

ANALYSE ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DU
RETOURNEMENT TEMPOREL ET DE LA DIFFRACTION
MULTIPLE

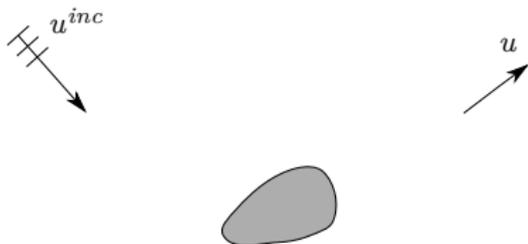
Bertrand Thierry

Institut Élie Cartan de Nancy, Projet INRIA CORIDA, ANR MicroWave

Thèse encadrée par **X. Antoine** et **K. Ramdani**

Mardi 20 septembre 2011

Diffraction simple


 Ω^-
 $\Omega^- = \text{un seul obstacle}$

Champ diffracté u , solution de

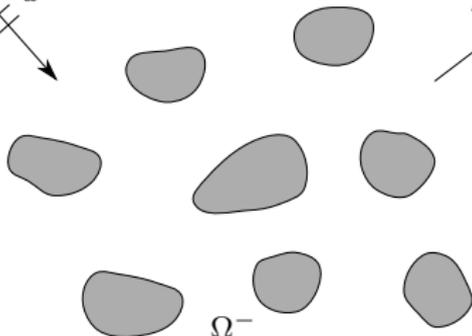
$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}) \\ u = -u^{inc} & (\partial\Omega^-) \\ u \text{ sortant.} \end{cases}$$



Diffraction simple


 Ω^-
 $\Omega^- = \text{un seul obstacle}$

Diffraction multiple


 Ω^-

$$\Omega^- = \bigcup_{p=1}^M \Omega_p^-$$

Champ diffracté u , solution de

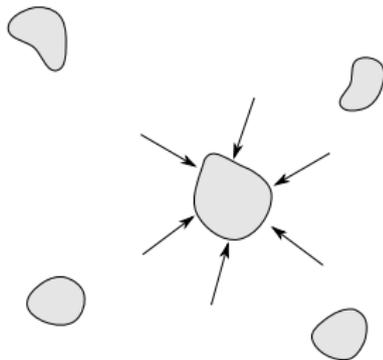
$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}) \\ u = -u^{inc} & (\partial\Omega^-) \\ u \text{ sortant.} \end{cases}$$

Exemples d'applications :

- Propagation d'ondes Wi-Fi dans un environnement urbain
- Propagation d'ondes dans des cristaux photoniques

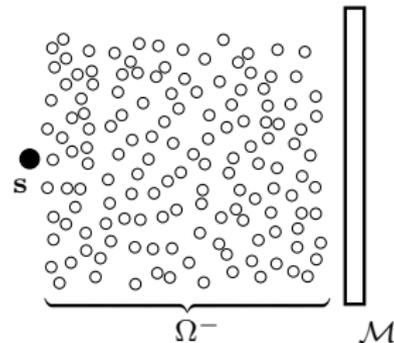


Problèmes inverses



Méthode DORT - Focalisation sélective sur des petits obstacles

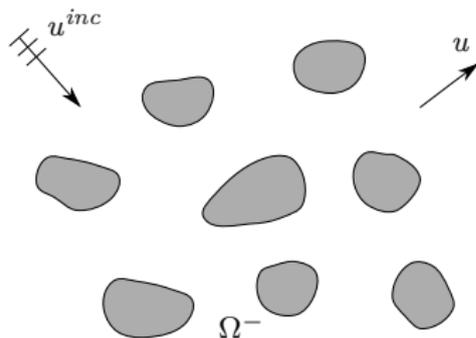
- Étude théorique en électromagnétisme (SIAM J. App. Math., 2008)
- Étude numérique en acoustique $2D$



Reconstruction d'une source acoustique ponctuelle en milieu multi-diffusif

- Étude théorique en milieu homogène
- Étude numérique en milieu hétérogène et déterministe

Problème direct



Champ diffracté u , solution de

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^-}) \\ u = -u^{inc} & (\partial\Omega^-) \\ u \text{ sortant.} \end{cases}$$

Contributions apportées à cette thématique

- Comprendre les propriétés spectrales de l'opérateur de simple couche en milieu dilué et dense à basse fréquence
- Effets du préconditionnement de la diffraction simple sur les équations intégrales usuelles en diffraction multiple

Plan

- 1 Problèmes inverses en diffraction multiple
 - Introduction au retournement temporel
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage faible
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage fort
- 2 Contributions à la résolution itérative par équation intégrale du problème de diffraction multiple
 - Introduction
 - Quelques propriétés des équations intégrales en diffraction multiple
 - Étude du préconditionnement par la diffraction simple

- 1 Problèmes inverses en diffraction multiple
 - Introduction au retournement temporel
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage faible
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage fort
- 2 Contributions à la résolution itérative par équation intégrale du problème de diffraction multiple
 - Introduction
 - Quelques propriétés des équations intégrales en diffraction multiple
 - Étude du préconditionnement par la diffraction simple

Quelques méthodes de résolution de problèmes inverses

- Linear sampling method (Colton et Kirsch) / Factorization method (Kirsch)
 - Reconstruction d'obstacles étendus
- Gradient topologique
- MUSIC "MULTiple Signal Classification"
 - Détection/localisation de petits obstacles
 - Émetteurs/récepteurs ponctuels

Cadre de ma thèse

Technique du retournement temporel

- Détection/localisation de petits obstacles (non étendus)
- Reconstruction d'une source acoustique

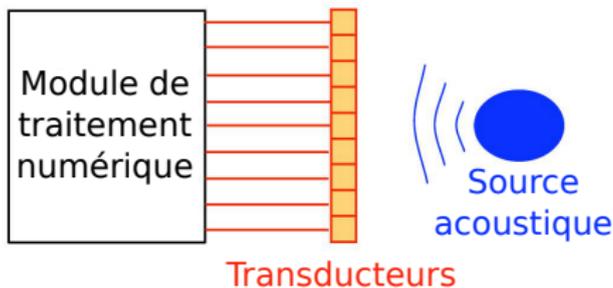
Retournement temporel

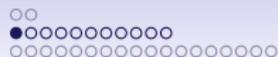
Principe

Utiliser la réversibilité de l'équation des ondes en milieu **non dissipatif** pour rétro-propager une onde dans son milieu d'origine, afin d'obtenir des informations sur ce milieu (sources, obstacles, ...).

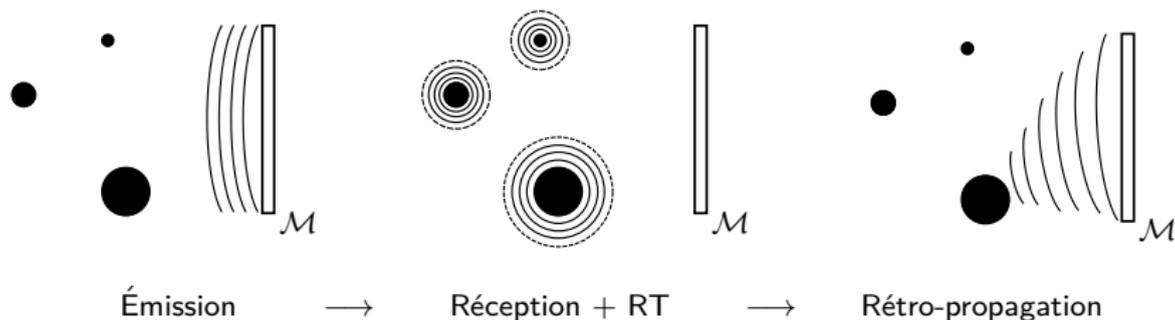
Miroirs à Retournement Temporel (MRT)

Appareils conçus par Mathias FINK constitués de transducteurs piézo-électriques pouvant alternativement émettre ou mesurer une onde.





Méthode DORT



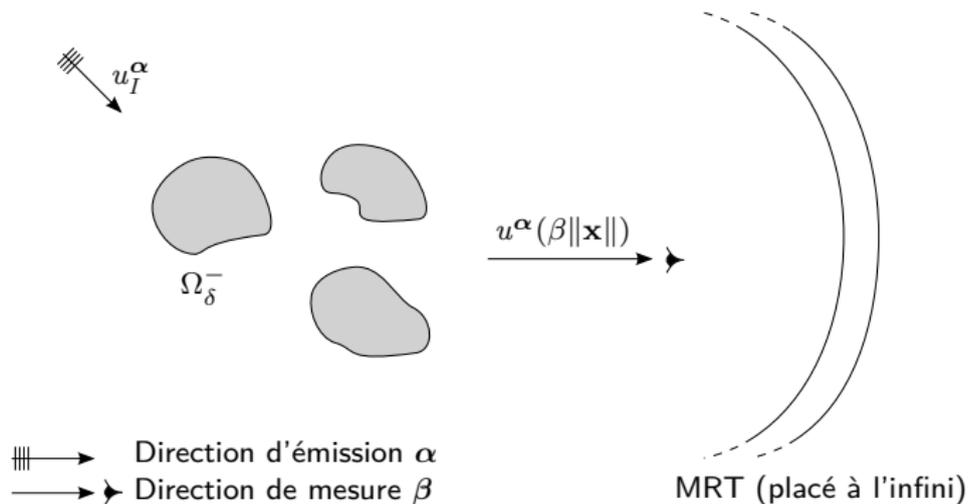
Principe de la méthode DORT (Fink, Prada, 1996)

Utiliser les éléments propres de la matrice de RT pour dénombrer les obstacles et focaliser sélectivement des ondes sur ces obstacles.

(DORT = Diagonalisation de l'Opérateur de Retournement Temporel)

Applications

- Médecine : destruction de calculs rénaux
- Imagerie, contrôle non destructif



Cadre de notre étude

- MRT **non intrusif**, placé à l'infini et entourant complètement les obstacles
- Régime **harmonique** $\mathcal{U}(\mathbf{x}, t) = \Re(u(\mathbf{x})e^{-ikct})$
- **RT** \iff conjugaison de phase

Champs incident, diffracté et lointain

Acoustique

Électromagnétisme

Onde plane de direction $\alpha \in S^2$

$$u_I^\alpha(\mathbf{x}) = e^{ik\alpha \cdot \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{f} \in L_t^2(S^2) = \left\{ \mathbf{f} \in (L^2(S^2))^3 / \forall \alpha, \mathbf{f}(\alpha) \cdot \alpha = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I^{\alpha, \mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\alpha) e^{ik\alpha \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_I^{\alpha, \mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (\alpha \times \mathbf{f}(\alpha)) e^{ik\alpha \cdot \mathbf{x}} \end{cases}$$

Champ diffracté

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u^\alpha = 0 & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}) \\ u^\alpha = -u_I^\alpha & (\Gamma) \\ u^\alpha \text{ sortant} \end{cases} \quad \left\| \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}^{\alpha, \mathbf{f}} = ik\mathbf{H}^{\alpha, \mathbf{f}} & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}) \\ \text{rot } \mathbf{H}^{\alpha, \mathbf{f}} = -ik\mathbf{E}^{\alpha, \mathbf{f}} & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}) \\ \mathbf{E}^{\alpha, \mathbf{f}} \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_I^{\alpha, \mathbf{f}} \times \mathbf{n} & (\Gamma) \\ \mathbf{H}^{\alpha, \mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{H}_I^{\alpha, \mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} & (\Gamma) \\ (\mathbf{E}^{\alpha, \mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\alpha, \mathbf{f}}) \text{ sortants} \end{cases}$$

Champ lointain dans la direction $\beta \in S^2$ ($\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$)

$$u^\alpha(\beta\|\mathbf{x}\|) \sim \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|} A(\alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\alpha, \mathbf{f}}(\beta\|\mathbf{x}\|) \sim \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{ik\|\mathbf{x}\|} \mathbf{A}(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)) \\ \mathbf{H}^{\alpha, \mathbf{f}}(\beta\|\mathbf{x}\|) \sim \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{ik\|\mathbf{x}\|} (\beta \times \mathbf{A}(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha))) \end{cases}$$

Opérateur de retournement temporel

Onde de Herglotz de densité ...

$$\dots f \in L^2(S^2) \quad \Bigg\| \quad \dots \mathbf{f} \in L_t^2(S^2)$$

$$u_I(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f(\boldsymbol{\alpha}) u_I^\alpha(\mathbf{x}) \, d\boldsymbol{\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} \mathbf{E}_I^{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}} \, d\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} \mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}} \, d\boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

Opérateur de champ lointain ($\beta \in S^2$)

$$F : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2)$$

$$Ff(\beta) = \int_{S^2} A(\boldsymbol{\alpha}, \beta) f(\boldsymbol{\alpha}) \, d\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{F} : L_t^2(S^2) \longrightarrow L_t^2(S^2)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{f}(\beta) = \int_{S^2} A(\boldsymbol{\alpha}, \beta; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \, d\boldsymbol{\alpha}$$

Formule de réciprocité

$$A(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = A(-\beta, -\boldsymbol{\alpha})$$

$$\mathbf{g}(\beta) \cdot A(\boldsymbol{\alpha}, \beta; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot A(-\beta, -\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{g}(\beta))$$

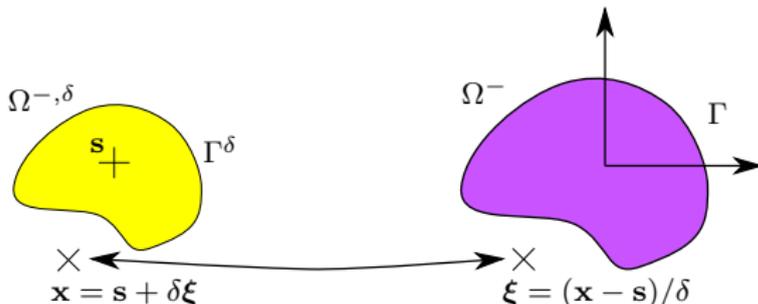
Opérateur de retournement temporel

$$T = F^* F = F F^*$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^* \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^*$$

\implies L'étude du spectre de T (resp. \mathbf{T}) se ramène à celle de F (resp. \mathbf{F})

Un seul obstacle : asymptotique petits objets



Acoustique

$$\Delta + k^2 \longrightarrow \Delta + (k\delta)^2$$

Électromagnétisme

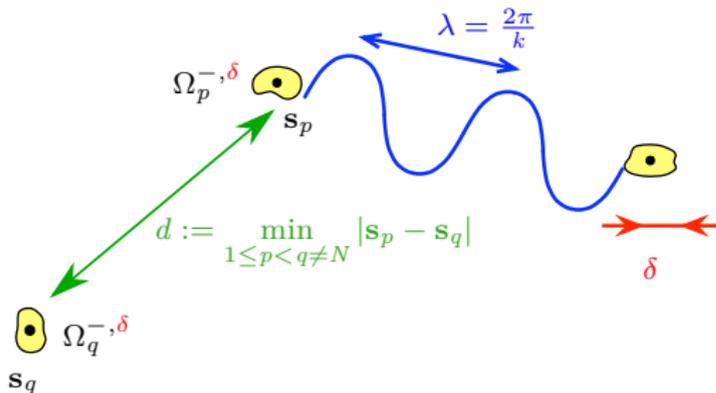
$$\frac{1}{ik} \mathbf{rot} \longrightarrow \frac{1}{i(k\delta)} \mathbf{rot}$$

⇒ L'asymptotique petits obstacles revient à faire une **asymptotique basse fréquence**

Techniques similaires utilisées dans :

- Tomographie : H. Ammari, S. Méfère, M. Vogelius, ...
- Élasticité : M. Bonnet, J. Sokolowski, ...
- Diffraction filaire : X. Claeys, ...

Plusieurs obstacles



À l'aide d'une **formulation intégrale** et lorsque

$$k\delta \rightarrow 0 \text{ et } \delta/d \rightarrow 0,$$

on peut montrer que le comportement asymptotique du champ diffracté (acoustique et électromagnétique) pour de petits obstacles est obtenu par la limite basse fréquence des problèmes de diffraction simple.

⇒ Au premier ordre, les effets de la diffraction multiple peuvent être négligés.

Acoustique : asymptotique du champ lointain

Pour tout $p = 1, \dots, M$, on introduit la capacité C_p de l'obstacle Ω_p^- :

$$C_p = \int_{\Gamma_p} \frac{\partial V_p}{\partial \mathbf{n}} d\gamma_{\mathbf{x}}, \quad \begin{cases} \Delta V_p = 0 & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ V_p = 1 & (\Gamma_p) \\ V_p = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) & \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Lorsque $k\delta \rightarrow 0$ et $\delta/d \rightarrow 0$, l'amplitude de diffraction $A^\delta(\alpha, \beta)$ de u^δ :

$$u^\delta(\beta\|\mathbf{x}\|) = A^\delta(\alpha, \beta) \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|} + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right)$$

a le comportement asymptotique suivant

$$\frac{-4\pi}{\delta} A^\delta(\alpha, \beta) \longrightarrow A^0(\alpha, \beta) := \sum_{p=1}^M C_p \overline{e_p(\alpha)} e_p(\beta),$$

avec $e_p(\beta) = e^{-ik\beta \cdot \mathbf{s}_p}$ = champ lointain d'une onde émise par une source ponctuelle située en \mathbf{s}_p , dans la direction β



Électromagnétisme : asymptotique du champ lointain

Électrique	Magnétique
$\mathcal{P}_p = \Omega_p^- I - \int_{\Gamma_p} \mathbf{x} \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial \mathbf{n}} \right)^T d\gamma_{\mathbf{x}}$	$\mathcal{M}_p = \Omega_p^- I - \int_{\Gamma_p} \mathbf{n} \Psi_p^T d\gamma_{\mathbf{x}}$
$\begin{aligned} \Delta \Phi_p &= 0, & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ \Phi_p &= \mathbf{x} + \mathbf{c}_p, & (\Gamma_p) \\ (\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ telle que } \int_{\Gamma_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \mathbf{n}} &= 0) \\ \Phi_p &= O\left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ ^2}\right) & \ \mathbf{x}\ \rightarrow \infty \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Delta \Psi_p &= 0, & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{n}, & (\Gamma_p) \\ \Psi_p &= O\left(\frac{1}{\ \mathbf{x}\ ^2}\right) & \ \mathbf{x}\ \rightarrow \infty \end{aligned}$

Lorsque $k\delta \rightarrow 0$ et $\delta/d \rightarrow 0$, l'amplitude de diffraction $A^\delta(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha))$ de \mathbf{E}^δ :

$$\mathbf{E}^\delta(\beta \|\mathbf{x}\|) = A^\delta(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)) \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{ik\|\mathbf{x}\|} + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right),$$

a le comportement asymptotique suivant

$$\frac{4\pi}{(ik\delta)^3} A^\delta(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)) \longrightarrow A^0(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)),$$

$$\text{avec } A^0(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)) := \sum_{p=1}^M \beta \times \left[\beta \times (\mathcal{P}_p \mathbf{f}(\alpha)) - \mathcal{M}_p(\alpha \times \mathbf{f}(\alpha)) \right] \overline{e_p(\alpha)} e_p(\beta)$$

Limite des opérateurs de champ lointain

Acoustique

$$F^0 f(\beta) = \int_{S^2} f(\alpha) A^0(\alpha, \beta) d\alpha = \sum_{p=1}^M C_p (f, e_p)_{L^2(S^2)} e_p(\beta).$$

$\implies F^0$ possède M valeurs propres non nulles. Nous avons de plus que

$$F^0 e_p = -C_p e_p + O((kd)^{-1}), \quad kd \rightarrow +\infty,$$

et l'onde de Herglotz de densité e_p est focalisée sur Ω_p^- .

Électromagnétisme

$$\mathbf{F}^0 \mathbf{f}(\beta) = \int_{S^2} \mathbf{A}^0(\alpha, \beta; \mathbf{f}(\alpha)) d\alpha = \sum_{p=1}^M \beta \times \left[\beta \times (\mathcal{P}_p \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p)) - \mathcal{M}_p \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p) \right] e_p(\beta)$$

$$\implies \text{Im } \mathbf{F}^0 \subset \bigoplus_{1 \leq p \leq M} \left\{ (\beta \times (\beta \times \text{Im } \mathcal{P}_p)) \oplus (\beta \times \text{Im } \mathcal{M}_p) \right\}$$

$\implies \mathbf{F}^0$ possède au plus $6M$ valeurs propres non nulles.

Théorème (Antoine, Pinçon, Ramdani, BT, SIAM J. App. Math., 2008)

Pour $p = 1, \dots, M$, on suppose que les tenseurs \mathcal{P}_p et \mathcal{M}_p sont diagonaux dans une base orthonormale $(\mathbf{h}_{p,1}, \mathbf{h}_{p,2}, \mathbf{h}_{p,3})$ et on définit, pour $\ell \in \{1, 2, 3\}$:

$$\forall \beta \in S^2, \quad \begin{cases} \mathbf{f}_{p,\ell}(\beta) = \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{h}_{p,\ell}) e_p(\beta) \\ \mathbf{g}_{p,\ell}(\beta) = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{h}_{p,\ell}) e_p(\beta) \end{cases}$$

Alors, la famille $\{\mathbf{f}_{p,\ell}, \mathbf{g}_{p,\ell} ; 1 \leq \ell \leq 3, 1 \leq p \leq M\}$ est **linéairement indépendante** dans $L_t^2(S^2)$ et, lorsque $kd \rightarrow +\infty$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \mathbf{F}^0 \mathbf{f}_{p,\ell} = -\frac{8\pi}{3} \mu_{p,\ell} \mathbf{f}_{p,\ell} + O((kd)^{-N}) \\ \mathbf{F}^0 \mathbf{g}_{p,\ell} = -\frac{8\pi}{3} \mu'_{p,\ell} \mathbf{g}_{p,\ell} + O((kd)^{-N}) \end{cases}$$

De plus, les fonctions propres approchées $(\mathbf{f}_{p,\ell}, \mathbf{g}_{p,\ell})_{1 \leq \ell \leq 3}$ génèrent des ondes de Herglotz électromagnétiques qui **focalisent sélectivement l'obstacle Ω_p^-** .



Résultats numériques

Configuration idéale (720 angles d'émission/réception)

- Si $\lambda \sim \delta$ alors plus que M v.p. significatives
- Si $\lambda > d$ alors moins que M v.p. significatives (sous-estimation)
- Si $\delta \ll \lambda \ll d$ alors M valeurs propres significatives et focalisation sélective sur les obstacles

Configuration plus réaliste (30 angles d'émission/réception)

Pour le nombre de v.p. significatives de T

- Pas (ou peu) sensible à la position des capteurs ni à la fréquence
- Très sensible au bruit

Concernant la propriété de focalisation sélective

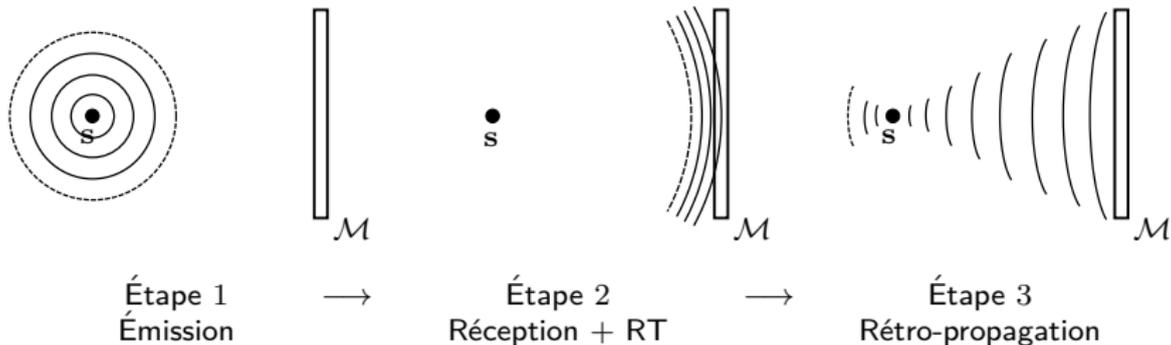
- Sensible à la position des capteurs et à la fréquence
- Pas (ou très peu) sensible au bruit

Perspectives

- Simulations numériques en acoustique et électromagnétisme $3D$
- Étude théorique et numérique en élasticité

Problème inverse considéré

Soient s un point source et \mathcal{M} un MRT.



Hypothèses

- MRT \mathcal{M} non intrusif, continu et épais
- Régime harmonique : RT \iff conjugaison

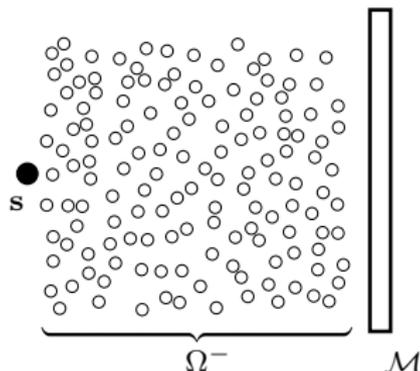
Problème inverse considéré

Plaçons M obstacles Ω_p^- , $p = 1, \dots, M$, entre la source et le MRT.

Domaine occupé par les objets : $\Omega^- = \bigcup_{p=1}^M \Omega_p^-$.

Obstacles :

- Pénétrables (représentés par un indice n)
- Petits par rapport à la longueur d'onde
 $\lambda = 2\pi/k$ (taille $\simeq \lambda/5$)
- M grand ($\simeq 400$)

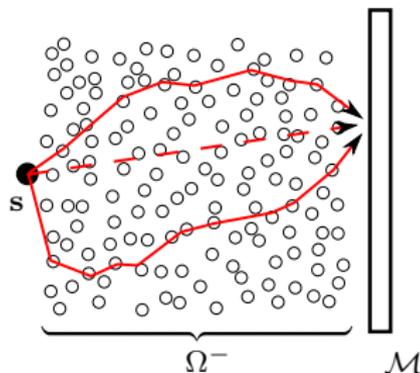


Questions :

- Est-ce que le champ rétro-propagé est toujours focalisé sur le point source ?
- Si oui, la qualité de la focalisation est-elle meilleure ?

Phénomène de super-résolution

- Chemins multiples (“multipathing”)
- MRT reçoit plus d’information
- Amélioration de la précision de la focalisation **en moyenne** dans un milieu aléatoire (l’écart-type pouvant être important)



Travaux mathématiques en super-résolution acoustique

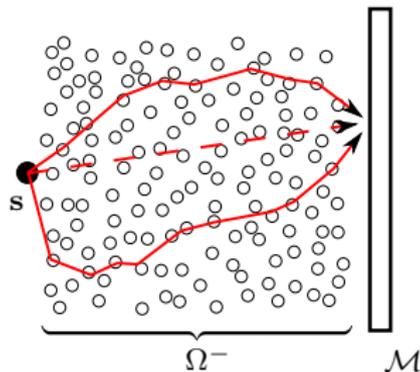
Milieu aléatoire acoustique : [Bal et. al], [Papanicolaou et. al]

Milieu stratifié : [Fouque, Garnier, Papanicolaou, Sølna]

Milieu élastique : [Tsogka, Papanicolaou]

Phénomène de super-résolution

- Chemins multiples (“multipathing”)
- MRT reçoit plus d’information
- Amélioration de la précision de la focalisation **en moyenne** dans un milieu aléatoire (l’écart-type pouvant être important)



But de notre étude

Mettre en évidence ce phénomène dans le cadre d’un modèle EDP déterministe.

Modélisation des 3 étapes du processus de RT

$$\text{Contraste } \mathbf{n} : \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \begin{cases} n & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Étape 1 : émission** de u_E , solution de

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 \mathbf{n}^2) u_E = -\delta_{\mathbf{s}} & (\mathbb{R}^d) \\ u_E \text{ sortant} \end{cases}$$

- **Étape 2 : réception & RT** : $\overline{u_E}|_{\mathcal{M}}$
- **Étape 3 : rétro-propagation** de u_{RE} , solution de

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 \mathbf{n}^2) u_{RE} = -\overline{u_E}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^d) \\ u_{RE} \text{ sortant} \end{cases}$$

Remarque : si $n = 1$ (milieu homogène) alors

- $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{s}, \quad u_E(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$
- $\forall \mathbf{y} \notin \mathcal{M}, \quad u_{RE}(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{M}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})} \, d\mathbf{x}$

Milieu homogène

Fonction de Green en 3D : $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}, \quad u_{RE}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{M}} \frac{\exp(ik\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|\})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} d\mathbf{x}$$

Remarques sur $u_{RE}(\mathbf{y})$:

- Si $\mathbf{y} = \mathbf{s}$, alors $u_{RE}(\mathbf{s})$ **ne dépend pas** de k :

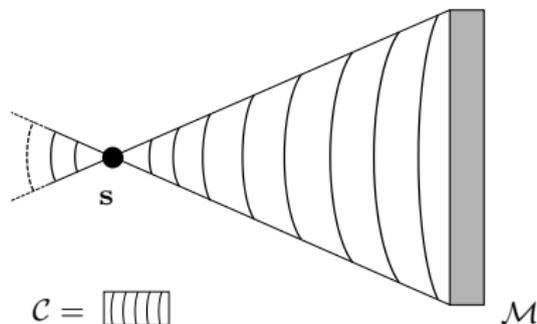
$$u_{RE}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} d\mathbf{x}$$

- Autrement, $u_{RE}(\mathbf{y}) =$ **intégrale oscillante** en fonction de k
 \Rightarrow La méthode de la phase stationnaire nous donne le comportement asymptotique de $u_{RE}(\mathbf{y})$ lorsque $k \rightarrow \infty$

Remarque : cette méthode s'applique en dimension 2 avec un MRT épais.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) \sim \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\sqrt{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Milieu homogène

Proposition (Focalisation de u_{RE})

Quand k tend vers l'infini, nous avons :

- si $\mathbf{y} = \mathbf{s}$, alors $|u_{RE}(\mathbf{y})| = O(k^{-1})$
- si $\mathbf{y} \in C$, alors $|u_{RE}(\mathbf{y})| = O(k^{-3/2})$
- si $\mathbf{y} \notin C$ et $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$, alors $|u_{RE}(\mathbf{y})| = O(k^{-2})$



Milieu hétérogène

Choix de la méthode numérique

- Dimension 2 (\simeq 1 million d'inconnues)
- Éléments finis
- Troncature du domaine infini à l'aide d'une PML

Logiciels (open-source) et solveur

- GMSH (Maillage et Post-processing) et GetDP (solveur éléments finis)
- Solveur direct et parallèle : MUMPS

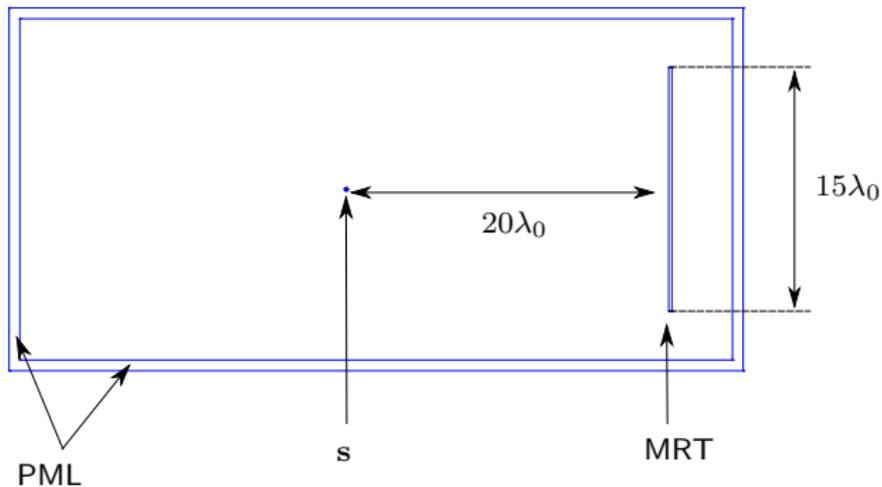
Configuration

Une fréquence :

- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

Paramètres du MRT :

- Ouverture : $15\lambda_0$
- Distance à la source : $20\lambda_0$



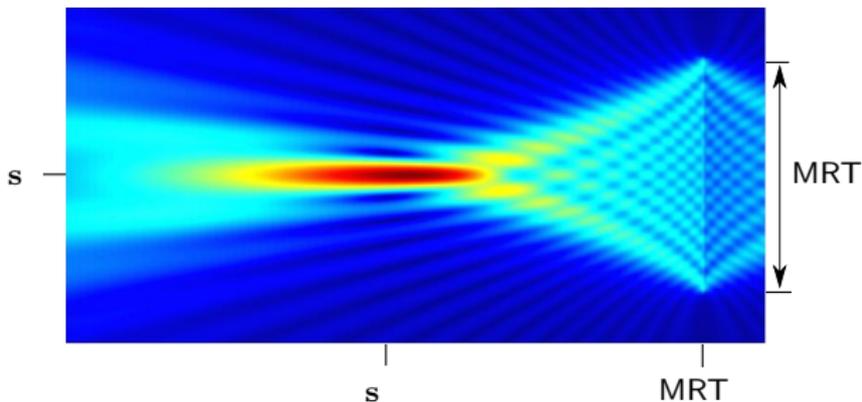
Milieu homogène

Une fréquence :

- $k = k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

Paramètres du MRT :

- Ouverture : $15\lambda_0$
- Distance à la source : $20\lambda_0$



- Focalisation sur le point source
- Illustration du “cône d’émission”

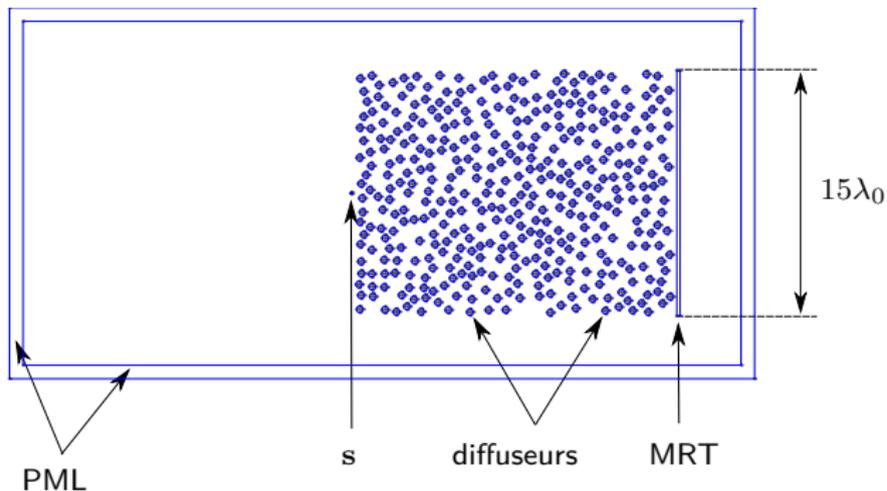
Milieu hétérogène

Une fréquence :

- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$
- $n = \text{contraste}$
- $\text{dist}(\mathbf{s}, \Omega) = \lambda_0/10$
- $\text{dist}(\mathcal{M}, \Omega) = \lambda_0/10$



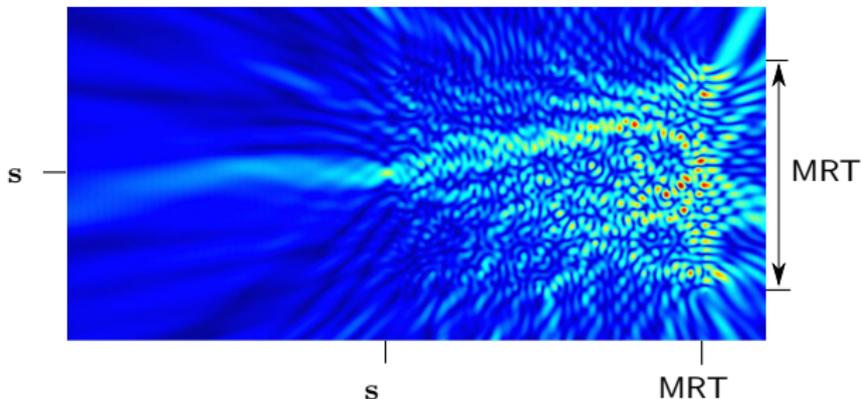
Milieu hétérogène

Une fréquence :

- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

Une réalisation :

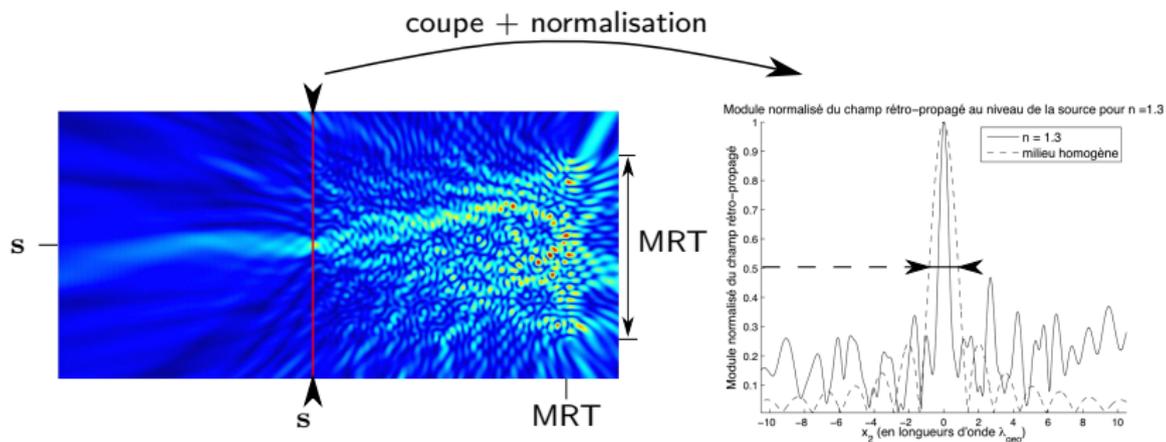
- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$
- $n = 1.3$
- $\text{dist}(\mathbf{s}, \Omega) = \lambda_0/10$
- $\text{dist}(\mathcal{M}, \Omega) = \lambda_0/10$



Module du champ rétro-propagé



Comparaison



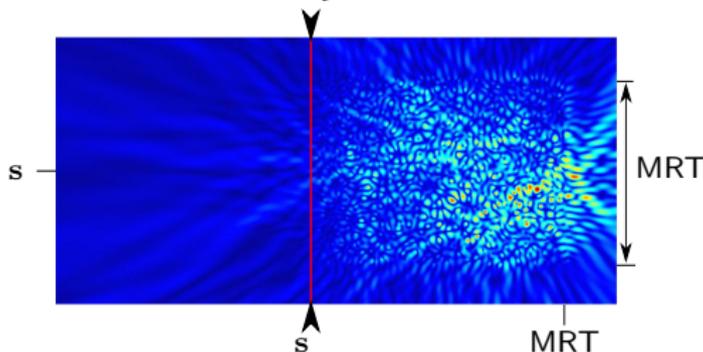
Module du champ rétro-propagé avec $n = 1.3$

Comparaison des champs
au niveau de la source

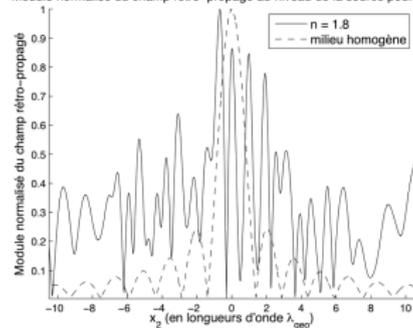
Gain : 60%

Comparaison

coupe + normalisation



Module normalisé du champ rétro-propagé au niveau de la source pour $n=1.8$



Module du champ rétro-propagé avec $n = 1.8$

Comparaison des champs au niveau de la source

⇒ Pas de focalisation ...

Moyennes

Moyenne sur les réalisations

- Une seule fréquence, un grand nombre de réalisations de milieux hétérogènes
- Calcul de la moyenne des largeurs à mi-hauteur et/ou des champs rétro-propagés
- Résultats obtenus : amélioration en moyenne de la précision de la focalisation lorsque $|1 - n|$ augmente

Moyenne sur les fréquences

- **Bande de fréquences**, une réalisation de milieu hétérogène
- La propriété de focalisation devrait être robuste vis-à-vis des milieux hétérogènes par le phénomène “d’auto-moyennisation” (“self-averaging effect”)

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$

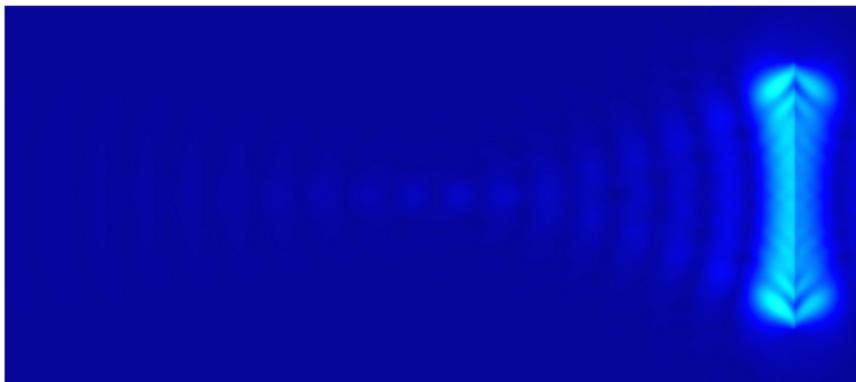
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -20\lambda_0$$

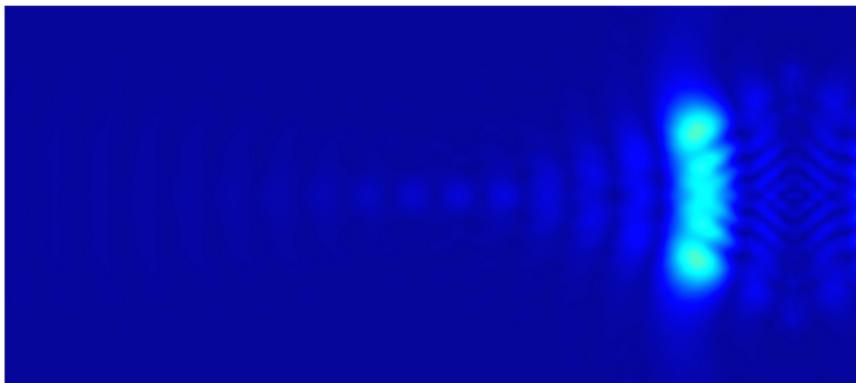
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -15\lambda_0$$

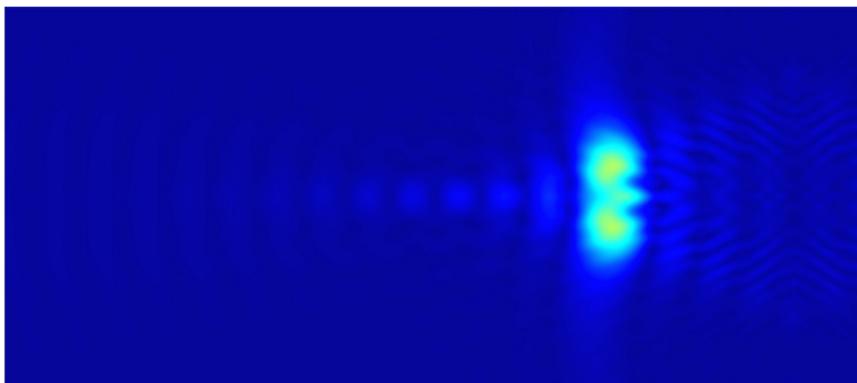
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -10\lambda_0$$

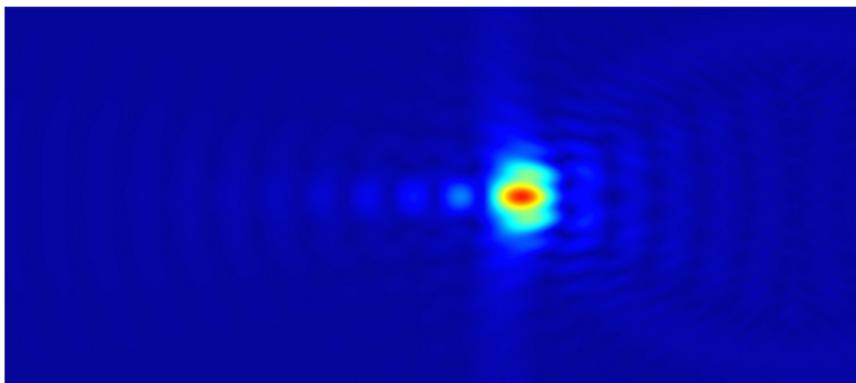
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -5\lambda_0$$

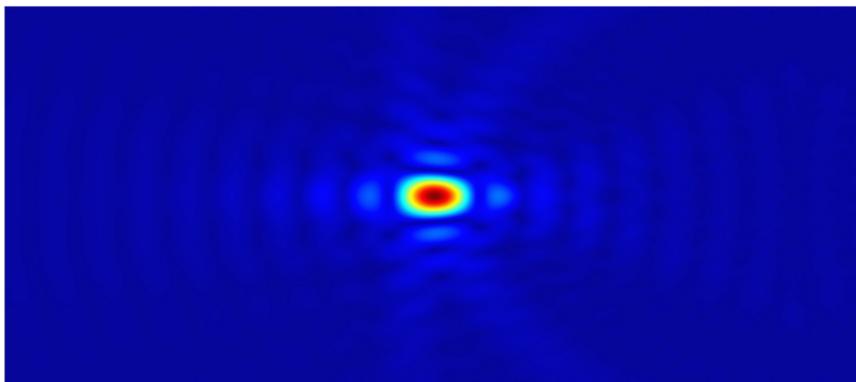
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t = 0) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) dk$$



$t = 0$ (instant de focalisation)

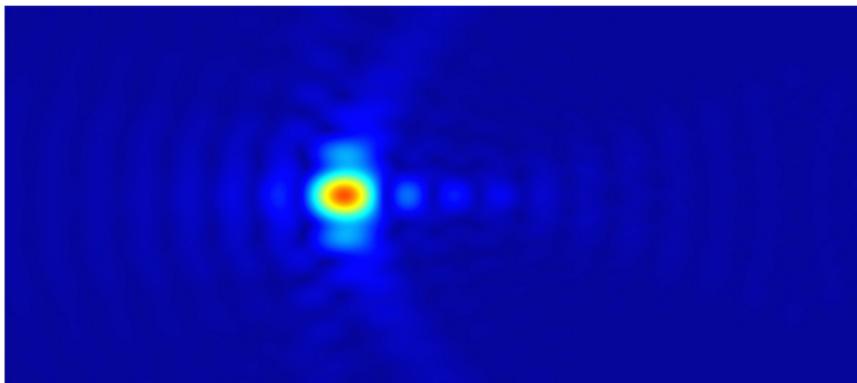
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} \, dk$$



$$t = 5\lambda_0$$

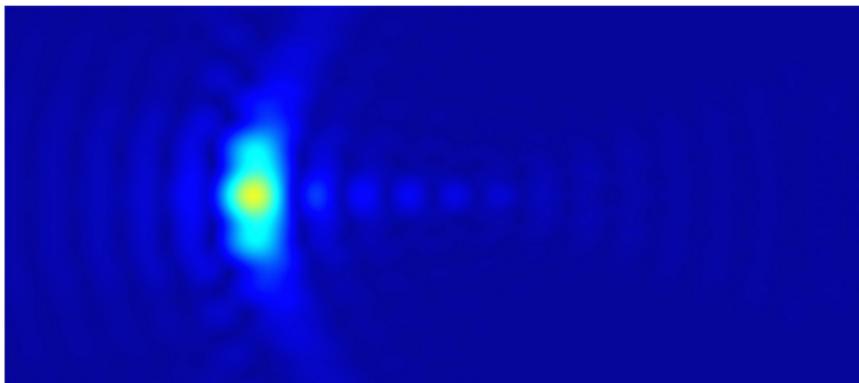
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} \, dk$$



$$t = 10\lambda_0$$

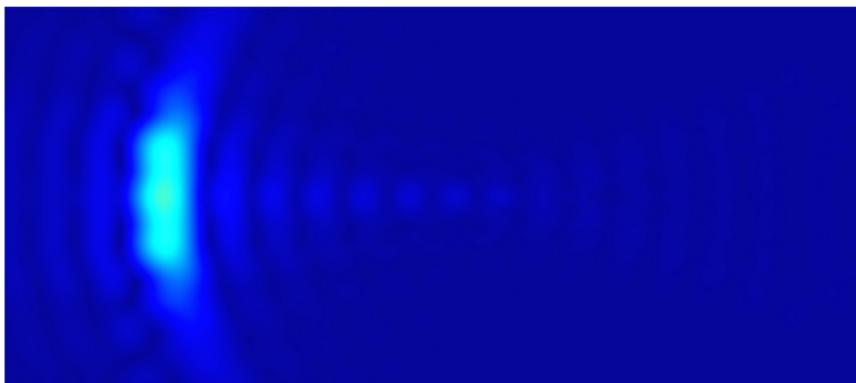
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} \, dk$$



$$t = 15\lambda_0$$

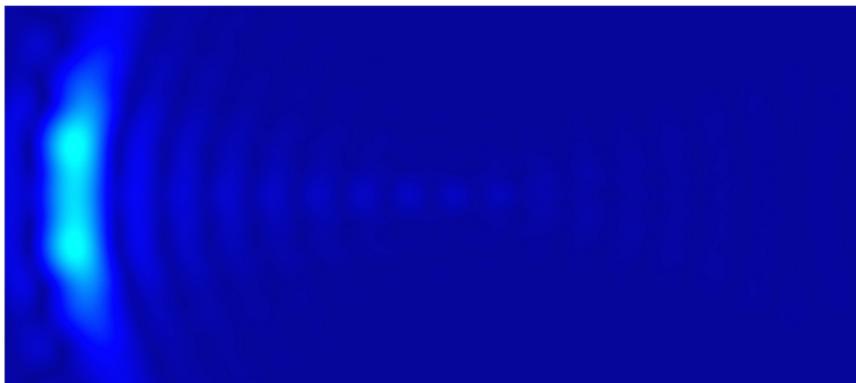
Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

Milieu homogène

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} \, dk$$



$$t = 20\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

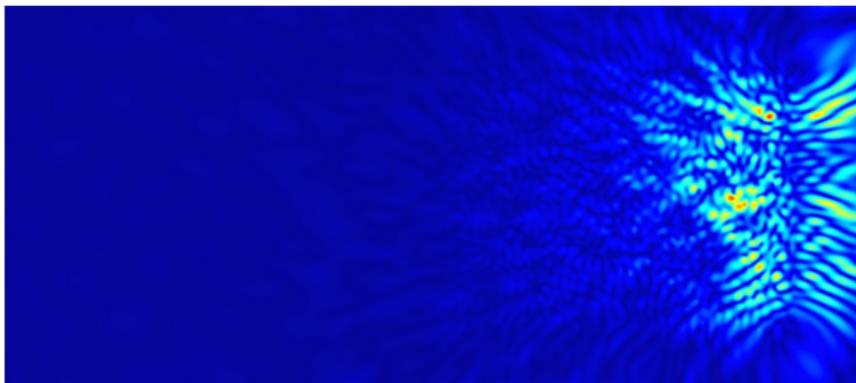
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -20\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

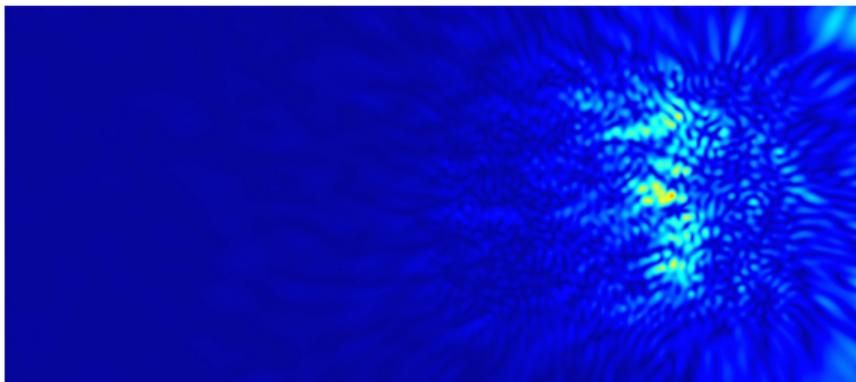
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -15\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

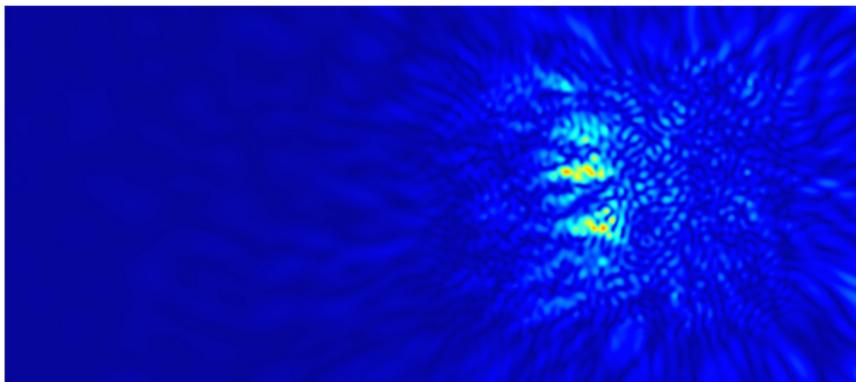
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -10\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

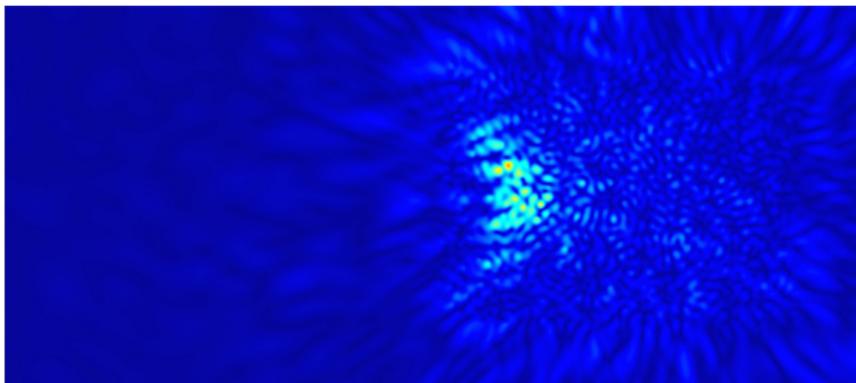
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = -5\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

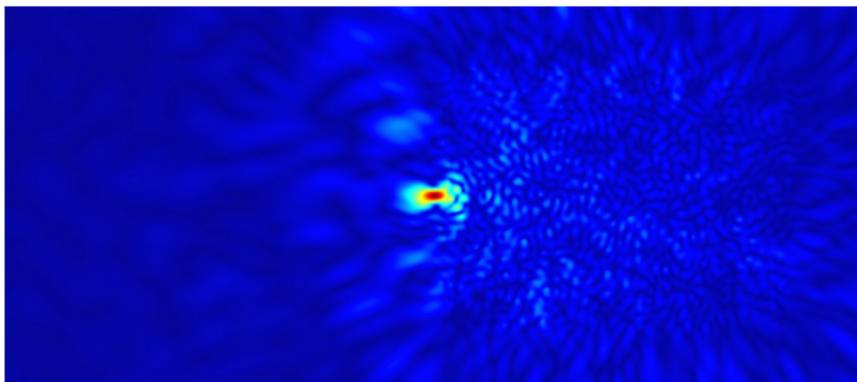
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t = 0) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) dk$$



$t = 0$ (instant de focalisation)

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

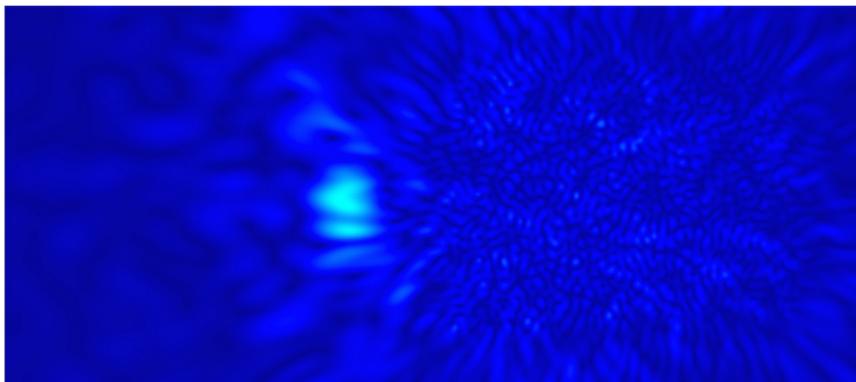
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = 5\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

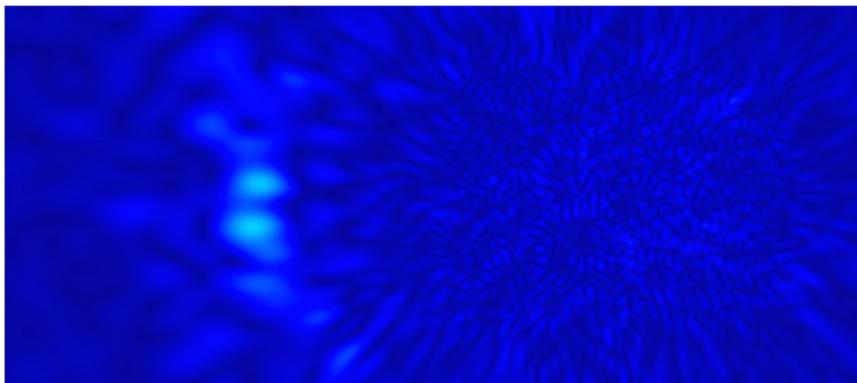
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = 10\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

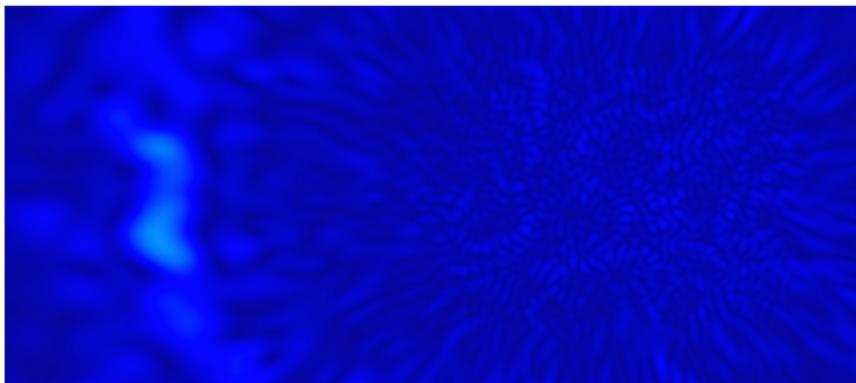
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = 15\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

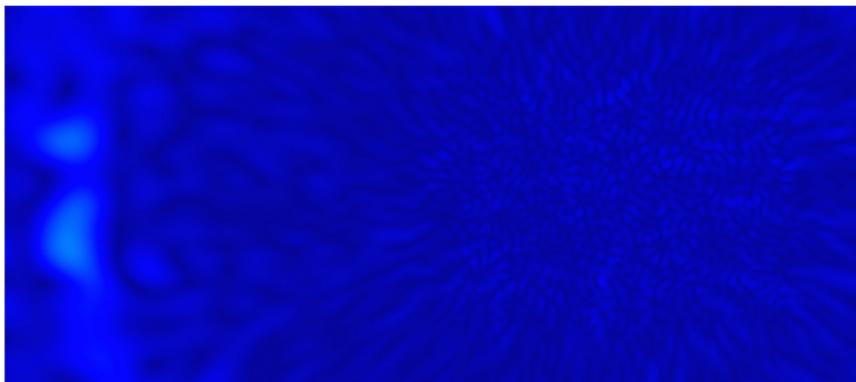
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) e^{-ikt} dk$$



$$t = 20\lambda_0$$

Moyenne sur les fréquences

Bande de fréquences :

- $k \in [k_0 - \Delta_k, k_0 + \Delta_k]$
- $k_0 = 10$ et $\Delta_k = k_0/5$

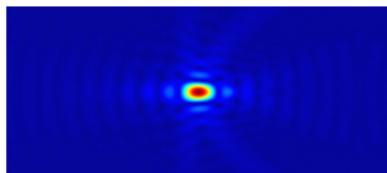
Une réalisation :

- $M = 400$ obst.
- Rayon $\lambda_0/5$

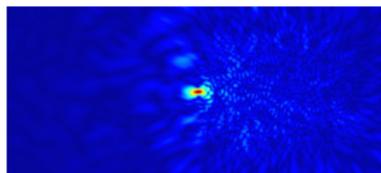
Contraste fixe :

- $n = 1.3$

$$\mathcal{U}_{RE}(\mathbf{y}, t) := \int_{k_0 - \Delta_k}^{k_0 + \Delta_k} u_{RE}(\mathbf{y}; k) dk$$

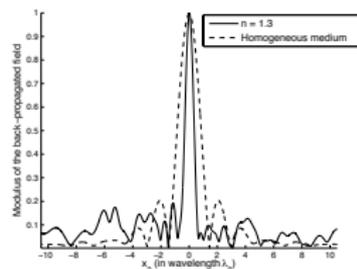


Milieu homogène



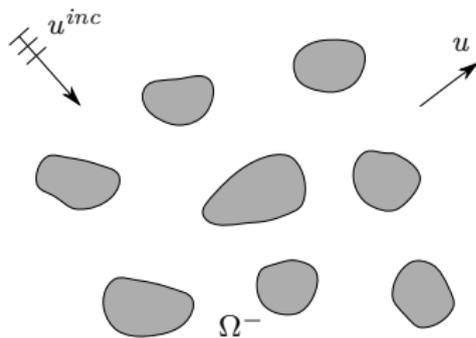
Milieu hétérogène

Gain : 59%



Comparaison au niveau de la source

- 1 Problèmes inverses en diffraction multiple
 - Introduction au retournement temporel
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage faible
 - Un problème inverse en diffraction multiple : couplage fort
- 2 Contributions à la résolution itérative par équation intégrale du problème de diffraction multiple
 - Introduction
 - Quelques propriétés des équations intégrales en diffraction multiple
 - Étude du préconditionnement par la diffraction simple



Notations :

- Onde incidente acoustique plane u^{inc}
- Obstacles : $\Omega^- = \bigcup_{p=1}^M \Omega_p^-$
- Condition de Dirichlet (obstacles mous)

Problème de diffraction multiple :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^-}) \\ u = -u^{inc} & (\Gamma = \partial\Omega^-) \\ u \text{ sortant.} \end{cases}$$

Principales difficultés

- Domaine non borné
- Couplage entre les obstacles induit par les réflexions multiples
- M grand et/ou k élevé : système de grande taille
- Haute fréquence (k élevé) : opérateur de Helmholtz non défini positif (problème de convergence du solveur itératif)

Deux approches usuelles

Méthodes volumiques

- Troncature du domaine
- Condition aux limites :
 - Absorbante : PML (Bérenger, 1994), CLA (Engquist, Majda, 1977), ...
 - Transparente : DtN, rep. intégrale (Lenoir, Jami, 1978), ...
- Maillage du domaine d'étude
- Résolution (FEM, Diff. finies, ...)

Équations intégrales de surface (voir par ex. J.C. Nédélec, Springer, 2001)

- Obtenir un système équivalent posé sur le bord Γ
- Maillage du bord Γ
- Résolution (BEM, ...)

Principales caractéristiques

- Matrice de grande taille
- Matrice creuse
- Prise en compte d'hétérogénéités
- Relative facilité d'implémentation

- Gain d'une dimension
- Système équivalent
- Matrice pleine (possibilité d'utiliser un couplage solveur itératif + FMM)
- Traitement des singularités

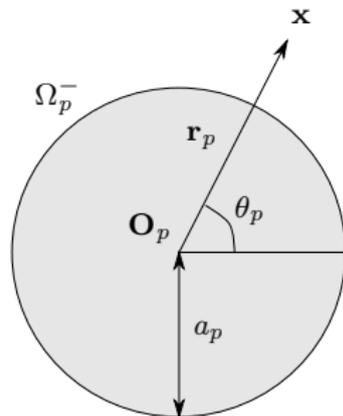
Le cas de disques

On suppose que, pour $p = 1, \dots, M$:
 Ω_p^- = disque de rayon a_p centré en \mathbf{O}_p .

Une méthode de résolution pratique :

- Séries de Mie (voir par ex. [P. Martin 2006])

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^M \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m^p H_m^{(1)}(kr_p) e^{im\theta_p}$$



- Système d'équations couplées obtenu par passage à la trace sur Γ
- M grand et/ou k élevé : résolution itérative efficace d'un système linéaire couplé (X. Antoine, C. Chniti, K. Ramdani, 2008)

Quelques applications de la diffraction multiple par des disques

- Acoustique : propagation d'onde en milieu dense
- Optique : cristaux photoniques
- Acoustique/Élasticité : modélisation de l'os trabéculaire

Équations intégrales pour les disques

Pourquoi utiliser les équations intégrales

- Utiliser le caractère première/deuxième espèce
- Obtenir d'autres systèmes linéaires mieux conditionnés

Pour fixer les idées, on prend ici l'exemple de l'EFIE. Le champ diffracté est écrit sous la forme d'un potentiel de simple couche

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+,$$

et la densité ρ est obtenue par résolution de l'équation intégrale

$$L\rho = -u^{inc}|_{\Gamma},$$

avec

$$L\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Opérateur de simple couche dans les bases de Fourier

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \dots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & \mathbb{L}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix}$$

- Les blocs diagonaux $\mathbb{L}^{p,p}$ sont diagonaux et représentent l'action de l'obstacle Ω_p^- avec lui-même
- Les blocs extra-diagonaux $\mathbb{L}^{p,q}$ sont pleins (structure Toeplitz) et représentent l'action de l'obstacle Ω_q^- sur l'objet Ω_p^- .

Remarque

Ce résultat s'étend aux autres équations intégrales et conduit à des systèmes ayant la même structure.



Étude de l'opérateur de simple couche à basse fréquence

Deux milieux étudiés à basse fréquence ($ka \rightarrow 0$)

Étude du spectre et du conditionnement de \mathbb{L} pour :

- Milieu dilué : obstacles éloignés ($kd \rightarrow +\infty$)
- Milieu dense : obstacles proches ($kd \rightarrow 0$)

$a :=$ rayon des obstacles et $d :=$ distance minimale entre deux obstacles.

Principe général

- Asymptotique sur chaque coefficient $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$
- Obtention d'une matrice "limite" : $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}^0$
- Hypothèse (validée numériquement) : v.p. (\mathbb{L}) \simeq v.p. (\mathbb{L}^0)

Résultats obtenus

- Estimations des valeurs propres de plus petit et de plus grand module
- Estimations du conditionnement de la matrice \mathbb{L} dans le cas de disques
- Extension formelle dans le cas de rectangles et d'ellipses

Résolution en régime de moyenne/haute fréquence

Méthode de résolution [Antoine, Chniti, Ramdani, 2008]

- ① Troncature des séries de Fourier : $-N_p \leq m \leq N_p$,

$$N_p = ka_p + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1}) \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{1/3} + 1$$

- ② Stockage compressé de la matrice (Toeplitz)
 ③ Utilisation d'un solveur itératif (GMRES)
 ④ Produit matrice-vecteur rapide par un algorithme basé sur la FFT

Il reste nécessaire de **préconditionner** le système pour faire converger le GMRES. Or, nous ne disposons pas de la matrice (stockage compressé)...

⇒ pas de préconditionneur algébrique.

⇒ préconditionneur "géométrique" de la diffraction simple :

$$\hat{\mathbb{L}} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\mathbb{L}}^{-1} \mathbb{L} \rho = -\hat{\mathbb{L}}^{-1} \mathbf{U}^{inc}.$$

Courbes de convergence du GMRES

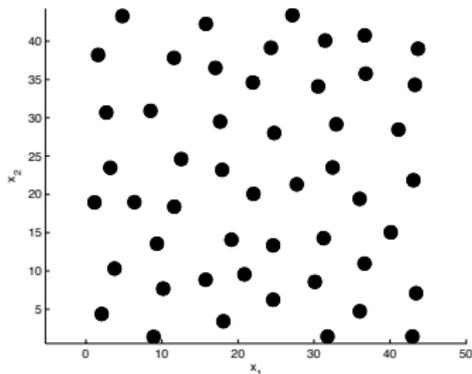
● $k = 100$

● $M = 50$

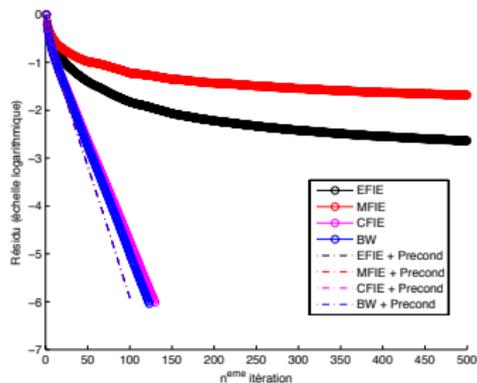
● $0.8 \leq a_p \leq 1.2$

● $97 \leq N_p \leq 139$

● $\simeq 10^4$ inconnues



50 obstacles



Historique de convergence du
GMRES($50, 10^{-6}$)

⇒ Le préconditionneur accélère la convergence du GMRES (légèrement pour la CFIE et BW)

⇒ Caractère première/deuxième espèce

Courbes de convergence du GMRES

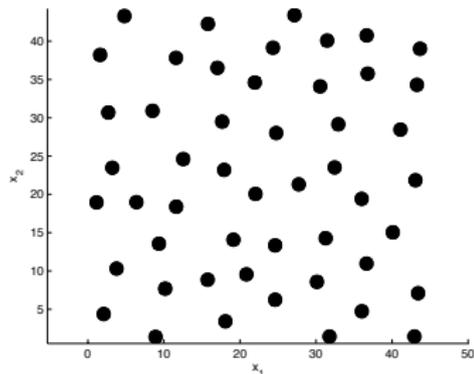
- $k = 100$

- $M = 50$

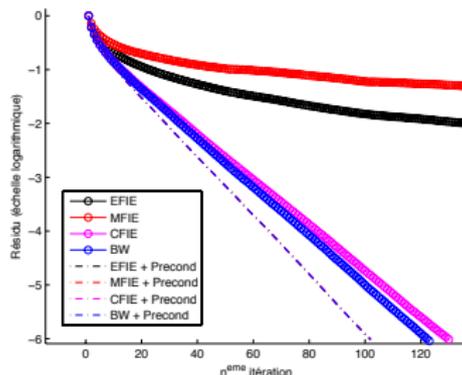
- $0.8 \leq a_p \leq 1.2$

- $97 \leq N_p \leq 139$

- $\simeq 10^4$ inconnues



50 obstacles



Historique de convergence du
GMRES($50, 10^{-6}$)

- ⇒ Le préconditionneur accélère la convergence du GMRES (légèrement pour la CFIE et BW)
- ⇒ Caractère première/deuxième espèce
- ⇒ Les quatre courbes des quatre équations intégrales préconditionnées sont **confondues !**

Concernant les courbes de GMRES...

Ce résultat laisse penser que les spectres des opérateurs des équations intégrales préconditionnées sont identiques...

Concernant les courbes de GMRES...

Ce résultat laisse penser que les spectres des opérateurs des équations intégrales préconditionnées sont identiques...

⇒ En fait, on a mieux ! Après calculs explicites, nous obtenons

$$\text{Séries de Mie} \xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{CFIE(P)} = \text{MFIE(P)} = \text{EFIE(P)} \left(\xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{BW(P)} \right)$$

Concernant les courbes de GMRES. . .

Ce résultat laisse penser que les spectres des opérateurs des équations intégrales préconditionnées sont identiques. . .

⇒ En fait, on a mieux ! Après calculs explicites, nous obtenons

$$\text{Séries de Mie} \xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{CFIE}(P) = \text{MFIE}(P) = \text{EFIE}(P) \left(\xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{BW}(P) \right)$$

Ce résultat semble toutefois lié à la géométrie particulière. . .

Concernant les courbes de GMRES...

Ce résultat laisse penser que les spectres des opérateurs des équations intégrales préconditionnées sont identiques...

⇒ En fait, on a mieux ! Après calculs explicites, nous obtenons

$$\text{Séries de Mie} \xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{CFIE}(P) = \text{MFIE}(P) = \text{EFIE}(P) \left(\xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{BW}(P) \right)$$

Ce résultat semble toutefois lié à la géométrie particulière...

⇒ Ce n'est pas le cas ! Nous avons montré que ce résultat est indépendant de la géométrie !

Théorème

Après préconditionnement par la diffraction de simple, on a :

$$\text{CFIE}(P) = \text{MFIE}(P) = \text{EFIE}(P) \left(\xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{BW}(P) \right)$$

Idée de la preuve EFIE(P) = MFIE(P) = CFIE(P)

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Équation intégrale : $L_A\rho = -Au^{inc}$, avec $L_A = A\mathcal{L}$ et A :

	Opérateur A
EFIE	Trace intérieure γ_0^-
MFIE	Trace normale intérieure γ_1^-
CFIE	Combinaison linéaire : $\eta\alpha\gamma_0^- + (1-\alpha)\gamma_1^-$

Équation intégrale préconditionnée : $\widehat{L}_A^{-1}L_A\rho = -\widehat{L}_A^{-1}Au^{inc}$,

$$\widehat{L}_A^{-1}L_A = \begin{bmatrix} I & (L_A^{1,1})^{-1}L_A^{1,2} & \dots & (L_A^{1,1})^{-1}L_A^{1,M} \\ (L_A^{2,2})^{-1}L_A^{2,1} & I & \dots & (L_A^{2,2})^{-1}L_A^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (L_A^{M,M})^{-1}L_A^{M,1} & (L_A^{M,M})^{-1}L_A^{M,2} & \dots & I \end{bmatrix}$$

Il faut montrer que : $\forall p \neq q, \quad (L_A^{p,p})^{-1}L_A^{p,q} = (L_B^{p,p})^{-1}L_B^{p,q}$

Idée de la preuve $EFIE(P) = MFIE(P) = CFIE(P)$

Notations : $A_p g = (Ag)|_{\Gamma_p}$ et $\mathcal{L}_q \rho_q = \int_{\Gamma_q} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho_q(\mathbf{y}) d\Gamma_q(\mathbf{y})$.

Lemme

$$\forall g, \quad (L_A^{p,p})^{-1} A_p g = (L_B^{p,p})^{-1} B_p g.$$

Preuve : problème de diffraction simple sur Ω_p^-

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + k^2)v = 0 \\ v = -g \\ v \text{ sortant} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \Omega_p^- \\ \Gamma_p \end{array} \right) \iff \left\{ \begin{array}{l} v = \mathcal{L}_p \rho_p \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{l} L_A^{p,p} \rho_p = -A_p g \\ \text{ou} \\ L_B^{p,p} \rho_p = -B_p g \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Égalité des opérateurs des éq. int. A et B préconditionnées

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } p \neq q, \quad (L_A^{p,p})^{-1} L_A^{p,q} &= (L_A^{p,p})^{-1} A_p \mathcal{L}_q \\ &= (L_B^{p,p})^{-1} B_p \mathcal{L}_q \\ &= (L_B^{p,p})^{-1} L_B^{p,q} \end{aligned}$$

$$\implies \widehat{L}_A^{-1} L_A = \widehat{L}_B^{-1} L_B.$$

Conclusions

Résultats obtenus

- Estimations du conditionnement de l'opérateur de simple couche à basse fréquence pour deux milieux différents (dilué et dense)
- Le préconditionnement par la diffraction simple conduit à la même "équation intégrale"

Perspectives

Estimation du conditionnement :

- Régime intermédiaire d'obstacles ni "proches" ni "éloignés"
- Montée en fréquence
- Opérateur intégral préconditionné ainsi que les autres opérateurs intégraux

Résolution numérique du problème de diffraction multiple :

- Séries de Mie/équations intégrales dans les bases de Fourier :
 - Acoustique 3D (sphère)
 - Électromagnétisme 3D (simulation méthode DORT)
- Obtenir des préconditionneurs non algébriques plus efficaces que celui de la diffraction simple

ARTICLE PUBLIÉ



X. Antoine, B. Pinçon, K. Ramdani et BT.

Far field modeling of electromagnetic time reversal and application to selective focusing on small scatterers
SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008.

ARTICLE ACCEPTÉ



X. Antoine, K. Ramdani et BT.

Wide Frequency Band Numerical Approaches for Multiple Scattering Problems by Disks
Journal of Algorithms & Computational Technologies

ARTICLE SOUMIS



X. Antoine et BT.

Spectral and Condition Number Estimates of the Acoustic Single-Layer Operator for Low-Frequency Multiple Scattering, Part I: From Single to Multiple Scattering, Dilute Media
CMAME, 2011.

ARTICLE EN PRÉPARATION



X. Antoine et BT.

Spectral and Condition Number Estimates of the Acoustic Single-Layer Operator for Low-Frequency Multiple Scattering, Part II: Dense Media

Annexes

▶ Étude numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

▶ Moyenne sur les réalisations des simulations de reconstruction d'une source acoustique

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dilué

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dense

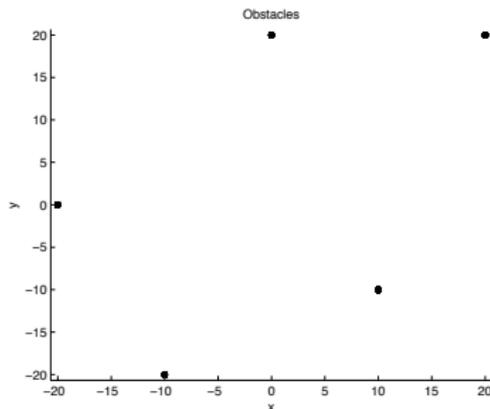
Annexe A : simulation numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

Cas idéal : MRT fermé et “quasi-continu”

- $N = 720$ angles (discrétisation fine)
- 5 obstacles, avec

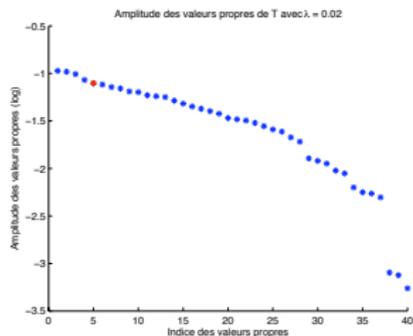
$$\delta = 0.02 \quad \text{et} \quad d \approx 20$$

- Variation de λ entre δ et d

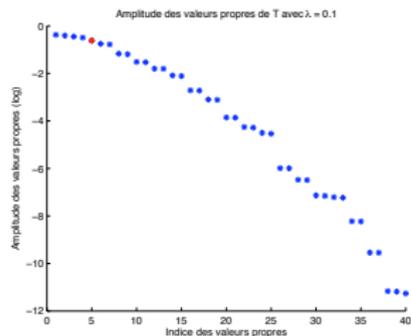


Pour quelles valeurs de λ a-t-on 5 valeurs propres significatives ?

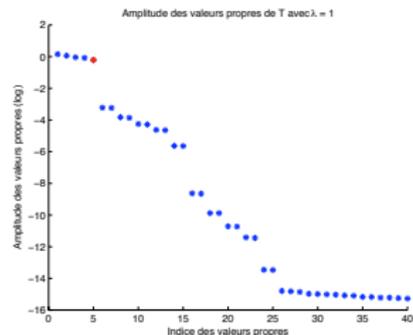
40 premières vp de \mathbb{T} pour quelques valeurs de λ



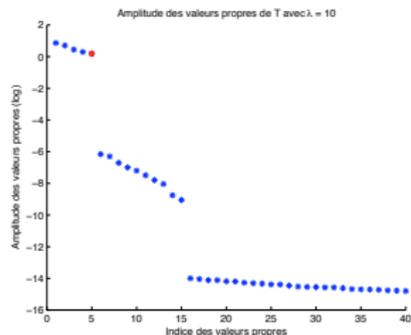
$$\lambda = 0.02 = \delta = d/1000$$



$$\lambda = 0.1 = 5\delta = d/200$$



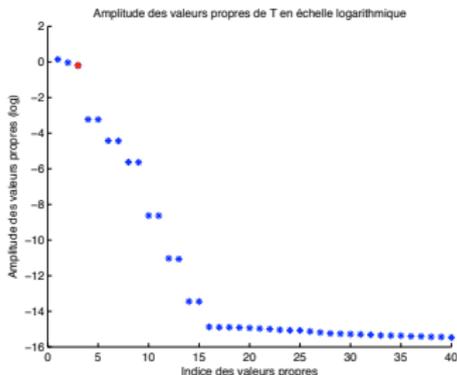
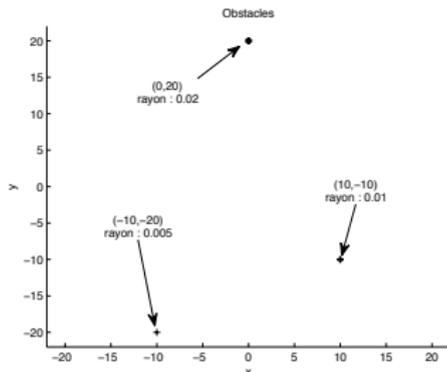
$$\lambda = 1 = 50\delta = d/20$$



$$\lambda = 10 = 500\delta = d/2$$

Propriétés de focalisation des vecteurs propres de \mathbb{T}

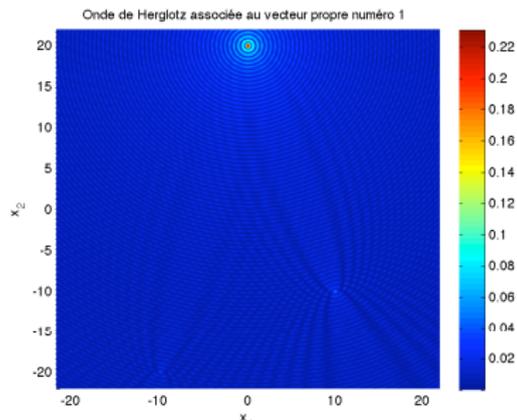
- En $(0, 20)$, rayon de 0.02 (plus gros)
- En $(10, -10)$, rayon de 0.01 (moyen)
- En $(-10, -20)$, rayon 0.005 (plus petit)



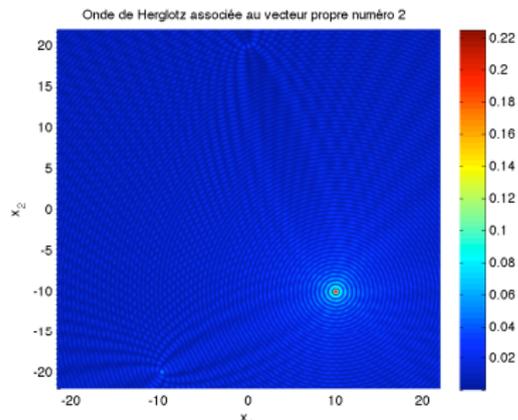
- $\delta = 0.02 \ll \lambda = 1 \ll d = 20$
- 3 valeurs propres significatives

- $N = 720$

Ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 1 et 2



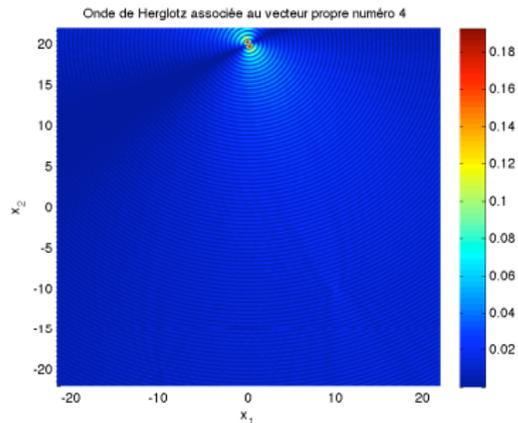
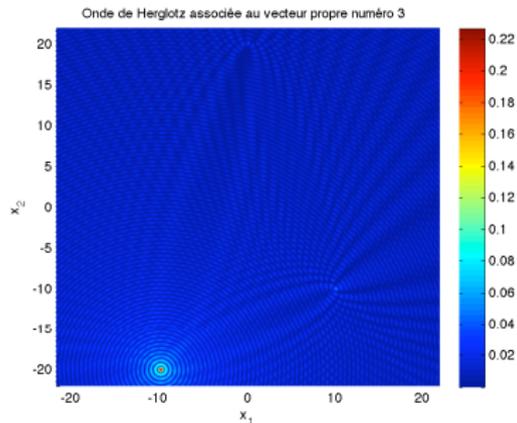
Module de l'onde de Herglotz associée au vecteur propre 1



Module de l'onde de Herglotz associée au vecteur propre 2

⇒ Focalisation sur le premier et le deuxième plus gros obstacle à l'aide (resp.) du premier et du deuxième vecteur propre de \mathbb{T}

Ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 3 et 4



- ⇒ Focalisation sur le plus petit obstacle grâce au troisième vecteur propre de \mathbb{T}
- ⇒ Focalisation de nouveau sur le plus gros obstacle avec le quatrième vecteur propre (dipôle).

Conclusions

Résultats obtenus pour un MRT idéal

- Pour $\delta \simeq \lambda \ll d$: la matrice \mathbb{T} admet plus de M valeurs propres significatives
- Pour $\delta \ll \lambda \simeq d$: la matrice \mathbb{T} peut admettre moins de M valeurs propres significatives (résolution trop faible). De plus, lorsqu'il y a focalisation, la qualité est médiocre (**tache focale de l'ordre de la distance entre deux obstacles**)
- La focalisation sélective est possible lorsque

$$\delta \ll \lambda \ll d.$$

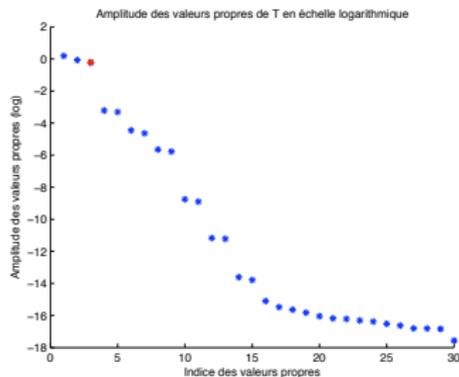
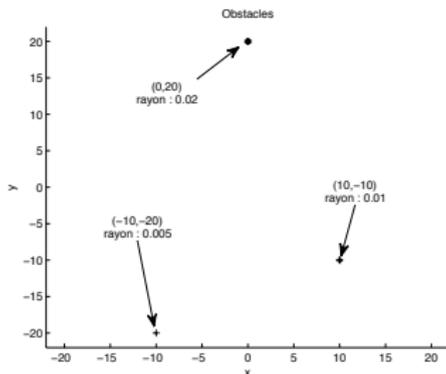
Note : Concernant le nombre de valeurs propres de \mathbb{T} , des résultats similaires ont été obtenus $N = 30$ émetteurs/récepteurs (MRT discret)

MRT imparfait : fermé mais discret

MRT fermé mais discret : $N = 30$ émetteurs/récepteurs répartis uniformément.
Même configuration de 3 obstacles de rayon différent avec

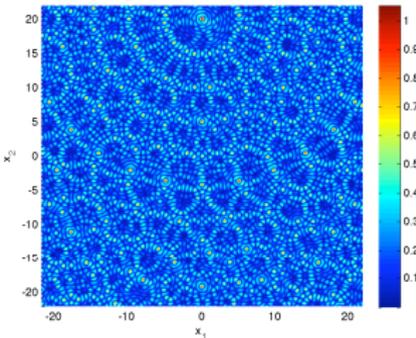
$$\delta = 0.02 \quad \text{et} \quad d \simeq 20.$$

Avec $\lambda = 1$, la matrice \mathbb{T} possède bien 3 valeurs propres significatives.



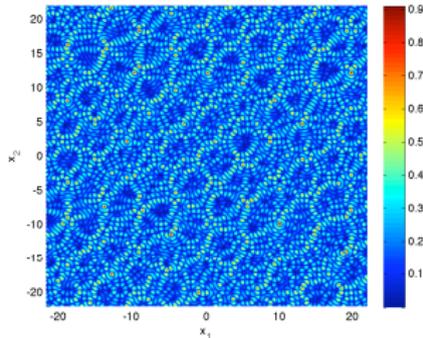
Ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1



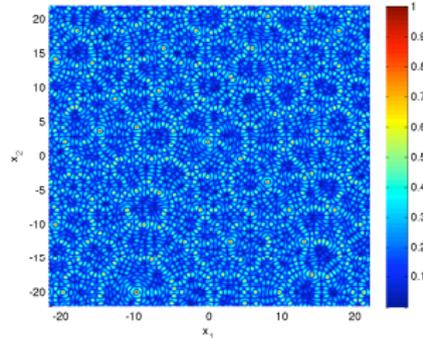
Vecteur propre 1

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2



Vecteur propre 2

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3



Vecteur propre 3

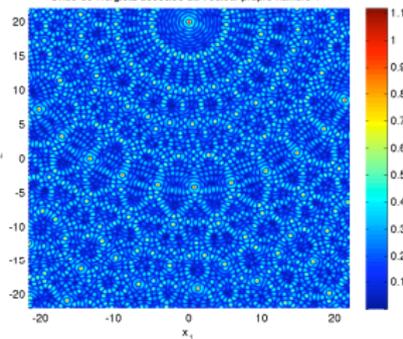
⇒ Focalisation peu précise voire inexistante

Sensibilité de la méthode par rapport à la position des émetteurs/récepteurs

Introduisons un léger déphasage dans la position des transducteurs :

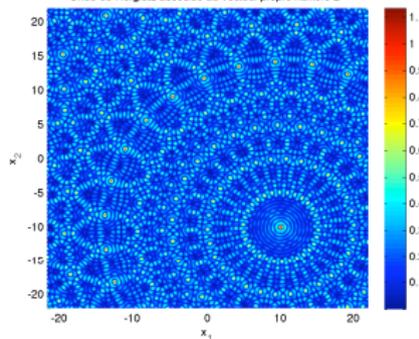
$$“\alpha_j \rightarrow \alpha_j + \varphi”, \quad \text{avec } \varphi = 0.031\text{rad.}$$

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1



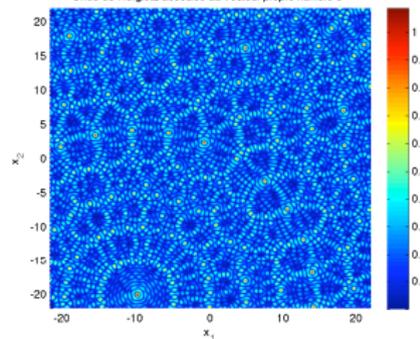
Vecteur propre 1

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2



Vecteur propre 2

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3



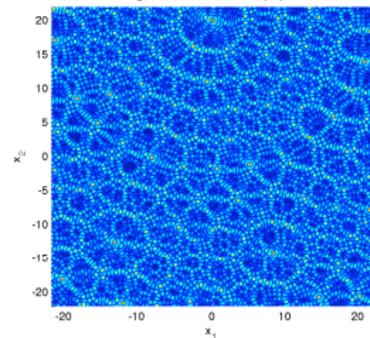
Vecteur propre 3

⇒ Focalisation sélective sur chaque obstacle

Sensibilité de la méthode par rapport à la fréquence

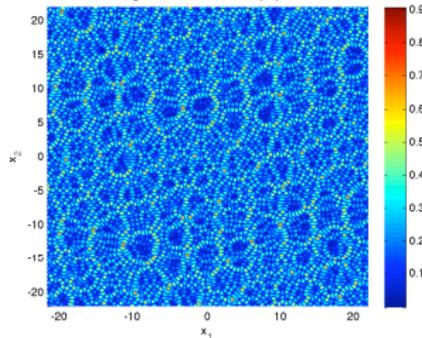
Même configuration que précédemment avec $\lambda = 0.9$ au lieu de $\lambda = 1$.

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1



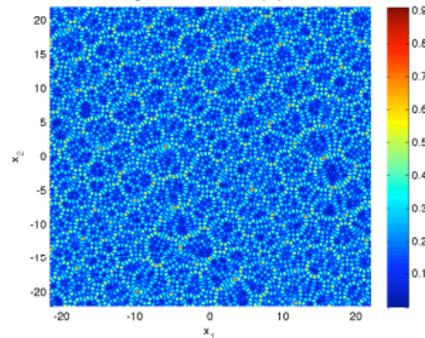
Vecteur propre 1

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2



Vecteur propre 2

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3



Vecteur propre 3

⇒ Lorsque le nombre de capteurs est peu élevé, la méthode devient (très) sensible par rapport à la fréquence

Bande de fréquences

Pour tout $k \in [k_{min}, k_{max}]$, notons

- L'opérateur de retournement temporel T^k associé
- f_p^k : fonction propre de T^k associée à la $p^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre de T^k
- u_p^k : onde de Herglotz de densité f_p^k et de fréquence k :

$$u_p^k(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f_p^k(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha}$$

⇒ Onde de Herglotz correspondant à la $p^{\text{ème}}$ valeur propre :

$$u_p(\mathbf{x}) = \int_{k_{min}}^{k_{max}} u_p^k(\mathbf{x}) dk = \int_{k_{min}}^{k_{max}} \int_{S^2} f_p^k(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha} dk$$

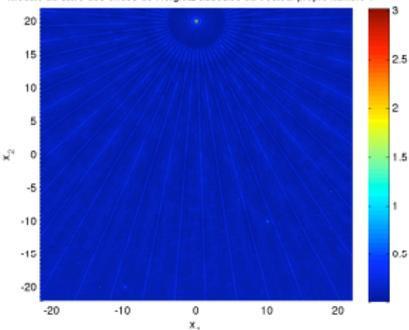
⇒ Problème de "synchronisation des vecteurs propres"

Bande de fréquences

- $N = 30$ émetteurs/récepteurs.
- Bande de fréquences $k \in [5.236, 7.854]$ ($\iff \lambda \in [0.8, 1.2]$)

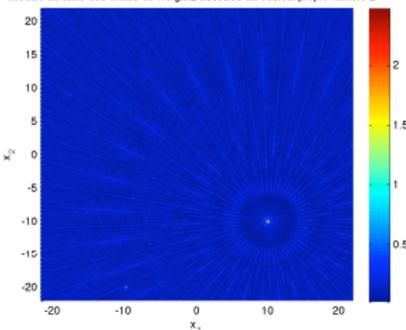
Affichage de : $\int_{k_{min}}^{k_{max}} |u_p(\mathbf{x})|^2 dk$

Module au carré des ondes de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1



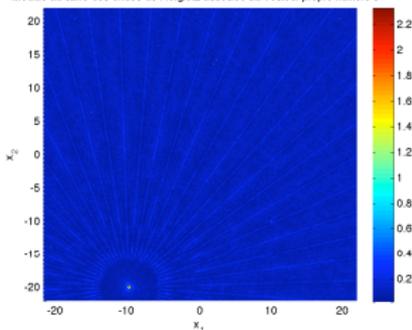
Vecteur propre 1

Module au carré des ondes de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2



Vecteur propre 2

Module au carré des ondes de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3



Vecteur propre 3

Influence du bruit

Matrice de champ lointain bruitée

$$\widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F} + \Delta_{rand} \quad \text{telle que} \quad \|\mathbb{F} - \widetilde{\mathbb{F}}\|_2 = \gamma \|\mathbb{F}\|_2,$$

avec :

- Δ_{rand} : matrice de taille $N \times N$ et de coefficients complexes aléatoires.
- γ : paramètre régissant l'amplitude du bruit.
- $\|\cdot\|_2$: norme euclidienne

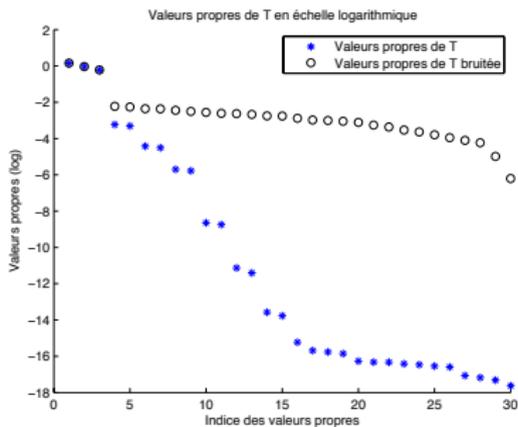
Matrice de retournement temporel bruitée obtenue par :

$$\widetilde{\mathbb{T}} = \widetilde{\mathbb{F}}^* \widetilde{\mathbb{F}}.$$

Influence du bruit sur les valeurs propres pour $\gamma = 0.06$

Bruit faible : $\gamma = 0.06$

- $N = 30$ émetteurs/récepteurs
- Déphasage dans les angles
- Fréquence fixe : $\lambda = 1$
- 3 petits obstacles

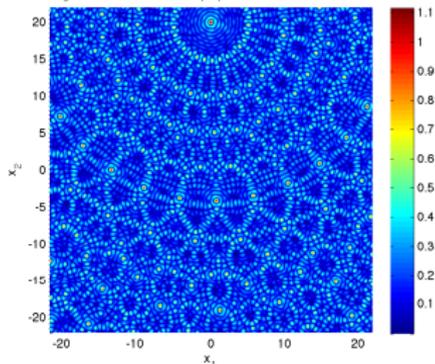


Valeurs propres de \mathbb{T} et $\tilde{\mathbb{T}}$ (échelle log)

⇒ Accroissement des valeurs propres non significatives

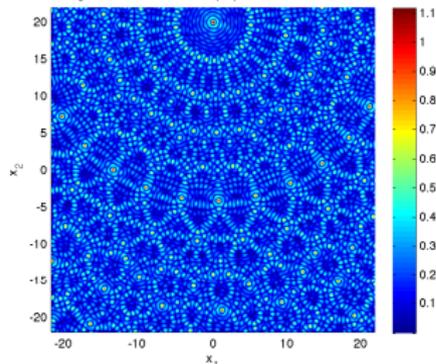
Vecteurs propres 1 et 2 pour un bruit d'amplitude $\gamma = 0.06$

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1 - simulation non bruitée



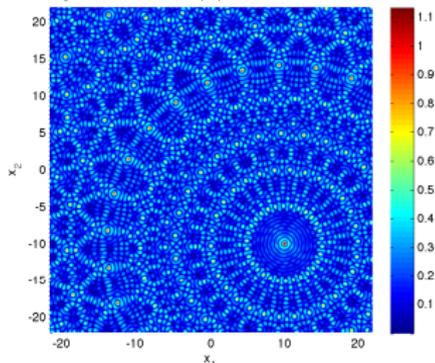
Vecteur propre 1 : sans bruit

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 1 - simulation bruitée



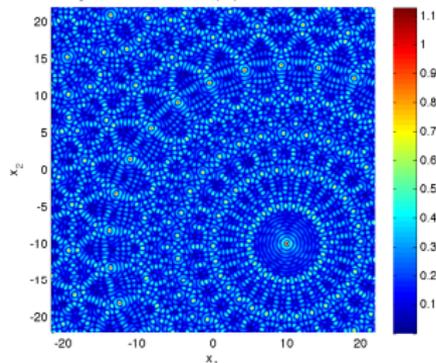
Vecteur propre 1 : avec bruit

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2 - simulation non bruitée



Vecteur propre 2 : sans bruit

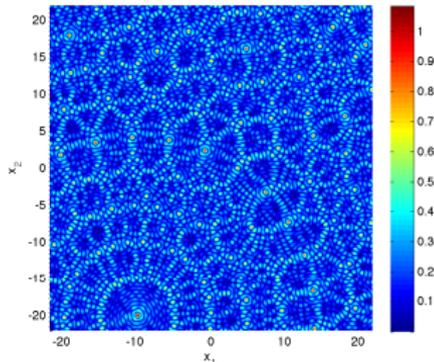
Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 2 - simulation bruitée



Vecteur propre 2 : avec bruit

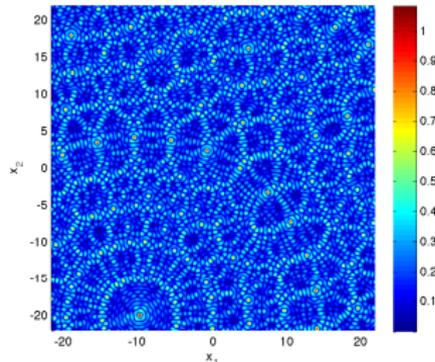
Vecteurs propres 3 et 4 pour un bruit d'amplitude $\gamma = 0.06$

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3 - simulation non bruitée



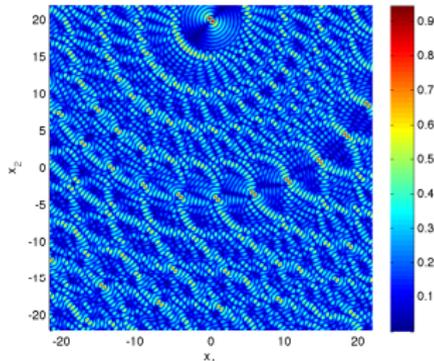
Vecteur propre 3 : sans bruit

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 3 - simulation bruitée



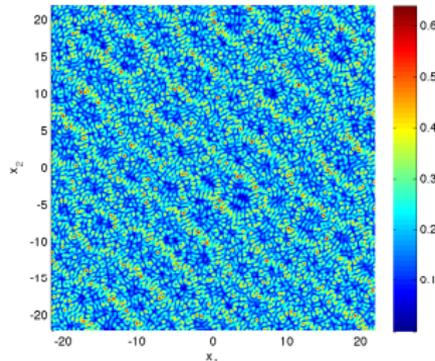
Vecteur propre 3 : avec bruit

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 4 - simulation non bruitée



Vecteur propre 4 : sans bruit

Onde de Herglotz associée au vecteur propre numéro 4 - simulation bruitée



Vecteur propre 4 : avec bruit

Annexes

▶ Étude numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

▶ Moyenne sur les réalisations des simulations de reconstruction d'une source acoustique

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dilué

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dense

Annexe B : moyenne sur les réalisations

- Une fréquence, $N = 100$ réalisations de milieux hétérogènes.
- Pour $j = 1, \dots, N$, calcul des champs rétro-propagés u_{RE}^j .

Moyenne et écart-type des largeurs à mi-hauteur

- Pour $j = 1, \dots, N$, u_{RE}^j doit focaliser s
- Calcul des N largeurs à mi-hauteur
- Moyenne et écart type des N largeurs à mi-hauteur

Remarque : cette méthode fonctionne (ici) pour $0.75 \leq n \leq 1.25$

Champ moyen \hat{u}_{RE}

$$\hat{u}_{RE} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_{RE}^j.$$

Remarque : cette méthode fonctionne également avec des contrastes "élevés"

Moyenne et écart-type des largeurs à mi-hauteur

Une fréquence :

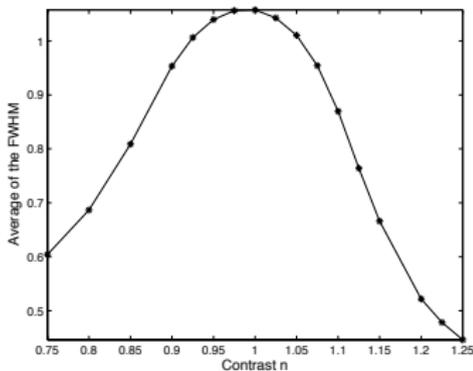
- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

100 réalisations :

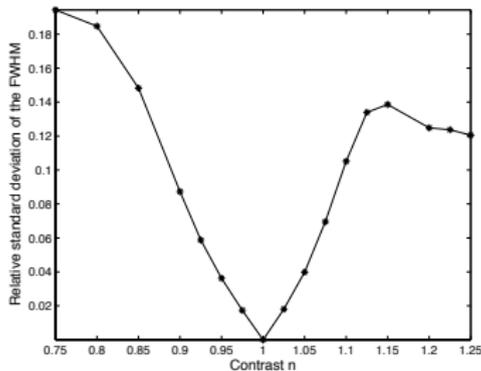
- $M = 400$ obstacles
- Rayon $\lambda_0/5$

Contraste :

- $0.75 \leq n \leq 1.25$



Moyenne des largeurs vs. n



Écart-type (relatif) des largeurs vs. n

⇒ La taille de la tache focale diminue *en moyenne* lorsque $|1 - n|$ augmente

Champ moyen

Une fréquence :

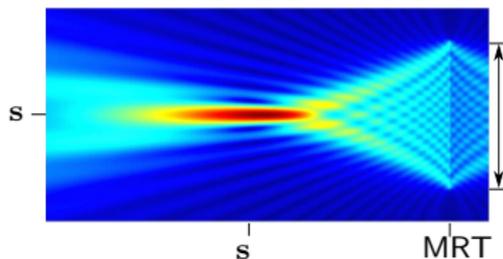
- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

100 réalisations :

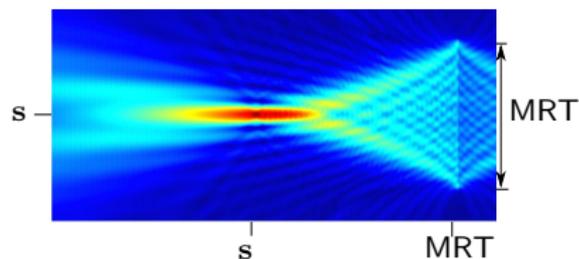
- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.1$



Milieu homogène



Milieu hétérogène

Gain : 21%

Champ moyen

Une fréquence :

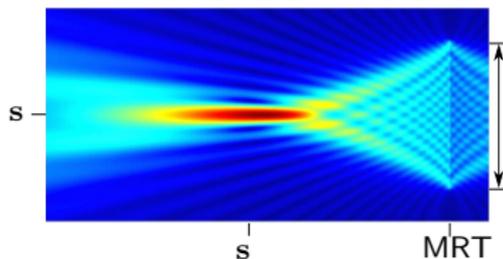
- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

100 réalisations :

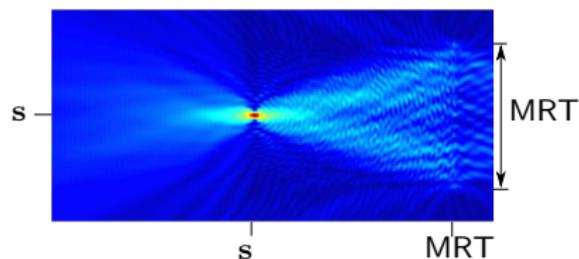
- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.3$



Milieu homogène



Milieu hétérogène

Gain : 64%

Champ moyen

Une fréquence :

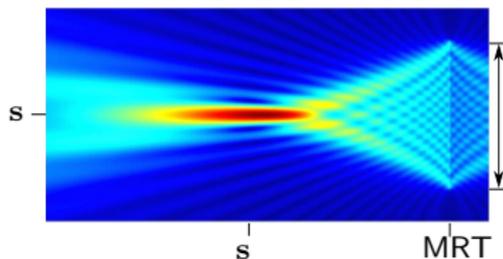
- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

100 réalisations :

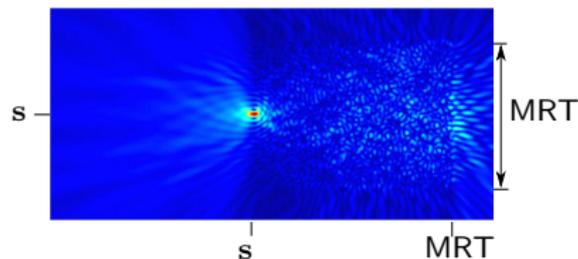
- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste fixe :

- $n = 1.8$



Milieu homogène



Milieu hétérogène

Gain : 70%

Largeur à mi-hauteur du champ moyen

Une fréquence :

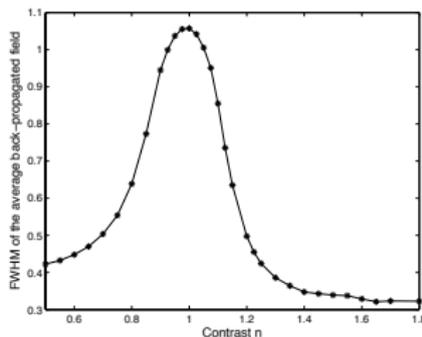
- $k_0 = 10$
- $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 0.628$

100 réalisations :

- $M = 400$ obst.
- Rayon : $\lambda_0/5$

Contraste :

- $0.5 \leq n \leq 1.8$



Largeur à mi-hauteur du champ moyen en fonction de n

⇒ Diminution de la largeur à mi-hauteur du champ moyen lorsque $|1 - n|$ augmente

Annexes

▶ Étude numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

▶ Moyenne sur les réalisations des simulations de reconstruction d'une source acoustique

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dilué

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dense

Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué

Milieu dilué : $ka \rightarrow 0$ et $kd \rightarrow +\infty$ (ou $kb_{pq} \rightarrow +\infty$)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \dots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & \mathbb{L}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix}$$

Asymptotiques :

- Pour $p = q$ (rappel : $\mathbb{L}_{m,n}^{p,p} = 0$ si $m \neq n$) :

$$\mathbb{L}_{m,m}^{p,p} = \begin{cases} -a \left[\ln \left(\frac{ka}{2} \right) + \gamma \right] + \frac{i\pi a}{2} + O((ka)^2 \ln(ka)), & \text{si } (m, n) = (0, 0), \\ \frac{a}{2|m|} + O((ka)^2), & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $p \neq q$:

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = \begin{cases} ia \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i(kb_{pq} - \pi/4)}}{\sqrt{kb_{pq}}} + O\left(\frac{1}{kb_{pq}}\right) + O\left(\frac{(ka)^2}{\sqrt{kb_{pq}}}\right), & \text{si } (m, n) = (0, 0), \\ O\left(\frac{(ka)^{|m|+|n|}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué

Lorsque $ka \rightarrow 0$ **et** $kd \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{L}^{p,p} \longrightarrow (\mathbb{L}^0)^{p,p}$$

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{L}}_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \widehat{\mathbb{L}}_0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{\mathbb{L}}_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \widehat{\mathbb{L}}_0 = -a \left[\ln \left(\frac{ka}{2} \right) + \gamma \right] + \frac{i\pi a}{2} \\ \widehat{\mathbb{L}}_m = \frac{a}{2|m|} \end{cases}$$

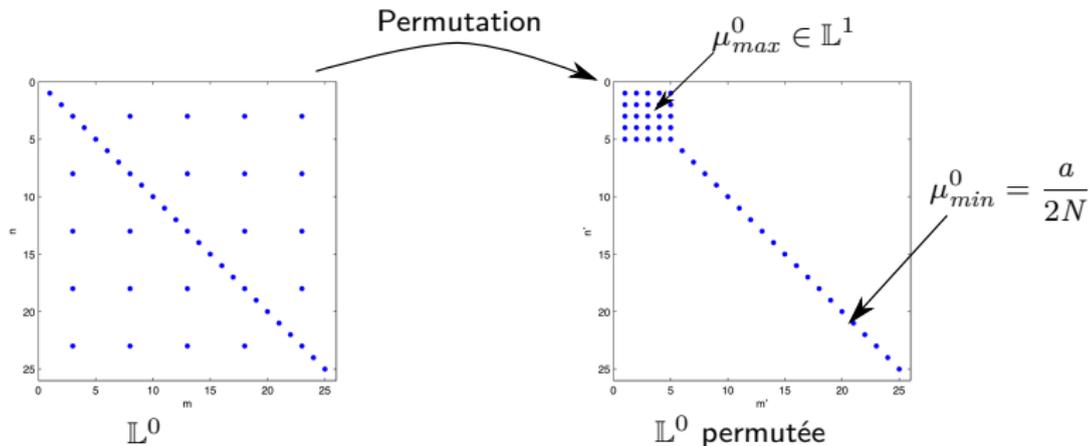
$$\mathbb{L}^{p,q} \longrightarrow (\mathbb{L}^0)^{p,q}$$

$$(\mathbb{L}^0)^{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{p,q} & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{L}^0)_{0,0}^{p,q} = ia \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i(kb_{pq} - \pi/4)}}{\sqrt{kb_{pq}}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}^0 = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{1,1} & (\mathbb{L}^0)^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)^{2,1} & (\mathbb{L}^0)^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)^{M,1} & (\mathbb{L}^0)^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{M,M} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{v.p.}(\mathbb{L}) \simeq \text{v.p.}(\mathbb{L}^0)$$

Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué



- Valeur propre de plus petit module : $\mu_{min}^0 = a/(2N)$ (et de multiplicité $2M$)
- Valeur propre maximale μ_{max}^0 à chercher dans la sous-matrice \mathbb{L}^1 des modes d'ordre 0

$$\mathbb{L}^1 = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,M} \end{pmatrix}$$

Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué

Une itération de la méthode de la puissance itérée

- Vecteur initial : $\mathbf{X} = (1, 1, \dots, 1)^T$
- Puissance itérée :

$$\mathbf{Y} = \mathbb{L}^1 \mathbf{X}$$

- Estimation obtenu de $|\mu_{max}^0|$ par

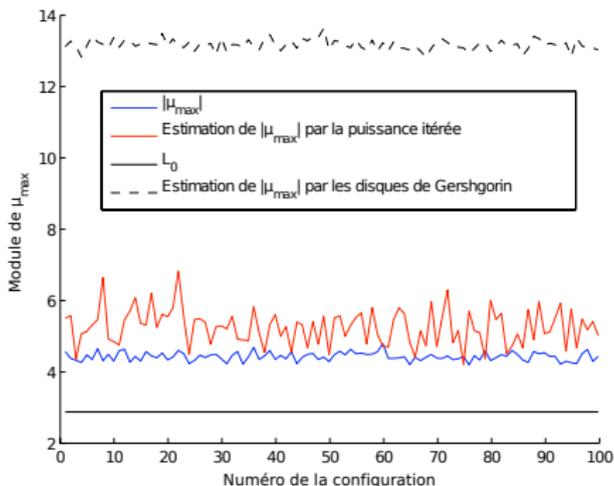
$$|\mu_{max}^0| \simeq \max_{p=1, \dots, M} |\mathbf{Y}_p|$$

On en déduit une estimation de $|\mu_{max}|$:

$$|\mu_{max}| \simeq a \max_{p=1, \dots, M} \left| - \left[\ln \left(\frac{ka}{2} \right) + \gamma \right] + i \frac{\pi}{2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\pi/4} \sum_{1 \leq q \neq p \leq M} \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|$$

Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué

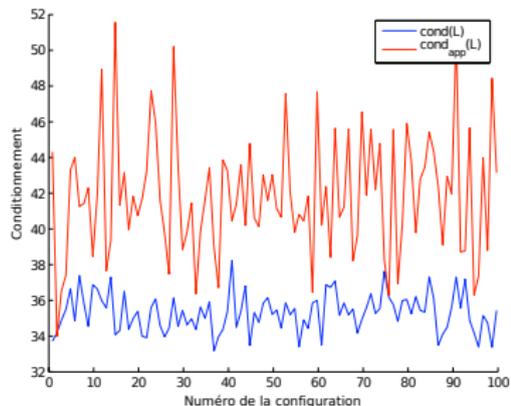
- 100 configurations
- 50 disques unitaires
- $ka = 0.1$
- $kb_{pq} \geq 10$
- $N = 4$



Estimations de $|\mu_{max}|$

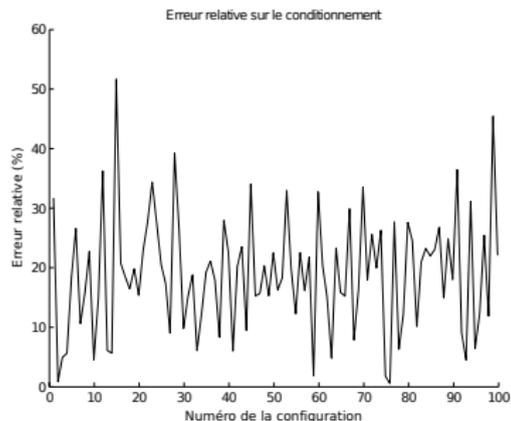
Annexe C : Estimation du conditionnement en milieu dilué

- 100 configurations
- 50 disques unitaires
- $ka = 0.1$
- $kb_{pq} \geq 10$
- $N = 4$



Estimation du conditionnement de \mathbb{L} :

$$\text{cond}(\mathbb{L}) = \left| \frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}} \right|$$



Erreur relative sur le conditionnement de \mathbb{L}
(moyenne : 19%)

Annexes

▶ Étude numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

▶ Moyenne sur les réalisations des simulations de reconstruction d'une source acoustique

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dilué

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dense

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

Milieu dense : $ka \rightarrow 0$ et $kd \rightarrow 0$

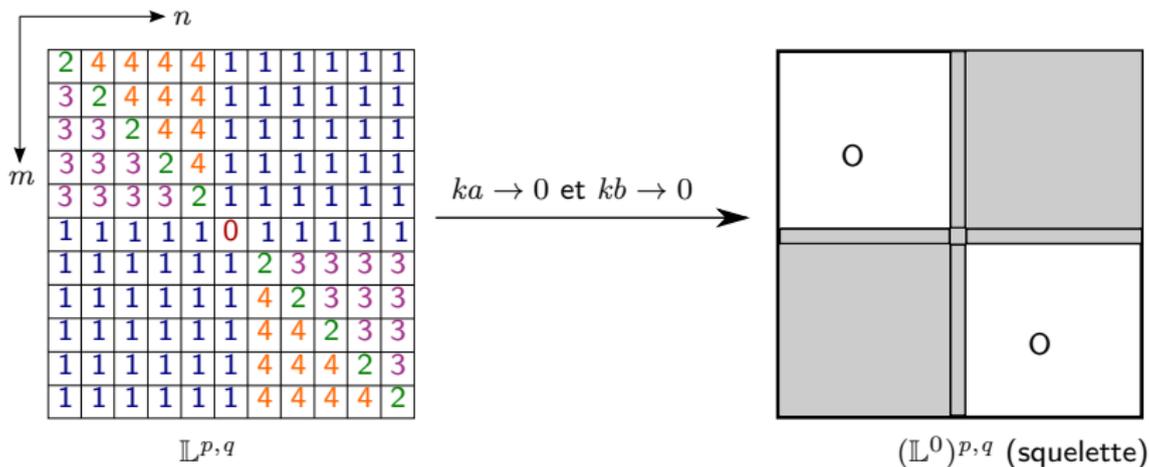
$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \dots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & \mathbb{L}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix}$$

Asymptotique sur les blocs diagonaux :

$$\mathbb{L}^{p,p} \rightarrow (\mathbb{L}^0)^{p,p} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{L}}_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \widehat{\mathbb{L}}_0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{\mathbb{L}}_N \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \widehat{\mathbb{L}}_0 = -a \left[\ln \left(\frac{ka}{2} \right) + \gamma \right] + \frac{i\pi a}{2} \\ \widehat{\mathbb{L}}_m = \frac{a}{2|m|} \end{cases}$$

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

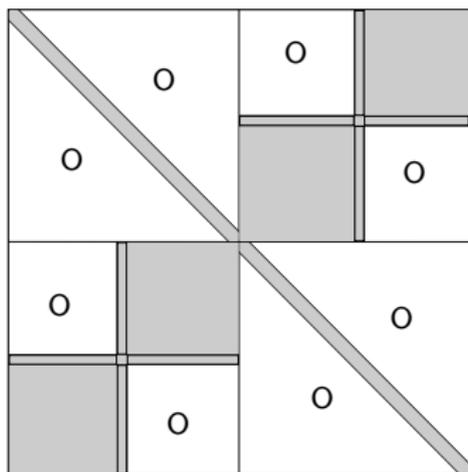
Asymptotique sur les blocs extra-diagonaux :



- Découpage par “zone”
- Asymptotique sur chaque zone

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

$$\Rightarrow \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}^0 = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{1,1} & (\mathbb{L}^0)^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)^{2,1} & (\mathbb{L}^0)^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)^{M,1} & (\mathbb{L}^0)^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{M,M} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{v.p.}(\mathbb{L}) \simeq \text{v.p.}(\mathbb{L}^0)$$



Squelette de \mathbb{L}^0 pour $M = 2$ obstacles

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

Valeur propre de plus petit module μ_{min}

- Vecteur propre approché $\mathbf{X}^{(p,m)}$ de valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|} = a/(2|m|)$
- Estimation d'erreur

$$\frac{\|\mathbb{L}^0 \mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|} \mathbf{X}^{(p,m)}\|_2}{\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}} \leq \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^M \left(\frac{a}{b_{pq} - a} \right)^{|m|}$$

- Estimation de μ_{min} par la valeur propre de la diffraction simple (multiplicité $2M$)

$$\mu_{min} \simeq \widehat{\mathbb{L}}_N = \frac{a}{2N}$$

Exemple

- 100 configurations
- 30 disques
- $ka = 10^{-2}$
- $N = 5$
- Rayon $a = 0.1$
- $0.33 \leq kb_{pq} \leq 4.6$

\implies Erreur relative sur $|\mu_{min}|$: 0.08%.

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

Valeur propre de plus grand module μ_{max}

- Sous-matrice \mathbb{L}^1 des modes d'ordre 0 :

$$\mathbb{L}^1 = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,1} & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{M,M} \end{pmatrix}$$

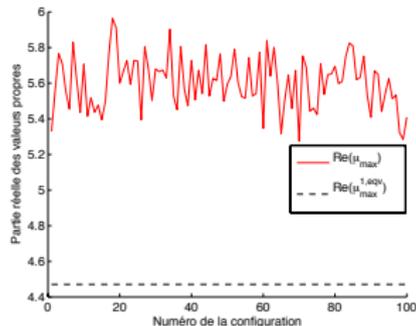
- $\mu_{max} \simeq \mu_{max}^1$ (validation numérique)
- Distance "équivalente" d : $b_{pq} = d$ pour tout $p \neq q$

$$\mathbb{L}^1 \longrightarrow \mathbb{L}_{\text{éq}}^1 = \begin{pmatrix} \ell_0 & \ell_1 & \dots & \ell_1 \\ \ell_1 & \ell_0 & \dots & \ell_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_1 & \ell_1 & \dots & \ell_0 \end{pmatrix}$$

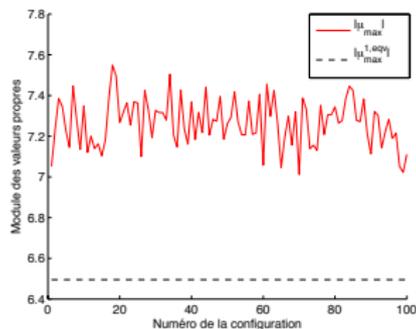
$$\implies \mu_{max} \simeq \mu_{max}^{1,\text{éq}} = \ell_0 + (M-1)\ell_1 = -a \left[\ln \left(\frac{ka}{2} \right) + (M-1) \ln \left(\frac{kd}{2} \right) \right] - aM\gamma + i \frac{M\pi a}{2}$$

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

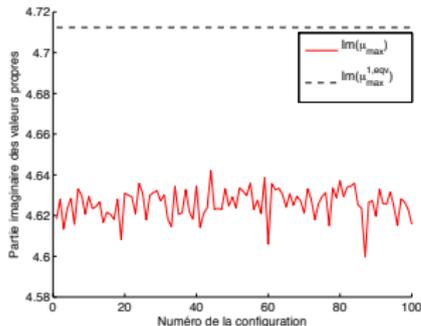
- 100 configurations
- $N = 5$
- 30 disques
- Rayon $a = 0.1$
- $ka = 10^{-2}$
- $0.33 \leq kb_{pq} \leq 4.6$



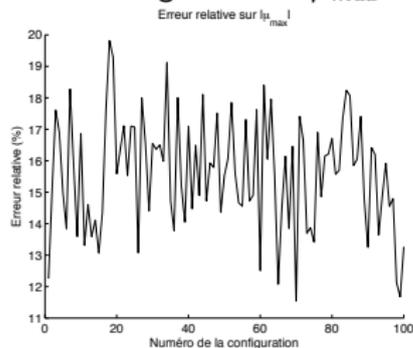
Parties réelles de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1, \text{éq}}$



Modules de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1, \text{éq}}$



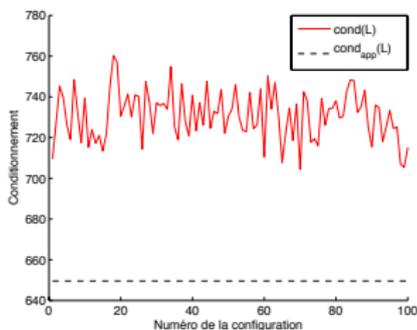
Parties imaginaires de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1, \text{éq}}$



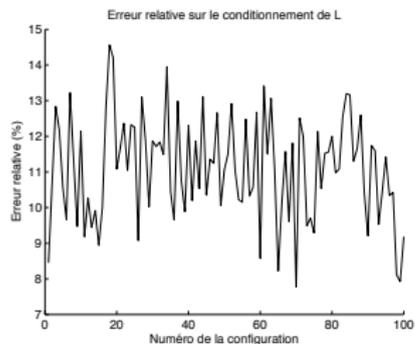
Erreur relative en pourcentage sur $|\mu_{max}|$

Annexe D : Estimation du conditionnement en milieu dense

- 100 configurations
- $N = 5$
- 30 disques
- Rayon $a = 0.1$
- $ka = 10^{-2}$
- $0.33 \leq kb_{pq} \leq 4.6$



Comparaison entre le conditionnement exact et approché



Erreur relative sur le conditionnement en pourcentage (moyenne : 11%)

Annexes

▶ Étude numérique de la méthode DORT acoustique en dimension 2

▶ Moyenne sur les réalisations des simulations de reconstruction d'une source acoustique

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dilué

▶ Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche : milieu dense