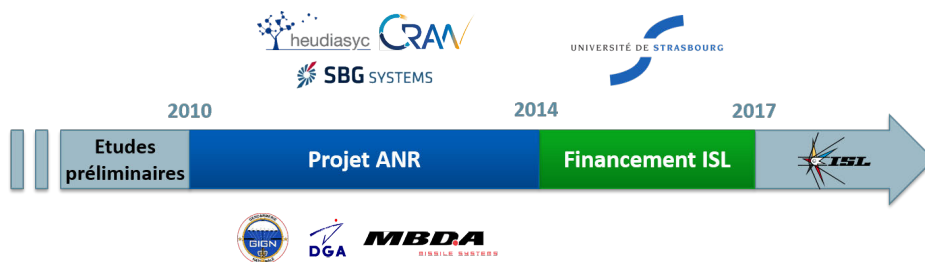


Figure 1.14 – Historique du projet GLMAV.

Le projet a fait l'objet d'un financement par l'Agence Nationale de la Recherche entre mars 2010 et janvier 2014 (voir figure 1.14). Trois principaux acteurs ont alors contribué avec l'ISL sur le projet durant cette période :

- le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN UMR 7039),
- le laboratoire Heuristique et Diagnostic des Systèmes Complexes (Heudiasyc UMR CNRS 7253),
- l'entreprise SBG Systems, spécialisée dans les solutions de navigation.

Depuis 2014, les travaux se poursuivent sur fonds ISL, avec l'université de Strasbourg (laboratoire ICube UMR CNRS 7357).

Le projet a également donné lieu à plusieurs thèses :

- La thèse de Koehl *et al.* (2012), axée principalement sur la modélisation et l'estimation de l'état du drone.
- La thèse de Drouot (2013), dédiée à l'étude de lois de commandes linéaires et non-linéaires appliquées à un modèle du drone.
- La thèse de Chauffaut (2014), dédiée à l'étude de la phase de transition et à la commande du drone durant cette phase.
- Et enfin ma thèse qui s'inscrit dans la continuité, avec l'objectif de pallier aux problématiques mises en lumière par les travaux précédents, en particulier l'insuffisance de la modélisation et de l'identification de l'hélicoptère.

### 1.3.3 Description du GLMAV

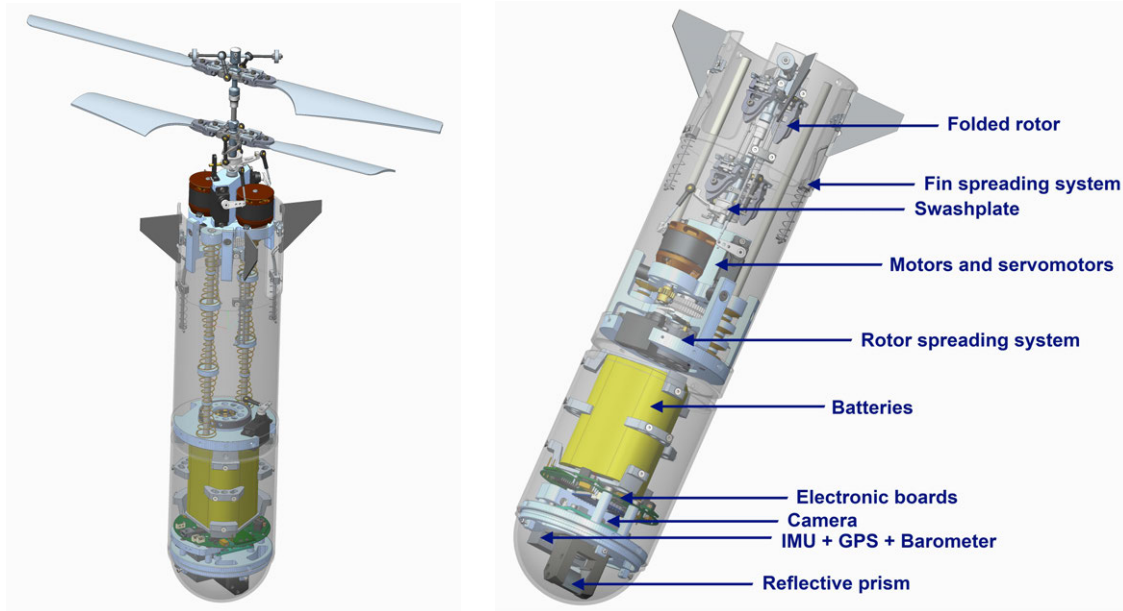
La figure 1.15a présente les différents éléments constitutifs du véhicule en configuration drone et en configuration projectile (rotors repliés dans le corps, ailettes déployées). La figure 1.15b montre la plateforme réelle et une vue rapprochée de la tête-rotor. Le drone est soumis à de fortes accélérations lors de son lancement (voir la section 1.3.4), il est donc nécessaire que la structure mécanique soit suffisamment résistante. Ainsi, le choix s'est porté vers une structure coaxiale sans pas collectif<sup>15</sup> pour diminuer la complexité mécanique : la commande se fait par la variation

13. On peut mentionner par exemple le Switchblade d'AeroVironment (AeroVironment, 2017) ou le Coyote de BAE-Systems (Systems, 2017), deux drones pouvant être tiré par canon, déployant leurs ailes à la sortie du tube.

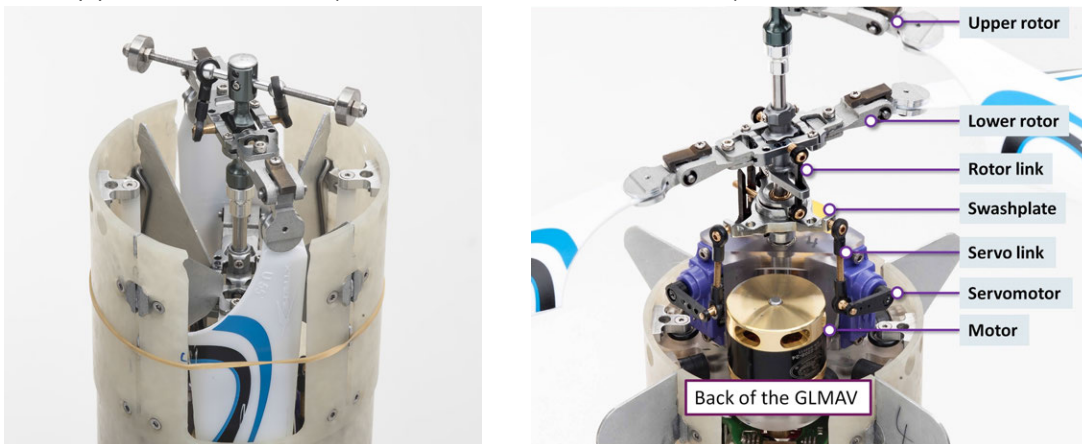
14. Comme le Bird's Eye de Bird Aerospace LLC. (Bird Aerospace LLC, 2017).

15. Le pas collectif permet de faire varier l'angle d'inclinaison (ou pas) des pales du rotor, permettant ainsi de maintenir un régime moteur constant. Dans le cas d'un hélicoptère sans pas collectif (c'est-à-dire disposant uniquement d'un pas cyclique), le contrôle de la poussée du rotor se fait en variant la vitesse du moteur.

de vitesse des deux rotors et par l'intermédiaire de deux servomoteurs permettant une variation cyclique du pas des pales du rotor inférieur. Pour les mêmes raisons, la barre de Bell, classique sur ces structures pour augmenter la stabilité de la plateforme (visible sur la figure 1.15b), a été supprimée dans les versions plus récentes : le pas du rotor supérieur est fixe. Cette modification permet d'augmenter la manœuvrabilité au détriment de la stabilité. Le complément de stabilité est alors apporté par les algorithmes de commande.



(a) Modélisation CAO (Conception Assistée par Ordinateur), drone déployé ou replié.



(b) Vue rapprochée du plateau cyclique et des actionneurs. La barre de Bell, présente sur cette version, a été supprimée sur la version ultérieure et sur la maquette utilisée durant la thèse.

Figure 1.15 – Les différents éléments constitutifs du prototype GLMAV.

### 1.3.4 Phases de vol et problématiques associées

**Phase de lancement.** Durant la phase de lancement, le drone est soumis à une accélération axiale supérieure à 2000 g, et la vitesse en sortie du tube est de l'ordre de 100 m/s. Ces conditions extrêmes contraignent fortement la conception (Gnemmi *et al.*, 2017b).

**Phase de vol libre.** En sortie du tube, le GLMAV déploie automatiquement des ailettes permettant de stabiliser sa trajectoire balistique. Cette phase n'est pas contrôlée. La forte accélération de départ entraîne une saturation des accéléromètres et une perte des informations de position et

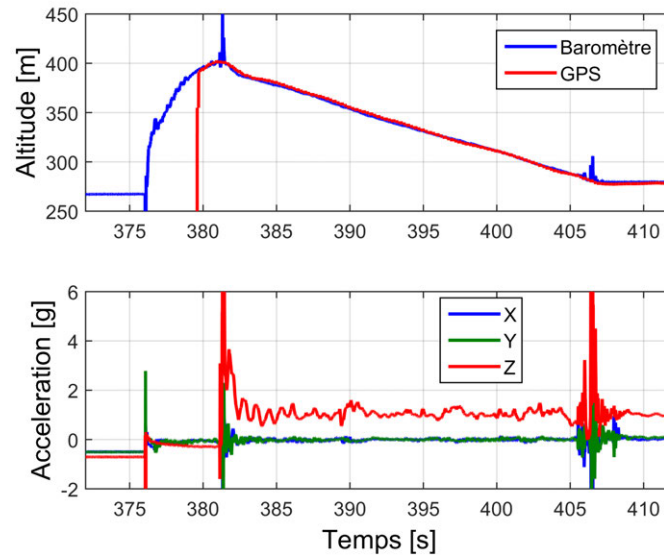


Figure 1.16 – Altitude et force spécifique mesurées durant un vol.

de vitesse calculée par le récepteur GPS dans les premiers instants de vol. La figure 1.16 montre les mesures d'altitude et d'accélération durant un lancement du drone.

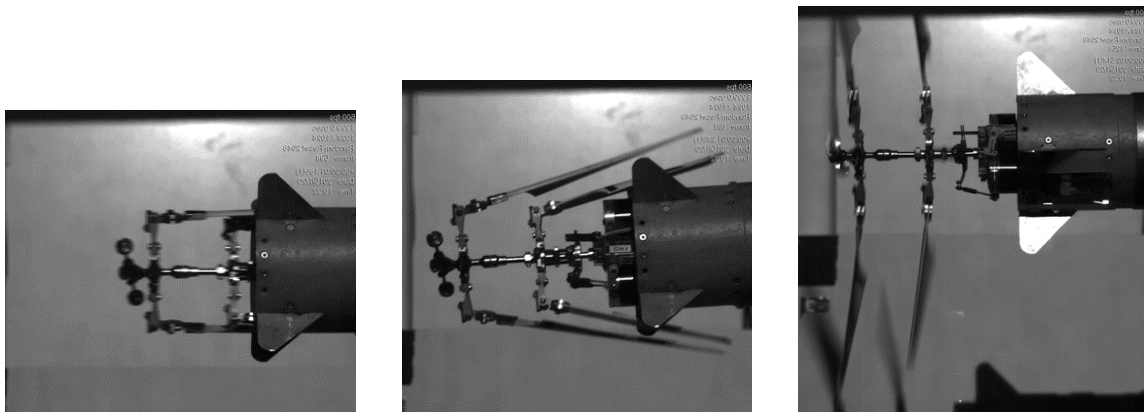


Figure 1.17 – Essai de déploiement et de mise en rotation des rotors du GLMAV en soufflerie avec une vitesse de l'air de 30 m/s.

**Phase de transition.** La vitesse d'avance du véhicule est d'environ 50 m/s à l'apogée de sa trajectoire (figure 1.17). Durant la phase de transition, il doit déployer son bi-rotor et freiner sa trajectoire en quelques secondes. Cela crée des contraintes mécaniques importantes sur les rotors et a nécessité une étude particulière sur la commande des moteurs (Roussel *et al.*, 2015). Les aspects aérodynamiques et de commande du drone durant cette phase ont également fait l'objet d'études approfondies (Chauffaut, 2012, 2014; Gnemmi *et al.*, 2017b).

**Phase de vol opérationnel.** Cette phase nous intéresse particulièrement dans cette étude. Les premiers essais de vol "déployé" (figure 1.18) ont mis en évidence des difficultés de commande importantes : la stabilité de la plateforme n'est pas satisfaisante, elle présente de fortes oscillations, et nécessite l'expérience d'un pilote entraîné pour son vol. D'autre part, il s'est avéré que les performances obtenues lors d'essais expérimentaux étaient loin de celles prévues en simulation, faisant ressortir des lacunes importantes dans les modèles utilisés pour la synthèse de lois de commandes et pour la simulation. Ces points, en particulier, ont motivé le travail présenté ici.





Figure 1.18 – Le GLMAV photographié en vol opérationnel.

## 1.4 Description de la plateforme utilisée dans cette étude

### 1.4.1 Une version allégée du GLMAV

La thèse s'inscrit dans la continuité du projet GLMAV, et concerne le vol opérationnel du drone qui se présente durant cette phase sous la forme d'un hélicoptère à deux rotors coaxiaux. Nous utilisons dans cette étude une version allégée et simplifiée du prototype GLMAV, présentée en figure 1.19. Cette version est dédiée au développement des algorithmes de commande pour la phase de vol déployé, et n'intègre donc pas le système de déploiement des rotors ou les ailettes de stabilisation du vol balistique. Il n'est pas nécessaire non plus qu'elle soit résistante à l'accélération de lancement, ce qui permet un allègement de la structure. Ces modifications permettent de réduire la masse du prototype de 1 kg à 325 g, donc de diminuer la vitesse de sustentation des rotors, passant d'environ 4000 à 2050 tr/min, et d'augmenter l'autonomie en vol. Les moteurs sont également différents, passant d'une puissance de 200 W à 40 W, bien que leur commande reste identique (voir la section 1.7).

La version allégée permet de réaliser facilement des essais expérimentaux, sans les risques liés à l'utilisation du prototype du GLMAV (dangerosité due à la vitesse de rotation des pales, endommagement du prototype, etc.). En contrepartie, la maquette présente une structure plus flexible et moins bien équilibrée (léger décentrage de l'axe des rotors par rapport à la structure, décentrage du centre de masse).

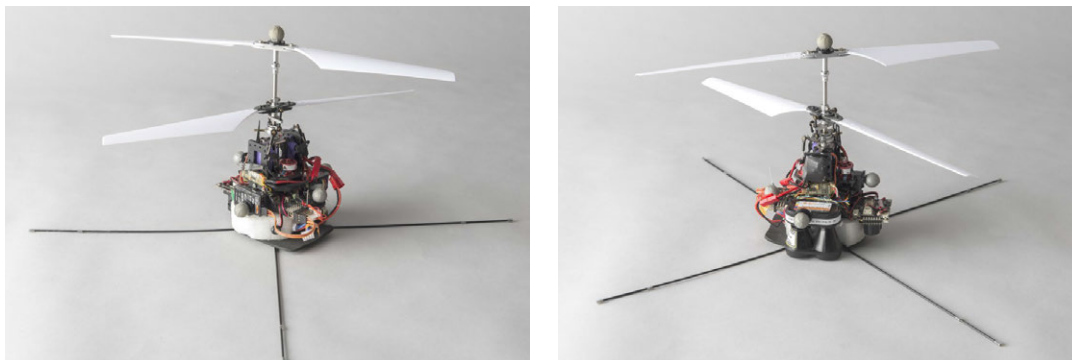
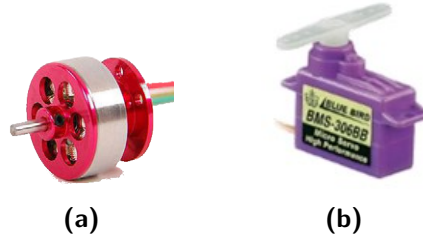


Figure 1.19 – La maquette utilisée pour les essais expérimentaux dans cette étude.

Contrairement à un hélicoptère conventionnel, un hélicoptère coaxial n'a pas de rotor de queue mais un double rotor contrarotatif. La poussée du rotor inférieur peut être orientée grâce à un plateau cyclique, permettant à l'hélicoptère de se diriger. Le différentiel moteur lui permet

de tourner sur lui-même autour de son axe principal (axe de lacet). Le vol de l'hélicoptère est contrôlé par l'intermédiaire de quatre actionneurs présentés sur la figure 1.20 : deux moteurs actionnant la rotation des rotors et deux servomoteurs permettant de changer l'orientation du plateau cyclique et de diriger l'hélicoptère. Les actionneurs sont étudiés en détails en section 1.7.



**Figure 1.20** – Les deux types d'actionneurs présents sur la maquette. (a) Moteur brushless de type "C10". (b) Servomoteur Blue Bird BMS306.

### 1.4.2 Caractéristiques inertielles

La méthode du pendule tri-filaire est une méthode simple et peu coûteuse pour estimer les paramètres d'inertie d'un objet. L'objet de masse  $m$  est posé sur un disque de rayon  $r_0$ , de masse  $m_0$  et de moment d'inertie  $I_0$ , qui est suspendu par trois fils de longueur  $l$  (voir figure 1.21). Le centre de masse de l'objet est placé au centre du disque. On excite le système par une perturbation autour de l'axe vertical, et le pendule oscille alors avec une période d'oscillation  $T$ . Le moment d'inertie  $I$  de l'objet autour de cet axe est alors donné par l'équation suivante (Korr et Hyer, 1962) :

$$I = \frac{gT^2 r_0^2 (m_0 + m)}{4\pi^2 l} - I_0 \quad (1.2)$$

L'inertie d'un cylindre est donnée par :

$$\begin{cases} I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{4} \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right) \\ I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

L'application numérique pour le disque support donne :  $I_0 = 9.7903e - 05 \text{ kg.m}^2$ . Ce moment d'inertie peut également être estimé par la mesure de la période d'oscillation du pendule à vide. Nous mesurons ici  $T = 1.33 \text{ s}$ , donc  $I_0 = 9.5631e - 05 \text{ kg.m}^2$ . Cette seconde valeur est choisie pour la suite des calculs.

Les résultats de mesure d'inertie du drone sont présentés dans le tableau 1.3. La symétrie axiale du drone donne  $I_{xx} \approx I_{yy}$ .

**Table 1.3** – Caractéristiques principales de la maquette.

Dimensions de la maquette	Hauteur	190 mm
	Largeur	80 mm
	Longueur	120 mm
Paramètres cinétiques	Masse	325 g
	Moments d'inertie	$I_{xx} = 1.20e - 3 \text{ kg.m}^2$
		$I_{yy} = 1.21e - 3 \text{ kg.m}^2$
		$I_{zz} = 7.71e - 4 \text{ kg.m}^2$
Paramètres du rotor	Rayon	175 mm
	Distance axiale entre rotors	60 mm
	Rapport de réduction moteur	8/69



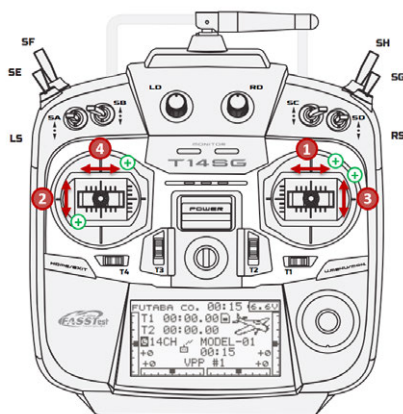
Figure 1.21 – Le pendule trifilaire construit pour estimer les paramètres d’inertie de la maquette.

### 1.4.3 Télémétrie

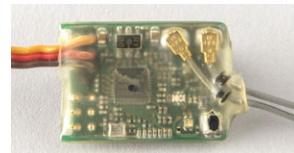
Le drone dispose de plusieurs liaisons sans fil avec le sol :

- La liaison avec la radiocommande permet l’envoi des consignes par le pilote. Il s’agit d’une liaison à une fréquence de 2.4 GHz, classique sur les systèmes récents.
- Une deuxième liaison sans fil permet la transmission d’informations sur l’état du drone à la station-sol<sup>16</sup> (c’est-à-dire un ordinateur disposant d’un logiciel d’interface), à la fréquence de 433 MHz.
- La transmission vidéo, qui se fait à 5.8 GHz ou à 2.4 GHz selon les versions.

La radiocommande utilisée est présentée en figure 1.22. Elle dispose de plusieurs voies, dont les quatre principales sont représentées. Les sens positifs sont également mentionnés. En vol manuel, la voie 1 a une action sur l’axe de roulis, la voie 2 sur l’axe de tangage, la voie 3 sur l’axe vertical et la voie 4 sur l’axe de lacet.



(a) La radiocommande utilisée et le sens positif des quatre voies principales (deux manches), en mode 1.



(b) Le récepteur embarqué sur le drone est miniaturisé (21 × 28 × 6 mm et 5 g).

Figure 1.22 – Transmission des consignes par le pilote.

16. La télémétrie se fait en général sur les fréquences 433 MHz en Europe, et 900 MHz dans le reste du monde. Elle peut se faire également en liaison WiFi sur les systèmes les plus récents.

#### 1.4.4 Enregistrement de données de vol

La bande passante pour la télémétrie est limitée, et c'est pourquoi une tâche temps-réel gère l'enregistrement des données de vol à plus haute fréquence (typiquement 100 Hz) sur une carte microSD embarquée sur le drone, et permet ainsi une analyse a posteriori d'un vol.

### 1.5 Avionique

L'avionique désigne l'ensemble du système électronique et logiciel permettant la mise en œuvre d'algorithmes de commande et de navigation. Cela inclut principalement l'ordinateur de bord et l'architecture logicielle embarquée.

#### 1.5.1 État de l'art des principaux autopilotes pour drones

Il existe un nombre très important de solutions visant au guidage, à la navigation et à la commande des drones, appelées "autopilotes". Un autopilote consiste en une partie électronique et une partie logicielle. Classiquement, le développement de ces deux parties se fait de manière conjointe. Après un temps où chaque laboratoire développait son propre autopilote, depuis les années 2010 la tendance est clairement à la mise en commun et au partage des développements<sup>17</sup>, autant électroniques que logiciels.

Depuis quelques années, les différentes architectures logicielles ont atteint un degré d'abstraction et de standardisation permettant leur compatibilité avec un maximum de plateformes électroniques, processeurs ou capteurs. De nombreuses initiatives ont ainsi été lancées par différentes équipes de recherche dans le sens de la standardisation : la plateforme DroneCode<sup>18</sup> (de Lanerolle, 2015), les protocoles de communication UAVCAN (Kirienko *et al.*, 2015) et MAVLink<sup>19</sup> (Meier *et al.*, 2013) ou encore le support du système ROS (*Robot Operating System*) (Quigley *et al.*, 2009). La frontière entre les différents autopilotes libres est ainsi de plus en plus floue car ils partagent des bases de codes conséquentes<sup>20</sup>.

##### 1.5.1.1 Une multitude de systèmes : évolution comparée sur dix ans

S'il existe des systèmes propriétaires performants (on peut mentionner par exemple ceux proposés par le leader chinois des drones de loisirs, DJI), les projets d'autopilotes "open-source" ont l'avantage de la flexibilité de la partie logicielle comme de la partie électronique, et d'être constamment testés et améliorés par une communauté d'utilisateurs, de chercheurs et de développeurs. En effet, le code source de ces projets est publique, et en général accessible sur des plateformes de gestion de code telles que "GitHub" ou "BitBucket". Cela signifie que n'importe qui peut contribuer au projet<sup>21</sup>, mais également créer très facilement une version dérivée du projet initial (appelée *fork*). Ces versions dérivées peuvent parfois prendre le dessus sur le projet initial si elles sont plébiscitées par la communauté. Cela rend parfois confus l'historique des différents projets, et il est difficile d'avoir une vue d'ensemble sur les projets actifs.

17. Grâce à des initiatives comme le projet Paparazzi, développé à l'ENAC de Toulouse (Brisset *et al.*, 2006), qui visait très tôt à un partage des efforts de développement.

18. DroneCode est une organisation liée à la Fondation Linux visant à favoriser le développement collaboratif de logiciels libres pour les drones, dans le but de fournir une solution complète, fiable et flexible d'autopilote pour drones. Elle fait le lien entre les développeurs et l'industrie. Les projets de référence de DroneCode sont PX4, Pixhawk, MAVLink et QGroundControl (Tridgell, 2015). D'autres projets sont également inclus : UAVCAN, RTPS, ROS Gazebo Simulator, etc.

19. Le protocole de communication MAVLink développé dans les années 2010 à l'ETH de Zürich est aujourd'hui utilisé dans la grande majorité des autopilotes. Ce protocole permet de standardiser les communications entre l'autopilote et d'autres systèmes (station-sol, processeur de calcul déporté, système de télémétrie...).

20. A titre d'exemple, la carte électronique préférentielle du projet ArduPilot est à présent issue du projet Pixhawk/PX4, sur laquelle la partie logicielle s'intègre comme une tâche temps réel spécifique de la base logicielle PX4.

21. Les contributions se font via des *pull request*, c'est-à-dire une proposition de modification qui est soumise à l'étude et validée par la communauté le cas échéant. Ce terme, ainsi que les termes *commit* ou *fork* sont des termes techniques issus de l'anglais et utilisés également en français.



Dans cette optique, et afin de donner un aperçu de l'évolution très rapide de ces projets, nous présentons ici des données obtenues en analysant directement le code source de chacun d'entre eux, par le développement de scripts permettant d'automatiser la tâche<sup>22</sup>. À notre connaissance, une telle analyse sur l'évolution des principaux projets n'a jamais été menée à ce jour. Nous avons sélectionné et comparé 16 autopilotes open-source parmi les plus utilisés ou les plus mentionnés dans le domaine de la recherche ou par les passionnés. Ils sont listés dans le tableau 1.4. Un état de l'art et une comparaison poussée des huit principaux projets open-source disponibles en 2012 est donné par Lim *et al.* (2012).

**Table 1.4** – Liste des autopilotes considérés dans cette section, et adresse du code source.

Nom	Site internet	Code source
ArduPilot/APM	<a href="http://ardupilot.org">http://ardupilot.org</a>	<a href="https://github.com/ArduPilot/ardupilot">https://github.com/ArduPilot/ardupilot</a>
PX4/Pixhawk	<a href="http://px4.io">http://px4.io</a>	<a href="https://github.com/PX4/Firmware">https://github.com/PX4/Firmware</a>
Paparazzi UAV	<a href="http://wiki.paparazziuav.org/wiki/Main_Page">http://wiki.paparazziuav.org/wiki/Main_Page</a>	<a href="https://github.com/paparazzi/paparazzi">https://github.com/paparazzi/paparazzi</a>
OpenPilot	<a href="http://www.openpilot.org">http://www.openpilot.org</a>	<a href="https://github.com/openpilot/OpenPilot">https://github.com/openpilot/OpenPilot</a>
LibrePilot	<a href="https://www.librepilot.org">https://www.librepilot.org</a>	<a href="https://bitbucket.org/librepilot/librepilot">https://bitbucket.org/librepilot/librepilot</a>
TauLabs	<a href="http://taulabs.org/">http://taulabs.org/</a>	<a href="https://github.com/TauLabs/TauLabs">https://github.com/TauLabs/TauLabs</a>
dRonin	<a href="http://dronin.org">http://dronin.org</a>	<a href="https://github.com/d-ronin/dRonin">https://github.com/d-ronin/dRonin</a>
MultiWii	<a href="http://www.multiwii.com">http://www.multiwii.com</a>	<a href="https://github.com/multiwii/multiwii-firmware">https://github.com/multiwii/multiwii-firmware</a>
BaseFlight	-	<a href="https://github.com/multiwii/baseflight">https://github.com/multiwii/baseflight</a>
RaceFlight	<a href="https://raceflight.net">https://raceflight.net</a>	<a href="https://github.com/rs2k/raceflight">https://github.com/rs2k/raceflight</a>
iNavFlight	<a href="http://inavflight.com">http://inavflight.com</a>	<a href="https://github.com/iNavFlight/inav">https://github.com/iNavFlight/inav</a>
Cleanflight	<a href="http://cleanflight.com">http://cleanflight.com</a>	<a href="https://github.com/cleanflight/cleanflight">https://github.com/cleanflight/cleanflight</a>
BetaFlight	<a href="https://github.com/betaflight/betaflight/wiki">https://github.com/betaflight/betaflight/wiki</a>	<a href="https://github.com/betaflight/betaflight">https://github.com/betaflight/betaflight</a>
AeroQuad	<a href="http://aeroquad.com">http://aeroquad.com</a>	<a href="https://github.com/AeroQuad/AeroQuad">https://github.com/AeroQuad/AeroQuad</a>
AutoQuad	<a href="http://autoquad.org">http://autoquad.org</a>	<a href="https://github.com/mpaperno/aq_flight_control">https://github.com/mpaperno/aq_flight_control</a>
MatrixPilot	<a href="https://github.com/MatrixPilot/MatrixPilot/wiki">https://github.com/MatrixPilot/MatrixPilot/wiki</a>	<a href="https://github.com/MatrixPilot/MatrixPilot">https://github.com/MatrixPilot/MatrixPilot</a>

La figure 1.23 donne l'évolution du nombre de contributeurs<sup>23</sup> sur chaque projet. Cette figure donne des informations sur l'activité des projets (certains projets ne sont plus mis à jour depuis plusieurs mois) et sur leur historique. Un autre bon indicateur de l'activité de chacun des projets est le nombre de *commit* par semaine<sup>24</sup>, tracé en figure 1.24.

On peut noter les points suivants :

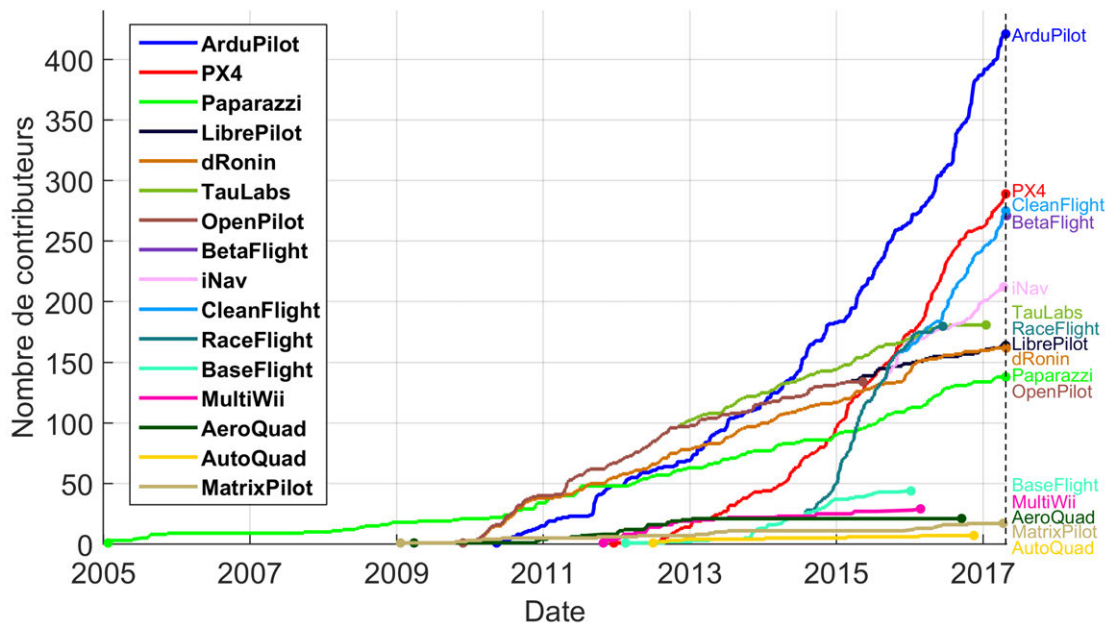
- Certains projets ont connu une activité importante mais éphémères et n'ont plus d'activité aujourd'hui. C'est le cas par exemple des projets OpenPilot, MultiWii, BaseFlight, etc.
- D'autres ont une activité continue depuis de nombreuses années. Le projet Paparazzi (Brisset *et al.*, 2006), par exemple, est actif depuis 2005 avec entre 10 et 70 *commit* par semaine<sup>25</sup>. Il a connu un pic d'activité entre 2010 et 2012.
- Les projets PX4 et Ardupilot connaissent une activité croissante depuis leur création pour atteindre plus de 80 *commit* par semaine depuis 2014. En 2015, plus de 100 000 utilisateurs de ces projets sont recensés (pour la recherche, l'enseignement, par les amateurs ou les professionnels) (Riseborough, 2015).
- Le projet OpenPilot a connu une forte activité durant les deux années suivant sa création, puis un regain d'activité en 2012. Son *fork* Taulabs a ensuite pris le dessus à partir de 2013. L'un comme l'autre semblent abandonnés aujourd'hui.
- Le projet CleanFlight/BetaFlight connaît une croissance très forte depuis 2016, pour atteindre récemment le niveau d'activité des projets PX4 et Ardupilot. Cela s'explique par l'essor des courses de drones, pour lesquelles ce projet est orienté.

22. Les scripts permettent de récolter un certain nombre de données sur chaque *commit*, c'est-à-dire chaque modification du code source (nombre de lignes ajoutées ou supprimées, auteurs, date, etc.).

23. Un contributeur est une personne ayant modifié une portion du code source, et dont la modification a été acceptée et incluse dans la branche principale du projet.

24. Un *commit* est la prise en compte effective d'une modification sur le code source. Cela peut être la correction d'un défaut ou l'ajout d'une fonctionnalité, par exemple.

25. Le projet Paparazzi est en réalité en développement depuis 2003 pour les drones à voilure fixe. Le site d'hébergement du code source a changé en 2005. C'est le cas pour d'autres projets également.



**Figure 1.23** – Nombre de contributeurs au code source des principaux autopilotes pour drones. Données au 25/04/2017.

Par ces courbes, on peut noter également les nombreux *fork* des projets. Ainsi, les projets BetaFlight, CleanFlight et iNav ont des ancêtres communs, de même que les projets LibrePilot et dRonin. On peut ainsi tracer les arbres présentés en figure 1.25. Le projet ArduPilot a également connu une évolution ponctuée de *fork* et de fusions entre projets. En 2010, notamment, les deux jeunes projets ArduCopter et AeroQuad fusionnent pour donner naissance à ArduCopterNG, puis APM, et enfin ArduPilot utilisé actuellement. Enfin, on peut mentionner également le nombre impressionnant de 3330 *clones* ou *fork* du projet PX4 dénombrés fin avril 2017.

### 1.5.1.2 Évolution des architectures électroniques

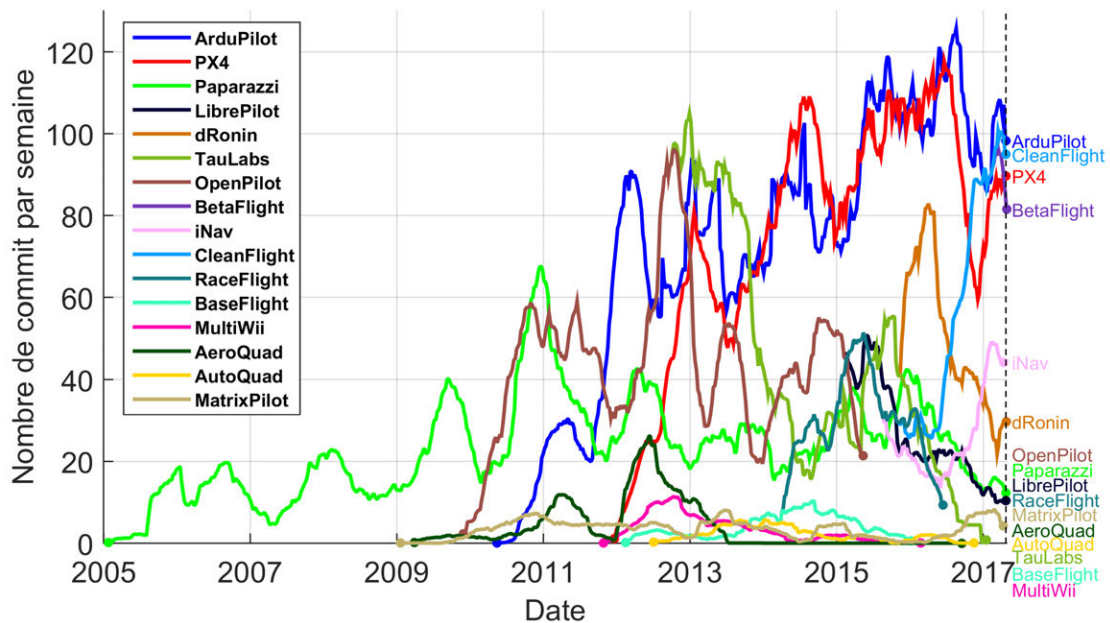
Historiquement, les autopilotes pour drones miniatures ont d'abord été majoritairement basés sur des microcontrôleurs 8 ou 16 bits. C'était le cas du projet Drone Cigogne<sup>26</sup> de l'INSA de Strasbourg, du projet Slugs<sup>27</sup> de l'université de Californie, de MatrixPilot ou encore GluonPilot : tous développés pour les microcontrôleurs 16 bits "dsPIC" de Microchip. Le projet MultiWii comme le projet ArduPilot<sup>28</sup> ont été développés au départ pour microcontrôleurs 8 bits de Atmel. Suivant l'évolution des systèmes embarqués, les projets ont été adaptés pour fonctionner sur microcontrôleurs 32 bit (le projet Multiwii devient Baseflight, le projet ArduPilot est adapté pour l'architecture ARM, etc.), sur circuits FPGA (*Field-Programmable Gate Array*) (comme le projet BeaglePilot, issu de ArduPilotMega) ou encore sur des CoM (*Computer-on-Module*) capables d'intégrer un système Linux embarqué<sup>29</sup>. Différentes cartes électroniques sont présentées en figure 1.26. Il existe un nombre très important de variantes de ces cartes, encouragées par la dispo-

26. Développé au départ sur microcontrôleurs 8 ou 16 bits, le projet Drone Cigogne s'est ensuite rattaché aux plateformes APM de ArduPilot, puis Pixhawk de PX4, à l'instar de nombreux groupes de recherche.

27. Développés principalement pour les drones à voilure fixe, les projets Slugs et GluonPilot ont connu leur pic de développement entre 2008 et 2010, mais ne sont plus mis à jour depuis le début de l'année 2013.

28. Le projet ArduPilot était développé au départ pour les plateformes Arduino (années 2009 à 2012), basées sur des microcontrôleurs Atmel 8 bits, d'où le nom du projet.

29. Le code PX4 est aujourd'hui compatible avec des microcontrôleurs ARM 32 bits, des systèmes Linux embarqués comme Intel Aero Compute ou Raspberry Pi, ou d'autres systèmes embarqués comme la plateforme Qualcomm Snapdragon dont le processeur "Snapdragon 801" est utilisé également sur de nombreux *smartphones*.



**Figure 1.24** – Nombre de commit par semaine pour codes source des principaux autopilotes pour drones. Utilisation d'un filtre moyenné avec une fenêtre glissante sur six mois. Données au 25/04/2017.

nibilité des sources<sup>30</sup>.

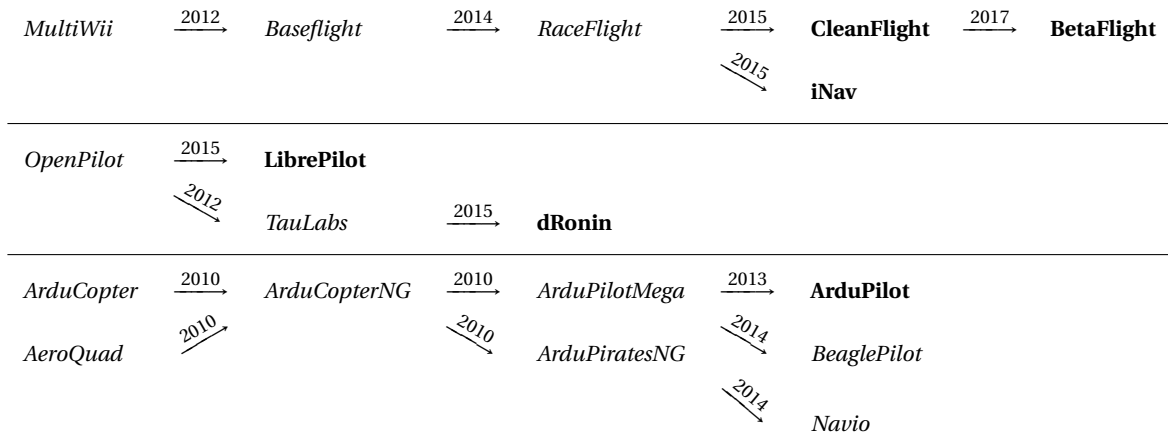
### 1.5.1.3 Différents degrés d'automatisation

Si les autopilotes présentés ne sont pas égaux en termes d'activité ou de nombre de contributeurs, ils ne le sont pas non plus en termes de fonctionnalités et de performances. La grande majorité d'entre eux est développée pour les multicoptères, et en particulier les quadricoptères. Un nombre réduit d'entre eux permet également la commande de drones à voilure fixe ou même de robots terrestres (ArduPilot ou PX4 par exemple). On peut distinguer deux grandes familles : les autopilotes permettant une commande uniquement manuelle du drone (par radiocommande), et les autopilotes permettant également des vols plus ou moins automatisés. C'est le cas des projets Pixhawk/PX4, Ardupilot et Paparazzi qui bénéficient des contributions de chercheurs du monde entier (Bapst *et al.*, 2015; Goppert *et al.*, 2017; Mellinger et Kumar, 2011) ainsi que de partenaires académiques et industriels.

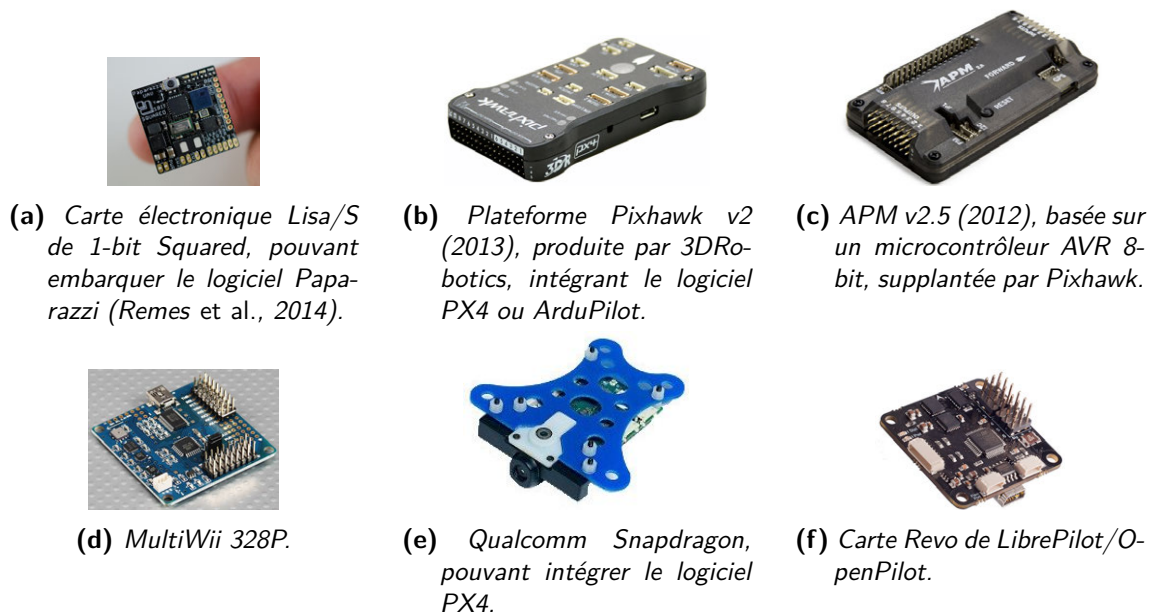
## 1.5.2 Les choix pour le projet GLMAV

**Structure électronique.** Le projet GLMAV, présenté en section 1.3, a suivi la même évolution de l'électronique et du logiciel. La figure 1.27a présente la carte électronique utilisée aux débuts du projet (2010-2013) avec la centrale inertielle IG-500N de SBG Systems. La partie électronique comme la partie logicielle sont alors développées spécifiquement en interne par l'ISL. Devant l'émergence des différents projets libres (figure 1.23), afin de rester en phase avec l'état de l'art et de joindre les efforts de développement avec ceux d'une large communauté, le choix a été fait en 2014 d'utiliser la carte électronique Pixhawk développée dans le laboratoire de recherche *Computer Vision and Geometry Lab* de l'école polytechnique fédérale de Zürich (ETHZ), présentée en figures 1.27b et 1.26b (avec un boîtier). Si les caractéristiques techniques sont moindres (voir

30. On peut mentionner par exemple la variante Dropix de Pixhawk développée par la compagnie Drotek Electronics de Toulouse, mais également AUAV X2, HKPilot32, PixFalcon, Px4Pilot, PixRacer, XRacer, Pixhack, et bien d'autres. Notons que la limite entre la variante et la contrefaçon du produit original est parfois floue.



**Figure 1.25** – Arbres de l'évolution mouvementée de différents projets. Les projets qui ne semblent plus actifs sont en italique.



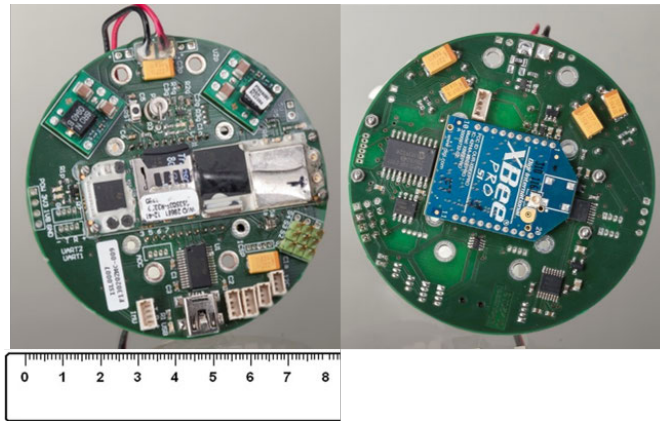
**Figure 1.26** – Différentes cartes électroniques associées à différents projets.

le tableau 1.5), ce choix permet de diminuer le temps consacré aux développements logiciels et électroniques, et d'augmenter celui consacré aux thématiques de recherches.

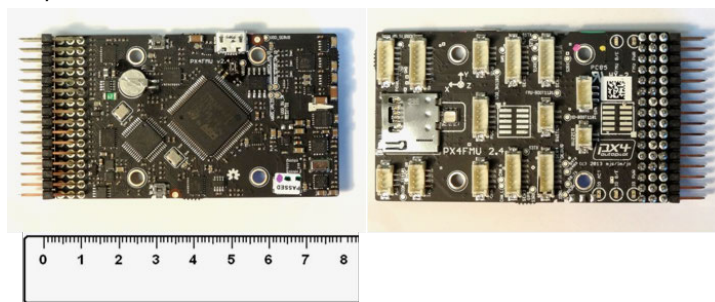
**Structure logicielle.** L'environnement logiciel du projet Pixhawk, appelé PX4, est basé sur un système d'exploitation temps réel dit d'"empreinte réduite", c'est-à-dire dédié aux microcontrôleurs (au contraire d'un système Linux par exemple), appelé "NuttX". Il permet un environnement "POSIX-Like", c'est-à-dire qu'il suit en grande partie la famille de normes IEEE POSIX (*Portable Operating System Interface*) notamment pour la gestion des taches (*multithreading*). La figure 1.28 présente schématiquement l'architecture logicielle. Les différentes taches que doit effectuer l'autopilote sont dissociées en "modules" (dernier niveau sur la figure 1.28), chaque module pouvant être vu comme une tache temps réel : estimation d'état, enregistrement des données de vol, algorithmes de guidage ou de commande sont autant de modules.

Le projet PX4 a été développé dès le départ de manière très flexible. Ainsi, l'environnement logiciel est décomposé en deux grandes parties :

- L'ensemble des pilotes de périphériques et la structure permettant le fonctionnement des taches temps réel et leur communication, appelé *PX4 middleware*. Il est construit de manière très générique et permet d'utiliser différents algorithmes de guidage, navigation et



(a) La carte électronique développée pour le GLMAV, utilisée de 2010 à 2013, basée sur un ordinateur embarqué Gumstix Overo, équipée du système Linux et du cœur temps réel Xenomai.



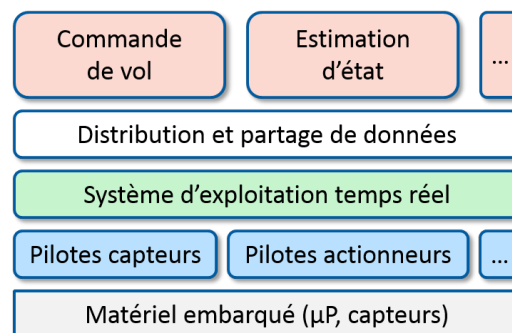
(b) La carte électronique Pixhawk, utilisée pour le GLMAV depuis 2014, basée sur un processeur 32 bits ARM, équipée du système temps réel NuttX OS.

**Figure 1.27** – Autopilote pour le GLMAV : d'un développement en interne à un développement collaboratif.

commande pour des applications très variées (drones, robots terrestres, bateaux...).

- L'ensemble des algorithmes de GNC pour les drones, c'est-à-dire l'autopilote à proprement parler, appelé *PX4 flight stack*.

Mettant à profit cette flexibilité, le projet ArduPilot<sup>31</sup> a été adapté en 2012 de manière à fonctionner sur la plateforme électronique Pixhawk (figures 1.26b et 1.27b) qui présente une puissance de calcul bien supérieure à la plateforme APM (figure 1.26c), abandonnée depuis. Ainsi, la carte Pixhawk peut dorénavant être utilisée avec les algorithmes d'ArduPilot (*ArduPilot flight stack*) ou de PX4 (*PX4 flight stack*), sur la base *PX4 middleware* commune.



**Figure 1.28** – Architecture logicielle, adaptée de Meier et al. (2015).

31. Le projet ArduPilot est issu d'une communauté d'amateurs appelée DIYDRONES. Le projet Pixhawk/PX4 est issu de groupes de recherche de l'ETH Zurich (*Computer Vision and Geometry Lab* et *Autonomous Systems Lab*) (Meier et al., 2015).



**Table 1.5** – Comparaison des caractéristiques techniques de la carte électronique historique du GLMAV et de la carte Pixhawk.

	Carte GLMAV (fin 2010)	Carte Pixhawk v2 (fin 2013)
Processeur principal	Texas Instruments OMAP 3530, architecture ARM Cortex-A8 avec cœur DSP ( <i>Digital Signal Processor</i> ) C64x+	STMicroelectronics 32F427, architecture Cortex-M4 avec FPU ( <i>Floating Point Unit</i> )
Fréquence du processeur	600 MHz	168 MHz
Mémoire RAM	256 Mo	256 Ko
Mémoire Flash	256 Mo	2 Mo
Système temps réel	Linux Angstrom et Xenomai	NuttX OS
Processeur secondaire	Microcontrôleur dsPIC	Microcontrôleur STM32F103

**Environnement de développement.** Dans le cadre de la thèse, les algorithmes de commande sont développés sur le logiciel Matlab/Simulink de Mathworks. Ce logiciel est largement utilisé par la communauté de l’automatique et est bien adapté pour le développement et le prototypage rapide grâce à son langage de haut niveau et à ses outils de génération de code flexibles. Nous utilisons ces outils pour générer le code en langage C des algorithmes de commande. Nous avons développé des outils permettant la mise en forme automatique de ce code source en C pour être intégré à l’architecture PX4 sous la forme d’un module (ou tâche) lors de la compilation. Nous remplaçons alors les modules de commande en attitude et en position du projet PX4 par nos propres modules générés automatiquement. Un environnement de compilation croisée<sup>32</sup> permet la compilation sur l’ordinateur de développement d’un exécutable pour le microcontrôleur.

**Contributions.** Mes contributions au projet Pixhawk/PX4 ont porté principalement sur l’ajout du support des hélicoptères coaxiaux, le système étant développé à l’époque uniquement pour les multicoptères et drones à voilure fixe. Je suis actuellement le mainteneur officiel de la structure coaxiale pour le projet (PX4 developers, 2017), et l’hélicoptère coaxial utilisé durant ma thèse est à l’affiche sur la page officielle du projet (Meier *et al.*, 2017). Mes contributions ont également porté sur l’intégration de bibliothèques permettant l’utilisation des centrales inertielles SBG Systems, et sur la détection de la chute libre du drone pour permettre de déclencher des actions appropriées : c’est essentiel dans le cas du GLMAV, mais utile également à la communauté pour démarrer un drone lorsqu’il est lancé à la main.

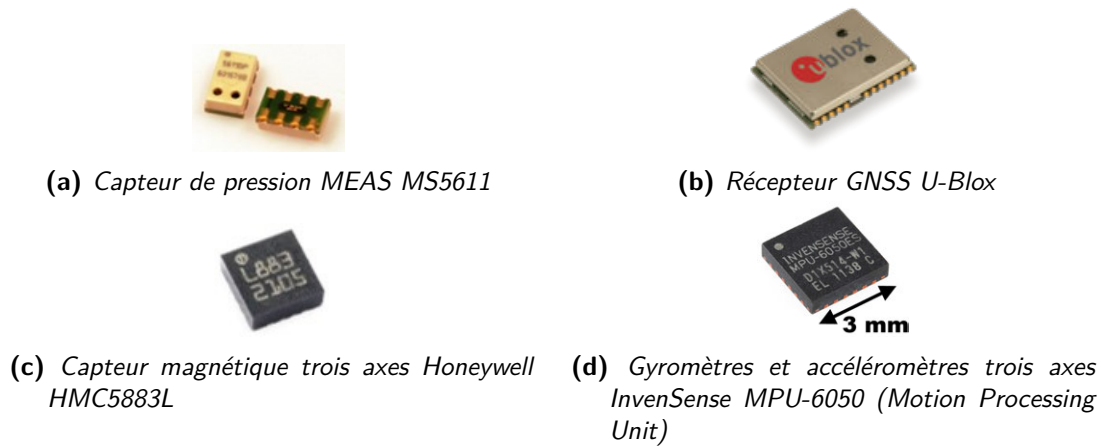
## 1.6 Capteurs et navigation

Les algorithmes de commande du drone se basent sur une estimation de l’état du drone afin de piloter les actionneurs. L’estimation de l’état se fait grâce à un ensemble de capteurs embarqués sur le drone, dont les principaux sont présentés en figure 1.29. La technologie MEMS (*Micro ElectroMechanical System*) a permis de diminuer considérablement la taille, la consommation et les coûts de fabrication des capteurs inertiels. Plusieurs capteurs ont alors été intégrés sur un même *die* de silicium, permettant une mesure sur plusieurs axes (typiquement trois axes perpendiculaires). Des circuits intégrés comportant trois gyromètres et trois accéléromètres (appelés IMU 6-axes) ont alors été produits. Actuellement, certains circuits intègrent également trois magnétomètres<sup>33</sup> (IMU 9-axes). Enfin, la dernière évolution est l’intégration d’un processeur dans le même boîtier que les capteurs pour le traitement des données et l’estimation d’attitude (le système est alors appelé AHRS pour *Attitude and Heading Reference System*). Ainsi la compagnie InvenSense propose, dans un même boîtier d’un volume de  $4 \times 4 \times 0.9$  mm, trois accéléromètres,

32. La compilation croisée permet de créer des exécutables depuis une certaine architecture pour une autre.

33. Il existe actuellement encore très peu de circuit intégrés “9-axes”. Les principaux sont les capteurs MPU9150 puis MPU9250 d’InvenSense, LSM9DS0 de ST Microelectronics, et BMX-055 de Bosch Sensortec.

trois gyromètres, un capteur de température, des convertisseurs analogiques-numériques et un processeur permettant la calibration et un filtrage des mesures, pour un prix inférieur à 15 euros à ce jour<sup>34</sup>. Nous utilisons ce type de capteur, visible en figure 1.29d.



**Figure 1.29** – Les principaux capteurs embarqués sur le drone, très miniaturisés.

En contrepartie, les erreurs sur les mesures (biais, bruits, nonlinéarités, etc.) sont très importantes en comparaison de ce que permettent d’autres technologies (Titterton et Weston, 2004). Le tableau 1.6 donne les spécifications des accéléromètres et gyromètres (boîtier MPU-6050) utilisés dans cette étude.

**Table 1.6** – Spécifications des capteurs inertiels utilisés (issues des données constructeur InvenSense MPU6050).

	Gyromètres	Accéléromètres
Gamme de mesure	$\pm 250^\circ/s$	$\pm 2\text{ g}$
Résolution	$0.0076^\circ/s$	$61\ \mu\text{g}$
Non-linéarité	0.2%	0.5%
Sensibilité croisée	$\pm 2\%$	$\pm 2\%$
Biais initial	$\pm 20^\circ/s$	$\pm 50\text{ mg (X,Y), } \pm 80\text{ mg (Z)}$
Bruit RMS total	$0.05^\circ/s$	-
Densité spectrale de bruit à 10 Hz	$0.005^\circ/s/\sqrt{\text{Hz}}$	$400\ \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$

## 1.6.1 Capteurs inertiels

### 1.6.1.1 Gyromètres

Un gyromètre mesure la vitesse angulaire autour d’un axe. Les véhicules aériens possèdent en général trois gyromètres, mesurant la vitesse angulaire suivant trois axes orthogonaux. De manière très simplifiée, le modèle du gyromètre prenant en compte les erreurs de mesure peut s’écrire sous la forme suivante (Titterton et Weston, 2004) :

$$\boldsymbol{\omega}_{gyro}^B = \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{b}_{gyro} + \mathbf{v}_{gyro} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{b}_{gyro}$  et  $\mathbf{v}_{gyro}$  représentent respectivement un biais et le bruit entachant la mesure. Il convient de préciser que dans ce modèle simplifié certains phénomènes sont négligés, comme

34. Des produits plus récents intègrent également trois magnétomètres MEMS dans le même volume, comme le circuit MPU-9250 d’InvenSense. A noter que le processeur permet la fusion des données inertielles uniquement. Le capteur MAX21100 de Maxim Integrated permet, lui, une fusion de données “9 axes” en connectant un magnétomètre externe. Enfin, le très récent circuit BNO-055 de Bosch Sensortec intègre le circuit BMX-055 ainsi qu’un processeur ARM Cortex M0 pour la fusion des données issues des trois types de capteurs.

la dépendance à l'accélération linéaire. Du fait des mouvements limités du véhicule, il est justifié de ne pas prendre en considération ces phénomènes.

Les gyromètres mesurant les vitesses angulaires du véhicule, il est possible de reconstruire son attitude par intégration en exploitant les équations de la cinématique angulaire (détaillée en section 2.2.3.1). Cependant le biais sur les mesures engendre une dérive importante de l'estimation d'attitude par intégration directe (augmentation linéaire avec le temps, en première approximation (Titterton et Weston, 2004)), en particulier avec la technologie MEMS.

Afin de limiter les effets des erreurs de mesure sur l'estimation de l'attitude, on utilise en général la mesure d'un vecteur fixe dans le repère inertiel afin d'estimer et de compenser le biais des gyromètres, tels que la gravité ou le champs magnétique terrestre.

### 1.6.1.2 Accéléromètres

Les accéléromètres mesurent une accélération  $\mathbf{a}$  appelée "force spécifique" qui est en fait l'accélération totale par rapport à la chute libre (ensemble des accélérations inertielles). Il s'agit donc de l'accélération linéaire du véhicule à laquelle est soustraite la gravité. Pour un accéléromètre fixé au centre de gravité du véhicule<sup>35</sup> et aligné avec les axes du repère B, on a ainsi l'expression de l'accélération mesurée suivante, exprimée dans le repère B :

$$\mathbf{a}^B = \dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \wedge \mathbf{v}^B - \mathbf{g}^B + \mathbf{b}_{acc} + \mathbf{v}_{acc} \quad (1.5)$$

Le terme  $\boldsymbol{\omega}^B \wedge \mathbf{v}^B$  est l'accélération centripète, et  $\mathbf{g}^B$  est le vecteur gravité exprimé dans le repère B. Comme les mesures des gyromètres, les mesures des accéléromètres sont entachées principalement d'un biais  $\mathbf{b}_{acc}$  et d'un bruit  $\mathbf{v}_{acc}$ .

## 1.6.2 Capteurs extéroceptifs

### 1.6.2.1 Magnétomètres

En environnement non perturbé, les magnétomètres fournissent une mesure du champ magnétique terrestre. En réalité, le champ magnétique est très perturbé autour du drone : des perturbations statiques dues à la structure, mais surtout des perturbations dynamiques dues en grande partie aux moteurs<sup>36</sup> mais également à d'autres éléments comme les servomoteurs et les alimentations à découpage, souvent utilisées sur les drones. La position des magnétomètres sur le véhicule doit donc être choisie judicieusement, et une calibration (étalonnage) est en général nécessaire. Les procédures d'auto-calibration sont désormais classiques sur les drones : le champ magnétique est mesuré pour plusieurs orientations du drone, et les offsets et facteurs d'échelle sont estimés par la méthode des moindres carrés, permettant ainsi de s'affranchir au maximum des perturbations statiques. Dans les algorithmes de navigation, le champ magnétique mesuré par les magnétomètres est en général normalisé pour ne retenir que sa direction.

### 1.6.2.2 Capteurs de pression, baromètres

Un capteur de pression embarqué dans le drone permet d'obtenir une estimation de son altitude. En effet, un changement de hauteur  $\delta h$  provoque un changement de pression  $\delta P_s$  suivant l'équation de la statique des fluides (Cimen, 2017) :

$$\delta h = -\frac{\delta P_s}{g \rho} \quad (1.6)$$

35. Lorsque la centrale n'est pas au centre de gravité, les accélérations mesurées deviennent des fonctions non-linéaires des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}^B$  : les termes  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^B \wedge \mathbf{r}$  et  $\boldsymbol{\omega}^B \wedge (\boldsymbol{\omega}^B \wedge \mathbf{r})$  sont alors ajoutés à l'équation de la force spécifique. C'est un point important à considérer lors de la conception d'un drone.

36. Sur un hélicoptère coaxial d'un poids de 1 kg chaque moteur consomme 30 à 40 A en continu sous 10 V, avec des pics jusqu'à 60 A.



avec  $\rho$  la masse volumique de l'air. La loi des gaz parfaits donne la variation de  $\rho$  en fonction de la pression et de la température :

$$\rho = \frac{P_s M}{R T} \quad (1.7)$$

avec  $M = 0.02896$  kg/mol la masse molaire moyenne de l'air,  $R = 8.314$  J/K/mol la constante universelle des gaz parfaits, et  $T \approx 288.15$  K la température absolue. En considérant la température constante par rapport à un changement d'altitude, et en remplaçant  $\rho$  par son expression dans l'équation (1.6), on peut résoudre l'équation différentielle obtenue. La solution est donnée par l'équation suivante :

$$h - h_{ref} = -\frac{R T}{M g} \ln\left(\frac{P_s}{P_{s,ref}}\right) + \epsilon_h \quad (1.8)$$

avec  $P_{s,ref}$  la pression de référence, généralement estimée à la mise sous tension de l'avionique du véhicule et  $h_{ref}$  la hauteur initiale. L'estimation d'altitude par le baromètre est typiquement entachée d'une dérive due à la variation des conditions atmosphériques locales, traduite par la variable  $\epsilon_h$ . Cette dérive est en général annulée grâce à l'utilisation d'un système de géolocalisation (comme un système GNSS - *Global Navigation Satellite System*) pour estimer périodiquement la pression de référence (Barton, 2012).

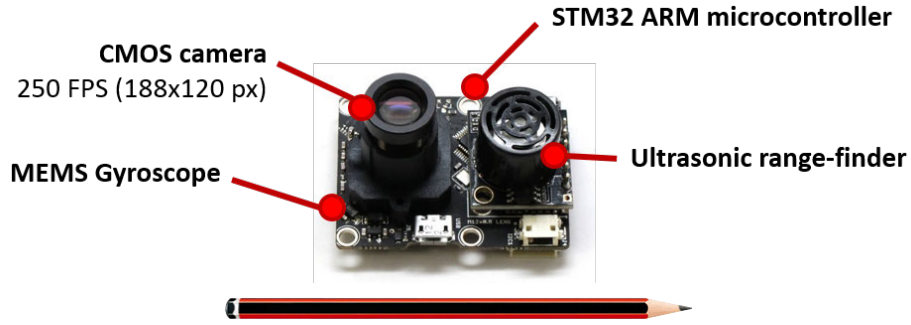
### 1.6.2.3 Odométrie visuelle

Les caméras sont des capteurs apportant une information très riche sur l'environnement. L'augmentation de la puissance de calcul des microprocesseurs permet leur utilisation en robotique et sur les drones en particulier pour différentes tâches : cartographie, évitement d'obstacles, détection ou suivi de cible, asservissement visuel, ou encore en navigation comme étudié dans ce paragraphe.

Le flux optique (appelé également flot optique ou "défilement visuel") est un champ du mouvement apparent des éléments d'une scène causé par le mouvement relatif entre la caméra et cette scène. Il est utilisé sur les drones pour des fonctions d'évitement d'obstacle ou pour estimer la vitesse ou la hauteur du véhicule. L'inspiration vient des insectes volants qui utilisent ces fonctions lors de leur vol (Franceschini *et al.*, 1992). Le principe est décrit ici de manière très succincte car il sort du cadre de la thèse. Pour plus de détails, on pourra se référer au travail de Hérissé (2010) sur l'utilisation du flux optique pour drone.

Le flux optique est ici utilisé pour estimer les composantes en  $x^B$  et  $y^B$  de la vitesse du drone. Pour cela, la caméra est fixée au drone de manière à pointer vers le sol. Nous utilisons la caméra "intelligente" de la figure 1.30 développée à l'ETH de Zürich (Honegger *et al.*, 2013), qui est associée à des capteurs et à un microprocesseur. Les images issues de la caméra sont stockées sous forme de matrices dont chaque élément contient la luminosité du pixel correspondant. Le mouvement de la caméra entre deux images successives est estimé par minimisation de la somme de la valeur absolue des différences (algorithme "SAD" pour "Sum of Absolute Differences"). Ce calcul, effectué sur des images de résolution réduite, est très rapide et permet d'atteindre des temps de boucle élevés (typiquement 250 Hz sur le microprocesseur utilisé, avec une image de 64x64 pixels). C'est le même principe de fonctionnement que les souris optiques d'ordinateur, qui ont d'ailleurs été utilisées sur les drones pour la même application (Chao *et al.*, 2013). A partir de ce déplacement entre deux images et de la distance à la scène, on peut estimer la vitesse du drone dans le plan de la caméra. Le déplacement entre deux images ne dépend cependant pas uniquement des déplacements latéraux de la caméra, mais également de sa rotation. Les équations correspondantes sont développées dans le paragraphe suivant.

**Équations liant la vitesse du drone au mouvement dans l'image.** Soit un point  $P$  de coordonnées  $[X, Y, Z]^T$  dans un repère lié à la caméra. La caméra étant liée au drone, on considère que le repère véhicule B et le repère de la caméra sont confondus, et :  $\mathbf{P}^B = [X, Y, Z]^T$ . La projection de  $P$  dans le plan image est le point  $p$ , donné par le vecteur  $\mathbf{p}^B = [x, y, f]^T$ ,  $f$  étant la distance focale de la caméra. On peut écrire les équations suivantes de la projection perspective :



**Figure 1.30** – La caméra “intelligente” PX4Flow de l’ETH Zürich (Honegger et al., 2013), utilisée dans cette étude. Elle intègre une caméra CMOS, un gyromètre trois axes, un capteur de distance à ultrasons et un microcontrôleur ARM Cortex M4 pour le traitement d’images.

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{f}{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{f}{Z}X \\ y = \frac{f}{Z}Y \end{cases} \quad (1.9)$$

En dérivant par rapport au temps la position de  $p$  dans le repère image (équation (1.9)), on obtient l’expression de la vitesse (qui est appelée flux optique) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f \frac{\dot{X}Z - X\dot{Z}}{Z^2} \\ \dot{y} = f \frac{\dot{Y}Z - Y\dot{Z}}{Z^2} \end{cases} \quad (1.10)$$

De même, on obtient la vitesse  $\mathbf{V}$  de  $P$  en calculant la dérivée temporelle de la position de  $P$  :  $\mathbf{V}^B = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]^T$ . L’équation suivante de composition des vitesses exprime le lien entre l’expression  $\mathbf{V}$  dans B (lié à la caméra) et son expression dans le repère I lié au sol (et au point  $P$ ) :

$$\mathbf{V}^B = \mathbf{V}^I - \boldsymbol{\omega}^{B/I} \wedge \mathbf{P}^B \quad (1.11)$$

avec  $\boldsymbol{\omega}^{B/I} = \boldsymbol{\omega}^B = [p, q, r]^T$  la vitesse de rotation de la caméra par rapport au sol, et on a  $\mathbf{V}^I = -[u, v, w]$  (opposée de la vitesse du drone). On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = -u - qZ + rY \\ \dot{Y} = -v - rX + pZ \\ \dot{Z} = -w - pY + qX \end{cases} \quad (1.12)$$

Enfin, en remplaçant dans l’équation (1.10) les expressions de  $X$  et  $Y$  données par l’équation (1.9), et les expressions des dérivées  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  et  $\dot{Z}$  données par l’équation (1.12), on obtient l’expression suivante de la vitesse de  $p$  dans le plan image :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{wx - uf}{Z} - qf + ry + \frac{pxy - qx^2}{f} \\ \dot{y} = \frac{wy - vf}{Z} + pf - rx - \frac{qxy + py^2}{f} \end{cases} \quad (1.13)$$

Cette expression ne dépend plus des coordonnées de  $P$  dans le repère lié au sol, mais simplement de ses coordonnées dans le plan de la caméra. L’expression dépend également des vitesses de translation et de rotation de la caméra (c’est-à-dire du drone), de la distance focale  $f$ , et de la distance à la scène  $Z$  (c’est-à-dire la hauteur du drone par rapport au sol).

Les premiers termes des deux équations concernent la translation, les termes suivants concernent la rotation entre la caméra et la scène. Remarquons que ces derniers termes sont indépendants de la profondeur  $Z$ .

De cette équation (1.13) donnant l'expression du flux optique dans l'image, on déduit l'expression des vitesses de translation du drone  $u$  et  $v$  :

$$\begin{cases} u = \frac{Z}{f} \left( -\dot{x} + \frac{wx}{Z} + ry - fq - \frac{qx^2 - pxy}{f} \right) \\ v = \frac{Z}{f} \left( -\dot{y} + \frac{wy}{Z} - rx + fp - \frac{py^2 + qxy}{f} \right) \end{cases} \quad (1.14)$$

On fait en général l'hypothèse d'une distance constante du drone par rapport au sol, soit  $w \approx 0$ . Le déplacement  $x$  et  $y$  dans l'image est donné par l'algorithme SAD; les vitesses  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  sont calculées en divisant les déplacements par le temps entre les deux images. Les vitesses de rotations  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont mesurées par les gyromètres, tandis que la distance  $Z$  est mesurée grâce à un télémètre laser ou ultrasonique embarqué.

#### 1.6.2.4 Système de capture de mouvements

Les systèmes de capture de mouvements comme les systèmes VICON et Optitrack sont très utiles pour fournir une estimation de l'attitude et de la position d'un véhicule en environnement intérieur. Nous utilisons dans cette étude le système VICON Bonita, présenté en figure 1.31, composé de six caméras infrarouges permettant de suivre la position de marqueurs réfléchissants fixés sur le corps du véhicule. La position et l'attitude sont reconstruits avec une précision de l'ordre du millimètre<sup>37</sup> sur un ordinateur au sol, et le système peut fournir une estimation à une fréquence maximale de 200 Hz. Ces systèmes ont été utilisés, par exemple, comme retour de position et d'attitude en temps réel pour la commande en position des drones par Mellinger *et al.* (2011) et pour l'identification d'un modèle d'hélicoptère coaxial par Fankhauser *et al.* (2011). Des détails supplémentaires sur le système utilisé sont donnés par Chellal *et al.* (2015).

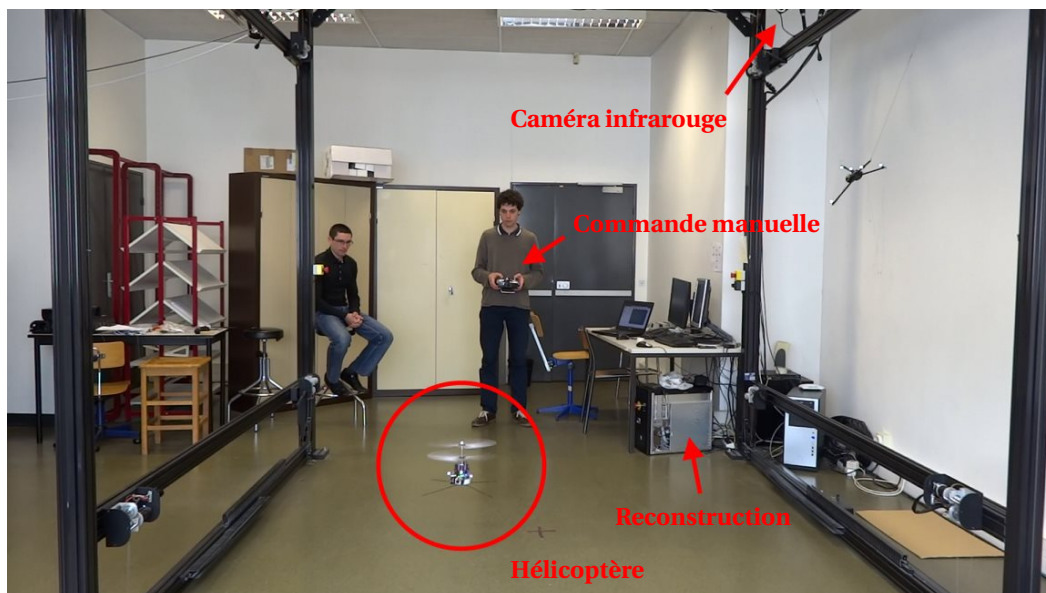


Figure 1.31 – Dispositif de capture de mouvements.

### 1.6.3 Navigation inertielle et hybride

Les algorithmes de navigation ont pour objectif l'estimation de la position du véhicule au cours du temps à partir de différents capteurs. Les drones embarquent une centrale inertielle sur

37. Thewlis *et al.* (2011) calculent une erreur RMS typique inférieure à 1 mm en statique et inférieure 4.2 mm en dynamique. Une étude plus récente par Merriaux *et al.* (2017) sur le système VICON montre une erreur moyenne de 0.17 mm en statique et inférieure à 2.0 mm en dynamique.

laquelle se basent ces algorithmes.

### 1.6.3.1 Algorithme Strapdown

Les centrales inertielles *strapdown* sont constituées de capteurs fixes dans le repère du véhicule (contrairement aux plateformes stabilisées, voir Titterton et Weston (2004, p. 336)), et sont universellement utilisées sur les drones miniatures en raison de leur petite taille et de leur coût réduit. L'algorithme associé est présenté en figure 1.32. L'estimation de l'orientation  $\eta$  est obtenue par intégration de la vitesse angulaire mesurée par les gyromètres. La mesure des accéléromètres, projetée dans le repère inertiel, est intégrée deux fois pour obtenir la position  $\xi^I$  du drone.

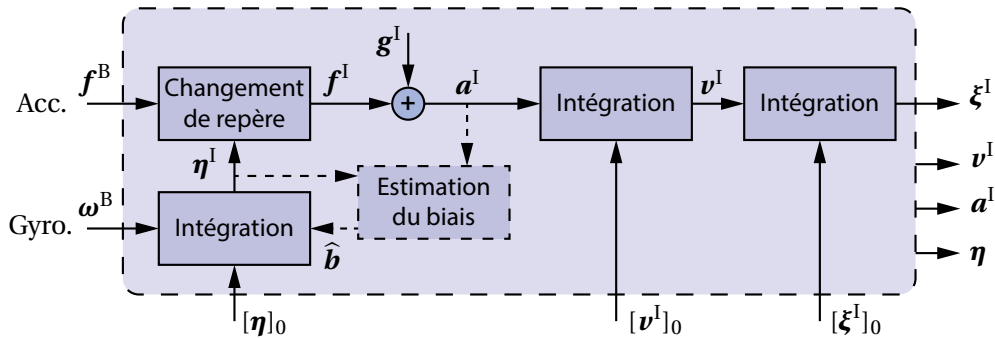


Figure 1.32 – Algorithme Strapdown d'un système de navigation inertiel : estimation des vitesses et positions à partir d'accéléromètres et gyromètres.

### 1.6.3.2 La navigation inertielle inutilisable seule sur les systèmes bas-coût

Les intégrations successives induisent une dérive importante des estimations. Cette dérive est typiquement de plusieurs mètres par seconde lors de l'utilisation de capteurs MEMS (voir les spécifications dans le tableau 1.6 et Elkaim *et al.* (2015)). C'est pourquoi une centrale n'est jamais utilisée seule pour l'estimation de la position ou de la vitesse dans le cas de drones miniatures : elle est associée à tout un ensemble de capteurs permettant de diminuer les erreurs d'estimation (baromètres, odomètre, GPS, caméra, etc.). On parle alors de navigation "hybride", et l'objectif des algorithmes de navigation est alors la fusion de données de ces multiples sources (voir la figure 1.33). Certains de ces algorithmes parmi les plus utilisés sont brièvement comparés dans l'annexe 4.8, pour l'estimation de l'attitude du véhicule uniquement.

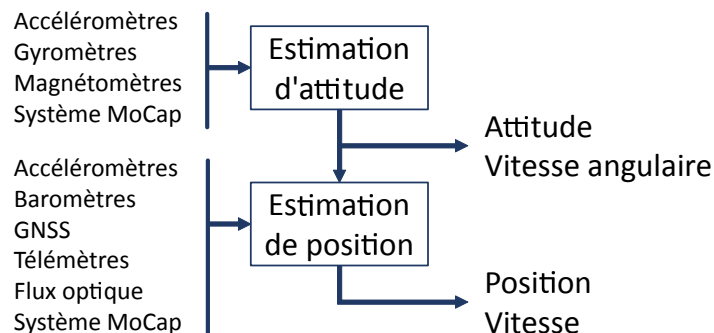


Figure 1.33 – Principe des algorithmes de navigation : estimer les états du drone à partir d'une variété de capteurs.

Différentes implémentations de filtres de Kalman étendus sont disponibles sur les projets PX4 et ArduPilot, dédiés à l'estimation d'attitude et de position (Bapst *et al.*, 2015; Riseborough, 2015). Les récents développements s'orientent vers la prise en compte des latences dans les mesures (Khosravian *et al.*, 2015), vers des implémentations nécessitant moins de puissance de calcul (Pittelkau, 2003), et vers des méthodes de fusion des données inertielles et GNSS plus avancées permettant davantage de précision (Konrad *et al.*, 2017).

## 1.7 Actionneurs

Dans le domaine des drones miniatures, les moteurs et servomoteurs sont omniprésents. Ils permettent dans notre cas le pilotage de la tête-rotor. L'objectif de cette section est d'établir un modèle pour ces deux types d'actionneurs. Cela nécessite de suivre une procédure d'identification qui n'est ici présentée que succinctement. En effet, l'identification de la dynamique de l'hélicoptère est présentée dans le chapitre 3, et le lecteur pourra s'y référer pour de plus amples détails sur les méthodes d'identification.

**Modèle linéaire et avec saturations.** Il est important de prendre en compte les actionneurs dans la modélisation, car ils introduisent des dynamiques, des retards et des non-linéarités (en général des saturations) qui peuvent affecter les performances de la commande et la stabilité du système. Dans la littérature, ils sont souvent modélisés par un système du premier ou du second ordre dont la fonction de transfert est rappelée ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \text{Système du premier ordre :} & \text{Système du second ordre :} \\ G_1(s) = \frac{Y}{U} = \frac{k}{\tau s + 1} & G_2(s) = \frac{Y}{U} = \frac{k}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1} \end{array} \quad (1.15)$$

avec  $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_0}$  la constante de temps,  $\zeta$  l'amortissement,  $k$  le gain et  $\omega_0$  la pulsation.

Les saturations peuvent être introduites à partir des équations différentielles associées. En considérant une saturation de la vitesse (ou de la vitesse angulaire) et de la position (ou de l'angle), les deux saturations les plus courantes<sup>38</sup>, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \text{Système du premier ordre :} & \text{Système du second ordre :} \\ \dot{y} = \text{sat}\left(\frac{ku - \text{sat}(y, y_{max})}{\tau}, \dot{y}_{max}\right) & \ddot{y} = (ku - \text{sat}(y, y_{max}))\omega_0^2 - 2\zeta\omega_0\text{sat}(\dot{y}, \dot{y}_{max}) \end{array} \quad (1.16)$$

avec la fonction de saturation définie comme suit :

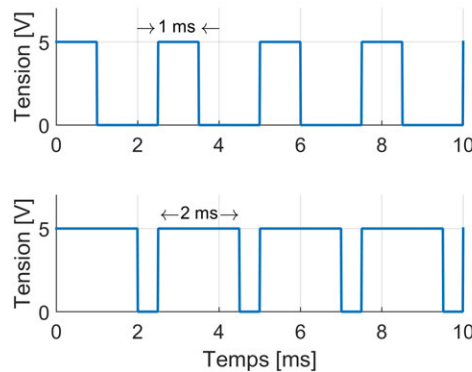
$$\text{sat}(x, s) = \begin{cases} s & \text{si } x > s \\ -s & \text{si } x < -s \\ x & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.17)$$

On utilise alors le modèle linéaire lors de la synthèse de lois de commandes, et le modèle avec saturations pour la simulation afin de s'assurer de la robustesse de la commande. Dans la suite de cette section, nous considérons séparément les deux types d'actionneurs les plus utilisés sur les drones : les servomoteurs et les moteurs brushless, avec pour but d'établir leur fonction de transfert à partir de données expérimentales. Les problématiques spécifiques de ces actionneurs sont étudiées.

**Entrées de commande en largeur d'impulsion (PWM).** En aéromodélisme, la consigne pour les actionneurs est en général codée par un signal PWM (*Pulse Width Modulation*, ou commande par largeur d'impulsion). La fréquence est fixée<sup>39</sup> entre 50 Hz et 400 Hz, et la largeur de l'impulsion (temps à l'état haut) détermine la consigne. La figure 1.34 montre un tracé de ce signal. La largeur de l'impulsion est en général comprise entre 1 ms (arrêt du moteur ou position angulaire minimale du bras du servomoteur) et 2 ms (vitesse ou position angulaire maximale). Sur les drones, ce type de consigne est encore très largement utilisé. Il est parfois supplanté par une commande numérique (protocoles "I2C", "SPI" ou des protocoles plus spécifiques comme "SBUS" ou "Dshot"),

38. On peut également considérer une saturation sur la commande  $u$ .

39. Les premiers servomoteurs acceptaient une fréquence maximale de 50 Hz. Ils permettent aujourd'hui une fréquence plus importante. La fréquence maximale est limitée par la largeur maximale de l'impulsion, à savoir en général 2 ms, soit une fréquence maximale légèrement inférieure à 500 Hz. Elle est couramment fixée à 400 Hz aujourd'hui.



**Figure 1.34** – Consigne en largeur d’impulsion, ici avec une fréquence de 400 Hz.

permettant plus de flexibilité. Les systèmes les plus avancés utilisent un bus CAN comme le standard UAVCAN développé spécifiquement pour les drones (Kirienko *et al.*, 2015), qui offre une fiabilité accrue (redondance du bus et vérifications de l’intégrité du signal), une large bande passante et une communication bi-directionnelle (retour d’information de l’actionneur).

### 1.7.1 Identification des servomoteurs

Les servomoteurs sont omniprésents en robotique, en aéromodélisme et en particulier sur les micro-drones. Ils sont composés d’un moteur à courant continu avec réducteur, d’un potentiomètre lié à l’arbre de sortie, et d’un circuit de commande. Ce dernier réalise l’asservissement en position en comparant la consigne d’entrée et l’angle mesuré par le potentiomètre.

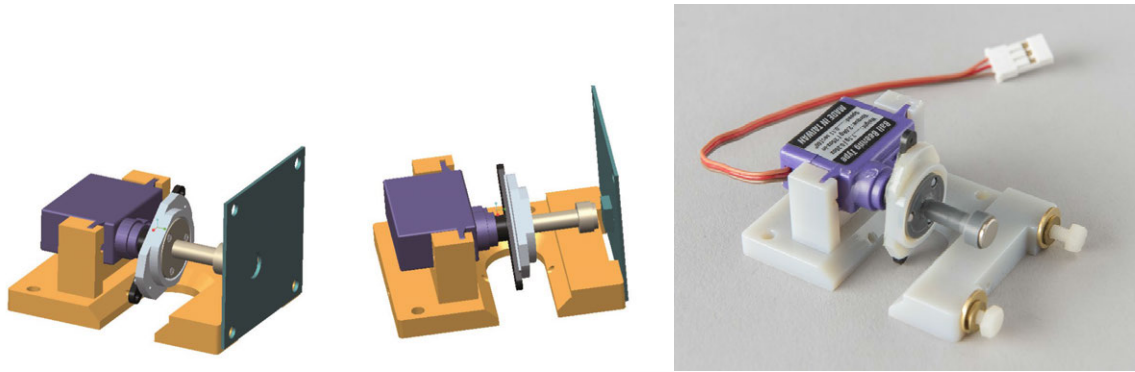
**Entrée de commande et mesure.** Les servomoteurs sont commandés par un signal PWM : la largeur de l’impulsion détermine l’angle de consigne du bras du servomoteur. Elle est donnée en microsecondes, entre 1000 et 2000  $\mu\text{s}$  en fonctionnement normal.

**Banc de test.** Afin d’analyser le comportement des servomoteurs et de relever des jeux de mesures d’entrée-sortie pour l’identification d’un modèle, le banc de test présenté en figure 1.35 est utilisé. Il est composé du servomoteur à identifier et d’un codeur incrémental magnétique<sup>40</sup> qui permet une mesure absolue d’un angle en utilisant un aimant à deux pôles lié au bras du servomoteur (figure 1.35). L’utilisation d’un aimant permet d’éviter l’apparition de frottements supplémentaires.

#### 1.7.1.1 Prise en compte des saturations

De manière générale, des saturations sont présentes sur tous les actionneurs et introduisent des non-linéarités importantes. Elles peuvent causer une dégradation des performances ou de la stabilité du système. Il est donc important de les prendre en compte d’une manière ou d’une autre, en particulier dans le cadre de la synthèse de lois de commande. On peut ainsi envisager leur prise en compte a priori grâce à des méthodes de commande “anti-windup” appliquées sur le modèle saturé, et qui permettent de maximiser les domaines de stabilité et les performances (Biannic et Tarbouriech, 2007; Tarbouriech *et al.*, 2008). On peut également les prendre en compte a posteriori : on utilise un modèle linéaire pour la commande, tandis que le modèle non-linéaire (avec saturations) sert à la validation des lois de commande et à l’évaluation a posteriori du domaine de stabilité. C’est cette seconde approche qui est choisie dans cette étude.

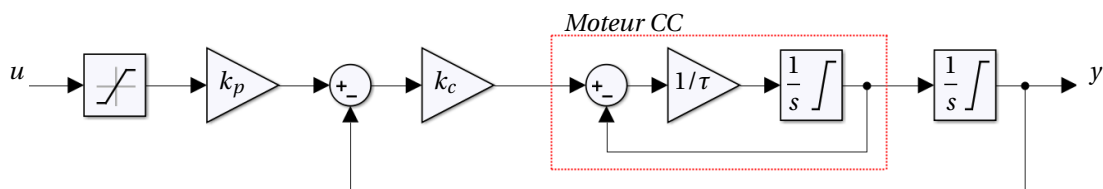
40. On utilise un codeur 12 bit (référence AS5045) qui permet donc une résolution inférieure au dixième de degrés (0.088° exactement, au mieux). Un microcontrôleur gère la communication en SPI (*Serial Peripheral Interface*) avec le codeur, l’envoi des consignes au servomoteur (signal PWM) et l’envoi des données mesurées par liaison série à un ordinateur à une fréquence de 500 Hz. Un script écrit en Python gère la réception des données sur l’ordinateur et le stockage dans un fichier.



**Figure 1.35** – Banc d’essai permettant la calibration des servomoteurs, réalisé par impression 3D. À droite le montage sans la platine comportant le codeur.

### 1.7.1.2 Modèle du second ordre avec saturations

Par une analyse de fonctionnement interne d’un servomoteur, le modèle présenté en figure 1.36 est établi. Le moteur à courant continu est ici modélisé par un système du premier ordre avec saturation de la vitesse. L’électronique de commande agit comme un contrôleur “ON-OFF” (appelé également contrôleur à hystérésis ou commande “bang-bang”), c’est-à-dire comme un contrôleur proportionnel dont le gain est élevé : en dehors d’une zone linéaire réduite, le moteur est constamment saturé à sa vitesse maximale. Ce type de commande est optimale dans le sens du temps minimal pour atteindre une position (Laroche, 2010). Cela implique néanmoins des non-linéarités importantes (saturations), et Strub (2016, chap. 1) propose une modification de l’électronique pour permettre une réponse du premier ordre.



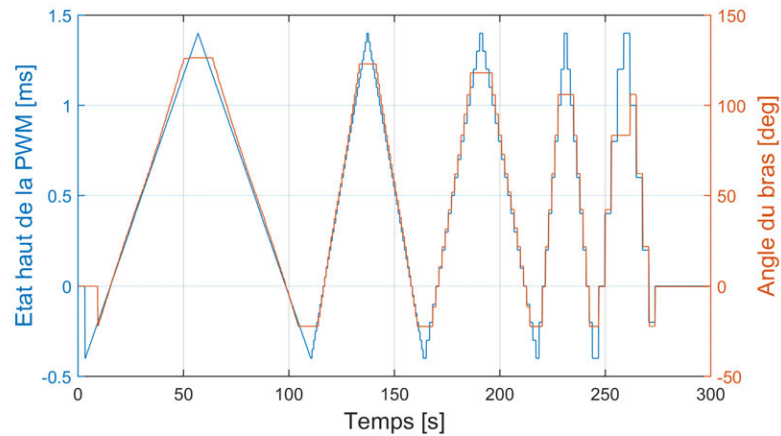
**Figure 1.36** – Schéma-bloc du servomoteur.

On est donc en présence d’un système comportant trois saturations : saturation en entrée, saturation de la vitesse et saturation de la position. Les deux dernières sont prises en compte par des intégrateurs saturés. Sur un servomoteur, la saturation  $\text{sat}(u_k)$  en entrée est particulière : la valeur précédente est conservée si l’entrée est en dehors des limites. On a :

$$\text{sat}(u_k) = \begin{cases} u_k & \text{si } u_k \in [\underline{u}, \bar{u}] \\ u_{k-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

**Estimation des paramètres.** Le modèle présenté en figure 1.36 dépend d’un certain nombre de paramètres. Grâce au banc de test de la figure 1.35, on peut facilement mesurer au préalable les saturations en entrée et en sortie. Les paramètres restants peuvent être estimés à l’aide des données d’entrée-sortie des figures 1.37 et 1.40. Dans la plage de fonctionnement nominale (absence de saturation en entrée et en sortie, mais saturation de la vitesse), le schéma-bloc de la figure 1.36 peut être mis sous la forme d’état suivante :





**Figure 1.37** – Jeu de données d'identification : réponse du servomoteur à une entrée en escalier avec des pas de différentes amplitudes.

Modèle du second ordre avec saturations pour servomoteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{cases} = \begin{bmatrix} -1/\tau & -k_c/\tau \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_s(\dot{x}) \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c k_p / \tau \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \text{avec : } f_s(a) = \begin{cases} \bar{v} & \text{si } a > \bar{v} \\ \underline{v} & \text{si } a < \underline{v} \\ a & \text{sinon} \end{cases} \\ y = x \end{array} \right. \quad (1.19)$$

On peut ensuite utiliser diverses méthodes pour l'estimation des quatre paramètres de ce modèle :  $\tau$ ,  $k_c$ ,  $k_p$  et  $\bar{v} = -\underline{v}$ . Les servomoteurs ont également un retard important dans la réponse, que nous pouvons estimer conjointement. On choisit ici la méthode de minimisation de l'erreur de sortie (Ljung, 1999) à l'aide de l'algorithme des moindres carrés (méthode détaillée en section 3.4.1.1). Les données d'identifications sont tracées en figure 1.37. Nous choisissons une entrée en escalier de manière à exciter toute la plage de fonctionnement.

Le tableau 1.7 donne les résultats de l'identification, évaluée sur la réponse à un échelon en figure 1.38 (modèle  $G_{2,sat}$ , en noir). Nous obtenons une adéquation (*fit* au sens de l'erreur NRMSE, décrit en section 3.5.1.1) de 98.3%. Le retard est estimé à 5 échantillons, soit  $5/T_e = 10$  ms.

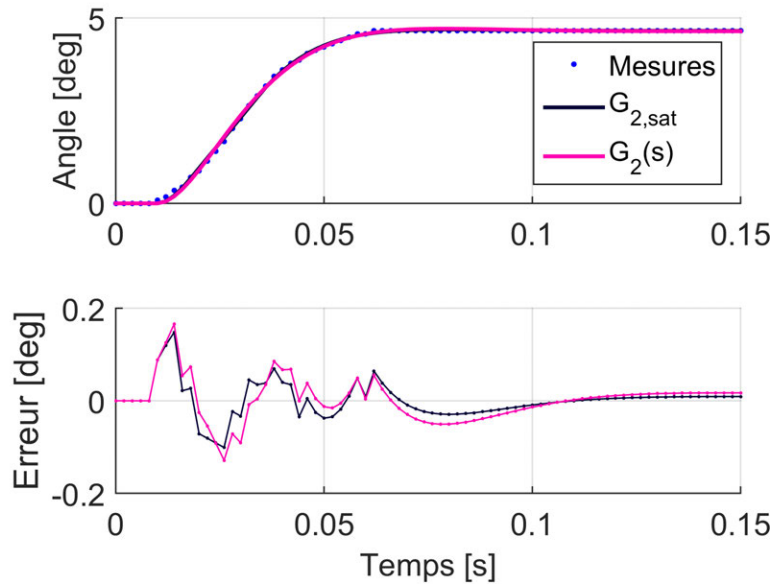
**Table 1.7** – Résultats d'identification des servomoteurs en utilisant le modèle du second ordre avec saturations.

Paramètre	Valeur estimée	Covariance
retard	0.01 s	-
$k_p$	0.0016 rad/ $\mu$ s	$2.8e-5$
$k_c$	47	66
$\tau$	0.0072 s	0.013
$\bar{v}$	2.4 rad/s	1.5

### 1.7.1.3 Modèle du premier ordre avec saturations

On note que la constante de temps du moteur (estimée à 7 ms) est faible devant le temps de réponse du système (de l'ordre de 50 ms). Il est donc intéressant de considérer un modèle du premier ordre. En négligeant  $\tau$ , le système peut se mettre sous la forme suivante :





**Figure 1.38** – Comparaison de la réponse à un échelon sur un jeu de données mesurées, pour un modèle du second ordre avec et sans les saturations.

#### Modèle du premier ordre avec saturations pour servomoteurs

$$\begin{cases} \dot{x} = f_s(-k_c x + k_c k_p u) \\ \text{avec : } f_s(a) = \begin{cases} \bar{v} & \text{si } a > \bar{v} \\ \underline{v} & \text{si } a < \underline{v} \\ a & \text{sinon} \end{cases} \\ y = x \end{cases} \quad (1.20)$$

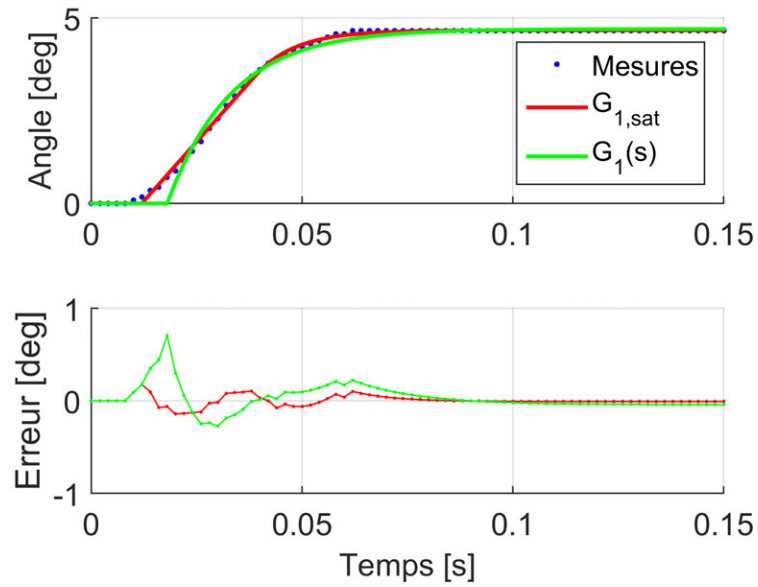
Après estimation des paramètres, on obtient sur la réponse à un échelon (modèle  $G_{1,sat}$ , en rouge, sur la figure 1.39) une adéquation de 97.6%, qui n'est pas très éloigné de celle obtenue pour le modèle du second ordre (98.3%). Cela valide donc l'approximation du premier ordre. Les paramètres estimés sont donnés en tableau 1.8.

**Table 1.8** – Résultats d'identification des servomoteurs en utilisant le modèle du premier ordre avec saturations.

Paramètre	Valeur estimée	Covariance
retard	0.012 s	-
$k_p$	0.0016 rad/ $\mu$ s	$2.3e-5$
$k_c$	104	2230
$\bar{v}$	2.2 rad/s	2.5

**Modèle linéaire pour la commande.** Sans les saturations, le schéma de la figure 1.36 est équivalent à un système du second ordre de la forme classique donnée en équation (1.15), avec  $k = k_p$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_c}{\tau}}$  et  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_c\tau}}$ . Dans le cas de l'approximation par un système du premier ordre, on a  $k = k_p$  et  $\tau = \frac{1}{k_c}$ . Ces deux systèmes peuvent être identifiés en utilisant la même méthode que précédemment. On obtient alors les valeurs des paramètres répertoriées dans le tableau 1.9.

On remarque que le retard estimé est plus important dans le cas du premier ordre.



**Figure 1.39** – Comparaison de la réponse à un échelon sur un jeu de données mesurées, pour un modèle du premier ordre avec et sans les saturations.

**Table 1.9** – Résultats d'identification des servomoteurs en utilisant le modèle linéaire du premier ordre et du second ordre.

Paramètre	$G_2(s)$ (2 <sup>ème</sup> ordre)		$G_1(s)$ (1 <sup>er</sup> ordre)	
	Valeur estimée	Covariance	Valeur estimée	Covariance
retard	0.01 s	-	0.018 s	-
$k_p$	0.00162 rad/ $\mu$ s	$2.3e-5$	0.00164 rad/ $\mu$ s	$2.3e-5$
$k_c$	47.85	61	65.572	69
$\tau$	0.0081 s	0.035	-	-

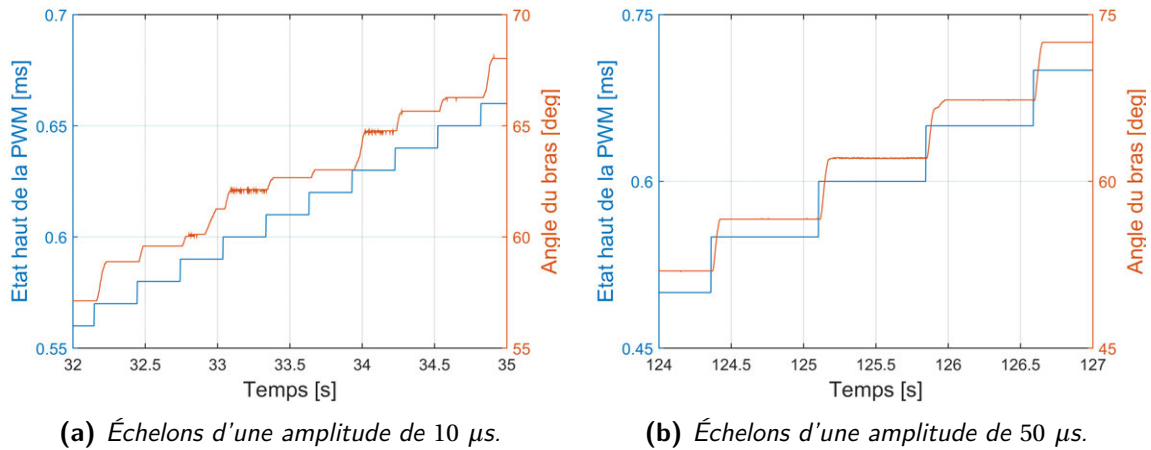


Figure 1.40 – Mise en évidence de défauts du servomoteur sur le jeu de données d'identification.

#### 1.7.1.4 Comparaison des modèles

Le tableau 1.10 présente une comparaison des résultats d'identification, évalués sur la réponse à un échelon (tracées en figures 1.38 et 1.39).

Table 1.10 – Comparaison des différents modèles obtenus.

	2 <sup>ème</sup> ordre avec sat.	1 <sup>er</sup> ordre avec sat.	$G_2(s)$ (2 <sup>ème</sup> ordre)	$G_1(s)$ (1 <sup>er</sup> ordre)
Fit (NRMSE)	98.3%	97.6%	98.0%	93.3%
MSE	3.39e-07	6.56e-07	4.77e-07	4.85e-06

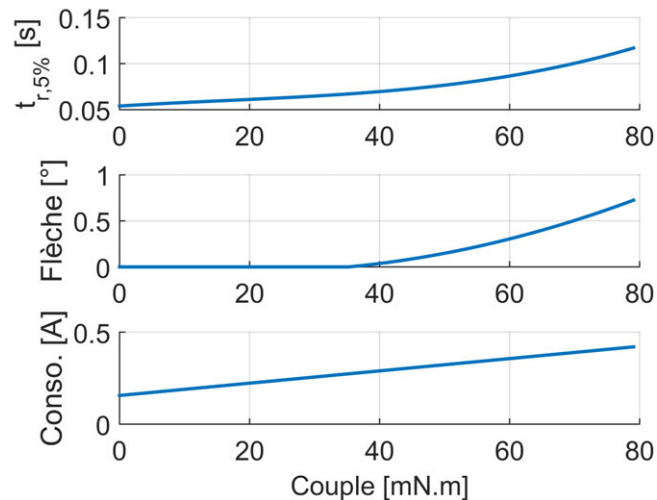
On remarque l'amélioration apportée par la présence des saturations sur le modèle du premier ordre. La différence est nettement moins visible sur les modèles du second ordre, dont les paramètres identifiés sont très proches.

#### 1.7.1.5 Précision du positionnement et limites des servomoteurs

Les servomoteurs présentent un défaut de précision important, visible sur la figure 1.40. En réalisant une série de tests en régime permanent, nous notons une erreur angulaire de l'ordre de  $\pm 3$  degrés. De plus, lorsque le servomoteur est en charge, son comportement est altéré, et le temps de réponse augmente. Les caractéristiques estimées sont résumées dans le tableau 1.11. La figure 1.41 montre le tracé du temps de réponse, de la flèche et de la consommation en fonction du couple appliqué sur l'arbre du servomoteur.

Table 1.11 – Caractéristiques des servomoteurs utilisés, de référence BMS306.

Dimensions	24 × 24 × 11 mm
Poids	7.5 g
Alimentation	5 V
Couple maximal	79 mN m
Flèche au couple maximal	0.7°
Erreur de répétabilité moyenne	1.12°



**Figure 1.41** – Caractéristiques de temps de réponse, flèche et consommation en fonction du couple appliqué.

## 1.7.2 Identification des moteurs

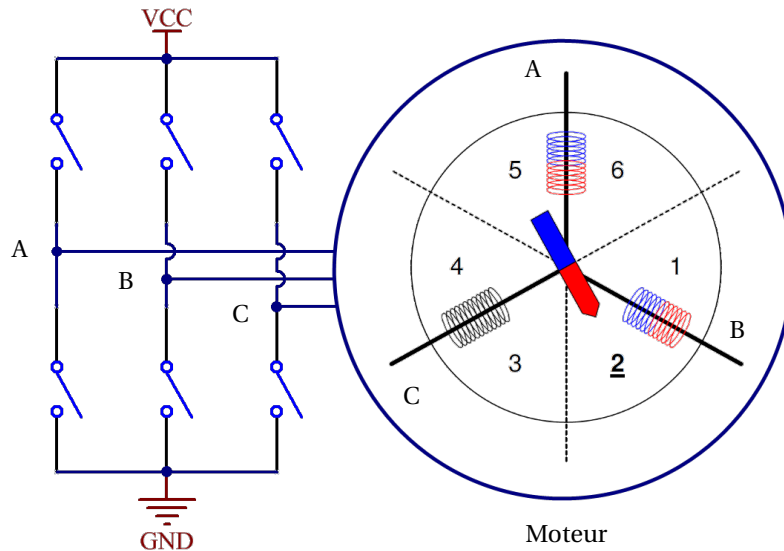
L'étude sur la modélisation des moteurs et leur commande a fait l'objet d'un article (Roussel *et al.*, 2015). Nous y avons établi une modélisation non-linéaire de leur comportement, à partir de laquelle on peut obtenir un modèle linéaire sous la forme d'une fonction de transfert du premier ou du second ordre. Les résultats sont présentés ici.

### 1.7.2.1 Fonctionnement des moteurs “brushless”

Les moteurs sans balais, appelés communément moteurs “brushless”, sont des moteurs synchrones comportant des aimants permanents au rotor. Ils sont très utilisés en robotique et sur les drones en raison de leur meilleur rendement par rapport aux moteurs à courant continu, du rapport puissance sur poids supérieur, de la meilleure dissipation de chaleur, et de leur plus grande durée de vie. En contrepartie, ils nécessitent une commande plus complexe, réalisée par de petites cartes électroniques dédiées appelées ESC (*Electronic Speed Controller*) qui génèrent les signaux alternatifs pour l'auto-pilotage du moteur à partir d'une alimentation continue (DC). Pour cette raison, les moteurs brushless sont souvent appelés moteurs “BLDC” (*Brushless DC motor*), par abus de langage.

Sur ces moteurs, l'orthogonalité du flux magnétique rotorique par rapport au flux statorique, permettant au moteur de tourner, est assurée par des commutations du courant dans les enroulements au stator (auto-pilotage du moteur). Pour cela, la position du rotor doit être connue, et ces moteurs comportent classiquement des capteurs à effet Hall permettant de détecter le passage du rotor et de réaliser l'auto-pilotage. Sur les drones, on emploie en général des techniques sans capteurs pour estimer la position du rotor de manière à diminuer le coût et la complexité mécanique, et donc d'augmenter la fiabilité du système. Ces techniques se basent sur une mesure de la force électro-motrice (FEM) induite par le mouvement du rotor (voir Roussel *et al.* (2015) pour plus de détails sur le fonctionnement, et Acarnley et Watson (2006); Johnson *et al.* (1999); Matsui et Shigyo (1992) pour un aperçu des différentes méthodes d'auto-pilotage sans capteurs).

La figure 1.42 présente le schéma de principe de la commande des bobines par l'intermédiaire des transistors MosFET. Les commutations sur les transistors sont pilotées par la position du rotor. Le signal de commande des transistors est modulé en largeur d'impulsion (à une fréquence de l'ordre de 30 kHz), ce qui permet de varier la tension efficace aux bornes des bobines et donc de faire varier la vitesse du rotor. Cette largeur d'impulsion est à son tour fonction de la consigne envoyée à l'ESC.



**Figure 1.42** – Schéma de principe du système électronique permettant la commutation du courant sur les phases du moteur (basé sur Atmel (2006)). Le moteur est ici représenté sous la forme simplifiée d'un aimant permanent et de trois bobines. La commutation est réalisée au moyen de transistors MosFET.

### 1.7.2.2 Modélisation de l'ensemble ESC-moteur

Le moteur brushless muni de son ESC a un comportement semblable à un moteur à courant continu (moteur CC) alimenté en tension. Cela présente l'avantage de la simplicité, puisque le modèle d'un moteur CC est bien connu. On considère alors que la tension  $v(t)$  aux bornes du moteur CC équivalent est proportionnelle à l'entrée de consigne  $u_{ESC}$  de l'ESC :

$$v(t) = u_{ESC}(t) v_{bat} \quad (1.21)$$

avec  $v_{bat}$  la tension d'alimentation de l'ESC, qui est en général directement la tension nominale de la batterie.

En utilisant le modèle classique d'un moteur CC, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Partie électrique :} & L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \omega(t) = v(t) \\ \text{Partie mécanique :} & J \frac{d\omega(t)}{dt} - K_c i(t) + f \omega(t) = -\Gamma(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

avec  $i(t)$  le courant dans l'induit et  $v(t)$  la tension à ses bornes,  $\omega(t)$  la vitesse de rotation du moteur,  $L$  l'inductance des enroulements,  $R$  la résistance interne,  $K_e$  la constante électrique (de force électromotrice),  $K_c$  la constante mécanique (de couple électromagnétique),  $f$  le coefficient de frottement visqueux,  $J$  le moment d'inertie, et enfin  $\Gamma(t)$  le couple externe. Dans notre cas, le couple  $\Gamma$  est provoqué en majeure partie par la résistance de l'air sur les pales de l'hélicoptère. Il est donc proportionnel au carré de la vitesse de rotation du rotor de l'hélicoptère, donc également au carré de la vitesse de rotation du moteur,  $\omega(t)$ . En notant  $k_r$  le coefficient de proportionnalité, on a  $\Gamma = k_r \omega^2$ .

Les dynamiques de variation de courant se trouvent en dehors de la bande passante du modèle et n'ont donc pas besoin d'être prises en compte. Ainsi, en négligeant le terme  $L \frac{di(t)}{dt}$ , on obtient l'équation différentielle suivante, non-linéaire à cause du terme en  $\omega^2(t)$  :

Modèle de l'ensemble ESC-moteur :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = -k_r \omega^2(t) - \left(f + \frac{K_c K_e}{R}\right) \omega(t) + \frac{K_c}{R} v(t) \quad (1.23)$$

avec l'entrée  $v(t)$  en volts et la sortie  $\omega(t)$  en rad/s.

Les constantes  $K_c$ ,  $K_e$  et  $R$  sont en général connues, données par le constructeur. Les trois autres paramètres  $J$ ,  $k_r$  et  $f$  sont plus délicats à obtenir et sont estimés grâce à des données d'entrées-sorties, par la procédure décrite dans la section suivante.

### 1.7.2.3 Identification d'un modèle des moteurs

**Trajectoire d'excitation.** Les Signaux Binaires Pseudo-Aléatoires (SBPA, ou PRBS en anglais pour *Pseudo-Random Binary Sequence*) sont largement utilisés en identification parce qu'ils permettent d'exciter le système sur une large gamme de fréquences. Leur contenu fréquentiel s'approche d'un bruit blanc, tout en offrant l'avantage d'être déterministe et paramétrable en longueur du signal et en largeur de bande (Landau, 2002). Un signal d'excitation de type "multisine" (combinaison de sinusôides de différentes fréquences) aurait également pu être envisagé et devrait fournir des résultats très similaires.

Un signal SBPA dépend de trois paramètres : son ordre  $N \in \mathbb{N}$ , le nombre de périodes  $p \in \mathbb{N}$  durant lesquelles le signal reste constant, et la période d'échantillonnage  $T_e$ . Les paramètres sont ici choisis de manière à satisfaire deux contraintes :

- La durée maximale d'une impulsion,  $t_{imp} = pNT_e$ , est supérieure au temps de montée du système  $t_m$ . Cela permet de fixer la limite basse de la bande-passante d'excitation.
- La durée  $d = (2^N - 1)pT_e$  de la SBPA est inférieure à une durée choisie, de manière à limiter la durée de l'expérience et donc les contraintes mécaniques sur le système.

Dans notre cas, avec  $t_m \approx 0.5$  s, on peut choisir  $p = 6$ ,  $N = 7$  et  $T_e = 0.02$  s, ce qui permet d'obtenir une durée d'expérience  $d = 15.24$  s et  $t_{imp} = 0.84$  s  $> t_m$ .

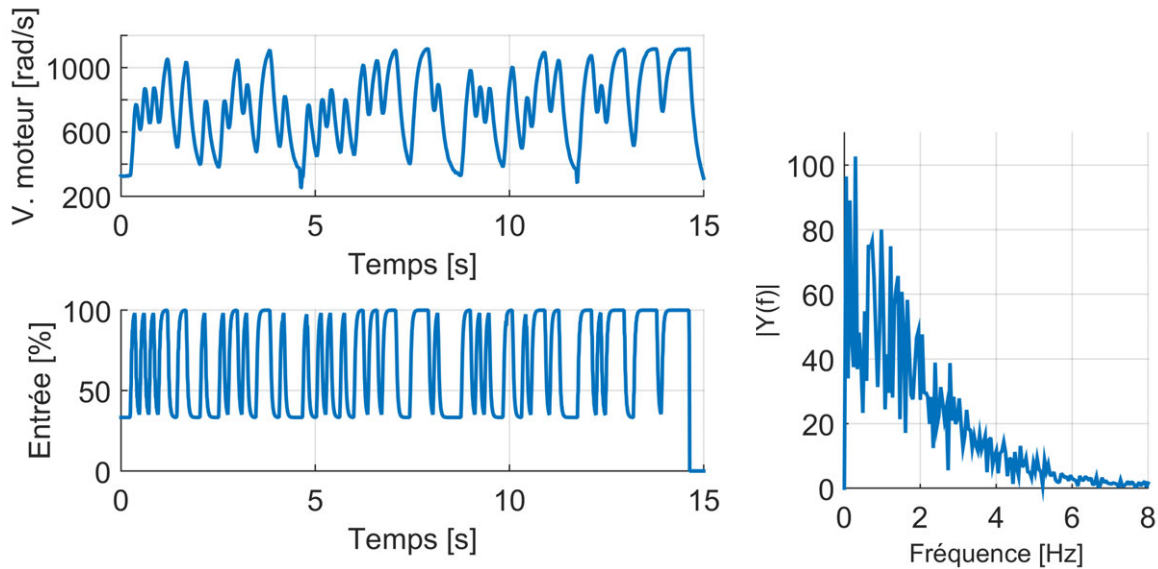
Ces signaux ont cependant l'inconvénient de contenir des hautes fréquences apportant un stress important aux systèmes mécaniques, pouvant les endommager. On peut s'affranchir des hautes fréquences à l'aide d'un filtre passe-bas. Au regard de la bande passante du moteur, nous choisissons ici un filtre du premier ordre avec une fréquence de coupure à 5 Hz. La figure 1.43 montre ce signal SBPA filtré ainsi que la réponse du système (vitesse de rotation du moteur). Celle-ci est mesurée à l'aide d'un capteur optique détectant le passage de réflecteurs sur le rotor du moteur<sup>41</sup>.

**Estimation des paramètres par minimisation de l'erreur de sortie.** Cette méthode est détaillée en section 3.4.1.2. Elle consiste à trouver l'ensemble des paramètres qui minimise l'erreur entre la sortie du modèle et la sortie mesurée expérimentalement. La figure 1.44 présente la comparaison du modèle identifié avec les mesures. On obtient une valeur de *fit* de 92.34%, calculée à partir de l'erreur NRMS (*Normalized Root Mean Squared Error*). Le tableau 1.12 présente la valeur des paramètres identifiés ainsi que l'intervalle de confiance à 95% associé. Ce dernier est calculé à partir de la matrice d'information de Fisher, elle-même calculée suivant la méthode décrite en section 3.5.5.2.

**Estimation indirecte des paramètres par erreur de filtre.** Cette seconde méthode, appelée méthode par erreur de filtre, se base sur l'utilisation d'un filtre de Kalman. Nous utilisons comme vecteur d'état :  $\mathbf{x} = [\omega, k_r, J, f]^T$ . Les paramètres sont vus comme de nouveaux états à dérivée nulle. L'équation d'état non-linéaire est alors issue de l'équation (1.23) :

$$f(\mathbf{x}, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_3} (-x_2 x_1 x_1 - (x_4 + \frac{K_c K_e}{R}) x_1 + \frac{K_c}{R} v), 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T \quad (1.24)$$

41. Pour ce type de moteurs "outrunner" la cage est tournante, facilitant la pose de ces réflecteurs (sous forme de ruban adhésif réfléchissant) directement sur le rotor.



**Figure 1.43** – Signal binaire pseudo-aléatoire filtré (entrée  $u_{ESC}(t)$ ) et réponse mesurée du système. La transformée de Fourier discrète du signal SBPA filtré montre une bonne excitation dans la bande passante du système.

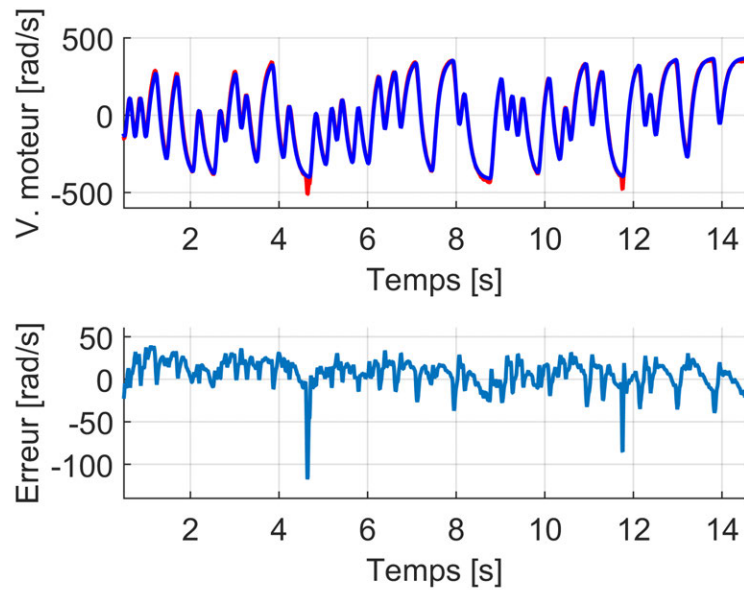
**Table 1.12** – Résultats d'identification d'un modèle des moteurs par minimisation de l'erreur de sortie.

Paramètre	Valeur estimée	Confiance à 95%	Unité
$k_r$	$2.36e-6$	$\pm 1.73\%$	$\text{N m rad}^{-2} \text{s}^2$
$J$	$5.22e-3$	$\pm 0.04\%$	$\text{kg m}^2$
$f$	$4.46e-2$	$\pm 0.03\%$	$\text{N m rad}^{-1} \text{s}$
$K_c$	$3.06e-3$	(fixé)	$\text{N m/A}$
$K_e$	$3.06e-3$	(fixé)	$\text{V/rad/s}$
$R$	0.081	(fixé)	$\Omega$

et l'équation de mesure est donnée par  $h(\mathbf{x}) = x_1$ . L'équation d'état étant non-linéaire, nous utilisons un filtre de Kalman étendu passant par le calcul de la jacobienne de  $f$  (Changey, 2005; Grewall et Andrews, 2001). On notera que l'équation de sortie est linéaire.

Le filtre de Kalman comporte une première étape de prédiction de l'état suivant  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  en utilisant l'équation d'état non-linéaire, et de la matrice de covariance  $\mathbf{P}$  de l'état en utilisant la jacobienne de  $f$  estimée numériquement en  $\hat{\mathbf{x}}$ . La deuxième étape est une étape d'estimation (ou de mise-à-jour), qui consiste en la correction de  $\hat{\mathbf{x}}$  grâce au calcul de l'erreur entre la mesure et  $h(\hat{\mathbf{x}})$ , pondérée par le gain de Kalman. La matrice de covariance est alors également mise à jour.

L'algorithme de Kalman étendu discret est détaillé ci-dessous pour une itération ( $k = 1, \dots, N_e$  avec  $N_e$  le nombre d'échantillons), en utilisant une notation "pseudo-code" (voir Alazard (2005), par exemple, pour plus de détails sur le filtre de Kalman).



**Figure 1.44** – Résultat d'identification par minimisation de l'erreur de sortie. Le modèle identifié est tracé en bleu, les valeurs mesurées sont en rouge.

Pseudo-code pour le filtre de Kalman étendu discret :

$$\begin{aligned}
 \text{Prédiction de l'état suivant :} & \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + T_e f(\mathbf{x}, v_k) \\
 \text{Linéarisation à l'état courant :} & \quad \mathbf{A} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, v_k)}{\partial \mathbf{x}} \\
 \text{Discrétisation :} & \quad \mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}T_e) \\
 \text{Prédiction de la covariance :} & \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}_d \mathbf{P} [\mathbf{A}_d]^T + \mathbf{Q} \\
 \text{Calcul du gain de Kalman :} & \quad \mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \\
 \text{Estimation de l'état :} & \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{K}(y_k - h(\mathbf{x})) \\
 \text{Estimation de la covariance :} & \quad \mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P}
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Avec  $y_k$  l'échantillon  $k$  de la mesure, et  $v_k$  celui de l'entrée.  $\mathbf{H}$  est la jacobienne de la fonction  $h(\mathbf{x})$  :  $\mathbf{H} = [1, 0, 0, 0]$ . Les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont respectivement la matrice de covariance du bruit d'état et celle du bruit de mesure. On estime ici l'écart-type du bruit de mesure à 12 rad/s, donc  $\mathbf{R} = 12^2$ .  $\mathbf{Q}$  est fixée à  $\mathbf{Q} = [\sigma^2, 0, 0, 0] \mathbf{I}$ , avec  $\sigma = 0.01$ .

Le tableau ci-dessous donne la valeur finale des paramètres, ainsi que l'intervalle de confiance à 95% calculé à partir de la matrice de covariance estimée par le filtre (voir également la section 3.5.5.2 pour plus de détails sur le calcul). La valeur des paramètres estimée au cours du temps est tracée en figure 1.45. On note une convergence rapide du filtre. On note également un intervalle de confiance relativement large pour le paramètre  $k_r$ , montrant que le modèle est peu sensible à la valeur de ce paramètre.

**Table 1.13** – Résultats d'identification d'un modèle des moteurs par filtre de Kalman.

Paramètre	Valeur estimée	Confiance à 95%	Unité
$k_r$	$1.13e-6$	$\pm 14.25\%$	$\text{N m rad}^{-2} \text{s}^2$
$J$	$5.84e-3$	$\pm 0.54\%$	$\text{kg.m}^2$
$f$	$4.26e-2$	$\pm 0.42\%$	$\text{N m rad}^{-1} \text{s}$



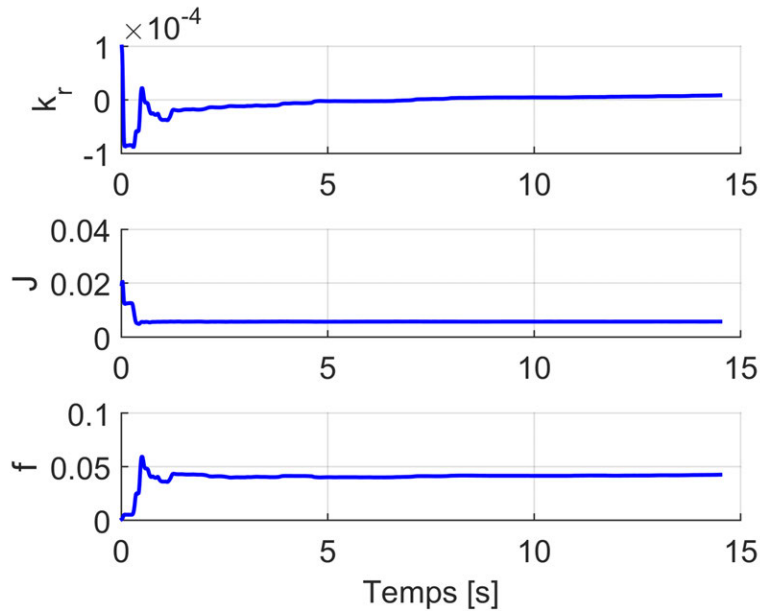


Figure 1.45 – Évolution de la valeur des paramètres par la méthode du filtre de Kalman étendu.

#### 1.7.2.4 Commande en vitesse des moteurs

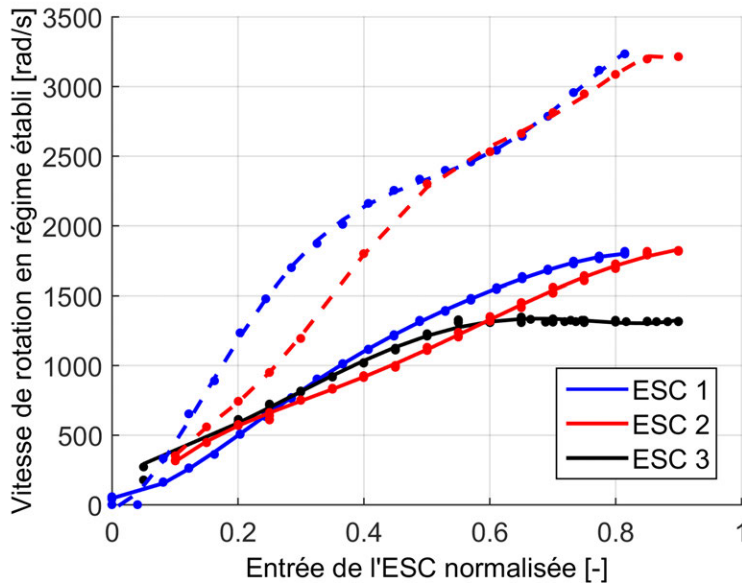


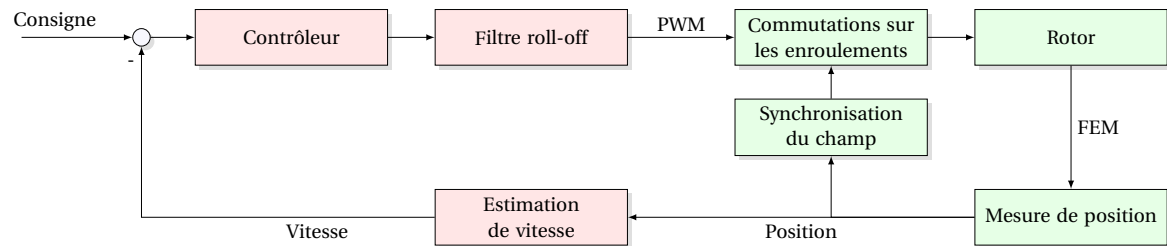
Figure 1.46 – Mesure de la vitesse du moteur en régime établi, en utilisant trois différents ESC, moteur à vide (lignes pointillées) et en charge (lignes continues).

Pour obtenir un contrôle précis du drone, il est nécessaire d’asservir le moteur en vitesse. En effet, la portance des rotors du drone est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation des moteurs (voir la section 2.3). La figure 1.46 présente une mesure de vitesse du moteur en régime établi en utilisant trois ESC différents. Cette figure met en évidence la dépendance de la vitesse à la charge du moteur, une non-linéarité entre l’entrée de commande et la vitesse, et une réponse différente selon l’ESC utilisé. Un asservissement en vitesse est donc important pour assurer en particulier les trois points suivants :

- permettre une vitesse de rotation (et donc une portance) indépendante de la tension des batteries (équation (1.21)) ou de la charge (figure 1.46),

- rejeter les perturbations auxquelles sont soumis les rotors (rafales de vent, mouvements du drone, changements d'orientation du plateau cyclique, etc.),
- diminuer le temps de réponse des moteurs.

Le principe de la commande est présenté en figure 1.47 : la boucle interne est l'auto-pilotage assuré par l'ESC (éléments en vert) et la commande en vitesse que nous cherchons à mettre en place constitue une boucle externe (éléments en rouge).

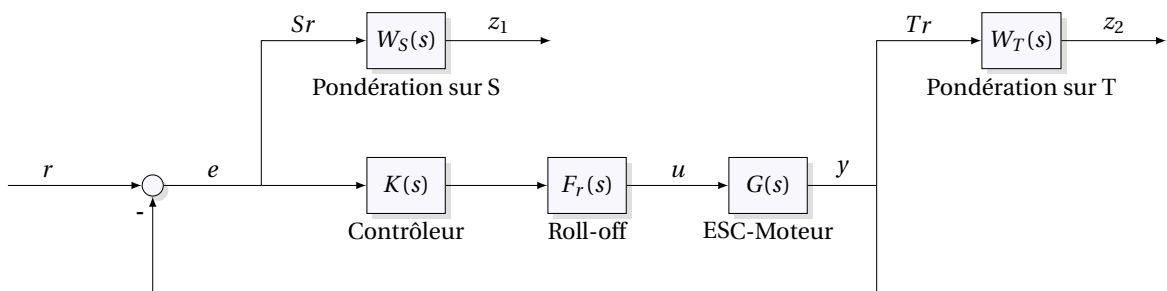


**Figure 1.47** – Schéma de principe de la commande d'un moteur brushless. L'autopilotage réalisé par l'ESC est représenté en vert. La commande en vitesse ajoutée est en rouge.

Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (PI), sous la forme classique suivante :

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (1.26)$$

Afin de procéder à la synthèse de ce correcteur  $K$ , nous utilisons une approche d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$  non-lisse avec contraintes de structure (Apkarian et Noll, 2006; Bruinsma et Steinbuch, 1990) selon le schéma de synthèse présenté à la figure 1.48, composé du modèle  $G(s)$  identifié et du correcteur  $K(s)$  à déterminer. La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  standard (ou d'ordre plein) aboutit en effet à des correcteurs d'ordre élevé (de même ordre que le système augmenté des pondérations); ces techniques de synthèse structurée permettent de régler des correcteurs de structures arbitraires.



**Figure 1.48** – Forme standard de la sensibilité mixte avec filtre de "roll-off".

Le signal de commande est filtré à l'aide d'un filtre passe-bas du premier ordre,  $F_r(s)$ , de manière à limiter les hautes fréquences et ainsi éviter les pics de courant pouvant détériorer l'électronique<sup>42</sup>. On choisit un filtre de Chebychev avec une bande passante de 5 Hz. Il est mis sous la forme d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle infinie (IIR) du premier ordre, très simple à implémenter :

$$F_r(z) = \frac{c_a(z+1)}{z+c_b} \quad (1.27)$$

Avec une fréquence de la boucle de commande à 100 Hz, on obtient  $c_a = 0.312$  et  $c_b = -0.376$ .

Enfin, le schéma de synthèse de la figure 1.48 est complété par les filtres de pondération  $W_S(s)$  et  $W_T(s)$  agissant respectivement sur la fonction de sensibilité  $S$  et son complémentaire  $T$  (don-

42. Sur les ESC bas-coût utilisés, un appel de courant important entraîne une chute de tension aux bornes du microcontrôleur de l'ESC, ce qui provoque son redémarrage. Ce problème est évidemment très gênant, et est évité par l'utilisation du filtre présenté.

nées par l'équation (1.28)) dans la méthode dite des sensibilités mixtes pour la commande  $\mathcal{H}_\infty$  (Bates et Postlethwaite, 2002; Doyle *et al.*, 1989, chap. 4).

$$\begin{aligned} S(s) &= (I + G(s)K(s))^{-1} \\ T(s) &= (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Les fonctions de pondération permettent de caractériser le cahier des charges pour la boucle fermée dans le domaine fréquentiel. Le cahier des charges est défini comme suit :

- Réduction du temps de réponse à 5% de sorte qu'il soit inférieur à 150 ms. Il est d'environ 250 ms pour le système en boucle ouverte.
- Dépassement de la réponse à un échelon inférieur à 2%.

De manière à satisfaire ces contraintes, une allure passe-bas est choisie pour la pondération  $W_S(s)$  sur la fonction de sensibilité tandis qu'une allure passe-haut est définie pour la pondération  $W_T(s)$  sur la fonction de sensibilité complémentaire :

$$W_S(s) = \frac{s/M_1 + \omega_1}{s + \omega_1\epsilon_1} \quad \text{et} \quad W_T(s) = \frac{s + \omega_2/M_2}{\epsilon_2 s + \omega_2} \quad (1.29)$$

L'objectif de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  consiste alors à déterminer le correcteur  $K(s)$  qui minimise la norme  $\mathcal{H}_\infty$  entre la référence  $r$  et les sorties de performance  $z = \{z_1, z_2\}$ , c'est-à-dire  $\|T_{r \rightarrow z}\|_\infty \leq \gamma$ . Si l'on a  $\gamma \leq 1$ , les contraintes exprimées par les gabarits sont satisfaites, et on obtient :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |S(j\omega)| < \frac{1}{|W_S(j\omega)|} \quad \text{et} \quad |T(j\omega)| < \frac{1}{|W_T(j\omega)|} \quad (1.30)$$

Au regard du cahier des charges, nous choisissons les valeurs données dans le tableau 1.14. Dans l'équation (1.29),  $\epsilon_1$  fixe le gain de la fonction de sensibilité en basse fréquence et  $\epsilon_2$  le gain de la fonction de sensibilité complémentaire en haute fréquence. Ils sont choisis faibles.

**Table 1.14** – Réglage des pondérations sur la fonction de sensibilité et la fonction complémentaire.

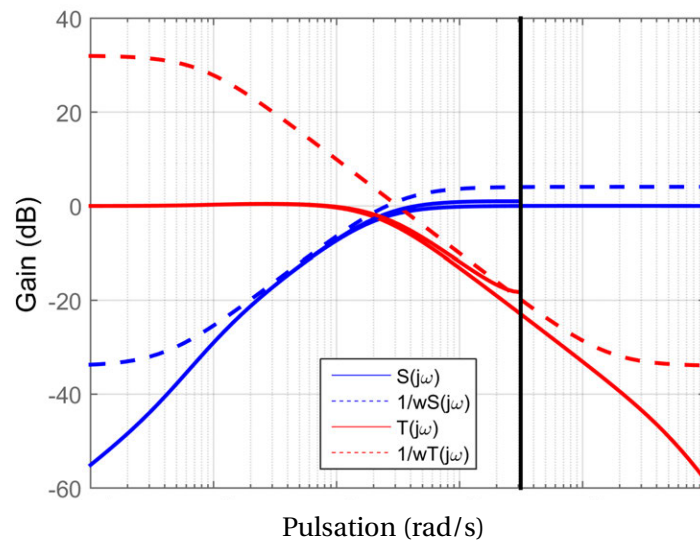
$\omega_1 = 20$ rad/s	Temps de réponse ou bande passante minimale souhaitée.
$M_1 = 1.6$	
$\omega_2 = 10\pi$ rad/s	Réglage de la robustesse du système en spécifiant un gain faible en haute fréquence. On veille également à ce que : $\omega_2 > \omega_1$ .
$M_2 = 40$	
	Résonance maximale.

La figure 1.49 illustre les résultats obtenus pour le système en boucle fermée par rapport aux gabarits fréquentiels. Nous vérifions que les contraintes sont encore satisfaites dans le cas discret.

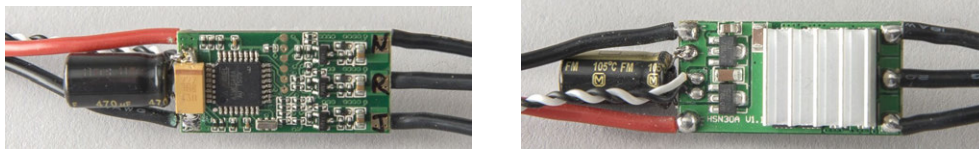
### 1.7.2.5 Implémentation et validation

Les ESC permettant l'auto-pilotage des moteurs brushless sont fabriqués en grande série pour les drones, miniaturisés et accessibles à très bas coût (figure 1.50). L'idée avancée par plusieurs projets "open-source" est de reprogrammer le microcontrôleur de ces ESC de manière à maîtriser le fonctionnement interne tout en gardant la structure électronique bas-coût (voir par exemple les projets Kayukov et Konze (2011); Kirby et Konze (2011); Skaug (2012)). C'est également l'approche que nous avons suivie pour implémenter le correcteur présenté dans cette section, en se basant sur le projet WiiESC (Kayukov et Konze, 2011) et sur différents ESC du commerce<sup>43</sup>. Nous utilisons une implémentation en virgule fixe de la boucle de commande, permettant de réduire la puissance de calcul nécessaire et d'atteindre une fréquence de boucle de 100 Hz.

43. Nous utilisons des ESC de référence HobbyKing BlueSerie 30A et DYS-30A, comportant tous deux un microcontrôleur Atmel AVR 8-bit avec 8 Ko de mémoire Flash et fonctionnant à 16 MHz. C'est l'un des plus petits microcontrôleurs de la gamme proposée par Atmel, et sa puissance de calcul ainsi que la mémoire disponible limitent la complexité des algorithmes que l'on peut implémenter.



**Figure 1.49** – Tracé des valeurs singulières des fonctions  $S(j\omega)$  et  $T(j\omega)$  pour le système à temps continu et discrétisé (lignes continues), et de leur gabarit  $W_S(j\omega)$  et  $W_T(j\omega)$  (lignes pointillées).

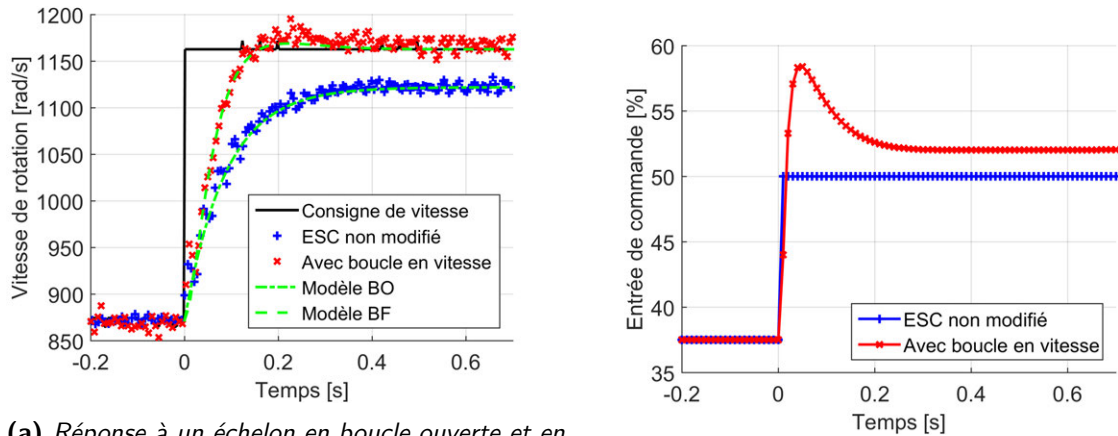


**Figure 1.50** – Électronique de commande de moteurs brushless (ESC) du commerce, de référence DYS-30A. Le microcontrôleur est reprogrammé de manière à maîtriser le programme et à implémenter l'asservissement en vitesse.

**Résultats.** La figure 1.51a donne la réponse à un échelon du moteur en boucle ouverte et celle lorsque le système est équipé du correcteur développé. Les résultats de simulation et les relevés expérimentaux y sont comparés, et montrent une bonne concordance. Par ailleurs, la réponse indicielle en boucle fermée est conforme au cahier des charges, avec un temps de réponse de l'ordre de 120 ms et un dépassement de 2.1 %.

La figure 1.51b montre les signaux de commande. Contrairement à la vitesse des moteurs, les entrées de commandes n'ont pas été mesurées et seuls les résultats de simulation sont présentés. En effet, l'implémentation de cette fonctionnalité dégradait les performances de la boucle fermée, à cause de l'introduction de retards<sup>43</sup>. Nous noterons simplement que le correcteur proposé montre une utilisation appropriée des ressources de commande.

**Remarque.** Cette étude sur la modélisation et l'asservissement en vitesse des moteurs a fait l'objet du début de ma thèse. Il existait alors très peu d'ESC dédiés aux drones permettant cet asservissement, et les temps de réponse étaient élevés. En effet, ces ESC étaient majoritairement destinés aux hélicoptères à pas collectif dont la vitesse du rotor reste fixe durant un vol (le pas des pales permet de varier la portance du rotor et non la vitesse de rotation comme dans notre cas), et ne nécessitent donc pas de variation rapide de la vitesse. Actuellement, ce type d'asservissement est proposé nativement par de nombreux projets. Le travail présenté ici y a contribué.



(a) Réponse à un échelon en boucle ouverte et en boucle fermée, en simulation (lignes pointillées) et mesurée (marqueurs).

(b) Signaux de commande en boucle ouverte et en boucle fermée (simulations).

Figure 1.51 – Réponse à un échelon de vitesse. La vitesse est mesurée à l'aide d'un capteur optique.

## 1.8 Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre, nous avons donné le contexte de la thèse, issue du projet GLMAV et s'inscrivant dans l'évolution majeure et rapide des thématiques liées aux drones miniatures. Les éléments constitutifs de ces aéronefs sont décrits. L'état de l'art et l'analyse des principaux autopilotes, directement à travers l'étude de leur code source, constitue une contribution importante de ce chapitre. Cette analyse permet d'appréhender le contexte, l'évolution et l'activité actuelle sur les drones miniatures et de montrer comment il nous a été permis de contribuer au développement du projet PX4 pour les structures coaxiales. La seconde contribution porte sur l'identification de différents modèles pour les servomoteurs et les moteurs. Ces modèles permettent une simulation plus fidèle du comportement dynamique du drone en vol, d'une part, et de mettre en place une boucle de commande en vitesse dans le cas des moteurs, d'autre part. Nous montrons au chapitre 4 que la prise en compte de ces modèles dans les simulations a un impact important. Dans ce chapitre, nous avons également décrit la maquette utilisée dans cette thèse pour les essais expérimentaux, constituée d'un double rotor coaxial contrarotatif muni d'un plateau cyclique, et les différents éléments constitutifs des drones miniatures (système électronique et logiciel, capteurs et actionneurs, télémétrie). Cette maquette sert de cas d'étude pour la méthodologie d'identification déclinée au chapitre 3 et l'élaboration des lois de commande au chapitre 4.

# Modélisation d'un hélicoptère

## Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b>	<b>55</b>
<b>2.2 Modélisation cinématique et dynamique : équations de mouvement</b>	<b>58</b>
2.2.1 Description des grandeurs	58
2.2.2 Représentation de l'attitude et des rotations dans l'espace	60
2.2.3 Modélisation cinématique des rotations et des translations	64
2.2.4 Modèle à six degrés de liberté du corps rigide dans l'espace	65
2.2.5 Synthèse des équations dynamiques et cinématiques	67
<b>2.3 Modélisation aérodynamique</b>	<b>68</b>
2.3.1 Introduction à la modélisation aérodynamique	68
2.3.2 Analyse préalable d'un relevé en vol	69
2.3.3 Présentation des principaux efforts aérodynamiques	70
2.3.4 Principe de fonctionnement de l'hélicoptère	71
2.3.5 Efforts générés par le bi-rotor	79
2.3.6 Traînée aérodynamique de l'hélicoptère	82
2.3.7 Prise en compte de la dynamique de battement	83
2.3.8 Conclusion sur la modélisation aérodynamique	89
<b>2.4 Conclusion du chapitre</b>	<b>90</b>

---



## 2.1 Introduction

Le travail de modélisation mathématique vise à obtenir un ensemble d'équations décrivant le comportement d'un système physique. Le modèle obtenu est constitué d'une structure décrivant les relations entre les variables, et d'un ensemble de paramètres. La modélisation d'un système consiste donc d'une part à établir la structure, ce qui fait l'objet de ce chapitre, et d'autre part à déterminer ou estimer ses paramètres (détaillé au chapitre 3).

**Structures de modèles.** Il existe une grande variété de structures de modèles plus ou moins complexes dont le choix dépend du système considéré et de l'objectif visé : simulation, prédiction, synthèse de lois de commande, meilleure compréhension de phénomènes physiques, détection de fautes, etc. En particulier, obtenir un modèle dynamique du système considéré est un prérequis indispensable pour le développement d'algorithmes de navigation, de commande et de guidage.

La variété des structures de modèle rend leur classification difficile : modèle linéaire (Mettler *et al.*, 2002; Robinson *et al.*, 2013) ou non-linéaire, à temps discret ou à temps continu, paramétrique ou non-paramétrique, boîte-noire (Abbeel *et al.*, 2005) ou boîte-grise (Koehl *et al.*, 2010a; Wang *et al.*, 2014), etc. Parmi les structures les plus courantes, dans le domaine de l'automatique en particulier, on peut mentionner la représentation d'état et la représentation en fonction de transfert. La première permet de représenter un système sous forme matricielle en décrivant explicitement la dynamique des variables internes caractérisant l'état du système (les variables d'état). Les équations d'état sont alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(t)$  le vecteur des entrées du système, et  $\mathbf{y}(t)$  le vecteur des sorties. La transformée de Laplace des équations (2.1) donne la représentation en fonction de transfert  $\mathbf{G}(s)$  avec comme entrée  $\mathbf{U}(s)$  (transformée de Laplace de  $\mathbf{u}(t)$ ) et comme sortie  $\mathbf{Y}(s)$  (transformée de  $\mathbf{y}(t)$ ), donnée par l'équation (2.2) :

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.2)$$

La fonction de transfert décrit la réponse fréquentielle du système. Ces deux représentations sont incluses dans une famille de structures plus générale : la famille des modèles d'entrée-sortie polynomiaux. Ces modèles sont regroupés sous une notation généralisée exprimant le lien entre l'entrée  $\mathbf{u}(t)$ , la sortie  $\mathbf{y}(t)$ , et un bruit  $\mathbf{e}(t)$  sur le système. Selon la relation entre  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ , et  $\mathbf{e}(t)$ , différentes structures de modèles peuvent être construites : de type FIR ("Finite Impulse Response" : filtre à réponse impulsionnelle finie), AR ou ARX ("Auto Regressive model with eXternal inputs"), BJ ("Box-Jenkins") ou encore OE ("Output Error" : modèle par erreur de sortie). Ces différents modèles sont détaillés par Ljung (1999).

Les structures de modèles non-linéaires sont encore plus diverses. On retrouve tout d'abord les structures de modèles linéaires étendues au cas non-linéaire (appelées "NL-FIR", "NL-ARX", etc.). Il existe également des structures de modèles plus spécifiques, tels que les modèles construits par blocs : les modèles Wiener-Hammerstein sont par exemple composés d'une fonction non-linéaire en entrée et/ou en sortie d'un système linéaire. Les modèles LPV (Linéaire à Paramètres Variants) sont couramment utilisés dans le domaine de la commande et ont la particularité d'avoir une relation linéaire entre l'entrée et la sortie, en fonction d'une variable externe (appelée "scheduling variable"). Leur identification présente cependant un certain nombre de difficultés et constitue un domaine de recherche actif<sup>1</sup> (Tóth, 2010). Il existe encore bien d'autres modèles moins

1. On distingue en général deux approches principales : l'approche globale qui vise à l'identification d'un modèle LPV à partir d'une expérience unique (Laurain *et al.*, 2011), et l'approche locale qui utilise plusieurs jeux de données correspondant à plusieurs points de fonctionnements pour identifier un ensemble de modèles linéaires qui sont interpolés dans un second temps (Gilson et Garnier, 2017)



conventionnels mais très utilisés dans certains domaines, comme les modèles par réseau de neurones artificiels<sup>2</sup> ou par ondelettes.

**Utilisation des connaissances préalables sur le système.** La connaissance préalable que l'on a sur le système physique permet d'orienter le choix de la structure. Ainsi, les modèles "boite-noire" permettent une grande flexibilité et sont applicables de manière très générale. Ils sont pour cela très appréciés en particulier lorsque la connaissance préalable sur le système est réduite. Dans le cas contraire, il est pertinent de structurer le modèle selon les phénomènes physiques sous-jacents. On parle alors de modèle "boite-grise". Cette dernière approche présente plusieurs avantages :

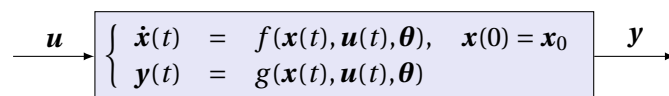
- Les paramètres du modèles ont généralement une interprétation physique, ce qui permet d'en avoir une estimation préalable par des moyens divers.
- Le domaine de validité du modèle est généralement large, du fait de sa structure issue des lois de la physique.

Mais l'approche présente également un certain nombre d'inconvénients ou de difficultés :

- Difficultés de modélisation dans le cas de systèmes faisant intervenir des phénomènes physiques complexes.
- Certains paramètres du modèle peuvent être non-identifiables à partir de mesures des signaux de l'entrée et de la sortie (voir section 3.2).

Pour ces raisons, on trouve dans la littérature des modèles boite-grises qui vont plus ou moins loin dans la modélisation physique, ou des modèles hybrides entre boite-grise et boite-noire. Ainsi, Mettler *et al.* (2002) s'inspirent des équations du mouvement et des relations connues entre les différentes variables pour choisir la structure d'un modèle de drone hélicoptère, sans pour autant utiliser une modélisation aussi fine que Schafroth *et al.* (2010) ou Koehl *et al.* (2010a). Kim *et al.* (2003) utilisent une structure de modèle inspirée des équations de la physique, mais simplifiée, de sorte que les paramètres n'ont plus d'interprétation physique.

Ces modèles "boite-grise" basés sur la physique sont très employés dans le domaine de l'aéronautique : les systèmes considérés ont en général des dynamiques complexes dues à des phénomènes physiques bien connus et décrits de manière exhaustive dans la littérature (pour les hélicoptères, voir par exemple Leishman (2006) ou Seddon et Newman (2011)). Les avantages exposés ci-dessus prennent donc tout leur sens. La représentation d'état donnée en figure 2.1 est généralement utilisée pour décrire le modèle. Les modèles LPV sont également bien adaptés aux aéronefs, car ils permettent d'obtenir un modèle valide pour différents points de fonctionnement. La variable externe peut alors être par exemple l'altitude ou l'angle d'attaque (Fleischmann *et al.*, 2017).



**Figure 2.1** – Représentation d'état générique d'un modèle non-linéaire, avec  $\mathbf{x}$  le vecteur d'état,  $\mathbf{u}$  les entrées de commande,  $\mathbf{y}$  les mesures, et  $\boldsymbol{\theta}$  les paramètres dont dépend le modèle

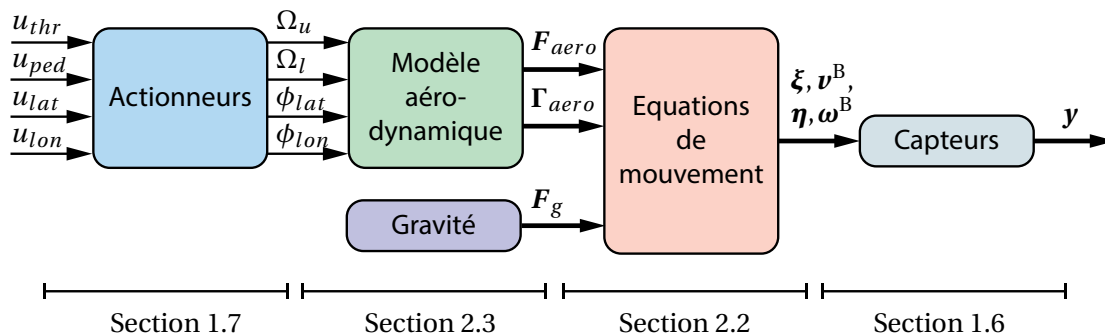
**Objectifs du modèle.** Ce chapitre décrit la modélisation non-linéaire du comportement d'un hélicoptère miniature en vol. L'objectif de ce modèle est double :

1. Utilisation comme simulateur : le modèle obtenu permet de réaliser des simulations fiables du comportement de l'hélicoptère, de manière à pouvoir expérimenter et évaluer différents algorithmes de guidage, navigation ou commande.

2. Dans les domaines de l'intelligence artificielle, par exemple, ou en "machine learning" (apprentissage par machine), pour des applications de classification ou de reconnaissance de motifs (images, caractères...). Mais les réseaux de neurones artificiels sont également utilisés pour la construction de modèles d'engins volants, par Jategaonkar (2006) par exemple.

- Utilisation pour la synthèse de lois de commande : à partir du modèle non-linéaire décrit dans ce chapitre, plusieurs modèles plus adaptés à la synthèse de lois de commande seront construits dans un second temps (modèles linéarisés, par exemple, comme décrit au chapitre 4).

**Décomposition en sous-systèmes.** Le modèle est décomposé en plusieurs sous-systèmes, dont l'agencement est présenté en figure 2.2. L'élément central, appelé "modèle à six degrés de liberté" (ou équations du mouvement), décrit le comportement cinématique et dynamique du véhicule en utilisant les équations de mouvement d'un corps rigide (seconde loi de Newton), sous l'hypothèse de déformations négligeables du corps de l'aéronef<sup>3</sup>, présenté en section 2.2.4 (Zipfel, 2007). Le second sous-système, appelé "modèle aérodynamique", décrit les efforts aérodynamiques (forces et moments) agissant sur le véhicule. Il est présenté en section 2.3.



**Figure 2.2** – Sous-systèmes constitutifs du modèle de l'hélicoptère, et référence aux sections correspondantes. Les grandeurs sont définies dans la section 2.2.1 suivante.

Si le cadre est bien connu, la difficulté de la modélisation est, d'une part, d'établir un modèle aérodynamique dont la complexité est adaptée à l'objectif du modèle, et d'autre part d'estimer de manière fiable les paramètres de manière à ce que le modèle soit une bonne représentation du système réel.

**Le compromis inhérent à la modélisation.** De manière générale, un modèle mathématique représente une simplification d'un système et est nécessairement incomplet et imparfait. Il se base sur un ensemble d'hypothèses simplificatrices. Dans de nombreux cas, il n'est pas évident de juger de la validité des hypothèses, en particulier quand il s'agit de phénomènes aérodynamiques : les effets essentiels pour un hélicoptère grandeur nature sont parfois négligeables pour les modèles réduits, et vice-versa. De plus, ces effets dépendent du point de fonctionnement considéré : pour les véhicules aériens et les hélicoptères en particulier, la dynamique de vol est en général très différente selon le point de fonctionnement (vol stationnaire, vol d'avance, vol vertical, vol rapide ou vol lent...). Pour ces raisons, dans ce chapitre nous considérons différents niveaux de complexité du modèle aérodynamique, en mettant à chaque fois en évidence l'apport sur la précision et le coût en complexité. Ces différents niveaux sont listés ci-dessous :

- Pour le premier niveau de modélisation, seuls les effets aérodynamiques dus aux deux rotors contrarotatifs sont considérés. La dynamique de battement des pales, primordiale pour un hélicoptère de grande taille, est ici simplifiée et considérée sous sa forme quasi-statique. Les couplages entre les mouvements du drone et les efforts générés par les rotors sont négligés. Le plateau cyclique, particularité des hélicoptères, ajoute cependant une certaine complexité dans la modélisation. Ce premier niveau de modélisation est en général bien adapté pour les drones de type multi-rotors comme les quadricoptères : les effets de battement du rotor, de même que les effets aérodynamiques secondaires, sont moins importants que dans le cas d'un hélicoptère en raison de la taille réduite des rotors. Ce

3. Cette hypothèse est tout-à-fait pertinente dans le cas de drones miniatures, mais des modèles plus complexes sont construits pour les structures plus grandes et plus flexibles (les satellites, par exemple).

modèle est souvent utilisé dans la littérature pour la synthèse de correcteurs autour du vol stationnaire : Gassmann *et al.* (2013) et Drouot *et al.* (2012) pour la commande d'un hélicoptère coaxial par des méthodes non-linéaires, Schafroth *et al.* (2010) pour le réglage d'une commande en position. On voit cependant des études récentes prenant en compte le second niveau de complexité lors de la synthèse de lois de commande (Kai *et al.*, 2017).

2. Le second niveau prend en compte les effets aérodynamiques secondaires, à savoir le vent induit dans les pales qui produit un couplage entre les mouvements du drone et les efforts générés par les rotors.
3. Le troisième niveau prend également en compte le frottement aérodynamique, généré par les mouvements de l'hélicoptère dans l'air. Ce phénomène agit sur une gamme de fréquences très basses, et améliore nettement la précision de la modélisation sur les mouvements en translation.
4. Enfin, dans le quatrième niveau de modélisation, nous prenons également en compte un modèle du second ordre pour la dynamique de battement. Cela permet de modéliser les phénomènes à moyenne et haute fréquence pouvant impacter la stabilité de l'hélicoptère.

Les paramètres des différents modèles obtenus sont estimés dans un second temps, en section 3.4.2 du chapitre 3 suivant, et les modèles sont comparés en section 3.5.2.

## 2.2 Modélisation cinématique et dynamique : équations de mouvement

### 2.2.1 Description des grandeurs

Dans cette section sont décrits les éléments constitutifs du modèle de l'hélicoptère, à savoir les entrées, sorties, états et signaux de commande.

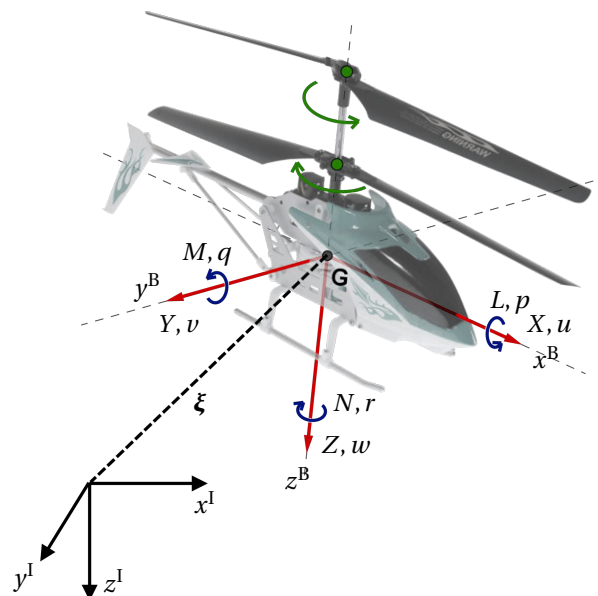


Figure 2.3 – Définition des axes et des notations. Par convention, l'axe  $z$  est orienté vers le bas.

**Définition des repères de référence.** En aéronautique, pour un corps rigide évoluant dans l'atmosphère<sup>4</sup>, trois repères principaux sont en général introduits : un repère considéré comme inertiel<sup>5</sup> dont l'origine est au centre de la Terre, appelé ECI ("Earth-Centered Inertial frame"), un re-

4. On parle de mouvement "endoatmosphérique", qui s'étend jusqu'à une altitude d'environ 100 km.

5. On néglige pour cela le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil et le décentrage de son axe de rotation.

père lié au centre de la Terre et tournant avec elle<sup>6</sup>, appelé ECEF (“Earth-Centered and Earth-Fixed frame”), et un repère “véhicule” lié à son centre de masse (Zipfel, 2007).

Dans le cadre d’un véhicule évoluant sur une surface réduite, les repères ECI et ECEF sont peu utilisés, et il est pertinent d’utiliser un système de coordonnées géographique local dont les deux premiers axes sont compris dans un plan tangent à la surface de la Terre, appelé NED (“North-East-Down coordinates”). Ce repère est alors considéré comme étant un repère inertiel.

Nous utilisons alors dans cette étude les deux repères principaux suivants, représentés en figure 2.3 :

- $I = \{O, x^I, y^I, z^I\}$  Repère considéré inertiel, lié au sol, dont les axes sont orientés vers le Nord, l’Est, et le bas.
- $B = \{G, x^B, y^B, z^B\}$  Repère lié au centre de gravité  $G$  du véhicule, dont les axes sont orientés vers l’avant, la droite et le bas.

**Signaux de commande.** Le vol de l’hélicoptère est contrôlé par l’intermédiaire de quatre actionneurs : deux moteurs actionnant la rotation des rotors et deux servomoteurs permettant de changer l’orientation du plateau cyclique (voir la description du système en partie 1.3.3). Ainsi, le système comporte quatre entrées classiques pour les aéronefs. Elles sont normalisées entre  $[-1, 1]$  pour  $u_{lat}$ ,  $u_{lon}$  et  $u_{ped}$ , et entre  $[0, 1]$  pour  $u_{thr}$  :

- $u_{lat}$  : cette entrée agit sur la commande du pas cyclique latéral, qui agit sur la vitesse angulaire  $p$  (autour de l’axe  $x^B$  du véhicule). Cette entrée est souvent appelée entrée “ailerons” par analogie aux véhicules à voilure fixe. Elle se traduit par une consigne angulaire au servomoteur appelé “servomoteur latéral”. Les valeurs extrêmes de cette entrée correspondent aux butées du plateau cyclique.
- $u_{lon}$  : commande du pas cyclique longitudinal, qui agit sur la vitesse angulaire  $q$  (autour de l’axe  $y^B$ ). Elle est souvent appelée entrée “elevator”.
- $u_{thr}$  : poussée du bi-rotor, ou pas collectif du rotor principal sur un hélicoptère traditionnel, ou encore entrée *throttle*. Une valeur  $u_{thr} = 0$  correspond à une poussée minimale du bi-rotor (rotors à l’arrêt ou pas collectif nul), tandis qu’une valeur  $u_{thr} = 1$  correspond au maximum de poussée (rotors tournant à vitesse maximale ou pas collectif maximal).
- $u_{ped}$  : commande de l’“anti-couple” qui agit sur la poussée du rotor de queue (hélicoptère traditionnel) ou sur le différentiel moteur (hélicoptère bi-rotor), provoquant ainsi un mouvement autour de l’axe  $z^B$ .

La sortie des actionneurs, qui est également l’entrée du modèle aérodynamique, est composée de  $\Omega_u$  et  $\Omega_l$ , les vitesses de rotation du rotor supérieur et du rotor inférieur, et de  $\phi_{lat}$  et  $\phi_{lon}$ , les angles d’inclinaison du plateau cyclique latéralement et longitudinalement.

**Degrés de liberté et état du véhicule.** Six variables sont nécessaires pour représenter la position d’un solide par rapport à un référentiel : la position de son centre de gravité (trois degrés de liberté en translation) et l’orientation (trois degrés de liberté en rotation). En tenant compte des vitesses en translation et en rotation, on obtient en tout 12 variables d’état.

1. La position de son centre de gravité par rapport au sol, c’est-à-dire la position du repère  $B$  par rapport au repère inertiel  $I$ , exprimée dans  $I$ , est notée :

$$[\xi_B^I]^I = \xi = [x, y, z]^T \quad (2.3)$$

Par soucis de simplicité d’écriture, on note par la suite :  $[\xi_B^I]^I = \xi$ .

2. La vitesse du véhicule est donnée par la dérivée temporelle de sa position. Son expression dans le repère inertiel est donnée par :

$$\dot{\xi} = [v_B^I]^I = v^I = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \quad (2.4)$$

6. Le premier axe du repère ECEF passe par le point d’intersection entre le méridien de Greenwich et l’équateur, tandis que son deuxième axe correspond à l’axe de rotation de la Terre, dirigé vers le Nord.

ou exprimée dans le repère du véhicule :

$$[\mathbf{v}_B^I]^B = \mathbf{v}^B = [u, v, w]^T \quad (2.5)$$

3. L'orientation du véhicule est également appelée "attitude" en aéronautique. Elle ne peut pas être représentée par un vecteur dans l'espace en trois dimensions au même titre que la position ou la vitesse. Elle peut être décrite de plusieurs manières différentes présentées par la suite, mais le codage par les angles d'Euler est classiquement utilisé :

$$[\boldsymbol{\eta}_B^I]^I = \boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^T \quad (2.6)$$

Les angles  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont appelés respectivement angles de roulis, tangage et lacet.

4. Sa vitesse angulaire par rapport au repère inertiel, exprimée dans le repère B :

$$[\boldsymbol{\omega}^{B/I}]^B = \boldsymbol{\omega}^B = [p, q, r]^T \quad (2.7)$$

**Couplages.** L'hélicoptère est un système sous-actionné (4 commandes seulement pour 6 degrés de liberté), et les différents états du véhicule sont couplés entre eux et par les entrées de commande. Cependant, afin de mieux comprendre son fonctionnement, on peut décomposer le modèle de l'hélicoptère en quatre canaux, c'est-à-dire quatre modèles SISO ("Single Input Single Output"), qui peuvent être traités isolément en première approximation. C'est en effet l'hypothèse que l'on fait en section 4.3.1 lors de la linéarisation du modèle pour la commande. Ces quatre canaux sont listés dans le tableau 2.1.

**Table 2.1** – Couplages majeurs entre les différents états de l'hélicoptère.

	Entrée	Effet 1	Effet 2	Effet 3	Effet 4
Canal 1	$u_{lat}$	Vitesse angulaire $p$	Roulis $\phi$	Vitesse $v$	Position $y$
Canal 2	$u_{lon}$	Vitesse angulaire $q$	Tangage $\theta$	Vitesse $u$	Position $x$
Canal 3	$u_{ped}$	Vitesse angulaire $r$	Lacet $\psi$	-	-
Canal 4	$u_{thr}$	Vitesse $w$	Position $z$	-	-

Une action sur l'entrée  $u_{lat}$ , par exemple, aura donc pour effet de faire basculer latéralement l'hélicoptère, qui se déplacera alors sur le coté.

## 2.2.2 Représentation de l'attitude et des rotations dans l'espace

L'attitude du véhicule est décrite par une rotation entre le repère inertiel de référence (considéré fixe) et le repère lié au véhicule. Il existe plusieurs méthodes de paramétrage de l'orientation<sup>7</sup>, dont les principales sont les matrices de rotation, les angles d'Euler et les quaternions unitaires. Chacune présente des avantages et des inconvénients, c'est pourquoi nous utiliserons par la suite l'une ou l'autre représentation selon le contexte et l'objectif.

### 2.2.2.1 Les matrices de rotation

Les matrices de rotation représentent la méthode la plus directe de paramétrage de l'orientation<sup>8</sup>. La matrice permettant le passage du repère B au repère I est notée  $\mathbf{T}^{IB}$ . Ainsi, pour un vecteur  $\mathbf{v}$  donné, ses coordonnées  $\mathbf{v}^I$  et  $\mathbf{v}^B$  exprimées respectivement dans les repères I et B sont liées par l'équation :

$$\mathbf{v}^I = \mathbf{T}^{IB} \mathbf{v}^B \quad (2.8)$$

7. L'ensemble des rotations dans l'espace Euclidien tridimensionnel muni de l'opération de composition forme un groupe particulier appelé groupe de Lie compact et noté SO(3) (pour groupe Spécial Orthogonal de dimension 3).

8. Les rotations sont des transformations linéaires de  $\mathbb{R}^3$  et peuvent donc être représentées par des matrices  $3 \times 3$  orthogonales (relatives à une base orthonormée). Les matrices de rotation munies de la multiplication de matrices permettent donc de représenter l'ensemble SO(3).

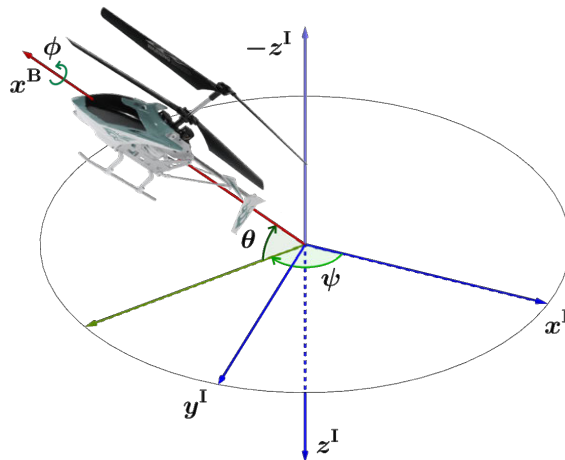
La matrice  $\mathbf{T}^{\text{IB}}$  est une matrice de rotation, c'est-à-dire qu'elle est orthogonale et de déterminant égal à 1. Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

$$\mathbf{T}^{\text{IB}}[\mathbf{T}^{\text{IB}}]^T = [\mathbf{T}^{\text{IB}}]^T\mathbf{T}^{\text{IB}} = \mathbf{I}, \quad [\mathbf{T}^{\text{IB}}]^{-1} = [\mathbf{T}^{\text{IB}}]^T \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{T}^{\text{IB}}) = 1 \quad (2.9)$$

Cette matrice comporte neuf éléments, et est donc sur-paramétrée pour un codage de l'orientation en trois dimensions (trois degrés de liberté). Il est possible de représenter les rotations en utilisant un nombre inférieur de paramètres, et donc de simplifier le problème. C'est le cas lors de l'utilisation des angles d'Euler (trois paramètres) et des quaternions unitaires (quatre paramètres et une contrainte). De manière générale, il a été démontré qu'il est impossible d'avoir une paramétrisation globale de dimension 3, c'est-à-dire avec 3 paramètres seulement, du groupe des rotations sans singularité (Stuelpnagel, 1964). De plus, une paramétrisation utilisant  $k > 3$  paramètres aura  $k - 3$  contraintes. On est donc contraint de coder l'attitude avec une représentation qui est soit singulière (comme les angles d'Euler), soit redondante (comme les matrices de rotation ou les quaternions).

### 2.2.2.2 Les angles d'Euler

L'orientation est cette fois codée par trois angles. Ils ont l'avantage de constituer une représentation minimale de la rotation et d'être faciles à interpréter en termes de roulis, tangage et lacet. Ils sont très utilisés en aéronautique. Ils présentent cependant un problème de singularité appelé "gimbal-lock", et la transformation en matrice de rotation est très non-linéaire (voir équation (2.11)).



**Figure 2.4** – Codage de l'orientation du véhicule à l'aide des angles d'Euler  $\phi$  (roulis),  $\theta$  (tangage) et  $\psi$  (lacet)

La figure 2.4 présente le passage du repère inertiel au repère B à l'aide des angles d'Euler. Il existe plusieurs conventions pour la représentation de l'attitude par les angles d'Euler, qu'il est important de définir dans un premier temps. Nous utilisons ici et dans l'ensemble de cette étude la convention "Tait-Bryan", la plus couramment utilisée en aéronautique : l'intérêt étant que l'aéronef est à l'horizontale pour des angles nuls. La séquence de rotations pour passer du référentiel inertiel au repère du véhicule est la suivante : rotation d'un angle  $\psi$  (lacet) autour de l'axe  $z^{\text{I}}$ , rotation d'un angle  $\theta$  (tangage) autour d'un axe intermédiaire  $y^{\text{I}}$ , rotation d'un angle  $\phi$  (roulis) autour de l'axe  $x^{\text{B}}$ . Cette séquence est également notée "(Z-Y'-X'") ou simplement ZYX. On notera que les angles  $\psi$  et  $\phi$  varient dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  radians, et l'angle  $\theta$  varie dans  $[0, \pi]$ . Ainsi, en composant les rotations, on peut construire la matrice de passage  $\mathbf{T}^{\text{BI}}$  du repère inertiel au repère du véhicule :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\text{BI}}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) = \mathbf{T}^{\text{B2}}(\phi) \mathbf{T}^{\text{21}}(\theta) \mathbf{T}^{\text{1I}}(\psi) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

où  $s_\alpha$  et  $c_\alpha$  sont des notations simplifiées pour  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$ , respectivement. On en déduit la matrice de passage du repère B au repère I, appelée également DCM pour “Direction Cosine Matrix”, en calculant la matrice transposée :

$$\mathbf{T}^{\text{IB}} = [\mathbf{T}^{\text{BI}}]^T = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

**“Gimbal Lock” ou “blocage de Cardan”.** La représentation des rotations à l’aide des angles d’Euler est singulière lorsque l’angle de tangage est à  $\pm\pi/2$ . On obtient alors la matrice de rotation suivante :

$$\mathbf{T}^{\text{IB}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Cette orientation particulière est problématique car la matrice correspondante peut être paramétrée par une infinité de valeurs de  $\phi$  et  $\psi$ . C’est particulièrement problématique dans le cas du GLMAV, où la commande du drone débute lorsqu’il est très proche de cette singularité : à l’apogée de la trajectoire balistique le projectile est proche de l’horizontale. Ce point en particulier motive l’utilisation des quaternions dans le modèle du drone afin d’étendre son domaine de validité.

### 2.2.2.3 Les quaternions

L’algèbre et les fondements mathématiques autour des quaternions rendent leur utilisation beaucoup moins fréquente que les angles d’Euler ou les matrices de rotation pour représenter une rotation dans l’espace. Ils offrent pourtant la dimension la plus faible permettant une représentation globale et non singulière dans  $\text{SO}(3)$ , et la composition des rotations est simple à calculer (par le produit de quaternions, de la même manière que pour les matrices de rotation). Les valeurs numériques sont cependant difficiles à interpréter, et on utilise en général la transformation vers les angles d’Euler pour cela (voir l’équation (2.23)).

Ils sont conceptuellement similaires à la représentation axe-angle pour laquelle l’orientation est codée par un vecteur unitaire (trois composantes) et par un angle de rotation autour de ce vecteur. Cette dernière présente cependant un problème de conditionnement pour les petits angles qui mène à des problèmes numériques, que n’ont pas les quaternions (Mahony et Hamel, 2012).

Il est nécessaire d’introduire dans un premier temps les opérations fondamentales sur les quaternions.

**Opérations sur les quaternions.** Un quaternion  $\mathbf{q}$  est un nombre hypercomplexe<sup>9</sup> (il s’agit d’une généralisation des nombres complexes) constitué de quatre composantes  $q_0$  à  $q_3$  dans  $\mathbb{R}$ , noté :

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (2.13)$$

9. Au sens mathématique du terme, heureusement...

Les vecteurs  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  forment une base orthonormée<sup>10</sup>. On peut également noter  $\mathbf{q}$  comme l'association d'une partie scalaire ou réelle  $q_0 \in \mathbb{R}$  et d'une partie vectorielle "complexe"  $\bar{\mathbf{q}} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ . On note alors :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (2.14)$$

L'ensemble des quaternions est noté  $\mathbb{H}$ .

L'opération principale dans l'algèbre des quaternions est le produit de quaternions, qui permet notamment une composition des rotations dans le cas des quaternions unitaires. Soient deux quaternions  $\mathbf{q} = [q_0, \bar{\mathbf{q}}]$  et  $\mathbf{r} = [r_0, \bar{\mathbf{r}}]$  dans  $\mathbb{H}$ , leur produit (non commutatif) est défini par (Brescianini *et al.*, 2013) :

$$\mathbf{qr} = \begin{bmatrix} q_0 r_0 - \bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{r}} \\ q_0 \bar{\mathbf{r}} + r_0 \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}} \wedge \bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = Q(\mathbf{q})\mathbf{r} \quad (2.15)$$

La matrice  $Q(\mathbf{q})$  permet de transformer le produit de quaternion en produit d'une matrice par un vecteur. Elle est définie par :

$$Q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

On définit également le conjugué du quaternion :

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

La norme, issue du produit scalaire Euclidien classique de  $\mathbb{R}^4$ , est une application de l'ensemble  $\mathbb{H}$  à l'ensemble  $\mathbb{R}$  :

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (2.18)$$

Pour  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ , il existe un quaternion inverse<sup>11</sup>  $\mathbf{q}^{-1} \in \mathbb{H}$  tel que  $\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = [1, 0, 0, 0]^T$ , défini par :

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (2.19)$$

**Le quaternion unité et les rotations dans l'espace.** L'ensemble  $\mathbb{H}_1$  des quaternions unité<sup>12</sup>, définis par  $\|\mathbf{q}\| = 1$ , nous intéresse particulièrement dans le cas de la représentation d'attitude. En effet, tout quaternion unité  $\mathbf{q} = [q_0, \bar{\mathbf{q}}]^T \in \mathbb{H}_1$  peut être écrit sous la forme  $\mathbf{q} = [\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2}]^T$ , avec  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$  et  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$ . Il représente alors une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe unitaire  $\mathbf{u}$ .

Formulé différemment, toute rotation en trois dimensions d'un angle  $\alpha$  autour d'un axe unitaire  $\mathbf{u}$  peut être codée par le quaternion unitaire :  $\mathbf{q} = [\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2}]^T$ . Ainsi, l'image  $\mathbf{v}_2$  d'un vecteur  $\mathbf{v}_1$  (dans  $\mathbb{R}^3$ ) par une rotation représentée par  $\mathbf{q}$  est obtenue par le produit de quaternions suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \mathbf{q}^* \quad (2.20)$$

les vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  étant mis sous la forme de quaternions purs, ou imaginaires purs, c'est-à-dire à partie réelle nulle. Le produit d'un vecteur et d'un quaternion devient alors le produit de deux

10. On a les équations fondamentales suivantes, établies par Hamilton en 1843 :  $i^2 = j^2 = k^2 = \mathbf{ijk} = -1$ . Toutes les propriétés algébriques des quaternions découlent de ces équations (Lam, 2004).

11. L'ensemble des quaternions  $\mathbb{H}$  muni de l'addition et de la multiplication définit un anneau non-commutatif. Cela signifie notamment que tous les quaternions non nuls ont un inverse et que le produit des quaternions n'est pas commutatif.

12. On notera que le produit de deux quaternions unité est un quaternion unité, et que pour  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ , on a  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$ .



quaternions.

Un quaternion unitaire est donc entièrement défini par les trois paramètres de sa composante vectorielle, puisqu'il vérifie la contrainte  $q_0 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}$ . D'autre part, il est important de noter que les quaternions  $\mathbf{q}$  et  $-\mathbf{q}$  représentent tous deux la même rotation.

**Conversion entre le quaternion d'orientation et les autres représentations de l'attitude.** Par la suite, on notera  $\mathbf{q}$  le quaternion unitaire représentant la rotation du repère B au repère I. On peut retrouver la matrice de passage  $\mathbf{T}^{\text{IB}}$  à l'aide de  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{T}^{\text{IB}} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Le passage des angles d'Euler définis par la séquence "ZYX" au quaternion est donné par l'équation ci-dessous (Brescianini *et al.*, 2013) :

$$\mathbf{q}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{q}_\psi \mathbf{q}_\theta \mathbf{q}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La conversion entre le quaternion et les angles d'Euler utilise le calcul intermédiaire des composantes de  $\mathbf{T}^{\text{BI}}$  (voir équation (2.21)) et est donnée par :

$$\begin{cases} \phi = \arctan2(r_{23}, r_{33}) \\ \theta = -\arcsin(r_{13}) \\ \psi = \arctan2(r_{12}, r_{11}) \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} r_{12} = 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \\ r_{11} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ r_{13} = 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ r_{23} = 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ r_{33} = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Les différentes équations de passages entre les représentations d'attitude sont détaillées par Diebel (2006).

## 2.2.3 Modélisation cinématique des rotations et des translations

Nous établissons dans la suite les équations modélisant la cinématique du véhicule en utilisant les angles d'Euler d'une part, et les quaternions d'autre part, ce qui permettra de s'affranchir des singularités et d'étendre le domaine de validité du modèle. Le paramétrage de l'orientation à l'aide des angles d'Euler est classiquement utilisé dans le cadre des véhicules aériens, c'est pourquoi il sera présenté en premier lieu. Enfin, nous verrons dans le chapitre 4 que l'utilisation des quaternions lors de la synthèse de lois de commande permet d'obtenir des correcteurs offrant des avantages considérables notamment en termes de stabilité globale.

### 2.2.3.1 Équation cinématique de rotation

L'équation cinématique de rotation d'un véhicule est la relation liant la dérivée temporelle de son orientation et sa vitesse angulaire exprimée dans le repère B. L'obtention des équations présentées dans cette partie est donnée avec plus de détails par Zipfel (2007, chap. 4).

**Utilisation des angles d'Euler.** Par l'utilisation des angles d'Euler, on obtient trois équations différentielles non-linéaires :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_\eta \boldsymbol{\omega}^{\text{B}} \quad (2.24)$$

avec :

$$\mathbf{Q}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

La singularité pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  est flagrante dans l'expression de la matrice  $\mathbf{Q}_\eta$ .

Pour des petits angles  $\theta$  et  $\phi$ , la matrice  $\mathbf{Q}_\eta$  peut être approximée par la matrice identité, c'est à dire que  $\dot{\boldsymbol{\eta}} \approx \boldsymbol{\omega}^B$ .

**Utilisation des quaternions.** L'expression de la dérivée temporelle du quaternion d'orientation est rendue particulièrement simple grâce à la définition du produit de quaternions. On peut également l'exprimer comme produit d'une matrice et d'un vecteur (l'expression est issue de l'équation (2.16)) :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{q} \quad (2.26)$$

avec  $\boldsymbol{q}$  le quaternion représentant l'orientation de B par rapport à I, et  $[0, \boldsymbol{\omega}^B]^T$  étant le quaternion pur formé à partir de la vitesse de rotation de B par rapport à I, avec  $\boldsymbol{\omega}^B = [p, q, r]^T$ .

On obtient dans ce cas quatre équations différentielles linéaires, ce qui présente un avantage par rapport à la non-linéarité des équations (2.24) et (2.25) obtenues avec les angles d'Euler.

Lors de la simulation, il est important de maintenir la norme unité lors de l'évolution du quaternion, et ce en dépit des erreurs d'arrondi. Dans l'implémentation, la méthode classiquement utilisée est d'ajouter une correction égale à :  $k\epsilon \boldsymbol{q}$ , avec  $\epsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$  et  $k$  tel que  $k\Delta t \leq 1$  ( $\Delta t$  la période d'intégration)<sup>13</sup>. Pour la simulation, l'équation (2.26) devient donc :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix} + k\epsilon \boldsymbol{q} \quad (2.27)$$

### 2.2.3.2 Équation cinématique de navigation

L'équation de navigation est l'équation cinématique liant la vitesse linéaire  $\boldsymbol{v}^I$  du véhicule exprimée dans le repère inertiel et sa vitesse  $\boldsymbol{v}^B$  exprimée dans le repère du véhicule. On peut l'exprimer à l'aide de la matrice de rotation  $\mathbf{T}^{IB}$  formée avec les angles d'Euler (équation (2.11)) ou le quaternion d'orientation (équation (2.21)) :

$$\boldsymbol{v}^I = \mathbf{T}^{IB} \boldsymbol{v}^B \quad (2.28)$$

ou directement par l'utilisation du produit des quaternions (équation (2.20)) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v}^I \end{bmatrix} = \boldsymbol{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v}^B \end{bmatrix} \boldsymbol{q}^* \quad (2.29)$$

### 2.2.4 Modèle à six degrés de liberté du corps rigide dans l'espace

On fait en général les hypothèses suivantes lors de la modélisation des mouvements d'un aéronef (Klein et Morelli, 2006) :

1. L'aéronef est un corps rigide avec une masse et une distribution des masses constante. On néglige donc les déformations structurelles et les mouvements relatifs des surfaces de commande. Les drones miniatures sont en général très rigides pour leur taille, et cette hypothèse est raisonnable.

<sup>13</sup>. Le choix  $k = 1$  est courant. Cela n'a d'influence que dans le cas où le quaternion devient non-unitaire, et donc  $\epsilon \neq 0$ .

2. La terre est fixe dans le repère inertiel (c'est-à-dire que les axes choisis pour le repère I constituent un repère inertiel) et sa courbure est négligeable (surface considérée plane).
3. La gravité est uniforme.
4. L'air est au repos par rapport à la terre (et donc par rapport au repère I). L'action du vent sera ajoutée ultérieurement au modèle sous la forme de forces de perturbation.

### 2.2.4.1 Équations dynamiques

Sous ces hypothèses, on peut appliquer la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) : dans un repère inertiel, l'accélération du centre de gravité d'un corps rigide est proportionnelle à la somme des forces  $\mathbf{F}$  qui lui sont appliquées. De la même manière, le moment  $\mathbf{\Gamma}$  de la force appliquée au véhicule peut être exprimé en fonction de sa vitesse angulaire. Ainsi, dans le référentiel inertiel I, on peut écrire :

$$\mathbf{F}^I = m\dot{\mathbf{v}}^I \quad (2.30)$$

$$\mathbf{\Gamma}^I = \mathbf{I}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}^I \quad (2.31)$$

avec  $m$  la masse du véhicule et  $\mathbf{I}$  sa matrice d'inertie, exprimée ici dans le repère inertiel et donc variable. La plupart des mesures à bord de l'aéronef sont effectuées dans le repère lié au véhicule, et il est plus intéressant d'exprimer les équations (2.30) et (2.31) dans le repère B, auquel cas la matrice  $\mathbf{I}$  est fixe :

$$\mathbf{F}^B = m\dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \wedge (m\mathbf{v}^B) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{\Gamma}^B = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \wedge (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \quad (2.33)$$

Les composantes dans le repère B de la force résultante appliquée au véhicule sont notées :  $\mathbf{F}^B = (F_X, F_Y, F_Z)$ . Les composantes du moment résultant sont notées :  $\mathbf{\Gamma}^B = (L, M, N)$ . Les équations dynamiques dépendent des paramètres cinétiques : la masse  $m$  et la matrice d'inertie  $\mathbf{I}$ . La matrice d'inertie est exprimée comme suit, dans le repère du véhicule et au centre de gravité :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Si le véhicule considéré est symétrique par rapport au plan  $(G, x^B, z^B)$ , la matrice  $\mathbf{I}$  est symétrique, et  $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ . Dans notre cas, l'hélicoptère coaxial est de plus axisymétrique suivant  $z^B$ , et la matrice d'inertie peut être réduite à sa diagonale :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

On a de plus, du fait de cette symétrie :  $I_{xx} \approx I_{yy}$ .

### 2.2.4.2 Action de la gravité

La gravité agit suivant l'axe  $z^I$ , dirigé vers le bas, et génère une force  $\mathbf{F}_g$  proportionnelle à la masse  $m$  du véhicule. Les composantes dans le repère engin dépendent de son orientation et peuvent être obtenues grâce à la matrice de changement de repère  $\mathbf{T}^{BI}$ . En utilisant les angles

d'Euler (équation (2.10)), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_g^B &= \mathbf{T}^{BI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \\ &= mg \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

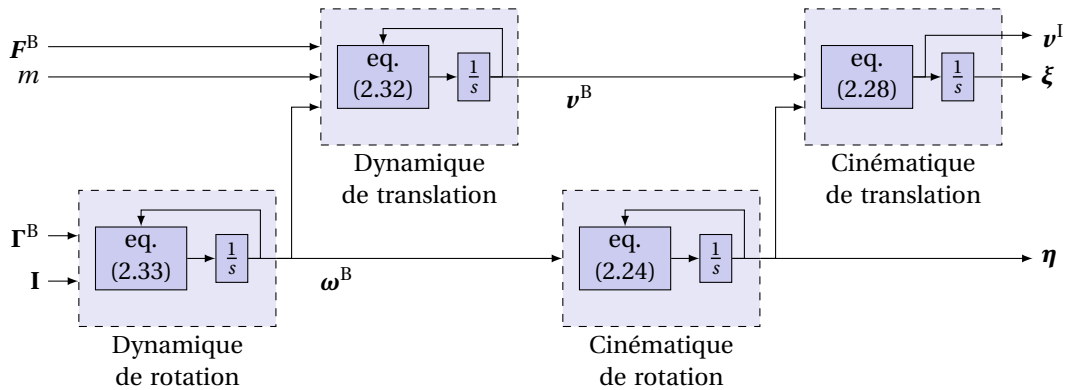
En utilisant les quaternions pour représenter l'attitude, on obtient une expression qui n'utilise pas de fonctions trigonométriques (voir l'équation (2.21)) :

$$\mathbf{F}_g^B = mg \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La force est appliquée au centre de gravité du véhicule, et ne produit donc aucun moment.

### 2.2.5 Synthèse des équations dynamiques et cinématiques

La figure 2.5 présente le schéma de principe d'une simulation du mouvement du véhicule dans l'espace. Les entrées sont les forces  $\mathbf{F}$  et les moments  $\mathbf{\Gamma}$  agissant sur le véhicule. Le modèle dépend uniquement de la masse  $m$  et de l'inertie  $\mathbf{I}$ .



**Figure 2.5** – Schéma de principe de la simulation des équations de mouvement d'un corps rigide. Dans le cas de l'utilisation des quaternions, on peut utiliser les équations (2.26) et (2.29) au lieu des équations (2.24) et (2.28).

On peut ainsi décomposer les équations du modèle en deux sous-systèmes, l'un modélisant la dynamique de translation,  $\Sigma_T$ , et l'autre la dynamique de rotation,  $\Sigma_R$  :

Équations de mouvement d'un corps rigide :

$$\Sigma_T : \begin{cases} \mathbf{v}^I = \dot{\boldsymbol{\xi}}^I = \mathbf{T}^{IB} \mathbf{v}^B \\ \dot{\mathbf{v}}^B = \frac{\mathbf{F}^B}{m} - \boldsymbol{\omega}^B \wedge \mathbf{v}^B \end{cases} \quad \Sigma_R : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\omega}^B \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} [0, \boldsymbol{\omega}^B]^T \\ \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}^B = \boldsymbol{\Gamma}^B - \boldsymbol{\omega}^B \wedge (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^B) \end{cases} \quad (2.38)$$

On remarquera que le sous-système  $\Sigma_R$  ne dépend pas des sorties de  $\Sigma_T$ , et on pourra donc dans un premier temps se limiter à l'étude de  $\Sigma_R$  indépendamment de  $\Sigma_T$ .

La force  $\mathbf{F}$  est constituée de l'action de la gravité  $\mathbf{F}_g$  et des forces aérodynamiques, spécifiques au véhicule, qui sont décrites par la suite à la section 2.3 :

$$\mathbf{F}^B = \mathbf{F}_{aero}^B + \mathbf{F}_g^B \quad (2.39)$$

**Représentation d'état.** On peut développer le système d'équations (2.38) pour obtenir une représentation d'état, appelée également modèle quasi- ou pseudo-LPV car les matrices dépendent non seulement des paramètres, mais également des états du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}^I = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ \dot{v}^B = - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & t_\theta c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ \dot{\omega}^B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_{yy}}{I_{xx}} r & -\frac{I_{zz}}{I_{xx}} q \\ -\frac{I_{xx}}{I_{yy}} r & 0 & \frac{I_{zz}}{I_{yy}} p \\ \frac{I_{xx}}{I_{zz}} q & -\frac{I_{yy}}{I_{zz}} p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Par l'utilisation des quaternions, on obtient l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}^I = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ \dot{v}^B = - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ \dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q0 \\ q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix} \\ \dot{\omega}^B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_{yy}}{I_{xx}} r & -\frac{I_{zz}}{I_{xx}} q \\ -\frac{I_{xx}}{I_{yy}} r & 0 & \frac{I_{zz}}{I_{yy}} p \\ \frac{I_{xx}}{I_{zz}} q & -\frac{I_{yy}}{I_{zz}} p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

## 2.3 Modélisation aérodynamique

Les équations de mouvement décrites en section 2.2.4 expliquent les mouvements d'un corps rigide soumis à une force  $F$  et un moment  $\Gamma$ . Ces équations sont génériques et permettent de décrire les mouvements de n'importe quel aéronef (avion, hélicoptère, projectile...), sous les hypothèses mentionnées. Il convient à présent de décrire les forces et moments, spécifiques au véhicule, agissant sur celui-ci lors de son évolution dans l'espace. Ces efforts sont dus à des effets aérodynamiques d'une part, et à l'action de la gravité d'autre part (décrite en section 2.2.4.2). La précision de la modélisation des forces et des moments agissant sur le véhicule permet de jouer sur le compromis entre précision et complexité du modèle (voir l'introduction du chapitre en section 2.1).

### 2.3.1 Introduction à la modélisation aérodynamique

La modélisation du comportement aérodynamique d'un hélicoptère est un sujet de très grande ampleur, faisant l'objet d'une littérature importante et constituant un domaine à part entière (Coleman *et al.*, 1997; Kim et Brown, 2008; Leishman, 2006; Padfield, 2008). De manière générale, elle

est basée sur la dynamique des fluides sous la forme d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires (typiquement les équations de Navier-Stokes ou d'Euler), qui n'ont pas de solution analytique dans le cas général. En mécanique des fluides, elles sont résolues numériquement à l'aide d'outils de CFD ("Computational Fluid Dynamics", ou mécanique des fluides numérique) en discrétisant le domaine de calcul (maillage). De telles études ont été menées pour un hélicoptère coaxial par Gnemmi *et al.* (2011), et également dans le cas du GLMAV (Gnemmi *et al.*, 2012). Ces simulations donnent un aperçu très précis des écoulements autour du drone pour un point de fonctionnement particulier. Elles sont utilisées en général pour la conception ou l'optimisation de la structure du véhicule, ou pour estimer un ordre de grandeur de différents efforts. Gnemmi *et al.* (2012) prédisent par exemple la poussée générée par le bi-rotor en descente axiale rapide. De tels modèles ne sont pas adaptés au domaine de l'automatique, et les forces et moments sont ici approximés par une représentation polynomiale basée sur un ensemble de coefficients aérodynamiques considérés constants autour d'un point de fonctionnement donné. C'est l'approche classique utilisée par la plupart des auteurs qui considèrent un modèle aérodynamique d'un objet volant en vue de sa commande (par exemple Hurzeler (2013); Koehl *et al.* (2010a) pour un hélicoptère coaxial, Bérard *et al.* (2012) pour un avion, Strub *et al.* (2015) pour un projectile guidé, Cimen (2017) pour les missiles). Des logiciels empiriques ou semi-empiriques (Missile Datcom, Prodas) permettent d'obtenir rapidement une approximation des coefficients en se basant sur la géométrie de l'engin.

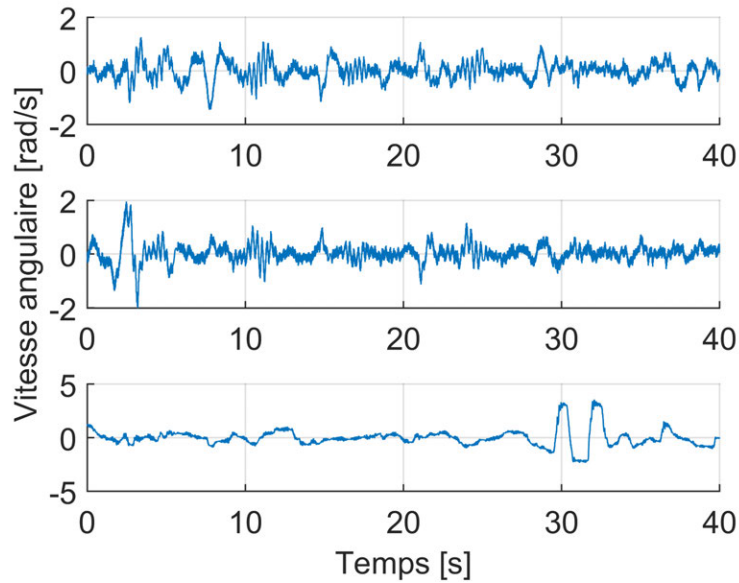
Dans ce cadre, plusieurs niveaux de modélisation peuvent être envisagés. Dans un premier temps, nous établissons un modèle non-linéaire permettant de simuler le comportement du drone sur une bande de fréquences plus ou moins large selon les phénomènes pris en compte dans le modèle aérodynamique (voir l'introduction du chapitre en section 2.1). Ce modèle appelé "simulateur" permet tout d'abord d'étudier la dynamique de vol et d'acquérir une meilleure compréhension des phénomènes en jeu. Il permet également la validation de lois de commandes avant l'implémentation et les tests en conditions réelles sur la maquette. Les lois de commandes, quant à elles, sont synthétisées grâce à une version simplifiée du modèle, présentée dans un second temps, qui capture uniquement les dynamiques importantes pour la commande. Cette version peut être obtenue par linéarisation du modèle de simulation pour les méthodes de synthèse classiques, ou il peut s'agir d'une version non-linéaire simplifiée pour les méthodes de commande non-linéaires.

### 2.3.2 Analyse préalable d'un relevé en vol

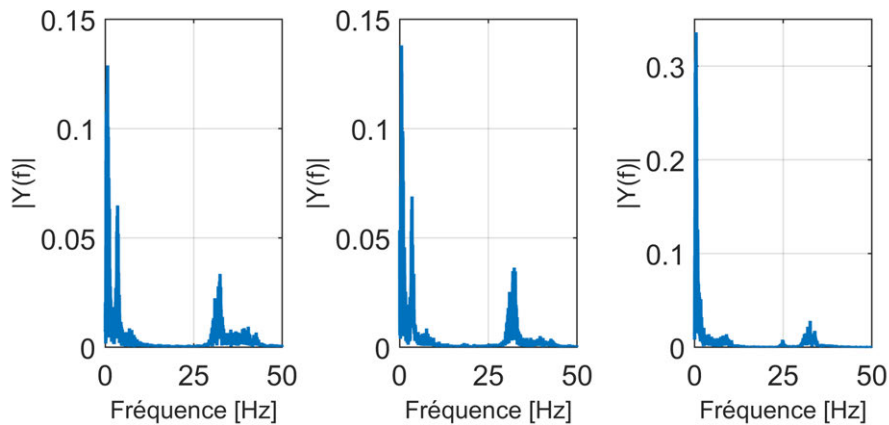
Avant de pouvoir modéliser correctement un système, il est évidemment important d'en avoir une bonne compréhension, mais également de définir un domaine de validité du modèle, selon l'application visée. Pour cela, nous proposons d'étudier tout d'abord le contenu fréquentiel des vitesses angulaires de l'hélicoptère lors d'un vol, qui permet de mettre en évidence certains phénomènes importants. Elles sont tracées en figure 2.6 en fonction du temps. L'analyse fréquentielle associée est donnée en figure 2.7. Ces signaux représentent les mesures obtenues durant un vol proche du vol stationnaire, en intérieur, dans un espace réduit. Les vitesses angulaires sont mesurées grâce aux gyromètres embarqués.

On note sur la figure 2.7 deux bandes de fréquences ayant un contenu remarquable : la première bande entre 0 et 10 Hz, et la seconde à plus hautes fréquences, entre 25 et 45 Hz. En sachant que la vitesse de rotation de chaque rotor lors d'un vol stationnaire est d'environ 2050 tr/min, soit environ 34 Hz, on peut en conclure que la seconde bande de fréquence est due à des effets au niveau des rotors : aux vibrations parasites (décentrages ou balourds sur les pales, notamment), d'une part, et aux mouvements des pales sur un tour du rotor, d'autre part. La figure 2.8 donne un meilleur aperçu de la bande de fréquence 0 – 10 Hz. On remarque un premier pic autour de 0.5 Hz, et un second pic d'amplitude moins importante autour de 3.5 Hz, présent sur les axes  $p$  et  $q$  uniquement.

Dans la suite de cette section nous exprimons tout d'abord les efforts aérodynamiques majeurs permettant d'obtenir une modélisation satisfaisante sur une bande passante d'environ 15



**Figure 2.6** – Vitesses angulaires  $p$ ,  $q$  et  $r$  suivant les trois axes liés au véhicule, lors d'un vol typique.



**Figure 2.7** – Transformée de Fourier rapide sur les vitesses angulaires  $p$ ,  $q$  et  $r$ .

rad/s, soit jusqu'à 2.5 Hz (partie 2.3). Dans un second temps, nous analysons les mouvements complexes du bi-rotor et en particulier le mouvement de battement des pales, résonnant à la fréquence de rotation des pales et donc responsable en grande partie des effets à plus haute fréquence (partie 2.3.7). Les interactions (couplages) entre la dynamique du corps rigide et la dynamique de battement des pales sont responsables du pic fréquentiel à environ 3.5 Hz sur les axes  $p$  et  $q$ . Le mouvement de battement est particulièrement important dans l'étude des hélicoptères (par rapport à d'autres véhicules à voilure tournante comme les quadricoptères) et peut provoquer des problèmes de stabilité. En fin de chapitre, nous obtenons alors un simulateur valide sur une bande de fréquences beaucoup plus étendue.

### 2.3.3 Présentation des principaux efforts aérodynamiques

La figure 2.9 décrit l'agencement du modèle aérodynamique avec les équations de mouvement. Les efforts considérés sont dus au rotor supérieur, au rotor inférieur, et aux interactions entre l'air et le corps du véhicule. Ainsi, la somme des forces aérodynamiques  $F_{aero}$  et des moments  $\Gamma_{aero}$  appliqués au véhicule peuvent être décomposés en une somme de plusieurs contri-

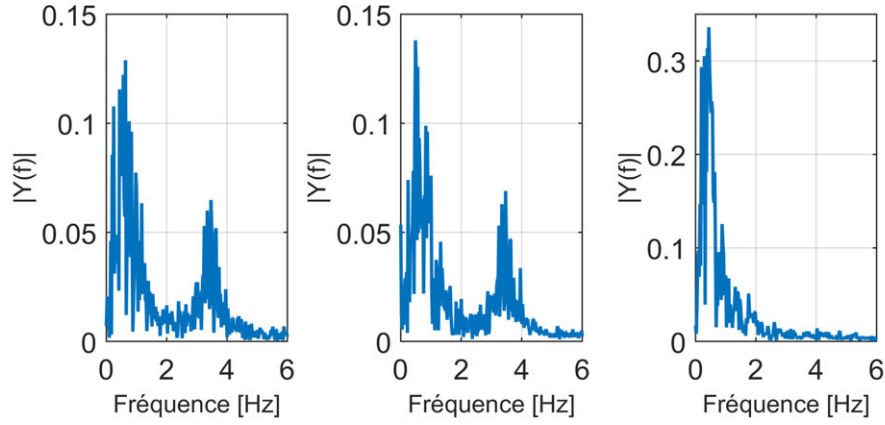


Figure 2.8 – Transformée de Fourier rapide sur les vitesses angulaires, entre 0 et 6 Hz.

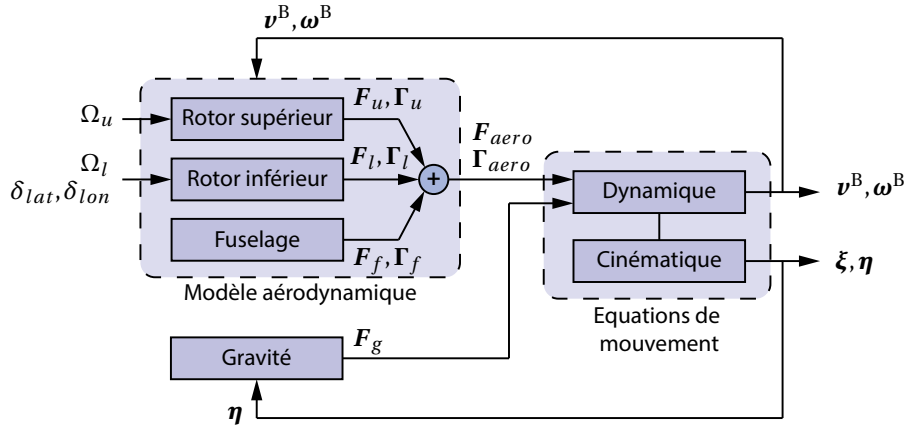


Figure 2.9 – Diagramme du modèle aérodynamique et des équations de mouvement. Les forces et moments aérodynamiques sont générés par le rotor supérieur, le rotor inférieur, et le fuselage.

butions, décrites séparément par la suite :

$$F_{aero}^B = F_u^B + F_l^B + F_f^B \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{aero}^B = \Gamma_u^B + \Gamma_l^B + \Gamma_f^B \quad (2.43)$$

avec :

- $F_u^B$  et  $\Gamma_u^B$  la force et le moment générés par le rotor supérieur (indice  $u$  pour “upper”);
- $F_l^B$  et  $\Gamma_l^B$  par le rotor inférieur ( $l$  pour “lower”);
- $F_f^B$  et  $\Gamma_f^B$  dus aux frottements de l’air sur le corps du véhicule, décrits dans un second temps en section 2.3.6.

A ces efforts s’ajoute le moment à plus haute fréquence  $\Gamma_\beta^B$  transmis par les pales et dû à leur mouvement de battement (décrit dans un troisième temps en section 2.3.7).

### 2.3.4 Principe de fonctionnement de l’hélicoptère

L’hélicoptère comporte un rotor principal et un rotor de queue (ou deux rotors superposés dans le cas d’un hélicoptère coaxial) qui lui permettent à la fois de se mouvoir et de contrôler son attitude dans les trois dimensions de l’espace. Les phénomènes et mécanismes à l’œuvre lors de son vol sont brièvement expliqués dans cette partie. L’aspect aérodynamique des hélicoptères fait l’objet d’études conséquentes (Coleman *et al.*, 1997; Kim et Brown, 2008; Leishman, 2006; Seddon et Newman, 2011) sur lesquelles nous nous appuyons tout en faisant les simplifications nécessaires à la construction d’un modèle dimensionné pour les études d’identification (chapitre 3) et de commande (chapitre 4).



### 2.3.4.1 Définition de repères de référence supplémentaires pour l'étude du double rotor

Pour la modélisation aérodynamique du drone, nous nous concentrons tout d'abord sur l'ensemble rotor de l'hélicoptère constitué du double rotor piloté par les deux moteurs et du plateau cyclique piloté par les deux servomoteurs. Il est présenté en figure 2.10. Le plateau cyclique agit sur le rotor inférieur uniquement, et permet d'orienter sa force de poussée.

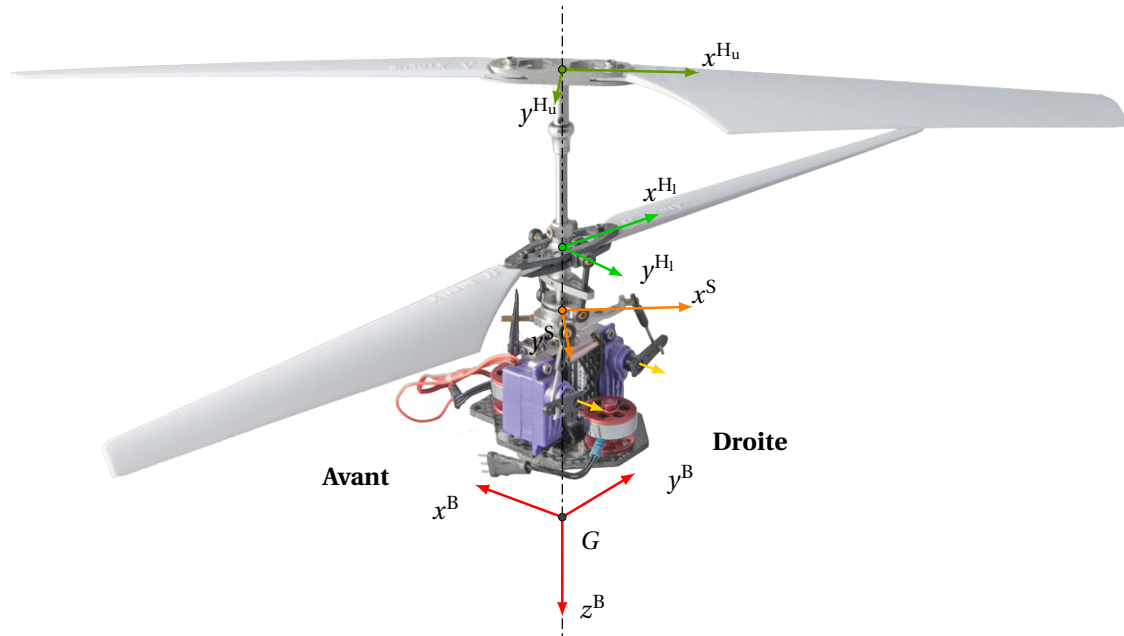


Figure 2.10 – Définition des axes de référence sur l'ensemble rotor

Les axes des principaux repères utiles par la suite sont les suivants :

- Les repères  $H_u$  et  $H_l$ , respectivement attachés à une pale du rotor supérieur et du rotor inférieur, tourné d'un angle  $\xi_{u,l}$  autour de  $z^B$  (angle d'azimuth de la pale), et décalé de  $d_{u,l}$  suivant  $-z^B$ .
- Le repère S, tourné de  $\frac{3\pi}{4}$  autour de  $z^B$  de sorte qu'il est aligné avec les deux bras du plateau cyclique. On a :  $\mathbf{T}^{SB} = \mathbf{R}_z(\frac{3\pi}{4})$  (voir note <sup>14</sup>).

### 2.3.4.2 Articulation des pales

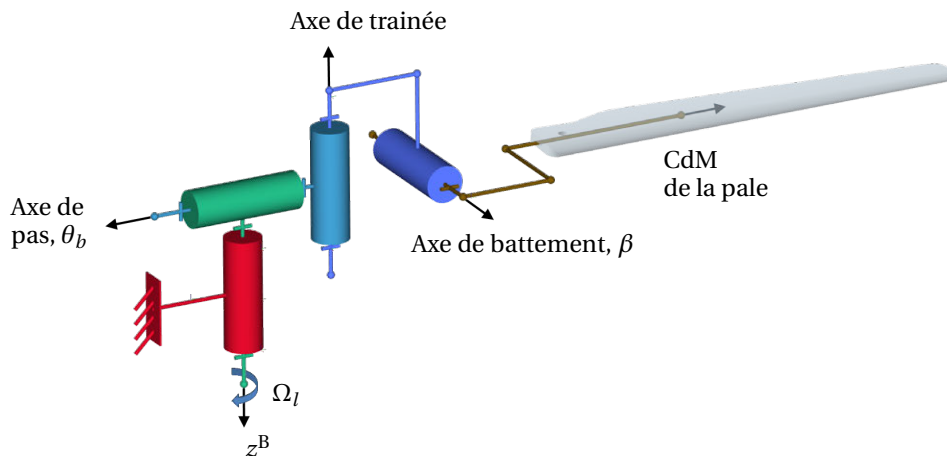
La mécanique du rotor confère à la pale d'un hélicoptère trois degrés de liberté, représentés sur la figure 2.11 :

- L'articulation de pas, permettant une rotation de la pale autour de son axe longitudinal, et commandé par l'intermédiaire du plateau cyclique.
- L'articulation de battement, conférée sur la plupart des modèles réduits par la souplesse de la pale.
- L'articulation de traînée, qui permet de supprimer les contraintes générées par le mouvement des pales autour de l'articulation de battement (forces de Coriolis) et donc de diminuer les vibrations au rotor.

Ces articulations sont primordiales pour comprendre le fonctionnement d'un hélicoptère et le mouvement complexe des pales permettant son vol.

14. Le passage d'un repère 1 à un repère 2 par la rotation d'un angle  $\psi$  autour de  $z$  est défini par la matrice suivante (voir également la section 2.2.2.2) :

$$\mathbf{T}^{21} = \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$



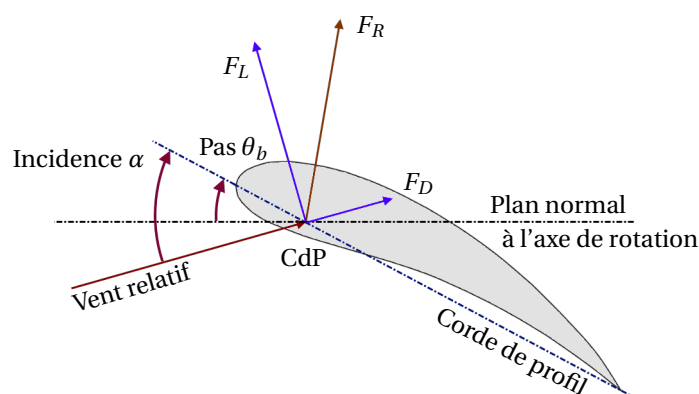
**Figure 2.11** – Schéma cinématique de l'articulation entre l'axe rotor et la pale (ici pour le rotor inférieur, tournant dans le sens horaire).

### 2.3.4.3 Aspects aérodynamiques des pales

Dans cette section sont établies les relations aérodynamiques fondamentales d'une pale en mouvement dans l'air, qui sont un préalable nécessaire au développement d'un modèle aérodynamique de l'hélicoptère.

**Portance et traînée.** Une pale est une surface portante, c'est-à-dire qu'elle est capable de transformer la vitesse relative de l'air en force sustentatrice. En figure 2.12 est présenté le profil d'une pale ainsi que les principales définitions utilisées par la suite, et notamment les deux suivantes :

- La corde de profil : droite reliant le bord d'attaque et le bord de fuite de la pale.
- L'angle d'incidence : angle entre la direction du vent relatif et la corde de profil de la pale.



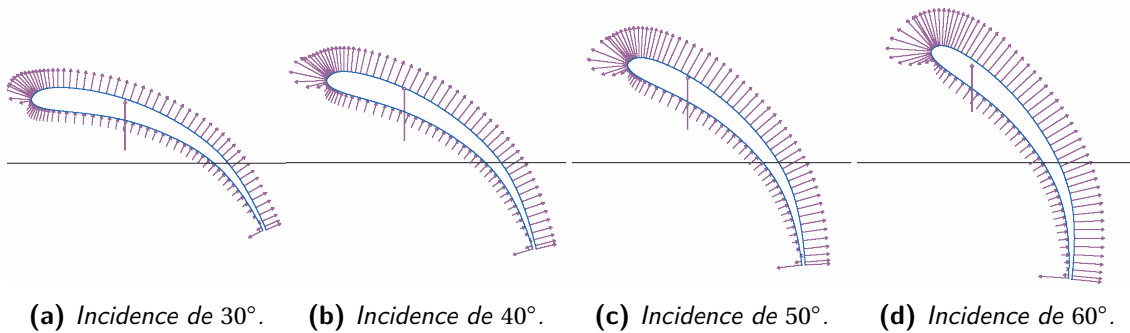
**Figure 2.12** – Profil d'une pale dans le vent (ici une pale creuse) et forces aérodynamiques.

Une pale avançant à une vitesse  $v$  par rapport au vent, sous un angle d'incidence  $\alpha$ , est soumise à des forces aérodynamiques dont la résultante  $F_R$  est appliquée au centre de pression (CdP) de la pale et se décompose en une force de portance  $F_L$  et une force de traînée  $F_D$ . Son expression

est donnée par l'équation suivante<sup>15</sup> :

$$F_R = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_r \quad (2.45)$$

avec  $\rho$  la masse volumique de l'air à l'altitude considérée ( $\rho \approx 1.226 \text{ kg/m}^3$ ),  $S$  une surface de référence (en général la surface de la pale), et  $C_r$  un coefficient aérodynamique. La masse volumique de l'air est fonction de l'altitude, mais est ici considérée constante. La grandeur  $\frac{1}{2} \rho v^2$  est appelée "pression dynamique", notée  $\bar{q}$ . Il s'agit de l'énergie cinétique par unité de volume de la masse d'air en mouvement<sup>15</sup>. En première approximation, le coefficient  $C_r$  est fonction du profil de la pale, de son état de surface et de l'angle d'incidence. Ainsi, pour une pale donnée, nous considérons par la suite que  $C_r$  ne varie qu'en fonction de l'angle d'incidence. La distribution de pression à la surface de la pale pour différents angles d'incidence est donnée en figure 2.13.



**Figure 2.13** – Variation de la distribution de pression sur la pale, pour différents degrés d'incidence

La résultante aérodynamique  $F_R$  peut se décomposer en deux forces : la portance  $F_L$ , perpendiculaire au vent relatif, et la traînée  $F_D$ , parallèle et de même sens que le vent relatif. On peut écrire :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L \\ F_D &= \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \end{aligned} \quad (2.46)$$

Le coefficient  $C_L$  est appelé coefficient de portance et  $C_D$  coefficient de traînée, et dépendent de l'angle d'incidence, au même titre que  $C_r$  précédemment.

**Profil de la pale.** Il existe différentes formes de profils pour les pales, dont les plus courants sont les profils plan convexe, biconvexe symétrique, biconvexe dissymétrique, creux et à double courbure. Le profil creux présente une portance importante même aux faibles incidences (ce qui correspond à un coefficient  $C_L$  grand), mais également une traînée importante ( $C_D$  grand). Ces caractéristiques sont particulièrement intéressantes dans le cas d'un hélicoptère coaxial miniature : d'une part une vitesse de rotation réduite permet d'obtenir une portance importante, et d'autre part c'est la traînée du rotor qui permet le contrôle en lacet de l'hélicoptère (absence de rotor de queue).

15. Au repos, une masse d'air  $m$  possède une énergie qui se manifeste sous forme de pression statique  $P_s$ . Sa mise en mouvement lui procure une énergie cinétique  $W = \frac{1}{2} m v^2$ , pour une masse d'air se déplaçant à une vitesse  $v$ . En notant  $V$  le volume occupé par la masse d'air et  $\rho$  sa masse volumique, l'équation peut s'écrire :  $W = \frac{1}{2} \rho V v^2$ . L'énergie cinétique par unité de volume de la masse d'air en mouvement est appelée pression dynamique  $P_d = \frac{1}{2} \rho v^2$ . En l'absence d'apport extérieur, l'énergie totale de la masse d'air est constante, et donc la pression totale  $P_t = P_s + P_d$  l'est également. Lorsque cette masse d'air rencontre un obstacle, une part de son énergie cinétique est transformée en pression sur l'obstacle et crée une force de résistance proportionnelle à la surface de  $S$  de l'obstacle :  $F_R = P_d S K$ ,  $K$  étant un coefficient tenant compte de la forme et de l'état de surface du corps. La valeur de  $K$  pour un corps profilé sera ainsi inférieure à la valeur pour une plaque perpendiculaire à la vitesse de l'air. Pour une surface portante sous incidence positive, la résistance de l'air crée une force de portance dirigée vers le haut. Son expression est  $F_R = P_d S C_r$ , où  $C_r$  dépend de la forme et de l'état de surface, comme  $K$ , mais également de l'angle d'incidence. On retrouve ainsi l'expression  $F_R = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_r$ . Voir également Raetz (1995).

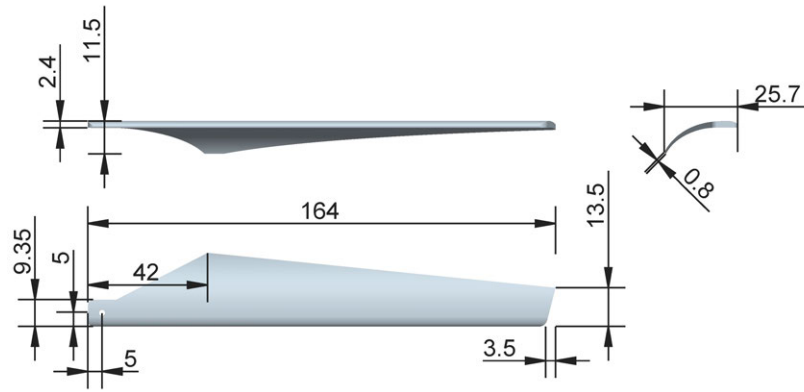


Figure 2.14 – Dimensions de la pale creuse utilisée dans cette étude (en mm).

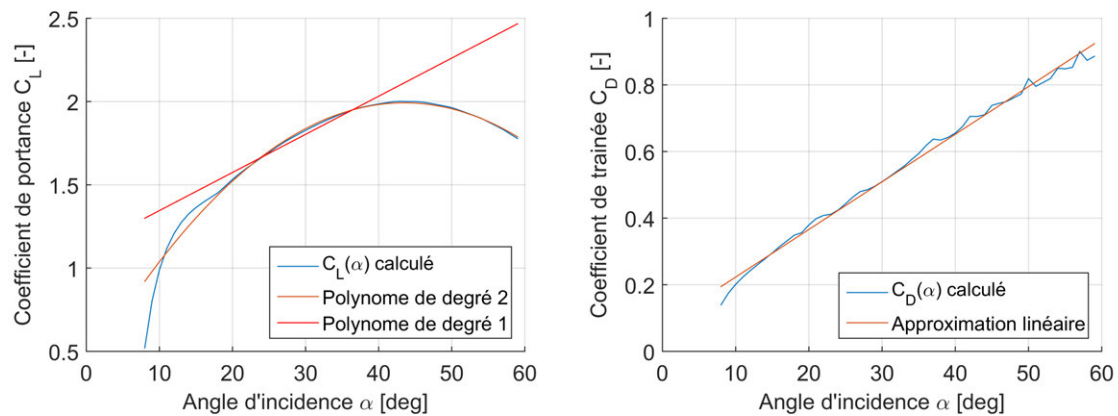


Figure 2.15 – Tracé de la dépendance des coefficients aérodynamiques à l'angle d'incidence ("portance" du profil).

**Calcul des coefficients aérodynamiques.** Les coefficients aérodynamiques  $C_L$  et  $C_D$  sont en général établis expérimentalement en soufflerie, en mesurant les valeurs de portance et de traînée pour différentes incidences de la pale. Ils peuvent également être établis par simulation numérique sur le profil de la pale. En utilisant les dimensions présentées en figure 2.14 sous le logiciel de simulation XFOIL (Drela, 1989), nous pouvons tracer les courbes caractéristiques en figure 2.15.

En général, pour des pales d'hélicoptère standard, le coefficient  $C_L$  peut être approximé par une droite et  $C_D$  par un polynôme d'ordre deux (voir Hurzeler (2013)). L'utilisation de pales creuses et le nombre de Reynolds faible (de l'ordre de 23 000 en fonctionnement normal<sup>16</sup>) donne des caractéristiques différentes dans notre cas. Sachant que l'incidence de la pale varie entre 20 et 40 degrés lors de l'actionnement du plateau cyclique, les coefficients peuvent raisonnablement être approximés par une droite d'équation :

$$\begin{aligned} C_L(\alpha) &= C_{L1}\alpha + C_{L0} \\ C_D(\alpha) &= C_{D1}\alpha + C_{D0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

**Angle de pas de la pale.** L'angle de pas, pour un hélicoptère, est l'angle formé entre la corde de profil et le plan de rotation de la pale<sup>17</sup>. Il est noté  $\theta_b$ , et est considéré ici très proche de l'angle d'incidence  $\alpha$  (la vitesse de rotation est grande devant la vitesse du vent relatif).

Il est courant, dans la littérature, d'introduire un angle de pas "virtuel",  $\theta'_b$ , qui permet uniquement de simplifier l'expression des équations en s'affranchissant de l'angle de pas initial et

16. Estimé en considérant une vitesse de rotation du rotor de 214 rad/s, une corde de profil de 0.02 m et une distance de l'axe à la corde de profil de 0.08 m.

17. A ne pas confondre avec  $\theta$ , l'angle de tangage du véhicule. L'angle de pas est, lui, noté  $\theta_b$  ( $b$  pour *blade*).

d'obtenir  $C_L(0) = 0$  pour  $\theta'_b = 0$ . L'angle virtuel  $\theta'_b$  est défini par l'équation suivante (Hurzeler, 2013) :

$$\theta'_b = \theta_b + \frac{C_{L0}}{C_{L1}} \quad (2.48)$$

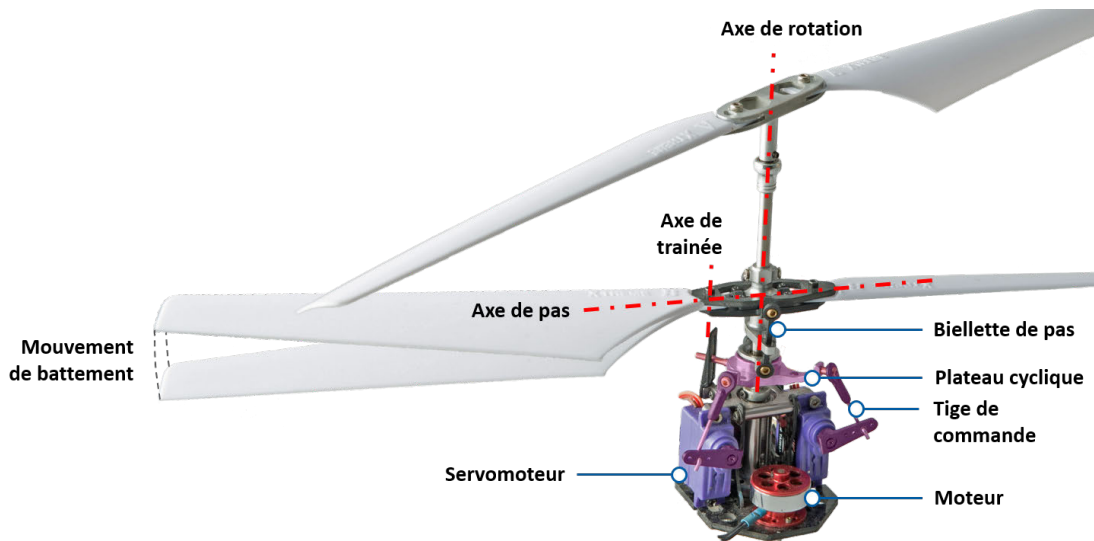
L'angle de pas initial est d'environ  $30^\circ$  dans notre cas (voir la figure 2.13). De cette manière, on peut exprimer la force de portance en fonction de l'angle de pas comme suit :

$$F_L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_{L1} \theta'_b \quad (2.49)$$

Dans la suite de l'étude,  $\theta'_b$  est confondu avec  $\theta_b$  pour simplifier les notations.

#### 2.3.4.4 Mécanisme du plateau cyclique

**Principe.** La principale particularité d'un hélicoptère est la présence d'un mécanisme appelé "plateau cyclique", visible sur la figure 2.16. Son rôle est de transmettre aux pales du rotor les commandes générées par l'ordinateur de bord et transmises par les actionneurs.



**Figure 2.16** – Photo du bi-rotor. Les axes de mouvement des pales sont indiqués. Le plateau cyclique permet de transmettre les commandes au rotor de l'hélicoptère. La partie tournante du plateau cyclique est liée au rotor inférieur et permet d'articuler les deux pales autour de leur axe principal (axe de "pas"). La partie liée aux servomoteurs est teintée en rouge.

Le plateau cyclique permet de faire varier cycliquement l'angle de pas  $\theta_b$  des pales<sup>18</sup> (voir la figure 2.12) : elles sont articulées autour de leur axe principal  $x^{H,u}$ , et l'articulation est liée à l'inclinaison du plateau cyclique. Ainsi, lorsque le plateau cyclique est incliné, le pas des pales varie sur un tour du rotor. Ce mécanisme est appelé variation cyclique du pas, et ce type de plateau cyclique est appelé CPM pour "Cyclic Pitch Mixing". Or le coefficient aérodynamique de portance de la pale varie en fonction de l'incidence de la pale, qui elle-même varie en fonction de son pas. Ainsi une augmentation du pas provoque une augmentation de la portance de la pale. L'inclinaison du plateau cyclique provoque donc une dissymétrie de la portance sur le disque rotor<sup>19</sup> et permet donc de diriger latéralement le véhicule. En effet, la portance du rotor est la résultante de la portance des pales sur un tour du rotor.

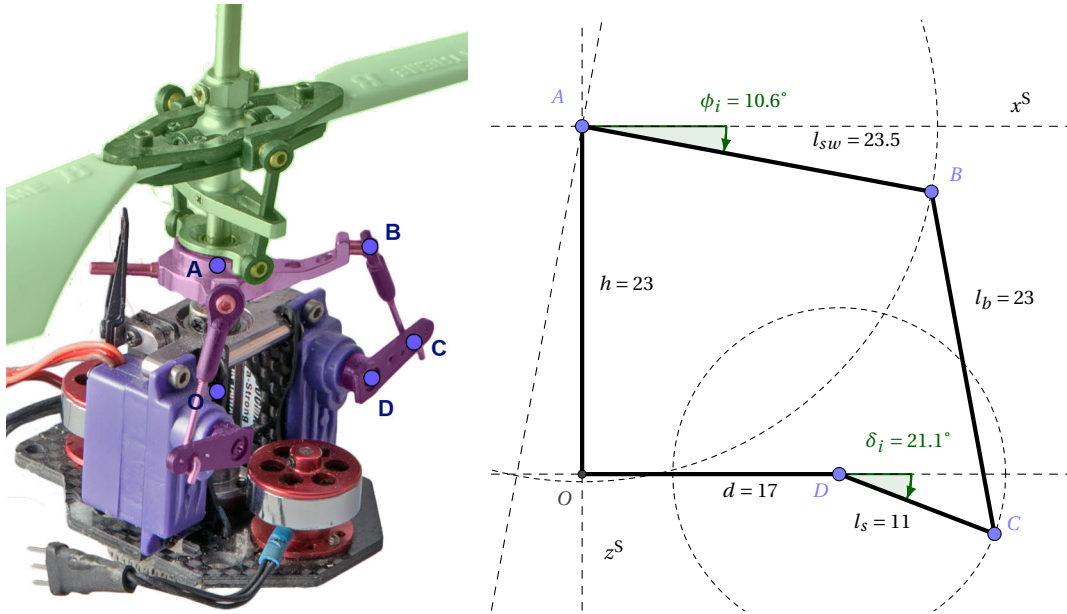
Certains hélicoptères disposent également d'un mécanisme de variation collective du pas (appelé CCPM pour "Collective and Cyclic Pitch Mixing"), grâce à l'ajout d'un troisième servomoteur, qui n'est pas présent ici. Le pas collectif permet alors d'augmenter la portance sur l'en-

18. L'angle de pas est défini comme l'angle que fait la corde de profil de la pale avec le plan de référence perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor.

19. On appelle "disque rotor" le plan décrit par la rotation des pales.

semble du disque rotor<sup>20</sup>. Dans notre cas, c'est l'augmentation de la vitesse de rotation du moteur qui permet cette augmentation de portance "collective".

**Modélisation cinématique du plateau cyclique.** Il importe dans un premier temps de modéliser la relation entre l'angle du bras du servomoteur et l'angle du plateau cyclique. La figure 2.17 présente une vue rapprochée sur le plateau cyclique ainsi que la géométrie liant l'angle du plateau cyclique  $\phi_i$  avec l'angle du bras du servomoteur  $\delta_i$ , avec  $i = \{lat, lon\}$ .



**Figure 2.17** – Vue détaillée du plateau cyclique, et modélisation cinématique. La partie tournante du plateau cyclique est teintée en vert, la partie modélisée est teintée en rouge. Les points  $B$  et  $C$  sont les seuls points mobiles, les autres sont fixes.

L'expression liant l'angle  $\phi_i$  à l'angle  $\delta_i$  est relativement complexe, et peut être approximée par l'équation suivante, qui introduit une erreur maximale de  $\pm 0.44^\circ$  sur la plage  $\delta_i \in [-50^\circ, 50^\circ]$  (voir figure 2.18) :

$$(l_b - l_s \sin \delta_i)^2 + 2l_{sw}(l_b \cos \phi_i + h \sin \phi_i) - h^2 - l_{sw}^2 - l_b^2 = 0 \quad (2.50)$$

On peut à nouveau approximer cette équation (2.50) par une droite  $\phi_i = a\delta_i$  en faisant une erreur maximale de  $\pm 0.92^\circ$  sur la plage  $\delta_i \in [-50^\circ, 50^\circ]$  par rapport à l'expression exacte. La valeur de  $a$  est obtenue numériquement à partir de l'expression exacte, et on trouve dans notre cas :  $a = 0.4318 \approx \frac{l_s}{l_{sw}}$ . Dans la plupart des études cette relation cinématique n'est pas exprimée, et l'approximation  $\phi_i \approx \delta_i$  est faite. Une relation analogue est cependant proposée par Rakotomamonjy *et al.* (2012) pour des actionneurs linéaires.

**Déphasage mécanique de la variation du pas.** De par la mécanique du plateau cyclique, l'angle de pas maximal de la pale sur un tour est déphasé d'un angle  $-\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $z^B$  par rapport à l'angle d'inclinaison maximal du plateau cyclique (voir la figure 2.17). Cela sera pris en compte dans la modélisation.

20. Le plateau cyclique de type CCPM, c'est-à-dire avec variation collective du pas, est beaucoup plus courant que le CPM sur les hélicoptères de plus grande taille. Le moteur actionnant le rotor est alors asservi à une vitesse nominale, sa constante de temps étant trop élevée.

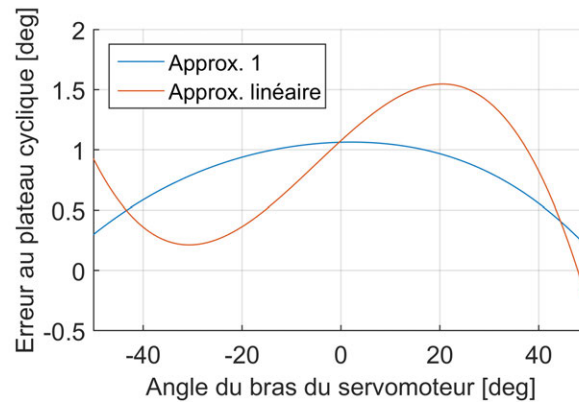


Figure 2.18 – Erreur d'approximation effectuée lors de l'utilisation de l'équation (2.50) et par l'approximation linéaire

### 2.3.4.5 Mouvement de battement des pales

**Description qualitative du mouvement des pales.** Nous avons vu que le plateau cyclique permet de faire varier le pas de la pale, et donc son angle d'attaque (voir la figure 2.12). Cette variation de l'angle d'attaque provoque une variation de l'amplitude de la force de portance des pales sur un tour du rotor. La pale est donc soumise à deux forces principales : la force de portance qui tend à "soulever" la pale autour de son axe de battement (figure 2.11), et la force centrifuge qui est orientée dans le plan de rotation, dirigée vers l'extérieur. La pale s'aligne donc avec la résultante de ces deux forces, et connaît un mouvement de "battement" (Raletz, 1995, p. 36). Lors de sa rotation, la trajectoire des pales décrit alors un cône (très ouvert), appelé cône rotor. L'angle du cône rotor<sup>21</sup> est appelé "angle de conicité", noté  $\beta_0$ , et est représenté sur la figure 2.19.

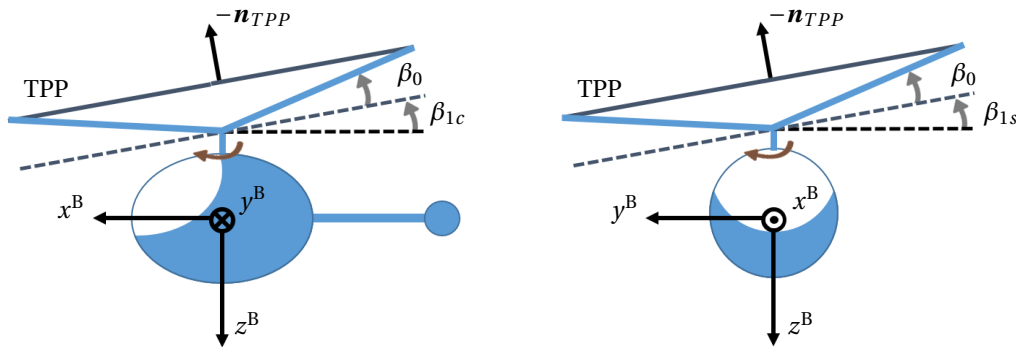


Figure 2.19 – Définition des angles de battement pour un rotor tournant dans le sens horaire. Hélicoptère vu du côté gauche et de face.

**Plan "TPP" et direction de la force de poussée.** Le cercle décrit par le bout des pales de chaque rotor définit un plan appelé communément TPP pour "Tip-Path-Plane". La poussée de chacun des deux rotors est considérée toujours perpendiculaire à ce plan. L'orientation du TPP par rapport au repère B est définie par deux angles<sup>22</sup>, visibles sur la figure 2.19 et appelés "angles de battement" (ou "flapping angles" en anglais) :

21. On peut calculer facilement une approximation de l'angle de conicité  $\beta_0$ , en négligeant la force due à la gravité, très petite devant la force centrifuge, et en considérant que le centre de gravité et le centre de pression de la pale sont confondus :  $\tan \beta_0 \approx F_n / F_c = \frac{\alpha \Omega^2}{m_p \Omega^2 0.7R} \Rightarrow \beta_0 \approx 0.3^\circ$  (Raletz, 1995).

22. Par convention, dans la littérature, l'angle  $\beta_{1c}$  est positif dans le sens qui fait basculer l'hélicoptère vers l'avant, et l'angle  $\beta_{1s}$  est positif dans le sens qui fait basculer l'hélicoptère vers le côté "reculant" du disque rotor (voir (Johnson, 1980, p. 7)).



- $\beta_{1c}$  : l'angle d'inclinaison longitudinal, c'est-à-dire suivant l'axe  $x^B$ , défini positif pour une rotation autour de  $-y^B$ .
- $\beta_{1s}$  : l'angle d'inclinaison latéral, c'est-à-dire suivant l'axe  $y^B$ , défini positif pour une rotation autour de  $x^B$  pour un rotor tournant dans le sens horaire<sup>23</sup> (rotor inférieur), et positif pour une rotation autour de  $-x^B$  pour un rotor tournant dans le sens anti-horaire (rotor supérieur).

Le battement des pales, à son tour, provoque l'apparition de forces d'inertie alternées dans le plan de rotation : les forces de Coriolis (Raetz, 1995). La pale oscille donc sur un tour, autour de son axe de trainée<sup>24</sup>. On négligera, dans la suite, ce mouvement autour de l'axe de trainée, car il a un impact très faible sur la dynamique de l'hélicoptère.

**Expression du vecteur normal au TPP en fonction des angles de battement.** Il est important de remarquer tout d'abord que les angles de battement, tels qu'ils sont définis ici et classiquement dans la littérature, ne correspondent pas à des rotations successives (comme dans le cas des angles d'Euler par exemple), mais à des projections (Hurzeler, 2013, p. 73). On peut alors calculer l'expression du vecteur  $[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]^B$  par le produit vectoriel entre deux vecteurs orthogonaux compris dans le TPP et projetés dans B. Nous obtenons les équations (2.51) et (2.52).

Pour un rotor tournant dans le sens horaire, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_l^B = \begin{bmatrix} -\cos \beta_{1c} \\ 0 \\ -\sin \beta_{1c} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \beta_{1s} \\ -\sin \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{1c} \cos \beta_{1s} \\ -\sin \beta_{1s} \cos \beta_{1c} \\ \cos \beta_{1c} \cos \beta_{1s} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Pour un rotor tournant dans le sens anti-horaire, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_u^B = \begin{bmatrix} -\cos \beta_{1c} \\ 0 \\ -\sin \beta_{1c} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \beta_{1s} \\ \sin \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{1c} \cos \beta_{1s} \\ \sin \beta_{1s} \cos \beta_{1c} \\ \cos \beta_{1c} \cos \beta_{1s} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

#### 2.3.4.6 Effets aérodynamiques et gyroscopiques au rotor

D'autre part, le rotor est le siège d'un effet gyroscopique et de phénomènes aérodynamiques complexes qui provoquent un retard angulaire de la variation de l'angle de battement de la pale par rapport à la variation de son pas. Ce déphasage est noté  $\varphi_\beta$ . Dans notre cas,  $\varphi_\beta$  est proche de  $45^\circ$ . La figure 2.20 donne une représentation schématique de ce retard angulaire et du lien entre l'angle de pas et l'angle de battement.

La figure 2.21 montre l'évolution de l'angle de battement et de l'angle de pas en fonction de l'azimut. En première approximation, une unité de pas correspond à une unité de battement. Le tracé est réalisé à l'aide de l'équation 2.70, détaillée en section 2.3.7, exprimant la dynamique du battement pour l'hélicoptère en vol stationnaire.

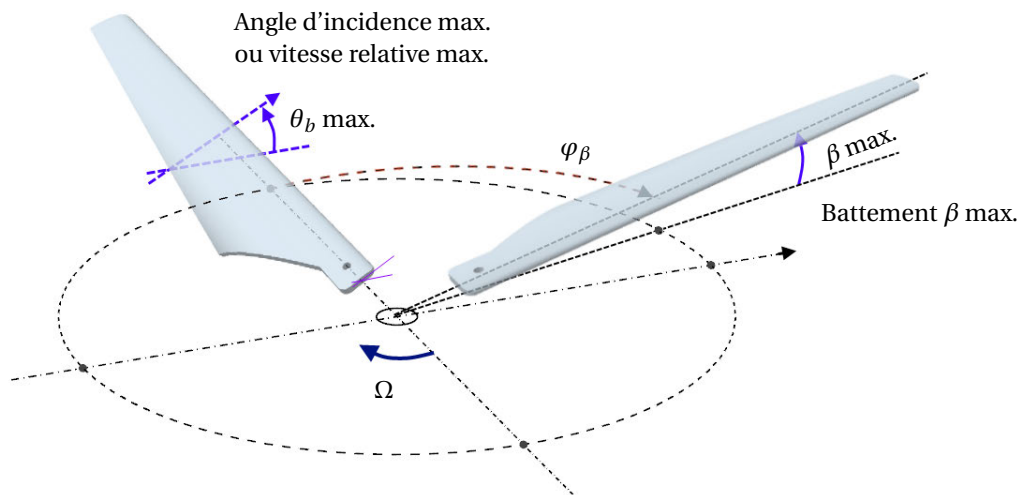
#### 2.3.5 Efforts générés par le bi-rotor

Dans cette section, nous cherchons à exprimer la force générée par chaque rotor en fonction de la sortie des actionneurs. La force de poussée de chaque rotor est considérée toujours orthogonale au TPP (section 2.3.4.5). Pour définir son orientation, nous définissons ici un vecteur  $[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]^B$  normal au TPP et aligné avec  $z^B$  lorsque les angles de battement sont nuls, dont il s'agit de calculer l'expression dans un premier temps. L'amplitude de la force est calculée dans un second temps.

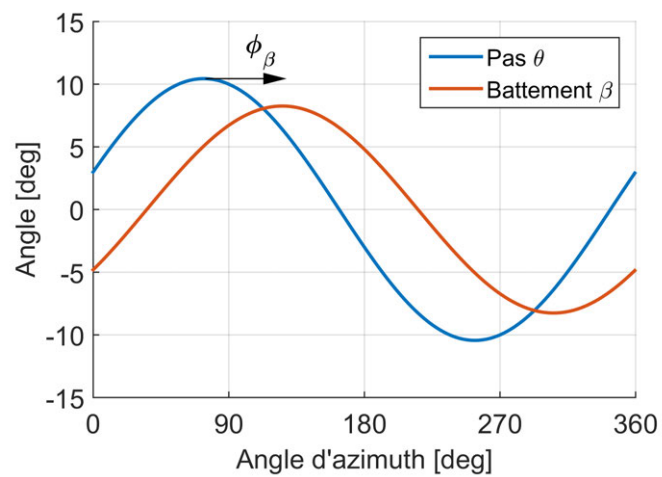
23. Lorsque l'on regarde l'hélicoptère par dessus.

24. Il est important que cette articulation de trainée soit présente au niveau du rotor pour limiter les vibrations et la fatigue mécanique.





**Figure 2.20** – Le battement maximal de la pale arrive avec un déphasage  $\varphi_\beta$  par rapport à son incidence maximale (Raletz, 1995).



**Figure 2.21** – Tracé de l'angle de battement et de l'angle de pas de la pale en fonction de l'azimuth.

**Expression du vecteur normal au TPP.** Comme le montre la figure 2.10 et comme expliqué en section 2.3.4.1, les repères liés aux servomoteurs ont un décalage de  $\frac{3\pi}{4}$  autour de  $z^B$ , de par leur placement mécanique. En considérant également le déphasage de  $-\frac{\pi}{2}$  introduit par la mécanique du plateau cyclique et le déphasage de  $\varphi_\beta$  de la réaction à un changement de pas, on peut écrire le vecteur  $[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]^B$  en fonction des angles d'inclinaison du plateau cyclique  $\phi_{lat}$  et  $\phi_{lon}$  :

Première approximation du vecteur normal au TPP :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_l^B &= [\mathbf{R}_z(\rho)]^T \left( \begin{bmatrix} \cos \phi_{lat} \\ 0 \\ \sin \phi_{lat} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi_{lon} \\ \sin \phi_{lon} \end{bmatrix} \right) = [\mathbf{R}_z(\rho)]^T \begin{bmatrix} -\sin \phi_{lat} \cos \phi_{lon} \\ -\sin \phi_{lon} \cos \phi_{lat} \\ \cos \phi_{lat} \cos \phi_{lon} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_{lat} \sin \phi_{lon} \sin \rho - \cos \phi_{lon} \sin \phi_{lat} \cos \rho \\ -\cos \phi_{lon} \sin \phi_{lat} \sin \rho - \cos \phi_{lat} \sin \phi_{lon} \cos \rho \\ \cos \phi_{lat} \cos \phi_{lon} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec  $\rho = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \varphi_\beta$ . Cette expression de  $[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_l^B$  est une première approximation en négligeant la dynamique du battement des pales (décrite en section 2.3.7), et en considérant que l'orientation du vecteur est uniquement fonction de l'inclinaison du plateau cyclique. En réalité, il est également fonction des mouvements de l'hélicoptère et de la vitesse de rotation des pales (voir équation (2.69)). D'autre part, sous l'approximation supplémentaire  $\varphi_\beta \approx \pi/4$ , on obtient :

$$[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_l^B = \begin{bmatrix} \sin \phi_{lon} \cos \phi_{lat} \\ -\sin \phi_{lat} \cos \phi_{lon} \\ \cos \phi_{lat} \cos \phi_{lon} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

De cette équation (2.54) et de l'équation (2.51), on peut calculer l'expression des angles de battement  $\beta_{1c}$  et  $\beta_{1s}$  du rotor inférieur :

$$\begin{cases} \beta_{1c} = -\arctan2(\sin \phi_{lon} \cos \phi_{lat}, \cos \phi_{lat} \cos \phi_{lon}) \approx -\phi_{lon} \\ \beta_{1s} = -\arctan2(-\sin \phi_{lat} \cos \phi_{lon}, \cos \phi_{lat} \cos \phi_{lon}) \approx \phi_{lat} \end{cases} \quad (2.55)$$

Toujours sous l'hypothèse  $\varphi_\beta \approx \pi/4$ , l'équation (2.55) montre que :

- Un angle  $\phi_{lat}$  positif (vers le bas sur la figure 2.17) donne un angle  $\beta_{1s}$  positif, et un basculement vers la droite de l'hélicoptère ( $p > 0$ ).
- Un angle  $\phi_{lon}$  positif (vers le bas) donne un angle  $\beta_{1c}$  négatif, et un basculement vers l'arrière de l'hélicoptère ( $q > 0$ ).

Enfin, on définit le vecteur unitaire  $[\mathbf{n}_{TPP}]_{u,l}^B$  comme suit :

$$[\mathbf{n}_{TPP}]_{u,l}^B = \frac{[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_{u,l}^B}{\|[\boldsymbol{\eta}_{TPP}]_{u,l}^B\|} \quad (2.56)$$

La force de poussée générée par chacun des deux rotors est colinéaire au vecteur  $[\mathbf{n}_{TPP}]_{u,l}^B$ . Il est nécessaire à présent de calculer son amplitude.

### 2.3.5.1 Amplitude de la force de poussée des rotors

De par leur vitesse relative, les pales génèrent des forces de portance et de trainée, comme décrit en section 2.3.4.3, provoquant une force et un moment sur l'hélicoptère. Sous les hypothèses suivantes :

- masse volumique de l'air  $\rho$  constante,
- coefficient aérodynamique  $C$  constant (voir la section 2.3.4.3),
- vitesse de rotation grande devant la vitesse de déplacement,

on peut considérer que la force est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation du rotor de l'hélicoptère. Le même raisonnement est appliqué au moment généré par la trainée des pales. On

note  $\alpha_{u,l}$  le coefficient de proportionnalité entre la force de poussée et la vitesse de rotation au carré. De la même manière, on appelle  $\gamma_{u,l}$  le coefficient de proportionnalité entre le couple et  $\Omega_{u,l}^2$ .

On a donc l'expression suivante pour les forces et moments :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_u^B &= -\alpha_u \Omega_u^2 [\mathbf{n}_{TPP}]_u^B \\ \mathbf{F}_l^B &= -\alpha_l \Omega_l^2 [\mathbf{n}_{TPP}]_l^B \\ \mathbf{\Gamma}_u^B &= \gamma_u \Omega_u^2 [0, 0, 1]^T + \mathbf{d}_u \wedge \mathbf{F}_u^B \\ \mathbf{\Gamma}_l^B &= -\gamma_l \Omega_l^2 [0, 0, 1]^T + \mathbf{d}_l \wedge \mathbf{F}_l^B \end{cases} \quad (2.57)$$

Les paramètres  $\mathbf{d}_u$  et  $\mathbf{d}_l$  sont respectivement le point d'application de la force générée par le rotor du haut et par le rotor du bas, exprimés dans le repère B.

### 2.3.5.2 Synthèse des efforts générés par le bi-rotor

L'incidence des pales du rotor du haut est fixe (absence de barre stabilisatrice, comme décrit dans la section 1.3.3), et l'axe de rotation est orienté selon  $z^B$ . En négligeant dans un premier temps les angles de battement du rotor supérieur, l'expression du vecteur  $[\mathbf{n}_{TPP}]_u$  dans l'équation (2.52) se simplifie de la manière suivante :

$$[\mathbf{n}_{TPP}]_u^B = [0, 0, 1]^T \quad (2.58)$$

On obtient alors l'expression suivante des forces et moments au rotor supérieur et au rotor inférieur :

Forces et moments générés par les effets aérodynamiques au bi-rotor :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_u^B &= -\alpha_u \Omega_u^2 [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{F}_l^B &= -\alpha_l \Omega_l^2 [\mathbf{n}_{TPP}]_l^B \\ \mathbf{\Gamma}_u^B &= \gamma_u \Omega_u^2 [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{\Gamma}_l^B &= -\gamma_l \Omega_l^2 [0, 0, 1]^T + \mathbf{d}_l \wedge \mathbf{F}_l^B \end{cases} \quad (2.59)$$

L'hélicoptère est donc dirigé par l'intermédiaire de la force  $\mathbf{F}_l^B$ , dont on peut faire varier la direction grâce aux deux servomoteurs et l'amplitude grâce aux moteurs.

Avec l'expression du modèle du corps rigide en équation (2.38) et l'expression du vecteur  $[\mathbf{n}_{TPP}]_l^B$  en équation (2.53), le système d'équations (2.59) constitue un premier modèle de l'hélicoptère, souvent utilisé dans la littérature (Drouot *et al.*, 2014; Schafroth *et al.*, 2010).

### 2.3.6 Traînée aérodynamique de l'hélicoptère

Lors de son déplacement dans l'air, l'hélicoptère est soumis à des frottements qui tendent à s'opposer à son déplacement et a un effet d'amortissement sur ses mouvements. Le double rotor, en particulier, a une traînée importante, rendant l'hélicoptère coaxial peu adapté à une utilisation en environnement extérieur perturbé. Ces frottements aérodynamiques sont provoqués par la vitesse de déplacement  $V_{cp}$ , qui est la vitesse relative entre l'air et l'hélicoptère ("airspeed" en anglais). La vitesse relative est la différence entre la vitesse du drone,  $\mathbf{v}^B$ , et la vitesse du vent extérieur  $\mathbf{V}_{wind}^B$ . Elle est appliquée au centre de pression<sup>25</sup> (CoP), et est exprimée dans le repère B de la manière suivante :

$$\mathbf{V}_{cp} = [u_{cp}, v_{cp}, w_{cp}]^T = \mathbf{v}^B - \mathbf{V}_{wind}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{d}_{cp} \quad (2.60)$$

où  $\mathbf{d}_{cp}$  est la coordonnée du centre de pression dans le repère B.

25. La traînée de forme s'applique approximativement au barycentre de la surface donnant prise au vent. L'hypothèse classique est de considérer le centre de poussée confondu avec le centre de gravité. Nous étudions par la suite la validité de cette hypothèse pour le véhicule considéré.

Les forces et moments provoqués par les frottements aérodynamiques peuvent alors être exprimés comme suit (voir également les travaux de Klein et Morelli (2006); Koehl *et al.* (2010b); Wang *et al.* (2012b)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_f^B = -\frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} |u_{cp}| u_{cp} C_x \\ |v_{cp}| v_{cp} C_y \\ |w_{cp}| w_{cp} C_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Gamma}_f^B = -\frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} |u_{cp}| p C_{lp} \\ |v_{cp}| q C_{mq} \\ |w_{cp}| r C_{nr} \end{bmatrix} + \mathbf{d}_{cp} \wedge \mathbf{F}_f^B \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Les paramètres  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  sont des coefficients aérodynamiques d'amortissement sur la force, et  $C_{lp}$ ,  $C_{mq}$ ,  $C_{nr}$  sont les coefficients aérodynamiques d'amortissement sur les moments. Ces coefficients sont adimensionnels et dépendent des conditions de vol et d'un certain nombre de paramètres (nombre de Mach, altitude, attitude, angle d'incidence, et vitesse de rotation) de manière non-linéaire (voir également la section 2.3.4.3). Une expression mathématique de ces coefficients est donnée par Klein et Morelli (2006). Cependant, sous l'hypothèse d'un vol quasi-stationnaire ou de vitesses de déplacement faibles, il peuvent être considérés constants (comme le font par exemple Schafroth *et al.* (2010)). Pour permettre une comparaison de la valeur des coefficients avec la littérature, la surface de référence  $S$  peut être choisie comme étant la surface du disque-rotor :  $S = 2\pi R_b^2$ , avec  $R_b$  le rayon, ici  $R_b = 0.175$  m.

### 2.3.6.1 Synthèse des efforts avec traînée aérodynamique

Les équations des forces et moments appliqués à l'hélicoptère sont synthétisés en équation 2.62.

Forces et moments générés par les effets aérodynamiques au bi-rotor et de traînée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_u^B = -\alpha_u \Omega_u^2 [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{F}_l^B = -\alpha_l \Omega_l^2 [\mathbf{n}_{TPP}]_l^B \\ \mathbf{F}_f^B = -\frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} |u_{cp}| u_{cp} C_x \\ |v_{cp}| v_{cp} C_y \\ |w_{cp}| w_{cp} C_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Gamma}_u^B = \gamma_u \Omega_u^2 [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{\Gamma}_l^B = -\gamma_l \Omega_l^2 [0, 0, 1]^T + \mathbf{d}_l \wedge \mathbf{F}_l^B \\ \mathbf{\Gamma}_f^B = -\frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} |u_{cp}| p C_{lp} \\ |v_{cp}| q C_{mq} \\ |w_{cp}| r C_{nr} \end{bmatrix} + \mathbf{d}_{cp} \wedge \mathbf{F}_f^B \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Comme mentionné en introduction, la traînée aérodynamique a une action en basse fréquence. Ainsi, les forces et moments présentés jusqu'à présent permettent de modéliser le comportement dynamique du drone pour une bande passante d'environ 15 rad/s.

### 2.3.7 Prise en compte de la dynamique de battement

Dans cette section, nous étudions le comportement dynamique des pales lors du vol de l'hélicoptère. Elles connaissent un mouvement complexe, produit par les forces aérodynamiques et les mouvements du plateau cyclique, suivant leurs trois degrés de liberté : pas, battement et traînée (voir la section 2.3.4 et la figure 2.11).

Tandis que l'articulation de pas est commandée par le plateau cyclique, la pale est libre de ses mouvements autour des axes de battement et de traînée ("flapping and lead-lag hinges" en anglais). Un équilibre est atteint en vol stationnaire, pour lequel les forces aérodynamiques et centrifuges sont constantes (Leishman, 2006, chap. 4). Les angles de battement sont alors nuls, et le rotor forme un cône avec un angle  $\beta_0$  (voir la section 2.3.4.5 et la figure 2.19). Une perturbation

sous la forme d'un changement de l'angle de pas ou d'un mouvement de l'hélicoptère rompt cet équilibre et provoque un mouvement périodique amorti de la pale.

Les mouvements de trainée sont d'amplitude faible et se font dans le plan de rotation du rotor. Ils ont peu d'effet sur le comportement de l'hélicoptère autre que l'atténuation des vibrations dues aux forces de Coriolis créées lors du battement (Leishman, 2006, chap. 4). Ce n'est pas le cas des mouvements de battement, décrits dans cette section.

**Expression générale de l'équation du mouvement en battement d'une pale.** La pale de l'hélicoptère est considérée libre de battre avec un ressort de rappel de raideur  $K_\beta$ . L'amortissement est apporté par les effets aérodynamiques, et est considéré dans un second temps. Dans notre cas, et de manière générale pour les hélicoptères miniatures, le porte-pale ne permet pas le mouvement de battement, mais c'est l'élasticité de la pale qui joue ce rôle. L'axe "virtuel" de battement est alors décalé d'une distance  $eR$  par rapport à l'axe de rotation,  $R$  étant le rayon du rotor ( $e$  est de l'ordre de 10%).

La dynamique du mouvement de battement peut alors être assimilée à un oscillateur amorti pouvant être excité par l'angle de pas des pales  $\theta$  ou les mouvements de l'hélicoptère (plus précisément par sa vitesse relative dans le plan  $(O, x^B, y^B)$  et sa vitesse angulaire (Leishman, 2006)). Les équations du mouvement en battement sont dérivées de l'application du principe fondamental de la dynamique en écrivant la somme des moments autour de l'articulation de battement. Ces moments sont générés par les force suivantes :

- la somme des forces aérodynamiques sur la pale,
- la force centrifuge,
- la force d'inertie.

De plus, un moment supplémentaire est provoqué par l'élasticité de la pale, d'amplitude  $K_\beta\beta$ ,  $\beta$  étant l'angle de battement. En développant les expressions des trois forces, l'équation de mouvement peut être mise sous la forme de l'équation (2.63). La démonstration est donnée par Padfield (2008) et n'est pas détaillée ici.

$$\beta'' + \lambda_\beta^2 \beta = A_{gyro}(p, q, \Omega, \psi_b) + A_{aero}(V, \theta_b, \Omega) \quad (2.63)$$

On reconnaît là l'équation d'un système du second ordre non-amorti, excité par un terme  $A_{gyro}$  qui représente la contribution due aux forces d'inertie (mouvement gyroscopique du rotor) et un terme  $A_{aero}$  qui est la contribution due aux forces aérodynamiques. On considère dans cette équation la dérivée de  $\beta$  par rapport à l'angle d'azimuth de la pale<sup>26</sup>,  $\psi_b$ , notée  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{d\psi_b}$ . Les mouvements de battement sont en effet périodiques par rapport à  $\psi_b = \Omega t$ , avec  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor. Il est donc intéressant d'exprimer les équations dynamiques de cette manière. On a alors :

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{d\psi_b} \frac{d\psi_b}{dt} = \beta' \Omega \quad \text{et} \quad \ddot{\beta} = \beta'' \Omega^2 \quad (2.64)$$

Cette approche est fréquemment considérée dans la littérature (Hurzeler, 2013; Leishman, 2006).

Le coefficient adimensionnel  $\lambda_\beta$  est le rapport de la fréquence propre du battement,  $\omega_\beta$ , par rapport à la vitesse de rotation  $\Omega$  (Mettler, 2003, p. 69). Il est exprimé par :

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\omega_\beta^2}{\Omega^2} = \frac{I_b^e}{I_b} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2} + 1 \approx \frac{K_\beta}{I_b \Omega^2} + 1 \quad (2.65)$$

Avec  $I_b^e = e R m_{bl}$ ,  $e$  le décalage de l'axe de battement par rapport à l'axe de rotation,  $m_{bl}$  la masse de la pale, et  $I_b$  le moment d'inertie de la pale suivant son axe  $y$ . On retrouve que pour un rotor ayant une articulation de battement (donc  $e = 0$ ) sans contrainte (c'est-à-dire  $K_\beta = 0$ ), on a  $\lambda_\beta = 1$  : la fréquence des battements est égale à la fréquence de rotation.

26. Par convention,  $\psi_b$  est nul à l'arrière de l'hélicoptère, et est positif dans le sens de rotation positif du rotor.

**Développement des contributions inertielles et aérodynamiques en vol stationnaire.** En considérant un rotor dans le vide (aucun effet aérodynamique), on peut écrire la contribution des forces d'inertie lorsque le rotor est soumis à des vitesses angulaires perpendiculaires  $p$ ,  $q$  et  $\Omega$  autour des axes  $x^B$ ,  $y^B$  et  $z^B$ , respectivement. En négligeant les accélérations angulaires, on obtient l'expression de  $A_{gyro}$  :

$$A_{gyro} = \frac{2}{\Omega} (p \cos \psi_b - q \sin \psi_b) \quad (2.66)$$

La contribution due aux forces aérodynamiques  $A_{aero}$  est plus complexe à établir. En considérant le rotor en vol stationnaire, (Padfield, 2008, p. 34) développe l'expression suivante :

$$A_{aero} = \frac{\gamma}{8} (\theta_b - \frac{4}{3} \lambda_i + \frac{p}{\Omega} \sin \psi_b + \frac{q}{\Omega} \cos \psi_b - \beta') \quad (2.67)$$

avec  $\lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R}$ ,  $v_i$  étant la vitesse du vent induit au niveau du disque rotor, et  $\lambda_i$  la vitesse normalisée par la vitesse en bout de pale  $\Omega R$ . Le coefficient adimensionnel  $\gamma$  donne le rapport des forces aérodynamiques et inertielles agissant sur la pale. Il est appelé le nombre de Lock associé aux pales du rotor, et dépend de leur moment d'inertie  $I_b$ , de la longueur de corde  $c$ , du coefficient de portance  $C_{L1}$  (voir section 2.3.4.3) et du diamètre du rotor de la manière suivante (Hurzeler, 2013, p. 92) :

$$\gamma = \frac{\rho c C_{L1} R^4}{I_b} \quad (2.68)$$

On notera également l'apparition du terme en  $\beta'$  dans l'expression de  $A_{aero}$  qui cause un amortissement du battement et change la réponse du système de manière significative par rapport à la prise en compte de l'effet gyroscopique seul. L'équation du mouvement de battement s'écrit alors ainsi :

Équation dynamique du battement autour du vol stationnaire :

$$\beta'' + \frac{\gamma}{8} \beta' + \lambda_\beta^2 \beta = \frac{2}{\Omega} (p \cos \psi_b - q \sin \psi_b) + \frac{\gamma}{8} (\theta_b - \frac{4}{3} \lambda_i + \frac{p}{\Omega} \sin \psi_b + \frac{q}{\Omega} \cos \psi_b) \quad (2.69)$$

Rappelons ici que  $\theta_b$  est l'angle de pas de la pale, et  $\beta$  son angle de battement.

**Calcul du déphasage entre le pas et le battement.** Pour l'hélicoptère en vol stationnaire, c'est-à-dire avec  $p \approx q \approx 0$  et  $\lambda_i$  constante<sup>27</sup>, la fonction de transfert de l'angle  $\theta$  à l'angle  $\beta$ , issue de l'équation (2.69), prend la forme suivante :

$$G(s) = \frac{k}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}, \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_0 &= \lambda_\beta \\ \zeta &= \frac{\gamma}{16\lambda_\beta} \\ k &= \frac{\gamma}{8\lambda_\beta^2} \end{cases} \quad (2.70)$$

Le déphasage introduit entre l'entrée et la sortie du système est donné par l'équation :

$$\phi(\omega) = \arctan \left( \frac{2\zeta \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = - \arctan \left( \frac{\gamma \omega}{8(\lambda_\beta^2 - \omega^2)} \right) \quad (2.71)$$

27. En vol stationnaire, la théorie de Froude permet de calculer la vitesse induite (application de la variation de quantité de mouvement et du théorème de Bernoulli voir par exemple Leishman (2006)). On a  $T = 2\rho A v_i^2$ , avec  $A = \pi R^2$  l'aire du disque rotor et  $T$  la poussée du rotor. Pour un bi-rotor en vol stationnaire, la poussée s'écrit  $T = (mg)/2$ . L'application numérique donne  $v_i = 2.6$  m/s et  $\lambda_i = 0.07$ .

Pour un rotor ayant une articulation de battement, la fréquence des battements est égale à la fréquence de rotation du rotor (équation (2.65)), donc  $\lambda_\beta = 1$ . Le battement étant périodique, de période  $2\pi$ , on a  $\omega = 1$  et on retrouve alors le déphasage  $\phi(1) = 90^\circ$ . Dans notre cas, l'absence d'articulation de battement entraîne  $\lambda_\beta > 1$ , et donc un déphasage  $\phi(\omega = 1) < 90^\circ$ .

Dans le cas d'un hélicoptère coaxial miniature, les deux rotors superposés ont un mouvement de battement. Seul le rotor inférieur est commandé par l'intermédiaire du pas des pales  $\theta_b$ . Le pas du rotor supérieur est nul<sup>28</sup>, et le battement est excité par les vitesses de rotation  $p$  et  $q$ . Les deux rotors tournant en sens opposé, la résultante des forces de poussée est retardée d'environ  $45^\circ$  uniquement, et non de  $90^\circ$  comme dans le cas d'un hélicoptère conventionnel.

**Expression des angles de battement indépendante de l'angle d'azimuth.** Dans ce paragraphe, l'objectif est d'exprimer l'équation dynamique de mouvement du plan TPP formé par le bout des pales, défini par les angles  $\beta_{1c}$  et  $\beta_{1s}$  (voir la section 2.3.4.5). Pour cela, on cherche à exprimer l'équation différentielle du mouvement de battement de manière indépendante de l'angle d'azimuth  $\psi_b$ . Le mouvement de battement est périodique de période  $2\pi$ . La solution générale de l'équation (2.69) peut alors être exprimée sous forme d'une série de Fourier donnée en équation (2.72) (Johnson, 1980) :

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi_b + \beta_{1s} \sin \psi_b \quad (+ \text{ termes d'ordre supérieur}) \quad (2.72)$$

L'hypothèse généralement faite est que les termes d'ordre supérieur sont négligeables devant le premier harmonique. On peut introduire cette expression de  $\beta$  dans l'équation différentielle (2.69) pour obtenir une expression de  $\beta$  fonction des coefficients de battement  $\beta_{1c}$  et  $\beta_{1s}$ . On peut ensuite moyenner les différents termes sur un tour du rotor pour obtenir une expression indépendante de l'angle d'azimuth (Hurzel, 2013). On obtient alors une expression sous la forme matricielle suivante, en faisant l'hypothèse d'une vitesse induite  $\lambda_i$  constante sur le disque rotor :

$$\mathbf{A}_{\beta''} \begin{bmatrix} \beta_0'' \\ \beta_{1c}'' \\ \beta_{1s}'' \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{\beta'} \begin{bmatrix} \beta_0' \\ \beta_{1c}' \\ \beta_{1s}' \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\beta \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\theta \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1c} \\ \theta_{1s} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\omega \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\lambda \lambda_i \quad (2.73)$$

L'angle de pas de la pale est ici décomposé de la même manière que l'angle  $\beta$  :

$$\theta_b = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi_b + \theta_{1s} \sin \psi_b \quad (2.74)$$

Les différentes matrices  $\mathbf{A}_x$  sont constituées d'éléments dépendant des caractéristiques du rotor (paramètres dimensionnels et inertiels, vitesse de rotation), du vent relatif, et de paramètres aérodynamiques. L'expression de ces matrices est complexe et n'est pas détaillée ici, mais est disponible dans (Padfield, 2008, p. 107) et Chen (1980). Nous faisons ici l'hypothèse réaliste que le rapport entre la vitesse latérale de l'hélicoptère et  $\Omega R$  est négligeable, hypothèse introduite également par Hurzel (2013); Mettler *et al.* (2002), qui permet de simplifier considérablement les équations. On néglige de plus la dynamique de  $\beta_0$ , hypothèse introduite également par (Mettler *et al.*, 2002, p. 72), et la dérivée des vitesses angulaires  $\dot{p}$  et  $\dot{q}$ . L'équation (2.73) simplifiée s'écrit alors :

Équation de mouvement du TPP autour du vol stationnaire :

$$\begin{bmatrix} \beta_{1c}'' \\ \beta_{1s}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 2 \\ -2 & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1c}' \\ \beta_{1s}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_\beta^2 - 1 & \frac{\gamma}{8} \\ -\frac{\gamma}{8} & \lambda_\beta^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1c} \\ \theta_{1s} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} 2 & \frac{\gamma}{8} \\ \frac{\gamma}{8} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

28. En réalité le pas n'est pas nul, mais le pas "virtuel" l'est (voir section 2.3.4.3).

L'équation temporelle peut être retrouvée grâce à l'équation (2.64). On retrouve ici l'expression d'un oscillateur amorti du second ordre, avec un couplage entre  $\beta_{1c}$  et  $\beta_{1s}$ .

**Couplage entre la dynamique du rotor et la dynamique du corps de l'hélicoptère.** Les mouvements de battement des pales transmettent des efforts au corps de l'hélicoptère par l'intermédiaire du porte-pale. Il se produit alors un couplage entre la dynamique du rotor (équation (2.75)) et la dynamique du corps rigide (équation (2.38)). La transmission des efforts au niveau du rotor se fait à la fois sur la dynamique en translation (équation (2.32)) par l'intermédiaire des forces exercées et sur la dynamique en rotation (équation (2.33)) par l'intermédiaire des moments. La dynamique en translation est très lente, et les effets du battement sont négligeables. Ce n'est pas le cas du couplage sur la dynamique en rotation, qui a des effets néfastes dans une bande de fréquences relativement basses et peut avoir un impact sur la stabilité de l'hélicoptère.

La force de poussée des rotors  $T$  est orthogonale au TPP, dont l'expression en fonction des angles de battement est donnée en équation (2.51). L'inclinaison du TPP produit donc un moment autour du centre de gravité de l'hélicoptère. Ainsi, lors de son battement, la pale transmet à l'hélicoptère les deux moments suivants :

1. le moment dû à l'inclinaison du rotor et donc de la direction de la poussée ;
2. le moment transmis par la pale au corps au niveau du porte-pale.

Le moment de réaction généré par la rotation du rotor n'est pas considéré ici.

En considérant le modèle de la pale libre de battre autour de son articulation de battement avec un ressort de rappel  $K_\beta$  (voir section 2.3.7), le moment transmis par la pale dans le système d'axes (tournant) lié à la pale est  $\Gamma = K_\beta \beta$ . On peut donc écrire, dans le référentiel non tournant :

Moments transmis par les pales :

$$\begin{cases} L_\beta = K_\beta \beta \sin \psi_b = \frac{N_b}{2} K_\beta \beta_{1s} \\ M_\beta = -K_\beta \beta \cos \psi_b = -\frac{N_b}{2} K_\beta \beta_{1c} \end{cases} \quad (2.76)$$

avec  $N_b$  le nombre de pales, deux dans notre cas.

D'après l'expression du TPP en équation (2.51) et l'expression des forces et moments en équation (2.57), les moments générés par l'inclinaison du TPP du rotor inférieur s'écrivent de manière simplifiée comme suit (avec l'approximation des petits angles de battement) :

$$\begin{cases} L_l = d_z \frac{T}{2} \beta_{1s} \\ M_l = -d_z \frac{T}{2} \beta_{1c} \end{cases} \quad (2.77)$$

En vol stationnaire, la poussée  $T$  compense la gravité, et vaut donc  $T = mg$ . On considère ici uniquement le rotor inférieur, la poussée est donc divisée par deux.  $d_z$  est la distance entre le centre de gravité et le centre de rotation du rotor inférieur (point d'application de la force).

Les équations dynamiques liant les vitesses de rotation et les moments s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{L_l + L_\beta}{I_{xx}} = \frac{K_\beta + d_z \frac{T}{2}}{I_{xx}} \beta_{1s} \\ \dot{q} = \frac{M_l + M_\beta}{I_{yy}} = -\frac{K_\beta + d_z \frac{T}{2}}{I_{yy}} \beta_{1c} \end{cases} \quad (2.78)$$

L'équation (2.78) et le mouvement du TPP en équation (2.75) sont couplées par les angles de battement et par les vitesses angulaires. On peut alors modéliser l'interaction par un bouclage entre le système (2.75) d'entrée  $[p, q]^T$  et de sortie  $[\beta_{1c}, \beta_{1s}]^T$  et le système (2.78) d'entrée



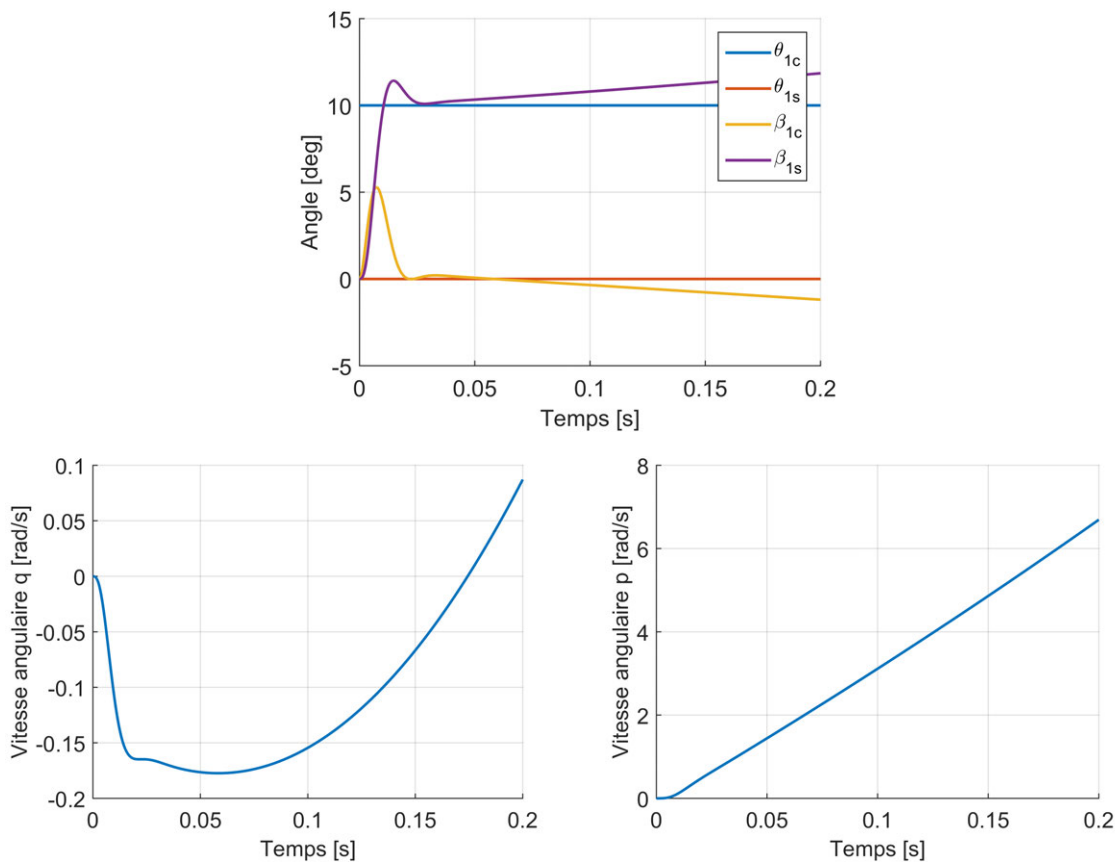
$[\beta_{1c}, \beta_{1s}]^T$  et de sortie  $[p, q]^T$ . Ce système comporte deux modes à basse fréquence qui expliquent les pics fréquentiels constatés à 3.5 Hz et à 34 Hz sur les relevés en vol (figure 2.7), ainsi que des modes à plus haute fréquence (voir également Heffley *et al.* (1986)).

La figure 2.22 présente le résultat d'une simulation avec un angle  $\theta_{1c} = 10^\circ$  du plateau cyclique, et les valeurs numériques données en table 2.2.

**Table 2.2** – Valeurs des différentes grandeurs utilisées pour la simulation.

Symbole	Description	Valeur
$m$	Masse de l'hélicoptère	0.325 kg
$g$	Accélération de la gravité	9.81 m/s <sup>2</sup>
$I_{xx}$	Moment d'inertie de l'hélicoptère suivant l'axe $x^B$	1.22e-3 kg.m <sup>2</sup>
$I_{yy}$	Moment d'inertie de l'hélicoptère suivant l'axe $y^B$	1.23e-3 kg.m <sup>2</sup>
$\Omega$	Vitesse de rotation du rotor	214 rad/s
$K_\beta$	Raideur de l'articulation de battement équivalente	0.1 Nm/rad
$\gamma$	Nombre de "Lock"	16 [-]
$\lambda_\beta$	Fréquence relative des battements	1.04 [-]

Le déphasage calculé par l'équation (2.71) est de  $87.7^\circ$  avec ces valeurs. On remarque sur les tracés le couplage entre les vitesses angulaires, et la dérive lente des angles de battement provoquée par l'augmentation de la vitesse angulaire. Pour une simulation plus réaliste, il faudrait également considérer la dynamique en translation de l'hélicoptère, ainsi que les coefficients aérodynamiques amortissant la vitesse angulaire.



**Figure 2.22** – Tracé de l'évolution des vitesses angulaires de l'hélicoptère pour un angle  $\theta_{1c} = 10^\circ$  du plateau cyclique.

Dans le cas d'un hélicoptère coaxial, il faut également considérer le mouvement du rotor supérieur, qui n'est pas commandé mais est excité par les vitesses angulaires  $p$  et  $q$ . Un couplage

supplémentaire intervient donc entre les deux rotors, dont la manifestation la plus évidente est le déphasage d'environ  $45^\circ$  (et non  $90^\circ$ ) entre l'entrée de commande et la vitesse angulaire de l'hélicoptère.

**Expression en régime quasi-statique.** L'expression en régime établi de l'équation de mouvement du TPP en équation (2.75) est donnée ci-dessous :

Expression quasi-statique des angles de battement :

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{\gamma}{8\lambda_\beta^2} (\theta_0 - \frac{4}{3}\lambda_i) \\ \beta_{1c} = \frac{1}{1+S_\beta^2} (S_\beta\theta_{1c} - \theta_{1s} + (S_\beta\frac{16}{\gamma} - 1)\frac{p}{\Omega} + (S_\beta + \frac{16}{\gamma})\frac{q}{\Omega}) \\ \beta_{1s} = \frac{1}{1+S_\beta^2} (S_\beta\theta_{1s} + \theta_{1c} - (S_\beta\frac{16}{\gamma} - 1)\frac{q}{\Omega} + (S_\beta + \frac{16}{\gamma})\frac{p}{\Omega}) \end{cases} \quad (2.79)$$

avec  $S_\beta = \frac{8(\lambda_\beta^2 - 1)}{\gamma}$ , un nombre adimensionnel qui donne une mesure du rapport entre la rigidité du rotor et les moments aérodynamiques. Cette équation ne capture pas les dynamiques à haute fréquence, mais exprime le couplage entre les différentes grandeurs. Elle est d'autre part plus aisée à manipuler et permet d'obtenir un modèle de l'hélicoptère sans état supplémentaire par rapport à la dynamique du corps rigide (équation (2.38)).

### 2.3.8 Conclusion sur la modélisation aérodynamique

Le modèle aérodynamique est la principale difficulté dans la modélisation d'un hélicoptère. Le rotor, en particulier, en est la principale source. Ce dernier permet en effet à l'hélicoptère de se mouvoir dans les trois dimensions de l'espace, et de tourner autour de son axe vertical. Cela implique l'utilisation d'un plateau cyclique permettant de transmettre les consignes par la variation du pas des pales. Les pales ont alors un mouvement complexe suivant trois degrés de liberté : articulation de trainée, de pas et de battement. Le mouvement de battement, en particulier, est essentiel pour permettre le vol d'un hélicoptère, sans lequel il ne pourrait se diriger. Les équations de mouvement détaillées du rotor peuvent être très complexes, et nous établissons dans cette étude des équations simplifiées adaptées à l'objectif visé : la conception d'un modèle de simulation en vue de la commande.

Le premier modèle établi ne prend en compte que le déphasage fondamental entre la commande et la réaction introduit par la rotation du bi-rotor (équation (2.53)). Les dynamiques à moyenne et haute fréquences sont alors négligées dans ce cas. Dans un second temps, la pale est modélisée sous la forme d'un oscillateur amorti du second ordre, pouvant être excité non seulement par les angles de pas de la pale, mais également par les vitesses de rotation de l'hélicoptère  $p$  et  $q$  (équation (2.75)). Nous sommes alors en mesure de modéliser le couplage entre les efforts transmis par les rotors et le corps de l'hélicoptère, et d'expliquer les modes observés expérimentalement.

Un modèle est valide sur une bande-passante donnée, et les modèles établis dans ce chapitre permettent de couvrir une bande passante de l'ordre de la fréquence de rotation des rotors. Il convient alors de choisir le modèle adapté aux besoins. Pour la simulation, un modèle ayant une large bande passante est souhaité, mais ce dernier peut s'avérer trop complexe à identifier. Pour la commande, un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement est en général suffisant. Ainsi, dans le chapitre suivant, le modèle pour l'identification est constitué des équations (2.62) prenant en compte les effets aérodynamiques du premier et second ordre, mais sans la dynamique de battement. Le modèle de simulation prendra en compte les couplages entre les commandes, les vitesses angulaires et les angles de battements par l'expression quasi-statique en équation (2.79).

## 2.4 Conclusion du chapitre

De manière classique pour les systèmes aériens, le modèle de l'hélicoptère étudié dans ce chapitre a été décomposé en deux sous-ensembles : les équations de mouvement (ou modèle à six degrés de liberté) et le modèle aérodynamique. Les équations de mouvement établies dans une première partie sont générales, et décrivent le comportement de n'importe quel corps rigide, sous certaines hypothèses classiques et raisonnables dans le cas des drones miniatures. La modélisation des efforts agissant sur le véhicule lors de son vol constitue au contraire un problème majeur à cause de la complexité des phénomènes aérodynamiques en jeu et des interactions importantes entre les différents éléments du drone et l'air qui l'entoure, en particulier à cette échelle. Ces effets sont largement documentés et étudiés dans la littérature, mais il reste néanmoins difficile d'obtenir un modèle aérodynamique qui soit suffisamment simple pour permettre une identification et une utilisation aisée, et qui reproduise les dynamiques importantes pour l'application visée.

A cette fin, nous avons établi un modèle de l'hélicoptère intégrant les effets aérodynamiques qui se sont montrés prépondérants pour la structure étudiée. Le modèle aérodynamique est affiné au fil du chapitre, pour aboutir à une analyse et une modélisation de la dynamique de battement des pales et de ses interactions avec le corps du véhicule.

La modélisation de ces phénomènes permet tout d'abord d'évaluer en simulation les performances et la robustesse d'un correcteur (chapitre 4). Elle permet également d'acquérir une bonne compréhension du système et de son comportement en vol, préalable essentiel à la mise en œuvre de lois de commandes. La dynamique de battement, en particulier, n'est pas prise en compte dans les modèles identifiés au chapitre 3 suivant, mais explique certains effets néfastes sur la commande, constatés et commentés au chapitre 4.

# Identification

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthodologie d'identification</b>	<b>93</b>
3.1.1	Méthodologie générale	93
3.1.2	Domaine fréquentiel et domaine temporel	94
<b>3.2</b>	<b>Identifiabilité structurelle locale</b>	<b>94</b>
3.2.1	Introduction	94
3.2.2	Principe de l'analyse	95
3.2.3	Application au modèle non-linéaire de l'hélicoptère	95
<b>3.3</b>	<b>Acquisition de données d'entrée-sortie</b>	<b>98</b>
3.3.1	Principe et objectifs	98
3.3.2	Correcteur dédié à l'obtention de données d'identification	99
3.3.3	Problématiques d'identification en boucle fermée	100
3.3.4	Enregistrement des données durant un vol	100
3.3.5	Pré-traitement et analyse des données	101
<b>3.4</b>	<b>Méthodologie d'estimation des paramètres</b>	<b>104</b>
3.4.1	Principe général de l'estimation et définitions	104
3.4.2	Application à l'estimation des paramètres du modèle de l'hélicoptère	108
<b>3.5</b>	<b>Évaluation du modèle identifié</b>	<b>111</b>
3.5.1	Techniques d'évaluation du modèle	111
3.5.2	Évaluation des modèles identifiés sur un jeu de données de validation	113
3.5.3	Analyse des résidus	117
3.5.4	Analyses de sensibilité du modèle aux paramètres	118
3.5.5	Analyses des incertitudes sur les paramètres	123
<b>3.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>134</b>

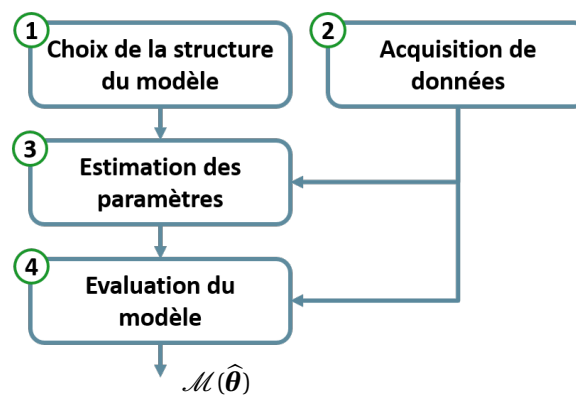
---



### 3.1 Méthodologie d'identification

Dans le chapitre 2 précédent, nous avons décrit puis modélisé le système étudié, un hélicoptère miniature. Il en résulte un ensemble d'équations différentielles qui dépendent d'un certain nombre de paramètres. Afin d'obtenir un modèle qui reproduise correctement le comportement du système, il est nécessaire qu'il ait une structure adéquate, d'une part, et que les paramètres dont il dépend soient estimés correctement, d'autre part. Les équations étant obtenues à partir des équations fondamentales de la physique, on peut être confiant sur le premier point. Le second point nécessite plusieurs étapes : étude de la structure du modèle pour s'assurer que ses paramètres soient observables, acquisition de jeux de données excitant suffisamment le système, mise en place d'une méthode d'estimation et enfin évaluation qualitative de l'identification. Ces différentes problématiques sont détaillées dans ce chapitre.

#### 3.1.1 Méthodologie générale



**Figure 3.1** – Diagramme présentant la méthodologie d'identification et ses quatre principales problématiques (procédure adaptée de Garnier et al. (2008); Ljung (1999)).

La figure 3.1 présente la méthodologie générale utilisée pour identifier un modèle permettant de décrire le système, à partir de données d'entrées-sorties mesurées. Les quatre principales étapes sont les suivantes :

1. Choisir une structure de modèle. Il existe un grand nombre de structures différentes, qui permettent d'obtenir des modèles linéaires ou non-linéaires. Les principales structures sont décrites en section 2.1. Des analyses d'observabilité sont menées sur les paramètres du modèle, également appelées études d'identifiabilité théorique, afin de s'assurer que la structure permette une bonne estimation des paramètres (section 3.2).
2. Acquérir un jeu de données d'entrées-sorties du système à identifier, en excitant suffisamment le système sur la bande passante ciblée pour permettre une bonne estimation du modèle (section 3.3). Les données sont éventuellement filtrées (passe-haut pour supprimer la composante continue, passe-bas si l'on s'intéresse aux dynamiques lentes ou pour filtrer le bruit...).
3. Estimer les paramètres du modèle à partir des données d'entrée-sortie (section 3.4). Dans le cas des modèles paramétriques, on estime les paramètres du modèle en utilisant des techniques basées sur l'erreur de prédiction (PEM) ou le maximum de vraisemblance (ML), les méthodes de sous-espace ("sub-space methods"), ou encore les techniques IV ("Instrumental Variable").
4. Évaluer les propriétés du modèle et estimer la fiabilité des paramètres estimés. On peut évaluer ses performances en matière de prédiction ou de simulation en utilisant pour cela un jeu de données indépendant (validation croisée), analyser les résidus des sorties du modèle (contenu fréquentiel, corrélation avec l'entrée du système), et calculer des intervalles de confiance sur la valeur estimée des paramètres (section 3.5.5). Nous mènerons

également une analyse de la sensibilité des sorties du modèle aux valeurs des paramètres (section 3.5.4).

5. En fonction des résultats d'évaluation du modèle, retourner au point 1 (mettre en place une expérience qui permet de meilleurs résultats d'identification), au point 2 (étudier une structure plus adaptée) ou au point 3 (étudier la possibilité d'améliorer l'estimation).

On peut présenter la méthodologie sous une forme plus détaillée en figure 3.2, faisant la synthèse des points ci-dessus. Cela donne le fil directeur suivi tout au long de ce chapitre pour l'obtention d'un modèle de l'hélicoptère.

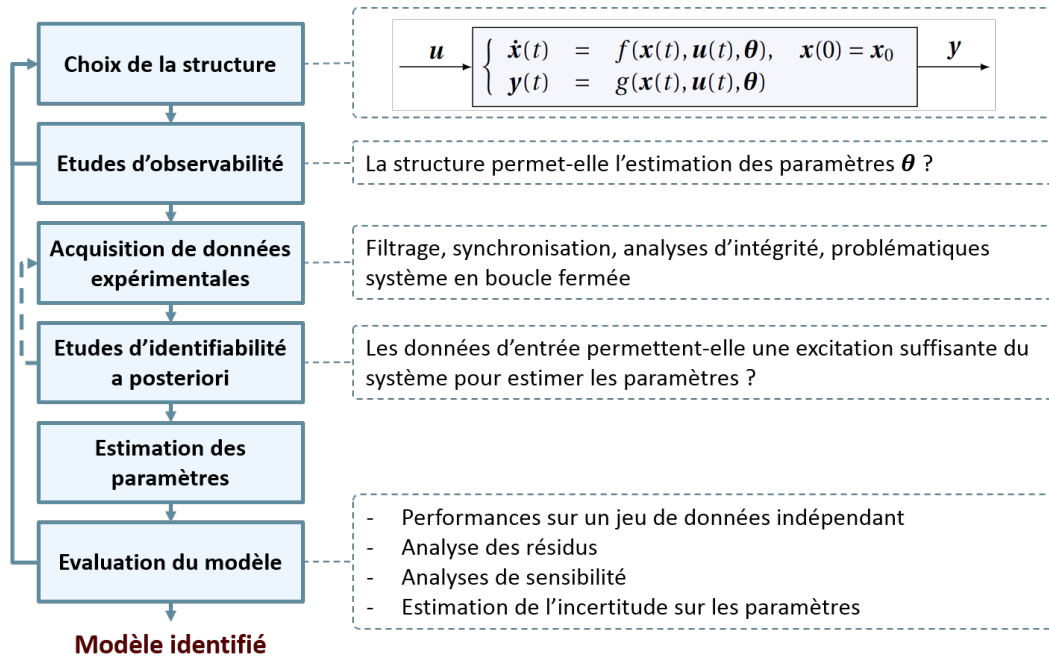


Figure 3.2 – Détails des problématiques d'identification et de la méthodologie suivie pour l'obtention d'un modèle fiable.

### 3.1.2 Domaine fréquentiel et domaine temporel

Nous nous limitons dans ce chapitre à l'identification dans le domaine temporel. On pourra se référer à Mettler (2003) pour l'identification d'un modèle d'hélicoptère miniature adapté à la commande en utilisant des méthodes dans le domaine fréquentiel. Dans l'industrie, la méthode CIPHER (*Comprehensive Identification from Frequency Responses*) est largement utilisée pour l'identification de modèles linéaires pour hélicoptères. La méthode nécessite cependant l'acquisition d'un nombre important de données sur une large bande passante (Abbeel *et al.*, 2005).

## 3.2 Identifiabilité structurelle locale

### 3.2.1 Introduction

L'identifiabilité structurelle d'un modèle (appelée encore identifiabilité "théorique" ou "a priori") est une étude préalable permettant de vérifier que ses paramètres puissent théoriquement être estimés en considérant la structure seule. En d'autres termes, et comme défini par Dobre (2010), il s'agit de déterminer s'il existe une solution unique (identifiabilité globale) ou un nombre fini de solutions (identifiabilité locale) à l'estimation des paramètres. L'identifiabilité structurelle est une étude préalable à l'estimation des paramètres, mais n'est pas suffisante : l'estimation fiable des paramètres dépend également du jeu de données utilisé. Cet aspect sera considéré dans un second temps (section 3.5.5).

### 3.2.2 Principe de l'analyse

Nous nous restreignons dans cette étude à l'étude d'identifiabilité locale, plus aisée à démontrer que l'identifiabilité globale. Différentes approches sont étudiées dans la littérature (voir notamment les travaux de Dobre (2010, chap. 2), Walter et Pronzato (1997, chap. 2) et Perasso (2009, chap. 1)). Dans le cas de structures non-linéaires, l'étude est en général menée sur une version linéarisée du modèle. Nous utiliserons ici l'approche dite "par élimination algèbro-différentielle" qui permet de réaliser l'analyse sur un modèle comportant certaines non-linéarités et qui est bien adaptée aux modèles donnés sous la forme d'équations différentielles. Cette approche est rendue particulièrement accessible grâce à l'algorithme de Sedoglavic (2001), notamment. Le problème d'identifiabilité est ici vu comme un cas particulier de l'observabilité d'un système. On construit pour cela un modèle étendu, dans lequel les paramètres sont considérés comme des états supplémentaires avec une dérivée temporelle nulle. L'algorithme se base alors sur un modèle exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) &= 0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  des fonctions rationnelles de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\theta}$ . Au même titre que l'observabilité pour un système linéaire peut être étudiée par le rang de la matrice d'observabilité, construite de manière itérative, l'analyse est ici basée sur un calcul de rang d'une matrice jacobienne particulière qui implique le calcul de dérivées de Lie successives de la fonction de sortie (voir Sedoglavic (2001) et Anguelova (2004) pour plus de détails).

Le modèle que l'on considère contient des fonctions élémentaires "sinus" et "cosinus" des variables d'état  $x_i$ , termes qui sont alors remplacés par une nouvelle variable d'état pour obtenir un système rationnel d'équations différentielles. Ainsi, un terme  $\sin(x)$  est remplacé par une nouvelle variable  $s_x$  (telle que  $s_x = \sin(x)$ ) et l'équation  $\dot{s}_x = \dot{x} c_x$  est ajoutée au système. Les termes  $\cos(x)$  sont quant à eux remplacés par une variable  $c_x$  avec l'équation différentielle associée  $\dot{c}_x = -\dot{x} s_x$ . L'observabilité algébrique locale peut alors être testée sur le modèle obtenu, grâce à l'algorithme de Sedoglavic, implémenté par l'auteur sous le logiciel de calcul symbolique Maple.

### 3.2.3 Application au modèle non-linéaire de l'hélicoptère

L'expression analytique du modèle décrit en section 2.3.6.1, qui prend en compte les efforts générés par les deux rotors ainsi que les effets aérodynamiques secondaires, est développée pour être mise sous la forme d'un système rationnel (équation (3.1)) constitué des équations (2.40), (2.54) et (2.62). Nous ne reproduisons pas ici l'expression développée du modèle en raison de la taille des équations. L'état  $\mathbf{x}$  du modèle initial est donné par l'équation suivante :

$$\mathbf{x} = [x, y, z, u, v, w, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T = [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}^B, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}^B]^T \quad (3.2)$$

Il est alors augmenté des 20 paramètres donnés par l'équation (3.3), dont nous rappelons la définition dans le tableau 3.1 et considérés comme des états à dérivée nulle, ainsi que des nouvelles variables introduites pour s'affranchir des fonctions sinus et cosinus :

$$\boldsymbol{\theta} = [C_x, C_y, C_z, C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}, \alpha_l, \alpha_u, \gamma_l, \Delta_u, d_{l,(z)}, d_{cp,(z)}, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, K_{mot}, K_{ser}, m, g, \rho_{air}]^T \quad (3.3)$$

L'état augmenté  $\mathbf{x}_a$  devient alors :

$$\mathbf{x}_a = [s_\phi, c_\phi, s_\theta, c_\theta, s_\psi, c_\psi, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}]^T \quad (3.4)$$

Les entrées  $\mathbf{u}$  du modèle restent identiques, de même que les sorties :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_{lat}, u_{lon}, u_{thr}, u_{ped}]^T \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} = [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}^B, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}^B]^T \end{aligned} \quad (3.5)$$



Les tests d'observabilité/identifiabilité du modèle peuvent alors être menés<sup>1</sup>. L'objectif est de répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les mesures dont il est nécessaire de disposer pour permettre l'estimation des paramètres?
- Quels paramètres est-il nécessaire de calculer ou de mesurer indépendamment?

En fonction des sorties mesurées, l'ensemble des paramètres identifiable n'est pas le même. Le tableau 3.2 liste les paramètres identifiables pour différentes combinaisons des sorties. La dernière colonne du tableau est la dimension de l'ensemble des variables non-observables (renvoyée par l'algorithme). Ce chiffre correspond donc au nombre de variables d'état non-observables qui doivent être considérées connues (c'est-à-dire fixées à une valeur constante) pour rendre l'ensemble observable.

En première ligne du tableau, on remarque que tous les paramètres ne sont pas identifiables même si on mesure l'ensemble de l'état. La dimension des états augmentés non-observables (états et paramètres) est de dimension 3, ce qui signifie qu'il est nécessaire de fixer au moins trois des paramètres non-observables pour rendre les autres identifiables. C'est ce que l'on vérifie en deuxième, troisième et quatrième ligne en fixant des paramètres connus (masse volumique de l'air  $\rho_{air}$ , accélération de la gravité  $g$ ) ou facilement mesurables (masse  $m$ , gain des moteurs  $K_{mot}$ , voir section 1.7.2). Dans les lignes suivantes, on teste différentes configurations des sorties mesurées. Selon les combinaisons, certains états ne sont plus observables à partir des entrées-sorties.

On peut noter que les paramètres d'un modèle complexe sont en général plus facilement identifiables, en raison des relations plus complexes entre eux. Ainsi, si on considère le modèle ne prenant pas en compte les effets aérodynamiques secondaires (c'est-à-dire les frottements aérodynamiques sur le corps, ce qui revient à fixer  $C_{x,y,z} = C_{lp,mq,nr} = [0, 0, 0]^T$ ), des défauts d'identifiabilité supplémentaires apparaissent, comme présenté dans le tableau 3.3. Il est clair dans ce cas que la position du centre de poussée  $d_{cp,(z)}$  n'est pas observable, ce qui peut être constaté dans le tableau.

En conclusion, il ressort des tableaux 3.2 et 3.3 qu'il est nécessaire de mesurer la position du drone  $\xi$  et son attitude  $\eta$  afin d'estimer correctement ses paramètres. Les mesures de vitesse  $v^B$  et de vitesse angulaire  $\omega^B$  n'apportent pas d'information supplémentaire améliorant l'identifiabilité. Cela justifie certains choix effectués lors de l'acquisition de données (section 3.3) et lors de l'estimation (section 3.4). Certains paramètres doivent néanmoins être fixés (c'est-à-dire mesurés ou estimés séparément), quelque soient les mesures considérées : la masse et le gain des moteurs pour le premier modèle (tableau 3.2), à quoi s'ajoutent les inerties  $I_{xx}$  et  $I_{yy}$  pour le second modèle (tableau 3.3). Ces paramètres sont heureusement facilement mesurables (voir section 1.4.2).

Enfin, rappelons que cette analyse se base uniquement sur la structure du modèle. En pratique, les jeux de données à disposition peuvent ne pas permettre une bonne estimation. Ce sujet fait l'objet d'études supplémentaires présentées en section 3.5.4.

---

1. Un avantage de l'algorithme de Sedoglavic est son temps d'exécution, polynomial en fonction du nombre de variables et du degré du système. Dans notre cas le temps d'exécution pour chaque test, sous Maple, est d'une quinzaine de secondes sur un ordinateur de l'année 2010 avec un processeur Intel i7 @1.73 GHz.

**Table 3.1** – Notation et description des différents paramètres

Paramètre	Description
$C_x, C_y, C_z$	coefficients de trainée aérodynamique
$C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}$	coefficients d'amortissement aérodynamique
$\alpha_l$	coefficient de poussée du rotor inférieur
$\alpha_u$	coefficient de poussée du rotor supérieur
$\gamma_l$	coefficient de trainée du rotor inférieur
$\Delta_u$	ratio entre $\gamma_u$ et $\gamma_l$
$d_{l,(z)}$	coordonnée suivant $z^B$ du centre de rotation du rotor inférieur
$d_{cp,(z)}$	coordonnée suivant $z^B$ du centre de pression
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	moments d'inertie suivant $x^B, y^B$ et $z^B$
$K_{mot}$	gain des moteurs
$K_{ser}$	gain des servomoteurs
$m$	masse du véhicule
$g$	accélération de la gravité
$\rho_{air}$	densité de l'air

**Table 3.2** – Test d'identifiabilité structurelle pour le modèle de l'hélicoptère. "✓" signifie que le paramètre associé est identifiable, et "×" qu'il ne l'est pas. "F" signifie que le paramètre est fixé (déterminé d'une autre manière).

Sorties	Paramètre à estimer													Etats non-observables	Dim. non-obs.
	$C_{x,y,z}$	$C_{lp,mq,nr}$	$\alpha_{l,u}$	$\gamma_l$	$\Delta_u$	$d_{l,(z)}$	$d_{cp,(z)}$	$I_{xx,yy,zz}$	$K_{mot}$	$K_{ser}$	$m$	$g$	$\rho_{air}$		
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	×	×	×	×	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×		3
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	×	×	×	×	✓	✓	✓	×	×	✓	×	F	F		2
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	×	×	✓	F	F	F		1
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F		0
$\xi, \eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F		0
$\xi, \eta$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F		0
$v^B, \eta$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$s_\psi, c_\psi, \xi$	5
$v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$s_\psi, c_\psi, \xi$	5
$\eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$s_\psi, c_\psi, \xi$	5
$\xi$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$\eta$	3
$v^B$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$s_\psi, c_\psi, \xi, \eta$	8
$\eta$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	F	✓	F	F	F	$s_\psi, c_\psi, \xi$	5
$\omega^B$	×	×	×	×	✓	×	×	×	F	✓	F	F	F	$s_\theta, c_\theta, s_\psi, c_\psi, \xi, v^B, \eta$	9

**Table 3.3** – Test d'identifiabilité structurelle pour un modèle ne prenant pas en compte effets aérodynamiques secondaires. "✓" signifie que le paramètre associé est identifiable, et "×" qu'il ne l'est pas. "F" signifie que le paramètre est fixé (déterminé d'une autre manière).

Sorties	Paramètre à estimer										Etats non-observables	Dim. non-obs.
	$\alpha_l$	$\alpha_u$	$\gamma_l$	$\Delta_u$	$d_{l,(z)}$	$d_{cp,(z)}$	$I_{xx,yy}$	$I_{zz}$	$K_{mot}$	$K_{ser}$		
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	×	×	×	✓	×	×	×	×	×	✓		3
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	×	✓	×	×	×	×	F	✓		2
$\xi, v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓		1
$\xi, \eta, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓		1
$\xi, \eta$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓		1
$\xi, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓	$\eta$	4
$v^B, \omega^B$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓	$s_\psi, c_\psi, \xi, \eta$	9
$v^B, \eta$	✓	✓	✓	✓	✓	×	F	✓	F	✓	$s_\psi, c_\psi, \xi$	6
$v^B, \eta, \omega^B$	✓	✓	×	✓	×	×	×	×	F	✓	$s_\psi, c_\psi, \xi$	7
$\eta, \omega^B$	×	×	×	✓	×	×	×	×	F	✓	$s_\psi, c_\psi, \xi, v^B$	12

### 3.3 Acquisition de données d'entrée-sortie

L'identification d'un modèle nécessite de disposer de mesures issues d'expériences, qui impliquent en général la réalisation de bancs de tests (voir la section 1.7 sur l'identification des actionneurs, ou la section 1.4.2 sur l'estimation des paramètres d'inertie du drone) ou l'utilisation de matériel coûteux comme une balance aérodynamique (proposé par Koehl *et al.* (2010a)) ou un système de capture de mouvements. Afin de limiter le nombre d'expériences et le matériel nécessaire, nous proposons ici d'estimer un maximum de paramètres à partir de données issues d'un vol manuel de l'hélicoptère. Cette problématique a fait l'objet de l'article Roussel *et al.* (2016a).

L'étude de l'identifiabilité structurelle dans la section précédente a mis en lumière les paramètres qu'il est nécessaire de connaître avant l'estimation, et les états du modèle qu'il est nécessaire de mesurer pour estimer correctement les paramètres restants. Cette section traite de l'acquisition des données et des méthodes permettant la mesure des états nécessaires à l'estimation. L'estimation des paramètres à partir de ces données et à partir d'expériences spécifiques est étudiée en section 3.4.

#### 3.3.1 Principe et objectifs

Les jeux de données pour l'identification doivent idéalement exciter au maximum le système sur la bande passante visée pour permettre une estimation fiable des paramètres. On peut évaluer la qualité de l'identification au travers de la variance des paramètres estimés, qui permet de définir des intervalles de confiance autour de leur valeur estimée. Il est alors possible de définir les consignes en entrée du système qui permettent de minimiser la variance sur les estimées et de minimiser les corrélations entre les paramètres (voir par exemple Beltramini *et al.* (2011)). Ainsi, Morelli (1999) compare la précision de l'estimation obtenue à partir d'entrées classiques et d'entrées optimales dans le cas des paramètres aérodynamiques d'un avion, montrant l'intérêt de l'approche. Ces méthodes se basent en général sur la minimisation d'un critère de distance sur la borne de Cramér-Rao, la borne inférieure de la variance de l'estimateur (détaillée en section 3.5.5.2). Un certain nombre de ces critères sont donnés par Dobre (2010, p. 52).

De manière alternative, les techniques par balayage de fréquences (connues sous le terme "frequency sweep") ou utilisant des entrées pseudo-aléatoires se rapprochant d'un bruit blanc sont souvent utilisées (voir l'identification d'un modèle des actionneurs en section 1.7) et nécessitent moins d'information sur le système que les techniques d'expériences optimales : la connaissance de la bande passante du système à identifier est suffisante.

L'hélicoptère miniature considéré dans cette étude est instable, et l'application de consignes d'entrée est impossible en l'état pour des raisons pratiques évidentes. Il est nécessaire avant tout de mettre en place une commande permettant de stabiliser le système. Cela met en évidence deux points majeurs à prendre en considération :

1. L'identification d'un modèle est un processus itératif : un modèle du système est nécessaire pour l'étude de lois de commande, et une loi de commande est nécessaire à l'acquisition de données pour l'identification d'un modèle.
2. Le correcteur atténue les dynamiques du système, rendant potentiellement plus difficile l'identification d'un modèle à partir des entrées-sorties.

On peut alors envisager deux possibilités :

- La mise en place d'un correcteur performant (typiquement une commande en position) permettant l'utilisation d'entrées d'excitation prédéfinies et optimisées. On suit alors une méthodologie itérative pour la synthèse du correcteur, en utilisant une estimation grossière des paramètres du modèle qui est affinée au fil des itérations.
- La mise en place d'un correcteur "minimaliste" apportant la stabilité nécessaire à un vol

manuel de l'hélicoptère. Les entrées de consigne sont alors données par le pilote<sup>2</sup>, et ne sont donc ni reproductibles, ni optimales. En contrepartie, la synthèse du correcteur est simplifiée et il atténue moins la réponse du système, permettant une meilleure excitation. C'est cette dernière approche que nous considérons par la suite.

### 3.3.2 Correcteur dédié à l'obtention de données d'identification

Nous cherchons ici à mettre en place un correcteur permettant le vol manuel de l'hélicoptère tout en limitant l'ajout de dynamiques au système pour ne pas nuire à l'identification. Les quatre nouvelles entrées de consigne, classiques pour l'aéromodélisme et le pilotage manuel de drones, sont les suivantes :

- Angles de roulis et de tangage désirés, notés respectivement  $\phi^*$  et  $\theta^*$ .
- Vitesse de rotation des moteurs, notée  $\Omega^*$ .
- Vitesse de rotation autour de l'axe de lacet, notée  $r^*$ .

Nous mettons alors en place le correcteur statique présenté en figure 3.3. Il comporte une boucle interne de régulation des vitesses de rotation du véhicule, et une boucle externe pour les angles de tangage et roulis. Cette structure en cascade, ou hiérarchique, est largement utilisée en aéronautique (voir également la section 4.5 et le travail de Drouot (2013); Sève *et al.* (2014)). La vitesse de rotation des moteurs, qui détermine la poussée des rotors, est en boucle ouverte. Le correcteur comprend trois gains scalaires qui sont réglés expérimentalement en suivant une procédure classique sur les drones :

1. Les gains sont initialisés à une valeur faible ou préalablement estimés grâce à un premier modèle du véhicule s'il est disponible.
2. Le gain de l'axe de lacet,  $k_3$ , est réglé avec le drone proche du décollage grâce à l'entrée  $\Omega^*$ .
3. Les gains restants sont alors réglés successivement en allant de la boucle interne vers la boucle externe ( $k_2$  puis  $k_1$ ).

La dynamique de l'axe de roulis et de tangage est similaire, c'est pourquoi on peut utiliser la même valeur des gains sur ces deux axes.

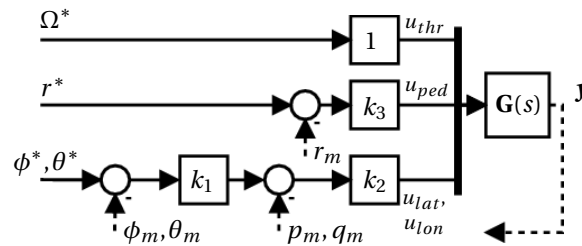


Figure 3.3 – Contrôleur pour l'acquisition de données d'identification.

La plupart des hélicoptères miniatures disposent d'une barre stabilisatrice (barre de Bell) qui a un effet stabilisant sur les axes de roulis et de tangage. Le correcteur sur ces axes n'est alors plus nécessaire, et un modèle de la barre de Bell est alors inclus dans le modèle de l'hélicoptère (voir par exemple Sugawara et Shimada (2014); Wang *et al.* (2012a)). Le correcteur peut alors se limiter à l'axe de lacet. Nous considérons ici un hélicoptère coaxial dépourvu de barre stabilisatrice, permettant d'augmenter la manœuvrabilité au détriment de la stabilité (voir la maquette en figure 1.19).

Les lois de commande associées sont données par le système d'équations ci-dessous :

2. Dans le cas d'un pilotage manuel de l'hélicoptère, c'est le pilote qui joue le rôle du contrôleur en stabilisant sa vitesse et sa position, et on a donc un couplage supplémentaire entre les entrées et les sorties de l'hélicoptère. On voit alors dans la littérature des approches considérant un modèle du pilote, en général complexe à obtenir car très spécifique à l'application. Vrdoljak *et al.* (2017) étudie cette approche (appelée "man-in-the-loop") dans le cas de la commande en attitude d'un hélicoptère. Nous négligeons ici ce couplage supplémentaire.

$$\begin{cases} u_{lat} = k_2(k_1(\phi^* - \phi_m) - p_m) \\ u_{lon} = -k_2(k_1(\theta^* - \theta_m) - q_m) \\ u_{thr} = k_3\Omega^* \\ u_{ped} = k_4(r^* - r_m) \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.3.3 Problématiques d'identification en boucle fermée

L'ajout d'un correcteur tel que celui introduit à l'équation 3.6 est nécessaire pour stabiliser le système. Les données pour l'estimation des paramètres du modèle sont alors issues d'un fonctionnement en boucle fermée. Cela implique diverses difficultés liées à leur contenu fréquentiel limité par le correcteur, mais également pour l'estimation : du fait de la boucle de retour, l'entrée de commande est corrélée avec le bruit de sortie, ce qui peut entraîner un biais dans les estimations.

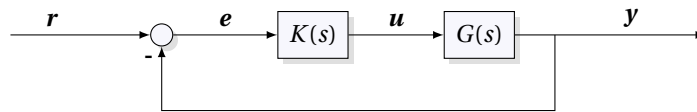


Figure 3.4 – Schéma du système  $G(s)$  et de sa boucle de retour.

Dans la littérature, trois approches principales sont considérées pour l'identification d'un système à partir de données issues d'un fonctionnement en boucle fermée (voir par exemple Garnier *et al.* (2000)) :

- L'approche "directe", qui utilise les entrées de commande  $\mathbf{u}$  et les sorties mesurées  $\mathbf{y}$  du système pour l'identifier directement, en ignorant la boucle de retour et l'entrée de consigne  $\mathbf{r}$ . Du fait de la boucle fermée, les signaux de commande sont entachés du bruit de mesure, ce qui constitue l'inconvénient principal de la méthode. Cela peut entraîner une mauvaise estimation des paramètres, sauf si un "bon" modèle du bruit est utilisé.
- L'approche "indirecte" : les entrées  $\mathbf{r}$  et les sorties  $\mathbf{y}$  sont utilisées pour l'identification. On identifie alors le système avec sa boucle fermée. On utilise la connaissance du correcteur pour en déduire le système en boucle ouverte. Dans ce cas, toute erreur sur le modèle du correcteur entraîne une erreur sur les estimées des paramètres.
- L'approche "entrée-sortie communes" : on considère le système d'entrée  $\mathbf{r}$  et de sortie  $\{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$ , ce qui permet l'identification conjointe du système en BO et de son correcteur. Si le correcteur  $\mathbf{K}$  est connu, cette méthode est équivalente à la méthode indirecte : les mesures de  $\mathbf{u}$  sont redondantes puisqu'on a :  $\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{y})$ .

Dans le cas où le correcteur est connu, il est naturel d'utiliser cette connaissance grâce à la méthode indirecte. On peut alors utiliser de manière transparente les méthodes d'identification établies pour les systèmes en boucle ouverte (voir section 3.4).

### 3.3.4 Enregistrement des données durant un vol

Les données utilisées pour l'identification sont issues de deux sources résumées dans le tableau 3.4 :

- l'enregistrement à bord des estimations de l'état du drone à l'aide des capteurs embarqués,
- la position et l'orientation estimées à l'aide d'un système de capture de mouvement MoCAP (figure 3.5), détaillé en section 1.6.2.4.

La commande en attitude utilise l'estimation de l'attitude issue des capteurs embarqués, c'est pourquoi les données  $\boldsymbol{\eta}_{IMU}$  sont utilisées pour l'identification. L'attitude  $\boldsymbol{\eta}_{MOCAP}$  issue du MoCAP est utilisée pour réaliser des tests d'intégrité (s'assurer que les estimations ne sont pas aberrantes, qu'elles sont exprimées dans le bon repère, etc.) et pour la synchronisation des données issues de la centrale inertielle et du MoCAP.

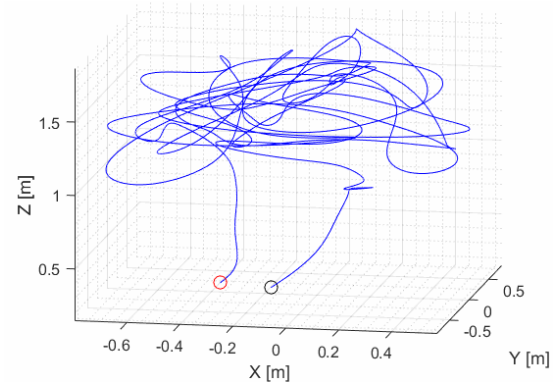
**Table 3.4** – Données enregistrées à bord du drone ou au sol.

Données enregistrées	
A bord	Au sol
-	Position $\xi$
Attitude $\eta_{IMU}$	Attitude $\eta_{MOCAP}$
Vitesse angulaire $\omega^B$	-
Force spécifique $f_{acc}$	-

La vitesse du drone dans le repère inertiel,  $v^I$ , est calculée par la dérivée temporelle de la position  $\xi$  obtenue par le MoCAP. Le calcul de la dérivée est très sensible au bruit de mesure, et l'utilisation d'une méthode robuste au bruit permet d'améliorer la précision<sup>3</sup>. Nous utilisons ici la méthode de Lanczos (Lanczos, 1988) dont le principe général est le suivant : la fonction est approximée localement par un polynôme d'ordre 2 autour du point d'intérêt par la méthode des moindres carrés, et la dérivée en ce point est approximée par la dérivée (analytique) du polynôme.

A partir de la vitesse  $v^I$ , la vitesse  $v^B$  dans le repère du drone est obtenue grâce aux équations cinématiques (équation (2.28)).

De cette manière, l'ensemble de l'état du véhicule est reconstruit.

**(a)** Photographie du système**(b)** Position 3D reconstruite**Figure 3.5** – Utilisation du système MOCAP pour l'acquisition de données d'identification.

### 3.3.5 Pré-traitement et analyse des données

Il est nécessaire d'effectuer un certain nombre de traitements et de vérifications sur les données acquises durant un vol. Tout d'abord, les données enregistrées au sol (MoCAP) et à bord (capteurs embarqués) doivent être synchronisées. Cela est fait hors ligne (en post-traitement), en cherchant le décalage temporel qui maximise l'inter-corrélation entre les jeux de données. Ensuite, le jeu de donnée issu d'un vol est scindé en deux parties indépendantes : l'une pour l'identification, l'autre pour la validation du modèle identifié. Ainsi, sur un vol typique d'une durée d'une minute, nous gardons les 30 premières secondes pour l'identification et les 30 secondes restantes pour la validation.

**Analyse d'intégrité des données issues des capteurs.** Les analyses d'intégrité des mesures permet de s'affranchir d'un certain nombre d'erreurs possibles : erreurs dans les repères, dans les unités ou erreurs effectuées durant l'acquisition des données. Nous proposons ici de reconstruire

3. Lors du calcul de dérivée par l'opération  $\dot{x}(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ , on réalise une erreur de calcul en  $O(\Delta t)$ . De plus, une erreur  $\epsilon(t)$  sur le signal produira une erreur  $\frac{2\epsilon(t)}{\Delta t}$ . A une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz, une erreur en position de 1 mm produira donc une erreur en vitesse de l'ordre de 0.2 m/s et une erreur en accélération de 40 m/s<sup>2</sup>. On voit donc là tout l'intérêt des méthodes robustes au bruit.

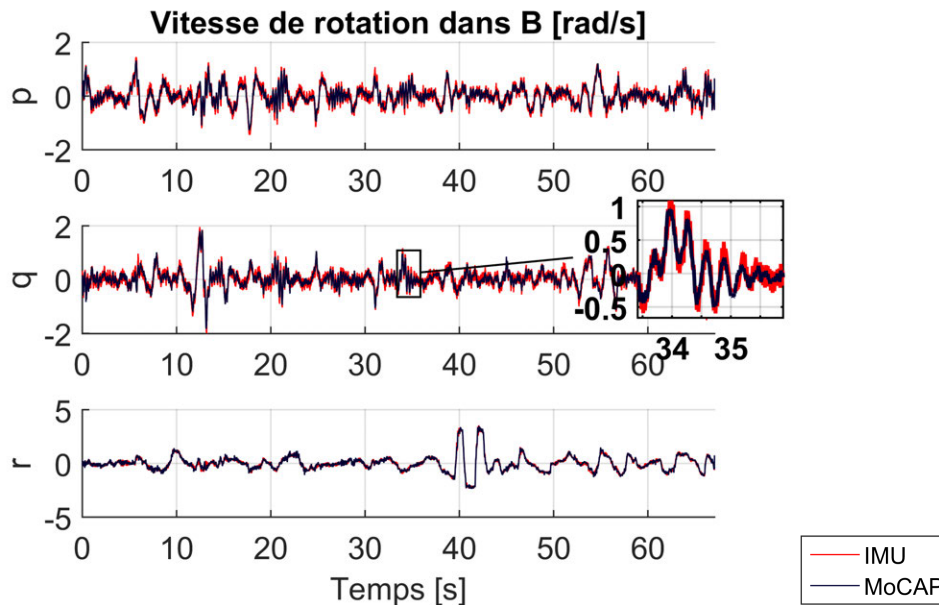
les mesures des capteurs à l'aide des données issues du MoCAP, afin de s'assurer de la cohérence des jeux de données. Nous reconstruisons ici les mesures des gyromètres (vitesses de rotation  $p$ ,  $q$  et  $r$ ) et des accéléromètres (force spécifique).

La figure 3.6 montre la comparaison entre les vitesses de rotation mesurées par les gyromètres et celles reconstruites grâce au MoCAP et à l'équation cinématique (2.24). Les vitesses de rotation sont très proches, montrant la cohérence des données.

La reconstruction de la force spécifique, tracée en figure 3.7, se base sur l'équation (1.5). L'obtention des différents termes de l'équation nécessite des calculs impliquant plusieurs dérivées successives et introduisant des erreurs importantes :

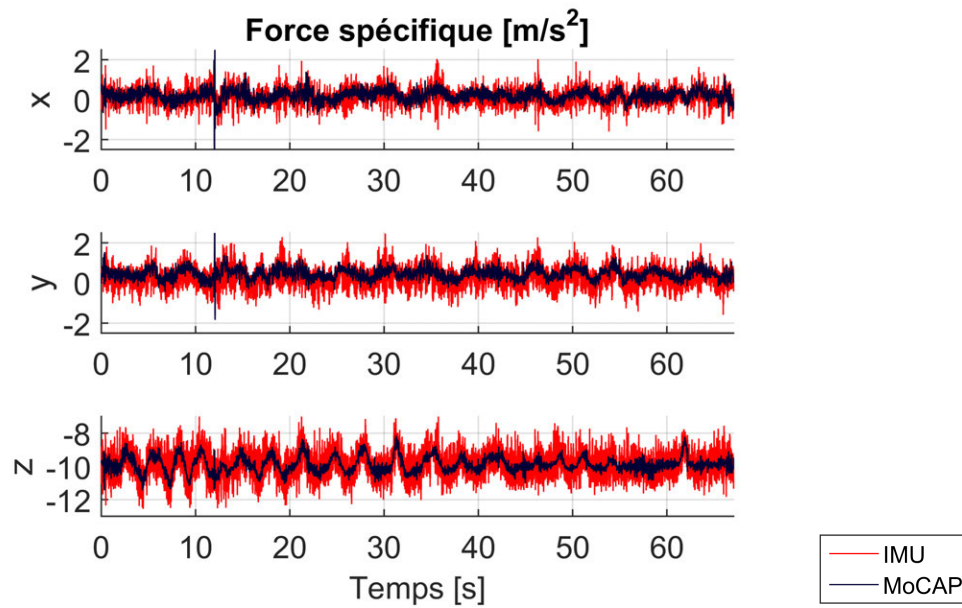
- à partir de la position dans le repère inertiel  $\xi_{MOCAP}$ , on calcule la vitesse  $v^I$ , puis  $v^B$ , et enfin  $\dot{v}^B$ ;
- la vitesse de rotation  $\omega^B$  est obtenue à partir de l'équation cinématique (2.24), et nécessite donc le calcul de la dérivée temporelle des angles d'Euler  $\eta_{MOCAP}$ ;
- la gravité est projetée dans le repère du drone à l'aide de  $\eta_{MOCAP}$ .

Comme précédemment, l'utilisation d'une méthode de dérivation robuste au bruit est essentielle ici, et nous utilisons la méthode proposée par Lanczos (1988) (voir note 3). Malgré le bruit important sur les données mesurées (vibrations de la structure) et des données reconstruites (dérivées successives), on peut noter la cohérence des données.

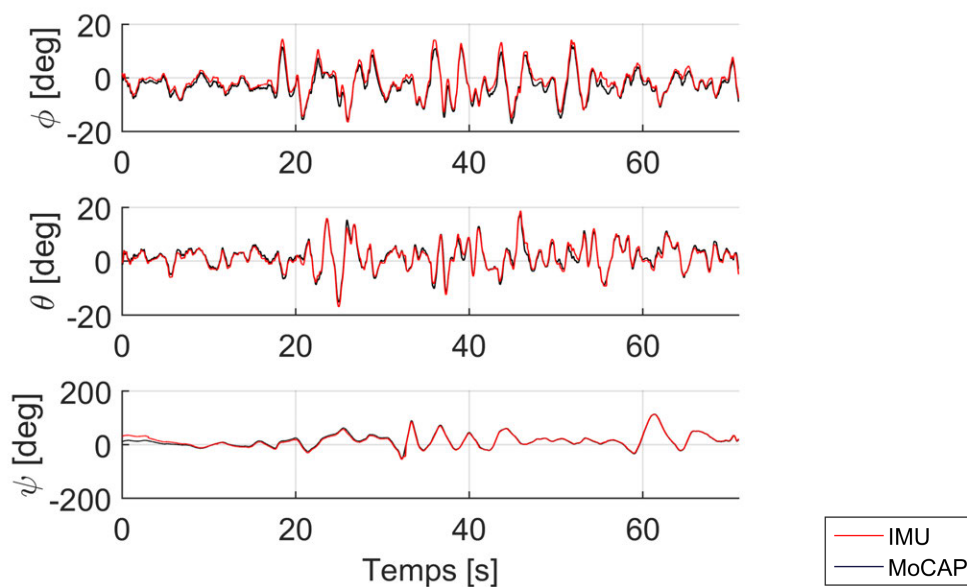


**Figure 3.6** – Comparaison entre les vitesses de rotation du véhicule mesurées par les gyromètres et reconstruites à l'aide des données MoCAP.

**Analyse d'intégrité des données de navigation.** L'attitude estimée grâce au système de capture de mouvement étant très précise (de l'ordre du dixième de degré), elle peut permettre de vérifier les estimations effectuées par le système de navigation embarqué (voir également l'annexe 4.8). La figure 3.8 en montre une comparaison, et la figure 3.9 montre le tracé de l'erreur entre les deux courbes. L'angle de roulis  $\phi$  présente un léger biais de l'ordre de 2 degrés. L'erreur maximale effectuée durant ce vol sur les axes de roulis et de tangage est d'environ 5 degrés, mais est bien supérieure pour l'angle de lacet. L'estimation de ce dernier repose en effet sur les magnétomètres qui sont perturbés par les moteurs (notamment lors du démarrage, entre 0 et 15 secondes).



**Figure 3.7** – Comparaison entre la force spécifique mesurée par les accéléromètres et reconstruites à l'aide des données MoCAP. Le bi-rotor génère des vibrations importantes de la structure qui produit un bruit important sur la mesure des accéléromètres.



**Figure 3.8** – Angles d'attitude de l'hélicoptère durant le vol, estimé par les algorithmes de navigation (rouge) et par le système MoCAP (noir).



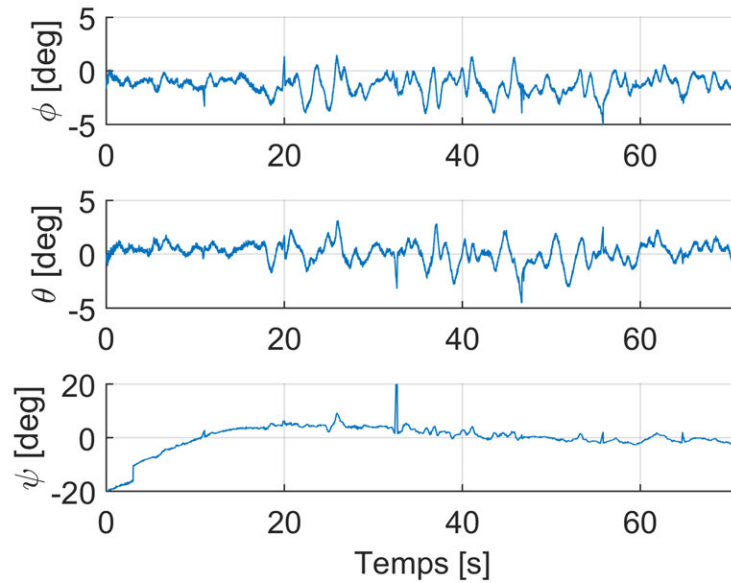


Figure 3.9 – Erreur d'attitude effectuée par les algorithmes de navigation, en comparant avec le système MoCAP

### 3.4 Méthodologie d'estimation des paramètres

Dans cette partie, nous présentons la méthodologie générale de l'estimation des paramètres. Nous donnons la définition des erreurs et fonctions de coût utilisées dans la suite du chapitre. Les différentes méthodes d'estimation et d'optimisation sont ensuite exposées. Enfin, l'application au véhicule étudié est présentée.

#### 3.4.1 Principe général de l'estimation et définitions

Le principe général de l'estimation par erreur de sortie est donné en figure 3.10 : il s'agit, en utilisant l'entrée  $u(t)$ , de trouver le vecteur des paramètres  $\theta$  qui minimise un critère d'erreur entre la sortie du modèle  $\hat{y}(t)$  et les mesures  $y_m(t)$ .

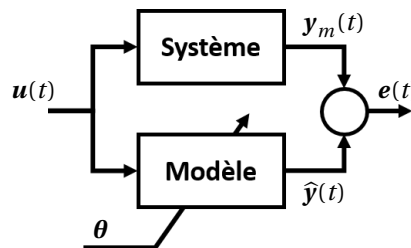


Figure 3.10 – Principe de l'estimation des paramètres du modèle

**Définition des grandeurs et notations.** Les grandeurs mesurées, comme le vecteur des sorties  $y_m$ , sont échantillonnées à une fréquence  $f_e = 1/T_e$ . Par la suite, pour un vecteur  $x$  d'échantillons d'un signal, on notera  $x_k$  ou  $x(k)$  l'échantillon  $k$  du vecteur  $x$ , correspondant au temps  $t = kT_e$ . L'index  $k$  est un nombre entier dans  $[1, N_e]$ .

On note :

- $\theta$  : vecteur des paramètres du modèle, de dimension  $(N_p \times 1)$ .
- $\hat{\theta}$  : vecteur des paramètres estimés.
- $y_m$  : vecteur des sorties mesurées, de dimension  $(N_y \times 1)$ .

- $\hat{\mathbf{y}}$  : vecteur des sorties simulées ou prédites, de dimension  $(N_y \times 1)$ . Les sorties du modèle dépendent des paramètres de ce modèle, et on a donc  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\theta})$ .

### 3.4.1.1 Définition des erreurs

Nous rappelons dans cette section l'expression de différents critères d'erreur calculés à partir de la sortie simulée  $\hat{\mathbf{y}}$  et de la sortie de référence  $\mathbf{y}_m$  (mesurée, issue du jeu de donnée d'identification). Ces critères sont utiles dans le cadre de l'estimation, mais également par la suite pour l'évaluation du modèle (section 3.5). Nous donnons ici les expressions pour un système multivariable quelconque.

**Erreur de simulation (OE - Output Error).** L'erreur de simulation<sup>4</sup>  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  est la différence entre la sortie mesurée et la sortie simulée grâce au modèle (Ljung, 1999, p. 84). Elle est donnée à un instant  $t = kT_e$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{y}_{mk} - \hat{\mathbf{y}}_k \quad (3.7)$$

Dans le cas d'un système multivariable,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  est un vecteur de dimension  $N_y$  (nombre de sorties).

On définit également la matrice des erreurs de simulation  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$ , de taille  $(N_e \times N_y)$ , qui contient les erreurs de simulation pour chaque sortie (colonnes de la matrice) et chaque échantillon (lignes de la matrice). Les erreurs de simulation sont également appelés "résidus" car elles représentent les données qui ne sont pas "reproduites" ou "expliquées" par le modèle.

**Somme des erreurs au carré (SSE - Sum of Squared Errors).** L'erreur SSE est la somme des erreurs (résidus) au carré. C'est un scalaire. On peut la calculer de différentes manières, la dernière égalité montrant la notation matricielle :

$$e_{SSE} = \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_s} (\mathbf{E}_{k,i})^2 = \sum_{k=1}^{N_s} [\boldsymbol{\varepsilon}_k]^T \boldsymbol{\varepsilon}_k = \text{trace}(\mathbf{E}^T \mathbf{E}) \quad (3.8)$$

On peut pondérer l'erreur pour accorder plus ou moins d'importance à certaines sorties, par l'intermédiaire d'une matrice de pondération  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})$ , de taille  $(N_y \times N_y)$ , semi-définie positive. L'erreur SSE devient alors :

$$e_{SSE} = \sum_{k=1}^{N_s} [\boldsymbol{\varepsilon}_k]^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}_k = \text{trace}(\mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{E}) \quad (3.9)$$

**Moyenne des erreurs au carré (MSE - Mean Square Error) pondérée.** Il s'agit de l'erreur SSE normalisée par le nombre d'échantillons  $N_e$  :

$$e_{MSE} = \frac{1}{N_e} \text{trace}(\mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{E}) \quad (3.10)$$

Cette erreur  $e_{MSE}$  (c'est un scalaire) est largement utilisée dans le cadre de l'estimation comme fonction de coût (*loss function* en anglais) : c'est-à-dire comme mesure de la qualité d'une estimation. Ainsi, l'algorithme des moindres carrés (linéaires ou non-linéaires) permet de trouver le vecteur des paramètres qui minimise cette erreur MSE. Le choix de la matrice de pondération est discuté en section 3.5.1.1.

### 3.4.1.2 Méthodes d'estimation

Il existe plusieurs grandes familles de méthodes pour l'estimation des paramètres d'un modèle :

4. L'erreur de simulation est l'erreur de prédiction avec un horizon infini. Dans le cas d'un modèle de structure OE, l'erreur de prédiction et l'erreur de simulation sont identiques. En effet, le modèle OE utilise uniquement les entrées passées pour prédire les sorties futures (Ljung, 1999).

- les méthodes de sous-espace, qui consistent à estimer des modèles en représentation d'état à l'aide de la méthode des moindres-carrés<sup>5</sup> (Kojio *et al.*, 2014; Mercère *et al.*, 2007);
- les techniques IV (appelées également approches par corrélation), qui introduisent une “variable instrumentale” de manière à minimiser la corrélation entre les résidus et les mesures<sup>6</sup> (voir les travaux de Söderström et Stoica (1983); Young (2011) et de Gilson et Van Den Hof (2005) pour un système en boucle fermée);
- les méthodes de minimisation de l'erreur de prédiction (PEM), qui englobent un ensemble de méthodes, dont celles des moindres carrés et du maximum de vraisemblance<sup>7</sup>;

Un nombre important d'outils dédiés à l'identification des systèmes est disponible sous forme de boîtes-à-outils (*toolbox*) Matlab. On peut mentionner SID (*System Identification Toolbox*) de Ljung (2008), UNIT (*University of Newcastle Identification Toolbox*) de Ninness *et al.* (2013) et CAPTAIN (*Computer-Aided Program for Time-series Analysis and Identification of Noisy systems*) de Young et Taylor (2012) pour les approches PEM. La boîte-à-outils CONTSID (*Continuous-Time System Identification Toolbox*) de Garnier *et al.* (2008) permet l'identification de modèles à temps continu. Enfin, FDIDENT (*Frequency Domain System Identification Toolbox*) de Kollár *et al.* (2006) est dédiée aux méthodes fréquentielles.

Nous nous concentrons ici sur les méthodes PEM, qui sont plus générales que les méthodes de sous-espace, et qui présentent une plus grande simplicité d'écriture mathématique et de mise en œuvre que les techniques IV. Ces dernières sont par ailleurs peu adaptées aux systèmes MIMO. D'autres classifications sont utilisées dans la littérature, notamment par Jategaonkar (2006), qui considère trois catégories : les méthodes par erreur de sortie, par erreur de filtre et par erreur d'équation. Cette classification inclut non seulement la méthode d'estimation mais également la forme du modèle et la méthode de simulation :

- Méthode par erreur d'équation : il s'agit de l'application de la méthode des moindres carrés à un modèle linéaire. Dans le cas de résidus corrélés, l'introduction de variables instrumentales (techniques IV) permet de compenser l'effet du bruit corrélé qui peut biaiser les résultats d'estimation par moindres carrés.
- Méthode par erreur de sortie : la méthode PEM est utilisée cette fois sur un modèle non-linéaire par erreur de sortie. Les états du modèle sont obtenus par intégration numérique des équations différentielles.
- Méthode par erreur de filtre : la méthode est similaire à la précédente, mais utilise une approche stochastique : les états du modèle sont estimés par un filtre, linéaire ou non-linéaire (en général un filtre de Kalman). Cela permet de prendre en compte non seulement le bruit de mesure, mais également les erreurs associées au modèle (“process noise”). L'erreur est ensuite minimisée de la même manière que précédemment, à l'aide de la méthode PEM. En présence de bruit de mesure important, cette méthode peut mener à de meilleurs résultats que la précédente quant à la convergence et la qualité des estimations (voir Jategaonkar (2006, chap. 5) et Jategaonkar (1993)).

On peut envisager également l'utilisation de méthodes indirectes : l'estimation des paramètres et des états du système est alors faite simultanément, en considérant les paramètres inconnus comme des états supplémentaires à dérivée nulle, grâce à un filtre de Kalman étendu par exemple. Cette méthode a été appliquée par Koehl *et al.* (2010a) pour l'estimation de certains paramètres d'un modèle d'hélicoptère miniature rigidement lié à une balance aérodynamique (mesurant forces et moments). Davantage de détails sont donnés par Koehl *et al.* (2012, chap. 3). Les performances de cette méthode dépendent cependant des matrices de covariance du bruit de mesure

5. Sous Matlab, on peut utiliser la fonction `n4sid` de la toolbox SID (*System Identification Toolbox*).

6. Sous Matlab, on peut utiliser la fonction `iv4` de la toolbox SID qui utilise une implémentation dite “en quatre étapes” de l'algorithme SRIVC. La toolbox CONTSID (*Continuous-Time System Identification Toolbox*) fournit également les fonctions `srivc`, `ivsvf`, `lssvf` ou encore `coe`.

7. La toolbox SID fournit de nombreuses fonctions permettant l'identification de modèles de diverses structures en utilisant cette méthode : pour les modèles polynomiaux (`arx`, `bj`, `oe`, `armax` et la fonction plus générale `polyest`), les modèles en représentation d'état (`ssest`) ou sous forme d'une fonction de transfert (`tfest`), les modèles “boite-grise” (`greyest`, `nlgreyest`) ou d'autres structures encore (voir la fonction très générique `pem`).

et d'erreur de modèle, qui sont en général inconnues et souvent réglées de manière empirique. La méthode est cependant bien adaptée à l'estimation "en ligne" des paramètres (Hamel et Jategaonkar, 1996). Elle est appliquée à l'identification du modèle d'un moteur en section 1.7.2, et les résultats sont comparés à la méthode par erreur de sortie. L'utilisation de cette méthode pour un modèle trop complexe est cependant délicate, à cause notamment du calcul de la jacobienne et de l'estimation des matrices de covariance du bruit. C'est pourquoi nous nous concentrons par la suite sur la méthode par erreur de sortie : c'est-à-dire l'utilisation d'un modèle par erreur de sortie et de la méthode PEM.

**La méthode PEM (Prediction Error Minimization).** La méthode PEM se base sur la minimisation d'une norme pondérée de l'erreur de prédiction :

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \mathbf{l}(\boldsymbol{\varepsilon}_k(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.11)$$

Il s'agit d'une grandeur scalaire, avec  $\mathbf{l}(\cdot)$  une norme à définir. Selon cette définition générale proposée par Ljung (1999, p. 205), la méthode des moindres carrés est alors un cas particulier de la méthode PEM avec  $\mathbf{l}(x) = x^2$  (ou  $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}$  dans le cas multivariable avec matrice de pondération, voir également la section 3.5.1.1). Dans ce cas, la fonction de coût devient alors l'erreur MSE (équation (3.10)).

Le problème de la minimisation de l'erreur de prédiction revient donc à résoudre :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.12)$$

Cela est fait de manière itérative en utilisant un algorithme d'optimisation.

### 3.4.1.3 Algorithmes d'optimisation

Il existe un nombre important d'algorithmes d'optimisation, permettant d'obtenir itérativement les minimums d'une fonction de coût. On peut mentionner les principaux algorithmes suivants :

- L'algorithme de descente du gradient, qui prend en compte la dérivée première de la fonction à minimiser comme direction de descente.
- L'algorithme du Simplex (appelé également méthode de Nelder-Mead (Lagarias *et al.*, 1998)), qui permet de se passer du calcul du gradient et utilise uniquement des évaluations de la fonction (recherche "directe").
- Les algorithmes de Newton (ou Newton-Raphson) et de quasi-Newton, qui utilisent une estimée de la dérivée seconde (hessienne) construite à partir du gradient, améliorant ainsi les résultats par rapport à l'algorithme du gradient dans le cas de problèmes complexes.
- L'algorithme de Gauss-Newton, qui permet de résoudre des problèmes de moindre-carrés non-linéaires, de même que ses améliorations comme l'algorithme de Levenberg-Marquardt qui est à mi-chemin entre l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient, et l'algorithme à régions de confiance (ou "trust-region-reflective algorithm"). Ce dernier améliore encore les performances, en matière de rapidité de convergence en particulier, au prix d'une plus grande complexité d'implémentation.

Afin d'exploiter les propriétés de la fonction de coût MSE lors de l'évaluation des estimations (section 3.5.5), nous préférons les méthodes minimisant les moindres carrés, et en particulier l'algorithme à régions de confiance pour ses bonnes propriétés de convergence (voir Coleman et Li (1996) et Berghen (2004)). Les implémentations dans Matlab sont utilisées.

### 3.4.2 Application à l'estimation des paramètres du modèle de l'hélicoptère

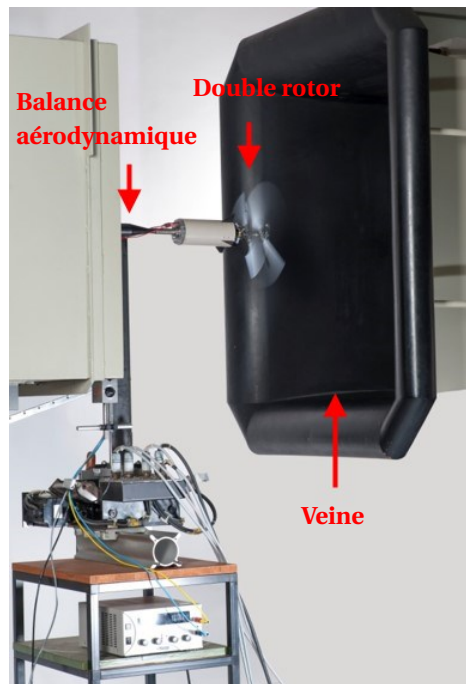
Certains paramètres peuvent être estimés ou calculés à l'aide d'expériences spécifiques. C'est le cas des paramètres liés à la géométrie du véhicule, comme la matrice d'inertie estimée par la méthode du pendule trifilaire en section 1.4.2, la masse et les paramètres dimensionnels. Les paramètres des actionneurs peuvent également être estimés séparément, comme présenté en section 1.7. Enfin, c'est le cas également pour les paramètres aérodynamiques des rotors, dont l'estimation est présentée ici.

#### 3.4.2.1 Paramètres aérodynamiques des rotors

**Estimation à l'aide d'une balance aérodynamique.** Les paramètres aérodynamiques des rotors sont classiquement déterminés en utilisant une balance aérodynamique permettant de mesurer les forces et moments dans les trois directions de l'espace (voir la figure 3.11). L'objectif est ici de cartographier la poussée du rotor et le moment de lacet. Lorsque les angles du plateau cyclique sont nuls, le bilan des efforts se résume aux deux relations suivantes, issues du système d'équations (2.59) :

$$\begin{cases} F_Z &= -\alpha_u \Omega_u^2 - \alpha_l \Omega_l^2 \\ N &= \gamma_u \Omega_u^2 - \gamma_l \Omega_l^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $\alpha_u$ ,  $\alpha_l$ ,  $\gamma_u$  et  $\gamma_l$  les paramètres à déterminer. Les grandeurs  $F_Z$ ,  $N$ ,  $\Omega_u$  et  $\Omega_l$  sont toutes mesurées.



**Figure 3.11** – Photographie du montage expérimental : le véhicule est fixé sur une balance aérodynamique permettant de mesurer les efforts. Le montage est ici placé dans la veine d'une soufflerie subsonique.

Différentes consignes de vitesse ( $\Omega_u$  et  $\Omega_l$ ) sont appliquées aux deux rotors, et les efforts sont mesurés en régime établi. Le système (3.13) peut alors être résolu par la méthode des moindres carrés, permettant de tracer les plans correspondant à la cartographie des rotors présentés en figure 3.12. L'erreur effectuée, présentée en figure 3.13, est faible, permettant de valider le modèle et l'estimation.

Les résultats d'estimation sont présentés dans le tableau 3.5. L'intervalle de confiance à 95% est calculé à partir de la matrice d'information de Fisher, elle-même calculée suivant la méthode

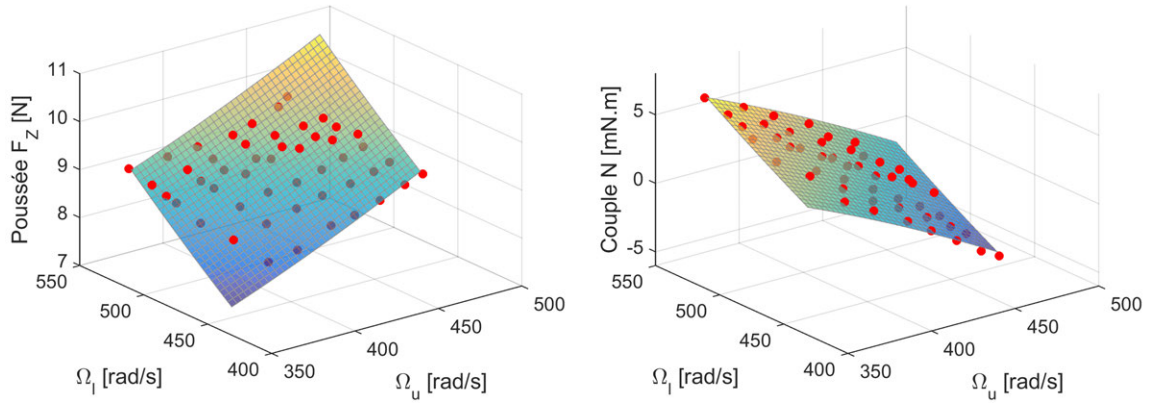


Figure 3.12 – Estimation des paramètres aérodynamiques du bi-rotor.

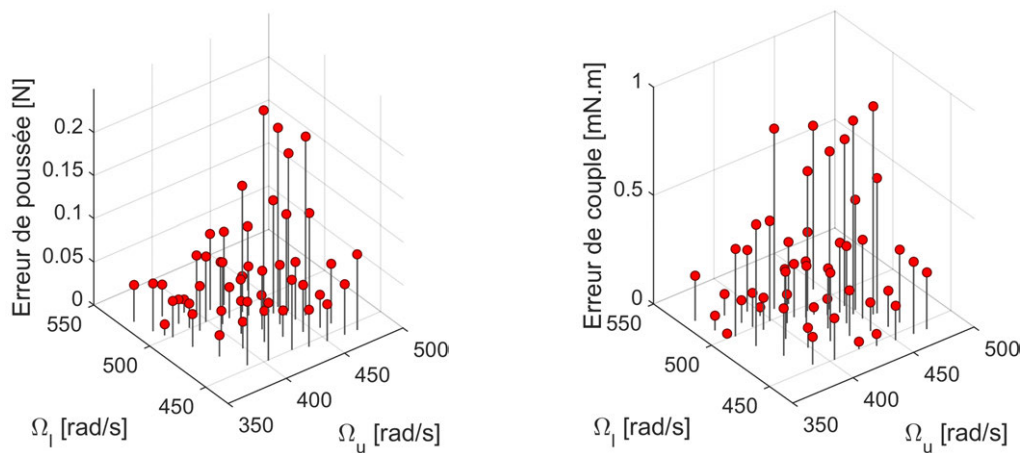


Figure 3.13 – Erreurs entre le modèle et les mesures.

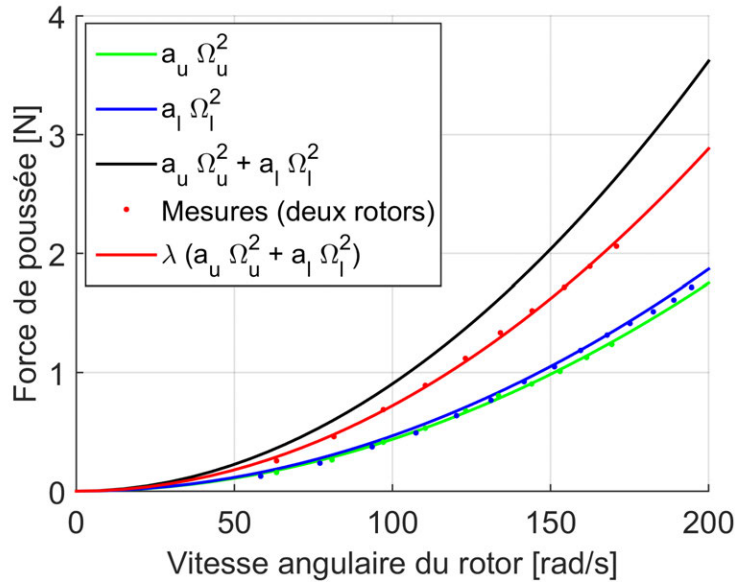
décrite en section 3.5.5.2.

Table 3.5 – Résultats d'estimation.

Paramètre	Valeur estimée	Confiance à 95%	Unité
$\alpha_u$	$1.87e-05$	$\pm 3.5\%$	$\text{N}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$
$\alpha_l$	$2.49e-05$	$\pm 2.0\%$	$\text{N}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$
$\gamma_u$	$7.38e-05$	$\pm 4.1\%$	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$
$\gamma_l$	$6.10e-05$	$\pm 3.8\%$	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$

**Estimation des paramètres de portance avec un matériel bas-coût.** Une balance aérodynamique est un équipement coûteux, et nous proposons ici d'utiliser une balance standard pour la détermination des paramètres de poussée : la masse du drone est mesurée pour différentes vitesses des deux rotors, les angles du plateau cyclique étant nuls. En variant séparément la vitesse des deux rotors, les interactions sont annulées et les deux coefficients  $\alpha_u$  et  $\alpha_l$  sont déterminés par régression linéaire de la fonction  $T = a_{u,l}\Omega^2$  sur les données (voir la figure 3.14).  $T$  est la force de poussée, calculée à partir des mesures de la masse du drone par l'équation  $T = mg$ .

Le coefficient de perte  $\lambda$  entre les deux rotors est évalué en faisant varier la vitesse des deux rotors simultanément. On fait l'hypothèse que le coefficient de perte est constant durant des conditions de vol standard et pour des petites différences de vitesse de rotation. On obtient alors  $\alpha_{u,l} = \lambda a_{u,l}$ .



**Figure 3.14** – Régression linéaire sur les données mesurées. Les points en vert, bleu et rouge correspondent aux mesures effectuées respectivement avec le rotor supérieur, le rotor inférieur, et les deux rotors.

Tandis que la méthode basée sur la balance aérodynamique a été utilisée pour le prototype du GLMAV, cette seconde méthode bas-coût est utilisée pour la version allégée utilisée durant la thèse (voir la section 1.4). Cela permet de déterminer les paramètres de poussée  $\alpha_u$  et  $\alpha_l$  mais pas les paramètres  $\gamma_u$  et  $\gamma_l$  qui sont alors estimés à partir de données de vol. Les résultats sont présentés à la figure 3.14 et dans le tableau 3.6. Ils sont très proches des paramètres estimés pour le GLMAV (tableau 3.5); les rotors sont en effet semblables.

**Table 3.6** – Résultats d'estimation.

Paramètre	Valeur estimée	Confiance à 95%	Unité
$\alpha_u$	$3.46e-05$	$\pm 1.1\%$	$\text{N}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$
$\alpha_l$	$3.62e-05$	$\pm 1.1\%$	$\text{N}\cdot\text{rad}^{-2}\cdot\text{s}^2$

### 3.4.2.2 Estimation à partir des données de vol

Dans le chapitre 2, plusieurs modèles de l'hélicoptère, de complexité croissante, ont été établis. Nous proposons ici d'estimer les paramètres des trois premiers modèles, notés par la suite  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Ces trois modèles sont tous basés sur les équations de mouvement du corps rigide (équation (2.38)) et diffèrent par leur modèle aérodynamique :

- Le modèle  $\mathcal{M}_0$  ne prend en compte que les effets aérodynamiques au bi-rotor, caractérisés par le système d'équations (2.59).
  - Le modèle  $\mathcal{M}_1$  prend également en compte les effets aérodynamiques secondaires, à savoir la traînée aérodynamique, donnés par le système (2.62). Nous considérons cependant dans ce modèle que le centre de gravité (CG) et le centre de poussée (point d'application des forces aérodynamiques CP) du véhicule sont confondus, c'est-à-dire que le paramètre  $d_{cp,(z)}$  est nul. Cette approximation est souvent faite dans la littérature (Fankhauser *et al.*, 2011; Koehl *et al.*, 2010b; Wang *et al.*, 2014).
  - Le modèle  $\mathcal{M}_2$  est similaire au modèle  $\mathcal{M}_1$ , mais le paramètre  $d_{cp,(z)}$  est cette fois non nul.
- Le tableau 3.7 donne une synthèse des différences entre les trois modèles.

Le tableau 3.8 quant à lui présente les différents paramètres dont dépendent les trois modèles. Seul un nombre restreint de paramètres est estimé à partir des données de vol : 3 pour le premier

**Table 3.7** – Synthèse des différences entre les trois modèles considérés.

	Effets au bi-rotor	Trainée et amortissement aérodynamique	Centre de pression ≠ centre de masse
$\mathcal{M}_0$	<b>Oui</b>	Non	Non
$\mathcal{M}_1$	<b>Oui</b>	<b>Oui</b>	Non
$\mathcal{M}_2$	<b>Oui</b>	<b>Oui</b>	<b>Oui</b>

**Table 3.8** – Description des paramètres de chaque modèle. Le symbole  $\times$  indique que le paramètre est présent dans le modèle, et  $-$  indique qu'il est absent. La lettre  $E$  indique les paramètres estimés (observables), les autres étant connus (déterminés préalablement par d'autres moyens).

Paramètre	Description	$\mathcal{M}_0$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$
$\alpha_l$	coef. de poussée du rotor inférieur	$\times$	$\times$	$\times$
$\alpha_u$	coef. de poussée du rotor supérieur	$\times$	$\times$	$\times$
$\gamma_l$	coef. de trainée du rotor inférieur	$E$	$E$	$E$
$\Delta_u$	ratio entre $\gamma_u$ et $\gamma_l$	$E$	$E$	$E$
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	moments d'inertie suivant $x^B, y^B$ et $z^B$	$\times$	$\times$	$\times$
$m$	masse du véhicule	$\times$	$\times$	$\times$
$d_{l,(z)}$	coord. suivant $z^B$ du centre de rotation du rotor inf.	$\times$	$\times$	$\times$
$d_{cp,(z)}$	coord. suivant $z^B$ du centre de pression	$-$	$-$	$E$
$\rho$	déphasage entre pas et battement	$E$	$E$	$E$
$C_x, C_y, C_z$	coef. de trainée aérodynamique	$-$	$E$	$E$
$C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}$	coef. aérodynamique d'amortissement	$-$	$E$	$E$
$g$	accélération de la gravité	$\times$	$\times$	$\times$
$\rho_{air}$	densité de l'air	$-$	$\times$	$\times$
$K_{ser}$	gain des servomoteurs	$\times$	$\times$	$\times$
$K_{mot}$	gain des moteurs	$\times$	$\times$	$\times$
$k_1, k_2, k_3, k_4$	gains du correcteur	$\times$	$\times$	$\times$
Nombre de paramètres à estimer :		3	9	10

modèle, 9 pour le second, et 10 pour le troisième. Nous suivons alors la méthodologie présentée en section précédente, à savoir la méthode de minimisation de l'erreur de prédiction sur le système avec son correcteur, à l'aide de l'algorithme à régions de confiance. Nous utilisons pour cela les outils dédiés aux modèles "boite grise" non-linéaires de la boîte à outils *System Identification Toolbox* de Matlab (Ljung, 1999). Les résultats de l'estimation sont présentés dans un second temps : il est tout d'abord nécessaire de définir des méthodes d'évaluation du modèle identifié, qui font l'objet de la section suivante.

## 3.5 Évaluation du modèle identifié

### 3.5.1 Techniques d'évaluation du modèle

Il est particulièrement délicat de valider un modèle identifié car cela implique un choix subjectif : le modèle obtenu est-il suffisamment "bon" pour l'application visée? La réponse n'est pas évidente, et la comparaison des caractéristiques des trois différents modèles identifiés apporte des éléments de réponse (voir l'article (Roussel *et al.*, 2017) qui donne plus de détails). Il existe plusieurs outils permettant d'analyser les caractéristiques du modèle et pouvant guider ce choix, que nous décrirons par la suite :

- Simulation avec un nouveau jeu de données, appelé jeu de données de validation, et calcul de différents critères qualitatifs.
- Comparaison des résultats obtenus avec différents modèles.



- Analyse des résidus : il s'agit de l'erreur entre la sortie du modèle et les données réelles. Ils contiennent les données non expliquées par le modèle et peuvent donc donner une information sur la qualité du modèle.
- Analyses d'incertitude sur les paramètres estimés et calculs d'intervalles de confiance.

### 3.5.1.1 Critères caractérisant la qualité de l'estimation

Plusieurs critères permettent d'analyser la qualité du modèle identifié. Certains sont liés directement à la fonction de coût, comme l'erreur MSE, l'erreur RMS ("Root Mean Square Error") ou encore le critère TIC ("Theil's Inequality Coefficient"). D'autres ajoutent une pénalité sur la complexité du modèle, comme les critères AIC ("Akaike Information Criteria"), FPE ("Akaike's Final Prediction Error") ou BIC ("Bayesian Information Criteria"), et sont donc bien adaptés pour la comparaison de différents modèles. Nous discutons de ces différents critères dans la suite de cette section, qui viennent compléter les critères présentés en section 3.4.1.1.

**MSE et FPE : choix de la matrice de pondération.** Ljung (1999) montre que la matrice  $\mathbf{W}$  introduite dans l'erreur MSE (équation 3.10) peut être choisie de manière optimale (dans le sens du maximum de vraisemblance) comme l'inverse de la matrice de covariance estimée des erreurs de prédiction  $\hat{\Sigma}^{-1}$  (voir la section 3.5.5.1 et en particulier l'équation (3.39)). Elle dépend alors de  $\boldsymbol{\theta}$  (car  $\mathbf{E}$  dépend de  $\boldsymbol{\theta}$ ) :

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\Sigma}^{-1} = \left[ \frac{1}{N_e} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right]^{-1} \quad (3.14)$$

Avec cette pondération, l'erreur MSE devient alors :

$$e_{MSE}(\boldsymbol{\theta}) = \det \left( \frac{1}{N_e} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right) \quad (3.15)$$

et on obtient précisément le premier terme multiplicatif du critère FPE, le deuxième terme étant une pondération liée à la complexité du modèle (fonction du nombre de paramètres libres  $N_p$  et du nombre d'échantillons  $N_e$ ) :

$$FPE(\boldsymbol{\theta}) = \det \left( \frac{1}{N_s} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \right) \left( \frac{1 + \frac{N_p}{N_e}}{1 - \frac{N_p}{N_e}} \right) \quad (3.16)$$

On notera que le second terme multiplicatif est proche de 1 lorsque le nombre d'échantillons est important, et le critère FPE est alors très proche de l'erreur MSE. Dans cette étude, un jeu de données contient typiquement 3000 échantillons (30 secondes de vol échantillonnées à 100 Hz).

**Racine de la moyenne au carré (RMSE - Root Mean Square Error).** Il s'agit de la racine carrée de l'erreur MSE :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N_s} \text{trace}(\mathbf{E}^T \mathbf{E})} \quad (3.17)$$

Dans le cas multivariable, on peut également la définir pour chaque sortie  $i$  du système :

$$RMSE_i = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} (\varepsilon_i(k, \boldsymbol{\theta}))^2} \quad (3.18)$$

Un avantage de cette définition est que l'erreur est alors de même unité que la sortie.

**Erreur RMS normalisée (NRMSE).** Enfin, l'erreur NRMSE est particulièrement utilisée pour calculer l'adéquation (appelée valeur de *fit*) entre un modèle estimé et des données mesurées.

$$NRMSE_i = \frac{\|\mathbf{y}_{mi} - \hat{\mathbf{y}}_i(\boldsymbol{\theta})\|}{\|\mathbf{y}_{mi} - \bar{\mathbf{y}}_{mi}\|} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_s} [\mathbf{y}_{mi}(k) - \hat{\mathbf{y}}_i(k, \boldsymbol{\theta})]^2}{\sum_{k=1}^{N_s} [\mathbf{y}_{mi}(k) - \bar{\mathbf{y}}_{mi}]^2}} \quad (3.19)$$

$\bar{\mathbf{x}}$  étant la moyenne des valeurs du vecteur  $\mathbf{x}$ . La valeur de *fit* basée sur l'erreur NRMSE est alors donnée par :

$$fit_{NRMSE,i} = 100(1 - NRMSE_i) \quad (3.20)$$

Le *fit* est exprimé en pourcent, et qualifie la similarité entre deux courbes (typiquement la sortie simulée et la sortie mesurée). Le *fit* varie entre  $-\infty$  (tronqué en général à 0) et 100% (erreur minimale entre les modèles).

**L'index TIC (Theil's Inequality Coefficient).** Une version normalisée de l'erreur RMS (ou RMSE), différente de l'erreur NRMSE et plus adaptée dans certains cas, a été définie par Theil (1970) de la manière suivante :

$$U_i = \frac{RMSE_i}{\sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} [\mathbf{y}_{mi}(k)]^2 + \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} [\hat{\mathbf{y}}_i(k, \boldsymbol{\theta})]^2}} \quad (3.21)$$

L'index  $U_i$  varie entre 0 (correspondance parfaite) et 1 (déviation pire-cas). Il est calculé pour chaque sortie  $i$ . Il est particulièrement utilisé dans le domaine de l'aéronautique pour évaluer un modèle (Jategaonkar, 2006). En conséquence, il permet une comparaison entre les résultats présentés dans cette étude et dans la littérature. Ainsi, on considère en général qu'une valeur inférieure à 0.3 entre les sorties du modèle de l'aéronef et les données de vol traduit un modèle "précis" (Dorobantu *et al.*, 2013). Pour ces raisons, c'est le critère que nous privilégions par la suite, exprimé sous la forme d'une valeur de *fit* associée à chaque sortie  $i$  de la manière suivante :

$$fit_{TIC,i} = 100(1 - U_i) \quad (3.22)$$

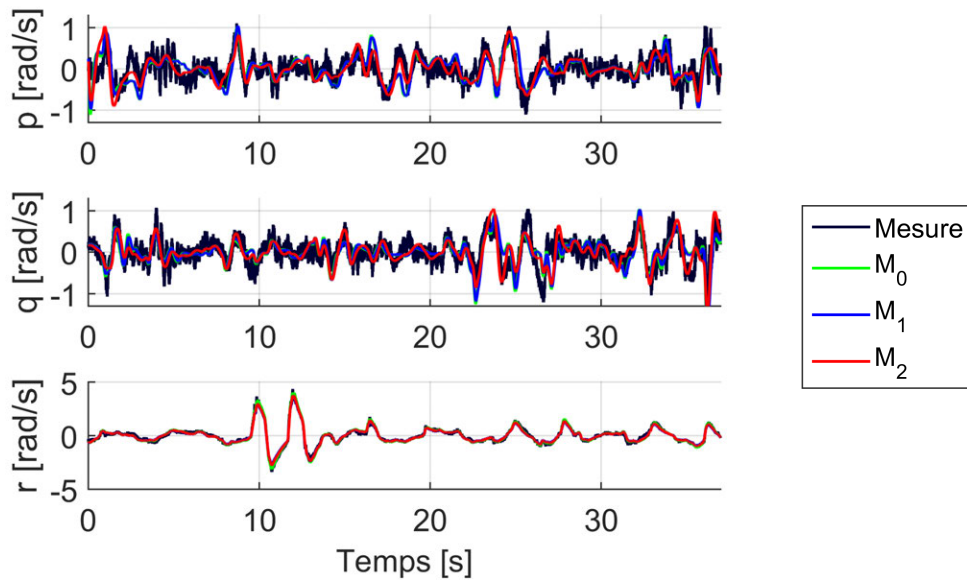
### 3.5.2 Évaluation des modèles identifiés sur un jeu de données de validation

A l'aide de ces critères, et en particulier de l'index TIC, nous pouvons effectuer une validation croisée sur les trois modèles identifiés en section 3.4.2 : c'est-à-dire qu'ils sont évalués sur un jeu de données de validation indépendant du jeu de données d'identification.

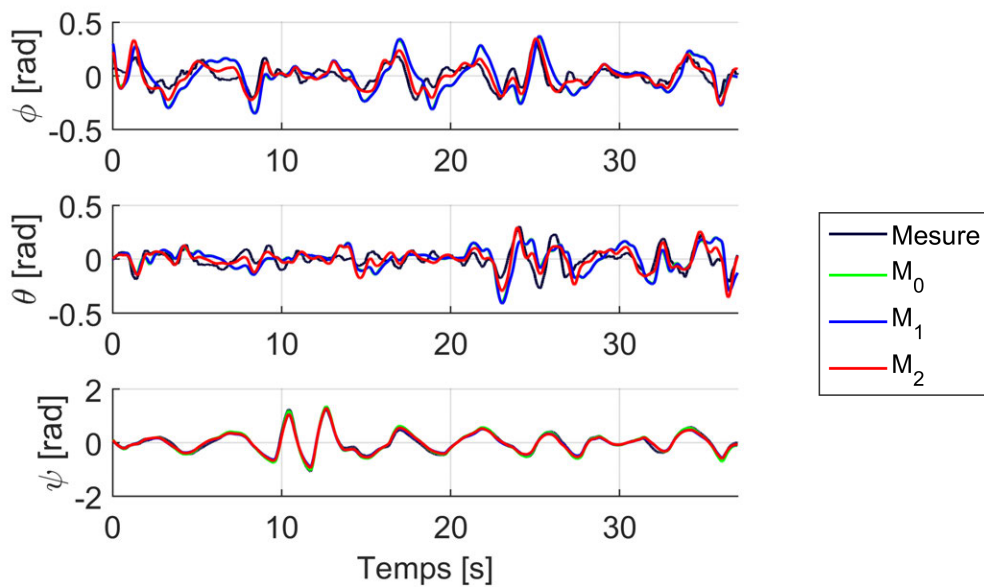
**Comparaison des résultats dans le domaine temporel.** En figures 3.15 à 3.18 sont tracées les sorties des trois modèles  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , simulés sur le jeu de données de validation, ainsi que les mesures (en noir). Si les résultats sont proches pour les angles d'Euler et les vitesses de rotation, le comportement et les performances sont très variables entre les modèles considérés pour les sorties en position et en vitesse linéaire.

**Comparaison des valeurs de fit.** Afin d'analyser de manière plus précise les différences entre les modèles identifiés, nous proposons une comparaison des valeurs de *fit* calculées à partir de l'index TIC (équation (3.22)). Les figures 3.19 et 3.20 en montrent les résultats : l'axe des ordonnées donne la valeur de *fit* entre la sortie des différents modèles (simulation) et les données mesurées. La comparaison est faite sur les données d'identification (lignes pointillées) et de validation (lignes continues). Une valeur de *fit* proche, pour un modèle donné, entre les données de validation et d'identification traduit un modèle fiable.

Les trois modèles ont un *fit* similaire sur les vitesses de rotation (entre 67% pour le modèle  $\mathcal{M}_0$  et 70.5% pour le modèle  $\mathcal{M}_2$ ). Ce n'est pas le cas pour les sorties de position et de vitesses linéaires, pour lesquelles le modèle  $\mathcal{M}_0$  présente de mauvais résultats sur les trois axes X, Y et Z. De plus, le *fit* obtenu sur les données d'identification est relativement différent du *fit* sur les données de validation, montrant une identification peu fiable. Clairement, les phénomènes aérodynamiques



**Figure 3.15** – Vitesse angulaire  $\omega^B$  du véhicule suivant  $x^B$ ,  $y^B$  et  $z^B$ , sur le jeu de données de validation.



**Figure 3.16** – Angles d'Euler : roulis  $\phi$ , tangage  $\theta$  et lacet  $\psi$ , sur le jeu de données de validation.

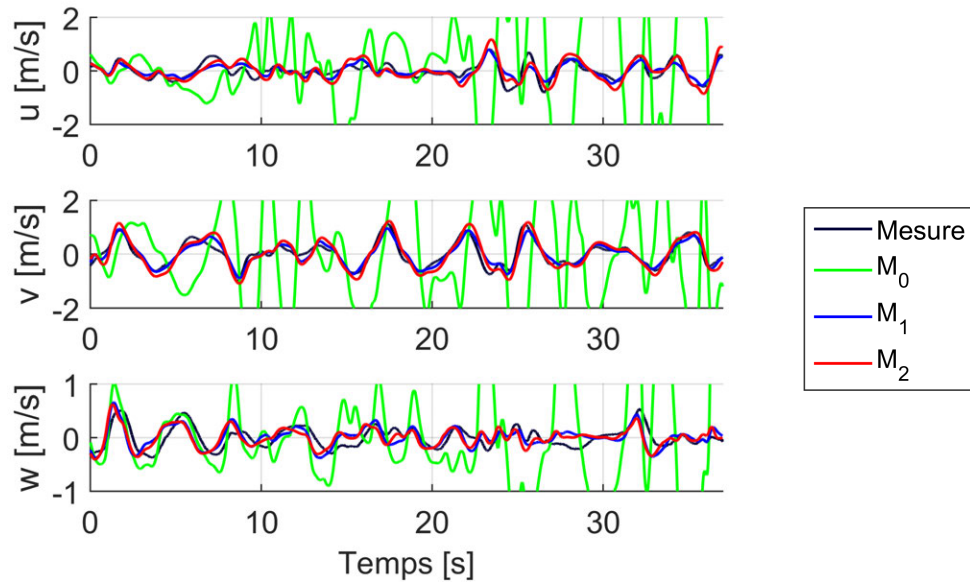


Figure 3.17 – Vitesse  $\mathbf{v}^B$  du véhicule suivant  $x^B$ ,  $y^B$  et  $z^B$ , sur le jeu de données de validation.

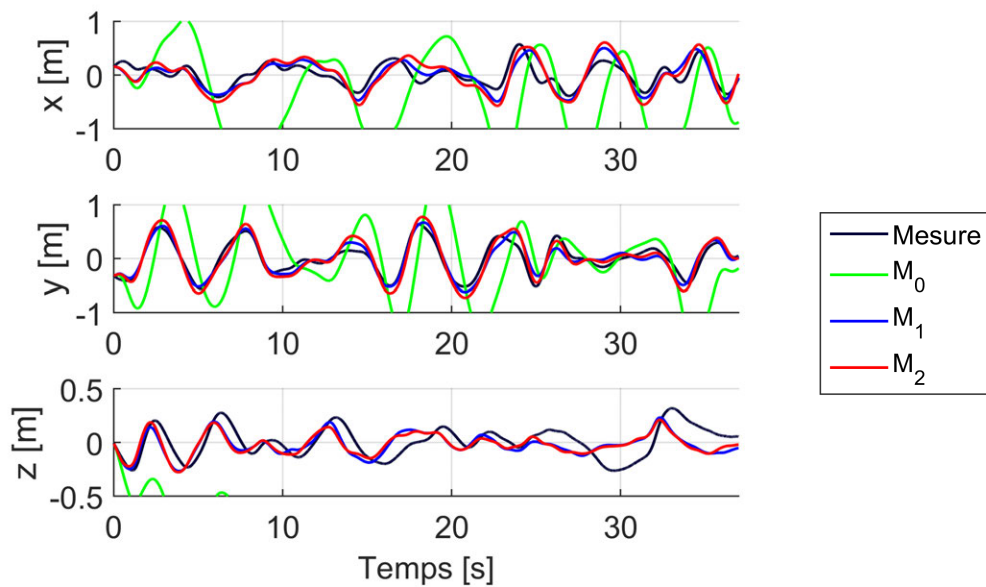
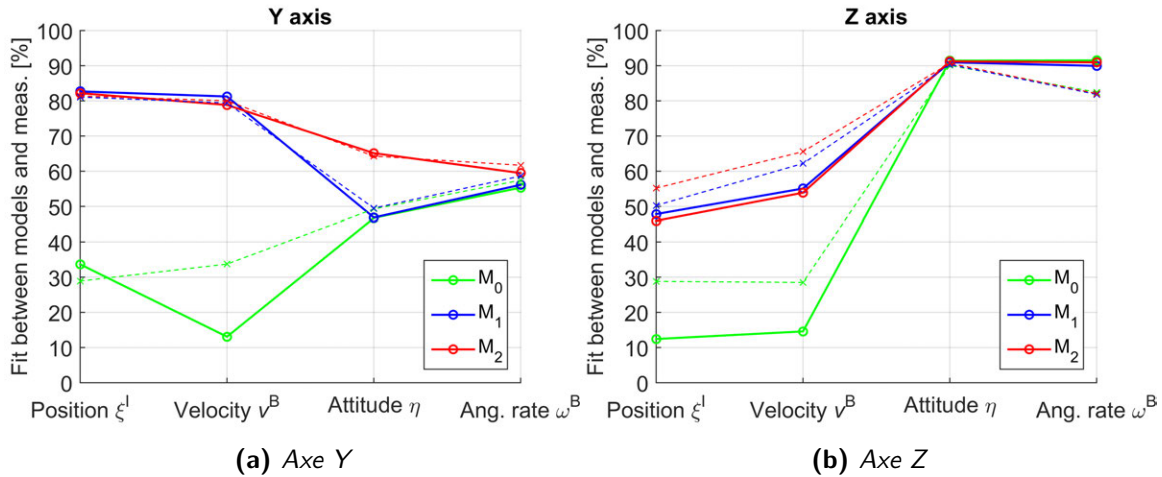
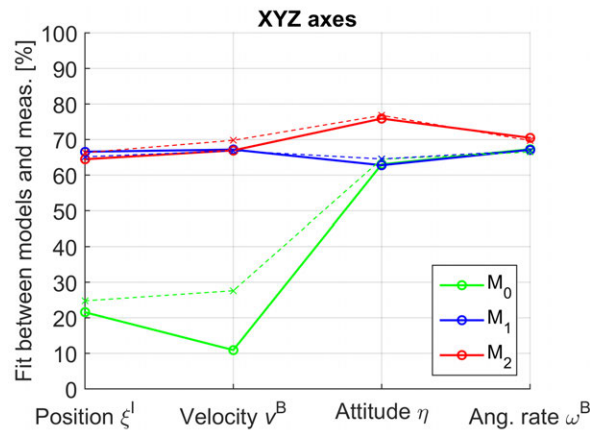


Figure 3.18 – Position  $\xi^I$  du véhicule suivant  $x^I$ ,  $y^I$  et  $z^I$ , sur le jeu de données de validation.



**Figure 3.19** – Valeur de fit calculée à partir de l'index TIC, sur les axes Y (dynamiques similaires à l'axe X) et Z, avec les données d'identification (lignes pointillées) et les données de validation (lignes continues).



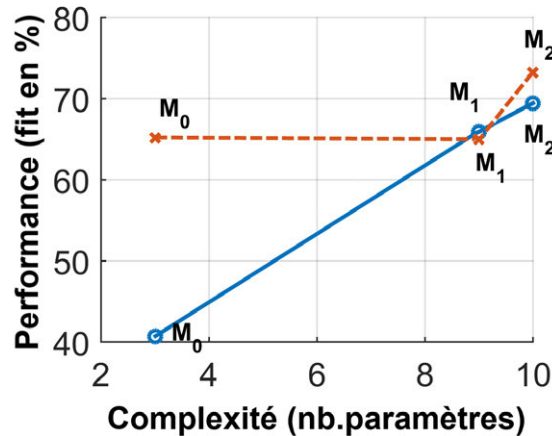
**Figure 3.20** – Valeur de fit calculée à partir de l'index TIC, sur les axes X, Y et Z (valeur moyenne), avec les données d'identification (lignes pointillées) et les données de validation (lignes continues).

négligés dans la construction de ce modèle le rend inapte à reproduire le comportement du véhicule en translation.

La prise en compte de la trainée aérodynamique améliore nettement les résultats en ajoutant un effet d'amortissement mis en évidence en particulier sur la figure 3.17 : entre les modèles  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{M}_2$ , le *fit* passe de 13% à 80% pour la vitesse  $v$  et de 34% à 82% pour la position  $y$  (figure 3.19a).

Enfin, l'estimation de la composante  $d_{cp,(z)}$  suivant  $z^B$  du centre de poussée (modèle  $\mathcal{M}_2$ ) améliore remarquablement l'identification, en particulier sur les angles de roulis et tangage : le *fit* sur l'angle de tangage est de 47% pour le modèle  $\mathcal{M}_1$ , et de 65% pour le modèle  $\mathcal{M}_2$  (figure 3.19a). La valeur du paramètre  $d_{cp,(z)}$  converge vers une valeur crédible de  $-2$  cm (Leishman, 2006). Du fait de sa faible valeur, ce paramètre est souvent considéré comme négligeable dans la littérature (centre de poussée confondu avec le centre de gravité). L'analyse présentée ici montre cependant son impact sur la précision du modèle, alors qu'il ajoute peu de complexité au modèle et un seul paramètre supplémentaire.

**Discussion sur les différents modèles.** La complexité d'identification d'un modèle augmente généralement avec le nombre de paramètres à estimer, qui est donc typiquement utilisé comme une métrique simple (Spiegelhalter *et al.*, 2002). Ainsi, la performance de chaque modèle par rapport à sa complexité peut être représentée dans un plan, tracé en figure 3.21. Les points forment



**Figure 3.21** – Précision (valeur moyenne de "fit" des sorties) en fonction de la complexité du modèle considéré. La ligne rouge pointillée représente la performance pour la dynamique de rotation, la ligne bleue représente la valeur moyenne sur toutes les sorties (dynamique de rotation et de translation).

alors un front de Pareto qui donne une indication de la précision maximale qui peut être atteinte avec un modèle d'une complexité donnée (Ngatchou *et al.*, 2005). Le compromis entre la simplicité du modèle et sa précision peut alors être fait de la manière suivante : sélectionner le modèle le plus simple qui atteint les performances requises pour l'application considérée.

Ainsi, d'après la figure 3.21, pour une application nécessitant un index de performance supérieur à 60% sur les rotations, le modèle  $\mathcal{M}_0$  serait un bon choix. Si le même niveau de performance est requis également sur les mouvements de translation, le modèle  $\mathcal{M}_1$  pourrait être choisi. Enfin, si un index de performance supérieur à 70% est nécessaire sur les mouvements de rotation, le modèle  $\mathcal{M}_2$  serait de complexité adéquate.

Naturellement, la précision du modèle  $\mathcal{M}_2$  peut être encore améliorée en prenant en compte des phénomènes aérodynamique négligés jusque là, au prix d'une complexité accrue. Le mouvement de battement, en particulier, a un effet à une fréquence proche de la vitesse de rotation des pales (environ 35 Hz) avec des harmoniques à des fréquences supérieures. Le couplage entre la dynamique du corps rigide (fuselage) et la dynamique du rotor (battement des pales) fait apparaître un phénomène oscillatoire à 4 Hz sur les sorties  $p$  et  $q$ , visible sur la figure 3.15 (voir également le chapitre 2 et en particulier la section 2.3.2). Ce phénomène est inhérent aux hélicoptères, et sa fréquence dépend des caractéristiques du rotor (principalement la rigidité des pales). Il est difficile d'inclure ces dynamiques dans le modèle à identifier à partir des données de vol en raison de la complexité supplémentaire et du grand nombre de paramètres à identifier. L'identification d'un tel modèle de l'hélicoptère peut être faite en le décomposant en sous-ensembles pouvant être identifiés séparément. C'est l'approche proposée par Mettler (2003) en utilisant des méthodes fréquentielles, et par Tang *et al.* (2014) grâce à un algorithme génétique. Cela devra être envisagé si la précision du modèle n'est pas suffisante. Enfin, les effets de sol sont également négligés dans ces modèles. Les inclure permet d'améliorer les résultats en particulier sur la position et la vitesse suivant l'axe  $z^B$ .

### 3.5.3 Analyse des résidus

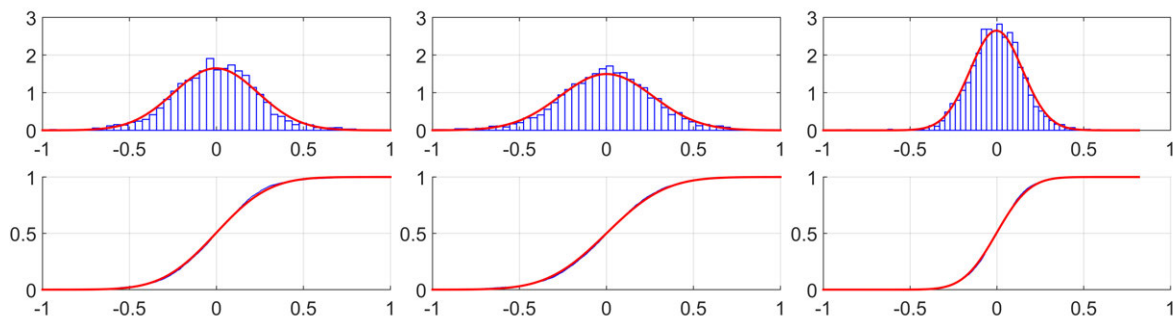
Les résidus sont les erreurs entre les sorties du modèle et les mesures. On peut effectuer un certain nombre d'analyses sur les résidus, afin de qualifier le modèle identifié : ils représentent en effet les données non expliquées par le modèle. Les résidus sont donc idéalement :

1. un bruit blanc (pas de corrélation entre les résidus), vérifié classiquement en s'assurant que la fonction d'autocorrélation des résidus est contenue dans certaines bornes (intervalles de confiance) ;

2. et sont indépendants (non corrélés avec les entrées du système).

Si le modèle identifié est un bon descripteur du système, il devrait vérifier ces deux points. La figure 3.22 montre la distribution des résidus pour les vitesses de rotation du drone. On vérifie que l'histogramme est centré et est proche d'une loi normale.

Des tests statistiques permettent de déterminer si une série de valeurs observées suit une loi normale. C'est le cas du test du  $\chi^2$  d'adéquation ou du test de Kolmogorov-Smirnov (ou test KS). Il existe plusieurs variantes du test KS, comme le test de Lilliefors ou le test de Anderson-Darling, qui mettent l'accent sur une partie de la fonction de répartition. On peut mentionner également les tests de Jarque-Bera, adapté pour un nombre élevé d'échantillons, et de Shapiro-Wilk, adapté pour un nombre faible d'échantillons (voir également la comparaison donnée par Razali *et al.* (2011)). Pour la plupart, ces tests sont négatifs dans notre cas. Au regard de la figure 3.22, nous jugeons néanmoins raisonnable de considérer que les résidus suivent une loi normale. Cette hypothèse permet d'utiliser certaines propriétés intéressantes, notamment pour le calcul des intervalles d'incertitude en section 3.5.5.



**Figure 3.22** – Histogramme des résidus pour les sorties  $p$ ,  $q$  et  $r$  du modèle et comparaison avec une loi normale. En haut : densité de probabilité, en bas : fonction de répartition.

### 3.5.4 Analyses de sensibilité du modèle aux paramètres

L'analyse d'identifiabilité structurelle du modèle (section 3.2) donne des informations sur l'observabilité des paramètres du modèle étant donnée sa structure seule. Les analyses de sensibilité permettent de prendre en compte également les conditions expérimentales, en particulier une trajectoire d'excitation donnée, et d'en déduire une indication sur la qualité de l'estimation des paramètres. Cette analyse est donc utile d'une part pour déterminer si la trajectoire d'excitation permet d'exciter suffisamment le système pour pouvoir estimer ses paramètres, et d'autre part de déterminer, le cas échéant, les paramètres dont l'estimation est peu fiable. Elle permet également d'estimer un intervalle d'incertitude sur chaque paramètre.

Nous considérons pour cela la forme générique du modèle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (3.23)$$

La matrice des dérivées partielles de  $\mathbf{y}(t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$  par rapport aux paramètres (ou gradients de la fonction) est appelée "matrice de sensibilité" dans la littérature car elle permet de déterminer la sensibilité du modèle aux paramètres (Jategaonkar, 2006, p. 92). Elle donne une information sur l'identifiabilité dite "a posteriori" du modèle : si la sensibilité du modèle à un paramètre est faible, il sera difficile d'estimer sa valeur (voir Dobre (2010, p. 53)).

#### 3.5.4.1 Analyses de sensibilité locale ou identifiabilité "a posteriori"

Nous menons ici l'analyse de sensibilité localement, c'est-à-dire autour de la valeur estimée des paramètres,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Différentes méthodes d'analyse de sensibilité globale sont décrites par Can-



navó (2012), qui donne également une implémentation des méthodes sous Matlab. La boîte à outil *DyGloSA* développée par Baumuratova *et al.* (2013) permet de mener des analyses similaires. Seule l'analyse de sensibilité locale est décrite ici.

**Calcul de la matrice de sensibilité.** La matrice de sensibilité peut être calculée de manière analytique à l'aide d'un outil de calcul formel comme Maple ou Mathematica, à partir de l'expression des dérivées partielles issue de l'équation (3.23) :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.24)$$

Cela peut s'avérer très fastidieux dans le cas de modèles non-linéaires, d'autant qu'un changement dans la structure nécessite de recalculer les dérivées partielles. On peut cependant approcher la matrice de sensibilité localement de manière numérique, par différences finies (Jategaonkar, 2006) :

Approximation numérique de la matrice de sensibilité :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{y}(t_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{i,j} \approx \frac{\mathbf{y}_i(\mathbf{u}(t_k), \boldsymbol{\theta}_p^{(j)}) - \mathbf{y}_i(\mathbf{u}(t_k), \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\delta \theta_j} \quad i = 1, \dots, N_y \text{ et } j = 1, \dots, N_p \quad (3.25)$$

Avec le vecteur des paramètres perturbé :  $\boldsymbol{\theta}_p^{(j)} = \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{e}_j \delta \theta_j$

et :  $\mathbf{e}_j = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$  (Élément  $j$  à 1, 0 ailleurs)

La variable  $\delta \theta_j$  est une petite perturbation sur la valeur du paramètre; on fait varier chaque paramètre indépendamment, l'un à la fois. Le choix de sa valeur est un compromis à faire, et Jategaonkar (2006, p. 92) propose le choix  $\delta \theta_j = 10^{-6} \hat{\theta}_j$ . Cette méthode est appelée méthode par "différentiation numérique interne"<sup>8</sup>. La matrice obtenue est de dimension 3 et de taille  $(N_e \times N_y \times N_p)$ , avec  $N_e$  le vecteur des instants de mesure. Elle peut être vue comme une "trajectoire" de matrices.

**Conditions d'identifiabilité "a posteriori".** L'identifiabilité "a posteriori" locale de la structure est alors basée sur deux conditions qui doivent être vérifiées :

1. Les fonctions de sensibilité sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que la variation d'une sortie du modèle due à la variation d'un paramètre ne peut pas être compensée par des changements dans les autres paramètres.
2. Les sorties du modèle doivent être suffisamment sensibles à la variation individuelle d'un paramètre.

Pour s'assurer de la première condition, on vérifie que le rang de la matrice de sensibilité est égal au nombre de paramètres  $N_p$ . Dans le cas multi-sorties, on calcule au préalable la matrice de sensibilité globale notée  $\mathbf{S}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ , de taille  $((N_e N_y) \times N_p)$ , à partir de la matrice jacobienne de dimension 3 issue de l'équation (3.25). La matrice de sensibilité globale est ainsi composée des fonctions de sensibilité de chaque sortie par rapport à chaque paramètre de la manière suivante (Dobre, 2010, p. 48) :

$$\mathbf{S}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{i=1}^T, \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{i=2}^T, \dots, \left[ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]_{i=N_y}^T \right]^T \quad (3.26)$$

Les paramètres que nous considérons dans cette étude ont des unités et des valeurs disparates. De même, les sorties n'ont pas les mêmes unités. Nous utilisons donc une version normali-

8. En anglais, cette méthode est appelée *Internal Numerical Differentiation* ou IND. Il existe également d'autres méthodes d'approximation numérique de la jacobienne, plus précises mais plus complexes à mettre en œuvre. On peut mentionner par exemple la méthode itérative proposée par Maly et Petzold (1996).



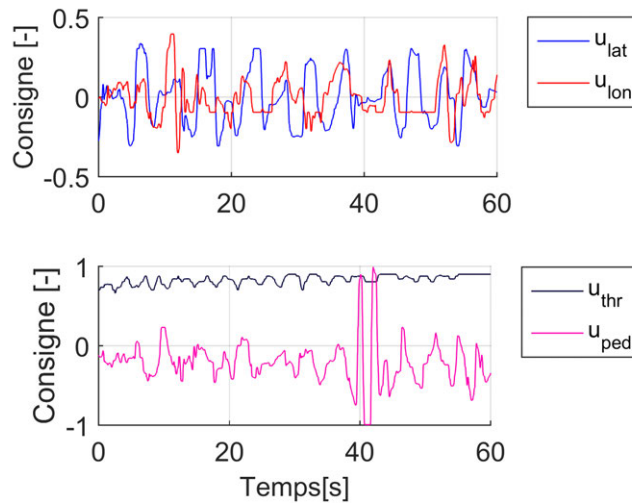
sée par la valeur des paramètres et par la norme de la sortie, notée  $\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ . La première condition se traduit alors par :

$$\text{rang}(\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) = N_p \quad (3.27)$$

La deuxième condition est traitée dans un second temps.

### 3.5.4.2 Application au modèle

**Calcul de la matrice de sensibilité globale.** Le modèle considéré est constitué des forces et moments générés par les effets aérodynamiques au bi-rotor et de traînée sur le corps, donnés en équation (2.62), ainsi que du correcteur pour l'identification donné en équation (3.6). Les équations du modèle sont données sous la forme d'équations différentielles. Le calcul des sorties  $\mathbf{y}$  passe donc par leur résolution numérique. Nous utilisons pour cela l'algorithme de Matlab ode15s (Shampine et Reichelt, 1997) avec les entrées présentées en figure 3.23, relevées durant un vol réel. L'horizon de temps est fixé à 60 secondes.



**Figure 3.23** – Les quatre entrées du système, relevées durant un vol. Elles sont utilisées comme entrée du modèle lors de l'étude de sensibilité. La moyenne du signal est retranchée aux entrées latérale et longitudinale  $u_{lat}$  et  $u_{lon}$ .

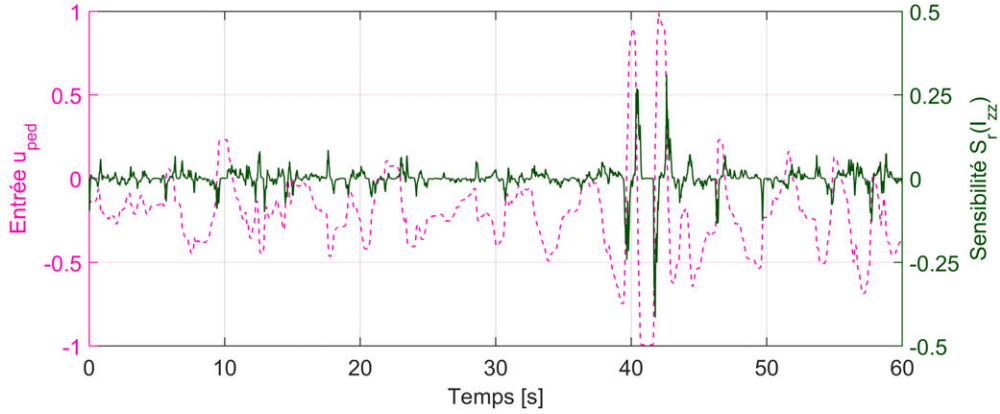
En utilisant l'équation (3.25), on calcule l'approximation de la matrice de sensibilité à chaque point de mesure, en faisant varier séparément chaque paramètre autour de sa valeur estimée. Cela nécessite  $N_p$  simulations du modèle.

A titre d'exemple, la figure 3.24 présente le tracé de la fonction de sensibilité de la sortie  $r(t)$  du modèle (vitesse de rotation autour de l'axe  $Z$  du véhicule) par rapport au paramètre  $I_{zz}$  (moment d'inertie suivant l'axe  $Z$ ). On remarque le couplage avec l'entrée  $u_{ped}$  (différentiel moteur) : une forte excitation sur cette entrée entraîne une augmentation de la valeur de sensibilité, conformément à l'intuition.

On peut déduire plusieurs informations très utiles de cette matrice, qui permettent de répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la sensibilité du modèle à un paramètre donné?
2. Quels sont les paramètres problématiques à estimer pour une trajectoire donnée?
3. Quelle est la sortie du modèle la plus sensible à un paramètre donné?
4. Y-a-t'il une interdépendance importante entre les paramètres?

**Vérification de l'indépendance linéaire des fonctions de sensibilité.** Le calcul est effectué pour l'ensemble des paramètres du modèle, et les sous-ensembles de paramètres à tester sont sélec-



**Figure 3.24** – Tracé de la sensibilité de la sortie  $r(t)$  par rapport au paramètre  $I_{zz}$  (moment d'inertie suivant l'axe  $Z$  du véhicule), et comparaison avec l'entrée  $u_{ped}$ .

tionnés dans un second temps. Ainsi, en sélectionnant l'ensemble des 17 paramètres donnés en équation (3.28), issus de l'analyse d'identifiabilité structurelle (section 3.2), la première condition d'identifiabilité en équation (3.27) est vérifiée<sup>9</sup> : nous obtenons un rang égal à 17.

$$\boldsymbol{\theta} = [C_x, C_y, C_z, C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}, \alpha_l, \alpha_u, \gamma_l, \Delta_u, \rho, (\mathbf{d}_l)_z, (\mathbf{d}_{cp})_z, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, K_{ser}]^T \quad (3.28)$$

On peut quantifier cette première condition à l'aide de différentes métriques, qui donnent également une information sur la covariance entre les paramètres. Dobre (2010) utilise le conditionnement de la matrice de sensibilité, c'est-à-dire le rapport entre sa valeur propre maximale et minimale, comme un indicateur de la colinéarité avec le critère suivant :

$$\begin{cases} 5 \leq \text{cond}(\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) < 30 & \text{colinéarité faible} \\ 30 \leq \text{cond}(\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) < 100 & \text{colinéarité modérée à forte} \\ 100 \leq \text{cond}(\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) & \text{colinéarité très forte} \end{cases} \quad (3.29)$$

Si nous considérons l'ensemble des sorties du modèle, nous obtenons une valeur de conditionnement égale à 10128 (tableau 3.9). C'est une valeur élevée qui indique un mauvais conditionnement et une colinéarité très forte entre les fonctions de sensibilité. Cependant, au regard des résultats de l'étude d'identifiabilité structurelle en section 3.2, nous pouvons considérer les sorties  $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]$  (position et attitude) ou  $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}^B]$  uniquement, sans impacter l'observabilité des paramètres. Les résultats ne sont cependant pas meilleurs.

Toujours d'après l'analyse structurelle, on peut également considérer les sorties  $[\mathbf{v}^B, \boldsymbol{\omega}^B]$  sous réserve que la position et l'attitude initiales soient connues (elles ne sont pas observables avec ces sorties uniquement). C'est ce dernier choix que nous faisons, car la valeur de conditionnement est bien plus faible dans ce cas, et l'état initial est connu car mesuré. D'autre part, ces sorties correspondent aux sorties du modèle dynamique du véhicule, il est donc pertinent de les choisir. Ce choix des vitesses et vitesses angulaires comme mesures pour l'identification permet également de s'affranchir de l'invariance à  $2\pi$  des angles d'Euler, qui peut poser problème.

**Classement des paramètres selon la sensibilité des sorties.** Il est intéressant de classer les paramètres selon la sensibilité des sorties : la valeur d'un paramètre associé à une sensibilité faible sera difficile à estimer. Le tableau 3.10 présente les paramètres du modèle classés selon la norme 2 de leur fonction de sensibilité, c'est-à-dire des colonnes de la matrice  $\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ . De plus, un calcul de la norme des fonctions de sensibilité de chaque sortie pour un paramètre donné indique la

9. On retrouve par ailleurs les résultats présentés en section 3.2 : si l'on ajoute le paramètre  $K_{mot}$  à l'ensemble, la condition n'est plus vérifiée, indiquant un problème d'identifiabilité déjà soulevé dans cette section.

**Table 3.9** – Conditionnement de la matrice de sensibilité des sorties du modèle aux paramètres.

Sortie considérée	Conditionnement
$\xi, \nu^B, \eta, \omega^B$	10128
$\xi, \eta$	21521
$\xi, \omega^B$	9196
$\nu^B, \eta$	15393
$\nu^B, \omega^B$	854

sortie du modèle la plus sensible à la valeur du paramètre (il s'agit de la fonction ayant la norme maximale).

Ainsi, il en ressort que les sorties sont peu sensibles à certains paramètres, en particulier :

- le moment d'inertie  $I_{zz}$  suivant  $z^B$ ,
- certains paramètres aérodynamiques des rotors,  $\alpha_u$  et  $\gamma_l$  (contrairement à  $\alpha_l$  et  $\Delta_u$ ),
- le coefficient aérodynamique  $C_{nr}$  d'amortissement du moment autour de l'axe  $z^B$ . Les coefficients aérodynamiques  $C_x, C_y, C_z, C_{lp}, C_{mq}, C_{nr}$  sont de manière générale dans la partie basse du tableau.

La sortie la plus sensible donne une indication de l'état à exciter davantage lors de l'acquisition de données si on souhaite améliorer l'identifiabilité "a posteriori".

**Table 3.10** – Classement des principaux paramètres du modèle selon la sensibilité des sorties. Les sorties considérées sont les vitesses  $u, v, w$  et les vitesses angulaires  $p, q, r$ .

Paramètre	$\ \bar{\mathbf{S}}_{y,i}(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\ $	Sortie la plus sensible
$d_{cp,(z)}$	300	$q$
$K_{ser}$	286	$p$
$\Delta_u$	285	$r$
$d_{l,(z)}$	281	$p$
$\alpha_l$	279	$p$
$I_{yy}$	267	$q$
$\rho$	205	$q$
$C_{mq}$	175	$q$
$I_{xx}$	173	$p$
$C_x$	164	$q$
$C_y$	140	$p$
$C_z$	134	$w$
$C_{lp}$	102	$p$
$\gamma_l$	34	$r$
$C_{nr}$	31	$r$
$\alpha_u$	25	$w$
$I_{zz}$	21	$r$

**Choix d'un jeu d'expérience.** Comme mentionné dans la section 3.3, les entrées d'excitation ne sont pas prédéfinies et ne sont pas reproductibles d'une expérience à une autre, car elles sont fournies par le pilote. Cependant, il est possible de choisir le jeu de données contenant le maximum d'information parmi un ensemble de jeux, permettant donc l'estimation des paramètres la plus fiable possible. On utilise pour cela un critère basé sur la matrice de sensibilité : on peut choisir le jeu de données maximisant la norme 2 (tableau 3.10) ou minimisant la valeur de conditionnement de la matrice. Le déterminant de la matrice d'information de Fisher, détaillée en section 3.5.5.2 est un critère largement utilisé pour la conception de signaux excitant, mais peut également être utilisé pour évaluer a posteriori la quantité d'information contenue dans un jeu de

données d'entrées-sorties.

### 3.5.5 Analyses des incertitudes sur les paramètres

Estimer la valeur des paramètres n'est pas suffisant, il est nécessaire d'obtenir également une estimation de l'incertitude sur ces paramètres afin d'avoir une information sur la confiance que nous pouvons accorder à leur valeur. Dans un premier temps, nous présentons une approche statistique de l'estimation à travers le maximum de vraisemblance. Par cette approche, nous rappelons le parallèle entre la méthode PEM et la méthode du maximum de vraisemblance, ce qui nous permet d'utiliser un certain nombre de résultats issus du domaine de la statistique. Dans un second temps, différentes méthodes permettant d'estimer l'incertitude sur les paramètres estimés sont présentées. Une sélection de ces méthodes est ensuite appliquée sur le modèle de l'hélicoptère identifié précédemment.

#### 3.5.5.1 Approche statistique de l'estimation : la méthode du maximum de vraisemblance

**Formulation mathématique du problème.** Par soucis de simplification, l'étude est présentée ici pour le cas monovarié. On pourra généraliser l'approche dans un second temps. Le système dynamique  $g$  dont on cherche à estimer les paramètres  $\theta$  est exprimé à temps discret sous la forme suivante :

$$\hat{y}(t_k, \theta) = g(t_k, \mathbf{u}(t_k), \theta) \quad (3.30)$$

Les sorties mesurées peuvent être exprimées en fonction des résidus  $\varepsilon(t_k, \theta)$  (équation (3.7)) :

$$y(t_k) = g(\mathbf{u}(t_k), \theta^*) + \varepsilon(t_k, \theta) \quad (3.31)$$

Si la fonction  $g$  décrit correctement les données mesurées, le résidu  $\varepsilon(t_k, \theta)$  est la réalisation d'un bruit aléatoire (voir la section 3.5.3 sur l'analyse résiduelle). On peut l'assimiler à une variable aléatoire à laquelle est associée une densité de probabilité (PDF pour *Probability Density Function*) notée  $f_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$ .

**Fonction de vraisemblance.** La fonction de vraisemblance associée à une jeu de mesures  $\mathbf{y}$  (contenant  $N_e$  échantillons) s'exprime en fonction de la PDF du résidu,  $f_\varepsilon$  :

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^{N_e} f_\varepsilon(\varepsilon_k, \theta) \quad (3.32)$$

La démonstration est donnée par Ljung (1999, p.163). Cette fonction peut être utilisée comme un critère pour l'estimation : plus la variance du bruit aléatoire associé au résidu est faible, plus l'estimation de  $\theta$  est fiable.

En général, on considère le logarithme de la fonction de vraisemblance (appelé LL pour *Log Likelihood function*), qui permet d'exprimer la fonction en une somme plutôt qu'un produit :

$$\ln L(\theta) = \sum_{k=1}^{N_e} \ln f_\varepsilon(\varepsilon_k, \theta) \quad (3.33)$$

**Maximum de vraisemblance (ML).** L'objectif de la méthode du maximum de vraisemblance (appelée ML pour *Maximum Likelihood*) est de trouver les valeurs des paramètres qui rendent les données mesurées les plus "vraisemblables" statistiquement. Il s'agit pour cela de maximiser la fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} (\ln L(\theta)) \quad (3.34)$$

Avec le formalisme proposé par (Ljung, 1999, p. 216), la méthode du maximisation de vraisemblance peut être vue comme un cas particulier de la méthode PEM, avec  $l(x) = -\ln f_\varepsilon(x)$  (voir l'expression générale de la méthode PEM en équation (3.11)).

**Expression de la LL pour un résidu gaussien.** Nous avons vu en section 3.5.3 que  $\varepsilon_k(\boldsymbol{\theta})$  peut-être considéré comme un bruit blanc gaussien si le modèle est une bonne description du système. C'est l'hypothèse que nous faisons ici. Le résidu suit alors une loi normale, dont la densité de probabilité, bien connue, est donnée par :

$$f_\varepsilon(\varepsilon_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_k - \mu_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (3.35)$$

Elle dépend de deux paramètres : la variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et la moyenne  $\mu_\varepsilon$ . Dans ce cas, la LL s'écrit ainsi (équations (3.33) et (3.35)) :

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{N_e} \left( -\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{(\varepsilon_k - \mu_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right) \quad (3.36)$$

Ainsi, sous ces hypothèses, maximiser la LL revient à minimiser  $\sum_{k=1}^{N_e} (\varepsilon_k - \mu_\varepsilon)^2$ , et si la distribution des résidus est centrée (moyenne nulle) on retrouve l'expression de l'erreur SSE. L'erreur SSE sous ces hypothèses est donc un estimateur du maximum de vraisemblance de  $\boldsymbol{\theta}$ . C'est un résultat important que nous utiliserons par la suite : minimiser l'erreur SSE revient à maximiser la vraisemblance (ou à maximiser la fonction LL), et la valeur estimée des paramètres est la même. Par la suite nous étudions les propriétés de la LL qui peuvent ensuite être appliquées aux paramètres estimés par la méthode PEM.

On peut estimer  $\mu_\varepsilon$  par l'équation (3.37) et la variance  $\sigma_\varepsilon^2$  par l'estimateur non biaisé<sup>10</sup> en équation (3.38) :

$$\hat{\mu}_\varepsilon = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \varepsilon_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.37)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N_e - N_p} \sum_{k=1}^{N_e} (\varepsilon_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \hat{\mu}_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^2 \quad (3.38)$$

Cowan (1998, p.74) donne plus de détails sur les propriétés de ces estimateurs. Dans le cas multivariable et avec une distribution de moyenne nulle, l'équation (3.38) devient la matrice de covariance des résidus estimée :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N_e - N_p} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (3.39)$$

Cette matrice intervient dans le calcul de la variance des paramètres estimés, détaillé dans la prochaine section.

### 3.5.5.2 Estimation de la variance des estimés

Afin d'estimer l'incertitude sur les paramètres estimés, nous utilisons une approche statistique. Le principe est de considérer le résidu comme une variable aléatoire normale. Sa variance se traduit par une incertitude sur l'estimée des paramètres,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Le vecteur des paramètres peut alors être vu également comme un vecteur de variables aléatoires dont on cherche à déterminer les variances.

A partir de l'expression de la LL en équation (3.33), nous pouvons envisager plusieurs méthodes pour calculer la variance des paramètres estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ou de manière équivalente par la méthode PEM. Dans ce but, nous étudions la hessienne de la LL par rapport aux paramètres. En effet, la hessienne est la matrice des dérivées partielles du second ordre d'une fonction multivariable. En d'autres termes, la hessienne évaluée à la valeur optimale estimée des paramètres décrit la courbure locale de la fonction de coût. Une courbure

10. L'estimateur est non biaisé grâce à la soustraction du nombre de paramètres au dénominateur, sans cela l'estimateur est non biaisé de manière asymptotique seulement.

faible entraîne une variance importante et donc une incertitude importante sur la valeur du paramètre.

Cela constitue la base de l'étude présentée dans cette partie, qui aboutit à plusieurs méthodes pour calculer cette incertitude :

1. Méthode analytique : dans certains cas, on peut calculer l'expression analytique de la variance à partir de l'expression du modèle. On peut utiliser pour cela des logiciels de calcul symbolique comme Maple ou Mathematica. Il faut cependant noter qu'il est souvent difficile d'obtenir cette expression analytique.
2. Par la méthode de Monte-Carlo : la distribution de la LL peut être estimée en simulant un grand nombre d'expériences à partir du modèle identifié, en estimant les paramètres à chaque fois, et en analysant la répartition des valeurs obtenues.
3. En utilisant l'inégalité de Cramér-Rao : la variance de tout estimateur a une borne inférieure donnée par cette inégalité. Il peut être démontré que la méthode du maximum de vraisemblance est, asymptotiquement, un estimateur à variance minimale (appelé estimateur "efficace" en statistique), et sa variance est égale à la borne de Cramér-Rao dans ce cas (Walter et Pronzato, 1997, p.246), également appelée CRLB pour *Cramer-Rao Lower Bound*<sup>11</sup>. Selon le problème, la CRLB peut être calculée de manière analytique ou estimée à partir des mesures et des paramètres estimés.
4. Par la méthode dite "graphique", qui permet d'éviter le calcul de la CRLB (pas de calcul de jacobienne ni de hessienne). Elle nécessite de réaliser un certain nombre de simulations en faisant varier les paramètres autour de leur valeur estimée. Cela permet de réaliser une estimation locale de la fonction de coût.

**Méthode de Monte-Carlo.** L'estimation effectuée sur deux jeux de données différents mène en général à deux estimations des paramètres différentes, du fait du bruit de mesure et de leur contenu fréquentiel. Cela est vrai également dans le cas d'une même expérience répétée plusieurs fois. La distribution statistique des paramètres estimés, et donc leur variance, pourrait être approchée par l'estimation des paramètres sur un grand nombre d'expériences. Dans la plupart des cas, cela s'avère difficile en pratique.

La méthode de Monte-Carlo se base sur la génération d'expériences "fictives" à partir du modèle identifié. Les différentes étapes sont les suivantes :

1. Estimation des paramètres du modèle sur un jeu de données réelles.
2. Génération d'expériences fictives en utilisant le modèle identifié. On ajoute pour cela des perturbations reproduisant les conditions réelles.
3. Estimation des paramètres sur chaque jeu de données fictif.
4. Calcul des caractéristiques statistiques sur la distribution résultante (en particulier la moyenne et la matrice de covariance).

La génération de données fictives est l'étape la plus critique, puisqu'elle requiert un modèle réaliste des perturbations. Elle peut être traitée de plusieurs manières. La plus directe est d'ajouter un bruit aléatoire de même distribution que les résidus. D'autres méthodes sont envisageables, la méthode "bootstrap" étant avancée comme la plus flexible et la plus fiable (Walter et Pronzato, 1997, p. 244) : le bruit ajouté aux données fictives est choisi aléatoirement dans le vecteur des résidus.

Dans le cas de modèles complexes, l'estimation des paramètres par la minimisation de la fonction de coût peut demander un temps de calcul important. La méthode de Monte-Carlo, qui nécessite de réaliser cette estimation sur un nombre important d'expériences, peut alors s'avérer infaisable en pratique. C'est le cas du modèle considéré dans cette étude. Les méthodes présentées par la suite sont alors privilégiées.

11. On rencontre parfois la notation alternative "RCF" pour Rao-Cramér-Frechet

**Méthode par la borne de Cramér-Rao (matrice d'information de Fisher).** Dans de nombreux cas, l'obtention de l'expression analytique des variances est trop complexe, et la méthode de Monte-Carlo implique un temps de calcul trop important (c'est le cas si le modèle est complexe et que sa simulation demande trop de temps). On peut alors obtenir une estimation de la variance par le calcul de la CRLB, qui est une borne inférieure à la variance de tout estimateur. La méthode du maximum de vraisemblance tend asymptotiquement vers cette borne lorsque le nombre d'échantillons augmente. Il en va de même avec la méthode des moindres-carrés lorsque la matrice de pondération est choisie comme étant  $[\hat{\Sigma}]^{-1}$  (voir le paragraphe 3.5.1.1 et la démonstration par Walter et Pronzato (1997, p. 247)). Ainsi, pour un nombre d'échantillons suffisamment grand (on a alors un estimateur efficace et sans biais), l'inverse de la CRLB pour la matrice de covariance  $\mathbf{C}$ , qu'on cherche à obtenir, s'écrit ainsi :

$$[\mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j)]^{-1} = \mathbb{E} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \ln L(\boldsymbol{\theta}) \right], \quad 1 \leq i, j \leq N_p \quad (3.40)$$

Le membre de droite de l'équation est appelé matrice d'information de Fisher (matrice symétrique de dimension  $(N_p \times N_p)$ ). On peut envisager de calculer une expression analytique de cette matrice pour en déduire la matrice de covariance. Cependant, le calcul de l'espérance implique une intégration suivant  $\varepsilon_k$  de la dérivée seconde de la fonction LL, ce qui s'avère complexe en pratique. Heureusement, on peut estimer la matrice d'information de Fisher par celle dite "observée",  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ , évaluée en  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  étant la valeur estimée par le maximum de vraisemblance ou par minimisation de l'erreur SSE :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \ln L(\boldsymbol{\theta}), \quad 1 \leq i, j \leq N_p \quad (3.41)$$

La matrice d'information de Fisher est donc une moyenne sur l'ensemble des expériences (ou observations) possibles, tandis que la matrice d'information observée est fonction d'une seule observation. On remarquera que  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$  est l'opposée de la hessienne de la LL. L'estimation de la matrice de covariance est alors calculée ainsi :

$$\hat{\mathbf{C}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j) = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \quad (3.42)$$

Cette méthode est en général la méthode privilégiée lorsque la fonction de vraisemblance est maximisée de manière numérique (Cowan, 1998, p. 78).

La variance des paramètres estimés est alors donnée par la diagonale de la matrice de covariance.

**Estimation de la matrice de Fisher.** Toute la difficulté de la méthode est d'obtenir une estimation de la matrice d'information de Fisher. On peut obtenir une approximation de cette matrice évaluée en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  à partir de la jacobienne, de la manière suivante<sup>12</sup> (Jategaonkar, 2006, p. 90 et p. 376) :

$$\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^T [\hat{\Sigma}]^{-1} \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.43)$$

$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  étant la matrice jacobienne de  $g(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta})$  : c'est la matrice des dérivées partielles par rapport aux paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , de dimension  $(N_p \times N_s)$ . Cette matrice est également appelée "matrice de sensibilité" car elle permet de déterminer la sensibilité du modèle aux paramètres (Dobre, 2010), et son calcul peut se faire de manière analytique ou numérique, comme détaillé en section 3.5.4.1 (voir en particulier l'équation (3.25)).

12. Cette approximation de la hessienne est utilisée dans l'algorithme de Gauss-Newton.

**Intervalle de confiance.** On peut définir, pour chaque paramètre  $\theta_i$ , un intervalle de confiance à partir de la matrice d'information de Fisher. En effet, dès lors que les résidus sont considérés comme des variables aléatoires normales, les estimées des paramètres suivent une distribution normale de moyenne  $\hat{\theta}$  et de variance  $(\mathbf{F}^{-1})_{i,i}$ , la diagonale de la matrice de Fisher observée. L'intervalle de confiance à  $100(1 - \alpha)\%$  peut donc être estimé par l'expression suivante (Walter et Pronzato, 1997, p. 248) :

$$\left[ \hat{\theta}_i - n\sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{i,i}}, \hat{\theta}_i + n\sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{i,i}} \right] \quad (3.44)$$

Pour obtenir l'intervalle de confiance à 95% ( $\alpha = 0.05$ ), on prendra donc  $n = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2, 0, 1) = 1.96$ , c'est-à-dire le quantile  $1 - \alpha/2$  de la fonction gaussienne<sup>13</sup> de moyenne nulle et d'écart-type 1.

**Coefficient de corrélation.** (Walter et Pronzato, 1997, p. 248) définissent également un coefficient de corrélation  $c_{i,k}$  entre les paramètres estimés  $\theta_i$  et  $\theta_k$ , compris entre  $-1$  et  $1$ , qui peut donner des indications intéressantes sur le modèle et son identification :

$$c_{i,k} = \frac{(\mathbf{F}^{-1})_{i,k}}{\sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{i,i}}\sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{k,k}}} \quad (3.45)$$

**Méthode graphique d'estimation des intervalles de confiance.** Cette méthode permet d'éviter le calcul de la jacobienne ou de la hessienne de la fonction de coût. Elle repose sur un tracé de la fonction de coût autour de la valeur estimée des paramètres. La LL autour de la valeur estimée de chaque paramètre  $\hat{\theta}_i = (\hat{\theta})_i$  pris indépendamment peut être écrite comme une série de Taylor :

$$\ln L(\theta_i) = \ln L(\hat{\theta}_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i) \left. \frac{\partial \ln L(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \hat{\theta}_i} + \frac{(\theta_i - \hat{\theta}_i)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \ln L(\theta_i)}{\partial \theta_i^2} \right|_{\theta_i = \hat{\theta}_i} + \dots \quad (3.46)$$

La dérivée première de la LL<sup>14</sup> est nulle en  $\hat{\theta}_i$  ; la dérivée seconde est l'opposée de la matrice  $\mathbf{F}$  (équations (3.41) et (3.42) dans le cas monovariable), et on a donc :

$$\ln L(\theta_i) \approx \max_{\theta_i}(\ln L(\theta_i)) - \frac{(\theta_i - \hat{\theta}_i)^2}{2\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}^2} \quad (3.47)$$

En faisant varier  $\theta_i$  de  $\pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}$  autour de sa valeur estimée  $\hat{\theta}_i$ , on obtient le résultat suivant :

$$\ln L(\hat{\theta}_i \pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}) \approx \max_{\theta_i}(\ln L(\theta_i)) - \frac{1}{2} \quad (3.48)$$

On peut donc obtenir une approximation de l'intervalle de confiance à 63.8% en prenant la valeur de  $\theta_i$  (l'antécédent de la LL) au maximum de la LL moins 0.5. Cette opération est très aisée<sup>15</sup> à faire graphiquement à l'aide du tracé de  $LL(\theta_i)$  autour de  $\hat{\theta}_i$ .

De manière plus générale, on a (Cowan, 1998, p. 131) :

$$\ln L(\hat{\theta}_i \pm n\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_i}) \approx \max_{\theta_i}(\ln L(\theta_i)) - \frac{n^2}{2} \quad (3.49)$$

De la même manière que précédemment,  $n$  est le quantile  $1 - \alpha/2$  de la fonction gaussienne, et l'intervalle de confiance à 95% ( $\alpha = 0.05$ ) est obtenu pour  $n = 1.96$ .

13. Fonction `norminv` sous Matlab

14. La dérivée première de la LL par rapport aux paramètres est appelée "score" dans la littérature, et est utilisée pour déterminer les valeurs des paramètres qui maximisent la vraisemblance.

15. Elle est cependant beaucoup plus difficile à automatiser en raison de la disparité de l'allure des fonctions de coût pour chaque paramètre.



### 3.5.5.3 Application au modèle considéré

La méthode analytique est jugée trop complexe au regard des équations du modèle. La méthode de Monte-Carlo demande un temps de calcul très important puisqu'elle nécessite l'estimation des paramètres sur chaque jeu de données fictives généré. Un exemple d'application de cette méthode est donné par Strub (2016, p. 68) sur un modèle linéaire. Les deux méthodes restantes ont été appliquées au modèle : la méthode passant par l'estimation de la matrice de Fisher et la méthode dite "graphique".

Les forces et faiblesses de chacune des méthodes présentées, constatées lors de leur mise en œuvre, sont listés dans le tableau 3.11. Davantage de détails sont donnés dans les paragraphes suivants.

**Table 3.11** – Mérites et limitations des méthodes de calcul de l'incertitude sur la valeur des paramètres estimés.

Méthode	Complexité de mise en œuvre	Temps de calcul	Mémoire nécessaire	Fiabilité des résultats
Analytique	très importante (dépend des outils de calcul symbolique)	faible	faible	très bonne
Monte-Carlo	moyenne	> 1 jour	moyenne	dépend du modèle de bruit, de la génération et du nombre des expériences fictives
Matrice de Fisher	importante	1 heure	importante (matrice de sensibilité globale)	moyenne (bonne dans le cas de modèles linéaires)
Graphique	faible sur un modèle simple et comportant peu de paramètres, importante dans le cas contraire	> 1 jour	faible	bonne (possibilité de calculer des "régions de confiance" (Cowan, 1998))

**Estimation de l'incertitude par la matrice d'information de Fisher.** On calcule tout d'abord la matrice  $\mathbf{E}$  des erreurs de simulation (équation (3.7)) à partir du modèle identifié et des données de vol. On peut alors estimer la matrice de covariance des résidus,  $\hat{\Sigma}$ , à partir de l'équation (3.39). On vérifie que les éléments non-diagonaux sont petits devant la diagonale et que les éléments diagonaux sont proches. Sous l'hypothèse d'homoscédasticité<sup>16</sup>, on peut alors écrire  $\hat{\Sigma} \approx \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_{N_y}$ , et on approxime  $\sigma_\varepsilon^2$  par la moyenne des éléments diagonaux de  $\hat{\Sigma}$ . En considérant uniquement les sorties  $\mathbf{v}^B$  et  $\boldsymbol{\omega}^B$  sélectionnées lors de l'analyse de sensibilité en section 3.5.4, on trouve :

$$\sigma_\varepsilon^2 \approx \frac{1}{N_y} \text{trace}(\hat{\Sigma}) = 0.044 \quad (3.50)$$

A l'aide de la matrice de sensibilité calculée en section 3.5.4.2, on calcule la matrice d'information de Fisher (équation (3.43)) :

$$\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} [\bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})]^T \bar{\mathbf{S}}_y(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.51)$$

Cette matrice exprime le contenu informatif des données expérimentales, et, comme expliqué précédemment, on peut en déduire un intervalle de confiance sur la valeur estimée des paramètres. Les résultats de la mise en œuvre sur le modèle sont présentés dans le tableau 3.12. La deuxième colonne du tableau 3.12 montre l'intervalle de confiance à 95% pour chaque paramètre (voir section 3.5.5.2), calculé à partir des éléments diagonaux de l'inverse de la matrice de Fisher

16. Homoscédasticité : la variance des erreurs stochastiques est la même pour chaque observation.

grâce à l'équation (3.52) ci-dessous, et exprimé sous forme d'une incertitude relative en %.

$$\theta_{bi} = \widehat{\theta}_{bi} \pm 1.96 \sqrt{[\mathbf{F}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})]_{i,i}} \quad [\text{en \%}] \quad (3.52)$$

Les colonnes suivantes du tableau présentent les coefficients de corrélation pour chaque couple de paramètres, calculés à partir de l'équation (3.45). On remarque une forte corrélation entre certains paramètres, expliquant l'incertitude élevée sur leur valeur. De plus, certains coefficients de corrélation sont à 1 en dehors de la diagonale, montrant une absence d'identifiabilité de certains paramètres.

L'intervalle de confiance et les coefficients de corrélation dépendent de la sélection des paramètres à identifier, et le tableau 3.13 montre les résultats obtenus en réduisant le nombre des paramètres estimés : seuls les paramètres présentant une fonction de sensibilité de norme suffisamment élevée sont retenus (voir la section 3.5.4.2 et notamment le tableau 3.10). L'incertitude est alors nettement plus réduite qu'en considérant l'ensemble des paramètres.

Enfin, le tableau 3.14 présente les résultats pour un nombre encore plus réduit de paramètres : seuls les paramètres que nous ne pouvons pas déterminer autrement que grâce aux données de vol sont retenus. Les autres sont estimés grâce aux méthodes simples présentés en section 3.4.2. C'est cette dernière sélection qui est retenue. La valeur des paramètres estimés, leur incertitude et la méthode d'estimation sont répertoriés dans le tableau 3.15.

**Estimation de l'incertitude par la méthode "graphique".** La première étape pour l'application de cette méthode est de tracer la fonction LL autour de la valeur estimée du paramètre. Pour cela, il faut tout d'abord établir la relation entre l'erreur SSE, minimisée par la méthode des moindres carrés, et la fonction LL.

A partir de l'expression de la LL pour un résidu gaussien, donnée en équation (3.36), on peut écrire la relation suivante :

$$\ln L(\theta_i) = -\frac{e_{SSE}}{2\sigma_\varepsilon^2} \quad (3.53)$$

La variance du résidu  $\sigma_\varepsilon^2$  est quant à elle estimée grâce à l'équation (3.38). En utilisant l'expression du minimum de l'erreur SSE donnée par l'équation (3.8) pour  $\theta_i = \widehat{\theta}_i$ , on déduit l'expression suivante :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N_e - N_p} \min_{\theta_i}(e_{SSE}) \quad (3.54)$$

Enfin, à partir des équations (3.53) et (3.54), on peut écrire l'expression de la LL en fonction de l'erreur SSE, indépendamment de la variance du résidu :

$$\ln L(\theta_i) = -\frac{(N_e - N_p)e_{SSE}}{2 \min_{\theta_i}(e_{SSE})} \quad (3.55)$$

A partir de l'erreur SSE autour de la valeur estimée du paramètre, on peut donc tracer la LL correspondante et en déduire un intervalle de confiance grâce à l'équation (3.49).

L'application de la méthode à un modèle de test simple comportant deux paramètres donne des résultats très proches de la méthode par la matrice d'information de Fisher. Nous obtenons cependant des résultats très mitigés sur le modèle considéré dans cette étude, à cause du nombre de paramètres important et de l'allure locale complexe des fonctions de coût. Ils ne seront donc pas présentés ici.

**Discussion sur les méthodes.** La première méthode appliquée ici nécessite la mise en place de programmes volumineux et relativement complexes pour aboutir à une estimation de la matrice d'information de Fisher, notamment pour l'approximation numérique de la matrice de sensibilité globale. Cela nécessite en effet de résoudre itérativement les équations différentielles du modèle en utilisant des valeurs perturbées des paramètres. Il faut donc réaliser  $N_p$  simulations du modèle,

en calculant la matrice de sensibilité (matrice des dérivées partielles des sorties du modèle par rapport aux paramètres) à chaque pas de calcul. On obtient une matrice à trois dimensions de taille importante. Typiquement, pour un horizon de temps de 60 secondes et un pas de calcul de 1 ms, on obtient une matrice de taille  $(60\,000 \times 12 \times 42)$ . Le temps de calcul est de l'ordre de 1 heure dans notre cas.

La seconde méthode présente l'avantage de la simplicité, mais nécessite de réaliser un nombre très important de simulations du modèle, menant à des temps de calculs de plusieurs jours (dépendant de la résolution désirée). Elle nécessite également d'avoir une connaissance des bornes sur chaque paramètre pour limiter le nombre de simulations. La méthode s'avère utile pour estimer rapidement un intervalle de confiance sur un modèle comportant peu de paramètres et dont la simulation est rapide, elle est cependant beaucoup plus difficile à mettre en œuvre sur un modèle plus complexe.

Table 3.12 – Calcul de l'incertitude et des coefficients de corrélation sur les paramètres.

Paramètre	Intervalle de conf. à 95%	Coefficients de corrélation															
		$d_{cp,(z)}$	$K_{ser}$	$\Delta_u$	$d_{I,(z)}$	$\alpha_l$	$I_{yy}$	$\rho$	$C_{mq}$	$I_{xx}$	$C_x$	$C_y$	$C_z$	$C_{lp}$	$\gamma_l$	$C_{nr}$	$\alpha_u$
$d_{cp,(z)}$	21.6%	1.00	-0.31	0.08	0.97	-0.02	1.00	0.10	1.00	1.00	-0.61	0.01	1.00	0.98	0.98	0.01	0.99
$K_{ser}$	14.0%	-0.31	1.00	-0.05	-0.38	-0.85	-0.30	-0.04	-0.30	0.35	0.27	0.16	-0.30	-0.28	-0.29	0.65	-0.29
$\Delta_u$	0.2%	0.08	-0.05	1.00	0.05	0.10	0.09	-0.05	0.09	-0.00	-0.05	0.03	0.08	0.09	0.09	-0.11	0.09
$d_{I,(z)}$	25.3%	0.97	-0.38	0.05	1.00	-0.03	0.97	0.11	0.97	-0.63	-0.62	0.01	0.97	0.95	0.95	0.02	0.96
$\alpha_l$	12.2%	-0.02	-0.85	0.10	-0.03	1.00	-0.02	0.01	-0.02	-0.04	0.01	-0.18	-0.02	-0.03	-0.03	-0.77	-0.02
$I_{yy}$	20.1%	1.00	-0.30	0.09	0.97	-0.02	1.00	0.11	1.00	-0.56	-0.58	0.01	1.00	0.98	0.98	0.01	0.99
$\rho$	0.2%	0.10	-0.04	-0.05	0.11	0.01	0.11	1.00	0.12	0.04	0.06	0.03	0.11	0.13	0.12	-0.03	0.13
$C_{mq}$	20.2%	1.00	-0.31	0.09	0.98	-0.02	1.00	0.11	1.00	-0.57	-0.59	0.01	1.00	0.98	0.98	0.01	0.99
$I_{xx}$	20.1%	1.00	-0.30	0.09	0.97	-0.02	1.00	0.12	1.00	-0.56	-0.57	0.01	1.00	0.98	0.98	0.01	0.99
$C_x$	1.7%	-0.61	0.35	-0.00	-0.63	-0.04	-0.56	0.04	-0.56	1.00	0.84	0.02	-0.58	-0.55	-0.55	0.03	-0.56
$C_y$	1.6%	-0.62	0.27	-0.05	-0.62	0.01	-0.58	0.06	-0.57	0.84	1.00	0.01	-0.59	-0.57	-0.57	-0.01	-0.58
$C_z$	1.9%	0.01	0.16	0.03	0.01	-0.18	0.01	0.03	0.01	0.02	0.01	1.00	0.01	0.01	0.01	-0.48	0.01
$C_{lp}$	20.1%	1.00	-0.30	0.08	0.97	-0.02	1.00	0.11	1.00	-0.58	-0.59	0.01	1.00	0.98	0.98	0.01	0.99
$\gamma_l$	20.8%	0.98	-0.28	0.09	0.95	-0.03	0.98	0.13	0.98	-0.55	-0.57	0.01	0.98	1.00	1.00	0.02	0.99
$C_{nr}$	21.0%	0.98	-0.29	0.09	0.95	-0.03	0.98	0.12	0.98	-0.55	-0.57	0.01	0.98	1.00	1.00	0.02	0.98
$\alpha_u$	15.0%	0.01	0.65	-0.11	0.02	-0.77	0.01	-0.03	0.01	0.03	-0.01	-0.48	0.01	0.02	0.02	1.00	0.01
$I_{zz}$	20.6%	0.99	-0.29	0.09	0.96	-0.02	0.99	0.13	0.99	-0.56	-0.58	0.01	0.99	0.99	0.98	0.01	1.00

**Table 3.13** – Calcul de l'incertitude et des coefficients de corrélation sur un nombre réduit de paramètres, sélectionnés à partir de l'analyse de sensibilité locale.

Paramètre	Intervalle de conf. à 95%	Coefficients de corrélation												
		$d_{cp,(z)}$	$K_{ser}$	$\Delta_u$	$d_{I,(z)}$	$\alpha_I$	$\rho$	$C_{mq}$	$C_x$	$C_y$	$C_z$	$C_{Ip}$	$\gamma_I$	$C_{nr}$
$d_{cp,(z)}$	1.3%	1.00	-0.13	-0.06	0.26	0.03	-0.21	0.62	-0.89	0.01	0.66	0.00	-0.01	-0.04
$K_{ser}$	13.2%	-0.13	1.00	-0.04	-0.39	-0.90	0.02	-0.13	0.23	0.19	-0.03	0.05	0.01	0.68
$\Delta_u$	0.2%	-0.06	-0.04	1.00	-0.17	0.12	-0.04	-0.01	0.05	0.04	-0.13	0.02	0.04	-0.13
$d_{I,(z)}$	5.8%	0.26	-0.39	-0.17	1.00	-0.06	-0.01	0.36	-0.43	-0.01	0.21	-0.03	0.03	0.05
$\alpha_I$	12.1%	0.03	-0.90	0.12	-0.06	1.00	-0.02	-0.04	-0.05	-0.04	-0.07	-0.04	-0.03	-0.76
$\rho$	0.2%	-0.21	0.02	-0.04	-0.01	-0.02	1.00	-0.19	0.15	0.09	-0.23	0.03	0.00	0.01
$C_{mq}$	0.8%	0.62	-0.13	-0.01	0.36	-0.04	-0.19	1.00	-0.35	0.01	0.78	-0.04	0.00	0.03
$C_x$	1.4%	-0.89	0.23	0.05	-0.43	-0.05	0.15	-0.35	1.00	0.03	-0.46	-0.02	0.01	0.04
$C_y$	1.2%	-0.89	0.19	0.04	-0.37	-0.04	0.09	-0.45	0.83	-0.00	-0.36	-0.00	0.01	0.05
$C_z$	1.9%	0.01	0.19	0.03	-0.01	-0.19	0.02	0.01	0.03	1.00	0.03	0.01	-0.00	-0.48
$C_{Ip}$	0.9%	0.66	-0.03	-0.13	0.21	-0.07	-0.23	0.78	-0.46	0.03	1.00	-0.04	-0.01	0.05
$\gamma_I$	3.6%	0.00	0.05	0.02	-0.03	-0.04	0.03	-0.04	-0.02	0.01	-0.04	1.00	0.93	0.03
$C_{nr}$	3.9%	-0.01	0.01	0.04	0.03	-0.03	0.00	0.00	0.01	-0.00	-0.01	0.93	1.00	0.03
$\alpha_u$	14.8%	-0.04	0.68	-0.13	0.05	-0.76	0.01	0.03	0.04	0.05	0.05	0.03	0.03	1.00

**Table 3.14** – Résultats sur un nombre réduit de paramètres, sélectionnés en fonction de la difficulté de l'estimation de leur valeur par d'autres méthodes.

Paramètre	Intervalle de conf. à 95%	Coefficients de corrélation										
		$\Delta_u$	$d_{cp,(z)}$	$C_z$	$C_y$	$\rho$	$C_{mq}$	$C_x$	$\gamma_I$	$C_{Ip}$	$C_{nr}$	
$\Delta_u$	0.1%	1.00	0.12	-0.04	-0.13	0.21	-0.13	-0.10	-0.11	-0.07	-0.08	
$d_{cp,(z)}$	0.7%	0.12	1.00	0.05	-0.52	0.17	0.40	-0.20	0.03	0.32	0.01	
$C_z$	0.3%	-0.04	0.05	1.00	-0.00	0.04	0.02	-0.02	-0.02	0.05	0.09	
$C_y$	0.8%	-0.13	-0.52	-0.00	1.00	-0.15	-0.01	0.14	-0.02	0.30	-0.03	
$\rho$	0.6%	0.21	0.17	0.04	-0.15	1.00	-0.12	-0.03	0.01	-0.20	0.01	
$C_{mq}$	1.2%	-0.13	0.40	0.02	-0.01	-0.12	1.00	0.54	-0.00	0.40	-0.05	
$C_x$	1.2%	-0.10	-0.20	-0.02	0.14	-0.03	0.54	1.00	0.02	0.27	0.04	
$\gamma_I$	1.0%	-0.11	0.03	-0.02	-0.02	0.01	-0.00	0.02	1.00	-0.00	0.64	
$C_{Ip}$	1.6%	-0.07	0.32	0.05	0.30	-0.20	0.40	-0.00	0.00	1.00	-0.03	
$C_{nr}$	1.6%	-0.08	0.01	0.09	-0.03	0.01	-0.05	0.04	0.64	-0.03	1.00	

Table 3.15 – Valeur des paramètres du modèle identifié et incertitudes associées.

Paramètre	Description	Valeur	Incertitude	Unité	Méthode d'estimation
$\alpha_l$	coef. de poussée du rotor inférieur	$3.62e-5$	$\pm 1.1\%$	$N \text{ rad}^{-2} \text{ s}^2$	estimé (balance)
$\alpha_u$	coef. de poussée du rotor supérieur	$3.46e-5$	$\pm 1.1\%$	$N \text{ rad}^{-2} \text{ s}^2$	estimé (balance)
$\gamma_l$	coef. de traînée du rotor inférieur	$6.48e-6$	$\pm 3.8\%$	$N \text{ m rad}^{-2} \text{ s}^2$	estimé (vol)
$\Delta u$	ratio entre $\gamma_u$ et $\gamma_l$	1.004	$\pm 0.2\%$	-	estimé (vol)
$I_{xx}$	moment d'inertie suivant $x^B$	$1.20e-3$	$\pm 5\%$	$\text{kg m}^2$	estimé (pendule)
$I_{yy}$	moment d'inertie suivant $y^B$	$1.21e-3$	$\pm 5\%$	$\text{kg m}^2$	estimé (pendule)
$I_{zz}$	moment d'inertie suivant $z^B$	$7.71e-4$	$\pm 5\%$	$\text{kg m}^2$	estimé (pendule)
$m$	masse du véhicule	0.325	$\pm 2\%$	kg	mesuré
$d_{l,(z)}$	coord. suivant $z^B$ du centre de rotation du rotor inf.	-0.076	$\pm 2\%$	m	mesuré
$d_{u,(z)}$	coord. suivant $z^B$ du centre de rotation du rotor sup.	-0.136	$\pm 2\%$	m	mesuré
$d_{cp,(z)}$	coord. suivant $z^B$ du centre de pression	-0.022	$\pm 1.2\%$	m	estimé (vol)
$\rho$	déphasage entre pas et battement	32.5	$\pm 0.2\%$	degrés	estimé (vol)
$C_x$	coef. de traînée aérodynamique	1	$\pm 1.1\%$	-	estimé (vol)
$C_y$	coef. de traînée aérodynamique	0.6	$\pm 1.0\%$	-	estimé (vol)
$C_z$	coef. de traînée aérodynamique	1	$\pm 0.3\%$	-	estimé (vol)
$C_{lp}$	coef. aérodynamique d'amortissement	$1.6e-2$	$\pm 0.9\%$	-	estimé (vol)
$C_{mq}$	coef. aérodynamique d'amortissement	$8.0e-2$	$\pm 0.8\%$	-	estimé (vol)
$C_{nr}$	coef. aérodynamique d'amortissement	$1.0e-2$	$\pm 1.4\%$	-	estimé (vol)
$K_{ser}$	gain des servomoteurs	0.39	$\pm 10\%$	rad	estimé (banc de test)
$\tau_{ser}$	constante de temps des servomoteurs	0.018	$\pm 10\%$	s	estimé (banc de test)
$K_{mot}$	gain des moteurs	137	$\pm 10\%$	rad/s	estimé (banc de test)
$\tau_{mot}$	constante de temps des moteurs	0.17	$\pm 10\%$	s	estimé (banc de test)
$g$	accélération de la gravité	9.81	-	$\text{m/s}^2$	-
$\rho_{air}$	densité de l'air	1.226	-	$\text{kg/m}^3$	-
$k_1$	gain des axes roulis/tangage (boucle externe)	6.5	-	$\text{s}^{-1}$	fixé
$k_2$	gain des axes p/q (boucle interne)	0.13	-	s	fixé
$k_3$	gain de la poussée	1	-	-	fixé
$k_4$	gain de l'axe r	0.2	-	s	fixé

### 3.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons établi une méthodologie d'identification complète que nous avons appliquée au modèle de l'hélicoptère. Cette méthodologie est structurée en quatre parties, avec pour objectif d'identifier un modèle de l'hélicoptère à partir de données issues d'un vol.

Dans un premier temps, la structure du modèle est étudiée afin de déterminer l'observabilité de ses paramètres. Cette analyse permet une sélection des mesures nécessaires à l'estimation de ces derniers, et de déterminer les ensembles de paramètres observables. Les problématiques liées à l'acquisition des données d'entrée-sortie sont alors détaillées, comme l'identification en boucle fermée et les analyses d'intégrités sur les données de vol. Ces données permettent alors l'estimation des paramètres par la méthode PEM.

Le modèle identifié est ensuite évalué à travers différentes études. L'analyse de sensibilité du modèle aux paramètres donne une information sur la qualité de la trajectoire d'excitation et sur l'interdépendance entre les paramètres. Cette analyse pose également les bases nécessaires à l'estimation d'intervalles d'incertitude sur les valeurs estimées des paramètres. Ces intervalles permettent d'évaluer la fiabilité de l'estimation, et sont également utiles pour la construction de modèles incertains pour la commande.

A travers la méthodologie décrite dans ce chapitre, nous avons voulu donner des éléments de réponse au compromis entre la simplicité et la précision du modèle, qui est une question fondamentale en modélisation. Le meilleur modèle devrait être le plus simple possible tout en apportant la précision nécessaire, ce qui dépend de l'application. Ainsi, nous avons mené une comparaison entre trois modèles de complexité croissante et mis en évidence l'influence de certains phénomènes aérodynamiques. Ils sont comparés sur la base de leur complexité et leur précision sur des données de vol. En particulier, l'étude a montré l'importance de la prise en compte de la distance entre le centre de gravité et le centre de poussée qui permet une amélioration significative de la précision au prix d'une très faible augmentation de la complexité. Cette distance est typiquement négligée dans les cas similaires issus de la littérature.

La validation de la démarche proposée dans ce chapitre intervient principalement dans le chapitre suivant, où le modèle identifié est utilisé pour la simulation et la synthèse de lois de commandes.

# Commande

## Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b>	<b>137</b>
<b>4.2 Validation préalable de la démarche</b>	<b>138</b>
<b>4.3 Modèle pour la commande</b>	<b>143</b>
4.3.1 Linéarisation du modèle pour la commande	143
4.3.2 Analyse du modèle linéaire en boucle ouverte	149
4.3.3 Prise en compte de la dynamique des actionneurs	150
<b>4.4 Objectifs de la commande</b>	<b>152</b>
4.4.1 Limites physiques, temps de réponse et saturations	152
4.4.2 Incertitudes	152
4.4.3 Objectifs de robustesse	152
4.4.4 Domaine de validité de la commande	153
4.4.5 Des attentes subjectives et variées	153
<b>4.5 La commande en cascade</b>	<b>154</b>
4.5.1 Structure générale de la commande cascadée	154
4.5.2 Structure classique de commande en cascade par PID	156
<b>4.6 Étude de la boucle interne : commande de l'attitude du drone</b>	<b>157</b>
4.6.1 Évaluation a posteriori du correcteur utilisé pour l'identification	157
4.6.2 Commande linéaire quadratique	159
4.6.3 Les approches basées sur les quaternions d'attitude	162
<b>4.7 Boucle externe : commande de la position</b>	<b>168</b>
<b>4.8 Conclusion du chapitre</b>	<b>171</b>

---





## 4.1 Introduction

L'objectif d'un système de commande est de façonner le comportement d'un système pour répondre à divers objectifs, le principal étant la stabilité. Pour cela, le système de commande pilote automatiquement les entrées du système à asservir pour obtenir un comportement désiré en sortie. Dans le cadre des véhicules aériens, il s'agit donc de piloter les actionneurs de manière à obtenir l'attitude, la vitesse et la position désirées<sup>1</sup>.

Ces dernières décennies, un grand nombre de techniques de commande utilisant des approches variées ont été appliquées sur les drones miniatures, et sur les drones à voilure tournante en particulier. Hua *et al.* (2013) et Kendoul (2012) en donnent un état de l'art, et proposent un classement de ces techniques en trois catégories : les approches linéaires, les approches non-linéaires, et les approches basées sur l'apprentissage. Les deux premières se basent sur un modèle du véhicule. La dernière, nettement moins courante, ne nécessite pas obligatoirement un modèle<sup>2</sup> mais un nombre important de données de vol pour "l'apprentissage" de la commande.

Les approches non-linéaires sont relativement moins courantes pour la commande de drones et sont souvent limitées à des études théoriques dans la littérature, principalement en raison de la complexité de leur implémentation (Valavanis, 2007, p. 114). Une comparaison de différentes méthodes de commande non-linéaires, appliquées à un modèle similaire d'hélicoptère coaxial miniature, est donnée par Drouot (2013).

Les approches linéaires sont de loin les plus conventionnelles, et se basent sur un modèle linéaire du véhicule. On peut mentionner trois grandes approches :

- Les approches par PID (Proportionnel-Intégrale-Dérivée) : ces techniques restent les plus utilisées en pratique, dans de nombreux domaines incluant la commande de véhicules aériens (Mettler *et al.*, 2002, chap. 6). Un tel correcteur est simple et rapide à implémenter, et un modèle grossier est suffisant pour la synthèse : les réglages de gains sont en général faits de manière empirique, en suivant des procédures bien connues et intuitives.
- Les approches de commande optimale, qui visent à trouver le correcteur stabilisant le système tout en minimisant un critère donné, exprimé dans le domaine temporel. C'est le cas de la commande LQ qui vise à la minimisation d'un critère quadratique et aboutit à un retour statique d'état (Bérard *et al.*, 2012; Laroche, 2010).
- Les approches de commande robuste, qui cherchent à obtenir des garanties de robustesse en stabilité et en performance du système asservi, face aux perturbations ou aux erreurs de modélisation (Laroche, 2016; Zhou et Doyle, 1998). Les méthodes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , en particulier, se basent sur la définition de gabarits sur les transferts du système en boucle fermée, dans le domaine fréquentiel.

On peut toutefois noter que les frontières sont parfois floues entre ces trois approches. Il est possible par exemple de construire un contrôleur PID par les approches de commande  $\mathcal{H}_\infty$  structurée (Alazard *et al.*, 1999), et les approches de la commande robuste visent à l'optimisation de différents critères.

Les objectifs de la commande sont formulés principalement en termes de performance (temps de réponse, dépassement maximal, rejet de perturbations, etc.) et de robustesse (capacité à maintenir la stabilité ou les performances face aux incertitudes paramétriques, aux dynamiques négligées, etc.). C'est le compromis essentiel que l'on doit considérer lors de la conception de lois de commande. On peut formuler également des objectifs de consommation ou de sollicitation des actionneurs, comme proposé par la commande LQ.

Dans les deux chapitres précédents, nous avons établi et identifié un modèle mathématique non-linéaire décrivant le comportement de l'hélicoptère miniature étudié. Ce modèle a été affiné en tenant compte d'effets aérodynamiques secondaires et des effets dynamiques au rotor.

1. La plupart des drones étant sous-actionnés, les différents états du véhicule sont couplés : un changement de position du drone nécessite un changement de son attitude. Voir la section 2.2.1 pour plus de détails.

2. Les techniques par apprentissage qui utilisent un modèle se basent en général sur un modèle simple : Abbeel *et al.* (2010, 2007) utilise par exemple le modèle dynamique du corps rigide. Au contraire, Montgomery et Bekey (1998) utilisent des méthodes sans modèle pour l'apprentissage des lois de commandes basées sur la logique floue.

Cependant, la plupart des méthodes modernes de synthèses de lois de commande reposent sur un modèle simplifié, en général linéaire, du système à commander. Le domaine de validité du modèle simplifié est alors réduit (dynamiques négligées), souvent autour d'un point de fonctionnement. En commande robuste, ces approximations et dynamiques négligées sont considérées comme des perturbations (ou bruits) et des incertitudes sur le modèle. La commande mise en place sur ce modèle simplifié passe alors par une étape de validation a posteriori, qui se fait par une analyse de robustesse et par des simulations sur le modèle non-linéaire, avant de pouvoir être implémentée sur le système réel. Les prérequis pour la synthèse d'un correcteur sont donc :

1. un cahier des charges des performances désirées du système commandé (temps de réponse, erreurs de suivi de consignes, découplage, etc.);
2. une connaissance des incertitudes de modélisation et des perturbations que peut subir le système, et pour lesquelles les performances et la robustesse doivent être assurées;
3. un modèle (linéaire) du système à commander;

Ces trois points font l'objet des premières sections de ce chapitre. En section 4.3, un modèle adapté à la synthèse est construit. En section 4.4, les objectifs de la commande sont établis. La suite du chapitre est consacrée à l'étude de différentes stratégies pour la commande. Nous utilisons une architecture de commande en cascade, largement utilisée pour les systèmes aéronautiques. L'approche la plus courante sur les drones est étudiée en premier lieu, à savoir des correcteurs de type PID sur un modèle découplé en quatre chaînes SISO (*Single Input Single Output*), qui servira de point de comparaison. Nous étudions alors l'apport des méthodes  $\mathcal{H}_\infty$  structurée permettant un réglage automatique des paramètres du correcteur, de manière à ce que la boucle fermée satisfasse le cahier des charges. Nous étudions ensuite l'approche par retour d'état statique en utilisant la méthode de synthèse LQ. En dernière partie, nous considérons différentes approches basées sur les quaternions d'attitude. A partir des résultats de simulation sur le modèle non-linéaire, une sélection des commandes les plus prometteuses est testée sur le système afin d'évaluer les performances réelles.

Les lois de commande étudiées dans ce chapitre restent classiques, mais démontrent la validité de l'approche et notamment des modèles utilisés. En effet, l'obtention d'un correcteur de qualité avec lequel le système expérimental a un comportement similaire au système simulé constitue une validation à la fois de la méthodologie d'identification et de la méthode de commande. L'accent est porté sur les contraintes pratiques et les problématiques liées à la mise en œuvre des lois de commandes pour drones, souvent négligées dans la littérature scientifique.

## 4.2 Validation préalable de la démarche

Dans cette première section, nous proposons une validation de l'approche et des modèles identifiés. Pour cela, nous revenons à l'objectif initial de la thèse et comparons les résultats obtenus lors des thèses précédentes sur le même projet avec les résultats obtenus grâce à l'approche présentée ici.

**L'origine de l'étude : des résultats expérimentaux décevants.** Lors d'essais expérimentaux réalisés par Drouot (2013) et Chauffaut (2014) avec une plateforme similaire à celle étudiée ici (voir également la section 1.3.2 et les conclusions de ces deux thèses), il a été mis en avant un certain nombre de problèmes et de dysfonctionnements qui n'avaient pas été soupçonnées lors des simulations. On peut les résumer au constat suivant : les lois de commandes synthétisées sur le modèle pour la commande et testées sur le simulateur ne donnent pas les résultats escomptés lors des essais expérimentaux. En effet :

- le comportement de la maquette est erratique et instable avec les réglages initiaux des lois de commandes,

- des réglages empiriques de la commande permettent d’obtenir des résultats plus satisfaisant (certains gains doivent être multipliés par 45, voir le tableau 4.1) mais qui restent loin des performances prévues en simulation.

Nous proposons dans cette section de réaliser des comparaisons entre “l’ancien” modèle, utilisé durant les travaux de Koehl *et al.* (2012), Drouot (2013) et Chauffaut (2014), et le modèle développé dans cette thèse (appelé “nouveau modèle”). Tous deux sont non-linéaires. Nous utilisons pour cela :

- le modèle développé par Koehl *et al.* (2010b),
- la loi de commande hiérarchique par backstepping, non-linéaire, développée par Drouot *et al.* (2014),
- les résultats expérimentaux réalisés par A. Drouot et C. Chauffaut.

**Simulation de la loi de commande initiale.** La première comparaison est faite en simulant la loi de commande initiale (réglages donnés par la première colonne du tableau 4.1), qui a fait défaut lors de l’implémentation, sur l’ancien et le nouveau modèle. Les résultats de cette simulation sont présentés en figure 4.1 : l’ancien modèle (en rouge) donne de très bons résultats et suit la consigne (en noir) tandis que le nouveau (en bleu) montre un comportement erratique, conformément à ce qui est observé en pratique.

**Table 4.1** – Paramètres de la loi de commande par backstepping (Drouot et al., 2014, chap. 5). La première colonne montre la valeur des gains déduits sur la simulation, la deuxième colonne montre les valeurs permettant d’obtenir des résultats réels satisfaisants.

Gain	Valeur initiale	Valeur empirique
$k_{\delta_1}$	1	1
$k_{\delta_2}$	1	1
$k_{\epsilon_1}$	1	diag([45, 45, 10])
$k_{\epsilon_2}$	3	diag([6, 6, 10])

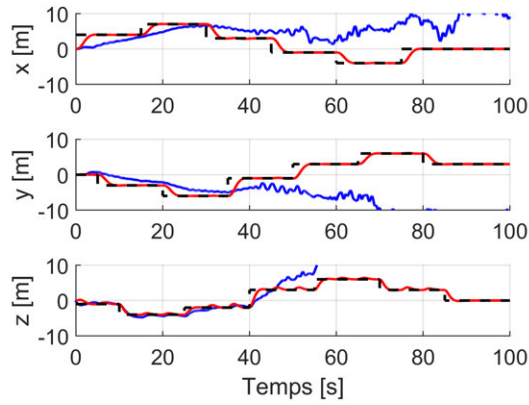
**Comparaison avec les résultats expérimentaux.** Pour la seconde comparaison, nous utilisons la loi de commande dont les réglages ont été modifiés pour obtenir un comportement stable de la maquette lors des essais. Les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux et présentés en figure 4.2. L’ancien modèle (en rouge) montre un bon suivi de la consigne (en noir) mais les états simulés sont éloignés des états mesurés et les harmoniques à moyenne et haute fréquences ne sont pas du tout reproduits. Le nouveau modèle (bleu) montre comparativement un comportement très proche des mesures : la dynamique du suivi de consigne (figure 4.2a) est plus proche, le comportement très perturbé sur les vitesses angulaires et les consignes aux servomoteurs (figures 4.2d et 4.2e) est bien reproduit. Enfin, il faut noter que la maquette utilisée lors de ces tests comportait une barre de Bell, que nous n’avons pas sur notre maquette (voir section 1.4) et qui n’est pas prise en compte dans le modèle. Il est connu que le couplage de la barre de Bell avec le rotor supérieur et le corps de l’hélicoptère peut créer des phénomènes de résonance qui expliqueraient vraisemblablement les oscillations à moyenne fréquence observées en particulier sur les positions et vitesses latérales (figures 4.2a et 4.2c), et qui ne sont pas reproduites par notre modèle. De plus, la maquette diffère avec la maquette identifiée en terme de masse (290 contre 325 g), d’inertie et de dimensions (hauteur de 300 contre 190 mm). Le comportement est, malgré tout, bien reproduit.

Les améliorations apportées entre l’ancien et le nouveau modèle proviennent de différentes sources :

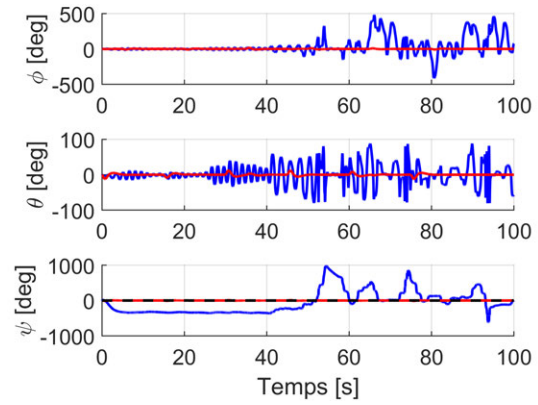
- Identification d’un modèle des actionneurs, qui ajoutent notamment un retard pouvant déstabiliser la boucle de commande.
- Meilleure identification du modèle, même si la maquette identifiée est différente de celle utilisée durant ces essais.

- Modèle aérodynamique plus précis, avec la prise en compte de la traînée aérodynamique, expliquant la meilleure concordance sur la position et la vitesse latérales.

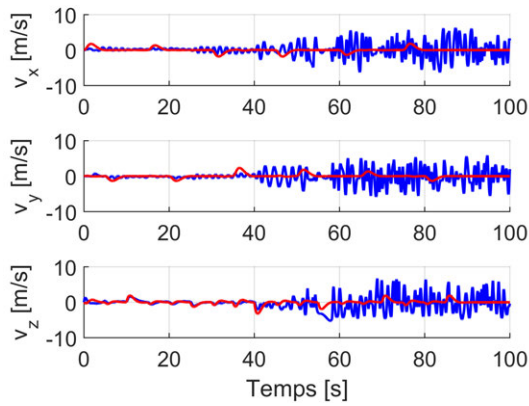
Enfin, nous pouvons mentionner que la prise en compte du modèle des capteurs ne change que très peu le comportement de la boucle fermée.



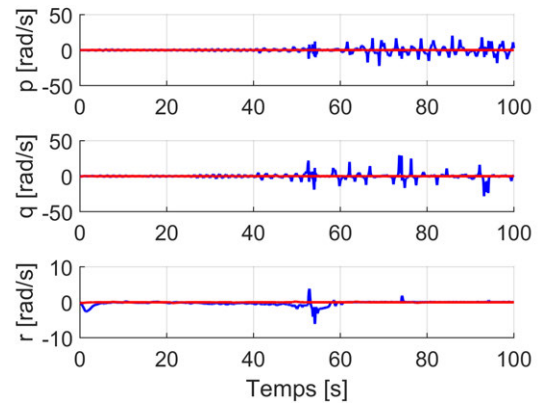
(a) Positions  $x$ ,  $y$  et  $z$  désirées (ligne pointillée noire) et simulées avec l'ancien modèle (ligne rouge) et le nouveau (bleu).



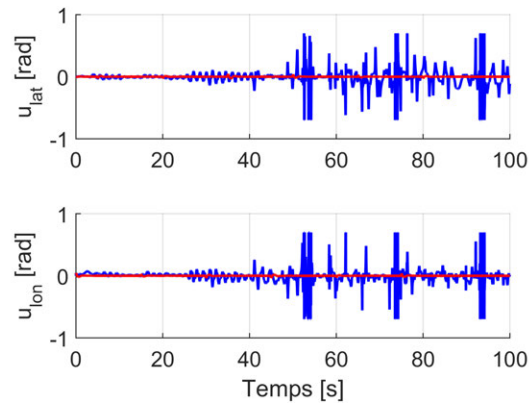
(b) Angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  désirés (ligne pointillée noire) et simulés avec l'ancien modèle (ligne rouge) et le nouveau (bleu).



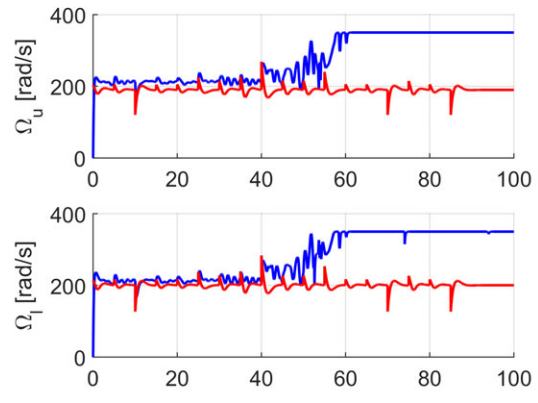
(c) Vitesses  $u$ ,  $v$  et  $w$  simulées.



(d) Vitesses angulaires  $p$ ,  $q$  et  $r$  simulées avec l'ancien modèle (ligne rouge) et le nouveau (bleu).

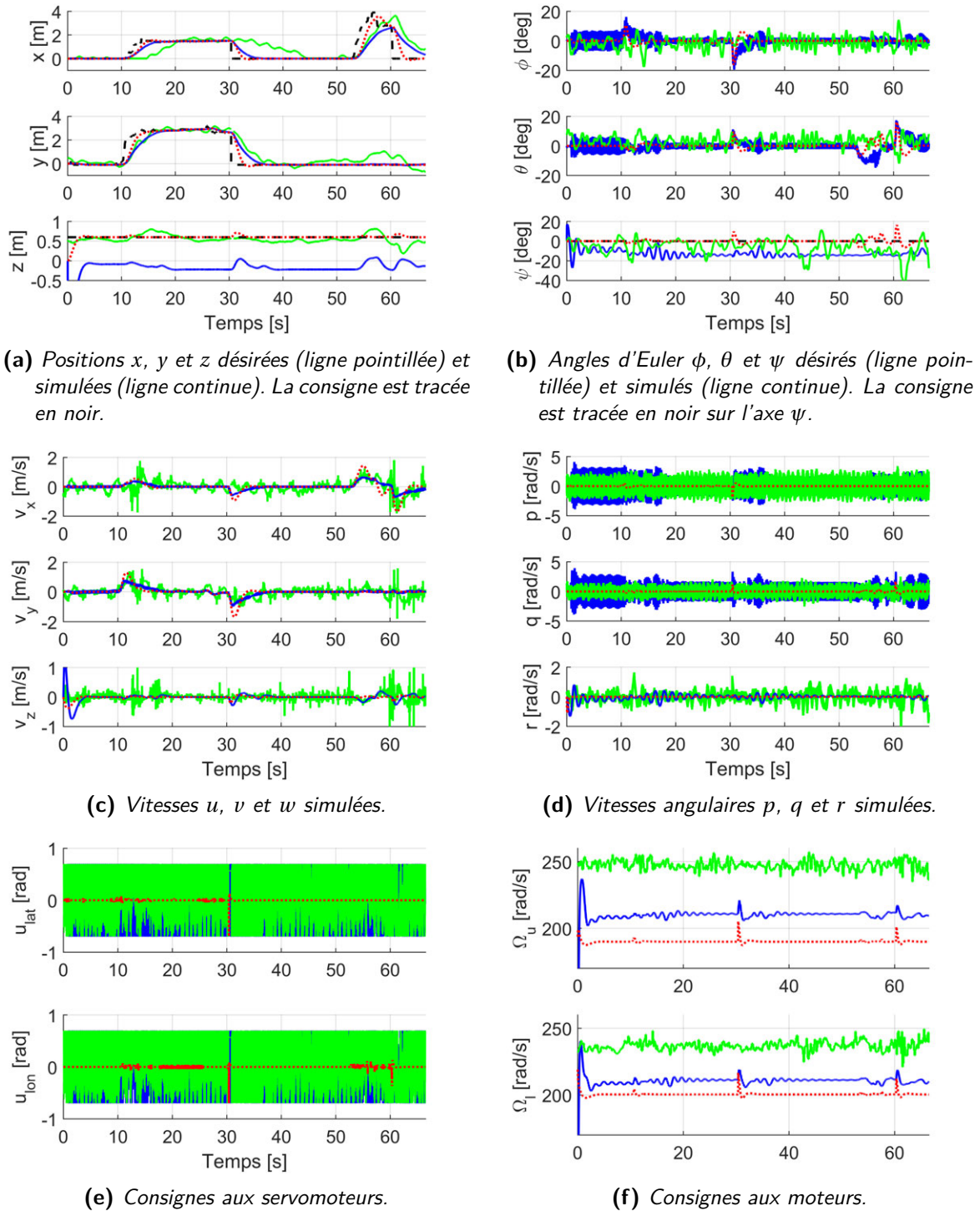


(e) Consignes aux servomoteurs simulées avec l'ancien modèle (ligne rouge) et le nouveau (bleu).



(f) Consignes aux moteurs simulées avec l'ancien modèle (ligne rouge) et le nouveau (bleu).

**Figure 4.1** – Simulation de la loi de commande par backstepping initiale sur l'ancien et le nouveau modèle. Le nouveau modèle montre un comportement instable également constaté en pratique.



**Figure 4.2** – Comparaison des simulations sur les deux modèles non-linéaires et des données expérimentales. Le nouveau modèle (en bleu) présente un comportement en simulation proche des données mesurées (en vert). La simulation à l'aide de l'ancien modèle (en rouge) présente une réponse bien plus stable qu'en réalité.

### 4.3 Modèle pour la commande

Le modèle pour la commande doit intégrer les aspects dynamiques importants tout en gardant une structure permettant la synthèse des lois de commande. Pour les techniques de commande classiques, un système linéaire à temps invariant (LTI) est bien adapté. Un tel système est régi par un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Il peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

En utilisant la transformation de Laplace, on a alors :  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ .

#### 4.3.1 Linéarisation du modèle pour la commande

Dans cette partie, le modèle non-linéaire établi aux chapitres 2 et 3 est approché par un modèle linéaire plus facile à manipuler avec les outils classiques de la commande. Pour cela, on considère que le comportement du système est linéaire autour d'un point de fonctionnement. Son domaine de validité est alors réduit à de petites variations autour de ce point.

##### 4.3.1.1 Modèle non-linéaire considéré pour la linéarisation

On s'affranchit pour cette étude du modèle des actionneurs et des capteurs (voir figure 2.2). Ils pourront être inclus dans un second temps. Le modèle considéré dans cette partie est donc composé des forces et moments donnés en équation (2.62), et du modèle du corps rigide donné en équation (2.40). Le point d'équilibre choisi pour la linéarisation étant éloigné de la singularité de représentation d'attitude par les angles d'Euler, il n'est pas utile ici d'utiliser le modèle basé sur les quaternions (équation (2.41)).

Le modèle a donc pour entrées les angles du plateau cyclique et les vitesses de rotation des rotors de l'hélicoptère :  $\mathbf{u} = [\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$  et pour vecteur d'état  $\mathbf{x} = [x, y, z, u, v, w, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$ .

##### 4.3.1.2 Principe de la linéarisation

Le modèle non-linéaire est représenté sous la forme de l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.2)$$

On considère un point de fonctionnement  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$  vérifiant  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ , et on introduit de nouvelles variables centrées sur ce point, appelées variables de déviation :

$$\begin{cases} \delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}} \\ \delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (4.3)$$

Le modèle peut donc s'écrire comme suit :

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t)) \quad (4.4)$$

Et on peut écrire son développement en série de Taylor :

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta\mathbf{u}(t) + \dots \quad (4.5)$$

En se limitant aux premiers termes du développement, le modèle linéarisé, valide pour des petites variations de  $\delta\mathbf{x}(t)$  et  $\delta\mathbf{u}(t)$ , s'exprime alors comme suit :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(t) \quad (4.6)$$



les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  étant respectivement la jacobienne de  $\mathbf{f}$  par rapport à l'état  $\mathbf{x}$  et par rapport à l'entrée  $\mathbf{u}$ , évaluées au point de fonctionnement.

Par la suite, on fera l'abus de notation suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.7)$$

#### 4.3.1.3 Choix du point de fonctionnement

On choisit comme point de fonctionnement  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$  le vol stationnaire, c'est-à-dire que le véhicule a une vitesse de translation, une vitesse de rotation, et une attitude nulles en ce point. Cela correspond au vecteur d'état :  $\bar{\mathbf{x}} = [x_0, y_0, z_0, \mathbf{0}]$ , où  $x_0, y_0, z_0$  sont des constantes. En résolvant l'équation  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$  pour le modèle de l'hélicoptère, on trouve l'expression de l'entrée à l'équilibre,  $\bar{\mathbf{u}}$  :

Entrées à l'équilibre (vol stationnaire) :

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\Omega}_u \\ \bar{\Omega}_l \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \bar{\Omega}_u = \sqrt{\frac{mg}{\alpha_u + \Delta_u \alpha_l}}, \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}_l = \bar{\Omega}_u \sqrt{\Delta_u} \quad (4.8)$$

Les valeurs  $\bar{\Omega}_u$  et  $\bar{\Omega}_l$  sont donc les vitesses de rotation des rotors de l'hélicoptère pour le vol stationnaire, de telle sorte que la gravité soit compensée. On introduit ici  $\Delta_u = \frac{\gamma_u}{\gamma_l}$ .

#### 4.3.1.4 Expression du modèle linéarisé

Nous considérons dans un premier temps la linéarisation des équations du modèle autour du point d'équilibre choisi. Dans un second temps (section 4.3.1.5), nous présentons un changement de variable qui permet de définir de nouvelles entrées de commande en couple et poussée. Cette seconde approche a été introduite, pour le drone étudié, par Drouot (2013). Elle permet de capturer certaines non-linéarité du modèle dans le changement de variable, et donc d'obtenir un modèle théoriquement plus précis.

**Calcul des matrices jacobienes.** A partir des équations du modèle, on calcule les matrices suivantes :

- $\mathbf{A}$ , jacobienne par rapport à l'état  $\mathbf{x} = [x, y, z, u, v, w, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$ ,
- $\mathbf{B}$ , jacobienne par rapport à l'entrée  $[\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$ ,

On obtient les matrices suivantes, dont les axes sont fortement couplés. Les différents éléments des deux jacobienes ne seront pas reproduits ici pour ne pas surcharger.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} & A_{1,7} & A_{1,8} & A_{1,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} & A_{2,7} & A_{2,8} & A_{2,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} & A_{3,7} & A_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} & A_{4,6} & 0 & A_{4,8} & 0 & 0 & A_{4,11} & A_{4,12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{5,4} & A_{5,5} & A_{5,6} & A_{5,7} & A_{5,8} & 0 & A_{5,10} & 0 & A_{5,12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{6,4} & A_{6,5} & A_{6,6} & A_{6,7} & A_{6,8} & 0 & A_{6,10} & A_{6,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{7,7} & A_{7,8} & 0 & A_{7,10} & A_{7,11} & A_{7,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{8,7} & 0 & 0 & 0 & A_{8,11} & A_{8,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{9,7} & A_{9,8} & 0 & 0 & A_{9,11} & A_{9,12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{10,4} & A_{10,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,10} & A_{10,11} & A_{10,12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{11,4} & A_{11,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,10} & A_{11,11} & A_{11,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,6} & 0 & 0 & 0 & A_{12,10} & A_{12,11} & A_{12,12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{4,1} & B_{4,2} & 0 & B_{4,4} \\ B_{5,1} & B_{5,2} & 0 & B_{5,4} \\ B_{6,1} & 0 & B_{6,3} & B_{6,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{10,1} & B_{10,2} & 0 & B_{10,4} \\ B_{11,1} & B_{11,2} & 0 & B_{11,4} \\ 0 & 0 & B_{12,3} & B_{12,4} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

**Évaluation au point d'équilibre.** En évaluant la jacobienne  $\mathbf{A}$  au point d'équilibre  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  correspondant au vol stationnaire, l'expression de la matrice (4.9) se simplifie considérablement et on obtient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les valeurs propres de la matrice sont toutes à partie réelle nulle. Le système se comporte donc comme un oscillateur non amorti. Plusieurs éléments de la matrice  $\mathbf{B}$  de l'équation 4.10 s'annulent également au point d'équilibre,  $B_{4,4} = B_{5,4} = B_{6,1} = B_{10,4} = B_{11,4} = 0$ , mais les entrées restent couplées :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{4,1} & B_{4,2} & 0 & 0 \\ B_{4,2} & -B_{4,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{6,3} & B_{6,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{10,1} & B_{10,2} & 0 & 0 \\ B_{11,1} & B_{11,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{12,3} & B_{12,4} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

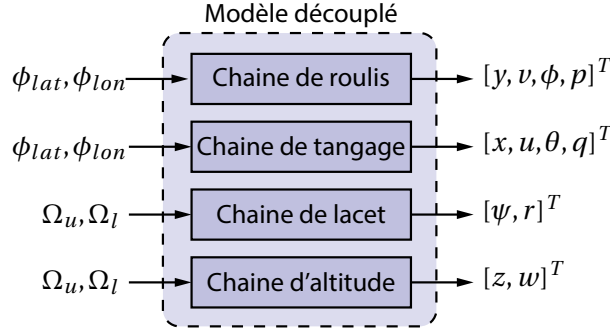


Figure 4.3 – Modèle linéarisé, couplé par les entrées de commande.

**Expression du modèle linéarisé.** On peut alors écrire le modèle sous la forme de quatre chaînes couplées par les entrées de commande mais pas par les variables d'état, comme schématisé en figure 4.3.

— Chaîne de roulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \\ \phi \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l \bar{\Omega}_l^{-2} \sin(\frac{\pi}{4} + \rho)/m & -\alpha_l \bar{\Omega}_l^{-2} \cos(\frac{\pi}{4} + \rho)/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_l d_z \bar{\Omega}_l^{-2} \sin(\frac{\pi}{4} + \rho)/I_{xx} & \alpha_l d_z \bar{\Omega}_l^{-2} \cos(\frac{\pi}{4} + \rho)/I_{xx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{lat} \\ \phi_{lon} \\ \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

— Chaîne de tangage :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l \bar{\Omega}_l^{-2} \cos(\frac{\pi}{4} + \rho)/m & \alpha_l \bar{\Omega}_l^{-2} \sin(\frac{\pi}{4} + \rho)/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_l d_z \bar{\Omega}_l^{-2} \cos(\frac{\pi}{4} + \rho)/I_{yy} & \alpha_l d_z \bar{\Omega}_l^{-2} \sin(\frac{\pi}{4} + \rho)/I_{yy} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{lat} \\ \phi_{lon} \\ \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

— Chaîne de lacet :

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_u \bar{\Omega}_u / I_{zz} & -2\gamma_l \bar{\Omega}_l / I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{lat} \\ \phi_{lon} \\ \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

— Chaîne d'altitude :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_u \bar{\Omega}_u / m & -2\alpha_l \bar{\Omega}_l / m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{lat} \\ \phi_{lon} \\ \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La principale perturbation subie par l'hélicoptère est le vent, qui agit sur sa vitesse de déplacement. On peut la réintroduire dans le modèle linéarisé sous la forme d'une force décomposée en ses trois composantes  $F_{v,x}$ ,  $F_{v,y}$  et  $F_{v,z}$  (voir également (Koehl *et al.*, 2012, chap. 5)). Avec, de plus,

l'approximation  $\rho \approx \frac{\pi}{4}$ , on peut s'affranchir des couplages entre les angles du plateau cyclique :  $B_{4,1} = B_{5,2} = B_{10,2} = B_{11,1} = 0$  et on obtient l'expression suivante du modèle linéarisé :

Expression du modèle linéarisé avec entrée de perturbation :

— Chaîne de roulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \\ \phi \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_l \overline{\Omega}_l^2 / m \\ 0 \\ -\alpha_l d_z \overline{\Omega}_l^2 / I_{xx} \end{bmatrix} \phi_{lat} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{v,y} \quad (4.17)$$

— Chaîne de tangage :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_l \overline{\Omega}_l^2 / m \\ 0 \\ \alpha_l d_z \overline{\Omega}_l^2 / I_{yy} \end{bmatrix} \phi_{lon} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{v,x} \quad (4.18)$$

— Chaîne de lacet :

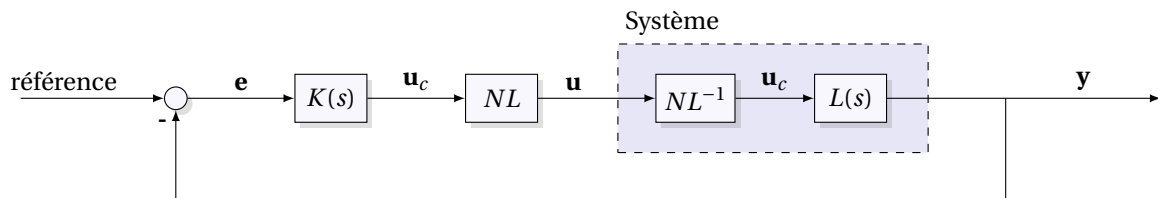
$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\gamma_u \overline{\Omega}_u / I_{zz} & -2\gamma_l \overline{\Omega}_l / I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

— Chaîne d'altitude :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\alpha_u \overline{\Omega}_u / m & -2\alpha_l \overline{\Omega}_l / m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_u \\ \Omega_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_{v,z} \quad (4.20)$$

#### 4.3.1.5 Expression du modèle pour une commande en couple/poussée

Une seconde approche intéressante pour l'obtention d'un modèle pour la commande est de réaliser un changement de variable pour capturer la non-linéarité (figure 4.4). Cela permet de décomposer le modèle en quatre chaînes SISO (*Single Input Single Output*), beaucoup plus faciles à étudier : les chaînes de roulis, tangage, lacet et altitude (figure 4.5). L'idée est ici de substituer les commandes du système utilisées jusqu'ici (deux commandes des rotors et deux commandes du plateau cyclique) par des commandes utilisant les couples autour des trois axes et la poussée suivant l'axe vertical.



**Figure 4.4** – Principe du changement de variable en entrée. Les non-linéarités se simplifient et la synthèse des lois de commande est faite sur le système linéaire  $L(s)$  avec la nouvelle entrée  $\mathbf{u}_c$ . On a ici :  $\mathbf{u}_c = [L, M, N, F_z]^T$  et  $\mathbf{u} = [\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$ .

A partir de l'expression des forces et moments de premier ordre donnée en équation (2.59), et sous l'approximation des petits angles du plateau cyclique ( $\sin \phi_{lat,lon} \approx \phi_{lat,lon}$  et  $\cos \phi_{lat,lon} \approx 1$ ), on obtient l'expression développée suivante :

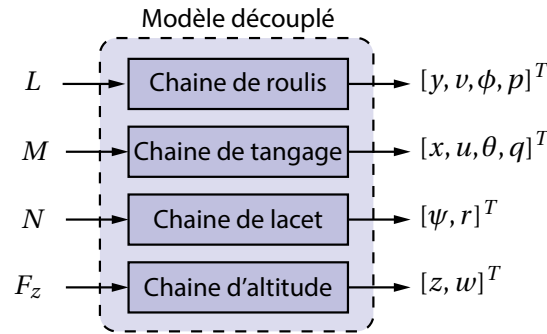


Figure 4.5 – Modèle découplé avec changement de variables d'entrées.

Changement de variable entre  $\mathbf{u} = [\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$  et  $\mathbf{u}_c = [L, M, N, F_z]^T$  :

$$\begin{cases}
 L = \alpha_l d_z \Omega_l^2 (\phi_{lon} b - \phi_{lat} a) \\
 M = \alpha_l d_z \Omega_l^2 (\phi_{lat} b + \phi_{lon} a) \\
 N = \gamma_l (-\Omega_l^2 + \Delta_u \Omega_u^2) \\
 F_x = M / d_z \\
 F_y = -L / d_z \\
 F_z = -\alpha_l \Omega_l^2 - \alpha_u \Omega_u^2
 \end{cases} \quad (4.21)$$

avec :  $\begin{cases} a = \sin(\frac{\pi}{4} + \rho) \approx 1 \\ b = \cos(\frac{\pi}{4} + \rho) \approx 0 \end{cases}$

Ce système d'équations (4.21) correspond au bloc  $NL^{-1}$  de la figure 4.4, permettant de calculer les forces et moments à partir de l'entrée  $\mathbf{u} = [\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$ . On en déduit alors l'expression de l'entrée  $\mathbf{u}$  en fonction des moments  $L, M, N$  et de la force  $F_z$  (entrée  $\mathbf{u}_c = [L, M, N, F_z]^T$ ). Ce système (4.22) correspond au bloc  $NL$  de la figure 4.4 :

Changement de variable entre  $\mathbf{u}_c = [L, M, N, F_z]^T$  et  $\mathbf{u} = [\phi_{lat}, \phi_{lon}, \Omega_u, \Omega_l]^T$  :

$$\phi_{lat} = \frac{(La - Mb)D_1}{D_2} \quad \phi_{lon} = -\frac{(Lb + Ma)D_1}{D_2} \quad \Omega_u^2 = -\frac{F_z \gamma_l - N \alpha_l}{D_1} \quad \Omega_l^2 = -\frac{F_z \gamma_u + N \alpha_u}{D_1}$$

avec :  $\begin{cases} D_1 = \alpha_l \gamma_u + \alpha_u \gamma_l \\ D_2 = \alpha_l d_z (F_z \gamma_u + N \alpha_u) \end{cases}$

(4.22)

Les nouvelles entrées de commande constituent les entrées du modèle du corps rigide soumis à la gravité. La jacobienne du système par rapport aux états, évaluée au point d'équilibre, est identique à celle obtenue précédemment (matrice  $\mathbf{A}$  en équation (4.11)). Le calcul de la jacobienne par rapport aux nouvelles entrées  $[L, M, N, F_z]^T$  permet alors d'écrire le modèle linéarisé, qui est cette fois découplé non seulement par rapport aux variables d'état mais également par rapport aux entrées de commande :

## Expression du modèle linéarisé pour commande en couple/poussée

— Chaîne de roulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \\ \phi \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/(d_z m) \\ 0 \\ 1/I_{xx} \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{v,y} \quad (4.23)$$

— Chaîne de tangage :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(d_z m) \\ 0 \\ 1/I_{yy} \end{bmatrix} M + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{v,x} \quad (4.24)$$

— Chaîne de lacet :

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_{zz} \end{bmatrix} N \quad (4.25)$$

— Chaîne d'altitude :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F_z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_{v,z} \quad (4.26)$$

**4.3.1.6 Prise en compte des effets aérodynamiques du premier et du second ordre**

Lors de la linéarisation, les termes proportionnels au carré de la vitesse de déplacement du drone (effets aérodynamiques du second ordre) disparaissent. Pour obtenir un modèle linéaire plus réaliste, les effets du premier ordre peuvent être réintégré artificiellement au système en ajoutant un terme proportionnel à la vitesse, c'est-à-dire des éléments  $A_{4,4}$ ,  $A_{5,5}$  et  $A_{6,6}$  non nuls dans l'expression (4.9). Le modèle linéaire est dans tous les cas un modèle valide autour du point de fonctionnement uniquement, et l'étape de validation sur le modèle non-linéaire est nécessaire. Par la suite, pour la synthèse des correcteurs, nous ne prenons pas en compte ces effets aérodynamiques.

**4.3.2 Analyse du modèle linéaire en boucle ouverte**

Nous proposons dans un premier temps une analyse préliminaire du comportement en boucle ouverte des modèles linéaires. Le modèle linéarisé directement ou avec le changement de variable d'entrée se comportent de la même manière, et seuls les résultats pour le premier modèle sont présentés. De plus, nous menons les simulations sur l'axe de roulis uniquement. Les mêmes conclusions peuvent être faites pour l'axe de tangage qui présente une dynamique identique. Les chaînes de lacet et d'altitude présentent un comportement intégrateur pur.

La figure 4.6 présente la réponse à un échelon sur l'entrée  $L$ . Le système est clairement instable en boucle ouverte et les sorties divergent rapidement. Son diagramme de Bode en amplitude est tracé en figure 4.7 et montre une fréquence pour laquelle le système présente un gain très faible sur les sorties de vitesse et de position. Ainsi, à cette fréquence particulière d'entrée d'environ 2.2 Hz, seule l'attitude de l'hélicoptère est affectée sans que cela n'ait de répercussions sur la position (comportement que nous pouvons également observer expérimentalement).

Enfin, la figure 4.8 montre le diagramme de Bode du modèle incertain construit à l'aide des incertitudes paramétriques estimées au chapitre précédent (tableau 3.15). Ce modèle incertain peut se mettre sous la forme d'une représentation linéaire fractionnaire (LFR), c'est-à-dire l'interconnexion d'un système linéaire à temps invariant et d'une matrice  $\Delta(\theta)$  dépendant des paramètres. Cette forme permet de prendre en compte non seulement des incertitudes paramé-

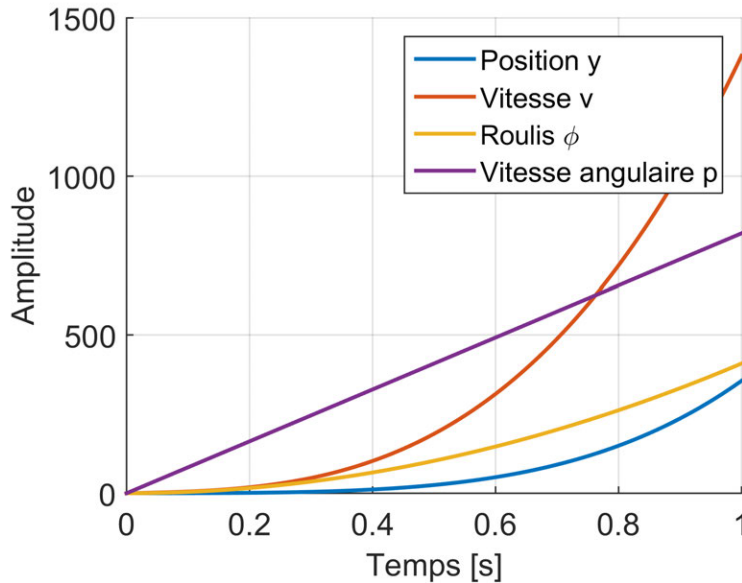


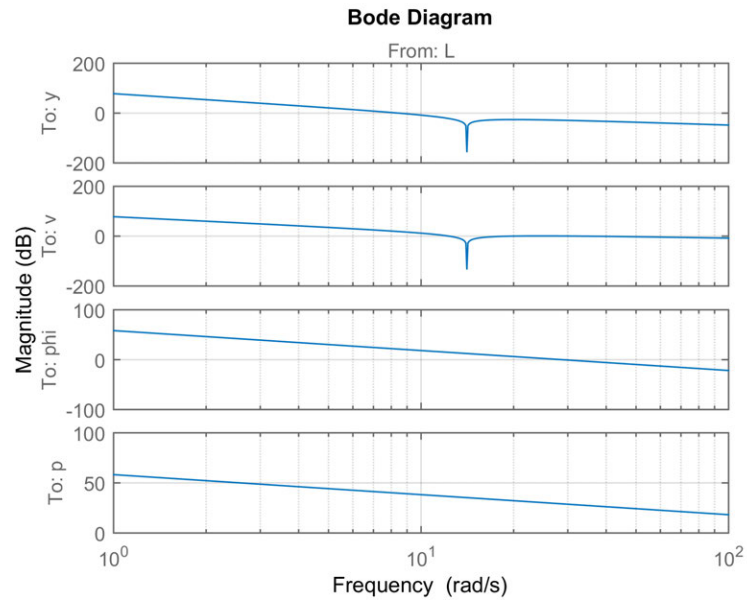
Figure 4.6 – Réponse de la chaîne de roulis à un échelon d'amplitude 1 sur l'entrée  $L$ .

triques, comme présenté ici, mais également des incertitudes dynamiques (dynamiques qui ne sont pas modélisées, comme des comportements à haute fréquence) dans le même modèle incertain (Skogestad et Postlethwaite, 2007). Le modèle obtenu peut alors être utilisé pour mener des analyses de robustesse des lois de commande synthétisées.

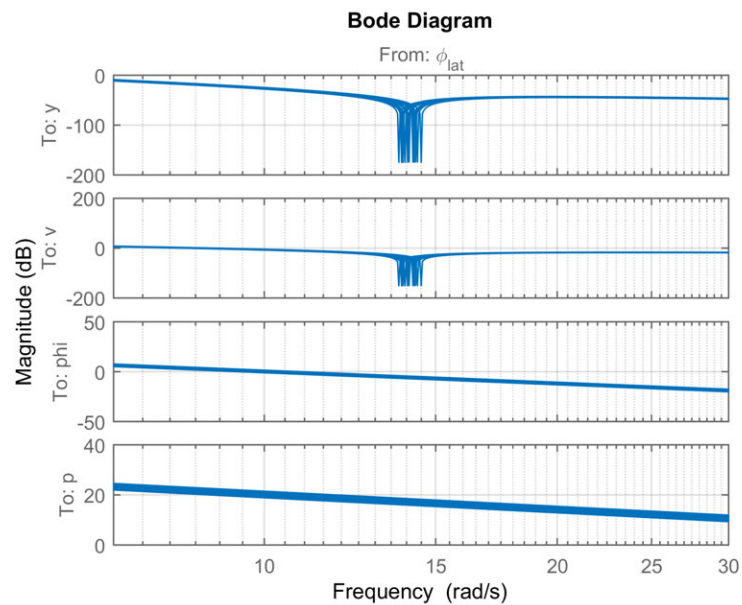
### 4.3.3 Prise en compte de la dynamique des actionneurs

Pour le modèle linéarisé directement, l'ajout de la dynamique des actionneurs se fait en entrée du système, l'entrée  $u$  du modèle étant la sortie du modèle des actionneurs. Lors de l'utilisation du modèle avec changement de variable d'entrée, on peut considérer la dynamique des servomoteurs en entrée des moments  $L$  et  $M$  et la dynamique des moteurs en entrée du moment  $N$  et de la force  $F_z$ . On fait pour cela l'hypothèse de faibles variations de  $\Omega_l$  dans l'expression des moments  $L$  et  $M$ .

Différents modèles pour les actionneurs sont détaillés en section 1.7, sous la forme d'une fonction du premier ou second ordre avec retard et saturations. Sauf mention contraire, nous utilisons pour la synthèse le modèle du premier ordre avec retard. Les saturations des actionneurs ne sont pas prises en compte lors de la synthèse. Elles peuvent cependant avoir un effet déstabilisant et certaines approches non-linéaires permettent de les prendre en compte (voir par exemple (Hably et Marchand, 2007)).



**Figure 4.7** – Diagramme de Bode du modèle pour l'axe de roulis.



**Figure 4.8** – Diagramme de Bode du modèle incertain.



## 4.4 Objectifs de la commande

La première étape consiste à définir un cahier des charges pour la commande. Celui-ci nécessite une connaissance de ce que l'on peut attendre du système, du comportement souhaité, et des limites physiques des actionneurs.

### 4.4.1 Limites physiques, temps de réponse et saturations

A partir de l'étude des actionneurs effectuée en section 1.7, on peut établir un certain nombre de caractéristiques limitantes pour la commande du drone. Pour les servomoteurs :

- Leur vitesse de rotation maximale est de l'ordre de 2.5 rad/s.
- L'erreur de précision des servomoteurs est d'environ  $\pm 3$  degrés. Cela se traduit par une erreur de  $\pm 1.3^\circ$  sur les angles d'orientation du plateau cyclique.
- Leur temps de réponse est d'environ 25 ms.

Pour les moteurs :

- La vitesse de rotation maximale des moteurs en charge est d'environ 2300 rad/s, se traduisant par une vitesse de rotation maximale de 260 rad/s des rotors de l'hélicoptère.
- L'incertitude sur le gain des moteurs est d'environ  $\pm 14$  rad/s, d'après les résultats d'identification.
- Leur temps de réponse est d'environ 170 ms.

### 4.4.2 Incertitudes

**Incertitudes paramétriques.** Lors de l'identification du modèle, nous avons estimé non seulement la valeur nominale des paramètres mais également une incertitude sur leur valeur (voir le tableau 3.15). Ces incertitudes permettent de juger la qualité de l'estimation mais sont également utiles lors de la conception de lois de commande. En effet, les méthodes d'analyse de robustesse donnent les outils permettant de s'assurer de la robustesse de la commande à ces incertitudes paramétriques.

**Incertitudes de mesure.** En annexe 4.8, nous avons estimé les erreurs effectuées par les algorithmes de navigation lors de l'estimation des états du drone. Nous pouvons souligner les points suivants.

- Vitesses angulaires : la précision d'estimation des vitesses angulaires dépend en grande partie du bruit sur les gyromètres (voir la section 1.6).
- Attitude : la précision sur l'attitude est de l'ordre de quelques degrés pour les angles de roulis et de tangage (plus ou moins 3 degrés environ d'après les courbes présentées en annexe 4.8), et peut atteindre une dizaine de degrés pour l'angle de lacet.
- Vitesses et positions : la précision sur la vitesse et la position dépend de la méthode utilisée. L'incertitude sur la position peut être inférieure au centimètre lors de l'utilisation de systèmes de capture de mouvements, mais de l'ordre de cinq mètres lors de l'utilisation d'un récepteur GPS. Lors de l'utilisation du flux optique, la précision sur la vitesse peut être très bonne, mais la position est soumise à une dérive dans le temps due à l'intégration d'un biais.

### 4.4.3 Objectifs de robustesse

La synthèse de lois de commande en aéronautique implique des contraintes de robustesse importantes. Ainsi, d'après Cimen (2017), les lois de commande pour de tels systèmes doivent assurer que le transfert de boucle  $L(s) = K(s)G(s)$  reste en dehors de bornes définies par :

- un gain de  $\pm 6$  dB pour un déphasage de  $L(j\omega)$  de  $-180^\circ$  (c'est-à-dire une marge de gain de 6 dB),
- et un gain de  $\pm 3$  dB pour un déphasage de  $-145^\circ$ .

Ces contraintes sont appliquées dans le cadre de la synthèse de lois de commande pour avions ou missiles. Elles peuvent être traduites par une marge de gain supérieure à 6 dB et une marge de phase supérieure à 35°. Dans le cadre de la commande de drones, ces contraintes peuvent être considérées comme conservatrices et pourraient être diminuées.

L'analyse des marges est conduite sur  $L(s)$  en ouvrant la boucle à l'entrée. L'analyse de la stabilité est menée en examinant les pôles de la fonction complémentaire de sensibilité  $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ , ou les valeurs propres de la matrice  $A$  de la boucle fermée.

La marge de retard  $DM$  est importante pour les applications aéronautiques, et on veille typiquement à ce qu'elle soit supérieure à 5 ms : elle mesure la valeur minimale du retard pur introduit dans la boucle qui déstabilise le système (Alazard *et al.*, 1999). Elle peut être calculée à partir de la marge de phase  $PM$  de la manière suivante :

$$DM = \frac{PM}{\omega_c} \quad (4.27)$$

Avec  $\omega_c$  la fréquence à laquelle l'amplitude de  $L(s)$  est égale à 1 (ou un gain de 0 dB), c'est-à-dire  $|L(j\omega)| = 1$ .  $\omega_c$ , qui correspond à la bande passante.

#### 4.4.4 Domaine de validité de la commande

On considère ici le cas d'un modèle linéarisé autour du vol stationnaire. La validité de la commande est alors limitée à de faibles écarts autour de ce point d'équilibre. Dans un second temps, nous essayons d'étendre ce domaine par les approches basées sur les quaternions. Dans la pratique, un correcteur peut être calculé pour différents points de fonctionnement, et les techniques de séquençement de gain permettent alors d'interpoler les correcteurs afin d'étendre le domaine de validité. Ces techniques sont largement utilisées sur les véhicules aériens (Fleischmann *et al.*, 2017; Nichols *et al.*, 1993)

#### 4.4.5 Des attentes subjectives et variées

Tandis qu'il existe un très grand nombre de techniques de commande appliquées aux drones (voir l'introduction en section 4.1), un nombre restreint seulement d'entre elles est évalué par des essais expérimentaux, et un nombre encore plus limité répond aux nombreuses exigences pratiques permettant leur utilisation en conditions réelles. Les contraintes sur la loi de commande sont nombreuses, avec en premier lieu le compromis stabilité/robustesse/performance, mais également en des termes plus subjectifs comme la facilité d'implémentation ou la qualité de vol pour le pilote : le pilote doit-il maintenir une attention soutenue lors d'un vol? Est-il capable d'amener précisément le drone à la position voulue? Le drone réagit-il conformément à ses attentes? Bien qu'il soit possible d'exprimer ces dernières contraintes sous forme de critères plus objectifs (voir par exemple (Mettler *et al.*, 2002, chap. 6)), la flexibilité des qualités de vol attendue par le pilote fait pencher la balance en faveur des approches classiques par PID, simples à mettre en œuvre et à régler de manière empirique par le pilote<sup>3</sup>.

Indépendamment des qualités de vol, un autopilote pour drone doit permettre différentes configurations de vol selon les besoins. Les autopilotes pour quadricoptères les plus avancés intègrent ainsi plusieurs "modes" adaptés aux différents usages :

- Le mode "manuel", destiné principalement aux aéromodélistes et aux drones de loisir, comporte en général différentes sous-catégories : le vol acrobatique (commande en vitesse de rotation), stabilisé (commande en attitude) ou mixte (vol stabilisé pour des petites commandes, vol acrobatique pour les grandes amplitudes).
- Le mode "assisté" : la boucle de commande permet une stabilisation en altitude ou en vitesse.

3. Pour le réglage empirique de lois de commande, en particulier PID, les principaux gains sont souvent associés à des potentiomètres sur la radiocommande permettant au pilote un réglage en vol pour répondre à ses propres attentes et habitudes concernant qualité de vol.

- Le mode “automatique” : le drone est commandé en position, et une boucle de guidage est généralement utilisée pour la génération de trajectoires de commande.

Le tableau 4.2 recense les principaux modes de vol utilisés pour la commande de drones, et les variables asservies correspondantes. Ainsi, le vol manuel concerne uniquement la stabilisation en vitesse de rotation ou en attitude. Les vols assistés ou automatiques concernent la stabilisation en vitesse<sup>4</sup> ou en position.

**Table 4.2** – Classement des différentes attentes de la part des utilisateurs en terme de commande des drones, par ordre croissant d’automatisation.

Dénomination usuelle du mode		Variables avec poursuite
Vol “manuel”	“Acrobatique”	$p, q, r$
	“Stabilisé” (ou <i>self-leveling</i> )	$\phi, \theta, r$
	“Mixte”	$\phi, \theta, r$ ou $p, q, r$
Vol “assisté”	Contrôle d’altitude pour vol “sportif” ou FPV	$p, q, r, w$
	Contrôle d’altitude classique	$\phi, \theta, r, w$
	Commande en vitesse	$v, u, r, w$
Vol “automatique”	Vol stationnaire ( <i>position hold</i> )	$v, u, r, w$ régulées à 0
	Décollage automatique	Différentes stratégies
	Atterrissage automatique	Différentes stratégies
	Retour à la base (RTL pour <i>return to launch</i> )	$y, x, \psi, z$
	Mission (guidage)	$y, x, \psi, z$

Une approche par boucles imbriquées est bien adaptée pour permettre ces différentes configurations de vol, les boucles successives étant désactivées selon le mode choisi par le pilote. Ce type de structure est décrit ci-après en section 4.5.

## 4.5 La commande en cascade

Les attentes en terme de commande sont donc diverses et l’approche par boucles imbriquées, appelée commande cascadée ou hiérarchique, est bien adaptée dans ce cas : les boucles externes sont alors successivement activées ou désactivées selon le mode choisi. Cette approche est utilisée de manière quasi-universelle sur les drones (Anderson et DIY Drones team, 2017; Kai *et al.*, 2017; Meier *et al.*, 2015; Mellinger et Kumar, 2011), pour la commande d’hélicoptère (Alvis *et al.*, 2007; Drouot, 2013) ou de quadricoptères (Hably et Marchand, 2007), mais également de manière plus générale sur les véhicules aériens (Alazard *et al.*, 1999; Theodoulis *et al.*, 2013).

### 4.5.1 Structure générale de la commande cascadée

**Principe.** La figure 4.9 présente la structure générale de la commande cascadée, qui permet de décomposer le problème de commande en plusieurs boucles imbriquées. Cette structure est particulièrement bien adaptée lorsque le système à asservir comporte à la fois des dynamiques lentes et des dynamiques rapides : la boucle externe peut fonctionner à une fréquence plus faible que la boucle interne. Par ailleurs, il n’est pas nécessaire que les deux boucles soient synchronisées, ce qui permet de simplifier l’implémentation.

**Application au modèle considéré.** Le changement de variable introduit en section 4.3.1.5 permet de réduire le modèle à commander à la dynamique du corps rigide en équation (2.38). Nous avons montré que ce système peut être représenté sous la forme de deux sous-systèmes interconnectés : la dynamique de translation  $\Sigma_T$  et la dynamique de rotation  $\Sigma_R$ . Cette décomposition se

4. Le vol assisté avec commande en vitesse est souvent appelé “commande en position” par abus de langage. Cela vient du fait que le drone garde sa position lorsque les consignes sont nulles (manches de la radiocommande relâchés), qui correspond en réalité à  $u = v = w = 0$ .

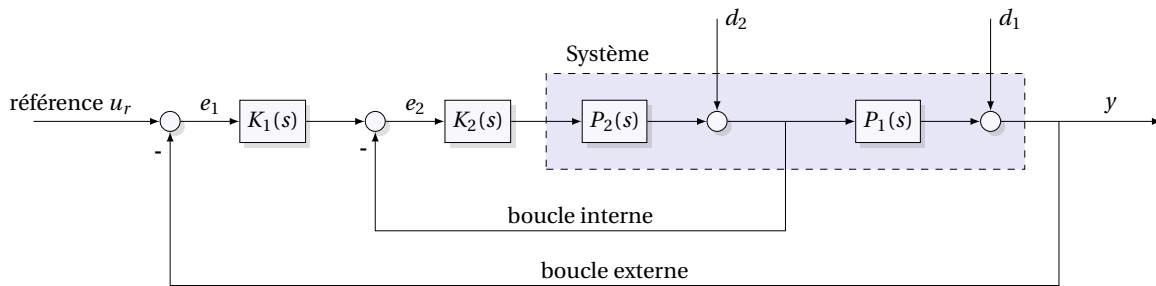


Figure 4.9 – Principe d'un contrôleur en cascade.

prête bien à la commande en cascade, avec une boucle interne de commande en attitude et une boucle externe de commande en position. L'architecture de la commande peut alors se mettre sous la forme donnée en figure 4.10.

- La boucle externe a pour entrée la position désirée  $\xi_r = [x_r, y_r, z_r]^T$  et génère les consignes pour la boucle interne : l'orientation en roulis et tangage, et la poussée suivant  $z^B$ , notés  $\phi_r, \theta_r$  et  $F_z$ . Un changement de position du drone nécessite en effet un changement de son orientation.
- La boucle interne a pour entrée de référence la sortie de la boucle externe, ainsi que l'orientation en lacet désirée :  $u_i = [\phi_r, \theta_r, \psi_r, F_z]^T$ . Elle génère les consignes en termes de moments  $L, M$  et  $N$  dans le cas de l'utilisation du modèle avec changement de variables, ou directement les consignes aux actionneurs dans le cas contraire. Nous nous concentrons ici sur le premier cas.

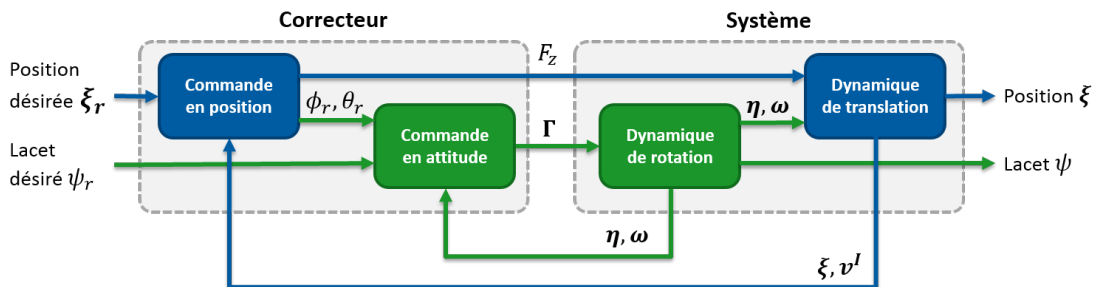


Figure 4.10 – Structure de la commande cascadiée appliquée au problème de commande du drone (adapté de Drouot (2013)).

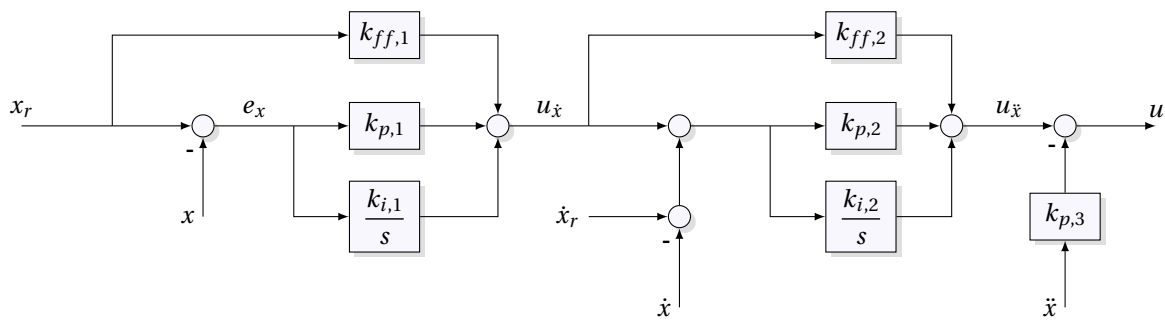
**Problématiques liées à la boucle interne en attitude.** La boucle interne a pour rôle la stabilisation du système (instable en boucle ouverte) et permet également le découplage des entrées. Sa dynamique est plus rapide que celle de la boucle externe, et on choisit en général une fréquence de boucle entre 100 et 200 Hz. A titre de remarque, il est intéressant de synchroniser la boucle interne avec les convertisseurs analogique-numérique des capteurs afin de réduire les retards (latence), plutôt que de fixer arbitrairement cette fréquence comme c'est souvent le cas lors de l'implémentation.

**Problématiques liées à la boucle externe en position.** Les dynamiques de la boucle externe sont plus lentes que celles de la boucle interne, et sa conception est en général moins délicate. La difficulté pour cette boucle est nettement moins dans la conception des lois de commande que dans les algorithmes de navigation : l'obtention d'une information de position et de vitesse fiables et précises, à une fréquence suffisamment élevée, est un problème récurrent sur les drones (voir la section 1.6) et un domaine de recherche actif (voir par exemple (Konrad *et al.*, 2017)).

### 4.5.2 Structure classique de commande en cascade par PID

La commande cascadiée à l'aide de contrôleurs de type PID est l'architecture de commande la plus utilisée en pratique. Elle peut prendre plusieurs formes, et nous proposons dans cette section une analyse de l'architecture de commande des autopilotes pour micro-drones les plus utilisés (voir la section 1.5). L'architecture générale que nous présentons a été réalisée en analysant le code source des systèmes PX4 (Meier *et al.*, 2015), ArduPilot (Anderson et DIY Drones team, 2017), et de différents articles liés à ces deux projets (Mellinger et Kumar, 2011; Polak, 2014).

La structure générale est donnée en figure 4.11. Le système à commander est ici considéré sous une forme découplée en quatre chaînes SISO (*Single Input Single Output*). Chacun des systèmes SISO est alors commandé par une boucle interne en attitude et une boucle externe en position, activée ou non selon les mesures disponibles et les besoins du pilote. Chaque boucle est alors structurée par des correcteurs PID suivant l'architecture<sup>5</sup> en figure 4.11. Selon les implémentations, certains "blocs" représentés sur la figure ne sont pas utilisés, que nous traduirons par un gain associé nul. On peut ainsi établir le tableau récapitulatif 4.3.



**Figure 4.11** – Structure classique pour la commande en attitude et en position, utilisée notamment sur les systèmes Pixhawk/PX4 ou ArduPilot. La grandeur  $x$  est remplacée par  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  pour la boucle interne, et par  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour la boucle externe.

La structure se traduit par les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} u_{\dot{x}} &= (k_{p,1} + \frac{k_{i,1}}{s})(x_r - x) + k_{ff,1}x_r \\ u_{\ddot{x}} &= (k_{p,2} + \frac{k_{i,2}}{s})(u_{\dot{x}} + (\dot{x}_r - \dot{x})) + k_{ff,2}u_{\dot{x}} \\ u &= u_{\ddot{x}} + k_{p,3}(\dot{x}_r - \ddot{x}) \end{cases} \quad (4.28)$$

Pour l'asservissement en altitude du drone, le système ArduPilot propose une boucle interne PI supplémentaire sur l'accélération  $\ddot{z}$ . L'équation pour  $u$  devient ainsi :

$$u = (k_{p,4} + \frac{k_{i,4}}{s})(u_{\ddot{z}} - \ddot{z}) \quad (4.29)$$

Le tableau 4.3 présente les gains par défaut sur les autopilotes Pixhawk/PX4 et ArduPilot.

Le réglage des correcteurs se fait en général de manière empirique boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus interne. Il est supposé implicitement à chaque étape que le suivi de commande est parfait pour les boucles internes successives. Si un modèle du drone est disponible, les méthodes récentes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée (optimisation non-lisse) permet un réglage des paramètres du correcteur de manière à satisfaire des contraintes sur la boucle fermée et de garantir la stabilité de l'ensemble (Apkarian et Noll, 2006; Burke *et al.*, 2006). Une application de ces méthodes a été exposée pour l'asservissement des moteurs, en section 1.7.2. Ortiz

5. Le gain  $k_{p,3}$  agit ici sur la dérivée du signal,  $\dot{x}$ , et non sur la dérivée de l'erreur. Une telle architecture, appelée PID type B par Szafranski et Czyba (2011), est plus adaptée en pratique car elle permet d'éviter des dépassements indésirables dans certains cas (appelés "derivative kick").

**Table 4.3** – Blocs désactivés (gains nuls indiqués par “-”) et valeurs par défaut pour les structures en cascade des différents autopilotes.

Gain	Système PX4				Système ArduPilot			
	Boucle interne		Boucle externe		Boucle interne		Boucle externe	
	$\phi, \theta$	$\psi$	$x, y$	$z$	$\phi, \theta$	$\psi$	$x, y$	$z$
$k_{ff,1}$	-	0.5	0.5	0.5	-	-	-	-
$k_{p,1}$	6.5	2.8	1.6	3	4.5	4.5	1	1
$k_{i,1}$	-	-	-	-	-	-	-	-
$k_{ff,2}$	-	-	-	-	0.15	0.2	1	6
$k_{p,2}$	0.11	0.08	0.25	0.4	0.004	-	-	-
$k_{i,2}$	0.05	0.1	0.04	0.05	0.1	0.02	0.5	-
$k_{p,3}$	0.001	-	0.01	-	-	-	-	1
$k_{p,4}$	-	-	-	-	-	-	-	0.75
$k_{i,4}$	-	-	-	-	-	-	-	1.5

A. Santos *et al.* (2017) en présentent une application au réglage du correcteur en figure 4.11, de manière à satisfaire des contraintes  $\mathcal{H}_\infty$  mixtes et de placement de pôles pour un quadricoptère transportant une charge suspendue à un câble.

## 4.6 Étude de la boucle interne : commande de l'attitude du drone

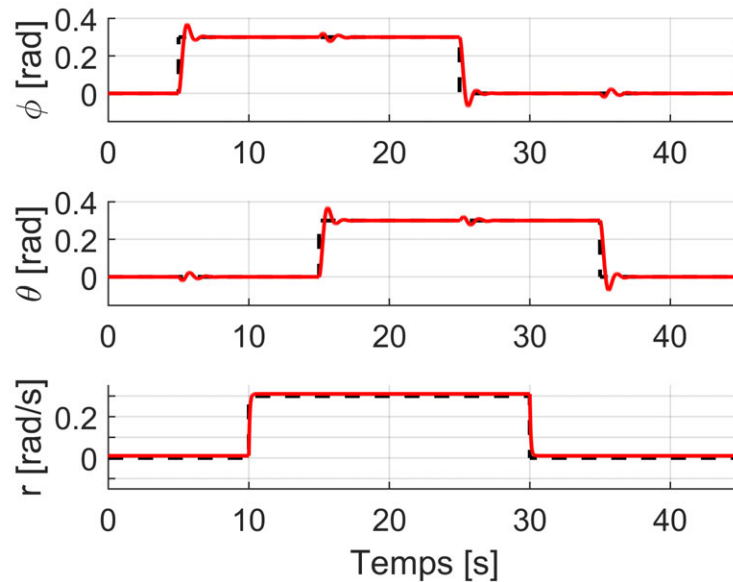
La boucle interne est la plus délicate à concevoir car c'est elle qui doit assurer la stabilité du système et le suivi de consigne en attitude par le pilotage des actionneurs. Elle est également plus facile à valider expérimentalement car il n'est pas nécessaire de disposer d'une mesure de vitesse ou de position du drone. Seules une estimation de l'attitude et de la vitesse de rotation du drone, disponibles grâce à la centrale inertielle, sont généralement nécessaires. Pour ces raisons, nous accordons une attention particulière à la boucle interne dans cette section.

La commande de l'attitude est en général décomposée en une boucle interne sur la vitesse de rotation et une boucle externe sur les angles d'Euler. C'est le cas des approches utilisées par les autopilotes Pixhawk/PX4 et ArduPilot (figure 4.11), et c'est l'approche que nous utilisons dans cette section. Cette approche est bien adaptée dans le cas des drones puisque la vitesse de rotation est directement donnée par les gyromètres, et la structure en cascade permet d'éviter l'ajout de zéros indésirables dans la fonction de transfert en boucle fermée (voir (Lim *et al.*, 2012, p. 40) pour plus de détails). Il est cependant important de noter que les angles d'Euler sont exprimés dans le repère inertiel alors que les vitesses de rotation sont exprimées dans le repère du véhicule. Il est donc nécessaire, lors de l'implémentation, de veiller à faire le changement de repère entre la boucle sur les angles d'Euler et la boucle sur les vitesses de rotation. Cela a cependant peu d'incidence pour les vols quasi-stationnaires durant lesquels les angles de roulis et tangage sont faibles. De même, il n'est pas utile de prendre en compte ce changement de repère lors de la synthèse des lois de commande (voir encore (Alvis *et al.*, 2007) à ce sujet).

### 4.6.1 Évaluation a posteriori du correcteur utilisé pour l'identification

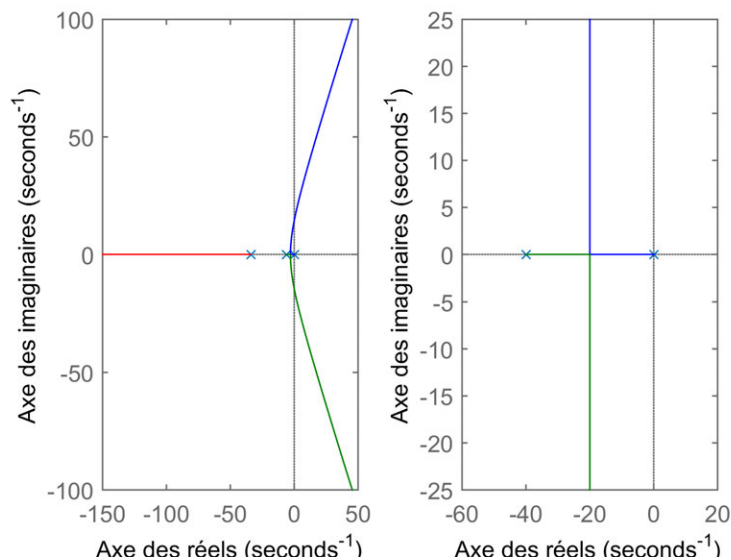
Le correcteur utilisé lors de l'identification d'un modèle du drone (présenté en section 3.3.2) utilise une structure similaire à la figure 4.11 avec uniquement les gains  $k_{p,1} = 6.5$  et  $k_{p,2} = 0.13$  pour les chaînes de roulis et tangage, et une commande proportionnelle sur la vitesse de rotation pour l'axe de lacet (gain  $k_{p,2} = 0.2$ ). Nous proposons ici d'analyser le système en boucle fermée en simulation sur les modèles linéaire et non-linéaire, et de comparer la réponse avec des essais expérimentaux.

**Résultats de simulation sur le modèle linéaire.** Les résultats de simulation du système et de son contrôleur, en utilisant le modèle linéaire avec changement de variable (équations (4.23) à (4.26)), sont présentés en figure 4.12. On note un léger couplage des axes de roulis et de tangage. La réponse du modèle linéarisé directement (équations (4.17) à (4.20)) est très proche et indissociable, à cette échelle, de celle tracée ici.



**Figure 4.12** – Simulation d'un correcteur en attitude (correcteur  $P$  en cascade) sur le modèle linéaire.

On obtient ici une marge de gain infinie et une marge de phase de 99 degrés pour l'axe de roulis. L'ajout de la dynamique des actionneurs donne une marge de gain de 14.3 dB et une marge de phase de 56.3 degrés. La marge de délai est quant à elle de 136 ms. Le lieu d'Evans est tracé en figure 4.13 et montre la stabilité de la boucle interne sur  $p$  quelque soit la valeur de gain, ce qui n'est pas le cas de la boucle externe.



**Figure 4.13** – Tracé du lieu d'Evans. A gauche : bouclage du transfert de  $u$  à  $\phi$  avec la boucle interne sur  $p$ , à droite : bouclage du transfert de  $u$  à  $p$ .

**Résultats de simulation sur le modèle non-linéaire.** Si la réponse est satisfaisante sur le modèle linéaire, ce n'est pas le cas en utilisant le simulateur (modèle non-linéaire) : la réponse, présentée en figure 4.14, montre une erreur statique importante et un amortissement moindre sur l'axe de roulis. L'asservissement de la vitesse de rotation  $r$  reste quant à lui satisfaisant.

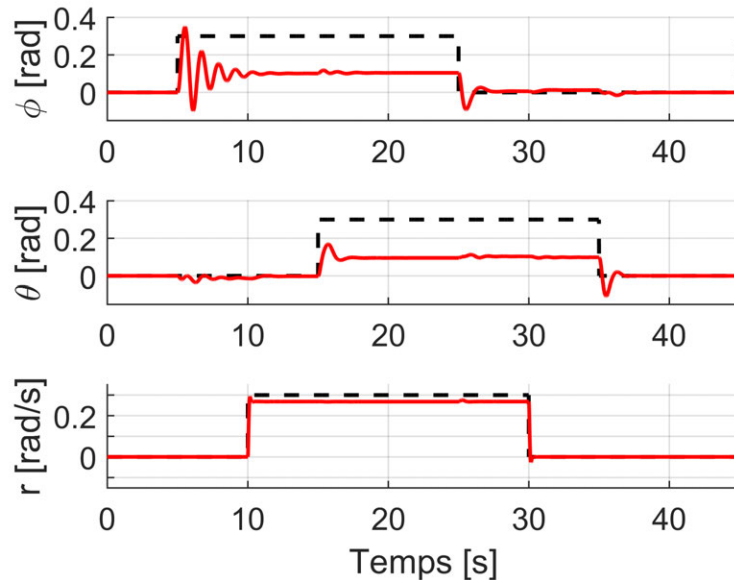


Figure 4.14 – Simulation d'un correcteur en cascade sur le modèle non-linéaire.

**Réponse du système réel.** La figure 4.15 présente la réponse du système réel à un échelon de la consigne de roulis. Un échelon de 0.6 rad (soit environ 35 degrés) est généré lors de l'actionnement par le pilote d'un interrupteur sur la radiocommande. Trois réponses sont enregistrées et superposées (sous-figure supérieure), et la consigne au servomoteur est également tracée (sous-figure inférieure). La réponse du système est proche de la réponse simulée sur le modèle non-linéaire, mais n'est pas satisfaisante du point de vue de la commande : la consigne n'est pas suivie et le système a une oscillation importante. Cette loi de commande permet néanmoins le vol du drone et l'acquisition de données pour l'identification (pour laquelle une commande performante n'est pas souhaitable, voir le chapitre 3). Le modèle identifié permet à présent d'étudier des commandes plus performantes.

#### 4.6.2 Commande linéaire quadratique

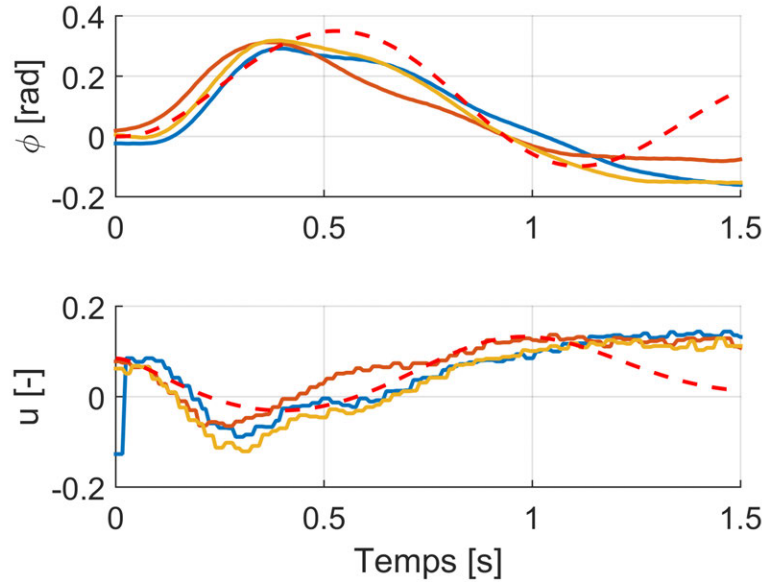
La méthode de commande linéaire quadratique (LQ) est une méthode de commande optimale à retour statique d'état offrant de très bonnes propriétés de robustesse aux incertitudes. Ainsi, il est connu que ce type de contrôleur permet d'obtenir une marge de gain supérieure ou égale à 6 dB, et une marge de phase supérieure ou égale à 60°, sous réserve que l'ensemble de l'état soit mesuré (la démonstration est donnée par exemple par Zhou et Doyle (1998, p. 259)).

Ce type de commande part de l'observation que les performances du système en boucle fermée sont forcément limitées par les caractéristiques des actionneurs<sup>6</sup>. Le correcteur doit donc satisfaire un compromis entre les performances et l'énergie utilisée pour la commande. Ce compromis est traduit mathématiquement par une fonction de coût, quadratique en l'état  $\mathbf{x}(t)$  et en l'entrée de commande  $\mathbf{u}(t)$ , minimisée lors de la synthèse. Ce critère est donné par l'équation (4.31).

Les bonnes propriétés de robustesse et ce compromis entre performance et énergie rendent la commande LQ très attractive dans les applications industrielles, et très utilisée en particulier

6. La commande LQR ne prend cependant pas en compte les saturations des commandes.





**Figure 4.15** – Réponse à un échelon : trois relevés en vol (traits pleins) et comparaison avec le modèle non-linéaire (trait rouge pointillé).

en aéronautique (Cimen, 2017).

Problème de commande LQ d'un système LTI :

Soit le système LTI suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.30)$$

avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , et  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  stabilisable<sup>a</sup>. On cherche la matrice  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (statique) telle que la commande par retour d'état  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{N}\mathbf{u}(t)) dt \quad (4.31)$$

La commande optimale est obtenue pour :  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{N}^T)$ , avec  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  vérifiant l'équation algébrique de Riccati :

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - (\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{N})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{N}^T) + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.32)$$

<sup>a</sup>. C'est-à-dire qu'il existe une matrice  $\mathbf{K}$  telle que les valeurs propres de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  soient toutes à partie réelle négative.

**Réglage des pondérations.** Les matrices  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont des matrices de pondération permettant un réglage du comportement souhaité en boucle fermée en pondérant respectivement l'état et l'entrée de commande. De manière qualitative, une pondération faible par  $\mathbf{R}$  et grande par  $\mathbf{Q}$  privilégie la rapidité du système (énergie de commande grande et erreurs faibles). La matrice  $\mathbf{R}$  permet d'autre part d'effectuer un réglage du gain relatif de chaque composante de l'entrée  $\mathbf{u}$ . Un réglage initial classique est de prendre :  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{Q} = q\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ , ce qui permet de réduire le réglage à un paramètre  $q \in \mathbb{R}$ , et de considérer une pondération sur une sortie donnée par  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ .

**Suivi d'un modèle de référence.** Il est intéressant de pouvoir spécifier le cahier des charges de la commande sous forme d'un modèle de référence. On cherche alors une loi de commande optimale permettant de minimiser l'erreur de suivi de ce modèle. On minimise pour cela le critère  $J$  proposé par Bérard *et al.* (2012, chap. 4) :

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_{ref}\mathbf{x})^T (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_{ref}\mathbf{x}) dt \quad (4.33)$$

En utilisant la formulation d'état du système (équation (4.30)), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_{ref}\mathbf{x})^T (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_{ref}\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{ref} - \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{A}_{ref}) \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{u}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{u} \\ &\quad + \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{B}) \mathbf{u} \\ &\quad + \mathbf{u}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{ref}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.34)$$

L'expression se traduit alors par les pondérations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{ref} - \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{A}_{ref} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{B}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{A}_{ref}^T \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Par l'intermédiaire de la matrice  $\mathbf{A}_{ref}$ , on peut alors facilement spécifier le comportement désiré de la boucle fermée, par exemple sous la forme d'un temps de réponse.

**Effet intégral.** Il est souhaitable d'ajouter un effet intégral au système, de manière à corriger les erreurs de modélisation ou dues à des perturbations. Le ou les  $p$  intégrateurs ont alors comme entrée l'erreur  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  entre la consigne  $\mathbf{r}$  et la mesure  $\mathbf{y}$ , de sorte que le système est alors sous la forme suivante (Davison, 1976) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.36)$$

On augmente alors le vecteur d'état du nouvel état intégral  $\mathbf{z}$  pour obtenir le système augmenté de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n \times p} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.37)$$

La résolution de l'équation de Riccati associée donne le gain optimal  $\mathbf{K}_e = [\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_I]$ , et la loi de commande est alors :

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_I] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

La figure 4.16 présente le schéma de cette architecture de commande. Le retour d'état  $\mathbf{K}$  assure la stabilité du système de manière robuste, tandis que l'intégrateur permet de suivre la consigne  $\mathbf{r}$  avec une erreur nulle en régime établi, en présence de perturbations constantes.

**Système en boucle fermée.** Par substitution, le système en boucle fermée s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & -\mathbf{BK}_I \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{1}_{p \times 1} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (4.39)$$

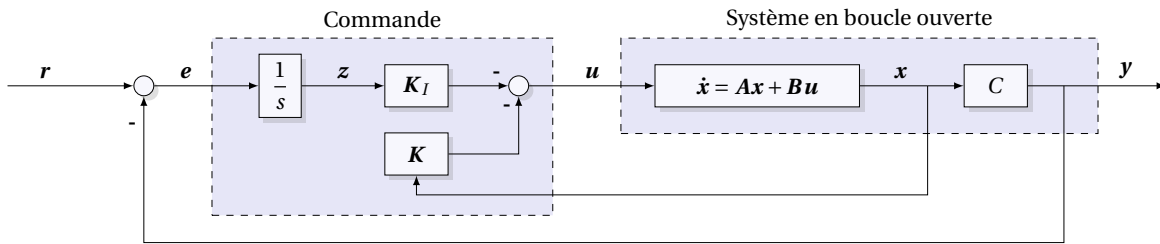


Figure 4.16 – Schéma de commande LQ avec intégrateur.

#### 4.6.2.1 Commande de l'attitude par la méthode LQR

La méthode peut s'appliquer sur l'ensemble du modèle en une fois, permettant de se passer de la commande en cascade (voir par exemple Drouot (2013)). Cependant, elle est généralement appliquée pour la commande en attitude uniquement, pour permettre le découplage des axes et la stabilisation du système (Alvis *et al.*, 2007; Dvořák *et al.*, 2011). C'est l'option que nous étudions ici.

Nous choisissons un modèle de référence du premier ordre, avec une constante  $\tau = 1$  s pour les axes de roulis et tangage et  $\tau = 0.35$  s pour les axes de vitesse de rotation  $p$ ,  $q$  et  $r$ . Les gains de la commande LQR sont alors :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2.06 & -0.46 & 0.39 & -0.09 & 0 \\ -0.46 & -2.07 & -0.09 & -0.40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} -5.36 & 1.19 & 0 \\ 1.20 & 5.40 & 0 \\ 0 & 0 & -2.29 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Les résultats de simulation sont donnés en figure 4.17, en utilisant le modèle linéaire et le modèle non-linéaire. Le couplage entre les axes est très réduit par rapport à la figure 4.12 où le système est décomposé en chaînes SISO indépendantes. On relève une marge de gain de 14.6 dB et une marge de phase de  $-180$  degrés.

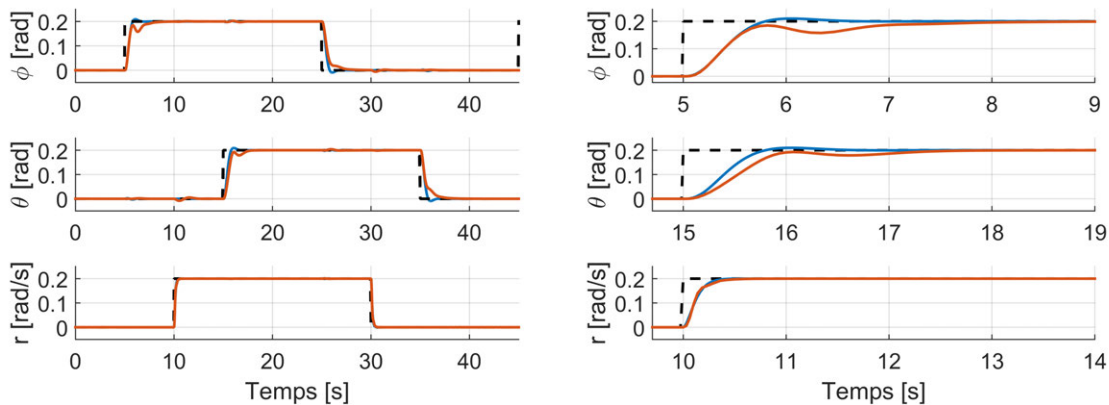


Figure 4.17 – Simulation du système avec commande LQR, en utilisant le modèle linéaire (bleu) et le modèle non-linéaire (rouge).

#### 4.6.3 Les approches basées sur les quaternions d'attitude

Les angles d'Euler sont bien adaptés pour représenter l'attitude dans le cas des avions à voilure fixe, qui évoluent loin de la singularité de la représentation en régime de fonctionnement normal. Les multicoptères ont cependant des angles d'inclinaison plus importants, et les recherches s'orientent vers une augmentation des performances de vol et de leur manœuvrabilité (voir l'in-

roduction de la thèse), nécessitant une approche globale de la représentation d'attitude. C'est le cas du GLMAV (section 1.3) qui motive ici notre intérêt pour ces approches : lors du déploiement à l'apogée de sa trajectoire balistique, le GLMAV atteint des inclinaisons très importantes.

Les lois de commande exposées dans cette section utilisent la structure en cascade. Nous nous concentrons ici uniquement sur la boucle interne en attitude, la boucle externe sera étudiée dans un second temps.

#### 4.6.3.1 Commande de l'attitude par l'erreur de quaternion

La représentation de l'attitude par les quaternions est donnée en section 2.2.2. Il faut ici ajouter que les quaternions  $\mathbf{q}$  et  $-\mathbf{q}$  représentent tous deux la même rotation. Dans le cas de la synthèse de lois de commande, il faut donc veiller à ce que la commande soit identique pour une même attitude représentée par des quaternions opposés (Bhat et Bernstein, 1998, p. 2788). Au contraire, le quaternion  $\mathbf{q}^{-1}$  représente une rotation du même angle que  $\mathbf{q}$ , mais autour d'un axe dont la direction est opposée.

**Définition d'une erreur sur le quaternion.** Afin de développer les lois de commande, il faut tout d'abord définir une erreur entre le quaternion représentant l'orientation du véhicule, noté  $\mathbf{q}$ , et le quaternion désiré, noté  $\mathbf{q}_r$  (on peut obtenir  $\mathbf{q}_r$  à partir des angles d'Euler désirés grâce à l'équation (2.22)). La première possibilité est d'envisager une erreur additive définie ainsi :

$$\mathbf{q}_{e+} = \mathbf{q}_r - \mathbf{q} \quad (4.41)$$

Chacune des quatre composantes du quaternion est ici traitée indépendamment. L'inconvénient majeur étant que l'erreur obtenue n'est généralement pas un quaternion unitaire, et ne représente donc plus une attitude (ou rotation). Il existe alors des méthodes pour restaurer la norme unité du quaternion (Shuster, 1993).

Au contraire, l'erreur multiplicative permet de rester dans l'espace  $\mathbb{H}_1$  des quaternions unitaires de manière intrinsèque. En effet, la composition des rotations est obtenue par multiplication des quaternions, de la même manière que la multiplication de matrices permet la composition des rotations dans le cas de l'utilisation de matrices de rotation. Ainsi, une rotation de  $\mathbf{q}_1$  suivie d'une rotation de  $\mathbf{q}_2$  équivaut à une rotation de  $\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1$ .

L'erreur multiplicative sur les quaternions peut être définie de deux manières différentes, exprimée dans le repère inertiel I ou dans le repère du véhicule, B (Combettes, 2016, p. 62) :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_e^I = \mathbf{q}_r \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}_r \mathbf{q}^* \\ \mathbf{q}_e^B = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{q}_r = \mathbf{q}^* \mathbf{q}_r \end{cases} \quad (4.42)$$

La différence entre les erreurs additive et multiplicative est discutée en détail par Shuster (1993) et par Markley (2004) pour des applications de filtrage. Nous préférons ici l'utilisation de l'erreur  $\mathbf{q}_e^B$  : elle représente alors une rotation permettant d'aller de  $\mathbf{q}$  à  $\mathbf{q}_r$  (on a  $\mathbf{q}_r = \mathbf{q} \mathbf{q}_e^B$ ).

**Loi de commande.** A partir de l'erreur de quaternion, on peut construire la loi de commande proportionnelle donnée en équation (4.43), qui est utilisée par Brescianini *et al.* (2013). Guerrero-Castellanos *et al.* (2011) présentent une forme étendue permettant de prendre en compte les limites des actionneurs (saturations).

$$\mathbf{u}_\omega = \text{sign}(q_{e,0}) k \bar{\mathbf{q}}_e \quad \text{avec} \begin{cases} \text{sign}(q_{e,0}) = 1 & \text{pour } q_{e,0} \geq 0 \\ \text{sign}(q_{e,0}) = -1 & \text{pour } q_{e,0} < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Le choix du gain  $k$  limite l'amplitude maximale de la commande : le quaternion d'attitude étant unitaire, on a nécessairement  $\|\bar{\mathbf{q}}_e\| \leq 1$  et donc  $\|\mathbf{u}_\omega\| \leq k$ . La commande  $\mathbf{u}_\omega$  correspond à l'entrée de la boucle interne en vitesse de rotation, construite de la même manière que précédemment, par exemple avec un correcteur de type PID (section 4.5.2). La fonction "sign" permet de

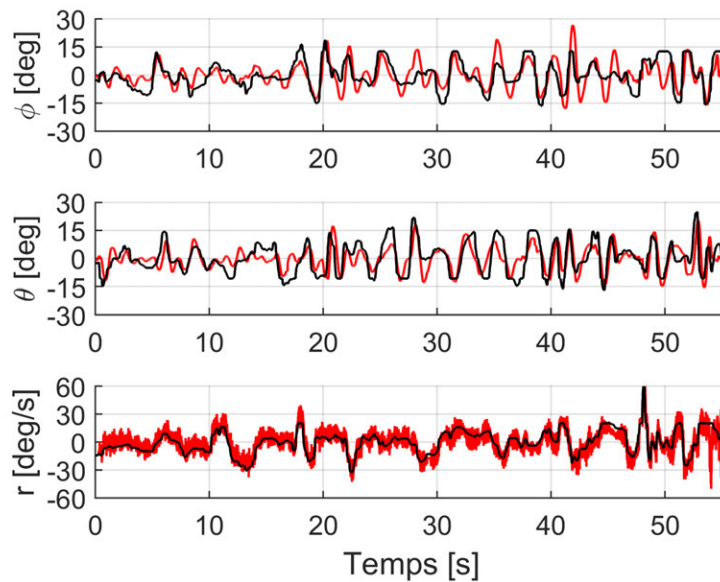
s'assurer que la rotation calculée est toujours inférieure ou égale à 180 degrés (angle de rotation minimal).

En faisant l'hypothèse que le suivi de consigne  $\mathbf{u}_\omega$  par la boucle interne est parfait, c'est-à-dire  $\boldsymbol{\omega}^B = \mathbf{u}_\omega$ , la dynamique du système se réduit à  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q}[0, \mathbf{u}_\omega]^T$  (équation (2.26)), et se comporte comme un système du premier ordre de constante de temps  $2/k$  (Brescianini *et al.*, 2013).

**Implémentation et résultats expérimentaux.** La figure 4.18 montre le relevé en vol de l'hélicoptère commandé en attitude avec la loi de commande en équation (4.43). La consigne est ici  $\mathbf{r} = [\phi_r, \theta_r, r_r]^T$  (donnée par la radiocommande), de manière à obtenir un mode de vol dit "manuel stabilisé" (tableau 4.2). On construit le quaternion désiré  $\mathbf{q}_r$  à partir du vecteur  $[\phi_r, \theta_r, 0]^T$  et de l'équation (2.22), et le quaternion d'erreur  $\mathbf{q}_e^B$  à partir de l'équation (4.42). La loi de commande implémentée est alors :

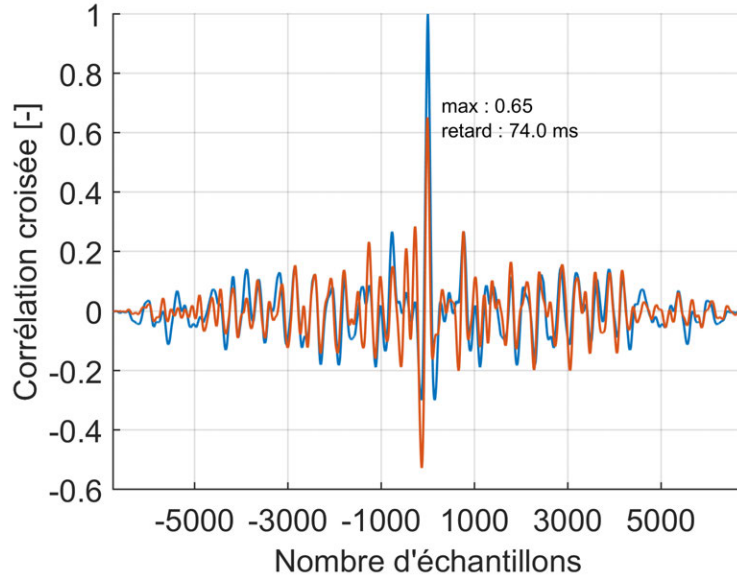
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\omega &= 3\bar{\mathbf{q}}_e + [0, 0, r_r]^T \\ \mathbf{u} &= [0.13, 0.13, 0.2]^T \cdot (\mathbf{u}_\omega - \boldsymbol{\omega}^B) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les gains pour la boucle interne en vitesse de rotation sont les mêmes que ceux de la commande utilisée lors de l'identification (section 4.6.1). Le gain de la boucle en attitude est choisi tel que la constante de temps  $\tau = 2/k$  soit de l'ordre de 0.7 s.



**Figure 4.18** – Relevés en vol : commande de l'attitude basée sur l'erreur multiplicative des quaternions. Tracé de la consigne (noir) et de la mesure (rouge).

On remarque tout d'abord l'excellent suivi de la commande en vitesse  $r$ , bien que la mesure soit bruitée (vibrations dues au bi-rotor). Pour les axes de roulis et de tangage, bien que l'on observe un bon suivi de la consigne, les performances et les résultats de la commande sont difficiles à juger à partir des courbes de relevés en vol : la consigne est donnée de manière manuelle et non reproductible et le drone est constamment soumis à des perturbations (effets de sol, interactions avec les murs de la pièce...). Dans le but d'obtenir des informations sur les performances de la commande, nous traçons en figure 4.19 l'intercorrélation entre la référence et la mesure, qui donne une information de similitude entre les deux signaux. La corrélation est normalisée de manière à ce que l'autocorrélation soit égale à 1 pour un retard nul. Ainsi, la valeur du maximum d'intercorrélacion donne une information sur la qualité du suivi de consigne par le drone (une valeur égale à 1 signifie un suivi de consigne parfait). Le retard au maximum de l'intercorrélacion donne le retard de la boucle de commande. Le maximum vaut ici 0.65, et nous estimons un retard entre la référence et la mesure de 9 échantillons, soit  $74 \pm 10$  ms. Ce retard est du même ordre de grandeur que le retard introduit par les servomoteurs, estimé en section 1.7.1.



**Figure 4.19** – Autocorrélation de la référence en roulis (bleu) et intercorrélacion entre la référence et la mesure (rouge), pour la commande de l'attitude basée sur l'erreur multiplicative des quaternions.

#### 4.6.3.2 Commande de l'attitude par la représentation axe propre/angle

La rotation entre deux repères peut être réalisée par une rotation unique autour d'un axe appelé "axe propre". Cette rotation est optimale dans le sens de la distance angulaire à parcourir. Il est donc naturel d'envisager une commande basée sur la représentation de la rotation par l'axe propre.

**Notation exponentielle et représentation angle-axe.** Le passage entre l'axe propre et le quaternion unitaire d'attitude se fait grâce à l'application exponentielle, qui peut être vue comme une généralisation de la notation exponentielle pour les nombres complexes. Ainsi, un quaternion unitaire  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$  représentant la rotation d'un angle  $\alpha$  autour d'un axe unitaire (ou axe propre)  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme polaire suivante (Combettes, 2016) :

$$\mathbf{q} = \exp\left(\frac{\alpha}{2} \mathbf{u}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Réciproquement, l'application logarithme népérien<sup>7</sup> entre l'espace  $\mathbb{H}_1$  et l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est définie comme suit :

$$\ln(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{2} \mathbf{u} = \begin{cases} \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\bar{\mathbf{q}}\|} \arccos q_0, & \|\bar{\mathbf{q}}\| \neq 0 \\ 0, & \|\bar{\mathbf{q}}\| = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

**Expression de la vitesse de rotation.** L'expression liant la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}^B$  au quaternion d'orientation  $\mathbf{q}$  est connue et donnée en équation (2.26), rappelée ici :

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}^B \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

7. Il est important de noter que les relations standard des fonctions exponentielle et logarithme ne sont en général pas vérifiées dans le cas des quaternions, du fait de la non-commutativité de leur produit. Ainsi, en général, on a  $e^{\mathbf{q}} e^{\mathbf{r}} \neq e^{(\mathbf{q}+\mathbf{r})}$  et  $\ln(\mathbf{q}\mathbf{r}) \neq \ln \mathbf{q} + \ln \mathbf{r}$ .

On se propose ici d'établir la relation entre la vitesse de rotation et l'axe propre, particulièrement intéressante pour la commande. De l'équation (4.47), on peut déduire facilement la relation  $[0, \boldsymbol{\omega}^B]^T = 2\mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}}$ . En utilisant la notation de  $\mathbf{q}$  sous forme angle-axe  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$  on déduit l'expression suivante<sup>8</sup> pour  $\boldsymbol{\omega}^B$  :

$$\boldsymbol{\omega}^B = \mathbf{u} \dot{\alpha} + \dot{\mathbf{u}} \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{u} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\bar{\mathbf{q}}\|} \quad (4.48)$$

On remarque que pour un petit angle  $\alpha$ , on a  $\boldsymbol{\omega}^B \approx \mathbf{u} \dot{\alpha} + \dot{\mathbf{u}} \alpha$ , qui est l'expression de la dérivée de  $\alpha \mathbf{u}$ . Par la suite, on note  $\mathbf{n}$  le vecteur  $\alpha \mathbf{u}$ . En utilisant l'équation (4.46), on peut écrire, pour un petit angle de rotation  $\alpha$  :

$$\begin{cases} \mathbf{n} = 2 \ln(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{n}} \approx \boldsymbol{\omega}^B \end{cases} \quad (4.49)$$

**Loi de commande proportionnelle.** En utilisant le vecteur  $\mathbf{x} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^B]^T$  pour représenter l'attitude et la vitesse de rotation, Carino *et al.* (2015) proposent la loi de commande suivante, avec  $\mathbf{x}_r$  l'attitude désirée :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}) \quad (4.50)$$

$\mathbf{K}$  étant une matrice symétrique définie positive ou diagonale.

**Implémentation et résultats expérimentaux.** Lors de l'implémentation, nous préférons une forme légèrement différente de la loi de commande basée, comme précédemment, sur deux boucles imbriquées d'attitude et de vitesse de rotation. La consigne envoyée par la radiocommande est choisie comme étant :  $\mathbf{r} = [n_{1,r}, n_{2,r}, r_r]^T$ ,  $n_{1,r}$  et  $n_{2,r}$  étant les deux premières composantes du vecteur  $\mathbf{n}_r$  désiré. Le vecteur  $\mathbf{n}$  est alors calculé à partir du quaternion d'attitude estimé et de l'équation (4.46). La loi de commande implémentée est alors :

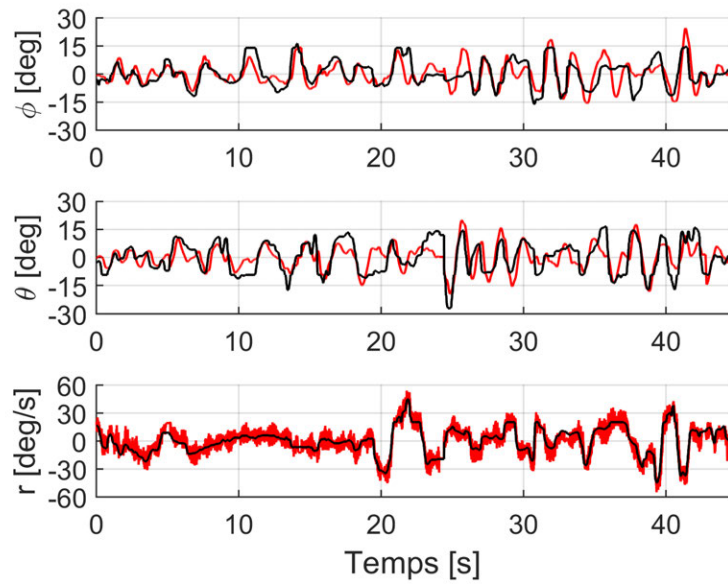
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\omega &= 6.5([n_{1,r}, n_{2,r}, 0]^T - \mathbf{n}) + [0, 0, r_r]^T \\ \mathbf{u} &= [0.13, 0.13, 0.2]^T \cdot (\mathbf{u}_\omega - \boldsymbol{\omega}^B) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Les gains pour la boucle interne en vitesse de rotation sont les mêmes que ceux de la commande utilisée lors de l'identification (section 4.6.1). La figure 4.20 présente le relevé d'un vol du drone en utilisant cette loi de commande. La figure 4.21 présente l'intercorrélacion entre la consigne et la mesure. Le maximum de corrélation est de 0.68, et le retard entre la référence et la mesure est estimé à 7 échantillons, soit  $58 \pm 10$  ms. Ces résultats sont légèrement meilleurs que ceux obtenus en utilisant l'erreur multiplicative des quaternions en section 4.6.3.1. Cependant, au regard de l'incertitude sur le retard et sachant que la consigne n'est pas la même entre deux vol, il n'est pas certain que cette amélioration soit avérée.

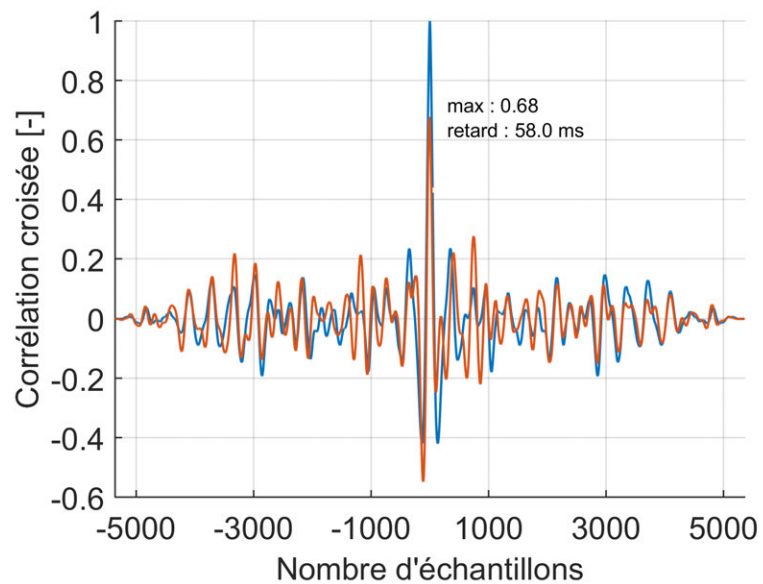
**Simulations avec une loi de commande LQR.** On peut également utiliser l'approche optimale LQR (exposée en section 4.6.2) pour résoudre le problème de commande. D'après l'équation (4.49), on peut approximer  $\mathbf{n}$  comme étant l'intégrale de la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}^B$ . Avec le modèle linéarisé donné en équation (4.23), l'équation dynamique de rotation s'écrit simplement :

$$\ddot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} L/I_{xx} \\ M/I_{yy} \\ N/I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

8. L'expression est obtenue en calculant l'expression de  $\dot{\mathbf{q}}$  et de  $\mathbf{q}^*$  à partir de  $\mathbf{q} = [\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2}]^T$ . On peut alors calculer  $[0, \boldsymbol{\omega}^B]^T = 2\mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}}$ .



**Figure 4.20** – Relevés en vol : commande de l'attitude basée sur les quaternions, par la méthode de l'axe propre. Tracé de la consigne (noir) et de la mesure (rouge).



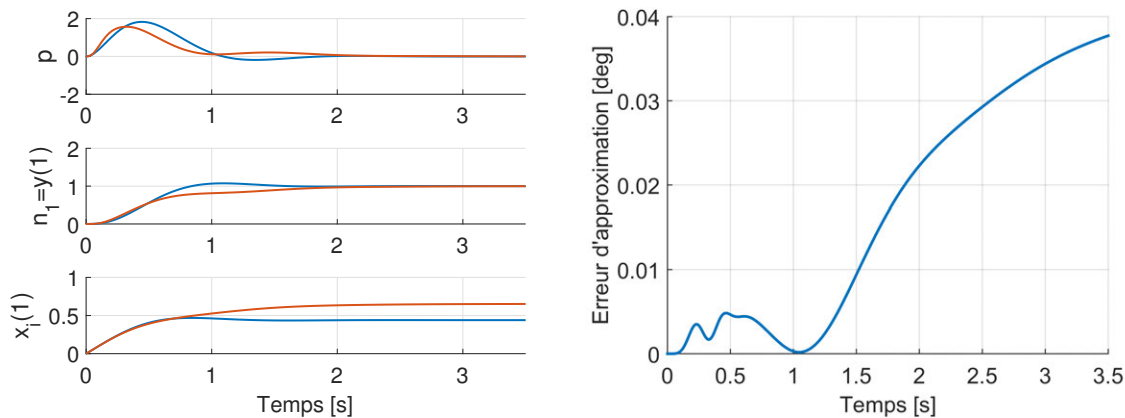
**Figure 4.21** – Autocorrélation de la référence en roulis (bleu) et corrélation croisée entre la référence et la mesure (rouge), pour la commande de l'attitude par la méthode de l'axe propre.



La chaîne de roulis peut alors mettre sous la forme d'état suivante, en notant  $n_1$  la première composante de  $\mathbf{n}$  :

$$\begin{bmatrix} \ddot{n}_1 \\ \dot{n}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{n}_1 \\ n_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{I_{xx}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} L \quad (4.53)$$

L'implémentation est faite en suivant le schéma en figure 4.16, avec  $\mathbf{y} = \mathbf{n}$  et le vecteur d'état  $\mathbf{x} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}^B, \mathbf{x}_i]^T$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  est calculé à partir du quaternion d'orientation suivant l'équation (4.49), tandis que  $\dot{\mathbf{n}}$  est approximé par  $\boldsymbol{\omega}^B$ . Lors des simulations, la différence entre  $\mathbf{n}$  et l'intégrale de  $\boldsymbol{\omega}^B$  est inférieure à  $7e-4$  rad, soit 0.04 degrés (voir la figure 4.22). Le résultat de la simulation pour l'axe de roulis avec les gains  $K = [0.0293, 0.1338]$  et  $K_I = [-0.3044]$  est présenté en figure 4.22 sur le modèle linéaire (donné par l'équation (4.53)) et sur le modèle non-linéaire. Les deux réponses sont proches, validant la démarche. On relève une marge de gain de 10.2 dB et une marge de phase de  $-180$  degrés.



**Figure 4.22** – Réponse à un échelon du système linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge), pour la commande LQR. À droite : différence entre  $n_1$  et l'intégrale de  $p$ .

## 4.7 Boucle externe : commande de la position

En suivant l'architecture en cascade présentée en début de ce chapitre (figure 4.10), cette section est consacrée à l'étude de la boucle externe en position, construite sur la boucle interne en attitude. La boucle externe a pour entrée les positions ou les vitesses désirées. Elle calcule la consigne en poussée  $F_z$  et les angles de roulis et de tangage. Nous proposons ici l'étude des résultats expérimentaux obtenus en utilisant la commande classique par PID en cascade (figure 4.11).

**Paramètres du contrôleur.** Les valeurs des gains sont données dans le tableau 4.4. La valeur initiale des gains a été fixée à la valeur par défaut de l'autopilote Pixhawk/PX4, et est affinée empiriquement pour obtenir le comportement désiré.

**Table 4.4** – Valeurs de gains utilisées pour la commande en position.

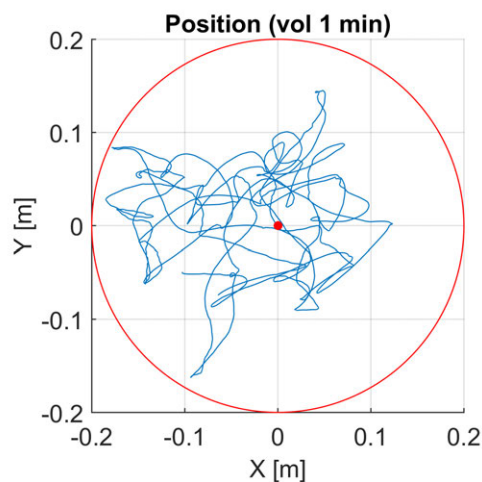
Gain	$x, y$	$z$
$k_{ff,1}$	0.5	0.5
$k_{p,1}$	1.6	3
$k_{p,2}$	0.25	0.4
$k_{i,2}$	0.04	0.05
$k_{p,3}$	0.01	-

**Navigation.** La mesure de vitesse latérale du drone est calculée à partir du flux optique (voir la section 1.6.2.3). La position suivant  $z^B$  est donnée par un télémètre laser pointant vers le sol. Un filtre de Kalman, mis en place par la communauté de développeurs du projet Pixhawk/PX4 (Meier *et al.*, 2015), permet la fusion des données des capteurs et l'estimation de la position et de la vitesse du drone dans les trois dimensions de l'espace. Nous n'utilisons pas de mesure de position pour cet essai, et la position latérale estimée par le filtre de Kalman revient donc à une intégration filtrée de la vitesse issue du flux optique.

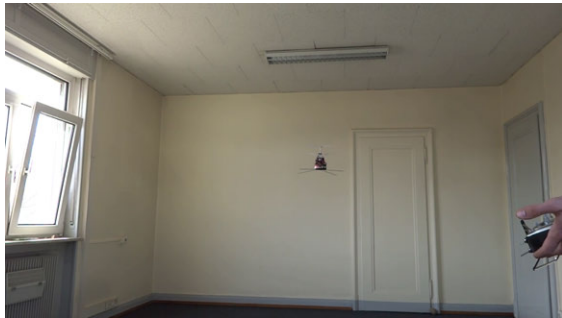
**Résultats sur un vol stationnaire automatique.** Les figures 4.23 et 4.24b montrent la position estimée à bord du drone durant un vol stationnaire : la consigne de position est fixée à 0. Pendant la durée du vol, l'erreur en position est inférieure à 20 cm. Du fait de l'absence de mesure de position, le drone a une dérive en position lente due à l'intégration (de l'ordre d'une vingtaine de centimètres en une minute), qui n'est pas visible sur l'estimation de la position à bord. La vitesse estimée à bord est tracée en figure 4.25 et les angles d'Euler en figure 4.26. La consigne en attitude présente des oscillations d'une amplitude de quelques degrés, montrant une faiblesse du correcteur, mais est très bien suivie par le véhicule avec un retard d'environ 0.35 s. La consigne de vitesse  $w$  est également particulièrement bien suivie.

Ces résultats, bien que perfectibles, valident à la fois l'approche de commande et les algorithmes de navigation. Le vol stationnaire en intérieur uniquement à partir de capteurs embarqué (c'est-à-dire sans système de géolocalisation ou de capture de mouvement) est connu pour être un exercice difficile qui fait l'objet de recherches actives actuellement, tant au niveau des algorithmes de navigation (Fusini *et al.*, 2017; Shen *et al.*, 2011), que de l'électronique (Honegger *et al.*, 2013) ou des algorithmes de commande (Bristeau *et al.*, 2011; Rosa *et al.*, 2014).

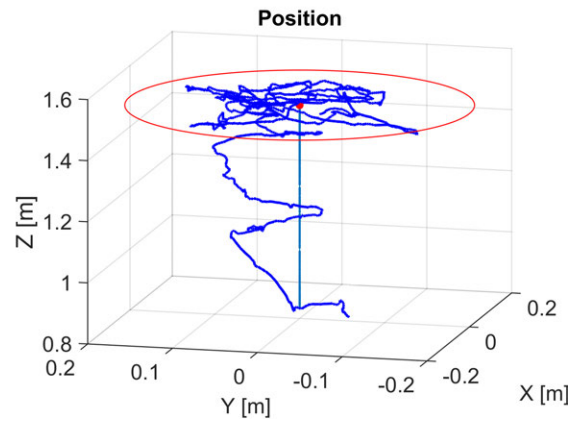
Enfin, nous pouvons constater l'influence de la distance entre le centre de gravité et le centre de poussée, autant sur les simulations que sur les mesures en vol : sur notre véhicule le CP est situé en dessous du CG, provoquant un mouvement de balancier inévitable (bien qu'amorti par le correcteur) lors de ses déplacements, à cause de la traînée aérodynamique. Ce mouvement de balancier est clairement visible sur les simulations avec le modèle non-linéaire (pour le modèle linéaire, CG et CP sont considérés confondus) sur les figures 4.14, 4.17 et 4.22, mais également sur les données de vol sur les figures 4.15, 4.18, 4.20 et 4.26. C'est pourquoi, comme il a été fait au fil des versions du GLMAV, il est avantageux de minimiser cette distance entre CG et CP, voire de placer le CG au dessus du CP. C'est ce qui est fait sur certains quadricoptères (notamment pour les courses de drones, nécessitant des vols dynamiques) en plaçant la batterie au dessus du plan des rotors.



**Figure 4.23** – Position estimée à bord du drone, lors d'un vol stationnaire (consigne de vitesse nulle) en intérieur d'une durée d'une minute, sans intervention du pilote.

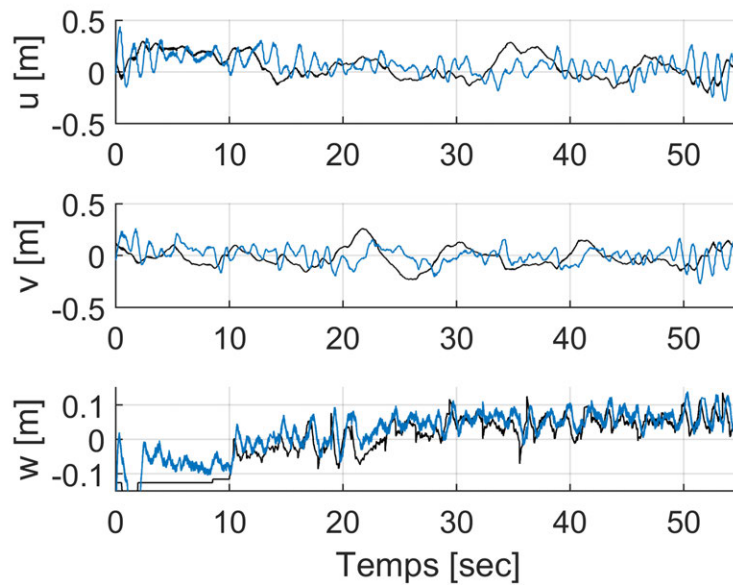


(a) Photographie prise lors du vol.



(b) Position estimée à bord du drone.

**Figure 4.24** – Vol stationnaire (consigne de vitesse nulle) en intérieur d'une durée d'une minute, sans intervention du pilote. La vitesse de déplacement est estimée par flux optique et la hauteur par un télémètre laser miniature embarqué.



**Figure 4.25** – Consignes de vitesse (noir) et vitesse mesurée (bleu)

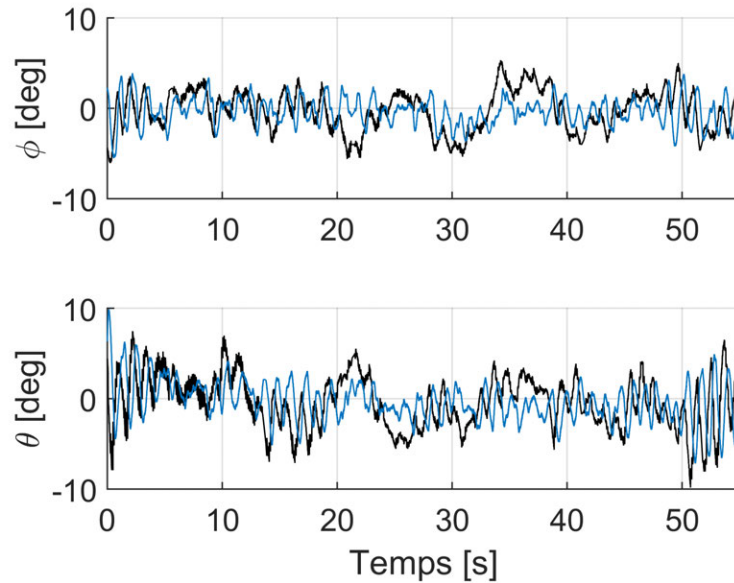


Figure 4.26 – Consigne de roulis et tangage (noir), et angles mesurés (bleu).

## 4.8 Conclusion du chapitre

Ce chapitre s'appuie sur les études menées aux chapitres précédents pour synthétiser différentes lois de commande, les valider en simulation, puis les évaluer par des essais expérimentaux. La comparaison avec un modèle établi précédemment pour le même véhicule montre une nette amélioration dans la reproduction du comportement réel de l'hélicoptère, mettant en lumière la contribution apportée par cette étude.

Les correcteurs élaborés dans ce chapitre représentent différentes déclinaisons de structures en cascade. Selon l'objectif visé, certaines boucles sont activées ou désactivées. Afin de synthétiser les différents correcteurs, deux méthodes de linéarisation des modèles introduits aux chapitres précédents sont présentées et commentées.

A cette échelle, l'hélicoptère est très sensible aux perturbations aérodynamiques extérieures comme les effets de sol ou le vent. Cela rend difficile l'interprétation des relevés en vol. Néanmoins, les lois de commandes mises en place grâce aux modèles établis, bien que classiques, permettent d'obtenir des résultats expérimentaux satisfaisants qui montrent un écart réduit avec le comportement en simulation. Cela constitue une validation de la méthodologie établie durant la thèse.



# Conclusion et perspectives

La thèse a débuté dans la continuité du projet GLMAV de l'ISL, un drone hybride projectile-hélicoptère à birotor coaxial, dont le comportement en vol déployé n'était pas satisfaisant malgré des études théoriques poussées sur sa commande. C'est la raison d'être de cette thèse, et comme présenté dans cette étude, la cause principale était l'utilisation d'un modèle trop simplifié et mal identifié qui ne reproduisait que trop approximativement le comportement dynamique en vol du véhicule. L'objectif principal était alors d'établir une méthodologie d'identification permettant l'obtention d'un modèle d'un hélicoptère à bi-rotors contrarotatifs coaxiaux pour la synthèse et la simulation de lois de commande.

La première étape pour remplir cet objectif a été la construction d'une maquette pour permettre des essais expérimentaux. Cela a nécessité la considération des aspects mécaniques, électroniques et logiciels. Durant le développement de la maquette et l'avancée de la thèse, j'ai alors pu participer et contribuer à un projet collaboratif d'envergure internationale, à savoir l'autopilote Pixhawk/PX4. Cela permettait de rester en phase avec les dernières avancées, mais a nécessité en contrepartie un suivi assidu des changements, très fréquents, sur le logiciel. Ces aspects ont été présentés dans le premier chapitre de la thèse.

Les différents éléments constitutifs des drones miniatures ont également été décrits dans ce premier chapitre. La contribution est ici sur les actionneurs, pour lesquels j'ai identifié un modèle et déterminé les limites physiques. Le modèle des moteurs a alors été utilisé pour mettre en place une commande en vitesse des rotors permettant une amélioration du temps de réponse et du suivi de consigne.

Dans le second chapitre, j'ai présenté une modélisation complète de l'hélicoptère en vue de la simulation de son comportement avec différentes lois de commande. Il est pour cela décomposé en sous éléments modélisés séparément, autour des équations du modèle à six degrés de liberté. La contribution porte ici sur la modélisation aérodynamique, réalisée par étapes successives afin d'obtenir des modèles de complexité croissante, couvrant une bande passante plus ou moins large. Ces modèles ont été identifiés, évalués sur un jeu de données de vol et comparés entre eux au troisième chapitre. Nous avons ainsi apporté des éléments permettant de réaliser le compromis entre la simplicité du modèle et sa précision. L'importance d'intégrer certains paramètres dans le modèle, parfois sans augmenter significativement la complexité de l'ensemble, a été mise en avant.

Pour cela, j'ai décrit au chapitre trois une méthodologie d'identification complète et générale qui est appliquée au système étudié. L'accent a été porté sur la simplicité de mise en œuvre : le maximum de paramètres possible est estimé à partir des données issues d'un vol, et les paramètres restants sont estimés grâce à des bancs de test qui peuvent être construits facilement et à bas-coût (pendule trifilaire pour les paramètres d'inertie, balance classique pour les paramètres des rotors). Cette simplicité dans la mise en œuvre a un coût en terme d'études théoriques : les paramètres observables à partir des données de vol sont déterminés par des études structurelles (identifiabilité "a priori") et des analyses de sensibilité (identifiabilité "a posteriori" car prenant en

compte la trajectoire d'excitation). Les problématiques d'acquisition des données ont également été abordées : mise en place d'un correcteur permettant à un pilote de stabiliser le système, pré-traitement et analyse d'intégrité des données. Enfin, j'ai mené différentes analyses afin d'évaluer le modèle identifié, notamment par l'estimation de l'incertitude sur la valeur des paramètres.

Le dernier chapitre constitue une validation de la démarche suivie au fil de la thèse, à travers les comparaisons avec un ancien modèle de l'hélicoptère utilisé auparavant, et à travers la mise en œuvre de lois de commande, rendue possible grâce aux modèles établis. Pour la synthèse, le modèle non-linéaire a été linéarisé, soit directement, soit en utilisant un changement de variables d'entrée. Les lois de commande étudiées sont classiques, mais ont été ici à la fois testées en simulation et validées par des essais expérimentaux. De bons résultats ont été obtenus sur la commande en attitude du véhicule, qui constitue la boucle interne de la commande hiérarchique étudiée, en général la plus délicate à mettre en œuvre. D'autre part, le passage de la simulation aux essais expérimentaux a été simplifié au maximum par la mise en place d'outils permettant l'intégration directe du correcteur simulé dans l'architecture logicielle embarquée.

La thèse m'a permis d'aborder tous les aspects d'un drone miniature, de sa construction à son vol automatique. Grâce à la coopération des chercheurs, des professionnels, et des amateurs autour des projets libres, ces aspects sont aujourd'hui largement simplifiés. En contrepartie, le domaine évolue très vite, et les résultats obtenus perdent rapidement de leur intérêt au fil du temps. C'est le cas du vol stationnaire en intérieur, bien moins impressionnant aujourd'hui qu'il y a quelques années. C'est le cas également des travaux présentés sur les moteurs et leurs ESC, classiques sur les ESC récents. J'ai d'ailleurs pu y contribuer en intégrant la commande en vitesse présentée dans cette étude sur le projet libre WiiESC.

## Perspectives

Plusieurs axes de recherche émergent de cette étude, en particulier sur la commande de l'hélicoptère. L'environnement de synthèse de lois de commande et de simulation mis en place n'a pas été exploité à son maximum. Nous avons étudié le comportement du véhicule avec la commande hiérarchique par "backstepping" établie lors d'études précédentes sur un modèle plus simple, et remarqué que le comportement sur notre environnement de simulation était comparativement bien plus proche de la réalité. Il serait alors intéressant d'adapter la commande hiérarchique par "backstepping" au modèle qui a été établi. Cette commande permet d'obtenir un domaine de validité plus étendu par l'utilisation de la version non-linéaire du modèle. D'autres approches permettant ce même objectif pourraient être étudiées, comme les approches par séquençement de gains ou les techniques de commande LPV.

Les limites des actionneurs (précision, retard, saturations), mises en avant dans la partie correspondante, jouent un rôle important dans la stabilité du véhicule. Dans cette étude, seule leur dynamique linéaire a été prise en compte lors de la synthèse, les non-linéarités n'étant prises en compte que dans la simulation. Il serait intéressant d'étudier des approches de commande permettant de prendre en compte leurs non-linéarités directement lors de la synthèse. Les techniques d'anti-saturation permettraient également d'améliorer les performances de la commande lors des vols plus agressifs.

Enfin, avec la multiplication des applications faisant usage des drones, l'augmentation de la fiabilité du vol et de la robustesse des lois de commande est un point majeur qui a ici été peu abordé.

Les perspectives concernent également le projet GLMAV. A la fin du projet, c'est-à-dire au début de ma thèse, deux problématiques majeures restaient non résolues. La première était le comportement en vol déployé déficient qui a fait l'objet de cette étude. La seconde portait sur la phase dite "de transition", durant laquelle le GLMAV passe de la configuration "projectile" à la configuration "hélicoptère coaxial" en déployant son bi-rotor. Cela a fait l'objet d'études et d'es-

---

sais expérimentaux conséquents durant la première partie de ma thèse. Certains de ces travaux rentrent également dans la spectre de la thèse et ont pu être présentés ici. C'est le cas d'une partie de l'étude sur les moteurs et leur commande, qui doit répondre à des contraintes fortes durant le déploiement et la mise en rotation des rotors de l'hélicoptère. C'est le cas également de l'étude sur les commandes en attitude globalement stables et ne présentant pas de singularité de représentation, aspect primordial pour la phase de transition. D'autres études ont porté sur la détection de l'apogée, le comportement en descente rapide de l'hélicoptère (de manière théorique et à travers l'étude de données acquises lors d'essais en soufflerie), et le démarrage des moteurs "brushless" sans capteur de position avec un couple important, mais n'ont pas été abordées dans ce manuscrit.

Nous n'avons cependant pas pu aller jusqu'à la démonstration complète du concept du GL-MAV à cause d'un manque de ressources humaines en réalisation mécanique : la réalisation de la version 2 du GLMAV, qui devait pallier aux défauts de la première version et permettre cette démonstration, n'a pas été achevée. La maquette utilisée durant ma thèse, qui devait n'être que provisoire, m'a finalement accompagné jusqu'au bout ; qu'elle en soit ici remerciée.





# Annexes



# Comparaison d’algorithmes pour l’estimation d’attitude

Dans cette annexe, nous proposons la comparaison de quatre algorithmes classiques permettant l’estimation de l’attitude du drone à partir des données de capteurs. La figure 27 donne un tracé des mesures issues des gyromètres, des accéléromètres et des magnétomètres embarqués sur le drone lors d’un vol de déplacement lent (vol quasi-stationnaire). On peut remarquer sur les mesures des accéléromètres une oscillation à haute fréquence due à la rotation des deux rotors de l’hélicoptère. L’attitude du drone est estimée en temps réel lors du vol à l’aide d’un filtre complémentaire basé sur les quaternions<sup>9</sup>. L’estimation se fait à une fréquence de 250 Hz.

Nous pouvons alors comparer les performances de l’algorithme embarqué avec d’autres types d’algorithmes (en “post-traitement”). Nous utilisons pour cela l’implémentation des algorithmes sous Matlab réalisée par Combettes (2016). La figure 28 donne une comparaison de l’estimation d’attitude réalisée par les différents algorithmes testés :

- un filtre de Kalman étendu utilisant une erreur multiplicative sur le quaternion d’attitude (Crassidis *et al.*, 2007),
- un algorithme basé sur une descente de gradient (Madgwick *et al.*, 2011),
- un filtre complémentaire (Hamel et Mahony, 2006; Mahony *et al.*, 2005),
- un filtre complémentaire embarqué sur le drone.

La référence d’attitude est donnée par le système de capture de mouvement (MoCAP). La figure 29 présente l’erreur calculée entre la référence et l’estimation des différents algorithmes. Le tracé de l’erreur en lacet met en évidence un biais important sur l’estimation embarquée, probablement dû d’une part à une mauvaise initialisation et d’autre part à un réglage inadapté (pondérations) du filtre.

Enfin, le tableau 5 donne les valeurs de “fit” calculées à partir de l’erreur NRMSE (voir l’équation (3.19)). On remarque que les performances sont très proches pour l’ensemble des algorithmes, et similaires à l’estimation embarquée. Des réglages plus adaptés des paramètres des différents algorithmes (matrices de covariance pour le filtre de Kalman, pondérations des filtres pour l’algorithme à filtres complémentaires, pas de la descente de gradient) permettraient probablement d’améliorer les résultats : seul un réglage grossier a ici été effectué. En conclusion de cette courte étude, il apparaît que les différences en terme de précision entre les algorithmes sont faibles et ne montrent pas clairement de prédominance d’un algorithme sur un autre. Les algorithmes ne sont cependant pas équivalents en terme de puissance de calcul requise, le filtre de Kalman étendu nécessitant davantage d’opérations.

---

9. L’algorithme considéré dans cette étude a été programmé par la communauté de développement autour du projet PX4, et par A. Babushkin en particulier.

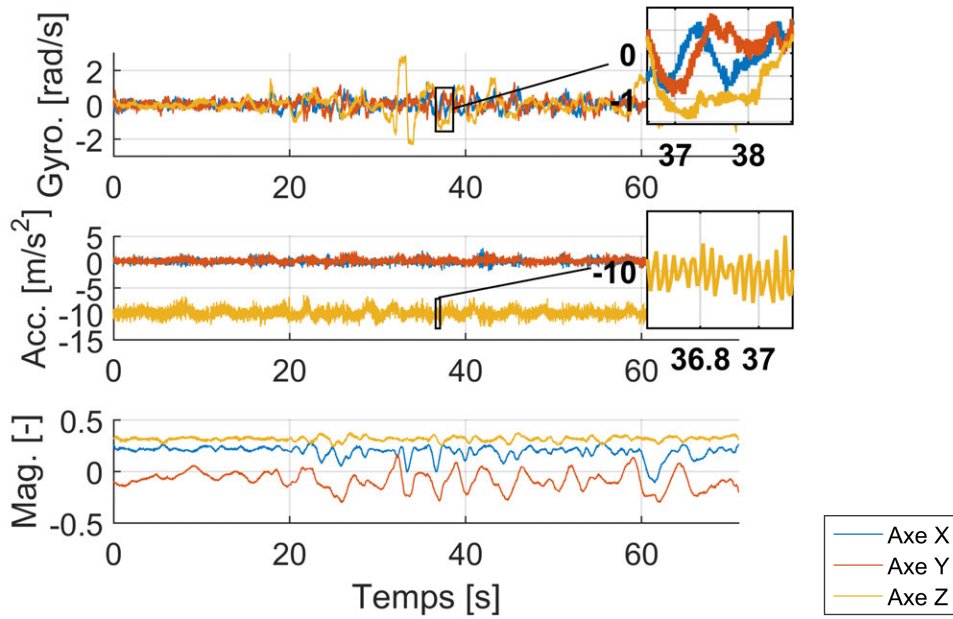


Figure 27 – Données des capteurs pour l'estimation d'attitude.

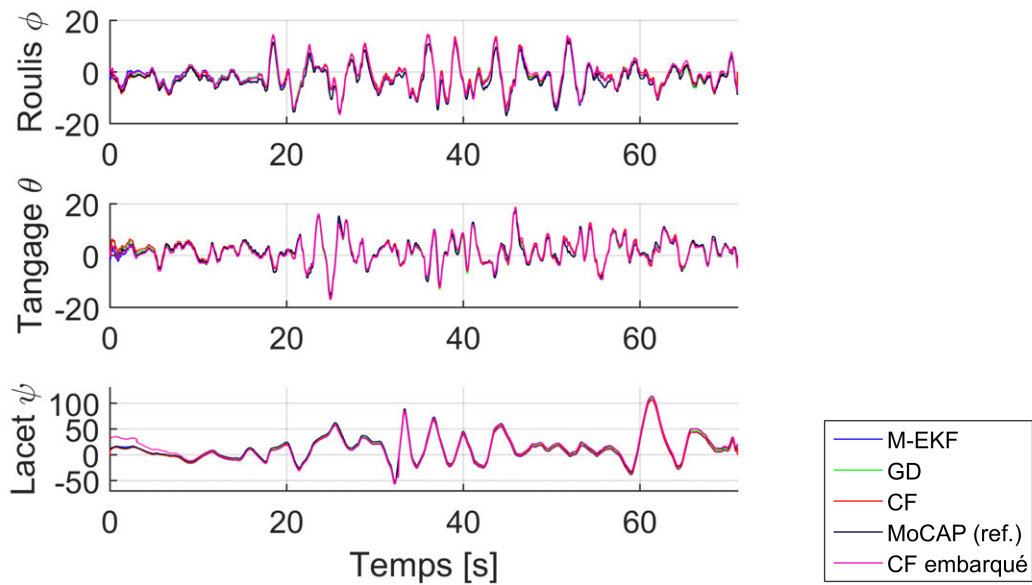
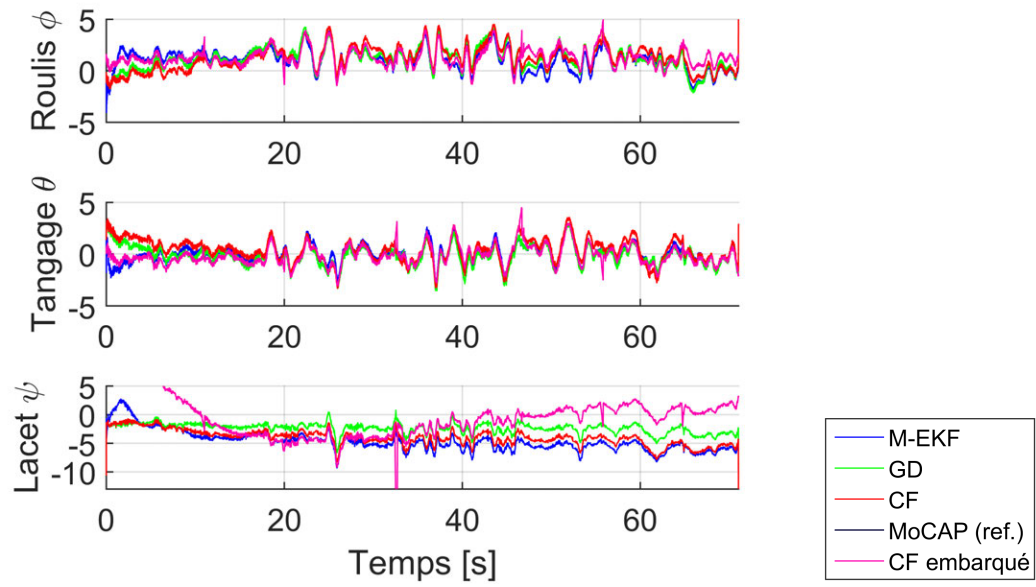


Figure 28 – Tracé de l'attitude estimée à l'aide des différents algorithmes. La référence est donnée par le système de capture de mouvements (MoCAP). L'estimation à bord du drone lors du vol est donnée par le tracé "FC embarqué".

Table 5 – Comparaison de l'attitude estimée par différents algorithmes avec l'estimation du système MoCAP.

	EKF multiplicatif	Descente de gradient	Filtre complémentaire	CF embarqué
Roulis	70.0 %	67.5 %	66.1 %	68.5 %
Tangage	81.7 %	78.9 %	74.7 %	79.2 %
Lacet	80.2 %	90.0 %	83.3 %	79.9 %



**Figure 29** – Erreur entre la référence (système de capture de mouvements "MoCAP") et l'estimation.



# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>3</b>
<b>1 Les aéronefs sans pilote miniatures : éléments constitutifs</b>	<b>5</b>
1.1 Les drones - contexte, structures et classification	7
1.1.1 Drones et vols autonomes	7
1.1.2 Un domaine en révolution	8
1.1.3 Une large variété de structures	9
1.1.4 Classification des drones	10
1.1.5 Des “aéromodèles automatisés” aux micro-drones modernes	10
1.1.6 Principes de guidage, navigation et commande	11
1.2 Les drones à voilure tournante	12
1.2.1 Comparaison de la puissance induite pour les principales structures	13
1.2.2 Un intérêt exponentiel pour les multicoptères	14
1.2.3 Avantages et inconvénients de la structure coaxiale	15
1.3 Le projet GLMAV	16
1.3.1 Concept et objectifs du projet	16
1.3.2 Historique du projet et acteurs principaux	17
1.3.3 Description du GLMAV	17
1.3.4 Phases de vol et problématiques associées	18
1.4 Description de la plateforme utilisée dans cette étude	20
1.4.1 Une version allégée du GLMAV	20
1.4.2 Caractéristiques inertielles	21
1.4.3 Télémétrie	22
1.4.4 Enregistrement de données de vol	23
1.5 Avionique	23
1.5.1 État de l’art des principaux autopilotes pour drones	23
1.5.1.1 Une multitude de systèmes : évolution comparée sur dix ans	23
1.5.1.2 Évolution des architectures électroniques	25
1.5.1.3 Différents degrés d’automatisation	26
1.5.2 Les choix pour le projet GLMAV	26
1.6 Capteurs et navigation	29
1.6.1 Capteurs inertiels	30
1.6.1.1 Gyromètres	30
1.6.1.2 Accéléromètres	31



1.6.2	Capteurs extéroceptifs . . . . .	31
1.6.2.1	Magnétomètres . . . . .	31
1.6.2.2	Capteurs de pression, baromètres . . . . .	31
1.6.2.3	Odométrie visuelle . . . . .	32
1.6.2.4	Système de capture de mouvements . . . . .	34
1.6.3	Navigation inertielle et hybride . . . . .	34
1.6.3.1	Algorithme Strapdown . . . . .	35
1.6.3.2	La navigation inertielle inutilisable seule sur les systèmes bas-coût . . . . .	35
1.7	Actionneurs . . . . .	36
1.7.1	Identification des servomoteurs . . . . .	37
1.7.1.1	Prise en compte des saturations . . . . .	37
1.7.1.2	Modèle du second ordre avec saturations . . . . .	38
1.7.1.3	Modèle du premier ordre avec saturations . . . . .	39
1.7.1.4	Comparaison des modèles . . . . .	42
1.7.1.5	Précision du positionnement et limites des servomoteurs . . . . .	42
1.7.2	Identification des moteurs . . . . .	43
1.7.2.1	Fonctionnement des moteurs “brushless” . . . . .	43
1.7.2.2	Modélisation de l’ensemble ESC-moteur . . . . .	44
1.7.2.3	Identification d’un modèle des moteurs . . . . .	45
1.7.2.4	Commande en vitesse des moteurs . . . . .	48
1.7.2.5	Implémentation et validation . . . . .	50
1.8	Conclusion du chapitre . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Modélisation d’un hélicoptère</b>	<b>53</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Modélisation cinématique et dynamique : équations de mouvement . . . . .	58
2.2.1	Description des grandeurs . . . . .	58
2.2.2	Représentation de l’attitude et des rotations dans l’espace . . . . .	60
2.2.2.1	Les matrices de rotation . . . . .	60
2.2.2.2	Les angles d’Euler . . . . .	61
2.2.2.3	Les quaternions . . . . .	62
2.2.3	Modélisation cinématique des rotations et des translations . . . . .	64
2.2.3.1	Équation cinématique de rotation . . . . .	64
2.2.3.2	Équation cinématique de navigation . . . . .	65
2.2.4	Modèle à six degrés de liberté du corps rigide dans l’espace . . . . .	65
2.2.4.1	Équations dynamiques . . . . .	66
2.2.4.2	Action de la gravité . . . . .	66
2.2.5	Synthèse des équations dynamiques et cinématiques . . . . .	67
2.3	Modélisation aérodynamique . . . . .	68
2.3.1	Introduction à la modélisation aérodynamique . . . . .	68
2.3.2	Analyse préalable d’un relevé en vol . . . . .	69
2.3.3	Présentation des principaux efforts aérodynamiques . . . . .	70
2.3.4	Principe de fonctionnement de l’hélicoptère . . . . .	71
2.3.4.1	Définition de repères de référence supplémentaires pour l’étude du double rotor . . . . .	72
2.3.4.2	Articulation des pales . . . . .	72
2.3.4.3	Aspects aérodynamiques des pales . . . . .	73
2.3.4.4	Mécanisme du plateau cyclique . . . . .	76
2.3.4.5	Mouvement de battement des pales . . . . .	78
2.3.4.6	Effets aérodynamiques et gyroscopiques au rotor . . . . .	79
2.3.5	Efforts générés par le bi-rotor . . . . .	79
2.3.5.1	Amplitude de la force de poussée des rotors . . . . .	81
2.3.5.2	Synthèse des efforts générés par le bi-rotor . . . . .	82

2.3.6	Traînée aérodynamique de l'hélicoptère . . . . .	82
2.3.6.1	Synthèse des efforts avec traînée aérodynamique . . . . .	83
2.3.7	Prise en compte de la dynamique de battement . . . . .	83
2.3.8	Conclusion sur la modélisation aérodynamique . . . . .	89
2.4	Conclusion du chapitre . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Identification</b>	<b>91</b>
3.1	Méthodologie d'identification . . . . .	93
3.1.1	Méthodologie générale . . . . .	93
3.1.2	Domaine fréquentiel et domaine temporel . . . . .	94
3.2	Identifiabilité structurelle locale . . . . .	94
3.2.1	Introduction . . . . .	94
3.2.2	Principe de l'analyse . . . . .	95
3.2.3	Application au modèle non-linéaire de l'hélicoptère . . . . .	95
3.3	Acquisition de données d'entrée-sortie . . . . .	98
3.3.1	Principe et objectifs . . . . .	98
3.3.2	Correcteur dédié à l'obtention de données d'identification . . . . .	99
3.3.3	Problématiques d'identification en boucle fermée . . . . .	100
3.3.4	Enregistrement des données durant un vol . . . . .	100
3.3.5	Pré-traitement et analyse des données . . . . .	101
3.4	Méthodologie d'estimation des paramètres . . . . .	104
3.4.1	Principe général de l'estimation et définitions . . . . .	104
3.4.1.1	Définition des erreurs . . . . .	105
3.4.1.2	Méthodes d'estimation . . . . .	105
3.4.1.3	Algorithmes d'optimisation . . . . .	107
3.4.2	Application à l'estimation des paramètres du modèle de l'hélicoptère . . . . .	108
3.4.2.1	Paramètres aérodynamiques des rotors . . . . .	108
3.4.2.2	Estimation à partir des données de vol . . . . .	110
3.5	Évaluation du modèle identifié . . . . .	111
3.5.1	Techniques d'évaluation du modèle . . . . .	111
3.5.1.1	Critères caractérisant la qualité de l'estimation . . . . .	112
3.5.2	Évaluation des modèles identifiés sur un jeu de données de validation . . . . .	113
3.5.3	Analyse des résidus . . . . .	117
3.5.4	Analyses de sensibilité du modèle aux paramètres . . . . .	118
3.5.4.1	Analyses de sensibilité locale ou identifiabilité "a posteriori" . . . . .	118
3.5.4.2	Application au modèle . . . . .	120
3.5.5	Analyses des incertitudes sur les paramètres . . . . .	123
3.5.5.1	Approche statistique de l'estimation : la méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	123
3.5.5.2	Estimation de la variance des estimées . . . . .	124
3.5.5.3	Application au modèle considéré . . . . .	128
3.6	Conclusion du chapitre . . . . .	134
<b>4</b>	<b>Commande</b>	<b>135</b>
4.1	Introduction . . . . .	137
4.2	Validation préalable de la démarche . . . . .	138
4.3	Modèle pour la commande . . . . .	143
4.3.1	Linéarisation du modèle pour la commande . . . . .	143
4.3.1.1	Modèle non-linéaire considéré pour la linéarisation . . . . .	143
4.3.1.2	Principe de la linéarisation . . . . .	143
4.3.1.3	Choix du point de fonctionnement . . . . .	144
4.3.1.4	Expression du modèle linéarisé . . . . .	144
4.3.1.5	Expression du modèle pour une commande en couple/poussée . . . . .	147

4.3.1.6	Prise en compte des effets aérodynamiques du premier et du second ordre . . . . .	149
4.3.2	Analyse du modèle linéaire en boucle ouverte . . . . .	149
4.3.3	Prise en compte de la dynamique des actionneurs . . . . .	150
4.4	Objectifs de la commande . . . . .	152
4.4.1	Limites physiques, temps de réponse et saturations . . . . .	152
4.4.2	Incertitudes . . . . .	152
4.4.3	Objectifs de robustesse . . . . .	152
4.4.4	Domaine de validité de la commande . . . . .	153
4.4.5	Des attentes subjectives et variées . . . . .	153
4.5	La commande en cascade . . . . .	154
4.5.1	Structure générale de la commande cascadée . . . . .	154
4.5.2	Structure classique de commande en cascade par PID . . . . .	156
4.6	Étude de la boucle interne : commande de l'attitude du drone . . . . .	157
4.6.1	Évaluation a posteriori du correcteur utilisé pour l'identification . . . . .	157
4.6.2	Commande linéaire quadratique . . . . .	159
4.6.2.1	Commande de l'attitude par la méthode LQR . . . . .	162
4.6.3	Les approches basées sur les quaternions d'attitude . . . . .	162
4.6.3.1	Commande de l'attitude par l'erreur de quaternion . . . . .	163
4.6.3.2	Commande de l'attitude par la représentation axe propre/angle . . . . .	165
4.7	Boucle externe : commande de la position . . . . .	168
4.8	Conclusion du chapitre . . . . .	171
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>173</b>
	<b>Annexes</b>	<b>177</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>183</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>187</b>

# Références bibliographiques

- ABBEEL, P., COATES, A. et NG, A. Y. (2010). Autonomous helicopter aerobatics through apprenticeship learning. volume 29, pages 1608–1639. SAGE Publications.
- ABBEEL, P., COATES, A., QUIGLEY, M. et NG, A. Y. (2007). An application of reinforcement learning to aerobatic helicopter flight. *Advances in neural information processing systems*, 19:1.
- ABBEEL, P., GANAPATHI, V. et NG, A. Y. (2005). Learning vehicular dynamics, with application to modeling helicopters. *In Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1–8.
- ACARNLEY, P. P. et WATSON, J. F. (2006). Review of position-sensorless operation of brushless permanent-magnet machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(2):352–362.
- AEROVIRONMENT (2017). Switchblade. <https://www.avinc.com/uas/adc/switchblade>. Accessed : 2017-08-10.
- ALAZARD, D. (2005). Introduction to kalman filtering. *SUPAERO*.
- ALAZARD, D., CUMER, C., APKARIAN, P., GAUVRIT, M. et FERRERES, G. (1999). *Robustesse et commande optimale*. Cépaduès-éditions.
- ALVIS, W., CASTILLO, C., CASTILLO-EFFEN, M., MORENO, W. et VALAVANIS, K. (2007). A tutorial approach to small unmanned helicopter controller design for non-aggressive flights. *In Advances in Unmanned Aerial Vehicles*, pages 119–170. Springer.
- ANDERSON, C. et DIY DRONES TEAM (2017). Ardupilot open-source project. Retrieved (July 2017) from : <http://ardupilot.org/>.
- ANGUELOVA, M. (2004). Nonlinear observability and identifiability : General theory and a case study of a kinetic model for *s. cerevisiae*.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2006). Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(2):382–382.
- ATMEL (2006). Atmel AVR493 : Sensorless commutation of brushless DC motor (BLDC) using AT90PWM3 and ATAVRMC100. Rapport technique, Atmel Application Note.
- AUGUGLIARO, F., LUPASHIN, S., HAMER, M., MALE, C., HEHN, M., MUELLER, M. W., WILLMANN, J. S., GRAMAZIO, E., KOHLER, M. et D'ANDREA, R. (2014). The flight assembled architecture installation : Cooperative construction with flying machines. *IEEE Control Systems*, 34(4):46–64.
- BAPST, R., RITZ, R., MEIER, L. et POLLEFEYS, M. (2015). Design and implementation of an unmanned tail-sitter. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1885–1890. IEEE.

- BARTON, J. D. (2012). Fundamentals of small unmanned aircraft flight. *Johns Hopkins APL technical digest*, 31(2):132–149.
- BATES, D. et POSTLETHWAITE, I. (2002). *Robust multivariable control of aerospace systems*, volume 8. IOS Press.
- BAUMURATOVA, T., DOBRE, S., BASTOGNE, T. et SAUTER, T. (2013). Switch of sensitivity dynamics revealed with dyglosa toolbox for dynamical global sensitivity analysis as an early warning for system's critical transition. *PloS one*, 8(12):e82973.
- BELTRAMINI, F., BERGAMASCO, M. et LOVERA, M. (2011). Experiment design for MIMO model identification, with application to rotorcraft dynamics. *Proc. 18th IFAC World Cong.*, pages 14392–14397.
- BÉRARD, C., BIANNIC, J.-M. et SAUSSIÉ, D. (2012). *La commande multivariable : Application au pilotage d'un avion*. Dunod.
- BERGHEN, F. V. (2004). Levenberg-marquardt algorithms vs trust region algorithms. *IRIDIA, Université Libre de Bruxelles*.
- BERNANOS, G. (1947). *La France contre les robots*.
- BHAT, S. P. et BERNSTEIN, D. S. (1998). A topological obstruction to global asymptotic stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *In Proceedings of the American Control Conference*, volume 5, pages 2785–2789. IEEE.
- BIANNIC, J.-M. et TARBOURIECH, S. (2007). Stability and performance enhancement of a fighter aircraft flight control system by a new anti-windup approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(7): 177–182.
- BIRD AEROSPACE LLC (2017). Bird's eye. <http://www.birduas.com/deployment.html>. Accessed : 2017-08-10.
- BRESCIANINI, D., HEHN, M. et D'ANDREA, R. (2013). Nonlinear quadrocopter attitude control. Rapport technique, Institute for Dynamic Systems and Control (IDSC), ETH Zürich.
- BRISSET, P., DROUIN, A., GORRAZ, M., HUARD, P.-S. et TYLER, J. (2006). The paparazzi solution. *In 2nd US-European Competition and Workshop on Micro Air Vehicles*, pages pp–xxxx.
- BRISTEAU, P.-J., CALLOU, F., VISSIERE, D. et PETIT, N. (2011). The navigation and control technology inside the ar. drone micro uav. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):1477–1484.
- BRUINSMA, N. et STEINBUCH, M. (1990). A fast algorithm to compute the  $H_\infty$  norm of a transfer function matrix. *Systems Control Letters*, 14(4):287–293.
- BURKE, J., HENRION, D., LEWIS, A. et OVERTON, M. (2006). HIFOO-a MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization. *In Fifth IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse*.
- CAI, G., DIAS, J. et SENEVIRATNE, L. (2014). A survey of small-scale unmanned aerial vehicles : Recent advances and future development trends. *Unmanned Systems*, 2(02):175–199.
- CANNAVÓ, F. (2012). Sensitivity analysis for volcanic source modeling quality assessment and model selection. *Computers & geosciences*, 44:52–59.
- CARINO, J., ABAUNZA, H. et CASTILLO, P. (2015). Quadrotor quaternion control. *In 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 825–831. IEEE.

- CHANGEY, S. (2005). *Modélisation et estimation par filtrage non linéaire de l'attitude d'un projectile à partir de magnétomètres*. Thèse de doctorat, Paris 11.
- CHAO, H., GU, Y. et NAPOLITANO, M. (2013). A survey of optical flow techniques for uav navigation applications. *In International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 710–716. IEEE.
- CHAUFFAUT, C. (2012). The transition phase of a gun-launched micro air vehicle : Nonlinear modeling and control. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*.
- CHAUFFAUT, C. (2014). *Étude de la phase de transition d'un drone tiré par tube dédié : Modélisation et Commande*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- CHAUPRADE, L. (2014). *Les Drones Aériens*. Cépaduès Editions.
- CHELLAL, R., CUVILLON, L. et LAROCHE, E. (2015). A kinematic vision-based position control of a 6-dof cable-driven parallel robot. *In Cable-Driven Parallel Robots*, pages 213–225. Springer.
- CHEN, R. T. (1980). Effects of primary rotor parameters on flapping dynamics.
- CIMEN, T. (2017). Flight dynamics, simulation and control with matlab and simulink. *In Workshop at the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC WC)*.
- COLEMAN, C. P. *et al.* (1997). *A survey of theoretical and experimental coaxial rotor aerodynamic research*, volume 3675.
- COLEMAN, T. F. et LI, Y. (1996). An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on optimization*, 6(2):418–445.
- COMBETTES, C. (2016). *Estimation de la direction de marche à partir de capteurs inertiels et magnétiques portés dans la main*. phdthesis, Sciences & Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM).
- COWAN, G. (1998). *Statistical data analysis*. Oxford University Press.
- CRASSIDIS, J. L., MARKLEY, F. L. et CHENG, Y. (2007). Survey of nonlinear attitude estimation methods. *Journal of guidance control and dynamics*, 30(1):12.
- CRUL, T. (2016). Etude de la propulsion d'un drone. *Revue Scientifique des Ingénieurs Industriels*, 30.
- DAVISON, E. (1976). The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 21(1):25–34.
- de LANEROLLE, T. (2015). The dronecode foundation aims to keep uavs open. <https://www.dronecode.org/>. Accessed : 2017-08-10.
- DELVAUX, M. (2016). *Projet de rapport contenant des recommandations à la commission concernant des règles de droit civil sur la robotique (2015/2103(inl))*.
- DIEBEL, J. (2006). Representing attitude : Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, 58(15-16):1–35.
- DOBRE, S. (2010). *Analyses de sensibilité et d'identifiabilité globales. Application à l'estimation de paramètres photophysiques en thérapie photodynamique*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I.
- DOROBANTU, A., SEILER, P. J. et BALAS, G. J. (2013). Validating uncertain aircraft simulation models using flight test data. *In AIAA Atmospheric Flight Mechanics (AFM) Conference*, page 4984.

- DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P. et FRANCIS, B. A. (1989). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847.
- DRELA, M. (1989). Xfoil : An analysis and design system for low reynolds number airfoils. In *Low Reynolds number aerodynamics*, pages 1–12. Springer.
- DROUOT, A. (2013). *Stratégies de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile miniature*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine.
- DROUOT, A., RICHARD, E. et BOUTAYEB, M. (2012). An approximate backstepping based trajectory tracking control of a gun launched micro aerial vehicle. In *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*.
- DROUOT, A., RICHARD, E. et BOUTAYEB, M. (2014). Hierarchical backstepping-based control of a gun launched mav in crosswinds : Theory and experiment. *Control Engineering Practice*, 25:16–25.
- DVOŘÁK, J., de LELLIS, M. et HURÁK, Z. (2011). Advanced control of quadrotor using eigenaxis rotation. In *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, pages 153–158. IEEE.
- ELKAIM, G. H., LIE, F. A. P. et GEBRE-EGZIABHER, D. (2015). Principles of guidance, navigation, and control of uavs. In *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, pages 347–380. Springer.
- FANKHAUSER, P., BOUABDALLAH, S., LEUTENEGGER, S. et SIEGWART, R. (2011). Modeling and decoupling control of the coax micro helicopter. In *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2223–2228. IEEE.
- FLEISCHMANN, S., THEODOULIS, S., LAROCHE, E., WALLNER, E. et HARCAUT, J.-P. (2017). Controller design point selection for linearized gain scheduling. In *American Control Conference (ACC)*, pages 1574–1579. IEEE.
- FRANCESCHINI, N., PICHON, J.-M., BLANES, C. et BRADY, J. (1992). From insect vision to robot vision [and discussion]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 337(1281):283–294.
- FUSINI, L., JOHANSEN, T. A. et FOSSEN, T. I. (2017). Dead reckoning of a fixed-wing uav with inertial navigation aided by optical flow. In *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1250–1259. IEEE.
- GARNIER, H., GILSON, M., BASTOGNE, T. et MENSLER, M. (2008). The conssid toolbox : A software support for data-based continuous-time modelling. In *Identification of continuous-time models from sampled data*, pages 249–290. Springer.
- GARNIER, H., GILSON, M. et ZHENG, W. (2000). A bias-eliminated least-squares method for continuous-time model identification of closed-loop systems. *International Journal of Control*, 73(1):38–48.
- GASSMANN, V., DROUOT, A., CHAUFFAUT, C., ROUSSEL, E., CHANGEY, S., GNEMMI, P., RICHARD, E., BOUTAYEB, M. et LOZANO, R. (2013). Control of a gun-launched MAV for scene observation. In *2nd IFAC Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS), Compiègne, France*, volume 2, pages 187–192.
- GILSON, M. et GARNIER, H. (2017). Direct continuous-time approaches to system identification. In *Spring School, CRAN*.
- GILSON, M. et VAN DEN HOF, P. (2005). Instrumental variable methods for closed-loop system identification. *Automatica*, 41(2):241–249.

- GNEMMI, P., CHANGEY, S., MEDER, K., ROUSSEL, E., REY, C., STEINBACH, C. et BERNER, C. (2017a). Conception and manufacturing of a projectile-drone hybrid system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 22(2):940–951.
- GNEMMI, P., CHANGEY, S., WEY, P., ROUSSEL, E., REY, C., BOUTAYEB, M. et LOZANO, R. (2017b). Flight phases with tests of a projectile-drone hybrid system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology (TCST)*, PP:1–15.
- GNEMMI, P. et HAERTIG, J. (2008). Concept of a gun launched micro air vehicle. *In Proceedings of 26th AIAA Applied Aerodynamics Conference. AIAA, Honolulu.*
- GNEMMI, P., MEDER, K. et REY, C. (2011). Aerodynamic performances of a micro air vehicle based on two coaxial counter-rotating rotors. *ANSYS Conference and 29th CADFEM Users' Meeting 2011.*
- GNEMMI, P., MEDER, K. et REY, C. (2012). Aerodynamic performance of a gun launched micro air vehicle. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 4(4):251–272.
- GOPPERT, J., YANTEK, S. et HWANG, I. (2017). Invariant kalman filter application to optical flow based visual odometry for uavs. *In Ninth International Conference on Ubiquitous and Future Networks (ICUFN)*, pages 99–104. IEEE.
- GREWALL, M. S. et ANDREWS, A. P. (2001). *Kalman filtering : theory and practice using MATLAB, 2<sup>nd</sup> Edition.* Wiley.
- GUERRERO-CASTELLANOS, J., MARCHAND, N., HABLY, A., LESECQ, S. et DELAMARE, J. (2011). Bounded attitude control of rigid bodies : Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice*, 19(8):790–797.
- HABLY, A. et MARCHAND, N. (2007). Global stabilization of a four rotor helicopter with bounded inputs. *In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 129–134. IEEE.
- HAMEL, P. G. et JATEGAONKAR, R. V. (1996). Evolution of flight vehicle system identification. *Journal of aircraft*, 33(1):9–28.
- HAMEL, T. et MAHONY, R. (2006). Attitude estimation on so [3] based on direct inertial measurements. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2170–2175. IEEE.
- HEFFLEY, R. K., BOURNE, S. M., CURTISS JR, H. C., HINDSON, W. S. et HESS, R. A. (1986). Study of helicopterroll control effectiveness criteria.
- HÉRISSÉ, B. (2010). *Asservissement et Navigation Autonome d'un drone en environnement incertain par flot optique.* Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis.
- HONEGGER, D., MEIER, L., TANSKANEN, P. et POLLEFEYS, M. (2013). An open source and open hardware embedded metric optical flow CMOS camera for indoor and outdoor applications. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1736–1741. IEEE.
- HUA, M.-D., HAMEL, T., MORIN, P. et SAMSON, C. (2013). Introduction to feedback control of underactuated vtolvehicles : A review of basic control design ideas and principles. *IEEE Control Systems*, 33(1):61–75.
- HUANG, H.-M., PAVEK, K., NOVAK, B., ALBUS, J. et MESSIN, E. (2005). A framework for autonomy levels for unmanned systems (alfus). *Proceedings of the AUVSI's Unmanned Systems North America*, pages 849–863.



- HURZELER, C. (2013). *Modeling and Design of Unmanned Rotorcraft Systems for Contact Based Inspection*. Thèse de doctorat, Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 21083.
- JACOME, A., PUECH, C., RACLOT, D., BAILLY, J.-S. et ROUX, B. (2008). Extraction d'un modèle numérique de terrain à partir de photographies par drone. *Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, Cépadués Editions*, 13:79–99.
- JATEGAONKAR, R. (1993). A comparison of output error and filter error methods from aircraft parameter estimation results. *In Proceedings of the NAL-DLR Symposium on System Identification, DLR-Mitt*, pages 93–1463.
- JATEGAONKAR, R. (2006). *Flight vehicle system identification : a time domain methodology*, volume 216. AIAA, Reston, VA, USA.
- JOHNSON, J. P., EHSANI, M. et GUZELGUNLER, Y. (1999). Review of sensorless methods for brushless DC. *In IEEE Industry Applications Conference*, volume 1, pages 143–150. IEEE.
- JOHNSON, W. (1980). Comparison of calculated and measured helicopter rotor lateral flapping angles. *NASA Technical Memorandum 81213*.
- KAI, J.-M., ALLIBERT, G., HUA, M.-D. et HAMEL, T. (2017). Nonlinear feedback control of quadrotors exploiting first-order drag effects. *In 20th IFAC World Congress*.
- KAYUKOV, D. et KONZE, B. (2011). Project report : Alternative open source ESC firmware designed for use with multicopter. <https://code.google.com/p/wii-esc/>.
- KENDOUL, F. (2012). Survey of advances in guidance, navigation, and control of unmanned rotorcraft systems. *Journal of Field Robotics*, 29(2):315–378.
- KHOSRAVIAN, A., TRUMPF, J., MAHONY, R. et HAMEL, T. (2015). Recursive attitude estimation in the presence of multi-rate and multi-delay vector measurements. *In American Control Conference (ACC)*, pages 3199–3205. IEEE.
- KIM, H., JORDAN, M. I., SASTRY, S. et NG, A. (2003). Autonomous helicopter flight via reinforcement learning. *In Advances in neural information processing systems*, page None.
- KIM, H. W. et BROWN, R. E. (2008). Modelling the aerodynamics of coaxial helicopters—from an isolated rotor to a complete aircraft. *In EKC2008 Proceedings of the EU-Korea Conference on Science and Technology*, pages 45–59. Springer.
- KIRBY, S. et KONZE, B. (2011). Project report : TGY - open source firmware for atmega-based brushless ESCs. <https://github.com/sim-/tgy>.
- KIRIENKO, P., RAMENSKY, D. et KROL, A. (2015). Efficient BLDC controller for critical UAV applications. *In International Micro Air Vehicles Conference and Flight Competition (IMAV)*, Aachen, Germany.
- KLEIN, V. et MORELLI, E. A. (2006). *Aircraft system identification : theory and practice*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Reston, Va, USA.
- KOEHL, A., BOUTAYEB, M., RAFARALAHY, H. et MARTINEZ, B. (2010a). Wind-disturbance and aerodynamic parameter estimation of an experimental launched micro air vehicle using an EKF-like observer. *In Conference on Decision and Control*, pages 6383–6388. IEEE.
- KOEHL, A., RAFARALAHY, H., MARTINEZ, B. et BOUTAYEB, M. (2010b). Modeling and identification of a launched micro air vehicle : design and experimental results. *In AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*.

- KOEHL, A., RAFARALAHY, H., MARTINEZ, B. et BOUTAYEB, M. (2012). *Modélisation, observation et commande d'un drone miniature à birotor coaxial*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré.
- KOJIO, J., ISHIBASHI, H., INOUE, R., USHIDA, S. et OKU, H. (2014). MIMO closed-loop subspace model identification and hovering control of a 6-DOF coaxial miniature helicopter. *In SICE Annual Conference*, pages 1679–1684. IEEE.
- KOLLÁR, I., PINTELON, R. et SCHOUKENS, J. (2006). Frequency domain system identification toolbox for matlab : Characterizing nonlinear errors of linear models. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(1):726–731.
- KONRAD, T., BREUER, M., ENGELHARDT, T. et ABEL, D. (2017). State estimation for a multirotor using tight-coupling of gnss and inertial navigation. *In World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC WC)*.
- KORR, A. L. et HYER, P. (1962). A trifilar pendulum for the determination moments of inertia. Rapport technique, Frankford arsenal, research and development group, Pitman-Dunn Laboratories, Philadelphia 37, PA.
- LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. et WRIGHT, P. E. (1998). Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147.
- LAM, T. Y. (2004). *Introduction To Quadratic Forms Over Fields (Graduate Studies in Mathematics)*. Amer Mathematical Society.
- LANCZOS, C. (1988). *Applied Analysis*, volume Prentice-Hall Mathematics Series. Prentice Hall, inc.
- LANDAU, I. D. (2002). *Commande des Systèmes : Conception, Identification et Mise en Oeuvre*. Hermès Science.
- LAROCHE, E. (2010). Cours de commande optimale. *Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, Master Images, Robotique et Ingénierie pour le Vivant*.
- LAROCHE, E. (2016). Cours de commande robuste. *Université de Strasbourg, Télécom Physique Strasbourg, Master Images, Robotique et Ingénierie pour le Vivant*.
- LAURAIN, V., TOTH, R., GILSON, M. et GARNIER, H. (2011). Direct identification of continuous-time linear parameter-varying input/output models. *IET Control Theory Applications*, 5(7):878–888.
- LEISHMAN, J. G. (2006). *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge University Press.
- LIM, H., PARK, J., LEE, D. et KIM, H. J. (2012). Build your own quadrotor : Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3):33–45.
- LJUNG, L. (1999). *System Identification : Theory for the User, PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series*. Prentice Hall, New Jersey.
- LJUNG, L. (2008). *System Identification Toolbox 7 : Getting Started Guide*. The MathWorks.
- MADGWICK, S. O., HARRISON, A. J. et VAIDYANATHAN, R. (2011). Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm. *In IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR)*, pages 1–7. IEEE.
- MAHONY, R. et HAMEL, T. (2012). Modelling, state estimation and vision based control of aerial robotic vehicles. *In European Embedded Control Institute (EECI) Graduate School on Control*.

- MAHONY, R., HAMEL, T. et PFLIMLIN, J.-M. (2005). Complementary filter design on the special orthogonal group  $so(3)$ . In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 1477–1484. IEEE.
- MALY, T. et PETZOLD, L. R. (1996). Numerical methods and software for sensitivity analysis of differential-algebraic systems. *Applied Numerical Mathematics*, 20(1-2):57–79.
- MARKLEY, F. L. (2004). Multiplicative vs. additive filtering for spacecraft attitude determination. *Dynamics and Control of Systems and Structures in Space*, (467-474).
- MATSUI, N. et SHIGYO, M. (1992). Brushless DC motor control without position and speed sensors. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 28(1):120–127.
- MEIER, L., CAMACHO, J., GODBOLT, B., GOPPERT, J., HENG, L., LIZARRAGA, M. *et al.* (2013). Mavlink : Micro air vehicle communication protocol. <http://qgroundcontrol.org/mavlink/start>. Accessed : 2017-08-10.
- MEIER, L., HONEGGER, D. et POLLEFEYS, M. (2015). PX4 : A node-based multithreaded open source robotics framework for deeply embedded platforms. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 6235–6240. IEEE.
- MEIER, L., OES, J., BAPST, R., KABIR, M., MANNHART, D. et PX4 COMMUNITY (2017). PX4 : The professional autopilot. <http://px4.io/>. Accessed : 2017-08-20.
- MELLINGER, D. et KUMAR, V. (2011). Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 2520–2525. IEEE.
- MELLINGER, D., MICHAEL, N., SHOMIN, M. et KUMAR, V. (2011). Recent advances in quadrotor capabilities. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2964–2965. IEEE.
- MERCÈRE, G., OUVARD, R., GILSON, M. et GARNIER, H. (2007). Subspace based methods for continuous-time model identification of mimo systems from filtered sampled data. In *European Control Conference (ECC)*, pages 4057–4064. IEEE.
- MERRIAUX, P., DUPUIS, Y., BOUTTEAU, R., VASSEUR, P. et SAVATIER, X. (2017). A study of vicon system positioning performance. *Sensors*, 17(7):1591.
- METTLER, B. (2003). *Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*. Springer, 1 édition.
- METTLER, B., TISCHLER, M. B. et KANADE, T. (2002). System identification modeling of a small-scale unmanned rotorcraft for flight control design. *Journal of the American Helicopter Society*, 47(1):50–63.
- MONTGOMERY, J. F. et BEKEY, G. A. (1998). Learning helicopter control through "teaching by showing". In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 4, pages 3647–3652. IEEE.
- MORELLI, E. A. (1999). Flight test of optimal inputs and comparison with conventional inputs. *Journal of aircraft*, 36(2).
- NGATCHOU, P., ZAREI, A. et EL-SHARKAWI, A. (2005). Pareto multi objective optimization. In *Proceedings of the 13th international conference on Intelligent systems application to power systems, 2005*, pages 84–91. IEEE.
- NICHOLS, R., REICHERT, R. et RUGH, W. (1993). Gain scheduling for  $\mathcal{H}_\infty$  controllers : a flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2):69–79.

- NINNESS, B., WILLS, A. et MILLS, A. (2013). Unit : A freely available system identification toolbox. *Control Engineering Practice*, 21(5):631–644.
- ORTIZ A. SANTOS, N., LAROCHE, E., KIEFER, R. et DURAND, S. (2017). Controller tuning strategy for quadrotor mav carrying a cable-suspended load. *In International Micro Air Vehicle Conference and Flight Competition (IMAV)*.
- PADFIELD, G. D. (2008). *Helicopter flight dynamics*. Wiley-Blackwell, 2nd édition.
- PERASSO, A. (2009). *Identifiabilité de paramètres pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Application à la dynamique des populations*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud-Paris XI.
- PITTELKAU, M. E. (2003). Rotation vector in attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(6):855–860.
- POLAK, A. (2014). Low-cost image-assisted inertial navigation system for a micro air vehicle. *Arizona State University*.
- PX4 DEVELOPERS (2017). PX4 development guide. <https://dev.px4.io/en/>. Accessed : 2017-08-20.
- QUIGLEY, M., CONLEY, K., GERKEY, B., FAUST, J., FOOTE, T., LEIBS, J., WHEELER, R. et NG, A. Y. (2009). Ros : an open-source robot operating system. *In ICRA workshop on open source software*, volume 3, page 5. Kobe.
- RAKOTOMAMONJY, T., TRISTRANT, D. et CABUT, A. (2012). Fault detection and reconfiguration applied to a helicopter washplate actuator. *In 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*.
- RALETZ, R. (1995). *Théorie élémentaire de l'hélicoptère*. Cepadues.
- RAZALI, N. M., WAH, Y. B. et al. (2011). Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. *Journal of statistical modeling and analytics*, 2(1):21–33.
- REMES, B., ESDEN-TEMPSKI, P., VAN TIENEN, F., SMEUR, E., DE WAGTER, C. et DE CROON, G. (2014). *Lisa-s 2.8 g autopilot for GPS-based flight of MAVs*. Delft University of Technology.
- RISEBOROUGH, P. (2015). Application of data fusion to aerial robotics. *In Embedded Linux Conference (ELC)*. The Linux Foundation.
- ROBINSON, D. C., DOHERTY, E., TSAI, S. et CHUNG, H. (2013). Design and system identification of a micro coaxial helicopter testbed. *In International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 1423–1428. IEEE/ASME.
- ROSA, L., HAMEL, T., MAHONY, R. et SAMSON, C. (2014). Optical-flow based strategies for landing vtol uavs in cluttered environments. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):3176–3183.
- ROUSSEL, E., GASSMANN, V. et LAROCHE, E. (2015). Performance improvement of a motor speed controller for low-cost MAVs. *In CEAS EuroGNC Conference, Toulouse, France*.
- ROUSSEL, E., GASSMANN, V. et LAROCHE, E. (2016a). Modelling and identification of a coaxial birotor UAV from scarce flight data. *In European Control Conference (ECC), Aalborg, DK*.
- ROUSSEL, E., GASSMANN, V. et LAROCHE, E. (2017). Accuracy-simplicity trade-off for miniature helicopter models : A comparative study based on flight data. *Control Engineering Practice (CEP)*. Manuscript submitted for publication.

- ROUSSEL, N., DARROZES, J., HA, C., BONIFACE, K., FRAPPART, F., RAMILLIEN, G., GAVART, M., Van de VYVERE, L., DESENFANS, O. et BAUP, F. (2016b). Multi-scale volumetric soil moisture detection from gnss snr data : Ground-based and airborne applications. *In IEEE Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace)*, pages 573–578. IEEE.
- SADEGHZADEH, I. et ZHANG, Y. (2011). A review on fault-tolerant control for unmanned aerial vehicles (uavs). *Infotech@ Aerospace, St. Louis, MO*.
- SCHAFROTH, D., BERMES, C., BOUABDALLAH, S. et SIEGWART, R. (2010). Modeling, system identification and robust control of a coaxial micro helicopter. *Control Engineering Practice*, 18(7):700–711.
- SECK, H. H. (2016). Marines testing out world's smallest drone. <https://www.defensetech.org/2016/09/27/marines-are-testing-out-the-worlds-smallest-drone/>. Accessed : 2017-06-10.
- SEDDON, J. M. et NEWMAN, S. (2011). *Basic helicopter aerodynamics*, volume 40. Wiley. com.
- SEDOGLAVIC, A. (2001). A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time. *In International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 309–316. ACM press.
- SÈVE, F., THEODOULIS, S., WERNERT, P., ZASADZINSKI, M. et BOUTAYEB, M. (2014). Pitch/yaw channels control design for a 155mm projectile with rotating canards, using a  $h_{\infty}$  loop-shaping design procedure. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- SHAMPINE, L. F. et REICHELT, M. W. (1997). The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, 18(1):1–22.
- SHEN, S., MICHAEL, N. et KUMAR, V. (2011). Autonomous multi-floor indoor navigation with a computationally constrained mav. *In Robotics and automation (ICRA), 2011 IEEE international conference on*, pages 20–25. IEEE.
- SHUSTER, M. D. (1993). The quaternion in kalman filtering. *Advances in the Astronautical Sciences*, 85:25–37.
- SKAUG, S. (2012). Project report : BLHeli for brushless ESC firmware, esc. <https://github.com/bitdump/BLHeli>. Accessed : 2014-10-090.
- SKOGESTAD, S. et POSTLETHWAITE, I. (2007). *Multivariable feedback control : analysis and design*, volume 2. Wiley New York.
- SÖDERSTRÖM, T. D. et STOICA, P. G. (1983). *Instrumental variable methods for system identification*, volume 57. Springer.
- SPIEGELHALTER, D. J., BEST, N. G., CARLIN, B. P. et VAN DER LINDE, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 64(4):583–639.
- STRUB, G. (2016). *Modeling, Identification and Control of a Guided Projectile in a Wind Tunnel*. Thèse de doctorat.
- STRUB, G., THEODOULIS, S., GASSMANN, V., DOBRE, S. et BASSET, M. (2015). Pitch axis control for a guided projectile in a wind tunnel-based hardware-in-the-loop setup. *In AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, pages 2015–0153.
- STUELPNAGEL, J. (1964). On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM review*, 6(4):422–430.

- SUGAWARA, Y. et SHIMADA, A. (2014). Altitude control using limited pole placement on coaxial-helicopter. *In Advanced Motion Control (AMC), 2014 IEEE 13th International Workshop on*, pages 506–511. IEEE.
- SYSTEMS, B. (2017). Sensintel coyote. <http://www.uavglobal.com/sensintel-coyote/>. Accessed : 2017-08-10.
- SZAFRANSKI, G. et CZYBA, R. (2011). Different approaches of pid control uav type quadrotor. *In International Micro Air Vehicle conference and competitions 2011 (IMAV 2011), t Harde, The Netherlands, September 12-15, 2011*. Delft University of Technology and Thales.
- TANG, S., ZHENG, Z., QIAN, S. et ZHAO, X. (2014). Nonlinear system identification of a small-scale unmanned helicopter. *Control Engineering Practice*, 25:1–15.
- TARBOURIECH, S., VALMÓRBIDA, G., GARCIA, G. et BIANNIC, J.-M. (2008). Stability and performance analysis for linear systems with actuator and sensor saturations subject to unmodeled dynamics. *In American Control Conference, 2008*, pages 401–406. IEEE.
- THEIL, H. (1970). Economic forecasts and policy.
- THEODOULIS, S., GASSMANN, V., BRUNNER, T. et WERNERT, P. (2013). Fixed structure robust control design for the 155mm canard-guided projectile roll-channel autopilot. *In 21<sup>st</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- THEWLIS, D., BISHOP, C., DANIELL, N. et PAUL, G. (2011). *A comparison of two commercially available motion capture systems for gait analysis : High end vs low-cost*. International Society of Biomechanics.
- TITTERTON, D. et WESTON, J. L. (2004). *Strapdown inertial navigation technology*, volume 17. IET.
- TOGNON, M., YÜKSEL, B., BUONDONNO, G. et FRANCHI, A. (2017). Dynamic decentralized control for protocentric aerial manipulators. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*.
- TÓTH, R. (2010). *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*, volume 403. Springer Verlag.
- TRIDGELL, A. (2015). Dronecode project and ardupilot with linux. *In Embedded Linux Conference (ELC)*. The Linux Foundation.
- VALAVANIS, K. P. (2007). *Advances in unmanned aerial vehicles : state of the art and the road to autonomy*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- van BLYENBURGH, P. (2016). *2016 RPAS (Remotely Piloted Aircraft Systems) Yearbook : The Global Perspective*. Paris, France : Blyenburgh & Co.
- VRDOLJAK, M., VIERTLER, F., HAJEK, M. et HELLER, M. (2017). Helicopter pilot model for pitch attitude tracking task. *In Euro GNC 2017-4th CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation & Control*.
- WALTER, E. et PRONZATO, L. (1997). *Identification of parametric models from Experimental Data*, volume 8. Springer Verlag New-York.
- WANG, B., WANG, F., CHEN, B. M. et LEE, T. H. (2012a). Robust flight control system design for an indoor miniature coaxial helicopter. *In Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on*, pages 2918–2924. IEEE.
- WANG, F., CUI, J., CHEN, B. M. et LEE, T. H. (2014). Flight dynamics modeling of coaxial rotorcraft UAVs. *In Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, pages 1217–1256. Springer.

- WANG, F., PHANG, S. K., CUI, J., CAI, G., CHEN, B. M. et LEE, T. H. (2012b). Nonlinear modeling of a miniature fixed-pitch coaxial UAV. *In American Control Conference (ACC), 2012*, pages 3863–3870. IEEE.
- YOUNG, P. C. (2011). *Recursive estimation and time-series analysis : An introduction for the student and practitioner*. Springer Science & Business Media.
- YOUNG, P. C. et TAYLOR, C. J. (2012). Recent developments in the captain toolbox for matlab. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(16):1838–1843.
- YÜKSEL, B., MAHBOUBI, S., SECCHI, C., BÜLTHOFF, H. H. et FRANCHI, A. (2015). Design, identification and experimental testing of a light-weight flexible-joint arm for aerial physical interaction. *In Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on*, pages 870–876. IEEE.
- ZHOU, K. et DOYLE, J. C. (1998). *Essentials of robust control*, volume 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- ZIPFEL, P. H. (2007). *Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics*. AIAA, second édition.





**Emmanuel ROUSSEL**

**CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION, L'IDENTIFICATION ET LA COMMANDE  
D'UN HÉLICOPTÈRE MINIATURE**

**Résumé**

La stabilisation et l'automatisation du vol de tout véhicule aérien nécessite la mise en œuvre d'algorithmes de commande. La synthèse et la simulation des lois de commande reposent sur un modèle mathématique du véhicule, qui doit être de complexité et de précision appropriées.

Cette thèse présente une méthodologie complète d'identification appliquée à un hélicoptère coaxial miniature. L'étude théorique de son comportement en vol permet d'établir plusieurs modèles basés sur la mécanique du vol, qui diffèrent par les phénomènes aérodynamiques pris en compte. Ils sont identifiés, comparés et validés grâce à des données de vol, mettant en évidence l'importance de certains phénomènes dans la précision du modèle.

Différentes lois de commande sont alors étudiées et évaluées en simulation puis par des expérimentations sur un prototype. Les résultats obtenus sont conformes aux simulations numériques, validant ainsi l'ensemble de la démarche.

**Mots-clés :** *hélicoptère, structure coaxiale, mécanique du vol, modélisation, identification des systèmes, estimation de paramètres, commande en cascade, autopilote*

**Abstract**

Control algorithms are at the heart of the stability and automatic flight capabilities of any aerial vehicle. Synthesis and simulation of control laws are based on a mathematical model of the vehicle, which must be a trade-off between simplicity and accuracy.

This work presents a complete system identification methodology applied on a miniature coaxial helicopter. Based on flight mechanics and aerodynamics, several models are built. They differ in the aerodynamic phenomena taken into account. They are identified, compared and validated thanks to flight data, highlighting important phenomena in the accuracy of the model.

Several flight control strategies are then studied and evaluated through simulations and experiments with a prototype. The results are in accordance with numerical simulations, thus validating the whole approach.

**Keywords :** *helicopter, coaxial structure, flight mechanics, modeling, system identification, parameter estimation, cascaded control, autopilot*